# СОДЕРЖАНИЕ

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 6, с. 3–15

*УДК 539.3*

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, СВЯЗАННЫЕ С ИЗМЕРЕНИЕМ ДЕФОРМАЦИЙ, ВСТРОЕННЫМИ В МАТЕРИАЛ ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКИМИ ДАТЧИКАМИ НА БРЭГГОВСКИХ РЕШЕТКАХ


**В. П. Матвеенко**[a,*], **Н. А. Кошелева**[a,**], **Г. С. Сероваев**[a,***]

[a] *Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия*

**e-mail: mvp@icmm.ru*

***e-mail: kosheleva.n@icmm.ru*

****e-mail: serovaev@icmm.ru*

Поступила в редакцию 05.03.2021 г.
После доработки 15.03.2021 г.
Принята к публикации 22.03.2021 г.

В работе представлены результаты экспериментов по измерению деформаций волоконно-оптическими датчиками деформаций на основе брэгговских решеток, встроенными в материал. Среди этих экспериментов измерение деформаций в образце из полимерного композиционного материала с концентратором напряжений, измерение технологических деформаций в процессе формирования полимерного композиционного материала, измерение технологических деформаций в процессе отверждения цементной смеси при изготовлении бетона, измерение деформаций ползучести в полимерном материале. Наряду с экспериментами, демонстрирующими возможности измерения деформаций встроенными в материал волоконно-оптическими датчиками деформаций на брэгговских решетках, приводятся результаты численного анализа проблем, возникающих при использовании этих датчиков. Среди этих проблем анализ перераспределения напряженно-деформированного состояния, возникающего в результате встраивания оптического волокна в материал, и достоверности значений деформаций, вычисляемых на основе физических величин, поступающих от датчиков.

*Ключевые слова:* волоконно-оптический датчик, брэгговская решетка, измерение деформаций, технологические деформации, полимерный композиционный материал, бетон, численное моделирование

**DOI:** 10.31857/S0572329921060088

**1. Введение.** Открытое в 1978 году явление фоточувствительности кварцевых волокон, легированных германием [1], привело к появлению структуры в сердцевине оптического волокна, получившей название волоконной брэгговской решетки (ВБР) и являющейся основой наиболее распространенного типа волоконно-оптических датчиков (ВОД), позволяющих измерять деформацию и температуру, а так же другие “производные” этих параметров (давление, сила, влажность и т.д.). ВОД имеет ряд преимуществ по сравнению с другими датчиками: они не чувствительны к электромагнитному воздействию, могут работать в широком диапазоне температур, имеют возможности размещения нескольких датчиков на одной линии оптического волокна и одновременной регистрации показаний с этих датчиков. Одно из главных достоинств и преимуществ по сравнению с другими типами датчиков связано с возможностью встраивания ВОД в материал вследствие малости их размеров и принципа работы. Процедура встраивания ВОД в материал реализуется в технологических процессах изготовления изделий, в которых имеет место переход материала из жидкой фазы в твердую или формование материала из мелких фракций. Основным ограничением в таких технологиях является температура, которая не должна приводить к нарушению работоспособности датчика.

ВОД можно разбить на две группы: точечные и распределенные. В настоящей работе рассматривается наиболее распространенный тип точечных датчиков, а именно: ВОД на основе брэгговской решетки. Для измерения деформаций на поверхности конструкций зарубежной и отечественной промышленностью выпускаются ВОД на брэгговских решетках в различном конструктивном исполнении. Встраивание оптических волокон в материал, в частности, в структуру полимерных композиционных материалов (ПКМ), открывает принципиально новые возможности для контроля состояния конструкции и контроля механических деформаций в процессе изготовления материала. При использовании встроенных в материал ВОД на основе ВБР возникает ряд проблем. Одна из них связана с влиянием на механические характеристики материала встроенного волокна и с перераспределением напряженно-деформированного состояния в окрестности встроенного в материал волокна. Эта проблема наиболее сложна для ПКМ, в связи с возможностью появления технологического дефекта в форме смоляного кармана вокруг волокна. Можно отметить ряд работ, в которых экспериментальными и численными методами анализируется геометрия смоляного кармана, которая существенно определяет перераспределение напряжений при встраивании волокна в ПКМ [2–5]. Задачам оценки изменения механических свойств материала при встраивании волокна и перераспределения напряжений в его окрестности посвящены различные экспериментальные и теоретические работы. Примерами таких исследований являются: экспериментальная работа [6], где анализируется влияние на механические характеристики композита встроенных волокон при статических, ударных и циклических испытаниях; работа [7], в которой аналитическими методами оценивается напряженное состояние в окрестности волокна, встроенного в однородный трансверсально-изотропный материал; работы [4, 8], в которых для анализа перераспределения напряжений в окрестности волокна используется метод конечных элементов.

Наиболее сложной задачей при использовании ВОД на основе ВБР, встроенных в материал, является получение достоверных значений деформаций на основе физических величин, получаемых с датчика. Различные аспекты этой задачи приводятся в обзорной работе [9].

В настоящей работе приводятся примеры использования ВОД на брэгговских решетках для измерения деформаций в различных материалах и результаты численных экспериментов по оценке концентрации напряжений в окрестности оптического волокна, встроенного в ПКМ, и оценки погрешности деформаций, вычисленных на основе физических величин, регистрируемых датчиком.

**2. Примеры измерений деформаций, встроенными в материал волоконно-оптическими датчиками на брэгговских решетках и задачи, решаемые при измерении деформаций.** Размеры оптического волокна (125 мкм < Ø < 250 мкм [10]) и допускаемые минимальные радиусы изгиба (~10 мм) обычных оптических волокон диаметром до 200 мкм, открывают широкие возможности встраивания волокна в материал на технологической стадии его изготовления.

Измерение деформаций встроенными в материал ВОД позволяет решать различные задачи: использовать полученные значения деформаций для оценки достоверности результатов моделирования механического поведения конструкций, оценивать на основе выбранных критериев текущую прочность и целостность материала, регистрировать появление и развитие дефектов в материале, измерять деформации в материале на всех стадиях технологического процесса получения материала, получать новую ин-

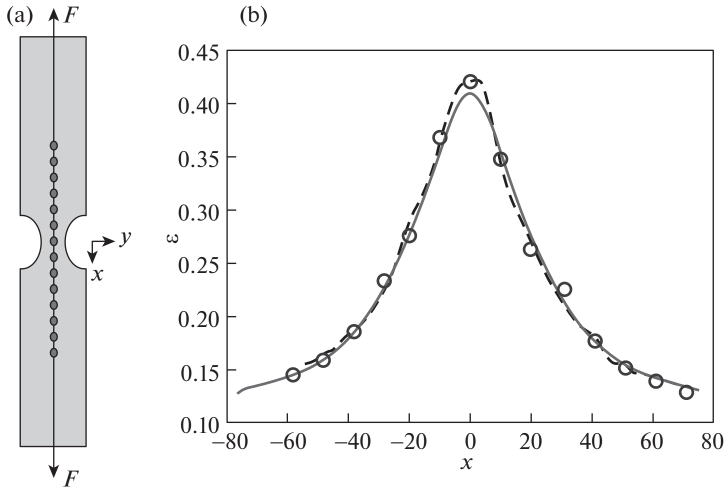


**Рис. 1.** Образец с вырезами на боковых гранях и встроенными ВОД (a); распределение деформаций вдоль осевой линии образца (b)

формацию для верификации моделей механического поведения материалов, в том числе, в условиях сложнонапряженного состояния.

Известные примеры измерений деформаций ВОД, встроенными в ПКМ, ограничиваются демонстрацией результатов показаний с одного датчика и, как правило, расположенного в зоне достаточно однородного распределения деформаций, например, датчик встроен в стандартный плоский образец для испытаний на растяжение [11], в панель из углепластика при растяжении [12]. В настоящей работе, в отличие от известных экспериментов, в качестве объекта исследования используется прямоугольная пластина (50 × 300 × 5 мм) из ПКМ с вырезами на боковых гранях, геометрия которых определяется половиной окружности (радиус 18.8 мм) (рис. 1,a). Данная геометрия обеспечивает при одноосном растяжении существенную неоднородность деформаций [13].

ПКМ получают на основе препрега стеклопластика, имеющего следующие механические характеристики: модуль упругости при растяжении по основе $E_{xx}$ = 26.5 ГПа; модуль упругости при растяжении по утку $E_{yy}$ = 26.1 ГПа; модуль упругости при растяжении перпендикулярно плоскости слоя $E_{zz}$ = 6 ГПа; модули сдвига: $G_{xy}$ = 4 ГПа, $G_{xz}$ = = 3 ГПа, $G_{yz}$ = 3 ГПа (первый индекс обозначает направление нормали к плоскости скольжения, второй – направление скольжения); коэффициенты Пуассона: $\nu_{xy}$ = 0.144, $\nu_{xz}$ = 0.138, $\nu_{yz}$ = 0.18 (первый индекс обозначает направление растяжения, второй – направление поперечной деформации). Оптическое волокно из кварца с механическими характеристиками $E_k$ = 71.4 ГПа, $\nu_k$ = 0.17 имеет диаметр 0.124 мм и защитную оболочку толщиной 0.012 мм, которая выполнена из полиимида с механическими характеристиками $E_0$ = 2.7 ГПа, $\nu_0$ = 0.31. Образцы были получены методом прямого прессования [14]. Этот технологический процесс включает следующие основные операции: выкладку на технологическую оснастку 20 слоев препрега; укладку оптоволоконных датчиков между 10 и 11 слоями; сборку технологического пакета для проведения подпрессовки материала; проведение режима полимеризации; демонтаж технологического пакета. Процесс полимеризации и отверждения пластины из ПКМ с внедренными ВОД производился в прессе Langzauner. Боковые вырезы в прямоугольных образцах получались путем механической обработки.

Для испытаний на растяжение использовалась универсальная электромеханическая система Instron 5982. Наряду с показаниями ВОД получены экспериментальные данные на основе оптической системы Vic-3D [15]. Дополнительно к экспериментам выполнен расчет напряженно-деформированного состояния образцов на основе метода конечных элементов в трехмерной постановке задачи. На рис. 1,b представлены распределения деформаций ($\varepsilon$, %) вдоль осевой линии образца ($x$, мм) при силе $F = 7$ кН, полученные на основе показаний волоконно-оптических датчиков на брэгговских решетках (показано символом **o**), оптической системы Vic-3D (пунктирная линия) и численного моделирования в рамках трехмерной постановки задачи теории упругости (сплошная линия). Численные результаты получены на основе метода конечных элементов, реализованного в коммерческом пакете ANSYS. Отличие результатов, полученных с ВОД, от результатов полученных оптической измерительной системой и численным моделированием, не превышает 6%.

В данном и других экспериментах, приведенных в настоящей работе, деформация на основе физической величины, регистрируемой датчиком, вычислялась с использованием предположения об одноосном напряженном состоянии в оптическом волокне.

Встраивание ВОД в материал позволяет регистрировать деформации в течение всего технологического процесса, в том числе, получить информацию об остаточных технологических деформациях. Этот вариант контроля технологических деформаций в объеме материала практически не имеет альтернатив. Возможность такого контроля особенно важна для обеспечения целостности и выбора параметров технологического процесса получения изделий из ПКМ, так как в этих процессах материал и изделие создаются одновременно. Измерение технологических деформаций ВОД, встроенными в ПКМ, было реализовано в процессе изготовления пластины (300 × 300 × 5 мм) из препрега вышеописанным методом прямого прессования. В технологическом процессе после сборки пакета из 20 слоев препрега формирование производилось при следующих параметрах: подъем температуры до 120°C со скоростью 3°C/мин; выдержка 0.4 часа при температуре 120°C, подъем давления прессования до 0.3 МПа; подъем температуры до 180°C со скоростью 3°C/мин; выдержка 1.5 часа при температуре 180°C; охлаждение со скоростью 3°C/мин до 55°C; сброс давления [13].

Регистрация технологических деформаций ВОД, встроенными в ПКМ, проводилась во время технологического процесса формирования методом прямого прессования в режиме реального времени. Для компенсации температурных деформаций использовались показания ВОД на брэгговской решетке, который располагался свободно на поверхности пластины. Показания этого датчика проверялись дополнительным регистратором температуры. Процедура вычисления технологических деформаций на основе показаний ВОД, встроенных в материал, и ВОД, регистрирующих температуру, приведена в работе [16].

На рис. 2 приведены изменения (пунктирная линия)температуры ($T$, °C) и изменения (сплошная линия) технологических деформаций ($\varepsilon$, %) в течение процесса формирования пластины ($t$, с). Значения деформаций после завершения процесса формирования ($t > 2.4 \times 10^4$ с) определяют уровень остаточных технологических деформаций. Использование подобной методики получения информации о деформациях и их эволюции в течение технологического процесса позволяет выбрать параметры технологического процесса, обеспечивающие получение бездефектных изделий из ПКМ с заданным уровнем остаточных деформаций.

Другим процессом, в котором технологические деформации имеют важное значение, является отверждение цементной смеси при изготовлении изделий из бетона. ВОД могут быть встроены в бетон до начала его твердения. При этом возможен вариант использования датчика встроенного в капилляр, который исключает взаимодействие датчика с материалом, и использование датчика без капилляра. Для демонстрации возможностей регистрации технологических деформаций в бетоне реализован вто-

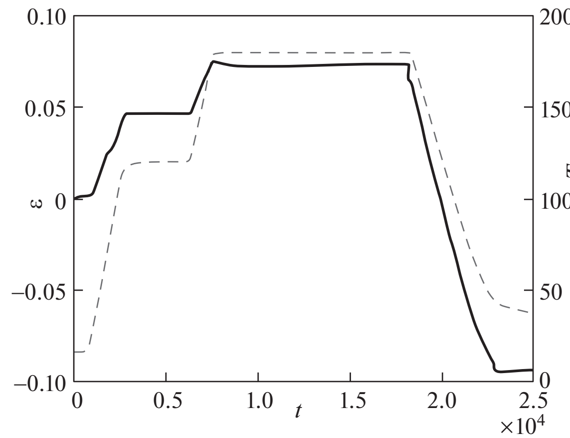


**Рис. 2.** Показания ВОД в течение процесса формования ПКМ

рой вариант. В качестве образца выбран цилиндр диаметром 150 мм и высотой 400 мм, формирование и твердение которого осуществлялось в полипропиленовом резервуаре с дном и свободной верхней поверхностью. Пять ВОД на брэгговских решетках, расположенных на одном волокне на расстоянии 10 мм друг от друга были встроены в цилиндрический образец вдоль его оси на этапе заливки бетонной смеси в цилиндрический резервуар. На рис. 3,a приведена схема образца со встроенными в материал ВОД, где *1–5* – номера ВБР, *6* – оптоволоконная линия. На рис. 3,b представлено изменение деформаций (ε, %) в образце на протяжении 3х месяцев (*t*, с), где *1–5* – номера ВБР. Эти данные позволяют констатировать наличие технологических деформаций и их неоднородность в объеме материала. Последнее обстоятельство указывает на возможность образования дефектов в изделиях из бетона на этапе их формирования и возможность управления процессом твердения с целью обеспечения более однородного распределения деформаций, уровень которых может контролироваться датчиками, встроенными в материал.

Встроенные в материал ВОД позволяют решать задачи, связанные с получением информации для верификации моделей механического поведения материала. Рассмотрен пример экспериментальной регистрации реологических свойств материала. В качестве образца выбран призматический стержень 200 × 10 × 5 мм [17] из заполимеризовавшейся эпоксидной смолы. В образец вдоль его длины встроен ВОД. При нагружении образца постоянной нагрузкой датчик будет регистрировать процесс ползучести. Измерение деформаций (ε, %) в образце проводилось в течение пяти суток (*t*, с). На рис. 4 деформации ползучести приведены при нагружении образца постоянной нагрузкой 50 Н. Полученные результаты могут быть использованы для определения констант входящих в уравнения, описывающие механическое поведение материалов. Подобные эксперименты могут быть реализованы и на других образцах, в том числе, с получением информации при сложном напряженном состоянии.

Приведенные в данном разделе приложения встроенных в материал ВОД деформаций иллюстрируют широкий спектр их возможностей.

**3. Численный анализ концентрации напряжений в окрестности ВОД, встроенных в ПКМ.** Одной из проблем при использовании встроенных в материал ВОД является перераспределение напряженно-деформированного состояния в окрестности волокна, которое может приводить к локальным зонам концентрации напряжений. Наиболее ярко эта проблема проявляется при встраивании волокна в ПКМ. Для оценки пе-

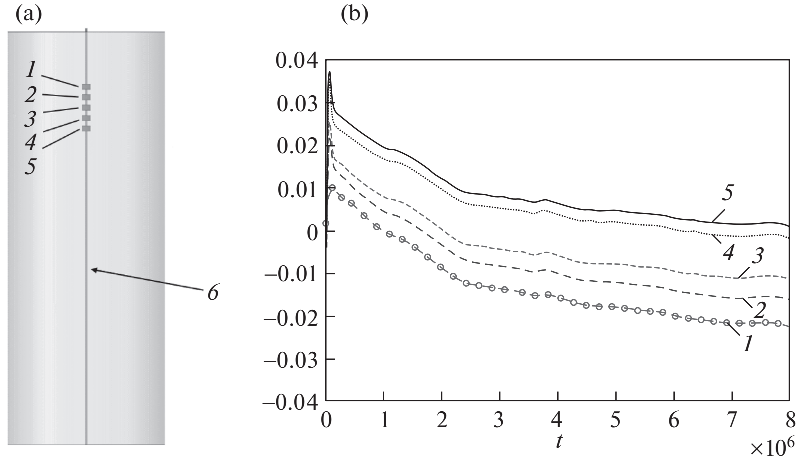


**Рис. 3.** Образец со встроенными в материал ВОД (a) и изменение во времени деформаций, регистрируемых ВОД (b)

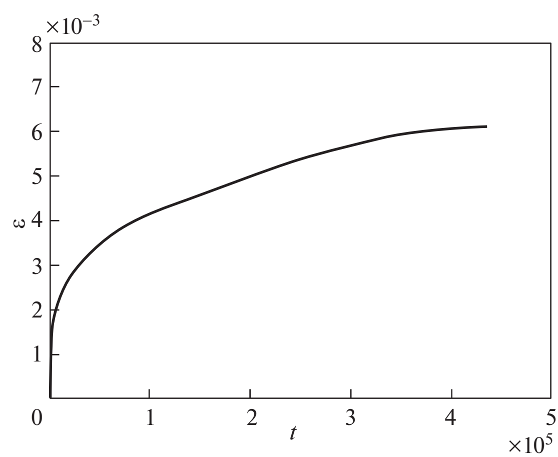


**Рис. 4.** Измерение деформации во времени для заполимеризовавшейся эпоксидной смолы

рераспределения напряжений и деформаций предлагается использовать математическое моделирование на основе модели линейного упругого поведения материалов. Для численных расчетов используется трехмерный вариант метода конечных элементов.

В примерах рассматриваются широко распространенные в конструкциях слоистые композиционные материалы. Для этих материалов существует несколько масштабных уровней моделирования: структурная, слоистая и однородная модели. В настоящей работе используются слоистая модель, в которой композиционный материал моделируется в виде пакета слоев, каждый из которых является однородным анизотропным телом, и однородная модель, в которой ПКМ рассматривается как однородная среда с

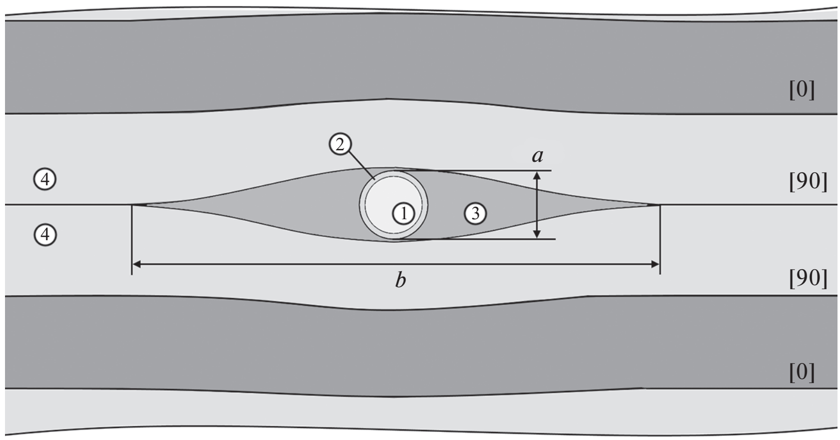


**Рис. 5.** Полимерный композитный материал с оптическим волокном и смоляным карманом: оптическое волокно (*1*); оболочка оптического волокна (*2*); смоляной карман (*3*); слой полимерного композитного материала (*4*)

эффективными механическими характеристиками. Однородная модель достаточно адекватно отражает ПКМ, сформированный из тканых препрегов.

Оптические волокна при встраивании между слоями сохраняют свою геометрию, а слои препрега в окрестности волокна искривляются и образуют карман, который заполняется полимерным связующим. Эта подобласть представляет технологический дефект, называемый смоляным карманом. Геометрия такого кармана при встраивании волокна между однонаправленными препрегами под углом 90°, относительно направления армирования достаточно хорошо подтверждена теоретическими и экспериментальными результатами [3–5]. Данная геометрия представлена на рис. 5. В работе [4] отмечается, что длина смоляного кармана составляет 12÷16 радиусов встроенного волокна. Для других вариантов ориентации волокна относительно направления армирования симметрия геометрии смоляного кармана может быть нарушена и иметь другие соотношения размеров *a* и *b*.

При моделировании напряженного состояния в окрестности встроенного в ПКМ оптического волокна рассматривается несколько вариантов расчетных схем: однородная ортотропная упругая среда с встроенным оптическим волокном без образования смоляного кармана (рис. 6,a) и с образованием смоляного кармана (рис. 6,b), слоистая модель ПКМ с волокном встроенным между слоями [0/0], что не приводит к образованию смоляного кармана (рис. 6,c), слоистая модель ПКМ с волокном встроенным между слоями [0/90] (рис. 6,d) и [90/90] (рис. 6,e) с учетом смоляного кармана.

Для всех вариантов представления ПКМ моделирование напряженно-деформированного состояния в окрестности волокна проводится на элементе в виде параллелепипеда со встроенным оптическим волокном (рис. 7) при вариантах нагружения $P_x = P_0$, $P_y = P_z = 0$; $P_y = P_0$, $P_x = P_z = 0$; $P_z = P_0$, $P_x = P_y = 0$. Для моделирования выбран ПКМ состоящий из 20 слоев однонаправленных препрегов. В табл. 1 приведены механические характеристики препрега, а в табл. 2 характеристики волокна и клея. Оптическое волокно имеет радиус $R_0 = 0.062$ мм, а толщина полиимидной оболочки – 0.012 мм. Размеры параллелепипеда обеспечивают на удалении от волокна (~5*b*) однородное напряженное состояние.

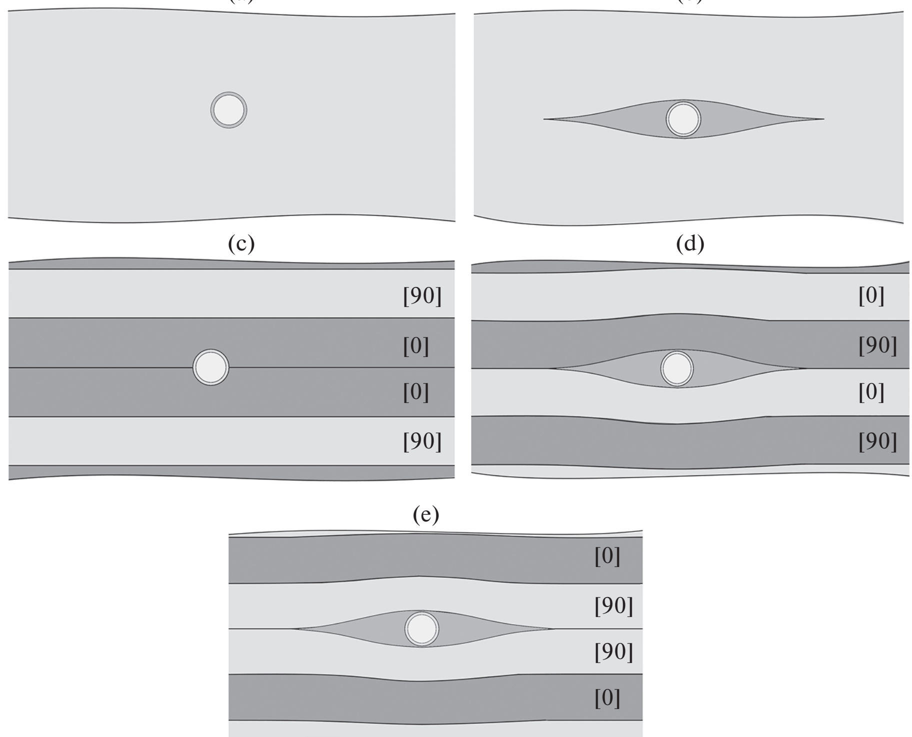


**Рис. 6.** Расчетные схемы ПКМ со смоляным карманом

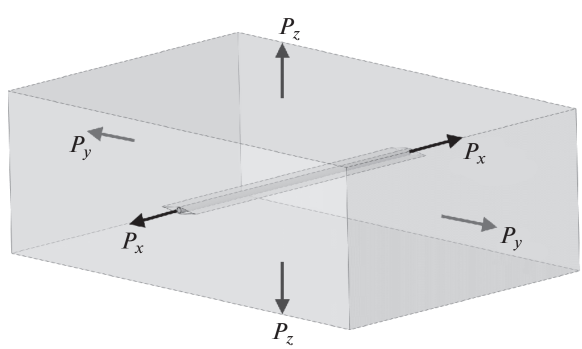


**Рис. 7.** Модель ПКМ со смоляным карманом и встроенным оптическим волокном

Наибольший уровень концентрации напряжений имеет место при схеме нагружения $P_y = P_0$, $P_x = P_z = 0$ и определяется компонентой тензора напряжений $\sigma_y$. В качестве характеристики уровня напряженного состояния принимается коэффициент концентрации напряжений $K_y = \sigma_y^{\max}/P_0$.

**Таблица 1.** Механические свойства однонаправленного препрега и эффективные механические характеристики пакета слоев

| Материал | $E_{xx}$, ГПа | $E_{yy}$, ГПа | $E_{zz}$, ГПа | $\nu_{xy}$ | $\nu_{yz}$ | $\nu_{xz}$ | $G_{xy}$, ГПа | $G_{yz}$, ГПа | $G_{xz}$, ГПа |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Однонаправленный препрег | 158.5 | 8.96 | 8.96 | 0.32 | 0.45 | 0.32 | 4.6 | 3.0 | 4.6 |
| Эффективные свойства пакета слоев | 84.1 | 84.1 | 10.7 | 0.035 | 0.45 | 0.45 | 4.3 | 3.5 | 3.5 |

**Таблица 2.** Механические характеристики оптического волокна и клея

| Материал | $E$, ГПа | $\nu$ |
|---|---|---|
| кварц | 71.4 | 0.17 |
| полиимид | 2.5 | 0.35 |
| клей | 2.9 | 0.36 |

Результаты расчетов позволяют сделать ряд выводов. Для слоистых ПКМ из однонаправленных препрегов при встраивании волокна вдоль направления армирования (рис. 6,c) и диаметре оптического волокна меньше толщины препрега концентрация напряжений практически отсутствует. Для однородной модели ПКМ со встроенным оптическим волокном без образования смоляного кармана (рис. 6,a), что наиболее полно соответствует слоистому ПКМ на основе тканевых препрегов, коэффициент концентрации напряжений равен 3.78. Для слоистых композиционных материалов из однонаправленных препрегов при укладке волокна между слоями [90/90] и [0/90] коэффициент концентрации напряжений равен соответственно 4.55 и 4.33. При расчете напряжений на основе однородной модели с образованием смоляного кармана коэффициент концентрации напряжений равен 2.1. Это объясняется тем, что в зоне концентрации напряжений нагрузку воспринимает слой с наибольшей жесткостью в направлении армирования, что учитывается при использовании слоистой модели ПКМ.

Для оценки достоверности результатов математического моделирования были использованы результаты работы [18], которая является одной из немногих, где приводятся экспериментальные данные по деформациям в окрестности смоляного кармана. В приведенном примере оптическое волокно встроено между 4 и 5 слоями следующих вариантов укладки слоев:$[90_2/0_2/0_2/90_2]$ и $[0_2/90_2/90_2/0_2]$. В качестве армирующего материала рассматривается углеродное волокно, а связующим материалом является эпоксидная смола. Экспериментальные данные получены на основе метода муаровой интерференции. Данные об оптическом волокне в работе отсутствуют. Результаты численного моделирования при нагрузке, действующей перпендикулярно направлению оптического волокна и данных об оптическом волокне из табл. 2 отличаются от экспериментальных данных в пределах 65%. В данном случае, несмотря на относительно большое различие численных и экспериментальных результатов с учетом неполной информации о геометрических размерах и отсутствии информации об оптическом волокне, можно сделать заключение о возможности использования численного моделирования для оценки концентрации напряжений в окрестности оптического волокна встроенного в ПКМ.

**4. Численное моделирование достоверности значений деформаций, вычисленных на основе физических величин, регистрируемых волоконно-оптическим датчиком на брэгговской решетке.** Основное свойство брэгговской решетки состоит в генерировании отраженного сигнала. Длина волны отраженного сигнала зависит от показателя преломления оптического волокна $n$ и длины периода структуры решетки $L$

$$\lambda^* = 2nL \tag{4.1}$$

При взаимодействии волоконно-оптического датчика с деформируемым материалом происходит изменение длины брэгговской решетки, приводящее к изменению длины волны отраженного сигнала, которое регистрируется интеррогатором. Взаимосвязь изменения длины волны отраженного спектра с деформацией волокна в зоне брэгговской решетки определяется соотношениями [9]

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\lambda_1}{\lambda^*} &= \varepsilon_3 - \frac{1}{2}n^2(p_{11}\varepsilon_1 + p_{12}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)) \\ \frac{\Delta\lambda_2}{\lambda^*} &= \varepsilon_3 - \frac{1}{2}n^2(p_{11}\varepsilon_2 + p_{12}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)) \end{aligned} \tag{4.2}$$

где $\varepsilon_3$ – деформация вдоль волокна, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ – главные деформации в плоскости перпендикулярной оптическому волокну. $\Delta\lambda_1 = \lambda_1 - \lambda^*$, $\Delta\lambda_2 = \lambda_2 - \lambda^*$ – разница величин резонансных длин волн отраженного спектра в текущий ($\lambda_1$, $\lambda_2$) и начальный ($\lambda^*$) моменты времени, $p_{11}$, $p_{12}$ – коэффициенты Поккельса.

При одноосной деформации оптического волокна свободного от взаимодействия с окружающей средой деформации $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\nu\varepsilon_3$, где $\nu$ – коэффициент Пуассона оптического волокна. В этом случае $\Delta\lambda_1 = \Delta\lambda_2 = \Delta\lambda$ и

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(1 - \frac{n^2}{2}(p_{12} - \nu(p_{11} + p_{12}))\right)\varepsilon_3 \tag{4.3}$$

или

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{k} \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda^*} \tag{4.4}$$

Для используемых оптических волокон $k = 0.78$.

Из соотношений (4.2), (4.4) следует, что однозначная связь между экспериментальными данными об изменении длины волны отраженного сигнала и компонентой тензора деформаций в волокне вдоль его длины имеет место только при одноосном деформировании брэгговской решетки. Во встроенном в материал оптическом волокне реализуется сложнонапряженное состояние, в общем случае с тремя различными компонентами тензора деформаций $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$. В данном случае один из наиболее приемлемых вариантов получения значений измеряемых деформаций основан на использовании допущения об одноосном напряженном состоянии в оптическом волокне, то есть использовании формулы (4.4). При этом погрешность вносимая этим допущением устраняется введением калибровочных коэффициентов.

В настоящей работе рассматривается методика позволяющая для ВОД, встроенных в материал оценить погрешность вычисления деформаций на основе соотношения (4.4), а следовательно и получить значения калибровочных коэффициентов. В данной методике для моделирования, как и в предыдущем разделе статьи, рассматривается параллелепипед со встроенным оптическим волокном (рис. 7) при различных вариантах нагружения боковых граней нормальными усилиями. Для численных экспериментов выбран вариант представления ПКМ однородной средой с эффективными механическими характеристиками, приведенными в табл. 1. Рассмотрены варианты со смоляным карманом и без смоляного кармана. Механические характеристики и размеры оптического волокна такие же, как и в предыдущих численных экспериментах. Рассматриваемая методика включает следующую последовательность операций: при заданном варианте нагружения параллелепипеда вычисляются деформация $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ в

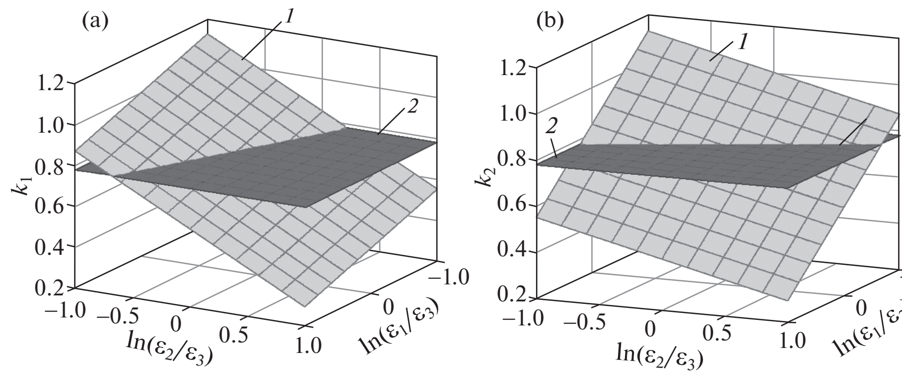


**Рис. 8.** Зависимости $k_1$ и $k_2$ от компонент тензора деформаций

волокне, при этом контролируется совпадение деформации $\varepsilon_3$ с соответствующей деформацией в зоне материала прилегающей к волокну; на основе вычисленных значений деформаций по формулам (4.2) вычисляются значения $\Delta\lambda_1/\lambda^*$, $\Delta\lambda_2/\lambda^*$, которые принимаются за экспериментальные данные; на основе найденных в численном эксперименте величин $\Delta\lambda_1/\lambda^*$, $\Delta\lambda_2/\lambda^*$ по соотношению (4.4) вычисляется деформация $\varepsilon_3^1 = \frac{1}{k}\cdot\frac{\Delta\lambda_1}{\lambda^*}$, и деформация $\varepsilon_3^2 = \frac{1}{k}\cdot\frac{\Delta\lambda_2}{\lambda^*}$. Полученные значения деформаций $\varepsilon_3^1$ и $\varepsilon_3^2$ принимаем за результаты эксперимента, который был численно промоделирован. Погрешность вычисления деформаций, связанная с использованием допущения об одноосном деформировании оптического волокна оценивается следующим образом.

$$\delta_1 = \frac{\varepsilon_3^1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_3}, \quad \delta_2 = \frac{\varepsilon_3^2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_3} \tag{4.5}$$

где $\varepsilon_3$ деформация вдоль волокна в зоне материала прилегающей к волокну. Значения деформаций $\varepsilon_3^1$ и $\varepsilon_3^2$ вычислены при значении коэффициента $k = 0.78$. Полученные результаты позволяют найти коэффициенты $k_1 = (\lambda_1/\lambda^*)/\varepsilon_3, k_2 = (\lambda_2/\lambda^*)/\varepsilon_3$, которые обеспечивают при использовании соотношения (4.4) достоверные значения деформаций $\varepsilon_3$. В данном случае коэффициенты $k_1$ и $k_2$ являются результатом умножения коэффициента $k$ на соответствующий калибровочный коэффициент. На рис. 8 представлены для рассматриваемого варианта ПКМ и оптического волокна зависимости $k_1$ и $k_2$ в координатах $\ln(\varepsilon_2/\varepsilon_3)$, $\ln(\varepsilon_1/\varepsilon_3)$ (поверхность 1 на рис. 8). Для наглядности на этих графиках приведена плоскость $k = 0.78$ (поверхность 2 на рис. 8).

Полученные результаты позволяют сделать заключение, что непосредственное использование брэгговской решетки на одномодовом оптическом волокне обеспечивает получение приемлемой информации о компоненте тензора деформаций вдоль волокна при условии, что датчик располагается в зоне материала, где данная компонента деформаций является преобладающей. В остальных случаях необходимы дополнительные меры для получения достоверных значений деформаций, в частности, использование калибровочных коэффициентов.

**Заключение.** В экспериментах с волоконно-оптическими датчиками на брэгговских решетках, встроенными в образцы из полимерных композиционных материалов, бетонов, полимерных материалов, получены результаты измерения существенно неоднародных полей деформаций, технологических деформаций в полимерных композиционных материалах, связанных с химическими процессами при формировании материала из жидкой в твердую фазу, технологических деформаций, возникающих при твердении цементной смеси при получении бетона, деформаций ползучести в полимерном материале. Рассмотрены возможности математического моделирования при решении задачи, связанной с перераспределением напряженно-деформированного состояния, возникающего при встраивании оптического волокна в полимерный композиционный материал. Для решения этой задачи приведена математическая модель при различных схемах представления ПКМ и с учетом технологического дефекта, возникающего при встраивании волокна в материал. Получены качественные и количественные результаты о напряженном состоянии в окрестности оптического волокна встроенного в один из вариантов ПКМ. Приведена методика численного анализа погрешности, возникающей при вычислении деформации на основе данных о физических величинах регистрируемых встроенным в ПКМ волоконно-оптическим датчиком на брэгговской решетке при использовании допущения об одноосном напряженном состоянии в этом датчике.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 19-77-30008).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Hill K.O., Fujii Y., Johnson D.C., Kawasaki B.S.* Photosensitivity in optical fiber waveguides: Application to reflection filter fabrication // Appl. Phys. Lett. 1978. V. 32. № 10. P. 647–649.
2. *Dasgupta A., Wan Y., Sirkis J.S.* Prediction of resin pocket geometry for stress analysis of optical fibers embedded in laminated composites // Smart Mater. Struct. 1992. V. 1. № 2. P. 101–107.
3. *Lammens N., Luyckx G., Voet E., Van Paepegem W., Degrieck J.* Finite element prediction of resin pocket geometry around embedded optical fiber sensors in prepreg composites // Compos. Struct. 2015. V. 132. P. 825–832.
4. *Shivakumar K., Bhargava A.* Failure Mechanics of a Composite Laminate Embedded with a Fiber Optic Sensor // J. Compos. Mater. 2005. V. 39. № 9. P. 777–798.
5. *Shivakumar K., Emmanwori L.* Mechanics of failure of composite laminates with an embedded fiber optic sensor // J. Compos. Mater. 2004. V. 38. № 8. P. 669–680.
6. *Silva J.M.A., Devezas T.C., Silva A.P., Ferreira J.A.M.* Mechanical Characterization of Composites with Embedded Optical Fibers // J. Compos. Mater. 2005. V. 39. № 14. P. 1261–1281.
7. *Zhou G., Sim L.M.* Damage detection and assessment in fibre-reinforced composite structures with embedded fibre optic sensors-review // Smart Mater. Struct. 2002. V. 11. № 6. P. 925–939.
8. *Al-Shawk A., Tanabi H., Sabuncuoglu B.* Investigation of stress distributions in the resin rich region and failure behavior in glass fiber composites with microvascular channels under tensile loading // Compos. Struct. 2018. V. 192. P. 101–114.
9. *Luyckx G., Voet E., Lammens N., Degrieck J.* Strain measurements of composite laminates with embedded fibre bragg gratings: criticism and opportunities for research // Sensors. 2011. V. 11. № 1. P. 384–408.
10. *Hadzic R., John S., Herszberg I.* Structural integrity analysis of embedded optical fibres in composite structures // Compos. Struct. 1999. V. 47. № 1–4. P. 759–765.
11. *Махсидов В., Федотов М., Шиенок А., Зуев М.* К вопросу об интеграции оптоволокна в ПКМ и измерении деформации материала с помощью волоконных брэгговских решеток // МКМК. 2014. Т. 20. № 4. С. 568–574.
12. *Ильичев А., Махсидов В., Шиенок А., Яковлев Н.* Измерение деформации углепластика с помощью интегрированных в его структуру волоконных брэгговских решеток // Механика композиционных материалов и конструкций. 2015. Т. 21. № 3. С. 360–369.
13. *Matveenko V.P., Shardakov I.N., Voronkov A.A., Kosheleva N.A., Lobanov D.S., Serovaev G.S., Spaskova E.M., Shipunov G.S.* Measurement of strains by optical fiber Bragg grating sensors embedded into polymer composite material // Struct. Control Heal. Monit. 2018. V. 25. № 3. P. e2118.

14. *Anoshkin A.N., Voronkov A.A., Kosheleva N.A., Matveenko V.P., Serovaev G.S., Spaskova E.M., Shardakov I.N., Shipunov G.S.* Measurement of inhomogeneous strain fields by fiber optic sensors embedded in a polymer composite material // Mech. Solids. 2016. V. 51. № 5. P. 542–549.
15. *Tretyakova T.V., Dushko A.N., Strungar E.M., Zubova E.M., Lobanov D.S.* Comprehensive analysis of mechanical behavior and fracture processes of specimens of three-dimensional reinforced carbon fiber in tensile tests // PNRPU Mech. Bull. 2019. № 1. C. 175–185.
16. *Matveenko V.P., Kosheleva N.A., Shardakov I.N., Voronkov A.A.* Temperature and strain registration by fibre-optic strain sensor in the polymer composite materials manufacturing // Int. J. Smart Nano Mater. 2018. V. 9. № 2. P. 99–110.
17. *Kosheleva N., Serovaev G.* Registration of the Creep Behavior by Embedded and Surface Mounted FOSS // IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng. 2019. V. 581. P. 012043.
18. *Czarnek R., Guo Y.F., Bennett K.D., Claus R.O.* Interferometric measurements of strain concentrations induced by an optical fiber embedded in a fiber reinforced composite // Fiber Optic Smart Structures and Skins / Ed. by *Udd E.* 1989. P. 43.
https://doi.org/10.1117/12.948886

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 6, с. 16–22

*УДК 539.3*

# О РАЗЛОЖЕНИИ РЕШЕНИЙ СКАЛЯРНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ПО БЛОЧНЫМ ЭЛЕМЕНТАМ


**В. А. Бабешко**[a,b,*], **О. В. Евдокимова**[a], **О. М. Бабешко**[b]

[a] *Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Россия*
[b] *Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия*
**e-mail: babeshko41@mail.ru*

Поступила в редакцию 01.03.2021 г.
После доработки 07.03.2021 г.
Принята к публикации 18.03.2021 г.

Ранее в работе авторов разработан метод сведения граничных задач механики сплошной среды для систем дифференциальных уравнений к граничным задачам для отдельных уравнений, называемых скалярными. Этот подход опирается на преобразование Б.Г. Галеркина для систем дифференциальных уравнений в частных производных и метод блочного элемента. В настоящей работе, основываясь на известных свойствах метода блочного элемента, развиваются три подхода, позволяющих реализовать применение метода блочного элемента к достаточно сложным скалярным граничным задачам. Впервые, по аналогии с экспоненциальной подстановкой, используемой в обыкновенных дифференциальных уравнениях с постоянными коэффициентами, в работе применяется блочная подстановка, позволяющая решать граничные задачи для уравнений в частных производных. В результате исследования искомые решения скалярных граничных задач представляются в виде суммы с помощью простейших блочных элементов, что значительно упрощает исследование получаемых точных решений.

*Ключевые слова:* блочный элемент, скалярные граничные задачи, бигармоническое уравнение, обратные операторы

**DOI:** 10.31857/S0572329921060027

**Введение.** В работе [1] авторами разработан интегродифференциальный метод сведения векторных граничных задач, то есть, описываемых системами дифференциальных уравнений в частных производных, к скалярным граничным задачам, описываемым лишь отдельными дифференциальными уравнениями в частных производных. В основе этого подхода лежит преобразование Б.Г. Галеркина [2, 3]. Оно успешно применялось во многих работах для исследования и решения векторных граничных задач механики сплошных сред, теории поля, математической физики и в других областях. Особо следует отметить применение этого подхода в работах [4–6]. Во всех этих работах метод применялся для исследования и решения граничных задач в классических областях, к которым относятся полупространство, слоистые области, области, которые формируются в результате построения представлений групп преобразований пространства – цилиндры, сферы, и другие подобные области [7–9]. Области, отличающиеся от вышеназванных, относятся к неклассическим областям. Простейшей плоской неклассической областью, является прямоугольный клин, то есть первый квадрант в плоской декартовой системе координат. Являясь неклассической областью, она характеризуется тем, что ее границы уходят на бесконечность, что создает сложности для применения численных методов. Таким образом, исследованием точного обращения граничных задач в этой области, одновременно выявляются и особенности свойств решений в ней. Так, точные решения граничных задач методом блочного элемента позволили выявить новый тип землетрясений, названных стартовыми, обнаружить ранее не описанный новый тип трещин, дополняющих трещины Гриффитса, изучить субдукционные процессы и цунами, исследовать акустические свойства среды в сложных областях [10–16]. Метод блочного элемента оказался удобным и для исследования сред сложных реологий в неклассических областях за счет преобразований векторных граничных задач в скалярные. В качестве примера, система двумерных динамических уравнений Ламе в первом квадранте [1] сведена к решению уравнений Гельмгольца относительно двух функций. Более сложные, а именно, бигармонические уравнения, возникают при сведении преобразованием Б.Г. Галеркина векторной системы уравнений Ламе к скалярным уравнениям [4]. Бигармонические уравнения имеют и самостоятельный интерес, описывая поведение поверхности пластин Кирхгофа в статическом и динамическом случаях [17, 18].

Практика прямого решения сложных граничных задач методом блочного элемента показала, что разложение решения по простым, по сложности, блочным элементам предпочтительнее прямого решения исходной граничной задачи этим методом [1, 19]. В настоящей работе излагаются три подхода, которые могут реализовываться с применением метода блочного элемента. Обсуждаются их аналоги в сравнении с известными классическими подходами. В зависимости от поставленных задач, можно ориентироваться на тот или иной подход при проведении исследования.

**1. Постановка задачи и методы решения.** В качестве примера рассматривается граничная задача для уравнения Ламе в [4] в области $\Omega$, в первом квадранте прямоугольной декартовой системы координат при некоторых ненулевых гармонических во времени граничных условиях

$$\begin{gathered} L_{mn}(u_n) = 0, \quad L_{mn} = \delta_{mn}\Delta + \sigma\partial_m^2\partial_n^2 - p, \\ m, n, = 1, 2, 3, \quad \sigma = \mu^{-1}(\lambda + \mu), \quad \partial_m^h = \frac{\partial^h}{\partial x_m^h}, \end{gathered} \tag{1.1}$$

$\delta_{m,n}$ – символ Кронекера, $\Delta$ – Лапласиан

$$\Delta = (\partial_1^2 + \partial_2^2)$$

Осуществим преобразование Б.Г. Галеркина, положив [4]

$$u_1 = \begin{vmatrix} \chi_1 & L_{12} & L_{13} \\ \chi_2 & L_{22} & L_{23} \\ \chi_3 & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix}, \quad u_2 = \begin{vmatrix} L_{11} & \chi_1 & L_{13} \\ L_{21} & \chi_2 & L_{23} \\ L_{31} & \chi_3 & L_{33} \end{vmatrix}, \quad u_3 = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \chi_1 \\ L_{21} & L_{22} & \chi_2 \\ L_{31} & L_{32} & \chi_3 \end{vmatrix}$$

и обозначив $T_i = \Delta\chi_i$. Тогда система уравнений (1.1) приводится к бигармоническим уравнениям относительно функций Галеркина $T_i$
вида

$$(\Delta\Delta - k^2)T_i = 0, \quad k = \text{const}$$

Дополнительным исследованием определяются для функций $T_i$ граничные условия, исходя из заданных первоначально.

Другой пример дает граничная задача об изгибе прямоугольной пластины при гармонических воздействиях на ее границы [17, 18]ю

В дальнейшем рассматривается двумерная скалярная граничная задача для бигармонического уравнения в области первого квадранта при задании на границе гармонически изменяющихся функций и первых нормальных производных к границам

$$Lu = (\partial_1^4 + 2\partial_1^2\partial_2^2 + \partial_2^4 - k^2)u = 0, \quad k^2 = \rho h^{-2}\omega^2 12(1-\nu^2)E^{-1}$$
$$u_1(x_1,0) = g_1(x_1,0), \quad \partial_2^1 u(x_1,0) = b_1(x_1,0) \tag{1.2}$$
$$u_2(0,x_2) = g_2(0,x_2), \quad \partial_1^1 u_2(0,x_2) = b_2(0,x_2)$$

Введем оператор граничной задачи, приняв $\Omega$, то есть первый квадрант, за область его определения, а за внешние воздействия гармонические во времени вертикальные перемещения границ $ue^{-i\omega t}$ и такие же углы поворотов на границе. Здесь $\rho$ – погонная плотность материала, $h$ – толщина пластины, $\omega$ – частота гармонических воздействий на пластину, $\nu$ и $E$ – коэффициент Пуассона и модуль Юнга материала пластины соответственно.

Ниже рассматриваются подходы, которые, в зависимости от целей исследования, могут использовать метод блочного элемента, позволяющий успешно решать те граничные задачи, которые являются не совсем удобными для других методов.

**2. Прямой метод блочного элемента.** Метод блочного элемента можно применить непосредственно к уравнению граничной задачи (1.2). Используя алгоритм метода блочного элемента [1, 11, 19], включающего шаги внешней алгебры, внешнего анализа, фактор – топологии.

В случае задачи второго рода задаются функции и производные при $x_1 = 0$ и при $x_2 = 0$, а именно $u(0,x_2)$, $u(x_1,0)$, $\partial_1 u(0,x_2)$, $\partial_2 u(x_1,0)$.

Тогда можем реализовать этап алгоритма метода блочного элемента называемый "внешней формой". Он приводит к погружению граничной задачи в топологическое пространство и к дальнейшему построению внешней формы и функционального уравнения. В случае рассматриваемой скалярной задачи получается единственное функциональное уравнение вида

$$[(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 - k^2]U(\alpha_1,\alpha_2) = \omega(\alpha_1,\alpha_2)$$
$$\omega(\alpha_1,\alpha_2) = i\alpha_2 T_1(\alpha_1,0) + i\alpha_1 T_2(0,\alpha_2) - S_1(\alpha_1,0) - S_2(0,\alpha_2) - P_1(\alpha_1,0) - P_2(0,\alpha_2) \tag{2.1}$$
$$P(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbf{F}(\alpha_1,\alpha_2)p(x_1,x_2), \quad S_n = \mathbf{F}(\alpha_1,\alpha_2)s_n, \quad T_n = \mathbf{F}(\alpha_1,\alpha_2)t_n$$

Здесь введены внешняя форма $\omega(\alpha_1,\alpha_2)$ после применения преобразования Фурье, и система обозначений

$$\partial_2^3 U(\alpha_1,0) + \partial_1^2\partial_2^1 U(\alpha_1,0) = S_1(\alpha_1,0), \quad \partial_2^2 U(\alpha_1,0) + \partial_1^2 U(\alpha_1,0) = T_1(\alpha_1,0)$$
$$\partial_1^3 U(0,\alpha_2) + \partial_1^1\partial_2^2 U(0,\alpha_2) = S_2(0,\alpha_2), \quad \partial_2^2 U(0,\alpha_2) + \partial_1^2 U(0,\alpha_2) = T_2(0,x_2)$$
$$[(-i\alpha_2)^2\partial_2^1 + (-i\alpha_1)^2\partial_1^1]U(\alpha_1,0) +$$
$$+ [(-i\alpha_2)^3 + (-i\alpha_1)^2(-i\alpha_2)]U(\alpha_1,0) = P_1(\alpha_1,0)$$
$$[(-i\alpha_2)^2\partial_2^1 + (-i\alpha_1)^2\partial_1^1]U(0,\alpha_2) +$$
$$+ [(-i\alpha_1)^3 + (-\alpha_2)^2(-i\alpha_1)]U(0,\alpha_2) = P_2(0,\alpha_2)$$

$\mathbf{F}(\alpha_1,\alpha_2)$ – оператор преобразования Фурье, $\alpha_1$, $\alpha_2$ – его параметры. Дальнейшее состоит в выполнении этапа внешнего анализа, включающего факторизацию коэффициента функционального уравнения, вычислении форм-вычетов Лере, построение псевдодифференциальных уравнений и их решений. Решения псевдодифференциальных уравнений вносятся во внешние формы и позволяют получить представление решения граничной задачи в форме упакованного блочного элемента.

Общее представление решения граничной задачи, с учетом (2.1) имеет вид

$$u(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{R^2} \frac{\omega(\alpha_1,\alpha_2)}{[(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^2 - k^2]} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2$$

$R^2$ — двумерное пространство действительных чисел. Числитель под интегралом в решении обращается в нуль в определенных полюсах знаменателя, которые отбираются формами-вычетами Лере. Эти полюсы для носителя в области первого квадранта имеют вид

$$\alpha_{11+} = i\sqrt{\alpha_2^2 - k}, \quad \alpha_{12+} = i\sqrt{\alpha_2^2 + k}, \quad \alpha_{21+} = i\sqrt{\alpha_1^2 - k}, \quad \alpha_{22+} = i\sqrt{\alpha_2^2 + k}$$

Разрезы многозначных функций берутся из требования нахождения носителя граничной задачи в первом квадранте. Достоинством применения прямого метода к сложному уравнению (1.2) является компактная запись решения и возможность расширения постановки граничной задачи. Например, возможно на границе области $\Omega$ задавать не только нормальные производные для некоторых граничных условий, но также и косые производные.

Однако практика решения граничных задач прямым методом блочного элемента, выполненная, например, в [1, 19] показала, что для упрощения формул, предпочтительнее, если имеется возможность, строить решение граничной задачи, в виде разложения с помощью более простых блочных элементов.

**3. Расщепление операторов блочных элементов.** С целью построения разложения решения граничной задачи для сложного скалярного уравнения по более простым блочным элементам представим дифференциальное уравнение колебания пластины Кирхгофа в следующем виде

$$Lu - q = (\Delta\Delta - k^2)u - q \equiv (\Delta - k)(\Delta + k) - q \tag{3.1}$$

Здесь $q$ — приведенная нагрузка на плоскость пластины. Для исследования граничной задачи для уравнения (3.1) формально используем обратные операторы граничных задач. С их применением решение граничной задачи можно представить в одной из форм

$$u = (\Delta\Delta - k^2)^{-1}_{\partial\Omega} q, \quad u = (\Delta + k)^{-1}_{\partial\Omega}(\Delta - k)^{-1}_{\partial\Omega} q \tag{3.2}$$

Верхние индексы "—1" обозначают обратный оператор граничной задачи в первом квадранте. Нижний индекс $\partial\Omega$ подчеркивает наличие у плиты не нулевых граничных условий. Ради простоты будем рассматривать случай, когда в (3.1) принято $q = 0$.

Для этого случая предыдущее выражение представимо в виде

$$u = (\Delta\Delta - k^2)^{-1}_{\partial\Omega} = (\Delta + k)^{-1}_{\partial\Omega}(\Delta - k)^{-1}_{\partial\Omega} \tag{3.3}$$

Тогда расщепляющие обратные операторы строятся в результате решения граничных задач

$$\begin{gathered}(\Delta - k)w = 0, \quad (\Delta + k)v = w \\ w(x_1, 0) = g_1(x_1, 0) \quad w(0, x_2) = g_2(0, x_2) \\ \partial_1 v(x_1, 0) = b_1(x_1, 0) \quad \partial_2 v(0, x_2) = b_2(0, x_2)\end{gathered}$$

Расщепив оператор, решаем последовательно две граничные задачи.

$$w(x_1, x_2) = (\Delta - k)^{-1}_{\partial\Omega}, \quad u(x_1, x_2) = (\Delta + k)^{-1}_{\partial\Omega} w(x_1, x_2)$$

Решение $w(x_1, x_2)$ первой граничной задачи в первом квадранте построено во многих работах [14—16]. В случае задачи Дирихле оно представимо в виде упакованного блочного элемента вида

$$\begin{gathered}w(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2} \frac{\omega_1(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + k)} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} i d\alpha_1 d\alpha_2 \\ \omega_1(\alpha_1, \alpha_2) = \langle [G_1(\alpha_{11+}, 0) - G_1(\alpha_1, 0)](\alpha_2 - \alpha_{21+}) + \\ + [G_2(0, \alpha_{21+}) - G_2(0, \alpha_2)](\alpha_1 - \alpha_{11+})\rangle \\ w(x_1, 0) = g_1(x_1, 0) \quad w(0, x_2) = g_2(0, x_2)\end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь функции $b_1$, $b_2$ являются либо произвольными и будут определены позже, либо принятыми в (1.2).

Вторая граничная задачи оказывается неоднородной.

$$(\Delta + k)_{\partial\Omega} u(x_1, x_2) = w(x_1, x_2)$$

Для упрощения, приведем ее к однородной, сделав замену переменного

$$u(x_1, x_2) = v(x_1, x_2) + w_*(x_1, x_2) \tag{3.5}$$

Здесь $v(x_1, x_2)$ — новая неизвестная, а $w_*(x_1, x_2)$ — любое частное решение неоднородного уравнения. В частности, можно взять

$$w_*(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \frac{\omega_1(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + k)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k)} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} i d\alpha_1 d\alpha_2$$

В результате замены получается уравнение вида

$$(\Delta + k)_{\partial\Omega} v(x_1, x_2) = 0, \quad \partial_1 v(x_1, 0) = \varphi_1(x_1), \quad \partial_2 v(0, x_2) = \varphi_2(x_2)$$

Функции $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2)$ либо произвольные и определяются позже при удовлетворении граничных условий (1.2), либо уточняются при корректировке граничных условий в связи с введением частного решения (3.5).

Построим решение этой граничной задачи в форме упакованных блочных элементов в предположении задания на границе области $\Omega$ нормальных производных, имеем

$$v(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{R^2} \frac{\omega_2(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k)} e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$\omega_2(\alpha_1, \alpha_2) = \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_{21+}} - 1\right] \left\langle \Phi_2(0, \alpha_2) - \Phi_2(0, \alpha_{22+}) \frac{\alpha_2}{\alpha_{22+}} \right\rangle +$$
$$+ \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_{22+}} - 1\right] \left\langle \Phi_1(\alpha_1, 0) - \Phi_1(\alpha_{21+}, 0) \frac{\alpha_1}{\alpha_{21+}} \right\rangle$$
$$\Phi_k = \mathbf{F}\varphi_k$$

Отсюда, для функции $u(x_1, x_2)$ получаем представление,

$$u(x_1, x_2) = v(x_1, x_2) + w_*(x_1, x_2)$$

служащее для определения произвольных функций в граничных условиях из требования удовлетворения граничным условиям (1.2), если принимались произвольные функции в граничных условиях, либо они выполнятся автоматически в случае корректировки граничных условий частным решением (3.5).

**4. Метод подстановки.** Этот метод идентичен применению экспоненциальной подстановки в однородных обыкновенных дифференциальных уравнениях с постоянными коэффициентами. В этом методе строятся характеристические уравнения, доопределяющие параметры экспоненциальных подстановок. Затем берется их полная совокупность. Аналогичная ситуация возникает с блочными элементами в рассматриваемой граничной задаче для бигармонического уравнения в области $\Omega$, но уже для уравнения в частных производных в неклассической области. Из ранее изложенного следует, что блочные элементы с произвольными граничными условиями на границах области $\Omega$ являются собственными функциями бигармонического уравнения и представляют их полную систему.

Поэтому решение граничной задачи можно искать в виде.

$$u(x_1, x_2) = v(x_1, x_2) + w(x_1, x_2) \tag{4.1}$$

Более детальный анализ решений граничных задач позволил получить асимптотические представления поведения решений для блочных элементов вблизи границ. Они даются формулами

$$
\begin{gathered}
v(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B_2(\alpha_2) e^{i(\alpha_{11+} x_1)} e^{-i\alpha_2 x_2} d\alpha_2 \\
w(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_2(\alpha_2) e^{i(\alpha_{12+} x_1)} e^{-i\alpha_2 x_2} d\alpha_2, \quad 0 < x_1 \ll 1 \\
v(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B_1(\alpha_1) e^{i(\alpha_{21+} x_2)} e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1 \\
w(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_1(\alpha_1) e^{i(\alpha_{22+} x_2)} e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \quad 0 < x_2 \ll 1
\end{gathered} \tag{4.2}
$$

Имея их, уже не сложно получить точное решение граничной задачи для бигармонического уравнения в первом квадранте (1.2), составив с помощью функций $u(0, x_2)$, $u(x_1, 0)$, $\partial_1 u(0, x_2)$, $\partial_2 u(x_1, 0)$ следующие соотношения

$$
\begin{gathered}
u(0, x_2) = v(0, x_2) + w(0, x_2) \\
\partial_1 u(0, x_2) = \partial_1 v(0, x_2) + \partial_1 w(0, x_2) \\
u(x_1, 0) = v(x_1, 0) + w(x_1, 0) \\
\partial_2 u(x_1, 0) = \partial_2 v(x_1, 0) + \partial_2 w(x_1, 0)
\end{gathered}
$$

Применив преобразования Фурье к асимптотическим соотношениям (4.2) и вычислив предельные выражения на границах области $\Omega$, получим две системы уравнений, решения которых имеют вид

$$
\begin{gathered}
B_1(\alpha_2) = \Delta_2^{-1}\left[i\alpha_{22+} U(\alpha_1, 0) - \partial_2 U(\alpha_1, 0)\right] \\
B_2(\alpha_2) = \Delta_1^{-1}\left[i\alpha_{12+} U(0, \alpha_2) - \partial_1 U(0, \alpha_2)\right] \\
G_1(\alpha_2) = \Delta_2^{-1}\left[\partial_2 U(\alpha_1, 0) - i\alpha_{21+} U(\alpha_1, 0)\right] \\
G_2(\alpha_2) = \Delta_1^{-1}\left[\partial_1 U(0, \alpha_2) - i\alpha_{11+} U(0, \alpha_2)\right] \\
\Delta_1 = i(\alpha_{12+} - \alpha_{11+}), \quad \Delta_2 = i(\alpha_{22+} - \alpha_{21+})
\end{gathered}
$$

В результате подстановки найденных значений во внешнюю форму $\omega_1$ в (3.4) для $w(x_1, x_2)$, и в (3.4) с внешней формой $\omega_2$ для $v(x_1, x_2)$

$$
\begin{gathered}
\omega_2(\alpha_1, \alpha_2) = \langle [B_1(\alpha_{11+}, 0) - B_1(\alpha_1, 0)](\alpha_2 - \alpha_{21+}) + \\
+ [B_2(0, \alpha_{21+}) - B_2(0, \alpha_2)](\alpha_1 - \alpha_{11+}) \rangle \\
v(x_1, 0) = g_1(x_1, 0) \quad v(0, x_2) = g_2(0, x_2)
\end{gathered}
$$

получим по формуле (4.1) точное решение граничной задачи (1.2).

**Вывод.** В статье изложен последний этап, связанный с применением метода блочного элемента для исследования и решения ряда часто встречающихся граничных задач механики сплошных сред, теории поля, электродинамики для систем дифференциальных уравнений в частных производных, которые сводятся к отдельным уравнениям, осуществляемым преобразованием Б.Г. Галеркина. Граничные задачи для отдельных уравнений в частных производных, называемых скалярными, решаются методом блочного элемента без привлечения факторизации матриц-функций, что значительно упрощает изучение свойств решений. На примере исследования бигармонического уравнения продемонстрировано три разных подхода построения его решения методом блочного элемента, отмечены их достоинства и недостатки. Впервые, по аналогии с экспоненциальной подстановкой, используемой в обыкновенных дифференциальных уравнениях с постоянными коэффициентами, в работе установлена возможность применения блочной подстановки, позволяющей решать граничные задачи для уравнений в частных производных.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации госзадания на 2021 г. Минобрнауки, проект (FZEN-2020-0020), ЮНЦ РАН проект (00-20-13) № госрег. 01201354241, и при поддержке грантов РФФИ (19-41-230003), (19-41-230004), (19-48-230014), (18-05-80008).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Евдокимов В.С.* Метод блочного элемента в разложении решений сложных задач механики // ДАН. 2020. Т. 495. № 6. С. 34–38.
2. *Galerkin B.G.* Contribution a la solution generale du probleme de la theorie de lelastisitecas de trois-dimensions // C. R. Acad. Sci. 1930. V. 190. P. 1047–1048; 1931. V. 193. P. 568–571.
3. *Moisil G.C.* Asupra sistemelor de ecuatii cu derivate partiale lineare si cu coeficienti constanti // Bull. Sci. Acad. RPR. Ser. A. 1949. V. 1. P. 1–32.
4. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
5. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
6. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 162 с.
7. *Гельфанд И.М., Минлос З.А. и Шапиро З.Я.* (1958) Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М.: Физматлит, 1958. 368 с.
8. *Улитко А.Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наукова думка, 1979. 262 с.
9. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1985. 284 с.
10. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach// Acta Mech. 2018. V. 229. № 5. P. 2163–2175. https://doi.org/10.1007/s00707-017-2092-0
11. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On a mechanical approach to the prediction of earthquakes during horizontal motion of litospheric plates // Acta Mech. 2018. V. 229. P. 4727–4739.
https://doi.org/10.1007/s00707-018-2255-7
12. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On features of starting earthquakes at rigid contacts of lithospheric plates with the base // Acta Mech. 2020. V. 231. P. 5205–5212. https://doi.org/10.1007/s00707-020-02816-2
13. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* About earthquakes in subduction zones with the potential to cause a tsunami // J. Appl. Computat. Mech. 2020. V. 7. P. 1232–1241. https://doi.org/10.22055/JACM.2020.32385.2007
14. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Трещины нового типа и модели некоторых наноматериалов // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 5. С. 13–20.
15. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В., Евдокимов В.С., Уафа С.Б.* О ресурсах подшипников и о механике субдукционных процессов // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 3. С. 12–19.
16. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* К проблеме акустических и гидродинамических свойств среды, занимающей область трехмерного прямоугольного клина // ПМТФ. 2019. Т. 60. № 6. С. 90–96.
17. *Тимашенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
18. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1979. 560 с.
19. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Применение метода блочного элемента в одной граничной задаче академика И.И. Воровича // ДАН. 2020. Т. 493. С. 42–47.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021,
№ 6, с. 23–32

*УДК 539.3*

# НОВОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТРЕЩИНЕ В РАСТЯГИВАЕМОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ

**© 2021 г. В. В. Васильев[a,*], С. А. Лурье[a,b], В. А. Салов[a]**

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

[b] *Институт прикладной механики РАН, Москва, Россия*

**e-mail: vvvas@dol.ru*

Поступила в редакцию 17.03.2021 г.
После доработки 22.03.2021 г.
Принята к публикации 29.03.2021 г.

Рассматривается классическая плоская задача теории упругости о трещине в растягиваемой ортотропной упругой неограниченной плоскости, приводящая к сингулярному решению для напряжений в окрестности края трещины. Приводятся соотношения обобщенной теории упругости, включающие малый масштабный параметр. Уравнения обобщенной теории имеют более высокий порядок чем уравнения классической теории и позволяют устранить сингулярность классического решения. Масштабный параметр определяется экспериментально. Полученные результаты определяют влияние длины трещины на несущую способность пластины и сравниваются с результатами эксперимента для пластин из стеклотекстолита и углепластика.

*Ключевые слова:* теория упругости, неклассическая теория упругости, плоская задача о трещине в ортотропной пластине

**DOI:** 10.31857/S0572329921060167

**1. Введение – классическое решение задачи о трещине.** Рассмотрим неограниченную ортотропную пластину с трещиной длиной $2c$, находящуюся в условиях одноосного растяжения напряжением $\sigma_0$ (рис. 1). Напряженно-деформированное состояние пластины определяется классическим решением, полученным методом комплексных потенциалов [1]. Напряжения определяются равенствами

$$\sigma_x = -p^2 \operatorname{Re}\frac{Aw_1}{\sqrt{w_1^2 - c^2}} - q^2 \operatorname{Re}\frac{Bw_2}{\sqrt{w_2^2 - c^2}} \tag{1.1}$$

$$\sigma_y = \operatorname{Re}\frac{Aw_1}{\sqrt{w_1^2 - c^2}} + \operatorname{Re}\frac{Bw_2}{\sqrt{w_2^2 - c^2}} \tag{1.2}$$

$$\tau_{xy} = -p \operatorname{Im}\frac{Aw_1}{\sqrt{w_1^2 - c^2}} - q \operatorname{Im}\frac{Bw_2}{\sqrt{w_2^2 - c^2}} \tag{1.3}$$

Здесь $A$ и $B$ – некоторые постоянные коэффициенты, $w_1 = x + ipy$, $w_2 = x + iqy$, $p = 1/\sqrt{k_1}$, $q = 1/\sqrt{k_2}$ и $k_{1,2}$ связаны с корнями характеристического уравнения, соответствующего обобщенному бигармоническому уравнению плоской задачи, и выражаются через упругие постоянные ортотропного материала следующим образом:

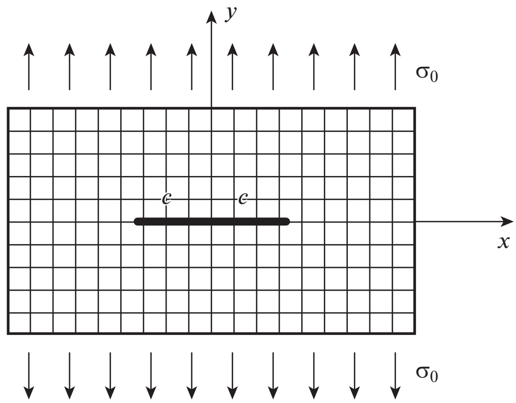


**Рис. 1.** Ортотропная пластина с трещиной

$$k_{1,2} = E_y\left(\frac{1}{2G_{xy}} - \frac{\nu_{yx}}{E_x}\right) \pm \sqrt{E_y^2\left(\frac{1}{2G_{xy}} - \frac{\nu_{yx}}{E_x}\right)^2 - \frac{E_y}{E_x}} \quad E_x\nu_{xy} = E_y\nu_{yx}$$

Примем $y = 0$ и рассмотрим интервал $-c < x < c$, соответствующий границам трещины (рис. 1). Из равенств (1.1), (1.2) следует, что на этом интервале $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Выражение (1.3) позволяет заключить, что условие $\tau_{xy} = 0$ на границе трещины выполняется если

$$pA + qB = 0 \tag{1.4}$$

При $|x| \to \infty$ напряжение $\sigma_y$ должно стремиться к $\sigma_0$ (рис. 1). Можно показать, что в пределе для любого луча $y = kx$ имеют место предельные соотношения

$$\lim_{x,y\to\infty} \frac{w_{1,2}}{\sqrt{w_{1,2}^2 - c^2}} = 1$$

В результате из условия $\sigma_y\left(|x| \to \infty\right) \to \sigma_0$ получим $A + B = \sigma_0$. Это условие совместно с уравнением (1.4) дает

$$A = -\frac{q\sigma_0}{p - q}, \quad B = \frac{p\sigma_0}{p - q} \tag{1.5}$$

Однако из равенства (1.1) следует, что при этих значениях коэффициентов $\sigma_x$ также стремится не к нулю, а к $\sigma_0$ при $|x| \to \infty$. Для устранения этого эффекта на напряженное состояние пластины, соответствующее рис. 1, следует наложить сжатие в направлении оси $x$ напряжением $\sigma_0$ [1]. Окончательно, из равенств (1.1)–(1.3) и (1.5) получим

$$\sigma_x = pq\sigma_0\left(\frac{p}{p-q}\operatorname{Re}\frac{w_1}{\sqrt{w_1^2 - c^2}} + \frac{q}{p-q}\operatorname{Re}\frac{w_2}{\sqrt{w_2^2 - c^2}} - 1\right)$$

$$\sigma_y = -\frac{\sigma_0}{p-q}\operatorname{Re}\left(\frac{qw_1}{\sqrt{w_1^2 - c^2}} - \frac{pw_2}{\sqrt{w_2^2 - c^2}}\right) \tag{1.6}$$

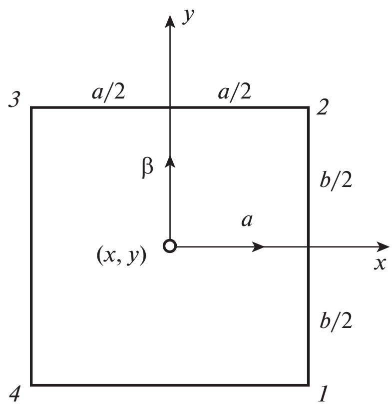


**Рис. 2.** Элемент пластины

$$\tau_{xy} = \frac{pq\sigma_0}{p-q}\operatorname{Im}\left(\frac{w_1}{\sqrt{w_1^2-c^2}} - \frac{w_2}{\sqrt{w_2^2-c^2}}\right)$$

На действительной оси при $y = 0$ и $x > c$ имеем

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{E_x}{E_y}}\sigma_0\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-c^2}} - 1\right) \tag{1.7}$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_0 x}{\sqrt{x^2-c^2}} \tag{1.8}$$

$$\tau_{xy} = 0$$

**2. Уравнения плоской задачи обобщенной теории упругости.** Обобщенная теория упругости позволяет получить регулярное решение задач, имеющих в рамках классической упругости сингулярное решение [2]. Для вывода соответствующих уравнений рассмотрим показанный на рис. 2 элемент, обладающий малыми, но конечными размерами $a$ и $b$. Введем локальные координаты $\alpha$ и $\beta$ такие, что $-a/2 \le \alpha \le a/2$, $-b/2 \le \beta \le b/2$. Симметричный тензор напряжений $t(t_x, t_y, t_{xy} = t_{yx})$ представим рядом Тейлора в окрестности точки $(x, y)$, т.е.

$$\begin{gathered} t(x, y; \alpha, \beta) = t(x, y) + \alpha\frac{\partial t}{\partial x} + \beta\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{1}{2!}\left(\alpha^2\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + 2\alpha\beta\frac{\partial^2 t}{\partial x\partial y} + \beta^2\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right) + \\ + \frac{1}{3!}\left(\alpha^3\frac{\partial^3 t}{\partial x^3} + 3\alpha^2\beta\frac{\partial^3 t}{\partial x^2\partial y} + 3\alpha\beta^2\frac{\partial^3 t}{\partial x\partial y^2} + \beta^3\frac{\partial^3 t}{\partial y^3}\right) \end{gathered} \tag{2.1}$$

Ограничимся членами представленными в равенстве (2.1) и найдем равнодействующие напряжений, действующих на гранях 1-2 и 3-4 элемента, показанного на рис. 2. Принимая $\alpha = \pm a/2$ и подставляя разложение (2.1), получим

$$R_{3-4}^{1-2}(t) = \int_{-b/2}^{b/2} t\,d\beta = b\left[t \pm \frac{a}{2}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{1}{8}\left(a^2\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{b^2}{3}\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right) \pm \frac{a}{48}\left(a^2\frac{\partial^3 t}{\partial x^3} + b^2\frac{\partial^3 t}{\partial x\partial y^2}\right)\right](x, y)$$

Здесь $t = t(t_x, t_{xy})$ и символ $(x, y)$ означает, что равнодействующие сил, действующих по граням 2-3 и 1-4 элемента получаются если взаимно заменить $x$, $y$; $\alpha$, $\beta$ и $a$, $b$. Уравнения равновесия элемента имеют вид

$$R_{1-2}(t_x) - R_{3-4}(t_x) + R_{2-3}(t_{yx}) - R_{1-4}(t_{yx}) = 0$$

$$R_{2-3}(t_y) - R_{1-4}(t_y) + R_{1-2}(t_{xy}) - R_{3-4}(t_{xy}) = 0$$

Подставляя сюда равнодействующие $R$, можно получить дифференциальные уравнения равновесия плоской задачи. Опуская дальнейшие преобразования, описанные в работе [2] для случая $a = b$, запишем уравнения равновесия в окончательной форме

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} = 0 \tag{2.2}$$

где

$$T(T_x, T_y, T_{xy}) = t - L(t), \quad L(f) = s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{2.3}$$

Здесь $T$ — обобщенное напряжение, выражающееся через традиционное напряжение по формулам (2.3), а $s$ и $r$ — структурные параметры выражающиеся через размеры элемента $a$ и $b$ [2].

