СОДЕРЖАНИЕ

ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2020, № 3, с. 3–10

МЕХАНИКА МАШИН

УДК 531

К РАСЧЕТУ ВИБРОУДАРНЫХ ПРОЦЕССОВ С ПОВТОРНЫМИ СОУДАРЕНИЯМИ (ДРЕБЕЗГОМ)

© 2020 г. В. Л. Крупенин

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, г. Москва, Россия
e-mail: krupeninster@gmail.com

Поступила в редакцию 15.09.2019 г.
Принята к публикации 31.01.2020 г.

Рассмотрена задача расчета параметров затухающих колебаний с соударениями двух систем с одной степенью свободы. Такие колебания могут сопровождаться виброударными процессами с повторными соударениями (режимами с дребезгом). Характер этих процессов зависит от принятых моделей диссипации энергии и конструктивных особенностей соударяющихся объектов. Даны соответствующие уравнения движения. Приводится методика построения законов движения, основанная на методе усреднения виброударных систем. Приведены примеры. Рассмотрения могут быть использованы, например, при расчете и анализе специфических явлений, возникающих в элементах коммутационных устройств, а также и в других системах, в частности, связанных с описанием вибрационных полей, генерируемых при посредстве ударов.

Ключевые слова: соударения, виброударная система, дребезг, время дребезга, контактная система, переменные “импульс-фаза”, модели диссипации, системы с релаксацией

DOI: 10.31857/S0235711920030074

1. В общем случае под режимами с повторными соударениями (режимами с дребезгом) понимают явления, заключающиеся в возникновении большого числа соударений контактирующих твердых тел после того, как произошел первый удар. В простейшем случае, если ограничиться рассмотрением прямого и центрального удара, указанное явление заключается во всем известном эффекте подпрыгивания монеты, которую на некоторой высоте отпустили над массивной металлической или каменной плитой.

С механической точки зрения дребезг возникает, когда соударяющиеся тела находятся в поле сил, которые возвращают их в точку контакта, в результате чего и происходят повторные соударения.

Известно, что в ряде случаев дребезг контактов наносит техническим объектам весьма принципиальный вред. Он может происходить и происходит, в частности, в многочисленных электромеханических коммутационных устройствах, приборах и аппаратах – кнопках, реле, герконах, переключателях, контакторах, магнитных пускателях и других системах. Эффект проявляется в том, что после одного замыкания происходят многократные повторные размыкания/замыкания контактов и они определенное время отскакивают друг от друга при возникающих соударениях, размыкая и вновь замыкая электрические цепи.

Это заметно снижает надежность устройств, вносит в их работу нежелательные искажения и может привести к преждевременным отказам и потери работоспособности

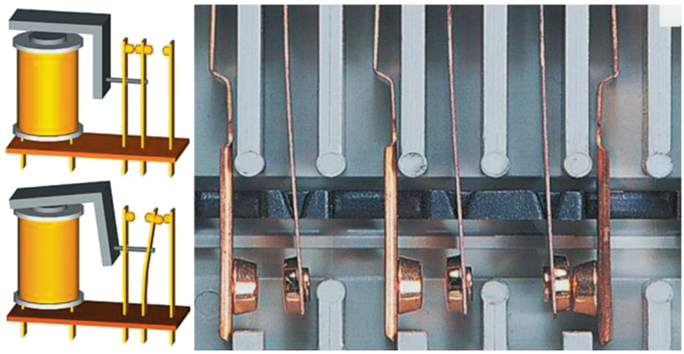


Рис. 1.

элементов оборудования. Например, коммутация достаточно мощных электроцепей может сопровождаться множественными зажиганиями и гашениями электрической дуги или возникновением искр, что вызывает быстрый износ контактов.

Использование электромеханических контактов из-за дребезга пагубно отражается на свойствах функциональности многих компонент электронных схем, а также приводит к сбоям некоторых типов цифровых устройств.

Важнейшими характеристиками дребезга являются импульсы ударного взаимодействия, число соударений от начала первого контакта до последнего (прекращения дребезжания), а также продолжительность (время) дребезга. Эти параметры зависят от конструктивных параметров систем. Времена дребезга варьируются от значений порядков 1–2 микросекунд у современных миниатюрных герконов до сотен миллисекунд у мощных контакторов.

