

Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 85. Iss. 6

EDITORIAL BOARD

I.G. Goryacheva (editor-in-chief, Professor, RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)

V.G. Baydulov (executive secretary, Ph.D., Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia)

J. Awrejcewicz (Professor, Politechnika Łódzka, Lodz, Poland),

N.N. Bolotnik (Professor, Corresponding RAS member,
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

F.M. Borodich (Professor, Cardiff University, Cardiff, United Kingdom),

A.B. Freidin (Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),

A.M. Gaifullin (Professor, Corresponding RAS member, Central Aerohydrodynamic Institute
(TsAGI), Zhukovsky, Russia),

M.L. Kachanov (Professor, Tufts University, Medford, MA, USA),

Ju.D. Kaplunov (Professor, Keele University, Staffordshire, United Kingdom),

A.A. Korobkin (Professor, University of East Anglia, Norwich, United Kingdom),

A.M. Kovalev (Professor, NASU member, Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Donetsk, Ukraine),

V.V. Kozlov (Professor, RAS member, Vice-President RAS, Moscow, Russia),

A.M. Krivtsov (Professor, Corresponding RAS member, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic
University, St. Petersburg, Russia),

A.G. Kulikovskii (Professor, RAS member, Steklov Institute of Mathematics, RAS, Moscow, Russia),

Yu.Yu. Makhovskaya (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

N.F. Morozov (Professor, RAS member, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia),

T.J. Pedley (Professor, FRS member, University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom),

F. Pfeiffer (Professor, FRS, Foreign RAS member,

Technische Universität München, Munich, Germany),

V.V. Pukhnachev (Professor, Corresponding RAS member, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,
RAS, Novosibirsk, Russia),

G. Rega (Professor, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy),

S.A. Reshmin (Professor, Corresponding RAS member,

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

V.A. Sabelnikov (Professor, The French Aerospace Lab ONERA, Paris, France),

Ye.I. Shifrin (Professor, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

F.E. Udvardi (Professor, University of Southern California, Los Angeles, CA, USA),

S.E. Yakush (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),

V.F. Zhuravlev (Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS,
Moscow, Russia),

K. Zimmermann (Professor, Technische Universität Ilmenau, Ilmenau, Germany)

Editorial advisory board: N.I. Amelkin, I.M. Anan'evskii, A.S. Andreev, V.A. Babeshko,
A.M. Formal'skii, Yu.P. Gupalo, A.P. Ivanov, A.N. Kraiko, A.P. Markeev, S.A. Nazarov,
V.S. Patsko, A.G. Petrov, N.N. Rogacheva, V.V. Sazonov, A.P. Seyranian, I.A. Soldatenkov,
S.Ya. Stepanov, G.A. Tirs'kii, V.N. Tkhai

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

November–December

Учредитель: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Редакция:

В.Г. Байдулов – отв. секретарь

Е.В. Есина – зав. редакцией

Адрес редакции: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245

Телефон редакции: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

На сайте Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала "Прикладная математика и механика" в каталоге Роспечати 70706

ISSN 0032-8235

Founder: Russian Academy of Sciences

The Editorial Staff:

V.G. Baydulov – executive secretary

E.V. Esina – head of Editorial office (manager editor)

The Editorial Board Address: 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia

Phone: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL : <http://pmm.ipmnet.ru>

The subscription index in Rospechat catalogue 70706

ISSN 0021-8928

СОДЕРЖАНИЕ

Стабилизация двойного перевернутого маятника, установленного на качелях SEESAW <i>А. М. Формальский, П. А. Кручинин, К. Л. Войцицкая</i>	683
Оптимальное по быстродействию перемещение платформы с осцилляторами <i>О. Р. Каюмов</i>	699
Теория новых гироскопических датчиков семейства “обобщенный” маятник Фуко, функционирующих на двух рабочих модах <i>С. Е. Переляев</i>	719
Угол примыкания звуковой линии к обтекаемой поверхности <i>Г. Б. Сизых</i>	734
Интегральный инвариант течений идеального газа за отошедшим скачком уплотнения <i>Г. Б. Сизых</i>	742
Автомодельные течения вязкого газа в плоском канале при произвольной зависимости коэффициентов переноса от температуры <i>М. А. Брутян, У. Г. Ибрагимов</i>	748
Использование преобразования Дородницына для анализа тепло- и массопереноса во вращающихся потоках <i>В. Д. Борисевич, Е. П. Потанин</i>	758
Последовательное трехосное динамическое обжатие параллелепипеда <i>Д. В. Георгиевский</i>	772
Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства <i>Л. А. Толоконников, Д. Ю. Ефимов</i>	779
Установившаяся ползучесть узкой мембраны внутри жесткой низкой матрицы <i>А. М. Локощенко, В. В. Терауд, А. Ф. Ахметгалеев</i>	792
Алфавитный указатель	813

C O N T E N T S

Stabilization of double inverted pendulum installed on SEESAW <i>A. M. Formalskii, P. A. Kruchinin, K. L. Voitsitskaya</i>	683
Time-optimal movement of platform with oscillators <i>O. R. Kayumov</i>	699
Theory of new gyroscopic sensors family “generalized” pendulum Foucault, operating on two working modes <i>S. E. Perelyayev</i>	719
The abutment angle of the sonic line with respect to the streamlined surface <i>G. B. Sizykh</i>	734
Integral invariant of ideal gas flows behind a detached bow shock <i>G. B. Sizykh</i>	742
Two-dimensional self-similar flow in a channel of viscous gas with transfer coefficients arbitrarily depending on temperature <i>M. A. Brutyan, U. G. Ibragimov</i>	748
Application of the Dorodnitsyn transformation for analysis of heat and mass transfer in rotating flows <i>V. D. Borisevich, E. P. Potanin</i>	758
Sequential triaxial dynamic compression of a parallelepiped <i>D. V. Georgievskii</i>	772
Diffraction of sound waves on an elastic cylinder with an inhomogeneous coating near the surface of an elastic halfspace <i>L. A. Tolokonnikov, D. Yu. Efimov</i>	779
Second state creep of a long narrow rectangular membrane inside a rigid low matrix with a piecewise constant dependence of transverse pressure on time <i>A. M. Lokoshchenko, V. V. Teraud, A. F. Akhmetgaleev</i>	792

УДК 531.53

**СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВОЙНОГО ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА,
УСТАНОВЛЕННОГО НА КАЧЕЛЯХ SEESAW**© 2021 г. А. М. Формальский^{1,*}, П. А. Кручинин^{1,**}, К. Л. Войцickaя¹¹ *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия***e-mail: formal@imec.msu.ru****e-mail: pkruch@mech.math.msu.su*

Поступила в редакцию 07.04.2021 г.

После доработки 24.08.2021 г.

Принята к публикации 10.09.2021 г.

Рассматривается задача о синтезе закона управления, стабилизирующего двойной перевернутый маятник, установленный на качелях seesaw. Движение такого маятника рассматривается в вертикальной плоскости. Качели seesaw представляют собой сегмент цилиндра, ось которого горизонтальна. Этот цилиндрический сегмент может совершать колебания, перекачиваясь по горизонтальной опорной поверхности без проскальзывания. Нижнее (первое) звено маятника крепится к качелям seesaw при помощи цилиндрического шарнира. Ось этого шарнира параллельна оси цилиндра и оси межзвенного шарнира. Ограниченный по абсолютной величине управляющий момент приложен в межзвенном шарнире. Описываемая система имеет три степени свободы и единственное управляющее воздействие. В отсутствие управления, система имеет неустойчивое положение равновесия, в котором оба звена маятника направлены вертикально вверх, а качели не наклонены. Управление, стабилизирующее желаемое неустойчивое положение равновесия, строится в виде обратной связи по двум “неустойчивым” жордановым переменным разомкнутой линеаризованной системы так, чтобы область притяжения системы была, по возможности, максимальной. Рассмотрены некоторые свойства области управляемости и области притяжения в этой системе. Приводятся результаты численных исследований.

Ключевые слова: двойной перевернутый маятник, качели seesaw, область управляемости, область притяжения, стабилизация

DOI: 10.31857/S0032823521060059

Изучаемая в настоящей статье задача стабилизации двухзвенного перевернутого маятника, установленного на качелях seesaw, представляет интерес, прежде всего, с точки зрения теории управления неустойчивыми механическими системами в условиях дефицита количества управляющих воздействий и при наложенных на них ограничений [1, 2]. В подобных задачах одной из целей может быть синтез управления, при котором реализуется максимально возможная область притяжения неустойчивого (в отсутствие управления) состояния равновесия. В этих условиях представляется перспективным подход, который предполагает использование всех ресурсов управления для подавления неустойчивых мод. Результаты решения рассматриваемой здесь задачи могут представить интерес также при изучении процессов поддержания вертикальной позы человека. Одним из движений, требующих подобного анализа, является удержание человеком равновесия на подвижной опоре в виде пресс-папье. Такую опору называют также качелями seesaw. Соответствующий тест в настоящее время

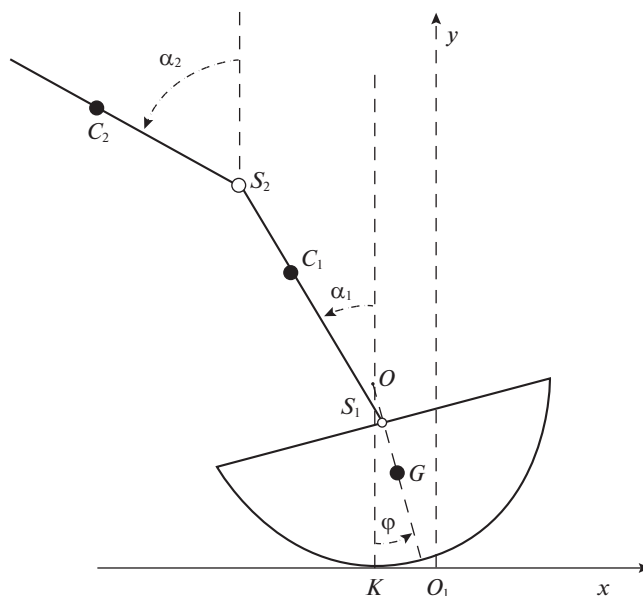


Рис. 1. Модель двойного маятника на seesaw.

приобрел популярность и используется в биомеханических исследованиях и в спортивной медицине [3–7]. В работах [8, 9] рассматривается так называемая “голеностопная стратегия”, когда поддержание вертикальной позы человека осуществляется за счет моментов, приложенных в голеностопных суставах. В настоящей статье исследуется задача стабилизации установленного на seesaw двухзвенного маятника с управляющим моментом, приложенным в межзвенном шарнире. Если считать, что межзвенный шарнир двухзвенника моделирует два тазобедренных сустава, то подобная система касается так называемой “тазобедренной стратегии” [10–12].

1. Математическая модель двухзвенного маятника, закрепленного шарнирно на качелях seesaw. Обозначим через m массу сегмента цилиндра (качелей seesaw). Сегмент имеет плоскость симметрии, которая содержит ось цилиндра, обозначенную буквой O (см. рис. 1). Будем считать, что масса сегмента распределена по нему равномерно, при этом его центр масс G располагается в плоскости симметрии, как показано на рис. 1. Цилиндрическая поверхность сегмента касается плоской горизонтальной опорной поверхности вдоль прямой линии, обозначенной буквой K . В плоскости симметрии цилиндрического сегмента, на его верхней поверхности при помощи цилиндрического шарнира S_1 закреплен двойной перевернутый маятник с массами звеньев m_1 и m_2 . Оси обоих шарниров параллельны оси цилиндра O . Центры масс C_1 и C_2 звеньев удалены от шарниров S_1 и S_2 на расстояния r_1 и r_2 соответственно.

Рассмотрим движение системы в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра и содержащей маятник. В этой плоскости контур пресс-папье имеет форму сегмента круга, как показано на рис. 1. Точки G и S_1 лежат на одном радиусе цилиндра (см. рис. 1), расположенном в плоскости симметрии сегмента. Расстояние OK равно радиусу R цилиндра. Примем следующие обозначения для величин, показанных на рис. 1: $OS_1 = h$, $OG = r$, $S_1S_2 = l$. Будем считать сегмент цилиндра таким, что центр O лежит вне его. Через ρ обозначим радиус инерции качелей seesaw относительно оси, парал-

лельной оси O и проходящей через центр масс G качелей. Соответствующие радиусы инерции звеньев относительно их центров масс обозначим через ρ_1 и ρ_2 .

Будем полагать, что качели перекатываются по горизонтальной поверхности без проскальзывания и отрыва. В этом случае система имеет три степени свободы. Для ее описания введем обобщенные координаты: α_1 и α_2 — углы отклонения звеньев маятника от вертикали и φ — угол наклона платформы качелей (см. рис. 1).

Кинетическую энергию T системы запишем в следующем виде:

$$T = \frac{1}{2} \left\{ m \left[V(r, \varphi) + \rho^2 \right] \dot{\varphi}^2 + m_1 \rho_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + m_2 \rho_2^2 \dot{\alpha}_2^2 + \right. \\ \left. + m_1 \left[V(h, \varphi) \dot{\varphi}^2 + r_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + 2r_1 \dot{\varphi} \dot{\alpha}_1 U(\varphi, \alpha_1) \right] + \right. \\ \left. + m_2 \left[V(h, \varphi) \dot{\varphi}^2 + l^2 \dot{\alpha}_1^2 + 2l \dot{\varphi} \dot{\alpha}_1 U(\varphi, \alpha_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + r_2^2 \dot{\alpha}_2^2 + 2lr_2 \dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + 2r_2 \dot{\varphi} \dot{\alpha}_2 U(\varphi, \alpha_2) \right] \right\}$$

Здесь приняты обозначения

$$V(z, \varphi) = R^2 + z^2 - 2Rz \cos \varphi$$

$$U(\varphi, \alpha_i) = R \cos \alpha_i - h \cos(\varphi - \alpha_i), \quad i = 1, 2$$

Потенциальную энергию Π сил тяжести и виртуальную работу δW управляющего момента M в шарнире S_2 запишем в виде

$$\Pi = mg(R - r \cos \varphi) + m_1 g(R - h \cos \varphi + r_1 \cos \alpha_1) + \\ + m_2 g(R - h \cos \varphi + l \cos \alpha_1 + r_2 \cos \alpha_2) \\ \delta W = Q(\delta \alpha_2 - \delta \alpha_1)$$

Уравнения Лагранжа 2-го рода для рассматриваемой системы можно записать в удобной матричной форме по аналогии с уравнениями в [1, 2, 8, 13]

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\psi}) \ddot{\boldsymbol{\psi}} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\psi}) \dot{\boldsymbol{\psi}}^2 + \mathbf{C} \sin \boldsymbol{\psi} = \mathbf{D} Q \quad (1.1)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{Bmatrix} \varphi \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{\psi}}^2 = \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}^2 \\ \dot{\alpha}_1^2 \\ \dot{\alpha}_2^2 \end{Bmatrix}, \quad \sin \boldsymbol{\psi} = \begin{Bmatrix} \sin \varphi \\ \sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{A}(\boldsymbol{\psi}) = \begin{Bmatrix} A_{11}(\varphi) & wU(\varphi, \alpha_1) & m_2 r_2 U(\varphi, \alpha_2) \\ wU(\varphi, \alpha_1) & m_1 (r_1^2 + \rho_1^2) + M_2 l^2 & m_2 l r_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \\ m_2 r_2 U(\varphi, \alpha_2) & m_2 l r_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) & m_2 (r_2^2 + \rho_2^2) \end{Bmatrix} \\ \mathbf{C} = \begin{Bmatrix} (m_1 + m_2)h + mr & 0 & 0 \\ 0 & -m_1 r_1 - m_2 l & 0 \\ 0 & 0 & -m_2 r_2 \end{Bmatrix} g \\ \mathbf{F}(\boldsymbol{\psi}) = \begin{Bmatrix} (m_1 + m_2) R h \sin \varphi & -wU_1(\varphi, \alpha_1) & m_2 r_2 U_1(\varphi, \alpha_2) \\ -(m_1 + m_2) r_1 h \sin(\alpha_1 - \varphi) & 0 & m_2 l r_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \\ m_2 h r_2 \sin(\alpha_2 - \varphi) & -m_2 l r_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) & 0 \end{Bmatrix}, \quad (1.2)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11}(\varphi) &= (m_1 + m_2)V(h, \varphi) + m[V(r, \varphi) + \rho^2] \\ U_1(\varphi, \alpha_i) &= R \sin \alpha_i - h \sin(\varphi - \alpha_i), \quad i = 1, 2 \\ w &= m_1 r_1 + m_2 l \end{aligned}$$

Представим момент Q , действующий в шарнире S_2 , в виде суммы управляющего момента M , развиваемого приводом, и момента сил вязкого трения с коэффициентом k :

$$Q = M + k(\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1)$$

Тогда уравнение (1.1) примет вид:

$$\mathbf{A}(\psi)\ddot{\psi} + \mathbf{B}\dot{\psi} + \mathbf{F}(\psi)\dot{\psi}^2 + \mathbf{C}\sin\psi = \mathbf{D}M, \quad (1.3)$$

где

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

В дальнейшем будем рассматривать систему с управляющим моментом M , ограниченным по абсолютной величине:

$$|M| \leq M_0, \quad M_0 = \text{const} \quad (1.5)$$

2. Линеаризованные уравнения движения. При $M = 0$ система (1.3) имеет тривиальное решение

$$\varphi \equiv \alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv 0, \quad (2.1)$$

которое описывает неустойчивое положение равновесия, когда платформа качелей горизонтальна, а оба звена перевернутого двухзвенника вертикальны. Предполагая, что углы φ , α_1 , α_2 и скорости $\dot{\varphi}$, $\dot{\alpha}_1$, $\dot{\alpha}_2$ малы, линеаризуем уравнение (1.3) в окрестности состояния равновесия (2.1). Линеаризованные уравнения движения запишем в матричном виде следующим образом:

$$\mathbf{A}\ddot{\psi} + \mathbf{B}\dot{\psi} + \mathbf{C}\psi = \mathbf{D}M \quad (2.2)$$

Здесь матрицы $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ сохраняют вид (1.2) и (1.4), а матрица инерции $\mathbf{A}(\psi)$ принимает вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11}(0) & (m_1 r_1 + m_2 l)(R - h) & m_2 r_2(R - h) \\ (m_1 r_1 + m_2 l)(R - h) & m_1(r_1^2 + \rho_1^2) + m_2 l^2 & m_2 l r_2 \\ m_2 r_2(R - h) & m_2 l r_2 & m_2(r_2^2 + \rho_2^2) \end{pmatrix}$$

Величина $A_{11}(0)$ имеет вид

$$A_{11}(0) = (m_1 + m_2)(R - h)^2 + m[(R - r)^2 + \rho^2]$$

3. Структура спектра разомкнутой системы. Рассмотрим линеаризованную систему (2.2) в отсутствие трения и управления, т.е. при $k = 0$ и $M = 0$. Характеристическое уравнение системы (2.2) можно записать, пользуясь соотношением

$$\det(\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{C}) = 0 \quad (3.1)$$

Его левая часть представляет собой бикубический полином, т.е. уравнение (3.1) имеет вид

$$a_0 \lambda^6 + a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^2 + a_3 = 0 \quad (3.2)$$

Определим расположение трех корней кубического уравнения

$$a_0 \mu^3 + a_1 \mu^2 + a_2 \mu + a_3 = 0 \quad (3.3)$$

полученного из (3.2) при замене переменных: $\mu = \lambda^2$. Так как (3.3) — характеристическое уравнение консервативной механической системы, то все его корни действительны [14]. Матрица **A** кинетической энергии является положительно определенной, определитель матрицы **C** положителен, следовательно,

$$a_0 = \det \mathbf{A} > 0, \quad a_3 = \det \mathbf{C} > 0 \quad (3.4)$$

Из неравенства $a_3 \neq 0$ (см. (3.4)) следует, что уравнение (3.3) (а значит и уравнение (3.2)) не имеет нулевых корней. При этом, как следует из неравенств (3.4), уравнение (3.3) имеет либо один, либо три отрицательных корня. Покажем, что трех отрицательных корней уравнение (3.3) иметь не может. Действительно, наложим на систему (1.1) связь $\varphi = 0$, тогда механическая система превратится в двухзвенный перевернутый маятник с неподвижной точкой подвеса. Линеаризованная модель такого маятника имеет два положительных собственных значения. Но собственные значения системы, стесненной новой связью, перемежаются с собственными значениями системы в отсутствие этой связи [14]. Поэтому если бы уравнение (3.3) имело три отрицательных корня, то после наложения связи $\varphi = 0$, система имела бы два отрицательных собственных значения, чего не может быть. Следовательно, уравнение (3.3) имеет один отрицательный и два положительных корня. А значит уравнение (3.2) имеет пару чисто мнимых корней, два отрицательных и два положительных.

Если коэффициент вязкого трения $k \neq 0$, но достаточно мал, то характеристическое уравнение линейной системы (2.2) имеет, как и при $k = 0$, два отрицательных и два положительных корня. Силы вязкого трения, приложенные в шарнире S_2 , являются диссипативными. Однако при этих силах имеет место лишь частичная диссипация и степень неустойчивости при $k \neq 0$ такая же, как и при $k = 0$ [15], т.е. равна двум. В этом случае чисто мнимые при $k = 0$ корни могут либо остаться таковыми при добавлении вязкого трения, либо стать комплексно-сопряженными с отрицательной действительной частью. Ниже будет численно показано, что с добавлением вязкого трения при рассматриваемых значениях параметров системы чисто мнимые корни “превращаются” в комплексно-сопряженные с отрицательной действительной частью.

4. Управляемость системы. Для анализа управляемости системы (2.2) в отсутствие трения (при $k = 0$) воспользуемся критерием управляемости Хаутуса для систем второго порядка [16]. В соответствии с этим критерием для управляемости системы необходимо и достаточно, чтобы для всех комплексных значений λ выполнялось условие

$$\text{rank}(\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{C} \mathbf{D}) = 3 \quad (4.1)$$

Так как собственные числа системы удовлетворяют характеристическому уравнению (3.1), то для управляемости необходимо и достаточно, чтобы при каждом из собственных чисел системы был полным ранг хотя бы одной из трех матриц, образованных двумя столбцами матрицы $\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{C}$ и столбцом **D**. Тогда достаточное условие управляемости заключается в неравенстве нулю определителя матрицы, составленной из трех последних столбцов матрицы, фигурирующей в соотношении (4.1). Для выписанных выше матриц **A**, **C** и **D** этот определитель имеет вид

$$\lambda^4 \left[m_1 l r_2 + m_2 l \rho_2^2 + m_1 (r_1 \rho_2^2 - r_2 \rho_1^2 + r_1 r_2^2 - r_2 r_1^2) \right]$$

Характеристическое уравнение (3.2) не имеет нулевых корней. В этом случае система (2.2) будет управляемой при условии

$$m_1 l r_1 r_2 + m_2 l \rho_2^2 + m_1 (r_1 \rho_2^2 - r_2 \rho_1^2 + r_1 r_2^2 - r_2 r_1^2) \neq 0 \quad (4.2)$$

Это условие выполняется, в частности, для антропоморфных значений параметров системы, заданных в соответствии с работой [17], и при ограничениях на соотношения размеров seesaw, заданных выше. При этом система (2.2) в отсутствие трения управляема. Поскольку трение и управление входят в уравнения движения в виде суммы, наличие трения не влияет на управляемость системы.

5. Область управляемости системы в жордановых переменных. Запишем линейную систему (2.2) шестого порядка в форме Коши:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}\mathbf{y} + \mathbf{L}M \quad (5.1)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \Psi \\ \dot{\Psi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{D} \end{pmatrix}$$

Трехмерный столбец Ψ выписан через угловые переменные системы в (1.2), $\mathbf{I}$ – единичная матрица третьего порядка. Равенство

$$\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

описывает в новых переменных равновесное положение (2.1) исходной системы при $M = 0$.

С помощью невырожденного преобразования

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{z} \quad (5.2)$$

система (5.1) может быть приведена к жордановым переменным. В этих переменных она будет иметь вид

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{z} + \mathbf{K}M, \quad (5.3)$$

где $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{H}$ – жорданова матрица, а $\mathbf{K} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{L}$ – столбец коэффициентов при управляющем моменте M . Будем считать, что первые две переменные z_1 и z_2 в столбце $\mathbf{z}$ отвечают двум действительным положительным собственным значениям λ_1 и λ_2 , т.е. они удовлетворяют двум первым скалярным уравнениям системы (5.3), которые имеют вид

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + K_1 M, \quad \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 + K_2 M \quad (5.4)$$

В дальнейшем для определенности будем считать, что

$$\lambda_1 > \lambda_2 > 0 \quad (5.5)$$

Обозначим пространство двух переменных z_1, z_2 через $\mathbf{z}_u$. Пространство остальных четырех жордановых переменных z_3, z_4, z_5, z_6 обозначим через $\mathbf{z}_s$. Собственные значения, отвечающие этим четырем жордановым переменным, расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости.

Построим область управляемости подсистемы (5.4) при ограничении (1.5), наложенном на управляющий момент M .

При управлении $M \equiv -M_0$ подсистема (5.4) имеет неустойчивую стационарную точку D_1 , координаты которой

$$z_{11} = \frac{K_1}{\lambda_1} M_0, \quad z_{21} = \frac{K_2}{\lambda_2} M_0 \quad (5.6)$$

При управлении $M \equiv M_0$ подсистема (5.4) имеет неустойчивую стационарную точку D_2 с координатами

$$z_{12} = -\frac{K_1}{\lambda_1} M_0, \quad z_{22} = -\frac{K_2}{\lambda_2} M_0 \quad (5.7)$$

Точки (5.6) и (5.7) симметричны относительно начала координат.

Обозначим через U область управляемости подсистемы (5.4), т.е. множество начальных состояний $z_1(0)$, $z_2(0)$, из которых она может быть приведена в начало координат $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ при помощи ограниченного условием (1.5) управляющего воздействия $M(t)$. Граница ∂U этого множества состоит из двух проходящих через точки (5.6) и (5.7) интегральных траекторий системы (5.4), полученных при $M = \pm M_0$ [1, 2, 18]. Уравнения одной из этих траекторий, полученные при $M \equiv -M_0$, имеют вид

$$z_1(t) = -\frac{K_1}{\lambda_1} M_0 (2e^{\lambda_1 t} - 1), \quad z_2(t) = -\frac{K_2}{\lambda_2} M_0 (2e^{\lambda_2 t} - 1), \quad (-\infty < t \leq 0) \quad (5.8)$$

Эти уравнения записаны в параметрическом виде — параметр t изменяется в пределах: $-\infty < t \leq 0$. Траектория (5.8) начинается при $t = -\infty$ в точке D_1 и заканчивается при $t = 0$ в точке D_2 .

Исключив из системы (5.8) время t , получим уравнение, связывающее переменные z_1 и z_2 “напрямую”

$$\left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda_1}{K_1 M_0} z_1 \right) \right]^{\lambda_2} = \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda_2}{K_2 M_0} z_2 \right) \right]^{\lambda_1} \quad (5.9)$$

Уравнения другой траектории, полученные при $M \equiv M_0$, имеют вид

$$z_1(t) = \frac{K_1}{\lambda_1} M_0 (2e^{\lambda_1 t} - 1), \quad z_2(t) = \frac{K_2}{\lambda_2} M_0 (2e^{\lambda_2 t} - 1) \quad (-\infty < t \leq 0) \quad (5.10)$$

Траектория (5.10) начинается при $t = -\infty$ в точке D_2 и заканчивается при $t = 0$ в точке D_1 .

Исключив из системы (5.10) время t , получим уравнение, связывающее “напрямую” переменные z_1 и z_2 на второй половине границы ∂U

$$\left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda_1}{K_1 M_0} z_1 \right) \right]^{\lambda_2} = \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda_2}{K_2 M_0} z_2 \right) \right]^{\lambda_1} \quad (5.11)$$

Область управляемости U — симметричное относительно начала координат, открытое множество с двумя угловыми точками на границе. Уравнения (5.8), (5.10) и эквивалентные им уравнения (5.9), (5.11) описывают границу области управляемости не только в двумерном пространстве переменных z_u , но и в шестимерном пространстве переменных z системы (5.3), поскольку четырем компонентам вектора z_s отвечают собственные значения с отрицательными действительными частями [18].

Граница ∂U области управляемости U построена на плоскости двух переменных z_1 , z_2 при некоторых численных значениях параметров системы в разделе 8, посвященном численным исследованиям.

Разрешим уравнение (5.2) относительно шестимерного вектора z

$$z = G y, \quad G = H^{-1} \quad (5.12)$$

Первые два скалярных уравнения системы (5.12), отвечающие переменным z_1 и z_2 , имеют вид

$$\begin{aligned} z_1 &= \sum_{j=1}^6 g_{1j} y_j = g_{11}\varphi + g_{12}\alpha_1 + g_{13}\alpha_2 + g_{14}\dot{\varphi} + g_{15}\dot{\alpha}_1 + g_{16}\dot{\alpha}_2 \\ z_2 &= \sum_{j=1}^6 g_{2j} y_j = g_{21}\varphi + g_{22}\alpha_1 + g_{23}\alpha_2 + g_{24}\dot{\varphi} + g_{25}\dot{\alpha}_1 + g_{26}\dot{\alpha}_2 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Здесь через g_{ij} ($i = 1, 2$; $j = 1, \dots, 6$) обозначены компоненты первых двух строк матрицы $\mathbf{G}$.

Рассмотрим трехмерное подпространство переменных $\varphi, \alpha_1, \alpha_2$, положив скорости $\dot{\varphi}, \dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2$ равными нулю

$$\dot{\varphi} = 0, \quad \dot{\alpha}_1 = 0, \quad \dot{\alpha}_2 = 0$$

Тогда соотношения (5.13) принимают вид

$$z_1 = g_{11}\varphi + g_{12}\alpha_1 + g_{13}\alpha_2, \quad z_2 = g_{21}\varphi + g_{22}\alpha_1 + g_{23}\alpha_2 \quad (5.14)$$

Подставив координаты z_1 и z_2 какой-то точки $(z_1, z_2) \in \partial U$ в левые части уравнений (5.14), получим уравнения двух плоскостей, расположенных в трехмерном пространстве переменных — углов $\varphi, \alpha_1, \alpha_2$. Пересечение этих двух плоскостей представляет собой прямую линию. Следовательно, каждой точке $(z_1, z_2) \in \partial U$, отвечает в пространстве трех переменных $\varphi, \alpha_1, \alpha_2$ прямая линия. Все эти прямые, параллельные одна другой, образуют цилиндрическую поверхность, направляющая которой представляет собой “образ” границы ∂U . Нетрудно выписать уравнения, которым удовлетворяют точки $(\varphi, \alpha_1, \alpha_2)$ этой направляющей.

6. Синтез управления, стабилизирующего неустойчивое положение равновесия. При $M \equiv 0$ система уравнений (5.4) имеет решение

$$z_1 \equiv 0, \quad z_2 \equiv 0 \quad (6.1)$$

Это тривиальное решение при $M \equiv 0$ неустойчиво, поскольку собственные значения λ_1 и λ_2 системы (5.4) положительны (см. неравенства (5.5)).

С целью стабилизации решения (6.1) системы (5.4) при учете ограничения (1.5) на управляющий момент M построим линейную обратную связь по неустойчивым переменным z_1 и z_2 :

$$M = \begin{cases} -M_0 & \text{при } \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 < -M_0 \\ \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 & \text{при } |\gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2| \leq M_0 \\ M_0 & \text{при } \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 > M_0 \end{cases} \quad (6.2)$$

Постоянные коэффициенты γ_1 и γ_2 в выражении (6.2) выберем так, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость решения (6.1).

Запишем уравнение прямой, проходящей через угловые точки D_1 и D_2 границы ∂U области управляемости U :

$$\frac{K_2}{\lambda_2} z_1 - \frac{K_1}{\lambda_1} z_2 = 0$$

В законе управления (6.2) выберем коэффициенты обратной связи γ_1 и γ_2 следующим образом:

$$\gamma_1 = \gamma \frac{K_2}{\lambda_2}, \quad \gamma_2 = -\gamma \frac{K_1}{\lambda_1} \quad (6.3)$$

где γ — подлежащая определению величина, которую в дальнейшем будем называть “общий коэффициент обратной связи”. Выражение (6.2) для управления M при обозначениях (6.3) можно записать следующим образом:

$$M = \begin{cases} -M_0 & \text{при } M_* < -M_0 \\ M_* & \text{при } |M_*| \leq M_0 \\ M_0 & \text{при } M_* > M_0 \end{cases}, \quad (6.4)$$

где

$$M_* = \gamma \left(\frac{K_2}{\lambda_2} z_1 - \frac{K_1}{\lambda_1} z_2 \right) \quad (6.5)$$

Система уравнений (5.4) при подстановке в нее выражения для линейной обратной связи $M = M_*$ (см. формулу (6.5)) принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \left(\lambda_1 + \frac{\gamma K_1 K_2}{\lambda_2} \right) z_1 - \frac{\gamma K_1^2}{\lambda_1} z_2 \\ \dot{z}_2 &= \frac{\gamma K_2^2}{\lambda_2} z_1 + \left(\lambda_2 - \frac{\gamma K_1 K_2}{\lambda_1} \right) z_2 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Характеристическое уравнение системы (6.6) записывается следующим образом:

$$\lambda^2 + \lambda \left[\gamma K_1 K_2 \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) - \lambda_1 - \lambda_2 \right] + \lambda_1 \lambda_2 = 0 \quad (6.7)$$

Нулевое решение (6.1) системы (6.6) асимптотически устойчиво при условии, что корни характеристического уравнения (6.7) располагаются в левой полуплоскости комплексной плоскости. Для этого необходимо и достаточно, чтобы коэффициент при первой степени величины λ в уравнении (6.7) был положительным. Учитывая неравенства (5.5), заключаем, что коэффициент обратной связи γ должен удовлетворять условию

$$|\gamma| > \gamma_*, \quad \text{sign } \gamma = -\text{sign}(K_1 K_2) \quad (6.8)$$

где

$$\gamma_* = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2)}{|K_1 K_2| (\lambda_1 - \lambda_2)}$$

Выражение (6.5) для момента M_* можно переписать в исходных переменных следующим образом:

$$\begin{aligned} M_* &= \gamma \left[\left(\frac{K_2}{\lambda_2} g_{11} - \frac{K_1}{\lambda_1} g_{21} \right) \varphi + \left(\frac{K_2}{\lambda_2} g_{12} - \frac{K_1}{\lambda_1} g_{22} \right) \alpha_1 + \left(\frac{K_2}{\lambda_2} g_{13} - \frac{K_1}{\lambda_1} g_{23} \right) \alpha_2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{K_2}{\lambda_2} g_{14} - \frac{K_1}{\lambda_1} g_{24} \right) \dot{\varphi} + \left(\frac{K_2}{\lambda_2} g_{15} - \frac{K_1}{\lambda_1} g_{25} \right) \dot{\alpha}_1 + \left(\frac{K_2}{\lambda_2} g_{16} - \frac{K_1}{\lambda_1} g_{26} \right) \dot{\alpha}_2 \right] \end{aligned}$$

7. Область притяжения системы. Система второго порядка (5.4) не может быть приведена в состояние равновесия (6.1) при помощи ограниченного условием (1.5) управления, если ее начальное состояние расположено вне построенной выше области управляемости U . Поэтому область притяжения P состояния равновесия (6.1) системы (5.4) при ограниченном управлении (6.4), (6.5) принадлежит ограниченной на плоскости $z_1 z_2$ области управляемости U : $P \subset U$.

Покажем, что границей области притяжения P является предельный цикл — периодическая траектория системы (5.4), (6.4), (6.5). Нетрудно убедиться в том, что в

области U начало координат (6.1) является единственным на плоскости переменных z_1, z_2 состоянием равновесия системы (5.4) с управлением (6.4), (6.5). При значениях коэффициента обратной связи γ , удовлетворяющих условию (6.8), начало координат (6.1) является притягивающей точкой, т.е. асимптотически устойчивым состоянием равновесия системы (5.4), (6.4), (6.5). Поэтому существует такая окрестность Q_{z_1, z_2} точки (6.1), что все решения системы (5.4), (6.4), (6.5), начинающиеся из точек этой окрестности Q_{z_1, z_2} , стремятся при $t \rightarrow \infty$ в начало координат (6.1). Выберем какую-то точку из окрестности Q_{z_1, z_2} и при условии (6.8) построим в *обратном времени* решение системы (5.4), (6.4), (6.5), начинающееся из этой точки. Траектория, отвечающая этому решению, остается все время в *ограниченной* области управляемости U . При этом она не стремится к какому-нибудь состоянию равновесия, а значит [19] при $t \rightarrow -\infty$ она стремится к предельному циклу, наматываясь на него изнутри. Этот предельный цикл охватывает единственную особую точку системы – начало координат [19, 20]. Построенный цикл и представляет собой границу области притяжения P . Этот цикл является неустойчивым в *прямом времени*.

Проанализируем теперь поведение четырех переменных вектора z_s , которые соответствуют собственным значениям, расположенным в левой полуплоскости комплексной плоскости. Выберем любое конечное значение γ , удовлетворяющее условию (6.8). Ему отвечает управление вида (6.4), (6.5) и некоторая расположенная на плоскости переменных z_1, z_2 область притяжения P . Возьмем произвольное начальное состояние

$$z_1(0), z_2(0) \in P \quad (7.1)$$

Управление (6.4), (6.5), построенное при выбранном значении γ , обеспечивает стремление к нулю при $t \rightarrow \infty$ решения системы (5.4) с начальными условиями (7.1). Но если $z_1(t) \rightarrow 0, z_2(t) \rightarrow 0$, то стремится к нулю и управляющий сигнал M_* , поскольку он представляет собой линейную комбинацию переменных z_1, z_2 (см. выражение (6.5)). Вектор переменных z_s , как и все шесть жордановых переменных, описываются неоднородными линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Неоднородные члены в этих уравнениях пропорциональны управляющему моменту M и при $t \rightarrow \infty$ стремятся к нулю вместе с сигналом M_* . Отсюда вытекает [21], что $z_s(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, какими бы ни были начальные условия $z_s(0)$.

Таким образом, ограниченное по абсолютной величине управление (6.4), (6.5) обеспечивает асимптотическую устойчивость тривиального решения $z = 0$ системы (5.3), а значит и решения (2.1) исходной линеаризованной системы (2.2). При построенном управлении асимптотически устойчивым будет и равновесное положение (2.1) исходной нелинейной системы (1.3).

8. Численные исследования. Численные исследования проводились при следующих значениях параметров системы

$$\begin{aligned} m_1 &= 40 \text{ кг}, & m_2 &= 60 \text{ кг}, & l &= 0.4 \text{ м}, & r_1 &= 0.2 \text{ м}, & r_2 &= 0.25 \text{ м}, \\ \rho_1 &= 0.16 \text{ м}, & \rho_2 &= 0.2 \text{ м}, & m &= 2.2 \text{ кг}, & R &= 0.45 \text{ м}, \\ h &= 0.38 \text{ м}, & r &= 0.41 \text{ м}, & \rho &= 0.12 \text{ м}, & k &= 5 \text{ Нмс}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

При расчетах рассмотрено такое же ограничение на величину момента, как и в статье [8] – $M_0 = 31$ Нм. При значениях (8.1) параметров системы комплексные собственные значения имеют *отрицательные* действительные части, а *положительные* собственные числа оказываются следующими:

$$\lambda_1 = 0.69 \text{ с}^{-1}, \quad \lambda_2 = 0.24 \text{ с}^{-1}$$

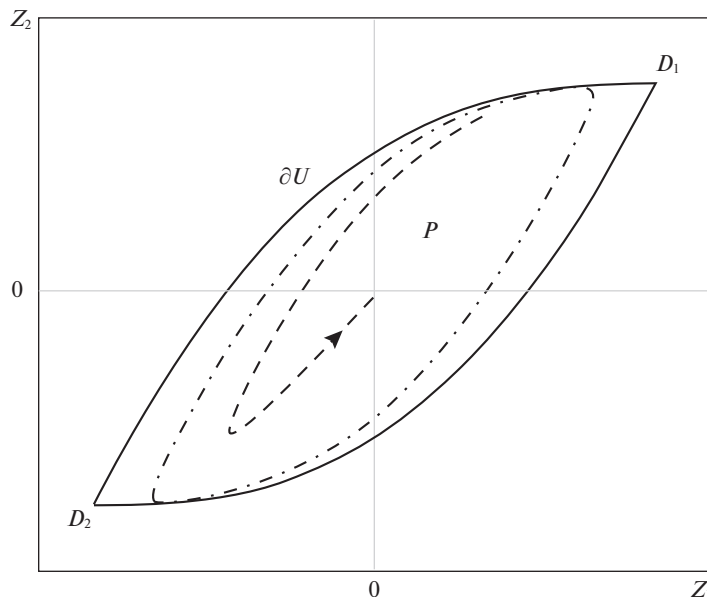


Рис. 2. Граница ∂U области управляемости U системы (5.4) (сплошная линия) и граница области притяжения P этой системы с управлением (6.4), (6.5) при $\gamma = 2\gamma_*$ (штрихпунктирная линия). Пунктирная кривая – проекция одной из траекторий системы на плоскость z_1z_2 при начальных условиях, близких к границе области P .

При численных значениях (8.1) параметров с помощью соотношений (5.8), (5.10) построена граница ∂U области управляемости U . Эта граница вместе с угловыми точками D_1 и D_2 , найденными по формулам (5.6), (5.7), показана на рис. 2.

Граница области притяжения P представляет собой двояко-устойчивый в *обратном* времени периодический цикл. Она построена на рис. 2 путем решения в обратном времени дифференциальных уравнений (5.4) с управлением (6.4), (6.5) при значении $\gamma = 2\gamma_*$ ($\gamma_* = 47$), удовлетворяющем условию (6.8).

Как и следовало ожидать [1, 2], численные исследования, проведенные при значениях (8.1) параметров системы, показывают, что область притяжения P охватывает тем большую часть области управляемости U , чем больше по модулю значение общего коэффициента обратной связи γ . При этом $P \rightarrow U$, если $|\gamma| \rightarrow \infty$. Если, например, $\gamma = -20\gamma_*$, то границы области управляемости и области притяжения неразличимы на глаз. Таким образом, при “больших” значениях коэффициента γ граница области притяжения P “близка” к границе ∂U области управляемости U . Тем самым, при “больших” значениях коэффициента γ область управляемости U может служить “хорошей” оценкой области притяжения P .

Итак, путем приведения линеаризованной системы к жордановым переменным можно построить ограниченное управление, обеспечивающее для линеаризованной системы область притяжения, близкую к максимально возможной. Можно надеяться, что такой прием позволяет и для нелинейной системы реализовать “большую” область притяжения.

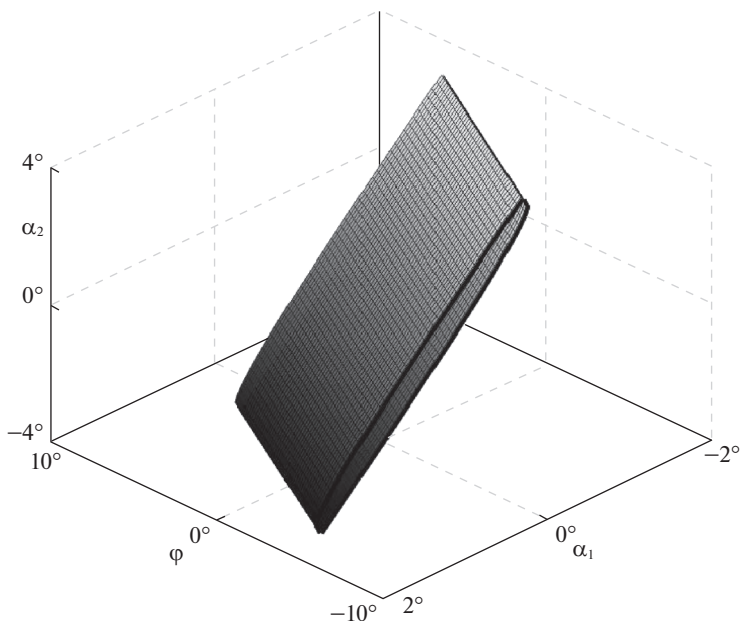


Рис. 3. Граница области начальных положений линеаризованной системы, из которых она может быть приведена в равновесие при нулевых начальных скоростях.

Для оценки размеров области управляемости в пространстве исходных переменных — углов φ , α_1 , α_2 используем формулы (5.9), (5.11), а также соотношения (5.14). Найдем интервалы допустимых, с точки зрения устойчивости, значений углов $\varphi(0)$, $\alpha_1(0)$, $\alpha_2(0)$. При отыскании интервала для каждого угла будем полагать равными нулю два других угла, а также все угловые скорости. Концы искомых интервалов обозначим через $\pm\varphi_{\text{sup}}$, $\pm\alpha_{1\text{sup}}$, $\pm\alpha_{2\text{sup}}$.

Для отыскания величин φ_{sup} , $\alpha_{1\text{sup}}$, $\alpha_{2\text{sup}}$ используем уравнения:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda_1 g_{11}}{K_1 M_0} \varphi_{\text{sup}} \right) \right]^{\lambda_2} &= \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda_2 g_{21}}{K_2 M_0} \varphi_{\text{sup}} \right) \right]^{\lambda_1} \\ \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda_1 g_{12}}{K_1 M_0} \alpha_{1\text{sup}} \right) \right]^{\lambda_2} &= \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda_2 g_{22}}{K_2 M_0} \alpha_{1\text{sup}} \right) \right]^{\lambda_1} \\ \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda_1 g_{13}}{K_1 M_0} \alpha_{2\text{sup}} \right) \right]^{\lambda_2} &= \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda_2 g_{23}}{K_2 M_0} \alpha_{2\text{sup}} \right) \right]^{\lambda_1}, \end{aligned}$$

полученные из равенства (5.9) с использованием соотношений (5.14). Решая каждое из этих трех уравнений при численных значениях (8.1) параметров, получаем $\varphi_{\text{sup}} = 5.5^\circ$, $\alpha_{1\text{sup}} = 0.46^\circ$, $\alpha_{2\text{sup}} = 1.1^\circ$.

На рис. 3 с использованием численных значений (8.1) параметров системы построена в пространстве переменных φ , α_1 , α_2 цилиндрическая поверхность, ограничивающая множество начальных положений $\varphi(0)$, $\alpha_1(0)$, $\alpha_2(0)$ линеаризованной системы,

из которых она может быть приведена в положение равновесия при нулевых начальных скоростях.

Отметим, что при $\varphi(0) = 0$ и нулевых начальных угловых скоростях, начальные значения углов α_1 и α_2 , принадлежащих области управляемости, могут достигать значений порядка $\pm 1^\circ$ и $\pm 3^\circ$ соответственно. Однако такие допустимые отклонения углов α_1 и α_2 не являются независимыми, а, как следует из соотношений (5.14) и из рассмотрения рис. 3, при этих углах одновременно имеют место разнонаправленные отклонения звеньев маятника от вертикали.

Численное интегрирование нелинейной системы (1.3) с управлением (6.4), (6.5) в “окрестности” границы области притяжения затруднено из-за неустойчивости решения. Тем не менее, такое численное интегрирование позволяет оценить положение границы области притяжения. Полученная оценка показывает, что граница этой области для нелинейной системы (1.3) несколько ближе к началу координат, чем подобная граница для линеаризованной системы (2.2) с тем же управлением. Но различие в координатах точек, лежащих на этих границах, для значений (8.1) параметров системы составляет всего 2–4%, что объясняется малостью значений, которые принимают в области притяжения угловые переменные.

Заключение. В статье рассматривается задача стабилизации вертикального положения опрокинутого двухзвенного маятника, закрепленного шарнирно на качелях *seesaw*. Желаемое положение равновесия системы неустойчиво, его степень неустойчивости равна двум. Задача стабилизации равновесного состояния осложняется еще и тем, что число степеней свободы системы равно трем, а управляющее воздействие в ней только одно — момент сил, приложенных в межзвенном шарнире маятника. Таким образом, в системе имеет место дефицит числа управляющих воздействий. Помимо этого, управляющий момент ограничен по абсолютной величине. При ограниченных таким образом ресурсах управления неустойчивую систему можно вывести на желаемый режим работы не из всех начальных состояний.

Прежде всего, в статье для системы, линеаризованной около неустойчивого состояния равновесия, построена на плоскости двух неустойчивых жордановых переменных область управляемости, занимающая ограниченную часть этой плоскости. Получены формулы, позволяющие при заданных значениях параметров системы вычислить значения каждого из углов или каждой из угловых скоростей в отдельности, или некоторых их сочетаний, при которых система находится на границе области управляемости. Построена линейная с насыщением обратная связь по двум неустойчивым переменным, стабилизирующая желаемое состояние равновесия. При этой обратной связи все ресурсы управления используются для подавления неустойчивых мод движения. Область притяжения равновесного состояния системы ограничена неустойчивым предельным циклом и целиком принадлежит области управляемости. С ростом общего коэффициента обратной связи область притяжения расширяется, и ее граница приближается к границе области управляемости. В статье рассматривается пример с заданными численно значениями параметров. В этом примере для линеаризованной системы с “большим” коэффициентом обратной связи получены оценки диапазона значений каждого из трех углов, при которых замкнутая система стремится к положению равновесия. Численное интегрирование исходной системы нелинейных уравнений с учетом такой же обратной связи показывает, что допустимые, с точки зрения устойчивости, значения тех же углов “мало” отличаются от полученных для линеаризованной системы. В рассматриваемом примере область притяжения в исходной нелинейной системе “близка” к области притяжения в линеаризованной системе.

Таким образом, представляется целесообразным при рассмотрении задачи синтеза управления неустойчивой системой построить, используя, например, описанный здесь способ, управление, которое обеспечивает желаемую область притяжения для

линеаризованной системы. Если при этом окажется, что область притяжения в исходной нелинейной системе при построенном управлении близка к области притяжения в линеаризованной системе, то построенное управление может быть использовано в исходной нелинейной системе.

Публикация частично подготовлена в рамках реализации Программы создания и развития научного центра мирового уровня “Сверхзвук” на 2020–2025 годы при финансовой поддержке Минобрнауки России (Распоряжение правительства РФ от 24 октября 2020 № 2744-р).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Формальский А.М.* Управление движением неустойчивых объектов. М.: Физматлит, 2012. 232 с.
2. *Formalskii A.M.* Stabilization and Motion Control of Unstable Objects. Berlin/Boston: Walter de Gruyter, 2015. 240 p.
3. *Ivanenko Y.P., Levik Y.S., Talis V.L., Gurfinkel V.S.* Human equilibrium on unstable support: the importance of feet-support interaction // *Neurosci. Lett.* 1997. V. 235. P. 109–112.
4. *Guillou E., Dupui P., Golomer E.* Dynamic balance sensory motor control and symmetrical or asymmetrical equilibrium training // *Clinical Neurophys.* 2007. V. 118. P. 317–324.
5. *Carvalho R.L., Almeida G.L.* Assessment of postural adjustments in persons with intellectual disability during balance on the seesaw // *J. Intell. Disabil. Res.* 2009. V. 53. Pt. 4. P. 389–395.
6. *Rougier P., Mathias M., Tanzi A.* Short-term effects on postural control can be evidenced using a seesaw // *Neurosci. Lett.* 2011. V. 488. P. 133–137.
7. *Николаев Р.Ю., Мельников А.А., Викулов А.Д.* Особенности поддержания устойчивости вертикальной позы на фоне утомления мышц верхних и нижних конечностей у борцов // *Изв. ЮФУ. Технич. науки.* 2012. № 9. С. 251–256.
8. *Гугаев К.В., Кручинин П.А., Формальский А.М.* Модель удержания человеком равновесия на подвижной опоре в виде пресс-папье // *ПММ.* 2016. V. 80. № 4. С. 450–460.
9. *Кручинин П.А., Сакаев Р.М.* Об учете расположения голеностопного сустава в модели удержания человеком равновесия на подвижной опоре в виде пресс-папье // *XII Всеросс. съезд по фундам. проблемам теоретич. и прикл. мех. Аннотации докладов. РИЦ БашГУ Уфа,* 2019. С. 316.
10. *Nashner L.M., McCollum G.* The organization of human postural movements: A formal basis and experimental synthesis // *Behav.&Brain Sci.* 1985. V. 8. № 1. P. 135–150.
11. *Suissa D., Gunther M., Shapiro A. et al.* On laterally perturbed human stance: experiment, model, and control // *Hindawi Appl. Bionics&Biomech.* 2018. Article ID 4767624. 20 p.
12. *Han K.S., Shin S.H., Yu Ch.H., Kwon T.K.* Postural responses during the various frequencies of anteroposterior perturbation // *Bio-Medical Mater.&Engng.* 2014. V. 24. P. 2537–2545.
13. *Формальский А.М.* Перемещение антропоморфных механизмов. М.: Наука, 1984. 368 с.
14. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 176 с.
15. *Козлов В.В.* Замечания о степени неустойчивости // *ПММ.* 2010. Т. 74. № 1. С. 18–21.
16. *Каленова В.И., Морозов В.М.* Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. М.: Физматлит, 2010. 208 с.
17. *Защиорский В.М., Аруин А.С., Селуянов В.Н.* Биомеханика двигательного аппарата человека. М.: Физкультура и спорт, 1981. 143 с.
18. *Формальский А.М.* Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974. 368 с.
19. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004. 552 с.
20. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 916 с.
21. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

Stabilization of Double Inverted Pendulum Installed on Seesaw

A. M. Formalskii^{a,*}, P. A. Kruchinin^{a,**}, and K. L. Voitsitskaya^a^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*^{*} *e-mail: formal@imec.msu.ru*^{**} *e-mail: pkruch@mech.math.msu.su*

The problem of the control synthesis to stabilize the double inverted pendulum installed on the seesaw is considering. The movement in the vertical plane of such kind of the pendulums is studying. The seesaw is a segment of the cylinder whose axis is horizontal. This cylindrical segment oscillates while rolling on the horizontal surface without any slipping. The lower (first) link of the pendulum is fastened to the seesaw by the cylindrical joint. The axis of this joint is parallel to the axis of the cylinder and to the axis of the inter-link joint also. The limited in the absolute value torque is applied to the pendulum in the inter-link joint. Thus, the described above system has three degrees of freedom and the single control action only. The open-loop system has an unstable equilibrium position with the both links of the pendulum directed vertically upwards. The seesaw in this equilibrium position is not tilted. The control stabilizing the desired unstable equilibrium is constructed in the feedback form on two "unstable" Jordan variables of an open-loop linearized system. By this way we design the feedback control with maximal as possible the attraction domain of the equilibrium position. Some properties of the controllability and attraction domains are studied. The results of the numerical studies are presented.