По аналогии с обобщенными напряжениями введем обобщенные деформации (рис. 2)

$$E_{xx} = \frac{1}{ab} \int_{-b/2}^{b/2} [u_x(x, y; \alpha = a/2, \beta) - u_x(x, y; \alpha = -a/2, \beta] d\beta, \quad E_{xy} = \gamma_x + \gamma_y \quad (x, y)$$

$$\gamma_x = \frac{1}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} [u_x(x, y; \alpha, \beta = b/2) - u_x(x, y; \alpha, \beta = -b/2)] d\alpha \quad (x, y) \tag{2.4}$$

Здесь $u$ — перемещение точки $(x, y)$ (рис. 2). Предположим, что перемещения можно представить в окрестности точки $(x, y)$ разложениями аналогичными равенству (2.1). Тогда обобщенные деформации (2.4) принимают следующую окончательную форму:

$$E_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x}, \quad E_{yy} = \frac{\partial U_y}{\partial y}, \quad E_{xy} = \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \tag{2.5}$$

где

$$U(U_x, U_y) = u - L(u) \tag{2.6}$$

— обобщенное перемещение и $L$ — оператор, определяемый вторым равенством (2.3).

Для ортотропного материала обобщенные напряжения связаны с обобщенными деформациями следующим образом:

$$T_x = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \left( E_{xx} + \nu_{xy} E_{yy} \right) \quad (x, y), \quad T_{xy} = G_{xy} E_{xy} \tag{2.7}$$

При $r = s = 0$ соотношения (2.7) вырождаются в традиционный закон Гука. Упругие постоянные $E$, $\nu$, $G$ определятся из опытов, в которых напряженно-деформированное состояние материала является однородным. В этом случае оператор $L(f) = 0$ и обобщенные напряжения и деформации совпадают с традиционными. Таким образом, соотношения упругости (2.7) включают традиционные упругие постоянные. Кроме этого полученные соотношения содержат два структурных параметра $s$ и $r$, которые определяются экспериментально применительно к рассматриваемой задаче.

Уравнения (2.2), (2.5) и (2.7) по форме совпадают с соответствующими уравнениями классической теории упругости, только вместо традиционных напряжений и перемещений $t$ и $u$ включают обобщенные характеристики $T$ и $U$. В качестве решения системы (2.2), (2.5) и (2.7) можно использовать решение, соответствующее классической теории упругости, определяющее обобщенные напряжения и перемещения $T$, $U$. Традиционные напряжения и перемещения $t$, $u$ находятся в результате интегрирования уравнений Гельмгольца (2.3) и (2.6). Если классическое решение не имеет особенностей и согласуется с экспериментом, то $s = r = 0$ и обобщенное решение вырождается в классическое. Если классическое решение имеет особенность, то решение дополнительного уравнения Гельмгольца позволяет ее устранить.

**3. Обобщенное решение задачи о трещине.** Как следует из равенств (1.6), сингулярность решения проявляется на оси трещины при $x = c$. В связи с этим воспользуемся частной формой уравнений обобщенной теории упругости, полученных в предыдущем разделе, приняв $b = dy$, т.е. предположим, что размер элемента, показанного на рис. 2, является конечным в направлении оси $x$ и бесконечно малым – в направлении оси $y$. Тогда в полученных выше соотношениях необходимо принять $r = 0$. Как показано в работе [3] для изотропного материала, такой подход обладает удовлетворительной точностью по отношению к эксперименту и решению двумерной задачи [4]. Таким образом, уравнение (2.3) для напряжений $t_x = \sigma_x$ и $t_y = \sigma_y$ принимает вид

$$\sigma_x - s^2\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} = T_x, \quad \sigma_y - s^2\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2} = T_y \tag{3.1}$$

где в соответствие с равенствами (1.7) и (1.8)

$$T_x = \sqrt{\frac{E_x}{E_y}}\sigma_0\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - c^2}} - 1\right), \quad T_y = \frac{\sigma_0 x}{\sqrt{x^2 - c^2}} \tag{3.2}$$

Рассмотрим напряжение $\sigma_y$. Это напряжение не включает упругих постоянных, поэтому уравнение

$$\sigma_y - s^2\frac{d^2\sigma_y}{dx^2} = \frac{\sigma_0 x}{\sqrt{x^2 - c^2}}$$

аналогично соответствующему уравнению для изотропной пластины и его общее решение имеет вид [3]

$$\bar{\sigma}_y(\bar{x}) = C_1 e^{-\lambda\bar{x}} + C_2 e^{\lambda\bar{x}} + \frac{1}{2}\lambda\left(e^{-\lambda\bar{x}}\int_1^{\bar{x}}\frac{\bar{x}e^{\lambda\bar{x}}d\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 - 1}} - e^{\lambda\bar{x}}\int_1^{\bar{x}}\frac{\bar{x}e^{-\lambda\bar{x}}d\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 - 1}}\right)$$

Здесь $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_0$, $\lambda = c/s$ и $\bar{x} = x/c$. Условие регулярности решения при $\bar{x} \to \infty$ выполняется если принять

$$C_2 = \lambda\int_1^{\infty}\frac{\bar{x}e^{-\lambda\bar{x}}d\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 - 1}}$$

Определяя постоянную $C_1$ из условия на конце трещины $\bar{\sigma}_y(\bar{x} = 1) = 0$, окончательно получим следующее выражение для напряжения на оси $\bar{x}$ при $\bar{x} \geq 1$ :

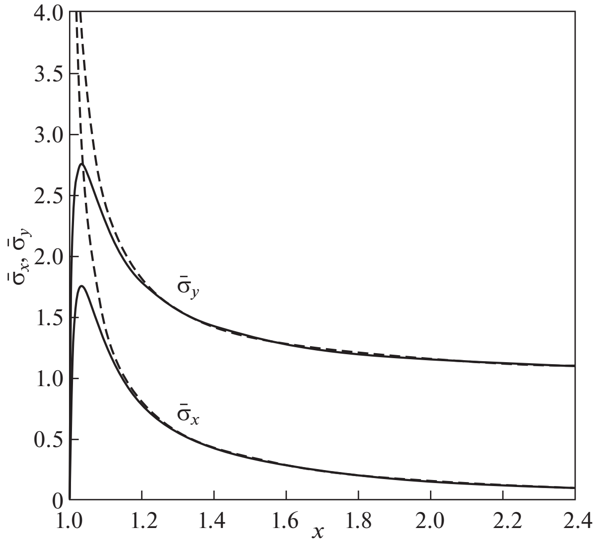


**Рис. 3.** Зависимость относительных напряжений от $\bar{x}$ при $\bar{x} \geq 1$

$$\bar{\sigma}_y(\bar{x}) = \frac{1}{2}\lambda\left(e^{-\lambda\bar{x}}\int_1^{\bar{x}}\frac{\bar{x}e^{\lambda\bar{x}}d\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2-1}} + e^{\lambda\bar{x}}\int_{\bar{x}}^{\infty}\frac{\bar{x}e^{-\lambda\bar{x}}d\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2-1}} - e^{\lambda(2-\bar{x})}\int_1^{\infty}\frac{\bar{x}e^{-\lambda\bar{x}}d\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2-1}}\right) \tag{3.3}$$

Решение первого уравнения (3.1) для $\sigma_x$ имеет вид

$$\bar{\sigma}_x = \sqrt{\frac{E_x}{E_y}}\left[\bar{\sigma}_y(\bar{x}) - \sigma_0\right] \tag{3.4}$$

Решения (3.3) и (3.4), в отличие от классических решений (1.7) и (1.8), не являются сингулярными. Зависимости напряжений $\bar{\sigma}_{x,y}$ от координаты $\bar{x} \geq 1$ при $\lambda = 50$ и показаны на рис. 3 сплошными линиями. Штриховые линии соответствуют классическому решению (1.7) и (1.8).

**4. Экспериментальное исследование.** Эксперимент проводился на пластинах из стеклотекстолита и углепластика, в которых направления армирования совпадают с осями $x$ и $y$ (рис. 1).

Упругие постоянные стеклотекстолита – $E_x = 23.6$ ГПа, $E_y = 27.5$ ГПа, $G_{xy} = 5.8$ ГПа, $\nu_{xy} = 0.1$, $\nu_{yx} = 0.116$. Пределы прочности при растяжении – $s_x = 340$ МПа и $s_y = 416$ МПа. Испытываемые пластины имели длину 250 мм, ширину 40 мм и толщину 1.12 мм. В середине продольного края растягиваемых пластин прорезались трещины с длиной 5, 10, 15 и 20 мм. Следует отметить, что эксперимент с боковой трещиной описывается здесь с помощью решения задачи о центральной трещине (рис. 1). Возможность такого подхода основана на асимптотическом анализе напряженного состояния вблизи конца трещины [5], согласно которому это состояние слабо зависит от условий нагружения вдали от трещины и формы трещины. На рис. 4 представлены диаграммы деформирования при растяжении пластин с трещинами различной длины в направлении оси $y$. Номера на кривых соответствуют длинам трещин в мм. Напряжение $\sigma_0$ измеряется в МПа, а величина $\Delta$ на горизонтальной оси определяет взаимное смещение в мм

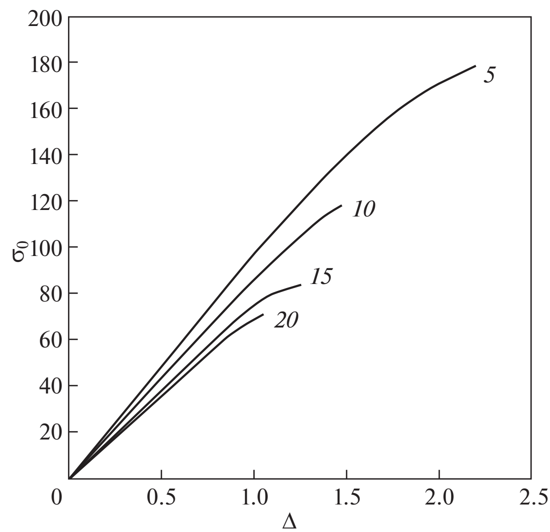


**Рис. 4.** Диаграмма деформирования пластин с трещинами различной длины

захватов испытательной машины на базе 175 мм. Максимальные напряжения, действующие в пластине вблизи трещины, представим следующим образом: $\sigma_x^m = k_x\sigma_o$ и $\sigma_y^m = k_y\sigma_0$, где $k_x$ и $k_y$ – коэффициенты концентрации напряжений в окрестности трещины. Используя решение (3.3) и (3.4) для экспериментальной пластины, можно построить зависимости $k_x$ и $k_y$ от параметра $\lambda$, показанные на рис. 5. Для оценки прочности пластины с трещиной используем квадратичный критерий прочности [6]

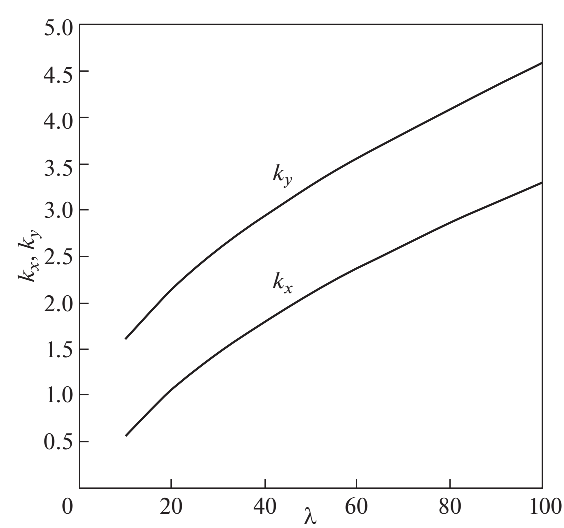


**Рис. 5.** Зависимости коэффициентов концентрации напряжений от параметра $\lambda$

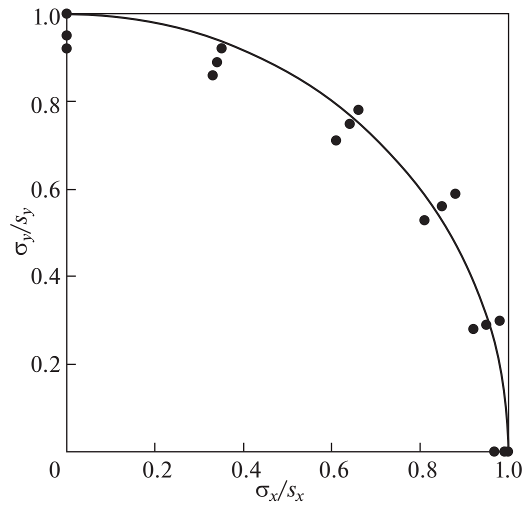


**Рис. 6.** Предельная кривая для стеклотекстолита (—) и результаты эксперимента (•)

$$\left(\frac{\sigma_x^m}{s_x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y^m}{s_y}\right)^2 = 1 \tag{4.1}$$

где $s_{x,y}$ – пределы прочности материала. Предельная кривая, соответствующая критерию (4.1), хорошо согласуется с экспериментом для стеклотекстолита (рис. 6). Выражая напряжения через коэффициенты концентрации и используя критерий (4.1), можно получить следующую зависимость для предельного напряжения, растягивающего пластину:

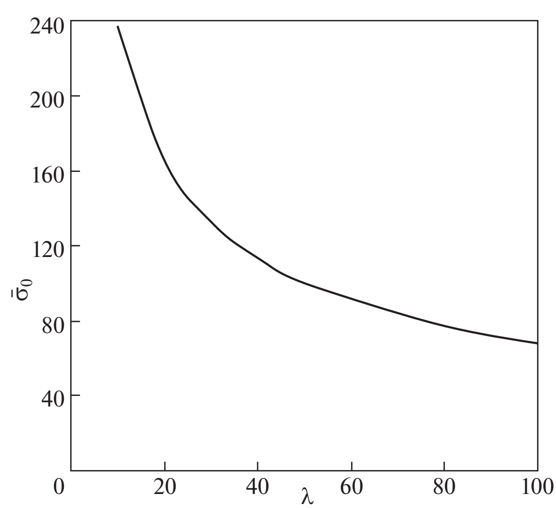


**Рис. 7.** Зависимость предельного напряжения $\bar{\sigma}_0$ [MPa] от параметра $\lambda$

**Таблица 1.** Расчетные и экспериментальные значения напряжений для пластин из стеклотекстолита с трещинами различной длины

| Длина трещины $c$, мм | Параметр $s$, мм | Параметр $\lambda$ | Расчетное предельное напряжение, МПа | Эксперим. предельное напряжение, МПа | Погрешность, % |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0.25 | 40 | 114 | 118 | 3.4 |
| 15 | 0.25 | 60 | 90 | 84 | 7.1 |
| 20 | 0.25 | 80 | 78 | 71 | 9.8 |

**Таблица 2.** Расчетные и экспериментальные значения предельного напряжения для пластин из углепластика с трещинами различной длины

| Длина трещины $c$, мм | Параметр $s$, мм | Параметр $\lambda$ | Расчетное предельное напряжение, МПа | Эксперим. предельное напряжение, МПа | Погрешность, % |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 0.27 | 22.2 | 523 | 549 | 4.7 |
| 9 | 0.27 | 33.3 | 432 | 441 | 2 |
| 12 | 0.27 | 44.4 | 370 | 353 | 4.8 |

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{k_x}{s_x}\right)^2 + \left(\frac{k_y}{s_y}\right)^2}}$$

Зависимость $\bar{\sigma}_0$, измеряемого в МПа, от параметра $\lambda$, построенная с помощью кривых, показанных на рис. 5, представлена на рис. 7.

Определение разрушающего напряжения $\bar{\sigma}_0$ осуществляется следующим образом. Для пластины с трещиной длиной 5 мм (кривая *5* на рис. 4) экспериментальное разрушающее напряжение составляет $\bar{\sigma}_0 = 179$ МПа. По графику на рис. 7 находим соответствующее значение параметра $\lambda = 20$ и масштабный коэффициент $s = c/\lambda = 0.25$ мм. Основная идея дальнейшего расчета заключается в том, что параметр $s$ считается не зависящем от длины трещины. Тогда для пластины с трещиной длиной 10 мм получим $\lambda = c/s = 40$ и из рис. 7 следует $\bar{\sigma}_0 = 114$ МПа. Соответствующий экспериментальный результат (кривая *10* на рис. 4) – $\bar{\sigma}_0 = 118$ МПа. Результаты расчета представлены в табл. 1.

Как следует из табл. 1, предлагаемый метод удовлетворительно предсказывает разрушающее напряжение для пластин с трещинами. Следует заметить, что в последней пластине, для которой погрешность достигает 10%, длина трещины составляет половину ширины пластины.

Пластины из углепластика имели специальную гибридную структуру – они были образованы из однонаправленного углепластика, прошитого в поперечном направлении стеклянными нитями. Упругие постоянные материала необходимые для расчета – $E_x = 14$ ГПа, $E_y = 75.2$ ГПа. Пределы прочности при растяжении – $s_x = 170.5$ МПа, $s_y = 1150$ МПа. Ширина образцов – 30 мм, толщина – 1.5 мм. На продольных кромках растягиваемых образцов наносились трещины длиной 3, 6, 9 и 12 мм. Поскольку прочность и жесткость пластин при растяжении в продольном направлении ($y$, рис. 1) намного больше соответствующих характеристик для поперечного направления ($x$), для оценки прочности пластин из рассматриваемого материала может быть использован критерий максимальных напряжений. В этом случае для определения коэффициента концентрации напряжения может быть использована кривая для $k_y$ на рис. 5. Расчет осуществляется методом, описанным выше. Для пластины с трещиной длиной 3 мм экспериментально получено предельное напряжение $\bar{\sigma}_0 = 690$ МПа, что соответствует коэффициенту концентрации напряжения $k_y = s_y/\bar{\sigma}_0 = 1.67$. По графику на рис. 5 находим $\lambda = 11$ и параметр $s = c/\lambda = 0.27$. Для пластины с длиной трещины 6 мм при найденной величине параметра $s$ имеем $\lambda = c/s = 22.2$, что соответствует $k_y = 2.2$ и предельному напряжению $\bar{\sigma}_0 = 523$ МПа. Соответствующее экспериментальное значение – $\bar{\sigma}_0 = 549$ МПа. Результаты расчетов представлены в табл. 2.

Таблица 2 подтверждает удовлетворительную точность метода.

**5. Заключение.** Таким образом, согласно предлагаемому методу, задача расчета пластины с трещиной сводится к традиционной задаче о концентрации напряжений. Для пластины с заданными упругими характеристиками и длиной трещины экспериментально определяется масштабный параметр $s$, который считается независимым от длины трещины и определяет коэффициент концентрации напряжений в окрестности конца трещины.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 19-01-00355.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
2. *Васильев В.В., Лурье С.А.* Обобщенная теория упругости // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2015. № 4. С. 16–27.
3. *Васильев В.В., Лурье С.А.* Новое решение плоской задачи о равновесной трещине // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2016. № 5. С. 61–67.
4. *Васильев В.В., Лурье С.А.* Новый метод исследования хрупких тел с трещинами // Деформация и разрушение материалов. 2019. № 9. С. 12–19.
5. *Васильев В.В., Лурье С.А., Салов В.А.* Исследование прочности пластин с трещинами на основе критерия максимальных напряжений в масштабно-зависимой обобщенной теории упругости // Физическая мезомеханика. 2018. Т. 21. № 4. С. 5–12.
6. *Гольденблат И.И., Копнов В.А.* Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 192 с.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021,
№ 6, с. 33–44

*УДК 531.3*

# СЕЙСМИЧЕСКИЕ БАРЬЕРЫ ДЛЯ ЗАЩИТЫ ОТ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ГОЛОВНЫХ ВОЛН: МНОЖЕСТВЕННЫЕ РАССЕИВАТЕЛИ И МЕТАМАТЕРИАЛЫ


**Н. Ф. Морозов[a,b], В. А. Братов[a,b,c,]*, С. В. Кузнецов[d,e,f]**

[a] *Институт проблем машиноведения РАН, Санкт Петербург, Россия*
[b] *СПб государственный университет, Санкт Петербург, Россия*
[c] *СПб политехнический университет Петра Великого, Санкт Петербург, Россия*
[d] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
[e] *Московский государственный технический университет им. Баумана, Москва, Россия*
[f] *Московский государственный строительный университет, Москва, Россия*
**e-mail: vladimir@bratov.com*

Поступила в редакцию 11.03.2021 г.
После доработки 18.03.2021 г.
Принята к публикации 29.03.2021 г.

Рассматриваются перспективные виды сейсмических барьеров, применяемых для защиты зданий и сооружений от воздействия поверхностных акустических волн Рэлея, Рэлея–Лэмба, Лява, а так же головных SP-волн. Барьеры построены на основе множественных рассеивающих элементов и метаматериалов. Приводится сравнение с традиционными типами гомогенных сейсмических барьеров, выполненных из упругих конструкционных материалов.

*Ключевые слова:* сейсмические волны, сейсмические барьеры, волны Рэлея, волны Рэлея–Лэмба, волны Лява, головные SP-волны

**DOI:** 10.31857/S057232992106009X

**1. Введение**. Сейсмические барьеры предназначены для защиты зданий и сооружений от сейсмических поверхностных волн различной этиологии, включая волны Рэлея, волны Рэлея–Лэмба (волны, распространяющиеся в слоистом полупространстве), волны Лява, а так же головные SP-волны. Последние представляют собой весьма опасный тип сейсмических волн, возникающих при короткофокусных землетрясениях и подземных взрывах [1–5]. В настоящей работе рассматриваются вертикальные сейсмические барьеры имеющие в своем составе как специальные рассеивающие элементы, так и метаматериалы, обладающие повышенной диссипацией волновой энергии.

Ниже дается обзор основных типов сейсмических волн, для защиты от которых требуются вертикальные сейсмические барьеры.

*1.1. Рэлеевские волны*. Рэлеевские волны являются наиболее распространенным и хорошо изученным типом поверхностных волн, возникающих в гомогенном упругом полупространстве. Эти волны характеризуются (i) скоростью распространения, независящей от частоты (отсутствие дисперсии); (ii) экспоненциальным затуханием амплитуд перемещений по глубине и локализацией энергии волны в относительно узком поверхностном слое, что позволяет этим волнам распространяться на значительно большие расстояния, по сравнению с объемными волнами [6, 7]; и (iii) соотношением между компонентами перемещений, при котором вертикальная компонента волны

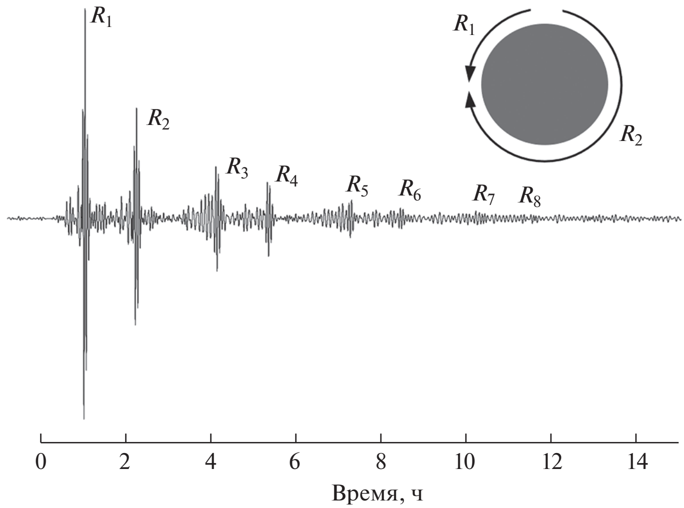


**Рис. 1.** Сейсмограмма прихода рэлеевской волны на станцию CMB, Berkeley Digital Seismic Network (BDSN), время наблюдения ~14 ч [8]

примерно в полтора раза больше горизонтальной [7]. Последнее обстоятельство делает этот тип волн особенно опасными для протяженных сооружений. Особенности, связанные с локализацией энергии этих волн в приповерхностном слое земной коры, приводят к тому, что рэлеевские волны могут огибать земной шар несколько раз, см. рис. 1, где приведена сейсмограмма прихода рэлеевских волн, обогнувших восемь раз земной шар [8].

В недавнем прошлом модель гомогенного полупространства широко применялась для исследования волновых процессов при землетрясениях и подземных взрывах; см. [9], где отмечается, что рэлеевские волны могут возникать и при глубокофокусных землетрясениях. Кроме того, эти волны генерируются движущимся рельсовым и автомобильным транспортом [10, 11]. В настоящее время в геофизических и геотехнических приложениях модель гомогенного полупространства заменяют на модели слоистых или функционально градиентных полупространств, в которых рассматривают распространение дисперсионных волн Рэлея–Лэмба [12].

*1.2. Волны Рэлея–Лэмба*. Следующий тип сейсмических волн – волны Рэлея–Лэмба, распространяющиеся в слоистом полупространстве. Отличительной чертой таких волн является дисперсия, т.е. зависимость скорости от частоты, если рассматриваются гармонические волны Рэлея–Лэмба, рис. 2.

Несмотря на весьма сложную дисперсионную картину, приведенную на рис. 2, с точки зрения сейсмических воздействий на сооружения от землетрясений, значительный интерес представляет так называемая вторая предельная фазовая скорость, определяемая, как соответствующий предел

$$c_{2,\lim} = \lim_{\omega\to 0} c(\omega) \tag{1.1}$$

где $c$-фазовая скорость, а $\omega$ – круговая частота. В слоистых системах для определения скорости $c_{2,\lim}$ применяют либо различные низкочастотные асимптотические методы [13–15], либо используют непосредственное вычисление по предельной формуле (1.1).

*1.3. Волны Лява*. Также, как и волны Рэлея–Лэмба, волны Лява представляют собой дисперсионные волны, распространяющиеся в системе упругое полупространство и

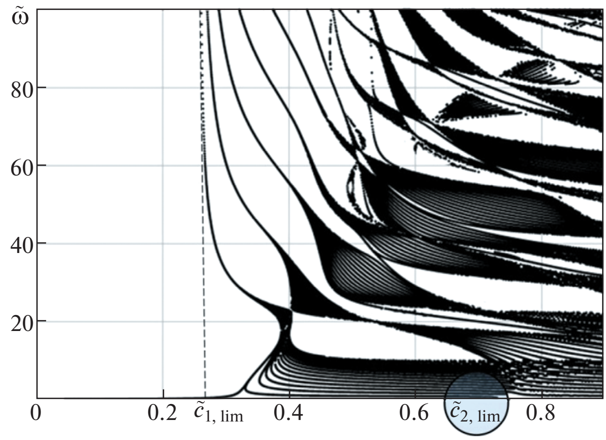


**Рис. 2.** Дисперсионные кривые для волн Рэлея–Лэмба в многослойном полупространстве: горизонтальная ось – фазовая скорость; вертикальная ось – круговая частота

контактирующий с ним упругий слой (или несколько слоев). Волны Лява имеют горизонтальную поперечную поляризацию и экспоненциально затухают с глубиной.

С точки зрения сейсмологии, волны Лява в основном представляют интерес в связи с микросейсмами малой амплитуды, генерируемыми волнами в океане [19, 20]. В то же время, при сильных землетрясениях амплитуды волн Лява не достигают значений, характерных для объемных S-волн и волн Рэлея–Лэмба [21, 22]. Тем не менее, вертикальные сейсмические барьеры могут применяться и для защиты от волн Лява [23, 24].

*1.4. Головные SP-волны.* Головные SP-волны распространяются параллельно свободной поверхности полупространства со скоростью P-волны, и возникают на некотором расстоянии $d_{ST}$ от эпицентра короткофокусного землетрясения или подземного взрыва, рис. 3. Это расстояние зависит от глубины источника $h$ и физических свойств среды [25–27], причем

$$d_{ST} = h \cdot \mathrm{tg}\left(\arcsin\left(\frac{c_S}{c_P}\right)\right) \tag{1.2}$$

где $c_S$ и $c_P$ – соответственно скорости поперечной и продольной объемных волн.

На рис. 3 волна $S_1$ падает на свободную поверхность, образуя отраженные волны: перечную ($SS_1$) и продольную ($SP_1$), аналогичным образом, волна $S_2$ падает на свободную поверхность, образуя отраженные волны ($SS_2$) и продольную ($SP_2$), последняя движется параллельно свободной поверхности, образуя головную волну. Угол, под которым падает волна $S_2$, называется критическим углом, он определяется следующим выражением [27]:

$$\alpha^* = \arcsin\left(\frac{c_S}{c_P}\right) \tag{1.3}$$

Поскольку головные или квазиголовные волны могут переносить значительную энергию, приводящую к катастрофическим разрушениям [1, 2], для защиты от этих волн требуются вертикальные сейсмические барьеры, аналогичные применяемым для защиты от волн Рэлея–Лэмба.

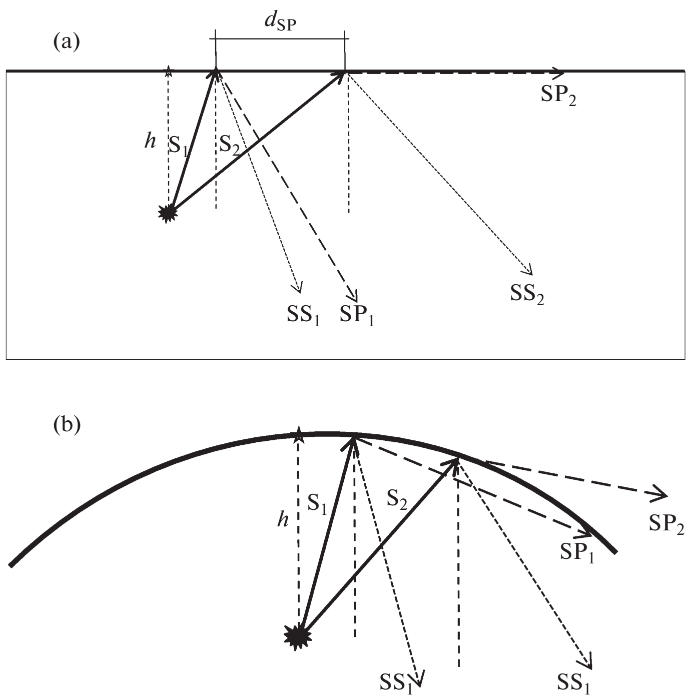


**Рис. 3.** Схемы возникновения головных волн: a) полупространство; b) часть сферической поверхности; $S_1$ и $S_2$ – поперечные волны, расходящиеся от гипоцентра землетрясения или подземного взрыва, $SP_2$ – (истинная) головная волна; на рис. 2,б волна $SP_1$ – квазиголовная

*1.5. Частотные диапазоны.* Для проектирования систем сейсмической защиты от рассматриваемых типов сейсмических волн, необходимы примерные оценки частотного диапазона, в котором локализована значительная доля сейсмической энергии.

По оценкам [28–31]в случае землетрясений естественной природы наиболее опасными для большинства зданий и сооружений, включая объекты атомной энергетики, являются частоты 2÷33 Гц с энергетическими пиками в районе 5÷7 Гц и 30÷33 Гц, рис. 4.

Землетрясения искусственного происхождения, вызванные подземными взрывами, отличаются, как правило, более высокими частотами [32, 33]. Например, по данным [32] на близких расстояниях от эпицентра регистрируются частоты вплоть до 250 Гц, ограниченные разрешающей способностью акселерометров, с увеличением расстояния, высокие частоты затухают, отдельные всплески обнаруживаются на частотах до 40 Гц, а максимум амплитуд регистрируется на частоте ~25 Гц.

*1.6. Скорости распространения сейсмических волн в верхних отделах земной коры.* Для выбора геометрических и физических параметров сейсмических барьеров помимо частоты сейсмических волн требуется знание скоростей распространения объемных и рэлеевских волн. По многочисленным экспериментальным исследованиям [34–36], скорости распространения сейсмических волн в верхних отделах земной коры имеют следующие значения, см. табл. 1.

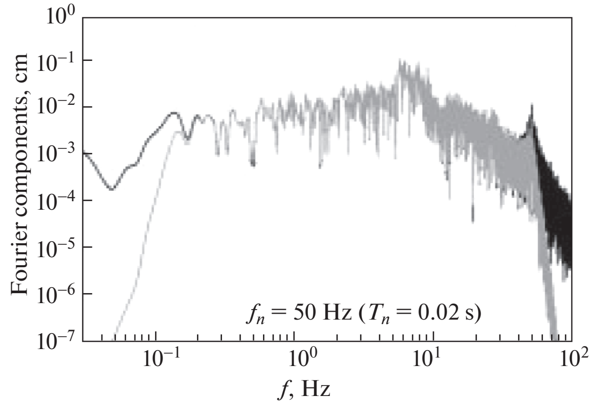


**Рис. 4.** Амплитудный спектр Фурье (FAS), станция Gebze-Arçelik, афтершок землетрясения Düzce (Турция) 11.11.1999 г. [29]

Скорость распространения рэлеевской волны может быть определена либо как корень уравнения Рэлея, либо по одной из приближенных формул [37, 38], при этом коэффициент Пуассона ν определяется по соответствующим скоростям объемных волн:

$$\nu = \frac{1}{2}\frac{c_P - 2c_S}{c_P - c_S} \tag{1.4}$$

*1.7. Математические модели для исследования вертикальных барьеров*. Обычно для моделирования сейсмических барьеров используют либо плоские конечноэлементные модели, связанные с численным решением внешней задачи Лэмба, в которой удается получить необходимую рэлеевскую волну, рис. 5,a, [23, 39, 40]; либо рассматривают решение более сложной внутренней задачи Лэмба, в которой наряду с рэлеевской волной удается смоделировать распространение головной SP-волны, см. рис. 5,b [27].

Ввиду более высоких требований к вычислительным ресурсам, значительно реже применяют пространственные модели для решения задачи Лэмба с барьером, см. [41]. В случае, когда необходим учет упругой анизотропии полуплоскости или полупространства, для решения задач Лэмба могут применяться методы граничных интегральных уравнений с построением соответствующих фундаментальных решений [42–44].

*1.8. Уравнения состояния для описания динамического деформирования гранулированных метаматериалов*. Для описания поведения гранулированных метаматериалов при действии динамических нагрузок, обычно применяют уравнения бимодульной теории упругости при деформировании в упругой зоне [45–47]

$$\boldsymbol{\sigma} = \nabla_{\varepsilon}\Psi(I_{\varepsilon}, II_{\varepsilon}, III_{\varepsilon}) \tag{1.5}$$

**Таблица 1.** Скорости распространения объемных волн в породах земной коры

| Породы | Скорость P-волны, м/с | Скорость S-волны, м/с |
|---|---|---|
| Флювиальные | 1400 | 200 |
| Аллювиальные | 1500 | 250 |
| Морены | 2000 | 700 |
| Корневые породы | 4000 | 2500 |

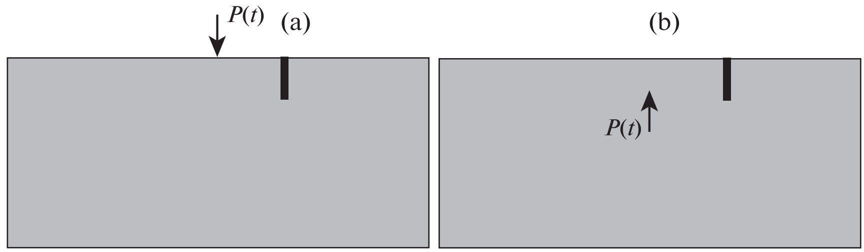


**Рис. 5.** (a) Внешняя и (b) внутренняя задачи Лэмба с вертикальными барьерами

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформаций; $\Psi$ – скалярный гиперупругий потенциал; $I_{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $II_{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $III_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – соответствующие инварианты тензора деформаций, причем разномодульность может быть учтена потенциалом вида

$$\Psi(I_\varepsilon, II_\varepsilon^{\sim}) \equiv \alpha I_\varepsilon^2 + \beta II_\varepsilon^{\sim} + \gamma I_\varepsilon \sqrt{II_\varepsilon^{\sim}} \tag{1.6}$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ – упругие постоянные, не зависящие от тензорных инвариантов деформаций. Волны в нелинейных средах, описываемых потенциалами вида (1.6) исследовались в [47, 48].

В случае, когда девиаторные составляющие тензора напряжений достигают поверхности пластичности, применяют уравнения пластического течения, причем наряду с моделями Мора–Кулона и Дракера–Прагера используют модели критического состояния, например кэм-клей-модели [49–51], см. также [52] по метаматериалам, обладающим свойствами фононных кристаллов. С точки зрения сейсмической защиты от рассматриваемых поверхностных волн значительный интерес представляют метаповерхности [53].

**2. Расчетные модели**. К сожалению, для большинства задач волновой механики отсутствует возможность получения точных аналитических решений уравнений, описывающих поведение системы. Точные аналитические решения известны только для узкого круга задач с предельно простой геометрией (см. например, [54] для практически исчерпывающего списка доступных решений). Такие решения, как правило, не применимы для анализа реальных задач, но могут применяться для валидации и оценки точности разработанных численных моделей. В большинстве случаев поставленную задачу можно решать только численно с использованием приближенных методов решения получаемых систем дифференциальных уравнений (см. напр. [55]).

С использованием численного метода будем решать задачу о взаимодействии набегающей динамической волны в упругой полуплоскости с включением, представляющим вертикальный сейсмический барьер (см. рис. 5). Будем оценивать эффективность того или иного типа сейсмических барьеров (рис. 6,b и 6,c) по уменьшению амплитуд перемещений и ускорений в точках поверхности за сейсмическим барьером по сравнению с решением аналогичной задачи для полуплоскости без сейсмического барьера (рис. 6,a).

Будут рассмотрены различные комбинации упругих свойств сейсмического барьера и расположенных на барьере метаструктур и различные геометрии метаструктур.

*2.1 Модельная задача о распространении упругой волны в упругой полуплоскости*. Поставленную задачу будем решать численно, с использованием метода конечных элементов. Решения будут получены с использованием коммерческого пакета ANSYS [57]. На первом этапе решим задачу о распространении волны в упругом полупространстве (рис 6,a). Волна возбуждается при помощи возмущения, приложенного на поверхности, на некотором расстоянии от точки, в которой будем производить изме-

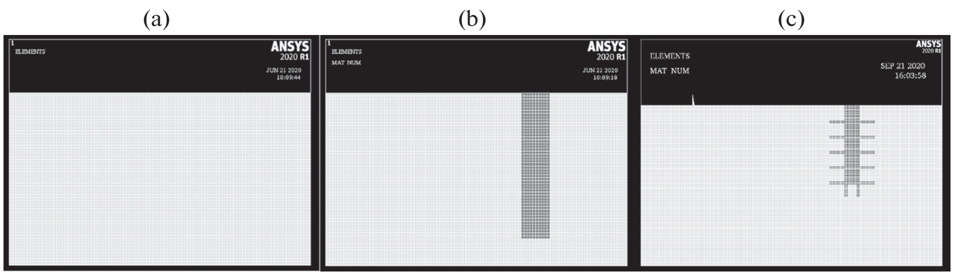


**Рис. 6.** (a) Упругое полупространство без защитного барьера, (b) упругое полупространство с защитным барьером и (c) упругое полупространство с барьером с метаструктурами

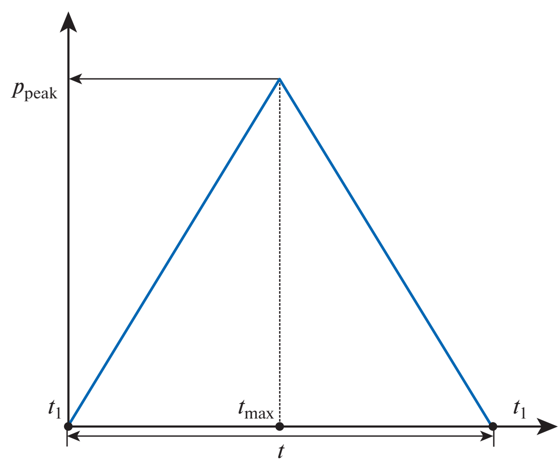


**Рис. 7.** Временной профиль амплитуды сосредоточенной силы, действующей на границу полуплоскости

рение возникающих амплитуд перемещений и ускорений. Профиль зависимости интенсивности действующей силы от времени представлен на рис. 7.

На поверхности, на некотором расстоянии от точки приложения силы, получим зависимости перемещений и ускорений по обеим осям от времени. Для данной простой задачи решение возможно получить аналитически, вычислив свертку решения для δ-функции по времени и пространству и силы, приложенной на поверхности (рис. 7). Такая задача обычно называется двумерной внешней задачей Лэмба и ее аналитическое решение известно (см. например, [58]). Для валидации получаемого численного решения, сравним получаемые зависимости для перемещений с вычисленными аналитически. На рис. 8 представлен получаемый временной профиль перемещения для вертикальной координаты, вычисленный численно, в сравнении с аналитическим точным решением. Как видно из представленных графиков, численное решение достаточно хорошо повторяет точное аналитическое решение. Таким образом, можно сделать вывод о применимости и достаточной точности полученного численного решения для решения исследуемого класса задач.

Далее, получим максимальные (по времени) амплитуды перемещений и ускорений по обоим направлениям. Далее данные величины будут использоваться для нормализации при определении защитного коэффициента различных типов барьеров и защит-

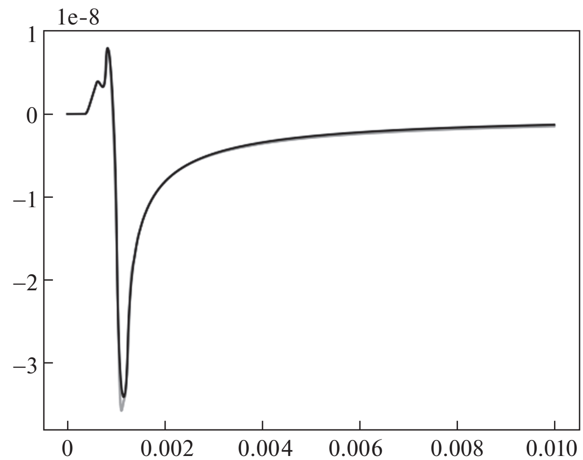


**Рис. 8.** Временной профиль перемещения для вертикальной координаты. Сравнение численного (серая линия) и точного аналитического решения (черная линия)

ных метаструктур. Для использованных параметров воздействия (длительность 450 микросекунд, максимальная амплитуда 1000 Н) и свойств среды, принятых равным типичным для грунта (Модуль Юнга, E = 10 МПа, коэффициент Пуассона Nu = 0.35, плотность 2000 кг/м$^3$) полученные максимальные значения амплитуды перемещений и ускорений по двум направлениям представлены в табл. 2.

Далее будем использовать данные амплитуды для нормализации и определения коэффициента защиты для различных типов барьеров.

Кроме того, исследуем зависимость максимальной амплитуды возникающих перемещений и ускорений от расстояния от точки приложения нагрузки. Такие оценки возможно провести как аналитически, с использованием точного решения, так и с использованием разработанной численной конечноэлементной модели. На рис. 9 представлена зависимость максимальной амплитуды возникающих горизонтальных перемещений в условиях решаемой задачи.

Как видно из данных представленных на рис. 9, численное решение хорошо повторяет точное аналитическое решение, что еще раз свидетельствует о применимости разработанной модели для анализа решаемого класса задач. Кроме того, полученные зависимости максимальных амплитуд перемещений и ускорений далее будут применяться для анализа так называемых “зон тени” – областей за защитными барьерами, в

**Таблица 2.** Скорости распространения объемных волн в породах земной коры

| | |
|---|---|
| Максимальное значение ускорения по горизонтальной оси | 72.3 м/с$^2$ |
| Минимальное значение ускорения по горизонтальной оси | –43.9 м/с$^2$ |
| Максимальное значение ускорения по вертикальной оси | 110.7 м/с$^2$ |
| Минимальное значение ускорения по вертикальной оси | –104.7 м/с$^2$ |
| Максимальное значение перемещения по горизонтальной оси | 4.70E-07 м |
| Минимальное значение перемещения по горизонтальной оси | –1.40E-07 м |
| Максимальное значение перемещения по вертикальной оси | 1.20E-07 м |
| Минимальное значение перемещения по вертикальной оси | –7.50E-07 м |

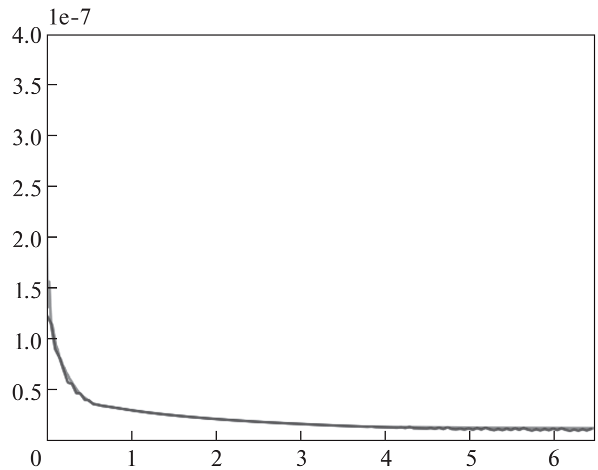


**Рис. 9.** Зависимость максимальной амплитуды возникающих на поверхности полуплоскости горизонтальных перемещений от расстояния от точки приложения нагрузки. Сравнение численного (серая линия) и точного аналитического решения (черная линия)

которых обеспечивается значительное уменьшение перемещений и ускорений, вызванных набегающими волнами сейсмической природы. Линейный размер “зоны тени”, обеспечиваемый тем или иным типом барьера, наряду с коэффициентом защиты, является одной из важнейших характеристик защитного сейсмического барьера.

Также на основе анализа зависимостей максимальных амплитуд перемещений и ускорений от расстояния от точки приложения нагрузки, можно провести оценку размеров области, вблизи точки приложения нагрузки, в которой важно влияние объемных волн.

*2.2. Более жесткий и менее жесткий барьер.* Далее аналогичная задача решалась для защитных сейсмических барьеров (рис. 6,b) выполненных из гораздо более жесткого (1 случай – модуль Юнга больше в 10 раз, плотность больше в 5 раз. 2 случай – модуль Юнга больше в 100 раз, плотность больше в 50 раз.) и гораздо менее жесткого (1 случай – модуль Юнга меньше в 10 раз, плотность меньше в 5 раз. 2 случай – модуль Юнга меньше в 100 раз, плотность меньше в 50 раз.) материалов. Для случая 1 типичные коэффициенты защиты барьеров (отношение максимального значения перемещения/ускорения в случае отсутствия барьера к аналогичному значению при использовании барьера) для выбранного случая составляют 1.5–3.0 для ускорений и примерно столько же для перемещений. В случае 2 типичные коэффициенты защиты барьеров для выбранного случая составляют 10–25 для ускорений и 1.5–3.0 для перемещений.

*2.3. Барьеры с метаструктурами.* Далее задача решалась для защитных сейсмических барьеров с интегрированными метаструктурами (рис. 6,c). Были рассмотрены различные комбинации упругих свойств барьеров и метаструктур. Кроме того, исследовано влияние количества и размера компонентов метаструктур на обеспечиваемые коэффициенты защиты.

Как показали проведенные расчеты, в некоторых случаях использование метаструктур, интегрированных в защитный сейсмический барьер позволяет значительно увеличить коэффициент защиты. В частности, для некоторых случаев (например, более мягкий (по отношению к среде) барьер с более жесткими (по отношению к среде) метаструктурами), коэффициенты снижения магнитуд могут достигать 30. Иными словами, при такой конфигурации нагрузки и защитного барьера, перемещения и ускорения в защищаемой области умещаются в 30 раз. В то же время, некоторые комбинации свойств барьера и защитных метаструктур не увеличивают коэффициент защиты по сравнению с барьером без метаструктур, либо даже немного уменьшают его. Можно сделать вывод о том, что для конкретных случаев свойств материала среды, возможных свойств и размеров защитного барьера и метаструктур необходимо проводить дополнительный анализ с целью выявления наиболее эффективных комбинаций защитного барьера для конкретного случая возможных воздействий сейсмической природы.

**3. Выводы.** Проведенными теоретическими и численными исследованиями установлено, что в рамках рассмотренных упругих моделей с помощью вертикальных сейсмических барьеров в виде метаструктур, удается значительно снизить магнитудные значения колебаний в защищаемой зоне, по сравнению с моногенными барьерами прямоугольной формы, причем уровень снижения колебаний в зонах тени за барьером оказывается существенно большим.

Кроме того, проведенные исследования указывают на существенное увеличение протяженности зоны тени, — это открывает перспективы применения метаструктурных сейсмических барьеров для защиты протяженных объектов, например, взлетных полос аэродромов, мостов, акведуков и т.п.

**Благодарность**. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант 20-49-08002.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cerveny V.* Seismic Ray Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
2. *Smith P.D., Hetherington, J.G.* Blast and Ballistic Loading of Structures. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1994.
3. *Nagy N., Mohamed M., Boot J.C.* Nonlinear numerical modelling for the effects of surface explosions on buried reinforced concrete structures // Geomech. Eng. 2010. V. 2. P. 1–18.
4. *Ibrahim Y.E., Nabil M.* Finite element analysis of pile foundations under surface blast loads // Proceedings of the 13th International Conference on Damage Assessment of Structures. Lecture Notes in Mechanical Engineering / Ed. by *Wahab M.* Singapore: Springer, 2020.
5. *Helmberger D.V., Malone S.D.* Modeling local earthquakes as shear dislocations in a layered half-space // J. Geophys. Res. 1975. V. 80. P. 4881–4888.
6. *Ben-Menahem A., Singh S.J.* Seismic Waves and Sources. 2nd edition. N.Y.: Dover Publications, 2000.
7. *Aki K., Richards P.G.* Quantitative Seismology. 2nd edition. University Science Books, 2009.
8. *Aki K.* Earthquake mechanism // Tectonophys. 1972. V. 13. P. 423–446.
9. *Kanamori H., Anderson D.L.* Theoretical basis of some empirical relations in seismology // Bull. Seismol. Soc. Am. 1975. V. 65. P. 1073–1095.
10. *Yang Y.B., Hung H.H., Chang D.W.* Train-induced wave propagation in layered soils using finite/infinite element simulation // Soil Dyn. Earthquake Eng. V. 23. Iss. 4. P. 263–278.
11. *Gunn D., Williams G., Kessler H., Thorpe S.* Rayleigh wave propagation assessment for transport corridors // Proceedings of the Institution of Civil Engineers – Transport. 2015. V. 168. № 6. P. 487–498.
12. *Kuznetsov S.V.* Abnormal dispersion of flexural Lamb waves in functionally graded plates // Z. Angew. Math. Phys. 2019. V. 70. Iss. 89. P. 1–8.
13. *Kaplunov J.D., Nolde E.V.* Long-wave vibrations of a nearly incompressible isotropic plate with fixed faces // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2002. V. 55. P. 345–356.
14. *Zakharov D.D., Castaings M., Singh D.* Numerical and asymptotic approach for evaluating complex wavenumbers of guided modes in viscoelastic plates // J. Acoust. Soc. Am. 2011. V. 130. P. 764–771.
15. *Kuznetsov S.V.* Cauchy formalism for Lamb waves in functionally graded plates // J. Vibr. Contr. 2019. V. 25. № 6. P. 1227–1232.
16. *Mallah M., Philippe L., Khater A.* Numerical computations of elastic wave propagation in anisotropic thin films deposited on substrates // Comp. Mater. Sci. 1999. V. 15. P. 411–421.

17. *Djeran-Maigre I. et al.* Solitary SH waves in two-layered traction-free plates // Comptes Rendus. Mech. 2008. V. 336. № 1–2. P. 102–107.
https://doi.org/10.1016/j.crme.2007.11.001
18. *Kuznetsov S.V.* Love waves in stratified monoclinic media // Quart. Appl. Math. 2004. V. 62. P. 749–766.
19. *Saito T.* Love-wave excitation due to the interaction between a propagating ocean wave and the sea-bottom topography // Geophys. J. Int. 2010. V. 182. P. 1515–1523.
20. *Gualtieri L., Camargo J.S., Pascale S., Pons F.M.E., Ekstrom G.* The persistent signature of tropical cyclones in ambient seismic noise // Earth Planet Sci. Lett. 2018. V. 484. P. 287–294.
21. *Ilyashenko A., Kuznetsov S.* SH waves in anisotropic (monoclinic) media // Z. Angew. Math. Phys. 2018. V. 69. № 17. P. 1–8.
https://doi.org/10.1007/s00033-018-0916-y
22. *Ekstrom G., Tromp J., Larson E.W.F.* Measurements and global models of surface wave propagation // J. Geophys. Res. 1997. V. 102. P. 8137–8157.
23. *Dudchenko A.V. et al.* Vertical wave barriers for vibration reduction // Arch. Appl. Mech. 2021. V. 91 P. 257–276.
https://doi.org/10.1007/s00419-020-01768-2
24. *Kuznetsov S.* Seismic waves and seismic barriers // Acoust. Phys. 2011. V. 57. № 3. P. 420–426.
25. *Kausel E., Manolis G. Wave Motion in Earthquake Engineering.* Southampton, UK: WIT Press. 1999.
26. *Angelsky O.V., Zenkova C.Y., Hanson S.G., Zheng J.* Extraordinary manifestation of evanescent wave in biomedical application // Front. Phys. 2020. V. 8. P. 159.
https://doi.org/10.3389/fphy.2020.00159
27. *Kuznetsov S.V., Terentjeva E.O.* Planar internal Lamb problem: Waves in the epicentral zone of a vertical power source // Acoust. Phys. 2015. V. 61. P. 356–367.
28. *Ambraseys N.N., Douglas J., Smit P., Sarma S.K.* Equations for the estimation of strong ground motions from shallow crustal earthquakes using data from Europe and the Middle East: horizontal peak ground acceleration and spectral acceleration // Bull. Earthquake Eng. 2005. V. 3. № 1. P. 1–35.
29. *Akkar S., Kale O., Yenier E., Bommer J.J.* The high-frequency limit of usable response spectral ordinates from filtered analogue and digital strong-motion accelerograms // Earthquake Eng. Struct. Dyn. 2011. V. 40. № 12. P. 1387–1401.
30. *Takewaki I.* Frequency-domain analysis of earthquake input energy to structure–pile systems // Eng. Struct. 2005. V. 27. № 4. P. 549–563.
31. *Takewaki I.* Response spectrum method for nonlinear surface ground analysis // Int. J. Adv. Struct. Eng. 2004. V. 7. № 6. P. 503–514.
32. *Li X., Li Z., Wang E., Liang Y., Niu Y., Li Q.* Spectra, energy, and fractal characteristics of blast waves // J. Geophys. Eng. 2017. V. 15. № 1. P. 81–92.
33. *Bahadori M., Amnieh H.B., Khajezadeh A.* A new geometrical-statistical algorithm for predicting two-dimensional distribution of rock fragments caused by blasting // Int. J. Rock Mech. Mining Sci. 2016. V. 86. P. 55–64.
34. *Uyanik O.* Estimation of the porosity of clay soils using seismic P- and S-wave velocities // J. Appl. Geophys. 2019. V. 170. № 103832. P. 1–8.
35. Recommended Provisions for Seismic Regulations for New Buildings and Other Structures. Part 1. Provisions (FEMA 450-2), 2003 Edition. Building Seismic Safety Council. Washington, D.C.: National Institute of Building Sciences, 2004.
36. *International Handbook of Earthquake and Engineering Seismology.* Part B / Ed. by *Lee W.H.K., Hiroo Kanamori H., Jennings P.C., Kisslinger C.N.Y.*: Academic Press, 2003.
37. *Pham ChiVinh, Malischewsky P.G.* An approach for obtaining approximate formulas for the Rayleigh wave velocity // Wave Motion. 2007. V. 44. P. 549–562.
38. *Mozhaev V.G.* Approximate analytical expressions for the velocity of Rayleigh waves in isotropic media and on the basal plane in high symmetry crystals // Sov. Phys. Acoust. 1991. V. 37. P. 186–189.
39. *Bratov V.A. et al.* Homogeneous horizontal and vertical seismic barriers: mathematical foundations and dimensional analysis // Mat. Phys. Mech. 2020. V. 44. № 1. P. 61–65.
https://doi.org/10.18720/MPM.4412020_7
40. *Kravtsov A.V. et al.* Finite element models in Lamb's problem // Mech. Solids. 2011. V. 46. P. 952–959.
https://doi.org/10.3103/S002565441106015X

41. *Pecker A.* Seismic analyses and design of foundation soil structure interaction // Perspectives on European Earthquake Engineering and Seismology. Geotechnical, Geological and Earthquake Engineering / Ed. by *Ansal A.* V. 39. Springer, 2015.
42. *Kausel E.* Lamb's problem at its simplest // Proc. Roy. Soc. Ser. A. London. 2012. V. 469. № RSPA-20120462. P. 1–44.
43. *Kuznetsov S.V.* Fundamental and singular solutions of Lamé equations for media with arbitrary elastic anisotropy // Quart. Appl. Math. 2005. V. 63. P. 455–467. https://doi.org/10.1090/S0033-569X-05-00969-X
44. *Sánchez-Sesma F., Iturrarán-Viveros U.* The classic Garvin's problem revisited // Bull. Seism. Soc. Am. 2006. V. 96 (4A). P. 1344–1351.
45. *Maslov V.P., Mosolov P.P.* General theory of the solutions of the equations of motion of an elastic medium of different moduli // J. Appl. Math. Mech. 1985. V. 49. P. 322–336.
46. *Maslov V.P., Antsiferova M.M.* Shock waves in a granular medium // Phys. Earth. Planet. Inter. 1988. V. 50 № 1. P. 8–15.
47. *Gavrilov S.N., Herman G.C.* Wave propagation in a semi-infinite heteromodular elastic bar subjected to a harmonic loading // J. Sound Vibr. 2012. V. 331. № 20. P. 4464–4480.
48. *Molinari A., Daraio Ch.* Stationary shocks in periodic highly nonlinear granular chains // Phys. Rev. E 2009. V. 80. № 056602. P. 1–15.
49. *Goldstein R.V. et al.* The modified Cam-Clay (MCC) model: cyclic kinematic deviatoric loading // Arch. Appl. Mech. 2016. V. 86. P. 2021–2031. https://doi.org/10.1007/s00419-016-1169-x
50. *Kuznetsov S.V., Maigre H.* Granular metamaterials for seismic protection. Hyperelastic and hypoelastic models // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1425. № 012184. P. 1–6. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1425/1/012184
51. *Nedderman R.M.* Statics and Kinematics of Granular Materials. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.
52. *Witarto W. et al.* Three-dimensional periodic materials as seismic base isolator for nuclear infrastructure // AIP Advances. 2019. V. 9. № 045014. P. 1–8.
53. *Wootton P.T., Kaplunov J., Colquitt D.J.* An asymptotic hyperbolic–elliptic model for flexural-seismic metasurfaces // Proc. R. Soc. A. 2019 V. 475. P.20190079. https://doi.org/10.1098/rspa.2019.0079
54. *Kausel E.* Fundamental Solutions in Elastodynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005. https://doi.org/10.1017/CBO9780511546112
55. *Bratov V.* Incubation time fracture criterion for FEM simulations // Acta Mech. Sinica. 2011. V. 27. № 4. P. 541–549. https://doi.org/10.1007/s10409-011-0484-2
56. *Kazarinov N., Bratov V., Petrov Y.* Modelling dynamic propagation of a crack at quasistatic loading // Dokl. Phys. 2014. V. 59. № 2. P. 99–102. https://doi.org/10.1134/S1028335814020116
57. ANSYS User's Guide, Release 2020 R1. ANSYS Inc., 2020. Pennsylvania, USA.
58. *Eringen A.C., Suhubi E.S.* Elastodynamics. V. 2. Linear Theory. New York: Academic Press, 1975.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 6, с. 45–54

*УДК 539.3, 624.9*

# МЕХАНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОДКРЕПЛЕННОЙ И ТРЕХСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ МЕТАМАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ПОВРЕЖДЕНИЙ


**Е. В. Ломакин[a,b], С. А. Юргенсон[b,*], Б. Н. Федулов[c,**], А. Н. Федоренко[c]**

[a] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[b] *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия*
[c] *Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия*
**e-mail: sjurg@yandex.ru*
***e-mail: fedulov.b@mail.ru*

Поступила в редакцию 08.03.2021 г.
После доработки 19.03.2021 г.
Принята к публикации 22.03.2021 г.

Традиционной конструкцией в авиационной технике является подкрепленная обшивка, которая для большинства конструкций представляет собой тонкую обшивку со стрингерным набором. В данной статье сравнивается поведение традиционной подкрепленной оболочки и конструкции из метаматериалов на основе разнесенных оболочек с подкрепленным набором на примере гермошпангоута магистрального самолета. Критерием оценки является обеспечение необходимого уровня остаточной прочности при достижении предельного состояния.

*Ключевые слова:* сферическая оболочка, трещиностойкость, модель развития трещины, подкрепленные оболочки

**DOI:** 10.31857/S0572329921060064

**1. Введение.** Оптимизация конструкции авиационной и космической техники является одним из основных направлений работы при проектировании. Целью оптимизации традиционно выступает вес конструкции, другим важным параметром обычно считается стоимость изготовления, но при этом также немаловажным фактором остаются требования к эксплуатационным расходам и ремонтопригодности. Факторы эксплуатационной технологичности могут выступать в том числе и в качестве главного критерия, т.к. суммарная стоимость эксплуатационных расходов и периодичность работ по обслуживанию авиационной техники могут значительно превысить привлекательность ее начальной стоимости.

Одним из элементов эксплуатационной технологичности является живучесть конструкции, т.е. способность конструкции выполнять задачи при наличии повреждений. Для авиационных конструкций основные требования к регламентированным повреждениям изложены в [1]. К таким повреждениям относятся:

– разрушение одного из элементов при многонаправленной передаче нагрузки;

– трещины в конструкции, в том числе разрушение стрингеров, поясов лонжеронов и других элементов;

– разрушение одного из элементов стыка;

– различные повреждения конструкций из композиционных материалов;

– коррозионные и ударные повреждения.

Данные повреждения необходимо учитывать при проектировании конструкции, при определении остаточной прочности и периодичности осмотров конструкции или локального места, где данное повреждение может возникнуть. Для обеспечения безопасной эксплуатации воздушного судна необходимо сформировать программу осмотров, которая определяет частоту проведения осмотров, условия их проведения и средства контроля. Периодичность осмотров определяется на основании оценки роста повреждения от минимального надежного обнаруживаемого размера до предельного.

Для конструкций из металлических материалов основным средством контроля являются визуальные средства контроля, поскольку во многих случаях развитие повреждения начинается с поверхности. Для композиционных конструкций развитие повреждений чаще начинается внутри материала, что приводит к необходимости применения большого количества инструментальных методов контроля и значительно увеличивает сроки проведения осмотров, а также негативно сказывается на стоимости жизненного цикла конструкции. Кроме того, наличие не обнаруживаемых повреждений накладывает дополнительные требования к прочности конструкции и повышает ее вес за счет снижения допустимых напряжений для обеспечения отсутствия роста повреждений.

В авиационной и космической технике применяются различные типы конструкций и материалов. Наиболее распространены два вида конструкций – подкрепленные оболочки и трехслойные конструкции (конструкции с сотовым заполнителем). Большой вклад в разработку таких конструкций, в том числе и сферических оболочек, которые встречаются в ракетной технике, внес Феодосьев В.И. [2]. Им были рассмотрены самые разнообразные задачи о прочности и предельных состояниях, некоторые динамические задачи [3, 4].

Подкрепленные панели либо оболочки состоят из тонкой обшивки и подкрепляющего силового набора, которые обеспечивают изгибную жесткость и повышают критические напряжения (сопротивляемость потере устойчивости).

Конструкции с сотовым или пенопластовым заполнителем имеют ряд недостатков, которые ограничивают объем их применения. К ним относятся повышенные требования к параметрам технологического процесса, наличие внутренних дефектов и их развитие в процессе эксплуатации, сложность в проектировании стыковочных зон.

Для минимизации недостатков сотовых конструкций разрабатываются различные варианты с периодическими структурами, которые бы позволили снизить вес конструкции при достижении необходимых характеристик прочности и жесткости конструкции. Одним из таких решений является конструкция А.И. Ендогура и др. [5, 6] с объемно-стержневым заполнителем, пирамидальным или вафельным заполнителем. Варианты разработанных конструкций представлены на рис. 1. Данная конструкция включает в себя обшивку и жесткие подкрепляющие элементы. Авторы при этом указывают на сложность изготовления таких конструкций, которые близки по своему строению к костным тканям человека, что может считаться одним из факторов оптимальности такой конструкции с точки зрения восприятия нагрузок.

Был разработан объемный заполнитель с типовым элементом в форме трех- или четырехугольной призмы, который изготовляется методом штамповки из листа с вырезанными отверстиями заданной формы [7]. Гайнудинов В.Г. и Александров А.Я. разработали вариант заполнителя, который заключается в вырезании из листа зигзагообразных заготовок с последующим их соединением с обшивками через шипы [8].

Данные решения обеспечивают изготовление объемно-стержневого заполнителя с учетом применения традиционных технологических решений, но при этом суммарная трудоемкость производства таких панелей выше, чем для панелей с сотовым заполни-

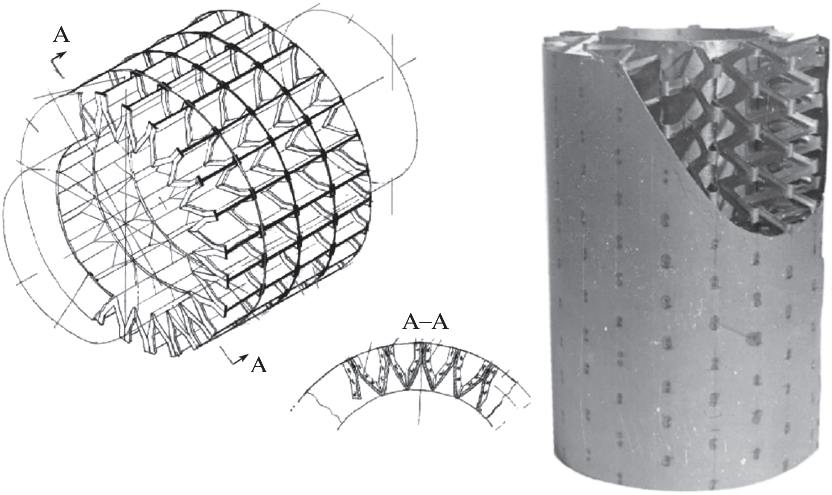


**Рис. 1.** Конструкции объемно-стержневых заполнителей А.И. Ендогура

телем. Отдельно необходимо упомянуть конструкции Васильева В.В., изготавливаемые из композиционных материалов, и представляющие собой сетчатую конструкцию, которая обеспечивает достаточно эффективные условия работы армирующих элементов [9].

Для решения задач оптимизации конструкции по обеспечению весового совершенства и повышения живучести конструкции предлагается рассмотреть конструкции на основе применения метаматериалов. Особенностью данных конструкций является наличие периодического подкреплявшего элемента, в котором, в отличии от конструкций с сотовым заполнителем, может варьироваться частота ребер (удельная плотность материала), в результате чего возможна оптимизация конструкции по условиям прочности. При этом, вследствие создания достаточно небольшой элементарной ячейки и связи компонентов между собой, достигается высокая живучесть такой конструкции – разрушение одного элемента заполнителя или отдельной ячейки обшивки не приводит к разрушению данной конструкции в связи с наличием конструктивной остановки роста трещин.

Предлагаемая конструкция представляет собой два металлических листа соединенных объемным заполнителем в виде гнутых лент [10–14] (рис. 2,b). Соединение элементов между собой возможно различными типами соединений (пайка, сварка, механический крепеж), при этом предпочтительным является сварное соединение, которое, несмотря на технологически более сложное исполнение и создание локальных концентраций напряжений, обеспечивает высокую скорость и качество соединения элементов. Стыковка панелей также возможна различными типами соединений, при этом для упрощения процесса сборки целесообразно использовать механический крепеж. Конструкция сформирована на основании результатов топологической оптимизации (рис. 2,a) и результатов предыдущих работ в части пространственного заполнителя [13, 4]. На рис. 2,a показаны стадии оптимизации конструкции во время работы алгоритма топологической оптимизации. В постановке задачи в качестве силовых факторов рассматривается два независимых взаимно перпендикулярных изгибающих момента.

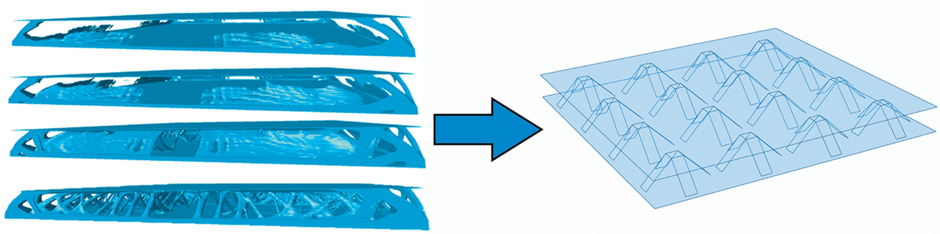


**Рис. 2.** (a) – этапы распределения материала в процессе оптимизации, (b) – схема предлагаемой конструкции

К преимуществам конструкций, построенных на принципах метаматериалов относятся:

– хорошие теплоизолирующие свойства;

– равномерная подкрепленность обшивок заполнителем;

– высокий коэффициент внутреннего поглощения энергии;

– выносливость таких конструкций превышает выносливость панелей стрингерных конструкций и повышается при уменьшении жесткости заполнителя на сдвиг;

– большой срок службы вследствие отсутствия заклепок, вызывающих концентрацию напряжений;

– возможность оптимизации прочностных характеристик путем соответствующего расположения заполнителя в конструкции.