Keywords: double inverted pendulum, seesaw, controllability domain, attraction domain, stabilization

REFERENCES

1. *Formalskii A.M.* Motion Control of Unstable Objects (Upravlenie dvizheniem neustoychivih objektov). Moscow: Fizmatlit, 2012. 232 p. (in Russian)
2. *Formalskii A.M.* Stabilisation and Motion Control of Unstable Objects. Berlin: Walter de Gruyter, 2015. 240 p.
3. *Ivanenko Y.P., Levik Y.S., Talis V.L., Gurfinkel V.S.* Human equilibrium on unstable support: the importance of feet-support interaction // *Neurosci. Lett.*, 1997, vol. 235, pp. 109–112.
4. *Guillou E., Dupui P., Golomer E.* Dynamic balance sensory motor control and symmetrical or asymmetrical equilibrium training // *Clinic. Neurophys.*, 2007, vol. 118, pp. 317–324.
5. *Carvalho R.L., Almeida G.L.* Assessment of postural adjustments in persons with intellectual disability during balance on the seesaw // *J. Intellect. Disabil. Res.*, 2009, vol. 53, pt 4, pp. 389–395.
6. *Rougier P., Mathias M., Tanzi A.* Short-term effects on postural control can be evidenced using a seesaw // *Neurosci. Lett.*, 2011, vol. 488, pp. 133–137.
7. *Nikolaev P.Yu., Melnikov A.A., Vikulov A.D.* Features of maintaining the stability of the vertical posture against the background of fatigue of the muscles of the upper and lower limbs in wrestlers // *Izvestiya YuFU. Tehnich. Nauki*, 2012, no. 9, pp. 251–256. (in Russian)
8. *Gugaev K.V., Kruchinin P.A., Formalskii A.M.* A model of maintaining balance by a person on the seesaw // *JAMM*, 2016, vol. 80, iss. 4, pp. 316–323.
9. *Kruchinin P.A., Sakaev R.M.* Effect of the ankle joint position in the model of maintaining balance by a person on a movable support in the form of a seesaw // *XII Vseross. siesd po teoretich. i prikladn. mekh. Annotacii dokladov. RIC BashGU Ufa*, 2019. pp. 316. (in Russian)
10. *Nashner L.M., McCollum G.* The organization of human postural movements: A formal basis and experimental synthesis // *Behav.&Brain Sci.*, 1985, vol. 8, no. 1, pp. 135–150.
11. *Suissa D., Gunther M., Shapiro A. et al.* On laterally perturbed human stance: experiment, model, and control // *Hindawi Appl. Bionics&Biomech.*, 2018, Article ID 4767624, 20 p.
12. *Han K.S., Shin S.H., Yu Ch.H., Kwon T.K.* Postural responses during the various frequencies of anteroposterior perturbation // *Bio-Medical Mater.&Engng.*, 2014, vol. 24, pp. 2537–2545.
13. *Formalskii A.M.* Lokomotion of Anthropomorphic Mechanisms (Peremeschenie antropomorfnykh mekhanizmov). Moscow: Nauka, 1984. 368 p. (in Russian)

14. *Chetaev N.G.* Motion Stability (Ustoychivost dvizheniya). Moscow: Nauka, 1965. 176 p. (in Russian)
15. *Kozlov V.V.* Remarks on the degree of instability // JАММ, 2010, vol. 74, no. 1. pp. 10–12.
16. *Kalenova V.I., Morozov V.M.* Linear Nonstationary Systems and Their Applications to Problems of Mechanics. (Lineynie nestacionarnie sistemi i ih prilozhenie k zadacham mehaniki) Moscow: Fizmatlit, 2010. 208 p. (in Russian)
17. *Zatsiorsky V.M., Aruin A.S., Selujanov V.N.* Biomechanics of the Human Locomotor System. (Biomehanika dvigatel'nogo apparata cheloveka). Moscow: Fizkultura i Sport, 1981. 143 p. (in Russian)
18. *Formalskii A.M.* Controllability and Stability of Systems with Limited Resources (Upravliaemost i ustoychivost system s ogranichennimi resursami). Moscow: Nauka, 1974. 368 p. (in Russian)
19. *Nemitskii V.V., Stepanov V.V.* Qualitative Theory of Differential Equations (Kachestvennaya teoriya differentsialnih uravneniy). Moscow: Editorial URSS, 2004. 552 p. (in Russian)
20. *Andronov A.A., Vitt A.A., Khaikin S.E.* Oscillation Theory (Teoriya kolebaniy). Moscow: Fizmatgiz, 1959. 916 p. (in Russian)
21. *Demidovich B.P.* Lectures on the Mathematical Theory of Stability (Lekcii po matematicheskoy teorii ustoychivosti). Moscow: Nauka, 1967. 472 p. (in Russian)

УДК 531.53

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ПЛАТФОРМЫ С ОСЦИЛЛЯТОРАМИ

© 2021 г. О. Р. Каюмов^{1,*}¹ Филиал ОмГПУ, г. Таре, Омская область, Россия

*e-mail: Oleg_Kayumov@mail.ru

Поступила в редакцию 04.10.2020 г.

После доработки 03.04.2021 г.

Принята к публикации 27.08.2021 г.

Рассматривается система, включающая твердое тело, движущееся по горизонтальной прямой и несущее на себе несколько линейных осцилляторов. Единственное управляющее воздействие — внешняя ограниченная сила, приложенная к несущему телу, трение отсутствует. Решается задача оптимального по быстродействию перемещения системы на требуемое расстояние из заданного положения равновесия в другое такое же состояние с гашением колебаний. Предлагается структура управления, удовлетворяющего необходимым условиям оптимальности. Подробно рассмотрен случай платформы с двумя осцилляторами, приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: оптимальное управление, быстродействие, платформа с осцилляторами

DOI: 10.31857/S0032823521060072

1. Объект исследования. Рассматривается управляемое перемещение системы из $(n + 1)$ тел (рис. 1). Первое тело (платформа массы m_0) движется поступательно вдоль горизонтальной оси Ox . Действующая на него управляющая сила u ограничена по модулю наперед заданной величиной a . К платформе крепятся посредством линейных пружин n материальных точек (массами $m_1, m_2, \dots, m_n$), которые могут совершать колебания параллельно оси Ox . Трение отсутствует. Такая система является упрощенной моделью для описания малых перемещений платформы с упругими звеньями или сосуда, частично заполненного жидкостью. Проблемы управления такими объектами формулировались в [1], но до сих пор остаются актуальными. Им посвящены, например, недавние работы [2–4]. Известную трудность представляет поиск управления, оптимального по быстродействию. В работах [1, 5] приведено решение задачи оптимального перемещения платформы с одним осциллятором, моделирующим маятник в линейном приближении, где оптимальное управление оказалось кусочно-постоянным с тремя переключениями. В нелинейной постановке эта задача исследовалась численно [6], где обнаружили не только режимы с семью переключениями, но и особые управления. Ввиду практической невозможности аналитического решения задачи оптимального быстродействия для платформы с несколькими осцилляторами разрабатывались методы квазиоптимального управления. Предложен [7] алгоритм гашения колебаний платформы с осцилляторами посредством ограниченного управления в виде обратной связи. Здесь сочетаются метод [8] аппроксимации множества достижимости (для больших энергий системы) и метод [9, 10] обобщенных функций Ляпунова

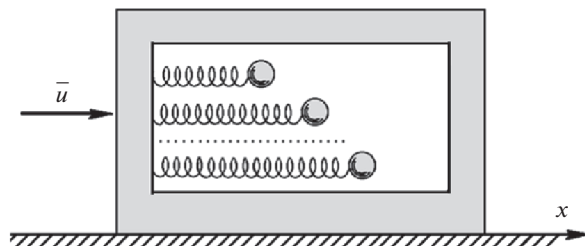


Рис. 1.

(для построения локального синтеза в окрестности терминального положения). Подход развивался в дальнейшем, исследовались [11] проблемы существования и единственности движения под действием предлагаемого управления, также подробно рассмотрен случай [12] платформы с двумя осцилляторами. Далее речь пойдет о задаче оптимального по быстродействию перемещения платформы с осцилляторами, где будут существенно использоваться свойства симметрии краевых условий.

Обозначим через $k_1, k_2, \dots, k_n$ — коэффициенты жесткости, $q_1, q_2, \dots, q_n$ — удлинения пружин осцилляторов, $M = \sum_{i=0}^n m_i$ — массу всей системы, q_0 — координату платформы. Конфигурация системы задается вектором $\mathbf{q} = (q_0, q_1, \dots, q_n)^T$, а уравнения движения имеют вид

$$A\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}u, \quad |u| \leq a, \quad (1.1)$$

где $B = \text{diag}(0, k_1, \dots, k_n)$ — матрица потенциальной энергии, $\mathbf{b} = (1, 0, \dots, 0)^T$. Матрицу A кинетической энергии и обратную ей матрицу A^{-1} можно записать в блочном виде

$$A = \begin{bmatrix} M & \mathbf{m}^T \\ \mathbf{m} & G \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{m_0} \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{e}^T \\ -\mathbf{e} & H \end{bmatrix},$$

где $G = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_n)$, $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)^T$, $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T$. Квадратная матрица H имеет на главной диагонали элементы $h_{ii} = (m_0 + m_i)/m_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), а все элементы вне диагонали равны 1. Частоту колебаний каждой отдельной пружины обозначим $\vartheta_i = \sqrt{k_i/m_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Замечание 1. Система (1.1) является управляемой, если выполнено условие

$$\vartheta_i \neq \vartheta_j \quad \text{при} \quad i \neq j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.2)$$

Действительно, заменяя $A\mathbf{q} = \mathbf{p}$ и преобразуя уравнение (1.1) к виду

$$\ddot{\mathbf{p}} + N\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{b}u, \quad N = BA^{-1}, \quad (1.3)$$

применим “ранговый” критерий управляемости [13], который одинаков [14] для (1.3) и для системы вдвое меньшего порядка, т.е. вычислим ранг матрицы

$$K = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & N\mathbf{b} & \dots & N^n \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & W \end{bmatrix}$$

Определитель матрицы W можно упростить, вынося общие сомножители у элементов строк и вычитая столбцы, пропорциональные другим столбцам (подробности опускаем). В результате останется (с ненулевым коэффициентом) определитель Ван-

дермонда относительно квадратов частот ϑ_i , идентичный полученному ранее в ([1], с. 342) для линеаризованной модели платформы с маятниками и не равный нулю при условии (1.2). Таким образом, если собственные частоты колебаний осцилляторов попарно различны, то выполняется условие $\det K \neq 0$, гарантирующее управляемость системы (1.1).

Следуя [1], преобразуем систему (1.1) к совокупности подсистем с независимыми переменными, но общим управлением. Для этого в уравнение (1.3) подставим $\mathbf{p} = S\mathbf{z}$, где S — матрица из собственных векторов матрицы N . Получим

$$\ddot{\mathbf{z}} + D\mathbf{z} = \mathbf{r}u, \quad D = S^{-1}NS, \quad \mathbf{r} = S^{-1}\mathbf{b}, \quad (1.4)$$

где у диагональной матрицы $D = \text{diag}(0, \omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2)$ на главной диагонали — собственные числа матрицы N (1.3), причем первое равно нулю, а остальные положительны в силу свойств матриц A и B . Элементы вектора $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_{n+1})^T$ не равны нулю, так как в противном случае при $r_j = 0$ ($j = 2, \dots, n+1$) (либо при $r_1 = 0$) в системе (1.4) оказалась бы неуправляемая подсистема $\ddot{z}_j + \omega_j^2 z_j = 0$ (либо $\ddot{z}_1 = 0$).

Вводя безразмерные переменные $\omega_i' = \frac{\omega_i}{\omega_1}$, $x_i = \frac{z_{i+1}\omega_1^2}{r_{i+1}a}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $u' = \frac{u}{a}$, $x_0 = \frac{z_1\omega_1^2}{r_1a}$ и время $t' = \omega_1 t$, получим (опуская штрихи)

$$\ddot{x}_0 = u, \quad \ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = u \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad |u| \leq 1 \quad (1.5)$$

Здесь и далее для определенности пронумеруем частоты в порядке возрастания значений, т.е. $1 = \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$.

2. Постановка задачи и ее симметрии. Систему (1.5) представим в нормальной форме

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= y_0, & \dot{y}_0 &= u, & |u| &\leq 1 \\ \dot{x}_i &= y_i, & \dot{y}_i &= -\omega_i^2 x_i + u \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Полагая, что требуемому перемещению платформы соответствует изменение переменной x_0 , равное безразмерному отрезку $2b$, назовем в середине этого отрезка начало отсчета координаты x_0 . Аналогичную “удвоенную” запись удобно применять и для искомого общего времени $2T$ движения системы, что придаст краевым условиям симметричный вид.

Задача оптимального по быстродействию перемещения платформы с осцилляторами формулируется следующим образом: требуется определить управление $u(t)$, $t \in [0, 2T]$, переводящее систему (2.1) из состояния

$$x_0(0) = -b, \quad y_0(0) = x_i(0) = y_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.2)$$

за наименьшее время $2T$ (заранее неизвестное) в состояние

$$x_0(2T) = b, \quad y_0(2T) = x_i(2T) = y_i(2T) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3)$$

Используя принцип максимума Понтрягина [15], составим гамильтониан

$$H = \mu_0 y_0 + \lambda_0 u + \sum_{i=1}^n \mu_i y_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i (-\omega_i^2 x_i + u)$$

Тогда оптимальное управление получит вид

$$u = \text{sign} \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i \right), \quad (2.4)$$

где сопряженные переменные должны удовлетворять системе

$$\dot{\mu}_0 = 0, \quad \dot{\lambda}_0 = -\mu_0, \quad \dot{\mu}_i = \omega_i^2 \lambda_i, \quad \dot{\lambda}_i = -\mu_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.5)$$

В силу замечания 1, искомое оптимальное управление существует при условии (1.2). Однако специфика краевых условий (2.1), (2.2) такова, что даже при совпадении собственных частот $\vartheta_i = \vartheta_j$ ($i \neq j$) решение задачи существует, поскольку два осциллятора с одинаковой частотой будут двигаться синхронно.

Замечание 2. В задаче (2.1)–(2.5) записанное в смещенном времени $\tilde{t} = t - T$, $\tilde{t} \in [-T, T]$ оптимальное управление $u(\tilde{t})$, а также решения $x_i(\tilde{t})$, $\lambda_i(\tilde{t})$ ($i = 0, 1, \dots, n$) будут нечетными функциями, а $y_i(\tilde{t})$, $\mu_i(\tilde{t})$ ($i = 0, 1, \dots, n$) – четными функциями.

Для доказательства достаточно убедиться, что в новом времени $\tilde{t}$ все соотношения (2.1)–(2.5) инвариантны относительно замены $\tilde{t} \rightarrow -\tilde{t}$, $u \rightarrow -u$, $x_i \rightarrow -x_i$, $\lambda_i \rightarrow -\lambda_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$) при неизменных y_i , μ_i ($i = 0, 1, \dots, n$).

Из замечания 2 вытекают соотношения

$$u(T) = x_i(T) = \lambda_i(T) = 0, \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (2.6)$$

характеризующие состояние системы в конце оптимальной полутраектории.

Замечание 3. В задаче (2.1)–(2.5) оптимальное управление (2.4) является кусочно-постоянным с конечным числом переключений, число которых нечетно.

Действительно, в формуле (2.4) под знаком sign выражение не может быть тождественно равным нулю в силу линейной независимости известных решений системы (2.5). Поэтому особые режимы, моделируемые бесконечно быстрыми переключениями управления, здесь невозможны. При этом количество переключений нечетно, поскольку наряду с моментом времени переключения T возможны лишь “попарно симметричные” моменты вида τ и $(2T - \tau)$, где $\tau < T$.

Можно доказать, что зависимость $T(b)$ значений наименьшего времени от задаваемых значений дальности будет монотонной. Ей соответствует обратная монотонная зависимость b от T , которую можно затем, в свою очередь, “обратить”, чтобы получить $T(b)$. Поэтому далее поставленную задачу быстродействия будем рассматривать для взаимной к быстродействию вариационной задачи на максимум дальности (2b) при заданном времени ($2T$).

3. Свойства движений, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности. Далее моменты времени переключения управления будем обозначать τ_j , увеличивая индексы j с ростом значений времени.

Утверждение 1. Если в задаче (2.1)–(2.3) полутраектория оптимальна по быстродействию и реализуется кусочно-постоянным управлением с $(n + 1)$ переключениями в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, T$, то управляющая функция имеет вид

$$u = \text{sign}(\kappa \det Q_{n+1}(t)), \quad Q_{n+1}(t) = \begin{vmatrix} f_0(t) & f_0(\tau_1) & f_0(\tau_2) & \dots & f_0(\tau_n) \\ f_1(t) & f_1(\tau_1) & f_1(\tau_2) & \dots & f_1(\tau_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(t) & f_n(\tau_1) & f_n(\tau_2) & \dots & f_n(\tau_n) \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

$$\kappa \neq 0, \quad f_0(t) = T - t, \quad f_i(t) = \sin \omega_i(T - t), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.2)$$

Доказательство. Поскольку оптимальное управление должно удовлетворять соотношению (2.4), то будем искать решение системы (2.5) с учетом замечания 2, согласно

которому функции $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ должны быть нечетными в смещенном времени $\tilde{t} = t - T$. Поэтому можно положить

$$\lambda_0(t) = c_0(T - t), \quad \lambda_i(t) = c_i \sin \omega_i(T - t), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

В обозначениях (3.2) эта запись упрощается: $\lambda_i(t) = c_i f_i(t)$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

Вектор $\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots, c_n)^T$, составленный из констант интегрирования, найдем из условия обращения в ноль управления (2.4) в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, T$, т.е. из соотношений

$$\mathbf{c}^T \mathbf{f}(\tau_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.3)$$

где $\mathbf{f}(t) = (f_0(t), f_1(t), \dots, f_n(t))^T$.

Решению однородной системы (3.3) соответствует в пространстве R^{n+1} вектор $\mathbf{c}$, перпендикулярный одновременно к n линейно независимым векторам $\mathbf{f}(\tau_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$, порождающим подпространство R^n . Известно, что сумма произведений элементов столбца определителя на алгебраические дополнения элементов другого столбца равна нулю. Поэтому координаты $c_0, c_1, \dots, c_n$ можно взять (с точностью до множителя $\kappa \neq 0$) в виде алгебраических дополнений элементов первого столбца матрицы $Q_{n+1}(t)$ (3.1). Тогда сумма $(\lambda_0(t) + \dots + \lambda_n(t))$, стоящая под знаком sign в выражении для управления (2.4), будет равна $\det Q_{n+1}(t)$, что и доказывает утверждение 1.

В формуле (3.1) знак коэффициента κ определяется известным (по условию) значением управления $u(t)$ при $t \in [0, \tau_1]$.

Нетрудно убедиться, что определитель (3.1) обращается в нуль и при значениях времени $2T - \tau_n, \dots, 2T - \tau_2, 2T - \tau_1$, что соответствует свойствам симметрии из замечания 2.

Замечание 4. Если в задаче (2.1)–(2.3) полутраектория оптимальна по быстродействию и реализуется кусочно-постоянным управлением с количеством переключений большим, чем $(n + 1)$, то вид управляющей функции будет тот же (3.1).

Действительно, пусть смена знака управления осуществляется в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \tau_{n+1}, \dots, \tau_{n+k}, T$. Тогда к системе (3.3) добавятся соотношения, описывающие перпендикулярность вектора $\mathbf{c}$ к векторам $\mathbf{f}(\tau_{n+1}), \dots, \mathbf{f}(\tau_{n+k})$. Решение расширенной системы (3.3) останется прежним, а принадлежность векторов $\mathbf{f}(\tau_{n+1}), \dots, \mathbf{f}(\tau_{n+k})$ к упомянутому подпространству R^n проявится в том, что при действии управления (3.1) определитель $\det Q_{n+1}(t)$ обратится в нуль не только в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, T$, но и в моменты $\tau_{n+1}, \dots, \tau_{n+k}$, предшествующие значению T .

Замечание 5. Если в задаче (2.1)–(2.3) полутраектория оптимальна по быстродействию и реализуется кусочно-постоянным управлением с количеством переключений $m < (n + 1)$, то вид управляющей функции будет

$$u = \text{sign}(\kappa \det Q_m(t)), \quad (3.4)$$

где $\kappa \neq 0$, $\det Q_m(t)$ – угловой $m \times m$ минор из $\det Q_{n+1}(t)$ (3.1).

Особенность управляющей функции вида (3.1) – в ее предназначении для конкретного типа траектории (с заранее известным количеством моментов переключения). Описанное в замечании 5 управление не является частным случаем формулы (3.1). Например, при $\tau_n \rightarrow T$, когда в пределе количество переключений убывает на единицу, определитель (3.1) стремится к нулю и в этом смысле вырождается, так как не может задавать функцию времени. Замена управления вида (3.1) на управление (3.4) равно-

сильна тому, что компоненты $\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$ сопряженного вектора принимаются тождественно равными нулю.

Из вышеизложенного следует схема построения управляемых движений, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности. Для отыскания наибольшей дальности перемещения при заданном времени $2T$ сначала строится траектория с предполагаемым количеством переключений управления. Далее проверяется вдоль этой траектории действие управления вида (3.4) (если число переключений $m < (n+1)$) или вида (3.1) — в остальных случаях. Если кроме ожидаемых моментов переключения возникают другие, при которых управление тоже обращается в ноль, то такое управление не удовлетворяет необходимым условиям оптимальности.

Основные вычислительные трудности связаны с обеспечением краевых условий (2.3) путем отыскания для заданного значения T моментов переключения управления. Можно показать (подробности опускаем), что если движение системы (2.1) началось при действии управления $u = 1$ на участке $t \in [0, \tau_1]$, то на j -м участке постоянства управления при $t \in [\tau_{j-1}, \tau_j]$ координата i -го осциллятора ($i = 1, 2, \dots, n$) будет явной функцией времени

$$x_i(t) = \frac{1}{\omega_i^2} \left[(-1)^{j+1} - \cos \omega_i t + 2 \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{k+1} \cos \omega_i (t - \tau_k) \right] \quad (3.5)$$

Если бы движение началось при $u = -1$, то выражение в правой части (3.5) изменило бы знак на противоположный. В любом из этих случаев, согласно соотношению (2.6), в конце оптимальной полутраектории (т.е. при $t = T$) для всех $i = 1, 2, \dots, n$ должны выполняться условия

$$(-1)^{j+1} - \cos \omega_i T + 2 \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{k+1} \cos \omega_i (T - \tau_k) = 0, \quad (3.6)$$

где $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{j-1}, T$ — моменты переключения управления на полутраектории.

Замечание 6. Если все числа ω_i ($i = 2, \dots, n$) рациональны, то в задаче (2.1)–(2.3) существует оптимальное движение с одним переключением управления.

Действительно, пусть $\omega_i = l_i/n_i$, где $l_i \in N$, $n_i \in N$ ($i = 2, \dots, n$) и все дроби несократимые. Тогда из уравнений (3.6) при $t = T$, $j = 1$ (т.е. в конце первого участка постоянства управления) получается система соотношений

$$1 - \cos \omega_i T = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.7)$$

Ей удовлетворяет длительность полутраектории $T = T_*$, где $T_* = 2n_*\pi$, n_* — общий знаменатель всех дробей ω_i . За это время T_* каждый из n осцилляторов выполнит целое число полных колебаний, а платформа завершит этап разгона при постоянном управлении $u = 1$. Вторым этапом будет ее торможение при $u = -1$, что соответствует наибольшей дальности за время $2T_*$.

Заметим, что введенное значение T_* не только задает параметры “тривиального” режима (с одним переключением управления). Роль числа T_* важна и для описания других режимов, так как оно является общим периодом всех функций в (3.6). Поэтому, если множество значений $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{j-1}, T$ является решением системы (3.6), то множество $\tau_1 + T_*, \tau_2 + T_*, \dots, \tau_{j-1} + T_*, T + T_*$ тоже им удовлетворит. Кроме того, система (3.6) обладает еще одной симметрией.

Замечание 7. Если все числа ω_i ($i = 2, \dots, n$) рациональны и управление с моментами переключения $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{j-1}, T$ при $T < T_*/2$ удовлетворяет краевым условиям (3.6), то

и управление с моментами переключения $\tau_1 + \Delta$, $\tau_2 + \Delta$, ..., $\tau_{j-1} + \Delta$, $T + \Delta$ (где $\Delta = T_* - 2T$) тоже удовлетворит условиям (3.6).

Действительно, в уравнениях (3.6) аргументы $(T - \tau_k)$ ($k = 1, 2, \dots, j - 1$) инвариантны относительно замены $\tau_k \rightarrow \tau_k + \Delta$, $T \rightarrow T + \Delta$. Поскольку при этом $\Delta = T_* - 2T$, то $T \rightarrow T_* - T$, значит, выражение $\cos \omega_i T$ заменится равным по значению $\cos(\omega_i T_* - \omega_i T)$, так как величина $\omega_i T_*$ кратна 2π (согласно определению T_*).

Отметим также, что если хотя бы одно из значений ω_i иррационально (при $\omega_1 = 1$), то система (3.7) не имеет решения, поэтому оптимальное движение с одним переключением управления невозможно.

4. Оптимальное перемещение платформы с двумя осцилляторами. Далее рассмотрим подробнее случай $n = 2$. Для системы (2.1) имеем $1 = \omega_1 < \omega_2$, обозначая для краткости $\omega_2 = \omega$. Уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= y_0, & \dot{y}_0 &= u, & |u| &\leq 1 \\ \dot{x}_1 &= y_1, & \dot{y}_1 &= -x_1 + u, & \dot{x}_2 &= y_2, & \dot{y}_2 &= -\omega^2 x_2 + u \end{aligned} \quad (4.1)$$

Краевые условия повторяются из (2.2), (2.3):

$$x_0(0) = -b, \quad y_0(0) = x_1(0) = y_1(0) = x_2(0) = y_2(0) = 0 \quad (4.2)$$

$$x_0(2T) = b, \quad y_0(2T) = x_1(2T) = y_1(2T) = x_2(2T) = y_2(2T) = 0 \quad (4.3)$$

Если число ω рациональное, то в силу замечания 6 для системы (4.1)–(4.3) существует оптимальное движение с одним переключением управления.

Движение с тремя переключениями управления, как увидим далее из численных экспериментов, встречается не при каждом значении ω . Его условия следуют из уравнений (3.6) при $t = T$, $j = 2$ в виде

$$\begin{aligned} x_1(T) &= -1 - \cos T + 2 \cos(T - \tau_1) = 0 \\ x_2(T) &= -1 - \cos \omega T + 2 \cos \omega(T - \tau_1) = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Рассмотрим режимы с пятью переключениями управления, иллюстрируя движение первого осциллятора на фазовой плоскости (x_1, y_1) (рис. 2). Пусть переключения управления происходят в моменты времени τ_1 , τ_2 , T , $2T - \tau_2$, $2T - \tau_1$. При $u(t) = 1$, $t \in (0, \tau_1)$ изображающая точка выходит из точки O с координатами $(0, 0)$ и перемещается по дуге ON_1 окружности α_1 с центром $A_1(1, 0)$. Далее при $u(t) = -1$, $t \in (\tau_1, \tau_2)$ движение происходит по дуге N_1N_2 с центром $A_2(-1, 0)$, затем вновь при $u(t) = 1$, $t \in (\tau_2, T)$ — по дуге N_2N_3 с центром $A_1(1, 0)$. Угловые меры дуг численно равны времени движения по ним. Согласно условию (2.6) оптимальная полутраектория завершается в точке с координатой $x_1(T) = 0$. Вторая часть траектории, в силу замечания 2, симметрична первой относительно оси $x_1 = 0$ с заменой управлений на противоположные. Далее ограничимся иллюстрацией только полутраекторий (при $t \in [0, T]$).

Уравнение второго осциллятора $\ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2 + u$ заменой переменной $\theta = \omega^2 x_2$ и времени $t' = \omega t$ преобразуется к виду $\ddot{\theta} = -\theta + u$. Поэтому его движение можно изображать на тех же окружностях в плоскости (x_1, y_1) , но в измененном времени, так что соответствующие дуги будут в ω раз длиннее. Согласно условию (2.6) полутраектория, составленная из дуг с угловыми мерами $\omega\tau_1$, $\omega(\tau_2 - \tau_1)$, $\omega(T - \tau_2)$ тоже должна завершаться на вертикальной координатной оси. В одновременном выполнении соотношений $x_1(T) = 0$ и $x_2(T) = 0$ заключается вычислительная трудность отыскания моментов переключения τ_1 , τ_2 при заданном значении T . Для режима движения с пятью пе-

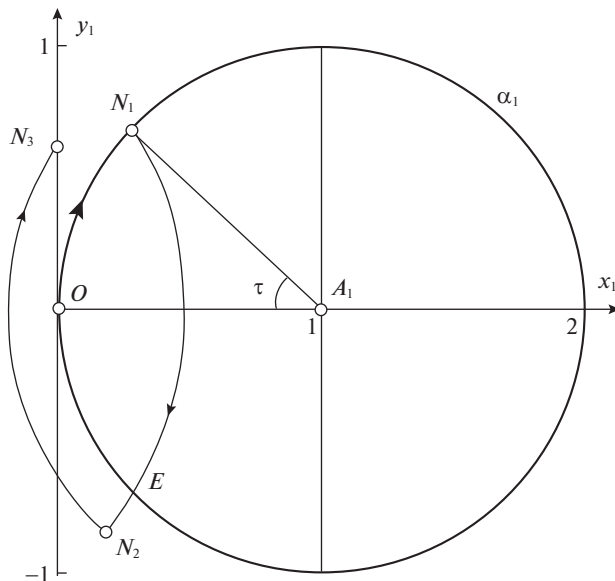


Рис. 2.

реключениями из уравнений (3.6) при $t = T$, $j = 3$ (т.е. в конце третьего участка постоянства управления) получим

$$\begin{aligned} 1 - 2 \cos(T - \tau_2) + 2 \cos(T - \tau_1) - \cos T &= 0 \\ 1 - 2 \cos \omega(T - \tau_2) + 2 \cos \omega(T - \tau_1) - \cos \omega T &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Существование режима движения с пятью переключениями управления (при заданном T) равносильно разрешимости системы (4.5) относительно τ_1 , τ_2 , где $0 < \tau_1 < \tau_2 < T$.

Утверждение 2. При любом значении ω в задаче (4.1)–(4.3) существует режим движения с пятью переключениями управления, при котором

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \tau_2 = T - \tau_1 \quad (4.6)$$

Действительно, при подстановке соотношений (4.6) второе уравнение (4.5) становится тождеством, а первое уравнение (4.5) приобретает вид

$$1 - 2 \cos \tau_1 + 2 \cos(T - \tau_1) - \cos T = 0,$$

откуда при оставлении слева только первого и последнего слагаемых получим

$$\sin^2 \frac{T}{2} = 2 \sin \frac{T}{2} \sin \left(\frac{T - 2\tau_1}{2} \right) \quad (4.7)$$

На фазовой плоскости (x_1, y_1) обсуждаемому движению $O \rightarrow M \rightarrow S \rightarrow O$ (рис. 3) соответствуют (в силу (4.6)) одинаковые угловые меры дуг $OM = SO = \tau$, $\tau = \tau_1$, изображающих движение при $u = 1$. Длительность второго участка MS (при $u = -1$) определяется длиной дуги 2β , где

$$\beta = \arcsin \left(\frac{\sin \tau}{\sqrt{5 - 4 \cos \tau}} \right) \quad (4.8)$$

Например, при поиске режима с пятью переключениями управления (в моменты времени $\tau_1, \tau_2, T, 2T - \tau_2, 2T - \tau_1$) задавалось значение τ_1 , табулировалось τ_2 , при каждом из которых интегрировалась система (4.1) с начальными условиями (4.2) вплоть до фиксации такого момента T , когда выполнялись соотношения (5.1). Затем такая траектория проверялась на соответствие необходимым условиям оптимальности, для чего вновь интегрировалась система (4.1), (4.2), но уже при действии управляющей функции (3.1) в виде

$$u = \text{sign}(\kappa \det Q_3(t)), \quad Q_3(t) = \begin{vmatrix} T-t & T-\tau_1 & T-\tau_2 \\ \sin(T-t) & \sin(T-\tau_1) & \sin(T-\tau_2) \\ \sin \omega(T-t) & \sin \omega(T-\tau_1) & \sin \omega(T-\tau_2) \end{vmatrix} \quad (5.2)$$

Если эта функция обращалась в ноль только в упомянутые моменты времени $\tau_1, \tau_2, T, 2T - \tau_2, 2T - \tau_1$, то, согласно утверждению 1, управление признавалось соответствующим необходимым условиям оптимальности. Для проверки режимов с количеством переключений, большим пяти, согласно замечанию 4 применялась та же функция (5.2). Если требовалось проверить выполнение необходимых условий оптимальности для режима с тремя переключениями $\tau_1, T, 2T - \tau_1$, то, в силу замечания 5, применялось управление в виде

$$u = \text{sign}(\kappa \det Q_2(t)), \quad Q_2(t) = \begin{vmatrix} T-t & T-\tau_1 \\ \sin(T-t) & \sin(T-\tau_1) \end{vmatrix} \quad (5.3)$$

Отметим, что раскрытие определителя $Q_2(t)$ дает функцию управления того же вида, что и найденную в ([1], с. 273) для платформы с одним осциллятором.

Далее приведем численные результаты для трех случаев.

1. *Случай* $\omega = 2$. На рис. 4 показаны оптимальные полутраектории на фазовой плоскости (x_1, y_1) первого осциллятора. Изображающая точка выходит из пункта O с координатами $(0, 0)$ и перемещается при $u(t) = 1, t \in (0, \tau_1)$ по окружности α_1 с центром $A_1(1, 0)$. После первого переключения управления, например, в точке K_1 с параметром $\tau_1 = \pi/2$, движение продолжается при $u(t) = -1, t \in (\tau_1, \tau_2)$ по окружности с центром $A_2(-1, 0)$ до переключения управления в точке K_2 . Последний участок K_2K_3 полутраектории проходит при $u(t) = 1, t \in (\tau_2, T)$ и завершается на оси ординат. Все точки окружности α_1 (кроме O) являются точками первого переключения управления при разных значениях τ_1 . На рис. 4 показана линия ϵ , составленная из точек второго переключения управления. На ее первую часть OSL (сплошную) приходят точки из верхней полуокружности α_1 (где $\tau_1 \in (0, \pi]$), а на вторую часть (пунктирную) — из нижней полуокружности (где $\tau_1 \in (\pi, 2\pi)$). Например, для полутраектории $O \rightarrow F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow F_3$ первое переключение происходит в точке F_1 (при $\tau_1 = 4\pi/3$), а второе — в точке F_2 . Случай, когда изображающая точка проходит до первого переключения всю окружность α_1 (однократно или многократно), соответствует режиму с одним переключением управления, описанному в замечании 6. Построенные численно полутраектории с моментами первого переключения τ_1 и $(\tau_1 + 2\pi)$ на фазовой плоскости (x_1, y_1) отличаются лишь предварительным обходом окружности α_1 . То есть здесь $2T_* = 4\pi$ — период, через который повторяются все типы оптимальных движений осцилляторов. Для рассматриваемого случая $\omega = 2$ из соотношения (4.9) имеем $\angle S = \pi/2$, откуда $\tau_s = \pi/3$ — угловая мера дуги OS , смысл которой заимствован из рис. 3. В точке S окружность α_1 касается линии ϵ .

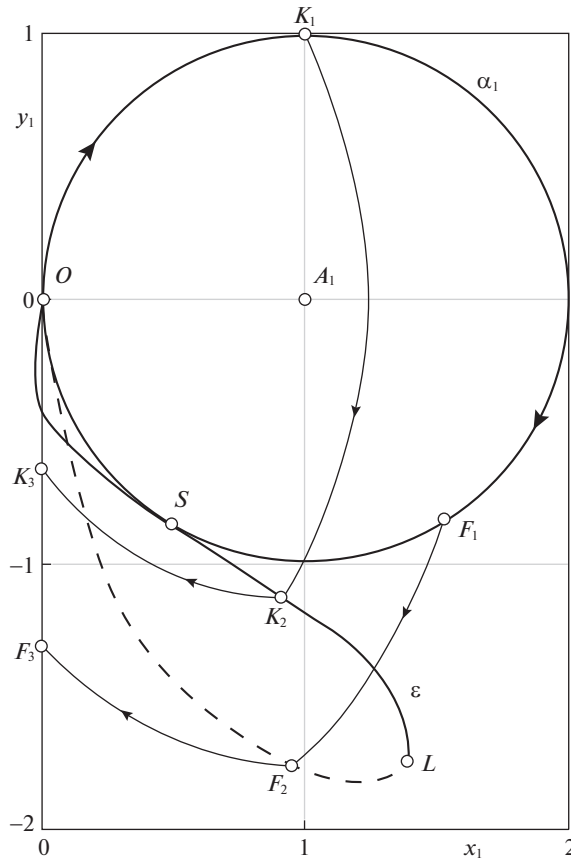


Рис. 4.

2. *Случай* $\omega = 3$. На рис. 5 линия ε , составленная из точек второго переключения, имеет изломы. Смысл ее сплошной и пунктирной частей тот же, что и на рис. 4. В точке W , лежащей на оси ординат, совпали значения τ_2 и T . Эта траектория — единственная для $\omega = 3$, реализуемая функцией оптимального управления (5.3) с тремя переключениями (в моменты времени $\tau_1 = \pi/2$, $T = \pi$, $2T - \tau_1 = 3\pi/2$). Режим с одним переключением соответствует полному обходу окружности α_1 целое число раз. Все остальные режимы при $\omega = 3$ имеют пять переключений. На фазовой плоскости все типы оптимальных движений осцилляторов повторяются через период $2T_* = 4\pi$. Из соотношения (4.9) угол $\angle S = 2\pi/3$ задает точку S (касания линии ε с окружностью α_1) на конце дуги с угловой мерой $OS \approx 33^\circ$. На рис. 5 для сравнения показаны дуги a , b , c — фрагменты аналогов линии ε соответственно при $\omega = 3.1$, $\sqrt{12}$ и 5.

3. *Случай* $\omega = 3/2$. Здесь величина $T_* = 4\pi$ — в два раза больше, чем для целочисленных значений ω . На рис. 6 показана лишь часть линии ε второго переключения управления. В точки ее “сплошной” дуги OSL приходят траектории после переключения на верхней полуокружности α_1 (с параметрами $\tau_1 \in (0, \pi]$), а на “пунктирную” дугу LW — из участка нижней полуокружности α_1 . В точке W завершается полутраектория с пара-

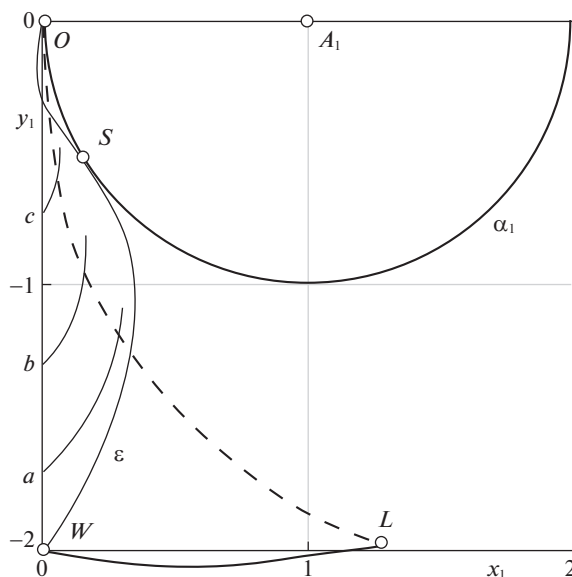


Рис. 5.

метрами $\tau_1 \approx 4.571$, $\tau_2 = T \approx 5.2575$. Ей соответствуют три переключения управления вместо пяти, которые встречались для всех случаев $T \in (0, 5.2575)$. Согласно замечанию 7, пять переключений получились и при всех $T \in (7.3089, 4\pi)$. Можно показать, что дуга LW линии ϵ не имеет непрерывного продолжения и что в диапазоне $T \in (5.2575, 7.3089)$ не существует оптимальных движений с пятью переключениями управления. Например, при $T = 2\pi$, $\omega = 3/2$ система (4.5) имеет единственное решение $\tau_1 = 2\pi/9$, $\tau_2 = 16\pi/9$, но оно может быть реализовано лишь при $u(t) = -1$ для $t \in (0, \tau_1)$, где получаемое в результате перемещение платформы невелико.

Численные расчеты показывают, что при $T \in (5.2575, 7.3089)$ реализуются движения с семью переключениями управления, причем с увеличением значения T эволюция графика функции $u(t)$ происходит следующим образом. При $T \rightarrow 5.2575$ продолжительность третьего промежутка постоянства управления стремится к нулю, т.е. $\tau_2 \rightarrow T$, так что на интервале $t \in (0, T)$ остается лишь один момент переключения $\tau_1 \approx 4.571$. При $T = 5.2575$ в график $u(t)$ в точке $t \approx 0.309$ “вставляется” узкий промежуток постоянства управления $u = -1$, т.е. на интервале $t \in (0, T)$ становится сразу на два переключения больше. С дальнейшим ростом значения T “вставка” расширяется и дрейфует вправо. На рис. 6 упомянутому значению $\tau_1 \approx 4.571$ соответствует точка B . Из нее выходят линия второго переключения BQ , обозначенная ξ_2 , и линия третьего переключения BR , обозначенная ξ_3 . Например, при $T = 2\pi$ полутраектория имеет вид $O \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3 \rightarrow G_4$, где $\tau_1 \approx 1.17050$, $\tau_2 \approx 1.46418$, $\tau_3 \approx 5.51026$. Полутраектория $O \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow I_4$, реализуется управлением с переключениями в моменты времени $\tau_1 \approx 0.30987$, $\tau_2 \approx 0.31977$, $\tau_3 \approx 4.56519$, $T \approx 5.27637$. Точка I_4 на оси ординат близка к точке W , как близки и соответствующие им значения T . С этой полутраекторией “согласована” (в смысле замечания 7) кривая с параметрами $\tau_1 \approx 2.32350$, $\tau_2 \approx 2.33340$, $\tau_3 \approx 6.57882$, $T = 7.2900$. Для нее первое и второе переключения проис-

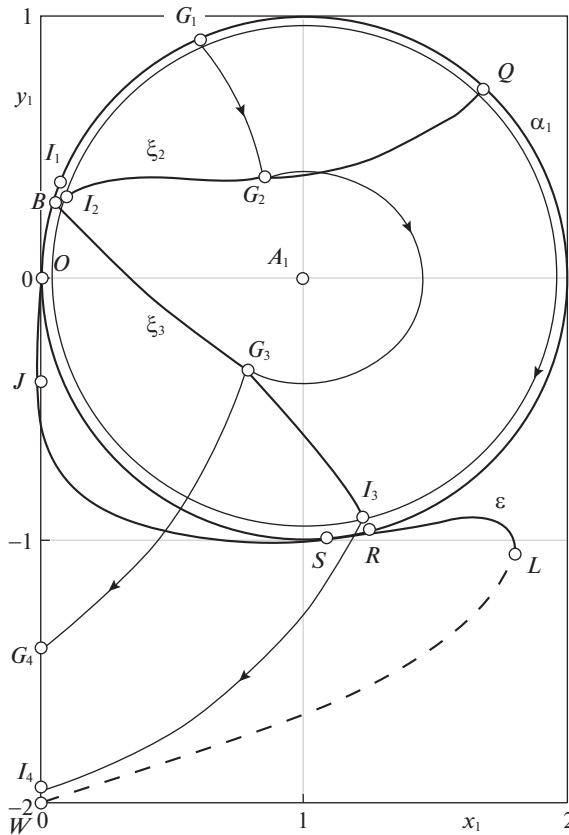


Рис. 6.

ходят (на линиях α_1 и ξ_2) в двух точках, близких к Q . Третье переключение — на линии ξ_3 возле точки B , а четвертое — на оси ординат возле точки J . Из этой точки J далее выходит линия второго переключения управления в режимах при $T \in (7.3089, 4\pi)$, которые показаны на рис. 7 и реализуются с пятью переключениями управления. Здесь участок JC — единственный, где с ростом T убывает значение τ_1 (от $\approx 379^\circ$ до $\approx 322^\circ$). От точки K (где $\tau_1 = 3\pi$) до точки O (где $\tau_1 = 4\pi$), линия второго переключения управления показана пунктиром. Таким образом, на рис. 6 показана первая часть линии ϵ (в виде $OSLW$), а на рис. 7 — ее вторая часть (в виде $JCKO$). В промежуток между точками W и J на ось ординат приходят полутраектории после трех переключений (на линиях α_1 , ξ_2 и ξ_3).

Заметим, что на рис. 6 после достижения линией ϵ оси ординат (в точке W) с дальнейшим ростом параметра T начинаются режимы с семью переключениями управления. Аналогичным свойством обладают дуги a , b , c на рис. 5, т.е. при $\omega > 3$ линии второго переключения сразу после касания (в точке S) с окружностью α_1 устремляются к оси ординат, где начинаются режимы с числом переключений, большим пяти.

Для случая $\omega = 3/2$ диаграмма начальных значений $\mu_1(0)$, $\lambda_1(0)$ компонент сопряженного вектора показана на рис. 8 в виде непрерывной линии Ω , точки которой па-

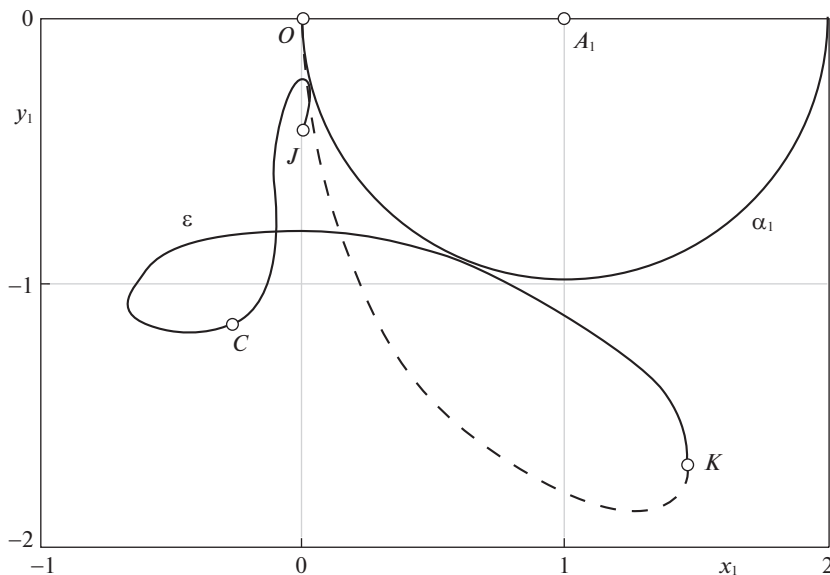


Рис. 7.

параметризованы величинами $T \in (0, T_*]$, $T_* = 4\pi$. Замкнутость этой кривой обусловлена ранее упомянутой (после замечания 6) периодичностью функций. При этом линия симметрична в силу замечания 2, а из соотношений (5.2) следует

$$\lambda_1(0) = c_1 \sin T, \quad \mu_1(0) = c_1 \cos T, \quad (5.4)$$

где c_1 — константа интегрирования, вычисляемая при фиксированном T и равная алгебраическому дополнению элемента “21” в определителе $Q_3(t)$.

На рис. 8 на линии Ω номерами помечены точки с параметрами $T = i\pi/2$ ($i = 1, 2, \dots, 8$), причем точки с нечетными i лежат на оси ординат, а с четными — на оси абсцисс. “Прочитывая” последовательно номера i , можно следить за ростом параметра T вдоль кривой Ω : она выходит из начала координат (при $i = 0$) и возвращается в него (при $i = 8$), попутно дважды заходя в него при $T \approx 5.2575$ и $T \approx 7.3089$. При этих значениях T , согласно замечанию 5, определитель $Q_3(t)$ (5.2) заменяется на $Q_2(t)$ (5.3), так что в формуле (5.4) следует взять $c_1 = \tau_1 - T$. На рис. 8 маленькая внутренняя петля соответствует диапазону $T \in (5.2575, 7.3089)$, т.е. движениям с семью переключениями управления.

На рис. 9 показаны оптимальные зависимости безразмерной дальности $2b$ перемещения платформы от безразмерного времени $2T$ при трех разных ω . Для целочисленных значений ω имеем $2T_* = 4\pi$, $2b_* = 4\pi^2$, поэтому линии $\omega = 2$ и $\omega = 3$ имеют общую точку $U(4\pi, 4\pi^2)$. Дуге WJ соответствуют движения с семью переключениями управления при $\omega = 3/2$. На этой же линии участок JC — единственный, где с ростом T убывает τ_1 . После точки C линия $\omega = 3/2$ вновь “отстает” от двух других, но при $2T > 19$ они становятся весьма близки и пересекаются втроем при $2T = 8\pi$.

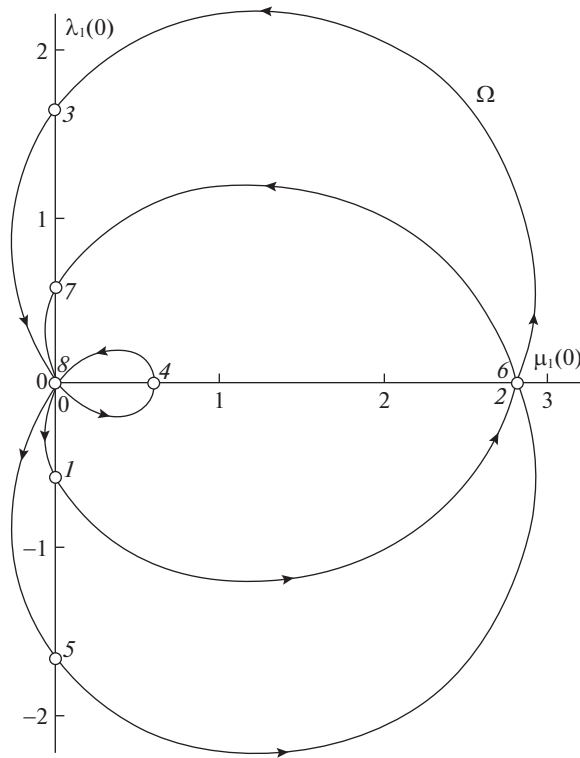


Рис. 8.

Заключение. Все построенные на рис. 4–7 полутраектории (вместе с их симметричными продолжениями) удовлетворяют необходимым условиям оптимальности в виде принципа максимума Понтрягина, поскольку реализованы посредством управлений вида (5.2) (с пятью или семью переключениями), вида (5.3) (с тремя переключениями) либо с одним переключением (по замечанию 6). Для платформы с двумя осцилляторами типы оптимальных траекторий оказались существенно зависящими от отношения ω двух частот системы. При рациональных значениях ω существует значение дальности перемещения, для которой возможно “тривиальное” оптимальное движение с одним переключением управления (за время $2T_*$). Кроме того, численные эксперименты демонстрируют повторяемость оптимальных режимов с периодом $2T_*$. В случае иррациональных значений ω не только исключается возможность “тривиального” режима, но и возникает проблема формального представления зависимости дальности перемещения системы от задаваемого времени $2T$. Эта зависимость не может быть предъявлена в каком-либо завершенном виде из-за непредсказуемого появления все новых типов движений с бесконечным ростом значений $2T$.

Случай $\omega = 2$ оказался единственным (среди целочисленных), где все оптимальные перемещения, кроме “тривиального”, реализуются только с пятью переключениями управления. При любых ω для малых значений дальности оптимальные управления имеют пять переключений. Чем больше ω , тем раньше (по времени маневрирования) функция управления эволюционирует к виду, имеющему семь переключений, при этом проходя через критическую форму с тремя переключениями.

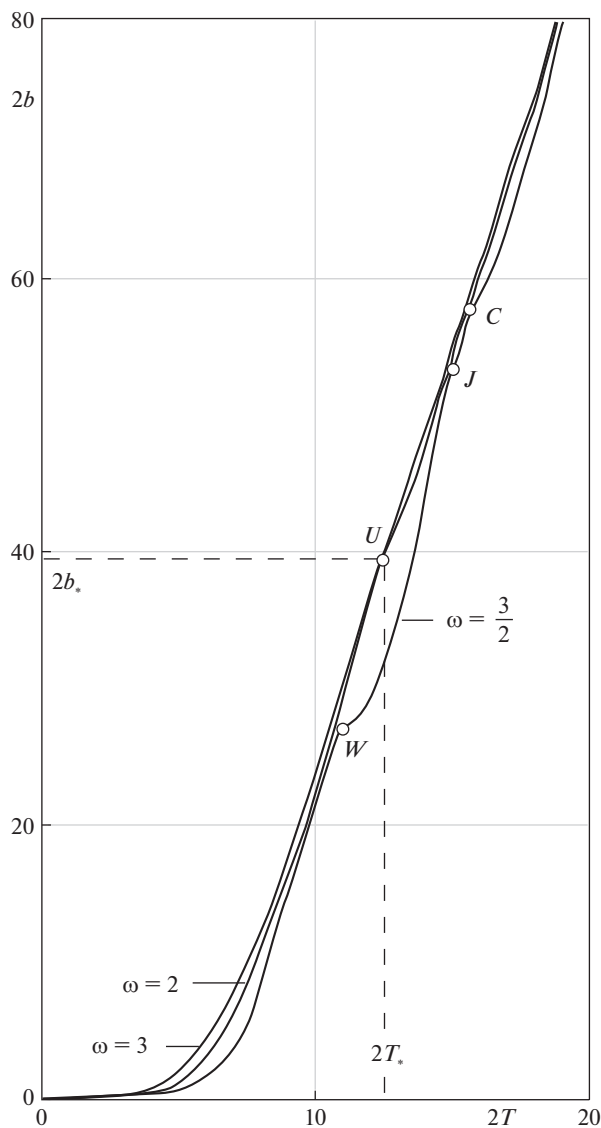


Рис. 9.

Приложение. Для доказательства утверждения 3 нужно обосновать, что при каждом значении $T \in (0, T_s]$ у системы уравнений (4.5) найдутся корни $0 < \tau_1 < \tau_2 < T$.

Поскольку случай $T = T_s$ уже упомянут в утверждении 2, то далее положим $T < T_s$. Обозначая длительности промежутков постоянства управления $\tau = \tau_1$, $\sigma = \tau_2 - \tau_1$, $\delta = T - \tau_2$, запишем первое уравнение (4.5) в виде

$$1 - 2 \cos \delta + 2 \cos(\sigma + \delta) - \cos(\tau + \sigma + \delta) = 0 \quad (\text{П.1})$$

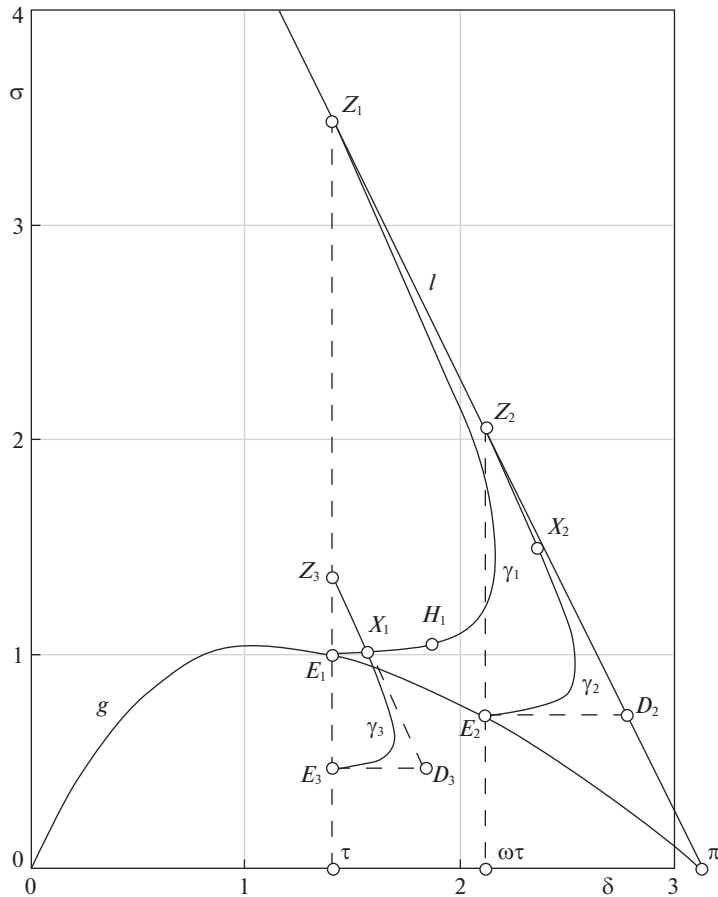


Рис. 10.

На рис. 2 промежуткам времени τ , σ , δ соответствуют угловые меры дуг ON_1 , N_1N_2 , N_2N_3 . Точка N_2 должна лежать вне круга с границей α_1 , иначе из нее не удастся попасть на ось ординат при $u = 1$. Отсюда следует $N_1N_2 \geq N_1E$, т.е.

$$\sigma \geq 2\beta \quad (\text{П.2})$$

Для решения системы (4.5) достаточно найти такие корни τ , σ , δ уравнения (П.1), которые удовлетворяют ему и при их замене на $\omega\tau$, $\omega\sigma$, $\omega\delta$. Такое изменение масштаба в ω раз рассмотрим на координатной плоскости. На рис. 10 показана зависимость 2β от τ (4.8) в виде кривой g , которая выпукла вверх. На этой же плоскости введем координаты δ , σ и построим линии, заданные уравнениями (П.1) при каждом фиксированном значении τ . На рис. 2 при заданном значении τ (т.е. при выборе точки N_1) наименьшему значению $\sigma = 2\beta$ (в точке E) соответствует наименьшее значение $\delta = \tau$. Поэтому при заданном τ уравнение (П.1) на рис. 10 опишет кривую γ_1 , выходящую из точки $E_1(\tau, 2\beta(\tau)) \in g$. Если каждой точке кривой γ_1 поставить в соответствие числовой параметр $T = \tau + \sigma + \delta$, то значению $T = 2\pi$ будет соответствовать точка

$Z_1(\tau, 2\pi - 2\tau)$. Действительно, подставляя $T = 2\pi$ в (3.10), получим $\cos \delta = \cos(\sigma + \delta)$, откуда

$$\sigma + 2\delta = 2\pi \quad (\text{П.3})$$

Если же подставить $T = 2\pi$ в первое уравнение (4.5), то получим $\cos \tau_2 = \cos \tau_1$, т.е. $\cos(\tau + \sigma) = \cos \tau$, откуда следует $\sigma + 2\tau = 2\pi$. Таким образом, на плоскости с координатами δ, σ точка Z_1 располагается над точкой E_1 и принадлежит прямой l с уравнением (П.3). На дуге E_1Z_1 точку с параметром $T = 2\pi/\omega$ обозначим H_1 .