Недостаток такой конструкции заключается в относительной сложности формирования стыковочных зон в конструкции и наличия внутренних полостей, которые могут являться очагами коррозионных повреждений при нарушении технологии изготовления конструкций.

В отличие от предложенных выше вариантов, конструкция с заполнителем в виде штампованных или гнутых лент металла проще с технологической точки зрения, при сохранении преимуществ объемного заполнителя.

Для восприятия сосредоточенных нагрузок возможно уплотнение периодической структуры и локальное использование утолщенных лент металла. В зонах опирания или стыковки используется более частое расположение армирующих элементов, в том числе с формированием тетрагональной решетки, аналогичной представленной выше.

В данной работе рассмотрен один из вариантов конструкций гермошпагоута с использованием метаматериалов для проведения сравнительного анализа и оценки возможности и эффективности их использования в авиационных конструкциях.

**2. Задача проектирования гермошпангоута.** В качестве примера конструкции с метаматериалом предлагается рассмотреть гермошпангоут магистрального самолета. Гермошпангоут работает на восприятие избыточного давления в салоне самолёта. В общем виде он представляет собой сферическую обшивку с радиальными ребрами (рис. 3,a). В соответствии с [1], регламентированным повреждением для такой конструкции является трещина длиной 800–1000 мм, ориентированная в общем случае по действию максимальных напряжений.

Отдельно необходимо упомянуть возможность изготовления конструкции гермошпангоута из композиционных материалов. Решение на рис. 3,b обеспечивает снижение веса по сравнению с металлическим вариантом до 45% [15], но, как упоминалось выше, проигрывает по технологическим и эксплуатационным характеристикам.

В рамках данной работы рассматривается упрощенная конструкция гермошпангоута без учета технологических и эксплуатационных люков для прокладки коммуникаций, так как цель данной работы – это предварительная оценка возможности исполь-

(a) (b)

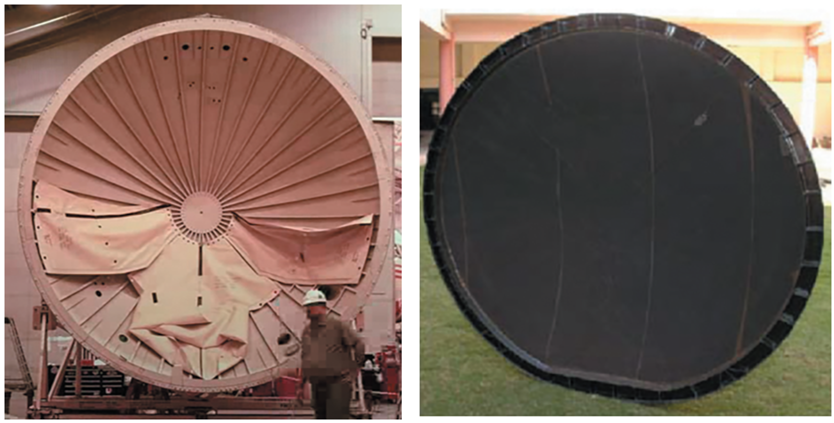

**Рис. 3.** (a) – Металлическая конструкция гермошпангоута; (b) – композиционная конструкция гермошпангоута

зования конструкций с метаматериалами в авиационной технике. Гермошпангоут выбран диаметром 3 м. Для классической конструкции толщина обшивки принята равной 1.5 мм. Конструкция гермошпангоута на основе метаматериала имеет аналогичные параметры кривизны и диаметра, а также обеспечен аналогичный вес конструкции за счет перераспределения веса между обшивками и наполнителем. Рассмотрены толщины обшивок предлагаемой конструкции 1 и 0.5 мм для внутренней и внешней соответственно.

На рис. 4 показана конструкция предлагаемого гермошпангоута из метаматериалов с периодическими ячейками, выполненными из листового алюминия с последующей сквозной лазерной сваркой. Данная структура является типовой и может быть оптимизирована с учетом действующих нагрузок от избыточного давления и сосредоточенных нагрузок (например, в случае крепления к данному шпангоуту узлов крепления киля).

В качестве расчетной нагрузки прикладывается эксплуатационное давление для оценки остаточной прочности конструкции после нанесения регламентированного повреждения в качестве трещины. В соответствии с требованиями АП-25 п. 25.365(a) [1], рассматривается нагрузка от перепада давления, составляющего 0.65 атм (65861 Н/м$^2$).

**3. Моделирование нагружения гермошпангоута.** Моделирование проводилось на основе метода конечных элементов. Использовались элементы типа оболочка с пониженной степенью интегрирования. В моделях использовались определяющие соотношения теории упругости для изотропных материалов с учетом геометрической нелинейности. Механические свойства, используемые при численном моделировании и анализе алюминиевых оболочек, приведены в табл. 1.

На рис. 5 показан общий вид используемых численных сеток. Характерный размер грани элемента равен 20 мм. Количество элементов в модели для классической конфигурации равно 31401, и 43910 для модели с предлагаемым подкреплением. На рис. 5,а показана численная сетка для классической конфигурации гермошпангоута, где выделенными линиями обозначены узлы, закрепленные по всем степеням свободы. Давление прикладывалось непосредственно на всю внутреннюю поверхность модели.

На рис. 6 изображены результаты расчета напряжений для классической конфигурации на основе подкреплений в форме стрингеров. В качестве заливки используется максимальное по толщине значение эквивалентных напряжений по Мизесу (МПа).

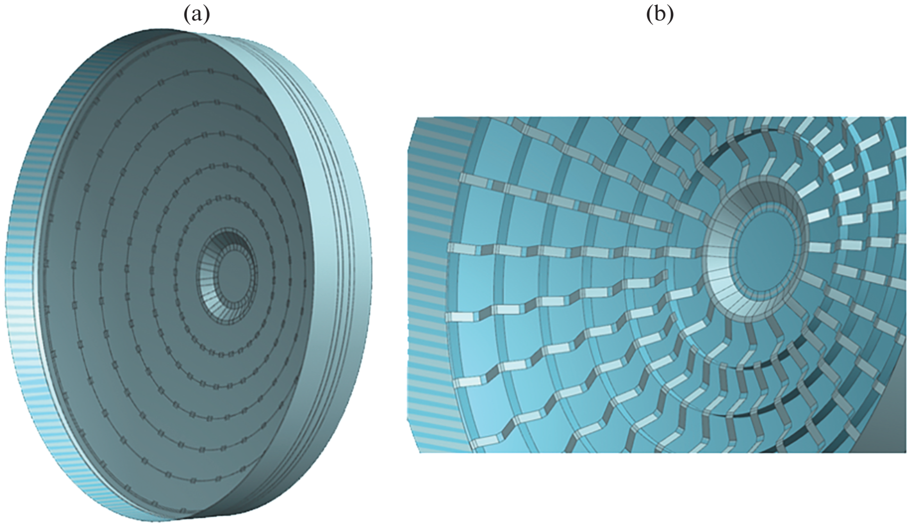


**Рис. 4.** Конструкция гермошпангоута с применением метаматериалов. (a) – общий вид, (b) – вид без одной обшивки

На рис. 7 изображены результаты расчета напряжений для предлагаемой конфигурации силовой сферической оболочки.

Следующий шаг – это сравнение надежности конструкций. Рассмотрим требуемый авиационными правилами случай – наличие радиальной трещины длиной от 800 до 1000 мм [1]. В расчетах предполагается, что в случае классической схемы армирования герметичность нарушена, но при этом разница давлений поддерживается принудительно. Во втором случае предположим, что давление перераспределилось с первой оболочки на внешнюю. На рис. 8,a изображены результаты расчета классической конфигурации на основе подкреплений в форме стрингеров с присутствием радиальной трещины. Рисунки 8,b и 8,c демонстрируют предлагаемую форму подкреплений, при этом в качестве цветовой заливки используется максимальное по толщине значение эквивалентных напряжений по Мизесу (МПа). Видно, что в классической конструкции напряжения локализованы в секторе с трещиной, при этом в предлагаемой конструкции напряжения распределены практически равномерно.

Напряжения в регулярных зонах не превышают предела текучести, но для оценки целостности конструкции необходимо также проанализировать условия роста трещины на основе критического значения коэффициента интенсивности напряжений, приведенного в табл. 1. В данной работе использован подход, основанный на вычислении контурных интегралов и определении на их основе значений коэффициентов интенсивности напряжений [17–21]. Величины $K_{II}$ и $K_{III}$ оказались на несколько по-

**Таблица 1.** Механические свойства алюминия [16]

| | |
|---|---|
| Модуль Юнга (МПа) | 71000 |
| К-т Пуассона | 0.3 |
| Предел текучести (МПа) | 450 |
| Критический коэффициент интенсивности напряжений Кс, МПа $\cdot$ м$^{1/2}$ | 37.9 |

(a) (b) (c)

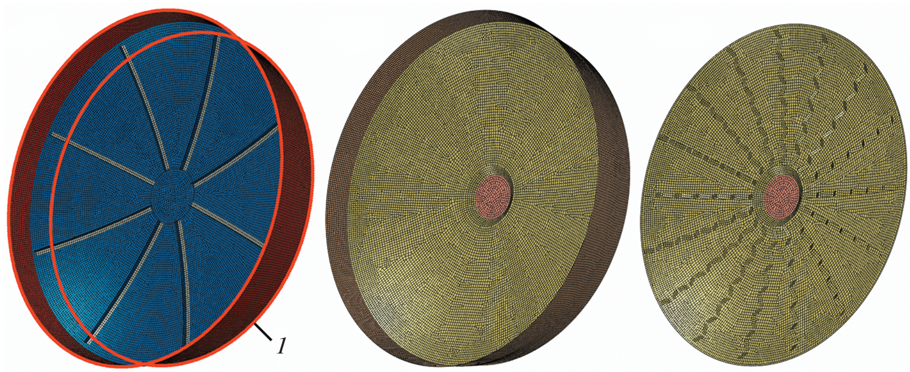


**Рис. 5.** Общий вид численной сетки. (a) – классическая конфигурация (*1* – узлы, закрепленные в расчете), (b) – предлагаемая конфигурация, (c) – предлагаемая конфигурация (вид внутренней части)

рядков меньше предельных значений, что является характерным результатом для авиационных тонкостенных конструкций. Величины коэффициента интенсивности напряжений для нормального раскрытия трещины $K_I$, отнесенные к критическому значению $K_C$ (табл. 1), представлены на рис. 9. Видно, что в классической конструкции практически достигается предел трещиностойкости, в то время как для предложенной конструкции значения коэффициентов интенсивности напряжений в несколько раз меньше для обеих вершин дефекта.

(a) (b)

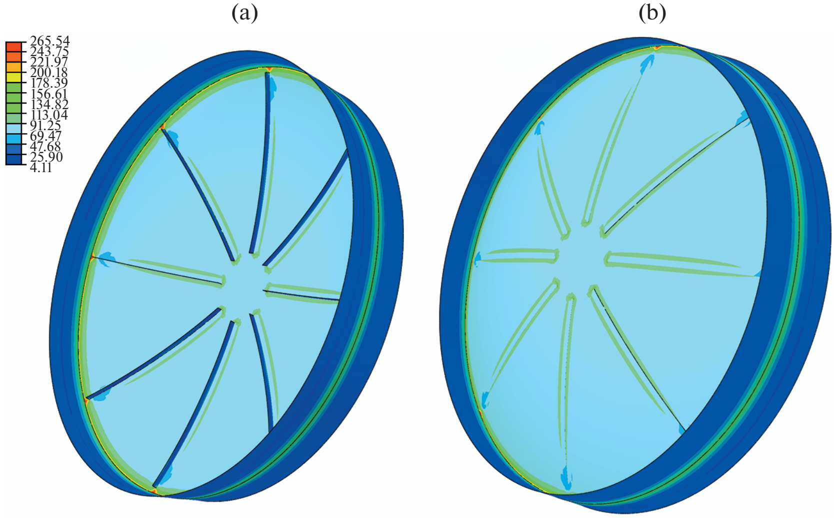


**Рис. 6.** Максимальное по толщине значение эквивалентных напряжений по Мизесу (МПа) для классической конфигурации. (a) – вид изнутри, (b) – вид с внешней стороны.

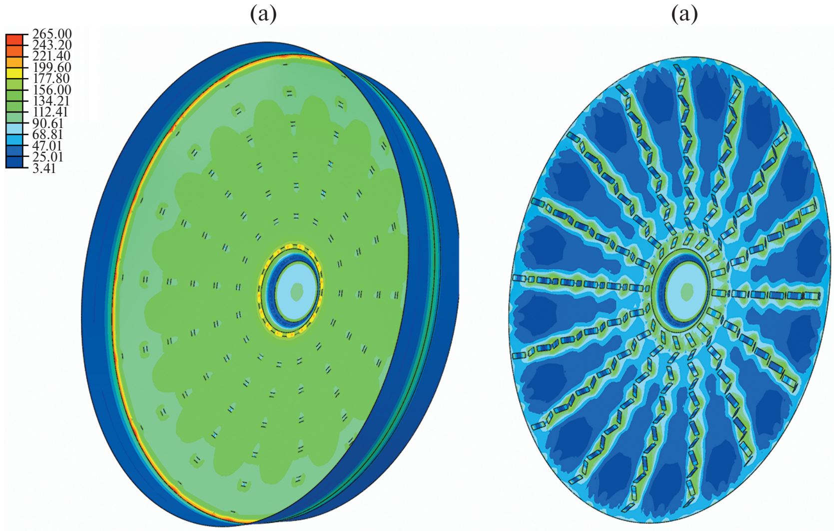


**Рис. 7.** Максимальное по толщине значение эквивалентных напряжений по Мизесу (МПа) для предлагаемой конфигурации. (a) – вид изнутри, (b) – внешняя часть оболочки.

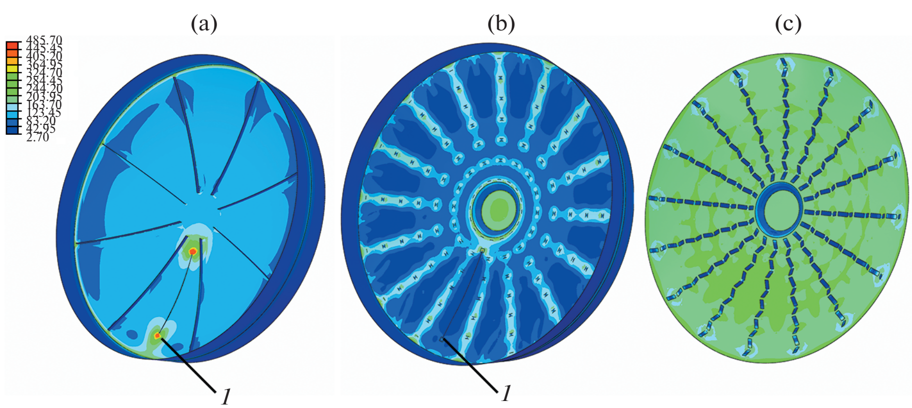


**Рис. 8.** Результат расчета при наличии трещины; в заливке использовано максимальное по толщине значение эквивалентных напряжений по Мизесу (МПа), *1* – трещина; (a) – классическая конфигурация, (b) – предлагаемая конфигурация, (c) – предлагаемая конфигурация, вид внутренней части

**4. Заключение.** В данной статье рассмотрены варианты конструкции герметичного шпангоута с регламентированным повреждением для оценки возможности использования в авиационных конструкциях метаматериала из гнутых листов алюминия с внешними обшивками. Проведен анализ роста трещины для традиционной и предлагаемой конструкций. При одинаковой массе двух вариантов конструкции гермошпангоута, в предложенном варианте удалось обеспечить существенно более высокую живучесть конструкции, оцениваемую на основе в разы меньших значений коэффици-

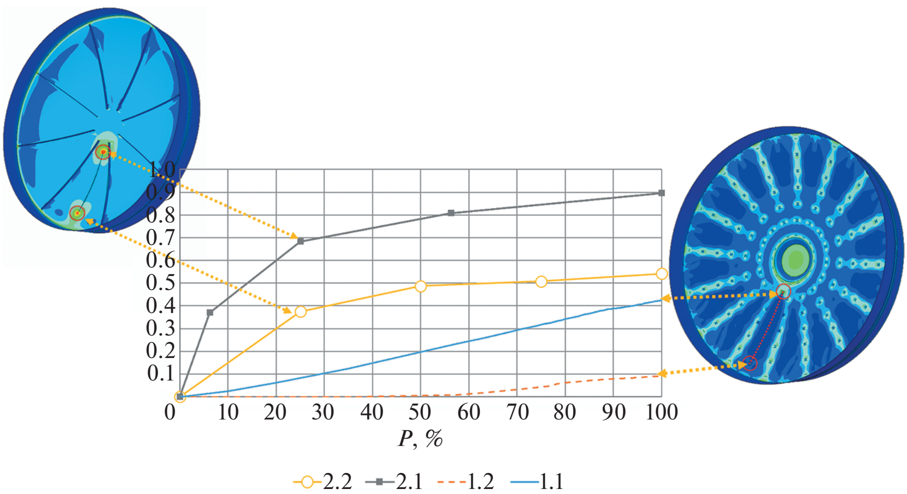


**Рис. 9.** Результат расчета коэффициентов интенсивности напряжений для классической конфигурации и для предложенной конструкции; 1.1 – внешняя вершина трещины классической конструкции, 1.2 – внутренняя вершина трещины классической конструкции, 2.1 – внешняя вершина трещины предложенной конструкции 2.2 – внутренняя вершина трещины предложенной конструкции; P(%) –процент от приложенного давления по требованию АП -25 [1] (0.65 атм)

ентов интенсивности напряжений в вершинах трещины, которые существенно ниже значений, полученных для традиционной конструкции.

На основе результатов проведенных исследований можно заключить, что элементы авиационных конструкций, полученные с использованием штамповки, лазерной сварки и других технических приемов при создании метаматериалов, могут эффективно применяться в авиастроении. Наличие двух обшивок и периодической структуры в качестве заполнителя при этом обеспечивает высокую живучесть таких конструкций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 20-11-20230).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Метод определения соответствия к пункту 25.571. Межгосударственный авиационный комитет. Авиационный регистр. Москва, МАК, 1996. 29 с.
2. *Феодосьев В.И.* Основы техники ракетного полета. М.: Наука, 1979. 496 с
3. *Феодосьев В.И.* К расчету гофрированных коробок (сильфонов) // Инж. сборник АН СССР. 1947. Т. 4. № 1. С. 137–149.
4. *Феодосьев В.И.* Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых систем // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27. № 2. С. 265.
5. *Ендогур А.И., Жуков С.М., Колганов А.Ф.* Проектирование трехслойных конструкций с объемностержневым заполнителем. Методы синтеза современных самолетов. М.: МАИ, 1984.
6. *Ендогур А.И.* Конструкция самолетов. Конструирование агрегатов планера: Учебник. М.: Изд-во МАИ, 2012. 494 с.
7. *Wadley H.N.G., Fleck N.A., Evans A.G.* Fabrication and structural performance of periodic cellular metal sandwich structures // Compos. Sci.Ttechnol. 2003. V. 63. № 16. P. 2331–2343.
8. *Гайнутдинов В.Г., Мусави С.С.М., Абдуллин И.Н.* Условия разрушения пирамидальных и тетраэдальных ячеек ферменных заполнителей // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева. 2015. Т. 71. № 2. С. 11–15.
9. *Vasiliev V.V., Barynin V.A., Rasin A.F.* Anisogrid lattice structures–survey of development and application // Compos. Struct. 2001. V. 54. № 2–3. P. 361–370.

10. *Deshpande V.S., Fleck N.A.* Collapse of truss core sandwich beams in 3-point bending // Int. J. Solids Struct. 2001. V. 38. № 36–37. P. 6275–6305.
11. *Wadley H.N.G.* Multifunctional periodic cellular metals // Phil. Trans. Royal Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci. 2006. V. 364. № 1838. P. 31–68.
12. *Kooistra G.W., Wadley H.N.G.* Lattice truss structures from expanded metal sheet //Mater. Des. 2007. V. 28. № 2. P. 507–514.
13. *Fedulov B.N. et al.* Construction plate enforced by metamaterial elements // Procedia Structural Integrity. 2020. V. 28. P. 155–161.
14. *Юргенсон С.А., Ломакин Е.В., Федулов Б.Н., Федоренко А.Н.* Конструкционные элементы на основе метаматериалов // Вестник ПНИПУ. Механика. 2020. № 4. С. 211–219. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.18
15. *Venkatesh S. et al.* Design of a composite rear pressure bulkhead for a light transport aircraft // SAMPE National Conference on Composite Structures (ISAMPE-8) December 2009.
16. *Кишкина С.И., Фридляндер И.Н.* Том 4. Алюминиевые и бериллиевые сплавы. Часть I. Деформируемые алюминиевые сплавы и сплавы на основе бериллия. Книга 1 // Авиационные материалы. Справочник в 9-ти томах. 6-е изд., перераб. и доп. / Под ред. *Р.Е. Шалина*. М.: ОНТИ, 1982. 625 с.
17. *Lei Y.* J-integral evaluation for cases involving non-proportional stressing // Eng. Fract. Mech. 2005. V. 72. № 4. P. 577–596.
18. *Черепанов Г.П.* О распространении трещин в сплошной среде // ПММ. 1967. Т. 31. № 3. С. 476–488.
19. *Rice J.R.* A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // ASME J. Appl. Mech. 1968. V. 35. № 4. P. 379–386. (Русск. перевод: Райс Д. Не зависящий от пути интеграл и приближенный анализ концентрации деформаций у вырезов и трещин // Тр. Амер. общ-ва инж.-механ. Прикладная механика. 1968. Т. 35. № 4. С. 340–350).
20. *Клюшников В.Д.* Физико-математические основы прочности и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1994. 189 с.
21. *Морозов Н.Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021,
№ 6, с. 55–56

*УДК 531.383*

# О ДВИЖЕНИИ УПРУГОГО НЕРАСТЯЖИМОГО КОЛЬЦА

© 2021 г. Д. М. Климов[a],*

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
**e-mail: klimov@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 29.07.2021 г.
После доработки 04.08.2021 г.
Принята к публикации 05.08.2021 г.

При изучении динамики волнового твердотельного гироскопа широко используются различные приближенные методы. В настоящей статье излагается способ получения решения уравнения колебаний тонкого нерастяжимого кольца, вращающегося с произвольно изменяющейся угловой скоростью. Полученное решение может быть использовано для оценки точности приближенных методов.

*Ключевые слова:* твердотельный гироскоп, нерастяжимое кольцо, приближенные методы

**DOI:** 10.31857/S0572329921060052

Для исследования динамики кольца будем использовать следующее уравнение из публикации [1]

$$\frac{\partial^4 w(\varphi,\tau)}{\partial\tau^2\partial\varphi^2} - \frac{\partial^2 w(\varphi,\tau)}{\partial\tau^2} + 4\omega(\tau)\frac{\partial^2 w(\varphi,\tau)}{\partial\tau\partial\varphi} + 2\frac{d\omega(\tau)}{d\tau}\frac{\partial w(\varphi,\tau)}{\partial\varphi} + \frac{\partial^6 w(\varphi,\tau)}{\partial\varphi^6} +$$
$$+ 2\frac{\partial^4 w(\varphi,\tau)}{\partial\varphi^4} + \frac{\partial^2 w(\varphi,\tau)}{\partial\varphi^2} - \omega^2(\tau)\left(\frac{\partial^4 w(\varphi,\tau)}{\partial\varphi^4} + 3\frac{\partial^2 w(\varphi,\tau)}{\partial\varphi^2}\right) = 0 \quad (1)$$

Здесь $w$ – перемещение точек кольца по радиусу, $\varphi$ – угол точки на кольце, $\tau$ – нормированное время, $\omega$ – угловая скорость кольца.

Будем искать решение в виде

$$w(\varphi,\tau) = a(\tau)\sin[k\varphi + \psi(\tau)]\cos(n\tau) - b(\tau)\cos[k\varphi + \psi(\tau)]\sin(n\tau) \quad (2)$$

Здесь $a(\tau)$, $b(\tau)$, $\psi(\tau)$, $n$ считаются неизвестными, $k$ – целое число. Далее положим $k = 2$, для других $k$ выкладки проводятся аналогичным образом.

На производную

$$\frac{\partial w(\varphi,\tau)}{\partial\tau} = \frac{da(\tau)}{d\tau}\sin[2\varphi + \psi(\tau)]\cos(n\tau) +$$
$$+ a(\tau)\cos[2\varphi + \psi(\tau)]\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\cos(n\tau) -$$
$$- a(\tau)\sin[2\varphi + \psi(\tau)]n\sin(n\tau) - \frac{db(\tau)}{d\tau}\cos[2\varphi + \psi(\tau)]\sin(n\tau) + \quad (3)$$
$$+ b(\tau)\sin[2\varphi + \psi(\tau)]\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\sin(n\tau) - b(\tau)\cos[2\varphi + \psi(\tau)]n\cos(n\tau)$$

наложим условие

$$\begin{aligned}&\frac{da(\tau)}{d\tau}\sin[2\varphi+\psi(\tau)]\cos(n\tau)+a(\tau)\cos[2\varphi+\psi(\tau)]\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\cos(n\tau)-\\&-\frac{db(\tau)}{d\tau}\cos[2\varphi+\psi(\tau)]\sin(n\tau)+b(\tau)\sin[2\varphi+\psi(\tau)]\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\sin(n\tau)=0\end{aligned}\tag{4}$$

Уравнение (1) с учетом соотношений (2)–(4) переписывается в виде

$$\begin{aligned}&5\frac{da(\tau)}{d\tau}\sin[2\varphi+\psi(\tau)]n\sin(n\tau)+5a(\tau)\cos[2\varphi+\psi(\tau)]\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}n\sin(n\tau)+\\&+5a(\tau)\sin[2\varphi+\psi(\tau)]n^2\cos(n\tau)+5\frac{db(\tau)}{d\tau}\cos[2\varphi+\psi(\tau)]n\cos(n\tau)-\\&-5b(\tau)\sin[2\varphi+\psi(\tau)]\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}n\cos(n\tau)-5b(\tau)\cos[2\varphi+\psi(\tau)]n^2\sin(n\tau)+\\&+8\omega(\tau)[-a(\tau)\cos[2\varphi+\psi(\tau)]n\sin(n\tau)+b(\tau)\sin[2\varphi+\psi(\tau)]n\cos(n\tau)]+\\&+4\frac{d\omega(\tau)}{d\tau}[a(\tau)\cos[2\varphi+\psi(\tau)]\cos(n\tau)+b(\tau)\sin[2\varphi+\psi(\tau)]\sin(n\tau)]-\\&-36a(\tau)\sin[2\varphi+\psi(\tau)]\cos(n\tau)+36b(\tau)\cos[2\varphi+\psi(\tau)]\sin(n\tau)-\\&-4\omega^2(\tau)[a(\tau)\sin[2\varphi+\psi(\tau)]\cos(n\tau)-b(\tau)\cos[2\varphi+\psi(\tau)]\sin(n\tau)]=0\end{aligned}\tag{5}$$

Из уравнения (5) находим систему двух уравнений при множителях $\sin(n\tau)\cos[2\varphi+\psi(\tau)]$ и $\cos(n\tau)\sin[2\varphi+\psi(\tau)]$

$$5a(\tau)\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}n-5b(\tau)n^2-8\omega(\tau)a(\tau)n+36b(\tau)+4\omega^2(\tau)b(\tau)=0$$

$$5a(\tau)n^2-5b(\tau)\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}n+8\omega(\tau)b(\tau)n-36a(\tau)-4\omega^2(\tau)a(\tau)=0$$

Эта система имеет решение

$$n=\sqrt{z_{1,2}},\quad \frac{d\psi(\tau)}{d\tau}=\frac{8}{5}\omega(\tau)$$

где $z_{1,2}$ являются корнями уравнения $5z^2-4\omega^2(\tau)-36=0$. Аналогично система уравнений из коэффициентов при $\sin(n\tau)\sin[2\varphi+\psi(\tau)]$, $\cos(n\tau)\cos[2\varphi+\psi(\tau)]$

$$5\frac{da(\tau)}{d\tau}+4\frac{d\omega(\tau)}{d\tau}b(\tau)=0$$

$$5\frac{db(\tau)}{d\tau}+4\frac{d\omega(\tau)}{d\tau}a(\tau)=0$$

имеет решение

$$a(\tau)=C_1\mathrm{sh}\left(\frac{4}{5}\frac{\omega(\tau)}{n}\right)+C_2\mathrm{ch}\left(\frac{4}{5}\frac{\omega(\tau)}{n}\right)$$

$$b(\tau)=-C_1\mathrm{ch}\left(\frac{4}{5}\frac{\omega(\tau)}{n}\right)-C_2\mathrm{sh}\left(\frac{4}{5}\frac{\omega(\tau)}{n}\right)$$

где $C_1$, $C_2$ – произвольные постоянные.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690138-6).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* О динамических эффектах в упругом вращающемся кольце // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 5. С. 17–24.

**ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 6, с. 57–72**

*УДК 531.38; 531.39*

# КОМПЛЕКСНЫЙ ПОДХОД В ИСТОЛКОВАНИИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ИМЕЮЩЕГО НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ

**© 2021 г. Г. В. Горр[a,*]**

[a] *Институт прикладной математики и механики, Донецк, Украина*
**e-mail: gvgorr@gmail.com*

Поступила в редакцию 21.04.2021 г.
После доработки 12.07.2021 г.
Принята к публикации 19.07.2021 г.

Предложен комплексный подход в истолковании движения твердого тела, имеющего неподвижную точку, основанный на применении углов Эйлера, теоремы Пуансо, модифицированного метода Пуансо, аналитической формулы автора статьи.

*Ключевые слова:* углы Эйлера, теорема Пуансо, модифицированный подход, формула для полярного угла неподвижного годографа и угла прецессии

**DOI:** 10.31857/S0572329921060040

**Введение.** При изложении комплексного подхода в истолковании движения тела, имеющего неподвижную точку, целесообразно показать его место в истолкованиях движения тела, которые применялись другими авторами. В связи с этим, автор данной статьи уделил достаточно большое внимание анализу результатов, полученных ранее, приняв во внимание обширную литературу по данной проблеме. Данный метод позволил показать не только роль модифицированного метода Пуансо в комплексном истолковании движения тела, но и его преимущество в визуальном восприятии движения в различных решениях уравнений динамики твердого тела.

Исследование свойств движения твердого тела, имеющего неподвижную точку, проводилось на заключительном этапе изучения задач механики. Остановимся на некоторых проблемах исторического развития геометрических методов в динамике твердого тела.

Начало разработки геометрических методов в аналитической механике положил Л. Пуансо [1]. Приведем его высказывание: “Надо согласиться с тем, что во всех этих решениях (имеются ввиду аналитические решения) мы видим только вычисления без какой-либо ясной картины вращения тела. Конечно, эти вычисления, более или менее длинные и сложные, позволяют определить, где окажется тело к заданному времени, но мы не видим, как оно туда попало, мы его полностью теряем из вида, тогда как хотелось бы наблюдать его и следить за ним, так сказать, взглядом в течение всего вращения. И я старался открыть именно это отчетливое представление вращательного движения, чтобы сделать доступным обозрению то, что пока еще никем не было изображено”.

Л. Пуансо ввел понятие эллипсоида инерции, мгновенной оси вращения. Им приведено геометрическое истолкование движения тела в решении Эйлера: “Эллипсоид инерции во время движения тела катится без скольжения по одной из своих касательных плоскостей, эта плоскость перпендикулярна к главному моменту количества движения тела и остается неподвижной в пространстве”.

Он доказал, что любое движение тела, имеющего неподвижную точку, можно истолковать качением подвижного аксоида угловой скорости по неподвижному аксоиду. Большой вклад в развитие геометрических методов динамики твердого тела внесли Ж. Сильвестр [2], Ж. Мак-Куллаг [3], Г. Дарбу [4, 5], К. Якоби [6, 7], В. Гесс [8, 9], Э. Раус [10, 11], Н.Е. Жуковский [12–14]. Обзор результатов, полученных в данном направлении, изложен в [15, 16].

Особую важность геометрических методов отмечал Н.Е. Жуковский:

“Можно говорить, что математическая истина только тогда должна считаться вполне обработанной, когда она может быть объяснена всякому из публики, желающему ее усвоить. Я думаю, что если возможно приближение к этому идеалу, то только со стороны геометрического толкования или моделирования”.

Заслуживает внимания информация о том, что многие ученые не ограничивались теоретическими исследованиями, а предлагали некоторые конкретные конструкции. Приведем пример Н.Б. Делоне, предложенный им для гироскопа Ковалевской. Его утверждение таково: “Примером такого движения служит движение прямоугольного параллелепипеда размером $2a < 2b < 2c$, подчиненного условию $c = b\sqrt{3}$ и подпертого в точке, лежащей на прямой, проходящей через центр тяжести параллельно ребру $2a$ и отстоящей от центра тяжести на расстоянии $x_0 = \sqrt{\dfrac{b^2 - a^2}{3}}$. Данная опора может быть сделана посредством спицы, пропущенной сквозь параллелепипед” (1892 год).

Н.И. Мерцалов построил гироскоп, удовлетворяющий приближенно условиям Н.Б. Делоне, и сфотографировал движение светящейся точки, помещенной на оси $Oz$.

Результаты этих ученых, как отмечено ранее, в полной мере отражены в монографии Г.К. Суслова [15] и книге [16]. Следует отметить, что для истолкования движения тела применялись различные подходы. Например, Ж. Мак-Куллаг [3] установил, что при движении свободного твердого тела гирационный эллипсоид, соответствующий точке опоры, проходит во все время движения через точку пространства, лежащую на неизменном главном моменте количества движения. Ж. Сильвестр [2] изучал движение главных осей инерции в неподвижном пространстве. Г. Дарбу [5], используя полярную систему координат, исследовал герполодии (неподвижный годограф угловой скорости) в решении Л. Эйлера. Уравнения Г. Дарбу [5] обобщил П.В. Харламов [17] на случай произвольного решения уравнений Эйлера–Пуассона. В последние годы метод Пуансо был развит в работах автора данной статьи [18, 19], в которых предложен модифицированный метод Пуансо и получена алгебраическая связь между углом прецессии и полярным углом, входящим в уравнения Г. Дарбу–П.В. Харламова. Ж. Сильвестр [2] и К. Якоби [6, 7] исследовали вращения Пуансо в решении Л. Эйлера.

Н.Б. Делоне [20] исследовал подвижный годограф угловой скорости в частном случае С.В. Ковалевской и указал метод получения поверхности вращения, несущей неподвижный годограф. Классификацию меридиана поверхности, на которой лежит неподвижный годограф, указали П.В. Харламов, В.И. Коваль [21].

Б.К. Млодзеевский [22] изучал неподвижный годограф вектора угловой скорости в частном случае С.В. Ковалевской [23].

П.В. Харламов применил метод Пуансо для исследования решения с двумя инвариантными соотношениями [24, 25], изучил [26] случай Б.К. Млодзеевского.

Геометрическое истолкование движения тела проводилось не только в классической задаче о движении тяжелого твердого тела, но и в обобщенных задачах. Например, истолкование С.А. Чаплыгина [27] было посвящено задаче о движении тела в жидкости.

Кроме указанных подходов, в геометрическом истолковании движения тела с помощью свойств вектора угловой скорости известен и подход Н.Е. Жуковского (см. обзор [16]), в основе которого лежат свойства момента количества движения тела.

В монографии И.Н. Гашененко, Г.В. Горра, А.М. Ковалева [28] приведено большинство результатов по кинематическому истолкованию движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку.

**1. Истолкование движения тела с помощью углов Эйлера.** *1.1. Уравнения динамики твердого тела.* Движение тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, описывается уравнениями

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} + s(\mathbf{e}\times\boldsymbol{\nu}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega} \tag{1.1}$$

где введены обозначения: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, указывающий направление силы тяжести; $A$ – тензор инерции в неподвижной точке; $s$ – произведение веса тела и расстояния от неподвижной точки $O$ до центра тяжести тела $C$; $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ – единичный вектор, направленный из точки $O$ в точку $C$. Точка над переменными обозначает относительную производную по времени $t$.

Уравнения (1.1) имеют интегралы

$$A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} + 2s(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \quad A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu} = k \tag{1.2}$$

где $E$ и $k$ – произвольные постоянные.

Уравнения (1.1) и (1.2) обобщены Д. Гриоли в задаче о движении твердого тела под действием потенциальных и гироскопических сил (см., например, [29]):

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} + \frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\times\boldsymbol{\omega} + \frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\times\boldsymbol{\nu} \tag{1.3}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega} \tag{1.4}$$

которые допускают три первых интеграла

$$(A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}) - 2U(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = 2E, \quad (A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}) + L(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = k, \quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1 \tag{1.5}$$

где $E$ и $k$ – произвольные постоянные. В уравнении (1.3) через $\dfrac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\boldsymbol{\nu}}$, $\dfrac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\boldsymbol{\nu}}$ обозначены градиенты функций $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ и $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$. В уравнениях (1.3), (1.5) $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ – силовая функция, $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ – функция, характеризующая гироскопические силы. Если в (1.3), (1.5) положить $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = 0$, то получим уравнения (см., например, [30, 31]) движения тела в потенциальном поле сил

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} + \frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\times\boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega} \tag{1.6}$$

$$(A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}) - 2U(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = 2E, \quad (A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}) = k, \quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1$$

Когда $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})$, $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = \mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})$, где $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ – симметричные матрицы, то уравнения (1.3), (1.4) будут описывать либо движение гиростата в силовом поле, которое является суперпозицией ньютоновского и кулоновского полей и движется дополнительно под действием сил Лоренца, либо уравнения движения тела в идеальной жидкости (см. обзорные монографии [29, 32]).

*1.2. Метод апекса.* Пусть $Oxyz$ – подвижная система координат с единичными векторами $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$; $O\xi\eta\zeta$ – неподвижная система координат с единичными векторами $\boldsymbol{\upsilon}_1$, $\boldsymbol{\upsilon}_2$, $\boldsymbol{\upsilon}_3$. Полагаем, что в результате интегрирования уравнений (1.1) (либо (1.3), (1.4), (1.6)) найдено решение

$$\boldsymbol{\nu}(t) = \nu_1(\mathrm{t})\,\mathbf{i}_1 + \nu_2(\mathrm{t})\,\mathbf{i}_2 + \nu_3(\mathrm{t})\,\mathbf{i}_3 \tag{1.7}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\Pi}(t) = \omega_1\ (\mathrm{t})\,\mathbf{i}_1 + \omega_2(\mathrm{t})\,\mathbf{i}_2 + \omega_3(\mathrm{t})\,\mathbf{i}_3 \tag{1.8}$$

где через $\boldsymbol{\omega}_{\Pi}(t)$ обозначен подвижный годограф вектора $\boldsymbol{\omega}$. Введем углы Эйлера $\theta$, $\varphi$, $\psi$ таким образом, что угол нутации $\theta$ – угол между векторами $\mathbf{i}_3$ и $\boldsymbol{\upsilon}_3 = \boldsymbol{\nu}$. Тогда компоненты $\nu_i$ , $\omega_i$ $(i = \overline{1, 3})$ имеют значения [33]

$$\nu_1 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \nu_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \nu_1 = \cos\theta \tag{1.9}$$

$$\omega_1 = \dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi, \quad \omega_2 = \dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi, \quad \omega_3 = \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi \tag{1.10}$$

Используя векторную форму записи, из (1.9), (1.10) получим [19]

$$\theta = \arccos(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{i}_3), \quad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{i}_1}{\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{i}_2} \tag{1.11}$$

$$\dot\psi = \frac{(\boldsymbol{\omega}_{\Pi}\times\mathbf{i}_3)\cdot(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{i}_3)}{(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{i}_3)^2} \tag{1.12}$$

Следовательно, после интегрирования уравнений динамики соотношения (1.11), (1.12) позволяют определить положение тела в неподвижном пространстве [33]:

$$\begin{gathered}\mathbf{i}_1 = (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta)\cdot\boldsymbol{\upsilon}_1 + \\ + (\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta)\cdot\boldsymbol{\upsilon}_2 + \sin\varphi\sin\theta\cdot\boldsymbol{\upsilon}_3\end{gathered} \tag{1.13}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{i}_2 = -(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta)\cdot\boldsymbol{\upsilon}_1 - \\ - (\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\theta)\cdot\boldsymbol{\upsilon}_2 + \cos\varphi\sin\theta\cdot\boldsymbol{\upsilon}_3\end{gathered} \tag{1.14}$$

$$\mathbf{i}_3 = \sin\psi\sin\theta\cdot\boldsymbol{\upsilon}_1 - \cos\psi\sin\theta\cdot\boldsymbol{\upsilon}_2 + \cos\theta\cdot\boldsymbol{\upsilon}_3 \tag{1.15}$$

а также компоненты $\omega_\xi$, $\omega_\eta$, $\omega_\zeta$ вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ в неподвижном базисе

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{H}} = \omega_\xi\,\boldsymbol{\upsilon}_1 + \omega_\eta\boldsymbol{\upsilon}_2 + \omega_\zeta\boldsymbol{\upsilon}_3 \tag{1.16}$$

где [33]

$$\omega_\xi = \dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\sin\theta\sin\psi, \quad \omega_\eta = \dot\theta\sin\psi - \dot\varphi\sin\theta\cos\psi, \quad \omega_\zeta = \dot\psi + \dot\varphi\cos\theta \tag{1.17}$$

Отметим, что соотношения для $\boldsymbol{\omega}_{\Pi}$ и $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{H}}$ из формул (1.8), (1.16) позволяют применить для кинематического истолкования движения тела теорему Пуансо о представлении движения тела путем качения без скольжения подвижного аксоида вектора угловой скорости по неподвижному аксоиду этого вектора. Данный прием представляет значительные вычислительные трудности, поэтому, как правило, для использования теоремы Пуансо применяются уравнения неподвижного годографа Г. Дарбу–П.В. Харламова.

В динамике твердого тела наибольшее применение углов Эйлера осуществляется либо в методе апекса (исследование характерной оси тела в пространстве), либо в изучении программных движений, которые описываются наглядными соотношениями для углов Эйлера. Так, широко известными результатами использования первого метода являются исследования оси симметрии тела в решении Ж. Лагранжа [34] (см. [33, 35]), а также результаты Ж. Сильвестра [2], который рассматривал движение главных осей инерции в решении Л. Эйлера. Одной из последних статей, в которой изучается движение собственной оси тела в решении Д.Н. Горячева, является статья Х.М. Яхьи [36]. Роль исследований данной проблемы для прецессий тела отмечена в статье [37].

*1.3. Первый пример применения метода апекса.* Рассмотрим исследования движения собственной оси тела в пространстве для решения [30, 31] уравнений (1.6). В [30] показано, что при выполнении условий

$$A_2 = A_1 = A_3(n+2) \quad n \in N \tag{1.18}$$

уравнения (1.6) допускают решение

$$\begin{gathered} \omega_1(\nu_3) = \frac{\mu_2(n+1)}{n}\nu_3^n(\beta_1\nu_3 + \beta_2\sqrt{\lambda_0^2 - \nu_3^2}) \\ \omega_2(\nu_3) = \frac{\mu_2(n+1)}{n}\nu_3^n(\beta_2\nu_3 - \beta_1\sqrt{\lambda_0^2 - \nu_3^2}), \quad \omega_3(\nu_3) = \mu_1\nu_3^n \end{gathered} \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned} \nu_1(\nu_3) &= \frac{1}{\kappa_0}[\beta_1(n-(n+1)\nu_3^2) - \beta_2(n+1)\nu_3\sqrt{\lambda_0^2 - \nu_3^2}] \\ \nu_2(\nu_3) &= \frac{1}{\kappa_0}[\beta_2(n-(n+1)\nu_3^2) + \beta_2(n+1)\nu_3\sqrt{\lambda_0^2 - \nu_3^2}] \end{aligned} \tag{1.20}$$

где $\nu_3(\mathrm{t})$ удовлетворяет интегральному соотношению

$$\int\limits_{\nu_3^0}^{\nu_3} \frac{d\nu_3}{\nu_3^n\sqrt{\lambda_0^2 - \nu_3^2}} = -\frac{\mu_1(n+1)}{n+2}(t - t_0) \tag{1.21}$$

В формулах (1.19). (1.20) $\beta_1$, $\beta_2$, $\mu_1$, $\mu_2$ — постоянные параметры, $\kappa_0 = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}$, $\mu_2 = \frac{\mu_1 n}{\kappa_0(n+2)}$. Переменная $\nu_3(\mathrm{t})$ при $n > 1$ изменяется в промежутках

$$-\lambda_0 \le \nu_3 < 0, \quad 0 < \nu_3 \le \lambda_0 \tag{1.22}$$

Параметр $\lambda_0$, входящий в (1.19)—(1.22), имеет значение

$$\lambda_0 = \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1} \tag{1.23}$$

В силу (1.19). (1.20), из (1.11), (1.12) получим

$$\begin{gathered} \theta(\nu_3) = \arccos\nu_3, \quad \psi(\nu_3) = -\mathrm{arctg}(n+1)\sqrt{\lambda_0^2 - \nu_3^2} \\ \mathbf{i}_3 = \sqrt{\lambda_0^2 - \nu_3^2}\boldsymbol{\upsilon}_1 - \frac{1}{n+1}\boldsymbol{\upsilon}_2 + \nu_3\boldsymbol{\upsilon}_3 \end{gathered} \tag{1.24}$$

Из равенств (1.24) следует, что годографом вектора (1.24) является окружность с радиусом $\lambda_0$, лежащая в плоскости $O\xi\eta$; при $t \to \infty$ конец вектора (1.24) стремится к точке $\left(\lambda_0, -\frac{1}{n+1}, 0\right)$. То есть поведение годографа (1.24) носит асимптотический характер. Данный пример показывает эффективность применения метода апекса. Интерес представляют условия (1.18), которые можно отнести к обобщенным условиям Горячева—Чаплыгина в классической задаче о движении тяжелого твердого тела.

*1.4. Второй пример применения метода апекса.* Рассмотрим второй пример изучения движения главных осей инерции тела в неподвижном пространстве. Вначале дадим характеристику программных движений твердого тела, основанную на углах Эйлера, и полученным в динамике твердого тела результатам. Наиболее распространенными программными движениями являются прецессионные движения тела [38, 39]. Пусть вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ — единичный вектор, неизменно связанный с телом, а подвижная система координат $Oxyz$ является главной системой координат, то есть $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$. Введем постоянные параметры $\mu_0$, $\sigma_0$ и запишем $a_1$, $a_2$ $a_3$ через эти параметры:

$$a_1 = \sin\mu_0\cos\sigma_0, \quad a_2 = \sin\mu_0\sin\sigma_0, \quad a_3 = \cos\mu_0 \tag{1.25}$$

Движение тела называют прецессией относительно вертикали, если выполняется инариантное соотношение [39]

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = a_0 \tag{1.26}$$

где $a_0 = \cos\theta_0$ ($\theta_0 = \angle(\mathbf{a},\mathbf{v})$). Все уравнения динамики твердого тела, указанные выше (см. (1.1), (1.3), (1.4), (1.6)), содержат уравнение Пуассона

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega} \tag{1.27}$$

которое имеет первый инетграл $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 1$. Производная от левой части (1.26), в силу (1.27), $\mathbf{a}\cdot\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}) = 0$. То есть $\boldsymbol{\omega}$ при том, что $\mathbf{a}$ не параллелен $\mathbf{v}$, имеет вид [39]

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}_*\mathbf{a} + \dot{\psi}_*\mathbf{v} \tag{1.28}$$

Запишем решение уравнения (1.27) в случае (1.28); используя обозначения (1.25) и интеграл $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 1$, получим

$$\begin{gathered} \nu_1 = a_0\sin\mu_0\cos\sigma_0 - a_0'\sin\sigma_0\cos\varphi_* + a_0'\cos\sigma_0\cos\mu_0\sin\varphi_* \\ \nu_2 = a_0\sin\mu_0\sin\sigma_0 + a_0'\cos\sigma_0\cos\varphi_* + a_0'\sin\sigma_0\cos\mu_0\sin\varphi_* \\ \nu_3 = a_0\cos\mu_0 - a_0'\sin\mu_0\sin\varphi_* \end{gathered} \tag{1.29}$$

Следовательно, в силу (1.29), компоненты $\omega_i$ $(i = \overline{1, 3})$ зависят от переменной $\varphi_*$ и скоростей $\dot{\varphi}_*$ и $\dot{\psi}_*$, которые можно интерпретировать, как скорости собственного вращения и прецессии тела в прецессионной системе координат [37]. В общем случае они не совпадают с $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ из (1.11)–(1.17).

Согласно принятой терминологии [38, 39], прецессии тела подразделяются на классы:

1: $\dot{\varphi}_* = n_0$, $\dot{\psi}_* = m_0$ – регулярные прецессии;

2: $\dot{\varphi}_* \neq n_0$, $\dot{\psi}_* = m_0$ – полурегулярные прецессии первого типа;

3: $\dot{\varphi}_* = n_0$, $\dot{\psi}_* \neq m_0$ – полурегулярные прецессии второго типа;

4: $\dot{\varphi}_* \neq n_0$, $\dot{\psi}_* \neq m_0$ – прецессии общего вида,

где $n_0$ и $m_0$ – постоянные параметры. В классической задаче о движении тяжелого твердого тела, согласно результатам [39], регулярные прецессии имеют место только в частном случае решения Ж. Лагранжа [34], полурегулярные прецессии – в частном случае решения В. Гесса [40], прецессии общего вида – в решении А.И. Докшевича [41] ($\dot{\varphi}_*\dot{\psi}_* = \mathrm{const}$), в частном случае решения Ж. Лагранжа ($\dot{\psi}_* = \dot{\varphi}_*$) и в частном случае решения В. Гесса, установленном А. Брессаном [42]. В обобщенных задачах динамики твердого тела классов прецессий тела с неподвижной точкой значительно больше (см. обзор [43]).

*Замечание 1.* Применение в истолковании движении тела углов Эйлера в форме (1.10), (1.17) позволяет очевидным способом получить класс изоконических движений тела. Действительно, положив в (1.10), (1.17) $\dot{\psi} = \dot{\varphi}$, устанавливаем, что подвижный и неподвижный годографы угловой скорости симметричны друг другу относительно касательной к ним плоскости, которая содержит неподвижную точку $O$.

Рассмотрим движение одной из главных осей инерции тела в случае регулярных прецессий: $\dot{\varphi}_* = n_0$, $\dot{\psi}_* = m_0$. Из соотношений (1.29), в силу $\varphi_* = n_0 t$, имеем

$$
\begin{gathered}
\nu_1(t) = a_0 \sin\mu_0 \cos\sigma_0 - a_1' \sin\sigma_0 \cos n_0 t + a_1' \cos\sigma_0 \cos\mu_0 \sin n_0 t \\
\nu_2(t) = a_0 \sin\mu_0 \sin\sigma_0 + a_1' \cos\sigma_0 \cos n_0 t + a_1' \sin\sigma_0 \cos\mu_0 \sin n_0 t \\
\nu_3(t) = a_0 \cos\mu_0 - a_1' \sin\mu_0 \sin n_0 t
\end{gathered} \tag{1.30}
$$

Компоненты угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ из (1.28) таковы

$$
\omega_1(t) = n_0 a_1 + m_0 \nu_1(t), \quad \omega_2(t) = n_0 a_2 + m_0 \nu_2(t), \quad \omega_3(t) = n_0 a_3 + m_0 \nu_3(t) \tag{1.31}
$$

где $a_i$ $(i = \overline{1, 3})$ имеют значения (1.25), а функции $\nu_i(t)$ $(i = \overline{1, 3})$ указаны в (1.30). Тогда, на основании (1.30), (1.31), углы Эйлера определим из (1.11), (1.12):

$$
\begin{gathered}
\theta(t) = \arccos \nu_3(t), \quad \varphi(t) = \frac{\nu_1(t)}{\nu_2(t)}, \\
\psi(t) = m_0 t - \operatorname{arctg} \frac{\sin\mu_0 \cos n_0 t}{a_0' \cos\mu_0 + a_0 \sin\mu_0 \sin n_0 t}
\end{gathered} \tag{1.32}
$$

где $a_0' = \sqrt{1 - a_0^2}$. Изучим годограф вектора (1.15) при наличии равенств (1.32):

$$
\mathbf{i}_3 = f_1(t)\,\boldsymbol{\upsilon}_1 + f_2(t)\boldsymbol{\upsilon}_2 + f_3(t)\boldsymbol{\upsilon}_3 \tag{1.33}
$$

$$
\begin{gathered}
f_1(t) = (a_0' \cos\mu_0 + a_0 \sin\mu_0 \sin n_0 t) \sin m_0 t - \cos m_0 t \sin\mu_0 \cos n_0 t \\
f_2(t) = -(a_0' \cos\mu_0 + a_0 \sin\mu_0 \sin n_0 t) \cos m_0 t - \sin m_0 t \sin\mu_0 \cos n_0 t \\
f_3(t) = a_0 \cos\mu_0 - a_0' \sin\mu_0 \sin n_0 t
\end{gathered} \tag{1.34}
$$

Для наглядности рассмотрим случай $\cos\mu_0 = 0$, $m_0 = n_0$, $a_0 = 0$. Тогда, обозначая $n_0 = \tau$, из (1.34) получим

$$
f_1(\tau) = -\frac{1}{2}(1 + \cos 2\tau), \quad f_2(\tau) = -\frac{1}{2}\sin 2\tau, \quad f_3(\tau) = -\sin\tau \tag{1.35}
$$

Из формул (1.33), (1.35) следует, что проекцией годографа (1.35) на плоскость $O\xi\eta$ является окружность радиуса 0.5. Движение изображающей точки проеции является периодическим с периодом по $\tau$, равным $\pi$. Годограф (1.33) изображен на рис. 1.

Движение конца вектора (1.33) указано стрелкой. Очевидно, что в силу (1.35) движение главной оси $Oz$ в неподвижном пространстве будет иметь периодический характер (период ее движения по $\tau$ равен $2\pi$).

Аналогично изучаются и другие регулярные прецессии тела в случае резонансных значений $m_0 = kn_0$ $(k \in N)$, а также случай $a_0 \neq 0$. Предварительный анализ показывает, что аналоги годографов вектора (1.33) имеют вид “роз Клелилии”, открытых Брандом.

Отметим, что в обобщенных задачах динамики открыты многочисленные классы прецессий не только в случае постоянного гиростатического момента, но и в случае переменного гиростатического момента [43].

Важным свойством углов Эйлера является применение их в теории ориентации и управления механическими системами. Если известны функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\theta(t)$, то параметры Родрига—Гамильтона находятся из соотношений [33, 44]

$$
\lambda_0 = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi + \varphi}{2}, \quad \lambda_1 = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi - \varphi}{2}
$$

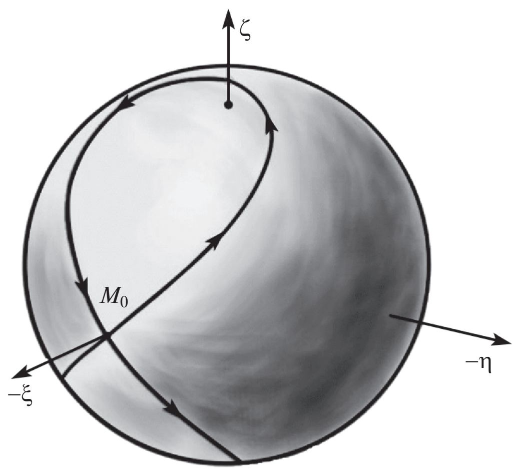


**Рис. 1.** Годограф вектор-функции

$$\lambda_2 = \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi-\varphi}{2}, \quad \lambda_3 = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi+\varphi}{2}$$

Они находят широкое применение в разработке ориентации технических объектов (см., например, [45]).

**2. Модифицированный метод Пуансо.** Обозначим через $\mathbf{x} = A\boldsymbol{\omega}$ момент количества движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Тогда уравнения (1.1) запишутся в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}\times a\mathbf{x} + \mathbf{s}(\mathbf{e}\times\boldsymbol{\nu}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times a\mathbf{x} \tag{2.1}$$

где $a$ — гирационный тензор. При $\mathbf{s} = 0$ из (2.1) имеем случай Л. Эйлера

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}\times a\mathbf{x} \tag{2.2}$$

то есть $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{0}$, вектор $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 = \mathbf{const}$. Решение Эйлера изучали Ж. Сильвестр [2], Г. Дарбу [5], К. Якоби [7], В. Гесс [9], Ж. Мак-Куллаг [3], Э. Раус [10] и многие другие ученые. Результаты их исследований изложены в монографиях (Э. Раус [10], К. Магнус [35], Г.К. Суслов [15]) и во многих учебниках по теоретической механике. Здесь отметим, что герполодии (неподвижный годограф вектора угловой скорости) исследовал Г. Дарбу [5]. Для изучения уравнений этой кривой Г. Дарбу в плоскости герполодии вводил полярные координаты $\rho, \alpha$ и получил уравнения [46, стр. 176]

$$\frac{d\rho^2}{dt} = \sqrt{f(\rho^2)}, \quad \rho^2\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2E_* x_0}[\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot(\mathbf{x}_0\times\boldsymbol{\omega})] \tag{2.3}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, $E_*$ — постоянный параметр. Уравнения Г. Дарбу (2.3) были обобщены П.В. Харламовым [17] на случай произвольного решения (1.7), (1.8) уравнений (1.1), (1.2). В цилиндрической системе координат $O\xi\eta\zeta$ он получил уравнения

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{H}}(t) = \omega_\xi(t)\boldsymbol{\upsilon}_1 + \omega_\eta(t)\boldsymbol{\upsilon}_2 + \omega_\zeta(t)\boldsymbol{\upsilon}_3 \tag{2.4}$$

$$\omega_\xi(t) = \omega_\rho(t)\cos\alpha(t), \quad \omega_\eta(t) = \omega_\rho(t)\sin\alpha(t) \quad (\omega_\rho^2 = \omega^2 - \omega_\zeta^2) \tag{2.5}$$

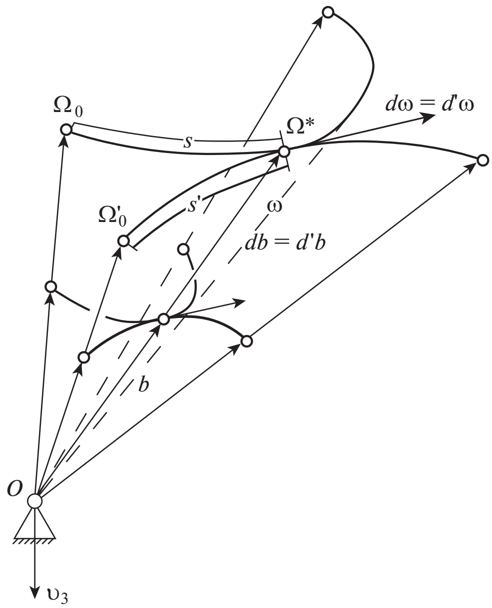


**Рис. 2.** Годографы угловой скорости

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{\omega_\rho^2(t)}\left[\dot{\boldsymbol{\omega}}(t)\cdot(\boldsymbol{\nu}(t)\times\boldsymbol{\omega}(t))\right] \tag{2.6}$$

В формулах (2.3), (2.6) $\dot{\boldsymbol{\omega}}(t)$ – относительная производная угловой скорости тела. Логично полагать, что исследование уравнений неподвижного годографа вектора угловой скорости в общем случае проводится с помощью метода Г. Дарбу–П.В. Харламова.

Остановимся на модифицированном методе Пуансо, предложенном в статье [18]. На рис. 2 изображены подвижный и неподвижный годографы вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$.

Из равенства абсолютной и относительной производной этого вектора следует $d\boldsymbol{\omega}(t) = d'\boldsymbol{\omega}(t)$. Это означает, что длины годографов $\tilde{s}$ и $\tilde{s}'$ равны, т.е. $\cup\Omega_0\Omega^* = \cup\Omega'_0\Omega^*$. Здесь $\Omega_0$ – начальная точка (при $t = t_0$) на неподвижном годографе, $\Omega'_0$ – начальная точка (при $t = t_0$) на подвижном годографе, $\Omega^*$ – точка касания годографов в момент $t$. Из указанных свойств и следует теорема Л. Пуансо о представлении движения тела качением без скольжения подвижного аксоида вектора угловой скорости по неподвижному.

Определенную сложность в применении формулы для полярного угла из (2.6) представляет зависимость от производной $\dot{\boldsymbol{\omega}}$. В статье [18] получена более простая формула

$$\operatorname{tg}(\alpha(t) - \psi(t)) = \delta\frac{(\boldsymbol{\omega}(t)\times\boldsymbol{\nu}(t))\cdot(\boldsymbol{\nu}(t)\times\mathbf{i}_3)}{\mathbf{i}_3\cdot(\boldsymbol{\omega}(t)\times\boldsymbol{\nu}(t))} \tag{2.7}$$

где в силу (1.12)

$$\psi(t) = \int_{t_0}^{t}\frac{(\boldsymbol{\omega}(\tau)\times\mathbf{i}_3)\cdot(\boldsymbol{\nu}(\tau)\times\mathbf{i}_3)}{(\boldsymbol{\nu}(\tau)\times\mathbf{i}_3)^2}d\tau \tag{2.8}$$

Равенство (2.7) и функция $\psi(t)$ из (2.8) позволяют не только получить функцию $\alpha(t)$ без использования производной $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, но и связать две кинематические переменные: $\alpha$ и $\psi$. При этом, если $\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{i}_3 = \text{const}$, то $\delta = 0$, в противном случае $\delta = 1$. Данное обстоятельство имеет важное значение в комплексном подходе истолкования движения тела.

Введем вектор

$$\mathbf{b}(t) = b(t)\boldsymbol{\omega}(t)\ (b(t) > 0) \tag{2.9}$$

На рис. 2 указаны подвижный и неподвижный годографы вектора $\mathbf{b}(t)$. Очевидно, что, как и в случае годографов угловой скорости, подвижный и неподвижный годографы вектора $\mathbf{b}(t)$ имеют общую касательную и в силу $db(t)\boldsymbol{\omega}(t) = d'b(t)\boldsymbol{\omega}(t)$ длины дуг, описанных за одинаковый промежуток времени концом вектора $\mathbf{b}(t)$ на подвижном и неподвижном годографе, равны [25]. Следовательно, за основу кинематического истолкования можно взять годографы вектора $\mathbf{b}(t)$ и движение тела, имеющего неподвижную точку, представить качением без скольжения подвижного годографа вектора $\mathbf{b}(t)$ по неподвижному. При этом вращать тело необходимо с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega}^2(t) = \omega_1^2\ (\mathrm{t}) + \omega_2^2(\mathrm{t}) + \omega_3^2(\mathrm{t})$$

Это обстоятельство можно учесть на заключительном этапе кинематического истолкования, то есть при качении аксоидов годографов вектора $\mathbf{b}(t)$. При этом функция $b(t)$ – произвольная дифференцируемая функция.

*2.1. Первый метод в истолковании движения тела*. Покажем, что функцию $b(t)$ при определенных условиях можно выбрать так, чтобы неподвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ находился в некоторой, неподвижной в пространстве, плоскости.

Рассмотрим вектор-функцию (2.4). Предположим, что $\omega_\zeta(t)$ не изменяет своего знака при $t \in [0;\infty)$. Тогда в качестве вектора $\mathbf{b}(t)$ можно взять вектор $\boldsymbol{\omega}(t)/\omega_\zeta(t)$ и из (2.4) получить

$$\mathbf{b}_{\text{Н}}(t) = \frac{\omega_\xi(t)}{\omega_\zeta(t)}\boldsymbol{\upsilon}_1 + \frac{\omega_\eta(t)}{\omega_\zeta(t)}\boldsymbol{\upsilon}_2 + \boldsymbol{\upsilon}_3 \tag{2.10}$$

Следовательно, функция $b(t) = \dfrac{1}{\omega_\zeta(t)}$ и подвижный годограф вектора $\mathbf{b}(t)$ определим из формулы

$$\mathbf{b}_{\Pi}(t) = \frac{1}{\omega_\zeta(t)}[\omega_1(t)\mathbf{i}_1 + \omega_2(t)\mathbf{i}_2 + \omega_3(t)\mathbf{i}_3] \tag{2.11}$$

Из (2.10) получаем, что неподвижный годограф $\mathbf{b}(t)$ лежит в плоскости $\zeta = 1$. Поскольку касательные векторы к $\mathbf{b}_{\text{Н}}(t)$ тоже лежат в этой плоскости, то движение тела можно представить качением без скольжения кривой (2.11) по плоской кривой (2.10). Таким образом, получили некоторый аналог истолкования Л. Пуансо о представлении движения свободного тела.

Выбор вектора $\mathbf{b}(t)$ зависит от свойств вектор-функции (2.4). Например, если одна из функций $\omega_\xi(t)$, $\omega_\eta(t)$ не обращается в нуль, то в качестве функции $b(t)$ можно выбрать или $\dfrac{1}{\omega_\xi(t)}$, или $\dfrac{1}{\omega_\eta(t)}$.

*2.2. Второй метод в истолковании движения тела*. Рассмотрим вектор-функцию (1.8). Пусть $\omega_3(\mathrm{t}) \neq 0$ при $t \in [0;\infty)$. Тогда вектор $\mathbf{b}(t)$ будем выбирать так

$$\mathbf{b}_{\Pi}(t) = \frac{1}{\omega_3(t)}\boldsymbol{\omega}_{\Pi} = \frac{\omega_1(t)}{\omega_3(t)}\mathbf{i}_1 + \frac{\omega_2(t)}{\omega_3(t)}\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \tag{2.12}$$

Следовательно, в силу (2.4), имеем

$$\mathbf{b}_{\text{H}}(t) = \frac{1}{\omega_3(t)}[\omega_\xi(t)\,\boldsymbol{\upsilon}_1 + \omega_\eta(t)\boldsymbol{\upsilon}_2 + \omega_\zeta(t)\boldsymbol{\upsilon}_3] \tag{2.13}$$

Движение тела можно истолковать как качение аксоида с направляющей линией (2.12) по аксоиду с направляющей линией (2.13). Очевидно, что подвижный годограф вектора (2.12) является плоской кривой, что в ряде случаев может упростить истолкование движения тела.

*2.3. Третий метод в истолковании движения тела.* Представляется актуальным получение такого метода в истолковании движения, который бы не содержал субъективных факторов конкретного подхода, а был бы универсальным для любых решений уравнений динамики твердого тела. Так как при истолковании движения тела не используется его конструктивное строение, то вполне естественно применить объективный фактор в истолковании движения (как это осуществил Л. Пуансо), а именно свойство движения эллипсоида инерции. Положим, что конец вектора $\mathbf{b}(t)$ принадлежит эллипсоиду инерции в неподвижной точке. Обозначим через $A_1$, $A_2$, $A_3$ главные моменты инерции тела. Тогда уравнение эллипсоида инерции таково:

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 = \sigma_0^2 \tag{2.14}$$

где $x$, $y$, $z$ — координаты точек, принадлежащих эллипсоиду $\sigma_0^2$ — постоянная. Потребуем, чтобы конец вектора $\mathbf{b}(t)$ из формулы (2.9) принадлежал эллипсоиду (2.14). Для нахождения функции $b(t)$ подставим в (2.14) вместо $x$, $y$, $z$ величины $b_i = b(t)\omega_i(t)$. Тогда

$$b(t) = \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{A_1\,\omega_1^2(t) + A_2\omega_2^2(t) + A_3\,\omega_3^2(t)}} \tag{2.15}$$

В силу (1.8), (2.4) подвижный и неподвижный годографы вектора $\mathbf{b}(t)$ запишем в виде

$$\mathbf{b}_{\Pi}(t) = b(t)[\omega_1(t)\mathbf{i}_1 + \omega_2(t)\mathbf{i}_2 + \omega_3(t)\mathbf{i}_3] \tag{2.16}$$

$$\mathbf{b}_{\text{H}}(t) = \mathrm{b}(t)[\omega_\rho(t)\cos\alpha(t)\boldsymbol{\upsilon}_1 + \omega_\rho(t)\sin\alpha(t)\boldsymbol{\upsilon}_2 + \omega_\zeta(t)\boldsymbol{\upsilon}_3] \tag{2.17}$$

Функция $b(t)$ определена выражением (2.15).

Движение тела будем воспроизводить качением годографа (2.16) по годографу (2.17). Выражение (2.15) упрощается, например, для уравнений (1.1) с интегралами (1.2). В главной системе координат интеграл энергии из (1.2) можно записать следующим образом:

$$A_1\,\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 = 2\big(E + s(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nu})\big) \tag{2.18}$$

Используя равенство (2.18), из (2.15) получим

$$b(t) = \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{2\big(E + s(\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\nu})\big)}} \tag{2.19}$$

В формулу (2.19) входит лишь скалярное произведение векторов $\mathbf{e}$, $\boldsymbol{\nu}$, что в ряде задач имеет преимущество в использовании (2.15).

*Замечание 2.* Э. Раус применил [11] методы сферической тригонометрии для изучения конусов, которые описывают ось $l$ момента количества движения в подвижном пространстве, и ось $l_*$ вращения тела в случае Эйлера. Приведем цитату [11, том 2, стр. 123]: “Но можно использовать также сферу с центром в неподвижной точке, считая ее связанной с телом или неподвижной в пространстве. Этот способ особенно полезен в случае, когда нужно изучить движение какой-либо прямой в пространстве или в теле. Измеряя соответствующие углы дугами, приведенными на сфере, можно упростить процесс вычислений с помощью соответствующих формул сферической тригонометрии". Очевидно, что в общем случае оси $l$ и $l_*$ пересекают сферу по сфероконическим кривым.

Сказанное выше означает, что подход Рауса можно условно отнести к частному случаю, изложенному выше.

*2.4. Пример применения модифицированного метода Пуансо.* Рассмотрим решение (1.19)–(1.21), которое получено в [30] и имеет место при условиях (1.18) для уравнений (1.6) с силовой функцией

$$U(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = \frac{\mu_1 A_1 \nu_3^{2(n-1)}}{2(n+2)}[2\mu_1 n^2 - \mu_1(n+1)(n-2)]\nu_3^2 - \\ - 2\mu_2 n(n+2)(\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2) \tag{2.20}$$

Представляет интерес результат, что уравнения Пуассона на инвариантных соотношениях (ИС) (1.19), (1.20) имеют ИС

$$\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2 = \frac{\kappa_0}{n}[n - (n+1)\nu_3^2] \tag{2.21}$$

которое, в силу метода обратных задач динамики, нельзя использовать в выражении (2.20). Для применения прямого метода Пуансо, в силу того, что функция $\psi(\nu_3)$ найдена (она указана в системе (1.24)), целесообразно использовать формулу (2.7). Тогда на решении (1.19), (1.20) получим

$$\alpha(\nu_3) = \operatorname{arctg}\frac{n+2}{(n+1)\sqrt{\lambda_0^2 - \nu_3^2}} \tag{2.22}$$

Запишем уравнения неподвижного годографа вектора угловой скорости, используя соотношения (2.4), (2.5), (2.22):

$$\omega_\xi(\nu_3) = \frac{\mu_1(n+1)}{n+2}\nu_3^n\sqrt{\lambda_0^2 - \nu_3^2}, \quad \omega_\eta(\nu_3) = \mu_1\nu_3^n, \quad \omega_\zeta(\nu_3) = \frac{\mu_1(n+1)}{n+2}\nu_3^{n+1} \tag{2.23}$$

Для подвижного годографа вектора угловой скорости обратимся к равенствам (1.19). Исключая в них переменную $\nu_3$, получим

$$(n+2)(\omega_1^2 + \omega_2^2) - n\omega_3^2 = 0, \\ \mu_2^n(n+2)^{2n}(\beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2)^n - \mu_1^{2n}n^2(n+1)^n\omega_3^{n-1} = 0 \tag{2.24}$$

Из системы (2.24) следует, что подвижный годограф $\boldsymbol{\omega}$ – линия пересечения конуса второго порядка и алгебраической поверхности $n$-го порядка.