Дифференцируя (П.1) по σ (при $\tau = \text{const}$) и выражая отсюда $d\delta/d\sigma$, можно показать, что функция $\delta(\sigma)$ на отрезке $\sigma \in [2\beta(\tau), 2\pi - 2\tau]$ имеет единственный экстремум. При этом $d^2\delta/d\sigma^2 < 0$, а также $d\delta/d\sigma \rightarrow -1/2$ при $T \rightarrow 2\pi$, т.е. точки E_1 и Z_1 соединяет кривая γ_1 , “выпуклая вправо” и касающаяся прямой l в точке Z_1 . Семейство таких кривых (при каждом фиксированном $\tau \in (0, \pi)$), выходящих из точек линии g , изображает множество решений уравнения (П.1) в диапазоне значений $\tau + \sigma + \delta \leq 2\pi$.

Используем эти линии для графического решения системы (4.5) по следующей схеме. Задав конкретное значение ω , определим из (4.9) угол $\angle S$ и найдем угловой размер τ_s дуги OS , равный моменту переключения управления в точке M на рис. 3. Для произвольного $\tau \in (0, \tau_s)$ рассматриваем соответствующую ему кривую γ_1 (в виде E_1Z_1), а для значения $\omega\tau$ — аналогичную кривую γ_2 , соединяющую точки $E_2(\omega\tau, 2\beta(\omega\tau)) \in g$ и $Z_2(\omega\tau, 2\pi - 2\omega\tau) \in l$ (рис. 10). На кривой γ_1 выделяем участок E_1H_1 , где в точке H_1 параметр $T = 2\pi/\omega$.

Покажем, что при гомотетии с центром O и коэффициентом $1/\omega$ (т.е. при сжатии плоскости в ω раз) образ γ_3 кривой γ_2 пересечет дугу E_1H_1 в ее внутренней точке. Действительно, прямоугольный треугольник $E_2Z_2D_2$, описанный около кривой γ_2 , отобразится в $E_3Z_3D_3$ (рис. 10). Точка E_3 окажется ниже E_1 в силу выпуклости кривой g (по неравенству Йенсена). Точка $Z_3\left(\tau, \frac{2\pi}{\omega} - 2\tau\right)$ попадет на вертикаль E_3E_1 , причем выше точки E_1 , поскольку $\frac{2\pi}{\omega} - 2\tau > 2\beta(\tau)$ (это следует из $\frac{2\pi}{\omega} = 2\tau_s + 2\beta(\tau_s) > 2\tau + 2\beta(\tau)$, так как $\tau_s > \tau$ и функция $\varphi(\tau) = \tau + \beta(\tau)$ — монотонно возрастающая). Через точку Z_3 пройдет образ прямой l в виде прямой Z_3D_3 с уравнением $\sigma = \frac{2\pi}{\omega} - 2\delta$. Точка H_1 лежит выше прямой Z_3D_3 , ибо ее координаты δ_h, σ_h удовлетворяют условию $\sigma_h > \frac{2\pi}{\omega} - 2\delta_h$. Это следует из соотношений $\sigma_h + \delta_h + \delta_h > \sigma_h + \delta_h + \tau_h = \frac{2\pi}{\omega}$ в силу $\delta_h > \tau_h$.

Поскольку вертикальный отрезок Z_3E_3 содержит точку E_1 внутри, а наклонная прямая Z_3D_3 пересекает дугу E_1H_1 , то и кривая γ_3 (соединяющая Z_3 и E_3 , располагаясь левее Z_3D_3) пересечет дугу E_1H_1 в некоторой точке X_1 . Ее координаты δ, σ вместе с выбранным значением τ являются решением уравнения (3.10), как и кратные им значения $\omega\delta, \omega\sigma, \omega\tau$, поскольку гомотетичная точка $X_2(\omega\delta, \omega\sigma)$ лежит на кривой γ_2 с параметром $\omega\tau$. Значит, при любом $T \in (0, T_s]$ система (4.4), (4.5) имеет решение, что доказывает утверждение 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
2. Ананьевский И.М., Ишханян Т.А. Управление платформой с осцилляторами в присутствии сухого трения // Труды института математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 1. С. 20–26.
3. Ананьевский И.М., Ишханян Т.А. Управление твердым телом, несущим диссипативные осцилляторы, в присутствии возмущений // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 42–51.
4. Ананьевский И.М. Управляемое перемещение платформы, несущей упругое звено с неизвестным фазовым состоянием // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 35–42.
5. Мамалыга В.М. Об оптимальном управлении одной колебательной системой // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 3. С. 8–17.
6. Каюмов О.Р. Оптимальное по быстродействию перемещение тележки с маятником // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 1. С. 30–41.
7. Овсеевич А.И., Федоров А.К. Асимптотически оптимальное управление в форме синтеза для системы линейных осцилляторов // Докл. РАН. 2013. Т. 452. № 3. С. 266–270.
8. Гончарова Е.В., Овсеевич А.И. Асимптотика множеств достижимости линейных динамических систем с импульсным управлением // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 1. С. 51–59.
9. Ананьевский И.М., Анохин Н.В., Овсеевич А.И. Синтез ограниченного управления линейными динамическими системами с помощью общей функции Ляпунова // Докл. РАН. 2010. Т. 434. № 3. С. 319–323.
10. Ovseevich A. A local feedback control bringing a linear system to equilibrium // J. Optimiz. Theory&Appl. 2015. V. 165. № 2. P. 532–544.
11. Овсеевич А.И., Федоров А.К. Движение системы осцилляторов под действием управления в виде обобщенного сухого трения // Автом. и телемех. 2015. № 5. С. 121–129.
12. Овсеевич А.И., Федоров А.К. Управление в форме синтеза для успокоения системы осцилляторов // Автом. и телемех. 2015. № 11. С. 3–17.
13. Калман Р.Е. Об общей теории систем управления // Тр. 1-го Конгресса Междуна. федерации по автоматическому управлению. Москва, 1961. С. 521–546.
14. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
15. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.

Time-Optimal Movement of Platform with Oscillators

О. R. Kayumov^{a, #}^a Branch of Omsk State Pedagogical University in Tara, Tara, Omsk region, Russia[#]e-mail: Oleg_Kayumov@mail.ru

A system is considered that includes a rigid body moving along a horizontal straight line and carrying several linear oscillators. The only control action is an external limited force applied to the supporting body, there is no friction. The problem is solved for the speed-optimal movement of the system to the required distance from a given equilibrium position to another similar state with vibration damping. A control structure is proposed that satisfies the necessary conditions for optimality. The case of a platform with two oscillators is considered in detail, and the results of numerical experiments are presented.

Keywords: optimal control, time-optimal movement, platform with oscillators

REFERENCES

1. Chernous'ko F.L., Akulenko L.D., Sokolov B.N. Oscillation Control. Moscow: Nauka, 1980. (in Russian)
2. Anan'evskii I.M., Ishkhanyan T.A. Control of a platform with oscillators in the presence of dry friction // Proc. Steklov Institute of Mathematics, Suppl., 2017.

3. *Anan'evskii I.M., Ishkhanyan T.A.* Control of a rigid body carrying dissipative oscillators under perturbations // J. Comput.&Syst. Sci. Int., 2019, vol. 58, no. 1, pp. 40–49.
4. *Anan'evskii I.M.* Motion control for platforms bearing elastic links with unknown phase states // J. Comput.&Syst. Sci. Int., 2019, vol. 58, no. 6, pp. 844–851.
5. *Mamalyga V.M.* Optimal control of one oscillatory system // Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela, 1978, no. 3, pp. 8–17.
6. *Kayumov O.R.* Time-optimal movement of a trolley with a pendulum // J. Comput.&Syst. Sci. Int., 2021, vol. 60, no. 1, pp. 28–38.
7. *Ovseevich A.I., Fedorov A.K.* Asymptotically optimal feedback control for a system of linear oscillations // Dokl. Math., 2013, vol. 88, no. 2, pp. 613–617.
8. *Goncharova E.V., Ovseevich A.I.* Asymptotics of reachable sets of linear dynamical systems with impulsive control // J. Comput.&Syst. Sci. Int., 2007, vol. 46, no. 1, pp. 46–54.
9. *Anan'evskii I.M., Ovseevich A.I., Anokhin N.V.* Bounded feedback controls for linear dynamic systems by using common Lyapunov functions // Dokl. Math., 2010, vol. 82, no. 2, pp. 831–834.
10. *Ovseevich A.I.* A local feedback control bringing a linear system to equilibrium // J. Optimiz. Theory&Appl., 2015, vol. 165, no. 2, pp. 532–544.
11. *Ovseevich A.I., Fedorov A.K.* Motion of a system of linear oscillators under the generalized dry friction control // Automat.&Remote Control, 2015, vol. 76, no. 5, pp. 826–833.
12. *Ovseevich A.I., Fedorov A.K.* Feedback control for damping a system of linear oscillators // Automat.&Remote Control, 2015, vol. 76, no. 11, pp. 1905–1917.
13. *Kalman R.E.* The general theory of control systems // In: Proc. 1st Int. Conf. IFAC, vol. 2. Izd. Acad. Nauk SSSR, Moscow. 1961. pp. 521–546.
14. *Krasovskii N.N.* Theory of Motion Control. Moscow: Nauka, 1968.
15. *Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.* The Mathematical Theory of Optimal Processes. N.Y.: Gordon and Breach, 1986).

УДК 531.3

ТЕОРИЯ НОВЫХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ДАТЧИКОВ СЕМЕЙСТВА “ОБОБЩЕННЫЙ” МАЯТНИК ФУКО, ФУНКЦИОНИРУЮЩИХ НА ДВУХ РАБОЧИХ МОДАХ

© 2021 г. С. Е. Переляев^{1,*}¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: pers2030@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.09.2020 г.

После доработки 14.02.2021 г.

Принята к публикации 10.03.2021 г.

Изложены основы теории новых гироскопических датчиков семейства “обобщенный” маятник Фуко, которые реализованы на основе многомодового упругого осесимметричного высокочастотного резонатора — волнового твердотельного гироскопа. На кромке полусферического кварцевого резонатора такого инерциального датчика одновременно могут возбуждаться и существовать несколько рабочих форм (мод) механических стоячих волн упругих колебаний. Следует отметить, что при возбуждении сразу нескольких мод (форм) колебаний осесимметричного резонатора одновременно возникает несколько независимых каналов дублирующей инерциальной информации ориентации гироскопа в пространстве. Описан физический эффект, лежащий в основе функционирования таких приборов, входящих в рассматриваемый класс свободных гироскопов. Представлены прикладные аспекты реализации фундаментальной теории нового “обобщенного” неуправляемого маятника Фуко в высокоточных инерциальных датчиках ориентации, функционирующих одновременно на двух рабочих модах упругих колебаний. Показано, что для реализации нового способа функционирования двухмодового “обобщенного” неуправляемого маятника Фуко необходимо в каждой конкретной конструкции нового ВТГ организовать возбуждение и достаточно точный съем первичной информации перемещений узлов и пучностей двух основных рабочих мод (форм) колебаний кромки резонатора гироскопа.

Ключевые слова: маятник Фуко, полусферический кварцевый резонатор, волновой твердотельный гироскоп, математический двумерный осциллятор, двухмодовые инерциальные датчики ориентации

DOI: 10.31857/S0032823521060096

1. Введение. В основе работы волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) лежит явление инертности упругих стоячих волн, впервые открытое и доказанное экспериментально американским физиком Д. Линчем с коллегами в 1982 г. Данный эффект инертности упругих стоячих волн был теоретически строго обоснован в 1985 г. известными российскими учеными-механиками В.Ф. Журавлевым и Д.М. Климовым [1].

Теоретическое доказательство эффекта инертности упругих волн для произвольного закона вращения вибрирующей оболочки в виде тонкого кольца выполнено в 1983 г. В.Ф. Журавлевым [2]. Эффект инертности упругих волн в резонаторе любой формы (сфера, полусфера, цилиндр, кольцо и т.д.) состоит в том, что при приложении к нему внешнего момента сил вокруг оси его симметрии ускоренно вращается не только сам

резонатор, но и возбужденная в резонаторе механическая стоячая волна. В частном случае, когда ускорение равно нулю эффект инертности сводится к прецессии волны, являющейся следствием расщепления кратных частот резонатора при постоянной угловой скорости вращения. Эффект расщепления частот, приводящий к модуляции колебаний, был подтвержден экспериментально и теоретически обоснован английским математиком и механиком Д. Брайаном в 1890 г., который рассмотрел случай равномерного вращения вибрирующей оболочки [3]. В разработанном в 1982 г. Д. Линчем интегрирующем ВТГ [4] в качестве инерциального чувствительного элемента используется тонкостенный полусферический резонатор (ПСР), изготовленный из высококачественного плавленого кварца. Изгибные колебания кромки такого резонатора идентичны колебаниям тонкого кольца и подчиняются тем же закономерностям.

Для определения параметров стоячей волны и поддержания постоянной амплитуды колебаний кромки полусферы используется специальная электронная система возбуждения, съема и управления ВТГ. При повороте основания интегрирующего ВТГ вокруг оси симметрии на угол φ упругая стоячая волна поворачивается относительно самого резонатора на угол $\varphi\varphi$, где $0 < \varphi < 1$. В рабочем режиме в такой оболочке резонатора возбуждаются упругие колебания на второй моде (форме) стоячей волны с четырьмя пучностями и четырьмя узлами по контуру края полусферы. Если резонатор неподвижен в инерциальном пространстве, то положение узлов и пучностей стоячей волны неизменно по отношению к окружающему резонатор корпусу прибора, оборудованному системами чувствительных и управляющих электродов. Любой поворот резонатора (вокруг оси симметрии) относительно инерциального пространства приводит к повороту узлов и пучностей стоячей волны по отношению к корпусу прибора. Фундаментальные основы теории одномодовых ВТГ были изложены в [1, 2], исследование погрешностей таких гироскопов с одной основной рабочей модой (формой) упругих колебаний высокодобротного кварцевого резонатора выполнено в публикациях [5, 6]. Принципиальные основы теории одномодовых инерциальных датчиков были успешно реализованы в отечественных и зарубежных конструкциях современных ВТГ.

В настоящее время ВТГ является одним из наиболее перспективных приборов, предназначенных для определения угла поворота или угловой скорости вращения объекта по хорошо известному критерию: себестоимость изготовления/точность получаемой инерциальной информации. В данной работе впервые рассмотрены принципиальные вопросы теории функционирования многомодовых ВТГ, в которых одновременно производится возбуждение и поддержание сразу нескольких рабочих мод (форм) упругих колебаний кромки осисимметричного резонатора (например, второй и третьей).

При этом возникает несколько независимых каналов дублирующей инерциальной информации ориентации гироскопа в пространстве. На основе полученных уравнений функционирования двухмодовых ВТГ может быть создана полнофункциональная имитационная модель прибора, кроме того, с помощью этих уравнений в дальнейшем могут быть реализованы новые методы контроля параметров колебаний и обнаружения углового положения стоячей волны.

2. Основные сведения из механики новых гироскопических систем. Опыты, проведенные в 1851 г. французским механиком и астрономом Фуко [7], а также опыты его многочисленных последователей дали только качественные результаты, подтверждающие с достаточной по тем временам точностью факт вращения Земли с угловой скоростью 11 град/ч относительно местной (Пантеон, г. Париж) вертикали (погрешность составляла по тем временам весьма небольшую величину порядка 1 град/ч). Математическое исследование основных источников погрешностей классического неуправляемого маятника Фуко и новое аналитическое доказательство вращения Земли дал в своей

докторской диссертации в 1879 г. нидерландский физик-экспериментатор Каммерлинг-Оннес [8]. Известно, что математический осциллятор с двумя степенями свободы, выполняющий в современных гироскопах роль маятника Фуко, обычно реализован в виде одной из форм собственных колебаний упругой среды, обладающей осевой симметрией. При этом, в отличие от классического маятника Фуко, вращение упругой среды вокруг оси симметрии датчика вовлекает реализованную форму собственных колебаний во вращение относительно абсолютного (инерциального) пространства. В соответствующем выбранной форме колебаний собственном подпространстве принципиальные вопросы теории нового датчика инерциальной информации могут рассматриваться в рамках одних и тех же уравнений, аналогичных уравнениям классического неуправляемого маятника Фуко.

В современной практике мировой гироскопии появился целый класс новых приборов, в которых фактически реализована идея “обобщенного” маятника Фуко: струнный гироскоп [9], кольцевой гироскоп [10], полусферический кварцевый резонатор (волновой твердотельный гироскоп) [5, 6, 11, 13–15], ВТГ с металлическим цилиндрическим резонатором [16–18], “квапазон” [20], сферический кварцевый резонатор [21].

Все указанные выше новые инерциальные датчики ориентации весьма успешно конкурируют с классическими гироскопами, однако их теория существенно отличается от фундаментальной теории известных симметричных и несимметричных механических гироскопов [22]. Например, кинетический момент, который в механических гироскопах всегда стремились сделать как можно большим, в перечисленных выше новых датчиках должен быть равен нулю [5]. Математический маятник (осциллятор) с двумя степенями свободы, играющий в этих новых приборах роль “обобщенного” маятника Фуко, как правило, реализован в виде одной из форм собственных колебаний упругой среды, обладающей осевой симметрией. При этом, в отличие от классического маятника Фуко, вращение упругой среды вокруг оси симметрии инерциального датчика вовлекает реализованную форму собственных колебаний во вращение относительно неподвижного пространства. Исключение составляет струнный гироскоп, однако отношение угловой скорости (прецессии) формы колебаний относительно упругого тела к угловой скорости тела относительно пространства является строго постоянной величиной, зависящей от номера формы (моды) рабочих колебаний и почти независимой от свойств самого упругого материала. Эта известная постоянная получила название масштабного коэффициента прецессии инерциального датчика, или коэффициента Брайана, по имени первого исследователя колебаний упругой оболочки [3]. Основой ВТГ является прецессия механической стоячей волны на кромке полусферической кварцевой оболочки, скорость которой оказалась пропорциональной скорости вращения основания прибора. При этом эти скорости оказались связаны постоянным коэффициентом Брайана, не зависящим от измеряемой угловой скорости. В публикации [23] рассмотрен подробный вывод основных уравнений новых гироскопических датчиков на примере тонкого упругого кольца. Представлены дифференциальные уравнения колебаний такого кольца в своей плоскости и показано, что эти уравнения допускают точное аналитическое решение в виде гармонической волны. При произвольных начальных условиях эти общие аналитические решения определяют в горизонтальной плоскости (x, y) эллипс. В случае, когда эллипс вырождается в отрезок прямой, общее аналитическое решение определяет в тонком вибрирующем кольце механическую стоячую волну. В случае противоположного вырождения, когда эллипс превращается в окружность, общее решение определяет в тонком упругом кольце бегущую волну, которая не обладает необходимыми инерциальными свойствами. Если угловая скорость основания кольца $\omega \neq 0$, то прямолинейных колебаний в плоскости (x, y) идеальный двумерный осциллятор в общем случае не имеет. Иными словами, во вращающемся упругом кольце стоячие механические волны невозможны. Однако в этом случае в кольце существуют такие колебания, которые в некоторой вра-

щающейся системе координат имеют вид стоячих волн. Такие волны принято называть “прецессирующими” волнами. В публикации [1] подробно изложены принципиальные теоретические основы эксперимента Линча-Скотта и представлен вывод важной для целей современной прикладной гироскопии формулы:

$$\varphi = -\frac{2}{k^2 + 1} \int \omega(t) dt, \quad (2.1)$$

здесь k – номер моды (формы) колебаний, $k = 2, 3, 4 \dots$; $\omega(t)$ – угловая скорость вращения основания (произвольная функция). Следует отметить, что в современных датчиках ВТГ возбуждается одна из рабочих мод (форм) колебаний резонатора, например, вторая ($k = 2$).

Формула (2.1) представляет обобщение результата Брайана для тонкого упругого кольцевого резонатора для произвольной угловой скорости $\omega(t)$. Этот результат является точным [1] и получен для уравнения с переменными коэффициентами, так как $\omega(t)$ считается произвольной функцией. Эффект Брайана [3], как эффект прецессии стоячей волны при вращении резонатора с постоянной угловой скоростью, является эффектом расщепления двукратных частот, поэтому этот эффект имеет малое отношение к тому, что экспериментально было открыто Линчем-Скоттом [19] в 1982 году и использовано ими в известном патенте Линча [12]. Хотя авторы патента ошибочно и сослались на формулу Брайана [3], на самом деле, в подтверждение своей идеи они привели результат эксперимента, в котором поворот первоначально неподвижного вибрирующего резонатора ВТГ на угол $\varphi = 90^\circ$, вызывал поворот стоячей волны на угол $\varphi_w = 30^\circ$, относительно кромки самого резонатора без каких-либо изменений самой формы стоячей волны. Тем самым была установлена следующая экспериментальная формула [14, 19]:

$$\varphi_w = -\frac{1}{3} \varphi \quad (2.2)$$

Полученная в эксперименте Линча формула (2.2) связывает уже не постоянные скорости поворота резонатора, а сами углы поворота при явно непостоянных угловых скоростях.

Изложенное выше можно суммировать в виде: *Теоремы*. Какой бы ни была зависимость угловой скорости тонкого упругого кольца от времени (в классе дифференцируемых на бесконечном полуинтервале функций), существует и единственная вращающаяся относительно кольца система координат, в которой при определенных начальных условиях колебания кольца представляют собой механические стоячие волны [23].

Скорость такой системы координат выражается формулой (2.1). Частным случаем из нее вытекает известный результат Брайана [3], установленный им только для *постоянной (равномерной) угловой скорости* ($\dot{\omega} = 0$) основания осесимметричного резонатора:

$$\omega_w = -\frac{2}{1 + k^2} \omega \quad (2.3)$$

Заметим, что выражение, верное для стационарного случая, как правило, не бывает верным для нестационарного. Формула (2.1) описывает новый физический эффект, не замеченный Брайаном, и впервые установленный экспериментально, авторами известного патента “Vibratory rotational sensor” [12]. Следует заметить, что формулу (2.1) ввиду ее точного характера можно сколько угодно раз аналитически дифференцировать.

В частности, можно отметить, что ускорение механической стоячей волны пропорционально угловому ускорению самого упругого вибрирующего кольца:

$$\left(\frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right) = -\frac{2}{k^2 + 1} \left(\frac{d\omega}{dt} \right) \quad (2.4)$$

Поскольку ускорение тонкого упругого кольца пропорционально приложенному к нему моменту внешних сил M ($I\ddot{\omega} = M$), то можно объективно утверждать, что этот момент вызывает не только ускорение кольца, но и ускорение прецессирующей стоячей волны.

Все сказанное выше позволяет определить обсуждаемый здесь физический эффект в неравномерно вращающемся кольце как новый эффект *инертности упругих волн* в нем. Эффект (2.1), который установлен [1] для общего вида уравнения колебаний без каких-либо приближений, с различной степенью точности верен и для произвольных упругих тел, обладающих осевой симметрией. Различие будет состоять только в величине масштабного коэффициента, равного для кольца $2/(k^2 + 1)$. Можно показать, что для кварцевой полусферы имеем следующую известную формулу прецессии угла волны [1]

$$\varphi_w = -0.312 \int_0^t \omega(t) dt, \quad (2.5)$$

что соответствует повороту осей колебаний механической стоячей волны относительно кромки оболочки на угол 28.1° или относительно инерциального пространства на угол 61.9° при повороте основания данной оболочки на фиксированный угол 90° .

В соответствующем выбранной форме колебаний к собственному подпространству, все принципиальные вопросы теории подобного высокоточного датчика инерциальной информации, могут рассматриваться в рамках одних и тех же уравнений, аналогичных уравнениям классического маятника Фуко. По этой причине весь этот класс приборов может быть назван “*обобщенным*” маятником Фуко [23]. Многие исследователи предполагают, что Земля не вовлекает плоскость колебаний маятника во вращение вокруг местной вертикали. Между тем благодаря нелинейным эффектам неуправляемый маятник Фуко обладает собственной скоростью прецессии вокруг местной вертикали, поэтому необходимо контролировать его собственную прецессию, без чего невозможно осуществлять достоверные и высокоточные измерения угловой скорости вращения Земли.

3. Теория функционирования двухмодового интегрирующего свободного гироскопа типа “обобщенный” маятник Фуко. Общая математическая модель осциллирующей системы, которая показывает пространственное движение, обнаруженное Фуко, излагается в соответствии с фундаментальной теорией [24]. Теория касается большинства современных вибрирующих (осциллирующих) гироскопических механических систем (в частности ВТГ), которые функционируют, как правило, на одной основной (второй) иногда третьей рабочей моде колебаний. Предлагается рассмотреть основы теории принципиально новых комбинированных инерциальных датчиков ориентации, которые функционируют одновременно на двух ($n = 2, 3$) или даже трех рабочих модах колебаний кромки полусферы резонатора ВТГ.

Применительно к идеальной осесимметричной полусфере волнового твердотельного гироскопа рассмотрим по аналогии с [23, 24] дифференциальные уравнения пространственных движений в горизонтальной плоскости кромки резонатора, описывающие динамику двух идеальных двумерных неуправляемых осцилляторов на двух ($n = 2, 3$) основных рабочих модах (формах) колебаний механических стоячих волн:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_n + \Omega_n^2 x_n - 2c\omega \dot{y}_n &= 0 \quad (n = 2, 3) \\ \ddot{y}_n + \Omega_n^2 y_n + 2c\omega \dot{x}_n &= 0 \quad (n = 2, 3) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь переменные x_n и y_n представляют собой текущие координаты двух осциллирующих точек в заданных декартовых системах координат (см. рис. 1 и 2), которые яв-

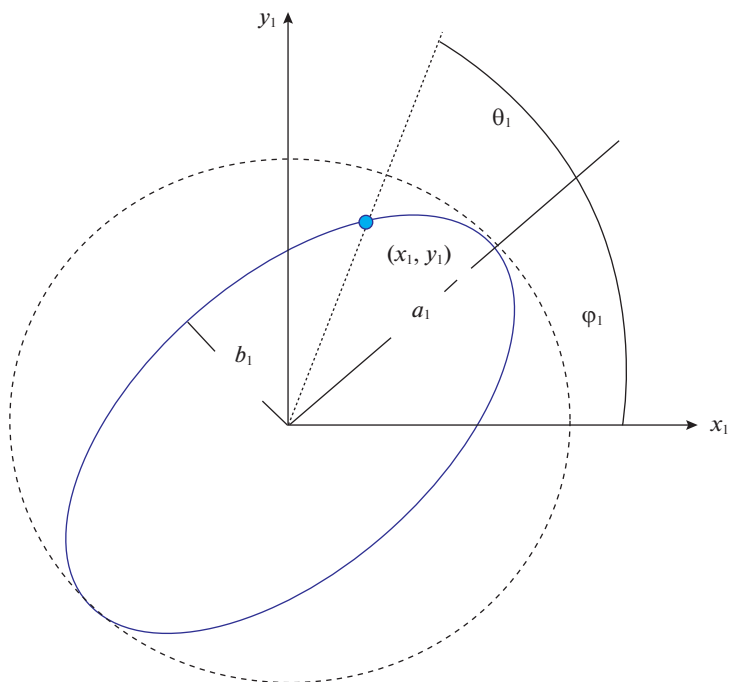


Рис. 1. Орбитальная траектория вибрирующей точки (x_1, y_1) второй моды (формы) колебаний стоячей волны и основные параметры двухмерного осциллятора.

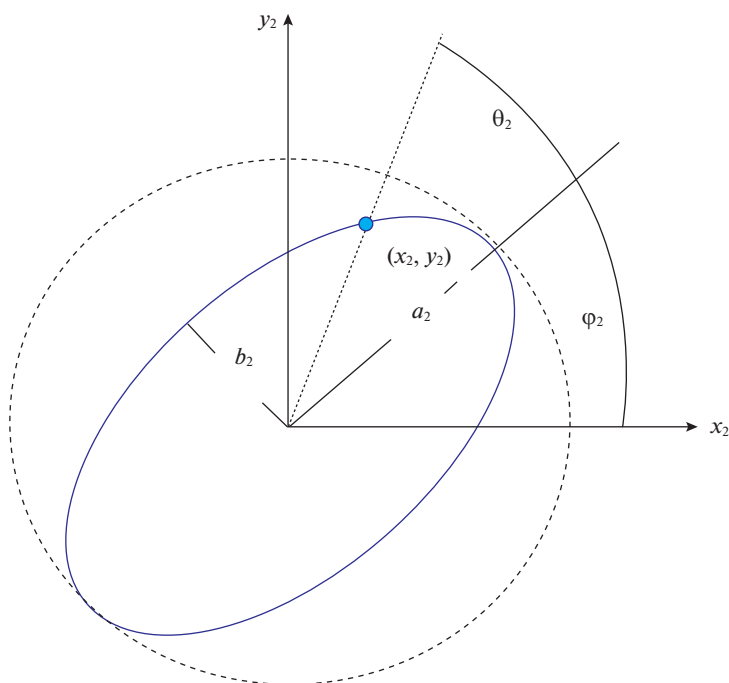


Рис. 2. Орбитальная траектория вибрирующей точки (x_2, y_2) третьей моды (формы) колебаний стоячей волны и основные параметры двухмерного осциллятора.

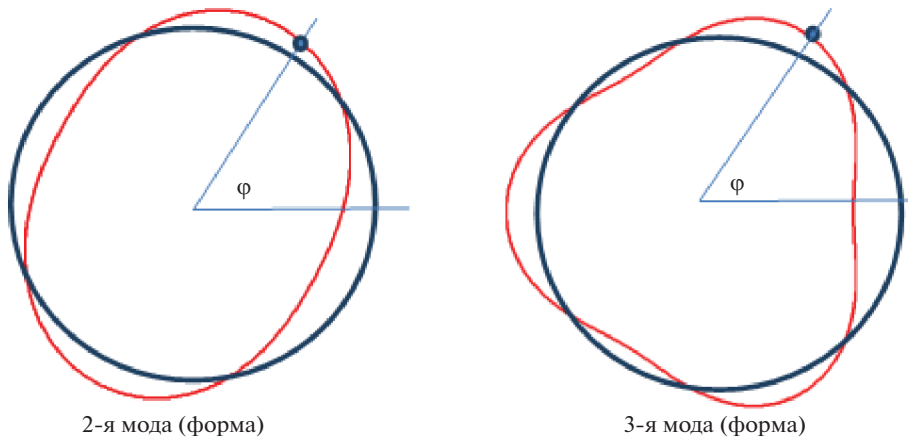


Рис. 3. Рабочие формы (моды) колебаний механической стоячей волны кромки осесимметричного упругого резонатора ВТГ.

ляются наглядными геометрическими интерпретациями двух орбит эллиптических вибраций.

Рабочие моды (формы) колебаний этих двух осцилляторов условно обозначены $n = 2, 3$. Они соответствуют двум основным ($n = 2, 3$) рабочим модам или формам механических стоячих волн колебаний кромки полусферического кварцевого резонатора, как это показано на рис. 3. На каждом рассматриваемом эллипсе имеем соответственно две точки $a_{(n)}$, которые имеют определенные амплитуды колебаний и расположены на продольных осях двух вибрирующих элементов одного комбинированного свободного двухмодового гироскопа; θ_1, θ_2 — углы, которые характеризуют направления (фазы) вибраций в системе координат осесимметричного резонатора; φ_1, φ_2 — углы наклона больших полуосей эллипсов к осям x_1 и x_2 (эти углы определяют текущие местоположения двух рассматриваемых форм (мод) механических стоячих волн колебаний на кромке осциллирующего полусферического резонатора, в которых наблюдаются его радиальные отклонения от окружности); Ω_n частоты колебаний (вибраций) двух идеальных осцилляторов; c — постоянный коэффициент, который зависит от заданной моды и соответствующего данной моде колебаний коэффициента Брайана комбинированного свободного гироскопа; ω — произвольная угловая скорость основания двухмодового гироскопа, которая измеряется в плоскости нормальной горизонтальной системе координат OXY .

Существенная особенность дифференциальных уравнений (3.1) наличие известных гироскопических членов, представляющих собой составляющие $2c\omega\dot{x}_n$, $2c\omega\dot{y}_n$ ускорения Кориолиса на горизонтальные оси OXY указанных выше идеальных двухмерных осцилляторов. Заметим, что эти составляющие полностью соответствуют гироскопическим членам классического неуправляемого “обобщенного” маятника Фуко. Можно привести пример целого класса гироскопов, идеальное пространственное движение которых достаточно точно характеризуется системой дифференциальных уравнений вида (3.1). Все такие инерциальные датчики ориентации обладают гироскопическим эффектом, обнаруженным экспериментально Фуко. Ниже представим обобщающий анализ одного нового типа комбинированных инерциальных датчиков — волновых твердотельных гироскопов (ВТГ), которые функционируют не на одной ра-

бочей моде, а как минимум на двух модах (формах) (рис. 3) резонансных колебаний полусферы одновременно. Имея на входе такого идеального свободного ВТГ нулевую угловую скорость ($\omega = 0$) движения основания прибора в пространстве, перемещения двух вибрирующих материальных точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) такого комбинированного осциллятора, можно наглядно представить двумя эллипсами, которые могут быть определены на основании аналитических решений дифференциальных уравнений вида (3.1). Это легко проверить, подставив в них следующие обобщающие аналитические выражения:

$$\begin{aligned} x_{(n)} &= a_{(n)}(t) \cos(n\theta_{(n)}) \cos(n\varphi_{(n)}) - b_{(n)}(t) \sin(n\theta_{(n)}) \sin(n\varphi_{(n)}) \\ y_{(n)} &= a_{(n)}(t) \cos(n\theta_{(n)}) \sin(n\varphi_{(n)}) + b_{(n)}(t) \sin(n\theta_{(n)}) \cos(n\varphi_{(n)}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Выражения (3.2) определяют мгновенное положение двух вибрирующих материальных точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) на орбитальных траекториях двух вибрирующих эллипсов, при этом скорости перемещения каждой из двух точек по указанным траекториям будут равны

$$\begin{aligned} \dot{x}_{(n)} &= \Omega_n(-a_{(n)}(t) \sin(n\theta_{(n)}) \cos(n\varphi_{(n)}) - b_{(n)}(t) \cos(n\theta_{(n)}) \sin(n\varphi_{(n)})) \\ \dot{y}_{(n)} &= \Omega_n(-a_{(n)}(t) \sin(n\theta_{(n)}) \sin(n\varphi_{(n)}) + b_{(n)}(t) \cos(n\theta_{(n)}) \cos(n\varphi_{(n)})) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь параметры $a_{(n)}$, $b_{(n)}$ – переменные, называемые амплитудами и квадратурами рабочих колебаний двух гармонических осцилляторов, которые определяют основные динамические характеристики свободного движения неуправляемого “обобщенного” маятника Фуко. При этом $a_{(n)}$, $b_{(n)}$ – непосредственно определяют формы эллипсов колебаний, а углы $\varphi_{(n)}$ – их ориентацию на горизонтальной плоскости OXY ; углы $\theta_{(n)(0)}$ – начальные значения (основные фазы) двух орбитальных углов $\theta_{(n)}$, которые определяют положения двух материальных точек на двух вибрирующих эллипсах.

Все эти рассматриваемые параметры представлены на рис. 1 и 2, на которых наглядно отображены основные орбитальные элементы комбинированного (двухмодового) свободного (неуправляемого) волнового твердотельного гироскопа. В приведенных выше обобщающих аналитических решениях (3.2) и (3.3) нижний индекс $(n) = 2, 3$ задает соответственно вторую ($n = 2$) и третью ($n = 3$) рабочую моду колебаний стоячих волн двух идеальных двухмерных осцилляторов. В формулах (3.3) орбитальные углы $\theta_{(n)}$ определяются выражением:

$$\theta_{(n)} = \Omega_n t + \theta_{(n)(0)}$$

В частности, два орбитальных угла $\theta_{(n)}$ измеряются на соответствующих окружностях радиуса $a_{(n)}$ каждой заданной рабочей моды стоячих волн колебаний. Основные параметры этих двух орбит $a_{(n)}$ и $b_{(n)}$ тесно связаны с нормированными энергиями колебаний $E_{(n)}$ и соответствующими кинетическими моментами $H_{(n)}$ [24] двух рассматриваемых идеальных двухмерных осцилляторов следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} a_{(n)} &= \left[E_{(n)} + \sqrt{(E_{(n)}^2 - \Omega_n^2 H_{(n)}^2)} \right]^{1/2} / \Omega_n \quad (n) = 2, 3 \\ b_{(n)} &= \left[E_{(n)} - \sqrt{(E_{(n)}^2 - \Omega_n^2 H_{(n)}^2)} \right]^{1/2} / \Omega_n \quad (n) = 2, 3 \end{aligned} \quad (3.4)$$

При этом постоянные энергии $E_{(n)}$ этих двух комбинированных осцилляторов и их кинетические моменты $H_{(n)}$ могут быть выражены простыми аналитическими выражениями:

$$\begin{aligned} E_{(n)} &= \left[\Omega_n^2 (x_{(n)}^2 + y_{(n)}^2) + (\dot{x}_{(n)}^2 + \dot{y}_{(n)}^2) \right] / 2 & (n) = 2, 3 \\ H_n &= (x_{(n)} \dot{y}_{(n)} - y_{(n)} \dot{x}_{(n)}) & (n) = 2, 3 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Параметры $E_{(n)}$ и $H_{(n)}$, для идеальных двухмерных осцилляторов колебаний вида (3.1), являются постоянными величинами и поэтому их можно довольно просто выразить через введенные выше параметры — амплитуд $a_{(n)}$ и квадратур $b_{(n)}$ второй и третьей рабочих мод колебаний комбинированного гироскопа:

$$\begin{aligned} E_{(n)} &= \Omega_n^2 (a_{(n)}^2 + b_{(n)}^2) / 2 & (n) = 2, 3 \\ H_n &= \Omega_n (a_{(n)} b_{(n)}) & (n) = 2, 3 \end{aligned} \quad (3.6)$$

На основании выражений (3.6) можно сделать следующий важный вывод о том, что движения двух материальных точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) по траекториям двух вибрирующих эллипсов переходят в движения, которые описываются двумя прямыми линиями, тогда и только тогда, когда для заданных выше двух рабочих мод колебаний идеальных парциальных осцилляторов выполняются два безусловных требования: $b_{(2)} = 0$ и $b_{(3)} = 0$. Последнее означает, что при выполнении этих двух основных требований кинетические моменты H_n этих двух идеальных осцилляторов также будут строго равны нулю ($H_n \equiv 0$).

Искомые углы $2\varphi_{(n)}$ и $3\varphi_{(n)}$ наклона продольных осей двух указанных выше вибрирующих эллипсов определяются следующими аналитическими выражениями:

$$\begin{aligned} \sin(n\varphi_{(n)}) &= \left[\Omega_n^2 x_{(n)} y_{(n)} + \dot{x}_{(n)} \dot{y}_{(n)} \right] / \left[\sqrt{(E_{(n)}^2 - \Omega_n^2 H_{(n)}^2)} \right] & (n) = 2, 3 \\ \cos(n\varphi_{(n)}) &= \left[\Omega_n^2 (x_{(n)}^2 - y_{(n)}^2) + \dot{x}_{(n)}^2 - \dot{y}_{(n)}^2 \right] / 2 \left[\sqrt{(E_{(n)}^2 - \Omega_n^2 H_{(n)}^2)} \right] & (n) = 2, 3 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Можно показать, что соответствующие углы $n\varphi_{(n)}$ наклона двух рассматриваемых эллипсов колебаний на второй ($n = 2$) и третьей ($n = 3$) рабочих модах функционирования идеальных двухмерных парциальных осцилляторов являются постоянными для движений, которые заданы дифференциальными уравнениями (3.1) только для одного частного случая, когда угловая скорость основания двухмодового гироскопа равна нулю.

Наконец орбитальные углы $\theta_{(n)}$ двух эллиптических траекторий соответствующих двум рабочим модам ($n = 2, 3$) механических стоячих волн колебаний могут быть представлены следующими аналитическими выражениями:

$$\begin{aligned} \cos(n\theta_{(n)}) &= \left[\Omega_n^2 (x_{(n)}^2 + y_{(n)}^2) - (\dot{x}_{(n)}^2 + \dot{y}_{(n)}^2) \right] / \sqrt{(E_{(n)}^2 - \Omega_n^2 H_{(n)}^2)} \\ \sin(n\theta_{(n)}) &= -\Omega_n (x_{(n)} \dot{x}_{(n)} + y_{(n)} \dot{y}_{(n)}) / \sqrt{(E_{(n)}^2 - \Omega_n^2 H_{(n)}^2)} & (n) = 2, 3 \\ \cos(n\theta_{(n)}) &= \left[\Omega_n^2 (x_{(n)}^2 - y_{(n)}^2) - (\dot{x}_{(n)}^2 - \dot{y}_{(n)}^2) \right] / \sqrt{(E_{(n)}^2 - \Omega_n^2 H_{(n)}^2)} & (n) = 2, 3 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Следует заметить, что эти два орбитальных угла не являются строго постоянными, однако можно отметить, что их значения увеличиваются со временем строго по линейному закону.

Здесь следует рассмотреть важные для практических реализаций конкретных комбинированных двухмодовых свободных гироскопов следующие прикладные аспекты.

Случай 1: Входная угловая скорость не равна нулю ($\omega \neq 0$). В данном случае решения уравнений (3.1) не являются периодическими с частотами Ω_n и орбиты двух рассматриваемых материальных точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) больше не являются эллипсами.

Случай 2: Входная угловая скорость основания ω относительно абсолютно точных величин рабочих частот Ω_n ($(n) = 2, 3$) идеальных двухмерных осцилляторов является относительно малой величиной. В данном случае внешний вид двух таких орбит почти точно соответствует двум эллипсам, которые медленно прецессируют, а колебания самих материальных точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) на этих орбитах будут почти периодическими.

В данном случае целесообразно определить основные параметры $a_{(n)}$, $b_{(n)}$, $\theta_{(n)}$ и $\theta_{(n)(0)}$, как осциллирующие на двух основных рабочих модах орбитальные элементы, по аналогии с орбитальными элементами, используемыми в классической небесной механике. Важно отметить, что применительно к гармоническим двухмерным осцилляторам, предлагается определять не мгновенные положения материальных точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) на соответствующих эллипсах, движение по орбитам которых происходит с частотами на много превышающими частоту измеряемой каждым таким осциллятором входной угловой скорости основания прибора, а непосредственно сами орбитальные элементы. Соответственно, вместо непосредственного решения исходных дифференциальных уравнений второго порядка (3.1), при действии на вход двух парциальных осцилляторов переменной угловой скорости $\omega \neq 0$, предлагается воспользоваться решением орбитальных уравнений первого порядка относительно переменных $a_{(n)}$, $b_{(n)}$, $\Phi_{(n)}$ и $\theta_{(n)(0)}$.

Используя указанные орбитальные параметры, которые заданы выражениями (3.4), (3.7) и (3.8) можно показать, что новые дифференциальные уравнения для медленных переменных $a_{(n)}$, $b_{(n)}$, $\theta_{(n)}$ и $\theta_{(n)(0)}$ имеют следующие аналитические выражения:

$$\begin{aligned} \dot{a}_{(n)} &= -2\omega_{(n)}b_{(n)}\sin(n\theta_{(n)})/n & (n) &= 2, 3 \\ \dot{b}_{(n)} &= 2\omega_{(n)}a_{(n)}\sin(n\theta_{(n)})/n & (n) &= 2, 3 \\ \dot{\Phi}_{(n)} &= 2\omega_{(n)}(b_{(n)}^2\cos^2(\theta_{(n)}) - a_{(n)}^2\sin^2(\theta_{(n)})/(a_{(n)}^2 - b_{(n)}^2) & (n) &= 2, 3 \\ \dot{\theta}_{(n)} &= -2\omega_{(n)}a_{(n)}b_{(n)}\cos(n\theta_{(n)})/(a_{(n)}^2 - b_{(n)}^2) + \Omega_{(n)} & (n) &= 2, 3 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь во всех уравнениях (3.9) входная угловая скорость ω соответствует выражению

$$\omega_{(n)} = nk_b\omega,$$

где k_b — коэффициент Брайана, n — номер (2,3) рассматриваемой моды (формы) колебаний.

Дифференциальные уравнения (3.9) являются точными и явно зависят от входной угловой скорости ω основания комбинированного двухмодового инерциального датчика.

Следует отметить, что здесь величина входной угловой скорости ω не имеет каких-либо абсолютных ограничений. Обычно (во многих реальных практических ситуациях) входная угловая скорость ω намного меньше, чем рабочие частоты $\Omega_{(n)}$ рассматриваемых идеальных двухмерных осцилляторов. Более того, как выше отмечалось в таких инерциальных датчиках величины квадратур второй ($b_{(2)}$) и третьей ($b_{(3)}$) рабочих мод колебаний этих двухмерных осцилляторов абсолютно точно поддерживаются ну-

левыми ($b_{(n)} = 0$). Поэтому на основании точного уравнения (3.9) имеем следующие выражения:

$$\dot{\theta}_{(n)} \approx \Omega_n, \quad \theta_{(n)} \approx \Omega_n t + \theta_{(n)}(0)$$

Можно также отметить, что правые части всех четырех дифференциальных уравнений (3.9) являются практически периодическими с периодами пропорциональными двум рабочим модам колебаний рассматриваемых идеальных двухмерных осцилляторов.

Более того, за полные периоды T_2 и T_3 колебаний на второй Ω_2 ($T_2 = 2\pi/\Omega_2$) и третьей Ω_3 ($T_3 = 2\pi/\Omega_3$) резонансных частотах (соответствующих двум рабочим модам) все орбитальные параметры, за исключением двух орбитальных углов $\theta_{(2)}$ и $\theta_{(3)}$, остаются практически постоянными величинами. Поэтому приближенные решения уравнений (3.9) в течение указанных полных периодов определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} a_{(n)}(t+T) &\approx a_n(t) - \omega_{(n)} b_{(n)}(t) / \int_t^{t+T} \sin(n\theta_{(n)}) dt \\ b_{(n)}(t+T) &\approx b_n(t) + \omega_{(n)} a_{(n)}(t) / \int_t^{t+T} \sin(n\theta_{(n)}) dt \\ \varphi_{(n)}(t+T) &\approx \varphi_n(t) + \frac{2\omega_{(n)}}{(a_{(n)}^2(t) - b_{(n)}^2(t))} \int_t^{t+T} (b_{(n)}^2 \cos^2(\theta_{(n)}) - (b_{(n)}^2 \sin^2(\theta_{(n)})) dt \end{aligned} \quad (3.10)$$

Одновременно имеем

$$\int_t^{t+T} \sin(n\theta_{(n)}) dt = 0; \quad \int_t^{t+T} \sin^2 \theta_{(n)} dt = \int_t^{t+T} \cos^2 \theta_{(n)} dt = \frac{1}{2}$$

Поэтому очевидно, что уравнения (3.10) становятся равными следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \dot{a}_{(n)}(t+T) &\approx a_n(t); \quad \dot{b}_{(n)}(t+T) \approx b_n(t) \\ \dot{\varphi}_{(n)}(t+T) &\approx \varphi_n(t) + \frac{\omega_{(n)}(b_{(n)}^2(t) - a_{(n)}^2(t))}{(a_{(n)}^2(t) - b_{(n)}^2(t))} \end{aligned}$$

Аналогичные результаты могут быть получены при решении следующих более простых дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{a}_{(n)}(t) = 0, \quad \dot{b}_{(n)}(t) = 0, \quad \dot{\varphi}_{(n)}(t) = -\omega_{(n)}, \quad \dot{\theta}_{(n)} = \Omega_n \quad (3.11)$$

Таким образом, что касается долговременного функционирования рассматриваемого двухмодового ($n = 2, 3$) гироскопа — идеального осциллятора класса неуправляемого “обобщенного” маятника Фуко, т.е. исследуя изменения основных орбитальных параметров $\dot{a}_{(n)}$, $\dot{b}_{(n)}$, $\dot{\varphi}_{(n)}$ и $\dot{\theta}_{(n)}$ на достаточно большом общем числе периодов наблюдения T_n , то можно заметить, что все указанные выше переменные достаточно точно соответствуют дифференциальным уравнениям вида (3.11). Данные уравнения описывают два вибрирующих эллипса, которые имеют постоянные формы ($\dot{a}_{(n)} = \dot{b}_{(n)} = \text{const}$) и прецессируют с постоянной угловой скоростью. Поскольку системы координат, в которых прецессируют указанные эллипсы, обычно фиксируются относительно измерительных (приборных) осей комбинированного гироскопа, то в инерциальном пространстве (неподвижных звезд) оба представленных эллипса прецессируют с нуле-

вой угловой скоростью и остаются неподвижными. Тем самым подтверждается наличие известных гироскопических членов Кориолиса в исходных дифференциальных уравнениях вида (3.1), описывающих поведение “обобщенного” неуправляемого маятника Фуко.

4. Способ определения углов поворота двухмодового гироскопа. Для реализации нового способа функционирования двухмодового “обобщенного” неуправляемого маятника Фуко необходимо в каждой конкретной конструкции нового волнового твердотельного гироскопа организовать достаточно точный съем первичной информации перемещений двух материальных точек, которые показаны на рис. 1 и 2.

В предлагаемом новом способе необходимо вычислять нормированные энергии $E_{(n)}$ ($n = 2, 3$) и/или амплитуды $a_{(n)}$ колебаний двух осцилляторов и их кинетические моменты H_n ($n = 2, 3$) и/или квадратуры $b_{(n)}$ колебаний в соответствии с формулами (3.5). Определив полные энергии колебаний и их кинетические моменты можно достаточно точно контролировать по формулам (3.4) соответствующие амплитуды и квадратуры двух рабочих мод (форм) колебаний механических стоячих волн двухмодового гироскопа. Отметим, что все вычисления по указанным выше формулам основываются только на точных измерениях переменных $x_{(n)}(t)$ и $y_{(n)}(t)$, а также, соответственно, их первых производных $\dot{x}_{(n)}(t)$ и $\dot{y}_{(n)}(t)$, которые задают положение волны на кромке резонатора. Этих первичных данных полностью достаточно для определения двух искомым углов $2\varphi_2$ и $3\varphi_3$ наклона рассматриваемых эллипсов колебаний (см. рис. 1 и 2) в соответствие с исходными формулами (3.7), что и представляет собой конечную цель нового способа реализации “обобщенного” неуправляемого маятника Фуко как комбинированного (двухмодового) свободного (интегрирующего) ВТГ. При произвольных начальных условиях аналитические выражения (3.2) определяют в горизонтальной плоскости (x, y) два вибрирующих эллипса, которые соответствуют двум основным рабочим модам колебаний. В случае, когда эллипсы вырождаются в отрезки прямых, решения (3.2) определяют в рассматриваемых идеальных двухмерных парциальных осцилляторах механические стоячие волны, которые обладают важными инерционными свойствами.

В случае противоположного вырождения, когда соответствующие эллипсы превращаются в окружности, формулы (3.2) определяют в этих же осцилляторах бегущие волны, которые не обладают необходимыми инерционными свойствами. Исходя из этого, для самых простых прикладных способов реализации двухмодовых свободных ВТГ, достаточно поддерживать заданные амплитуды $a_{(n)} = \text{const}$ и нулевые квадратуры $b_{(n)} = 0$ в узлах двух форм колебаний кромки полусферического резонатора ВТГ.

Можно показать, что для режима свободной волны и применительно к третьей моде (форме стоячей волны) колебаний для высокочастотной кварцевой полусферы, имеем следующую формулу прецессии угла волны:

$$\varphi_w = -0.248 \int_0^t \omega(t) dt,$$

что соответствует повороту осей колебаний стоячей волны относительно кромки оболочки на угол 22.32° или относительно инерциального пространства на угол 67.68° при повороте основания данной оболочки на фиксированный угол 90° .

Следует подчеркнуть, что в данном способе реализации режима измерения углов поворота основания нового двухмодового инерциального датчика относительно исходного (начального) положения необходима приборная реализация двух независимых каналов съема первичной информации и определения положения механической стоячей волны упругих колебаний на кромке кварцевой полусферы и определения

произвольных поворотов основания в соответствии с формулами преобразований (3.7), поэтому точность предлагаемого способа реализации двухмодового интегрирующего гироскопа приблизительно в 1.4 раза превышает точность классического одномодового ВТГ.

Что касается прикладных аспектов реализации теории интегрирующих гироскопов на базе новых конструкций [25, 26] двухмодовых волновых твердотельных гироскопов, то следует отметить, что в уравнениях (3.1) следует, вместо входной угловой скорости ω , ввести общий параметр $nk_b\omega$, где n — номер рассматриваемой моды (формы) колебаний, k_b — коэффициент Брайана реализации “обобщенного” маятника Фуко.

Заключение. Теория двухмодовых инерциальных датчиков ориентации позволила синтезировать математическую модель функционирования новых гироскопов семейства “обобщенный” неуправляемый маятник Фуко.

Математическая модель двухмодового ВТГ обычно используется для изучения перемещений кромки высокочастотного полусферического резонатора одновременно на второй и третьей рабочих модах упругих колебаний и создания методов точного съема первичной информации о положении механической стоячей волны.

Возбуждение одновременно двух рабочих мод (форм) колебаний осесимметричного резонатора требует реализации двух независимых каналов функциональной (обслуживающей) электроники, которые обеспечивают дублирующей инерциальной информацией ориентации гироскопа в пространстве.

Два одновременно функционирующих канала инерциальной информации повышают точность предлагаемого способа реализации двухмодового интегрирующего гироскопа приблизительно в 1.4 раза по сравнению с точностью классического одномодового ВТГ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
2. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. О динамических эффектах в упругом вращающемся кольце // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 5. С. 17–24.
3. Bryan G.H. On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell // Proc. Camb. Phil. Soc. 1890. V. VII. P. 101–111.
4. Loper E.J., Jr., Lynch D.D. Sonic Vibrating Bell Gyro // U.S. Patent 4.157.04.1, June 5, 1979.
5. Журавлев В.Ф. Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 3. С. 6–19.
6. Lynch D.D. Vibrating gyro analysis by method of averaging // 2nd Saint-Petersburg Int. Conf. on Gyroscopic Technology and Navigation. St.-Petersburg: 1995. P. 26–34.
7. Foucault L. Demonstration physique du mouvement de la Terre au moyen du pendule // C.R. Acad. Sci. Paris, 1851. V. 32. P. 135–138.
8. Kamerlingh Onnes H. Nieuwe bewijzen voor de aswenteling der aarde. Ph.D. Disertation. Groningen, Netherlands, 1879.
9. Quick W.H. Theory of vibrating string as an angular motion sensor // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1964. V. 31. № 3. P. 523–534.
10. Stiles J.C. Vibrating ring gyro // U.S. Patent. 1975. № 3. 924,475. Dec. 9.
11. Loper E.J., Lynch D.D. Sonic Gyro Fabrication and Testing // Delco Electronics Division. Rep. R77-64. August 1977.
12. Loper E.J., Lynch D.D. Sonic Vibration Bell Gyro // Patent. no. 4157041, USA, 1979.
13. Loper E.J., Lynch D.D. The HRG: a new low-noise inertial rotation sensor // Proc. 16th Jt. Services Data Exchange for Inertial Systems. Los Angeles. CA. 1982.
14. Loper E.J., Lynch D.D. Projected system performance based on recent HRG test results // Paper S83–105. IEEE/AIAA 5th Digital Avionics Systems Conf. Oct. 31–Nov. 3. 1983.
15. Loper E.J., Lynch D.D. Vibratory rotational sensor // Patent EU. no. 0141621 A2. 1984.

16. *Burdess J.S.* The dynamics of a thin piezoelectric cylinder gyroscope // *Proc. Inst. Mech. Engrs.* London. 1986. V. 200. № C4. P. 271–280.
17. *Koning M.G.* Vibrating cylinder gyroscope and method // *Patent.* № 4793195. USA. 1988.
18. *Fox C.H.* Vibrating cylinder rate gyro, theory of operation and error analysis // *DGON Symp. Gyro Technology.* Stuttgart. 1988.
19. *Scott W.B.* Delco makes low-cost gyro prototype // *Aviation Week&Space Technol.* 1982. P. 64–65.
20. *Leger P.* Quapason – a new low-cost vibrating gyroscope // *3rd Saint-Petersburg Int. Conf. On Integrated Navigation Systems.* St.-Petersburg, 1996. Pt. 1. P. 143–149.
21. *Zhuravlev V.Ph., Pereleyev S.E.* The generalized Foucault pendulum is a 3d integrating gyroscopes using the three-dimensional precession of standing waves in a rotating spherically symmetric elastic solid // *Inertial Sensors&Syst. ISS 2019 – Proc. German Inst. Navigation (DGON).* 2019. P06.
22. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
23. *Журавлев В.Ф.* Принципиальные вопросы теории новых гироскопических датчиков семейства “обобщенный маятник Фуко” // В кн.: *Проблемы механики: Сб. статей. К 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского* / Под ред. *Климова Д.М.* М.: Физмазлит, 2003. 832 с.
24. *Friedland B., Hutton M.F.* Theory and Error Analysis of Vibrating-Member Gyroscope // *IEEE Trans. Autom. Control.* 1978. V. AC-23. № 4.
25. *Переляев С.Е., Бодунов Б.П., Бодунов С.Б.* Волновой твердотельный гироскоп – инерциальный датчик нового поколения // *Мат XXIV С.-Петербургской межд. конф. по интегрированным навигационным системам.* СПб.: ЦНИИ “Электроприбор”, 2017. С. 287–290.
26. *Журавлев В.Ф., Переляев С.Е., Бодунов Б.П., Бодунов С.Б.* Миниатюрный волновой твердотельный гироскоп нового поколения для бескарданных инерциальных навигационных систем беспилотных летательных аппаратов. // *XXVI С.-Петербургская межд. конф. по интегрированным навигационным системам.* СПб.: ЦНИИ “Электроприбор”, 2019. С. 250–254.

Theory of New Gyroscopic Sensors Family “Generalized” Pendulum Foucault, Operating on Two Working Modes

S. E. Pereleyev^{a,#}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: pers2030@yandex.ru*

The foundations of the theory of the new gyroscope sensors of “generalized” Foucault pendulum family, which are implemented on the basis of multimodal elastic axisymmetrical high-Q resonator – the hemispherical resonator gyroscope (HRG), are set out. On the edge of the hemispherical quartz resonator of such inertial sensor, multiple operational wave forms (modes) of mechanical standing waves of elastic vibrations can be excited and coexist simultaneously. Note that when multiple modes (forms) of vibrations of axisymmetrical resonator are excited simultaneously, multiple independent channels of duplicated inertial information on gyroscope orientation in space are created. The physical effect, which forms the basis of functioning of such sensors, belonging to the free gyroscope class under consideration, is described. The application aspects of implementing the fundamental theory of the new “generalized” uncontrolled Foucault pendulum in high accuracy inertial orientation sensors, which function with two operational modes of elastic vibrations simultaneously, are presented. To implement the new way of functioning for the two-mode “generalized” uncontrolled Foucault pendulum, in each particular design of the new HRG it is necessary to provide excitation and sufficiently accurate acquisition of primary information on nodes and antinodes of two main operational modes (forms) of vibration of the edge of the gyroscope’s resonator.

Keywords: classical Foucault pendulum, hemispherical resonator gyroscope, wave solid-state gyroscope, two-dimensional oscillator, two-mode “generalized” uncontrolled Foucault pendulum

REFERENCES

1. *Zhuravlev V.F., Klimov D.M.* Wave Solid-State Gyroscopes. Moscow: Nauka, 1985. 126 p. (in Russian)
2. *Zhuravlev V.Ph., Klimov D.M.* Dynamic effects in an elastic rotating ring // *Mech. Solids*, 1983, vol. 18, no. 5, pp. 15–21.
3. *Bryan G. H.* On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell // *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1890, vol. VII, Nov. 24, pp. 101–111.
4. *Loper E.J., Jr.; Lynch D.D.* Sonic vibrating bell gyro // U.S. Patent 4.157.04.1, June 5, 1979.
5. *Zhuravlev V.Ph.* Theoretical foundations of wave solid gyroscope (WSG) // *Mech. Solids*, 1993, vol. 28, no. 3, pp. 3–15.
6. *Lynch D.D.* Vibrating gyro analysis by method of averaging // 2nd St.-Petersburg Int. Conf. On Gyroscopic Technology and Navigation. St.-Petersburg, 1995. P. 26–34.
7. *Foucault L.* Demonstration physique du mouvement de la Terre au moyen du pendule // *C.R. Acad. Sci. Paris*, 1851, vol. 32, pp. 135–138.
8. *Kamerlingh Onnes H.* Nieuwe bewijzen voor de aswenteling der aarde // Ph.D. Diss. Groningen, Netherlands, 1879.
9. *Quick W.H.* Theory of vibrating string as an angular motion sensor // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.*, 1964, vol. 31, no. 3, pp. 523–534.
10. *Stiles J.C.* Vibrating ring gyro // U.S. Patent, 1975, no. 3, 924,475-Dec, 9.
11. *Loper E.J., Lynch D.D.* Sonic gyro fabrication and testing // Delco Electronics Division, Rep. R77-64, August 1977.
12. *Loper E.J., Lynch D.D.* Sonic vibration bell gyro // Patent. no. 4157041, USA, 1979.
13. *Loper E.J., Lynch D.D.* The HRG: a new low-noise inertial rotation sensor // *Proc. 16th Jt. Services Data Exchange for Inertial Systems*. Los Angeles. CA. 1982.
14. *Loper E.J., Lynch D.D.* Lynch projected system performance based on recent HRG test results // Paper S83–105, IEEE/AIAA 5th Digital Avionics Systems Conference, Oct. 31–Nov. 3, 1983.
15. *Loper E.J., Lynch D.D.* Vibratory rotational sensor // Patent EU, no. 0141621 A2, 1984.
16. *Burdess J.S.* The dynamics of a thin piezoelectric cylinder gyroscope // *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, London, 1986, vol. 200, no. C4, pp. 271–280.
17. *Koning M.G.* Vibrating cylinder gyroscope and method // Patent №4793195, USA, 1988.
18. *Fox C.H.* Vibrating cylinder rate gyro, theory of operation and error analysis // *DGON Symp. Gyro Technology*, Stuttgart, 1988.
19. *Scott W.B.* Delco makes low-cost gyro prototype // *Aviation Week&Space Technol.*, 1982, October 25, pp. 64–65.
20. *Leger P.* Quapason – a new low-cost vibrating gyroscope // 3rd St.-Petersburg Int. Conf. On Integrated Navigation Systems. St.-Petersburg, 1996, pt. 1, pp. 143–149.
21. *Zhuravlev V.Ph., Perelyaev S.E.* The generalized Foucault pendulum is a 3d integrating gyroscopes using the three-dimensional precession of standing waves in a rotating spherically symmetric elastic solid // *Inertial Sensors&Syst.*, ISS, 2019, Proc, German Inst. of Navigation (DGON), P06, 2019.
22. *Ishlinskiy A.Yu.* Orientation, Gyroscopes and Inertial Navigation. Moscow: Nauka, 1976. 670 p. (in Russian)
23. *Zhuravlev V.Ph.* Fundamental questions of the theory of new gyroscopic sensors of the “generalized Foucault pendulum” family // in: *Problems of Mechanics: Collection of articles. Dedicated to the 90th anniversary of the birth of A.Y. Ishlinsky* / Ed. by *D.M. Klimov*. Moscow: Fizmatlit, 2003. 832 p. (in Russian)
24. *Friedland B., Hutton M.F.* Theory and Error Analysis of Vibrating-Member Gyroscope // *IEEE Trans. on Autom. Control*, vol. AC-23, no. 4, 1978, pp. 545–556.
25. *Perelyaev S.E., Bodunov B.P., Bodunov S.B.* Solid-state wave gyroscope: A new-generation inertial sensor // *Proc. 24th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems, ICINS*, 2017.
26. *Zhuravlev V.Ph., Perelyaev S.E., Bodunov B.P., Bodunov S.B.* New-generation small-size solid-state wave gyroscope for strapdown inertial navigation systems of unmanned aerial vehicle // *Proc. 26th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems, ICINS 2019*, 2019.

УДК 533.6.011,517.958

УГОЛ ПРИМЫКАНИЯ ЗВУКОВОЙ ЛИНИИ К ОБТЕКАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

© 2021 г. Г. Б. Сизых^{1,*}¹ *Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия***e-mail: o1o2o3@yandex.ru*

Поступила в редакцию 10.02.2021 г.

После доработки 29.06.2021 г.

Принята к публикации 01.07.2021 г.

Рассматривается вопрос об угле примыкания звуковой линии к обтекаемой поверхности в течениях с однородными полями энтропии и полной энтальпии. Проводится строгое (без применения асимптотических, численных и других приближенных методов) исследование уравнений Эйлера. Рассматриваются плоскопараллельные и незакрученные осесимметричные течения. Показывается, что угол примыкания звуковой линии зависит от кривизны поверхности. Если поверхность выпукла в сторону течения, то величина угла примыкания с дозвуковой стороны будет строго больше 90 градусов. Если поверхность вогнута в сторону течения, то величина угла примыкания с дозвуковой стороны будет строго меньше 90 градусов. Примыкание к прямолинейному участку поверхности в плоскопараллельном течении всегда происходит по нормали. В незакрученных осесимметричных течениях, если звуковая линия примыкает к прямолинейной образующей, параллельной оси симметрии, также возможно только примыкание по нормали. Для случая, когда прямолинейная образующая не параллельна оси симметрии, показывается, что угол примыкания со звуковой стороны только прямой (примыкание по нормали) или нулевой (примыкание по касательной).

Ключевые слова: уравнения Эйлера, трансзвуковые течения, звуковая линия, угол примыкания звуковой линии

DOI: 10.31857/S0032823521050088

В трансзвуковой аэродинамике важное место занимают исследования течений со звуковыми линиями. Наиболее известные свойства звуковых линий получены для стационарных потенциальных течений [1, 2]. Для плоскопараллельных течений доказана теорема [1] (теорема Никольского–Таганова), из которой следует, что если двигаться вдоль звуковой линии так, чтобы область дозвуковых скоростей лежала слева, то вектор скорости будет монотонно (может быть, не строго монотонно) поворачиваться по часовой стрелке. В общем пространственном случае исследованы течения [2], в которых нет сверхзвуковых точек, но есть хотя бы одна звуковая точка. Доказано, что если звуковая точка лежит не на границе, а внутри течения, то через нее проходит плоская поверхность (в двухмерном случае — прямая линия или часть прямой линии), простирающаяся до границ течения и состоящая из звуковых точек, причем вектор (звуковой) скорости в каждой точке этой поверхности направлен по нормали к ней. Из этого факта для широкого класса обтекаемых тел следует [2], что первые звуковые точки при медленном (когда в каждый момент времени картину течения можно считать стационарной) увеличении скорости набегающего потока появляются именно на поверхности обтекаемых тел. Последнее обстоятельство учитывается при построе-

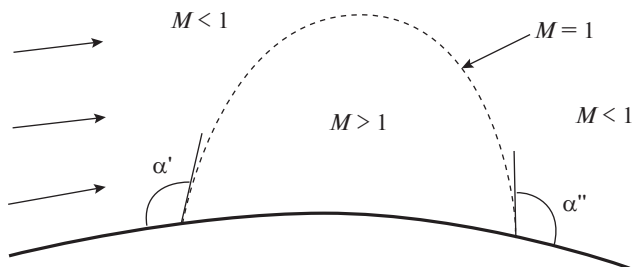


Рис. 1. Местная сверхзвуковая зона над обтекаемой поверхностью.

нии конфигураций с максимальным критическим числом Маха (например, [3]). Вопрос об изолированности таких точек на звуковой линии, в которых нарушается строгая монотонность поворота вектора скорости, рассмотрен в монографии [4]. В этой же монографии исследуется местная сверхзвуковая область, ограниченная обтекаемой поверхностью, слабой ударной волной и звуковой линией. В учебнике [5] можно найти решение задачи о звуковой струе. Это режим истечения дозвукового потока из сужающегося сопла в пространство с пониженным давлением, сопровождающийся дополнительным разгоном потока до скорости звука, при котором однородный звуковой поток (звуковая струя) образуется на конечном расстоянии от среза сопла и следует за плоской звуковой поверхностью перпендикулярно ей. Другие интересные факты, связанные со звуковыми линиями в соплах, можно найти в учебнике [6], где, в частности, отражены результаты [7] исследования звуковой линии в окрестности центра сопла Лавалья. Там же приведено доказательство двухмерной теоремы, аналогичной теореме [2] (о существовании и прямолинейности звуковой линии, проходящей через звуковую точку) для течений, в которых кроме звуковых и дозвуковых точек могут быть и сверхзвуковые точки. Следует заметить, что первые результаты о прямых звуковых линиях для симметричных сопел (например, [8, 9]) получены ранее результатов [1, 2]. Исследования [1, 2] упомянуты выше в первую очередь потому, что они относятся как к течениям в несимметричных каналах, так и к внешнему обтеканию. Более полный обзор работ по звуковым линиям в соплах можно найти в статье [10], где, в том числе, получена форма остроконечной головной части такого осесимметричного тела, при осесимметричном обтекании которого реализуется одновременно две звуковые линии. Прямая звуковая линия, ортогональная оси симметрии, и примыкающая к ней и проходящая по поверхности тела звуковая линия тока.

В статьях и монографиях, посвященных исследованию местных сверхзвуковых зон, примыкание звуковой линии к обтекаемой поверхности изображают обычно [1, 4–6] так, что углы примыкания звуковой линии с дозвуковой стороны больше 90 градусов (углы α' и α'' на рис. 1).

Такая же картина наблюдается не только при изображении местных сверхзвуковых зон. Показано [6], что в сопле Лавалья возможны два типа звуковых линий, одна из которых искривлена, а другая прямолинейна. На соответствующем рисунке [6] искривленная звуковая линия примыкает к стенке под углом больше 90 градусов с дозвуковой стороны, а прямая — по нормали. Факт примыкания прямой звуковой линии по нормали представляется очевидным, поскольку на всей прямой звуковой линии скорость газа ортогональна звуковой линии. Что касается угла примыкания искривленной звуковой линии, то, как в случае сопла Лавалья, так и в случае обтекаемой поверхности (рис. 1), данные об этом вопросе, основанные на строгом анализе полных уравнений Эйлера в окрестности точки примыкания, отсутствуют в доступной литературе, что и побудило провести настоящее исследование.

1. Обозначения и основные положения. Рассмотрим пространственное стационарное изоэнергетическое (поле полной энтальпии однородно) и изоэнтропийное течение идеального (отсутствуют вязкость и теплопроводность) совершенного (выполняется закон Менделеева–Клапейрона) газа с постоянными теплоемкостями в области, в которой нет точек торможения, а параметры течения являются достаточно гладкими функциями координат. В силу известной теоремы Крокко [11] такое течение будет безвихревым. Используем обычные обозначения: $\mathbf{V}$ – скорость, $V = |\mathbf{V}|$, ρ – плотность, p – давление, γ – показатель адиабаты ($1 < \gamma \leq 5/3$), $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ – адиабатическая скорость звука, $M = V/c$ – (местное) число Маха.

2. Кривизна линии тока и направление градиента числа Маха. Изоэнергетичность и изоэнтропийность означают, что полная энтальпия $h_0 = \gamma p / (\gamma - 1) + V^2 / 2$, которую также можно выразить формулой

$$h_0 = c^2 / (\gamma - 1) + V^2 / 2 \quad (2.1)$$

и энтропийная функция p / ρ^γ одинаковы во всех точках течения. Отсюда следует (см., например, [12], гл. V)), что

$$p = p_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-\gamma / (\gamma - 1)}, \quad (2.2)$$

где $p_0 = \text{const}$ – давление торможения.

Поскольку скорость $\mathbf{V}$ отлична от нуля, в каждой точке рассматриваемой области течения существует единичный касательный к линии тока вектор $\mathbf{e} = \mathbf{V} / V$. По определению кривизны и центра кривизны, вектор $(\mathbf{e} \cdot \nabla) \mathbf{e}$ направлен в сторону центра кривизны линии тока, а его длина $|(\mathbf{e} \cdot \nabla) \mathbf{e}|$ равна кривизне линии тока.

Поскольку $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = V(\mathbf{e} \cdot \nabla)(V\mathbf{e}) = \mathbf{e}V(\mathbf{e} \cdot \nabla)V + V^2(\mathbf{e} \cdot \nabla)\mathbf{e}$, уравнение Эйлера $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = -(\nabla p) / \rho$ можно представить в виде

$$\mathbf{e}V(\mathbf{e} \cdot \nabla)V + V^2(\mathbf{e} \cdot \nabla)\mathbf{e} = -(\nabla p) / \rho \quad (2.3)$$

Учитывая, что вектор $(\mathbf{e} \cdot \nabla)\mathbf{e}$ ортогонален $\mathbf{e}$, из (2.3) получаем, что, если кривизна линии тока $|(\mathbf{e} \cdot \nabla)\mathbf{e}|$ отлична от нуля, то нормальная к линии тока составляющая ∇p отлична от нуля и направлена от центра кривизны. Вместе с уравнением (2.2) это означает следующее.

Утверждение 1. Если кривизна линии тока отлична от нуля, то нормальная к линии тока составляющая градиента числа Маха ∇M также отлична от нуля и направлена в сторону центра кривизны, а при нулевой кривизне она равна нулю.

Заметим, что утверждение 1 верно в общем пространственном случае (поскольку формулы (2.2) и (2.3) верны в общем пространственном случае).

3. Плоскопараллельное обтекание криволинейной поверхности. Пусть в некоторой точке A на обтекаемой поверхности $M = 1$. И пусть кривизна поверхности (а вместе с ней и кривизна линии тока) в точке A отлична от нуля так, что обтекаемая поверхность вогнута в сторону течения (направления от точки A к внутренним точкам течения и к центру кривизны совпадают). Тогда, согласно утверждению 1, в некоторой окрестности точки A на нормали к поверхности (кроме самой точки A) будут расположены только сверхзвуковые точки.

Теперь рассмотрим случай, когда звуковая точка A есть точка примыкания звуковой линии к вогнутой в сторону внутренних точек течения обтекаемой поверхности. Если вектор ∇M отличен от нуля, то он направлен по нормали к звуковой линии. По-

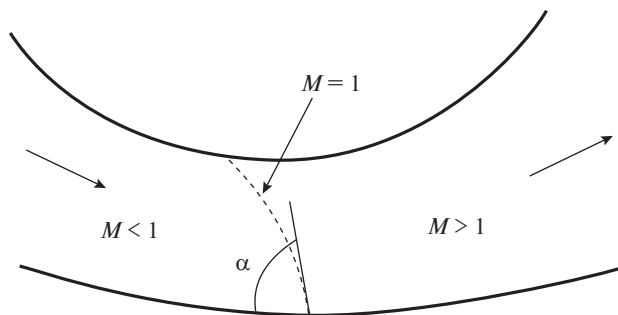


Рис. 2. Примыкание звуковой линии к вогнутой поверхности в несимметричном плоском канале.

этому, учитывая, что на нормали к поверхности расположены сверхзвуковые точки, из утверждения 1 получаем следующее.

Утверждение 2. В случае вогнутой в сторону внутренних точек течения обтекаемой поверхности угол примыкания звуковой линии с дозвуковой стороны строго меньше 90 градусов (рис. 2), а в случае выпуклой в сторону внутренних точек течения обтекаемой поверхности этот угол строго больше 90 градусов (рис. 1).

В свою очередь, из утверждения 2 для случая прямой звуковой линии, т.е. для линии, во всех точках которой $M = 1$, а скорость газа перпендикулярна этой линии, получаем следующее.

Утверждение 3. Прямая звуковая линия всегда примыкает к поверхности под прямым углом и не может примыкать к поверхности в точках ненулевой кривизны.

4. Плоскопараллельное обтекание прямолинейного участка поверхности. Пусть звуковая линия примыкает в точке A к прямолинейному участку обтекаемой поверхности. Рассмотрим отдельно два случая $\nabla M(A) \neq 0$ и $\nabla M(A) = 0$, учитывая то, что кривизна поверхности в точке A равна нулю.

При $\nabla M(A) \neq 0$, с одной стороны, вектор $\nabla M(A)$ направлен по нормали к звуковой линии, а с другой стороны, согласно утверждению 1, он направлен по касательной к обтекаемой поверхности. Поэтому угол примыкания звуковой линии равен 90 градусов.

Покажем, что в случае $\nabla M(A) = 0$ угол примыкания также равен 90 градусов. В [6] приведено достаточное условие прохождения прямой звуковой линии через звуковую точку. Оно сформулировано в виде теоремы ([6], глава IV, параграф 26, теорема 4), одно из условий которой требует, чтобы звуковая точка была центром течения, т.е. чтобы проходящая через нее звуковая линия была ортогональна линии тока. Но именно ортогональность нам и требуется доказать. Поэтому упомянутая теорема в данном случае неприменима. Однако идея доказательства этой теоремы в случае $\nabla M(A) = 0$ позволяет провести исследование без предположения об ортогональности звуковой линии и линии тока. Проведем доказательство аналогично [6]. Пусть u и v есть x и y компоненты скорости $\mathbf{V}$ в прямоугольной декартовой системе координат, ось x которой направлена по касательной к линии тока в звуковой точке A . Начало координат поместим в точку A . Компоненты скорости и скорость звука удовлетворяют двум уравнениям

$$u_y - v_x = 0 \quad \text{и} \quad (u^2 - c^2)u_x + 2uvu_y + (v^2 - c^2)v_y = 0 \quad (4.1)$$

Если первое уравнение (4.1) проинтегрировать по x , а второе последовательно проинтегрировать по x дважды, то вместе с уравнениями (4.1) получится система

из пяти уравнений. Непосредственной проверкой можно убедиться, что эту систему алгебраическими операциями можно преобразовать в систему обыкновенных дифференциальных уравнений $dg/dy = Hg$ относительно пяти функций $g(x, y) = (u - c, v, u_x, v_x, v_{xx})$, рассматриваемых как функции y при $x = 0$, где компоненты матрицы H зависят (при $x = 0$) только от y и непрерывны в окрестности точки A (в окрестности точки $y = 0$). Выражения для всех компонент матрицы H приводить не будем из-за их громоздкости. Ограничимся “самой простой” – третьей строкой матрицы, полученной дифференцированием по x первого уравнения (4.1). Эта строка имеет вид $(0, 0, 0, 0, 1)$.

В силу того, что ось x в окрестности точки A совпадает с линией тока, в этой точке $v = v_x = v_{xx} = 0$. А в силу $\nabla M(A) = 0$ величина u_x в точке A также равна нулю. Поэтому, учитывая, что $u(0, 0) - c(0, 0) = 0$, имеем $g(0, 0) = (0, 0, 0, 0, 0)$. В этом случае из теоремы существования и единственности для системы $dg/dy = Hg$ следует, что в некоторой окрестности точки $y = 0$ выполняется равенство $g(0, y) = (0, 0, 0, 0, 0)$, в частности $u(0, y) - c(0, y) = 0$ и $v(0, y) = 0$. Поэтому звуковая линия лежит на нормали, и угол примыкания звуковой линии равен 90 градусов.

Заметим, что отличие приведенного здесь доказательства от доказательства [6] состоит лишь в основаниях, из которых следует равенство $g(0, 0) = (0, 0, 0, 0, 0)$. Также необходимо отметить, что из приведенного доказательства не следует, что звуковая линия единственна. Действительно, условие $\nabla M(A) = 0$ допускает однородный звуковой поток над прямолинейным участком поверхности. В этом случае к точке A примыкает бесконечное число различных звуковых линий, в том числе и та звуковая линия, существование которой показано выше. Это обстоятельство будет учтено ниже при формулировке результата.

Таким образом, после рассмотрения двух возможных случаев $\nabla M(A) \neq 0$ и $\nabla M(A) = 0$ можно сделать следующий вывод.

Утверждение 4. Если течение не является однородным звуковым потоком, и если к прямолинейному участку обтекаемой поверхности примыкает звуковая линия, то угол примыкания равен 90 градусам.

5. Осесимметричное незакрученное обтекание. Если под кривизной поверхности понимать кривизну сечения обтекаемой поверхности плоскостью, проходящей через ось симметрии течения, а под звуковой линией понимать сечение этой плоскостью звуковой поверхности, то три первых утверждения, полученные выше, остаются в силе для незакрученных осесимметричных течений. При этом их доказательства также остаются без изменений. Что касается угла примыкания к прямолинейному участку, то соответствующее утверждение отличается от утверждения 4. Чтобы разобраться в этом вопросе, как и в предыдущем разделе, рассмотрим отдельно два случая $\nabla M(A) \neq 0$ и $\nabla M(A) = 0$.

При $\nabla M(A) \neq 0$, как и для плоскопараллельного течения, из утверждения 1 получаем, что угол примыкания звуковой линии равен 90 градусам.

Перейдем к случаю $\nabla M(A) = 0$. Расположим прямоугольную декартову систему координат Axy в плоскости, проходящей через ось симметрии течения. Ось x направим вдоль прямолинейной образующей обтекаемой поверхности так, чтобы радиальная компонента положительного направления оси y была направлена к оси симметрии. Тогда компоненты скорости и скорость звука будут удовлетворять двум уравнениям:

$$u_y - v_x = 0 \quad (5.1)$$

$$(u^2 - c^2)u_x + 2uvu_y + (v^2 - c^2)v_y + c^2(u \sin \varphi + v \cos \varphi)/r = 0, \quad (5.2)$$

где φ — острый угол между осью x и осью симметрии течения. Знак этого угла нужно выбрать так, чтобы расстояние r до оси симметрии выражалось формулой $r = r_A - x \sin \varphi - y \cos \varphi$. В силу того, что ось x в окрестности звуковой точки A совпадает с линией тока, в этой точке

$$v = v_x = v_{xx} = 0 \quad \text{и} \quad u = c \quad (5.3)$$

В случае $\varphi = 0$, когда прямолинейные образующие обтекаемой поверхности параллельны оси симметрии, уравнения (5.1), (5.2) и условия (5.3) позволяют повторить с небольшими изменениями доказательство предыдущего раздела и прийти к следующему выводу.

Если прямолинейный участок образующей обтекаемой поверхности параллелен оси симметрии незакрученного осесимметричного течения, не являющегося однородным звуковым потоком, и если к этому участку примыкает звуковая линия, то угол примыкания равен 90 градусам.

Для случая $\varphi \neq 0$ в первую очередь исключим из рассмотрения течения с числом Маха $M \leq 1$, т.е. течения, в которых нет сверхзвуковых точек, а звуковая линия разделяет дозвуковые зоны. Дело в том, что, как показано в [2], такая линия будет прямой звуковой линией. Поэтому в точке A величина v_y должна равняться нулю, что противоречит равенству $v_y(A) = c \sin \varphi / r$, вытекающему из (5.1)–(5.3). То есть *примыкание звуковой линии, разделяющей звуковые зоны к наклонному ($\varphi \neq 0$) участку поверхности в незакрученных осесимметричных течениях невозможно*. Следовательно, достаточно рассмотреть случаи, когда звуковая линия разделяет звуковую и сверхзвуковую зоны или две сверхзвуковые зоны. В этих случаях из $\nabla M(A) = 0$ следует, что $M_{xx}(A) \geq 0$ (иначе при отрицательных x в некоторой окрестности точки A были бы дозвуковые точки). Из $\nabla M(A) = 0$, а также из равенств (5.3) и из уравнения (2.1), продифференцированного по x , следует, что в точке A производные c_x и u_x равны нулю. С учетом этого, из $M_{xx}(A) \geq 0$ и из уравнения (2.1), дважды продифференцированного по x , в точке A имеем соответственно $u_{xx} \geq c_{xx}$ и $0 = 2c_{xx}/(\gamma - 1) + u_{xx}$. Это возможно только, если $u_{xx}(A) \geq 0$.

Обозначим $\delta = u^2 + v^2 - c^2 = (\gamma + 1)(u^2 + v^2)/2 - (\gamma - 1)h_0$. На звуковой линии функция $\delta(x, y)$ равна нулю. Если уравнения (5.1) и (5.2) продифференцировать по x , то получится еще два уравнения. Вместе с (5.1)–(5.3) и с учетом условия $\nabla M(A) = 0$ эти два уравнения позволяют выразить первые и вторые производные функции δ в точке A :

$$\delta_x = \delta_y = \delta_{xy} = 0, \quad \delta_{xx} = (\gamma + 1)cu_{xx}, \quad \delta_{yy} = (\gamma + 1)c^2 \sin^2 \varphi / r^2 \quad (5.4)$$

Пусть функция $g(x)$ такова, что звуковая линия совпадает с ее графиком ($y = g(x)$). Если два раза продифференцировать тождество $\delta(x, g(x)) \equiv 0$ и подставить значения производных δ из (5.4), то получится, что в точке A имеет место равенство $(\gamma + 1)cu_{xx} + [(\gamma + 1)c^2 \sin^2 \varphi / r^2][g'(0)]^2 = 0$. Вместе с $u_{xx}(A) \geq 0$ это означает, во-первых, что $u_{xx}(A) = 0$, во-вторых, что $g'(0) = 0$. Т.е. угол примыкания звуковой линии с дозвуковой стороны равен или нулю или 180 градусам. Учитывая, что, согласно (5.4), значение δ_{yy} в точке A положительно, а $\delta_y = 0$, приходим к заключению, что на оси y в некоторой окрестности точки A лежат сверхзвуковые точки. Поэтому из двух упомянутых углов возможен только нулевой угол примыкания с дозвуковой стороны. Таким образом, доказано следующее.

Утверждение 5. Если прямолинейный участок образующей обтекаемой поверхности не параллелен оси симметрии незакрученного осесимметричного течения, то звуковая линия может примыкать к нему, либо под нулевым, либо под прямым углом.

6. Замечание о первых звуковых точках. Исследование мест появления первых звуковых точек при медленном (когда в каждый момент времени картину течения можно считать стационарной) увеличении скорости набегающего потока проводится с помощью теорем, полученных ранее [1, 2]. Для плоскопараллельных течений из теоремы Никольского—Таганова [1] следует, что на вогнутой в сторону внутренних точек течения обтекаемой поверхности не могут появляться первые звуковые точки. Из утверждения 1 это свойство вытекает как для плоскопараллельных, так и для осесимметричных течений.

Утверждение 6. В плоскопараллельном течении на вогнутой в сторону внутренних точек течения обтекаемой поверхности, а в незакрученном осесимметричном течении на вогнутой в сторону внутренних точек течения линии пересечения обтекаемой поверхности с плоскостью, проходящей через ось симметрии, не могут появляться первые звуковые точки.

Заключение. Рассмотрены плоскопараллельные и незакрученные осесимметричные стационарные течения идеального совершенного газа в области, где параметры течения являются достаточно гладкими функциями координат, а полные энтальпия и энтропия постоянны. Исследовался угол примыкания звуковой линии к обтекаемой поверхности. Полученные результаты показывают, что угол примыкания звуковой линии к обтекаемой поверхности со звуковой стороны может быть как острым, так прямым или тупым. Определяющим фактором является кривизна обтекаемой поверхности (под кривизной поверхности в осесимметричных течениях понимается кривизна сечения обтекаемой поверхности плоскостью, проходящей через ось симметрии течения, а под звуковой линией понимается сечение этой плоскостью звуковой поверхности). Как для плоскопараллельных, так и для осесимметричных течений показано, что угол наклона с дозвуковой стороны на выпуклых в сторону течения поверхностях больше 90 градусов, на вогнутых — меньше 90 градусов. Для прямолинейных участков выводы различны для плоскопараллельных и для осесимметричных течений. Для плоскопараллельных течений угол примыкания к прямолинейному участку всегда равен 90 градусам. А для осесимметричных течений этот угол может быть или 90 градусов, или 0 градусов (примыкание по касательной). Полученные результаты строго обосновывают правильность изображения углов примыкания в статьях и монографиях [1, 4–6], упомянутых во введении.

Показано, что первые звуковые точки не могут возникать на вогнутых в сторону течения поверхностях (для плоскопараллельных течений этот вывод следует также из теоремы Никольского—Таганова).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никольский А.А., Таганов Г.И. Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения // ПММ. 1946. Т. 10. Вып. 4. С. 481–502.
2. Gilbarg D., Shiffman M. On bodies achieving extreme value of the critical Mach number. I // J. Ration & Anal. 1954. V. 3. № 2. P. 209–230.
3. Крайко А.Н. Плоские и осесимметричные конфигурации, обтекаемые с максимальным критическим числом Маха // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 941–950.
4. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой аэродинамики. М.: Изд-во иност. лит., 1961. 208 с.
5. Cole J.D., Cook L.P. Transonic Aerodynamics. New York: Elsevier, 1986. 473 p.
6. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
7. Фалькович С.В. К теории сопла Лавала // ПММ. 1946. Т. 10. Вып. 4. С. 503–512.
8. Франкль Ф.И. О плоскопараллельных воздушных течениях через каналы при околозвуковых скоростях // Матем. сб. 1933. Т. 40. Вып. 1. С. 59–72.
9. Görtler H. Zum Übergang von Unterschall- zu Überschallgeschwindigkeiten in Düsen // Z. Angew. Math. Mech. 1939. V. 19. № 6. P. 325–337.

10. Крайко А.Н., Тилляева Н.И., Шамардина Т.В. Плоскопараллельные и осесимметричные течения с прямой звуковой линией // ЖВММФ. 2019. Т. 59. № 4. С. 649–669.
11. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: ИЛ, 1961. 588 с.
12. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.

The Abutment Angle of the Sonic Line with Respect to the Streamlined Surface

G.B. Sizykh^{a, #}

^a *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia*

[#] *e-mail: o1o2o3@yandex.ru*

The problem of the abutment angle of the sonic line with respect to the streamlined surface in flows with homogeneous fields of entropy and total enthalpy is investigated. A rigorous (without the use of asymptotic, numerical and other approximate methods) study of the Euler equations is carried out. Plane-parallel and non-swirling axisymmetric flows are considered. It is shown that the abutment angle of the sonic line depends on the curvature of the surface. If the surface is convex towards the flow, then the value of the abutment angle on the subsonic side will be strictly more than 90 degrees. If the surface is concave towards the flow, then the abutment angle on the subsonic side will be strictly less than 90 degrees. The adjoining to a straight section of the surface in a plane-parallel flow always occurs along the normal. In non-swirling axisymmetric flows, if the sonic line adjoins a straight generatrix parallel to the axis of symmetry, only the adjoining along the normal is also possible. For the case when the rectilinear generatrix is not parallel to the axis of symmetry, it is shown that the abutment angle on the sound side is only straight (abutting along the normal) or zero (abutting along the tangent).

Keywords: Euler equations, transonic flows, sonic line, abutment angle of the sonic line

REFERENCES

1. Nikol'skii A.A., Taganov G.I. The motion of a gas in a local supersonic zone and some conditions for the breakdown of potential flow (Dvizhenie gaza v mestnoj sverkhzvukovoy zone i nekotorye usloviya razrusheniya potencial'nogo techeniya) // Prikl. Mat. Mekh., 1946, vol. 10, no. 4, pp. 481–502. (in Russian)
2. Gilbarg D., Shiffman M. On bodies achieving extreme value of the critical Mach number. I // J. Ration. & Anal., 1954, vol. 3. no. 2, pp. 209–230.
3. Kraiko A.N. Planar and axially symmetric configurations which are circumvented with the maximum critical Mach number // JAMM, 1987, vol. 51, iss. 6, pp. 723–730.
4. Bers L. Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics. N.Y.: John Wiley & Sons Inc., 1958. 164 p.
5. Cole J.D., Cook L.P. Transonic Aerodynamics. N.Y.: Elsevier, 1986. 473 p.
6. Ovsyannikov L.V. Lectures on the Basics of Gas Dynamics. (Lektsii po osnovam gazovoy dinamiki) Moscow; Izhevsk: Inst. Comput. Sci., 2003. 336 p. (in Russian)
7. Falkovich S.V. On the theory of the Laval nozzle (K teorii sopla Lavalya) // Prikl. Mat. Mekh., 1946, vol. 10, iss. 4, pp. 503–512. (in Russian)
8. Frankl' F.I. On plane-parallel air flows through channels at transonic speeds (O ploskoparallel'nyh vozdushnykh techeniyah cherez kanaly pri okolozvukovykh skorostyah) // Math. Sb., 1933, vol. 40, iss. 1, pp. 59–72. (in Russian)
9. Gortler H. On the transition from subsonic to supersonic speeds in nozzles // Z. Angew. Math. Mech., 1939, vol. 19, no. 6, pp. 325–337. (in German)
10. Kraiko A.N., Tillyaeva N.I., Shamardina T.V. Plane-parallel and axisymmetric flows with a straight sonic line // Comput. Math. & Math. Phys., 2019, vol. 59, no. 4, pp. 610–629.
11. von Mises R. Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow. N.Y.: Acad. Press, 1958. 514 p.
12. Loytsyansky L.G. Mechanics of Liquids and Gases. Oxford: Pergamon, 1966. 804 p.

УДК 533.6.011

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ИНВАРИАНТ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ЗА ОТОШЕДШИМ СКАЧКОМ УПЛОТНЕНИЯ

© 2021 г. Г. Б. Сизых^{1,*}¹ *Московский авиационный институт, Москва, Россия***e-mail: o1o2o3@yandex.ru*

Поступила в редакцию 04.03.2021 г.

После доработки 15.07.2021 г.

Принята к публикации 25.08.2021 г.

Рассматривается стационарное течение идеального совершенного газа, сформированное в сверхзвуковом однородном набегающем потоке за отошедшим скачком уплотнения перед выпуклым телом в общем пространственном случае. Анализ проводится на основе уравнений Эйлера. Предполагается, что в области между скачком и выпуклой головной частью обтекаемого тела скорость равна нулю только в передней точке торможения. Исследуются векторные линии вектора $\mathbf{a}$, представляющего собой векторное произведение скорости и градиента энтропийной функции. Исследование опирается на известное свойство этих линий, состоящее в том, что они либо начинаются и заканчиваются на скачке, либо замкнуты. В результате проведенного исследования устанавливается, что криволинейный интеграл от произведения ко-тангенса угла φ на температуру, деленного на величину скорости газа, по любой замкнутой векторной линии $\mathbf{a}$ равен нулю.

Ключевые слова: критерий Гельмгольца–Зоравского, интегральный инвариант, изоэнтальпийные течения, завихренность, отошедший скачок уплотнения

DOI: 10.31857/S0032823521060102

При обтекании однородным сверхзвуковым потоком отошедший головной скачок уплотнения образуется около тела с затупленной головной частью или с большим углом наклона в передней угловой точке, превышающим предельный угол, до которого возможен присоединенный скачок. Поверхность этого скачка искривленная и выпуклая в сторону набегающего потока, поэтому течение за ним вихревое. Для общего пространственного случая показано [1, 2], что в течении за отошедшим скачком уплотнения вихревые линии и часть векторных линий вектора $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$, где $\mathbf{V}$ — скорость, σ — энтропийная функция, замкнуты и один раз охватывают линию тока, которая пересекает скачок по нормали. Следуя [1], эту линию тока будем называть лидирующей линией тока. Показано [1], что завихренность на лидирующей линии тока равна нулю. Согласно теореме Крокко [3], для течений с постоянной удельной полной энтальпией (какими являются течения за скачком при однородном сверхзвуковом набегающем потоке) вихревые линии лежат на изоэнтальпийных поверхностях. Очевидно, что на таких же поверхностях лежат и векторные линии $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$. Известен интегральный инвариант [4], связанный с замкнутыми вихревыми линиями в течениях за отошедшим скачком и обобщающий инвариант Крокко [5] для незакрученных осесимметричных течений (сохранение вдоль линий тока отношения величины завихренности $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$, где $\boldsymbol{\Omega} = \text{rot } \mathbf{V}$, к произведению давления p и расстояния до оси симметрии).

Этот интегральный инвариант есть величина $\oint_{\gamma_\Omega} (p/\Omega) dl$, одинаковая для всех (замкнутых) вихревых линий γ_Ω , лежащих на одной и той же изоэнтропийной поверхности (l — переменная длина дуги на линии γ_Ω).

В настоящей работе получен интегральный инвариант, связанный с семейством замкнутых линий вектора $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$. Для незакрученных осесимметричных течений эти линии совпадают с вихревыми линиями, но в общем пространственном случае они могут не совпадать с вихревыми линиями. Как и в ряде других исследований [1, 4, 6], наряду с течением газа, ниже рассматривается течение вспомогательной воображаемой среды, частицы которой, составляя в какой-то момент времени векторную линию заданного векторного поля (в данном случае речь пойдет о поле $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$), продолжают составлять векторную линию этого векторного поля во все время своего движения. Для краткости, про такие частицы будем говорить, что они переносят векторные линии этого поля. Скорость воображаемых частиц определяется с помощью критерия Гельмгольца—Зоравского [7], обобщающего известные теоремы Гельмгольца о вихрях.

1. Уравнения движения и следствие критерия Гельмгольца—Зоравского. Давление p и плотность газа ρ связаны соотношением $p = \sigma \rho^k$, где k — показатель адиабаты, σ — энтропийная функция, которая постоянна вдоль линий тока и для рассматриваемых течений может принимать (за скачком) разные значения на различных линиях тока. Поскольку набегающий сверхзвуковой поток считается однородным, то удельная полная энтальпия $k(k-1)^{-1} p \rho^{-1} + V^2/2$, где $V = |\mathbf{V}|$, всюду одинакова (изоэнтальпийное течение). Стационарное движение газа подчиняется уравнению неразрывности $\text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0$ и уравнению Эйлера, которое для настоящего исследования запишем в форме Крокко [3]

$$\Omega \times \mathbf{V} = (k-1)^{-1} p \rho^{-1} \sigma^{-1} \nabla \sigma \quad (1.1)$$

Функции $\mathbf{V}$, ρ и p предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми по пространственным координатам. Также предполагается, что в области между скачком и головной частью обтекаемого тела скорость $\mathbf{V}$ всюду, кроме передней точки торможения, отлична от нуля.

Сформулируем следствие из критерия Гельмгольца—Зоравского [7] для частного случая стационарного и соленоидального векторного поля $\mathbf{c}$.

Утверждение 1. Если в области G выполнено равенство

$$\mathbf{c} \times \text{rot}(\mathbf{c} \times \mathbf{q}) = 0, \quad (1.2)$$

где $\text{div} \mathbf{c} = 0$ и $\partial \mathbf{c} / \partial t = 0$, то воображаемые частицы, составляющие в некоторый момент времени сегмент векторной линии $\mathbf{c}$, лежащий в области G , двигаясь со скоростью $\mathbf{q}$, будут составлять сегмент одной из векторных линий $\mathbf{c}$ в каждый последующий момент времени (до тех пор, пока эти частицы находятся в области G). Такие воображаемые частицы будем называть q -частицами. Ниже в качестве вектора $\mathbf{c}$ будет рассмотрен вектор $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$, который в стационарных течениях за скачком не зависит от времени. Поэтому требование $\partial \mathbf{c} / \partial t = 0$ далее упоминаться не будет.

2. Интегральный инвариант. Как сказано во введении, некоторые векторные линии $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$ (расположенные ближе к скачку) могут начинаться и заканчиваться на скачке, а другие линии (расположенные ближе к головной части) — замкнуты и не имеют общих точек со скачком [2]. При этом, как следует из результата [8], в течении за отошедшим скачком модули $|\mathbf{a}|$ и $|\nabla \sigma|$ отличны от нуля всюду, кроме лидирующей линии тока (где завихренность равна нулю) и точки торможения (где скорость равна нулю). Пусть γ_a — одна из замкнутых линий вектора $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$, не имеющая общих

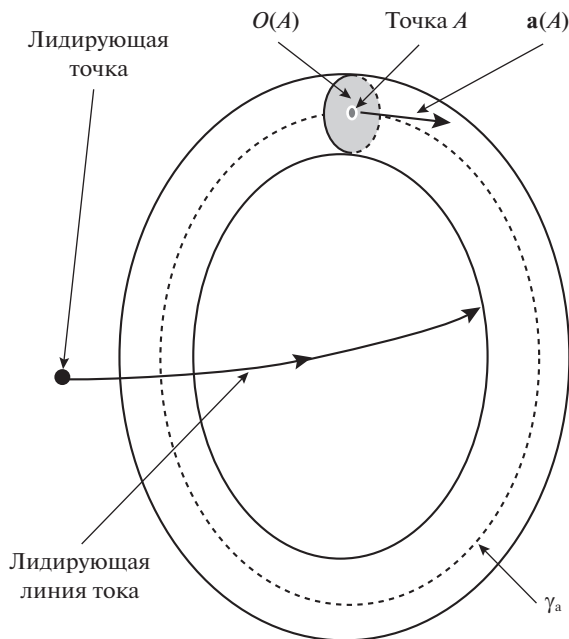


Рис. 1. Точка A лежит на замкнутой векторной линии γ_a . Область G состоит из векторных линий a , проходящих через плоскую окрестность $O(A)$.

точек со скачком. Пусть, далее, A — произвольно выбранная точка на линии γ_a , α — плоскость, проходящая через точку A и пересекающая линию γ_a по нормали (т.е. $a(A)$ — нормаль к α). Линия γ_a не имеет общих точек со скачком и, следовательно, отдалена от него на ненулевое расстояние. Поэтому на плоскости α существует такая (плоская) окрестность $O(A)$ точки A , что все векторные линии a пересекают эту окрестность под острым углом к нормали и замкнуты. Гомеоморфную тору область, представляющую собой объединение всех векторных линий a , проходящих через $O(A)$, обозначим G (рис. 1). Удалим из области G точки окрестности $O(A)$, получим разрезанную область $G' = G \setminus O(A)$.

Найдем скорость воображаемых q_a -частиц, переносящих векторные линии a внутри разрезанной области G' . Из (1.1) следует, что $\Omega \cdot \nabla \sigma = 0$. Поэтому $\operatorname{div}(a) = \operatorname{div}(V \times \nabla \sigma) = \Omega \cdot \nabla \sigma - V \cdot \operatorname{rot}(\nabla \sigma) = 0$. Следовательно, для поиска скорости q_a можно использовать утверждение 1 (верное для соленоидальных полей). Запишем формулу (1.2), заменив в ней вектор c на $a = V \times \nabla \sigma$

$$(V \times \nabla \sigma) \times \operatorname{rot}((V \times \nabla \sigma) \times q_a) = 0 \quad (2.1)$$

Будем искать скорость q_a -частиц в виде

$$q_a = \lambda V^{-2} V + |\nabla \sigma|^{-2} \nabla \sigma, \quad (2.2)$$

где λ — искомое гладкое скалярное поле. Заметим, что на данном этапе исследования еще не известно, существует ли поле λ , дающее решение (2.1).

Непосредственной проверкой с использованием известных формул векторного анализа и с учетом равенств $V \cdot \nabla \sigma = \Omega \cdot \nabla \sigma = 0$ можно убедиться, что уравнение (2.1)

после подстановки в него (2.2) сначала приводится к виду $(\mathbf{V} \times \nabla \sigma) \times \text{rot}(\lambda \nabla \sigma - \mathbf{V}) = 0$, а затем — к векторному равенству $((\mathbf{V} \times \nabla \sigma) \cdot \nabla \lambda) \nabla \sigma + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \nabla \sigma = 0$, которое равносильно (поскольку $\nabla \sigma \neq 0$) скалярному равенству $(\mathbf{a} \cdot \nabla \lambda) + (\mathbf{V} \cdot \nabla) = 0$. Если обозначить единичный касательный вектор к векторной линии $\mathbf{a}$ через $\mathbf{e}_a = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$, то последнее равенство можно записать следующим образом

$$(\mathbf{e}_a \cdot \nabla \lambda) = -(\mathbf{V} \cdot \nabla)/|\mathbf{a}| \quad (2.3)$$

Если скалярное поле λ будет удовлетворять (2.3) в G' , то скорость (2.2) будет удовлетворять (2.1) в G' . Такое поле λ существует (и не единственно). Действительно, на одной из сторон разреза области G окрестностью $O(A)$ зададим $\lambda = 0$. Назовем эту сторону разреза первой, а другую — второй стороной разреза. Продолжим функцию λ во внутренние точки области G' интегрированием уравнения (2.3) вдоль векторных линий $\mathbf{a}$. В результате функция λ окажется заданной и удовлетворяющей (2.3) во всех точках области G' .

Теперь, когда существование функции λ доказано, воспользуемся методом, предложенным в [9] (в отличие от [9], где рассматривались замкнутые вихревые линии, здесь рассматриваются замкнутые линии $\mathbf{a}$). Перейдем к рассмотрению движения q_a -частиц, лежащих в начальный момент времени на линии γ_a (проходящей через точку A) и движущихся со скоростью (2.2), где функция λ получена описанным выше способом. Предельное значение скорости $\mathbf{q}_a$ на первой стороне разреза равно $|\nabla \sigma|^{-2} \nabla \sigma$, а на второй стороне $\mathbf{q}_a = \lambda_0 V^{-2} \mathbf{V} + |\nabla \sigma|^{-2} \nabla \sigma$, где $\lambda_0 = -\oint_{\gamma_a} (\mathbf{V} \cdot \nabla)/|\mathbf{a}| dl$ (l — переменная длина дуги на линии γ_a). Но линия γ_a непрерывна и при переносе q_a -частицами переходит в непрерывные векторные линии $\mathbf{a}$. Поэтому предельные значения $\mathbf{q}_a$ должны иметь одинаковые нормальные к γ_a составляющие. Отсюда получается, что $\lambda_0 = 0$ или

$$\oint_{\gamma_a} (\mathbf{V} \cdot \nabla)/|\mathbf{a}| dl = 0 \quad (2.4)$$

Поскольку векторная линия γ_a была выбрана произвольно, равенство (2.4) представляет собой интегральный инвариант, верный для всех замкнутых векторных линий $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$.

Исключим градиент энтропии из выражения для модуля вектора $\mathbf{a}$. Учитывая ортогональность скорости и градиента энтропии и используя (1.1), имеем

$$|\mathbf{a}| = (k-1)p^{-1}\rho\sigma|\mathbf{V}| \cdot |\nabla \times \mathbf{V}| = (k-1)p^{-1}\rho\sigma|\mathbf{V}|^2|\nabla|\sin\varphi \quad (2.5)$$

где φ — угол между векторами скорости $\mathbf{V}$ и завихренности ∇ . Все векторные линии $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$ лежат на изоэнтропийных поверхностях. Поэтому подынтегральная функция в (2.4) может быть умножена на любую функцию энтропии (в том числе и на константу, связывающую отношение p/ρ с температурой T), и после этого интеграл (2.4) останется равным нулю. Вместе с (2.5) это позволяет утверждать, что для всех замкнутых линий γ_a вектора $\mathbf{a} = \mathbf{V} \times \nabla \sigma$

$$\oint_{\gamma_a} \frac{T \text{ctg } \varphi}{|\mathbf{V}|} dl = 0, \quad (2.6)$$

где T — температура, φ — угол между векторами скорости $\mathbf{V}$ и завихренности ∇ .

3. Сравнение интегральных инвариантов. В отличие от инварианта $\oint_{\gamma_a} (p/\Omega) dl$ [4], новый инвариант (2.6) может использоваться только для анализа несимметричных течений. Действительно, в незакрученных осесимметричных течениях $\text{ctg } \varphi \equiv 0$, и поэто-

му инвариант (2.6) дает только тривиальную информацию типа $0 = 0$. Однако в несимметричных течениях инвариант (2.6) более информативен. Во-первых, в отличие от инварианта [4], значение интеграла (2.6) известно (оно равно нулю). Во-вторых, это нулевое значение интеграла (2.6) принимает на всех замкнутых линиях γ_a , а неизвестное априори значение $\oint_{\gamma_a} (p/\Omega)dl$ сохраняется только на вихревых линиях γ_Ω , лежащих на одной изоэнтропийной поверхности.

Заключение. С использованием критерия Гельмгольца—Зоравского получен интегральный инвариант течений идеального газа за отошедшим скачком уплотнения (формула (2.6)). Этот инвариант может использоваться для качественного анализа несимметричных 3D-течений и для проверки численных, асимптотических и других приближенных расчетов таких течений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Golubkin V.N., Sizykh G.B. On the vorticity behind 3-D detached bow shock wave // Adv. in Aerodyn. 2019. V. 1. № 15.
2. Сизых Г.Б. Система ортогональных криволинейных координат на изоэнтропийной поверхности за отошедшим скачком уплотнения // ПММ. 2020. Т. 84. Вып. 3. С. 304–310.
3. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: Иностран. лит., 1961. 588 с.
4. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б. Обобщение инварианта Крокко для 3D течений газа за отошедшим головным скачком // Изв. вузов. Матем. 2019. № 12. С. 52–56.
5. Krocco L. Eine neue Stromfunktion für die Erforschung der Bewegung der Gase mit Rotation // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1937. V. 17. № 1. P. 1–7.
6. Сизых Г.Б. Значение энтропии на поверхности несимметричной выпуклой головной части при сверхзвуковом обтекании // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 3. С. 377–383.
7. Truesdell C. The Kinematics of Vorticity. Indiana: Univ. Press, 1954. 232 p.
8. Сизых Г.Б. О коллинеарности завихренности и скорости за отошедшим скачком уплотнения // Труды МФТИ. 2021. Т. 13. № 3. С. 144–147.
9. Сизых Г.Б. Замкнутые вихревые линии в жидкости и газе // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23. № 3. С. 407–416.

Integral Invariant of Ideal Gas Flows behind a Detached Bow Shock

G. B. Sizykh^{a, #}

^a Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia

[#] e-mail: o1o2o3@yandex.ru

We consider a steady flow of an ideal perfect gas formed in a supersonic homogeneous incoming flow behind a detached shock wave in front of a convex body in the general spatial case. The analysis is carried out on the basis of the Euler equations. It is assumed that in the region between the shock and the convex head part of the streamlined body, the velocity is zero only at the forward stagnation point. Vector lines of vector $\mathbf{a}$, which is the vector product of the velocity and the gradient of the entropy function, are investigated. The study is based on the known property of these lines, which is that they either begin and end on the shock, or are closed. As a result of the study, it is established that a curvilinear integral of the product of the cotangent of the angle φ and the temperature, divided by the value of the gas velocity, along any closed vector line $\mathbf{a}$ is equal to zero.

Keywords: Helmholtz—Zoravsky criterion, integral invariant, isenthalpic flows, vorticity, detached shock wave

REFERENCES

1. *Golubkin V.N., Sizykh G.B.* On the vorticity behind 3-D detached bow shock wave // Adv. in Aerodyn., 2019, vol. 1, no. 15.
2. *Sizykh G.B.* System of orthogonal curvilinear coordinates on the isentropic surface behind a detached bow shock wave // Fluid Dyn., 2020, vol. 55, no. 7, pp. 899–903.
3. *Von Mises R.* Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow. N.Y.: Acad. Press, 1958. 514 p.
4. *Golubkin V.N., Sizykh G.B.* Generalization of the Crocco invariant for 3D gas flows behind detached bow shock wave // Russ. Math., 2019, vol. 63, pp. 45–48.
5. *Krocco L.* Eine neue Stromfunktion für die Erforschung der Bewegung der Gase mit Rotation // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 1937, vol. 17, no. 1, pp. 1–7.
6. *Sizykh G.B.* Entropy value on the surface of a non-symmetric convex bow part of a body in the supersonic flow // Fluid Dyn., 2019, vol. 54, no. 7, pp. 907–911.
7. *Truesdell C.* The Kinematics of Vorticity. Indiana: Univ. Press, 1954. 232 p.
8. *Sizykh G.B.* About the collinearity of vortex and the velocity behind a detached bow shock. Proceedings of MIPT. 2021. vol. 13, no. 3, pp. 144–147 (in Russian)
9. *Sizykh G.B.* Closed vortex lines in fluid and gas // J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci., 2019, vol. 23, no. 3, pp. 407–416.