Применим к исследованию решения (1.19), (1.20) модифицированный метод [18]. Пусть $\mathbf{b}(\nu_3) = b(\nu_3)\omega(\nu_3)$, где

$$b(\nu_3) = \frac{1}{\nu_3^n} \quad (\nu_3 \neq 0) \tag{2.25}$$

Функция (2.25) определена в промежутках (1.22). Тогда из (1.19), (2.9), (2.22), (2.23), (2.25) имеем

$$\mathbf{b}_\Pi(\nu_3) = b_1(\nu_3)\mathbf{i}_1 + b_2(\nu_3)\mathbf{i}_2 + b_3(\nu_3)\mathbf{i}_3 \tag{2.26}$$

$$\mathbf{b}_H(t) = b_\xi(\nu_3)\boldsymbol{\upsilon}_1 + b_\eta(\nu_3)\boldsymbol{\upsilon}_2 + b_\zeta(\nu_3)\boldsymbol{\upsilon}_3 \tag{2.27}$$

где

$$
\begin{aligned}
& b_1(\nu_3) = \frac{\mu_1(n+1)}{\kappa_0(n+2)}(\beta_1\nu_3 + \beta_2\sqrt{\lambda_0^2 - \nu_3^2}) \\
& b_2(\nu_3) = \frac{\mu_1(n+1)}{\kappa_0(n+2)}(\beta_2\nu_3 - \beta_1\sqrt{\lambda_0^2 - \nu_3^2}), \quad b_3(\nu_3) = \mu_1
\end{aligned} \tag{2.28}
$$

$$
b_\xi(\nu_3) = \frac{\mu_1(n+1)}{n+2}\sqrt{\lambda_0^2 - \nu_3^2}, \quad b_\eta(\nu_3) = \mu_1, \quad b_\zeta(\nu_3) = \frac{\mu_1(n+1)}{n+2}\nu_3 \tag{2.29}
$$

Подвижный и неподвижный годографы (2.26) и (2.27) — конгруэнтные плоские кривые; в алгебраической форме, в силу (2.28) и (2.29), их координаты определяются уравнениями

$$
\begin{aligned}
& b_1^2(\nu_3) + b_2^2(\nu_3) = \frac{\mu_1^2 n}{n+2}, \quad b_3(\nu_3) = \mu_1 \\
& b_\xi^2(\nu_3) + b_\zeta^2(\nu_3) = \frac{\mu_1^2 n}{n+2}, \quad b_\eta(\nu_3) = \mu_1
\end{aligned} \tag{2.30}
$$

Таким образом, применение модифицированного метода [18] позволяет представить движение тела качением без скольжения двух конусов (2.30). В силу структуры (2.26), (2.27), данный подход имеет несомненные преимущества перед прямым методом Пуансо, так как уравнения подвижного и неподвижного годографов (2.24) содержат одно алгебраическое уравнение, степень которого зависит от параметра $n$. Это обстоятельство существенно скажется на построении годографов. В отличие от этого свойства, годографы (2.30) для любых $n$ являются плоскими кривыми (уравнение плоскости не зависит от $n$) и только радиусы окружностей зависят от $n$.

Рассмотрим движение эллипсоида инерции в решении (1.19), (1.20). Данная задача решается следующим образом. Запишем уравнение эллипсоида инерции тела, используя равенства из (1.18):

$$
(n+2)(x^2 + y^2) + z^2 = \sigma_0^2 \tag{2.31}
$$

где $x$, $y$, $z$ — координаты точек эллипсоида (2.31), $\sigma_0^2$ — постоянная. Непосредственной подстановкой значений $b_i$ $(i = \overline{1, 3})$ из (2.28) в уравнение (2.31) убеждаемся в том, что конец подвижного годографа вектора $\mathbf{b}_\Pi$ из (2.26) принадлежит поверхности и (2.31) при $\sigma_0^2 = \mu_1^2(n+1)$. То есть при обкатывании поверхностей с направляющими $\mathbf{b}_\Pi$, $\mathbf{b}_\text{H}$ получим движение эллипсоида инерции. Остается выяснить свойство расположения эллипсоида инерции в неподвижном пространстве. Покажем, что эллипсоид инерции тела на кривой (2.28) и (2.29) касается неподвижной плоскости $b_\eta(\nu_3) = \mu_1$.

Запишем уравнение (2.31) в переменных $b_i$ $(i = \overline{1, 3})$:

$$
\Phi(b_1, b_2, b_3) = (n+2)(b_1^2 + b_2^2) + b_3^2 - \mu_1^2(n+1) = 0 \tag{2.32}
$$

Положение вектора, неизменно связанного с телом, можно найти, используя формулы (1.13)—(1.15), в которых на исследуемом решении имеют место равенства

$$
\begin{aligned}
& \cos\theta = \nu_3, \quad \sin\theta = \sqrt{1 - \nu_3^2}, \quad \sin\varphi = \frac{\nu_1(\nu_3)}{\sqrt{1 - \nu_3^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{\nu_1(\nu_3)}{\sqrt{1 - \nu_3^2}} \\
& \sin\psi = \frac{\sqrt{\lambda_0^2 - \nu_3^2}}{\sqrt{1 - \nu_3^2}}, \quad \cos\psi = \frac{1}{(n+1)\sqrt{1 - \nu_3^2}}
\end{aligned} \tag{2.33}
$$

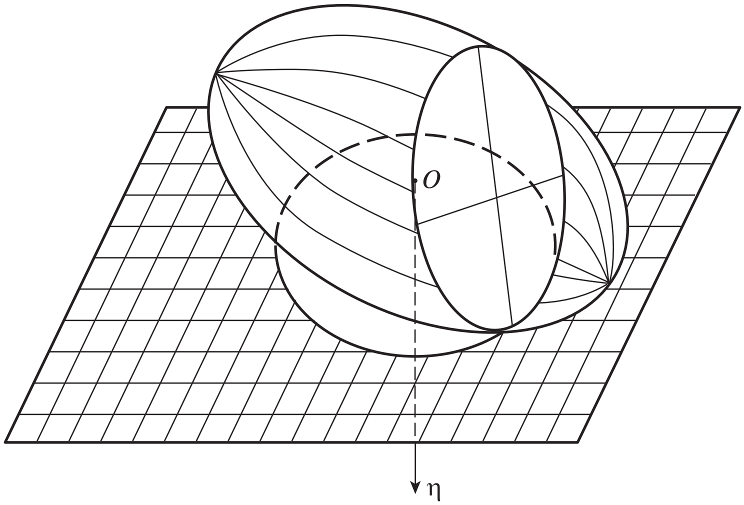


**Рис. 3.** Качение эллипсоида инерции тела

Вычислим градиент к поверхности (2.32) на кривой $\mathbf{b}_{\Pi}(\nu_3)$:

$$\overline{\mathrm{grad}\Phi}\Big|_{\mathbf{b}_{\Pi}(\nu_3)} = \frac{1}{\nu_3}[-\mu_1^2 n\nu_1 + \beta_1(n+2)\mu_2]\mathbf{i}_1 + \frac{1}{\nu_3}[-\mu_1 n\nu_2 + \beta_2(n+2)]\mathbf{i}_2 + \mu_1\mathbf{i}_3 \tag{2.34}$$

Используя формулы (1.13)–(1.15), (2.33), (2.34), вычислим значение вектора (2.34) в неподвижной системе координат [19]

$$\overline{\mathrm{grad}\Phi}\Big|_{\mathbf{b}_{\Pi}(\nu_3)} = \mu_1(n+1)\boldsymbol{\upsilon}_2 \tag{2.35}$$

Равенство (2.35) показывает, что при движении эллипсоида инерции в неподвижном пространстве он катается по плоскости $b_\eta(\nu_3) = \mu_1$ по кривым (2.28) и (2.29). Эскиз движения эллипсоида показан на рис. 3. Поскольку при $t \to \infty$ $\nu_3 \to 0$, а точка $\nu_3 = 0$ исключена из рассмотрения, то по непрерывности можно сделать заключение, что при $t \to \infty$ эллипсоид инерции в неподвижном пространстве стремится к состоянию покоя.

Для наглядности на рис. 3 ось $O\eta$ направлена вниз, так как рассматривается задача о движении тела в потенциальном поле, для которой вектор $\boldsymbol{\nu}$ в неподвижном пространстве может быть выбран произвольно.

*Замечание 3.* И.Н. Гашененко [47] при исследовании случая А. Брессана [42] установил, что движение гироскопа Гесса в этом варианте можно представить качением без скольжения эллипсоида инерции по плоскости. Однако он использовал метод, отличный от представленного выше модифицированного метода, который можно применять для любого решения уравнений динамики.

**Заключение.** В статье предложен комплексный подход в истолковании движения твердого тела, имеющего неподвижную точку, основанный на применении углов Эйлера, метода апекса, классического метода Пуансо и модифицированного автором статьи метода Пуансо. Показано, что кинематическая формула, полученная автором статьи, имеет большое значение в истолковании движения твердого тела с неподвижной точкой с помощью уравнений Г. Дарбу—П.В. Харламова. Особое внимание уделено результатам Э. Рауса, Ж. Сильвестра и других ученых, исследующих качественные свойства в движении тела.

Данная статья может быть отнесена к первой части в комплексном подходе истолкования движения. Вторая часть будет посвящена исследованию частных решений уравнений движения тяжелого твердого тела (Л. Эйлера, Д.К. Бобылева–В.А. Стеклова, В.А. Стеклова, А.И. Докшевича) и других решений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Poinsot L.* Thèorie nouvelle de la rotation des corps // J. Math. Pures et Appl. 1851. V. 16. P. 289–336.
2. *Sylvester J.J.* On the motion of a rigid body acted on by no external forces // Philos. Trans. Roy. Soc. London. 1866. V. 156. P. 757–780.
3. *Mac Cullagh J.* On the rotation of a solid body // Proc. Roy. Irish Acad. 1840–1844. V. 2. P. 542–545; 1845–1847. V. 3. P. 370–371.
4. *Darboux G.* Sur le mouvement d'un corps pesant de revolution fixe par un point de son axe // J. Math. Pures et Appl. 1885. V. 1. P. 403–430.
5. *Darboux G.* Sur la thèorie de Poinsot et sur des mouvements correspondants à la mâme polhodie // C. R. Acad. Sci. 1885. V. 101. P. 1555–1561.
6. *Jacobi C.G.J.* Second mèmoire sur la rotation d'un corps non soumis à des forces accèleratrices // *Jacobi C.G.J.* Gesammelte Werke. Berlin: G. Reimer, 1882. V. 2. S. 427–467.
7. *Jacobi C.G.J.* Sur la rotation d'un corps // *Jacobi C.G.J.* Gesammelte Werke. Berlin: G. Reimer, 1882. V. 2. S. 289–352.
8. *Hess W.* Über das Problem der Rotation // Math. Ann. 1882. V. 20. S. 461–470.
9. *Hess W.* Über des Jacobische Theorem von der Ersetzbarkeit einer Lagrangeschen Rotation durch zwei Poinsotische Rotation // Z. Math. Phys. 1888. V. 33. P. 292–305.
10. *Routh E.J.* A treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. The advanced part. London: Macmillan, 1884. 343 p.
11. *Раус Э.Дж.* Динамика системы твердых тел. М.: Наука, 1983. Т. 1. 464 с.; Т. 2. 544 с.
12. *Жуковский Н.Е.* По поводу сообщения Ж. Лиувилля "О вращении тяжелых твердых тел" // *Жуковский Н.Е.* Собр. соч. Т. 7. М.: Гостехиздат, 1950. С. 218–220.
13. *Жуковский Н.Е.* Геометрическая интерпретация рассмотренного С.В. Ковалевской случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки // *Жуковский Н.Е.* Собр. соч.: и 7 т. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат. 1948. С. 294–339.
14. *Жуковский Н.Е.* О значении геометрического истолкования в теоретической механике // *Жуковский Н.Е.* Собр. соч.: в 7 т. Т. 7. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. С. 9–15. (Изд. 1-е: Мат. сборник. 1896. Т. 8, вып. 1. С. 37–42).
15. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.: Гостехиздат. 1946. 655 с.
16. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. Киев: Наук. думка, 1978. 296 с.
17. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 502–507.
18. *Горр Г.В.* Об одном подходе в применении теоремы Пуансо кинематического истолкования движения тела с неподвижной точкой // Механика твердого тела. 2012. Вып. 42. С. 26–36.
19. *Горр Г.В.* Об одном аналоге истолкования Пуансо решения Эйлера в задаче о движении твердого тела в потенциальном поле сил // Прикл. математика и механика. 2020. Т. 84, № 1. С. 13–25.
20. *Делоне Н.Б.* К вопросу о геометрическом истолковании интегралов движения твердого тела около неподвижной точки, данных С.В. Ковалевской // Мат. сборник. 1892. Т. 16. № 2. С. 346–351.
21. *Харламов П.В., Коваль В.И.* Движение гироскопа Ковалевской в случае Делоне // Механика твердого тела. 1982. Вып. 14. С. 38–54.
22. *Млодзеевский Б.К.* Об одном случае движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Мат. сборник. 1896. Т. 18. Вып. 1. С. 78–85.
23. *Ковалевская С.В.* Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки // *Ковалевская С. В.* Научные работы. (Классики науки). М.: Изд-во АН СССР, 1948. С. 15–220.

24. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование одного решения задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку // Докл. АН СССР. 1964. Т. 158, № 5. С. 1048–1050.

25. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. Ч. I. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. 221 с.

26. *Харламов П.В.* Движение гироскопа С.В. Ковалевской в случае Б.К. Млодзеевского // Механика твердого тела. 1974. Вып. 7. С. 9–17.

27. *Чаплыгин С.А.* Геометрическая интерпретация движения в жидкости тела винтовой симметрии // *Чаплыгин С.А.* Собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. Т. 3. С. 288–291.

28. *Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М.* Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наук. думка, 2012. 401 с.

29. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. Донецк: ДонНУ, 2010. 364 с.

30. *Горр Г.В.* О трех инвариантных соотношениях уравнений движения тела в потенциальном поле сил // Прикл. математика и механика. 2019. Т. 83, № 2. С. 202–214.

31. *Gorr G.V., Tkachenko D.N., Shchetinina E.K.* Research on the Motion of a Body in a Potential Force Field in the Case of Three Invariant Relations // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2019. V. 15. № 3. P. 327–342.

32. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 384 с.

33. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.

34. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. В 2-х т. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. Т. 2. 440 с.

35. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. М: Мир, 1974. 526 с. = *Magnus K.* Kreisel. Theorie und Anwendungen. Berlin–Heidelbe-New York: Springer-Verlag, 1971. 520 p.

36. *Yehia H.M.* Goriachev’s solution in the dynamics of a rigid body about a fixed point // Механика твердого тела. 2018. Вып. 48. С. 106–116.

37. *Горр Г.В., Балаклицкая Т.В.* О движении главных осей твердого тела, имеющего неподвижную точку, в случае прецессий относительно вертикали // Механика твердого тела. 2019. Вып. 49. С. 55–65.

38. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Annali di Matematica. 1947. Ser. 4. V. 26. F. 3–4. P. 271–281.

39. *Горр Г.В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных твердых тел // Прикл. матем. и механика. 2003. Т. 67. Вып. 4. С. 573–587.

40. *Hess W.* Über die Euler’schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. 1890. V. 37. H. 2. S. 153–181.

41. *Докшевич А.И.* Решения в конечном виде уравнений Эйлера-Пуассона. Киев: Наук. думка, 1992. 168 с.

42. *Брессан А.О.* О прецессионных движениях твердого тела, относящихся к случаю Гесса // Механика. Период. сб. перевод. иностр. статей. 1958. Т. 52. С. 153–158.

43. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Котов Г.А.* Движение гиростата с переменным гиростатическим моментом. Донецк: ИПММ, 2018. 265 с.

44. *Кошляков В.Н.* Параметры Родрига-Гамильтона и их приложения в механике твердого тела. Киев: Ин-т математики НАНУ, 1994. 176 с.

45. *Ткаченко А.И.* О применении параметров Родрига-Гамильтона в алгоритмах определения ориентации объекта // Кибернетика и вычислительная техника. Киев: Наук. думка, 1986. Вып. 69. С. 47–52.

46. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. В 2-х т. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. Т. 2. Ч. 2. 555 с.

47. *Гашененко И.Н.* Кинематическое представление по Пуансо движения тела в случае Гесса // Механика твердого тела. 2010. Вып. 40. С. 12–20.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 6, с. 73–87

*УДК 531.3*

# ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЯЕМЫХ ШАРНИРНЫХ МЕХАНИЗМОВ СО ЗВЕНЬЯМИ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ ДЛЯ ЭКЗОСКЕЛЕТОВ ЧЕЛОВЕКА


**А. В. Борисов[a],*, Г. М. Розенблат[b],**, Л. В. Кончина[a],***, М. Г. Куликова[a],****, К. С. Маслова[a],*****

[a] *Филиал ФГБОУ ВО НИУ "МЭИ" в г. Смоленске. Смоленск, Россия*

[b] *Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ) Москва, Россия*

**e-mail: BorisowAndrej@yandex.ru*

***e-mail: gr51@mail.ru*

****e-mail: la_kon@mail.ru*

*****e-mail: kulikova0808@rambler.ru*

******e-mail: maslowaksusha1@yandex.ru*

Поступила в редакцию 13.11.2020 г.
После доработки 11.01.2021 г.
Принята к публикации 11.01.2021 г.

Рассматривается пространственная модель экзоскелета со звеньями переменной длины. Построение многозвенной модели проведено на основе анализа модели одного звена с одной закрепленной точкой в пространстве и модели с двумя звеньями переменной длины. В связи с возникающими трудностями при построении систем дифференциальных уравнений движения при относительно большом количестве звеньев, связанных с большим временем составления даже при использовании современных систем компьютерной математики, рассмотрено обобщение для механизма на случай произвольного конечного количества звеньев и предложен скоростной метод построения систем дифференциальных уравнений движения рассматриваемых моделей механизмов. Приводится модель экзоскелета с пятью звеньями переменной длины в пространстве, которая может использоваться при создании реально работающего экзоскелета или антропоморфного робота. В предложенной модели применяется конструкция звена экзоскелета с двумя абсолютно твердыми весомыми участками, расположенными на обоих концах звена и невесомым участком между ними в центре звена. Получены аналитически синтезированные траектории движения и приведены результаты численного моделирования движения человеко-машинной системы в виде человека в экзоскелете. Применение предложенной модели позволит человеку снизить нагрузку на суставы, увеличить силу, повысить комфортабельность и время непрерывного использования экзоскелета.

*Ключевые слова:* человеко-машинная система, звено переменной длины, шарнир, произвольное число звеньев, экзоскелет, система дифференциальных уравнений движения, управление, анимационная визуализация движения

**DOI:** 10.31857/S0572329921050020

**1. Введение.** Создание и исследование пространственных моделей управляемых шарнирных механизмов со звеньями переменной длины с целью проектирования и изготовления экзоскелетов для опорно-двигательного аппарата человека является актуальной задачей, результаты решения которой могут быть использованы для увеличения силы, выносливости и восстановления двигательных способностей человека.

В оздоровительных учреждениях России [1] и мира [2] экзоскелеты применяются для восстановления двигательных способностей больных. В ИПМ им. М.В. Келдыша РАН создан экзоскелет нижних конечностей для лечения пациентов с заболеваниями опорно-двигательного аппарата [3]. В Лаборатории бионической робототехники ИПМ им. М.В. Келдыша РАН в помощь врачам разработаны экзоскелеты ExoArm и ExoChair [4]. Для медицины, спасательных работ и т.п. в проекте "ЭкзоАтлет" разработаны модели пассивных и активных экзоскелетов [5]. Проводится внедрение в медицинскую практику разработанных моделей [6].

Решению прикладных задач и применению экзоскелетов в промышленном производстве посвящены научно-практические работы и патенты Яцуна С.Ф. [7, 8]. Имеются патенты отечественных и зарубежных моделей экзоскелетов, направленные на применение их в промышленности [9–11].

Теоретическим разработкам математических моделей экзоскелетов с управляемыми гидравлическими, электромеханическими приводами и их аналитическому и численному исследованию посвящены работы [12–14]. Обзору возможностей применения экзоскелета в военных целях посвящена работа [15].

Вопросы управления сложными нелинейными механическими системами, представляющие интерес для применения в антропоморфных механизмах, рассматриваются в работах Черноусько Ф.Л., Ананьевского И.М., Решмина С.А., Болотника Н.Н. [16, 17]. Способы построения дифференциальных уравнений динамики и решения прикладных задач управления сложными динамическими системами рассматриваются в работах Мухарлямова Р.Г. [18–20].

В работах авторов статьи [21–26] проведен анализ многих публикаций, не вошедших в данный обзор. Из изучения научной литературы и патентов экзоскелетов, следует, что пока не существуют модели экзоскелетов, являющиеся комфортабельными для человека и имеющие значительное время автономной работы. Предложенная пространственная модель управляемого механизма в виде экзоскелета отличается от имеющихся моделей наличием звеньев переменной длины, которые повышают комфортабельность перемещения в нем и частично решает имеющиеся задачи в создании единого кибернетического организма в виде человека в экзоскелете.

**2. Постановка задачи.** Практической задачей разработки предлагаемой модели является повышение комфортабельности при эксплуатации экзоскелета, частичная разгрузка мышц опорно-двигательного аппарата человека, увеличение продолжительности времени работы в нем и восстановление двигательных способностей человека. В результате проводимого исследования предполагается создание математической модели пространственного экзоскелета и моделирования движения человека в экзоскелете. Для решения поставленной задачи требуется адаптировать разработанные ранее [23, 24] методы и составить систему дифференциальных уравнений движения для рассматриваемой модели. В связи с этим требуется провести анализ моделей с одним звеном, двумя звеньями и т.д. и выявить общие закономерности построения матриц, входящих в эти уравнения, синтезировать антропоморфную траекторию движения для модели экзоскелета с пятью звеньями переменной длины. Для визуальной оценки полученного движения человеко-машинной робототехнической системы в виде человека в экзоскелете необходимо осуществить анимационную визуализацию движения разработанной модели.

**3. Модель одного закрепленного звена экзоскелета переменной длины в пространстве.** Введем неподвижную правую декартову систему координат $Oxyz$, в которой происходит движение механизма (рис. 1).

Рассмотрим модель звена, которая состоит из двух весомых абсолютно жестких частей, совершающих движение относительно друг друга вдоль прямой $A_1A_2$,

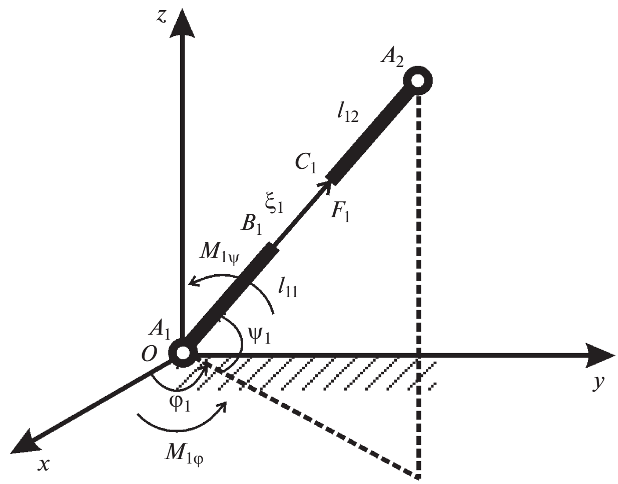


**Рис. 1.** Модель шарнирно закрепленного звена экзоскелета переменной длины в пространстве

проходящей через его начало и конец (рис. 1). В точке $A_1$, жестко соединенной с опорной поверхностью, расположена комбинация двух цилиндрических шарниров, позволяющих звену реализовывать повороты в двух взаимно ортогональных направлениях (рис. 1). Под действием силы тяжести, реакций со стороны опоры и соседних стержней (не показанных на рис. 1) происходит движение участка $C_1A_2$ относительно участка $A_1B_1$ вдоль направления $A_1A_2$, тем самым обеспечивается изменение длины звена на участке $B_1C_1$.

Система имеет два весомых абсолютно жестких стержня: $A_1B_1$ и $C_1A_2$. На рис. 1 схематично изображено звено $A_1A_2$ и введены соответствующие обозначения. Длины звеньев $A_1B_1 = l_{11}$, $C_1A_2 = l_{12}$, двойная нумерация индексов связана с построением многозвенной модели экзоскелета: первый индекс $i$ соответствует номеру звена, второй $\alpha$ — номеру весомого участка на звене. Переменность длины звена реализуется за счет относительного движения вдоль направления звена $A_1A_2$ участка $C_1A_2$. Участок переменной длины $B_1C_1$ считается невесомым. Считаем, что на нем имеется пружина, действующая с силой $F_1$ которая обеспечивает изменение длины звена в соответствии с нагрузкой от других звеньев, приложенной к данному звену.

Положение весомого участка звена зависит от трех параметров и однозначно определяется углами $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$ и переменной длиной участка стержня $\xi_1(t)$. Рассматриваемая система имеет три степени свободы. Обозначим через $M_{1\varphi}$ и $M_{1\psi}$ управляющие моменты, развиваемые в шарнире $A_1$. Для управления поворотами звена можно использовать, например, электрические двигатели с редукторами или искусственные мышцы. Продольная сила $F_1$ управляет изменением длины звена. Для управляемого изменения длины звена можно использовать пневматический или гидравлический цилиндры. Возможно также использование шагового электрического двигателя с винтовой или реечной передачами. В данной модели управляющие устройства, позволяющие изменять конфигурацию механизма, не конкретизируются, а моделируются сосредоточенными в шарнирах моментами $M_{1\varphi}$ и $M_{1\psi}$ и продольной силой $F_1$, направленной вдоль звена.

Кинетическая энергия звена складывается из энергии звена $A_1B_1$ и $C_1A_2$:

$$T = T_{A_1B_1} + T_{C_1A_2},$$
$$2T = (\dot{\xi}_1^2)m_{12} + (I_{11} + I_{12} + m_{12}(l_{11}^2 + l_{11}l_{12} + 2\xi_1 l_{11} + \xi_1 l_{12} + \xi_1^2))(\dot{\varphi}_1^2\cos^2\psi_1 + \dot{\psi}_1^2) \tag{3.1}$$

Дифференциальные уравнения движения, составленные с помощью уравнений Лагранжа второго рода, имеют вид:

$$\begin{gathered}(I_{11} + I_{12} + m_{12}((2l_{11} + l_{12})\xi_1 + (l_{11} + l_{12})l_{11} + \xi_1^2))(\ddot{\varphi}_1\cos^2\psi_1 - \\ - 2\dot{\varphi}_1\dot{\psi}_1\cos\psi_1\sin\psi_1) + m_{12}\cos^2\psi_1(2l_{11} + l_{12} + 2\xi_1)\dot{\xi}_1\dot{\varphi}_1 = M_{1\varphi}\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered}(I_{11} + I_{12} + m_{12}((2l_{11} + l_{12})\xi_1 + (l_{11} + l_{12})l_{11} + \xi_1^2))\ddot{\psi}_1 + \\ + \cos\psi_1\sin\psi_1(I_{11} + I_{12} + m_{12}((2l_{11} + l_{12})\xi_1 + (l_{11} + l_{12})l_{11} + \\ + \xi_1^2)\dot{\varphi}_1^2 + g(m_{11}l_{11}/2 + m_{12}(l_{11} + l_{12}/2 + \xi_1))\cos\psi_1 + m_{12}(2l_{11} + l_{12} + 2\xi_1)\dot{\xi}_1\dot{\psi}_1 = M_{1\psi}\end{gathered} \tag{3.3}$$

$$m_{12}\ddot{\xi}_1 - m_{12}(2l_{11} + l_{12} + 2\xi_1)(\dot{\varphi}_1^2\cos^2\psi_1 + \dot{\psi}_1^2)/2 + gm_{12}\sin\psi_1 = F_1 \tag{3.4}$$

Таким образом, составлена система дифференциальных уравнений движения (3.2)–(3.4), которая описывает модель звена экзоскелета переменной длины на плоскости.

**4. Модель двух закрепленных звеньев экзоскелета переменной длины в пространстве.** Введем неподвижную правую декартову систему координат $Oxyz$, в которой происходит движение механизма (рис. 2). Рассмотрим модель механизма, состоящего из двух звеньев переменной длины в пространстве. Конструкция каждого звена включает в себя две весомые абсолютно твердые части, совершающие движение относительно друг друга вдоль прямой, соединяющей начало и конец звена (рис. 2). В жестко закрепленной точке $A_1$ имеется комбинация цилиндрических шарниров, аналогичная модели с одним звеном. Участки звена $A_1B_1 = l_{11}$ массой $m_{11}$ и моментом инерции относительно оси, перпендикулярной звену и проходящей через его начало $I_{11}$ и $C_1A_2 = l_{12}$ и инерционными характеристиками $m_{12}$, $I_{12}$ считаем абсолютно твердыми. Под действием внутренней управляющей силы $F_1$ обеспечивается необходимое изменение длины звена на невесомом участке $B_1C_1 = \xi_1(\mathrm{t})$ переменной длины, которое происходит за счет движения участка $C_1A_2$ относительно участка $A_1B_1$ вдоль направления $A_1A_2$. В качестве полюса для второго звена $A_2A_3$ выберем точку $A_2$. Его конструкция и механизм работы аналогичны первому звену.

Положение механизма зависит от шести параметров и однозначно определяется углами $\varphi_1(t)$, $\psi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\psi_2(t)$ и переменными длинами участков звеньев $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$. Следовательно, рассматриваемая механическая система имеет шесть степеней свободы.

Кинетическая энергия механизма звена получается интегрированием по весомым отрезкам инерционных участков $A_1B_1$, $C_1A_2$, $A_2B_2$, и $C_2A_3$:

$$2T = \sum_{i=1}^{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\int_0^{l_{i\alpha}} V_{i\alpha}^2\rho_{i\alpha}dx_{i\alpha} \tag{4.1}$$

где $x_{i\alpha}$ – координата бесконечно малой частицы $\alpha$-го инерционного участка $i$-го звена, $\rho_{i\alpha}$ – плотность $\alpha$-го участка $i$-го звена, при этом $m_{i\alpha} = \rho_{i\alpha}l_{i\alpha}$, $I_{i\alpha} = \rho_{i\alpha}l_{i\alpha}^3/3$, $l_{i\alpha}$, $m_{i\alpha}$, $I_{i\alpha}$ – длина, масса, момент инерции $\alpha$-го участка $i$-го звена, $V_{i\alpha}^2$ – квадрат скорости бесконечно малой частицы $\alpha$-го участка $i$-го звена, например для участка $C_1A_2$ будет равен:

$$V_{12}^2 = \dot{\xi}_1^2 + (l_{11} + \xi_1 + x_{12})^2((C_1^{\psi})^2\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\psi}_1^2) \tag{4.2}$$

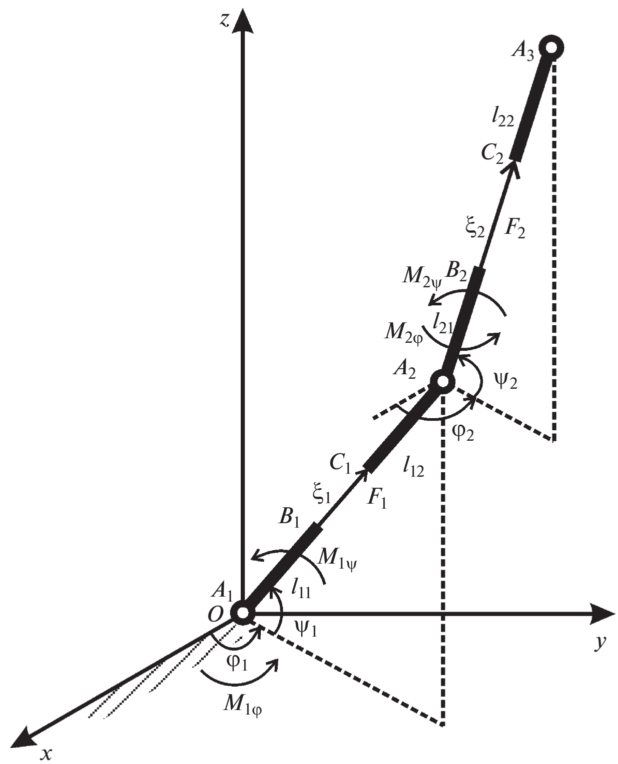


**Рис. 2.** Модель двух шарнирно соединенных звеньев экзоскелета переменной длины в пространстве

Система дифференциальных уравнений движения в форме уравнений Лагранжа второго рода имеет вид:

$$\begin{gathered}\zeta_{11}[(C_1^{\psi})^2\ddot{\varphi}_1 - 2C_1^{\psi}S_1^{\psi}\dot{\varphi}_1\dot{\psi}_1] + \zeta_{12}(C_1^{\psi})^2\dot{\xi}_1\dot{\varphi}_1 - \eta_{21}[C_1^{\psi}C_2^{\psi}C_{12}^{\varphi}\ddot{\varphi}_2 + C_1^{\psi}S_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\ddot{\psi}_2 + \\ + C_1^{\psi}C_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\dot{\varphi}_2^2 + C_1^{\psi}C_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\dot{\psi}_2^2 - 2C_1^{\psi}S_2^{\psi}C_{12}^{\varphi}\dot{\varphi}_2\dot{\psi}_2] - \\ - \eta_{12}[C_1^{\psi}C_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\ddot{\xi}_2 + 2C_1^{\psi}C_2^{\psi}C_{12}^{\psi}\dot{\xi}_2\dot{\varphi}_2 + 2C_1^{\psi}S_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\dot{\xi}_2\dot{\psi}_2] = M_{\varphi_1}\end{gathered} \tag{4.3}$$

$$\begin{gathered}\eta_{21}[C_1^{\psi}C_2^{\psi}C_{12}^{\varphi}\ddot{\varphi}_1 - S_1^{\psi}C_1^{\psi}S_{12}^{\varphi}\ddot{\psi}_1 - C_1^{\psi}C_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\dot{\varphi}_1^2 - C_1^{\psi}C_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\dot{\psi}_1^2 - 2C_1^{\psi}S_1^{\psi}C_{12}^{\varphi}\dot{\varphi}_1\dot{\psi}_1] + \\ + 2\eta_{22}[C_1^{\psi}C_2^{\psi}C_{12}^{\varphi}\dot{\xi}_1\dot{\varphi}_1 - C_2^{\psi}S_1^{\psi}S_{12}^{\varphi}\dot{\xi}_1\dot{\psi}_1] + \zeta_{22}[(C_2^{\psi})^2\ddot{\varphi}_2 - 2C_2^{\psi}S_2^{\psi}\dot{\varphi}_2\dot{\psi}_2] + \\ + \eta_{22}[C_1^{\psi}C_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\ddot{\xi}_1 + 2(C_2^{\psi})^2\dot{\xi}_2\dot{\varphi}_2] = M_{\varphi_2}\end{gathered} \tag{4.4}$$

$$\begin{gathered}\zeta_{11}[\ddot{\psi}_1 + C_1^{\psi}S_2^{\psi}\dot{\varphi}_1^2] + 2\zeta_{12}\dot{\xi}_1\dot{\psi}_1 - \eta_{21}[S_1^{\psi}C_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\ddot{\varphi}_2 + (C_1^{\psi}C_2^{\psi} + S_1^{\psi}S_2^{\psi}C_{12}^{\varphi})\ddot{\psi}_2 + \\ + S_1^{\psi}C_2^{\psi}C_{12}^{\varphi}\dot{\varphi}_2^2 + (S_1^{\psi}C_2^{\psi}C_{12}^{\varphi} - C_1^{\psi}S_2^{\psi})\dot{\psi}_2^2 + 2S_1^{\psi}S_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\dot{\varphi}_2\dot{\psi}_2] - \\ - 2\eta_{12}[S_1^{\psi}C_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\dot{\xi}_2\dot{\varphi}_2 - (S_1^{\psi}C_2^{\psi}C_{12}^{\varphi} - C_1^{\psi}S_2^{\psi}S_2^{\psi})\ddot{\xi}_2 + 2(C_1^{\psi}C_2^{\psi} + S_1^{\psi}S_2^{\psi}C_{12}^{\varphi})\dot{\xi}_2\dot{\psi}_2] = M_{\psi_1}\end{gathered} \tag{4.5}$$

$$\begin{gathered}\eta_{21}[C_1^{\psi}S_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\ddot{\varphi}_1 + (C_1^{\psi}C_2^{\psi} + S_1^{\psi}S_2^{\psi}C_{12}^{\varphi})\ddot{\psi}_1 + C_1^{\psi}S_2^{\psi}C_{12}^{\varphi}\dot{\varphi}_1^2 + (C_1^{\psi}S_2^{\psi}C_{12}^{\varphi} - \\ - S_1^{\psi}C_2^{\psi})\dot{\psi}_1^2 - 2S_1^{\psi}S_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\dot{\varphi}_1\dot{\psi}_1] + \eta_{22}[2C_1^{\psi}S_2^{\psi}S_{12}^{\varphi}\dot{\xi}_1\dot{\varphi}_1 + 2(C_1^{\psi}C_2^{\psi} + S_1^{\psi}S_2^{\psi}C_{12}^{\varphi})\dot{\xi}_1\dot{\psi}_1 + \\ + (C_1^{\psi}S_2^{\psi}C_{12}^{\varphi} - S_1^{\psi}C_2^{\psi})\ddot{\xi}_1] + \xi_{22}[\ddot{\psi}_2 + S_2^{\psi}C_2^{\psi}\varphi_2^2] + 2\zeta_{21}\dot{\xi}_2\dot{\psi}_2 = M_{\psi_2}\end{gathered} \tag{4.6}$$

$$-\zeta_{12}[(C_1^\psi)^2\dot\varphi_1^2+\dot\psi_1^2]-\theta_{12}\ddot\xi_1+\eta_{22}[C_1^\psi C_2^\psi S_{12}^\varphi\ddot\varphi_2+(S_1^\psi C_2^\psi-C_1^\psi S_2^\psi C_{12}^\varphi)\ddot\psi_2-C_1^\psi C_2^\psi C_{12}^\varphi\dot\varphi_2^2-$$
$$-(S_1^\psi S_2^\psi+C_1^\psi C_2^\psi C_{12}^\varphi)\dot\psi_2^2-2C_1^\psi S_2^\psi S_{12}^\varphi\dot\varphi_2\dot\psi_2+2C_1^\psi C_2^\psi S_{12}^\varphi\dot\xi_2\dot\varphi_2]+ \tag{4.7}$$
$$+\theta_{21}[(S_1^\psi S_2^\psi+C_1^\psi C_2^\psi C_{12}^\varphi)\ddot\xi_2+2(S_1^\psi C_2^\psi-C_1^\psi S_2^\psi C_{12}^\varphi)\dot\xi_2\dot\psi_2]=F_{\xi_1}$$

$$-\eta_{12}[C_1^\psi C_2^\psi S_{12}^\varphi\ddot\varphi_1+(S_1^\psi C_2^\psi C_{12}^\varphi-C_1^\psi S_2^\psi)\ddot\psi_1+C_1^\psi C_2^\psi C_{12}^\varphi\dot\varphi_1^2+(S_1^\psi S_2^\psi+$$
$$+C_1^\psi C_2^\psi C_{12}^\varphi)\dot\psi_1^2-2S_1^\psi C_2^\psi S_{12}^\varphi\dot\varphi_1\dot\psi_1]+2\theta_{21}[(S_1^\psi C_2^\psi C_{12}^\varphi-C_1^\psi S_2^\psi)\dot\xi_1\dot\psi_1+ \tag{4.8}$$
$$+2C_1^\psi C_2^\psi S_{12}^\varphi\dot\xi_1\dot\varphi_1-(S_1^\psi S_2^\psi+C_1^\psi C_2^\psi C_{12}^\varphi)\ddot\xi_1]-\zeta_{21}[(C_2^\psi)^2\dot\varphi_2^2+\dot\psi_2^2]-\theta_{22}\ddot\xi_2=F_{\xi_2}$$

где: $C_i=\cos\varphi_i$, $S_i=\sin\varphi_i$, $(i=1, 2)$, $C_{12}^\varphi=\cos(\varphi_1-\varphi_2)$, $S_{12}^\varphi=\sin(\varphi_1-\varphi_2)$, $\theta_{21}=\theta_{22}=m_{22}$, $\theta_{11}=\theta_{12}=m_{12}+m_{21}+m_{22}$, $\eta_{12}=2(l_{11}+l_{12}+\xi_1)m_{22}$, $\zeta_{11}=I_{11}+I_{12}+(l_{11}^2+2l_{11}\xi_1+\xi_1^2+$ $+l_{11}l_{12}+l_{12}\xi_1)m_{12}+(l_{11}^2+2l_{11}\xi_1+\xi_1^2+2l_{11}l_{12}+l_{12}^2+2l_{12}\xi_1)(m_{21}+m_{22})$, $\eta_{21}=[(l_{11}+l_{12}+$ $+\xi_1)(l_{21}(m_{21}+2m_{22})+m_{22}(2\xi_2+l_{22}))]/2$, $\eta_{22}=[(l_{21}(m_{21}+2m_{22})+m_{22}(2\xi_2+l_{22}))]/2$, $\zeta_{12}=$ $=2(l_{11}+\xi_1)(m_{12}+m_{21}+m_{22})+l_{12}(m_{12}+2(m_{21}+m_{22}))$, $\zeta_{21}=m_{22}(2l_{21}+l_{22}+2\xi_2)$, $\zeta_{22}=$ $=[I_{21}+I_{22}+m_{22}(l_{21}^2+l_{21}l_{22}+2l_{21}\xi_2+l_{22}\xi_2+\xi_2^2)]$ – инерционно-геометрические характеристики звеньев, учитывающие расположение весомых участков на звене.

Таким образом, получена система дифференциальных уравнений движения в форме уравнений Лагранжа второго рода для рассматриваемого механизма.

Время, затраченное на офисном компьютере на составление системы дифференциальных уравнений движения с помощью уравнений Лагранжа второго рода для модели механизма с одним звеном, составило 5.2 с, с двумя звеньями 1061.0 с, с тремя звеньями 12611.8 с. Из приведенного времени работы видно, что проблема разработки скоростных алгоритмов составления систем дифференциальных уравнений движения для механизмов с достаточно большим количеством звеньев является актуальной.

**5. Обобщение модели механизма на случай произвольного количества звеньев переменной длины.** Рассмотрим многозвенную стержневую модель с $n$ звеньями. Система имеет звенья переменной длины, конструкция которых была описана выше. Все длины стержней складываются из двух участков постоянной длины $l_{i\alpha}$ $(i=1, ..., n;\ \alpha=1, 2)$ и переменной длины $\xi_i=\xi_i(t)$. На рис. 3 изображена модель с $n$ звеньями переменной длины в одноопорной фазе движения и введены соответствующие обозначения.

Положение однозначно определяется углами $\varphi_i$, $\psi_i$ и участком переменной длины стержней $\xi_i$. Рассматриваемая система имеет $3n$ степеней свободы, т.к. движение каждого звена описывается набором из трех параметров: углов $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$ и изменением длины невесомого участка $\xi_i(t)$. Массы участков звеньев постоянной длины обозначим $m_{i\alpha}$, моменты инерции звеньев постоянной длины относительно осей, проходящих через один из концов весомого стержня, перпендикулярно плоскости движения – $I_{i\alpha}$ $(i=1, ..., n;\ \alpha=1, 2)$. Обозначим: $M_{i\varphi}$, $M_{i\psi}$ – моменты, развиваемые в $i$-м шарнире; $F_i$ – продольная сила, действующая вдоль $i$-го стержня, обеспечивающая изменение его длины. Моменты и продольные силы являются управлением в данной механической системе.

Уравнения движения элементов $n$-звенной механической системы в одноопорной фазе представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений, которые в матричной форме можно записать в виде:

$$A_\text{к}(\varphi,\psi,\xi)\ddot\varphi+B_\text{к}(\varphi,\psi,\xi)\ddot\psi+C_\text{к}(\varphi,\psi,\xi)\ddot\xi+D_\text{к}(\varphi,\psi,\xi)\dot\Phi\dot\varphi+E_\text{к}(\varphi,\psi,\xi)\dot\Psi\dot\psi+$$
$$+2F_\text{к}(\varphi,\psi,\xi)\dot\Phi\dot\xi+2G_\text{к}(\varphi,\psi,\xi)\dot\Phi\dot\psi+2H_\text{к}(\varphi,\psi,\xi)\dot\Psi\dot\xi+gK_\text{к}(\psi)=M_\text{к}(\varphi,\psi,\xi) \tag{5.1}$$

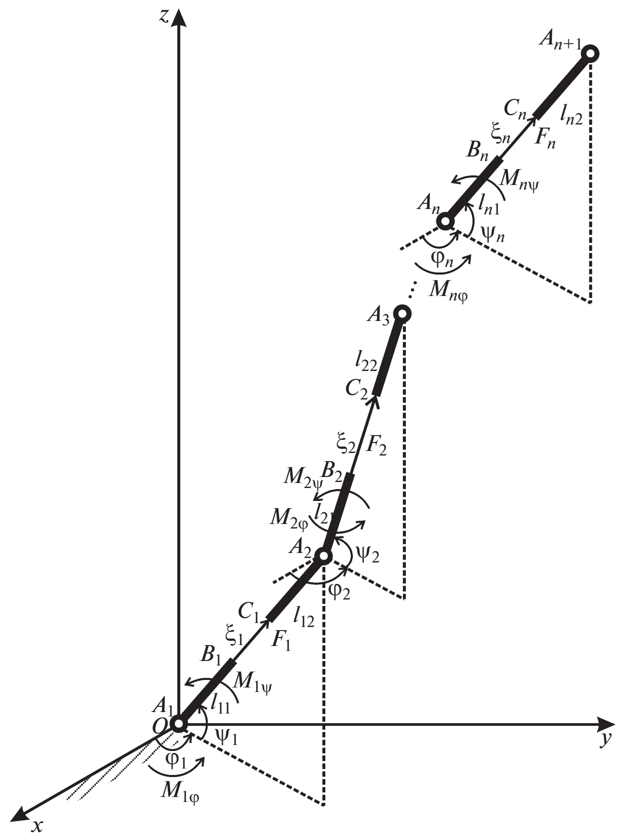


**Рис. 3.** Модель *n* шарнирно соединенных звеньев экзоскелета переменной длины в пространстве

где нижние индексы у матриц указывают на описание соответствующей обобщенной координаты: $\kappa = 1, ..., 3$, где 1 соответствует обобщенной координате $\varphi$, 2 — $\psi$, 3 — $\xi$; $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)^T$, $\psi = (\psi_1, ..., \psi_n)^T$ — векторы углов; $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)^T$ — вектор участков переменной длины звеньев; $\dot{\varphi}$ — вектор угловых скоростей; $\ddot{\varphi}$ — вектор угловых ускорений; $\dot{\Phi} = \mathrm{diag}(\dot{\varphi}_1, ..., \dot{\varphi}_n)$ — диагональная матрица; $M$ — векторы управляющих моментов и сил на участке переменной длины звена; $A$, $B$, $G$, $H$ — матрицы, учитывающие инерционные свойства системы; $C$, $K$ — матрицы, определяемые моментами силы тяжести; $D$, $E$, $F$ — матрицы, учитывающие переменную длину звеньев.

В качестве примера рассмотрим формулу для матрицы $A_\varphi$. Матрица $A_\varphi = (a_{ij})$ является симметрической: $a_{ij} = a_{ji}$, поэтому достаточно привести для нее только диагональные и наддиагональные элементы, т.е., если $i$ — номер строки, $j$ — номер столбца, то $i$, $j = 1,2, ..., n$, при этом $j \geq i$.

Элементы симметрической матрицы $A_\varphi$ имеют вид:

$$a_{ij} = \delta_{ij}\left(\sum_{\alpha=1}^{2} I_{i\alpha}\right) + (l_{i1} + \xi_i + l_{i2})\left\{m_{i2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\delta_{ij}}{2}\right)(l_{i1} + \xi_i) + \left(\sum_{k=j+1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{2} m_{k\alpha}\right)(l_{i1} + \xi_i + l_{i2}) + \right.$$
$$\left. + \left((1-\delta_{ij})\left(\sum_{k=j+1}^{n}\left(m_{k1}l_{k1} + m_{k2}(l_{k2} + 2l_{k1} + 2\xi_k)\right)\right)\right)\right\}\cos(\varphi_i - \varphi_j)\cos\psi_i\cos\psi_j \tag{5.2}$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ – символ Кронекера.

Матричная форма записи уравнений движения (5.1) является универсальной и может быть применена к описанию движения экзоскелета или антропоморфного робота с любым числом звеньев.

Дальнейшей задачей является разработка методов управления подобными системами с заданным числом звеньев переменной длины.

**6. Модель экзоскелета с пятью звеньями переменной длины в пространстве**. При переходе к многозвенной модели экзоскелета описанные выше закономерности позволяют получить алгоритм построения систем дифференциальных уравнений движения трехмерных моделей экзоскелетов, аналогично тому, как это описано в работе [21] для звеньев переменной длины с точечными сосредоточенными массами.

Экзоскелет состоит из звеньев переменной длины (рис. 4), соединенных комбинацией двух цилиндрических шарниров, обеспечивающих необходимую подвижность соединения звеньев для антропоморфного движения. Каждое звено переменной длины состоит из невесомой части, способной изменять свою длину и двух весомых абсолютно жестких частей длинами $l_{ij}$ ($i = 1, 2, ...., 5; j = 1, 2$), совершающих движение относительно друг друга вдоль прямой, проходящей через начало и конец звена. То есть изменение длины звена реализуется за счет относительного движения весомых участков вдоль направления звена на участке $B_iC_i = \xi_i(t)$ ($i = 1, 2, ...., 5$). Каждое последующее звено соединяется с предыдущим с помощью комбинации двух цилиндрических шарниров, взаимно перпендикулярных друг другу и обеспечивающих реализацию необходимой подвижности звеньев. Первое звено соединено шарнирно с неподвижной опорой.

Положение механизма однозначно определяется углами между звеньями $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$ и переменными длинами участков звеньев $\xi_i(t)$ ($i = 1, 2, ...., 5$). Рассматриваемая пространственная модель экзоскелета имеет пятнадцать степеней свободы.

Массы весомых абсолютно твердых участков звеньев $A_iB_i$ равны $m_{i1,}$ моменты инерции относительно оси, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, $I_{i1}$, массы участков $C_iA_{i\pm1}$ равны $m_{i2}$, моменты инерции относительно оси, проходящей через его конец перпендикулярно плоскости движения, $I_{i2}$. Плотность материала, из которого изготовлен $j$-й весомый участок $i$-го звена, $\rho_{ij}$ ($i = 1, 2, ...., 5; j = 1, 2$).

Кинетическая энергия звеньев складывается из энергий весомых участков звеньев $A_iB_i$ и $C_iA_{i\pm1}$, которые совершают сложное движение: вращательное вокруг полюса, находящегося в точке прикрепления к предыдущему звену, и поступательное вдоль направления звена.

В результате реализации предложенного выше алгоритма получаются дифференциальные уравнения движения механизма, которые представлены выше в обобщенном векторно-матричном виде (5.1). Матрицы для модели с пятью подвижными звеньями переменной длины получаются весьма громоздкими, поэтому здесь не приводятся.

**7. Числовой пример определения управляющих воздействий при движении экзоскелета с человеком внутри по заданной траектории.** Для оценки жесткости пружин определим управляющие моменты в шарнирах, необходимые для механизма при антропоморфном движении. Для этого используем алгоритм управления движением экзоскелета на основе периодических функций, обеспечивающих антропоморфность походки устройства [25, 27]. Зададим функции изменения углов и длин звеньев механизма следующим образом:

$$\psi_1(t) = \pi/2 + j_1 \sin\left[f_1 - \left(1 - \cos\left[2\pi t/T\right]\right)\pi/2\right]$$
$$\psi_2(t) = \pi/2 + j_2 \cos\left[f_2 - \left(1 - \cos\left[2\pi t/T\right]\right)\pi/2\right]$$

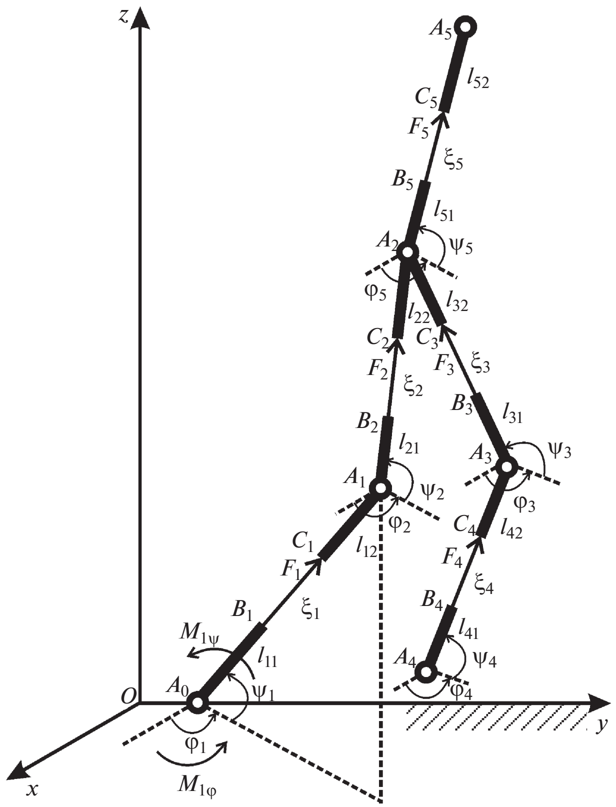


**Рис. 4.** Модель пяти шарнирно соединенных звеньев экзоскелета переменной длины в пространстве

$$
\begin{gathered}
\psi_3(t) = \pi/2 + j_3 \cos\left[f_3 - \left(1 + \cos\left[2\pi t/T\right]\right)\pi/2\right] \\
\psi_4(t) = \pi/2 + j_4 \sin\left[f_4 - \left(1 + \cos\left[2\pi t/T\right]\right)\pi/2\right] \\
\psi_5(t) = \pi/2, \quad \varphi_1(t) = j_1 \sin\left[2\pi t/T\right] \\
\varphi_2(t) = j_2 \cos\left[2\pi t/T\right], \quad \varphi_3(t) = j_3 \cos\left[2\pi t/T\right] \\
\varphi_4(t) = j_4 \sin\left[2\pi t/T\right], \quad \varphi_5(t) = j_5 \cos\left[2\pi t/T\right] \\
\xi_1(t) = l_1^* - l_{11} - l_{12} + l_1^* l \sin\left[2\pi t/T\right] \\
\xi_2(t) = l_2^* - l_{21} - l_{22} + l_2^* l \sin\left[2\pi t/T\right], \quad \xi_3(t) = l_3^* - l_{31} - l_{32} - l_3^* l \sin\left[2\pi t/T\right] \\
\xi_4(t) = l_4^* - l_{41} - l_{42} - l_4^* l \sin\left[2\pi t/T\right], \quad \xi_5(t) = l_5^* - l_{51} - l_{52} + l_5^* l \sin\left[2\pi t/T\right]
\end{gathered}
\tag{7.1}
$$

где $T$ – период ходьбы, $j_i$ и $f_i$ ($i = 1, ..., 5$) – параметры ходьбы, $l_i^*$ – начальная длина недеформированного звена, $l$ – коэффициент изменения длины звена.

Для обеспечения возможности сопоставления результатов значения параметров для численных расчетов управляющих моментов и продольных сил были выбраны аналогично работам [26]. Начальные длины недеформированных звеньев: $l_1^* = l_4^* =$ 0.385 м, $l_2^* = l_3^* = 0.477$ м, $l_5^* = 0.771$ м. Эти длины на звене распределялись следующим

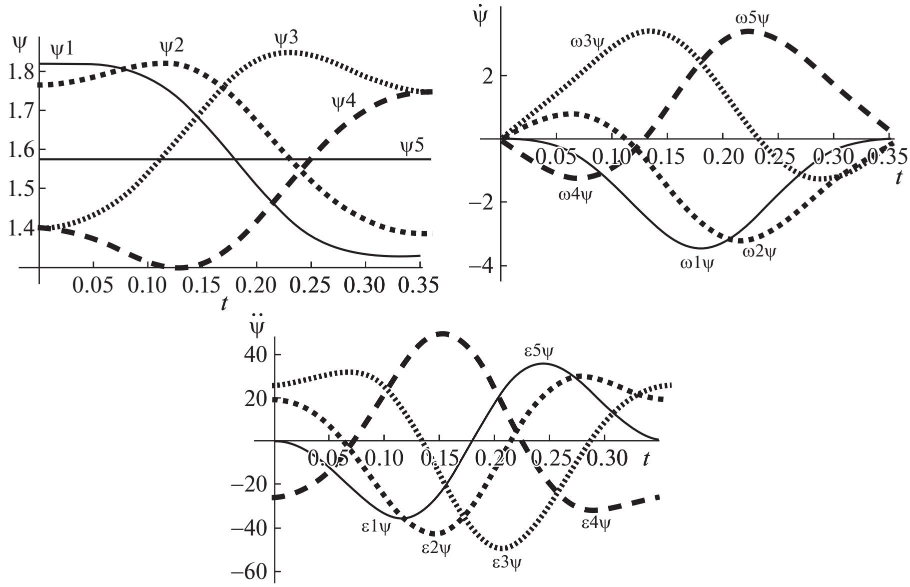


**Рис. 5.** Зависимость угловой координаты $\psi$ (рад), угловой скорости $\dot{\psi}$ (рад/с) и углового ускорения $\ddot{\psi}$ (рад/с$^2$) подвижных звеньев экзоскелета от времени $t$ (с), $\ddot{\psi}$ голень опорной ноги (звено 1), бедро опорной ноги (звено 2), голень переносимой ноги (звено 3), бедро переносимой ноги (звено 4), — корпус (звено 5)

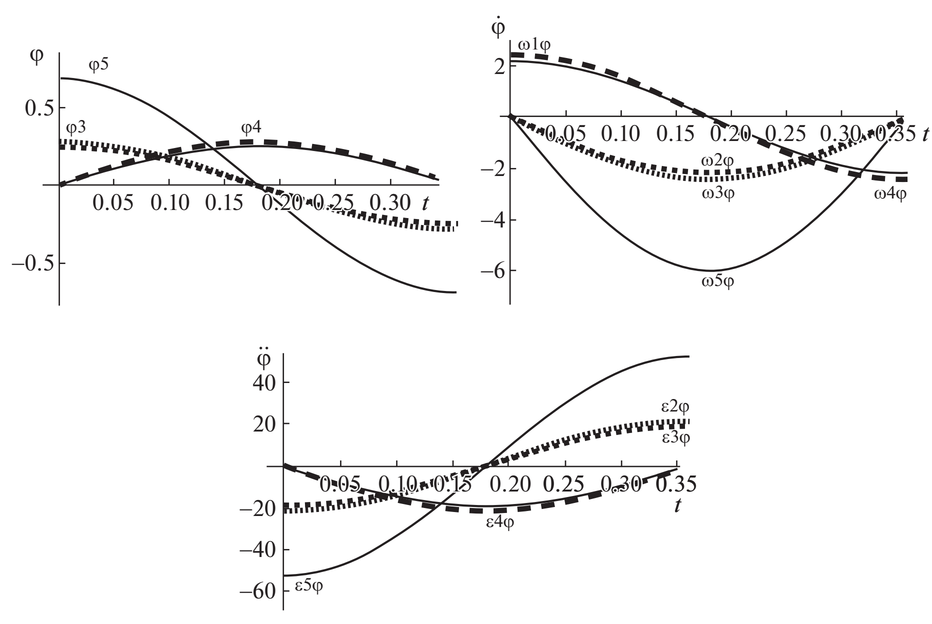


**Рис. 6.** Зависимость угловой координаты $\varphi$ (рад), угловой скорости $\dot{\varphi}$ (рад/с) и углового ускорения $\ddot{\varphi}$ (рад/с$^2$) подвижных звеньев экзоскелета от времени $t$ (с), — голень опорной ноги (звено 1), бедро опорной ноги (звено 2), голень переносимой ноги (звено 3), бедро переносимой ноги (звено 4), — корпус (звено 5)

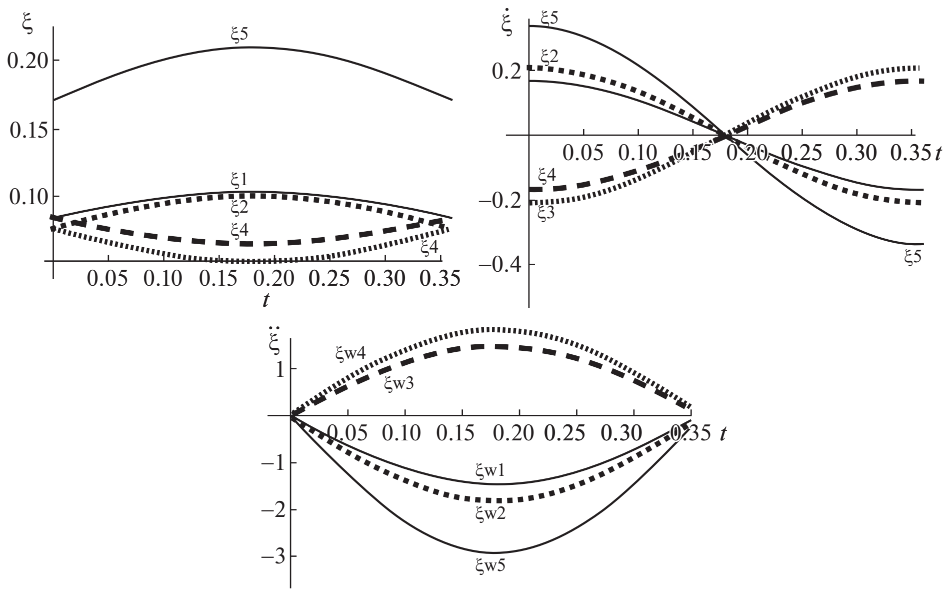


**Рис. 7.** Зависимость линейной координаты $\xi$ (м), определяющей изменение длины звеньев экзоскелета, скорости $\dot{\xi}$ (м/с) и ускорения $\ddot{\xi}$ (м/с$^2$) от времени $t$ (с), — голень опорной ноги (звено 1), ▪▪▪▪▪▪ бедро опорной ноги (звено 2), ▬ ▬ ▬ голень переносимой ноги (звено 3), ┉┉┉ бедро переносимой ноги (звено 4), — корпус (звено 5)

образом: $l_{11} = l_{41} = 0.15$ м, $\xi_1^* = \xi_4^* = 0.085$ м, $l_{21} = l_{31} = 0.2$ м, $\xi_2^* = \xi_3^* = 0.077$ м, $l_{51} = 0.3$ м, $\xi_5^* = 0.171$ м, $l_{i1} = l_{i2}$ ($i = 1, ..., 5$). Массы звеньев $m_1 = m_4 = 2.91$ кг, $m_2 = m_3 = 8.93$ кг, $m_5 = 28.93$ кг, они распределялись равномерно между двумя весомыми абсолютно твердыми участками звеньев, т.е. $m_{i1} = m_{i2} = m_i/2$ ($i = 1, ..., 5$). Моменты инерции весомых участков звеньев для стержней относительно оси, проходящей через нижнюю точку весомой части звена равны: $I_{11} = I_{41} = 0.011$ кг · м$^2$, $I_{21} = I_{31} = 0.060$ кг · м$^2$, $I_{51} =$ $= 0.434$ кг · м$^2$, $I_{i1} = I_{i2}$ ($i = 1, ..., 5$). Для приближенного моделирования инерционных свойств человеко-машинной системы все значения масс и моментов инерции умножались на коэффициент 1.5. Таким образом, учитывалась собственная масса звеньев экзоскелета и звеньев опорно-двигательного аппарата человека. Ускорение свободного падения $g = 9.81$ м/с$^2$. Время, в течение которого происходит одноопорная фаза шага, т.е. половина периода ходьбы $t_k = 0.36$ с. Коэффициент изменения длины звена $l = 0.25$. Параметры ходьбы: $j_1 = j_2 = 0.25$, $j_3 = j_4 = 0.279$, $j_5 = 0.1$, $f_1 = \pi/2$, $f_2 = f_4 = 0.687$, $f_3 = 0.884$, $f_5 = \pi$.

Приведем графики задаваемых аналитически углов поворота $\psi$, угловой скорости $\dot{\psi}$ и углового ускорения $\ddot{\psi}$ подвижных звеньев экзоскелета от времени (рис. 5), углов поворота $\varphi$, угловой скорости $\dot{\varphi}$ и углового ускорения $\ddot{\varphi}$ подвижных звеньев экзоскелета от времени (рис. 6), изменения длин $\xi$ невесомых участков звеньев экзоскелета и их скоростей $\dot{\xi}$ и ускорений $\ddot{\xi}$ от времени (рис. 7).

Приведем полученные в результате решения обратной задачи динамики графики управляющих моментов в шарнирах-суставах экзоскелета от времени (рис. 8) и про-

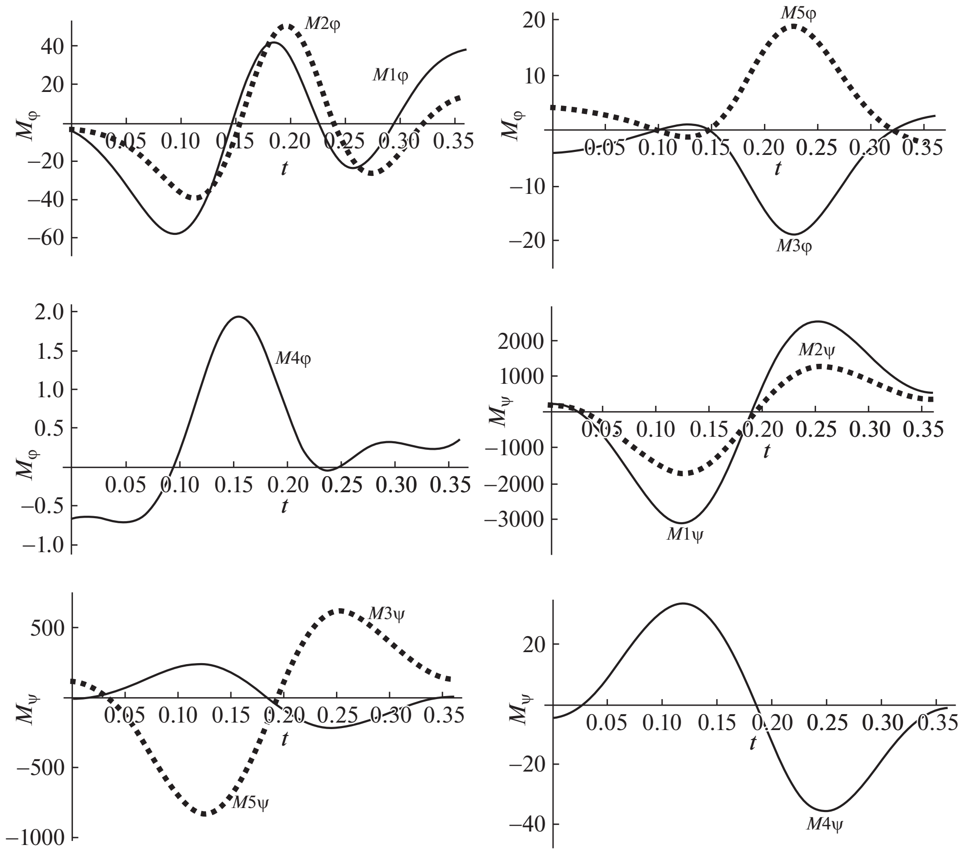


**Рис. 8.** Зависимость моментов $M$ (Н · м), управляющих поворотами в шарнирах между подвижными звеньями экзоскелета от времени $t$ (с)

дольных сил, действующих вдоль звеньев экзоскелета от времени (рис. 9), получающихся при задании кинематики движения в виде (7.1). Для наглядности представления результатов на рис. 8 и 9 графики сгруппированы по масштабу абсолютных максимальных значений.

Полученные зависимости управляющих усилий показывают имеющуюся периодичность в управлении и синхронизацию управляющих воздействий при движении экзоскелета. Синхронизация наиболее выраженно проявляется на зависимостях управляющих моментов и сил с индексами 1 и 2 – для голени и бедра опорной ноги.

Кадры анимации от начального положения до конечного выглядят следующим образом (рис. 10). На кадрах тонкими отрезками показаны невесомые части звеньев переменной длины, толстыми – весомые, абсолютно твердые.

Таким образом, в процессе исследований синтезирована пространственная анимационная модель движения человеко-машинной системы, наглядно демонстрирующая возможности подобного управления ходьбой.

**Заключение.** В работе предложена конструкция экзоскелета со звеньями переменной длины, состоящими из двух массивных абсолютно твердых участков и расположенным между ними невесомым участком переменной длины. С помощью представленного в работе алгоритма построения систем дифференциальных уравнений движе-

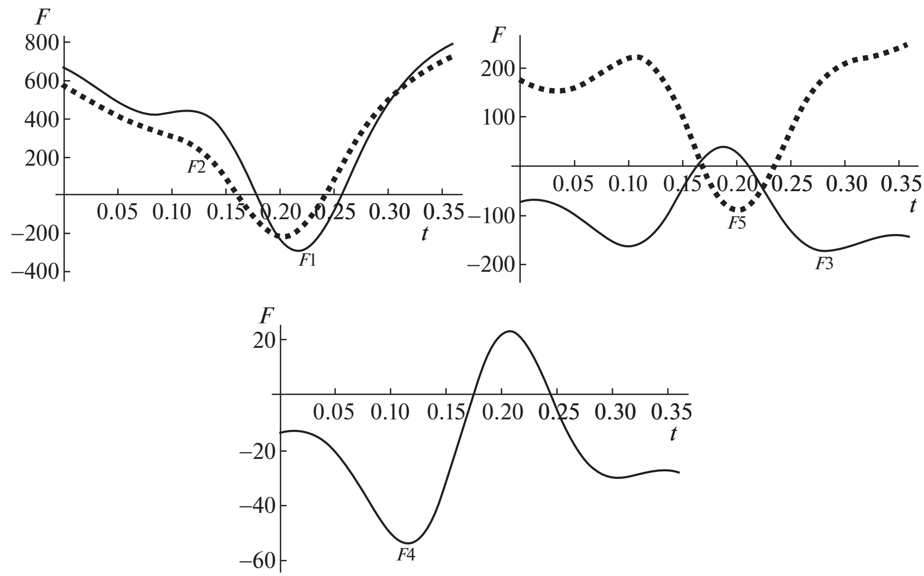


**Рис. 9.** Зависимость продольной силы $F$ (Н), управляющей изменением длины звена экзоскелета от времени $t$ (с)

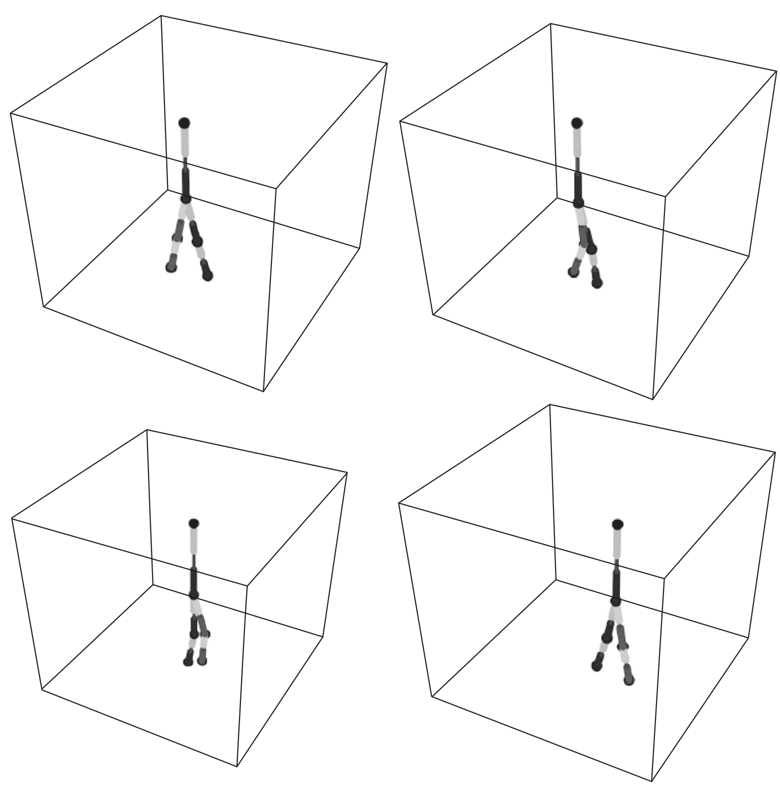

**Рис. 10.** Кадры анимации движения антропоморфной походки экзоскелета с пятью шарнирно соединенными звеньями переменной длины

ния трехмерных моделей экзоскелетов получена система дифференциальных уравнений движения, описывающая движения механизма в пространстве.

Синтезированы траектории движения звеньев человека в экзоскелете, определены управляющие моменты и продольные силы. Получены зависимости управляющих усилий, показывающие имеющуюся периодичность в управлении и синхронизацию управляющих воздействий при движении экзоскелета. Проведена анимационная визуализация движения человеко-машиной системы в виде человека в экзоскелете, показана ее антропоморфность.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Смоленской области в рамках научного проекта № 19-48-670002.