УДК 532.533.2

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО ГАЗА В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПЕРЕНОСА ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

© 2021 г. М. А. Брутян^{1,2,*}, У. Г. Ибрагимов^{2,**}¹ Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия² Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

*e-mail: murad.brutyanyan@tsagi.ru

**e-mail: umar.ibragimov@phystech.edu

Поступила в редакцию 18.05.2021 г.

После доработки 24.08.2021 г.

Принята к публикации 10.09.2021 г.

Рассматривается течение вязкого сжимаемого газа, истекающего из вершины плоского клина. Для случая теплоизолированных стенок установлена возможность построения автомодельных решений при произвольной зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры. Полученные аналитические решения сравниваются с найденными ранее автомодельными решениями при постоянных коэффициентах переноса. Для течений газа в микродиффузорах проведено сравнение полученных автомодельных решений с результатом эксперимента других авторов.

Ключевые слова: точные решения, уравнения Навье–Стокса, течения вязкого газа

DOI: 10.31857/S00032823521060047

1. Введение. Начиная со второй половины 20 века, во всем мире наблюдается повышенный интерес к исследованиям течений жидкости и газа в “микроустройствах”, которые используются в различных технических изделиях, например в струйных принтерах [1–3], а также в целом ряде медицинских и химических технологических процессах, таких как газовая хроматография [4–6]. К такого рода микроустройствам относятся датчики течения, клапаны регуляризации давления, сепараторы, химические датчики и др. Экспериментально и на основе инженерного подхода изучаются [7, 8] течения в микродиффузорах.

Впервые автомодельные решения уравнений Навье–Стокса для течения вязкого сжимаемого газа от источника массы в плоских и осесимметричных конических диффузорах теоретически изучались в работах [9–12]. Рассматривается [9] осесимметричное течение в конусе с непроницаемыми стенками и условием скольжения для скорости и температуры на стенке. Изучались [10–12] течения в осесимметричных и плоских каналах с массоотводом газа на стенке.

Для несжимаемых течений [13] дано описание широкого класса известных и новых точных решений уравнений Навье–Стокса, в частности известного решения Джеффри–Гамеля для течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском диффузоре.

Рассмотрено [14, 15] течение в клине при условии адиабатической стенки и показано, что автомодельные решения, удовлетворяющие условию сплошной среды, реализуются в каналах с малыми углами раствора. Число Рейнольдса на оси клина при этом оказывается небольшим, что соответствует течениям сильно разреженного газа либо

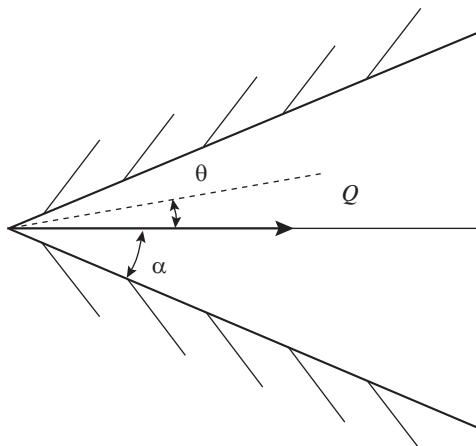


Рис. 1. Схема течения в плоском клине.

течениям газа в микроканалах при нормальных условиях. Найдены [15] аналитические решения для течения в плоском канале с коэффициентами динамической вязкости η и теплопроводности κ , зависящими от температуры по степенному закону Фроста ($\eta, \kappa \propto T^k$). Рассмотрено [16] аналогичное автомодельное течение вязкого сжимаемого газа от струи (источника импульса), истекающей в область между двумя расходящимися стенками.

В настоящей работе получено точное автомодельное решение уравнений движения вязкого теплопроводного газа в плоском клиновидном канале при произвольной зависимости коэффициентов переноса от температуры. Найденные аналитические решения сравниваются с полученными ранее решениями для степенной зависимости коэффициентов переноса от температуры. Для течений газа в микродиффузорах проведено сравнение полученных автомодельных решений с экспериментом других авторов.

2. Автомодельные течения. Рассмотрим течение вязкого газа, истекающего из вершины плоского клина, рис. 1.

Уравнения движения в полярных координатах (r, θ) имеют вид [17]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}_0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} \right] \quad (2.2)$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{\text{Re}_0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{r\theta}}{r} \right] \quad (2.3)$$

$$\frac{\rho u}{(\gamma-1)M_0^2} \frac{\partial T}{\partial r} = u \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\nabla \cdot (\kappa \nabla T)}{(\gamma-1)M_0^2 \text{Pr} \text{Re}_0} + \frac{1}{\text{Re}_0} \left[\frac{\ln}{2} (\epsilon_{rr}^2 + \epsilon_{\theta\theta}^2) + \epsilon_{r\theta}^2 \eta - \frac{2}{3} \eta (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 \right] \quad (2.4)$$

Течение предполагается радиальным, $\mathbf{V} = (u, 0)$. В уравнениях (2.1)–(2.4) безразмерные переменные связаны с размерными газодинамическими параметрами, помеченными звездочкой, следующим образом:

$$\rho = \frac{\rho^*}{\rho_0}, \quad p = \frac{p^*}{\rho_0 u_0^2}, \quad T = \frac{T^*}{T_0}, \quad u = \frac{u^*}{u_0}, \quad \eta = \frac{\eta^*}{\eta_0},$$

где ρ_0, u_0, T_0 — соответственно плотность, скорость и температура в некоторой точке $(r_0, 0)$ на оси клина. Газ считается совершенным, так что $\gamma M_0^2 p = \rho T$. Стенки канала предполагаются теплоизолированными.

Компоненты тензора вязких напряжений σ и тензора скоростей деформации ε имеют вид:

$$\sigma_{rr} = \eta \varepsilon_{rr} - \frac{2}{3} \eta \nabla \cdot \mathbf{V}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \eta \varepsilon_{\theta\theta} - \frac{2}{3} \eta \nabla \cdot \mathbf{V}, \quad \sigma_{r\theta} = \eta \varepsilon_{r\theta}$$

$$\varepsilon_{rr} = 2 \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{2u}{r}$$

В уравнения (2.1)–(2.4) входят параметры подобия: число Маха M_0 , число Рейнольдса Re_0 и число Прандтля Pr , которые вычисляются следующим образом:

$$Re_0 = \frac{\rho_0 u_0 r_0}{\eta_0}, \quad M_0 = \frac{u_0}{\sqrt{\gamma R T_0}}, \quad Pr = \frac{c_p \eta_0}{\kappa_0}$$

Автомодельное решение уравнений (2.1)–(2.4) ищем в виде:

$$\rho = \frac{\rho(\theta)}{r}, \quad p = \frac{p(\theta)}{r}, \quad u = u(\theta), \quad T = T(\theta), \quad \eta = \eta(\theta), \quad \kappa = \kappa(\theta) \quad (2.5)$$

Тогда уравнение неразрывности (2.1) выполняется автоматически, а определяющие уравнения (2.2)–(2.4) можно переписать в следующем виде:

$$Re_0 p - \frac{4}{3} u \eta + \frac{d}{d\theta} \left(\eta \frac{du}{d\theta} \right) = 0 \quad (2.6)$$

$$Re_0 \frac{dp}{d\theta} = \eta \frac{du}{d\theta} + \frac{4}{3} \frac{d}{d\theta} (\eta u) \quad (2.7)$$

$$Re_0 u p = \frac{1}{(\gamma - 1) M_0^2 Pr} \frac{d}{d\theta} \left(\eta \frac{dT}{d\theta} \right) + \eta \left[\frac{4}{3} u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right] \quad (2.8)$$

с граничными условиями прилипания на теплоизолированной стенке:

$$u(\pm\alpha) = 0, \quad \left. \frac{dT}{d\theta} \right|_{\theta=\pm\alpha} = 0 \quad (2.9)$$

Течение будем предполагать симметричным относительно оси клина:

$$\left. \frac{du}{d\theta} \right|_{\theta=0} = 0, \quad \left. \frac{dT}{d\theta} \right|_{\theta=0} = 0 \quad (2.10)$$

Из условия нормировки для параметров течения на оси клина при $\theta = 0$ имеем:

$$u(0) = 1, \quad T(0) = 1, \quad p(0) = \frac{1}{\gamma M_0^2} \quad (2.11)$$

Продифференцируем уравнение (2.6) по θ и вычтем полученное выражение из уравнения (2.7). В результате приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\eta \frac{du}{d\theta} \right) + \eta \frac{du}{d\theta} = 0,$$

решение которого, с учетом условий симметрии (2.10) имеет вид:

$$\eta \frac{du}{d\theta} = \tau_0 \sin \theta, \quad (2.12)$$

где τ_0 — некоторая константа. Из уравнений (2.6) и (2.12) находим выражение для давления:

$$\text{Re}_0 p = \frac{4}{3} \eta u - \tau_0 \cos \theta \quad (2.13)$$

откуда, используя условия (2.11), находим неизвестную константу τ_0 :

$$\tau_0 = \frac{4}{3} - \frac{\text{Re}_0}{\gamma M_0^2} \quad (2.14)$$

Подставляя (2.13) в уравнение энергии (2.8), имеем:

$$0 = \frac{1}{M_0^2 \text{Pr}(\gamma - 1)} \frac{d}{d\theta} \left(\eta \frac{dT}{d\theta} \right) + \frac{du}{d\theta} \tau_0 \sin \theta + \tau_0 u \cos \theta$$

Интегрируя полученное выражение по θ с учетом симметрии находим:

$$0 = \frac{1}{M_0^2 \text{Pr}(\gamma - 1)} \eta \frac{dT}{d\theta} + u \tau_0 \sin \theta$$

Подставляя вместо выражения $\tau_0 \sin \theta$ соответствующее выражение из формулы (2.12), получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение относительно скорости и температуры:

$$0 = \frac{1}{M_0^2 \text{Pr}(\gamma - 1)} \eta \frac{dT}{d\theta} + \eta \frac{du}{d\theta} u,$$

которое с учетом граничных условий (2.9) легко интегрируется:

$$T = 1 + \frac{1 - u^2}{2} M_0^2 \text{Pr}(\gamma - 1) \quad (2.15)$$

Формула (2.15) дает зависимость температуры от скорости, $T = T(u)$. Тогда уравнение (2.12) с учетом (2.14) может быть решено в квадратурах. Окончательно получаем:

$$\int_0^u \eta(U) dU = \left(\frac{4}{3} - \frac{\text{Re}_0}{\gamma M_0^2} \right) (\cos \alpha - \cos \theta) \quad (2.16)$$

Заметим, что в силу условий нормировки (2.11) должно выполняться условие:

$$\int_0^1 \eta(U) dU = \left(\frac{4}{3} - \frac{\text{Re}_0}{\gamma M_0^2} \right) (\cos \alpha - 1), \quad (2.17)$$

из которого находится связь между безразмерными параметрами Re_0 и M_0 :

$$\text{Re}_0 = \gamma M_0^2 \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{1 - \cos \alpha} \int_0^1 \eta(U) dU \right) \quad (2.18)$$

В случае $\eta = \text{const}$, формула (2.18) приобретает вид конечного соотношения:

$$\text{Re}_0 = \gamma M_0^2 \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{1 - \cos \alpha} \right), \quad (2.19)$$

а в случае произвольной степенной зависимости $\eta = T^k$ она принимает следующую форму:

$$\text{Re}_0 = \gamma M_0^2 \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{1 - \cos \alpha} \int_0^1 \left(1 + \frac{1 - U^2}{2} M_0^2 \text{Pr}(\gamma - 1) \right)^k dU \right) \quad (2.20)$$

Заметим, что формулы (2.19) и (2.20) совпадают с соответствующими формулами, полученными ранее в работе [15], в которой изначально предполагалась степенная зависимость коэффициентов переноса от температуры [18, 19]. Отметим также, что число Кнудсена $\text{Kn} = M_0/\text{Re}_0$, как следует из формулы (2.18), имеет порядок $\text{Kn} \propto 1/\gamma M_0 f(\alpha)$, где $f(\alpha)$ меняется от некоторого конечного значения $4/3 + \int_0^1 \eta(U) dU$ при $\alpha = \pi/2$ до бесконечности при $\alpha \rightarrow 0$. Откуда можно сделать вывод, что для течений в микродиффузорах при умеренных числах M_0 условие сплошной среды, $\text{Kn} \ll 1$, выполняется.

3. Результаты расчетов параметров течения газа в плоском канале для различных зависимостей коэффициентов переноса от температуры. Рассмотрим течение воздуха, для которого число Прандтля Pr при нормальных условиях приблизительно равно 0.71. Сравним полученные нами автомодельные решения для двух различных моделей газа:

1. модель газа с постоянными коэффициентами переноса: $\eta, \kappa = \text{const}$;
2. модель газа с коэффициентами переноса, зависящими от температуры по более близкому к реальности закону Сазерленда [20].

Точное решение уравнений Навье–Стокса для течений Куэтта и Пуазейля горячего газа с коэффициентом вязкости, зависящим от температуры по закону Сазерленда, получено в недавних работах [21, 22].

Как отмечалось выше, в первом случае задача допускает аналитическое решение, полученное ранее в работе [15]. Ниже исследуется автомодельное решение для принятого на практике закона Сазерленда, который в безразмерной форме при $\eta_0 = 18.27 \times 10^{-6}$ Па с и $T_0 = 291.15$ К записывается в следующем виде:

$$\eta(T) = \frac{1 + 120/291.15}{T + 120/291.15} T^{3/2} \quad (3.1)$$

Проведенные по формулам (2.16), (2.17) расчеты течений воздуха в микродиффузорах показали, что при малых и умеренных числах M_0 автомодельные решения для различных зависимостей $\eta = \eta(T)$ практически совпадают. Заметные отличия появляются при числах $M_0 > 2$. На рис. 2а и 2б, представлены сравнения профилей скорости $u = u(\theta)$ и температуры $T = T(\theta)$ при $M_0 = 4$ для различных зависимостей $\eta = \eta(T)$.

Значение полуугла раствора клина $\alpha = 0.074$ рад выбрано таким же, как в работе [23], где экспериментально изучалось течение воздуха в микроканале.

На рис. 3 приведена зависимость числа Re_0 от числа M_0 на оси симметрии клина для различных законов $\eta = \eta(T)$.

Из представленных на рис. 3 зависимостей видно, что для клина с полууглом раствора $\alpha = 0.074$ рад, автомодельные режимы течения при $M_0 \propto 1$ реализуются при $\text{Re}_0 \propto 500$ как для газа с постоянными коэффициентами переноса, так и для газа “Сазерленда”. Из определения числа Рейнольдса $\text{Re}_0 = \rho_0 u_0 r_0 / \eta_0$ следует, что при нормальных условиях ($T \approx 300$ К, $p \approx 100$ кПа) автомодельное течение реализуется в клине длиной $r_0 \propto 10^{-4}$, которая характерна для микроканалов [23].

Ранее [7, 8, 23] рассматривались течения в плоских и осесимметричных микроканалах. В частности [23], экспериментально и численно исследуется течение в плоском микродиффузоре при различных значениях давления в выходном сечении канала.

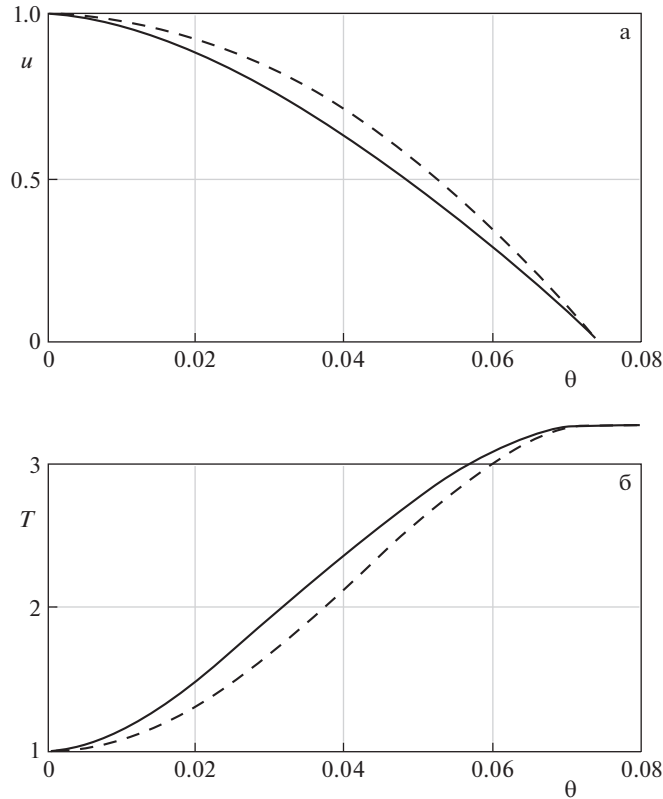


Рис. 2. Профили скорости а) и температуры б); сплошная линия – формула Сазерленда, пунктирная линия – $\eta = 1$.

Схема канала показана на рис. 4, размеры даны в мкм. Стенки канала выполнены из полимерного материала с низкой теплопроводностью, поэтому в численном расчете, основанном на решении уравнений Навье–Стокса, на границах канала ставилось условие прилипания и условие теплоизолированной стенки.

Согласно расчетным и экспериментальным данным [23], в наиболее узкой части канала (см. рис. 4) давление и температура имели значения: $p \approx 40$ кПа и $T \approx 245$ К.

Представим число Рейнольдса $Re_0 = \rho_0 u_0 r_0 / \eta_0$ в следующей форме:

$$Re_0 = \frac{\rho_0 u_0 r_0}{\eta_0} = \frac{\rho_0 a_0 r_0}{\eta_0} M_0 \approx 1500 M_0 \quad (3.2)$$

Тогда с учетом формулы (2.18) данное выражение принимает вид:

$$1500 M_0 = \gamma M_0^2 \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{1 - \cos \alpha_0} \int_0^1 \eta(U) dU \right)$$

Решая полученное уравнение с учетом зависимости $\eta = \eta(T)$, рассчитываемой по формуле Сазерленда (3.1), из соотношения (3.2) находим значение числа $Re_0 \approx 3300$. Оценим теперь расход газа Q по формуле:

$$Q = r_0 D \rho_0 u_0 \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho(\theta) u(\theta) d\theta = D \mu_0 Re_0 \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho(\theta) u(\theta) d\theta, \quad (3.3)$$

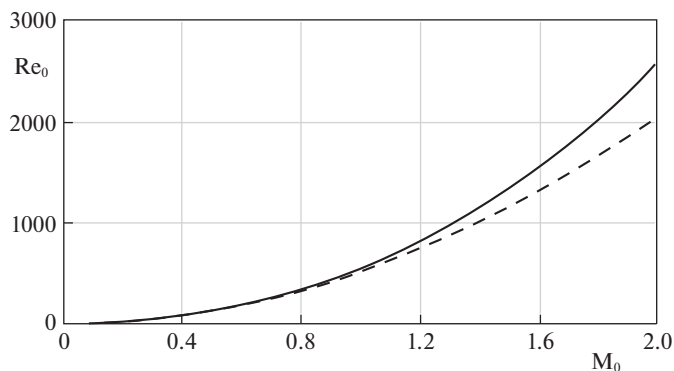


Рис. 3. Зависимость числа Re_0 от числа M_0 на оси симметрии; сплошная линия – формула Сазерленда, пунктирная линия – $\eta = 1$.

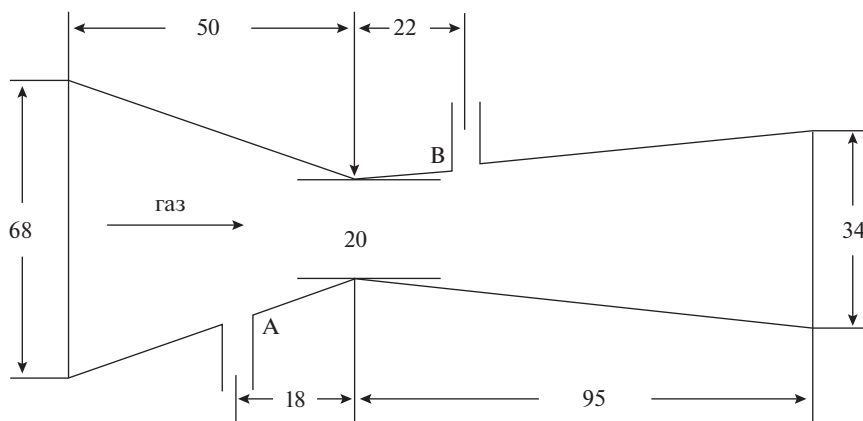


Рис. 4. Схема течения внутри микроканала.

где D – ширина поперечного сечения канала. При значениях $Re_0 \approx 3300$ и $D = 120$ мкм, получаем: $Q \approx 2.5 \times 10^{-4}$ г/с, что по порядку величины согласуется с экспериментальным значением [23]: $Q \approx 3.8 \times 10^{-4}$ г/с. Некоторое отличие расхода, рассчитанного с помощью полученного в настоящей работе автомодельного решения от экспериментального значения можно объяснить тем, что в работе [23] газ в диффузор конечной длины попадает из входного сечения конечного размера, в то время как в автомодельном решении газ истекает из точечного источника в канал бесконечной длины.

Заключение. Установлена возможность построения автомодельных решений для течения вязкого сжимаемого газа в плоском канале при произвольной зависимости коэффициентов переноса от температуры. При $\eta = \text{const}$ и $\eta = T^k$ найденные аналитические решения согласуются с полученными ранее [15].

Для течения воздуха в микроканале проведено сравнение автомодельных решений для двух различных зависимостей коэффициента вязкости от температуры: $\eta = \text{const}$

и η , рассчитанной по формуле Сазерленда. Оказалось, что существенные различия начинают проявляться при значениях числа Маха на оси клина $M_0 > 2$.

Проведенные численные расчеты автомодельных решений сравниваются с экспериментальными данными [23]. Показано что расход газа Q в микроканале, рассчитанный по формуле (3.3), удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bassous E., Taub H.H., Kuhn L. Ink jet printing nozzle arrays etched in silicon // Appl. Phys. Lett. 1977. V. 31. P. 135–137.
2. Petersen K.E. Fabrication of an integrated planar silicon ink-jet structure // IEEE Trans. Electron Devices. 1979. V. 26. P. 1918–1920.
3. Petersen K.E. Silicon as a mechanical material // Proc. IEEE. 1983. V. 70. P. 420–457.
4. Terry S.C., Jerman J.H., Angell J.B. A gas chromatographic air analyzer fabricated on a silicon wafer // IEEE Trans. Electron Devices. 1979. V. 26. P. 1880–1886.
5. Tuckerman D.B., Pease R.F.W. High-performance heat sinking for VLSI // IEEE Electron Device Lett. 1981. V. 2. P. 126–129.
6. Zdeblick M.J., Barth P.W., Angell J.A. Microminiature fluidic amplifier // Sensors&Actuators. 1988. V. 15. P. 427–433.
7. Jiang X.N., Zhou Z.Y., Huang X.Y., Li Y., Yang Y., Liu C.Y. Micronozzle/diffuser flow and its application in micro valveless pumps // Sensors&Actuation. 1998. V. 70. P. 81–87.
8. Li Xiu-Han, Yu Xiao-Mei, Zhang Da-Cheng, Cui Hai-Hang, Li Ting, Wang Ying, Wang Yang-Yuan. Characteristics of gas flow within a micro diffuser/nozzle pump // Chin. Phys. Lett. 2006. V. 23. № 5. P. 1230–1233.
9. Williams J.C. Conical nozzle flow with velocity slip and temperature jump // AIAA J. 1967. V. 5. № 12. P. 2128–2134.
10. Быркин А.П. О точных решениях уравнений Навье–Стокса для течения сжимаемого газа в каналах // Уч. зап. ЦАГИ. 1970. Вып. 1. № 6. С. 15–21.
11. Быркин А.П. Об одном точном решении уравнений Навье–Стокса для сжимаемого газа // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 1. С. 152–157.
12. Быркин А.П., Межиров И.И. О некоторых автомодельных течениях вязкого газа в канале // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. Вып. 1. С. 100–105.
13. Аристов С.Н., Князев Д.В., Полянин А.Д. Точные решения уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теоретич. основы химич. технол. 2009. Т. 43. № 5. С. 547–566.
14. Брутян М.А., Ибрагимов У.Г. Автомодельные турбулентные течения вязкого газа в клине // Труды МФТИ. 2020. Вып. 12. № 3. С. 141–149.
15. Брутян М.А. Автомодельные решения типа Джеффери–Гамеля для течения вязкого сжимаемого газа // Уч. зап. ЦАГИ. 2017. Вып. XLVIII. № 6. С. 13–22.
16. Брутян М.А., Крапивский П.Л. Точные решения стационарных уравнений Навье–Стокса вязкого теплопроводного газа для плоской струи из линейного источника // ПММ. 2018. Вып. 82. № 5. С. 644–656.
17. Probstein R.F., Kemp N.H. Viscous Aerodynamic Characteristics in Hypersonic Rarefied Gas Flow // J. Aerosp. Sci. 1960. V. 27. № 3. P. 174–192.
18. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 527 с.
19. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.
20. Sutherland W. LII. The viscosity of gases and molecular force // The London, Edinburgh&Dublin Philos. Mag.&J. Sci. 1893. V. 36. № 223. P. 507–531.
21. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б. О сжимаемом течении Куэтта // Уч. зап. ЦАГИ. 2018. Вып. 49. № 1. С. 27–38.
22. Хорин А.Н., Конюхова А.А. Течение Куэтта горячего вязкого газа // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Вып. 24. № 2 С. 365–378.
23. Hao P.F., Ding Y.T., Yao Z.H., He F., Zhu K.Q. Size effect on gas flow in micro nozzles // J. Micro-mech. Microeng. 2005. V. 15. P. 2069–2073.

Two-Dimensional Self-Similar Flow in a Channel of Viscous Gas with Transfer Coefficients Arbitrarily Depending on Temperature

M. A. Brutyan^{a,b,#} and U. G. Ibragimov^{b,##}

^a Central Aerohydrodynamic Institute, Zhukovsky, Russia

^b Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

[#]e-mail: murad.brutyan@tsagi.ru

^{##}e-mail: umar.ibragimov@phystech.edu

Two-dimensional flow of viscous compressible gas from source in an apex of wedge is considered. In case of adiabatic walls and transfer coefficients arbitrarily depending on temperature possibility of self-similar solutions is established. New analytical solutions are compared with previous solutions for a gas with constant transfer coefficients. Self-similar flow in micro-nozzles is compared with experimental results of other authors.

Keywords: exact solutions, Navier–Stokes equations, viscous gas flow

REFERENCES

1. Bassous E., Taub H.H., Kuhn L. Ink jet printing nozzle arrays etched in silicon // *Appl. Phys. Lett.*, 1977, vol. 31, pp. 135–137.
2. Petersen K.E. Fabrication of an integrated planar silicon ink-jet structure // *IEEE Trans. Electron Devices*, 1979, vol. 26, pp. 1918–1920.
3. Petersen K.E. Silicon as a mechanical material // *Proc. IEEE*, 1983, vol. 70, pp. 420–457.
4. Terry S.C., Jerman J.H., Angell J.B. A gas chromatographic air analyzer fabricated on a silicon wafer // *IEEE Trans. Electron Devices*, 1979, vol. 26, pp. 1880–1886.
5. Tuckerman D.B., Pease R.F.W. High-performance heat sinking for VLSI // *IEEE Electron Device Lett.*, 1981, vol. 2, pp. 126–129.
6. Zdeblick M.J., Barth P.W., Angell J.A. Microminiature fluidic amplifier // *Sensors&Actuators*, 1988, vol. 15, pp. 427–433.
7. Jiang X.N., Zhou Z.Y., Huang X.Y., Li Y., Yang Y., Liu C.Y. Micronozzle/diffuser flow and its application in micro valveless pumps // *Sensors&Actuation*, 1998, vol. 70, pp. 81–87.
8. Li Xiu-Han, Yu Xiao-Mei, Zhang Da-Cheng, Cui Hai-Hang, Li Ting, Wang Ying, Wang Yang-Yuan. Characteristics of gas flow within a micro diffuser/nozzle pump // *Chin. Phys. Lett.*, 2006, vol. 23, no. 5, pp. 1230–1233.
9. Williams J.C. Conical nozzle flow with velocity slip and temperature jump // *AIAA J.*, 1967, vol. 5, no. 12, pp. 2128–2134.
10. Byrkin A.P. Concerning exact solutions of the Navier–Stokes equations for compressible gas flow in channels // *Uch. Zap. TsAGI*, 1970, vol. 1, no. 6, pp. 15–21. (in Russian)
11. Byrkin A.P. Exact solution of the Navier–Stokes equations for a compressible gas // *JAMM*, 1969, vol. 33, iss. 1, pp. 152–157.
12. Byrkin A.P., Mezhirov I.I. Concerning some exact solution of viscous compressible gas flow in a channel // *Fluid Dyn.*, 1969, vol. 1, pp. 100–105. (in Russian)
13. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyinin A.D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // *Theor. Found. Chem. Engng.*, 2009, vol. 43, no. 5, pp. 642–662. (in Russian)
14. Brutyan M.A., Ibragimov U.G. Self-similar turbulent flow of viscous gas in a wedge // *Proc. MIPT*, 2020, vol. 12, no. 3, pp. 141–149. (in Russian)
15. Brutyan M.A. Self-similar solutions of Jeffrey–Gamel type for compressible viscous gas flow // *Uch. Zap. TsAGI*, 2017, vol. XLVIII, no. 6, pp. 13–22 (in Russian)
16. Brutyan M.A., Krapivsky P.I. Exact solutions of the stationary Navier–Stokes equations of a viscous heat-conducting gas for a flat jet from a linear source // *PMM*, 2018, vol. 82, iss. 5, pp. 644–656. (in Russian)

17. *Probstein R.F., Kemp N.H.* Viscous aerodynamic characteristics in hypersonic rarefied gas flow // J. Aerosp. Sci., 1960, vol. 27, no. 3, pp. 174–192.
18. *Lifschitz E.M., Pitaevskii L.P.* Physical Kinetics. Moscow: Nauka, 1979. 527 p. (in Russian)
19. *Chapman S., Cowling T.G.* The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases. N.Y.: Cambridge Univ. Press, 1991. 448 p.
20. *Sutherland W.* LII. The viscosity of gases and molecular force // London, Edinburgh & Dublin Philos. Mag. & J. Sci., 1893, vol. 36, no. 223, pp. 507–531.
21. *Golubkin V.N., Silykh G.B.* Concerning compressible Couette flow // Uch. Zap. TsAGI, 2018, vol. 49, no. 1, pp. 27–38. (in Russian)
22. *Khorin A.N., Konyukhova A.A.* Couette flow of hot viscous gas // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, 2020, vol. 24, no. 2, pp. 365–378.
23. *Hao P.F., Ding Y.T., Yao Z.H., He F., Zhu K.Q.* Size effect on gas flow in micro nozzles // J. Micro-mech. Microeng., 2005, vol. 15, pp. 2069–2073.

УДК 621.438

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДОРОДНИЦЫНА ДЛЯ АНАЛИЗА ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ ПОТОКАХ

© 2021 г. В. Д. Борисевич^{1,*}, Е. П. Потанин^{2,3,**}¹ Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия² Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, Москва, Россия³ Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва, Россия

*e-mail: VDBorisevich@mephi.ru

**e-mail: potanin45@yandex.ru

Поступила в редакцию 22.10.2020 г.

После доработки 04.09.2021 г.

Принята к публикации 21.09.2021 г.

Предлагается методика расчета неизотермических ламинарных пограничных слоев на вращающемся в газовой среде диске, основывающаяся на использовании преобразования Дородницына. Приближенный учет нелинейных инерционных членов выполнен методом Слезкина–Тарга. Показано, что при охлаждении поверхности диска-торца, вращающегося медленнее внешнего потока, можно не только ослабить радиальное течение вязкого теплопроводного газа, но и изменить направление скорости потока в пограничном слое на противоположное. Обсуждается возможность использования полученных результатов для уменьшения маскирующего влияния торцевых элементов при экспериментальном изучении устойчивости вращательных потоков, а также для управления циркуляционными потоками в замкнутых системах.

Ключевые слова: ламинарный пограничный слой, вращающийся поток, преобразование Дородницына, градиент температуры, вязкость, циркуляция, устойчивость

DOI: 10.31857/S0032823521060035

1. Введение. В последние годы значительный интерес исследователей вызывают вращательные движения газообразных сред. Это относится к проблемам геофизической гидродинамики [1, 2], изучению конвективных течений в системах с градиентом температуры [3], разделению изотопов в газовых центрифугах [4–6], вопросам переработки отработавшего ядерного топлива [7, 8], а также расчетам теплопередачи вблизи вращающихся тел [9–11]. Особый интерес представляет газодинамика циркуляционных течений вязкого газа в роторе центробежных аппаратов применительно к процессу умножения разделительных эффектов по высоте колонны [12].

Как известно, при вращении сплошных сред в ограниченных торцами или другими тормозящими элементами системах возникают трехмерные гидродинамические явления, описываемые с помощью нелинейных гидродинамических уравнений [13]. Если рассматривать движение среды в прямом круговом вращающемся цилиндре при наличии тормозящей крышки или другого элемента (например, газоотборника в газовой центрифуге), то на первый взгляд представляется, что при выполнении условия $L/R = 10$ (где L – длина системы, R – ее радиус) момент сил трения газа о торец значительно меньше раскручивающего момента сил на дне и вблизи боковой поверхности цилиндра, в результате чего торцевым торможением вращательного течения мож-

но пренебречь и считать вращение газа в основном объеме подобным вращению твердого тела с угловой скоростью цилиндра. Однако, эти представления, как следует из детального рассмотрения взаимодействия вращательного потока с неподвижными торцевыми поверхностями, являются весьма приближенными. Оказывается, что на неподвижных торцевых поверхностях образуются очень тонкие пограничные слои и, как следствие, большие осевые градиенты азимутальной скорости, в результате чего сильное вязкое торможение основного вращательного потока изменяет азимутальную скорость течения в основном объеме даже при большом отношении длины системы L к ее радиусу R .

Эффективное использование газовой центрифуги невозможно без создания противотока тяжелой и легкой фракций, что может осуществляться механическим способом, предполагающим использование приторцевых элементов, тормозящих вращательный поток [5]. При этом в основном объеме устройства возбуждается сложное трехмерное движение газовой среды, представляющее собой квазитвердое вращение с некоторой угловой скоростью, отличной от скорости вращения ротора, на которое наложено вторичное осевое течение. Отметим, что термин квазитвердое относится только к ядру потока и представляет собой описание вращения газа как твердого тела при наличии равномерного осевого потока. Численные расчеты газодинамики таких потоков сталкиваются с трудностями в силу необходимости расчета очень тонких пограничных слоев на торцах. Поэтому для приближенных оценок исследователи прибегают к упрощенному моделированию, заменяя тормозящий элемент дисковой поверхностью.

Влияние эффектов торможения среды проявляется также при попытках экспериментального изучения устойчивости одномерных вращательных потоков. Поскольку избежать воздействия торцов в эксперименте практически невозможно и при этом отсутствует возможность адекватного сопоставления с теоретическим анализом, исследование часто сводится к изучению устойчивости довольно сложного трехмерного течения. Один из примеров нежелательного влияния торцов связан с движением газа между двумя концентрическими вращающимися с различными угловыми скоростями цилиндрами и возбуждаемой при этом классической неустойчивости Рэлея—Тейлора. В данном случае тормозящие вращение среды неподвижные торцевые элементы вызывают вторичные циркуляционные потоки, налагающиеся на вихревую циркуляцию Тейлора.

Физическая причина обсуждаемых выше нелинейных явлений связана с нарушением равновесия центробежных сил и сил, обусловленных градиентом давления в тонких пограничных слоях. Очевидно, что радиальный градиент давления, обусловленный вращением всего столба газа, практически не зависит от осевой координаты z . В то же время центробежная сила неоднородна по z вблизи тормозящего элемента, уменьшаясь к торцу в силу прилипания среды. В результате в пограничном слое газ движется к оси, а в основном объеме возникает вторичный осевой циркуляционный поток, налагающийся на измененный вращательный поток. Последнее оказывает маскирующее влияние на механизм потери устойчивости.

В настоящей работе предлагается метод снижения тормозящего воздействия торцов и, следовательно, вторичных циркуляционных потоков, за счет принудительного увеличения плотности газа при охлаждении твердой неподвижной торцевой поверхности. С помощью этого же механизма за счет изменения температуры вращающегося торца можно управлять осевой циркуляцией в газовой центрифуге.

При изучении отмеченных выше явлений возникает проблема расчета гидродинамических и тепловых пограничных слоев вблизи вращающегося в неподвижной среде диска или в условиях вращения среды вблизи неподвижной торцевой поверхности. При рассмотрении практических задач часто используют аналитические решения, позволяющие понять суть того или иного процесса и оценить интенсивность гидроди-

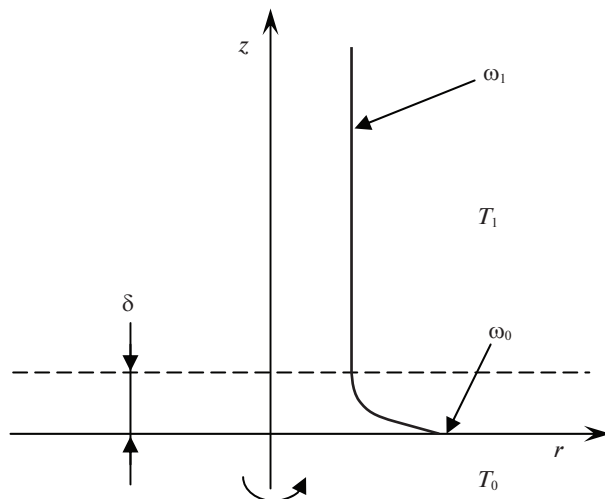


Рис. 1. Схема гидродинамического потока вблизи вращающегося с постоянной угловой скоростью ω_0 диска при наличии внешнего потока ω_1 . За δ , T_0 и T_1 обозначена толщина пограничного слоя, температура диска и температура во внешнем потоке соответственно.

намических и тепловых потоков. Сложность аналитического решения этой задачи состоит в необходимости одновременного учета нелинейных инерционных членов в уравнениях движения и осевого градиента температуры. В газе неоднородность температуры приводит к соответствующему перераспределению плотности. Влияние последнего можно учесть с помощью предложенного А.А. Дородницыным метода [14], основанного на введении модифицированных осевой координаты и скорости среды.

Отметим, что ниже при изучении неизотермического вращательного течения газа вблизи протяженного нагретого (охлажденного) диска мы будем использовать авторемодельное представление, в котором окружная и радиальная скорости пропорциональны первой степени радиуса. Такой выбор решения подтверждается многочисленными исследованиями, как изотермических задач, так и изучением гидродинамики вращающихся нагретых дисков, подробный обзор которых дан в [13].

2. Постановка задачи. Рассмотрим трехмерный ламинарный пограничный слой вязкого теплопроводного газа на бесконечно протяженном вращающемся с угловой скоростью ω_0 диске при наличии внешнего потока, вращающегося с угловой скоростью ω_1 . На рис. 1 показана толщина гидродинамического пограничного слоя δ , а также температуры T_0 и T_1 диска и внешнего потока соответственно. Отметим, что угловая скорость внешнего потока ω_1 может быть как меньше, так и больше ω_0 . Аналогично температура во внешнем (рис. 1) потоке T_1 может быть как меньше, так и больше температуры диска.

На первый взгляд может показаться, что рассмотрение такой задачи для безграничной области течения не имеет смысла. Однако, при инженерных расчетах, ограниченных боковыми стенками вращательных потоков, решения для безграничного диска могут быть использованы при анализе характеристик приторцевых пограничных слоев в области невязкого ядра потока [15–17], а также для оценки циркуляции в случае, когда толщина торцевого пограничного слоя много меньше радиуса системы ($\delta \ll R$).

Предположим, что вязким нагревом можно пренебречь. В дальнейшем мы оценим условия применимости этого приближения. С учетом зависимости плотности, динамической вязкости и теплопроводности от температуры система уравнений, описывающая стационарные гидродинамический и тепловой пограничные слои на вращающемся диске, принимает вид [18]

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \quad (2.1)$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{v_r v_\phi}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho r v_z) = 0 \quad (2.3)$$

$$\rho c_p \left(v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (2.4)$$

где v_r , v_ϕ и v_z — радиальная, азимутальная (окружная) и осевая компоненты скорости сплошной среды; $\eta = \rho \nu$ — коэффициент динамической вязкости, κ — коэффициент теплопроводности, ρ — плотность, p — давление, T — температура.

Система (2.1)–(2.4) не содержит уравнения движения в проекции на ось z , так как последнее служит лишь для определения слабой зависимости давления от осевой координаты в пограничном слое [13]. К системе уравнений (2.1)–(2.4) следует добавить уравнение состояния в виде

$$p = \rho R^* T / \mu, \quad (2.5)$$

где μ — молярная масса, R^* — универсальная газовая постоянная.

Рассмотрим задачу в приближении малого изменения плотности газа по радиусу, когда выполняется неравенство

$$\alpha < 1, \quad (2.6)$$

где $\alpha = V_\phi^{*2} / V_m^2$ — безразмерный параметр сжимаемости, V_ϕ^* — характерное значение азимутальной скорости газа, V_m — наиболее вероятная скорость молекул.

Отметим, что в ранее использованном [16] линеаризованном подходе при анализе инерционных членов в уравнениях Навье–Стокса учитывался только третий центробежный член в левой части уравнения (2.1), а в (2.2) силами инерции пренебрегалось совсем. В рамках развитого далее подхода учитываются все нелинейные члены в левых частях уравнений (2.1) и (2.2).

Предположим, что температура газа не зависит от радиальной координаты, что находится в соответствии с пренебрежением вязким нагревом в уравнении энергии (2.4). Теплоемкость газа полагаем независимой от температуры. Систему уравнений (2.1)–(2.4) будем решать при следующих граничных условиях, учитывающих условие прилипания на твердой поверхности:

$$z = 0: \quad v_r = 0, \quad v_\phi = \omega_0 r, \quad v_z = 0, \quad T = T_0 \quad (2.7)$$

$$z = \delta: \quad v_r = 0, \quad v_\phi = \omega_1 r, \quad T = T_1 \quad (2.8)$$

Отметим, что впервые автомодельное решение для бесконечно протяженного диска в неподвижной среде в случае изотермического течения несжимаемой жидкости было предложено Карманом [19]. Оно сводится к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений движения сплошной среды при постоянстве температуры в пространстве, когда центробежные силы отбрасывают среду к периферии, чему препятствуют силы вязкости в слое вблизи поверхности диска. При этом предполагалось,

что плотность среды не изменяется в пространстве. В настоящей работе рассмотрена неизоэнтальпическая задача, когда температура диска отличается от температуры среды внешнего вращающегося потока. В этом случае к системе уравнений динамики необходимо добавить уравнение энергии. Кроме того, учитывается зависимость вязкости и теплопроводности газовой среды от температуры, а также изменение плотности газа, связанное с изменением температуры. Следует отметить, что в данной постановке физические явления описываются решениями Бириха—Остроумова [20]. Отличие заключается лишь в том, что роль центробежных сил играют силы тяжести.

3. Решение автомодельной задачи. Введем преобразование А.А. Дородницына и преобразованную осевую компоненту скорости v_{z1} [14]

$$Z_0 = \int_0^z \frac{\rho(z)}{\rho_1} dz \quad (3.1)$$

$$v_{z1} = v_z \rho / \rho_1 \quad (3.2)$$

Будем искать решение в виде

$$v_r = rF(Z_0), \quad v_\varphi = rG(Z_0), \quad T = T_0 + (T_1 - T_0)\theta(Z_0), \quad (3.3)$$

причем коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности изменяются пропорционально первой степени температуры, то есть $\eta = \eta_1 T / T_1$, $\kappa = \kappa_1 (T / T_1)$ [21]. Здесь η_1 и κ_1 — коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности среды во внешнем потоке. Учтем, что внешний поток вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 и имеет плотность ρ_1 , а в пограничном слое выполняется следующее условие [13, 15]

$$\frac{dp}{dr} = \rho_1 \omega_1^2 r \quad (3.4)$$

Поскольку сила, связанная с градиентом давления и действующая на элемент объема газа в пограничном слое, направлена к оси вращения и зависит от плотности во внешнем потоке ρ_1 и угловой скорости ω_1 , а центробежная сила, направленная к периферии, определяется осевыми распределениями плотности $\rho(z)$ и азимутальной скорости $v_\varphi(z)$, возникает возможность изменения интенсивности и направления циркуляции не только за счет изменения ω_1 , но и варьированием теплофизических параметров задачи. Используя методику расчета [16], в основе которой лежит сведение уравнений пограничного слоя в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, получим следующую систему уравнений

$$F^2 + v_{z1} F' - G^2 + \omega_1^2 \frac{1}{n} = -\omega_1^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \theta + v_1 F'' \quad (3.5)$$

$$2FG + v_{z1} G' = v_1 G'' \quad (3.6)$$

$$2F + v_{z1}' = 0 \quad (3.7)$$

$$v_{z1} \theta' = \chi_1 \theta'', \quad (3.8)$$

где $n = T_1 / T_0$, $\chi_1 = \kappa_1 / \rho_1 c_p$ и $v_1 = \eta_1 / \rho_1$ — коэффициенты температуропроводности и кинематической вязкости во внешнем потоке соответственно, штрих означает дифференцирование по переменной Z_0 .

Для получения аналитического решения системы (3.5)—(3.8) воспользуемся приближенным методом усреднения нелинейных инерционных членов по толщине пограничного слоя δ_0 [22] с использованием условия прилипания среды на твердых поверхностях и приближенных граничных условий Тарга

$$Z_0 = 0: \quad F = 0, \quad G = \omega_0, \quad v_{z1} = 0, \quad \theta = 0 \quad (3.9)$$

$$Z_0 = \delta_0: \quad F = 0, \quad G = \omega_1, \quad G' = 0, \quad \theta = 1 \quad (3.10)$$

Существенным моментом при получении решения в рамках модели Тарга является условие исчезновения осевого градиента азимутальной скорости среды на внешней границе пограничного слоя.

Проведем усреднение нелинейных инерционных членов в уравнениях (3.5) и (3.6), а также осевой скорости в конвективном члене уравнения энергии (3.8) по толщине пограничного слоя

$$Av_1 = \frac{1}{\delta_0} \int_0^{\delta_0} [F^2 + v_{z_1} F' - G^2] dZ_0 + \frac{\omega_1^2}{n} \quad (3.11)$$

$$Bv_1 = \frac{1}{\delta_0} \int_0^{\delta_0} [2FG + v_{z_1} G'] dZ_0 \quad (3.12)$$

$$C = \frac{1}{\delta_0 v_1} \int_0^{\delta_0} v_{z_1} dZ_0, \quad (3.13)$$

где A и B постоянные, подлежащие определению.

После несложного интегрирования по частям с учетом граничных условий (3.9) и (3.10) соотношения (3.11), (3.12) принимают вид

$$Av_1 = \frac{1}{\delta_0} \int_0^{\delta_0} 3F^2 dZ_0 - \frac{1}{\delta_0} \int_0^{\delta_0} G^2 dZ_0 + \frac{\omega_1^2}{n} \quad (3.14)$$

$$Bv_1 = \frac{1}{\delta_0} \int_0^{\delta_0} 4FG dZ_0 - \frac{2\omega_1}{\delta_0} \int_0^{\delta_0} F dZ_0 \quad (3.15)$$

Используя введенные обозначения, уравнения движения и энергии запишем в форме

$$A + \frac{\omega_1^2}{v_1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \theta = \frac{d^2 F}{dZ_0^2} \quad (3.16)$$

$$B = \frac{d^2 G}{dZ_0^2} \quad (3.17)$$

$$C \frac{d\theta}{dZ_0} = \frac{d^2 \theta}{dZ_0^2} \quad (3.18)$$

Введем новые переменные $f = F/\omega_0$, $g = G/\omega_0$ и $w = v_{1z}/\sqrt{\omega_0 v_1}$, $\delta = \delta_0 \sqrt{\omega_0/v_1}$, $Z = Z_0/\delta_0 = Z_0/(\delta \sqrt{v_1/\omega_0})$.

Отметим, что в уравнение (3.18) входит величина C , зависящая от усредненной по толщине слоя осевой компоненты скорости. Это позволяет исследовать взаимное влияние гидродинамики и теплопереноса. Первоначально находится решение уравнения (3.18), в которое входит неизвестная пока величина C . Это решение используется при интегрировании уравнения (3.16).

Решение системы (3.16)–(3.18) при $v_1 = \chi_1$ имеет вид

$$f = \delta^2 \left\{ \frac{A - N}{2} (Z^2 - Z) + \frac{N}{\beta^2} (Z - 1) - \frac{N}{\beta^2} [Z \exp(-\beta) - \exp(-\beta Z)] \right\} \quad (3.19)$$

$$g = (1 - m) Z^2 - 2(1 - m) Z + 1 \quad (3.20)$$

$$\theta = \frac{\exp(-\beta Z) - 1}{\exp(-\beta) - 1}, \quad (3.21)$$

где $\beta = \delta k$, $m = \omega_1/\omega_0$, $N = m^2(1 - n^{-1})/(\exp(-\beta) - 1)$, а величины A , δ , B и k определяются из решения системы трех уравнений, полученных с использованием (3.14), (3.15), граничного условия для производной азимутальной компоненты скорости на внешней границе слоя и уравнения усреднения осевой скорости $k = -\int_0^1 w dZ$

$$A = \frac{A^2 \delta^4}{40} + AF + D - \frac{8}{15}(1 - m)^2 + \frac{4}{3}(1 - m) - 1 + \frac{m^2}{n} \quad (3.22)$$

$$2(1 - m) = -A\delta^4 \left(\frac{3 + 2m}{30} \right) + N(4\delta^2 D - D_1) \quad (3.23)$$

$$k = 2\delta^3 \left\{ ND_2 + \frac{5}{4(3 + 2m)\delta^4} (2 - 2m - N(4\delta^2 D - D_1)) \right\}, \quad (3.24)$$

где

$$\begin{aligned} D &= \delta^4 N^2 \left\{ \frac{1}{40} + \frac{1}{\beta^2} \left[-\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{\beta^2} - \frac{6}{\beta^3} \right) \exp(-\beta) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta^4} \left[4 - \frac{21}{2\beta} + \frac{6}{\beta^2} + \left(1 - \frac{12}{\beta^2} \right) \exp(-\beta) + \left(1 + \frac{9}{2\beta} + \frac{6}{\beta^2} \right) \exp(-2\beta) \right] \right\} \\ D_1 &= m\delta^4 \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3} - \frac{1}{\beta^2} \left(1 + \frac{2}{\beta} \right) \exp(-\beta) \right] \\ D_2 &= \frac{1}{24} + \frac{1}{6\beta^2} (1 - \exp(-\beta)) + \frac{\exp(-\beta)}{\beta^4} - \frac{1}{2\beta^2} - \frac{1}{\beta^4} \\ F &= N\beta^4 \left[-\frac{1}{20} + \frac{1}{4\beta^2} - \frac{3}{\beta^4} + \frac{6}{\beta^5} + \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{\beta^2} - \frac{6}{\beta^3} \right) \exp(-\beta) \right] \end{aligned}$$

В отсутствие осевого градиента температуры ($n = 1$, $N = 0$) решение совпадает с результатом [22].

Отметим, что если не учитывать изменения плотности с координатой z ($n = 1$, равные температуры на поверхности диска и во внешнем потоке), направление течения в пограничном слое на диске меняет знак в зависимости от того, больше или меньше единицы величина параметра $m = \omega_1/\omega_0$. При $m < 1$ (диск вращается быстрее внешнего потока) центробежная сила превосходит радиальный градиент давления и течение направлено к периферии, а радиальный поток положителен. Если диск вращается медленнее внешнего потока ($m > 1$) или покоится ($m \rightarrow \infty$) сила, связанная с градиентом давления, по абсолютной величине превышает центробежную и течение вблизи диска направлено к оси [13]. Это обстоятельство приводит к тому, что при попытках экспериментального наблюдения неустойчивости Рэлея–Тейлора, а также других возможных неустойчивостей вращающейся среды [23–25] возникают трудности, связанные с действием торцевых поверхностей лабораторных устройств в силу изменения характера течения от одномерного к трехмерному. Достаточно отметить, что в [26] для наблюдения неустойчивости одномерного потока с характерным для безграничных по высоте вращающихся цилиндров профилем азимутальной скорости использовалась установка с очень большим отношением L/R . Ниже выполненные оценки по-

казывают, что уменьшая температуру тормозящих торцевых поверхностей можно избежать или существенно подавить нежелательные трехмерные явления, связанные с циркуляцией, а также регулировать эти потоки при реально достижимых параметрах газовой среды и отношений температур n .

Оценим погрешность метода усреднения нелинейных инерционных членов по толщине пограничного слоя путем сравнения с известными точными результатами. Рассмотрим, например, изотермический случай диска, вращающегося в неподвижной среде. Приближенное решение для гидродинамических параметров согласно (3.19) и (3.20) при этом принимает вид

$$f = \frac{A}{2} \delta^2 (Z^2 - Z) \quad (3.25)$$

$$g = (1 - Z)^2 \quad (3.26)$$

$$w = \frac{1}{6} A \delta^3 (3Z^2 - 2Z^3), \quad (3.27)$$

где $A = -2/15$, $\delta = 7/2$.

Введем коэффициент момента сил сопротивления диска

$$C_M = \frac{M}{\rho \omega_0^2 R^5}, \quad (3.28)$$

где $M = 4\pi\eta \int_0^R r^2 \left| \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right|_{Z=0} dr = \pi\eta\omega_0 \left| \frac{\partial g}{\partial z} \right|_{Z=0}$ — момент сил сопротивления. Сравним результаты для коэффициента момента сил сопротивления диска, смачиваемого с двух сторон, полученного приближенным методом усреднения Тарга C_M^{Targ} с точным численным значением C_M для рассматриваемого частного случая. Используя (3.26), найдем

$$C_M^{\text{Targ}} = \frac{1.8}{\sqrt{\text{Re}}}, \quad (3.29)$$

где $\text{Re} = \rho \omega_0 R^2 / \eta$ — число Рейнольдса. При этом точное значение коэффициента сопротивления, полученное в результате численных расчетов [19, 22], равно $C_M = 1.935 \cdot \text{Re}^{-1/2}$. Как видно результат отличается на 7%. Аналогично, соответствующие значения осевой компоненты скорости на большом удалении от диска равны: $v_z^{\text{Targ}}(\infty) = \frac{1}{6} A \delta^2 \sqrt{\omega_0 \eta / \rho} = -0.953 \sqrt{\omega_0 \eta / \rho}$ и $v_z(\infty) = -0.886 \sqrt{\omega_0 \eta / \rho}$ [22].

4. Результаты расчета. Рассмотрим сначала более подробно случай, когда газ вращается быстрее диска ($m < 1$). Если осевой градиент температуры отсутствует ($n = 1$), то вторичное течение в пограничном слое направлено к оси, а радиальная компонента скорости (рис. 2) отрицательна. На рис. 2а показаны характерные профили азимутальной скорости $V_\phi(z)$ и температуры $T(z)$ газа вблизи вращающегося диска. Следует обратить внимание на то, что радиальная скорость среды $V_r(z)$ в пограничном слое (рис. 2б) направлена к оси (противоположно радиальному направлению, см. рис. 2б). Если охлаждать диск, то плотность газа вблизи поверхности диска будет возрастать. Это будет приводить к увеличению центробежной силы и, следовательно, к уменьшению циркуляционного потока. При сильном охлаждении диска ($n > 1$) направление радиального потока изменяется на обратное. Этот случай проиллюстрирован на рис. 3.

На рис. 4 и 5 показаны зависимость рассчитанного параметра k , характеризующего интенсивность осевого потока, от отношения температур во внешнем потоке и на

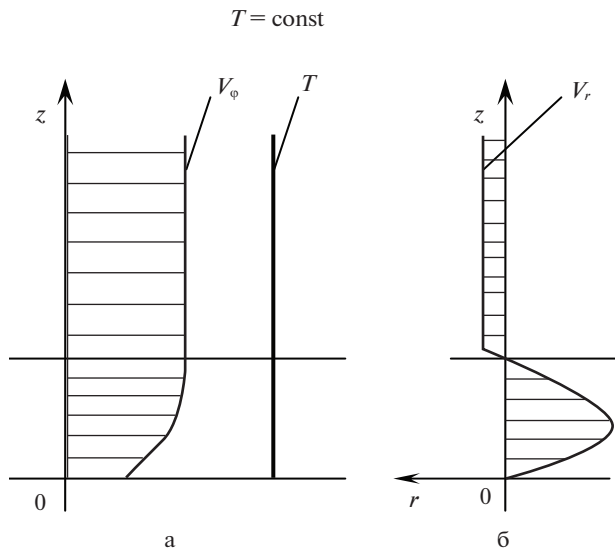


Рис. 2. Характерные профили азимутальной скорости $V_\phi(z)$ и температуры газа $T(z)$ вблизи вращающегося диска.

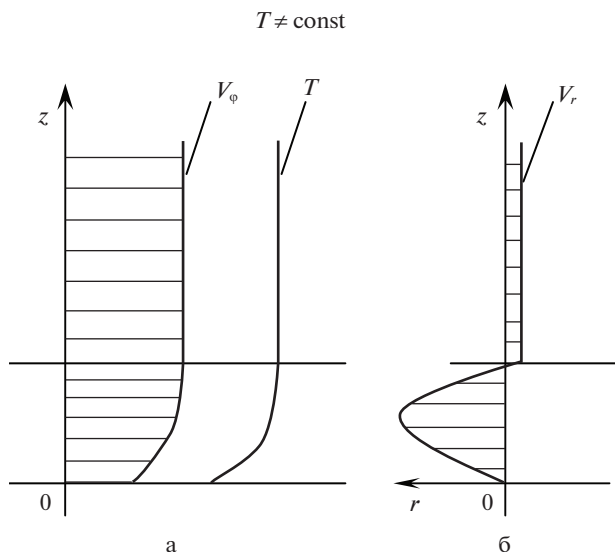


Рис. 3. Иллюстрация изменения направления радиального потока при сильном охлаждении диска.

диске n при $m = 0.8$ и 2 , соответственно. При этом следует иметь в виду, что знак величины k определяет направление осевой скорости в пограничном слое. Если $k < 0$, то осевой поток направлен от диска. Если $k > 0$, то имеет место подсос среды к диску. Следует отметить, что эти два случая в отсутствие градиента температуры ($n = 1$) раз-

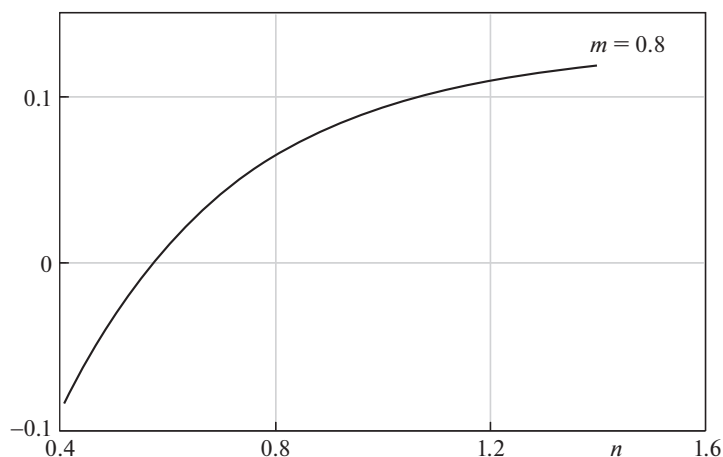


Рис. 4. Зависимость величины k от параметра n при более быстром вращении диска, чем внешняя среда.

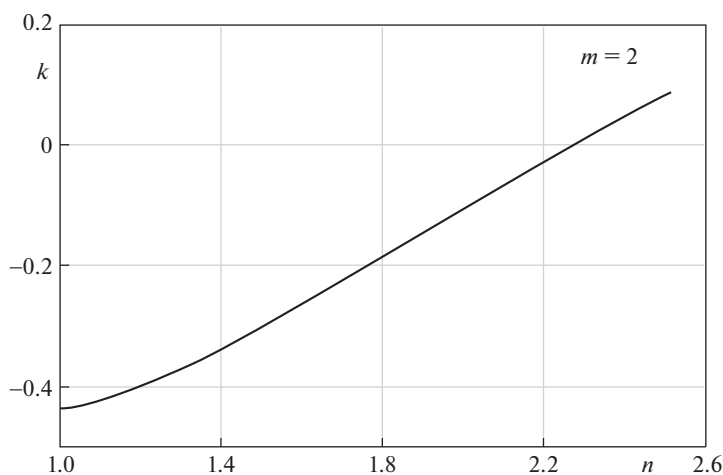


Рис. 5. Зависимость величины k от параметра n в случае, если диск вращается медленнее, чем внешняя среда.

личаются направлениями циркуляции. Это связано с тем, что если среда над диском вращается медленнее диска ($m = 0.8$), то центробежная сила в пограничном слое превышает радиальный градиент давления и радиальная скорость направлена к периферии ($k > 0$). При $m = 2$ уже градиент давления превосходит центробежную силу, и направление циркуляции изменяет знак. Как видно из рис. 6, при возрастании параметра n плотность среды у поверхности диска увеличивается, что позволяет в конечном итоге изменить знак радиальной скорости на положительный в случае, если в отсутствие градиента температуры он был отрицателен.

Оценим количественно на основании полученных аналитических зависимостей (3.19)–(3.21) и соотношений (3.22)–(3.24) эффективность процесса регулирования радиальной скорости в пограничном слое и параметр n_{cr} , при котором должна происходить остановка циркуляционного потока. Для этого определим поток газа в погранич-

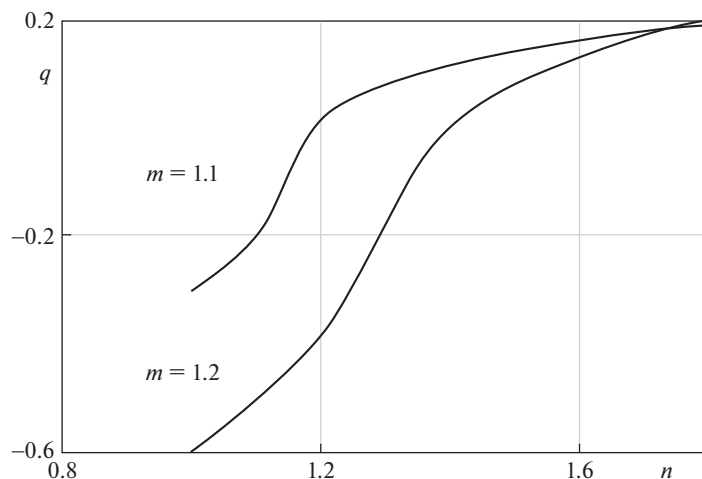


Рис. 6. Зависимости безразмерного потока $q = Q/r^2 \sqrt{\omega_0 v_1}$ от отношения температур во внешнем потоке и на диске $n = T_1/T_0$ при различных значениях параметра m .

ном слое при различных значениях параметров m и $n = T_1/T_0$. Радиальный поток в пограничном слое может быть рассчитан с использованием уравнений (2.3), (3.1) и (3.2)

$$Q = 2\pi r^2 \sqrt{v_1 \omega_0} \delta^3 \int_0^1 f(Z) dZ \quad (4.1)$$

На рис. 6 показаны результаты расчета безразмерной величины $q = Q/r^2 \sqrt{\omega_0 v_1}$ в зависимости от отношения температур во внешнем потоке и на диске $n = T_1/T_0$ при различных значениях параметра m . Как следует из приведенных зависимостей, уже при $n_{\text{кр}} \approx 1.2-1.4$ должно наблюдаться практически полное торможение циркуляционного потока. Причем с возрастанием параметра m критическая величина n возрастает. Это обусловлено тем обстоятельством, что при больших m для преодоления направленной к оси силы, связанной с радиальным градиентом давления, необходимо увеличивать центробежную силу в пограничном слое за счет уплотнения газа.

Оценим справедливость пренебрежения вязким нагревом в уравнении энергии (2.4). Согласно [16], оценим параметр $D = \omega^2 r^2 / c_p T$, в котором ω , T и r — характерные величины угловой скорости и температуры среды, а также радиуса. Полагая $\omega = 5 \times 10^3$ 1/с, $T = 300$ К, $r = 0.06$ м, получим $D \approx 0.3$.

Заключение. В работе впервые в аналитической форме с учетом нелинейных инерционных членов в уравнениях движения газа рассмотрено взаимное влияние тепловых и газодинамических процессов в пограничном слое вблизи вращающегося в неподвижной газовой среде диска при наличии внешнего вращающегося потока. Исследованы случаи различных значений параметра $m = \omega_1/\omega_0$, характеризующего отношение угловых скоростей среды и диска. На основе использования преобразования Дородницына в рамках модели конечной толщины пограничного слоя показано, что даже при величине параметра $m > 1$ варьированием теплового режима можно добиться существенного замедления направленного к оси радиального потока. Этот результат имеет практическое значение, связанное с уменьшением влияния торцевых поверхно-

стей на вращение среды в ограниченных объемах. Предложенная методика расчета может быть также использована при оценках влияния температурных градиентов на интенсивность циркуляции в центрифуге с механическим возбуждением осевого противоточного течения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Grimble T.A., Agarwal A., Juniper M.P.* Local linear stability analysis of cyclone separators // *J. Fluid Mech.* 2017. V. 816. P. 507–538.
2. *Горшков А.В., Просвиряков Е.Ю.* Слоистая конвекция Бенара–Марангони при теплообмене по закону Ньютона–Рихмана // *Компют. исслед. модел.* 2016. Т. 8. № 6. С. 927–940.
3. *Бирих Р.В., Пухначев В.В.* Осевое конвективное течение во вращающей трубе с продольным градиентом температуры // *Докл. РАН.* 2011. Т. 436. № 3. С. 323–327.
4. *Villani S. (Ed.)* Uranium Enrichment. Berlin: Springer, 1979. 315 p.
5. *Борисевич В.Д., Борман В.Д., Сулаберидзе Г.А., Тихомиров А.В., Токманцев В.И.* Физические основы разделения изотопов в газовой центрифуге. М.: Изд. дом МЭИ, 2011. 275 с.
6. *Bogovalov S.V., Borman V.D., Borisevich V.D., Tronin V.N.* Dependence of the separative power of an optimized Iguassu gas centrifuge on the velocity of rotor // *Numer. Meths. for Heat&Fluid Flow.* V. 27. Iss. 7. P. 1387–1394.
7. *Горшунов Н.М., Потанин Е.П.* Использование высокочастотных полей для центробежного разделения отработавшего ядерного топлива // *Атомная энергия.* 2018. Т. 124. Вып. 3. С. 164–168.
8. *Fetterman A.J., Fisch N.J.* Wave-driven countercurrent plasma centrifuge // *Plasma Sources Sci. Technol.* 2009. V. 18. P. 045003.
9. *Миронова М.В., Кортиков Н.Н.* Сопряженный теплообмен на неизотермическом вращающемся диске // *Теплофиз. аэромех.* 2011. Т. 18. № 4. С. 597–603.
10. *Петров А.Г.* О перемешивании вязкой жидкости в слое между вращающимися эксцентричными цилиндрами // *ПММ.* 2008. Т. 72. Вып. 5. С. 741–758.
11. *Голубкин В.Н., Марков В.В., Сизых Г.Б.* Интегральный инвариант уравнений движения вязкого газа // *ПММ.* 2015. Т. 79. Вып. 6. С. 808–816.
12. *Потанин Е.П., Соснин Л.Ю., Чельцов А.Н.* Определение интенсивности циркуляции в роторе центрифуги при обогащении изотопных смесей тяжелых газов // *Атомная энергия.* 2019. Т. 127. Вып. 3. С. 140–144.
13. *Дорфман Л.А.* Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. М.: Физматгиз, 1960. 260 с.
14. *Дородницын А.А.* Пограничный слой в сжимаемом газе // *ПММ.* 1942. Т. 6. Вып. 6. С. 449–486.
15. *Потанин Е.П.* Трехмерное движение газа во вращающемся цилиндре с тормозящей крышкой // *Изв. РАН. МЖГ.* 2013. № 1. С. 78–87.
16. *Borisevich V.D., Potanin E.P., Whichello J.* Circulation control in MHD rotating flows // *J. Fluid Mech.* 2017. V. 829. P. 328–244.
17. *Borisevich V.D., Potanin E.P.* Mechanically driven circulation in a rotating cylinder/disk device // *Europ. J. Mech. / B Fluids.* 2020. V. 82. P. 161–167.
18. *Ram P. Kumar V.* Heat transfer in FHD boundary layer flow with temperature dependent viscosity over a rotating disk // *Fluid Dyn.&Mater. Process.* 2014. V. 10. № 2. P. 179–196.
19. *Von Kármán T.* Über laminare und turbulente Reibung // *Z. Angew. Math. Mech.* 1921. V. 1. P. 233–252.
20. *Бирих Р.В.* О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // *ПМТФ.* 1966. Т. 7. № 3. С. 69–72.
21. *Шидловский В.П.* Ламинарный пограничный слой на неограниченном диске, вращающемся в газе // *ПММ.* 1960. Т. 24. Вып. 1. С. 161–164.
22. *Тарг С.М.* Основные задачи теории ламинарных течений. Ленинград: ГИФМЛ, 1951. 420 с.
23. *Тимофеев А.В.* Об устойчивости мод Сайдема неоднородно вращающейся плазмы // *Физика плазмы.* 2010. Т. 36. Вып. 8. С. 779–785.

24. *Balbus S.A., Terquem C.* Linear analysis of the Hall effect in protostellar disks // *Astrophys. J.* 2001. V. 552. P. 235–247.
25. *Khalzov I.V., Smolyakov A.I., Ilgisonis V.I.* Equilibrium magnetohydrodynamic flows of liquid metals in magnetorotational instability experiments // *J. Fluid Mech.* 2010. V. 644. P. 257–280.
26. *Taylor G.I.* Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders // *Philos. Trans. Royal Soc. London.* 1923. Ser. A. 223. P. 289–343.

Application of the Dorodnitsyn Transformation for Analysis of Heat and Mass Transfer in Rotating Flows

V.D. Borisevich^{a,#} and E.P. Potanin^{b,c,##}

^a *National Research Nuclear University “MEPhI”, Moscow, Russia*

^b *National Research Center “Kurchatov Institute”, Moscow, Russia*

^c *All Russian Institute for Scientific and Technical Information (VINITI) of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: VDBorisevich@mephi.ru*

^{##} *e-mail: potanin45@yandex.ru*

It is proposed the method based on the use of the Dorodnitsyn transformation for calculation of the non-isothermal laminar boundary layers on a disk rotating in a gaseous medium. An approximate account of the nonlinear inertial terms is performed by Slezkin–Targ method. It is demonstrated that upon cooling the surface of the disk-end rotating slower than the external flow, it is possible not only to weaken the radial flow of a viscous heat-conducting gas, but also to change the direction of the flow velocity in the boundary layer to the opposite one. The possibility of application of the results obtained to reduce the masking effect of the end elements in the experimental study of the stability of rotational flows as well as to control the circulation flows in closed systems are discussed.

Keywords: laminar boundary layer, rotating flow, Dorodnitsyn transformation, temperature gradient, viscosity, circulation, stability

REFERENCES

1. *Grimble T.A., Agarwal A., Juniper M.P.* Local linear stability analysis of cyclone separators // *J. Fluid Mech.*, 2017, vol. 816, pp. 507–538.
2. *Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Y.* Laminated Bernard–Marangoni convection with existence of thermal exchange in accordance with the Newton–Riemann law // *Comput. Res.&Model.*, 2016, vol. 8, no. 6, pp. 927–940. (in Russian)
3. *Birikh P.V., Pukhnachev V.V.* An axial convective flow in a rotating tube with a longitudinal temperature gradient // *Dokl. Phys.*, 2011, vol. 56, no. 1, pp. 47–52.
4. *Villani S.* (Ed.) *Uranium Enrichment*: Springer, 1979. 315 p.
5. *Borisevich V.D., Borman V.D., Sulaberidze G.A., Tikhomirov A.V., Tokmantsev V.I.* Physical backgrounds for isotope separation in a gas centrifuge. Moscow: MEI Publ., 2011. 275 p. (in Russian)
6. *Bogovalov S.V., Borman V.D., Borisevich V.D., Tronin V.N.* Dependence of the separative power of an optimized Iguassu gas centrifuge on the velocity of rotor // *Int. J. Num. Meths. for Heat&Fluid Flow*, 2017, vol. 27, Iss. 7, pp. 1387–1394.
7. *Gorshunov N.M., Potanin E.P.* Use of High-Frequency Fields for Centrifugal Separation of Spent Nuclear Fuel // *Atomic Energy*, 2018, vol. 124, pp. 197–202.
8. *Fetterman A.J., Fisch N.J.* Wave-driven countercurrent plasma centrifuge // *Plasma Sources Sci. Technol.*, 2009, vol. 18, pp. 045003.
9. *Mironova M.V., Kortikov N.N.* Conjugate heat transfer on a non-isothermal rotating disc // *Thermophys.&Aeromech.*, 2011, vol. 18, no. 4, pp. 573–578.
10. *Petrov A.G.* Mixing a viscous fluid in a layer between rotating eccentric cylinders // *JAMM*, 2008, vol. 72, iss. 5, pp. 536–549.

11. *Golubkin V.N., Markov V.V., Sizykh G.B.* The integral invariant of the equations of motion of a viscous gas // JAMM, 2015, vol. 79, iss. 6, pp. 566–571.
12. *Potantin E.P., Sosnin L.Yu., Chel'tsov A.N.* Determination of the circulation intensity in a centrifuge rotor in the enrichment of isotopic mixtures of heavy gases // Atomic Energy, 2019, vol. 127, pp. 153–158.
13. *Dorfman L.A.* Hydrodynamic Resistance and Heat Transfer of Rotating Bodies. Moscow: Phizmatgiz, 1960. 260 p. (in Russian)
14. *Dorodnitsyn A.A.* Boundary layer in compressible gas // Appl. Math.&Mech., 1942, vol. 6, iss. 6, pp. 449–486. (in Russian)
15. *Potantin E.P.* Three-dimensional gas flow in a rotating cylinder with a retarding cover // Fluid Dyn., 2013, vol. 48, iss. 1, pp. 68–76.
16. *Borisevich V.D., Potantin E.P., Whichello J.* Circulation control in MHD rotating flows // J. Fluid Mech., 2017, vol. 829, pp. 328–244.
17. *Borisevich V.D., Potantin E.P.* Mechanically driven circulation in a rotating cylinder/disk device // Europ. J. Mech. / B Fluids, 2020, vol. 82, pp. 161–167.
18. *Ram P., Kumar V.* Heat transfer in FHD boundary layer flow with temperature dependent viscosity over a rotating disk // Fluid Dyn.&Mater. Process., 2014, vol. 10, no. 2, pp. 179–196.
19. *Von Kármán T.* Über laminare und turbulente Reibung // Z. Angew. Math. Mech., 1921, vol. 1, pp. 233–252.
20. *Birikh P.V.* Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid // J. Appl. Mech. Tech. Phys., 1966, vol. 7, no. 3, pp. 43–44.
21. *Shidlovskiy V.P.* Laminar boundary layer on an infinite disc rotating in a gas // JAMM, 1960, vol. 24, iss. 1, pp. 221–226.
22. *Targ S.M.* The Main Problems in the Theory of Laminar Flows. Leningrad: GIFML, 1951. 420 p.
23. *Timofeev A.V.* On the stability of the Sydem modes of an inhomogeneously rotating plasma // Plasma Phys., 2010, vol. 36, iss. 8, pp. 779–785. (in Russian)
24. *Balbus S.A., Terquem C.* Linear analysis of the Hall effect in protostellar disks // Astrophys. J., 2001, vol. 552, pp. 235–247.
25. *Khalzov I.V., Smolyakov A.I., Ilgisonis V.I.* Equilibrium magnetohydrodynamic flows of liquid metals in magnetorotational instability experiments // J. Fluid Mech., 2010, vol. 644, pp. 257–280.
26. *Taylor G.I.* Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders // Philos. Trans. Royal Soc. London, 1923, ser. A, vol. 223, pp. 289–343.

УДК 532.5 + 539.3

*К 70-летию со дня рождения
Евгения Николаевича Чумаченко (1951–2015)*

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ТРЕХОСНОЕ ДИНАМИЧЕСКОЕ ОБЖАТИЕ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

© 2021 г. Д. В. Георгиевский^{1,2,3,*}

¹ *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

² *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

³ *Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*

**e-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

Поступила в редакцию 14.12.2020 г.

После доработки 26.03.2021 г.

Принята к публикации 15.04.2021 г.

Рассматривается обратная задача механики сплошной среды, в которой по заданной кинематике течения однородного несжимаемого материала во всем трехмерном пространстве требуется определить силовые режимы, обеспечивающие согласно уравнениям движения и выбранным определяющим соотношениям такую кинематику. Принятый закон движения частиц состоит из трех временных этапов, на каждом из которых соответствует сжатию в одном направлении и растеканию среды в двух других. При этом плоскости, которые были параллельны декартовым координатным плоскостям до деформации, остаются параллельны им в любой момент процесса. Это дает возможность поставить задачу о последовательном трехосном обжатии параллелепипеда и его переводе из начального положения в заданное конечное. Находятся возможные кинематические и силовые режимы для реализации данного перевода.

Ключевые слова: течение, растяжение, сжатие, трехосное динамическое обжатие, параллелепипед, закон движения, траектории частиц

DOI: 10.31857/S0032823521060060

В конце 80-х годов прошлого столетия в связи с интенсивным развитием теории определяющих соотношений в сверхпластичности и образованием в Уфе Института проблем сверхпластичности металлов А.А. Ильюшин обратил внимание на ряд важных технологических задач обработки материалов с деформациями от нескольких сот до тысячи процентов, в которых моделирование могло бы проводиться на основе деформационного подхода в рамках лагранжева описания. За последующие десятилетия в разных научных группах и школах были достигнуты большие успехи на пути такого моделирования [1–5]. К числу упомянутых задач относилось последовательное многократное обжатие параллелепипеда в разных ортогональных направлениях с целью придания ему наперед заданной формы.

Ниже такая задача исследуется в динамической постановке как обратная задача механики. По заданной кинематике, соответствующей на каждом временном этапе сжатию в одном направлении и растеканию в двух других, в рамках широкого класса

определяющих соотношений (тензорно линейные среды) находятся силы, которые необходимо приложить к граням параллелепипеда для реализации процесса.

1. Кинематика, соответствующая последовательному трехосному растяжению—сжатию пространства. Рассмотрим течение несжимаемой однородной плотности ρ среды во всем трехмерном пространстве с декартовой системой координат $(Ox_1x_2x_3)$ на отрезке времени $0 \leq t \leq T$, состоящем из трех частей:

$$\Delta_1 = \{0 \leq t \leq t_1\}, \quad \Delta_2 = \{t_1 \leq t \leq t_1 + t_2\}, \quad \Delta_3 = \{t_1 + t_2 \leq t \leq t_1 + t_2 + t_3 = T\} \quad (1.1)$$

Пусть в рамках эйлерова описания движения декартовы компоненты вектора скорости являются следующими функциями координат и времени:

$$v(x, t) = \begin{cases} (-c_1x_1, c_1x_2/2, c_1x_3/2), & t \in \Delta_1 \\ (c_2x_1/2, -c_2x_2, c_2x_3/2), & t \in \Delta_2, \\ (c_3x_1/2, c_3x_2/2, -c_3x_3), & t \in \Delta_3 \end{cases} \quad (1.2)$$

где $c_1(t)$, $c_2(t)$ и $c_3(t)$ — некоторые положительные непрерывно-дифференцируемые функции времени, определенные каждая на своем отрезке. Как видно, несжимаемость в соотношениях (1.2) соблюдена. Трехстрочную запись (1.2) можно представить одной строкой:

$$v_\alpha = -c_\alpha x_\alpha, \quad v_\beta = \frac{c_\beta x_\beta}{2}, \quad v_\gamma = \frac{c_\gamma x_\gamma}{2}; \quad t \in \Delta_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

Здесь и далее принимаются следующие соглашения в обозначениях: а) по повторяющимся греческим индексам суммирование не производится; б) разные греческие индексы соответствуют разным числовым значениям; в) тройки индексов (α, β, γ) в одной группе соотношений, как в (1.3), — три четные подстановки набора $(1, 2, 3)$; г) запятая в индексе означает частное дифференцирование по соответствующей пространственной координате.

Из эйлерова поля скорости (1.2), начальных условий $x_i(0) = \xi_i$ и требования непрерывности траекторий частиц при $0 \leq t \leq T$ можно вывести закон движения лагранжевых частиц во всем пространстве:

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 e^{-C_1(t)}, & x_2 &= \xi_2 e^{C_1(t)/2}, & x_3 &= \xi_3 e^{C_1(t)/2}; & t \in \Delta_1 \\ x_1 &= \xi'_1 e^{C_2(t)/2}, & x_2 &= \xi'_2 e^{-C_2(t)}, & x_3 &= \xi'_3 e^{C_2(t)/2}; & t \in \Delta_2 \\ x_1 &= \xi''_1 e^{C_3(t)/2}, & x_2 &= \xi''_2 e^{C_3(t)/2}, & x_3 &= \xi''_3 e^{-C_3(t)}; & t \in \Delta_3, \end{aligned}$$

где $\xi'_i = x_i(t_1)$, $\xi''_i = x_i(t_1 + t_2)$,

$$C_1(t) = \int_0^t c_1(\tau) d\tau, \quad C_2(t) = \int_{t_1}^t c_2(\tau) d\tau, \quad C_3(t) = \int_{t_1+t_2}^t c_3(\tau) d\tau \quad (1.5)$$

Отметим, что поле скорости (1.2) разрывно в моменты времени t_1 и $t_1 + t_2$, при этом фазами торможений и перестроек с одной строки (1.2) на следующую пренебрегается. Соответственно траектории частиц (1.4) непрерывны, но имеют изломы в два указанных момента времени.

Согласно закону движения (1.4) состоящие из лагранжевых частиц плоскости, которые были параллельны координатным плоскостям в начальный момент времени, движутся параллельно самим себе и, следовательно, остаются параллельны координатным плоскостям неподвижной системы координат $(Ox_1x_2x_3)$. Это, в частности, означает, что частицы, принадлежавшие при $t = 0$ параллелепипеду Ω_0 со сторонами $2l_{10} \times 2l_{20} \times 2l_{30}$ (линейные размеры l_{10} , l_{20} и l_{30} произвольны):

$$\Omega_0 = \{|\xi_1| < l_{10}, |\xi_2| < l_{20}, |\xi_3| < l_{30}\} \quad (1.6)$$

остаются в процессе деформирования внутри параллелепипеда Ω_t со сторонами $2l_1(t) \times 2l_2(t) \times 2l_3(t)$:

$$\Omega_t = \{|x_1| < l_1(t), |x_2| < l_2(t), |x_3| < l_3(t)\} \quad (1.7)$$

вплоть до $t = T$, когда

$$\Omega_T = \{|x_1| < l_{1T} = \kappa_1 l_{10}, |x_2| < l_{2T} = \kappa_2 l_{20}, |x_3| < l_{3T} = \kappa_3 l_{30}\} \quad (1.8)$$

В силу непрерывности траекторий функции $l_1(t)$, $l_2(t)$ и $l_3(t)$ непрерывны по t и $l_i(0) = l_{i0}$, $l_i(T) = l_{iT}$, $i = 1, 2, 3$. Постоянство объема Ω_t , следующее из несжимаемости среды, приводит к равенствам

$$l_1 l_2 l_3 \equiv l_{10} l_{20} l_{30} = l_{1T} l_{2T} l_{3T}, \quad \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 = 1 \quad (1.9)$$

Можно ли так подобрать функции $c_1(t)$, $c_2(t)$ и $c_3(t)$ и моменты времени t_1 и $t_1 + t_2$ из интервала $(0, T)$, чтобы в результате последовательных обжатий в трех направлениях параллелепипед Ω_0 (1.6) деформировался в Ω_T (1.8) к моменту T ? Используя закон движения (1.4), можно утверждать, что для этого необходимо и достаточно выполнение системы неоднородных линейных уравнений относительно $C_1(t_1)$, $C_2(t_1 + t_2)$, $C_3(T)$:

$$\begin{aligned} -C_1(t_1) + \frac{1}{2}C_2(t_1 + t_2) + \frac{1}{2}C_3(T) &= \ln \kappa_1 \\ \frac{1}{2}C_1(t_1) - C_2(t_1 + t_2) + \frac{1}{2}C_3(T) &= \ln \kappa_2 \\ \frac{1}{2}C_1(t_1) + \frac{1}{2}C_2(t_1 + t_2) - C_3(T) &= \ln \kappa_3 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Данная система вырождена, но совместна благодаря условиям (1.9). Ее общее решение выглядит следующим образом:

$$C_1(t_1) = C_2(t_1 + t_2) - \frac{2}{3} \ln \frac{\kappa_1}{\kappa_2} = C_3(T) - \frac{2}{3} \ln \frac{\kappa_1}{\kappa_3} \quad (1.11)$$

или с учетом (1.5) в терминах функций $c_1(t)$, $c_2(t)$ и $c_3(t)$:

$$\int_0^{t_1} c_1(t) dt = \int_{t_1}^{t_1+t_2} c_2(t) dt - \frac{2}{3} \ln \frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \int_{t_1+t_2}^T c_3(t) dt - \frac{2}{3} \ln \frac{\kappa_1}{\kappa_3} \quad (1.12)$$

Тензор скоростей деформаций $\underline{\nu} = (\text{Grad } \mathbf{v} + (\text{Grad } \mathbf{v})^T)/2$, построенный по полю вектора $\mathbf{v}$ (1.2), на всем временном отрезке $[0; T]$ диагонален, явно зависит от t и не зависит от x , что говорит о существенной нестационарности и однородности по пространству деформационной картины:

$$v_{\alpha\alpha} = -c_\alpha(t), \quad v_{\beta\beta} = v_{\gamma\gamma} = \frac{c_\alpha(t)}{2}; \quad t \in \Delta_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (1.13)$$

Интенсивность скоростей деформаций

$$v_u = \sqrt{v_{ij}v_{ij}} = \sqrt{v_{\alpha\alpha}^2 + v_{\beta\beta}^2 + v_{\gamma\gamma}^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} c_\alpha(t); \quad t \in \Delta_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (1.14)$$

с точностью до коэффициента на каждом отрезке времени Δ_α совпадает с функциями $c_\alpha(t)$, входящими в эйлеров закон движения (1.2). Это указывает на их физический смысл. Условия (1.12) означают, что проинтегрированные интенсивности скоростей деформаций на трех рассматриваемых временных промежутках должны отличаться друг от друга на известные величины, определяемые лишь размерами параллелепипедов Ω_0 и Ω_T .

2. Уравнения движения и напряженное состояние. Будем считать, что равенства (1.12) выполнены, т.е. остановимся на имеющей важное значение в технологии обработки материалов задаче о последовательном обжатии тела в разных направлениях. При этом вместо всего пространства ограничимся областью Ω_t (1.7) с неизвестными границами $l_1(t)$, $l_2(t)$ и $l_3(t)$ (известны их начальные и конечные значения, т.е. области Ω_0 (1.6) и Ω_T (1.8)). Как это принято в механике, окружающую параллелепипед Ω_t среду заменим силами (также пока неизвестными), действующими на его шести гранях со стороны среды.

Остановимся на силовых режимах, обеспечивающих описанную в разд. 1 кинематику деформирования параллелепипеда Ω_t , и в первую очередь на сопровождающем такую кинематику напряженном состоянии. Представим компоненты $\sigma_{ij}(x, t)$ тензора напряжений Коши в виде суммы девиаторной и шаровой частей:

$$\sigma_{ij} = s_{ij} - p\delta_{ij}, \quad (2.1)$$

где $p(x, t)$ — давление в несжимаемой среде, а $s_{ij}(x, t)$ — компоненты девиатора, выражающиеся с помощью выбранных тем или иным способом определяющих соотношений через компоненты тензора $\underline{v}(x, t)$. Сохраняя общность в выборе этих соотношений и не конкретизируя тем самым среду, заметим, что поскольку $\underline{v}$ не зависит от координат, то $\underline{s}$ также от них не зависит, т.е. $\underline{s} \equiv 0$. Уравнения движения, таким образом, значительно упрощаются:

$$-p_{,\alpha} = \rho \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} + v_{\alpha,\alpha} v_\alpha \right); \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

Подстановка в (2.2) скоростей (1.3) приводит к системе уравнений для давления $p(x, t)$, имеющей общее решение:

$$p = p_0(t) + \frac{\rho}{2} (\dot{c}_\alpha - c_\alpha^2) x_\alpha^2 - \frac{\rho}{8} (2\dot{c}_\alpha + c_\alpha^2) (x_\beta^2 + x_\gamma^2); \quad t \in \Delta_\alpha \quad (2.3)$$

Оно включает произвольную функцию времени $p_0(t)$, по смыслу представляющую собой давление в центре деформируемого параллелепипеда.

Кинематика (1.3) такова, что на каждом из трех этапов в одном из направлений происходит сжатие параллелепипеда, а в двух других растекание. Из технологических соображений, вызванных стремлением к равнонапряженности состояния по отношению к пространственным координатам, исследуем подробно режим, при котором в каждый момент времени давление на двух противоположных сжимаемых гранях постоянно на всей поверхности этих граней. Из (2.3) следует, что тогда функции $c_1(t)$, $c_2(t)$ и $c_3(t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$2\dot{c}_1 + c_1^2 = 0, \quad 2\dot{c}_2 + c_2^2 = 0, \quad 2\dot{c}_3 + c_3^3 = 0 \quad (2.4)$$

с решениями

$$c_\alpha = \frac{2}{t + \tau_\alpha}; \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad \tau_1 > 0, \quad \tau_2 > -t_1, \quad \tau_3 > -(t_1 + t_2), \quad (2.5)$$

которые содержат произвольные постоянные τ_1 , τ_2 и τ_3 , удовлетворяющие выписаным неравенствам. Согласно (1.5)

$$C_1 = 2 \ln \frac{t + \tau_1}{\tau_1}, \quad C_2 = 2 \ln \frac{t + \tau_2}{t_1 + \tau_2}, \quad C_3 = 2 \ln \frac{t + \tau_3}{t_1 + t_2 + \tau_3} \quad (2.6)$$

Из условия (1.11) находится связь τ_1 , τ_2 и τ_3 :

$$1 + \frac{t_1}{\tau_1} = 3 \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \left(1 + \frac{t_2}{t_1 + \tau_2} \right) = 3 \frac{\kappa_3}{\kappa_1} \left(1 + \frac{t_3}{t_1 + t_2 + \tau_2} \right) \quad (2.7)$$

Подставляя (2.5) в выражение (2.3) для давления, получим

$$p = p_0(t) - \frac{3\rho x_\alpha^2}{(t + \tau_\alpha)^2}; \quad t \in \Delta_\alpha \quad (2.8)$$

Действительно, на каждом из этапов обжатия давление на обеих сжимаемых гранях параллелепипеда не зависит от координат точек на этих гранях. Функция $p_0(t)$, единая для всех точек среды, остается произвольной. Ее выбор может обуславливаться особенностями технологического процесса обжатия.

Выпишем также конкретизированный с учетом (2.6) закон движения (1.4):

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 \left(\frac{\tau_1}{t + \tau_1} \right)^2, & x_2 &= \xi_2 \frac{t + \tau_1}{\tau_1}, & x_3 &= \xi_3 \frac{t + \tau_1}{\tau_1}; & t \in \Delta_1 \\ x_1 &= \xi'_1 \frac{t + \tau_2}{t_1 + \tau_2}, & x_2 &= \xi'_2 \left(\frac{t_1 + \tau_2}{t + \tau_2} \right)^2, & x_3 &= \xi'_3 \frac{t + \tau_2}{t_1 + \tau_2}; & t \in \Delta_2 \\ x_1 &= \xi''_1 \frac{t + \tau_3}{t_1 + t_2 + \tau_3}, & x_2 &= \xi''_2 \frac{t + \tau_3}{t_1 + t_2 + \tau_3}, & x_3 &= \xi''_3 \left(\frac{t_1 + t_2 + \tau_3}{t + \tau_3} \right)^2; & t \in \Delta_3, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где, как и ранее, $\xi'_i = x_i(t_1)$, $\xi''_i = x_i(t_1 + t_2)$. Из (2.9) можно убедиться, что

$$x_\alpha(T) = \kappa_\alpha \xi_\alpha; \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (2.10)$$

Это и необходимо было достичь в результате последовательного обжатия в трех ортогональных направлениях тела Ω_0 (1.6).

3. Суммарные силы, приложенные к граням. Обозначим шесть движущихся граней параллелепипеда Ω_t (1.7) следующим образом:

$$\Sigma_{\alpha t}^\pm = \{x_\alpha = \pm l_\alpha(t), |x_\beta| < l_\beta(t), |x_\gamma| < l_\gamma(t)\} \quad (3.1)$$

причем функции $l_1(t)$, $l_2(t)$ и $l_3(t)$ известны из закона движения (2.9) при подстановке в него $\xi_1 = l_{10}$, $\xi_2 = l_{20}$ и $\xi_3 = l_{30}$. Начальное $\Sigma_{\alpha 0}^\pm$ и конечное $\Sigma_{\alpha T}^\pm$ положения граней известны.

Из разд. 2 следует, что при $t \in \Delta_\alpha$ на движущихся навстречу друг другу двух параллельных прямоугольных гранях $\Sigma_{\alpha t}^+$ и $\Sigma_{\alpha t}^-$ компонента $\sigma_{\alpha\alpha}$ тензора напряжений не зависит от x_β и x_γ . Поэтому суммарные силы $R_{\alpha t}^\pm$, приложенные к каждой из этих граней, равны $\pm \sigma_{\alpha\alpha} |\Sigma_{\alpha t}^\pm|$. Так как площади $|\Sigma_{\alpha t}^\pm|$ равны $4l_\beta(t)l_\gamma(t)$, то

$$\begin{aligned} R_{1t}^\pm &= \pm 4l_2l_3(-p + s_{11}) = \\ &= \pm 4l_{20}l_{30} \left(-p_0(t) + 3\rho l_{10}^2 \frac{\tau_1^4}{(t + \tau_1)^6} + s_{11} \right) \left(\frac{t + \tau_1}{\tau_1} \right)^2; & t \in \Delta_1 \\ R_{2t}^\pm &= \pm 4l_1l_3(-p + s_{22}) = \\ &= \pm 4l'_1l'_3 \left(-p_0(t) + 3\rho l'^2_2 \frac{(t_1 + \tau_2)^4}{(t + \tau_2)^6} + s_{22} \right) \left(\frac{t + \tau_2}{t_1 + \tau_2} \right)^2; & t \in \Delta_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$R_{3i}^{\pm} = \pm 4l_i l_2 (-p + s_{33}) = \\ = \pm 4l_i l_2'' \left(-p_0(t) + 3\rho l_3''^2 \frac{(t_1 + t_2 + \tau_3)^4}{(t + \tau_3)^6} + s_{33} \right) \left(\frac{t + \tau_3}{t_1 + t_2 + \tau_3} \right)^2; \quad t \in \Delta_3$$

где $l_i' = l_i(t_1)$, $l_i'' = l_i(t_1 + t_2)$, $i = 1, 2, 3$.

В выражениях (3.2) для сил входят диагональные компоненты девиатора $s_{\alpha\alpha}(t)$, $t \in \Delta_\alpha$, которые посредством выбранных определяющих соотношений выражаются через скорости деформаций (1.13), а следовательно, через функции $c_1(t)$, $c_2(t)$ и $c_3(t)$, которые имеют вид (2.5). Выпишем эти связи для довольно обширного класса сред, представляющего собой изотропные тензорно линейные среды [6]. В их определяющих соотношениях тензоры $\underline{s}$ и $\underline{\epsilon}$ пропорциональны:

$$s_{ij} = \frac{\sigma_u}{v_u} v_{ij}, \quad \sqrt{\text{tr}(\underline{s})} \equiv \sigma_u = \sigma_s + \Phi(v_u) \quad (3.3)$$

где $\sigma_u = \sigma_s + \Phi(v_u)$ — универсальная кривая материала, расположенная в первом квадранте плоскости интенсивностей (v_u, σ_u) ; $\sigma_s \geq 0$ — предел текучести; $\Phi(v_u)$ — неубывающая неотрицательная функция, такая что $\lim_{v_u \rightarrow 0^+} \Phi(v_u) = 0$. Деформационное упрочнение и упругая податливость материала не учитываются.

Для диагональных компонент (3.3), входящих в (3.2), с учетом (1.14) имеем

$$s_{\alpha\alpha} = -\sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_s + \Phi(v_u)) = -\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sigma_s + \Phi\left(\sqrt{\frac{3}{2}}c_\alpha\right)\right); \quad t \in \Delta_\alpha \quad (3.4)$$

После конкретизации зависимости $\Phi(v_u)$ компонента (3.4) становится известной функцией времени, которую можно подставить в (3.2).

К классу сред с определяющими соотношениями (3.3) принадлежат, например: а) ньютоновские вязкие среды ($\sigma_s = 0$); б) вязкопластические среды Бингама ($\Phi(v_u) = 2\mu v_u$, где μ — динамическая вязкость); в) ньютоновские жидкости ($\sigma_s = 0$ и $\Phi(v_u) = 2\mu v_u$); г) идеальножесткопластические материалы ($\Phi(v_u) \equiv 0$).

Заклучение. При осуществлении трехэтапного процесса обжатия параллелепипеда и перевода его из положения Ω_0 (1.6) в Ω_T (1.8) в результате движения частиц по закону (2.9) остается несколько степеней свободы в выборе параметров t_1 , t_2 , τ_1 , τ_2 , τ_3 . Эти пять времен должны удовлетворять всего двум условиям (2.7). Для реализации закона движения (2.9) на каждом из этапов обжатия на паре сближающихся параллельных граней необходимо приложить силы (3.2), тогда как на двух других удаляющихся друг от друга парах граней достаточно обеспечить их прямолинейность (во избежание выпучивания), т.е. задать кинематические условия. Технология реализации таких условий достаточно сложна [7], и здесь останавливаться на этом не будем.

Возвращаясь к остающейся свободе выбора времен t_1 , t_2 , τ_1 , τ_2 , τ_3 , представляет практический интерес в дальнейшем исследовать задачу оптимизации описываемого процесса в смысле силового режима, а именно минимизации суммарной мощности

$$\int_0^{t_1} R_{1i}^+(t)dt + \int_{t_1}^{t_1+t_2} R_{2i}^+(t)dt + T \int_{t_1+t_2} R_{3i}^+(t)dt \rightarrow \min \quad (4.1)$$

Работа выполнена в рамках госзадания АААА-А20-120011690136-2 при поддержке РФФИ (гранты 18-29-10085мк, 19-01-00016а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Padmanabhan K.A., Vasin R.A., Enikeev F.U.* Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics. New York: Springer, 2001. 363 p.
2. *Чумаченко Е.Н., Смирнов О.М., Цепин М.А.* Сверхпластичность: материалы, теория, технологии. М.: URSS, 2009. 320 с.
3. *Куйко И.А.* О сжатии тонкой полосы из материала в режиме сверхпластичности // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 6. С. 1002–1008.
4. *Шарифуллина Э.Р., Швейкин А.И., Трусов П.В.* Обзор экспериментальных исследований структурной сверхпластичности: эволюция микроструктуры материалов и механизмы деформирования // Вестн. Пермского НИПУ. Механика. 2018. № 3. С. 103–127.
5. *Гвоздев А.Е., Сергеев А.Н., Чуканов А.Н., Кутепов С.Н., Малий Д.В., Цой Е.В., Калинин А.А.* Из истории состояния сверхпластичности металлических систем // Чебышевский сб. 2019. Т. 20. № 1. С. 352–369.
6. *Георгиевский Д.В.* Избранные задачи механики сплошной среды. М.: Ленанд, 2018. 560 с.
7. *Калмыков В.В., Чумаченко Е.Н., Ананьев И.Н.* Способ задания граничных условий при решении задач обработки давлением // Изв. вузов. Машиностр. 1985. № 12. С. 123–125.

Sequential Triaxial Dynamic Compression of a Parallelepiped

D. V. Georgievskii^{a,b,c,#}^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*^b *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*^c *Moscow Centre for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*[#] *e-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

The inverse problem of continuum mechanics is considered, in which the given kinematics of the flow of a homogeneous incompressible material in the three-dimensional space requires determining the force modes that provide such kinematics according to the equations of motion and the selected constitutive relations. The accepted law of particle motion consists of three time stages, each of which corresponds to compression in one direction and spreading of the medium in the other two. In this case, the planes that were parallel to the Cartesian coordinate planes before the deformation remain parallel to them at any time of the process. This makes it possible to formulate the problem of sequential triaxial compression of a parallelepiped and its translation from the initial position to the specified final one. The possible kinematic and force modes for implementing this translation are obtained.

Keywords: flow, stretching, triaxial dynamic compressing, parallelepiped, law of motion, trajectories of particles

REFERENCES

1. *Padmanabhan K.A., Vasin R.A., Enikeev F.U.* Superplastic Flow: Phenomenology and Mechanics. N.Y.: Springer, 2001. 363 p.
2. *Chumachenko E.N., Smirnov O.M., Tsepin M.A.* Superplasticity: Materials, Theory, Technology. Moscow: URSS, 2009. 320 p. (in Russian)
3. *Kiiko I.A.* The compression of a thin strip of material in a superplasticity state // JAMM, 2009, vol. 73, no. 6, pp. 722–726.
4. *Sharifullina E.R., Shveykin A.I., Trusov P.V.* Review of experimental studies on structural superplasticity: internal structure evolution of material and deformation mechanisms // PNRPU Mech. Bull., 2018, no. 3, pp. 103–127. (in Russian)
5. *Gvozdev A.E., Sergeev A.N., Chukanov A.N., Kutepov S.N., Maliy D.V., Tsoy E.V., Kalinin A.A.* Excerpts on the history of superplasticity state of metal systems // Chebyshevskii sb., 2019, vol. 20, no. 1, pp. 352–369. (in Russian)
6. *Georgievskii D.V.* The Selected Problems of Continuum Mechanics. Moscow: Lenand, 2018. (in Russian)
7. *Kalmykov V.V., Chumachenko E.N., Ananyev I.N.* Method for setting boundary conditions when solving pressure treatment problems // Izv. vuzov. Mashinostr., 1985, no. 12, pp. 123–125. (in Russian)

УДК 539.3:534.26

**ДИФРАКЦИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА УПРУГОМ ЦИЛИНДРЕ
С НЕОДНОРОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ, РАСПОЛОЖЕННОМ
ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА**© 2021 г. Л. А. Толоконников^{1,*}, Д. Ю. Ефимов^{1,**}¹ *Тульский государственный университет, Тула, Россия***e-mail: tolokonnikovla@mail.ru****e-mail: bogart.efimov@yandex.ru*

Поступила в редакцию 19.05.2021 г.

После доработки 16.07.2021 г.

Принята к публикации 25.08.2021 г.

Получено аналитическое решение задачи дифракции цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства. Представлены результаты расчетов акустического поля в дальней зоне.

Ключевые слова: дифракция звука, упругий цилиндр, неоднородное упругое покрытие, упругое полупространство

DOI: 10.31857/S0032823521060114

1. Введение. Создание покрытий, обеспечивающих требуемые звукоотражающие свойства тел, является актуальной проблемой. В настоящее время предложены различные виды покрытий для тел разной геометрической формы. Например, рассмотрены [1] прямая и обратная задачи дифракции плоской звуковой волны на цилиндре с перфорированным покрытием. Обсуждается [2, 3] задача о нерассеивающем покрытии с протяженной реакцией, делающем цилиндрическое тело акустически невидимым. Выявлены [4] условия, при которых совместный выбор импедансов однородного покрытия и упругой цилиндрической оболочки позволяет минимизировать рассеянное поле. Предложено [5] изменять характеристики рассеяния тел с помощью непрерывно-неоднородных упругих покрытий при соответствующем подборе законов неоднородности для механических параметров покрытия. Такие непрерывно-неоднородные покрытия можно реализовать с помощью многослойной системы тонких однородных упругих слоев с различными значениями плотности и упругих постоянных. С математической точки зрения такое представление эквивалентно аппроксимации непрерывных функций, характеризующих переменные параметры непрерывно-неоднородного покрытия, кусочно-постоянными функциями.

Возможность изменения звукоотражающих свойств цилиндрических тел с помощью неоднородных упругих покрытий обсуждалась в ряде работ. Исследовано [5, 6] рассеяние плоских и цилиндрических звуковых волн абсолютно жестким цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием. Решены [7, 8] задачи о рассеянии наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с радиально-неоднородным и дискретно-неоднородным упругими покрытиями. Исследована [9] дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием. Осуществлено [10] моделирование неоднородного по-

крытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами. Найдены функциональные зависимости для плотности и модулей упругости материала покрытия, обеспечивающие наименьшее отражение звука в определенном угловом секторе и в заданном диапазоне частот. В указанных выше работах полагалось, что тела находятся в безграничном пространстве.

Исследование дифракции звуковых волн на упругих телах с неоднородными упругими покрытиями, расположенными вблизи границ раздела сред, имеет важное теоретическое и практическое значение. Результаты таких исследований представляют интерес для гидроакустики при создании покрытий тел с требуемыми звукоотражающими свойствами, при разработке функционально-градиентных и композитных материалов для борьбы с шумом.

Изучена дифракция плоской звуковой волны на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием, находящемся вблизи идеальной плоскости (абсолютно жесткой и акустически мягкой), при нормальном падении плоской волны на цилиндр [11] и при произвольном падении [12]. Решена задача [13] о рассеянии звуковых волн жестким цилиндром с неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе, у которого одна граница является абсолютно жесткой, а другая — акустически мягкой. В настоящей работе рассматривается задача дифракции цилиндрической звуковой волны на упругом цилиндре с радиально-неоднородным покрытием, расположенным вблизи упругого полупространства.

2. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечный однородный и изотропный упругий цилиндр радиуса r_0 , материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Цилиндр имеет покрытие в виде радиально-неоднородного упругого изотропного слоя, внешний радиус которого равен r_1 . Цилиндр с покрытием находится в идеальной жидкости с плотностью ρ_* и скоростью звука c , граничащей с однородным изотропным упругим полупространством с плотностью ρ_1 и упругими постоянными λ_1 и μ_1 . Ось цилиндра параллельна границе упругого полупространства и отстоит от неё на расстоянии d .

Введем прямоугольную декартову систему координат x, y, z так, чтобы координатная ось z совпадала с осью вращения цилиндра. С прямоугольной системой координат свяжем цилиндрическую систему координат r, φ, z .

Полагаем, что плотность материала покрытия ρ является непрерывной функцией радиальной координаты r , а модули упругости материала покрытия λ и μ — дифференцируемыми функциями координаты r . В системе координат x, y, z граница упругого полупространства определяется уравнением $y = -d$ (рис. 1).

В полупространстве, заполненном идеальной жидкостью, находится линейный источник, параллельный оси z , который генерирует монохроматическую цилиндрическую звуковую волну с частотой ω и амплитудой A . Положение источника определяется точкой M_0 , имеющей цилиндрические координаты (r_i, φ_i) . Точка наблюдения M имеет координаты (r, φ) .

Определим акустическое поле в жидком полупространстве.

3. Аналитическое решение задачи. Потенциал скорости гармонической звуковой волны, излучаемой осесимметричным цилиндрическим источником в свободном пространстве, представим в виде

$$\Psi_0 = A G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \exp(-i\omega t), \quad (3.1)$$

где $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = \frac{i}{4} H_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|)$ — функция Грина для свободного пространства, $H_0(x)$ — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода нулевого порядка, $k = \omega/c$ — волно-

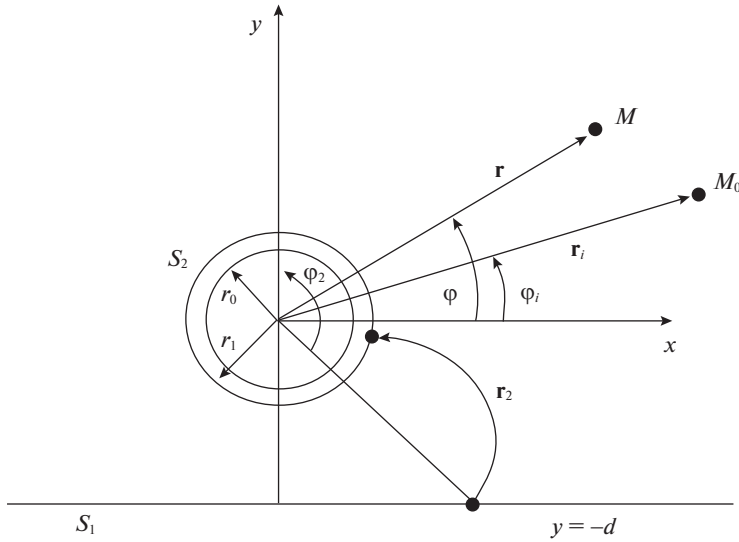


Рис. 1.

вое число жидкости, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_i$ — радиус-векторы точек M и M_0 , t — время. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ далее опускается.

Потенциал скорости полного акустического поля в жидком полупространстве будем искать в виде

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_{s1} + \Psi_{s2}, \quad (3.2)$$

где Ψ_{s1} — потенциал скорости волны, отраженной от границы полупространства, Ψ_{s2} — потенциал скорости рассеянной цилиндром волны (с учетом многократного переотражения между цилиндром и упругим полупространством).

Скорость частиц $\mathbf{v}$ и акустическое давление p в содержащей жидкости определяют формулами

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi, \quad p = i\rho_*\omega\Psi$$

Полное звуковое поле в верхнем полупространстве удовлетворяет интегральному уравнению Гельмгольца [14]

$$\Psi(\mathbf{r}) = AG(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) + \int_S \left[\Psi(\mathbf{r}_2) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}_2)}{\partial n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \right] dS \quad (3.3)$$

Здесь $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$ — двумерная функция Грина для уравнения Гельмгольца, $S = S_1 + S_2$, S_1 — поверхность упругого полупространства, S_2 — внешняя поверхность покрытия цилиндра. При интегрировании по поверхности S_1 точка $\mathbf{r}_2$ находится на поверхности полупространства и дифференцирование выполняется по внешней нормали к поверхности S_1 , а в интеграле по поверхности S_2 точка $\mathbf{r}_2$ находится на поверхности цилиндра и дифференцирование происходит по внешней нормали к поверхности S_2 .

Для того, чтобы в (3.3) исключить интегрирование по бесконечной поверхности S_1 воспользуемся функцией Грина [14]

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) + G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2), \quad (3.4)$$

где [15]

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = \frac{i}{4} H_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[ik\xi(x - x_2) + ik\eta|y - y_2|] \frac{d\xi}{\eta} \quad (3.5)$$

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A'_1(\xi) \exp[ik\xi(x - x_2) + ik\eta(y + y_2)] \frac{d\xi}{\eta} \quad (3.6)$$

Здесь $A'_1(\xi) = \exp(i2kd\eta) A_1(\xi)$, $\eta = \sqrt{1 - \xi^2}$, $A_1(\xi)$ — коэффициент отражения плоской волны единичной амплитуды, падающей на упругое полупространство. Коэффициент $A_1(\xi)$ находится при решении задачи об отражении плоской волны, направление распространения которой задается горизонтальной $k\xi$ и вертикальной $-k\eta$ компонентами волнового вектора $\mathbf{k}$, в системе координат с началом отсчета, лежащим на границе упругого полупространства.

Функция Грина (3.4) удовлетворяет на поверхности раздела идеальной жидкости и упругого полупространства тем же граничным условиям, что и потенциал скорости акустического поля

$$\text{при } y = -d : -i\omega u_{1y} = \frac{\partial G}{\partial y}, \quad \sigma_{1yy} = -i\omega\rho_*G, \quad \sigma_{1xy} = 0,$$

где u_{1y} и σ_{1yy} , σ_{1xy} — нормальная компонента вектора смещения и компоненты тензора напряжений в упругом полупространстве. При таком выборе функции Грина интеграл по поверхности полупространства S_1 в (3.3) обращается в ноль, и остается только интеграл по поверхности цилиндра S_2 .