The reported study was funded by RFBR and Smolensk region, project number 19-48-670002.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихоплав О.А., Иванова В.В., Гурьянова Е.А., Иванов И.Н.* Эффективность роботизированной механотерапии комплекса “LOKOMAT PRO” у пациентов, перенёсших инсульт // Вестник восстановительной медицины. 2019. № 5 (93). С. 57–64.
2. *Tsukahara A., Hasegawa Y., Eguchi K., Sankai Y.* Restoration of gait for spinal cord injury patients using HAL with intention estimator for preferable swing speed // IEEE Trans. Neural. Syst. Rehabil. Eng. 2015. V. 23. № 2. P. 308–318. https://doi.org/10.1109/TNSRE.2014.2364618
3. *Павловский В.Е. и др.* Биомехатронный комплекс нейрореабилитации – концепция, конструкция, модели и управление // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. № 111. М.: ИПМ, 2014. 19 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-111
4. Проекты. ExoChair. Промышленное оборудование. URL:https://karfidovlab.com/projects/exochair/ (дата обращения: 10.11.2020).
5. Exoatlet. Носимые экзоскелеты для реабилитации детей и взрослых. URL: https://exoatlet.lu/ (дата обращения: 10.11.2020).
6. *Котов С.В., Исакова Е.В., Лиждвой В.Ю., Секирин А.Б., Письменная Е.В., Петрушанская К.А., Геворкян А.А.* Методические рекомендации по нейрореабилитации больных рассеянным склерозом, имеющих нарушения ходьбы, с использованием экзоскелета ExoAtlet. М.: ГБУЗ МО МОНИКИ им. М.Ф. Владимирского, 2018. 26 с.
7. *Яцун С.Ф., Антипов В.М. Карлов А.Е., Аль Манджи Хамиль Хамед Мохаммед* Подъем груза в экзоскелете с гравитационной компенсацией // Известия Юго-Западного государственного университета. 2019. Т. 23. № 2. С. 8–17.
8. *Яцун С.Ф., Мищенко В.Я., Яцун А.С.* Пассивный грузовой экзоскелетон: патент на полезную модель RU 190786 U1, 12.07.2019. Заявка № 2019110529 от 09.04.2019. опубл. 12.07.2019.
9. *Родин И.А.* Простая конструкция компенсации веса человека при ходьбе и беге: патент на изобретение RU 2489130 C1. 10.08.2013. Заявка № 2011148041/14 от 28.11.2011. опубл. 10.08.2013.
10. *Иванов В.Г., Мерзанюкова Е.В., Санин Д.А.* Экзоскелет: патент на изобретение RU 2567589 C1, 10.11.2015. заявка № 2014132377/14 от 05.08.2014. опубл. 10.11.2015.
11. *Chu C., Chu A.* Passive Exoskeleton: patent № US7571839B2 United States, publication of 21.07.2009.
12. *Qing Guo, Songjing Li, Dan Jiang* A Lower Extremity Exoskeleton: Human-Machine Coupled Modeling, Robust Control Design, Simulation, and Overload-Carrying Experiment // Mathematical Problems in Engineering. V. 2015. P. 1–15. https://doi.org/10.1155/2015/905761
13. *Blažek P., Bydžovský J., Griffin R., Mls K., Peterson B.* Obstacle Awareness Subsystem for Higher Exoskeleton Safety // Towards Digital Intelligence Society. DISA 2020. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol 1281. Ed. by *Paralič J., Sinčák P., Hartono P., Mařík V.* Springer, Cham, 2021. P. 59–71. https://doi.org/10.1007/978-3-030-63872-6_3

14. *Bao W., Villarreal D., Chiao J.-C.* Vision-Based Autonomous Walking in a Lower-Limb Powered Exoskeleton // 2020 IEEE 20th International Conference on Bioinformatics and Bioengineering (BIBE). Cincinnati, OH: IEEE, 2020. P. 830–834. DOI: 10.1109 BIBE50027.2020.00141.
15. *Proud J.K., Lai D.T.H., Mudie K.L., Carstairs G.L., Billing D.C., Garofolini A., Begg R.K.* Exoskeleton Application to Military Manual Handling Tasks. Hum Factors. 2020 Nov 18:18720820957467. Epub ahead of print. PMID:
https://doi.org/10.1177/0018720820957467 33203237
16. *Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А.* Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.
17. *Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н.* Локомоция многозвенных систем на плоскости: динамика, управление, оптимизация // Препринт ИПМех РАН. № 1128. М.: ИПМех РАН, 2016. 154 с.
18. *Mukharlyamov R.G., Tleubergenov M.I.* Control of System Dynamics and Constraints Stabilization // Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2017. Communications in Computer and Information Science, vol 700. Cham: Springer, 2017. P. 431–442.
19. *Мухарлямов Р.Г.* Управление динамикой системы с дифференциальными связями // Известия РАН. Теория и системы управления. 2019. № 4. С. 16–28.
20. *Каспирович И.Е., Мухарлямов Р.Г.* О методах построения уравнений динамики с учетом стабилизации связей // Известия РАН. МТТ. 2019. № 3. С. 124–135.
21. *Борисов А.В., Розенблат Г.М.* Динамика механических стержневых систем со звеньями переменной длины применительно к эндо-, экзоскелетам и антропоморфным роботам на плоскости и в пространстве // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2019. Приложение. № 10–11. С. 1–20.
22. *Borisov A.V.* Two-Dimensional And Three-Dimensional Models Of Anthropomorphic Robot And Exoskeleton With Links Of Variable Length // Proceedings of 24th International Conference "Mechanika 2019". Kaunas: Kaunas University of Technology, 2019. P. 26–39.
23. *Борисов А.В., Розенблат Г.М.* Матричный метод составления дифференциальных уравнений движения экзоскелета и управление им // ПММ. 2017. Т. 81. № 5. С. 511–522.
24. *Борисов А.В., Розенблат Г.М.* Моделирование динамики экзоскелета с управляемыми моментами в суставах и переменной длиной звеньев с использованием рекуррентного метода составления дифференциальных уравнений движения // Известия РАН. Теория и системы управления. 2018. № 2. С. 148–174.
25. *Борисов А.В., Волкова Ю.Е., Кончина Л.В., Маслова К.С.* Пассивно-активный экзоскелет со звеньями переменной длины и пружинными элементами двух типов // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2020. № 9. С. 54–64.
26. *Борисов А.В.* Динамика эндо- и экзоскелета: монография. Смоленск: Смоленская городская типография, 2012. 296 с.
27. *Бербюк В.Е.* Динамика и оптимизация робототехнических систем. Киев: Наукова Думка, 1989. 192 с.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 6, с. 88–110

*УДК 531.383*

# ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СВОЙСТВ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ДАТЧИКОВ УПРАВЛЕНИЯ НА ДИНАМИКУ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА

**© 2021 г. Д. А. Маслов[a,]*, И. В. Меркурьев[a,]****

[a] *Национальный исследовательский университет "МЭИ", Москва, Россия*

**e-mail: MaslovDmA@mpei.ru*

***e-mail: MerkuryevIV@mpei.ru*

Поступила в редакцию 29.12.2020 г.
После доработки 06.01.2021 г.
Принята к публикации 14.01.2021 г.

В работе построены математические модели динамики цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа, которые учитывают нелинейности, вызванные возбуждением колебаний электростатическими датчиками управления. Выделены важные типы нелинейностей: кубическая нелинейность специального вида и квадратичная нелинейность, влияющая на управление. Показано, что кубическая нелинейность выводится при уточнении электростатической компоненты жесткости и приводит к угловой скорости дрейфа гироскопа, пропорциональной квадрату опорного напряжения. Для исследования срыва колебаний выведены уравнения амплитудно-частотных характеристик с учетом кубической нелинейности и квадратичной нелинейности при управлении, показано влияние квадратичной нелинейности на амплитуду колебаний, а кубической нелинейности – на уменьшение резонансной частоты. Предложены формулы вычисления резонансной частоты и алгоритмы вычисления частот срыва колебаний с учетом нелинейности колебаний.

*Ключевые слова:* волновой твердотельный гироскоп, электростатические датчики, цилиндрический резонатор, нелинейные колебания, дрейф гироскопа

**DOI:** 10.31857/S0572329921050068

**1. Введение.** В настоящее время актуальной задачей является повышение точности навигационных приборов, включая волновые твердотельные гироскопы (ВТГ), с помощью построения более точных математических моделей динамики их чувствительных элементов [1]. Учет нелинейности колебаний в математических моделях динамики резонаторов ВТГ позволяет не только оценить погрешности и повысить точность прибора методами компенсации, но и исследовать ряд нелинейных эффектов, которые имеют место в динамике ВТГ и не могут быть исследованы в рамках линейных математических моделей.

Основы теории ВТГ заложены в работах Д.М. Климова и В.Ф. Журавлёва [2–6]. В [3, 6] показано, что погрешность, вызванная нелинейными свойствами колебательной системы, присуща всем ВТГ, а исследование динамики может проводиться в рамках одних и тех же уравнений, аналогичных уравнениям классического маятника Фуко. При этом указано, что для исследования нелинейности требуется учет специфики конкретной колебательной системы. В работах [7–9] отмечено, что при экспериментальных исследованиях динамики вибрационных гироскопов с электростатическими датчиками управления были обнаружены явления, характерные для нелинейных си-

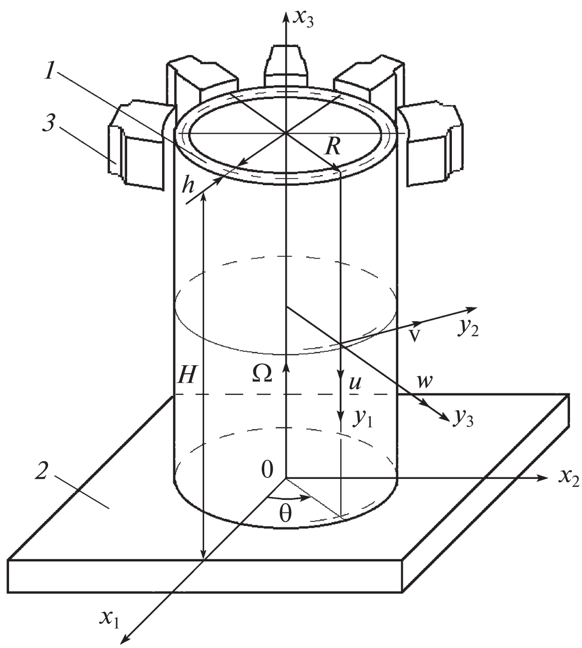


**Рис. 1.** Расчетная схема ВТГ

стем, например, срыв колебаний резонатора. Однако исследованию специфики нелинейности, вызванной электростатическими датчиками управления уделяется очень мало внимания.

В данной статье исследуются нелинейные колебания, вызванные электростатическими датчиками управления, выводится ряд нелинейных математических моделей, уточняются и обобщаются результаты предшествующих работ [10–14]. В статье рассматривается только ВТГ с цилиндрическим резонатором. Данный выбор сделан на основе обзора литературы [10], показавшего малое число исследований данного типа резонаторов и его возможные перспективы в связи с простотой изготовления и достаточно высокой добротностью [15]. Результаты, полученные для ВТГ с цилиндрическим резонатором могут быть обобщены на ВТГ с другими типами резонаторов: кольцевым и полусферическим.

**2. Определение собственных форм колебаний цилиндрического резонатора.** Рассмотрим резонатор волнового твердотельного гироскопа (рис. 1), представленный упругой осесимметричной цилиндрической оболочкой 1 толщины $h$, высоты $H$ и кругового сечения радиуса $R$. Один край резонатора свободен, а другой жестко прикреплен к основанию 2. Предполагается, что упругие свойства материала резонатора изотропны, инструментальные погрешности изготовления не учитываются.

С основанием прибора свяжем ортогональную систему координат $Ox_1x_2x_3$. Ось $x_3$ направим по оси симметрии резонатора. В качестве криволинейных координат примем нормализованную (отнесенную к радиусу резонатора) длину образующей $\alpha$, $0 \le \alpha \le \alpha_1 = H/R$, и угол в окружном направлении $\theta$, который отсчитывается от координатной оси $Ox_1$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Введем правый ортогональный трехгранник $y_1y_2y_3$, жестко связанный с срединной поверхностью резонатора. Пусть $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$ – вектор упругого смещения произвольной точки срединной поверхности резонатора в осях $y_1y_2y_3$.

Потенциальную энергию деформации цилиндрической оболочки определим по формуле [16], которая является результатом использования гипотезы Кирхгофа–Лява:

$$\begin{aligned} \Pi = {} & \frac{1}{2}D_1R^2\int_0^{\alpha_1}\int_0^{2\pi}((\kappa_{11}+\kappa_{22})^2 - 2(1-\nu_p)(\kappa_{11}\kappa_{22}-\kappa_{12}^2))d\theta d\alpha + \\ & + \frac{1}{2}D_2R^2\int_0^{\alpha_1}\int_0^{2\pi}((\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})^2 - 2(1-\nu_p)(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}-0.25\varepsilon_{12}^2))d\theta d\alpha \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $D_1 = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu_p^2)}$ – жесткость цилиндрической оболочки при изгибе (цилиндрическая жесткость); $D_2 = \dfrac{Eh}{1-\nu_p^2}$ – жесткость цилиндрической оболочки при растяжении (сжатии); $E$ – модуль Юнга; $\nu_p$ – коэффициент Пуассона. Для цилиндрической оболочки компоненты тангенциальной и изгибной деформаций задаются формулами [17]:

$$\begin{gathered} \varepsilon_{11} = \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\alpha}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta} + w\right), \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial\alpha}\right) \\ \kappa_{11} = -\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}, \quad \kappa_{22} = -\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + w\right), \quad \kappa_{12} = -\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta} - \frac{\partial v}{\partial\alpha} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\theta}\right) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Для определения вектора перемещения воспользуемся условиями нерастяжимости срединной поверхности, которые получаются приравниванием нулю всех трех компонент тангенциальной деформации $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{12} = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial\theta} + w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial\alpha} = 0 \tag{2.3}$$

Для рассматриваемого цилиндрического резонатора, у которого один край свободен, а другой закреплен, система уравнений (2.3) не допускает решений кроме тривиального, а приближение к решению может быть получено при выполнении двух условий: $\varepsilon_{12} = 0$ и $\varepsilon_{22} = 0$ [18]. Из данных условий следует существование разрешающей функции $\Psi(\alpha,\theta,t)$:

$$u = -\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}, \quad v = \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}, \quad w = -\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} \tag{2.4}$$

Учитывая формулы (2.2), (2.3), (2.4), запишем выражения для компонент изгибной деформации через разрешающую функцию:

$$\begin{gathered} \kappa_{11} = -\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} = \frac{\partial^4\Psi}{\partial\alpha^2\partial\theta^2}, \quad \kappa_{22} = -\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} - \frac{\partial v}{\partial\theta}\right) = \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^4\Psi}{\partial\theta^4} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2}\right) \\ \kappa_{12} = -\frac{2}{R^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\theta} - \frac{\partial v}{\partial\alpha}\right) = -\frac{2}{R^2}\left(\frac{\partial^4\Psi}{\partial\alpha\partial\theta^3} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\alpha\partial\theta}\right) \end{gathered} \tag{2.5}$$

Для составления функции Лагранжа запишем кинетическую энергию резонатора. По теореме о сложении скоростей определяем вектор абсолютной скорости произвольной точки срединной поверхности резонатора:

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Omega}\times(\mathbf{r} + \mathbf{u}) \tag{2.6}$$

где вектор угловой скорости резонатора $\mathbf{\Omega} = (-\Omega, 0, 0)^T$ и радиус вектор $\mathbf{r} = (0, 0, R)^T$ заданы в проекциях на оси $y_1 y_2 y_3$. В (2.6) и далее точкой обозначаем дифференцирование по времени $t$. Учитывая (2.6), выражение кинетической энергии цилиндрической оболочки принимает вид:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha_1} \rho h R^2((\dot{u})^2 + (\dot{v} + \Omega(R + w))^2 + (\dot{w} - \Omega v)^2)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\theta \tag{2.7}$$

где $\rho$ — плотность материала резонатора. Формула (2.7) задает в общем виде кинетическую энергию резонатора ВТГ на вращающемся основании.

Подставляя (2.4), (2.5) в (2.7), (2.1), выражаем кинетическую и потенциальную энергию деформации цилиндрического резонатора на неподвижном основании через разрешающую функцию $\Psi(\alpha, \theta, t)$:

$$T = \frac{\rho h}{2} R^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha_1} \left( \left(\frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial \dot{\Psi}}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \dot{\Psi}}{\partial \theta^2}\right)^2 \right) \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\theta$$

$$\Pi = \frac{D_1}{2R^2}\int_0^{\alpha_1}\int_0^{2\pi} \left[ \left(\frac{\partial^4\Psi}{\partial\theta^4} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^4\Psi}{\partial\alpha^2\partial\theta^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^4\Psi}{\partial\alpha\partial\theta^3} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\alpha\partial\theta}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2v_p\left(\frac{\partial^4\Psi}{\partial\alpha^2\partial\theta^2}\left(\frac{\partial^4\Psi}{\partial\theta^4} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2}\right) - \left(\frac{\partial^4\Psi}{\partial\alpha\partial\theta^3} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\alpha\partial\theta}\right)^2\right)\right] \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\alpha$$

С помощью полученных выражений потенциальной и кинетической энергии резонатора, записанных через разрешающую функцию, можно записать функцию Лагранжа в следующем виде:

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha_1} \left[ \rho h R^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - \right.$$
$$\left. - \frac{D_1}{R^2}((x_4 + x_5)^2 + x_6^2 + 2(x_7 + x_8)^2 + 2\nu_p(x_6(x_4 + x_5) - (x_7 + x_8)^2)) \right] \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\theta$$

где введены обозначения $x_1 = \dfrac{\partial\dot{\Psi}}{\partial\alpha}$, $x_2 = \dfrac{\partial\dot{\Psi}}{\partial\theta}$, $x_3 = \dfrac{\partial^2\dot{\Psi}}{\partial\theta^2}$, $x_4 = \dfrac{\partial^4\Psi}{\partial\theta^4}$, $x_5 = \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2}$, $x_6 = \dfrac{\partial^4\Psi}{\partial\alpha^2\partial\theta^2}$, $x_7 = \dfrac{\partial^4\Psi}{\partial\alpha\partial\theta^3}$, $x_8 = \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial\alpha\partial\theta}$.

В соответствии с вариационным принципом Гамильтона–Остроградского на прямом пути вариация действия по Гамильтону равна нулю:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha_1} \left[ \rho h R^2 (x_1\delta x_1 + x_2\delta x_2 + x_3\delta x_3) - \frac{D_1}{R^2}((x_4 + x_5 + \nu_p x_6)(\delta x_4 + \delta x_5) + \right.$$
$$\left. + (x_6 + \nu_p x_4 + \nu_p x_5)\delta x_6 + 2(1 - \nu_p)(x_7 + x_8)(\delta x_7 + \delta x_8)) \right] \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t = 0$$

где $t_1, t_2$ — фиксированные моменты времени. Используя интегрирование по частям, равенство вариаций нулю в фиксированных граничных точках, произвольность вариации $\delta\Psi$, получим уравнение динамики резонатора ВТГ, записанное через разрешающую функцию $\Psi(\alpha,\theta,t)$:

$$\rho h R^2\left(\frac{\partial^2\ddot{\Psi}}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2\ddot{\Psi}}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^4\ddot{\Psi}}{\partial\theta^4}\right)-\frac{D_1}{R^2}\left(\frac{\partial^8\Psi}{\partial\theta^8}+\frac{\partial^6\Psi}{\partial\theta^6}+\frac{\partial^4\Psi}{\partial\theta^4}+\frac{\partial^8\Psi}{\partial\alpha^4\partial\theta^4}+2\frac{\partial^8\Psi}{\partial\alpha^2\partial\theta^6}+\right.$$
$$\left.+2(1-\nu_p)\left(\frac{\partial^6\Psi}{\partial\alpha^2\partial\theta^4}+\frac{\partial^4\Psi}{\partial\alpha^2\partial\theta^2}\right)\right)=0 \tag{2.8}$$

В силу линейности и специальной структуры уравнения (2.8), для свободных колебаний цилиндрического резонатора гироскопа разрешающая функция ищется в виде:

$$\Psi(\alpha,\theta,t)=dC\psi_k(\alpha)\cos(\mu_k t+k\theta) \tag{2.9}$$

где для удобства дальнейших преобразований введена величина зазора $d$ между недеформированным резонатором и датчиками управления и произвольная безразмерная константа $C$; $\psi_k(\alpha)$ – безразмерная функция, определяющая форму колебаний образующей цилиндра; $\mu_k$ – собственная частота, $k$ – номер формы колебаний резонатора по окружной координате, $k=1,2,\dots$.

После подстановки (2.9) в (2.8) получим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка для определения частот $\mu_k$ и функций $\psi_k(\alpha)$:

$$\psi_k^{IV}(\alpha)+2a_k\psi_k''(\alpha)+b_k\psi_k(\alpha)=0,\quad k=1,2,\dots$$
$$a_k=\frac{1}{2k^4}(2k^2(k^2-1)(k^2-1+\nu_p)-\tilde{\mu}_k^2),\quad b_k=\frac{k^2+1}{k^2}\tilde{\mu}_k^2-(k^2-1)^2 \tag{2.10}$$

где введено обозначение безразмерного параметра, характеризующего собственную частоту:

$$\tilde{\mu}_k=\frac{\rho h R^4}{D_1}\mu_k=\sqrt{\frac{12\rho(1-\nu_p^2)R^4}{Eh^2}}\cdot\mu_k$$

Для постановки краевой задачи накладываются краевые условия на функцию нормального прогиба $w(\alpha,\theta,t)$. Так как один край цилиндрического резонатора свободен, а другой жестко закреплен на основании, имеем:

$$w\big|_{\alpha=0}=\frac{\partial w}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0}=0,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\bigg|_{\alpha=\alpha_1}=\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^3}\bigg|_{\alpha=\alpha_1}=0$$

С учетом формул (2.4) и (2.9) аналогичные краевые условия получаем для функции $\psi_k(\alpha)$:

$$\psi_k\big|_{\alpha=0}=\psi_k'\big|_{\alpha=0}=0,\quad \psi_k''\big|_{\alpha=\alpha_1}=\psi_k'''\big|_{\alpha=\alpha_1}=0 \tag{2.11}$$

Дифференциальному уравнению (2.10) соответствует характеристическое уравнение

$$\lambda^4+2a_k\lambda^2+b_k\lambda=0$$

имеющие корни:

$$\lambda_{1,3}=\pm\sqrt{a_k+\sqrt{a_k^2+b_k}},\quad \lambda_{2,4}=\pm\sqrt{-a_k+\sqrt{a_k^2+b_k}} \tag{2.12}$$

Для нахождения решения краевой задачи (2.10)–(2.11) записываем общее решение дифференциального уравнения (2.10)

$$\psi_k(\alpha)=C_1\mathrm{sh}\,\lambda_1\alpha+C_2\mathrm{ch}\lambda_1\alpha+C_3\sin\lambda_2\alpha+C_4\cos\lambda_2\alpha$$

и определяем константы $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ из граничных условий (2.11). В результате получаем функцию, определяющую формы колебаний образующей цилиндра:

$$\psi_{kn}(\alpha) = \mathrm{sh}\lambda_{1n}\alpha - \zeta_n \mathrm{ch}\lambda_{1n}\alpha - \frac{\lambda_{1n}}{\lambda_{2n}}\sin\lambda_{2n}\alpha + \zeta_n\cos\lambda_{2n}\alpha, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.13}$$

где $\zeta_n = \lambda_{1n}\dfrac{\lambda_{1n}\mathrm{sh}(\alpha_1\lambda_{1n}) + \lambda_{2n}\sin(\alpha_1\lambda_{2n})}{\lambda_{1n}^2\mathrm{ch}(\alpha_1\lambda_{1n}) + \lambda_{2n}^2\cos(\alpha_1\lambda_{2n})}$, $\lambda_{1n}$, $\lambda_{2n}$, $n = 1, 2, \ldots$, соответствуют фиксированному $k$ и определяются в результате нахождения нормализованных собственных частот $\tilde{\mu}_{kn}$ при решении трансцендентного уравнения:

$$\lambda_1^4 + \lambda_2^4 + 2\lambda_1^2\lambda_2^2\mathrm{ch}(\alpha_1\lambda_1)\cos(\alpha_1\lambda_2) + \lambda_1\lambda_2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)\mathrm{sh}(\alpha_1\lambda_1)\sin(\alpha_1\lambda_2) = 0 \tag{2.14}$$

Заметим, что при решении (2.14) для фиксированного $k$ определяются корни трансцендентного уравнения $\mu_{kn}$ $n = 1, 2, \ldots$. В дальнейшем, при подстановке в (2.9), полагается $n = 1$, а индекс $n$ в записи выражений опускается.

Таким образом, для номера формы колебаний резонатора по окружной координате $k$ найдены соответствующие ей собственные частоты $\mu_k$ и собственные формы колебаний образующей цилиндра $\psi_k(\alpha)$.

**3. Вывод уравнений движения цилиндрического резонатора ВТГ с электростатическими датчиками управления.** Резонатор ВТГ изготавливается из кварцевого стекла с нанесением на его поверхность металлического покрытия. Предполагается, что металлическое покрытие не влияет на упругие свойства резонатора. Колебания цилиндрического резонатора возбуждаются системой электростатических датчиков управления, которые представляют собой конденсаторы, образованные металлизированной поверхностью резонатора и электродами управления, расположенными вблизи свободной кромки резонатора.

Для вывода уравнений движения цилиндрического резонатора составим функцию Лагранжа электромеханической системы [19], включающей, помимо кинетической и потенциальной энергию резонатора, потенциальную энергию электрического поля, создаваемого электростатическими датчиками управления.

Так как в волновых твердотельных гироскопах для возбуждения колебаний используется вторая форма колебаний резонатора по окружной координате, то запишем разрешающую функцию (2.9) в следующем виде:

$$\Psi(\alpha, \theta, t) = C\psi_2(\alpha)\big(f_*(t)\cos 2\theta - g_*(t)\sin 2\theta\big) \tag{3.1}$$

где введены неизвестные функций $f_*(t)$, $g_*(t)$, а функция $\psi_2(\alpha)$ определяются при решении задачи (2.10)–(2.11) по алгоритму (2.13)–(2.14).

Используя формулы (2.4) и функцию (3.1), запишем вектор смещения произвольной точки срединной поверхности резонатора в одномодовом приближении по второй форме колебаний ($k = 2$):

$$\mathbf{u}(\alpha, \theta, t) = \begin{pmatrix} u(\alpha, \theta, t) \\ v(\alpha, \theta, t) \\ w(\alpha, \theta, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\psi_2'(\alpha)\big(f_*(t)\cos 2\theta - g_*(t)\sin 2\theta\big) \\ 2C\psi_2(\alpha)\big(f_*(t)\sin 2\theta + g_*(t)\cos 2\theta\big) \\ 4C\psi_2(\alpha)\big(-f_*(t)\cos 2\theta + g_*(t)\sin 2\theta\big) \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Примем в качестве обобщенных координат второй формы колебаний резонатора функции $f_*(t), g_*(t)$ и положим константу $C = 1/\big(4\psi_2(\alpha_1)\big)$, чтобы прогиб свободной кромки резонатора имел вид $w(\alpha_1, \theta, t) = -f_*(t)\cos 2\theta + g_*(t)\sin 2\theta$.

Подставляя (3.2) в (2.2), а (2.2), (2.3) в (2.1), получим выражение для потенциальной энергии деформации цилиндрического резонатора:

$$\Pi = \frac{1}{2}c(f_*^2 + g_*^2) \tag{3.3}$$

где приведенная жесткость резонатора

$$c = \frac{\pi D_1}{2R^2\psi_2^2(\alpha_1)}\int_0^{\alpha_1}[2(3\psi_2(\alpha) - \psi_2''(\alpha))^2 - 3(\nu_p - 1)(3(\psi_2'(\alpha))^2 + 4\psi_2(\alpha)\psi_2''(\alpha))]d\alpha \tag{3.4}$$

Подставляя (3.2) в (2.7), определяем кинетическую энергию резонатора:

$$T = \frac{1}{2}[m(\dot f_*^2 + \dot g_*^2) + 2\zeta_*\Omega(g_*\dot f_* - f_*\dot g_*)] \tag{3.5}$$

где приведенная масса

$$m = \frac{\pi\rho h R^2}{16\psi_2^2(\alpha_1)}\int_0^{\alpha_1}((\psi_2'(\alpha))^2 + 20\psi_2^2(\alpha))d\alpha \tag{3.6}$$

коэффициент $\zeta_* = \dfrac{\pi\rho h R^2}{\psi_2^2(\alpha_1)}\int_0^{\alpha_1}\psi_2^2(\alpha)d\alpha$. В связи с малостью $\Omega$, в (3.5) пренебрегались слагаемые, содержащие $\Omega^2$.

Вычислим энергию $n$ конденсаторов, образованных управляющими электродами и резонатором. Потенциальная энергия электрического поля, локализованного между обкладками заряженных конденсаторов, определяется выражением

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{q_j^2}{C_j} \tag{3.7}$$

где $q_j$ – заряд $j$-го конденсатора, образованного резонатором и $j$-м электродом, центр которого расположен под углом $\theta_j = 2\pi(j-1)/n$ к оси $Ox_1$ (рис. 1), $j = 1\ldots n$, $n$ – число электродов; $C_j$ – емкость. Будем предполагать, что перекрестное влияние конденсаторов отсутствует. Для вычисления емкости используем формулу

$$C_j = \frac{\varepsilon_0 S}{d - w_j} = \frac{C_0}{1 - \frac{1}{d}(-f_*(t)\cos 2\theta_j + g_*(t)\sin 2\theta_j)} \tag{3.8}$$

где $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная; $S$ – площадь электрода; $d$ – зазор между недеформированным резонатором и электродами; $C_0 = \varepsilon_0 S/d$ – емкость конденсатора, образованного электродом управления и недеформированным резонатором; нормальный прогиб свободной кромки резонатора $w_j(t) = w(\alpha_1, \theta_j, t)$, $j = 1\ldots n$. Подставляя (3.8) в (3.7), получаем выражение для энергии

$$W_e = \frac{1}{2C_0}\sum_{j=1}^{n} q_j^2\left(1 - \frac{1}{d}\left(-f_*(t)\cos 2\theta_j + g_*(t)\sin 2\theta_j\right)\right) \tag{3.9}$$

Для составления уравнений Лагранжа–Максвелла электромеханической системы применяем методику, предложенную в [19]:

$$\begin{aligned} T - \Pi - W_e = {} & \frac{1}{2}(m(\dot f_*^2 + \dot g_*^2) + 2\zeta_*\Omega(g_*\dot f_* - f_*\dot g_*) - c(f_*^2 + g_*^2)) - \\ & - \frac{1}{2C_0}\sum_{j=1}^{n} q_j^2\left(1 - \frac{1}{d}\left(-f_*(t)\cos 2\theta_j + g_*(t)\sin 2\theta_j\right)\right) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Внутренние потери при колебаниях будем описывать моделью Кельвина–Фойгта. Внешними потерями пренебрегаем, считая объем корпуса прибора ваккумированным. Введем диссипативную функцию, учитывающую внутреннее трение материала резонатора:

$$\Phi = \frac{1}{2} c_*(\dot{f}_*^2 + \dot{g}_*^2) \tag{3.11}$$

где $c_*$ – коэффициент, характеризующий вязкоупругие свойства материала резонатора. Рассматриваемый материал обладает малыми потерями на внутреннее трение.

Введем электрическую диссипативную функцию

$$\Phi_e = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} R_e \dot{q}_j^2 \tag{3.12}$$

где $R_e$ – электрическое сопротивление цепи между электродом управления и источником питания.

Используя уравнения Лагранжа–Максвелла, учитывая (3.10), (3.11), (3.12), получим

$$\begin{gathered} \ddot{f}_* + \omega^2 f_* + 2\zeta\Omega\dot{g}_* + \gamma\dot{f}_* + \frac{1}{2mC_0 d}\sum_{j=1}^{n} q_j^2 \cos 2\theta_j = 0 \\ \ddot{g}_* + \omega^2 g_* - 2\zeta\Omega\dot{f}_* + \gamma\dot{g}_* - \frac{1}{2mC_0 d}\sum_{j=1}^{n} q_j^2 \sin 2\theta_j = 0 \end{gathered} \tag{3.13}$$

$$R_e\dot{q}_j + \frac{q_j}{C_j} = U_j, \quad j = 1 \ldots n \tag{3.14}$$

где $\zeta = \zeta_*/m$, $\omega^2 = c/m$, $\gamma = c_*/m$; $U_j$ – напряжение на $j$-м электроде.

Запишем выражение для емкости (3.8) следующим образом:

$$C_j = \frac{C_0}{1 - f(t)\cos 2\theta_j - g(t)\sin 2\theta_j} \tag{3.15}$$

где $f(t) = -f_*(t)/d$, $g(t) = g_*(t)/d$ – безразмерные обобщенные координаты, задающие нормализованные по отношению к величине зазора $d$ радиальные смещения резонатора в двух фиксированных точках, отстоящих друг от друга под углом 45°.

Используя формулу (3.15) и переходя в уравнениях (3.13)–(3.14) к нормализованным обобщенным координатам $f(t)$ и $g(t)$, получим систему уравнений

$$\begin{gathered} \ddot{f} + \omega^2 f + \gamma\dot{f} - 2\zeta\Omega\dot{g} - \frac{1}{2md^2C_0}\sum_{j=1}^{n} q_j^2 \cos 2\theta_j = 0 \\ \ddot{g} + \omega^2 g + \gamma\dot{g} + 2\zeta\Omega\dot{f} - \frac{1}{2md^2C_0}\sum_{j=1}^{n} q_j^2 \sin 2\theta_j = 0 \end{gathered} \tag{3.16}$$

$$R_e C_0 \dot{q}_j + q_j(1 - f\cos 2\theta_j - g\sin 2\theta_j) = U_j C_0, \quad j = 1 \ldots n \tag{3.17}$$

Поставим начальные условия для системы (3.16)–(3.17):

$$f(0) = f^0, \quad \dot{f}(0) = \dot{f}^0, \quad g(0) = g^0, \quad \dot{g}(0) = \dot{g}^0, \quad q_j(0) = q_j^0, \quad j = 1 \ldots n \tag{3.18}$$

Перейдем в задаче (3.16)–(3.18) к безразмерному времени $\tau = \omega t$ и запишем ее в векторно-матричном виде

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\tau} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \tau) \tag{3.19}$$

$$\varepsilon \frac{d\mathbf{q}}{d\tau} = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \tau) \tag{3.20}$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}^0 \tag{3.21}$$

где $\mathbf{x} = \left(f, \frac{df}{d\tau}, g, \frac{dg}{d\tau}\right)^T$, $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)^T$, $\varepsilon = R_e C_0 \omega$ – безразмерный малый параметр (например, $\varepsilon \sim 10^{-8}$, $R_e \approx 1$ Ом, $C_0 \approx 10^{-12}$Ф, $\omega \approx 10^4$ с$^{-1}$).

Установим, что для задачи (3.19)–(3.21) выполняются условия теоремы Тихонова о предельном переходе [21]. Поскольку при работе ВТГ амплитуда прогиба меньше величины зазора между недеформированным резонатором и электродами управления (исключается пробой конденсаторов), при исследовании задачи (3.19)–(3.21) будем использовать ограничение

$$f^2 + g^2 \le \beta^2 \tag{3.22}$$

где $\beta$ – константа, $0 < \beta < 1$. Используя (3.22), введем область

$$H = \{(\mathbf{x}, \tau) \in \bar{D} = \{|\mathbf{x}| \le \sqrt{2}\beta, 0 \le \tau \le T\}, |q_j| \le 2U_0C_0/(1-\beta), j = 1 \ldots n\}$$

Правые части уравнений (3.19), (3.20) непрерывны вместе с частными производными по компонентам векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{q}$ в области $H$. Полагая в (3.20) $\varepsilon = 0$, имеем вырожденную задачу:

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{d\tau} = \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{q}}, \tau) \tag{3.23}$$

$$\mathbf{Q}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{q}}, \tau) = 0 \tag{3.24}$$

$$\bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}^0 \tag{3.25}$$

Система алгебраических уравнений (3.24) представляет $n$ независимых уравнений с единственными решениями

$$\bar{q}_j = \frac{U_j C_0}{1 - \bar{f}\cos 2\theta_j - \bar{g}\sin 2\theta_j}, \quad j = 1 \ldots n$$

которые вместе с производными по $\bar{f}$ и $\bar{g}$ непрерывны в области $\bar{D}$. Условие устойчивости полученных корней справедливо в результате выполнения (3.22):

$$\frac{\partial Q_j}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}(-q_j(1 - f\cos 2\theta_j - g\sin 2\theta_j) + U_j C_0) =$$
$$= -1 + f\cos 2\theta_j + g\sin 2\theta_j \le -1 + \beta < 0, \quad j = 1 \ldots n$$

Решением задачи (3.23)–(3.25) будем называть непрерывно дифференцируемую вектор-функцию $\bar{\mathbf{x}}(\tau)$, удовлетворяющую условиям (3.22), (3.25) и обращающую уравнение (3.23) в тождество. В области $\bar{D}$ решение задачи (3.23)–(3.25) существует и единственно.

Таким образом, согласно теореме Тихонова о предельном переходе [21], решение задачи (3.19)–(3.21) существует на $[0, T]$ и имеет место предельный переход к решению вырожденной задачи (3.23)–(3.25) при стремлении малого параметра к нулю:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{x}(\tau, \varepsilon) = \bar{\mathbf{x}}(\tau), \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{q}(\tau, \varepsilon) = \bar{\mathbf{q}}(\tau), \quad 0 \le \tau \le T$$

Основываясь на теореме Тихонова о предельном переходе и учитывая малость параметра $\varepsilon$, можем использовать решение вырожденной задачи (3.23)–(3.25) в качестве нулевого приближения к решению задачи (3.19)–(3.21).

Опуская обозначение “–” решения вырожденной задачи, перепишем (3.23)–(3.25) в размерном времени $t$ в соответствующем (3.16)–(3.18) виде:

$$
\begin{aligned}
&\ddot{f} + \omega^2 f + \gamma\dot{f} - 2\zeta\Omega\dot{g} - \frac{C_0}{2md^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{U_j^2\cos 2\theta_j}{(1 - f\cos 2\theta_j - g\sin 2\theta_j)^2} = 0\\
&\ddot{g} + \omega^2 g + \gamma\dot{g} + 2\zeta\Omega\dot{f} - \frac{C_0}{2md^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{U_j^2\sin 2\theta_j}{(1 - f\cos 2\theta_j - g\sin 2\theta_j)^2} = 0
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

$$
f(0) = f^0, \quad \dot{f}(0) = \dot{f}^0, \quad g(0) = g^0, \quad \dot{g}(0) = \dot{g}^0 \tag{3.27}
$$

В [19] для исследования влияния электродов управления на динамику резонатора при составлении уравнений учитывались малые электрические сопротивления с помощью асимптотического разложения решения и рассматривались только линейные колебания. В уравнениях (3.36) учтены нелинейные колебания при пренебрежении малым электрическим сопротивлением.

Таким образом, выведены и обоснованы математические модели (3.16)–(3.18) и (3.26)–(3.27). Задачу (3.16)–(3.18) будем называть исходной математической моделью, объединяющей обобщенный вид нелинейности колебаний резонатора, вызванной датчиками управления, и сингулярно возмущенные уравнения электрических колебаний в цепи управления. Задачу (3.36)–(3.27) будем называть базовой математической моделью для исследования нелинейности колебаний, вызванной датчиками управления.

Рассмотрим наиболее распространенный случай, при котором напряжения $U_j$ между $j$-м электродом датчика управления и резонатором, $j = 1,\dots,n$, подаются на $n = 16$ датчиков управления, неизменно ориентированных относительно основания ВТГ (рис. 2):

$$
\begin{aligned}
U_1 &= U_9 = U_0(1 + u_A) = U_0(1 - u_1\sin\omega_0 t + u_2\cos\omega_0 t)\\
U_5 &= U_{13} = U_0(1 - u_A) = U_0(1 + u_1\sin\omega_0 t - u_2\cos\omega_0 t)\\
U_3 &= U_{11} = U_0(1 + u_B) = U_0(1 - u_3\sin\omega_0 t + u_4\cos\omega_0 t)\\
U_7 &= U_{15} = U_0(1 - u_B) = U_0(1 + u_3\sin\omega_0 t - u_4\cos\omega_0 t)
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

где $\omega_0$ – частота внешнего гармонического возбуждения колебаний резонатора близкая к резонансной частоте второй формы колебаний, $|\omega_0 - \omega| \ll \omega$; $U_0$ – постоянное опорное напряжение; $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$ – нормализованные по отношению к $U_0$ амплитуды управляющих напряжений, $u_i < 1$, $i = 1,..,4$; $u_A(t)$, $u_B(t)$ – нормализованные управляющие напряжения, подаваемые, соответственно, на группу электродов № 1, 5, 9, 13, и смещенную относительно них на угол 45° группу электродов № 3, 7, 11, 15 (рис. 2). На остальных электродах (с четными номерами) разность потенциалов задается равной опорному напряжению $U_0$.

Сигналы управления (3.28) реализуют для 16 электродов широко применяемую в ВТГ “пуш-пульную” (“push–pull”) схему управления [3]. Данная схема основана на подаче разности потенциалов $U_0(1 + u)$ и $U_0(1 - u)$, $|u| < 1$, на датчики, расположенные ортогонально, и применяется для линеаризации силы электростатического датчика, которая пропорциональна квадрату напряжения на электроде:

$$
U_0^2(1 + u)^2 - U_0^2(1 - u)^2 = 4U_0^2 u \tag{3.29}
$$

Полученное выражение (3.29) линейно относительно нормализованного управляющего напряжения $u$ . В случае 16 электродов управления линеаризации “push–pull” реализуется благодаря известным тригонометрическим соотношениям.

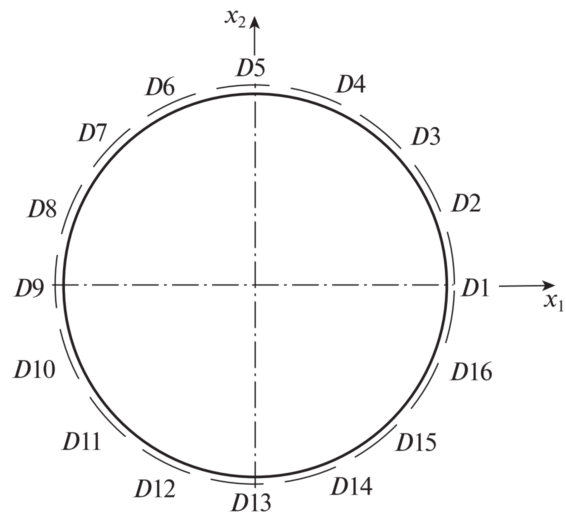


**Рис. 2.** Расположение электростатических датчиков управления ($D1$... $D16$)

Поскольку электростатическая сила обратно пропорциональна квадрату величины зазора между электродом управления и металлизированной поверхностью резонатора, покажем, что при учете конечного отношения прогиба резонатора к зазору электростатического датчика, нарушается линеаризация “push–pull”. Несмотря на конечность отношения прогиба к зазору, величина прогиба является малой, что обосновывает одновременное использование при выводе уравнений динамики резонатора линейной теории оболочек и учет нелинейности силового воздействия датчика управления. Силовое воздействие двух ортогонально расположенных датчиков управления пропорционально выражению, которое может быть разложено в ряд по нормализованному величиной зазора прогибу $|\tilde{w}| = \left|\frac{w}{d}\right| < 1$:

$$\frac{U_0^2(1+u)^2}{(1-\tilde{w})^2} - \frac{U_0^2(1-u)^2}{(1+\tilde{w})^2} = U_0^2(1+u)^2(1+2\tilde{w}+3\tilde{w}^2+4\tilde{w}^3+\ldots) - U_0^2(1-u)^2 \times \\ \times(1-2\tilde{w}+3\tilde{w}^2-4\tilde{w}^3+\ldots) = 4U_0^2u(1+3\tilde{w}^2+5\tilde{w}^4+\ldots) + 4U_0^2(1+u^2)\times \\ \times(\tilde{w}+2\tilde{w}^3+3\tilde{w}^5+\ldots) = 4U_0^2(u+\tilde{w}+u^2\tilde{w}+3u\tilde{w}^2+2\tilde{w}^3+2u^2\tilde{w}^3+\ldots) \tag{3.30}$$

Таким образом, при учете прогиба $\tilde{w}$, схема линеаризации “push–pull” нарушается. Пренебрегая прогибом в случае его малости, получим из (3.30) линейное выражение относительно управляющего напряжения, соответствующее линеаризации “push-pull” (3.29).

Упростим выражения для сумм в (3.26) при возбуждении колебаний по закону (3.28) с помощью разложения (3.30) и преобразований тригонометрических выражений:

$$\sum_{j=1}^{16} \frac{U_j^2\cos 2\theta_j}{(1-f\cos 2\theta_j - g\sin 2\theta_j)^2} = \sum_{j=1}^{n} U_j^2\cos 2\theta_j[1+2f\cos 2\theta_j + 2g\sin 2\theta_j + \\ + 3(f\cos 2\theta_j + g\sin 2\theta_j)^2 + 4(f\cos 2\theta_j + g\sin 2\theta_j)^3 + \ldots] = \tag{3.31}$$

$$= 8U_0^2(2f + u_A + fu_A^2 + 3f^2u_A + 3f(f^2 + g^2) + 2f^3u_A^2) + \\ + 40U_0^2f^4u_A + 6U_0^2(5f(f^2 + g^2)^2 + 4f^5u_A^2) + \ldots$$

$$\sum_{j=1}^{16} \frac{U_j^2 \sin 2\theta_j}{(1 - f\cos 2\theta_j - g\sin 2\theta_j)^2} = \sum_{j=1}^{n} U_j^2 \sin 2\theta_j[1 + 2f\cos 2\theta_j + 2g\sin 2\theta_j + \\ + 3(f\cos 2\theta_j + g\sin 2\theta_j)^2 + 4(f\cos 2\theta_j + g\sin 2\theta_j)^3 + \ldots] = \\ = 8U_0^2(2g + u_B + gu_B^2 + 3g^2u_B + 3g(f^2 + g^2) + 2g^3u_B^2) + \\ + 40U_0^2g^4u_B + 6U_0^2(5g(f^2 + g^2)^2 + 4g^5u_B^2) + \ldots \tag{3.32}$$

Суммирование (3.31), (3.32) учитывает во взаимосвязанной форме дискретную зависимость от окружного угла управляющего напряжения (3.28) и разложенные в ряд нелинейные по прогибу выражения.

Амплитуды нормализованных величин имеют одинаковый порядок малости, $f \sim \sim 0.1$, $g \sim 0.1$, $u_\kappa \sim 0.1$. Поэтому в (3.31) и (3.32) слагаемыми, содержащими $f^\alpha g^\beta u_\kappa^\delta$, $\kappa = A, B$, пренебрегаем при выполнении условия $\alpha + \beta + \delta > 3$ в связи с высоким порядком малости. Подставляя (3.31) и (3.32) в (3.26), получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \ddot{f} + \omega^2 f &= -\gamma\dot{f} + v\dot{g} + \eta(2f + 3(f^2 + g^2)f + u_A^2 f + (1 + 3f^2)u_A) \\ \ddot{g} + \omega^2 g &= -\gamma\dot{g} - v\dot{f} + \eta(2g + 3(f^2 + g^2)g + u_B^2 g + (1 + 3g^2)u_B) \end{aligned} \tag{3.33}$$

где введены обозначения $v = 2\zeta\Omega$, $\eta = \dfrac{4U_0^2 C_0}{md^2}$.

Заметим, что для уточнения нелинейных уравнений динамики (3.33), при подстановке выражений (3.31), (3.32) в (3.26), можно выделить нелинейные слагаемые пятой степени $(f^2 + g^2)^2 f$, $(f^2 + g^2)^2 g$, которые по своей структуре аналогичны кубической нелинейности $(f^2 + g^2)f$, $(f^2 + g^2)g$. С учетом нелинейности пятой степени уравнения принимают вид:

$$\begin{gathered} \ddot{f} + \omega^2 f = -\gamma\dot{f} + v\dot{g} + \\ + \eta\left(2f + 3(f^2 + g^2)f + \frac{15}{4}(f^2 + g^2)^2 f + u_A^2 f + (1 + 3f^2)u_A\right) \\ \ddot{g} + \omega^2 g = -\gamma\dot{g} - v\dot{f} + \\ + \eta\left(2g + 3(f^2 + g^2)g + \frac{15}{4}(f^2 + g^2)^2 g + u_B^2 g + (1 + 3g^2)u_B\right) \end{gathered} \tag{3.34}$$

В работе [14] показано, что учет нелинейных слагаемых пятой степени в математической модели динамики резонаторов повышает точность идентификации параметров ВТГ, поэтому, несмотря на высокий порядок малости, в некоторых случаях будем их удерживать.

Рассмотрим нелинейные слагаемые, выведенные в уравнениях (3.33), (3.34) и их связь со слагаемыми разложения (3.30). В (3.30) можно выделить часть разложения, которая определяется управляющим напряжением следующим образом:

$$4uU_0^2(1 + 3\tilde{w}^2 + 5\tilde{w}^4 + \ldots) \tag{3.35}$$

и указывает на увеличение абсолютной величины силового воздействия за счет учета прогиба. Выражению (3.35), ограниченному третьим порядком по $\tilde{w}$, $u$, соответствуют слагаемые $\eta(1 + 3f^2)u_A$, $\eta(1 + 3g^2)u_B$ в уравнениях (3.33). Слагаемые $\eta u_A$, $\eta u_B$ в (3.30) характеризуют управление вынужденными колебаниями резонатора, а добавление к ним неотрицательных слагаемых с квадратичной нелинейностью $3\eta f^2 u_A$, $3\eta g^2 u_B$, указывает малое усиление управляющего воздействия:

$$\eta(1+3f^2)|u_A| \geq \eta|u_A|, \quad \eta(1+3g^2)|u_B| \geq \eta|u_B|, \quad \eta > 0, \quad f^2 + g^2 \neq 0$$

Другая часть разложения (3.30):

$$4\tilde{w}U_0^2(1+u^2)(1+2\tilde{w}^2+3\tilde{w}^4+\ldots) \tag{3.36}$$

дает в первом приближении по $\tilde{w}$, $u$ выражение $4\tilde{w}U_0^2$, которому в уравнениях (3.33) соответствуют линейные слагаемые $2\eta f$, $2\eta g$, указывающие на малое изменение характерной частоты собственных колебаний и представляющие известный эффект "отрицательной электростатической жесткости". Электростатическая компонента жесткости приводит к изменению квадрата характерной частоты собственных колебаний $\omega^2$ на величину равную $2\eta = 2\eta_e\omega^2$, где $\eta_e = \dfrac{4U_0^2 C_0}{cd^2}$ – безразмерный коэффициент, характеризующий малость электростатических сил. Из разложения (3.36) следует, что в уравнениях (3.34) кубическая нелинейность, нелинейность пятой степени и нелинейное управление представляют нелинейное уточнение электростатической компоненты жесткости, причем имеет место незначительное усиление эффекта "отрицательной электростатической жесткости":

$$\omega^2\left(1-\eta_e\left[2+3(f^2+g^2)+\frac{15}{4}(f^2+g^2)^2+u_A^2\right]\right) < \omega^2(1-2\eta_e), \quad f^2+g^2 \neq 0$$

Заметим, что слагаемые с кубической нелинейностью $(f^2+g^2)f$, $(f^2+g^2)g$ свойственны уравнениям динамики резонаторов гироскопов класса обобщенного маятника Фуко, в том числе и ВТГ [6]. Слагаемые такой структуры получены в [6] для классического маятника Фуко, а в [20] для ВТГ в предположении о том, что для материала резонатора справедлив нелинейный закон упругости. В уравнениях (3.33), (3.34) слагаемые с кубической нелинейностью выведены из нелинейных свойств электростатических датчиков управления, коэффициент при кубической нелинейности $\eta$ зависит от квадрата постоянного опорного напряжения и параметров датчиков управления.

Согласно рассматриваемому закону управления колебаниями (3.28), $u_A^2(t)$ и $u_B^2(t)$ могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} u_A^2(t) &= \frac{u_1^2+u_2^2}{2} - \frac{u_1^2-u_2^2}{2}\cos 2\omega_0 t - u_1u_2\sin 2\omega_0 t \\ u_B^2(t) &= \frac{u_3^2+u_4^2}{2} - \frac{u_3^2-u_4^2}{2}\cos 2\omega_0 t - u_3u_4\sin 2\omega_0 t \end{aligned} \tag{3.37}$$

Подстановка (3.37) в (3.33) указывает на смещение характерной частоты собственных колебаний – дополнительное малое увеличение "отрицательной электростатической жесткости", заданное слагаемыми $\eta(u_1^2+u_2^2)/2$ и $\eta(u_3^2+u_4^2)/2$. Из-за отличия друг от друга величин $u_1, u_2, u_3, u_4$, данные слагаемые задают разночастотность, вызванную электростатическими датчиками управления. В дальнейшем будем пренебрегать описанными слагаемыми в силу их малости. Слагаемые, содержащие $\cos 2\omega_0 t$ и $\sin 2\omega_0 t$, характеризуют параметрическое возбуждение колебаний резонатора, сопутствующее вынужденным колебаниям. Устойчивость колебаний при данном сопутствующем параметрическом возбуждении в линейной постановке задачи исследована в [11].

Учитывая (3.37) и сделанные упрощения, запишем уравнения (3.33) в виде

$$
\begin{gathered}
\ddot{f} + \omega^2 f = -\gamma\dot{f} + v\dot{g} + \eta(3(f^2 + g^2)f + (1 + 3f^2)(-u_1 \sin\omega_0 t + u_2\cos\omega_0 t)) - \\
-\frac{\eta}{2}((u_1^2 - u_2^2)\cos 2\omega_0 t + 2u_1u_2 \sin 2\omega_0 t)f \\
\ddot{g} + \omega^2 g = -\gamma\dot{g} - v\dot{f} + \eta(3(f^2 + g^2)g + (1 + 3g^2)(-u_3 \sin\omega_0 t + u_4\cos\omega_0 t)) - \\
-\frac{\eta}{2}((u_3^2 - u_4^2)\cos 2\omega_0 t + 2u_3u_4 \sin 2\omega_0 t)g
\end{gathered}
\tag{3.38}
$$

где, путем введения $\tilde{\omega}^2 = \omega^2 - 2\eta$ и обозначения $\omega = \tilde{\omega}$, учтено уменьшение квадрата характерной частоты собственных колебаний на величину постоянной составляющей электростатической компоненты жесткости $2\eta$.

Уравнения (3.38), которые учитывают все рассмотренные нелинейности до третьего порядка, примем основными при исследовании нелинейной динамики рассматриваемого ВТГ и будем называть нелинейной математической моделью, учитывающей кубическую нелинейность, квадратичную нелинейность при управлении и параметрическое возбуждение, сопутствующее возбуждению колебаний электростатическими датчиками.

**4. Осреднение нелинейных уравнений движения резонатора.** Для исследования динамики резонатора проведем осреднение [22] системы уравнений (3.38). Перейдем к безразмерному времени $\tau = \omega t$ и с помощью замены переменных

$$
x_1 = f, \quad x_2 = \frac{df}{d\tau}, \quad x_3 = g, \quad x_4 = \frac{dg}{d\tau}
\tag{4.1}
$$

сведем (3.38) к нормальной системе дифференциальных уравнений:

$$
\begin{gathered}
\frac{dx_1}{d\tau} = x_2 \\
\frac{dx_2}{d\tau} = -x_1 - \frac{\gamma}{\omega}x_2 + \frac{v}{\omega}x_4 - \frac{\eta}{2\omega^2}((u_1^2 - u_2^2)\cos 2\mu\tau + 2u_1u_2\sin 2\mu\tau)x_1 + \\
+\frac{\eta}{\omega^2}(3(x_1^2 + x_3^2)x_1 + (1 + 3x_1^2)(-u_1\sin\mu\tau + u_2\cos\mu\tau)) \\
\frac{dx_3}{d\tau} = x_4 \\
\frac{dx_4}{d\tau} = -x_3 - \frac{\gamma}{\omega}x_4 - \frac{v}{\omega}x_2 - \frac{\eta}{2\omega^2}((u_3^2 - u_4^2)\cos 2\mu\tau + 2u_3u_4\sin 2\mu\tau)x_3 + \\
+\frac{\eta}{\omega^2}(3(x_1^2 + x_3^2)x_3 + (1 + 3x_3^2)(-u_3\sin\mu\tau + u_4\cos\mu\tau))
\end{gathered}
\tag{4.2}
$$

где $\mu = \omega_0/\omega = (\omega + \lambda)/\omega$, $\lambda = \omega_0 - \omega$ – частотная настройка, $|\lambda| \ll \omega$.

Используя замену переменных

$$
\begin{gathered}
x_1 = p_1\sin\mu\tau + q_1\cos\mu\tau, \quad x_2 = \mu(p_1\cos\mu\tau - q_1\sin\mu\tau) \\
x_3 = p_2\sin\mu\tau + q_2\cos\mu\tau, \quad x_4 = \mu(p_2\cos\mu\tau - q_2\sin\mu\tau)
\end{gathered}
\tag{4.3}
$$

выводим из (4.2) разрешенную относительно производных систему дифференциальных уравнений, которую сокращенно записываем в векторно-матричной форме

$$
\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = F(\mathbf{z}, \tau)
\tag{4.4}
$$

где $\mathbf{z}(\tau) = (q_1(\tau), p_1(\tau), q_2(\tau), p_2(\tau))^T$. Проводя осреднение (4.4) по явно входящему безразмерному времени $\tau$, придем к системе, решение которой дает приближение к решению (4.4), обоснованное методом осреднения Крылова–Боголюбова:

$$\frac{d\bar{\mathbf{z}}}{d\tau} = \bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{z}}) \tag{4.5}$$

Далее опустим обозначение осредненного решения $\bar{\mathbf{z}}$ и, переходя от безразмерного времени $\tau$ к времени $t$, запишем осредненную систему (4.5) в виде

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= \frac{1}{2}\left[-2p_1\lambda - q_1\gamma + q_2 v + \frac{\eta}{\omega}\left(3k_1 + p_1\frac{u_2^2 - u_1^2}{4} + q_1\frac{u_1u_2}{2} + (1+k_5)u_1 + k_9u_2\right)\right]\\
\dot{p}_1 &= \frac{1}{2}\left[2q_1\lambda - p_1\gamma + p_2 v + \frac{\eta}{\omega}\left(3k_2 + q_1\frac{u_2^2 - u_1^2}{4} - p_1\frac{u_1u_2}{2} + (1+k_6)u_2 + k_9u_1\right)\right]\\
\dot{q}_2 &= \frac{1}{2}\left[-2p_2\lambda - q_2\gamma - q_1 v + \frac{\eta}{\omega}\left(3k_3 + p_2\frac{u_4^2 - u_3^2}{4} + q_2\frac{u_3u_4}{2} + (1+k_7)u_3 + k_{10}u_4\right)\right]\\
\dot{p}_2 &= \frac{1}{2}\left[2q_2\lambda - p_2\gamma - p_1 v + \frac{\eta}{\omega}\left(3k_4 + q_2\frac{u_4^2 - u_3^2}{4} - p_2\frac{u_3u_4}{2} + (1+k_8)u_4 + k_{10}u_3\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.6}$$

где введены обозначения нелинейных слагаемых аналогично [20]:

$$\begin{gathered}
k_1 = -p_1E - q_2X, \quad k_2 = q_1E - p_2X, \quad k_3 = -p_2E + q_1X, \quad k_4 = q_2E + p_1X\\
E = 3(q_1^2 + p_1^2 + q_2^2 + p_2^2)/4, \quad X = (p_2q_1 - p_1q_2)/2
\end{gathered} \tag{4.7}$$

а также нелинейностей при управляющих напряжениях:

$$\begin{gathered}
k_5 = 3(3p_1^2 + q_1^2)/4, \quad k_6 = 3(p_1^2 + 3q_1^2)/4, \quad k_7 = 3(3p_2^2 + q_2^2)/4\\
k_8 = 3(p_2^2 + 3q_2^2)/4, \quad k_9 = -3q_1p_1/2, \quad k_{10} = -3q_2p_2/2
\end{gathered} \tag{4.8}$$

Систему уравнений (4.6), которая учитывает все рассмотренные нелинейности до третьего порядка малости, будем называть нелинейной математической моделью в медленных переменных.

**5. Влияние опорного напряжения на дрейф гироскопа.** Рассмотрим динамику резонатора ВТГ с электростатическими датчиками управления при наличии только постоянного опорного напряжения. Уравнения (3.38) в случае подачи только опорного напряжения ($U_0 \neq 0$, $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$) принимают вид

$$\begin{aligned}
\ddot{f} + \omega^2 f &= -\gamma\dot{f} + v\dot{g} + 3\eta f(f^2 + g^2)\\
\ddot{g} + \omega^2 g &= -\gamma\dot{g} - v\dot{f} + 3\eta g(f^2 + g^2)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Исследование дрейфа ВТГ будем проводить с помощью переменных, называемых элементами орбиты [6]: $r(t)$ и $k(t)$ – амплитуды основной и квадратурной волн колебаний, $\theta(t)$ – угол прецессии, $\chi(t)$ – временная фаза,

$$\begin{aligned}
f &= r\cos(\omega t + \chi)\cos 2\theta - k\sin(\omega t + \chi)\sin 2\theta\\
g &= r\cos(\omega t + \chi)\sin 2\theta + k\sin(\omega t + \chi)\cos 2\theta
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Уравнения, полученные в результате осреднения (5.1), следуют из системы (4.6) при подстановке $\lambda = 0$, $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$. Чтобы перейти в них от $q_1(t)$, $p_1(t)$, $q_2(t)$, $p_2(t)$ к $r(t)$, $k(t)$, $\theta(t)$, $\chi(t)$, будем использовать замену переменных:

$$\begin{aligned} q_1 &= r\cos 2\theta\cos\chi - k\sin 2\theta\sin\chi, \quad & p_1 &= -r\cos 2\theta\sin\chi - k\sin 2\theta\cos\chi \\ q_2 &= r\sin 2\theta\cos\chi + k\cos 2\theta\sin\chi, \quad & p_2 &= -r\sin 2\theta\sin\chi + k\cos 2\theta\cos\chi \end{aligned} \tag{5.3}$$

В результате выполненных преобразований получаем систему

$$\dot r = -\frac{\gamma}{2}r, \quad \dot k = -\frac{\gamma}{2}k, \quad \dot\theta = -\frac{1}{4}\nu + \frac{3\eta_e}{8}\omega kr, \quad \dot\chi = -\frac{9\eta_e}{8}\omega(k^2 + r^2) \tag{5.4}$$

Первые два уравнения системы (5.4) указывают на то, что амплитуда колебаний уменьшается в результате демпфирования. Из третьей формулы (5.4) следует, что угловая скорость дрейфа ВТГ задается формулой:

$$\dot\theta_* = \frac{3\eta_e}{8}\omega kr \tag{5.5}$$

где безразмерный параметр $\eta_e = 4U_0^2C_0/(cd^2)$ характеризует малость электростатических сил. Четвертое уравнение системы (5.4) указывает на незначительное изменение частоты колебаний.

Согласно (5.5), угловая скорость дрейфа ВТГ изменяется прямо пропорционально амплитудам основной и квадратурной волн колебаний $r$, $k$, что согласуется с [6], а также коэффициенту $\eta_e$. Таким образом, через коэффициент $\eta_e$ видим прямо пропорциональную зависимость угловой скорости дрейфа ВТГ от квадрата опорного напряжения $U_0^2$ и обратно пропорциональную зависимость от квадрата рабочего зазора $d^2$.

Для устранения погрешности, вызываемой нелинейностью, в гироскопах данного класса амплитуду колебаний $r$ поддерживают постоянной, а квадратуру $k$ стремятся уменьшить до нуля [6].

*Числовой пример*. Вычислим угловую скорость дрейфа ВТГ с цилиндрическим кварцевым резонатором, которая вызвана опорным напряжением при использовании электростатических датчиков управления. Резонатор имеет размеры $R = 20$ мм, $H = R$, $h = 1$ мм, сделан из кварцевого стекла с параметрами $\rho = 2210$ кг/м$^3$, $E = 73.6$ ГПа, $\nu_p = 0.17$. Данные значения позволяют рассчитать характерную частоту собственных колебаний $\omega = 20890$ с$^{-1}$ (3325 Гц). Пусть опорное напряжение $U_0 = 100$ В, а емкость $C_0 = 1.05 \times 10^{-12}$ Ф (площадь пластины 12 мм$^2$, расстояние между пластинами $d = 0.1$ мм), тогда получаем значение параметра $\eta_e = 8.95 \times 10^{-6}$. Примем относительные амплитуды основной и квадратурной волн колебаний $r = 0.1$ и $k = 0.001$ (соответственно 10 мкм и 0.1 мкм). Абсолютная величина угловой скорости дрейфа, вычисляемая по формуле (5.5), равна 1.45°/час. Полученное значение является существенным для гироскопов, применяемых в навигационных системах.

**6. Режим вынужденных нелинейных колебаний резонатора.** Для исследования вынужденных колебаний рассмотрим следующий режим подачи управляющего напряжения: $u_1 = u_3 = u_4 = 0$, $u_2 = u$, а также будем пренебрегать в силу малости слагаемыми, пропорциональными квадрату амплитуд управляющих сигналов. Поэтому запишем (3.38) в виде:

$$\begin{aligned} \ddot f + \omega^2 f &= -\gamma\dot f + \nu\dot g + 3\eta(f^2 + g^2)f + \eta(1 + 3f^2)u\cos\omega_0 t \\ \ddot g + \omega^2 g &= -\gamma\dot g - \nu\dot f + 3\eta(f^2 + g^2)g \end{aligned} \tag{6.1}$$

Вынужденные колебания резонатора исследуем в медленных переменных $A(t)$, $B(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, которые являются амплитудами и фазами колебаний:

$$f = A\sin(\omega_0 t + \varphi), \quad g = B\sin(\omega_0 t + \psi) \tag{6.2}$$

поэтому будем использовать замену переменных

$$q_1 = A\sin\varphi, \quad p_1 = A\cos\varphi, \quad q_2 = B\sin\psi, \quad p_2 = B\cos\psi \tag{6.3}$$

в осредненной системе с медленными переменными $q_1(t)$, $p_1(t)$, $q_2(t)$, $p_2(t)$.

Сравним результаты описания вынужденных колебаний тремя математическими моделями: линейной; нелинейной, учитывающей свойственную ВТГ кубическую нелинейность; предложенной нелинейной математической моделью, учитывающей не только кубическую нелинейность, но и квадратичную нелинейность при управлении. Чтобы увидеть отличие, рассмотрим сначала уравнения с коэффициентом $\xi$ при кубической нелинейности:

$$\begin{gathered} \ddot{f} + \omega^2 f = -\gamma\dot{f} + v\dot{g} + \xi(f^2 + g^2)f + \eta u\cos\omega_0 t \\ \ddot{g} + \omega^2 g = -\gamma\dot{g} - v\dot{f} + \xi(f^2 + g^2)g \end{gathered} \tag{6.4}$$

Соответствующая система осредненных уравнений следует из (4.6):

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{1}{2}\left(-2p_1\lambda - q_1\gamma + q_2 v + \frac{\xi}{\omega}k_1\right), \quad \dot{p}_1 = \frac{1}{2}\left(2q_1\lambda - p_1\gamma + p_2 v + \frac{\xi}{\omega}k_2 + \frac{\eta}{\omega}u\right) \\ \dot{q}_2 &= \frac{1}{2}\left(-2p_2\lambda - q_2\gamma - q_1 v + \frac{\xi}{\omega}k_3\right), \quad \dot{p}_2 = \frac{1}{2}\left(2q_2\lambda - p_2\gamma - p_1 v + \frac{\xi}{\omega}k_4\right) \end{aligned} \tag{6.5}$$

и с помощью замены переменных (6.3) преобразуется в

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{1}{4}\left[-2A\gamma + B\cos(\varphi-\psi)\left(2v - \frac{\xi}{\omega}AB\sin(\varphi-\psi)\right) + \frac{2\eta}{\omega}u\cos\varphi\right] \\ \dot{\varphi} &= -\frac{1}{8A}\left[8A\lambda + \frac{\xi}{\omega}A(3A^2 + 2B^2) + 4vB\sin(\varphi-\psi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\xi}{\omega}AB^2\cos 2(\varphi-\psi) + \frac{4\eta}{\omega}u\sin\varphi\right] \\ \dot{B} &= \frac{1}{4}\left[-2B\gamma + A\cos(\varphi-\psi)\left(-2v + \frac{\xi}{\omega}AB\sin(\varphi-\psi)\right)\right] \\ \dot{\psi} &= -\frac{1}{8B}\left[8B\lambda + \frac{\xi}{\omega}B(3B^2 + 2A^2) + 4vA\sin(\varphi-\psi) + \frac{\xi}{\omega}A^2B\cos 2(\varphi-\psi)\right] \end{aligned} \tag{6.6}$$

Одним из стационарных режимов колебаний является режим [20] с нулевой амплитудой $B = 0$. Тогда из (6.6) следуют уравнения для определения амплитуды $A$ и фазы колебаний $\varphi$:

$$\begin{gathered} -A\gamma + \frac{\eta}{\omega}u\cos\varphi = 0 \\ A\left(8\lambda + \frac{3\xi}{\omega}A^2\right) + 4\frac{\eta}{\omega}u\sin\varphi = 0 \end{gathered} \tag{6.7}$$

Избавляясь от тригонометрических функций в уравнениях (6.7), получим выражение

$$A^2\gamma^2 + \left(\frac{3\xi}{4\omega}A^3 + 2\lambda A\right)^2 - \left(\frac{\eta}{\omega}\right)^2 u^2 = 0 \tag{6.8}$$

Применяя к (6.8) формулу дифференцирования неявной функции, записываем условие экстремума $A(\lambda)$:

$$\frac{4A\left(\frac{3\xi}{4\omega}A^3 + 2\lambda A\right)}{2A\gamma^2 + \left(\frac{3\xi}{4\omega}A^3 + 2\lambda A\right)\left(\frac{9\xi}{4\omega}A^2 + 2\lambda\right)} = 0$$

из которого следует, что $A(\lambda)$ имеет экстремум в точке

$$\lambda = -\frac{3\xi}{8\omega}A^2 \tag{6.9}$$

Подставляя (6.9) в выражение (6.8), определяем максимальное значение амплитуды

$$A_{\max} = \frac{\eta u}{\omega\gamma} \tag{6.10}$$

учитывая которое в (6.9), получаем значение

$$\lambda_{\max} = -\frac{3\xi}{8\omega}\left(\frac{\eta u}{\omega\gamma}\right)^2 \tag{6.11}$$

Если рассматривать исследуемый в данной работе случай, когда коэффициент нелинейности определяется только свойствами датчиков управления, $\xi = 3\eta = 3\eta_e\omega^2$, то выражение (6.8), описывающее амплитудно-частотные характеристики, примет вид

$$\left(A\frac{\gamma}{\eta_e\omega}\right)^2 + \left(\frac{9}{4}A^3 + 2A\frac{\lambda}{\eta_e\omega}\right)^2 = u^2 \tag{6.12}$$

а частота, соответствующая максимальной амплитуде, примет значение

$$\lambda_{\max} = -\frac{9\eta_e\omega}{8}\left(\frac{\eta_e\omega u}{\gamma}\right)^2 \tag{6.13}$$

Заметим, что для линейной математической модели справедливы преобразования, выполненные в (6.4)–(6.8) с подстановкой $\xi = 0$. Следовательно, в данном случае амплитуду можно задать в явном виде формулой, которая следует из (6.8):

$$A(\lambda) = \frac{\eta_e\omega u}{\sqrt{4\lambda^2 + \gamma^2}} \tag{6.14}$$

Из (6.14) следует, что $A_{\max} = \dfrac{\eta_e\omega u}{\gamma}$ при $\lambda_{\max} = 0$.

Рассмотрим теперь нелинейную математическую модель, учитывающую не только кубическую нелинейность, но и квадратичную нелинейность при управлении. В данном случае исследуем уравнения (6.1), содержащие только нелинейности, вызванные датчиками управления. Аналогично описанному выше, из (4.6) при принятых допущениях с заменой переменных (6.3) получаем

$$\dot{A} = \frac{1}{8}[-4A\gamma + \eta_e\omega\,(3A^2 + 4)u\cos\varphi + 2B\cos(\varphi - \psi)\left(2v - 3\eta_e\omega AB\sin(\varphi - \psi)\right)]$$

$$\dot{B} = \frac{1}{8}[-4B\gamma - 2A\cos(\varphi - \psi)\left(2v - 3\eta_e\omega AB\sin(\varphi - \psi)\right)]$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{8A}[\eta_e\omega A(9A^2 + 6B^2 + 3B^2\cos 2(\varphi - \psi)) + 8A\lambda + \tag{6.15}$$

$$+ 4Bv\sin(\varphi - \psi) + \eta_e\omega\,(9A^2 + 4)u\sin\varphi]$$

$$\dot{\psi} = -\frac{1}{8B}[\eta_e\omega B(9B^2 + 6A^2 + 3A^2\cos 2(\varphi - \psi)) + 8B\lambda + 4Av\sin(\varphi - \psi)]$$

Рассмотрим стационарный режим колебаний с $B = 0$ и получим выражение для резонансной кривой

$$\left(4A\frac{\gamma}{\eta_e\omega}(9A^2 + 4\ )\right)^2 + \left(A\left(8\frac{\lambda}{\eta_e\omega} + 9A^2\right)(3A^2 + 4)\right)^2 = (u(9A^2 + 4\ )(3A^2 + 4))^2 \qquad (6.16)$$

Таким образом, полученное аналитическое выражение (6.16) описывает амплитудно-частотные характеристики колебаний, учитывая, помимо кубической нелинейности, квадратичную нелинейность при управлении.