При замене переменной $\xi = \sin \theta$ переходим от $A_1(\xi)$ к коэффициенту отражения плоской волны, падающей под углом θ на границу упругого полупространства, $A_1(\theta)$. Задача об отражении плоской звуковой волны от упругого полупространства решена в [16]. Коэффициент отражения имеет вид

$$A_1(\theta) = \frac{d_1 - d_2}{d_1 + d_2}, \quad (3.7)$$

где

$$d_1 = k_y \left[\lambda_1 k_{1l}^2 (k_{1\tau}^2 - 2k_x^2) + 2\mu_1 k_{1ly} (2k_x^2 k_{1\tau y} + k_{1ly}^2 k_{1\tau}^2 - 2k_x^2 k_{1ly}) \right] \\ d_2 = k_{1ly} k_{1\tau}^2 \omega^2 \rho_*$$

Здесь $k_x = k \sin \theta$, $k_y = k \cos \theta$, $k_{1l} = \omega/c_{1l}$ и $k_{1\tau} = \omega/c_{1\tau}$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн в упругом полупространстве, $c_{1l} = \sqrt{(\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho_1}$ и $c_{1\tau} = \sqrt{\mu_1/\rho_1}$ — скорости продольных и поперечных волн, $k_{1ly} = \sqrt{k_{1l}^2 - k_x^2}$, $k_{1\tau y} = \sqrt{k_{1\tau}^2 - k_x^2}$.

Используя теорему сложения для цилиндрических волновых функций, представим $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)$ в виде разложения [17]

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi - \varphi_2)} \begin{cases} J_n(kr) H_n(kr_2), & r < r_2 \\ J_n(kr_2) H_n(kr), & r > r_2 \end{cases} \quad (3.8)$$

где $J_n(x)$ и $H_n(x)$ — цилиндрические функции Бесселя и Ганкеля первого рода порядка n соответственно.

В (3.6) сделаем замену переменных $\xi = \sin \theta$, $\eta = \cos \theta$ и перейдем к цилиндрической системе координат $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $x_2 = r_2 \cos \varphi_2$, $y_2 = r_2 \sin \varphi_2$. Тогда G_1 примет вид

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = \frac{i}{4\pi_\Gamma} \int_\Gamma A'_1(\theta) \exp[ikr \sin(\varphi + \theta)] \exp[-ikr_2 \sin(-\varphi_2 + \theta)] d\theta, \quad (3.9)$$

где Γ — контур Зоммерфельда на комплексной плоскости θ (пределы интегрирования от $-\pi/2 + i\infty$ до $\pi/2 - i\infty$).

Используя разложение [17]

$$\exp(\pm ikr \sin \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\pm 1)^m J_m(kr) \exp(im\varphi),$$

из (3.9) получаем

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr) \exp(in\varphi) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(kr_2) \exp(-im\varphi_2) g_{n+m}, \quad (3.10)$$

где

$$g_l = \frac{1}{\pi_\Gamma} \int_\Gamma A_l(\theta) \exp[i(2kd \cos \theta + l\theta)] d\theta \quad (3.11)$$

Определим потенциал скорости полного акустического поля на внешней поверхности покрытия цилиндра S_2 . Представим его, а также нормальную составляющую скорости частиц жидкости на поверхности S_2 в виде разложений в ряды Фурье

$$\Psi|_{r=r_1} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} p_q \exp(iq\varphi) \quad (3.12)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial n} \right|_{r=r_1} = \sum_{q=-\infty}^{\infty} v_q \exp(iq\varphi), \quad (3.13)$$

где p_q и v_q — коэффициенты, подлежащие определению.

В уравнении (3.3) устремим точку наблюдения на поверхность S_2 и учтем, что при выборе функции Грина в виде (3.4) достаточно ограничиться интегрированием по поверхности S_2 . Подставим в левую часть (3.3) разложение (3.12), а в первое слагаемое правой части (3.3) — функцию Грина в виде суммы (3.4), составленной из выражений (3.8) и (3.10), в которых заменим r_2 , φ_2 на r_1 , φ_1 . Далее подставим разложения (3.12), (3.13) и функцию Грина (сумма (3.8) и (3.10)) в подынтегральное выражение уравнения (3.3). При этом дифференцирование по нормали будем выполнять по переменной r_2 . При выполнении дифференцирования выражения (3.8) следует выбрать нижнюю строчку в формуле (3.8). После проведения указанных операций следует положить $r = r_2 = r_1$.

Осуществив интегрирование по поверхности цилиндра ($dS_2 = r_1 d\varphi_2$, $\varphi_2 \in [0, 2\pi]$) с учетом ортогональности экспоненциальных множителей и используя выражение для вронскиана [17]

$$J_n(kr_1) H'_n(kr_1) - J'_n(kr_1) H_n(kr_1) = 2i/(\pi kr_1),$$

получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов p_q , v_q

$$p_q + \alpha_q v_q + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\beta_{qn}^{(1)} p_n + \beta_{qn}^{(2)} v_n) = X_q, \quad q = -\infty, \dots, \infty, \quad (3.14)$$

где

$$\alpha_q = -\frac{H_q(kr_1)}{kH'_q(kr_1)}, \quad \beta_{qn}^{(1)} = (-1)^q \frac{J'_n(kr_1)}{H'_q(kr_1)} g_{n+q}, \quad \beta_{qn}^{(2)} = (-1)^{q+1} \frac{J_n(kr_1)}{kH'_q(kr_1)} g_{n+q}$$

$$X_q = -\frac{A}{2\pi k r_1 H'_q(kr_1)} \left[H_q(kr_i) \exp(-iq\varphi_i) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(kr_i) \exp(-im\varphi_i) g_{m+q} \right]$$

Отметим, что коэффициенты p_q и v_q связаны между собой. Эту связь через значения составляющих вектора смещения частиц покрытия на его внешней поверхности установим ниже.

Рассмотрим вычисление коэффициентов g_l , определяемых выражением (3.11). Интеграл (3.11) разобьем на три интеграла по участкам $(-\pi/2 + i\infty, -\pi/2)$, $(-\pi/2, \pi/2)$, $(\pi/2, \pi/2 - i\infty)$. Выполним замену переменных $\theta = -\pi/2 + i\gamma_1$ в первом и $\theta = \pi/2 - i\gamma_2$ в третьем интегралах.

В результате получаем

$$g_l = (I_{1l} + I_{2l} + I_{3l})/\pi, \quad (3.15)$$

где

$$I_{1l} = (-i)^{l+1} \int_0^{\infty} A_l(\gamma_1) \exp(-2kd \cdot \text{sh } \gamma_1) \exp(-l\gamma_1) d\gamma_1$$

$$I_{2l} = 2 \int_0^{\pi/2} A_l(\theta) \exp(i2kd \cos \theta) \cos l\theta d\theta$$

$$I_{3l} = i^{l-1} \int_0^{\infty} A_l(\gamma_2) \exp(-2kd \text{sh } \gamma_2) \exp(l\gamma_2) d\gamma_2$$

Здесь $A_l(\gamma_j)$ определяется по формуле (3.7), в которой следует положить

$$k_x = (-1)^j k \text{ch } \gamma_j, \quad k_y = ik \text{sh } \gamma_j \quad j = (1, 2)$$

Теперь воспользуемся результатами [9], где радиальная u_r и угловая u_φ компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ в неоднородном упругом покрытии представляются в виде рядов Фурье

$$u_r(r, \varphi) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} U_{1q}(r) \exp[iq(\varphi - \varphi_i)]$$

$$u_\varphi(r, \varphi) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} U_{2q}(r) \exp[iq(\varphi - \varphi_i)], \quad (3.16)$$

где функции $U_{1q}(r)$, $U_{2q}(r)$ для каждого q являются решением следующей системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\hat{\mathbf{A}}_q \mathbf{U}_q'' + \hat{\mathbf{B}}_q \mathbf{U}_q' + \hat{\mathbf{C}}_q \mathbf{U}_q = 0, \quad (3.17)$$

где $\mathbf{U}_q = (U_{1q}(r), U_{2q}(r))^T$, $\hat{\mathbf{A}}_q$, $\hat{\mathbf{B}}_q$, $\hat{\mathbf{C}}_q$ – матрицы второго порядка с элементами [9].

Граничные условия на внешней поверхности покрытия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц неоднородной упругой среды и жидкости, равенстве на

ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательного напряжения

$$\text{при } r = r_1: \quad -i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad (3.18)$$

где u_r и v_r — нормальные компоненты векторов смещения и скорости, σ_{rr} и $\sigma_{r\varphi}$ — компоненты тензора напряжений в упругом неоднородном покрытии.

Используя обобщенный закон Гука [18] с учетом (3.16), будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[(\lambda + 2\mu) U'_{1q}(r) + \frac{\lambda}{r} (U_{1q}(r) + iq U_{2q}(r)) \right] \exp[iq(\varphi - \varphi_i)] \\ \sigma_{r\varphi} &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mu \left[\frac{iq}{r} U_{1q}(r) + U'_{2q}(r) - \frac{U_{2q}(r)}{r} \right] \exp[iq(\varphi - \varphi_i)] \end{aligned} \quad (3.19)$$

Подставляя (3.12), (3.13), (3.16) и (3.19) в первые два граничных условия (3.18), получаем

$$\begin{aligned} v_q &= -i\omega U_{1q}(r_1) \exp(-iq\varphi_i) \\ p_q &= \frac{i}{\rho_*\omega} \left[(\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)) U'_{1q}(r_1) + \frac{\lambda(r_1)}{r_1} (U_{1q}(r_1) + iq U_{2q}(r_1)) \right] \exp(-iq\varphi_i) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Подставляя выражения (3.20) в систему (3.14), получаем краевое условие при $r = r_1$ для нахождения частного решения системы (3.17)

$$\begin{aligned} &F_{1q} U'_{1q}(r_1) + F_{2q}^{(1)} U_{1q}(r_1) + F_{3q} U_{2q}(r_1) + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[F_{1n} U'_{1n}(r_1) + F_{2n}^{(2)} U_{1n}(r_1) + F_{3n} U_{2n}(r_1) \right] F_{4qn} = X_q, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где

$$\begin{aligned} F_{1q} &= \frac{i}{\rho_*\omega} [\lambda(r_1) + 2\mu(r_1)] \exp(-iq\varphi_i) \\ F_{2q}^{(j)} &= \frac{i}{\rho_*\omega} \left[\frac{\lambda(r_1)}{r_1} + \omega^2 \rho_* \frac{Z_q^{(j)}(kr_1)}{k Z_q'^{(j)}(kr_1)} \right] \exp(-iq\varphi_i), \quad F_{3q} = -\frac{q\lambda(r_1)}{r_1 \rho_*\omega} \exp(-iq\varphi_i) \\ F_{4qn} &= (-1)^q \frac{J'_n(kr_1)}{H'_q(kr_1)} g_{n+q}, \quad Z_q^{(1)}(kr_1) = H_q(kr_1), \quad Z_q^{(2)}(kr_1) = J_q(kr_1) \end{aligned}$$

Второе краевое условие, которому должна удовлетворять система (3.17) при $r = r_1$, находим из третьего граничного условия (3.18) с учетом (3.19)

$$U'_{2q}(r_1) + \frac{iq}{r_1} U_{1q}(r_1) - \frac{1}{r_1} U_{2q}(r_1) = 0 \quad (3.22)$$

На внутренней поверхности покрытия при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, нормальные и тангенциальные напряжения

$$\text{при } r = r_0: \quad u_r = u_{0r}, \quad u_\varphi = u_{0\varphi}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{0rr}, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{0r\varphi}, \quad (3.23)$$

где u_{0r} , $u_{0\varphi}$ и σ_{0rr} , $\sigma_{0r\varphi}$ — компоненты вектора смещения и компоненты тензора напряжений в однородном упругом цилиндре.

В результате преобразований, аналогичных [9], из (3.23) получаем еще два условия, которым должна удовлетворять система (3.17) при $r = r_0$

$$\begin{aligned} a_{q11}U'_{1q}(r_0) + f_{q11}U_{1q}(r_0) + f_{q12}U_{2q}(r_0) &= 0 \\ a_{q22}U'_{2q}(r_0) + f_{q21}U_{1q}(r_0) + f_{q22}U_{2q}(r_0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Выражения для коэффициентов в уравнениях (3.24) приведены в [5].

Найдем решение краевой задачи (3.17), (3.21), (3.22), (3.24) методом сплайн-коллокации [19] для $q = -N, -N + 1, \dots, 0, 1, \dots, N$, выбрав в качестве порядка усечения величину $N = 2[k_1] + 1$, где $[]$ — целая часть числа.

После нахождения $U_{1q}(r)$ и $U_{2q}(r)$ определяем по формулам (3.20) коэффициенты p_q , v_q . В результате получаем аналитическое описание потенциала скорости полного акустического поля и нормальной составляющей скорости на поверхности цилиндра в виде (3.12) и (3.13).

Теперь определим потенциал скорости полного акустического поля в точке наблюдения M . Обратимся к интегральному уравнению (3.3), используя представление потенциала Ψ в виде (3.2). Запишем выражения для Ψ_0 , Ψ_{s1} , Ψ_{s2} . Будем иметь

$$\Psi_0 = A \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi-\varphi_i)} \begin{cases} J_n(kr) H_n(kr_i), & r < r_i \\ J_n(kr_i) H_n(kr), & r > r_i \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\Psi_{s1} = A \frac{i}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr) \exp(in\varphi) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m J_m(kr_i) \exp(-im\varphi_i) g_{n+m} \quad (3.26)$$

$$\Psi_{s2} = \int_{S_2} \left[\Psi(\mathbf{r}_2) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)}{\partial n} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}_2)}{\partial n} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) \right] dS_2 \quad (3.27)$$

Подставим в (3.27) разложения (3.12), (3.13), а также функцию Грина в виде суммы (3.4), в которой первое слагаемое определяется нижней строкой формулы (3.8), а второе слагаемое — формулой (3.10). Интегрируя по поверхности цилиндра, получаем

$$\begin{aligned} \Psi_{s2} &= \frac{i\pi r_1}{2} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left[p_q k J'_q(kr_1) - v_q J_q(kr_1) \right] \times \\ &\times \left[H_q(kr) \exp(iq\varphi) + (-1)^q \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr) \exp(in\varphi) g_{n+q} \right], \end{aligned} \quad (3.28)$$

где коэффициенты p_q и v_q определяются согласно (3.20).

Потенциал скорости рассеянного поля имеет вид

$$\Psi_s = \Psi_{s1} + \Psi_{s2} \quad (3.29)$$

4. Численные исследования. На основе полученного решения были проведены расчеты угловых и частотных характеристик рассеянного акустического поля $|\Psi_s/A|$ в дальней зоне ($r = 100$ м).

Полагалось, что алюминиевый цилиндр ($\rho_0 = 2.7 \times 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 5.3 \times 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 2.6 \times 10^{10}$ Н/м²) радиуса $r_0 = 0.8$ м с неоднородным упругим покрытием толщиной 0.2 м располагается в полупространстве, заполненном водой ($\rho_* = 10^3$ кг/м³, $c = 1485$ м/с) и отстоит от границы полупространств на расстояние $d = 1 + r_1$. Упругое полупространство характеризуется параметрами: $\rho_1 = 7.85 \times 10^3$ кг/м³, $\lambda_1 = 1.2 \times 10^{11}$ Н/м²,

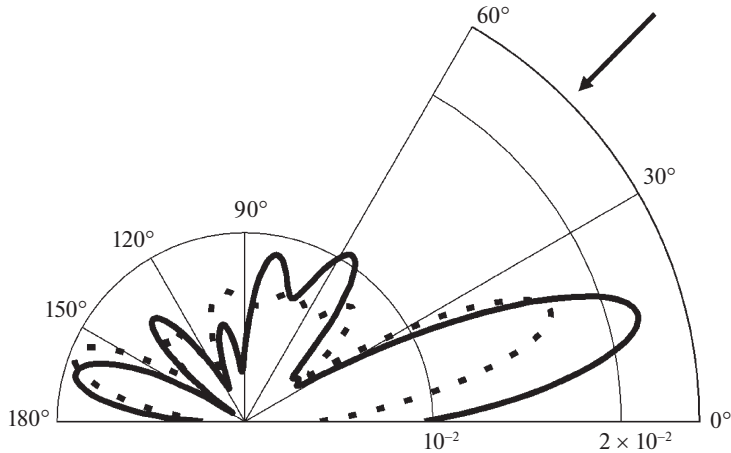


Рис. 2.

$\mu_1 = 7.9 \times 10^{10}$ Н/м² (сталь). Рассматривалось как однородное полимерное покрытие с характерной плотностью $\rho^0 = 1.07 \times 10^3$ кг/м³ и характерными модулями упругости $\lambda^0 = 3.9 \times 10^9$ Н/м², $\mu^0 = 9.8 \times 10^8$ Н/м² (поливинилбутираль), так и неоднородное покрытие, механические характеристики которого менялись по законам:

$$\rho = \rho^0 \cdot f(r), \quad \lambda = \lambda^0, \quad \mu = \mu^0,$$

где

$$f(r) = (r - r_0) / (r_1 - r_0) + 0.5, \quad r_0 \leq r \leq r_1$$

Предполагалось, что линейный источник излучает звуковую волну единичной амплитуды и располагается в точке с координатами $r_i = 4$ и $\phi_i = \pi/4$.

На рис. 2 представлены зависимости амплитуды рассеяния $|\Psi_s/A|$ от полярного угла ϕ при волновом размере тела $k\eta = 5$. На лучах диаграмм отложены значения безразмерной амплитуды рассеяния, вычисленной для соответствующих значений угла ϕ . Стрелкой показано направление распространения падающей волны.

На рис. 3 представлены зависимости амплитуды рассеяния $|\Psi_s/A|$ в направлении на источник ($\phi = \pi/4$) от волнового размера цилиндра $k\eta$ в интервале $4.5 \leq k\eta \leq 7$.

Сплошные линии на рис. 2 и 3 соответствуют случаю неоднородного покрытия, пунктирные — однородному покрытию.

Как видно из диаграмм направленности и частотных характеристик, свойства покрытия значительно влияют на характер рассеяния звука упругим цилиндром.

На рис. 4 приведены диаграммы направленности, рассчитанные при $k\eta = 5$ для случая цилиндра с неоднородным покрытием, расположенного вблизи границы упругого полупространства (сплошная линия), и для такого же цилиндра, расположенного в свободном пространстве (пунктирная линия).

Как показывают расчеты, присутствие подстилающей поверхности сильно влияет на дифракционную картину.

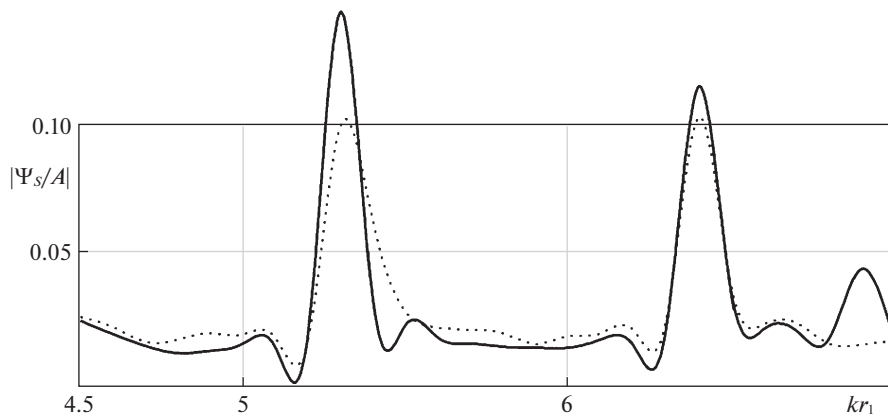


Рис. 3.

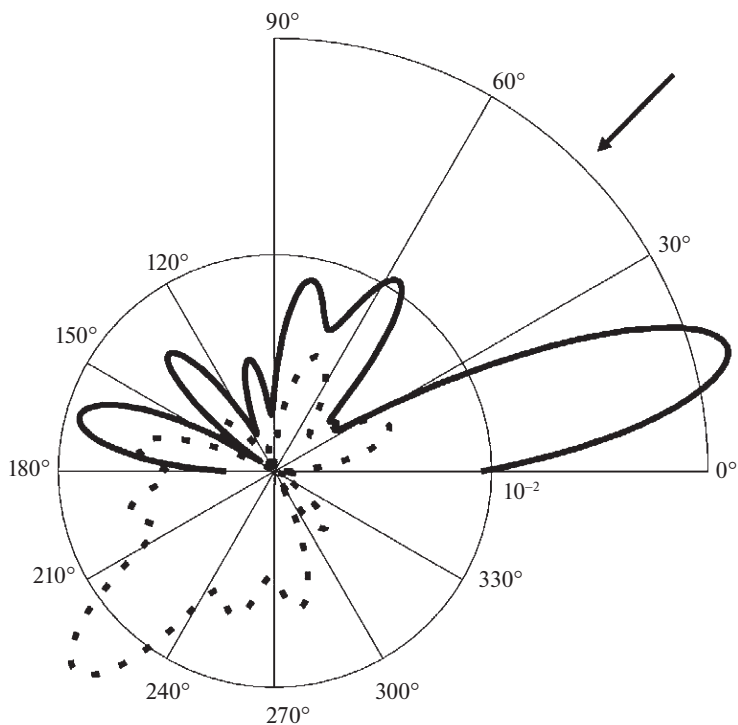


Рис. 4.

Отметим, что на основе предложенного решения можно рассмотреть случаи, когда рассеиватель расположен вблизи идеальных подстилающих поверхностей. Граничное условие при $y = -d$ для функции Грина (3.4) имеет вид

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 0, \quad (4.1)$$

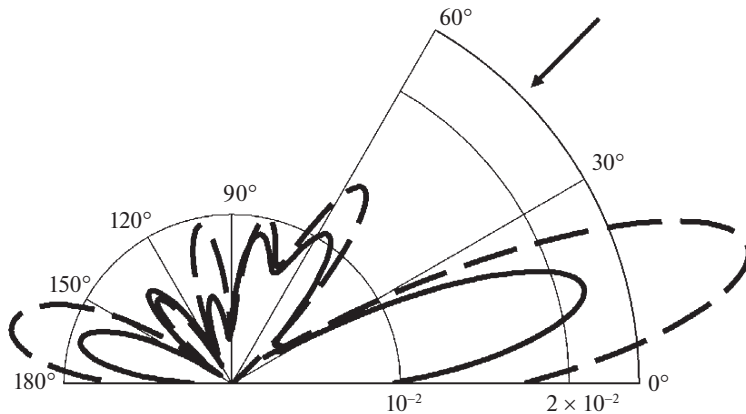


Рис. 5.

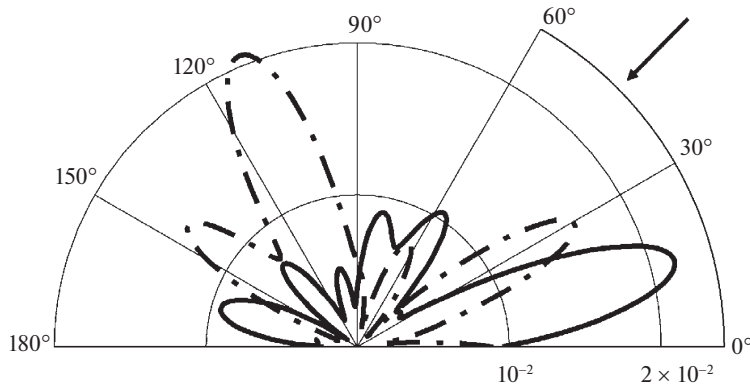


Рис. 6.

если поверхность является абсолютно жесткой, и

$$G = 0, \quad (4.2)$$

если поверхность является акустически мягкой.

Условие (4.1) выполняется при $A_1 = 1$, а условие (4.2) — при $A_1 = -1$ [14].

На рис. 5 и 6 представлены угловые зависимости $|\Psi_s/A|$ для цилиндра с неоднородным покрытием при значении волнового размера $kr_1 = 5$. На рис. 7 приведены частотные зависимости $|\Psi_s/A|$ для цилиндра с неоднородным покрытием при $\varphi = \pi/4$ в интервале $4.5 \leq kr_1 \leq 7$. На рис. 5–7 сплошные линии соответствуют случаю упругой поверхности, штриховые — абсолютно жесткой поверхности, штрихпунктирные — акустически мягкой поверхности.

Из графиков видно, что угловые и частотные зависимости в случае упругой подстилающей поверхности значительно отличаются от зависимостей, рассчитанных для идеальных поверхностей.

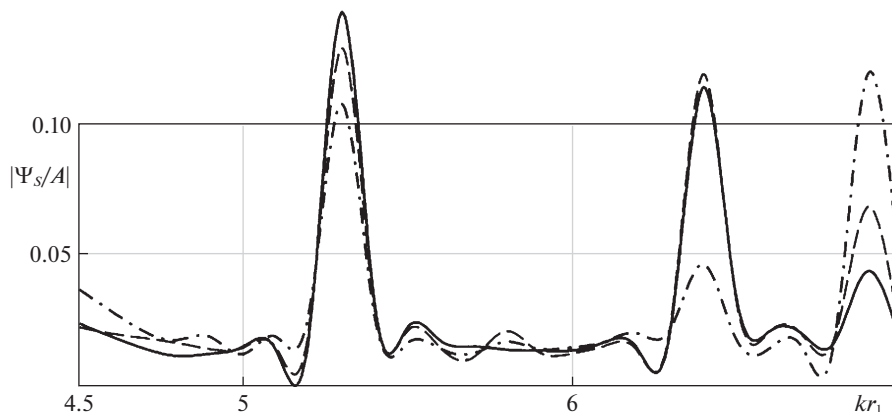


Рис. 7.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов В.П. Анализ поля дифракции на цилиндре с перфорированным покрытием // Акустич. ж. 2006. Т. 52. № 6. С. 791–798.
2. Бобровницкий Ю.И. Нерассеивающее покрытие для цилиндра // Акустич. ж. 2008. Т. 54. № 6. С. 879–889.
3. Бобровницкий Ю.И., Морозов К.Д., Томила Т.М. Периодическая поверхностная структура с экстремальными акустическими свойствами // Акустич. ж. 2010. Т. 56. № 2. С. 147–151.
4. Косарев О.И. Дифракция звука на упругой цилиндрической оболочке с покрытием // Пробл. машиностр. и надежности машин. 2012. Т. 46. № 1. С. 34–37.
5. Романов А.Г., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 850–857.
6. Толоконников Л.А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // Изв. ТулГУ. Естеств. науки. 2013. Вып. 3. С. 202–208.
7. Толоконников Л.А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // Изв. ТулГУ. Естеств. науки. 2013. Вып. 2. Ч. 2. С. 265–274.
8. Ларин Н.В., Толоконников Л.А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // ПММ. 2015. Т. 79. Вып. 2. С. 242–250.
9. Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю. Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием // Чебышевский сб. 2021. Т. 22. № 1. С. 460–472.
10. Толоконников Л.А., Ларин Н.В., Скобельцын С.А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // ПМТФ. 2017. Т. 58. № 4. С. 189–199.
11. Толоконников Л.А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, находящемся вблизи плоской поверхности // Изв. ТулГУ. Техн. науки. 2018. Вып. 9. С. 276–289.
12. Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием, находящимся вблизи плоской поверхности // Чебышевский сб. 2020. Т. 21. № 4. С. 369–381.
13. Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с радиально-неоднородным упругим покрытием в плоском волноводе // Чебышевский сб. 2019. Т. 20. Вып. 1. С. 270–281.
14. Шендеров Е.Л. Дифракция звука на упругом цилиндре, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства // Акустич. ж. 2002. Т. 48. № 2. С. 266–276.
15. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 2. М.: Мир, 1978. 558 с.
16. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 344 с.
17. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
18. Новацкий В. Теория упругости. Т. 2. М.: Мир, 1975. 872 с.
19. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.

Diffraction of Sound Waves on an Elastic Cylinder with an Inhomogeneous Coating near the Surface of an Elastic Halfspace

L. A. Tolokonnikov^{a,#} and D. Yu. Efimov^{a,##}

^a Tula State University, Tula, Russia

[#] e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

^{##} e-mail: bogart.efimov@yandex.ru

An analytical solution is obtained for the diffraction problem of cylindrical sound waves on an elastic cylinder with a radially inhomogeneous elastic coating located near the surface of an elastic half-space. The calculation results of the acoustic field in the far zone are presented.

Keywords: sound diffraction, elastic cylinder, inhomogeneous elastic coating, elastic halfspace

REFERENCES

1. *Ivanov V.P.* Analysis of the field diffracted by a cylinder with a perforated coating // *Acoust. Phys.*, 2006, vol. 52, no. 6, pp. 683–690.
2. *Bobrovnikskii Yu.I.* A Nonscattering coating for a cylinder // *Acoust. Phys.*, 2008, vol. 54, no. 6, pp. 758–768.
3. *Bobrovnikskii Yu.I., Morozov K.D., Tomilina T.M.* A periodic surface structure with extreme acoustic properties // *Acoust. Phys.*, 2010, vol. 56, no. 2, pp. 127–131.
4. *Kosarev O.I.* Diffraction of sound by an elastic cylindrical shell with a coating // *Probl. Mashinostr. Nadezh. Mashin*, 2012, vol. 46, no. 1, pp. 34–37. (in Russian)
5. *Romanov A.G., Tolokonnikov L.A.* The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating // *JAMM*, 2011, vol. 75, no. 5, pp. 595–600.
6. *Tolokonnikov L.A.* Diffraction of cylindrical sound waves by an cylinder with a nonuniform elastic coating // *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, 2013, no. 3, pp. 202–208. (in Russian)
7. *Tolokonnikov L.A.* Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering // *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, 2013, no. 2–2, pp. 265–274. (in Russian)
8. *Larin N.V., Tolokonnikov L.A.* The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering // *JAMM*, 2015, vol. 79, no. 2, pp. 164–169.
9. *Tolokonnikov L.A., Efimov D.Yu.* Diffraction of cylindrical sound waves by an elastic cylinder with a radially inhomogeneous coating // *Chebyshev. sb.*, 2021, vol. 22, no. 1, pp. 460–472. (in Russian)
10. *Tolokonnikov L.A., Larin N.V., Skobel'tsyn S.A.* Modeling of inhomogeneous coating of an elastic cylinder with given sound-reflecting properties // *J. Appl. Mech.&Techn. Phys.*, 2017, vol. 58, no. 4, pp. 733–742.
11. *Tolokonnikov L.A.* Diffraction of a plane sound waves by an elastic cylinder with an non-uniform coating situated near to a flat surface // *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, 2018, no. 9, pp. 276–289. (in Russian)
12. *Tolokonnikov L.A., Efimov D.Yu.* Scattering of a plane sound waves by an elastic cylinder with an non-uniform coating situated near to a flat surface // *Chebyshev. sb.*, 2020, vol. 21, no. 4, pp. 369–381. (in Russian)
13. *Tolokonnikov L.A.* Scattering of sound waves by an cylinder with an radial non-uniform elastic coating in a planar waveguide // *Chebyshev. sb.*, 2019, vol. 20, no. 1, pp. 270–281. (in Russian)
14. *Shenderov E.L.* Diffraction of sound by an elastic cylinder near the surface of an elastic halfspace // *Acoust. Phys.*, 2002, vol. 48, no. 2, pp. 225–234.
15. *Felsen L.B., Marcuvitz N.* Radiation and Scattering of Waves. New Jersey: Englewood Cliffs, 1973.
16. *Brekhovskikh L.M.* Waves in Layered Media. Moscow: Nauka, 1973, 344 p. (in Russian)
17. *Ivanov E.A.* Diffraction of Electromagnetic Waves on Two Bodies. Minsk: Nauka i Tekhnika, 1968. 584 p. (in Russian)
18. *Nowacki W.* Teoria sprężystosci. Warszawa: PWN, 1973.
19. *Zav'yalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L.* Spline Function Methods. Moscow: Nauka, 1980. 352 p. (in Russian)

УДК 539.376

**УСТАНОВИВШАЯСЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ УЗКОЙ МЕМБРАНЫ
ВНУТРИ ЖЕСТКОЙ НИЗКОЙ МАТРИЦЫ**© 2021 г. А. М. Локощенко^{1,*}, В. В. Терауд^{1,2,**}, А. Ф. Ахметгалеев^{1,***}¹ НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия² Самарский государственный технический университет, Самара, Россия

*e-mail: loko@imec.msu.ru

**e-mail: ldrnww@gmail.ru

***e-mail: Achmet206@yandex.ru

Поступила в редакцию 17.10.2020 г.

После доработки 24.02.2021 г.

Принята к публикации 10.03.2021 г.

Исследуется задача об установившейся ползучести длинной узкой прямоугольной мембраны в стесненных условиях внутри жесткой матрицы при кусочно-постоянной зависимости величины поперечного давления от времени. В задаче рассматривается длинная жесткая матрица прямоугольного сечения, в которой высота меньше половины ширины. В качестве примера исследуется ползучесть мембраны при однократном изменении величины поперечного давления во времени. Рассматриваются два варианта условий контакта мембраны и матрицы: идеальное скольжение и прилипание. В данной работе исследованы четыре стадии ползучести мембраны. На первой стадии (упругое деформирование) мембрана, плоская в начальном состоянии, под действием давления мгновенно упруго деформируется, приобретая форму незамкнутой круговой цилиндрической оболочки. На второй стадии мембрана деформируется в условиях установившейся ползучести вплоть до момента касания верхней стенки матрицы. Третья стадия заканчивается в момент касания мембраной продольных стенок матрицы. На четвертой стадии мембрана контактирует с матрицей по поперечной и продольным сторонам. Расчет проводится до времени практически полного прилегания мембраны к матрице. Применительно к данной постановке задачи рассмотрено правило суммирования парциальных времен прилегания мембраны к матрице.

Ключевые слова: длинная узкая мембрана, установившаяся ползучесть, низкая жесткая матрица, кусочно-постоянное поперечное давление, идеальное скольжение, прилипание

DOI: 10.31857/S0032823521060084

1. Введение. Аналитически исследуется установившаяся ползучесть в стесненных условиях длинной узкой прямоугольной мембраны, закрепленной вдоль длинных сторон и нагруженной равномерным поперечным давлением q , которое может изменяться во времени t по заданному закону. Решение этой задачи в свободных условиях при различных физических и геометрических условиях приведено в монографиях Одкивиста [1], Качанова [2] и др.

Приведено [3] моделирование формообразования панелей крыла самолета SSJ-100. Рассматриваются задачи неупругого деформирования трехмерных тел с большими перемещениями и поворотами. Дается экспериментальное обоснование предложенных

определяющих уравнений установившейся ползучести для трансверсально изотропных материалов с различными характеристиками при растяжении и сжатии. Проведено [4] экспериментальное измерение деформации мембраны из разных эластомеров.

Исследовано [5] раздувание круглой мембраны при больших деформациях. Вязкоупругие характеристики материала мембраны описываются нелинейным интегральным определяющим уравнением. Представленный численный метод решения сочетает методы решения нелинейных интегральных уравнений Вольтерра и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Приведены [6–8] результаты теоретического исследования ползучести и длительной прочности мембран из анизотропных материалов. Предложена [6] математическая модель процесса изотермического свободного деформирования узкой прямоугольной мембраны из анизотропного листового материала, подчиняющегося энергетическому варианту кинетической теории ползучести и длительной прочности. Установлено, что с ростом коэффициента нормальной анизотропии предельные возможности исследованных процессов формоизменения возрастают. Приведена [6, 7] математическая модель процесса изотермического свободного деформирования узкой прямоугольной мембраны из анизотропного листового материала, подчиняющегося энергетическому варианту кинетической теории ползучести и длительной прочности. Показано влияние анизотропии механических свойств материала, геометрических размеров заготовки и накопления поврежденности на напряженное и деформированное состояние заготовки, силовые режимы и предельные возможности формообразования. На основе разработанных математических моделей деформирования выполнены теоретические исследования процессов изотермического свободного деформирования узкой прямоугольной мембраны, формообразования угловых элементов многослойных конструкций, штамповки и калибровки трапециевидных элементов трехслойных листовых конструкций из анизотропных высокопрочных материалов в режиме кратковременной ползучести [8]. Выполнено сопоставление результатов расчетов при анализе изотермического свободного деформирования узкой прямоугольной мембраны в предположении переменной и постоянной толщин стенки вдоль дуги окружности.

Особый интерес представляет исследование ползучести рассматриваемой мембраны внутри жесткой матрицы. Ефимов А.Б. с соавторами [9] составили обзор основных феноменологических закономерностей, описывающих постановку задачи контактно-го взаимодействия общего вида.

В монографиях [10, 11] рассмотрен цикл задач о ползучести такой мембраны внутри жесткой матрицы. Приведены [11] решения задач при учете различных форм матриц: клиновидной [12], криволинейной [13] и прямоугольной при различных условиях на контакте мембраны и матрицы. Во всех приведенных решениях величина равномерного поперечного давления q не зависит от времени t . В различных решениях использовались разные модели ползучести: установившаяся, неуставившаяся, дробно-степенная. В случае применения дробно-степенной модели ползучести [14] в зависимости от контактных условий с течением времени мембрана либо заполняет пространство внутри матрицы за конечное или бесконечное время, либо разрушается внутри матрицы [12]. Решена [15] аналогичная задача об установившейся ползучести мембраны при кусочно-постоянной зависимости скорости изменения величины поперечного давления от времени.

Проведено [16] моделирование деформирования длинной узкой прямоугольной мембраны внутри жесткой клиновидной матрицы при различных подходах и различных краевых условиях. Получены все основные соотношения, характеризующие напряженно-деформированное состояние мембраны на различных стадиях деформирования. Приведены результаты численных экспериментов, в которых исследуются осо-

бенности деформирования мембран вплоть до разрушения. Аналогичное решение для П-образной матрицы приведено в [17].

Исследована [18] деформация нелинейной вязкоупругой однородной сферической мембраны, содержащей несжимаемую жидкость между двумя жесткими параллельными пластинами. Материал мембраны моделируется нелинейным интегральным определяющим соотношением, которое в частном случае включает квазилинейную вязкоупругость.

В статье Р.А. Васина с соавторами [19] приведено экспериментально-теоретическое исследование ползучести мембран в стесненных условиях. Сформулированы особенности процедуры идентификации определяющих соотношений (нахождения материальных констант) по результатам экспериментов. Приведены методика и результаты определения материальных констант из экспериментов по формовке цилиндрических и сферических оболочек из листовых заготовок.

Методика идентификации определяющих соотношений уравнения ползучести, основанная на использовании упрощенной инженерной модели процесса сверхпластической формовки листового проката в прямоугольную матрицу, построена в рамках основных предположений безмоментной теории оболочек [20]. Применимость этой упрощенной модели обоснована путем прямого сопоставления результатов аналитических расчетов с экспериментальными данными.

Авторы [21] представили теоретическое и численное исследование контакта нелинейной вязкоупругой прямоугольной мембраны, нагруженной равномерным давлением.

Описаны [22] большие контактные деформации и явление адгезии между раздутой гиперупругой мембраной и жесткой подложкой. Исходная форма мембраны — плоская, круглая, закрепленная по краю. Допустимы два условия контакта между мембраной и подложкой: контакт без трения и прилипание. Проведен анализ энергетического баланса без учета диссипации энергии.

Изучен [23] контакт длинной прямоугольной упругой мембраны с жесткой подложкой. Построенная точная модель основана на теории конечных деформаций. Учтены два условия контактов: идеальное скольжение и прилипание, для контакта без трения получено точное решение в замкнутой форме.

В данной работе исследуется установившаяся ползучесть мембраны толщины H_0 внутри жесткой матрицы прямоугольной формы. Ширина, длина и высота матрицы равны соответственно $2a$, L , b . Отношение высоты матрицы к половине ширины удовлетворяет неравенству $b/a < 1$ (рис. 1). Ширина мембраны $2a$ и ее длина L удовлетворяет неравенству $2a/L \ll 1$. Здесь рассматривается не постоянная величина поперечного давления $q(t) = \text{const}$, а кусочно-постоянная зависимость величины $q(t)$ с однократным изменением величины $q(t)$. Представляет интерес рассмотреть особенности практически полного прилегания мембраны к пространству внутри матрицы при скачкообразном увеличении или уменьшении величины q .

Для исключения появления в начальный момент времени бесконечных напряжений в данном решении учитывается мгновенное упругое деформирование.

Для описания деформирования мембраны при $t > 0$ (t — время) используется степенная модель установившейся ползучести материала

$$\frac{dp_u}{dt} = \frac{1}{t_0} \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_0} \right)^n, \quad (1.1)$$

в которой σ_u и $\dot{p}_u$ — интенсивности напряжений и скоростей деформаций ползучести соответственно, σ_0 , t_0 и n — постоянные величины соответствующей размерности.

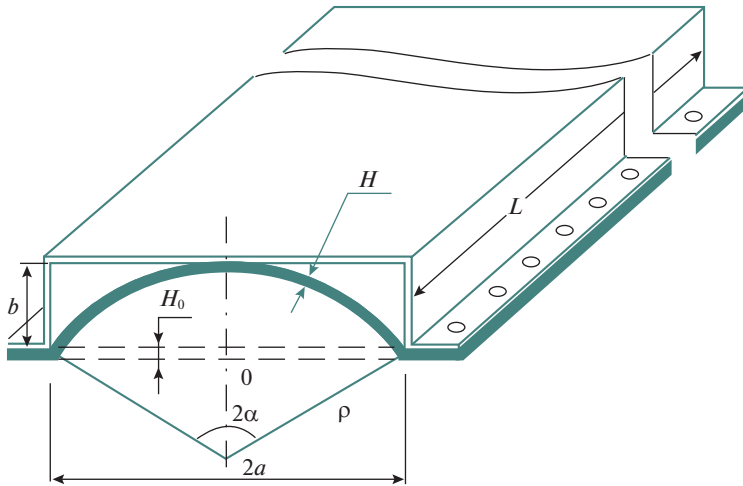


Рис. 1. Общий вид.

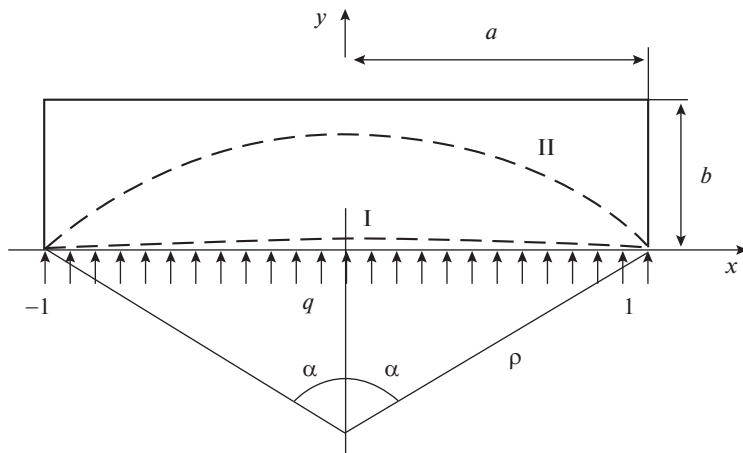


Рис. 2. Первая и вторая стадии деформирования.

Координаты поперечного сечения мембраны и матрицы назовем x и y (рис. 2). Исследование свободного деформирования проводится в двух последовательных стадиях. На первой стадии (упругое деформирование) мембрана, плоская в начальном состоянии, под действием давления q мгновенно упруго деформируется, приобретая форму незамкнутой круговой цилиндрической оболочки с центральным углом $2\alpha_1$. На второй стадии мембрана деформируется в условиях установившейся ползучести вплоть до касания верхней стенки жесткой матрицы, так как $a > b$, то угол раствора мембраны в конце этой стадии равен $2\alpha_2 = 2 \arcsin \left(\frac{2ab}{a^2 + b^2} \right)$. При моделировании напряженно-деформированного состояния мембраны рассматриваются главные напряжения (радиальное σ_{rr} , окружное $\sigma_{\theta\theta}$ и осевое σ_{zz}) и соответствующие компоненты

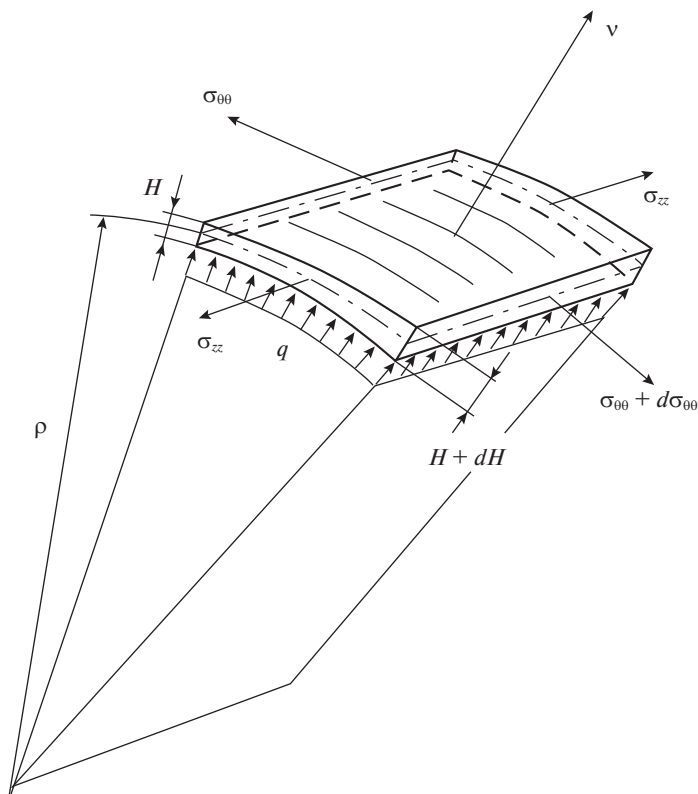


Рис. 3. Элемент мембраны.

тензора деформаций (ϵ_{rr} , $\epsilon_{\theta\theta}$ и ϵ_{zz}), при $t > 0$ учитываются только компоненты тензора деформаций ползучести p_{rr} , $p_{\theta\theta}$ и p_{zz} .

Рассматривая элемент мембраны (рис. 3), принимая напряжения в элементе равномерно распределенными по толщине и записывая уравнения равновесия в проекциях на нормаль и касательную, получаем:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{q\rho}{H}, \quad d(\sigma_{\theta\theta}H) = 0, \quad (1.2)$$

где ρ — радиус кривизны срединной поверхности, H — толщина мембраны.

Следовательно,

$$\sigma_{\theta\theta}H = \text{const} \quad (1.3)$$

Сопоставляя (1.2) и (1.3), заключаем, что в случае равномерного давления ($q = \text{const}$) радиус кривизны срединной поверхности во всех ее точках один и тот же ($\rho = \text{const}$), т.е. срединная поверхность мембраны при ее деформировании является частью поверхности кругового цилиндра с некоторым углом раствора 2α [3]. В этом случае, очевидно, что если толщина мембраны до деформации постоянна, то она постоянна и после деформации. Следовательно, согласно (1.2) окружное напряжение по длине окружности радиуса ρ не изменяется.

2. Мгновенное упругое деформирование мембраны (первая стадия). Упругое деформирование мембраны описывается с помощью закона Гука при сложном напряженном состоянии с учетом несжимаемости материала. При этом будут использоваться следующие обозначения: E – модуль Юнга, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений. Значения всех рассматриваемых в этом разделе параметров, полученные в результате приложения поперечного давления q , принимают дополнительный индекс 1.

Из условия несжимаемости материала получим значение толщины $H_1(\alpha_1)$:

$$H_0(\sin \alpha_1)\rho_1 = H_1\alpha_1\rho_1, \quad \frac{H_1}{H_0} = \frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1} \quad (2.1)$$

Из уравнений равновесия свободной мембраны получим значение напряжения $\sigma_{\theta\theta 1}$:

$$qa = (\sigma_{\theta\theta 1} \sin \alpha_1) H_1, \quad \sigma_{\theta\theta 1} = \frac{qa}{H_1 \sin \alpha_1}$$

Из определения малой деформации получим выражение для окружной деформации $\epsilon_{\theta\theta 1}$:

$$\epsilon_{\theta\theta 1} = \frac{\rho_1\alpha_1 - a}{a} = \frac{\alpha_1}{\sin \alpha_1} - 1 \quad (2.2)$$

В соответствии с условием несжимаемости используем значение коэффициента Пуассона, равное 0.5. Считаем, что мембрана под поперечным давлением находится в условиях плоского деформированного состояния:

$$\epsilon_{zz 1} = 0 \quad (2.3)$$

Для тонкостенных цилиндрических оболочек обычно принимается условие безмоментного напряженного состояния, при этом выполняется равенство $\sigma_{rr 1} = 0$.

Из закона Гука при сложном напряженном состоянии следует связь компонент тензоров напряжений σ_{ij} и упругих деформаций ϵ_{ij} :

$$\epsilon_{zz 1} = \frac{1}{E} \left(\sigma_{zz 1} - \frac{1}{2} \sigma_{\theta\theta 1} \right) \quad (2.4)$$

$$\epsilon_{\theta\theta 1} = \frac{1}{E} \left(\sigma_{\theta\theta 1} - \frac{1}{2} \sigma_{zz 1} \right) \quad (2.5)$$

Из равенства (2.4) при учете (2.3) получаем:

$$\sigma_{zz 1} = \frac{1}{2} \sigma_{\theta\theta 1} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.5) и учитывая (1.2) и (2.1), получаем:

$$\epsilon_{\theta\theta 1} = \frac{3}{4} \frac{\sigma_{\theta\theta 1}}{E} = \frac{3}{4} \frac{q\rho_1}{EH_1} = \frac{3qa\alpha_1}{4EH_0 \sin^2 \alpha_1}$$

Приравнявая это выражение выражению (2.2), получаем связь давления q и угла α_1 :

$$\frac{3qa\alpha_1}{4EH_0 \sin^2 \alpha_1} = \frac{\alpha_1}{\sin \alpha_1} \left(1 - \frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1} \right), \quad \frac{q}{\sigma_0} = \frac{4H_0 k}{3a} \left(1 - \frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1} \right) \sin \alpha_1, \quad k = \frac{E}{\sigma_0} \quad (2.7)$$

Так как упругое деформирование по определению происходит практически мгновенно, то длительность первой стадии принимается равной нулю: $t_1 = 0$.

3. Свободное деформирование мембраны в условиях ползучести (вторая стадия).

Введем безразмерные переменные:

$$\begin{aligned}\bar{q} &= \frac{q}{\sigma_0}, & \bar{H} &= \frac{H}{H_0}, & \bar{H}_0 &= \frac{H_0}{a}, & \bar{b} &= \frac{b}{a} \\ \bar{x} &= \frac{x}{a}, & \bar{y} &= \frac{y}{a}, & \bar{x}_0 &= \frac{x_0}{a}, & \bar{y}_0 &= \frac{y_0}{a} \\ \bar{t} &= \frac{t}{t_0}, & \bar{\rho} &= \frac{\rho}{a}, & \bar{\sigma}_{ij} &= \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0} \quad (i, j = 1, 2, 3),\end{aligned}$$

x и y – горизонтальная и вертикальная координаты поперечного сечения матрицы, x_0 и y_0 – координаты точек касания мембраны и матрицы.

Далее черточки над всеми безразмерными переменными опустим. При этом под скоростями всюду понимаются производные по безразмерному времени.

В качестве связи компонент тензоров напряжений и скоростей деформаций ползучести примем гипотезу пропорциональности соответствующих девиаторов (см., например, [4]):

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{ij} &= \frac{3f(\sigma_u)}{2\sigma_u}(\sigma_{ij} - \sigma), & \sigma &= \frac{1}{3}(\sigma_{zz} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) \\ \sigma_u &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2 + 6(\sigma_{z\theta}^2 + \sigma_{\theta z}^2 + \sigma_{zr}^2)}\end{aligned}\quad (3.1)$$

В рассматриваемом плоском деформированном состоянии скорость осевой деформации ползучести $\dot{\rho}_{zz}$ принимается равной нулю:

$$\dot{\rho}_{zz} = 0 \quad (3.2)$$

Далее всюду будем обозначать $H_i(t)$ толщину мембраны на i -й стадии ($i = 1-4$).

Примем, как обычно, для тонкостенных цилиндрических оболочек равенство:

$$\sigma_{rr} = 0,$$

в этом случае из гипотезы пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций ползучести (3.1) при учете (3.2) следует:

$$\sigma_{zz} = 0.5\sigma_{\theta\theta}, \quad \sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{q\rho}{H_0H_2}$$

Рассматривая два близких деформированных состояния мембраны, определим приращение окружной деформации ползучести, учитывая, что деформированное состояние однородное:

$$d\rho_{\theta\theta} = \frac{(\rho + d\rho)(\alpha + d\alpha) - \rho\alpha}{\rho\alpha} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\alpha}{\alpha}$$

Следовательно, скорость окружной деформации ползучести равна

$$\dot{\rho}_{\theta\theta} = \frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \quad (3.3)$$

Используя дифференциальное следствие их соотношения

$$\rho \sin \alpha = 1, \quad (3.4)$$

преобразуем выражение (3.3) к виду:

$$\dot{\rho}_{\theta\theta} = \left(\frac{1}{\alpha} - \operatorname{ctg} \alpha\right)\dot{\alpha} \quad (3.5)$$

Из условия несжимаемости в случае плоского деформированного состояния получаем:

$$\begin{aligned}\dot{p}_{rr} + \dot{p}_{\theta\theta} + \dot{p}_{zz} &= 0, \quad \dot{p}_{zz} = 0, \quad \dot{p}_{rr} = -\dot{p}_{\theta\theta} \\ \dot{p}_u &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{p}_{rr} - \dot{p}_{\theta\theta})^2 + (\dot{p}_{\theta\theta} - \dot{p}_{zz})^2 + (\dot{p}_{zz} - \dot{p}_{rr})^2 + 6(\dot{p}_{r\theta}^2 + \dot{p}_{\theta z}^2 + \dot{p}_{zr}^2)} \\ \dot{p}_u &= \frac{2}{\sqrt{3}} \dot{p}_{\theta\theta}\end{aligned}$$

Так как скорость радиальной деформации ползучести равна

$$\dot{p}_{rr} = \frac{\dot{H}_2}{H_2},$$

то согласно равенству (3.5) получаем:

$$-\frac{\dot{H}_2}{H_2} = \left(\frac{1}{\alpha} - \operatorname{ctg} \alpha\right) \dot{\alpha} \quad (3.6)$$

Проинтегрируем уравнение (3.6) при начальных условиях: $t = 0, \alpha = \alpha_1, H_2 = H_1$:

$$H_2 = \frac{\sin \alpha}{\alpha} S, \quad S = \frac{\alpha_1}{\sin \alpha_1} \quad (3.7)$$

Полученные выражения (1.2), (3.4) и (3.7) позволяют представить окружное напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ и интенсивность напряжений σ_u в зависимости от угла раствора α :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{q\rho}{H_2 H_0} = \frac{q\alpha}{SH_0 \sin^2 \alpha}, \quad \sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q\alpha}{SH_0 \sin^2 \alpha} \quad (3.8)$$

Из (1.1) при учете (3.5) и (3.8) получаем зависимость угла раствора α от времени t :

$$t(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} - \operatorname{ctg} \alpha \right) \left(\frac{2SH_0 \sin^2 \alpha}{\sqrt{3}q \cdot \alpha} \right)^n d\alpha, \quad t_2 = t(\alpha_2) \quad (3.9)$$

При исследовании второй стадии деформирования мембраны угол α изменяется в диапазоне от $\alpha = \alpha_1$ до α_2 — угла, при котором происходит касание мембраной верхней стороны матрицы.

Так как угол α_1 удовлетворяет условию $\alpha_1 \ll \pi/2$ (т.е. постоянная S незначительно отличается от единицы), то упростим соотношение (3.7) и введем дополнительно зависимость $H_2(\alpha)$ во время второй стадии деформирования мембраны в виде:

$$H_2 = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (3.10)$$

В конце второй стадии ($t = t_2$) максимальный раствор мембраны равен $2\alpha(t_2) = 2\alpha_2$. Так как значения H_2 при S из (3.7) и (3.10) практически совпадают (и последующие вычисления подтвердят это), то далее под значением $t_2(\alpha)$ будем понимать соответствующее значение при $S = 1$. В связи с этим момент времени t_2 , при котором происходит окончание второй стадии, и толщина мембраны $H_2^\circ = H(t_2)$, вычисляемая с учетом зависимости (3.10), определяются согласно уравнениям:

$$t_2 = t\left(\alpha = \alpha_2 = \arcsin\left(\frac{2b}{1+b^2}\right)\right), \quad H_2^\circ = H_2(t = t_2) = \frac{\sin \alpha_2}{\alpha_2}$$

Далее рассматривается ползучесть мембраны внутри жесткой матрицы при различных контактных условиях.

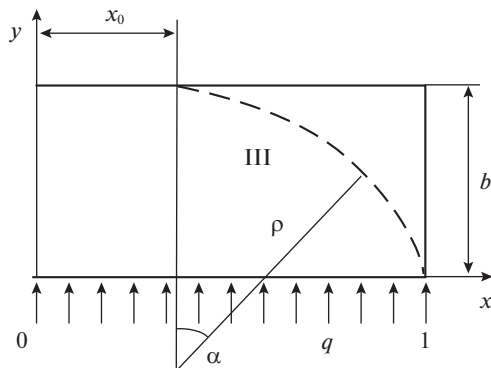


Рис. 4. Третья стадия (идеальное скольжение и прилипание).

4. Идеальное скольжение мембраны вдоль сторон матрицы.

4.1. Третья стадия ($0 \leq x_0 \leq 1 - b$).

Решение задачи имеет различный характер для относительно высокой матрицы ($b \geq 1$) и относительно низкой матрицы ($b < 1$). Для определенности здесь будет рассмотрена ползучесть мембраны внутри относительно низкой матрицы ($b < 1$).

В связи с осевой симметрией мембраны и матрицы в процессе третьей стадии рассматривается ползучесть правой половины мембраны в координатах $0 \leq x \leq 1 - b$, $0 \leq y \leq b$ (рис. 4).

Свободное деформирование мембраны было рассмотрено в разд. 2 и 3. В некоторый момент времени ($t = t_2$) мембрана соприкасается с поперечной стенкой матрицы. На этом свободное деформирование заканчивается, и в дальнейшем при $t > t_2$ часть поверхности мембраны прилегает к верхней поверхности матрицы.

При исследовании третьей стадии ползучести мембраны выделим два близких деформированных состояния: одно характеризуется длиной участка контакта x_0 , а другое — длиной участка контакта $(x_0 + dx_0)$. С помощью геометрических соотношений (рис. 4) получим соотношение для приращения окружной деформации ползучести $dp_{\theta\theta}$ в виде:

$$dp_{\theta\theta} = \frac{\rho d\alpha + \alpha d\rho + dx_0}{\rho\alpha + x_0} \quad (4.1)$$

Учитывая, что каждое из слагаемых числителя (4.1) содержит множитель dx_0 , введем обозначения

$$\rho d\alpha + \alpha d\rho + dx_0 = B_1(x_0) dx_0, \quad \rho\alpha + x_0 = B_2(x_0) \quad (4.2)$$

Тогда

$$dp_{\theta\theta} = \frac{B_1(x_0) dx_0}{B_2(x_0)} \quad (4.3)$$

С помощью (4.3) вычислим характеристики деформированного состояния

$$\dot{p}_{\theta\theta} = \frac{B_1}{B_2} \frac{dx_0}{dt}, \quad d\dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{B_1}{B_2} \frac{dx_0}{dt} \quad (4.4)$$

Проектируя наклонный радиус ρ (рис. 4) на горизонталь и вертикаль, получим следующие два уравнения:

$$\rho \sin \alpha = (1 - x_0), \quad \rho \cos \alpha = (\rho - b)$$

Откуда следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - x_0}{\rho - b} = \frac{2b(1 - x_0)}{(1 - x_0)^2 - b^2}$$

и дифференциалы $d\rho(x_0)$ и $d\alpha(x_0)$ принимают следующий вид

$$d\rho = -\frac{2(1 - x_0)}{2b} dx_0 = -\frac{(1 - x_0)}{b} dx_0$$

$$d\alpha = d(\operatorname{arctg} \alpha(x_0)) = \frac{2b}{[(1 - x_0)^2 + b^2]} dx_0$$

Подставляя $d\rho(x_0)$ и $d\alpha(x_0)$ в (4.2), получим

$$\begin{aligned} \rho d\alpha &= \frac{(a - x_0)^2 + b^2}{2b} \frac{2b}{(1 - x_0)^2 + b^2} dx_0 = dx_0 \\ \alpha d\rho &= \alpha \left(-\frac{1 - x_0}{b} \right) dx_0 = -\frac{1 - x_0}{b} \alpha dx_0 \\ B_1(x_0) dx_0 &= -\frac{1 - x_0}{b} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{2b(1 - x_0)}{(1 - x_0)^2 - b^2} \right) \right) dx_0 + 2dx_0 \\ B_2(x_0) &= \frac{(1 - x_0)^2 + b^2}{2b} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{2b(1 - x_0)}{(1 - x_0)^2 - b^2} \right) \right) + x_0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из условия несжимаемости при учете (3.2) получаем: $d\dot{p}_{\theta\theta} = -d\dot{p}_{rr}$.

Согласно определению $\dot{p}_{rr}$ имеем $\dot{p}_{rr} = \dot{H}_3/H_3$. Следовательно,

$$dp_{\theta\theta} = \frac{B_1(x_0) dx_0}{B_2(x_0)} = -\frac{dH_3}{H_3}$$

$$\int_{H_2^0}^{H_3(x_0)} \frac{dH_3}{H_3} = -\int_0^{x_0} \frac{B_1(x_0) dx_0}{B_2(x_0)}, \quad H_3(x_0) = H_2^0 \exp \left[-\int_0^{x_0} \frac{B_1(x_0) dx_0}{B_2(x_0)} \right]$$

$$H_3^0 = H_3(x_0 = 1 - b) = \frac{H_1}{1 - b + \frac{1}{2}\pi b} \approx \frac{1}{1 - b + \frac{1}{2}\pi b}$$

Последнее равенство следует из учета постоянства толщины H мембраны вдоль всего рассматриваемого участка мембраны в конце третьей стадии. Интенсивности деформаций ползучести и напряжений определяются следующими выражениями:

$$\dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \dot{p}_{\theta\theta}, \quad \sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q\rho}{H_0 H_3(x_0)}$$

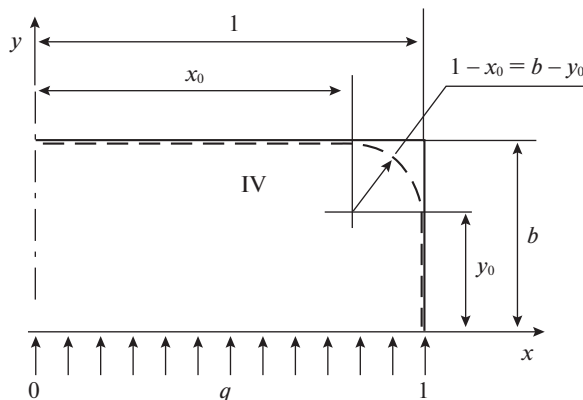


Рис. 5. Четвертая стадия (идеальное скольжение и прилипание).

Подставляя эти выражения в (1.1), получаем связь x_0 и t :

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{B_1(x_0) dx_0}{B_2(x_0) dt} = \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q\rho}{H_0 H_3(x_0)} \right]^n$$

$$t(x_0) = t_2 + \int_0^{x_0} \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{B_1(x_0)}{B_2(x_0)} \left[\frac{\sqrt{3} q((1-x_0)^2 + b^2)}{4 H_0 H_3(x_0) b} \right]^{-n} dx_0, \quad t_3 = t(x_0 = 1-b) \quad (4.6)$$

4.2. Четвертая стадия ($1-b \leq x_0 \leq 1-\Delta$).

На четвертой стадии ползучести мембрана касается обеих сторон матрицы ($1-b \leq x_0 \leq 1-\Delta$, $0 \leq y_0 \leq b$) (рис. 5). При этом профиль мембраны представляет собой полуокружность радиуса $(1-x_0)$ и размеры областей контакта по продольной и поперечной осям равны $(x_0 - (1-b)) = y_0$. С учетом принятых допущений компоненты тензора деформаций ползучести примут вид:

$$p_{\theta\theta} = - \int_{H_3^0}^{H_4(x_0)} \frac{dH_4}{H_4} = \ln \left[\frac{b + \frac{\pi}{2} - 1 + \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) x_0}{1 - b + \frac{\pi}{2} \pi b} \right],$$

где

$$H_4(x_0) = H_3^0 \frac{\frac{\pi}{2} 1 - b + \frac{\pi}{2} b}{b + \frac{\pi}{2} - 1 + \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) x_0} \approx \frac{1}{b + \frac{\pi}{2} - 1 + \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) x_0}$$

Окончание четвертой стадии происходит при значении x_0 , удовлетворяющем неравенству $(1-x_0^0) = \Delta$, где $(1-x_0^0)$ – радиус кривизны мембраны вблизи угла матрицы.

Интенсивность напряжений определяется следующим соотношением:

$$\sigma_u(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q}{H_0} \left[b + \frac{\pi}{2} - 1 + \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) x_0 \right] (1-x_0) \quad (4.6)$$

Интенсивность скоростей деформаций ползучести согласно (4.6) равна:

$$\dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{2 - \frac{\pi}{2}}{b + \frac{\pi}{2} - 1 + \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) x_0} \frac{dx_0}{dt} \quad (4.7)$$

Подставляя (4.6) и (4.7) в (1.1), получаем:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{2 - \frac{\pi}{2}}{b + \frac{\pi}{2} - 1 + \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) x_0} \frac{dx_0}{dt} = \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q}{H_0} \left[b + \frac{\pi}{2} - 1 + \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) x_0 \right] (1 - x_0) \right]^n$$

Отсюда следует, что

$$t_4(x_0) = t_3 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{(n+1)} \left(\frac{H_0}{q}\right)^n \int_{1-b}^{x_0} \frac{\left(2 - \frac{\pi}{2}\right) dx_0}{\left[b + \frac{\pi}{2} - 1 + \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) x_0\right]^{(n+1)} (1 - x_0)^n} \quad (4.8)$$

Время t^0 практически полного заполнения матрицы мембраной определяется выражением (4.8) при замене в верхнем пределе интегрирования x_0 на $x_0^0 = 1 - \Delta$:

$$t_4^0 = t_4(x_0^0 = 1 - \Delta)$$

5. Прилипание мембраны вдоль сторон матрицы.

5.1. Третья стадия ($0 \leq x_0 \leq 1 - b$).

В случае постепенного прилипания материала мембраны к матрице ее контактная часть (с переменной толщиной) не деформируется, а свободная часть (с постоянной толщиной) представляет собой часть дуги окружности. Окружная деформация в свободной части мембраны имеет вид (рис. 4):

$$dp_{\theta\theta} = \frac{(\rho d\alpha + \alpha d\rho) + dx_0}{\rho\alpha}$$

Аналогично (4.2) можно получить выражение

$$B_3(x_0) = \rho\alpha = \frac{(1 - x_0)^2 + b^2}{2b} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{2b(1 - x_0)}{(1 - x_0)^2 - b^2} \right) \right)$$

Как известно, $\dot{p}_{rr} = \dot{H}_3/H_3$. Из условия несжимаемости $\dot{p}_{\theta\theta} = -\dot{p}_{rr}$, так что $dp_{\theta\theta} = -\frac{dH_3}{H_3} = \frac{B_1(x_0)dx_0}{B_3(x_0)}$. После интегрирования, получаем

$$H_3(x_0) = H_2^0 \exp \left[-\int_0^{x_0} \frac{B_1(x_0)dx_0}{B_3(x_0)} \right], \quad H_3^0 = H_3(x_0 = 1 - b)$$

Интенсивности σ_u и $\dot{p}_u$ равны соответственно:

$$\sigma_u = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_{\theta\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q\rho}{H_0 H_3(x_0)}, \quad \dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \dot{p}_{\theta\theta}$$

Подставляя выражения σ_u и $\dot{p}_u$ в (1.1), получаем:

$$t_3 = t_2 + \int_0^{x_0} \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{B_1(x_0)}{B_3(x_0)} \left[\frac{\sqrt{3}}{4} \frac{q((1 - x_0)^2 + b^2)}{H_0 H_3(x_0) b} \right]^{-n} dx_0$$

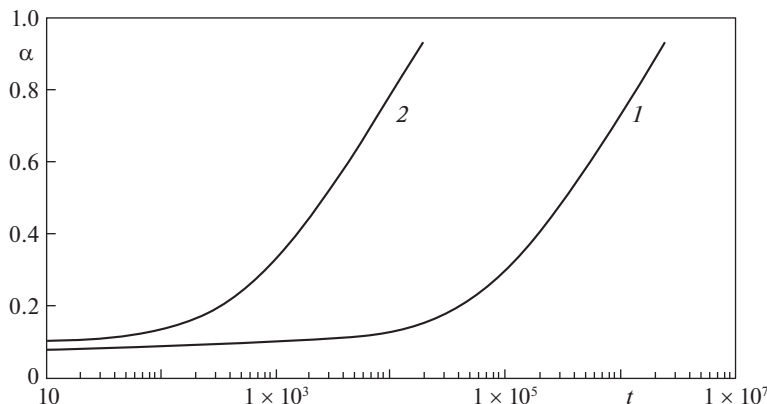


Рис. 6. Вторая стадия деформирования.

5.2. Четвертая стадия ($1 - b \leq x_0 \leq 1 - \Delta$).

На четвертой стадии ползучесть мембраны характеризуется касанием ею продольной и поперечной сторон матрицы (рис. 5), тогда

$$p_{\theta\theta} = - \int_{H_3^0}^{H_4(x_0)} \frac{dH_4}{H_4} = \frac{4 - \pi}{\pi} \ln \left[\frac{b}{1 - x_0} \right] \quad \text{и} \quad H_4(x_0) = H_3^0 \left(\frac{b}{1 - x_0} \right)^{\frac{4 - \pi}{\pi}}$$

Окончание четвертой стадии происходит при значении x_0^0 , удовлетворяющем неравенству $(1 - x_0^0) = \Delta \ll 1$.

Интенсивность напряжений определяется следующим соотношением:

$$\sigma_u(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{q}{H_0} \frac{(1 - x_0)}{H_4(x_0)} \quad (5.1)$$

Интенсивность скоростей деформаций ползучести равна:

$$\dot{p}_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{(4 - \pi)}{\pi} \frac{b}{(1 - x_0)} \frac{dx_0}{dt} \quad (5.2)$$

Подставляя (5.1) и (5.2) в (1.1), получаем:

$$t_4(x_0) = t_3 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} \left(\frac{H_0}{q} \right)^n \int_{1-b}^{x_0} \left(\frac{4 - \pi}{\pi} \right) \frac{(H_4(x_0))^n}{(1 - x_0)^{(n+1)}} dx_0$$

Время практически полного прилегания мембраны к матрице определяется выражением:

$$t_4 = t_4(x_0 = x_0^0)$$

6. Ползучесть мембраны при постоянном давлении q .

В качестве примера рассмотрим деформирование мембраны при матрице высотой $b = 0.5$ со следующими выбранными параметрами:

$$H_0 = 0.01, \quad n = 3, \quad S = 1, \quad k = 100, \quad \Delta = 0.01, 0.001, 0.0001.$$

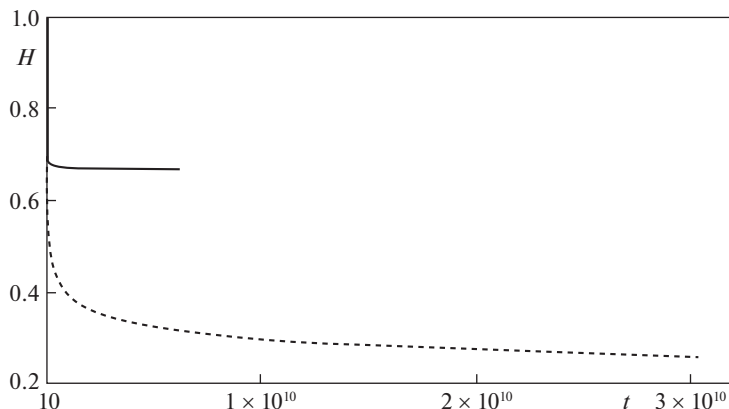


Рис. 7. Зависимости $H(t)$ при $q = 0.5 \times 10^{-4}$.

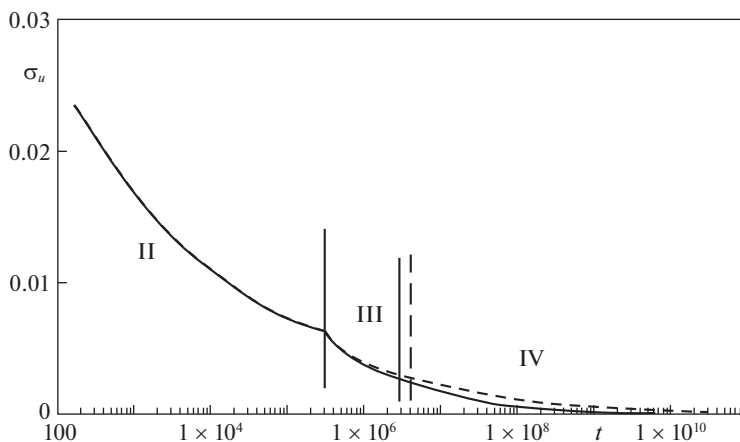


Рис. 8. Зависимости $\sigma_u(t)$ при $q = 0.5 \times 10^{-4}$.

Величина $\Delta = 1 - x_0^0$ соответствует минимальному расстоянию между поперечной стороной матрицы и мембраной. Вычисления проводятся для трех значений Δ . В качестве величин поперечного давления примем два значения q , различающихся в 5 раз: $q_1 = 0.5 \times 10^{-4}$ и $q_2 = 2.5 \times 10^{-4}$, в этом случае значения угла α_1 , полученные при мгновенном приложении внешнего давления q , равны соответственно $\alpha_1 = 0.061$ и 0.104 . На рис. 6 приведены зависимости $\alpha(t)$ при $q = q_1$ (кривая 1) и $q = q_2$ (кривая 2). Так как значения отношения S в (3.7) очень незначительно отличаются от 1 (соответственно $S = 1.001$ и $S = 1.002$), то замена соотношения (3.7) на (3.10) является вполне обоснованной.

На рис. 7 и 8 соответственно приведены зависимости толщины мембраны $H(t)$ и интенсивности напряжений $\sigma_u(t)$ на свободной части мембраны от времени t для всех четырех стадий деформирования при $q = q_1$. Для стадий стесненного деформирования

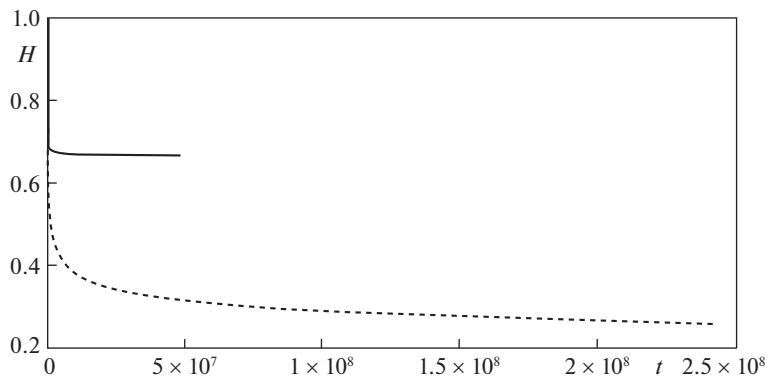


Рис. 9. Зависимость $H(t)$ при $q = 2.5 \times 10^{-4}$.

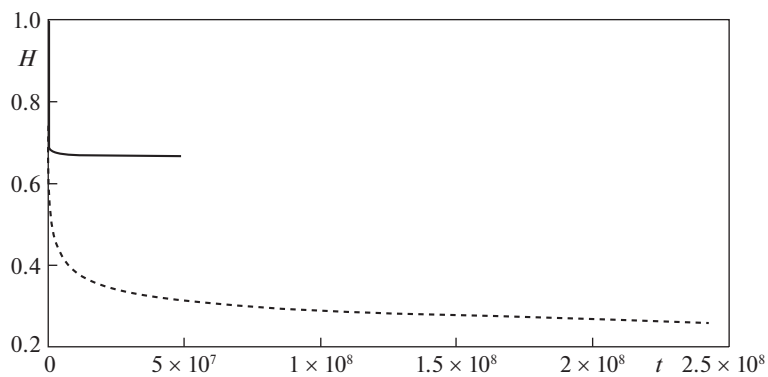


Рис. 10. Зависимости $\sigma_\mu(t)$ при $q = 2.5 \times 10^{-4}$.

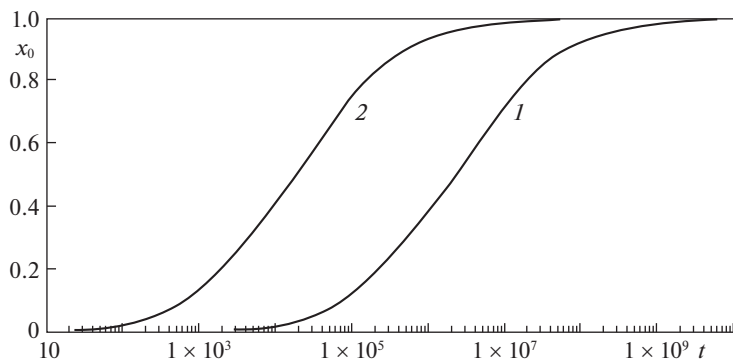


Рис. 11. Зависимости $x_0(t)$ в случае идеального скольжения ($1 - q = 0.5 \times 10^{-4}$, $2 - q = 2.5 \times 10^{-4}$).

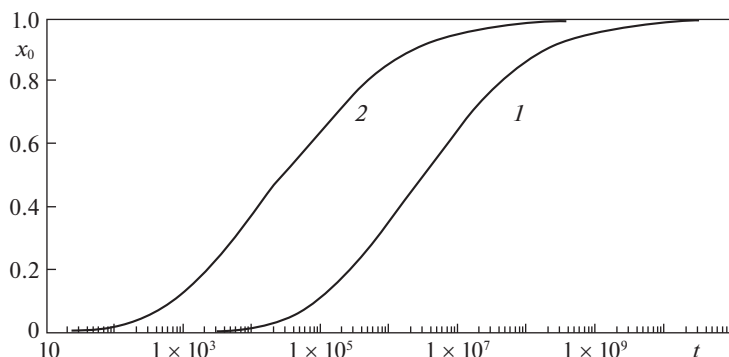


Рис. 12. Зависимости $x_0(t)$ в случае прилипания ($1 - q = 0.5 \times 10^{-4}$, $2 - q = 2.5 \times 10^{-4}$).

(третья и четвертая стадии) зависимости $H(t)$ и $\sigma_u(t)$ приведены для идеального скольжения (сплошная линия) и прилипания (штриховая линия). На рис. 9 и 10 соответственно приведены аналогичные зависимости $H(t)$ и $\sigma_u(t)$. На рис. 11 приведены зависимости $x_0(t)$ в случае идеального скольжения (кривая 1 — при $q = q_1$, кривая 2 — при $q = q_2$). На рис. 12 приведены аналогичные зависимости $x_0(t)$ в случае прилипания. Значения основных параметров t , H , σ_u в конце каждой стадии приведены в табл. 1 и 2 (колонки А и В) для идеального скольжения и прилипания соответственно.

Во всех случаях зависимости $H(t)$ являются монотонно убывающими функциями времени. Расчеты показывают, что интенсивность напряжений $\sigma_u(t)$ монотонно убывает. Толщины свободной части мембраны в конце деформирования при прилипании меньше, чем при идеальном скольжении, а интенсивности напряжений, наоборот, больше.

Таблица 1. Характеристики ползучести мембраны в случае идеального скольжения в конце соответствующей стадии

	Δ	А $q_1 = 0.5 \times 10^{-4}$			В $q_2 = 2.5 \times 10^{-4}$			С $q_1 = 0.5 \times 10^{-4}, t \in \left[0, \frac{\tau_1^0}{2}\right]$ $q_2 = 2.5 \times 10^{-4}, t \in [0.5\tau_1^0, \tau_2^0]$			D $q^2 = 2.5 \times 10^{-4}, t \in \left[0, \frac{\tau_2^0}{2}\right]$ $q^1 = 0.5 \times 10^{-4}, t \in [0.5\tau_2^0, \tau_1^0]$		
		t	H	σ_u	t	H	σ_u	t	H	σ_u	t	H	σ_u
2	—	3.19×10^5	0.863	6.27×10^{-3}	2.55×10^3	0.863	3.14×10^{-2}	3.19×10^5	0.863	6.27×10^{-3}	2.55×10^3	0.863	3.14×10^{-2}
3	—	2.42×10^6	0.778	2.78×10^{-3}	1.93×10^4	0.778	1.39×10^{-2}	2.42×10^6	0.778	2.78×10^{-3}	1.93×10^4	0.778	1.39×10^{-2}
4	0.01	6.17×10^9	0.668	6.48×10^{-5}	4.93×10^7	0.669	3.24×10^{-4}	3.11×10^9	0.669	3.24×10^{-4}	3.10×10^9	0.668	6.48×10^{-5}
	0.001	6.04×10^{11}	0.667	6.49×10^{-5}	4.83×10^9	0.667	3.25×10^{-4}	3.04×10^{11}	0.667	3.25×10^{-4}	3.05×10^{11}	0.667	6.49×10^{-5}
	0.0001	6.03×10^{13}	0.667	6.50×10^{-5}	4.82×10^{11}	0.666	3.25×10^{-4}	3.04×10^{13}	0.666	3.25×10^{-4}	3.04×10^{13}	0.667	6.50×10^{-5}

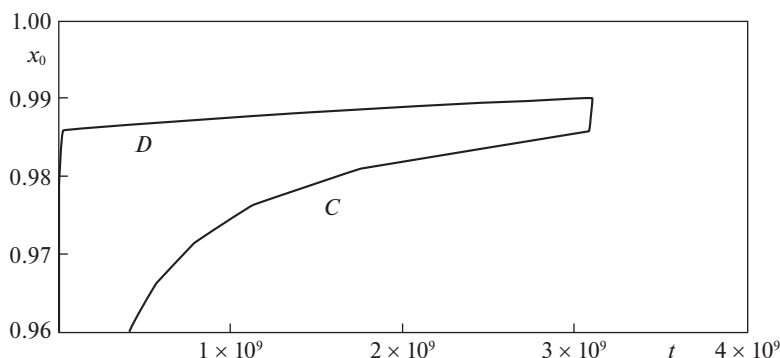
Таблица 2. Характеристики ползучести мембраны в случае прилипания в конце соответствующей стадии

№ стадии	Δ	A $q^1 = 0.5 \times 10^{-4}$			B $q^2 = 2.5 \times 10^{-4}$			C $q^1 = 0.5 \times 10^{-4}, t \in \left[0, \frac{\tau_1^0}{2}\right]$ $q^2 = 2.5 \times 10^{-4}, t \in [0.5\tau_1^0, t^{*2}]$			D $q^2 = 2.5 \times 10^{-4}, t \in \left[0, \frac{\tau_2^0}{2}\right]$ $q^1 = 0.5 \times 10^{-4}, t \in [0.5\tau_2^0, t^{*1}]$		
		t	H	σ_u	t	H	σ_u	t	H	σ_u	t	H	σ_u
2	—	3.19×10^5	0.863	6.27×10^{-3}	2.55×10^3	0.863	3.14×10^{-2}	3.19×10^5	0.863	6.27×10^{-3}	2.55×10^3	0.863	3.14×10^{-2}
3	—	3.30×10^6	0.752	2.88×10^{-3}	2.63×10^4	0.752	1.44×10^{-2}	3.30×10^6	0.752	2.88×10^{-3}	2.63×10^4	0.752	1.44×10^{-2}
4	0.01	3.06×10^{10}	0.258	1.68×10^{-4}	2.45×10^8	0.258	8.39×10^{-4}	1.54×10^{10}	0.258	8.39×10^{-4}	1.55×10^{10}	0.258	1.68×10^{-4}
	0.001	4.64×10^{12}	0.138	3.15×10^{-5}	3.71×10^{10}	0.138	1.57×10^{-4}	2.34×10^{12}	0.138	1.57×10^{-4}	3.32×10^{12}	0.138	3.15×10^{-5}
	0.0001	7.03×10^{14}	0.073	3.90×10^{-6}	5.62×10^{12}	0.073	2.95×10^{-5}	3.54×10^{14}	0.073	2.95×10^{-5}	3.04×10^{14}	0.073	3.90×10^{-6}

Вычисления показывают, что при заданных значениях используемых параметров основная длительность деформирования мембраны вплоть до практически полного прилегания мембраны к матрице соответствует четвертой стадии.

7. Ползучесть мембраны при кусочно-постоянном давлении q .

Рассмотрим две программы нагружения. В первой программе (см. колонки C в табл. 1 и 2) сначала деформирование происходит при $q = q_1$ в течение времени τ_1 , равного половине соответствующей длительности τ_1^0 заполнения мембраны при постоянном давлении $q = \text{const}$, т.е. $\tau_1 = 0.5\tau_1^0$ (колонка A в табл. 1), затем величина q скачкообразно возрастает и становится равной q_2 , при $t > \tau_1$ рассматривается ползучесть вплоть до практически полного прилегания мембраны к матрице при $t = t^{*1}$. Во второй программе нагружения (колонка D в табл. 1 и табл. 2) сначала мембрана деформируется при $q = q_2$ в течение $0 \leq t \leq 0.5\tau_2^0$ (где τ_2^0 — длительность заполнения матрицы при $q = \text{const}$ (колонка B в табл. 1)), а затем мембрана деформируется при $q = q_1$ вплоть до практически полного прилегания мембраны к матрице при $t = t^{*2}$. На рис. 13

**Рис. 13.** Зависимость $x_0(t)$ при кусочно-постоянной величине $q(t)$ в случае идеального скольжения.

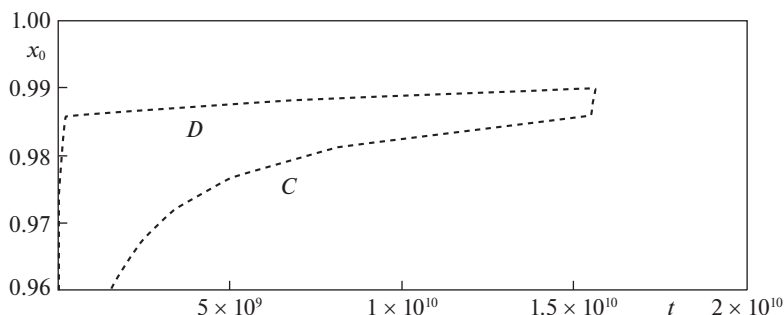


Рис. 14. Зависимость $x_0(t)$ при кусочно-постоянной величине $q(t)$ в случае прилипания.

приведены зависимости $x_0(t)$ в случае идеального скольжения при скачкообразном возрастании давления $q(t)$ от q_1 до q_2 (кривая C) и при мгновенном уменьшении давления от q_1 до q_2 в (кривая D), при этом в качестве характеристики предельной близости мембраны и матрицы использовано значение $\Delta = 0.01$. На рис. 14 приведены аналогичные кривые $x_0(t)$ в случае прилипания. В момент мгновенного изменения давления происходит излом зависимости $x_0(t)$ на рис. 13 и рис. 14.

Согласно табл. 1 и 2 при данных значениях $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$ скачкообразное изменение q происходит в процессе III и IV стадий. Значение $x_0(0.5\tau_1^0)$ вычисляется подбором такого значения x_0 , которое соответствует заданному времени $t = 0.5\tau_1^0$.

Применим к этой задаче правило суммирования парциальных времен Σ , определяемое как сумма отношений длительностей ползучести при постоянных значениях q к длительностям практически полного прилегания мембраны к матрице при этих значениях q :

$$\Sigma = \frac{\tau_1}{\tau_1^0} + \frac{t^* - \tau_2}{\tau_2^0}, \quad \Sigma = 1$$

$$\Sigma = \frac{1}{2} + \frac{t^{*1} - \frac{1}{2}\tau_1^0(q^1)}{\tau_2^0(q^2)} = 1, \quad \Sigma = \frac{1}{2} + \frac{t^{*2} - \frac{1}{2}\tau_1^0(q^2)}{\tau_2^0(q^1)} = 1$$

Вычисления показывают, что как в случае идеального скольжения, так и в случае прилипания сумма парциальных времен $\Sigma = 1$.

Заключение. Приведено исследование ползучести длинной прямоугольной мембраны в стесненных условиях (внутри жесткой матрицы) под действием переменного поперечного давления. В качестве примера исследуется ползучесть мембраны при однократном мгновенном изменении величины поперечного давления. Рассматриваются два варианта условий на контакте мембраны и матрицы: идеальное скольжение и полное прилипание. В работе рассматриваются четыре последовательные стадии деформирования мембраны: мгновенное упругое деформирование, ползучесть в свободных условиях, ползучесть мембраны при контакте с поперечной стороной матрицы и ползучесть мембраны при контакте со всеми сторонами матрицы. Анализ проводится до времени практически полного прилегания мембраны к матрице. Получены зависимости толщины различных частей мембраны и интенсивности напряжений в мембране от времени. При анализе ползучести в случае кусочно-постоянной зависимости вели-

чины давления от времени рассмотрено соответствие правилу суммирования парциальных времен заполнения матрицы.

Представленные материалы могут быть использованы при моделировании процесса ползучести панели крыла современных самолетов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-19-00062).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Odqvist F.K.G.* Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture. Oxford: Clarendon, 1974. 200 p.
2. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
3. *Аннин Б.Д., Олейников А.И., Бормотин К.С.* Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолета SSJ-100 // ПМТФ. 2010. Т. 51. № 4. С. 155–165.
4. *Apratim Majumder, Chayanjit Ghosh, Mohit U., et al.* Creep deformation in elastomeric membranes of liquid-filled tunable-focus lenses // Appl. Optics. 2019. V. 58. Iss. 23. 2019. P. 6446–6454.
5. *Ian Wineman.* Nonlinear viscoelastic membranes // Comput.&Math. with Appl. 2007. V. 53. Iss. 2. P. 168–181.
6. *Ларин С.Н., Бессмертный А.В.* Изотермическое свободное деформирование узкой прямоугольной мембраны из анизотропного листового материала при кратковременной ползучести // Изв. ТулГУ. Сер. Технич. науки. 2010. № 1. С. 44–51.
7. *Яковлев С.С., Ларин С.Н.* Деформирование анизотропной прямоугольной мембраны в условиях ползучести // Изв. ТулГУ. Сер. Технич. науки. 2010. № 3. С. 37–46.
8. *Бессмертный А.В.* Изотермическое деформирование элементов многослойных листовых конструкций из высокопрочных анизотропных материалов в режиме кратковременной ползучести: диссертация кандидата технических наук. Дисс. ... канд-та техн. наук. Тула, 2012. 206 с.
9. *Ефимов А.Б., Романюк С.Н., Чумаченко Е.Н.* Об определении закономерностей трения в процессах обработки металлов давлением // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 6. С. 82–98.
10. *Малинин Н.Н.* Ползучесть в обработке металлов. М.: Машиностроение, 1986. 216 с.
11. *Локощенко А.М.* Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
12. *Локощенко А.М., Терауд В.В.* Ползучесть длинной узкой мембраны в стесненных условиях вплоть до разрушения // ПМТФ. 2013. Т. 54. № 3. С. 126–133.
13. *Демин В.А., Локощенко А.М., Жеребцов А.А.* Ползучесть длинной прямоугольной мембраны внутри криволинейной матрицы // Изв. вузов. Машиностр. 1998. № 4–6. С. 41–46.
14. *Шестериков С.А., Юмашева М.А.* Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 86–91.
15. *Локощенко А.М., Абросимова Е.А.* Установившаяся ползучесть длинной мембраны внутри жесткой матрицы при кусочно-постоянной зависимости скорости поперечного давления от времени // ПМТФ. 2019. № 1. С. 103–113.
16. *Локощенко А.М., Терауд В.В.* Ползучесть длинной узкой мембраны в стесненных условиях вплоть до разрушения // ПМТФ. 2013. Т. 54. № 3. С. 126–133.
17. *Терауд В.В., Локощенко А.М., Шеварова Е.А.* Ползучесть мембраны внутри П-образной матрицы при переменном поперечном давлении // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сб. трудов. Т. 3: Уфа: РИЦ БашГУ. 2019. С. 382–384.
18. *Nguyen N., Wineman A., Waas A.* Contact problem of a non-linear viscoelastic spherical membrane enclosing incompressible fluid between two rigid parallel plates // Int. J. Non-Linear Mech. 2013. V. 50. P. 97–108.
19. *Васин Р.А., Еникеев Ф.У., Круглов А.А., Сафиуллин Р.В.* Об идентификации определяющих соотношений по результатам технологических экспериментов // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 2. С. 111–123.
20. *Сафиуллин Р.В., Еникеев Ф.У.* Расчет режимов сверхпластической формовки протяженной прямоугольной мембраны // Кузнечно-штамп. пр-во. Обработка материалов давлением. 2001. № 3. С. 35–40.

21. *Srivastava A., Hui C.-Y.* Nonlinear viscoelastic contact mechanics of long rectangular membranes // *Proc. Royal Soc. A. Math. Phys.&Engng. Sci.* 2014. A 470: 20140528.
22. *Rong Long, Kenneth Shull, Hui C.-Y.* Large deformation adhesive contact mechanics of circular membranes with a flat rigid substrate // *J. Mech.&Phys. Solids.* 2010. V. 58. P. 1225–1242.
23. *Srivastava A., Hui C.-Y.* Large deformation contact mechanics of long rectangular membranes. I. Adhesionless contact // *Proc. Royal Soc. A. Math. Phys.&Engng. Sci.* 2013. A 469: 20130424.

Second State Creep of a Narrow Membrane inside a Rigid Low Matrix

A. M. Lokoshchenko^{a,#}, V. V. Teraud^{a,##} and A. F. Akhmetgaleev^{a,###}

^a *Lomonosov Moscow State University, Institute Mechanics, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: loko@imec.msu.ru*

^{##}*e-mail: ldrnww@gmail.ru*

^{###}*e-mail: Achmet206@yandex.ru*

The problem of the second-state creep of a long narrow rectangular membrane under constrained conditions inside a rigid low matrix is investigated with a piecewise constant dependence of the transverse pressure on time. There are used a long rigid low matrix of rectangular section, in which the height is less than half the width. As an example, the creep of a membrane is studied with a single change of a transverse pressure in time. Two variants of the contact conditions between the membrane and the matrix are considered: ideal sliding and adhesion. In this work, four stages of membrane creep are investigated. At the first stage (elastic deformation), the membrane, which is flat in the initial state, is instantly elastically deformed under the action of pressure, acquiring the shape of an open circular cylindrical shell. At the second stage, the membrane is deformed under conditions of stable creep up to the moment it touches the upper side of the matrix. The third stage ends when the membrane touches the longitudinal sides of the matrix. At the fourth stage, the membrane contacts the matrix along the transverse and longitudinal sides. The calculation is stopped in time sensibly full contact of the membrane to the matrix. The rule of summation of the partial gripping times of the membrane to the matrix is considered.

Keywords: long narrow membrane, second-state creep, low rigid matrix, piecewise constant lateral pressure, ideal sliding, adhesion

REFERENCES

1. *Odqvist F.K.G.* Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture. Oxford: Clarendon Press, 1974. 200 p.
2. *Kachanov L.M.* Fundamentals of Fracture Mechanics. Moscow: Nauka. 1974. 312 p. (in Russian)
3. *Annin B.D., Oleinikov A.I., Bormotin K.S.* Modeling of forming of wing panels of the SSJ-100 aircraft // *J. Appl. Mech.&Techn. Phys.*, 2010, vol. 51, no. 4, pp. 579–589.
4. *Majumder A., Ghosh Ch. et al.* Creep deformation in elastomeric membranes of liquid-filled tunable-focus lenses // *Appl. Optics*, 2019, vol. 58, iss. 23, pp. 6446–6454.
5. *Ian Wineman.* Nonlinear viscoelastic membranes // *Comput.&Math. with Appl.*, 2007, vol. 53, iss. 2. pp. 168–181.
6. *Larin S.N., Bessmertny A.V.* Isothermal free deformation of a narrow rectangular membrane made of anisotropic sheet material with short-term creep // *Izv. TulGU. Ser. Techn. Sci.*, 2010, no. 1. (in Russian)
7. *Yakovlev S.S., Larin S.N.* Deformation of anisotropic rectangular membrane under creep conditions // *Izv. TulGU. Ser. Techn. Sci.*, 2010, no. 3, pp. 37–46. (in Russian)
8. *Bessmertny A.V.* Isothermal deformation of elements of multilayer sheet structures made of high-strength anisotropic materials in the mode of short-term creep. Diss. of PhD. Tula, 2012, 206 p. (in Russian)
9. *Efimov A.B., Romanyuk S.N., Chumachenko E.N.* On the determination of the regularities of friction in the processes of metal working by pressure // *Mech. Solids*, 1995, no. 6, pp. 82–98.

10. *Malinin N.N.* Creep in Metal Processing. Moscow: Mashinostroenie, 1986. 216 p. (in Russian)
11. *Lokoshchenko A.M.* Creep and Long-Term Strength of Metals. N.Y.: CRC Press, 2018. 545 p.
12. *Lokoshchenko A.M., Teraud V.V.* Creep of a long narrow membrane up to fracture under constrained conditions // J. Appl. Mech.&Techn. Phys., 2013, vol. 54, no. 3, pp. 451–457.
13. *Demin V.A., Lokoshchenko A.M., Zhrebtsov A.A.* Creep of a long rectangular membrane inside a curvilinear matrix // Izv. vuzov. Mech. Engng., 1998, no. 4, pp. 41–46. (in Russian)
14. *Shesterikov S.A., Yumasheva M.A.* Concretization of the equation of state in the theory of creep // Mech. Solids, 1984, no. 1, pp. 86–91. (in Russian)
15. *Lokoshchenko A.M., Abrosimova E.A.* Steady-state creep of a long membrane in a rigid matrix with a piecewise constant dependence of the rate of change in transverse pressure on time // J. Appl. Mech.&Techn. Phys., 2019, vol. 60, no. 1, pp. 1–10.
16. *Lokoshchenko A.M., Teraud V.V.* Creep of a long narrow membrane up to fracture under constrained conditions // J. Appl. Mech.&Techn. Phys., 2013, vol. 54, no. 3, pp. 451–457.
17. *Teraud W.V., Lokoshchenko A.M., Shevarova E.A.* Creep of the membrane inside a U-shaped matrix under variable transverse pressure // Proc. of XII All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics. Vol. 3: Mechanics of a Deformable Solid. Ufa: RIC Bash-SU. 2019, pp. 382–384. (in Russian)
18. *Nguyen N., Wineman A., Waas A.* Contact problem of a non-linear viscoelastic spherical membrane enclosing incompressible fluid between two rigid parallel plates // Int. J. Non-Linear Mech., 2013, vol. 50, pp. 97–108.
19. *Vasin R.A., Enikeev F.U., Kruglov A.A., Safiullin R.V.* On the identification of constitutive relations by the results of technological experiments // Mech. Solids, 2003, no. 2, pp. 90–100.
20. *Safiullin R.V., Enikeev F.U.* Calculation of modes of superplastic forming of an extended rectangular membrane // Forging & Stamping Product. Mater. Proc. by Pressure, 2001, no. 3, pp. 35–40. (in Russian)
21. *Srivastava A., Hui C.-Y.* Nonlinear viscoelastic contact mechanics of long rectangular membranes // Proc. Royal Soc. A. Math. Phys.&Engng. Sci., 2014, A 470: 20140528.
22. *Long R., Shull K., Hui C.-Y.* Large deformation adhesive contact mechanics of circular membranes with a flat rigid substrate // J. Mech.&Phys. Solids, 2010, vol. 58, pp. 1225–1242.
23. *Srivastava A., Hui C.-Y.* Large deformation contact mechanics of long rectangular membranes. I. Adhesionless contact // Proc. Royal Soc. A. Math. Phys.&Engng. Sci., 2013, A 469: 20130424.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

DOI: 10.31857/S0032823521060126

<i>Андреев А.С., Перегудова О.А.</i> “Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости интегро-дифференциальных уравнений Вольтера с бесконечным запаздыванием”	№ 4	469–493
<i>Анкудинов А.Л.</i> “Кинетический ударный слой в плоскости растекания аппарата типа несущий корпус”	№ 5	615–625
<i>Антипов А.С., Краснова С.А.</i> “Блочный синтез системы слежения для двухроторной электромеханической системы при ограничениях на переменные состояния”	№ 1	3–20
<i>Ахметгалеев А.Ф.</i> см. <i>Локощенко А.М.</i>		
<i>Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.</i> “О методах решения векторных граничных задач в неклассических областях скалярными на основе блочных элементов”	№ 3	277–284
<i>Бабешко О.М.</i> см. <i>Бабешко В.А.</i>		
<i>Бакулин В.Н.</i> “Уточненный послойный анализ напряжённо-деформированного состояния нерегулярных трехслойных оболочек вращения двойной кривизны”	№ 1	89–105
<i>Бакулин В.Н.</i> “Блочно-послойный подход для анализа напряжённо-деформированного состояния трехслойных нерегулярных цилиндрических оболочек вращения”	№ 3	383–395
<i>Баничук Н.В., Иванова С.Ю.</i> “Оптимальное демпфирование колебаний при поступательном движении панели в потоке жидкости”	№ 3	358–369
<i>Бегун А.С., Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Прокудин А.Н.</i> “О последовательной сменяемости в механизмах производства больших необратимых деформаций”	№ 1	106–120
<i>Белоконь Т.В.</i> см. <i>Горр Г.В.</i>		
<i>Беляк О.А., Суворова Т.В.</i> “Колебания штампа на поверхности гетерогенного слоя при учете трения в области контакта”	№ 3	321–331
<i>Белянкова Т.И., Калинин В.В.</i> “О динамике неоднородной преднапряженной электроупругой среды в условиях воздействия внешнего электрического поля”	№ 3	309–320
<i>Борисевич В.Д., Потанин Е.П.</i> “Использование преобразования Дородницына для анализа тепло- и массопереноса во вращающихся потоках”	№ 6	758–771
<i>Брутян М.А., Ибрагимов У.Г.</i> “Автомодельные течения вязкого газа в плоском канале при произвольной зависимости коэффициентов переноса от температуры”	№ 6	748–757
<i>Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Владимиров И.Ю.</i> “Равномерные и неравномерные асимптотики дальних полей поверхностных волн от вспыхнувшего локализованного источника”	№ 5	626–634
<i>Буренин А.А.</i> см. <i>Бегун А.С., Прокудин А.Н.</i>		
<i>Буров А.А., Никонов В.И., Шалимова Е.С.</i> “Движение массивной точки по поверхности однородного шара со сферической полостью”	№ 4	528–543

<i>Ван Ч., Заболотнов Ю.М.</i> “Анализ динамики формирования тросовой группировки из трех наноспутников с учетом их движения вокруг центров масс”	№ 1	21–43
<i>Ватульян А.О., Нестеров С.А.</i> “К определению термомеханических характеристик функционально-градиентного конечного цилиндра”	№ 3	396–408
<i>Ватульян А.О., Плотников Д.К.</i> “К исследованию контактной задачи для неоднородной упругой полосы”	№ 3	285–295
<i>Виттенбург Й.</i> “О конструкции “Триада””	№ 4	454–460
<i>Владимиров И.Ю.</i> см. <i>Булатов В.В.</i>		
<i>Владимиров Ю.В.</i> см. <i>Булатов В.В.</i>		
<i>Войцицкая К.Л.</i> см. <i>Формальский А.М.</i>		
<i>Георгиевский Д.В.</i> “Последовательное трехосное динамическое обжатие параллелепипеда”	№ 6	772–778
<i>Глушков Е.В., Глушкова Н.В.</i> “Бегущие волны в многослойных анизотропных композитах”	№ 3	296–308
<i>Глушкова Н.В.</i> см. <i>Глушков Е.В.</i>		
<i>Горр Г.В., Белоконь Т.В.</i> “О решениях уравнений движения гиростата с переменным гиросtatическим моментом”	№ 2	139–151
<i>Горячева И.Г.</i> см. <i>Зобова А.А.</i>		
<i>Гурченков А.А.</i> “Нестационарный поток вязкой несжимаемой электропроводной жидкости на вращающейся пластине”	№ 5	587–600
<i>Досаев М.З., Самсонов В.А.</i> “Особенности динамики систем с упругими элементами и сухим трением”	№ 4	426–435
<i>Евдокимова О.В.</i> см. <i>Бабешко В.А.</i>		
<i>Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е., Царев И.С.</i> “Динамическое поведение балки, лежащей на обобщенном упругом основании, с движущейся нагрузкой”	№ 2	193–209
<i>Ефимов Д.Ю.</i> см. <i>Толоконников Л.А.</i>		
<i>Желнин М.С.</i> см. <i>Семин М.А.</i>		
<i>Заболотнов Ю.М.</i> см. <i>Ван Ч.</i>		
<i>Зобова А.А., Горячева И.Г.</i> “Реализация дифференциальной связи при движении упругого цилиндра по наклонному основанию”	№ 4	516–527
<i>Ибрагимов У.Г.</i> см. <i>Брутян М.А.</i>		
<i>Иванова С.Ю.</i> см. <i>Баничук Н.В.</i>		
<i>Казаков Л.И.</i> “Ламинарное течение вязкой жидкости в начальном участке круглой трубы”	№ 5	601–614
<i>Каленова В.И.</i> см. <i>Морозов В.М.</i>		
<i>Калинчук В.В.</i> см. <i>Белянкова Т.И.</i>		
<i>Карапетян А.В.</i> “Обобщенные диаграммы Смейла для диссипативных систем с симметрией”	№ 4	461–468
<i>Каюмов О.Р.</i> “Оптимальное по быстродействию перемещение платформы с осцилляторами”	№ 6	699–718
<i>Кержаев А.П.</i> см. <i>Коваленко М.Д.</i>		
<i>Климина Л.А.</i> “Метод формирования асинхронных автоколебаний в механической системе с двумя степенями свободы”	№ 2	152–171
<i>Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Кержаев А.П., Шуляковская Т.Д.</i> “Некоторые решения теории упругости для прямоугольника”	№ 3	370–382
<i>Ковтанюк Л.В.</i> см. <i>Бегун А.С.</i>		
<i>Козинцев В.М.</i> см. <i>Попов А.Л.</i>		

<i>Красильников П.С.</i> “О многообразии “гравитационный пропеллер” в обобщенной круговой задаче Ситникова”	№ 5	576–586
<i>Краснова С.А.</i> см. <i>Антипов А.С.</i>		
<i>Кручинин П.А.</i> см. <i>Формальский А.М.</i>		
<i>Кузнецов С.В., Мондрус В.Л.</i> “Волны Лява в стратифицированной моноклинной среде”	№ 3	347–357
<i>Ларин Н.С.</i> см. <i>Локощенко А.М.</i>		
<i>Левин Л.Ю.</i> см. <i>Семин М.А.</i>		
<i>Левитин А.Л.</i> см. <i>Попов А.Л.</i>		
<i>Лисенкова Е.Е.</i> см. <i>Ерофеев В.И.</i>		
<i>Локощенко А.М., Фомин Л.В., Ларин Н.С.</i> “Длительная прочность стержней, растягиваемых в агрессивной среде, при различных двусвязных формах их поперечных сечений”	№ 1	66–88
<i>Локощенко А.М., Терауд В.В., Ахметгалеев А.Ф.</i> “Установившаяся ползучесть длинной узкой прямоугольной мембраны внутри жесткой низкой матрицы при кусочно-постоянной зависимости поперечного давления от времени”	№ 6	792–812
<i>Маркеев А.П.</i> “Об устойчивости лагранжевых решений в пространственной близкой к круговой ограниченной задаче трех тел”	№ 4	503–515
<i>Меньшова И.В.</i> см. <i>Коваленко М.Д.</i>		
<i>Миназетдинов Н.М.</i> “Гидродинамическая модель явления “струйности” при электрохимической обработке металлов”	№ 5	664–674
<i>Мондрус В.Л.</i> см. <i>Кузнецов С.В.</i>		
<i>Морозов В.М., Каленова В.И., Рак М.Г.</i> “О стабилизации регулярных прецессий спутника при помощи магнитных моментов”	№ 4	436–453
<i>Нестеров С.А.</i> см. <i>Ватульян А.О.</i>		
<i>Никонов В.И.</i> см. <i>Буров А.А.</i>		
<i>Ольшанский В.Ю.</i> “Полурегулярная прецессия несимметричного твердого тела с жидким наполнением”	№ 5	547–564
<i>Павлова А.В., Рубцов С.Е., Телятников И.С.</i> “Об одной модификации метода фиктивного поглощения”	№ 3	332–346
<i>Паскаль М.</i> “Осциллятор с сухим трением и упругим ограничителем”	№ 4	494–502
<i>Перегудова О.А.</i> см. <i>Андреев А.С.</i>		
<i>Переляев С.Е.</i> “Теория новых гироскопических датчиков семейства “обобщенный” маятник Фуко, функционирующих на двух рабочих модах”	№ 6	719–733
<i>Плехов О.А.</i> см. <i>Семин М.А.</i>		
<i>Плотников Д.К.</i> см. <i>Ватульян А.О.</i>		
<i>Попов А.Л., Козинцев В.М., Челюбеев Д.А., Левитин А.Л.</i> “Метод отверстия в диагностике остаточных напряжений”	№ 2	210–238
<i>Потанин Е.П.</i> см. <i>Борисевич В.Д.</i>		
<i>Прокудин А.Н., Буренин А.А.</i> “Упругопластическое деформирование вращающегося сплошного цилиндра из линейно-упрочняющегося материала”	№ 2	172–192
<i>Прокудин А.Н.</i> см. <i>Бегун А.С.</i>		
<i>Рак М.Г.</i> см. <i>Морозов В.М.</i>		
<i>Рубцов С.Е.</i> см. <i>Павлова А.В.</i>		
<i>Самсонов В.А.</i> см. <i>Досаев М.З.</i>		
<i>Севастьянов А.М.</i> см. <i>Севастьянов Г.М.</i>		

<i>Севастьянов Г.М., Севастьянов А.М.</i> “Приближенный анализ экструзии пористого материала типа Грина”	№ 1	121–134
<i>Семин М.А., Левин Л.Ю., Желнин М.С., Плехов О.А.</i> “Определение мест расположения контрольно-термических скважин при искусственном замораживании породного массива”	№ 2	257–272
<i>Сизых Г.Б.</i> “Интегральный инвариант течений идеального газа за отошедшим скачком уплотнения”	№ 6	742–747
<i>Сизых Г.Б.</i> “Угол примыкания звуковой линии к обтекаемой поверхности”	№ 6	734–741
<i>Солдатенков И.А.</i> “Контакт с межмолекулярным взаимодействием для вязкоупругого слоя (самосогласованный подход): анализ особенностей процесса подвода/отвода индентора”	№ 1	44–65
<i>Суворова Т.В.</i> см. <i>Беляк О.А.</i>		
<i>Сумбатов А.С.</i> “Плоскопараллельное соскальзывание гибкой нерастяжимой нити через закругленный край горизонтального стола”	№ 5	565–575
<i>Телятников И.С.</i> см. <i>Павлова А.В.</i>		
<i>Терауд В.В.</i> см. <i>Локощенко А.М.</i>		
<i>Тирский Г.А.</i> “Аэротермобаллистика дробящихся метеороидов в атмосфере Земли”	№ 5	635–663
<i>Толоконников Л.А., Ефимов Д.Ю.</i> “Дифракция звуковых волн на упругом цилиндре с неоднородным покрытием, расположенном вблизи поверхности упругого полупространства”	№ 6	779–791
<i>Фомин Л.В.</i> см. <i>Локощенко А.М.</i>		
<i>Формальский А.М., Кручинин П.А., Войцицкая К.Л.</i> “Стабилизация двойного перевернутого маятника, установленного на качелях SEESAW”	№ 6	683–698
<i>Царев И.С.</i> см. <i>Ерофеев В.И.</i>		
<i>Челобеев Д.А.</i> см. <i>Попов А.Л.</i>		
<i>Черданцев В.Н.</i> “Оценка геомеханического состояния краевой зоны угольного пласта, вмещающего непрочный прослоек”	№ 2	239–256
<i>Черноусько Ф.Л.</i> “Управление плоскими движениями тела при помощи подвижной массы”	№ 4	414–425
<i>Шалимова Е.С.</i> см. <i>Буров А.А.</i>		
<i>Шуляковская Т.Д.</i> см. <i>Коваленко М.Д.</i>		
Информация для авторов и читателей журнала ПММ		544
Валентин Витальевич Румянцев (к столетию со дня рождения)		411–413
Памяти Александра Ароновича Зевина		135–136
Памяти Александра Владиленовича Карапетяна		675–676