Применяя к (6.16) формулу дифференцирования неявной функции, получаем условие экстремума $A(\lambda)$, из которого следует, что $A(\lambda)$ имеет экстремум в точке $\lambda = -\frac{9\eta_e\omega}{8}A^2$, что соответствует (6.9). Подставляя полученное значение частотной настройки в выражение (6.16), определяем максимальное значение амплитуды

$$A_{\max} = \frac{2\gamma}{3\eta_e\omega u}\left(1 - \sqrt{1 - 3\left(\frac{\eta_e\omega u}{\gamma}\right)^2}\right) \qquad (6.17)$$

Если в полученной формуле использовать разложение в ряд Тейлора, принимая ограничение $A_{\max} = \frac{\eta_e\omega u}{\gamma} < 1$, вызванное функционированием без пробоев электростатических датчиков, то придем к уточненному значению максимальной амплитуды (6.10):

$$A_{\max} = \frac{2\gamma}{3\eta_e\omega u}\left(1 - \sqrt{1 - 3\left(\frac{\eta_e\omega u}{\gamma}\right)^2}\right) =$$

$$= \frac{2\gamma}{3\eta_e\omega u}\left(1 - \left(1 - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta_e\omega u}{\gamma}\right)^2 - \frac{9}{8}\left(\frac{\eta_e\omega u}{\gamma}\right)^4 - \frac{27}{16}\left(\frac{\eta_e\omega u}{\gamma}\right)^6 - \ldots\right)\right) =$$

$$= \frac{\eta_e\omega u}{\gamma} + \frac{3}{4}\left(\frac{\eta_e\omega u}{\gamma}\right)^3 + \frac{9}{16}\left(\frac{\eta_e\omega u}{\gamma}\right)^5 + \ldots$$

Полученный результат указывает на увеличение амплитуды колебаний в результате учета квадратичной нелинейности при управлении.

Учитывая уточненное значение максимальной амплитуды, рассчитываем значение

$$\lambda_{\max} = \frac{3\eta_e\omega}{2} - \frac{\gamma^2}{\eta_e\omega u^2}\left(1 - \sqrt{1 - 3\left(\frac{\eta_e\omega u}{\gamma}\right)^2}\right) \qquad (6.18)$$

Чтобы увидеть уточнение резонансной частоты, вызванное учетом квадратичной нелинейности при управлении, и сравнить с (6.13), разложим (6.18) в ряд

$$\lambda_{\max} = \frac{3\eta_e\omega}{2} - \frac{\gamma^2}{\eta_e\omega u^2}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{\eta_e\omega u}{\gamma}\right)^2 + \frac{9}{8}\left(\frac{\eta_e\omega u}{\gamma}\right)^4 + \frac{27}{16}\left(\frac{\eta_e\omega u}{\gamma}\right)^6 + \ldots\right) =$$

$$= -\frac{9\eta_e\omega}{8}\left(\frac{\eta_e\omega u}{\gamma}\right)^2 - \frac{27\eta_e\omega}{16}\left(\frac{\eta_e\omega u}{\gamma}\right)^4 - \ldots$$

Получено дополнительное уменьшение резонансной частоты, которое вызвано увеличением амплитуды колебаний в результате учета квадратичной нелинейности при управлении.

Таким образом, при описании колебаний резонатора ВТГ линейной математической моделью и нелинейной математической моделью, учитывающей только кубическую нелинейность, максимальная амплитуда колебаний одинакова, задается формулой (6.10), а разница описания вынужденных колебаний двумя моделями заключается в малом изменении резонансной частоты собственных колебаний. При учете нелинейности на амплитудно-частотных характеристиках наблюдается сдвиг резонансного пика колебаний влево, что соответствует описанию колебаний с мягкой характеристикой. Также из построения амплитудно-частотных характеристик по уравнению (6.8) следует, что при увеличении амплитуды колебаний появляется интервал по оси частотной настройки, при значениях из которого амплитудно-частотная характеристика становится многозначной, что соответствует экспериментально обнаруженному эффекту срыва колебаний ВТГ [7—9], который характерен для нелинейных колебательных систем. Дополнительный учет квадратичной нелинейности при управлении показывает увеличение амплитуды колебаний, следствием которого является увеличение сдвига резонансного пика колебаний влево и расширение области частот срыва колебаний.

Для вывода частот срыва колебаний по математической модели, учитывающей только кубическую нелинейность, определяется экстремум функции $\lambda(A)$, заданной неявно выражением (6.8). Получаем условие для нахождения амплитуды $A$, при котором функция $\lambda(A)$ имеет экстремум:

$$\gamma^2 + \left(\frac{3\xi}{4\omega}A^2 + 2\lambda\right)\left(\frac{9\xi}{4\omega}A^2 + 2\lambda\right) = 0$$

Из полученного условия определяем точки экстремума, то есть амплитуды, при которых происходит срыв колебаний (выбираем действительные корни многочлена при $\lambda < 0$):

$$A = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\omega}{\xi}\left(-\lambda \pm \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - \frac{3}{4}\gamma^2}\right)} \tag{6.19}$$

где $\xi \neq 0$, так как рассматриваются нелинейные колебания.

Подставляя (6.19) в (6.8), получаем уравнение для определения частот срыва колебаний (при $\xi = 3\eta$):

$$-\frac{1}{3\eta}\left(\frac{64\lambda^3}{81} + \frac{16\gamma^2\lambda}{9} + \sqrt{-3\gamma^2 + 4\lambda^2}\cdot\left(\frac{8\gamma^2}{27} - \frac{32\lambda^2}{81}\right)\right) - u^2\eta^2 = 0 \tag{6.20}$$

Корни уравнения (6.20) определяются численно при подстановке известных коэффициентов демпфирования и нелинейности, силового воздействия. Частотам срыва колебаний соответствуют действительные корни уравнения (6.20).

Для определения частот срыва колебаний по математической модели, учитывающей кубическую нелинейность и квадратичную нелинейность при управлении, определяется экстремум функции $\lambda(A)$, заданной неявно выражением (6.16). Получаем условие для нахождения амплитуды $A$, при которой функция $\lambda(A)$ имеет экстремум:

$$\begin{gathered}\left(8\frac{\lambda}{\eta_e\omega} + 9A^2\right)(3A^2+4)\left(8\frac{\lambda}{\eta_e\omega}(9A^2+4) + 27A^2(5A^2+4)\right) + \\ + 16\left(\frac{\gamma}{\eta_e\omega}\right)^2(9A^2+4)(27A^2+4) - 12u^2(9A^2+4)(3A^2+4)(9A^2+8) = 0\end{gathered} \tag{6.21}$$

Определение из выражения (6.21) точек экстремума $A$, которые зависят от $\lambda$, и подстановка их в уравнение (6.16) для определения частот срыва колебаний представляет для данной задачи значительную сложность аналитических преобразований. Поэтому воспользуемся следующим итерационным методом. В качестве начального приближе-

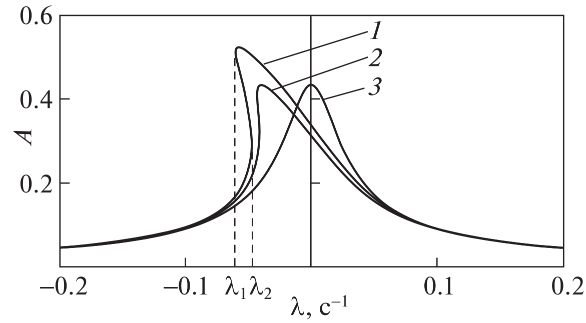


**Рис. 3.** Расчетная АЧХ при учете кубической и квадратичной нелинейностей (кривая *1*), при учете только кубической нелинейности (кривая *2*), без учета нелинейностей (кривая *3*)

ния к частотам срыва колебаний, возьмем значения, полученные численно из уравнения (6.20), дающего точные значения частот срыва при использовании математической модели, учитывающей только кубическую нелинейность. Данные частоты подставим в условие (6.21) и найдем первое приближение для амплитуды срыва колебаний, которое подставим в уравнение (6.16). Полученное уравнение решим численно относительно частот и, таким образом, получим очередное приближение к частотам срыва колебаний. Далее итерационно продолжим процесс: полученные частоты подставим в условие (6.21), которое решим численно, полученные приближения для амплитуд подставим в (6.16) и численно определим очередное приближение для частот срыва колебаний. Сходимость итерационного процесса будем контролировать по уменьшению модуля разности соответствующих частот, взятых на последовательных итерациях.

*Числовой пример*. Построим амплитудно-частотные характеристики колебаний цилиндрического резонатора ВТГ с электростатическими датчиками управления. Как и в предыдущем числовом примере, берем данные $\omega = 20890$ с$^{-1}$, $\eta_e = 8.95\times10^{-6}$, $u = 0.1$, принимаем добротность $Q = 5 \times 10^5$, а значит $\gamma = 0.042$ с$^{-1}$. Расчеты проводим по трем формулам (6.14), (6.12), (6.16), соответствующим трем математическим моделям: линейной; нелинейной, учитывающей только кубическую нелинейность; нелинейной, учитывающей не только кубическую нелинейность, но и квадратичную нелинейность при управлении. Построены расчетные АЧХ, по вертикальной оси откладывается нормализованная амплитуда колебаний $A$, по горизонтальной оси – частотная настройка $\lambda$ (рис. 3).

Амплитудно-частотная характеристика в малой окрестности резонанса, вычисленная по формуле (6.14), соответствующей линейной математической модели, симметрична относительно $\lambda = 0$ (кривая *3*, рис. 3). АЧХ, рассчитанная по формуле (6.12), полученная при учете только кубической нелинейности, имеет сдвиг резонансного пика, максимальная амплитуда при этом не изменяется (кривая *2*, рис. 3). Учет квадратичной нелинейности при управлении в расчетах по формуле (6.16) показывает увеличение амплитуды колебаний и еще больший сдвиг резонансной частоты (кривая *1*, рис. 3), чем при учете только кубической нелинейности (кривая *2*, рис. 3).

По нелинейной математической модели, учитывающей только кубическую нелинейность, получаем с помощью формул (6.10), (6.11): $\lambda_{\max} = -0.0417$ с$^{-1}$, $A_{\max} = 0.442$; из уравнения (6.20) находим $\lambda_1 = -0.0445$ с$^{-1}$, $\lambda_2 = -0.0419$ с$^{-1}$, и по (6.8) получаем соответствующие им амплитуды $A_1 = 0.407$, $A_2 = 0.317$.

При расчетах по нелинейной математической модели, учитывающей оба типа нелинейностей, вызванных датчиками управления, получаем по формулам (6.17) и (6.18) $A_{\max} = 0.544$ и $\lambda_{\max} = -0.0623$ с$^{-1}$. В качестве начальных приближений для итерационного процесса определения частот срыва колебаний используем полученные по другой математической модели, из (6.20), значения $\lambda_1^{(0)} = -0.0445$ с$^{-1}$, $\lambda_2^{(0)} = -0.0419$ с$^{-1}$, и, подставляя их в (6.21), определяем приближения амплитуд $A_1^{(1)} = 0.439$, $A_2^{(1)} = 0.273$. Подставляя $A_1^{(1)}$, $A_2^{(1)}$ в (6.16), находим следующее приближение $\lambda_1^{(1)} = -0.0560$ с$^{-1}$, $\lambda_2^{(1)} = -0.0482$ с$^{-1}$, и продолжаем итерационный процесс до получения погрешности меньшей $10^{-4}$ с$^{-1}$ между последовательными значениями частоты. На пятой итерации получаем удовлетворяющие заданной точности значения $\lambda_1 = -0.0644$ с$^{-1}$, $\lambda_2 = -0.0480$ с$^{-1}$ и соответствующие им нормализованные амплитуды колебаний $A_1 = 0.534$, $A_2 = 0.294$. По полученным значениям $\lambda$ определяются значения частот с учетом постоянной составляющей электростатической компоненты жесткости: резонансная частота $\omega_{\max} = \omega\sqrt{1-2\eta_e} + \lambda_{\max} = 20889.751$ с$^{-1}$, и аналогично частоты срыва колебаний $\omega_1 = \omega\sqrt{1-2\eta_e} + \lambda_1 = 20889.749$ с$^{-1}$, $\omega_2 = \omega\sqrt{1-2\eta_e} + \lambda_2 = 20889.765$ с$^{-1}$. Полученные результаты представлены на АЧХ (кривая *1*, рис. 3). На отрезке между значениями $\lambda_1$ и $\lambda_2$ возможно существование трех значений амплитуд, из которых устойчивым колебаниям соответствуют наибольшие и наименьшие значения. Это означает, что при незначительном изменении частотной настройки в точках $\lambda_1$ и $\lambda_2$ происходит срыв колебаний, то есть скачкообразное изменение амплитуды колебаний.

**7. Заключение.** Показано, что нелинейность колебаний резонатора ВТГ, вызванную применением электростатических датчиков управления, необходимо учитывать даже при малом прогибе резонатора, так как конечным является отношение малого прогиба к малому зазору электростатического датчика. Учет конечного отношения прогиба к зазору нарушает линеаризацию силового воздействия принятой схемы подачи управляющих напряжений и приводит к нелинейному уточнению электростатической компоненты жесткости и нелинейным слагаемым при управлении в математической модели динамики резонатора. Полученное нелинейное уточнение электростатической жесткости представляет кубическую нелинейность, приводящую к дрейфу гироскопа. Угловая скорость дрейфа ВТГ, вызванная электростатическими датчиками управления, пропорциональна квадрату опорного напряжения и является существенной для приборов навигационной точности. Квадратичная нелинейность при управлении приводит к увеличению амплитуды колебаний, что в свою очередь усиливает нелинейные свойства колебательной системы и должно учитываться при расчете максимальной амплитуды, резонансной частоты и частот срыва колебаний.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Переляев С.Е.* Обзор и анализ направлений создания бесплатформенных инерциальных навигационных систем на волновых твердотельных гироскопах // Новости навигации. 2018. № 2. С. 21–27.
2. *Журавлёв В.Ф., Климов Д.М.* Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.
3. *Климов Д.М., Журавлёв В.Ф., Жбанов Ю.К.* Кварцевый полусферический резонатор (волновой твердотельный гироскоп). М.: Изд-во “Ким Л.А”, 2017. 194 с.
4. *Журавлёв В.Ф.* Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 3. С. 6–19.
5. *Журавлёв В.Ф.* О глобальных эволюциях состояния обобщенного маятника Фуко // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 6. С. 5–11.

6. *Журавлёв В.Ф.* Управляемый маятник Фуко как модель одного класса свободных гироскопов // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 6. С. 27–35.

7. *Астахов С.В.* Нелинейные эффекты в динамике волнового твердотельного и микромеханического гироскопов в условиях медленно меняющихся параметров. Дис. ... канд. техн. наук. Москва, 2012. 157 с.

8. *De S.K., Aluru N.R.* Complex nonlinear oscillations in electrostatically actuated microstructures // J. Microelectromech. Syst. 2006. V. 15. № 2. P. 355–369. https://doi.org/10.1109/JMEMS.2006.872227

9. *Rhoads J., Shaw S., Tunner K., Moehlis J., DeMartiniB., Zhang W.* Generalized parametric resonance in electrostatically actuated microelectromechanical oscillators // J. Sound Vib. 2006. V. 296. P. 797–829. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.03.009

10. *Маслов Д.А.* Влияние нелинейных свойств электростатических и электромагнитных датчиков управления на динамику цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа. Дис... канд. техн. наук: 01.02.01 Москва, 2019. 127 с.

11. *Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В.* Исследование стационарных режимов колебаний резонатора гироскопа при наличии позиционного и сопутствующего ему параметрического возбуждения // Гироскопия и навигация. 2014. № 2 (85). С. 61–69.

12. *Маслов А.А., Маслов Д.А., Меркурьев И.В.* Нелинейные эффекты в динамике цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа с электростатической системой управления // Гироскопия и навигация. 2015. № 2 (89). С. 71–80.

13. *Маслов Д.А.* Идентификация параметров гироскопа с цилиндрическим резонатором при учете влияния нелинейности на амплитуду вынуждающего воздействия // Машиностроение и инженерное образование. 2017. № 1 (50). С. 24–31.

14. *Maslov D.A., Merkuryev I.V.* Increase in the Accuracy of the Parameters Identification for a Vibrating Ring Microgyroscope Operating in the Forced Oscillation Mode with Nonlinearity Taken into Account // Rus. J. Nonlinear Dyn. 2018. V. 14. № 3. P. 377–386. https://doi.org/10.20537/nd180308

15. *Лунин Б.С., Басараб М.А., Юрин А.В., Чуманкин Е.А.* Цилиндрический резонатор из кварцевого стекла для недорогих вибрационных гироскопов // Сборник материалов юбилейной XXV Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. СПб.: Изд-во “Концерн ЦНИИ Электроприбор”, 2018. С. 204–207.

16. *Филин А.П.* Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат, 1975. 256 с.

17. *Власов В.З.* Избранные труды. Том 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 528 с.

18. *Егармин Н.Е.* О прецессии стоячих волн колебаний вращающейся осесиметричной оболочки // Изв. РАН. МТТ. 1986. № 1. С. 142–148.

19. *Журавлёв В.Ф., Линч Д.Д.* Электрическая модель волнового твердотельного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 12–24.

20. *Меркурьев И.В., Подалков В.В.* Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. М.: Физматлит, 2009. 228 с.

21. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2005. 256 с.

22. *Журавлёв В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.

**ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 6, с. 111–129**

*УДК 539.3*

# НИЗКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДЛИННОЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ



**Е. М. Зверяев**[a,b,*]

[a] *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия*

[b] *Московский авиационный институт, Москва, Россия*

**e-mail: zveriaev@mail.ru*

Поступила в редакцию 14.09.2020 г.
После доработки 27.09.2020 г.
Принята к публикации 15.10.2020 г.

Описано применение итерационного метода Сен-Венана–Пикара–Банаха на примере построения решения системы дифференциальных уравнений движения теории упругости с малым параметром для длинной полосы при частотах возмущения соизмеримых с частотами поперечных колебаний балки. Система преобразуется таким образом, чтобы уравнения интегрировались последовательно и без повышения порядка. Вычисление неизвестных происходит с помощью операторов Пикара первого порядка так, что ранее вычисленные неизвестные являются входящими для следующего уравнения и т.д. Найдены интегралы всех неизвестных задачи, позволяющие выполнить все граничные условия на длинных и коротких сторонах. Сходимость решения обеспечивается с помощью малого параметра тонкостенности в соответствии с принципом сжатых отображений Банаха. Удовлетворение граничных условий на длинных краях приводит к двум уравнениям для медленно и двум сингулярным для быстро меняющихся компонент решения, зависящих только от продольной координаты. Показано, что при сведении этих уравнений к одному с потерей быстроменяющейся компоненты в одном из них, получается уравнение Тимошенко. Изложение иллюстрируется двумя примерами нагружения полосы поперечной распределенной нагрузкой и сосредоточенной силой. Описана методика установления порядков величин по малому параметру относительно нагрузки.

*Ключевые слова:* полуобратный метод, итерации, принцип сжатых отображений, уравнение Тимошенко, напряжения в углах

**DOI:** 10.31857/S057232992105010X

**1. Введение.** Динамическая задача теории упругости для длинной упругой полосы традиционно интуитивно разделяется на две независимые задачи: задачу поперечных колебаний балки и задачу продольных колебаний стержня. При этом вторая задача может быть сформулирована как волновая. В силу этого низкочастотные (преимущественно изгибные) и высокочастотные колебания (преимущественно растяжения–сжатия) рассматриваются отдельно. Общим в этих задачах является то, что они формулируются, как это принято в сопротивлении материалов, в усилиях и моментах и описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Следствием такого подхода является невыполнение всех граничных условий соответствующей задачи теории упругости для полосы. Поэтому решения дифференциальных уравнений в усилиях и моментах обладают решениями, в которых могут наблюдаться разрывы в напряжениях, быстрые переходы, неоднородности, невыполненные граничные условия и т.п. Понижение порядка размерности дифференциальных уравнений в усилиях и моментах в сочетании с потерей некоторых граничных условий является основной чертой таких теорий и сопровождается возникновением асимптотических явлений [1]. Цель уточненного анализа заключается в дополнительном описании асимптотики решения граничной задачи внутри переходных слоев в областях разрывов. Потребность в таких уточненных теориях связана с необходимостью более полного понимания классической теории после того, как становятся видны ее обобщения и они позволяют лучше охарактеризовать погрешность классических теорий [2]. Однако построение теорий последовательных, в смысле учёта всех малых одного порядка крайне трудно осуществить, не располагая регулярными методами [3].

С.П. Тимошенко [4, 5] вывел уравнение влияния эффектов более высокого порядка по сравнению с классической теорией балок и оно в настоящее время представляет большой интерес. Уточненные теории типа Тимошенко получили большое развитие и отражены во многих работах, например [6–14]. В этих и других работах традиционно используются уравнения в усилиях и моментах, граничные условия на длинных сторонах балки или на лицевых сторонах пластины (оболочки) не выполняются, на концах ставятся условия типа балочных. В связи с этим в настоящей работе ставится задача решения динамических уравнений теории упругой полосы в перемещениях и напряжениях для низкочастотных колебаний без каких-либо априорных гипотез с помощью регулярного метода Сен-Венана–Пикара–Банаха (SVPB) [15, 16].

Для решения трехмерной задачи кручения тонкого длинного стержня Сен-Венан предложил в исходных уравнениях задать часть неизвестных и вычислить с помощью преобразованных таким образом уравнений остальные неизвестные [2]. Продолжим этот метод так, чтобы по вычисленным остальным неизвестным можно было найти заданные величины начального приближения в первом приближении и затем остальные неизвестные, представив полуобратный метод как итерационный [15, 16]. Делается это так. В соответствии с идеей Сен-Венана задаются величины начального (нулевого) приближения. Затем по ним вычисляются остальные неизвестные. Для этого система уравнений теории упругости переписывается так, чтобы неизвестные вычислялись (в нулевом приближении) последовательно путем прямого интегрирования через уравнения первого порядка и величины начального приближения в первом. Если поправка к заданным величинам и вычисленным по ним остальным, полученная в следующем приближении, будет малой, то в силу принципа сжатых отображений Банаха полученные в итерационном процессе последовательности Коши для неизвестных будут асимптотически сходящимися. При этом выполняются все граничные условия.

Будем считать, что вопросы, связанные с существованием и единственностью решений уравнений теории упругости формулируются так же как в функциональном анализе в виде вопроса о существовании и единственности неподвижной точки при некотором отображении соответствующего метрического пространства в себя. Среди различных критериев существования и единственности неподвижной точки наиболее общим является принцип сжатых отображений [17–21]. Отображение $y = Ay$ метрического пространства $M$ в себя называется сжимающим отображением, если существует такое число $\varepsilon < 1$, что для любых двух точек $x, y \in M$ выполняется неравенство $\rho(Ax, Ay) \le \varepsilon\rho(x, y)$, где $\rho$ – метрика пространства $M$. Точка $y$ называется неподвижной точкой отображения, если $y = Ay$. Иначе говоря, неподвижные точки – это решения уравнения $y = Ay$. Итерационный процесс начинается, исходя из некоторого начального приближения $y_{(0)} = y_0$. Если оператор $A$ является сжимающим, процедура сходится к некоторому решению $y$ независимо от выбора величины начального приближения. Последовательные приближения $y_{(1)}, y_{(2)}, y_{(3)}$ ... находятся с помощью формулы $y_{(n+1)} = Ay_{(n)}$ [17].

Хотя полуобратный метод применялся к линейным и нелинейным задачам для сред с усложненными характеристиками [22–26], его рассмотрение, как итерационного и связанного с оператором Пикара и принципом сжатых отображений Банаха, за исключением работ [15, 16, 27–30] в литературе отсутствует. Также отсутствуют работы по исследованию уточненных граничных условий в сравнении с классическими балочными.

В работе метод простых итераций, с помощью которого решен ряд задач теории упругости тонкостенных тел [15, 16, 27–30], описывается как общий метод SVPB на примере наиболее простой задачи для прямоугольника – вынужденных колебаний с частотами, соизмеримыми с частотами поперечных колебаний балки, длинной тонкой упругой полосы, уравнения которой содержат малый параметр, обеспечивающий асимптотическую сходимость разложений неизвестных в ряды по малому параметру в соответствии с принципом сжатых отображений. Колебания с высокими частотами, соизмеримыми с частотами продольных колебаний балки, в настоящей статье не рассматриваются.

Еще один важный вопрос, разрешаемый уточненной теорией, связан с тем, что в практических расчетах возникают проблемы, связанные с плохой сходимостью рядов полученных путем разложения решений о вынужденных колебаниях балки в ряды по собственным функциям. Отмечается, что выделение частного решения как статического существенно улучшает сходимость [31, 32]. Это положение подтверждается в настоящем исследовании тем, что при нахождении частного решения инерционные члены пренебрежимо малы по сравнению с главными и оно действительно может быть найдено из статических уравнений. Кроме того, инерционные члены могут быть отброшены и в уточненных граничных условиях.

**2. Произвольно нагруженная по длинным сторонам полоса.** Длинная прямоугольная полоса помещается в декартовой системе координат $x^*, z^*$ так, что $0 \le x^* \le l$, $-h \le z^* \le h$. Уравнения движения запишем в следующем виде

$$\frac{\partial \sigma_x^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial x^*} = \rho \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^{*2}}, \quad \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial z^*} = \rho \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^{*2}}$$

$$\sigma_x^* = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_z), \quad \tau^* = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma, \quad \sigma_z^* = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_z + \nu\varepsilon_x)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w^*}{\partial z^*}, \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u^*}{\partial x^*}, \quad \gamma = \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*}$$

Здесь приняты традиционные обозначения величин теории упругости. Звездочкой отмечены размерные искомые величины и координаты. В уравнениях $E$, $\nu$, $\rho$ – модуль упругости, коэффициент Пуассона, удельная плотность материала, $t^*$ – время.

Уравнения, описывающие состояние такой полосы в безразмерных координатах $x = x^*/l$, $z = z^*/h$, перемещениях $u = u^*/h$, $w = w^*/h$ вдоль осей $x^*, z^*$, соответственно, нормальных $\sigma_x = \sigma_x^*/E$, $\sigma_z = \sigma_z^*/E$ и касательных $\tau = \tau^*/E$ напряжениях принимают вид

$$\varepsilon \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = \varepsilon^2 a_l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t_l^2}, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial x} = \varepsilon^4 a_c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t_c^2}$$

$$\sigma_x = \frac{1}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_z), \quad \tau = \frac{1}{2(1+\nu)}\gamma, \quad \sigma_z = \frac{1}{1-\nu^2}(\varepsilon_z + \nu\varepsilon_x) \tag{2.1}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon\frac{\partial w}{\partial x}$$

Введены обозначения: $\varepsilon = h/l$ — малый параметр, $\varepsilon^2 a_l^2 = \rho h^2\omega_l^2/E$, $\varepsilon^4 a_c^2 = \rho h^2\omega_c^2/E$. В качестве времени, по которому осуществляется дифференцирование в первом уравнении, выбрано безразмерное время $t_l = \omega_l t^*$ и во втором уравнении $t_c = \omega_c t^*$. Под величинами $\omega_l$ и $\omega_c$ подразумеваются первые собственные частоты продольных и поперечных колебаний полосы как стержня, соответственно. Между безразмерными временами имеют место соотношения

$$\frac{t_l}{t_c} = \varepsilon, \quad \frac{\partial^2}{\partial t_c^2} = \varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial t_l^2} \tag{2.2}$$

Коэффициенты $\varepsilon^2 a_l^2$ и $\varepsilon^4 a_c^2$ выбраны так, чтобы на основании известных, записанных в безразмерных координатах, уравнений продольных и поперечных колебаний стержня

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2\upsilon}{\partial x^2} + \varepsilon^2 a_l^2\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t_l^2} = 0, \quad \frac{2}{3}\varepsilon^4\frac{\partial^4 y}{\partial t_c^4} + 2\varepsilon^4 a_c^2\frac{\partial^2 y}{\partial t_c^2} = 0$$

имели место оценки $a_l^2, a_c^2 \sim \varepsilon^0$. Здесь $\upsilon$ и $y$ продольные и поперечные перемещения точек поперечного сечения стержня соответственно.

Длинные стороны полосы $z^* = \pm h$ несут некоторую произвольную динамическую нагрузку, изменение которой по времени задается в зависимости от времени $t_c$, короткие стороны полосы могут быть закреплены или нагружены.

Расположим уравнения первого порядка относительно координаты $z$ системы (2.1) в такой последовательности, чтобы неизвестные в правой части рассматриваемого уравнения вычислялись через известные величины в правой части путем интегрирования по $z$ и умножения на малый параметр $\varepsilon$. Задав в соответствии с идеей полуобратного метода Сен-Венана в качестве известных величин некоторые начальные значения $w = w_0(x,z,t)$ и $\tau = \tau_0(x,z,t)$, сведем интегрирование системы уравнений к методу последовательных приближений по следующей схеме вычислений

$$\frac{\partial u_{(0)}}{\partial z} = -\varepsilon w_0' + 2(1+\nu)\tau_0, \quad \frac{\partial\sigma_{z(0)}}{\partial z} = -\varepsilon\tau_0' + \varepsilon^4 a_c^2\frac{\partial^2 w_0}{\partial t_c^2}$$

$$\varepsilon_{x(0)} = \varepsilon u_{(0)}', \quad \sigma_{x(0)} = \varepsilon_{x(0)} + \nu\sigma_{z(0)}, \quad \varepsilon_{z(0)} = (1-\nu^2)\sigma_{z(0)} - \nu\varepsilon_{x(0)}$$

$$\frac{\partial w_{(1)}}{\partial z} = \varepsilon_{z(0)}, \quad \frac{\partial\tau_{(1)}}{\partial x} = \varepsilon^2 a_l^2\frac{\partial^2 u_{(0)}}{\partial t_l^2} - \varepsilon\sigma_{x(0)}'$$

$$\frac{\partial u_{(1)}}{\partial z} = -\varepsilon w_{(1)}' + 2(1+\nu)\tau_{(1)}, \quad \frac{\partial\sigma_{z(1)}}{\partial z} = -\varepsilon\tau_{(1)}' + \varepsilon^4 a_c^2\frac{\partial^2 w_{(1)}}{\partial t_c^2}\ldots$$

Здесь и далее нижним индексом в скобках обозначен номер приближения.

Легко видеть, что при заданных функциях $w = w_0(x,z,t)$ и $\tau = \tau_0(x,z,t)$ остальные величины вычисляются последовательно путем прямого интегрирования по $z$

$$u_{(0)} = -\varepsilon\int w_0' dz + 2(1+\nu)\int\tau_0 dz + u_0(x,t)$$

$$\sigma_{z(0)} = -\varepsilon\int\tau_0' dz + \varepsilon^4 a_c{}^2\int\ddot{w}_{0,c} dz + \sigma_{z0}(x,t)$$

$$\varepsilon_{x(0)} = \varepsilon u'_{(0)}, \quad \sigma_{x(0)} = \varepsilon_{x(0)} + \nu\sigma_{z(0)}, \quad \varepsilon_{z(0)} = (1-\nu^2)\sigma_{z(0)} - \nu\varepsilon_{x(0)}$$

$$w_{(1)} = \int \varepsilon_{z(0)} dz + w_0(x,t), \quad \tau_{(1)} = \varepsilon^2 a_l^2 \int \ddot{u}_{(0)},_l \, dz - \varepsilon \int \sigma'_{x(0)} dz + \tau_0$$

$$u_{(1)} = -\varepsilon \int w'_{(1)} dz + 2(1+\nu) \int \tau_{(1)} dz + u_0, \quad \sigma_{z(1)} = -\varepsilon \int \tau'_{(1)} \, dz + a_c{}^4 \varepsilon^2 \int \ddot{w}_{(1)},_c \, dz + \sigma_{z0} \ldots$$

Индексом в скобках обозначен номер приближения, индексом 0 обозначены не зависящие от $z$ произволы интегрирования.

Будем рассматривать уравнения нулевого и первого приближений при выборе величин начального приближения $w_{(0)} = w_0(x,t)$ и $\tau_{(0)} = \tau_0(x,t)$. В силу независимости величин начального приближения от $z$, все интегралы вычисляются в явном виде

$$u_{(0)} = u_0 + [2(1+\nu)\tau_0 - \varepsilon w'_0]z$$

$$\sigma_{z(0)} = \sigma_{z0} + [\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_{0,c} - \varepsilon\tau'_0]z$$

$$\varepsilon_{x(0)} = \varepsilon u'_0 + [2(1+\nu)\varepsilon\tau'_0 - \varepsilon^2 w''_0]z$$

$$\sigma_{x(0)} = \varepsilon u'_0 + \nu\sigma_{z0} + [-\varepsilon^2 w''_0 + \nu\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_{0,c} + (2+\nu)\varepsilon\tau'_0]z$$

$$\varepsilon_{z(0)} = (1-\nu^2)\sigma_{z0} - \nu\varepsilon u'_0 + [(1-\nu^2)\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0,_c + \nu\varepsilon^2 w''_0 - (1+\nu)^2 \varepsilon\tau'_0]z$$

$$w_{(1)} = w_0 + [(1-\nu^2)\sigma_{z0} - \nu\varepsilon u'_0]z + [(1-\nu^2)\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0,_c + \nu\varepsilon^2 w''_0 - (1+\nu)^2 \varepsilon\tau'_0]\frac{z^2}{2}$$

$$\begin{gathered} \tau_{(1)} = \tau_0 + (-\varepsilon^2 u''_0 - \nu\varepsilon\sigma'_{z0} + \varepsilon^2 a_l^2 \ddot{u}_0)z + \\ + [\varepsilon^3 w'''_0 - (1+\nu)\varepsilon^5 a_c^2 \ddot{w}'_0 - (2+\nu)\varepsilon^2 \tau''_0 + 2(1+\nu)\varepsilon^2 a_l^2 \ddot{\tau}_0]\frac{z^2}{2} \end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} \sigma_{z(1)} = \sigma_{z0} + (\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0,_c - \varepsilon\tau'_0)z - (-\varepsilon^3 u'''_0 - \nu\varepsilon^2 \sigma''_{z0} + \varepsilon^3 a_l^2 \ddot{u}'_0,_c)\frac{z^2}{2} - \\ - [\varepsilon^4 w''''_0 - (1+\nu)\varepsilon^6 a_c^2 \ddot{w}''_0,_c - (2+\nu)\varepsilon^3 \tau'''_0 + 2(1+\nu)\varepsilon^3 a_l^2 \ddot{\tau}'_0,_l]\frac{z^3}{6} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} u_{(1)} = u_0 - [\varepsilon w'_0 - 2(1+\nu)\tau_0]z + [-(1-\nu^2)\varepsilon\sigma'_{z0} - (2+\nu)\varepsilon^2 u''_0 + \\ + 2(1+\nu)\varepsilon^2 a_l^2 \ddot{u}_0,_l]\frac{z^2}{2} + [-(3+4\nu+\nu^2)\varepsilon^5 a_c^2 \ddot{w}'_0,_c + \\ + (2+\nu)\varepsilon^3 w'''_0 - (3+4\nu+\nu^2)\varepsilon^2 \tau''_0 + 4(1+\nu)\varepsilon^2 a_l^2 \ddot{\tau}_0,_l]\frac{z^3}{6} \end{gathered}$$

в виде полиномов по степеням $z$. Заданные величины начального приближения $w_0(x,t)$ и $\tau_0(x,t)$ вычислены также в первом приближении $w_{(1)}(x,z,t)$ и $\tau_{(1)}(x,z,t)$ для того, чтобы определить величину поправки с учетом координаты $z$. Величины $\tau$, $\sigma_z$, $w$, $u$ записаны в первом приближении: с их помощью будут выполняться граничные условия, остальные – в нулевом. При этом все неизвестные выражены в зависимости от произвольных функций интегрирования $\tau_0(x,t)$, $\sigma_{z0}(x,t)$, $w_0(x,t)$, $u_0(x,t)$, относительные порядки которых между собой по $\varepsilon$ будут определены из граничных условий на длинных и коротких сторонах полосы.

Видно, что формулы (2.3) могут быть записаны в виде последовательности Коши по степеням $\varepsilon$ с коэффициентами, зависящими от $\nu$ и $z$.

Можно заметить, что $\ddot{w}_{0,c}$ всегда имеет индекс $c$ после запятой, а индекс $l$ находится при величинах $\ddot{\tau}'_{0,l}$ и $\ddot{u}_{0,l}$. Поэтому в дальнейшем эти индексы отбросим, считая их приписанными к указанным величинам с двумя точками соответствующим образом “по умолчанию”.

**3. Выполнение граничных условий на длинных сторонах полосы. Уравнение Тимошенко.** На лицевых поверхностях полосы $z^* = \pm h$ должны удовлетворяться граничные условия, соответствующие условиям нагружения. В безразмерном виде эти условия записываются так

$$\begin{aligned} &\sigma_z = Z_+(x,t), \quad \tau = X_+(x,t) \quad \text{при} \quad z = 1 \\ &\sigma_z = Z_-(x,t), \quad \tau = X_-(x,t) \quad \text{при} \quad z = -1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Безразмерные нагрузки $Z_+$, $X_+$, $Z_-$, $X_-$ получены путем деления размерных на жесткость $E$.

Условия (3.1) будем удовлетворять величинами первого приближения из соотношений (2.3) в предположении, что они с достаточной точностью аппроксимируют искомые величины. Получим четыре уравнения для определения неизвестных $\tau_0$, $\sigma_{z0}$, $w_0$, $u_0$

$$\begin{gathered} [\varepsilon^3 w_0''' - (1+\nu)\varepsilon^5 a_c^2 \ddot{w}_0' - (2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0'' + 2(1+\nu)^2 \varepsilon^2 a_l^2 \ddot{\tau}_0]\frac{1}{2} + \\ + (-\varepsilon^2 u_0'' - \nu\varepsilon\sigma_{z0}' + \varepsilon^2 a_l^2 \ddot{u}_0) + \tau_0 = X_+ \\ [\varepsilon^3 w_0''' - (1+\nu)\varepsilon^5 a_c^2 \ddot{w}_0' - (2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0'' + 2(1+\nu)\varepsilon^2 a_l^2 \ddot{\tau}_0]\frac{1}{2} - \\ - (-\varepsilon^2 u_0'' - \nu\varepsilon\sigma_{z0}' + \varepsilon^2 a_l^2 \ddot{u}_0) + \tau_0 = X_- \\ -[\varepsilon^4 w_0'''' - (1+\nu)\varepsilon^6 a_c^2 \ddot{w}_0'' - (2+\nu)\varepsilon^3 \tau_0''' + 2(1+\nu)\varepsilon^3 a_l^2 \ddot{\tau}_0']\frac{1}{6} - \\ - (-\varepsilon^3 u_0''' - \nu\varepsilon^2\sigma_{z0}'' + \varepsilon^3 a_l^2 \ddot{u}_0')\frac{1}{2} - \varepsilon\tau_0' + \varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0 + \sigma_{z0} = Z_+ \\ [\varepsilon^4 w_0'''' - (1+\nu)\varepsilon^6 a_c^2 \ddot{w}_0'' - (2+\nu)\varepsilon^3 \tau_0''' + 2(1+\nu)\varepsilon^3 a_l^2 \ddot{\tau}_0']\frac{1}{6} - \\ - (-\varepsilon^3 u_0''' - \nu\varepsilon^2\sigma_{z0}'' + \varepsilon^3 a_l^2 \ddot{u}_0')\frac{1}{2} + \varepsilon\tau_0' - \varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0 + \sigma_{z0} = Z_- \end{gathered}$$

Складывая и вычитая попарно первые два уравнения и последние два, получим четыре уравнения относительно неизвестных $w_0$, $\tau_0$, определяющих задачу изгиба,

$$\begin{gathered} \varepsilon^3 w_0''' - (1+\nu)\varepsilon^5 a_c^2 \ddot{w}_0' - (2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0'' + 2(1+\nu)\varepsilon^2 a_l^2 \ddot{\tau}_0 + 2\tau_0 = X_+ + X_- \\ -\varepsilon^4 w_0'''' + (1+\nu)\varepsilon^6 a_c^2 \ddot{w}_0'' + 6\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0 + (2+\nu)\varepsilon^3 \tau_0''' - \\ - 2(1+\nu)\varepsilon^3 a_l^2 \ddot{\tau}_0' - 6\varepsilon\tau_0' = 3(Z_+ - Z_-) \end{gathered} \tag{3.2}$$

и относительно $u_0$, $\sigma_{z0}$, определяющих задачу растяжения–сжатия,

$$\begin{gathered} -\varepsilon^2 u_0'' - \nu\varepsilon\sigma_{z0}' + \varepsilon^2 a_l^2 \ddot{u}_0 = \frac{1}{2}(X_+ - X_-) \\ \varepsilon^3 u_0''' + \nu\varepsilon^2\sigma_{z0}'' - \varepsilon^3 a_l^2 \ddot{u}_0' + 2\sigma_{z0} = Z_+ + Z_- \end{gathered} \tag{3.3}$$

Формулы для поперечных напряжений $\sigma_z$ и $\tau$ из (2.3) с учетом соотношений (3.2), (3.3) приводятся к простому виду

$$\begin{gathered}\tau_{(1)} = \tau_0(1-z^2) + \frac{1}{2}(X_+ - X_-)\,z + \frac{1}{2}(X_+ + X_-)\,z^2 \\ \sigma_{z(1)} = \sigma_{z0}(1-z^2) - \varepsilon\tau_0'(z+z^3) + \varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0(z-z^3) + \frac{1}{2}(Z_+ + Z_-)\,z^2 + \frac{1}{2}(Z_+ - Z_-)\,z^3\end{gathered} \tag{3.4}$$

*Замечание 1.* Продифференцируем первое однородное уравнение из (3.2) по $x$, умножим на $\varepsilon$ и сложим с однородным вторым. Получим выражение неизвестной $\tau_0'$ через $w_0$

$$\varepsilon\frac{\partial\tau_0}{\partial x} = \frac{3}{2}\varepsilon^4 a_c^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t_c^2} \tag{3.5}$$

Исключив неизвестную $\varepsilon\tau_0'$ и ее производные из второго уравнения в (3.2) и пренебрегая различием в дифференцировании по $t_l$ и $t_c$, получим уравнение

$$-\frac{2}{3}\varepsilon^4\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{8+5\nu}{3}\varepsilon^6 a_c^2\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial t_c^2} - 2(1+\nu)\,\varepsilon^6 a_c^2 a_l^2\frac{\partial^4 w_0}{\partial t_c^2\partial t_l^2} - 2\varepsilon^4 a_c{}^2\frac{\partial^2 w_0}{\partial t_c^2} = 0 \tag{3.6}$$

Уравнение Тимошенко имеет вид [4]

$$EI\frac{\partial^4 y^*}{\partial x^{*4}} - \rho I\left(1+\frac{E}{k'G}\right)\frac{\partial^4 y^*}{\partial x^{*2}\,\partial t^{*2}} + \frac{\rho^2 I}{k'G}\frac{\partial^4 y^*}{\partial t^{*4}} + \rho F\frac{\partial^2 y^*}{\partial t^{*2}} = 0 \tag{3.7}$$

Здесь $k'$ — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения, $F$ — площадь поперечного сечения, $y^*$ — прогиб, $x^*$ — координата оси балки, $I$ — момент инерции поперечного сечения.

Приведенное к безразмерному виду это уравнение в случае прямоугольного сечения балки высотой $2h$ ($I = 2bh^3/3$, $F = 2bh$) при $k' = 2/3$ и $b = 1$ ($b$ — ширина сечения) записывается так

$$\frac{2}{3}\varepsilon^4\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{8+6\nu}{3}\varepsilon^6 a^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t_c^2} + 2(1+\nu)\,\varepsilon^6 a^4\frac{\partial^4 y}{\partial t_c^4} + 2\varepsilon^4 a^2\frac{\partial^2 y}{\partial t_c^2} = 0 \tag{3.8}$$

Здесь $y = y^*/h$ — безразмерный прогиб и считается, что $a_c = a_l = a$.

Видно, что выведенные разными методами уравнение (3.8) и уравнение (3.6) практически совпадают. Уравнение (3.6), полученное с помощью соотношения (3.5), нельзя считать правильным, поскольку при получении последнего из уравнений (3.2) при вычитании произошло уничтожение главных частей уравнений: исчезли высшие производные и, соответственно, быстро меняющиеся решения. Затем только медленно меняющаяся величина $\varepsilon\tau_0'$ подставляется во второе уравнение системы (3.2), содержащее и быстро меняющиеся, и медленно меняющиеся величины $\varepsilon\tau_0'$, вместо быстро меняющихся и медленно меняющихся величин[1]. В силу этого уравнение (3.6) и совпадающее с ним уравнение Тимошенко (3.8), приходится признать некорректными.

**4. Уравнения низкочастотных колебаний.** Рассмотрим поведение решений уравнений (3.2) и (3.3) при действии только поперечной нагрузки, медленно меняющейся вдоль длинных сторон полосы и изменяющейся во времени по гармоническому зако-

[1] Под медленно меняющейся функцией понимается такая, которая при дифференцировании по аргументу $x$ не меняет своего асимптотического порядка по $\varepsilon$, тогда как быстро меняющаяся при дифференцировании по $x$ увеличивается в $\varepsilon^{-1}$ раз.

ну $\sin \omega t_c$. Этот случай отвечает приложению нагрузки с частотами, соизмеримыми с низшими частотами поперечных колебаний полосы, рассматриваемой как балка.

Положим для определенности, что на границу полосы $z = 1$ действует только распределенная нагрузка $Z_+ = p(x)\sin \omega t_c$, $p(x)$ – функция малой изменяемости, $\omega \sim \varepsilon^0$. Остальные нагрузки отсутствуют. Частные решения для $w_0^{(p)}$ и $\tau_0^{(p)}$ находятся из уравнений (3.2) после отбрасывания членов с высшими производными от $\tau_0$ по $x$ и $t_l$ вследствие малой изменяемости и членов $(1+\nu)\varepsilon^5 a_c^2 \ddot{w}_0'$ в первом уравнении и $(1+\nu)\varepsilon^6 a_c^2 \ddot{w}_0''$ во втором уравнении, имеющих порядок $\varepsilon^2$ по сравнению с находящимися в этом же уравнении одноименными величинами

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0''' + 2\tau_0 &= 0 \\ -\varepsilon^4 w_0'''' - 6\varepsilon\tau_0' + 6\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0 &= 3p\sin \omega t_c \end{aligned} \tag{4.1}$$

Эти два уравнения сводятся к одному классического вида относительно $w_0$

$$\frac{2}{3}\varepsilon^4 w_0'''' + 2\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0 = p\sin \omega t_c \tag{4.2}$$

Его решение является медленно меняющейся функцией и из первого уравнения системы (4.1) следует оценка для частного решения $w_0^{(p)}$ относительно нагрузки

$$w_0^{(p)} \sim \varepsilon^{-4} p \tag{4.3}$$

и для частного $\tau_0^{(p)}$ и общего $\tau_0^{(g)}$

$$\tau_0^{(p)} \sim \varepsilon^3 w_0^{(p)}, \quad \tau_0^{s(p)} \sim \varepsilon^{-1} p, \quad \tau_0^{(g)} \sim \varepsilon^3 w_0^{(g)} \tag{4.4}$$

Частные решения для $u_0$ и $\sigma_{z0}$ находятся из уравнений (3.3) при $Z_+ = p\sin \omega t_c$

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 u_0'' - \nu\varepsilon\sigma_{z0}' + \varepsilon^2 a_l^2 \ddot{u}_0 &= 0 \\ \varepsilon^3 u_0''' + \nu\varepsilon^2\sigma_{z0}'' - \varepsilon^3 a_l^2 \ddot{u}_0' + 2\sigma_{z0} &= p\sin \omega t_c \end{aligned} \tag{4.5}$$

Продифференцируем первое уравнение по $x$, умножим на $\varepsilon$ и сложим со вторым. Получим

$$2\sigma_{z0}^{(p)} = p\sin \omega t_c \tag{4.6}$$

Подставив теперь известную величину $\sigma_{z0}^{(p)}$ в первое уравнение системы (4.5) получим уравнение для определения решения $u_0$

$$-\varepsilon^2 u_0'' + \varepsilon^2 a_l^2 \ddot{u}_0 = \nu\varepsilon p' \sin \omega t_c \tag{4.7}$$

из которого, учитывая малую изменяемость функций $u_0$ и $p$, получаем оценку

$$u_0^{(p)} \sim \varepsilon^{-1} p \tag{4.8}$$

Будем считать, что частные решения $w_0^{(p)}$, $\tau_0^{(p)}$, $u_0^{(p)}$, $\sigma_{z0}^{(p)}$ найдены. Общие решения для величин $w_0^{(g)}$ и $\tau_0^{(g)}$ будем искать из однородных уравнений (3.2)

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 w_0''' - (1+\nu)\varepsilon^5 a_c^2 \ddot{w}_0' - (2+\nu)\varepsilon^2\tau_0'' + 2(1+\nu)\varepsilon^2 a_l^2 \ddot{\tau}_0 + 2\tau_0 &= 0 \\ -\varepsilon^4 w_0'''' + (1+\nu)\varepsilon^6 a_c^2 \ddot{w}_0'' + 6\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0 + (2+\nu)\varepsilon^3\tau_0''' - 2(1+\nu)\varepsilon^3 a_l^2 \ddot{\tau}_0' - 6\varepsilon\tau_0' &= 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Общие решения для величин $u_0^{(g)}$, $\sigma_{z0}^{(g)}$ следуют из уравнений (4.6) и (4.7) при $p = 0$.

Представим решения $w_0, \tau_0$ в виде сумм

$$w_0 = w_0^s(x) + w_0^q(x/\varepsilon), \quad \tau_0 = \tau_0^s(x) + \tau_0^q(x/\varepsilon) \tag{4.10}$$

обозначив верхним индексом $s$ медленно меняющуюся часть решения, а индексом $q$ быстро меняющуюся, что может быть записано так

$$w_0^{s'} \sim \varepsilon^0 w_0^s(x), \quad \tau_0^{s'} \sim \varepsilon^0 \tau_0^s(x), \quad \varepsilon\tau_0^{q'} \sim \tau_0^q(x/\varepsilon), \tag{4.11}$$

В первом уравнении системы (4.9) член $(2+\nu)\varepsilon^2\tau_0^{s''}$ имеет порядок $\varepsilon^2$ по сравнению с последним и может быть отброшен. Аналогичное отбрасывание можно сделать и во втором уравнении. Соответственно, однородные уравнения системы (4.9) в медленно меняющихся зависящих от координат $x$ и $t$ неизвестных записываются в виде

$$\begin{gathered} \varepsilon^3 w_0^{s}{}''' - (1+\nu)\varepsilon^5 a_c{}^2 \ddot{w}_0^{s}{}' + 2\tau_0^s = 0 \\ -\varepsilon^4 w_0^{s}{}'''' + (1+\nu)\varepsilon^6 a_c{}^2 \ddot{w}_0^{s}{}'' + 6\varepsilon^4 a_c{}^2 \ddot{w}_0^s - 6\varepsilon\tau_0^{s}{}' = 0 \end{gathered} \tag{4.12}$$

Исключив $\tau_0^{s}{}'$ из второго уравнения с помощью первого, получим (однородное) уравнение собственных колебаний балки с учетом инерции вращения

$$\frac{2}{3}\varepsilon^4 w_0^{s}{}'''' - \frac{2(1+\nu)}{3}\varepsilon^6 a_c^2 \ddot{w}_0^{s}{}'' + 2\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0^s = 0$$

Второй член в уравнении в силу малой изменяемости по $x$ и времени $t_c$ имеет порядок $\varepsilon^2$ по сравнению с последним и может быть также отброшен. Решение $w_0^s$ имеет малую изменяемость и только малую, при которой асимптотический порядок дифференцируемых функций меняется в $\varepsilon^0$ раз. В соответствии с этим верхний индекс $s$ у $w_0^s$ и член $w_0^q$ в (4.11) можно отбросить. Уравнение принимает классический вид

$$w_0'''' + k_c^4 \ddot{w}_0 = 0, \quad k_c^4 = 3a_c^2 \tag{4.13}$$

Вычитая из уравнений (4.9) попарно уравнения (4.12) и учитывая предположения (4.11), получим уравнения

$$-(2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0^{q}{}'' + 2(1+\nu)\varepsilon^2 a_l^2 \ddot{\tau}_0^q + 2\tau_0^q = 0 \tag{4.14}$$

$$(2+\nu)\varepsilon^3 \tau_0^{q}{}''' - 2(1+\nu)\varepsilon^3 a_l^2 \ddot{\tau}_0^{q}{}' - 6\varepsilon\tau_0^{q}{}' = 0 \tag{4.15}$$

решения которых зависят от аргументов $x/\varepsilon$ и $t/\varepsilon a_l$.

*Замечание 2.* Продифференцируем уравнение (4.14) по $x$, умножим на $\varepsilon$ и сложим с уравнением (4.15). Получим соотношение $4\varepsilon\tau_0^{q}{}' = 0$, которое показывает, что уравнения (4.14) и (4.15) различаются на постоянную величину $4\varepsilon\tau_0^q = C_0$, и, поскольку все медленно меняющиеся решения учтены в решении для $w_0$, постоянная $C_0$ может быть отброшена. Вычитая уравнение $4\varepsilon\tau_0^{q}{}' = 0$ из (4.15) и интегрируя по $x$, получим два совпадающих уравнения

$$-(2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0^{q}{}'' + 2(1+\nu)\varepsilon^2 a_l^2 \ddot{\tau}_0^q + 2\tau_0^q = 0 \tag{4.16}$$

Его решение можно использовать для удовлетворения потерянных граничных условий и сглаживания разрывов в медленно меняющихся классических решениях [2].

Примем $\tau_0^q = X(x)T(t)$. Подставим это выражение в уравнение (4.16). Получим соотношение

$$-(2+\nu)\varepsilon^2\frac{X''}{X} + 2\varepsilon^2 a_l^2(1+\nu)\frac{\ddot{T}}{T} + 2 = 0$$

Поскольку первый член в левой части уравнения зависит только от $x$, а второй только от $t$, оба отношения не зависят ни от $x$, ни от $t$ и равны некоторым константам $\lambda^2 - 2$ и $-\lambda^2$ соответственно, получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $X$ и $T$

$$(2+\nu)\frac{\varepsilon^2 X''}{X} = 2-\lambda^2, \quad 2(1+\nu)\frac{\varepsilon^2 a_l^2 \ddot{T}}{T} = -\lambda^2$$

решения которых запишем так

$$X = B_1\exp\left(-\frac{k}{\varepsilon}x\right) + B_2\exp\left(-\frac{k}{\varepsilon}(1-x)\right), \quad T = A_1\sin\left(\frac{c}{\varepsilon a_l}t_l\right) + A_2\cos\left(-\frac{c}{\varepsilon a_l}t_l\right) \tag{4.17}$$

Здесь введены обозначения

$$k^2 = \frac{2-\lambda^2}{2+\nu}, \quad c^2 = \frac{\lambda^2}{2(1+\nu)} \tag{4.18}$$

Первый член в выражении для $X$ при $\lambda^2 < 2$ описывает решение, затухающее от конца $x = 0$, второй от конца $x = 1$.

*Замечание 3.* В случае вынужденных колебаний функция $T(t)$ может быть задана, изменяющейся, например, по закону $\sin\omega t_c$. В этом случае из последней формулы (4.17) вытекает равенство $\frac{c}{\varepsilon a_l}t_l = \omega t_c$ и тогда из последней формулы (4.18) с учетом соотношения (2.2) определяется размерность и характер поведения величины $\lambda^2$

$$\lambda^2 \sim 2(1+\nu)a_l^2\omega^2$$

По мере возрастания частоты вынужденных колебаний величина $\lambda^2$ растет и при $\lambda^2 \geq 2$ величина $k^2$ в формуле (4.17) становится неположительной: решение $X$ в (4.17) при $\lambda^2 > 2$ меняет свое поведение из затухающего на осциллирующее.

**5. Граничные условия на коротких сторонах полосы для низкочастотных колебаний.** В инженерной практике существует зависящее от вида конструкции многообразие способов закрепления концов балок. В сопротивлении материалов и строительной механике основные условия определяются как жесткое защемление, свободное опирание, свободный конец. В рассматриваемой здесь уточненной теории необходимо сформулировать условия на коротких сторонах для неизвестных $w_0, u_0, \sigma_{z0}, \tau_0$ в представлениях теории упругости. Рассмотрим два примера выполнения граничных условий на коротких сторонах полосы для условий отсутствия на них перемещений при действии на верхний край полосы (1) распределенной медленно меняющейся нагрузки $p(x)\sin\omega t_c$ и (2) сосредоточенной нагрузки $P\delta(x-c)\sin\omega t_c$.

*Пример 1.* Пусть на концах полосы $x = 0$ и $x = 1$ выполняются для перемещений равенства $w = u = 0$, что соответствует в классической теории сопротивления материалов случаю жесткого защемления.

Частные и общие решения для нахождения решений, разыскиваемых как медленно меняющиеся по координате $x$, определены уравнениями классического вида (4.1) и

(4.3), (4.5)–(4.7). Быстро меняющиеся решения определены дополнительным уравнением (4.16), решение которого дается выражениями (4.17).

Граничные условия $w = u = 0$ на коротких сторонах при $x = 0; 1$ будем выполнять величинами первого приближения из выражений (2.3)

$$w_0 + [(1-\nu^2)\sigma_{z0} - \nu\varepsilon u_0']z + [(1-\nu^2)\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0 + \nu\varepsilon^2 w_0'' - (1+\nu)^2\varepsilon\tau_0']\frac{z^2}{2} = 0$$

$$u_0 - [\varepsilon w_0' - 2(1+\nu)\tau_0]z - [(1-\nu^2)\varepsilon\sigma_{z0}' + (2+\nu)\varepsilon^2 u_0'' - 2(1+\nu)\varepsilon^2 a_l^2 \ddot{u}_0]\frac{z^2}{2} +$$

$$-[(3+4\nu+\nu^2)\varepsilon^5 a_c^2 \ddot{w}_0' - (2+\nu)\varepsilon^3 w_0''' + (3+4\nu+\nu^2)\varepsilon^2\tau_0'' - 4(1+\nu)\varepsilon^2 a_l^2 \ddot{\tau}_0]\frac{z^3}{6} = 0$$

Потребовав в этих уравнениях обращения в ноль коэффициентов при каждой степени $z$, получим 14 условий на концах $x = 0; 1$

$$w_0 = 0 \tag{5.1}$$

$$(1-\nu^2)\sigma_{z0} - \nu\varepsilon u_0' = 0 \tag{5.2}$$

$$(1-\nu^2)\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0 + \nu\varepsilon^2 w_0'' - (1+\nu)^2\varepsilon\tau_0' = 0 \tag{5.3}$$

$$u_0 = 0 \tag{5.4}$$

$$\varepsilon w_0' - 2(1+\nu)\tau_0 = 0 \tag{5.5}$$

$$-(1-\nu^2)\varepsilon\sigma_{z0}' - (2+\nu)\varepsilon^2 u_0'' + 2(1+\nu)\varepsilon^2 a_l^2 \ddot{u}_0 = 0 \tag{5.6}$$

$$(3+4\nu+\nu^2)\varepsilon^5 a_c^2 \ddot{w}_0' - (2+\nu)\varepsilon^3 w_0''' + (3+4\nu+\nu^2)\varepsilon^2\tau_0'' - 4(1+\nu)\varepsilon^2 a_l^2 \ddot{\tau}_0 = 0 \tag{5.7}$$

Условие (5.5) можно переписать так $\varepsilon w_0' - 2(1+\nu)(\tau_0^s + \tau_0^q) = 0$. Из оценок (4.4) видно, что $\tau_0^s \sim \varepsilon^3 w_0$ и оно может быть отброшено по сравнению с первым членом. Условие $w_0' = 0$ вместе с условием (5.1) может быть выполнено решением классического уравнения (4.2), и, следовательно, $\tau_0^q$ для устранения возможных разрывов в силу их отсутствия следует положить равным нулю. Решение однородных классических уравнений вынужденных колебаний балки при граничных условиях $w_0 = w_0' = 0$ на концах $x = 0; 1$ известно и здесь не выписывается.

Механический смысл условия (5.2) заключается в равенстве нулю суммы поперечной деформации полосы от напряжения $\sigma_{0z}$ и поперечной деформации из-за эффекта Пуассона от продольной деформации $u_0'$. Из оценок (4.6), (4.8) видно, что $(\sigma_{0z}, \varepsilon u_0') \sim p$ и пренебрежение этим условием в уточненной и тем более в классической теории оправданно. То же самое справедливо относительно условия (5.6).

Условие (5.3) отражает тот факт, что при изгибе полосы, например, вниз, верхние слои сжимаются, а нижние растягиваются. Из-за эффекта Пуассона имеют место поперечные перемещения $[(1-\nu^2)\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0 + \nu\varepsilon^2 w_0'']\frac{z^2}{2}$, достигающие наибольших значений в угловых точках при $z = \pm 1$. На рис. 1 деформированные положения границ показаны пунктирной линией, недеформированные – сплошными линиями.

В заделке точки вертикальной границы полосы остаются неподвижными. Отсюда заключаем, что быстро меняющееся решение $(1+\nu)^2\varepsilon\tau_0'$ в (5.3) устраняет получившийся разрыв решения на границе. Поскольку инерционный член имеет порядок $\varepsilon^2$ по сравне-

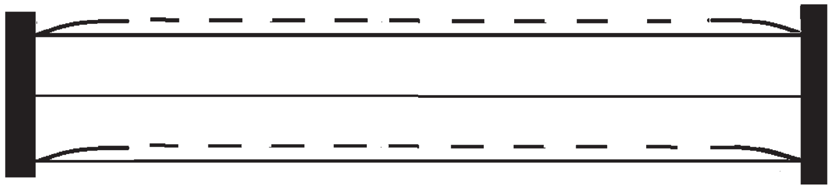

**Рис. 1.** Длинные границы в недеформированном (сплошные линии) и в деформированном (пунктирные линии) состояниях полосы

нию с упругим членом, его можно отбросить и получить условие $(1+\nu)^2\varepsilon\tau_0' = \nu\varepsilon^2 w_0''$ для вычисления $\tau'$ при $x = 0; 1$. Это дает перемещения $w$ и напряжения $\sigma_x$ с учетом краевого эффекта

$$w = \left\{ w_0 - \frac{\nu}{(1+\nu)^2}\varepsilon^{-2}\left[ w_0''(0)\exp\left(-\frac{k}{\varepsilon}x\right) + w_0''(1)\exp\left(-\frac{k}{\varepsilon}(1-x)\right)\right]\frac{z^2}{2}\right\}\sin\omega t$$

$$\sigma_x = -\varepsilon^{-2}w_0''z + \varepsilon^{-2}\frac{\nu(2+\nu)}{(1+\nu)^2 k}\left[ w_0''(0)\exp\left(-\frac{kx}{\varepsilon}\right) + w_0''(1)\exp\left(-\frac{k(1-x)}{\varepsilon}\right)\right] z\sin\omega t$$

В первой формуле второй член $O(\varepsilon^{-2})$ и может быть отброшен по сравнению с первым. Вычисленный по классической теории прогиб $w_0$ является достаточно точным и не нуждается в уточнении на коротких сторонах. В формуле для напряжения $\sigma_x$ из (2.3) второй член в квадратной скобке $O(\varepsilon^4)$ и может быть отброшен. Также на основании ранее приведенных оценок (4.6), (4.8) могут быть отброшены первые два члена. Член в квадратных скобках описывает концентрацию напряжений в углах полосы, которые соизмеримы с напряжениями, определяемыми первым членом по классической теории в середине балки.

В условии (5.7) первый член имеет множитель $\varepsilon^5$ и может быть отброшен по сравнению со вторым с множителем $\varepsilon^3$. Последний член имеет множитель $\varepsilon^4$ в силу соотношения (2.2), т.к. $\ddot{\tau}_{0,l} = \varepsilon^2\ddot{\tau}_{0,c}$, в то время как в силу условия (4.10) $\varepsilon^2\tau_0'' = \varepsilon^2\tau_0^{s}{}'' + \varepsilon^2\tau_0^{q}{}''$: в последнем выражении первый член при дифференцировании сохраняет свой порядок $\varepsilon^2$, тогда как второй, быстро меняющийся имеет порядок $\varepsilon^0$. Оставшиеся члены образуют условие

$$(2+\nu)\varepsilon^3 w_0''' - (3 + 4\nu + \nu^2)\varepsilon^2\tau_0^{q}{}'' = 0$$

выражающие требование, чтобы искривляющаяся нормаль в пролете на величину $(2+\nu)\varepsilon^3 w_0'''$ в заделке была подправлена до прямой с помощью быстро меняющегося решения (4.16). Здесь $\tau_0^{q}{}'' \sim \varepsilon^3 w_0$, т.е. на порядок меньше, чем в условии (5.3). Поэтому вклад этой поправки в напряжение $\sigma_x$ имеет порядок $\varepsilon$ по сравнению с главной частью медленно меняющейся компоненты напряжения $\varepsilon^2 w_0''z$.

Условие (5.4) позволяет решить граничную задачу для уравнения (4.7). Учитывая оценку (4.8) инерционные члены в этом уравнении можно отбросить.

*Пример 2.* Рассмотрим низкочастотные колебания полосы, возникающие под действием приложенной в точке $x = c$ сосредоточенной силы. Поперечные колебания опишем уравнениями (3.2) при нагрузке $X_+ = X_- = 0$, $Z_- = 0$ и $Z_+ = P\delta(x-c)\sin\omega t_c$, моделирующей приложение сосредоточенной силы в точке $x = c$, $z = 1$ интенсивностью $P$, $\omega \sim \varepsilon^0$. Перепишем уравнения (3.2) с заданной правой частью

$$\begin{gathered}\varepsilon^3 w_0''' - (1+\nu)\varepsilon^5 a_c^2 \ddot{w}_0' - (2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0'' + 2(1+\nu)\varepsilon^2 a_l^2 \ddot{\tau}_0 + 2\tau_0 = 0 \\ -\varepsilon^4 w_0'''' + (1+\nu)\varepsilon^6 a_c^2 \ddot{w}_0'' + 6\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0 + (2+\nu)\varepsilon^3 \tau_0''' - \\ - 2(1+\nu)\varepsilon^3 a_l^2 \ddot{\tau}_0' - 6\varepsilon\tau_0' = 3P\delta(x-c)\sin\omega t\end{gathered} \tag{5.8}$$

Заменим $\delta$ – функцию Дирака ее асимптотическим представлением $\delta_\varepsilon$ [15]

$$\delta_\varepsilon[\kappa(x-c)] = \frac{\kappa}{2\varepsilon}\begin{cases}\exp\left(-\kappa\dfrac{(c-x)}{\varepsilon}\right) & \text{при} \quad 0 \le x \le c \\ \exp\left(-\kappa\dfrac{(x-c)}{\varepsilon}\right) & \text{при} \quad c \le x \le 1\end{cases} \tag{5.9}$$

где $\kappa \sim \varepsilon^0$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon[\kappa(x-c)] = \delta(x-c)$.

Частное решение системы уравнений (5.8) будем разыскивать в следующем виде

$$w_0^{(p)} = W_0\delta_\varepsilon[\kappa(x-c)]\sin\omega t_c, \qquad \tau_0^{(p)} = \mathrm{T}_0(t)\,\delta_\varepsilon'[\kappa(x-c)]\sin\omega t_c \tag{5.10}$$

Эти функции при каждом дифференцировании увеличиваются в асимптотическом смысле в $\varepsilon^{-1}$ раз. Подставив их в уравнения (5.8), получим уравнения для определения $W_0$ и $\mathrm{T}_0$:

при $0 \le x \le c$

$$\begin{gathered}-\kappa^3 W_0 + (1+\nu)\varepsilon^4 \kappa a_c^2 \ddot{W}_0 - (2+\nu)\kappa^2 \mathrm{T}_0 + 2(1+\nu)\varepsilon^2 a_l^2 \ddot{\mathrm{T}}_0 + 2\mathrm{T}_0 = 0 \\ -\kappa^4 W_0 + (1+\nu)\varepsilon^4\kappa^2 a_c^2 \ddot{W}_0 + 6\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{W}_0 - (2+\nu)\kappa^3 \mathrm{T}_0 + 2(1+\nu)\varepsilon^2 \kappa a_l^2 \ddot{\mathrm{T}}_0 + 6\kappa\mathrm{T}_0 = 6P\end{gathered}$$

при $c \le x \le 1$

$$\begin{gathered}\kappa^3 W_0 - (1+\nu)\varepsilon^4 \kappa a_c^2 \ddot{W}_0 - (2+\nu)\kappa^2 \mathrm{T}_0 + 2(1+\nu)\varepsilon^2 a_l^2 \ddot{\mathrm{T}}_0 + 2\mathrm{T}_0 = 0 \\ -\kappa^4 W_0 + (1+\nu)\varepsilon^4\kappa^2 a_c^2 \ddot{W}_0 + 6\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{W}_0 + (2+\nu)\kappa^3 \mathrm{T}_0 - 2(1+\nu)\varepsilon^2 \kappa a_l^2 \mathrm{T}_0 - 6\kappa\mathrm{T}_0 = 6P\end{gathered}$$

После отбрасывания малых членов с множителями $\varepsilon^4$ и $\varepsilon^2$ по сравнению с одноименными уравнения сводятся к виду

при $0 \le x \le c$

$$\begin{gathered}\kappa^3 W_0 + [-(2+\nu)\kappa^2 + 2]\mathrm{T}_0 = 0 \\ -\kappa^3 W_0 + [(2+\nu)\kappa^2 - 6]\mathrm{T}_0 = \frac{6P}{\kappa}\end{gathered}$$

при $c \le x \le 1$

$$\begin{gathered}-\kappa^3 W_0 + [-(2+\nu)\kappa^2 + 2]\mathrm{T}_0 = 0 \\ -\kappa^3 W_0 + [-(2+\nu)\kappa^2 + 6]\mathrm{T}_0 = \frac{6P}{\kappa}\end{gathered}$$

Откуда получаем для коэффициентов в формуле (5.10) выражения:

$$\mathrm{T}_0 = -\frac{3P}{2\kappa}, \quad W_0 = -\frac{3P[(2+\nu)\kappa^2 - 2]}{2\kappa^4}, \quad \text{при} \quad 0 \le x \le c$$

$$\mathrm{T}_0 = \frac{3P}{2\kappa}, \quad W_0 = -\frac{3P[(2+\nu)\kappa^2 - 2]}{2\kappa^4}, \quad \text{при} \quad c \le x \le 1$$

В соответствии с этим запишем решение для $w_0$ и $\tau_0$

при $0 \le x \le c$

$$w_{0-} = \left\{-\frac{3P[(2+\nu)\kappa^2 - 2]}{2\kappa^4}\delta_{\varepsilon-} + \right.$$

$$\left. + A_1 \sin k_c x + A_2 \cos k_c x + A_3 \operatorname{sh} k_c x + A_4 \operatorname{ch} k_c x\right\} \sin \omega t$$

при $c \le x \le 1$

$$w_{0+} = \left\{-\frac{3P[(2+\nu)\kappa^2 - 2]}{2\kappa^4}\delta_{\varepsilon+} + \right.$$

$$\left. + B_1 \sin k_c y + B_2 \cos k_c y + B_3 \operatorname{sh} k_c y + B_4 \operatorname{ch} k_c y\right\} \sin \omega t$$

$$y = 1 - x, \quad \delta_{\varepsilon-} = \frac{\kappa}{2\varepsilon}\exp\left(-\kappa\frac{(c-x)}{\varepsilon}\right), \quad \delta_{\varepsilon+} = \frac{\kappa}{2\varepsilon}\exp\left(-\kappa\frac{(x-c)}{\varepsilon}\right)$$
$$\tau_0^{(p)} = -\frac{3P}{2\kappa}\delta'_\varepsilon[\kappa(x-c)]\sin\omega t_c \qquad (5.11)$$

Коэффициент $k_c$ определен формулой в выражении (4.13), $A_i$ и $B_i$ при $i = 1 \div 4$ – постоянные интегрирования уравнения (4.13).

Для упрощения дальнейших вычислений и сокращения записи при выполнении четырех граничных условий и четырех условий непрерывности примем, что $\kappa^2 = 2/(2+\nu)$. Это дает $W_0 = 0$. Дополнительно положим $c = 1/2$, считая силу приложенной в середине пролета полосы.

Теперь надо потребовать выполнения условий непрерывности в точке $c$ для продольного перемещения $u$, продольного напряжения $\sigma_x$, поперечного перемещения $w$ и касательного напряжения $\tau$. Формулы (2.3) и (3.4) позволят их записать так

$$\{u_0 + [2(1+\nu)\tau_0 - \varepsilon w'_0]z\}_{c+0}^{c-0} = 0$$

$$\{\varepsilon u'_0 + \nu\sigma_{z0} + [-\varepsilon^2 w''_0 + \nu\varepsilon^4 a_c{}^2 \ddot{w}_{0,c} + (2+\nu)\varepsilon\tau'_0]z\}_{c+0}^{c-0} = 0$$

$$\left\{w_0 + [(1-\nu^2)\sigma_{z0} - \nu\varepsilon'_0]z + [(1-\nu^2)\varepsilon^4 a_c{}^2 \ddot{w}_{0,c} + \nu\varepsilon^2 w''_0 - (1+\nu)^2\varepsilon\tau'_0]\frac{z^2}{2}\right\}_{c+0}^{c-0} = 0$$

$$\{\tau_0(1-z^2)\}_{c+0}^{c-0} = 0$$

Здесь надо подставить верхнее значение $x = c - 0$ в выражение в фигурных скобках и вычесть из него это же выражение при $x = c + 0$.

Условия распадаются на восемь соотношений непрерывности. Шесть из них с отброшенными инерционными членами как пренебрежимо малыми записываются относительно неизвестных $w_0$ и $\tau_0 = \tau_0^{(p)} + \tau_0^s + \tau_0^q$

$$\{w_0\}_{c+0}^{c-0} = 0, \quad \{\varepsilon w'_0 - 2(1+\nu)(\tau_0^{(p)} + \tau_0^s + \tau_0^q)\}_{c+0}^{c-0} = 0$$

$$\{-\varepsilon^2 w''_0 + (2+\nu)\varepsilon(\tau_0^{(p)\prime} + \tau_0^{s\prime} + \tau_0^{q\prime})\}_{c+0}^{c-0} = 0$$

$$\{\nu\varepsilon^2 w_0'' - (1+\nu)^2(\varepsilon\tau_0^{(p)\prime} + \varepsilon\tau_0^{s\prime} + \varepsilon\tau_0^{q\prime})\}_{c+0}^{c-0} = 0, \quad \{\tau_0^{(p)} + \tau_0^s + \tau_0^q\}_{c+0}^{c-0} = 0$$

Поскольку из первого уравнения (4.1) для решения однородного уравнения имеем

$$\tau_0^s = -\frac{1}{2}\varepsilon^3 w_0''' \tag{5.12}$$

оно везде кроме последнего уравнения может быть отброшено как величина $O(\varepsilon^2)$ по сравнению с одноименной и условия принимают вид

$$\{w_0\}_{c+0}^{c-0} = 0, \quad \{\varepsilon w_0' - 2(1+\nu)(\tau_0^{(p)} + \tau_0^q)\}_{c+0}^{c-0} = 0, \quad \{-\varepsilon^2 w_0'' + (2+\nu)(\tau_0^{(p)\prime} + \tau_0^{q\prime})\}_{c+0}^{c-0} = 0$$

$$\{\nu\varepsilon^2 w_0'' - (1+\nu)^2(\tau_0^{(p)\prime} + \tau_0^{q\prime})\}_{c+0}^{c-0} = 0, \quad \left\{-\frac{1}{2}\varepsilon^3 w_0''' + \tau_0^{(p)} + \tau_0^q\right\}_{c+0}^{c-0} = 0$$

В них везде входит сумма $\tau_0^{(p)} + \tau_0^q$ и поскольку из последнего уравнения следует, что

$$(\tau_0^{(p)} + \tau_0^q) \sim \varepsilon^3 w_0 \tag{5.13}$$

она также может быть отброшена во втором уравнении как величина $O(\varepsilon^2)$ по сравнению с $\varepsilon w_0'$, а в третьем и четвертом уравнениях как величина $O(\varepsilon)$ по сравнению с $\varepsilon^2 w_0''$. После этого третье и четвертое условия совпадут и в результате останутся четыре условия непрерывности, аналогичные классическим для балки

$$\{w_0\}_{c+0}^{c-0} = 0, \quad \{\varepsilon w_0'\}_{c+0}^{c-0} = 0, \quad \{\varepsilon^2 w_0''\}_{c+0}^{c-0} = 0, \quad \left\{-\frac{1}{2}\varepsilon^3 w_0''' + \tau_0^{(p)} + \tau_0^q\right\}_{c+0}^{c-0} = 0$$

за исключением члена $\tau_0^q$ в последнем уравнении, который следует отбросить, поскольку все четыре условия непрерывности и четыре граничных условия на концах могут быть удовлетворены за счет восьми постоянных интегрирования классического решения $A_i$ и $B_i$ при $i = 1 \div 4$.

После подстановки решений (5.11) получим алгебраические уравнения для определения постоянных интегрирования $A_i$ и $B_i$ при $i = 1 \div 4$

$$(A_3 - B_3)(\operatorname{sh} k_c c - \sin k_c c) + (A_4 - B_4)(\operatorname{ch} k_c c - \cos k_c c) = 0$$

$$(A_3 - B_3)(\operatorname{sh} k_c c + \sin k_c c) + (A_4 - B_4)(\operatorname{ch} k_c c + \cos k_c c) = 0$$

$$(A_3 + B_3)(\operatorname{ch} k_c c - \cos k_c c) + (A_4 + B_4)(\operatorname{sh} k_c c + \sin k_c c) = 0$$

$$(A_3 + B_3)(\operatorname{ch} k_c c + \cos k_c c) + (A_4 + B_4)(\operatorname{sh} k_c c - \sin k_c c) = \varepsilon^{-3}\frac{3P}{16k}$$

Из первых двух уравнений получаем

$$A_3 = B_3 = -A_4\frac{\operatorname{sh} k_c c + \sin k_c c}{\operatorname{ch} k_c c - \cos k_c c} = -B_4\frac{\operatorname{sh} k_c c + \sin k_c c}{\operatorname{ch} k_c c - \cos k_c c}$$

и затем из последних двух

$$A_4 = B_4 = \varepsilon^{-3}\frac{3P(\operatorname{ch} k_c c - \cos k_c c)}{32\Delta k}, \quad \Delta = 2(\operatorname{sh} k_c c \cos k_c c + \operatorname{ch} k_c c \sin k_c c)$$

Отсюда имеем

$$w_{0-} = \varepsilon^{-3}\frac{3P}{64(\operatorname{sh} k_c c \cos k_c c + \operatorname{ch} k_c c \sin k_c c)k} \times$$

$$\times\left[(\operatorname{ch} k_c c-\cos k_c c)(\operatorname{ch} k_c x-\cos k_c x)-(\operatorname{sh} k_c c+\sin k_c c)(\operatorname{sh} k_c x-\sin k_c x)\right]\sin\omega t$$

$$w_{0+}=\varepsilon^{-3}\frac{3P}{64(\operatorname{sh} k_c c\cos k_c c+\operatorname{ch} k_c c\sin k_c c)k}\times \tag{5.14}$$

$$\times\left[(\operatorname{ch} k_c c-\cos k_c c)(\operatorname{ch} k_c y-\cos k_c y)-(\operatorname{sh} k_c c+\sin k_c c)(\operatorname{sh} k_c y-\sin k_c y)\right]\sin\omega t$$

Заметим, что если нагрузка приложена не посредине верхнего края полосы, процедура решения остается такой же, но окончательные формулы записываются длиннее.

Поскольку величины $\sigma_{z0}$, $u_0^{(g)}$, $u_0^{(p)}$, $w_0^{(p)}$, $w_0^{(g)}$, $\tau_0^{(p)}$, $\tau_0^{(g)}$, $\tau_0^q$ имеют различные асимптотические порядки их вклад в каждой формуле (2.3) в искомые неизвестные будет различным. Поэтому в общих выражениях для неизвестных (2.3) надо оставить только главные члены. Во-первых, во все выражения входят величины $\sigma_{z0}$, $u_0^{(g)}$, $u_0^{(p)}$, для которых необходимо произвести асимптотические оценки. Выражение (4.6), переписанное для сосредоточенной нагрузки имеет вид

$$2\sigma_{z0}^{(p)}=P\delta_\varepsilon\sin\omega t_c$$

и имеет соответствующую асимптотическую оценку

$$\sigma_{z0}^{(p)}\sim\varepsilon^{-1}P \tag{5.15}$$

В уравнении продольных колебаний (4.7) с сосредоточенной нагрузкой

$$-\varepsilon^2u_0''+\varepsilon^2a_l{}^2\ddot{u}_0=\nu\varepsilon P\delta_\varepsilon'\sin\omega t_c$$

при поиске частного решения $u_0^{(p)}$ можно отбросить инерционный член как малый $O(\varepsilon^2)$ по сравнению с первым, т.к. первый при дифференцировании увеличивается в $\varepsilon^{-2}$ раз

$$-\varepsilon^2u_0''=\nu P\varepsilon\delta_0'\varepsilon\sin\omega t_c$$

После интегрирования получим

$$u_0=\varepsilon\frac{\nu P}{2\kappa^2}\begin{cases}-\exp\left(-k\dfrac{(c-x)}{\varepsilon}\right)\sin\omega t_c+(a_0+a_1x) & \text{при}\quad 0\le x\le c\\ \exp\left(-k\dfrac{(x-c)}{\varepsilon}\right)\sin\omega t_c+(b_0+b_1x) & \text{при}\quad c\le x\le 1\end{cases}$$

с оценкой

$$u_0^{(p)},\,u_0^{(g)}\sim\varepsilon P \tag{5.16}$$

Формулы (2.3) с учетом записи (3.4) для неизвестных теперь можно переписать с учетом структуры полученных решений

$$u_{(0)}=u_0^{(p)}+u_0^{(g)}+[2(1+\nu)\tau_0^{(p)}-\varepsilon w_0^{(g)\prime}]z$$

$$\sigma_{z(0)}=\sigma_{z0}^{(p)}+[\varepsilon^4a_c^2\ddot{w}_0^{(g)}-\varepsilon\tau_0^{(p)\prime}]z$$

$$\varepsilon_{x(0)}=\varepsilon u_0^{(p)\prime}+\varepsilon u_0^{(g)\prime}+[2(1+\nu)\varepsilon\tau_0^{(p)\prime}-\varepsilon^2w_0^{(g)\prime\prime}]z$$

$$\sigma_{x(0)}=\varepsilon u_0^{(p)}+\varepsilon u_0^{(g)}+\nu\sigma_{z0}^{(p)}-[\varepsilon^2w_0^{(g)}*-\nu\varepsilon^4a_c{}^2\ddot{w}_0^{(g)}-(2+\nu)\varepsilon\tau_0^{(p)\prime}]z$$

$$\varepsilon_{z(0)}=(1-\nu^2)\sigma_{z0}^{(p)}-\nu\varepsilon u_0^{(p)\prime}-\nu\varepsilon u_0^{(g)\prime}+[(1-\nu^2)\varepsilon^4a_c^2\ddot{w}_0^{(g)}+\nu\varepsilon^2w_0^{(g)\prime\prime}-(1+\nu)^2\varepsilon\tau_0^{(p)\prime}]z$$

$$w_{(1)} = w_0^{(g)} + [(1-\nu^2)\sigma_{z0}^{(p)} - \nu\varepsilon u_0^{(p)\prime} - \nu\varepsilon u_0^{(g)\prime}]z +$$
$$+ [(1-\nu^2)\varepsilon^4 a_c^2 \ddot{w}_0^{(g)} + \nu\varepsilon^2 w_0^{(g)\prime\prime} - (1+\nu)^2\varepsilon\tau_0^{(p)\prime}]\frac{z^2}{2}$$
$$\tau_{(1)} = \tau_0^{(p)}(1-z^2)$$
$$\sigma_{z(1)} = \sigma_{z0}^{(p)}(1-z^2) - \varepsilon\tau_0^{(p)\prime}(z+z^3) + \frac{1}{2}P\delta(x-c)\sin\omega t_c(z^2+z^3)$$

Воспользовавшись соотношениями (5.13)–(5.16), оставим в каждом выражении только главные члены

$$u_{(0)} = -\varepsilon w_0^{(g)\prime} z + O(\varepsilon^2), \quad \sigma_{z(0)} = \sigma_{z0}^{(p)} + O(\varepsilon), \quad \varepsilon_{x(0)} = -\varepsilon^2 w_0^{(g)\prime\prime} z + O(\varepsilon^2),$$
$$\sigma_{x(0)} = \nu\sigma_{z0}^{(p)} + \varepsilon^2 w_0^{(g)\prime\prime} z + O(\varepsilon), \quad \varepsilon_{z(0)} = \nu\varepsilon^2 w_0^{(g)\prime\prime} z + O(\varepsilon), \quad w_{(1)} = w_0^{(g)} + O(\varepsilon^2)$$
$$\tau_{(1)} = \left(\tau_0^{(p)} - \frac{1}{2}\varepsilon^3 w_0^{\prime\prime\prime}\right)(1-z^2) + O(\varepsilon), \quad \sigma_{z(1)} = \sigma_{z0}^{(p)}(1-z^2) + \frac{1}{2}P\delta(x-c)\sin\omega t_c(z^2+z^3)$$

Здесь справа в каждой формуле указаны относительные порядки отброшенных величин по сравнению с главными. Видно, что перемещения определяются с меньшей погрешностью, чем напряжения.

**7. Обсуждение результатов.** Предложенный Сен-Венаном полуобратный метод решения уравнений теории упругости расширен до итерационного, совпадающего с методом простых итераций. Для этого оператор исходных уравнений преобразован так, чтобы он позволял вычислять неизвестные величины последовательно: вычисленные в одном уравнении величины входят в следующее уравнение как известные, умноженные на малый параметр. Решение получается в виде асимптотического ряда по малому параметру, обеспечивающему асимптотическую сходимость удовлетворяющую теореме Банаха о неподвижной точке (принципу сжатых отображений). Такая последовательность обеспечивается операторами Пикара и выбором величин начального приближения независящими от поперечной координаты, совпадающими по смыслу к гипотезам Кирхгоффа недеформируемой нормали. В течение одной итерации вычисляются путем прямого интегрирования все неизвестные задачи, содержащие четыре произвольные функции интегрирования, зависящие от продольной координаты и играющие роль коэффициентов в полиномах по степеням поперечной координаты. Построение интеграла исходных уравнений теории упругости в виде последовательности Коши сводится к последовательному применению операторов Пикара для решения дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной и часто встречающегося в учебной литературе.

Предположим, что любое приближенное решение может быть рассмотрено как нулевое приближение некоторого итерационного процесса. Поэтому, если строить такой процесс, необходимо, чтобы он был сходящимся. Показано, что необходимым условием сходимости является построение такой последовательности вычислений неизвестных, когда вычисляемая через предыдущую величина, не должна быть умножаемой на малый параметр в отрицательной степени. Метод SVPB позволяет написать аналитические выражения с заданной точностью для всех неизвестных задачи и соответственно выполнить любые граничные условия и условия непрерывности напряжений и перемещений, возникающие в классических решениях. Наличие полного решения позволяет формулировать задачи сопряжения элементов.

В процессе последовательного вычисления неизвестных в течение нулевой итерации имеет место четырехкратное интегрирование по поперечной координате и четырехкратное дифференцирование по продольной. Однако это дифференцирование имеет символический характер, т.к. при выполнении граничных условий на длинных сторонах производные приравниваются к нагрузке, которую можно принять за единицу измерения искомых величин, и соответствующие уравнения интегрируются, обеспечивая вместе с однородными сингулярно возмущенными уравнениями непрерывность и ограниченность решения в любом случае. Процесс вычисления можно трактовать как расщепление сложного оператора на четыре последовательных оператора Пикара относительно поперечной координаты и четыре — относительно продольной. Близость полученного решения к точному решению оценивается порядком первого отброшенного члена по $\varepsilon$ для медленно меняющихся величин и оценкой, данной в [4], для быстроменяющихся.

Показана ошибка, совершаемая при выводе уравнения Тимошенко, порожденная уничтожением главных членов при вычитании.

Обнаруженное уменьшение скорости затухания быстро меняющихся компонент решения по мере увеличения частоты колебаний позволяет сделать заключение об отсутствии затухания разрывов на концах полосы при частотах возбуждения, соизмеримых с собственными частотами продольных колебаний стержня.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Love A.E.H.* A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927. 662 p.= *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.–Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
2. *Friedrichs R.O.* Asymptotic phenomena in mathematical physics // Bull. Amer. Math. Soc. 1955. V. 61. № 6. P. 485–504.
3. *Григолюк Э.И., Селезов И.Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Т. 5 // Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. М.: ВИНИТИ, 1973. 271 с.
4. *Timoshenko S.* On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bar // Phil. Mag. 1921. Ser. 6 (41). № 245. P. 744–746.
5. *Timoshenko S.P.* On the transverse vibrations of bars of uniform cross sections // Phil. Mag. 1922. Series 6 (43). P. 125–131.
6. *Уфлянд Я.С.* Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // ПММ. 1948. Т. 12. № 3. С. 287–300.
7. *Mindlin R.D.* Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // J. Appl. Mech. 1951. V. 18. № 1. P. 31–38.
8. *Dolph C.L.* On the Timoshenko theory of transverse beam vibrations // Quart. Appl. Math. 1954. V. 12. № 2. P. 175–187.
9. *Hutchinson J.R.* On Timoshenko beams of rectangular cross–section // J. Appl. Mech. 2004. V. 71. P. 359 – 367.
https://doi.org/10.1115/1.1751186
10. *Stephen N.G.* The second spectrum of Timoshenko beams theory– Further assessment// J. Sound Vib. 2006. V. 292. P. 372–389.
https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.08.003
11. *Nesterenko V.V.* A theory for transverse vibrations of the Timoshenko beam // J. Appl. Math. Mech. 1993. V. 57. P. 669–677.
12. *Abramyan A.K., Indeitsev D.A., Postnov V.A.* Running and Standing Waves of Timoshenko Beam // Mech. Solids. 2018. V. 53. № 2. P. 203–210.
https://doi.org/10.3103/S0025654418020115
13. *Wanga X.Q.* Timoshenko beam theory: A perspective based on the wave–mechanics approach // Wave Motion. 2015. V. 57. P. 64–87.
14. *Демочкин Н.И., Моргачев К.С., Фридман Л.И.* Область достоверности модели Тимошенко в динамике стержней и пластин // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 6. С. 137–145.
15. *Zveriaev E.M.* Interpretation of Semi-Invers Saint-Venant Method as Iteration Asymptotic Method // Shell Structures: Theory and Application. London: Taylor & Francis Group, 2006. P. 191–198.
16. *Зверяев Е.М.* Метод Сен-Венана–Пикара–Банаха интегрирования уравнений теории упругости тонкостенных систем // ПММ. 2019. Т. 83. № 5–6. С. 823–833

17. *Колмогоров А.Н., Фомин С. В.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 с.
18. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
19. *Lindelöf E.L.* Sur l'application des méthodes d' approximation successives a l'étude des intégrales réeles des équations différentielles ordinaires // Journal des mathématiques Pures et Appliquées. 4$^e$ série. 1894. V. 10. P. 117–128.
20. *Picard E.* Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives // Journal des Mathématiques Pures et Appliquées, 4e serrie. 1890. V. 6. P. 145–210.
21. *Granas A.* Fixed point theory. N.-Y.: Springer, 2003. 707 p.
22. *De Pascalis R., Destrade M., Saccomandi G.* The stress field in a pulled cork and some subtle points in the semi-inverse method of nonlinear elasticity // Proc. R. Soc. A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2007. V. 463 (2087). P. 2945–2959. https://doi.org/10.1098/rspa.2007.0010
23. *De Pascalis R., Rajagopal K. R., Saccomandi G.* Remarks on the use and misuse of the semi–inverse method in the nonlinear theory of elasticity // Q. J. Mech. Appl. Math. 2009. V. 62. № 4. P. 451–464.
24. *Bulgariu E.* On the Saint–Venant's problem in microstretch elasticity // Libertas Mathematica. 2011. V. XXXI. P. 147–162.
25. *Chiriëta S.* Saint–Venant's problem and semi–inverse solutions in linear viscoelasticity // Acta Mech. 1992. V. 94. P. 221–232.
26. *Placidi L., El Dhaba A.R.* Semi-inverse method à la Saint-Venant for two-dimensional linear isotropic homogeneous second-gradient elasticity // Math. Mech. Solids. 2017. V. 22. № 5. P. 919–937. https://doi.org/10.1177/1081286515616043
27. *Зверяев Е.М.* Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 472–481.
28. *Зверяев Е.М.* Непротиворечивая теория оболочек // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 5. С. 590–596.
29. *Зверяев Е.М., Макаров Г.И.* Общий метод построения теорий типа Тимошенко // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 308–321.
30. *Зверяев Е.М., Олехова Л.В.* Сведение трехмерных уравнений НДС пластины из композиционного материала к двумерным на базе принципа сжатых отображений. Препринт № 95, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. М.: ИПМ, 2014. 30 с.
31. *Лиходед А.И., Сидоров В.В.* Некоторые особенности сходимости метода разложения по тонам колебаний применительно к континуальным и конечно-элементным моделям // Космонавтика и ракетостроение. 2013. № 2 (71). С. 20–27.
32. *Лалин В.В., Ле Ты Куанг Чунг.* Расчет строительных конструкций на несколько динамических воздействий со статическим учетом высших форм колебаний // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 3. С. 171–178.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 6, с. 130–138

УДК 539.4

# ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАМИЛЬТОНА–КЭЛИ


Е. В. Мурашкин[a,*], Ю. Н. Радаев[a,**]

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
**e-mail: evmurashkin@gmail.com*
***e-mail: y.radayev@gmail.com*

Поступила в редакцию 21.04.2021 г.
После доработки 24.04.2021 г.
Принята к публикации 26.04.2021 г.

В статье приводятся обобщения понятий векторного и смешанного произведения и указана их связь с фундаментальным ориентирующим скаляром, необходимых для построения алгебраической теории Гамильтона–Кэли в случае пространства произвольной заданной размерности $n$ в псевдотензорном случае. В известных литературных источниках, касающихся механики деформируемого твердого тела, обычно рассматривается случай трехмерного пространства. Проведено доказательство теоремы Гамильтона–Кэли в псевдотензорной формулировке. Вес псевдотензора предполагается целым числом. Примерами здесь служат тензоры микрополярной теории упругости, в частности, гемитропной микрополярной упругости. Обсуждаются уравнения динамики гемитропного микрополярного континуума в терминах псевдотензоров.

*Ключевые слова:* псевдотензор, псевдоаффинор, фундаментальный орентирующий скаляр, косое произведение, инвариант, комитант, микрополярный гемитропный континуум

**DOI:** 10.31857/S0572329921060106

**Вводные замечания.** Модель гемитропной микрополярной теории упругости широко используется при моделировании био-, нано- и метаметриалов, например в механике сотовых конструкций (honeycomb structures), [1–3]. Одной из особенностей гемитропных материалов является существование зеркальных мод при распространении гармонических волн, что объясняется их чувствительностью к изменению ориентации пространства (зеркальным отражениям и инверсиям пространства). Следует отметить, что подавляющее большинство работ, посвященных этим исследованиям, обходят стороной вопросы применения псевдотензоров при описании гемитропных континуумов, несмотря на достаточную проработанность аппарата алгебры псевдотензоров [4–8]. Отметим, что построение определяющего упругого потенциала для гемитропного континуума возможно исключительно при использовании псевдотензорных формулировок, и только после этого возможен корректный переход к абсолютным тензорам и вывод уравнений микрополярной теории. Еще одним существенным аспектом является необходимость согласовывать баланс весов во всех уравнениях теории, особенно при использовании символов перестановок, которые можно трактовать одновременно как псевдотензоры весов $+1$ и $-1$.

Многочисленные руководства по тензорному анализу чаще всего обходят стороной вопросы, связанные с алгеброй псевдотензоров [9]. Ранее, в работах авторов [10–12] обсуждались вопросы применения алгебры псевдотензоров в трехмерном пространстве к задачам механики растущих тел и микрополярной теории упругости. В настоящей работе рассматривается более общий случай $n$-мерного евклидова пространства. Введены понятия фундаментального ориентирующего псевдоскаляра, косого и векторного произведений. Приводится доказательство известной алгебраической теоремы Гамильтона—Кэли в терминах псевдотензоров в $n$-мерном евклидовом пространстве. Следует отметить, что указанная теорема занимает центральное место в теории определяющих уравнений механики. Рассмотрены вопросы применения алгебры псевдотензоров при построении моделей гемитропного микрополярного тела. Определены веса основных тензоров, с которыми приходится сталкиваться в механике гемитропной микрополярной среды, в том числе определяющих псевдоскаляров. Приведены уравнения динамики гемитропного микрополярного континуума в терминах перемещений и микровращений в псевдотензорной формулировке.

**1. Определение и основные формулы алгебры псевдотензоров.** Рассмотрим в $n$-мерном пространстве две системы координат $x^k$ и $\overline{x}^k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Преобразование относительного тензора веса $W$ (псевдотензора веса $W$) от системы координат $x^k$ к новой системе координат $\overline{x}^k$ осуществляется по закону [13, 14]

$$\overline{T}_{ij\ldots k}^{lm\ldots n} = \Delta^W (\partial_p \overline{x}^l)(\partial_q \overline{x}^m) \cdots (\partial_s \overline{x}^n)(\overline{\partial}_i x^a)(\overline{\partial}_j x^b) \cdots (\overline{\partial}_k x^c) T_{ab\ldots c}^{pq\ldots s} \tag{1.1}$$

где

$$\Delta = \det(\overline{\partial}_j x^i), \quad \partial_p = \frac{\partial}{\partial x^p}, \quad \overline{\partial}_p = \frac{\partial}{\partial \overline{x}^p}$$

Здесь черта сверху указывает на значение величины в новой системе координат $\overline{x}^k$ $(k = 1, 2, \ldots n)$, $\Delta$ — якобиан преобразования, $W$ — вес псевдотензора. Отметим, что закон преобразования псевдотензоров отличается от закона преобразования абсолютных тензоров дополнительным множителем $\Delta^W$. $W$ — целое число, так как в противном случае значение $\Delta^W$ не будет однозначным.

Для псевдотензоров справедливы следующие утверждения:

1. Сумма двух псевдотензоров одинаковой валентности и веса будет псевдотензором той же валентности и веса

$$\overset{[W]}{A}{}^{ij}_{\cdot\cdot kl} = \overset{[W]}{B}{}^{ij}_{\cdot\cdot kl} + \overset{[W]}{C}{}^{ij}_{\cdot\cdot kl}$$

2. Тензорное произведение псевдотензоров (возможно, различных валентностей) дает псевдотензор с итоговым весом, равным сумме весов сомножителей

$$\overset{[W_1+W_2]}{A}{}^{ijpqs}_{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot klrtm} = \overset{[W_1]}{B}{}^{ij}_{\cdot\cdot kl} \overset{[W_2]}{C}{}^{pqs}_{\cdot\cdot\cdot rtm}$$

3. Результатом свертки псевдотензора будет псевдотензор того же веса. В том числе, полная свертка псевдотензора веса $W$ будет псевдоскаляром того же веса.

**2. Фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр в $n$-мерном пространстве.** Фундаментальным понятием многомерной геометрии является относительный ковариантный $n$-вектор (антисимметричный псевдотензор валентности $n$ с компонентами $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ [4, 15]) веса $-1$, с единственной существенной компонентой

$$\varepsilon_{12\ldots n} = 1$$

Относительный контравариантный $n$-вектор $\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ задается аналогично, но имеет противоположный вес $+1$. Тензоры $\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ и $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ называются также символами перестановок.

Свертка антисимметричного тензора $e_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ с $n$ абсолютными векторами $\underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \mathbf{a}, \ldots, \underset{n}{\mathbf{a}}$

$$e_{i_1 i_2 \ldots i_n} \underset{1}{a}^{i_1} \underset{2}{a}^{i_2} \ldots \underset{n}{a}^{i_n} \tag{2.1}$$

где $e_{i_1 i_2 \ldots i_n} = e \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, $e = e_{12 \ldots n}$ – псевдоскаляр веса +1, называется косым произведением и обозначается

$$\ulcorner \underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \ldots, \underset{n}{\mathbf{a}} \lrcorner \tag{2.2}$$

При положительном значении косого произведения (2.1) систему $n$ векторов называют правой, а при отрицательном – левой. Косое произведение абсолютных векторов является абсолютным скаляром.

Значение косого произведения (2.1) может быть вычислено в детерминантной форме

$$\ulcorner \underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \ldots, \underset{n}{\mathbf{a}} \lrcorner = e \det(\underset{c}{a}^{i}) = e \begin{vmatrix} \underset{1}{a}^1 & \underset{2}{a}^1 & \ldots & \underset{n}{a}^1 \\ \underset{1}{a}^2 & \underset{2}{a}^2 & \ldots & \underset{n}{a}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underset{1}{a}^n & \underset{2}{a}^n & \ldots & \underset{n}{a}^n \end{vmatrix} \tag{2.3}$$

Если свернуть антисимметричный тензор $e_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ с $(n-1)$ абсолютными векторами $\underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \ldots, \underset{n-1}{\mathbf{a}}$, то получим абсолютный вектор

$$b_i = e_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i} \underset{1}{a}^{i_1} \underset{2}{a}^{i_2} \ldots \underset{n-1}{a}^{i_{n-1}} \tag{2.4}$$

который называется векторным произведением указанных векторов.

При свертке $(n-1)$ абсолютного вектора $\underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \ldots, \underset{n-1}{\mathbf{a}}$ с антисимметричным относительным тензором $\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ получим ковариантный псевдовектор веса $-1$

$$\overset{[-1]}{b_i} = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i} \underset{1}{a}^{i_1} \underset{2}{a}^{i_2} \ldots, \underset{n-1}{a}^{i_{n-1}} \tag{2.5}$$

Косое и векторное произведения связаны соотношением

$$\ulcorner \underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \ldots, \underset{n}{\mathbf{a}} \lrcorner = \left[ \underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \ldots, \underset{n-1}{\mathbf{a}} \right] \cdot \underset{n}{\mathbf{a}} \tag{2.6}$$

Если в качестве системы векторов $\underset{1}{\mathbf{a}}, \underset{2}{\mathbf{a}}, \ldots, \underset{n}{\mathbf{a}}$ принять векторы ковариантного базиса $\underset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \ldots, \underset{n}{\boldsymbol{\imath}}$, в $n$-мерном пространстве, то на основании (4) находим

$$\ulcorner \underset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \ldots, \underset{n}{\boldsymbol{\imath}} \lrcorner = e \tag{2.7}$$

поскольку $\det(\underset{c}{\imath}^{i}) = 1$, что позволяет назвать $e$ фундаментальным ориентирующим псевдоскаляром и разделить правые и левые локальные базисные системы.

Учитывая формулы Лагранжа–Грамма–Шмидта, приходим к

$$e^2 = \lceil \underset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \ldots, \underset{n}{\boldsymbol{\imath}} \rfloor^2 = \begin{vmatrix} \underset{1}{\boldsymbol{\imath}}\cdot\underset{1}{\boldsymbol{\imath}} & \underset{1}{\boldsymbol{\imath}}\cdot\underset{2}{\boldsymbol{\imath}} & \ldots & \underset{1}{\boldsymbol{\imath}}\cdot\underset{n}{\boldsymbol{\imath}} \\ \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}\cdot\underset{1}{\boldsymbol{\imath}} & \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}\cdot\underset{2}{\boldsymbol{\imath}} & \ldots & \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}\cdot\underset{n}{\boldsymbol{\imath}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underset{n}{\boldsymbol{\imath}}\cdot\underset{1}{\boldsymbol{\imath}} & \underset{n}{\boldsymbol{\imath}}\cdot\underset{2}{\boldsymbol{\imath}} & \ldots & \underset{n}{\boldsymbol{\imath}}\cdot\underset{n}{\boldsymbol{\imath}} \end{vmatrix} = \det(g_{ij}) = g \tag{2.8}$$

Откуда следует, что $g$ является псевдоскаляром веса +2, а также $e = \sqrt{g}$ для правоориентированного базиса и $e = -\sqrt{g}$ для левориентированного базиса.

В трехмерном пространстве $e$ определяется смешанным произведением базисных векторов

$$e = \overset{[+1]}{e} = \lceil \underset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{3}{\boldsymbol{\imath}} \rfloor = (\underset{1}{\boldsymbol{\imath}} \cdot \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}) \cdot \underset{3}{\boldsymbol{\imath}} \tag{2.9}$$

а фундаментального ориентирующего псевдоскаляра отрицательного веса −1 есть

$$\frac{1}{e} = \overset{[-1]^{-1}}{e} = \lceil \overset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \overset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \overset{3}{\boldsymbol{\imath}} \rfloor = (\overset{1}{\boldsymbol{\imath}} \cdot \overset{2}{\boldsymbol{\imath}}) \cdot \overset{3}{\boldsymbol{\imath}} \tag{2.10}$$

Отметим, что фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр позволяет легко преобразовывать псевдотензоры в абсолютные тензоры. Введем тензор $\mathbf{T}$ согласно

$$\mathbf{T} = e^{-W} \overset{[W]}{\mathbf{T}} \tag{2.11}$$

Подсчитывая баланс весов, приходим к заключению о том, что $\mathbf{T}$ является абсолютным тензором, а соотношение (2.11) позволяет легко преобразовать полином Гамильтона—Кэли к псевдотензорной форме [11].

**3. Уравнение Гамильтона—Кэли для псевдотензора второго ранга.** Рассмотрим псевдотензор второй валентности (псевдоаффинор), заданный своими смешанными компонентами $\overset{[W]}{T}{}^{j\cdot}_{\cdot k}$ $(j, k = \overline{1, n})$, веса $W$ в $n$-мерном пространстве. Простейшим псевдоинвариантом веса [W] псевдоаффинора $\overset{[W]}{T}{}^{j\cdot}_{\cdot k}$ является его псевдослед (имеющий вес $W$)

$$\underset{1}{\overset{[W]}{S}} = \operatorname{tr} \overset{[W]}{\mathbf{T}} = \overset{[W]}{T}{}^{j\cdot}_{\cdot j} \tag{3.1}$$

С помощью псевдоследов степеней $\overset{[W]}{T}{}^{j\cdot}_{\cdot k}$ можно определить систему псевдоинвариантов псевдоаффинора $\overset{[W]}{T}{}^{j\cdot}_{\cdot k}$:

$$\underset{k}{\overset{[kW]}{S}} = \operatorname{tr} \overset{[kW]}{\mathbf{T}}{}^{k} = \overset{[W]}{T}{}^{j_1\cdot}_{\cdot j_2} \overset{[W]}{T}{}^{j_2\cdot}_{\cdot j_3} \cdots \overset{[W]}{T}{}^{j_{k-1}\cdot}_{\cdot j_k} \overset{[W]}{T}{}^{j_k\cdot}_{\cdot j_1} \quad (k = 2, 3, 4, \ldots, n) \tag{3.2}$$

Другой системой псевдоинвариантов будет

$$\underset{1}{\overset{[W]}{\mathrm{I}}} = \overset{[W]}{T}{}^{j\cdot}_{\cdot j} = \operatorname{tr} \overset{[W]}{\mathbf{T}}, \quad k! \underset{k}{\overset{[kW]}{\mathrm{I}}} = \overset{[W]}{T}{}^{i_1\cdot}_{\cdot[i_1} \overset{[W]}{T}{}^{i_2\cdot}_{\cdot i_2} \cdots \overset{[W]}{T}{}^{i_1}_{\cdot i_k]} \quad (k = 2, 3, 4, \ldots, n) \tag{3.3}$$

Здесь в квадратные скобки заключены индексы по которым выполняется операция альтернирования:

$$k!\overset{[kW]}{\underset{k}{\mathrm{I}}} = \overset{[W]}{T}{}^{i_1\cdot}_{\cdot[i_1}\overset{[W]}{T}{}^{i_2\cdot}_{\cdot i_2}\cdots\overset{[W]}{T}{}^{i_k\cdot}_{\cdot i_k]} = \boldsymbol{\delta}^{i_1i_2\ldots i_k}_{j_1j_2\ldots j_k}\overset{[W]}{T}{}^{j_1\cdot}_{\cdot i_1}\overset{[W]}{T}{}^{j_2\cdot}_{\cdot i_2}\cdots\overset{[W]}{T}{}^{j_k\cdot}_{\cdot i_k} \tag{3.4}$$

Абсолютный тензор $\boldsymbol{\delta}^{j_1j_2\ldots j_k}_{i_1i_2\ldots i_k}$, называемый обобщенной дельтой Кронекера, определяется в $n$-мерном пространстве для $k \le n$ согласно правилу

$$\boldsymbol{\delta}^{j_1j_2\ldots j_k}_{i_1i_2\ldots i_k} = \begin{cases} +1, & \text{если } j_1j_2\ldots j_k \text{ различные натуральные числа } 1,2,\ldots,n \\ & \text{и если } i_1i_2\ldots i_k \text{ является четной перестановкой } j_1j_2\ldots j_k \\ -1, & \text{если } j_1j_2\ldots j_k \text{ различные натуральные числа } 1,2,\ldots,n \\ & \text{и если } i_1i_2\ldots i_k \text{ является нечетной перестановкой } j_1j_2\ldots j_k \\ 0, & \text{во всех остальных случаях} \end{cases} \tag{3.5}$$

Несложно заметить, что в $n$-мерном пространстве

$$\varepsilon_{i_1i_2\ldots i_n} = \delta^{12\ldots n}_{i_1i_2\ldots i_n}, \quad \varepsilon_{i_1i_2\ldots i_n}\varepsilon^{j_1j_2\ldots j_n} = \delta^{j_1j_2\ldots j_n}_{i_1i_2\ldots i_n}, \quad \delta^{j_1j_2\ldots j_m}_{i_1i_2\ldots i_m} = 0 \quad (m > n). \tag{3.6}$$

Псевдоинварианты $\overset{[kW]}{\underset{k}{\mathrm{I}}}$ являются полиномами от $\overset{[W]}{\underset{1}{S}}, \overset{[W]}{\underset{2}{S}}, \ldots, \overset{[kW]}{\underset{k}{S}}$, причем $\overset{[kW]}{\underset{k}{S}}$ входит в них в первой степени. Верно и обратное утверждение: псевдоинварианты $\overset{[kW]}{\underset{k}{S}}$ определяются полиномиальной зависимостью от $\overset{[kW]}{\underset{k}{S}}$.

Псевдоинвариант $\overset{[2W]}{\underset{2}{\mathrm{I}}}$, определенный формулой (3.4), вычисляется по формуле

$$2\overset{[2W]}{\underset{2}{\mathrm{I}}} = \delta^{i_1i_2}_{j_1j_2}\overset{[W]}{T}{}^{j_1\cdot}_{\cdot i_1}\overset{[W]}{T}{}^{j_2\cdot}_{\cdot i_2} \tag{3.7}$$

и равен сумме слагаемых вида

$$\delta^{i_1i_2}_{j_1j_2}\overset{[W]}{T}{}^{j_1\cdot}_{\cdot i_1}\overset{[W]}{T}{}^{j_2\cdot}_{\cdot i_2} = \overset{[W]}{T}{}^{i_1\cdot}_{\cdot i_1}\overset{[W]}{T}{}^{i_2\cdot}_{\cdot i_2} - \overset{[W]}{T}{}^{i_1\cdot}_{\cdot i_2}\overset{[W]}{T}{}^{i_2\cdot}_{\cdot i_1} \tag{3.8}$$

Суммы пар слагаемых $\delta^{i_1i_2}_{j_1j_2}\overset{[W]}{T}{}^{j_1\cdot}_{\cdot i_1}\overset{[W]}{T}{}^{j_2\cdot}_{\cdot i_2}$ и $\delta^{i_1 2 i_1}_{j_1j_2}\overset{[W]}{T}{}^{j_1\cdot}_{\cdot i_2}\overset{[W]}{T}{}^{j_2\cdot}_{\cdot i_1}$ равны главным минорам определителя $\det(\overset{[W]}{T}{}^{j\cdot}_{\cdot k})$, полученным вычеркиванием всех строк и столбцов кроме строк и столбцов с индексами $j_1$ и $j_2$. Тогда псевдоинвариант $\overset{[2W]}{\underset{2}{\mathrm{I}}}$ равен сумме всех главных миноров второго порядка определителя $\det(\overset{[W]}{T}{}^{j\cdot}_{\cdot k})$.

Аналогично можно показать, что псевдоинвариант $\overset{[kW]}{\underset{k}{\mathrm{I}}}$ равен сумме всех главных миноров $k$-го порядка определителя $\det(\overset{[W]}{T}{}^{j\cdot}_{\cdot i})$. В частности, $\overset{[nW]}{\underset{n}{\mathrm{I}}} = \det(\overset{[W]}{T}{}^{j\cdot}_{\cdot i})$.

Введем комитанты $\overset{[kW]}{\underset{k}{C}}{}^{\cdot i}_{\cdot j}$ псевдоаффинора $\overset{[W]}{T}{}^{i\cdot}_{\cdot j}$, задающиеся согласно формуле [4]

$$\overset{[kW]}{\underset{k}{C}}{}^{i\cdot}_{\cdot j} = \frac{(-1)^k(k+1)}{k!}\delta^{i_1i_2\ldots i_k i}_{j_1j_2\ldots j_k j}\overset{[W]}{T}{}^{j_1\cdot}_{\cdot i_1}\overset{[W]}{T}{}^{j_2\cdot}_{\cdot i_2}\cdots\overset{[W]}{T}{}^{j_k\cdot}_{\cdot i_k} \tag{3.9}$$

Комитанты $\overset{[kW]}{\underset{k}{C}}{}^{i\cdot}_{\cdot j}$ можно выразить через степени аффинора и псевдоинварианты $\overset{[pW]}{\underset{p}{I}}$ $(p \le k)$. Так например, для $\overset{[W]}{\underset{1}{C}}{}^{i\cdot}_{\cdot j}$ получим

$$\overset{[W]}{\underset{1}{C}}{}^{i\cdot}_{\cdot j} = -\overset{[W]}{T}{}^{i_1\cdot}_{\cdot i_1}\,\delta^i_j + \overset{[W]}{T}{}^{i_1\cdot}_{\cdot j}\,\delta^i_{i_1} = \overset{[W]}{T}{}^{i\cdot}_{\cdot j} - \overset{[W]}{T}{}^{i_1\cdot}_{\cdot i_1}\,\delta^i_j \tag{3.10}$$

Воспользуемся формулой

$$\begin{aligned}\overset{[kW]}{\underset{k}{C}}{}^{i\cdot}_{\cdot j} = \frac{(-1)^k}{k!}\Big(&\delta^{i_1 i_2\ldots i_k}_{j_1 j_2\ldots j_k}\,\overset{[W]}{T}{}^{j_1\cdot}_{\cdot i_1}\,\overset{[W]}{T}{}^{j_2\cdot}_{\cdot i_2}\cdots\overset{[W]}{T}{}^{j_k\cdot}_{\cdot i_k}\,\delta^i_j - \\ &-\delta^{i_2 i_3\cdots i_k i}_{j_2 j_3\cdots j_k j_1}\,\overset{[W]}{T}{}^{j_1\cdot}_{\cdot j}\,\overset{[W]}{T}{}^{j_2\cdot}_{\cdot i_2}\,\overset{[W]}{T}\,T^{j_3\cdot}_{\cdot i_3}\cdots\overset{[W]}{T}{}^{j_k\cdot}_{\cdot i_k} - \\ &-\delta^{i_1 i_3\ldots i_k i}_{j_1 j_3\ldots j_k j_2}\,\overset{[W]}{T}{}^{j_2\cdot}_{\cdot j}\,\overset{[W]}{T}{}^{j_1\cdot}_{\cdot i_1}\,\overset{[W]}{T}{}^{j_3\cdot}_{\cdot i_3}\cdots\overset{[W]}{T}{}^{j_k\cdot}_{\cdot i_k} - \\ &-\delta^{i_1 i_2\ldots i_{k-1} i}_{j_1 j_2\ldots j_{k-1} j_k}\,\overset{[W]}{T}{}^{j_1\cdot}_{\cdot i_1}\,\overset{[W]}{T}{}^{j_2\cdot}_{\cdot i_2}\cdots\overset{[W]}{T}{}^{j_{k-1}\cdot}_{\cdot i_{k-1}}\,\overset{[W]}{T}{}^{j_k\cdot}_{\cdot j}\Big)\end{aligned} \tag{3.11}$$

Заметим, что все слагаемые в правой части равенства (3.11), начиная с третьего слагаемого, равны второму слагаемому. Поэтому, равенство (3.11) с учетом определений $\overset{[kW]}{\underset{k}{\mathrm{I}}}$ и $\overset{[(k-1)W]}{\underset{k-1}{C}}{}^{i\cdot}_{\cdot i_1}$ можно записать в виде

$$\overset{[kW]}{\underset{k}{C}}{}^{i\cdot}_{\cdot j} = (-1)^k\,\overset{[kW]}{\underset{k}{\mathrm{I}}}\,\delta^i_j + \overset{[(k-1)W]}{\underset{k-1}{C}}{}^{i\cdot}_{\cdot i_1}\,\overset{[W]}{T}{}^{i_1\cdot}_{\cdot j} \tag{3.12}$$

Продолжая по индукции и вводя прямую тензорную запись, получим

$$\overset{[kW]}{\underset{k}{\mathbf{C}}} = \overset{[W]}{\mathbf{T}}{}^k - \overset{[W]}{\underset{1}{\mathrm{I}}}\,\overset{[W]}{\mathbf{T}}{}^{k-1} + \overset{[2W]}{\underset{2}{\mathrm{I}}}\,\overset{[W]}{\mathbf{T}}{}^{k-2} - \cdots + (-1)^k\,\overset{[kW]}{\underset{k}{\mathrm{I}}}\,\overset{[0]}{\mathbf{I}} \tag{3.13}$$

При $k = n$ правая часть равенства (3.9) содержит операцию альтернирования по $n+1$ индексу и поэтому равна нулю, т.е.

$$\overset{[nW]}{\underset{n}{\mathbf{C}}} = \overset{[nW]}{\mathbf{0}} = \overset{[W]}{\mathbf{T}}{}^n - \overset{[W]}{\underset{1}{\mathrm{I}}}\,\overset{[W]}{\mathbf{T}}{}^{n-1} + \overset{[2W]}{\underset{2}{\mathrm{I}}}\,\overset{[W]}{\mathbf{T}}{}^{n-2} - \cdots + (-1)^n\,\overset{[nW]}{\underset{n}{\mathrm{I}}}\,\overset{[0]}{\mathbf{I}} \tag{3.14}$$

Соотношение (3.14) означает справедливость уравнения Гамильтона–Кэли для псевдотензоров в случае $n$-мерного пространства[1]. Другое доказательство, приведенное в [11] для случая трехмерного евклидова пространства, может быть также обобщено на многомерный случай.

**4. Гемитропное микрополярное тело.** Линейная микрополярная теория гемитропного тела корректно может быть развита только в терминах относительных тензоров. Известные из литературных источников формулировки теории гемитропного микрополярного тела в терминах абсолютных тензоров корректно получаются только из псевдотензорных формулировок [10, 12], но ни в коем случае не наоборот. Приведем в

[1] На самом деле, при выводе уравнения Гамильтона–Кэли нами не использовалось понятие евклидовой метрики пространства, что означает справедливость уравнения (3.14) в случае произвольного $n$-мерного пространства

**Таблица 1.** Основные псевдотензоры микрополярной теории упругости

| Терминологическое обозначение | Корневое символьное обозначение | Вес | Преобразование к абсолютному тензору |
|---|---|---|---|
| метрический тензор | $g_{ij}$ | 0 | |
| фундаментальный тензор | $g^{ij}$ | 0 | |
| детерминант метрического тензора | $g$ | +2 | $\overset{[+2]}{g} = e^2$ |
| тензор перестановок | $\varepsilon^{ijk}$ | +1 | $e^{ijk} = \frac{1}{e}\overset{[+1]}{\varepsilon}{}^{ijk}$ |
| тензор перестановок | $\varepsilon_{ijk}$ | −1 | $e_{ijk} = e\,\overset{[-1]}{\varepsilon}{}_{ijk}$ |
| фундаментальный ориентирующий скаляр | $e$ | +1 | $\overset{[+1]}{e} = e$ |
| фундаментальный ориентирующий скаляр | $\frac{1}{e}$ | −1 | $\overset{[-1]}{e}{}^{-1} = \frac{1}{e}$ |
| естественный элемент объема | $d\tau$ | −1 | $dV = e\,d\overset{[-1]}{\tau}$ |
| инвариантный элемент объема | $dV$ | 0 | |
| набла Гамильтона | $\nabla_i$ | 0 | |
| вектор перемещений | $u^k$ | 0 | |
| ассимметричный тензор деформаций | $\varepsilon_{ij}$ | 0 | |
| тензор малых деформаций | $\varepsilon_{(ij)} = \varepsilon_{ij}$ | 0 | |
| вектор поверхностных сил | $t^k = n_i\sigma^{ik}$ | 0 | |
| тензор силовых напряжений | $\sigma^{ik}$ | 0 | |
| объемные силы | $X^{\mathrm{k}}$ | 0 | |
| упругий потенциал | $\mathcal{U}$ | 0 | |
| плотность | $\rho$ | 0 | |
| вектор поверхностных моментов | $m_k = n_i\mu^{i\cdot}_{\cdot k}$ | −1 | $m_k = e\,\overset{[-1]}{m}{}_k$ |
| тензор моментных напряжений | $\mu^{i\cdot}_{\cdot k}$ | −1 | $\mu^{i\cdot}_{\cdot k} = e\,\overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k}$ |
| ассоциированный вектор моментных напряжений | $\mu^i$ | 0 | |
| ассоциированный вектор силовых напряжений | $\tau_k$ | −1 | $\tau_k = e\,\overset{[-1]}{\tau}{}_k$ |
| объемные моменты | $Y_{\mathrm{k}}$ | −1 | $Y_k = e\,\overset{[-1]}{Y}{}_k$ |
| коэффициент микроинерции | $\mathfrak{I}$ | −2 | $\mathfrak{I} = e^2\,\overset{[-2]}{\mathfrak{I}}$ |

**Таблица 1.** Окончание

| Терминологическое обозначение | Корневое символьное обозначение | Вес | Преобразование к абсолютному тензору |
|---|---|---|---|
| тензор микроповоротов | $\Omega_{ik}$ | 0 | |
| вектор микровращений | $\phi^i$ | +1 | $\phi^i = \frac{1}{e}\overset{[+1]}{\phi}{}^i$ |
| тензор деформации изгиба–кручения | $\kappa_{i\cdot}^{\cdot s}$ | +1 | $\kappa_{i\cdot}^{\cdot s} = \frac{1}{e}\overset{[+1]}{\kappa}{}_{i\cdot}^{\cdot s}$ |
| сопутствующий вектор деформации изгиба–кручения | $\kappa_i$ | 0 | |

табл. 1 основные псевдотензорные величины теории микрополярной упругости с указанием их веса.

Следуя обозначениям, принятым в работах [12, 16], уравнения динамики микрополярного тела можно принять в виде

$$\nabla_i \sigma^{ik} = \rho \partial_{\cdot\cdot} u^k \tag{4.1}$$

$$\nabla_i \overset{[-1]}{\mu}{}^{i\cdot}_{\cdot k} - 2\overset{[-1]}{\tau}{}^{i\cdot}_{\cdot k} = \overset{[-2]}{\Im}\,\partial_{\cdot\cdot}\overset{[+1]}{\varphi}{}^k \tag{4.2}$$

В терминах перемещений и микровращений уравнения динамики (4.2) для гемитропного микрополярного тела в псевдотензоной формулировке можно принять в виде [12, 16]

$$\begin{aligned}
&G[(1 + e^2\overset{[-2]}{c}_1)\nabla^s\nabla_s u^i + (1 - e^2\overset{[-2]}{c}_1 + 2\nu(1-2\nu)^{-1})\nabla^i\nabla_k u^k + \\
&+2\overset{[-2]}{c}_1\varepsilon^{ikl}\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}_l + \overset{[-1]}{L}c_4'\nabla^i\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}{}^k + \overset{[-1]}{L}c_5'\nabla^k\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}{}^i] = \rho\partial^2_{\cdot\cdot}u^i, \\
&G\overset{[-1]}{L}\overset{[-1]}{L}[(1 + e^{-2}\overset{[+2]}{c}_2)\nabla^s\nabla_s\overset{[+1]}{\phi}{}^i + (1 - e^{-2}\overset{[+2]}{c}_2 + 2c_3)\nabla^i\nabla_k\overset{[+1]}{\phi}{}^k + \\
&+\overset{[-1]}{L}{}^{-1}c_4'\nabla^i\nabla^k u_k + \overset{[-1]}{L}{}^{-1}c_5'\nabla^k\nabla_k u^i + \overset{[-1]}{L}{}^{-1}c_6'g^{ik}\varepsilon_{ksl}\nabla^s\overset{[+1]}{\phi}{}^l] - \\
&-2G\overset{[-2]}{c}_1(2\overset{[+1]}{\phi}{}^i - \varepsilon^{isr}\nabla_s u_r) = \rho\overset{[-2]}{\Im}\partial^2_{\cdot\cdot}\overset{[+1]}{\phi}{}^i
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Здесь $G$ – упругий модуль сдвига; $\nu$ – коэффициент Пуассона; $\overset{[-1]}{L}$ – характерная длина микрополярной теории; $\overset{[-2]}{c}_1$, $\overset{[+2]}{c}_2$, $c_3$, $c_4$, $c_5$, $c_6$ – определяющие микрополярные псевдоскаляры. Во втором уравнении существенно используется формула

$$\varepsilon^{isr} = e^2 g^{ij}g^{sk}g^{rl}\varepsilon_{jkl} \tag{4.4}$$

**Заключение.** В статье приведены обобщения понятий векторного и смешанного произведения и указана их связь с фундаментальным ориентирующим скаляром в случае евклидова пространства заданной размерности $n$.

1. Доказательство теоремы Гамильтона–Кэли проведено в терминах псевдотензоров в $n$-мерном пространстве.

2. Обсуждаются возможные применения алгебры псевдотензоров в механике сплошных сред.

3. Приведены веса основных псевдотензорных величин теории гемитропного микрополярного континуума.

4. Приводятся уравнения динамики гемитропного микрополярного континуума в терминах псевдотензоров.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 19-51-60001, № 20-01-00666.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lakes R.* Elastic and viscoelastic behavior of chiral materials // Int. J. Mech. Sci. 2001. V. 43, № 7. P. 1579–1589.
https://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00100-4
2. *Mackay T., Lakhtakia A.* Negatively refracting chiral metamaterials: a review // SPIE Reviews. 2010. V. 1. № 1. P. 1–29.
https://doi.org/10.1117/6.0000003
3. *Tomar S., Khurana A.* Wave propagation in thermo-chiral elastic medium // Appl. Math. Model. 2013. V. 37. № 22. P. 9409–9418.
https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.04.029
4. *Гуревич Г.Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ГИТТЛ, 1948. 408 с.
5. *Схоутен Я.А.* Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965. 456 с.
6. *Сокольников И.С.* Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.
7. *Synge J., Schild A.* Tensor calculus. Toronto: Toronto university press, 1949. V. 5. 334 p.
8. *Truesdell C., Toupin R.* The Classical Field Theories // Principles of Classical Mechanicsand Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie / Ed. by *S. Flügge.* Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1960. P. 226–858.
9. *Кочин И.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Москва: Изд-во Акад. наук, 1951. 427 с.
10. *Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В.* Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82. № 4. С. 399–412.
11. *Murashkin E.V., Radayev Yu.N.* On a micropolar theory of growing solids // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. № 3. С. 424–444.
12. *Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N.* On the Neuber theory of micropolarelasticity. A pseudotensor formulation // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. № 4. С. 752–761.
13. *Veblen O., Thomas T.* Extensions of Relative Tensors // Transactions of the American Mathematical Society. 1924. V. 26. P. 373–377. URL: https://www.jstor.org/stable/1989146.
14. *Веблен О.* Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М.: Изд-во иностранной литературы, 1948. 139 с.
15. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.
16. *Радаев Ю.Н.* Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. С. 504–517. URL: http://mi.mathnet.ru/vsgtu1635.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 6, с. 139–148

*УДК 531.3*

# РЕКОНСТРУКЦИЯ ВРЕМЕННОЙ ЗАВИСИМОСТИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ГРАНИЧНОЙ НАГРУЗКИ, ПРИЛОЖЕННОЙ К ТРЕХМЕРНОМУ ИЗОТРОПНОМУ ЛИНЕЙНО УПРУГОМУ ТЕЛУ

**© 2021 г. И. П. Марков[a,*], Л. А. Игумнов[a,**]**

[a] *Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия*

**e-mail: teanku@gmail.com*

***e-mail: igumnov@mech.unn.ru*

Поступила в редакцию 30.04.2021 г.
После доработки 10.05.2021 г.
Принята к публикации 22.05.2021 г.

Представлена методика идентификации временной зависимости нестационарного граничного воздействия с известным пространственным распределением на трехмерное изотропное упругое тело. Реконструкция нагружения осуществляется в частотной области по зарегистрированному отклику некоторой величины, вызванному действием искомой нагрузки. При этом используются решения построенной специальным образом вспомогательной прямой задачи. Используется численное прямое и обратное преобразование Лапласа. Вспомогательная задача решается методом граничных элементов. Приведены подробные результаты демонстрационного численного примера. Установлено хорошее соответствие полученных решений результатам прямых измерений.

*Ключевые слова:* обратные задачи, идентификация нагрузки, преобразование Лапласа, метод граничных элементов

**DOI:** 10.31857/S0572329921060076

**1. Введение.** Задачи восстановления внешних воздействий на конструктивные элементы и изделия относятся к граничным обратным задачам механики [1] и имеют большое практическое значение. Во многих случаях невозможно провести прямое измерение нагрузок, действующих на элементы конструкции. Среди множества подходов [2] к определению воздействий по косвенным данным, широкое распространение получили методики в частотной области [3–6]. Кроме непосредственного восстановления внешних нагрузок, значительный интерес представляет задача отыскания некоторых других величин в заданных областях конструкции. Например, задача определения по зарегистрированным импульсам деформаций сил, действующих на образец со стороны мерных стержней в системе разрезного стержня Гопкинсона экспериментального исследования процессов динамического деформирования и разрушения материалов. В некоторых случаях (например, при использовании стержней большого диаметра), применение одномерной теории распространения упругих волн в стержнях без специализированной процедуры корректировки упругих импульсов приводит к неверному определению деформации образца.

В настоящей работе изложена оригинальная методика восстановления временной истории граничного нагружения с заданным пространственным распределением по известному отклику какой-либо величины, обусловленному действием искомого нагружения. Предложенную методику можно отнести к классу методов идентификации в частотной области. Суть комплексного подхода заключается в решении вспомогательной прямой задачи в изображениях Лапласа с априорно известными граничными условиями и использовании полученных решений для приближенного определения искомой нестационарной нагрузки. Вспомогательная задача решается методом граничных элементов. Представленная методика применима для трехмерных тел сложной формы. Для рассматриваемой изотропной линейно упругой модели материала, метод граничных элементов представляет мощное, универсальное и высокоточное средство инженерного анализа. В известных исследованиях, посвященных вопросам решения обратных задач и восстановления граничных нестационарных воздействий метод граничных элементов используется довольно редко.

**2. Прямое и обратное численное преобразование Лапласа.** В изложенной в следующем пункте методике восстановления временной зависимости используется как прямое, так и обратное численное преобразование Лапласа.

Для функции $f(t)$ такой, что $f(t) = 0$ для $t < 0$, прямое преобразование Лапласа и его обращение задается следующими соотношениями

$$\bar{f}(s) = \mathrm{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt, \quad s = \alpha + i\omega \tag{2.1}$$

$$f(t) = \mathrm{L}^{-1}\{\bar{f}(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{st}\bar{f}(s)\,ds \tag{2.2}$$

где $s$ это комплексная частота, параметр преобразования Лапласа.

Пусть известны значения $f_i$ функции $f(t)$ в некоторых точках по времени $t_i \geq 0$, $i = \overline{1, \mathrm{N}}$. Это могут быть, например, результаты экспериментальных измерений. Тогда, подразумевая линейное изменение функции $f(t)$ между любыми двумя соседними значениями, прямое преобразование Лапласа можно вычислить как:

$$\bar{f}(s) \approx \frac{f_{\mathrm{N}} e^{-st_{\mathrm{N}}}}{s} + \frac{1}{s^2}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}-1}\left(\left(f_i s + \frac{f_{i+1} - f_i}{t_{i+1} - t_i}\right)e^{-st_i} - \left(f_{i+1}s + \frac{f_{i+1} - f_i}{t_{i+1} - t_i}\right)e^{-st_{i+1}}\right) \tag{2.3}$$

здесь предполагается, что функция $f(t)$ доопределена значением $f(t) \equiv f_{\mathrm{N}}$ для $t > t_{\mathrm{N}}$.

Для численного обращение преобразования Лапласа используется метод Дурбина [7]. Выражение (2.2) можно представить в эквивалентном виде

$$f(t) = \frac{e^{\alpha t}}{\pi}\int_0^{+\infty}[\mathrm{Re}(\bar{f}(\alpha + i\omega))\cos(\omega t) - \mathrm{Im}(\bar{f}(\alpha + i\omega))\sin(\omega t)]d\omega \tag{2.4}$$

Метод Дурбина состоит в аппроксимации (2.4) следующим образом

$$\begin{gathered} f(t) \approx \frac{e^{\alpha t}}{T}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\bar{f}(\alpha)) + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\mathrm{N_{sum}}}\left\{\mathrm{Re}\left(\bar{f}\left(\alpha + i\frac{k\pi}{T}\right)\right)\cos\left(\frac{k\pi}{T}t\right) - \mathrm{Im}\left(\bar{f}\left(\alpha + i\frac{k\pi}{T}\right)\right)\sin\left(\frac{k\pi}{T}t\right)\right\}\right] \end{gathered} \tag{2.5}$$

где $0 < t < 2T$, $N_{\mathrm{sum}}$ задает количество комплексных частот.

**3. Методика восстановления временной зависимости нестационарной нагрузки.** Рассматривается трехмерное изотропное линейно упругое тело $\Omega \in R^3$ с граничной поверхностью $\Gamma = \partial\Omega$. Предполагается отсутствие массовых сил. Запишем систему уравнений для перемещений при нулевых начальных условиях

$$C_{ijkl}u_{k,lj}(\mathbf{x}, t) - \rho\ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad i, j, k, l = \overline{1, 3} \tag{3.1}$$

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

где $\rho$ — это плотность, $\lambda$ и $\mu$ — параметры Ламе материала, $u_i(\mathbf{x},t)$ — компоненты вектора перемещений.

Система уравнений (3.1) дополняется граничными условиями следующего вида — временные зависимости всех *ненулевых* компонент векторов перемещений и поверхностных усилий задаются одной и той же скалярной функцией времени $P(t)$, определяющей приложенное нестационарное воздействие:

$$u_i(\mathbf{x},t) = P(t) \quad \text{или} \quad u_i(\mathbf{x},t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^u \tag{3.2}$$

$$t_i(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}C_{ijkl}\left(\bar{u}_{k,l}(\mathbf{x},t) + \bar{u}_{l,k}(\mathbf{x},t)\right)n_j(\mathbf{x}) = P(t) \quad \text{или} \quad t_i(\mathbf{x},t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^t \tag{3.3}$$

где $n_k$ — это единичная внешняя нормаль к границе $\Gamma$, $t_i(\mathbf{x},t)$ — компоненты вектора поверхностных усилий.

Постановку задачи сформулируем следующим образом: пусть известно решение $u_i^0(\mathbf{x}^0,t)$ в некоторой точке $\mathbf{x}^0 \in \Omega$ задачи (3.1)—(3.3) — непрерывное или дискретное на заданном наборе временных точек, и известно геометрическое распределение граничных условий вида (3.2), (3.3). Необходимо отыскать функцию $P(t)$.

Запишем задачу (3.1)—(3.3) в изображениях Лапласа

$$C_{ijkl}\bar{u}_{k,lj}(\mathbf{x},s) - \rho s^2\bar{u}_i(\mathbf{x},s) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \tag{3.4}$$

$$\bar{u}_i(\mathbf{x},s) = \bar{P}(s) \quad \text{или} \quad \bar{u}_i(\mathbf{x},s) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^u \tag{3.5}$$

$$\bar{t}_i(\mathbf{x},s) = \frac{1}{2}C_{ijkl}\left(\bar{u}_{k,l}(\mathbf{x},s) + \bar{u}_{l,k}(\mathbf{x},s)\right)n_j(\mathbf{x}) = \bar{P}(s) \quad \text{или} \quad \bar{t}_i(\mathbf{x},s) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^t \tag{3.6}$$

Сделаем в (3.4)—(3.6) замену

$$\bar{u}_i(\mathbf{x},s) = \frac{\bar{u}_i^*(\mathbf{x},s)\bar{P}(s)}{\bar{G}(s)} \tag{3.7}$$

где $\bar{G}(s)$ — некоторая известная в изображениях Лапласа функция. Тогда возникает следующая вспомогательная задача

$$C_{ijkl}\bar{u}^*_{k,lj}(\mathbf{x},s) - \rho s^2\bar{u}_i^*(\mathbf{x},s) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \tag{3.8}$$

$$\bar{u}_i^*(\mathbf{x},s) = \bar{G}(s) \quad \text{или} \quad \bar{u}_i^*(\mathbf{x},s) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^u \tag{3.9}$$

$$\bar{t}_i^*(\mathbf{x},s) = \frac{1}{2}C_{ijkl}(\bar{u}^*_{k,l}(\mathbf{x},s) + \bar{u}^*_{l,k}(\mathbf{x},s))n_j(\mathbf{x}) = \bar{G}(s) \quad \text{или} \quad \bar{t}_i^*(\mathbf{x},s) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma^t \tag{3.10}$$

После решения вспомогательной задачи (3.8)—(3.10) относительно $\bar{u}_i^*(\mathbf{x},s)$ из (3.7) немедленно следует

$$\bar{P}(s) \approx \hat{\bar{P}}(s) = \frac{\bar{u}_i^0(\mathbf{x}^0,s)\bar{G}(s)}{\bar{u}_i^*(\mathbf{x}^0,s)} \tag{3.11}$$

где введено новое обозначение $\hat{\bar{P}}(s)$ для приближенного выражения искомой зависимости $\bar{P}(s)$, так как решение задачи (3.8)—(3.10) редко удается найти в замкнутом аналитическом виде. В настоящей работе, для численного решения вспомогательной задачи (3.8)—(3.10) используется метод граничных элементов в преобразованиях Лапласа. Кроме того, известное решение $u_i^0(\mathbf{x}^0,t)$ также чаще будет задано в дискретном виде и построение изображений $\bar{u}_i^0(\mathbf{x}^0, s)$ возможно только численно, например, по формуле (2.3).

После определения $\hat{\bar{P}}(s)$, восстановление временной зависимости $P(t) \approx \hat{P}(t)$ возможно с помощью какого-либо метода численного обращения преобразования Лапласа. В данной работе используется формула (2.5) метода Дурбина.

*3.1. Гранично-элементная схема.* В настоящей работе для решения вспомогательной задачи (3.8)–(3.10) используется метод граничных элементов в изображениях Лапласа, подробно изложенный в монографии [8]. В основе лежат граничные интегральные уравнения (ГИУ) прямого подхода для перемещений, регуляризованные статической частью сингулярных решений:

$$\int_{\Gamma} [\bar{u}_k^*(\mathbf{y}, s)\bar{T}_{jk}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, s) - \bar{u}_k^*(\mathbf{x}, s)T_{jk}^S(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - \bar{t}_k^*(\mathbf{y}, s)\bar{U}_{jk}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, s)]d\Gamma(\mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma$$

где $\bar{U}_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, s)$ и $\bar{T}_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, s)$ – это изображения по Лапласу трехмерных фундаментальных и сингулярных решений линейной изотропной теории упругости [8, 9], $T_{jk}^S(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ – это сингулярная (статическая) часть $\bar{T}_{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, s)$.

Для пространственной дискретизации приведенных слабосингулярных ГИУ используются прямоугольные граничные элементы с квадратичными функциями формы для интерполяции геометрии границы. Применяется смешанное представление граничных полей на элементах. Перемещения аппроксимируются линейными функциями, а поверхностные усилия – постоянными. Это позволяет сохранить непрерывность перемещений и одновременно корректно моделировать разрывные поверхностные усилия. Дискретный аналог ГИУ строится с помощью метода коллокаций. В качестве точек коллокации выбираются точки аппроксимации неизвестных граничных функций. Для заданного значения комплексной частоты $s$ формируется комплексно-значная разрешающая системы линейных алгебраических уравнений вида

$$\mathbf{A}(s)\mathbf{p}(s) = \mathbf{b}(s)$$

где $\mathbf{A}(s) \in \mathrm{C}^{\mathrm{N_{dof}} \cdot \mathrm{N_{dof}}}$ – это полностью заполненная несимметричная матрица, $\mathbf{p} \in \mathrm{C}^{\mathrm{N_{dof}} \cdot 1}$ – это вектор неизвестных граничных функций, элементы вектора $\mathbf{b} \in \mathrm{C}^{\mathrm{N_{dof}} \cdot 1}$ это линейные комбинации интегралов от ядер ГИУ, соответствующие заданным граничным условиям, $\mathrm{N_{dof}}$ – это общее число степеней свободы.

**4. Численный пример.** В качестве демонстрационного примера рассматривается задача о восстановлении нестационарной нагрузки, действующей на торец призматического тела. Схема задачи приведена на рис. 1, размеры тела заданы как $h = 0.1$ м, $w = 0.1$ м, $l = 0.5$ м, точка О находится в начале координат. На одном торце тело жестко закреплено: $u_1(t) = u_2(t) = u_3(t) = 0$, на противоположном торце заданы сжимающие поверхностные усилия $t_1(t) = t_2(t) = 0$, $t_3(t) = -P(t)$. Остальная поверхность тела свободна от усилий. Материал тела является изотропным упругим с модулем Юнга $\mathrm{E} = 7 \times 10^{10}$ Па, коэффициентом Пуассона $\nu = 0.33$ и плотностью $\rho = 2650$ кг/м$^3$.

Отыскание временной зависимости $P(t)$ производится с помощью изложенной выше методики по известной функции перемещений $u_3(t)$ в точке $\mathrm{A}(0.05, 0.0, 0.4)$ м, расположенной на боковой грани тела. Рассмотрено два варианта функции $P(t)$: $P_1(t)$ и $P_2(t)$, изображенных на рис. 2. Перемещения $u_3(t)$ в точке А получены численным решением задачи методом конечных элементов. Отметим, что указанные нагрузки $P_1(t)$ и $P_2(t)$ дают на заданном временном интервале $0 \le t \le 0.0003$ с в рассматриваемой точке очень близкие отклики перемещений, приведенные на рис. 3 и обозначен-

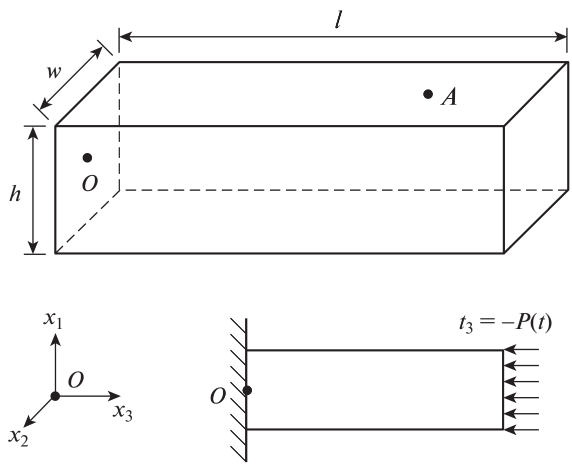


**Рис. 1.** Схема задачи о действии нагрузки на жестко закрепленное призматическое тело

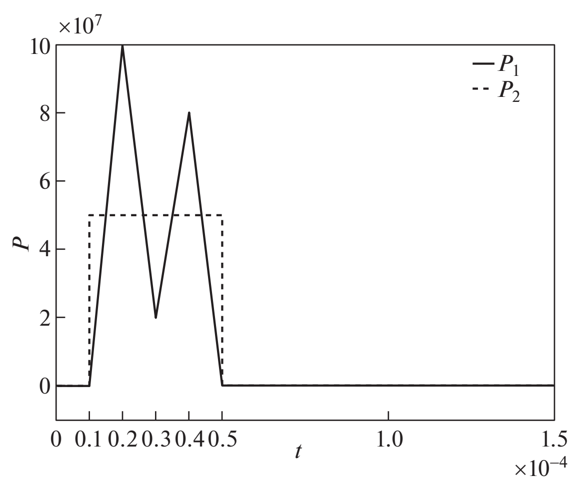


**Рис. 2.** Временные зависимости двух вариантов нестационарной нагрузки, приложенной к телу

ные как $g_3^1(t)$ и $g_3^2(t)$, соответственно. Конечно-элементный анализ проводился в системе ANSYS. Использовалась равномерная сетка из восьмиузловых кубических элементов SOLID185 с разбиением $10 \times 10 \times 50$ элементов по $h$, $w$ и $l$, соответственно. Количество шагов по времени до момента 0.0003 с составило 200.

Методом граничных элементов вспомогательная задача решалась в преобразованиях Лапласа для нагрузки $\overline{t}_3(s) = \overline{G}(s) \equiv -1$, что во временной области соответствует импульсной нагрузке в виде дельта-функции Дирака $t_3(t) = -\delta(t)$.

Дискретный набор комплексных частот $\{s_j\}$, на которых методом граничных элементов решалась вспомогательная задача и которые использовались для получения

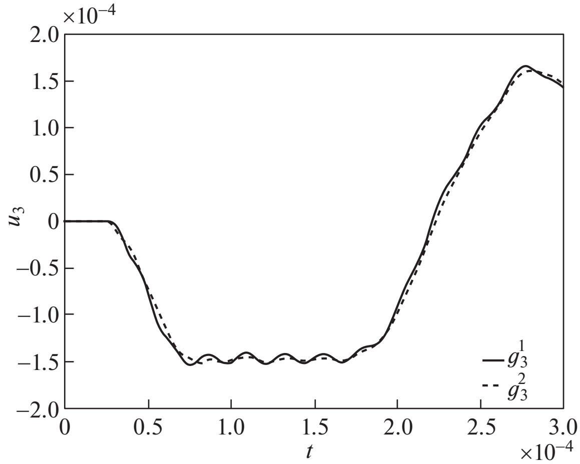


**Рис. 3.** Конечно-элементные решения для перемещений $u_3(t)$, обозначенные через $g_3^1(t)$ и $g_3^2(t)$ для нагрузок $P_1(t)$ и $P_2(t)$

изображений $\bar{g}_3^k(s_j)$, определялся по формулам [10] для метода Дурбина численного обращения преобразования Лапласа

$$s_j = \frac{\alpha + i\omega_j}{t_{\max}} = \frac{\alpha + ij\pi/T^*}{t_{\max}}, \quad j = \overline{0, \mathrm{N}_{\mathrm{sum}}}, \quad \alpha = \frac{\varkappa \ln 10}{T^*} \tag{4.1}$$

$$\omega_{\max} = 300.0, \quad \varkappa = 2.0, \quad t_{\max} = 0.0003 \text{ с}, \quad T^* = 2.5, \quad \mathrm{N}_{\mathrm{sum}} = \left\lfloor \frac{\omega_{\max} T^*}{\pi} \right\rfloor = 238, \tag{4.2}$$

где $\lfloor\ \rfloor$ обозначает целую часть вещественного числа.

После гранично-элементного решения вспомогательной задачи на заданном наборе частот $\{s_j\}$, приближенные значения искомой функции в изображениях могут быть определены согласно выражению (3.11) как

$$\hat{\bar{P}}_k(s_j) = \frac{\bar{g}_3^k(s_j)}{\bar{u}_3(s_j)}, \quad k = \overline{1, 2}, \quad j = \overline{0, \mathrm{N}_{\mathrm{sum}}} \tag{4.3}$$

где через $k$ обозначен вариант нагрузки (см. рис. 2), $\bar{g}_3^k(s_j)$ – это изображения откликов перемещений в точке A, полученные применением численного прямого преобразования Лапласа (2.3) к известным конечно-элементным решениям $g_3^k(t)$, $\bar{u}_3(s_j)$ – это гранично-элементные решения вспомогательной задачи в изображениях в точке A.

Временные зависимости нагрузок вычислены методом Дурбина по изображениям, полученным в (4.3). Для проверки чувствительности методики восстановления нагрузки к степени гранично-элементной дискретизации решение задачи получено на четырех гранично-элементных сетках. Сетки, обозначаемые далее надстрочными индексами "1", "2", "3" и "4" имеют разбиение 6 × 6 × 30, 8 × 8 × 40, 10 × 10 × 40 и 12 × 12 × 60 элементов по $h$, $w$ и $l$, соответственно. На рис. 4 приведены восстановленные временные зависимости нагрузок $\hat{P}_1^1(t)$, $\hat{P}_1^2(t)$, $\hat{P}_1^3(t)$ и $\hat{P}_1^4(t)$ на четырех гранично-элементных сетках для нагрузки $P_1(t)$. Решения, полученные даже на сетке "1" с самым малым

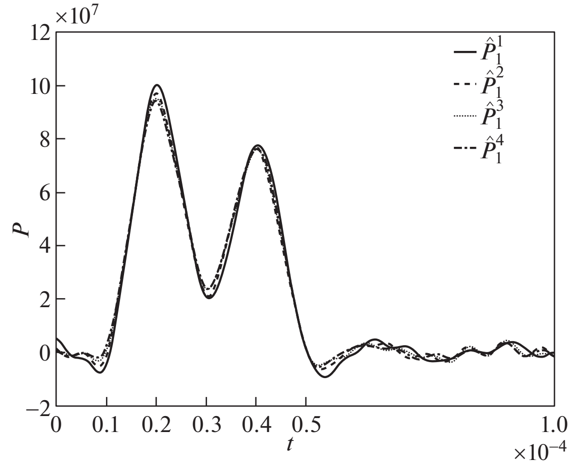


**Рис. 4.** Восстановленные временные зависимости нагрузок $\hat{P}_1^1(t)$, $\hat{P}_1^2(t)$, $\hat{P}_1^3(t)$ и $\hat{P}_1^4(t)$ на четырех гранично-элементных сетках для нагрузки $P_1(t)$

числом элементов, в достаточной степени отражают основные характеристики исходной функции.

В частотном гранично-элементном анализе для уменьшения нежелательных колебаний, возникающих при последующем обращении во временную область из-за отсечения высокочастотной части спектра, часто используются оконные фильтры при постпроцессорной обработке результатов в изображениях. Перед численным обращением во временную область, отклик в изображениях умножается на подходящую оконную функцию в изображениях. Рассмотрено применение фильтра Блэкмана [11, 12]

$$W^{\mathrm{B}}(\omega_j) = 0.42 + 0.5\cos\left(\frac{\pi\omega_j}{\omega_{\max}}\right) + 0.08\cos\left(\frac{2\pi\omega_j}{\omega_{\max}}\right), \quad j = \overline{0, \mathrm{N}_{\mathrm{sum}}} \tag{4.4}$$

Сравнение временных зависимостей, полученных с применением оконной функции (4.4) и без нее, приведено для нагрузок $P_1(t)$ и $P_2(t)$ на рис. 5 и рис. 6, соответственно. На указанных рисунках через $\hat{P}_k^{4\mathrm{B}}(t)$ обозначена восстановленная $k$-я нагрузка с использованием гранично-элементного решения на сетке “4” и с применением фильтра Блэкмана, через $\hat{P}_k^4(t)$ – без фильтра. По результатам подтверждается общее наблюдение: для кусочно-гладких функций с изломами применение оконных фильтров может приводить к чрезмерному сглаживанию в окрестности угловых точек и, следовательно, к некорректному определению амплитуды, но для функций с разрывами типа «скачок» этого не происходит.

Интерес часто представляет не восстановленная нагрузка сама по себе, а отклики в других точках тела. В таких случаях изложенная методика позволяет получить результаты используя уже полученные гранично-элементные решения вспомогательной задачи. Для этого, по аналогии с формулой (3.7), гранично-элементные решения вспомогательной задачи в изображениях для искомой величины умножаются на отношение $\hat{\bar{P}}(s)\big/\bar{G}(s)$. После этого, временные зависимости вычисляются обращением полученных результатов в изображениях. В демонстрационном примере рассмотрено применение такой схемы для отыскания поверхностных усилий $t_3(t)$ в точке O(0, 0, 0) м, рас-

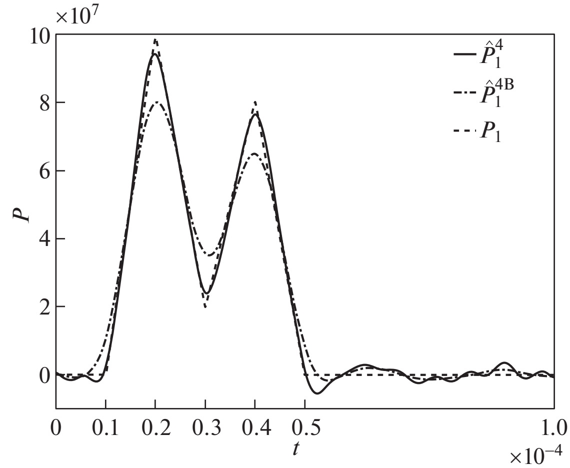


**Рис. 5.** Сравнение восстановленных временных зависимостей нагрузок $\hat{P}_1^4(t)$ и $\hat{P}_1^{4B}(t)$ с исходной функцией $P_1(t)$

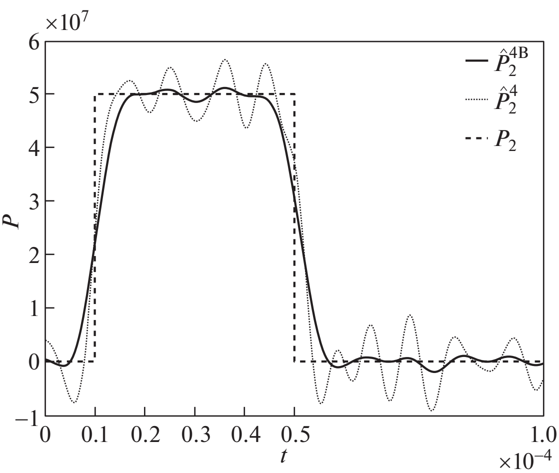


**Рис. 6.** Сравнение восстановленных временных зависимостей нагрузок $\hat{P}_2^4(t)$ и $\hat{P}_2^{4B}(t)$ с исходной функцией $P_2(t)$

положенной в центре закрепленного торца. Для обоих вариантов нагрузки использовалось гранично-элементное решение, полученное на сетке “4”. На рис. 7 приведено сравнение гранично-элементного решения $\hat{t}_3^1(t)$, полученного для восстановленной нагрузки $\hat{\bar{P}}_1^4(s)$, и конечно-элементного решения $t_3^1(t)$ для исходной нагрузки $P_1(t)$. На рис. 8 приведены результаты для исходной нагрузки $P_2(t)$, а также к сравнению добавлено решение $\hat{t}_3^{2B}(t)$, полученное с применением фильтра Блэкмана. Полученные

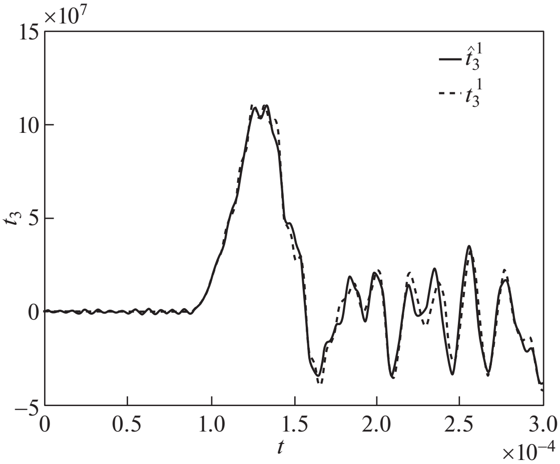


**Рис. 7.** Сравнение гранично-элементного решения $\hat{t}_3^1(t)$, полученного для восстановленной нагрузки $\hat{\bar{P}}_1^4(s)$, и конечно-элементного решения $t_3^1(t)$ для исходной нагрузки $P_1(t)$

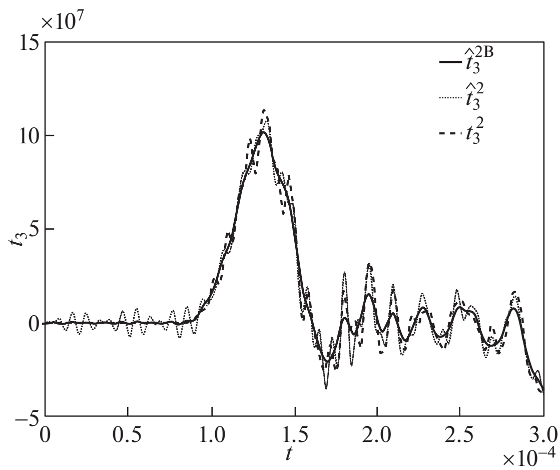


**Рис. 8.** Сравнение гранично-элементных решений $\hat{t}_3^{2\text{В}}(t)$ и $\hat{t}_3^2(t)$, полученных для восстановленной нагрузки $\hat{\bar{P}}_2^4(s)$, и конечно-элементного решения $t_3^2(t)$ для исходной нагрузки $P_2(t)$

результаты свидетельствуют, что по одной зарегистрированной в одной точке величине $g_3^k(t)$ представленная методика позволила идентифицировать отклики другой величины в другой точке с очень хорошим соответствием прямым конечно-элементным решениям как по амплитуде, там и по характеру изменения во времени.

**5. Заключение.** В настоящей работе изложена простая методика восстановления временной зависимости поверхностной нестационарной нагрузки с заданным пространственным распределением по известным решениям или экспериментальным данным регистрируемой величины. Методика основывается на решении вспомогательной задачи с нагрузкой какого-либо известного вида методом граничных элементов в преобразованиях Лапласа и использовании полученного решения для определения отклика искомой функции в изображениях. Последующее получение зависимости во временной области проводится численным методом обращения преобразования Лапласа. Область применения представленной методики ограничена случаями, когда задаваемые граничные условия изменяются во времени по одному закону с искомыми функциями, либо являются нулевыми. К достоинствам следует отнести простоту методики и возможность использования одного и того же решения вспомогательной задачи для восстановления нагрузки по различным данным. Кроме того, изложенная методика позволяет не только восстановить нагрузку, но и немедленно получить решения задачи в изображениях в других точках тела с учетом действия восстановленной нагрузки, без необходимости обращения во временную область или повторного решения задачи.

Методика представлена для трехмерных линейных изотропных упругих тел и может быть естественным образом расширена на другие линейные теории, задачи в рамках которых можно решать методом граничных элементов: вязкоупругость, анизотропная упругость, пороупругость, электроупругость и т.д.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 0729-2020-0054).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ватульян А.О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
2. *Martin M.T., Doyle J.F.* Impact force identification from wave propagation responses // Int. J. Impact Eng. 1996. V. 18. P. 65–77.
3. *Lee S.-K., Banerjee S., Mal A.* Identification of impact force on a thick plate based on the elastodynamic and higher-order time-frequency analysis // Proc. Inst. Mech. Eng. Part C J. Mech. Eng. Sci. 2007. v. 221. № 6. P. 1249–1263.
4. *Boukria Z., Perrotin P., Bennani A.* Experimental impact force location and identification using inverse problems: Application for a circular plate // Int. J. Mech. 2011. V. 5. № 1. P. 48–55.
5. *Gombi S.L., Ramakrishna D.S.* A solution to the inverse problem of impact force determination from structural responses // Int. J. Eng. Inn. Techn. 2012. V. 1. № 3. P. 192–196.
6. *Lage Y.E., Maia N.M.M., Neves M.M., Ribeiro A.M.R.* Force identification using the concept of displacement transmissibility // J. Sound Vib. 2013. V. 332. № 7. P. 1674–1686.
7. *Durbin F.* Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method // Comput. J. 1974. V. 17. № 4. P. 371–376.
8. *Баженов В.Г., Игумнов Л.А.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
9. *Gaul L., Kogl M., Wagner M.* Boundary Element Methods for Engineers and Scientists. Berlin: Springer, 2003. 488 c.
10. *Crump K.S.* Numerical Inversion of Laplace Transforms Using a Fourier Series Approximation // J. ACM 1976. V. 23. № 1. P. 89–96.
11. *Gomez Zamorano P., Uribe Campos F.A.* On the Application of the numerical Laplace transform for accurate electromagnetic transient analysis // Rev. Mex. Fis. Mexico 2007. V. 53. № 3. P. 198–204.
12. *Schanz M., Ye W., Xiao J.* Comparison of the convolution quadrature method and enhanced inverse FFT with application in elastodynamic boundary element method // Comput. Mech. 2016. V. 57. № 4. P. 523–536.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 6, с. 149–155

*УДК 539.3*

# ОЦЕНКА УЧЕТА МОМЕНТНЫХ СВОЙСТВ СРЕДЫ НА ПРИМЕРЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ

**© 2021 г. Д. В. Тарлаковский[a,b,*], Нгуен Ван Лам[a,**]**

[a] *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия*

[b] *НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

**e-mail: tdvhome@mail.ru*

***e-mail: nvlammai2019@gmail.com*

Поступила в редакцию 28.02.2021 г.
После доработки 28.02.2021 г.
Принята к публикации 04.03.2021 г.

Дана оценка учета моментных свойств среды на примере нестационарной осесимметричной задачи о распространении возмущений от сферической полости в среде Коссера. С этой целью для перемещений и угла поворота выделяется упругие составляющие этих полей. Используются разложения искомых функций в ряды по полиномам Лежандра и Гегенбауэра, преобразование Лапласа по времени, а также метод малого параметра, в качестве которого используется коэффициент, характеризующий связь перемещений и угол поворота. Оригиналы регулярных составляющих решения вычисляются с помощью вычетов в линейном приближении по малому параметру. Приведены примеры расчетов для материала в виде зернистого композита из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице. Показано, что количественные отличия практически отсутствуют, а качественно процессы в моментной и классической упругой среде существенно отличаются.

*Ключевые слова:* среда Коссера, сферическая полость, нестационарные осесимметричные возмущения, сравнение с упругим решением

**DOI:** 10.31857/S0572329921060143

**1. Введение.** С развитием современной науки и техники требуется исследование динамических процессов в композиционных материалах, которые широко применяются в различных конструкциях объектов, требуется использование моделей сплошных сред, отличных от традиционных. Таковыми являются упругие моментные среды, к которым, в том числе, относится модель Коссера [1].

Число работ, посвященных задачам нестационарной моментной теории упругости со сферической полостью, крайне ограничено. К ним относятся, например, работы [2–10]. В [2, 3] исследованы задачи о действии нестационарных осесимметричных кинематических возмущений на сферическую полость в среде Коссера. Аналогичные вопросы для упрощенной модели псевдоконтинуума Коссера рассмотрены в работах [4, 5]. В [6] дано исследование динамической связанной осесимметричной задачи микрополярной теории упругости для бесконечной в радиальном направлении изотропной среды. В статьях [7, 8] построены решения двумерных нестационарных задач для упругих моментных полупространства и полуплоскости. Осесимметричные задачи для упругих тел с несимметричным тензором напряжений со сферическими границами исследованы в работах [9, 10].

В то же время оценка учета моментных свойств среды фактически отсутствует. Этот вопрос и рассматривается в данной работе на примере задачи о распространении нестационарных осесимметричных возмущений от сферической полости в пространстве, занятом средой Коссера.

**2. Постановка задачи.** В пространстве, занятом средой Коссера [1], в сферической системе координат $r, \vartheta, \theta$ ($r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \vartheta < 2\pi$) с центром в точке $O$ и ортонормированным базисом $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\vartheta$, рассматривается движение абсолютно твердого шара радиуса $R$ вдоль оси $Oz$ прямоугольной декартовой системы координат по закону $z = Z(\tau)$, где $z = R\cos\theta$, $\tau$ – время.

В [2, 3] подробно изложена постановка более общей задачи о распространении осесимметричных кинематических возмущений от сферической полости в среде Коссера, включающая уравнения движения в потенциалах, связь перемещений с потенциалами, физические соотношения, нулевые начальные условия, требования ограниченности решения и граничные условия

$$w\big|_{r=1} = W_0(\theta, \tau), \quad v\big|_{r=1} = V_0(\theta, \tau), \quad \omega\big|_{r=1} = 0 \tag{2.1}$$

где левые части этих равенств – ненулевые компоненты векторов перемещения $\mathbf{u} = w(r, \theta, \tau)\mathbf{e}_r + v(r, \theta, \tau)\mathbf{e}_\theta$ и поворота $\boldsymbol{\omega} = \omega(r, \theta, \tau)\mathbf{e}_\vartheta$.

Здесь и далее используются безразмерные величины со следующими единицами измерения: длина – $R$, время – $R/c_1$, масса – $\rho R^3$, где $c_1$ – скорость распространения волн растяжения-сжатия, а $\rho$ – плотность среды.

При условии, что в рассматриваемом варианте движения шара он жестко сцеплен со средой, соответствующий вектор перемещения $\mathbf{u}$ и правые части первых двух равенств в (2.1) имеют вид:

$$\mathbf{u}\big|_{r=1} = Z\mathbf{k} = Z(\cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta), \quad W_0 = Z\cos\theta, \quad V_0(\theta, \tau) = -Z\sin\theta \tag{2.2}$$

где $\mathbf{k}$ – единичный направляющий вектор оси $Oz$.

**3. Решение задачи.** В [2, 3] кинематические параметры и компоненты напряженного состояния раскладываются в ряды по полиномам Лежандра $P_n(x)$ и Гегенбауэра $C_{n-1}^{3/2}(x)$ [11, 12]. Здесь приведем эти равенства только перемещения, угла поворота, правых частей граничных условий (2.1) и физических компонент $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{\theta r}$ тензора напряжений:

$$\begin{gathered}
\begin{pmatrix} w \\ W_0 \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} w_n(r, \tau) \\ w_{0n}(\tau) \end{pmatrix} P_n(\cos\theta), \qquad \begin{pmatrix} v \\ \omega \\ V_0 \end{pmatrix} = -\sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} v_n(r, \tau) \\ \omega_n(r, \tau) \\ v_{0n}(\tau) \end{pmatrix} C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta) \\
\begin{pmatrix} \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{\theta r} \end{pmatrix} = -\sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \sigma_{r\theta n} \\ \sigma_{\theta r n} \end{pmatrix} C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta)
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Коэффициенты этих рядов для искомых функций записываются в виде сверток (они обозначены звездочкой):

$$\begin{gathered}
w_n(r, \tau) = G_{wwn}(r, \tau) \cdot w_{0n}(\tau) + G_{wvn}(r, \tau) \cdot v_{0n}(\tau) \\
v_n(r, \tau) = G_{vwn}(r, \tau) \cdot w_{0n}(\tau) + G_{vvn}(r, \tau) \cdot v_{0n}(\tau) \\
\omega_n(r, \tau) = G_{\omega wn}(r, \tau) \cdot w_{0n}(\tau) + G_{\omega vn}(r, \tau) \cdot v_{0n}(\tau) \\
\sigma_{r\theta n}(r, \tau) = G_{\sigma r\theta wn}(r, \tau) \cdot w_{0n}(\tau) + G_{\sigma r\theta vn}(r, \tau) \cdot v_{0n}(\tau) \\
\sigma_{\theta rn}(r, \tau) = G_{\sigma\theta rwn}(r, \tau) \cdot w_{0n}(\tau) + G_{\sigma\theta rvn}(r, \tau) \cdot v_{0n}(\tau)
\end{gathered} \tag{3.2}$$

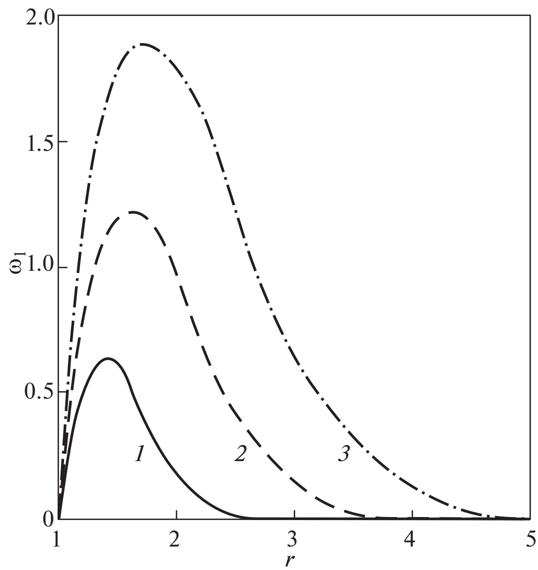


**Рис. 1.** Распределение функции $\omega_1(r,\tau)$ по радиусу в различные моменты времени: кривая *1* соответствует $\tau = 1.5$, *2* – $\tau = 2.5$, *3* – $\tau = 3.5$.

Ядра сверток в этих равенствах есть поверхностные функции влияния, а именно, $G_{wwn}$, $G_{vwn}$, $G_{\omega wn}$, $G_{\sigma r\theta wn}$ и $G_{\sigma\theta rwn}$ – коэффициенты $w_n$, $v_n$, $\omega_n$, $\sigma_{r\theta n}$ и $\sigma_{\theta rn}$, удовлетворяющие граничным условиям

$$w_n\big|_{r=1} = \delta(\tau), \quad v_n\big|_{r=1} = \omega_n\big|_{r=1} = 0$$

а $G_{wvn}$, $G_{vvn}$, $G_{\omega vn}$, $G_{\sigma r\theta vn}$ и $G_{\sigma\theta rvn}$ – аналогичные величины, для которых выполняются равенства

$$v_n\big|_{r=1} = \delta(\tau), \quad w_n\big|_{r=1} = \omega_n\big|_{r=1} = 0$$

Здесь $\delta(\tau)$ – дельта-функция Дирака [13].

Функции влияния определены в [2, 3] с помощью преобразования Лапласа в линейном приближении по малому параметру $\alpha$, характеризующему связь поля перемещений с углом поворота. При этом показано, что две из этих функций имеют сингулярные слагаемые:

$$\begin{gathered} G_{wwn}(r,\tau) = r^{-1}\delta(\tau - r + 1) + G_{wwnr}(r,\tau) \\ G_{vvn}(r,\tau) = r^{-1}\delta[\tau - \gamma_{1\alpha}(r-1)] + G_{vvnr}(r,\tau)\,\gamma_{1\alpha} = \gamma_1\sqrt{1-\alpha\gamma_1^2} \end{gathered} \tag{3.3}$$

где $\gamma_{1\alpha}$ и $\gamma_1$ – величины, обратные скоростям распространения волн свободного вращения и сдвига. При этом изображения (им соответствует индекс “$L$”) $G^L_{wwnr}(r,s)$, $G^L_{wwn}(r,s)$, $G^L_{vwnr}(r,s)$, $G^L_{vvnr}(r,s)$, $G^L_{\omega wn}(r,s)$ и $G^L_{\omega vn}(r,s)$ являются правильными рациональными функциями параметра преобразования $s$, что позволяет достаточно просто находить их оригиналы с помощью вычетов.

В случае прямолинейного движения шара с учетом равенств $C_0^{3/2}(x) = 1$ и $P_1(x) = x$ из (2.2) и (3.1) получаем

$$
\begin{gathered}
w_{00}(\tau)=0, \quad w_{01}(\tau)=Z(\tau), \quad v_{01}(\tau)=-Z(\tau), \\
w_{0n}(\tau)=v_{0n}(\tau)=0 \quad (n \geq 2)
\end{gathered} \tag{3.4}
$$

Следовательно, в рядах (3.1) для перемещений и угла поворота отличны от нуля только коэффициенты при $n = 1$:

$$
w=w_1\cos\theta, \quad v=-v_1\sin\theta, \quad \omega=-\omega_1\sin\theta
$$

При этом функции $w_1$, $v_1$ и $\omega_1$ в соответствии с (3.2) и (3.4) определяются так:

$$
\begin{gathered}
w_1(r,\tau)=r^{-1}Z(\tau-r+1)+\left[G_{ww1r}(r,\tau)-G_{wv1}(r,\tau)\right]\cdot Z(\tau) \\
v_1(r,\tau)=-r^{-1}Z\left[\tau-\gamma_{1\alpha}(r-1)\right]+\left[G_{vw1}(r,\tau)-G_{vv1r}(r,\tau)\right]\cdot Z(\tau) \\
\omega_1(r,\tau)=\left[G_{\omega w1}(r,\tau)-G_{\omega v1}(r,\tau)\right]\cdot Z(\tau)
\end{gathered} \tag{3.5}
$$

На рис. 1 для примера приведены откорректированные по отношению к [3] графики распределения по радиусу функции $\omega_1$ в различные моменты времени. При этом полагается, что среда является зернистым композитом из алюминиевой дроби в эпоксидной матрице [14], а закон движения шара имеет вид $Z(\tau)=\tau_+$.

**4. Оценка учета моментных свойств.** Ее проведем для перемещений и угла поворота. При этом учитываем, что значение $\alpha = 0$ соответствует классическому упругому решению [2, 3]. Следовательно, разность

$$
\mathbf{u}_c=\mathbf{u}-\mathbf{u}_e, \quad \mathbf{u}_e=\mathbf{u}\big|_{\alpha=0}=w_e(r,\theta,\tau)\,\mathbf{e}_r+v_e(r,\theta,\tau)\,\mathbf{e}_\theta \tag{4.1}
$$

определяет вклад в перемещения особенностей модели моментной среды.

Оценку аналогичного вклада в вектор поворота проводим с помощью следующих величин:

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{\omega}_{ce}=\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}_e=\boldsymbol{\omega}_{cp}-\boldsymbol{\omega}_{pe}=\omega_{ce}\mathbf{e}_\vartheta, \quad \boldsymbol{\omega}_{cp}=\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}_p=\omega_{cp}\mathbf{e}_\vartheta \\
\boldsymbol{\omega}_{pe}=\boldsymbol{\omega}_p-\boldsymbol{\omega}_e=\omega_{pe}\mathbf{e}_\vartheta \\
2\boldsymbol{\omega}_e=\mathrm{rot}\,\mathbf{u}_e, \quad 2\boldsymbol{\omega}_p=\mathrm{rot}\,\mathbf{u}
\end{gathered} \tag{4.2}
$$

Отметим, что векторы $\boldsymbol{\omega}_e$ и $\boldsymbol{\omega}_p$ соответствуют моделям теории упругости и псевдоконтинуума Коссера [1].

Для соответствующих функций влияния вводим подобные (4.1) и (4.2) обозначения:

$$
\begin{gathered}
G_{\zeta ce}=G_\zeta-G_{\zeta e}, \quad G_{\zeta e}=G_\zeta\big|_{\alpha=0} \quad (\zeta=wwnr, wvn, vwn, vvnr, \omega wn, \omega vn) \\
G_{\zeta cp}=G_\zeta-G_{\zeta p}, \quad G_{\zeta pe}=G_{\zeta p}-G_{\zeta e} \quad (\zeta=\omega wn, \omega vn)
\end{gathered} \tag{4.3}
$$

Сначала рассматриваем соответствующие перемещениям функции. В силу их аналитической зависимости от малого параметра $\alpha$ имеют место следующие соотношения:

$$
G_{\zeta ce}(r,\tau)=O(\alpha), \quad \alpha\to 0 \quad (\zeta=wwnr, wvn, vwn, vvnr)
$$

Для координат векторов в (4.1)

$$
w_{nce}=w_n-w_{ne}, \quad v_{nce}=v_n-v_{ne}, \quad w_{ne}=w_n\big|_{\alpha=0}, \quad v_{ne}=v_n\big|_{\alpha=0}
$$

из первых двух равенств в (3.5) получаем

$$
\begin{gathered}
w_{nce}(r,\tau)=G_{wwnrce}(r,\tau)\cdot w_{0n}(\tau)+G_{wvnce}(r,\tau)\cdot v_{0n}(\tau) \\
v_{nce}(r,\tau)=r^{-1}\left\{v_{0n}\left[\tau-\gamma_{1\alpha}(r-1)\right]-v_{0n}\left[\tau-\gamma_1(r-1)\right]\right\}+ \\
+G_{vwnce}(r,\tau)\cdot w_{0n}(\tau)+G_{vvnrce}(r,\tau)\cdot v_{0n}(\tau)
\end{gathered}
$$

Для разности в первом слагаемом во втором равенстве с учетом (3.3) при $\alpha \to 0$ справедливо соотношение

$$v_{0n}\left[\tau-\gamma_{1\alpha}(r-1)\right]-v_{0n}\left[\tau-\gamma_1(r-1)\right]=$$
$$=\frac{\gamma_1^3(r-1)}{2}\dot{v}_{0n}\left[\tau-\gamma_1(r-1)\right]\alpha+o(\alpha)=O(\alpha)$$

Следовательно, имеют место равенства $w_{nce}(r,\tau)$, $v_{nce}(r,\tau)=O(\alpha)$, $\alpha\to 0$, т.е. поправки, вносимые в перемещение за счет учета моментных свойств, имеют порядок $\alpha$.

Для оценки влияния учета моментных свойств на угол поворота, прежде всего, замечаем, что для ненулевой координаты вектора $\boldsymbol{\omega}_{pe}$ в (4.2) справедливо соотношение $\omega_{pe}(r,\tau)=O(\alpha)$, $\alpha\to 0$.

Очевидно, аналогичные оценки имеют место и для функций $G_{\omega wnpe}$, $G_{\omega vnpe}$:

$$G_{\omega wnpe}(r,\tau),\quad G_{\omega vnpe}(r,\tau)=O(\alpha),\quad \alpha\to 0 \tag{4.4}$$

Далее выражаем ненулевую координату вектора $\boldsymbol{\omega}_{cp}$ через перемещения:

$$\omega_{cp}=\omega-\frac{1}{2r}\left[\frac{\partial(rv)}{\partial r}-\frac{\partial w}{\partial\theta}\right]$$

При этом из формул для напряжений $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{\theta r}$ в [2, 3] следует равенство

$$\sigma_{r\theta}-\sigma_{\theta r}=2\alpha\left[\frac{\partial(rv)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}-2\omega\right]=-4\alpha\omega_{cp}$$

Отсюда вытекает, что при любом $n\geq 1$ равенство справедливо соотношение $4\alpha\omega_{ncp}=\sigma_{\theta rn}-\sigma_{r\theta n}$. Следовательно, функции $G_{\omega bncp}$ $(b=w,v)$ можно вычислить так:

$$4\alpha G_{\omega wncp}=G_{\sigma\theta rwn}-G_{\sigma r\theta wn},\quad 4\alpha G_{\omega vncp}=G_{\sigma\theta rvn}-G_{\sigma r\theta vn} \tag{4.5}$$

Дальнейшие выкладки удобнее провести в пространстве преобразования Лапласа по времени. Используя построенные в [2, 3] изображения функций в правых частях равенств в (4.5), приходим к таким результатам:

$$G^L_{\omega bncp}(r,s)=\tilde{G}^L_{\omega bncp}(r,s)+O(\alpha)\quad(\alpha\to 0),\quad \tilde{G}^L_{\omega bncp}(r,s)=H^L_{\omega bncp}(r,s)e^{-\gamma_1(r-1)s}$$
$$H^L_{\omega wncp}(r,s)=\frac{\gamma_1^2R_{n0}(\gamma_1 rs)R_{n0}(s)}{2r^{n+1}Q_n(s)},\quad H^L_{\omega vncp}(r,s)=\frac{\gamma_1^2R_{n0}(\gamma_1 rs)R_{n1}(s)}{2r^{n+1}Q_n(s)}$$

где

$$s^2Q_n(s)=R_{n1}(x)R_{n3}(y)-n(n+1)R_{n0}(x)R_{n0}(y)$$
$$R_{n0}(z)=\sum_{k=0}^{n}A_{nk}z^{n-k},\quad A_{nk}=\frac{(n+k)!}{2^k(n-k)!k!},$$
$$R_{n3}(z)=R_{n1}(z)-R_{n0}(z),\quad R_{n1}(z)=R_{n+1,0}(z)-nR_{n0}(z)$$

Таким образом, для функций $G_{\omega wnce}$ и $G_{\omega vnce}$ с учетом (3.4) справедливы соотношения

$$G_{\omega bnce}(r,\tau)=G_{\omega bncp}(r,\tau)+G_{\omega bnpe}(r,\tau)=$$
$$=G_{\omega bncp}(r,\tau)+O(\alpha)=\tilde{G}_{\omega bncp}(r,\tau)+O(\alpha),\quad \alpha\to 0$$

С использованием их и обозначений (3.3) из третьего равенства в (2.2) с точностью до слагаемых порядка $\alpha$ определяем поправку, вносимую в угол поворота за счет учета моментных свойств:

$$\omega_{nce}(r,\tau)=G_{\omega wnce}(r,\tau)\cdot w_{0n}(\tau)+G_{\omega vnce}(r,\tau)\cdot v_{0n}(\tau)=$$
$$=G_{\omega wncp}(r,\tau)\cdot w_{0n}(\tau)+G_{\omega vncp}(r,\tau)\cdot v_{0n}(\tau)=$$
$$=\omega_{ncp}(r,\tau)=\tilde{G}_{\omega wncp}(r,\tau)\cdot w_{0n}(\tau)+\tilde{G}_{\omega vncp}(r,\tau)\cdot v_{0n}(\tau)$$

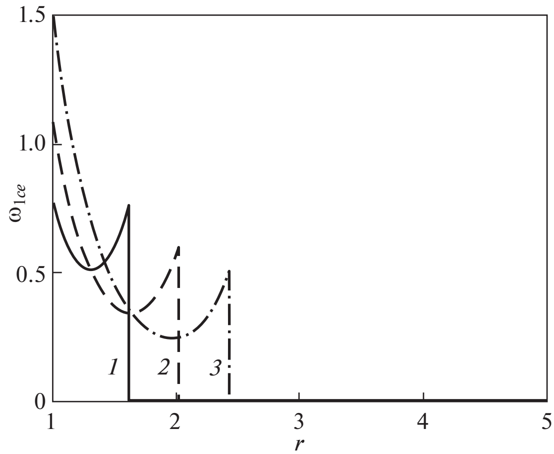


**Рис. 2.** Распределение поправки $\omega_{1ce}(r,\tau)$ по радиусу в различные моменты времени: кривая *1* соответствует $\tau = 1.5$, *2* – $\tau = 2.5$, *3* – $\tau = 3.5$.

Отсюда дополнительно следует, что поправки, вносимые моделями Коссера и псевдоконтинуума Коссера, в линейном приближении совпадают.

Для определения оригиналов функций $\tilde{G}_{\omega wncp}$ и $\tilde{G}_{\omega vncp}$ сначала выделяем целые части дробей $H^L_{\omega wncp}$ и $H^L_{\omega vncp}$ как функций параметра $s$:

$$H^L_{\omega wncp}(r,s) = \frac{\gamma_1}{2r} + H^L_{\omega wncpr}(r,s), \quad H^L_{\omega wncpr}(r,s) = H^L_{\omega wncp}(r,s) - \frac{\gamma_1}{2r}$$

$$s^{-1}H^L_{\omega vncp}(r,s) = \frac{\gamma_1}{2r} + H^L_{\omega vncpr}(r,s), \quad H^L_{\omega vncpr}(r,s) = s^{-1}H^L_{\omega vncp}(r,s) - \frac{\gamma_1}{2r}$$

Оригиналы регулярных составляющих $H^L_{\omega wncpr}$ и $H^L_{\omega vncpr}$ вычисляются с помощью вычетов. При этом оригиналы функций $\tilde{G}^L_{\omega wncp}$ и $\tilde{G}^L_{\omega vncp}$ определяются так (точка обозначает производную по времени):

$$\tilde{G}_{\omega wncp}(r,\tau) = \frac{\gamma_{1\alpha}}{2r}\delta[\tau - \gamma_1(r-1)] + G_{\omega wncpr},$$

$$\tilde{G}_{\omega vncp}(r,\tau) = \frac{\gamma_{1\alpha}}{2r}\dot{\delta}[\tau - \gamma_1(r-1)] + \dot{G}_{\omega vncpr}$$

$$G_{\omega wncpr}(r,\tau) = H_{\omega wncpr}[r,\tau - \gamma_1(r-1)]\,H[\tau - \gamma_1(r-1)]$$

$$G_{\omega vncpr}(r,\tau) = H_{\omega vncpr}[r,\tau - \gamma_1(r-1)]\,H[\tau - \gamma_1(r-1)]$$

где $H(\tau)$ – единичная функция Хевисайда [13].

Окончательно для поправки на угол поворота получаем следующий результат:

$$\omega_{nce}(r,\tau) = \frac{\gamma_1}{2r}w_{0n}[\tau - \gamma_1(r-1)] + G_{\omega wncpr}(r,\tau)\cdot w_{0n}(\tau) +$$

$$+\frac{\gamma_1}{2r}\dot{v}_{0n}[\tau - \gamma_1(r-1)] + G_{\omega vncpr}(r,\tau)\cdot \dot{v}_{0n}(\tau)$$

На рис. 2 приведены графики распределения функции $\omega_{1ce}(r,\tau)$ по радиусу в различные моменты времени, соответствующие поступательному перемещению вдоль оси $Oz$ по закону $Z(\tau) = \tau_+$ жестко сцепленного с полостью абсолютно твердого шара. Они определяют поправку к результатам, изображенным на рис. 1.

Из них следует, что за исключением окрестности точки $r = 1$ поправка имеет порядок $10^{-3}$, т.е. 0.1%. При этом для выбранного закона движения имеются качественные отличия, а именно, $\omega_1(1,\tau) = 0$ и $\omega_{1ce}(1,\tau) \neq 0$, а также непрерывность функции $\omega_1(r,\tau)$ и наличие разрывов первого рода в графиках $\omega_{1ce}(r,\tau)$.

**5. Заключение.** В линейном приближении по малому параметру найдена вносимая с учетом моментных свойств среды поправка в нестационарной осесимметричной задаче о распространении возмущений от сферической полости в пространстве. Показано, что количественные отличия практически отсутствуют. В то же время качественно процессы в моментной и классической упругой среде существенно отличаются. Эти же выводы, вероятно, можно сделать и для задач с другими геометрией и граничными условиями.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. *Lam V. Nguyen, Tarlakovskii D.V.* Propagation of Non-stationary Axisymmetric Perturbations from a Spherical Cavity in Cosserat Medium // Advanced Structured Materials, V. 122. Nonlinear Wave Dynamics. Springer Nature Switzerland AG, 2020. P. 273–292.
3. *Тарлаковский Д.В., Нгуен Ван Лам*. Действие нестационарных осесимметричных кинематических возмущений на сферическую полость в среде Коссера // Упругость и неупругость. Матер. Междунар. научн. симпоз. по пробл. мех. деформ. тел, посвященного 110-летию со дня рождения А. А. Ильюшина. Москва 20–21 января 2021 года. М.: Изд-во Московского университета, 2021. С. 6–13.
4. *Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В.* Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от поверхности шара, заполненного псевдоупругой средой Коссера // Электронный журнал “Труды МАИ”. 2012. № 53. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=29267.
5. *Лай Тхань Туан, Тарлаковский Д.В.* Дифракция нестационарных волн на сферической полости в псевдоконтинууме Коссера // РЭНСИТ. 2013. Т. 5. № 1. С. 119–125.
6. *Saxena Hirdeshwar S., Dhaliwal Ranjit S.* Application of the eigen-number method to an axisymmetric coupled micropolar thermoelasticity // Bull. Pol. Acad. Sci. Techn. Sci. 1990. Т. 38. № 1. P. 7–18.
7. *Белоносов С.М.* Моментная теория упругости. Владивосток: Дальнаука, 1993. 148 с.
8. *Большаков В.И., Андрианов И.В., Данишевский В.В.* Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры. Днепропетровск: “Пороги”, 2008. 196 с.
9. *Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В.* Континуальная теория асимметрической упругости. Равновесие изотропного тела // ФТТ. 1964. Т. 6. Вып. 9. С. 2689–2699.
10. *Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В.* Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц // ФТТ. 1960. Т. 2. Вып. 7. С. 1399–1409.
11. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1108 с.
12. Справочник по специальным функциям. Под ред. *М. Абрамовица, И. Стиган*. М.: Наука, 1979. 832 с.
13. *Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.* Волны в сплошных средах: Учеб. пособ.: Для вузов. М.: Физматлит, 2004. 472 с.
14. *Ерофеев В.И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во МГУ, 1999. 328 с.

ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2021, № 6, с. 156–164

*УДК 539.3*

# РАСЧЕТ КИНЕТИКИ РОСТА/ИЗНАШИВАНИЯ ТВЕРДО-СМАЗОЧНОЙ ПЛЕНКИ В УПОРНОМ ПОДШИПНИКЕ СКОЛЬЖЕНИЯ



**И. А. Солдатенков**[a],*

[a] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*
**e-mail: iasoldat@hotmail.com*

Поступила в редакцию 12.03.2021 г.
После доработки 20.04.2021 г.
Принята к публикации 13.05.2021 г.

Описывается модель роста и одновременного изнашивания твердо-смазочной пленки на поверхности композитного покрытия упорного подшипника скольжения. Получены уравнения кинетики изменения толщины твердо-смазочной пленки. Приводятся результаты численного решения этих уравнений. Описываются эффекты формы пяты подшипника и нагрузки на него. Даются оценки долговечности твердо-смазочной пленки по критерию износа.

*Ключевые слова:* контактная задача, покрытие, твердая смазка, изнашивание, упорный подшипник скольжения

**DOI:** 10.31857/S057232992106012X

**Введение.** В современной технике находят широкое применение самосмазывающиеся композиты, содержащие твердую смазку в виде мягкой фазы. При трении такого композита происходит выделение смазки и образование поверхностной твердо-смазочной пленки [1, 2]. К настоящему времени разработан ряд теоретических моделей образования такой пленки, использующих концепцию пластического выдавливания смазки из композита в результате деформирования его матрицы [3–5]. В работе [6] с использованием такой концепции выполнен расчет кинетики роста и одновременного изнашивания твердо-смазочной пленки, при этом в качестве механизма изнашивания рассматривалось пластическое оттеснение (пропахивания) материала микронеровностями контртела.

Ниже описывается теоретическая модель роста и одновременного изнашивания твердо-смазочной пленки на поверхности покрытия из самосмазывающегося композита в упорном подшипнике скольжения. Упругое поведение пленки и покрытия описывается упрощенной моделью Винклера [7, 8]. На основе феноменологических законов роста и изнашивания твердо-смазочной пленки выводятся уравнения, позволяющие рассчитывать кинетику изменения ее толщины, контактного давления, момента трения, а также оценивать ее долговечность по критерию износа.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим двухслойное покрытие 1+2, сцепленное с абсолютно жестким основанием 3 и контактирующее с пятой 4 упорного подшипника скольжения, которая вращается с постоянной угловой скоростью $\omega$ и находится под действием заданной нагрузки $P$ (рис. 1). Пользуясь осевой симметрией задачи, расположим начало $O$ системы координат посередине кольцевой области контакта, при этом совместим координатную ось $x$ с поверхностью покрытия вне области контакта, направив ее вдоль некоторого радиуса пяты (рис. 1). Область контакта пяты с покры-

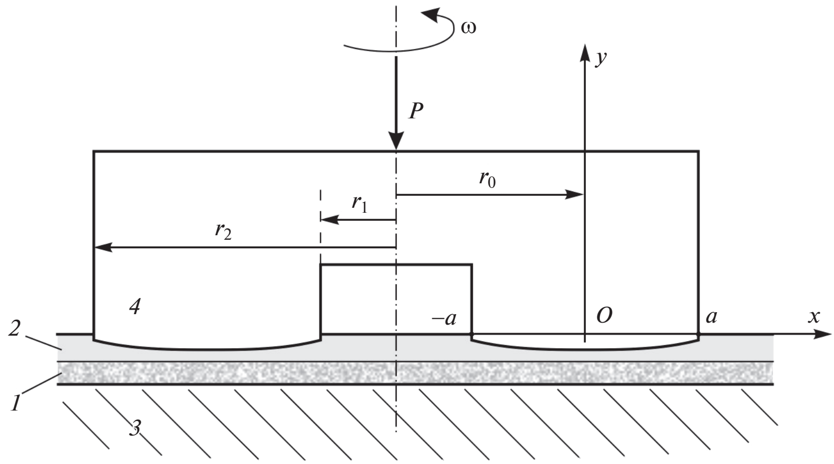


**Рис. 1.** Схема контакта двухслойного покрытия с пятой упорного подшипника скольжения

тием будем считать неизменной и представлять отрезком $[-a, a]$ оси $x$, причем $a = (r_2 - r_1)/2 = r_0 - r_1$. Форму подошвы пяты в выбранной системе координат зададим уравнением

$$y = g(x) - \delta(t), \quad g(0) = 0 \tag{1.1}$$

где $\delta$ – внедрение в покрытие точки поверхности пяты с координатой $x = 0$. Скорость $V$ скольжения пяты по покрытию определяется по формуле

$$V(x) = \omega(r_0 + x) \tag{1.2}$$

а нагрузка $P$ связана с контактным давлением $p$ условием равновесия

$$P(t) = 2\pi \int_{-a}^{a} (r_0 + x) p(x,t) dx \tag{1.3}$$

Показанное на рис. 1 двухслойное покрытие состоит из композитного покрытия (КП) 1 и твердо-смазочной пленки (ТСП) 2, которая с течением времени $t$ растет за счет выделения из КП твердой смазки и одновременно изнашивается в результате контактного взаимодействия с пятой. Подобный процесс можно описать следующими равенствами:

$$\begin{gathered} h_1(x,t) = h_{10} - \chi q(x,t), \quad h_1(x,0) = h_{10} \\ h_2(x,t) = h_{20} + q(x,t) - W(x,t), \quad h_2(x,0) = h_{20} \end{gathered} \tag{1.4}$$

в которых $h_i$ – толщина КП ($i = 1$) или ТСП ($i = 2$) в недеформированном состоянии, $h_{i0}$ – значение $h_i$ в начальный момент времени $t = 0$, $q$ и $W$ – прирост толщины и линейный износ ТСП. Коэффициент $\chi > 0$ учитывает уменьшение толщины КП при выделении из него твердой смазки. По условию задачи $q(x,0) = W(x,0) = 0$.

Основываясь на полученных ранее результатах [3–5, 9], будем использовать феноменологические законы роста и изнашивания ТСП:

$$dq/dl = (1 - q/q_m) D(p,V), \quad dW/dl = F(p,V) \tag{1.5}$$

определяющие скорости изменения величин $q$ и $W$ по пути трения $l$ в зависимости от контактного давления $p$ и скорости скольжения $V$ для каждой точки контакта. Функция $D(p,V)$ параметрически зависит от структурных и физико-механических характеристик КП, а функция $F(p,V)$ определяется износостойкими свойствами ТСП. Параметр $q_m$ задает максимально возможный прирост толщины ТСП, обусловленный ограниченным количеством твердой смазки в КП, так что $q \in [0, q_m)$. Множитель $(1 - q/q_m)$ в первом выражении (1.5) отвечает линейной зависимости количества выделяемой твердой смазки от ее текущей концентрации в КП, что подтверждается расчетами [4, 5]. В качестве возможного варианта, функции $D(p,V)$ и $F(p,V)$ могут быть линейными по аргументу $p$ и не зависеть от скорости скольжения $V$:

$$D(p,V) = \alpha_1 p, \quad F(p,V) = \alpha_2 p \tag{1.6}$$

где $\alpha_1$ и $\alpha_2$ – некоторые параметры.

Существование максимальной величины $q_m$ прироста толщины ТСП, при том, что износ ТСП монотонно увеличивается, означает возможность полного изнашивания ТСП в некоторый момент $t_*$ времени в некотором месте с координатой $x_*$, так что

$$h_2(x_*, t_*) = 0 \tag{1.7}$$

В дальнейшем величина $t_*$ будет использоваться в качестве характеристики долговечности ТСП по критерию износа.

Допустим, что под действием контактного давления $p$ КП и ТСП деформируются упруго, при этом упругие свойства КП описываются усредненными значениями модуля Юнга $E_1$ и коэффициента Пуассона $\nu_1$ [4]. Кроме того, примем концепцию асимптотически тонкого слоя, согласно которой напряженно-деформированное состояние слоя толщины $h$ в продольном направлении на расстояниях $\sim h$ изменяется незначительно [7]. Все это позволяет воспользоваться упрощенной моделью Винклера для определения упругой осадки $\hat{w}$ поверхности ТСП, связанного с КП [8]:

$$\hat{w}(x,t) = A(x,t)p(x,t) \tag{1.8}$$

Здесь $A(x,t) = B_1(x,t)h_1(x,t) + B_2(x,t)h_2(x,t)$ – коэффициент податливости двухслойного покрытия КП+ТСП, причем слагаемые $B_i h_i$ определяют податливость отдельно КП ($i = 1$) и ТСП ($i = 2$), $B_i = (1 - 2\nu_i)(1 + \nu_i)[(1 - \nu_i)E_i]^{-1}$. Учитывая, что в процессе контактного взаимодействия с пятой состав КП изменяется, следует положить $B_1(x, t) = \beta_1(q(x,t))$, где $\beta_1(q)$ – функция, определяющая изменение податливости КП при выделении из него твердой смазки. Допуская однородность материала ТСП, коэффициент $B_2$ будем считать постоянным. С учетом равенств (1.4) вышесказанное позволяет записать следующее выражение для коэффициента податливости:

$$A(x,t) = \Omega\big(q(x,t), W(x,t)\big), \quad \Omega(q,W) = \beta_1(q)(h_{10} - \chi q) + B_2(h_{20} + q - W) \tag{1.9}$$

Имеет место условие контакта:

$$\hat{w}(x,t) + h_0 - h(x,t) = \delta(t) - g(x) \tag{1.10}$$

в котором $h = h_1 + h_2$ – текущая толщина двухслойного покрытия КП+ТСП, $h_0 = h_{10} + h_{20}$.

Ставится задача: основываясь на записанных выше соотношениях, по заданной нагрузке $P(t)$ рассчитать кинетику изменения во времени толщин $h_1(x,t)$ КП и $h_2(x,t)$ ТСП, а также контактного давления $p(x,t)$.

**2. Система определяющих уравнений.** Прежде всего, выразим контактное давление $p(x,t)$ через функции $q(x,t)$, $W(x,t)$ и $\delta(t)$. Для этого подставим в равенство (1.10) выражения (1.4) и (1.8) для толщин $h_1$, $h_2$ и упругой осадки $\hat{w}$ при учете формулы (1.9) для коэффициента $A(x,t)$. В результате можно прийти к искомому выражению

$$p(x,t) = \Pi\left(x, q(x,t), W(x,t), \delta(t)\right),$$
$$\Pi(x,q,W,\delta) = \frac{\delta - g(x) - (\chi - 1)q - W}{\Omega(q,W)} \tag{2.1}$$

Согласно полученному выражению, начальное распределение $p_0(x) = p(x,0)$ контактного давления определяется по формуле

$$p_0(x) = \frac{1}{A_0}[\delta_0 - g(x)] \tag{2.2}$$

где $\delta_0 = \delta(0)$, $A_0 = B_{10}h_{10} + B_2h_{20}$, $B_{10} = \beta_1(0)$. Если положить в условии равновесия (1.3) $t = 0$ и подставить в него правую часть равенства (2.2), то можно получить следующее выражение начального внедрения $\delta_0$ через известную нагрузку $P_0 = P(0)$:

$$\delta_0 = \frac{A_0}{4\pi a r_0}(P_0 + P_0^g), \quad P_0^g = \frac{2\pi}{A_0}\int_{-a}^{a}(r_0 + x)g(x)dx \tag{2.3}$$

Перейдем теперь в законах (1.5) роста и изнашивания ТСП от производной по пути $l$ трения к производной по времени $t$, используя соотношение $dl = Vdt$. Тогда при учете выражения (2.1) для контактного давления $p$ можно получить следующие уравнения относительно функций $q(x,t)$ и $W(x,t)$:

$$\begin{aligned} \dot{q}(x,t) &= F_1\left(x, q(x,t), W(x,t), \delta(t)\right) \\ \dot{W}(x,t) &= F_2\left(x, q(x,t), W(x,t), \delta(t)\right) \end{aligned} \tag{2.4}$$

причем

$$F_1(x,q,W,\delta) = V(x)(1 - q/q_m)D\left(\Pi\left(x,q,W,\delta\right), V(x)\right),$$

$$F_2(x,q,W,\delta) = V(x)F\left(\Pi\left(x,q,W,\delta\right), V(x)\right)$$

Уравнения (2.4) кроме функций $q(x,t)$ и $W(x,t)$ содержат еще одну неизвестную функцию $\delta(t)$, дополнительное уравнение для которой может быть построено на основе условия равновесия (1.3). А именно, следуя известной процедуре [10], продифференцируем по $t$ это условие с внесением операции дифференцирования под знак интеграла. Полученную таким образом производную $\dot{p}(x,t)$ заменим правой частью выражения (2.1), предварительно продифференцированной по $t$ с заменой производных $\dot{q}(x,t)$ и $\dot{W}(x,t)$ правыми частями уравнений (2.4). Выделяя из полученного равенства производную $\dot{\delta}(t)$, придем к искомому уравнению

$$\dot{\delta}(t) = \frac{\dot{P}(t) + \mathbf{E}_1\left[x, q(x,t), W(x,t), \delta(t)\right](t)}{\mathbf{E}_2\left[x, q(x,t), W(x,t), \delta(t)\right](t)} \tag{2.5}$$

в котором $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ — функционалы, определяемые по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1[x,q,W,\delta](t) = 2\pi\int_{-a}^{a}\frac{r_0 + x}{\Omega(q,W)}&\left[(\chi - 1)F_1(x,q,W,\delta) + \right. \\ &\left. + F_2(x,q,W,\delta) + \Omega_1(x,q,W,\delta)\,\Pi(x,q,W,\delta)\right]dx \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}_2[x,q,W,\delta](t) = 2\pi\int_{-a}^{a}\frac{r_0 + x}{\Omega(q,W)}dx$$

При записи двух последних выражений аргументы $x$, $t$ у функций $q(x,t)$, $W(x,t)$ и $\delta(t)$ для краткости опускаются, а также используется функция

$$\Omega_1\left(x, q(x,t), W(x,t), \delta(t)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\Omega\left(q(x,t), W(x,t)\right)$$

Равенства (2.4) и (2.5) образуют систему уравнений, определяющих функции $q(x,t)$, $W(x,t)$ и $\delta(t)$. Эта система решается при начальных условиях

$$q(x,0) = 0, \quad W(x,0) = 0, \quad \delta(0) = \delta_0$$

причем $\delta_0$ определяется по формуле (2.3). Найденные функции $q(x,t)$, $W(x,t)$ и $\delta(t)$ позволяют по формулам (1.4) и (2.1) рассчитать кинетику изменения во времени толщин $h_1$ КП и $h_2$ ТСП, а также контактного давления $p$ и, тем самым, решить поставленную выше задачу.

*Замечание*. Система уравнений (2.4), (2.5) является нелинейной и ее решение возможно только численно, даже в случае (1.6) линейных законов роста и изнашивания ТСП. Однако в этом случае можно установить аналитическую связь функций $q(x,t)$ и $W(x,t)$ между собой. Для этого следует исключить из правых частей уравнений (2.4) комплекс $V(x)\Pi\left(x, q(x,t), W(x,t), \delta(t)\right)$ и для каждого $x$ получить дифференциальное уравнение относительно $q$ с независимой переменной $W$. Это уравнение имеет аналитическое решение, которое определяет искомую связь

$$q(x,t) = q_m(1 - e^{-W(x,t)/r_m}), \quad r_m = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} q_m$$

Укажем ряд ограничений, которым должны удовлетворять используемые величины. Прежде всего, отметим, что толщина $h_1$ КП принимает только положительные значения, поэтому, в силу первого равенства (1.4), величина $q$ ограничена неравенством: $q(x,t) < h_{10}/\chi$. Это неравенство выполняется, если $q_m \le h_{10}/\chi$, так как согласно данному выше определению параметра $q_m$: $q(x,t) \in [0, q_m)$.

Положительные значения также принимает контактное давление $p$, а осадка $\hat{w}_i = B_i h_i p$ каждого слоя двухслойного покрытия КП+ТСП по физическому смыслу должна быть меньше толщины $h_i$ соответствующего слоя. Подобные ограничения представляются следующими неравенствами

$$0 < B_i(x,t)p(x,t) < 1, \quad i = 1, 2 \tag{2.6}$$

В случае, когда ТСП изначально отсутствует ($h_{20} = 0$) и появляется в результате взаимодействия пяты с КП, необходимо наложить ограничение $0 < \dot{h}_2(x,0)$. В силу соотношений (1.4), (2.1) и (2.4), это ограничение эквивалентно неравенству

$$F\left(p_0(x), V(x)\right) < D\left(p_0(x), V(x)\right) \tag{2.7}$$

которое имеет простой физический смысл — в начальный момент ТСП растет быстрее, чем изнашивается.

**3. Численный анализ** взаимодействия пяты с двухслойным покрытием КП+ТСП выполнялся на основе решения системы дифференциальных уравнений (2.4) и (2.5) относительно функции $q(x,t)$, $W(x,t)$ и $\delta(t)$ с использованием численного метода Рунге—Кутты четвертого порядка точности. Целью расчетов было выявление характерных особенностей процесса роста ТСП при его одновременном изнашивании. Рассматривался случай постоянной во времени нагрузки $P(t)$ и использовались линейные законы (1.6) роста и изнашивания ТСП. Упругие свойства КП считались неизменными во времени, поэтому функция $\beta_1(q)$ принималась постоянной и равной $B_1$. При расчетах контролировалось выполнение неравенств (2.6).

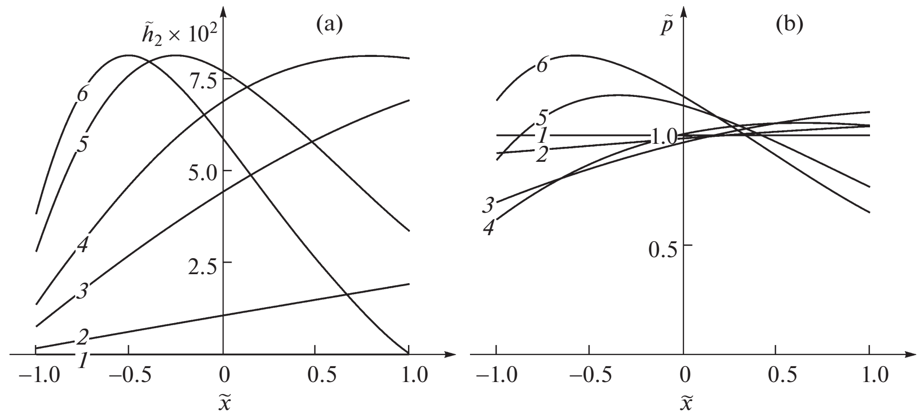


**Рис. 2.** Распределения толщины $h_2$ ТСП (a) и контактного давления $p$ (b) в различные моменты времени при $k = 0$ (плоская пята) и $\tilde{P} = 0.144$

Расчеты проводились при следующих значениях параметров задачи: $r_1 = 2$ мм, $r_2 = 22$ мм, $a = 10$ мм, $h_{10} = 1$ мм, $h_{20} = 0$, $\omega = 100$ с$^{-1}$, $q_m = 0.2h_{10}$, $\chi = 0.1$, $E_1 = 100$ МПа, $E_2 = 25$ МПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$, $\alpha_1 = 4\times10^{-16}$ Па$^{-1}$, $\alpha_2 = 10^{-16}$ Па$^{-1}$. Форма пяты описывалась линейной функцией

$$g(x) = kx$$

где $k$ — коэффициент, характеризующий угол наклона профиля пяты, причем значение $k = 0$ отвечает случаю плоской пяты, а значения $k \neq 0$ — случаю конической пяты. Значения коэффициента $k$, а также нагрузки $P$ указываются ниже отдельно для каждого численного примера.

Для графического представления результатов расчетов используются безразмерные величины, $\tilde{x} = x/a$, $\tilde{t} = t/t_c$, $\tilde{p} = p/p_a$, $\tilde{h}_2 = h_2/h_{10}$, $\tilde{P} = P/P_a$, где $t_c = 10^5$ с, $p_a = P/S$, $P_a = (E_1 + E_2)S/2$, $S = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ — площадь контакта.

Отметим, что выбранные коэффициенты $\alpha_1$, $\alpha_2$ удовлетворяют неравенству $\alpha_2 < \alpha_1$, которое эквивалентно неравенству (2.7) в рассматриваемом случае (1.6) линейных законов роста и изнашивания ТСП. Как указывалось выше, выполнение неравенства (2.7) необходимо при выбранном нулевом значении начальной толщины $h_{20}$ ТСП.

Кинетика изменения толщины $h_2(x,t)$ ТСП и контактного давления $p(x,t)$ показана на рис. 2 и 3, соответственно, при $k = 0$ (случай плоской пяты) и $k = 6.25\times10^{-3}$ (случай конической пяты). Представленные на этих рисунках кривые отвечают следующим моментам времени: $\tilde{t} = 0$ (1); 0.0345 (2); 0.1799 (3); 0.3616 (4); 0.8158 (5); 1.0884 (6); 1.4517 (7). Значение нагрузки в обоих случаях составляет $\tilde{P} = 0.144$ ($P = 13.57$ кН).

Представленные графики свидетельствуют о существенном влиянии формы пяты на кинетику роста/изнашивания ТСП. В частности, видно, что коническая пята обеспечивает большую долговечность $t_*$ ТСП. Кроме того, расчеты свидетельствуют о том, что коническая пята обеспечивает режим трения с более низким и стабильным моментом трения $M$, рассчитанным по формуле

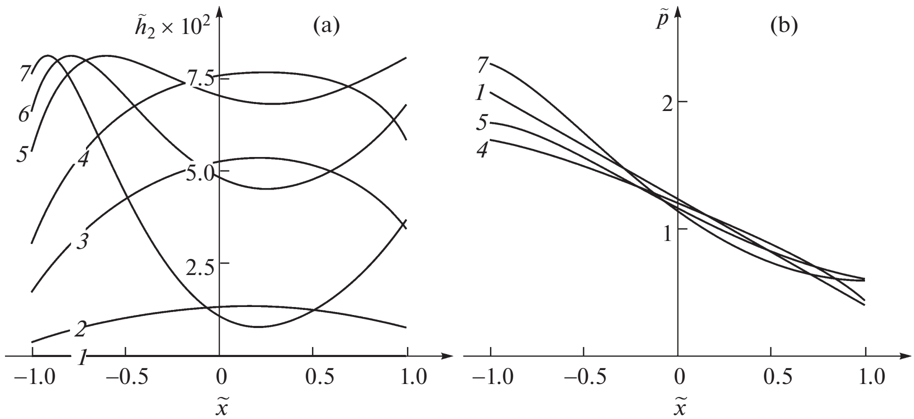


**Рис. 3.** Распределения толщины $h_2$ ТСП (a) и контактного давления $p$ (b) в различные моменты времени при $k = 6.25\times10^{-3}$ (коническая пята) и $\tilde{P} = 0.144$

$$M(t) = 2\pi\mu\int_{-a}^{a}(r_0 + x)^2 p(x,t)dx$$

где $\mu$ – коэффициент трения скольжения. Например, при $\mu = 0.2$ значения $M_{\min} = \min\limits_{t\in[0,t_*]} M(t)$ и $M_{\max} = \max\limits_{t\in[0,t_*]} M(t)$ для плоской пяты составляют 37.08 и 41.44 Н · м, соответственно, тогда как для конической пяты: 34.07 и 35.74 Н · м.

При пониженных нагрузках $P$ возможно протекание процесса, когда на его начальной стадии наблюдается значительная неоднородность по $x$ роста толщины $h_2(x,t)$ ТСП, т.е. проявляется эффект выпячивания ТСП. Это может приводить к локальному нарушению контакта пяты и ТСП. Подобное протекание процесса роста/изнашивания ТСП в случае $k = 0$ (плоская пята) и $\tilde{P} = 0.048$ ($P = 4.524$ кН) иллюстрирует рис. 4, на котором кривые отвечают следующим моментам времени: $\tilde{t} = 0$ (1); 0.0540 (2); 0.1085 (3); 0.2175 (4); 0.3265 (5). Представленные графики демонстрируют интенсивный рост толщины ТСП на периферии области контакта (окрестность $x = a$), что приводит к снижению контактного давления до нуля и нарушению контакта пяты и ТСП на внутренней границе $x = -a$ области контакта.

На рис. 5 показаны зависимости долговечности $t_*$ ТСП, определяемой условием (1.7), от нагрузки $P$ при $k = 0$ (плоская пята) ($a$) и $k = 6.25\times10^{-3}$ (коническая пята) ($b$). Как и следовало ожидать, долговечность ТСП снижается с ростом нагрузки, причем коническая пята обеспечивает большую долговечность.

**4. Выводы.** 1. Предложена математическая модель процесса одновременного роста и изнашивания ТСП в упорном подшипнике скольжения в предположении, что ТСП образуется на поверхности КП за счет выделения из него твердой смазки.

2. Расчетным путем выявлены характерные особенности рассматриваемого процесса. Показано, что кинетика изменения толщины ТСП и контактного давления существенно зависит от формы пяты. В частности, использование конической пяты приводит к повышению долговечности ТСП по критерию износа и обеспечивает режим трения с более низким и стабильным моментом трения.

3. Выявлен эффект выпячивания ТСП при пониженных нагрузках, приводящий к локальному нарушению контакта пяты и ТСП.

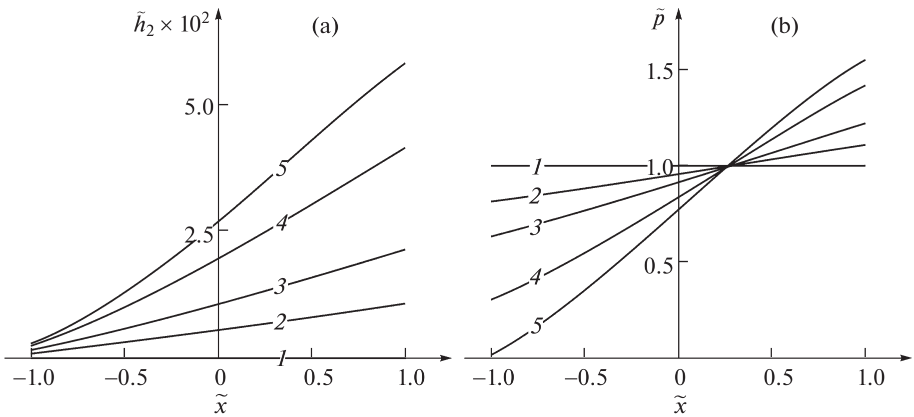


**Рис. 4.** Распределения толщины $h_2$ ТСП (a) и контактного давления $p$ (b) в различные моменты времени при $k = 0$ (плоская пята) и $\tilde{P} = 0.048$

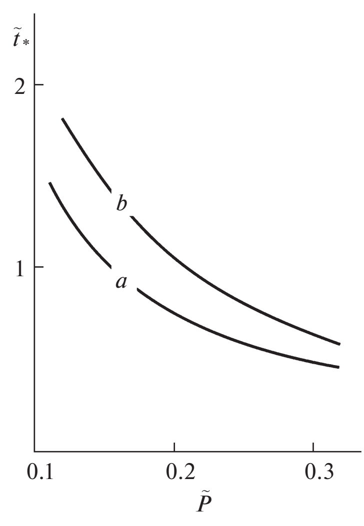


**Рис. 5.** Зависимости долговечности $t_*$ ТСП от нагрузки $P$ при *a*) $k = 0$ (плоская пята); *b*) $k = 6.25 \times 10^{-3}$ (коническая пята)

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (20-58-00007).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Self-Lubricating Composites / Ed. by *Menezes P.L., Rohatgi P.K., Omrani E.* Berlin: Springer-Verlag GmbH, 2018. 286 p.
2. *Губенко М.М., Мезрин А.М., Щербакова О.О., Торская Е.В.* Исследование изменения механических свойств поверхностных слоев алюминиевых сплавов в условиях трения скольжения //

Трение и износ. 2017. Т. 38. № 5. С. 483–487.
https://doi.org/10.3103/S1068366617050038

3. *Alexeyev N., Jahanmir S.* Mechanics of friction in self-lubricating composite materials I: Mechanics of second-phase deformation and motion // Wear. 1993. V. 166. P. 41–48.
https://doi.org/10.1016/0043-1648(93)90277-S
4. *Bushe N.A., Goryacheva I.G., Makhovskaya Yu.Yu.* Effect of aluminum-alloy composition on self-lubrication of frictional surfaces // Wear. 2003. V. 254. P. 1276–1280.
https://doi.org/10.1016/S0043-1648(03)00110-8
5. *Song J. et al.* A mechanical model for surface layer formation on self-lubricating ceramic composites // Wear. 2010. V. 268. P. 1072–1079.
https://doi.org/10.1016/j.wear.2010.01.012
6. *Valefi M. et al.* Modelling of a thin soft layer on a self-lubricating ceramic composite // Wear. 2013. V. 303. P. 178–184.
https://doi.org/10.1016/j.wear.2013.02.017
7. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
8. *Солдатенков И.А.* К анализу процесса изнашивания многослойного покрытия // Трение и износ. 1991. Т. 12. № 2. С. 204–209.
9. *Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С.* Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
10. *Солдатенков И.А.* Трибомеханические эффекты неоднородности упругого покрытия (упрощенная деформационная модель) // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 3. С. 134–145.
https://doi.org/10.31857/S0572329920030150