Используемые методы борьбы с дребезгом основаны на аппаратных и алгоритмических методиках. Их описание широко представлено, например, в Интернете, особенно в связи с весьма широким распространением устройств, так или иначе связанных с платформой Arduino [1]. В основном указанные методы – паллиативны, не учитывают механику процессов и не могут быть вполне эффективными.

Математическое моделирование электромеханических контактов или им подобным систем, по-видимому, впервые провел Л.И. Мандельштам в своих знаменитых “Лекциях” [2]. Он рассмотрел систему, которую назвал “молоточком Н.Н. Андреева” и которая моделировала устройство для измерения амплитуды колебаний.

Проблема описания дребезга интересовала исследователей и здесь нельзя не отметить классические работы Р.Ф. Нагаева [3], который дал весьма полные и подробные описания явления дребезга для ряда нетривиальных механических задач.

В данной работе рассмотрены некоторые модельные аспекты проблемы и способы описания дребезга при помощи метода усреднения.

2. Типичный пример контактных систем, рассматриваемого типа показан на рис. 1.

На рис. 1а дана наиболее популярная схема, взятая с сайта “Заочник”. Реле электронного контроля “PMDsrange” компании “Pilz International”, Германия приведено на фото рис. 1б.

В качестве основной рабочей модели возьмем систему, показанную на рис. 2а.

На концах упругих невесомых балочек (пружин) закреплены соударяющиеся точечные тела с массами m_1 и m_2 [4]. Предположение о точечности тел обозначает, что всеми их геометрическими параметрами можно пренебречь по сравнению с величиной

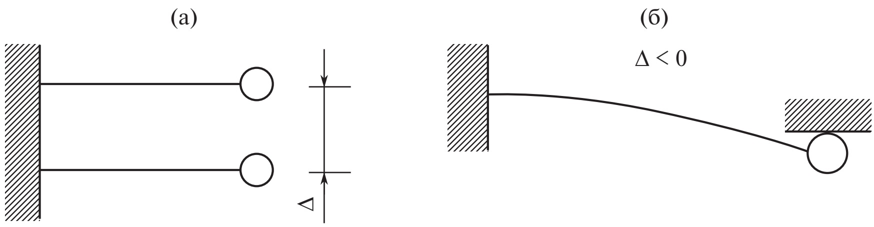


Рис. 2. Примеры рабочих моделей: (а) – система с зазором ($\Delta \geq 0$; две степени свободы); (б) – система с предварительным натягом ($\Delta < 0$; одна степень свободы).

зазора $\Delta \geq 0$ (отрицательные значения величины Δ соответствуют предварительному натягу).

Уравнения движения системы в отсутствии постоянно действующих сил внешнего возбуждения имеют вид

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1x_1 + \Phi(x,\dot{x}) = -B_1(p;x_1); \quad m_2\ddot{x}_2 + c_2x_2 - \Phi(x,\dot{x}) = -B_2(p;x_2). \tag{1}$$

Здесь x_1 и x_2 – координаты соударяющихся тел; $x = x_1 - x_2$ – относительная координата. Соударения происходят при $x = \Delta$. Через $B_1(p;x_1)$ и $B_2(p;x_2)$ обозначены операторные функции $p \equiv d/dt$, описывающие диссипацию энергии в системах без учета потери энергии при ударах. Здесь можно учесть не только стандартные факторы, приводящие к использованию моделей вязкого трения, но и обстоятельства, связанные с внутренними несовершенствами и особенностями материала балочек (пружин). Например, они могут находитmся в оплетках, выполненных из полимерных материалов.

В уравнениях (1) фигурирует еще сила удара $\Phi(x,\dot{x})$, зависящая от относительных координаты и скорости. Пусть удар Ньютоновский, и происходит в некоторый произвольный момент времени $t = t_\alpha$ тогда $\dot{x}(t_\alpha - 0) = -R\dot{x}(t_\alpha + 0)$; $0 < R \leq 1$ и $\Phi(x,\dot{x}) = \Phi_0(x,\dot{x}) + (1-R)\Phi_1(x,\dot{x})$, где Φ_0 и $(1-R)\Phi_1$ – упругая и диссипативная составляющая силы удара, записываемые через обобщенные функции. Для каждого удара можно записать [5, 6]

$$\Phi\big|_{t=t_\alpha} = J\delta(t-t_\alpha); \quad J = (1+R)\left|\dot{x}(t_\alpha - 0)\right|,$$

где J – импульс удара; $\delta(t)$ – δ-функция; t_α – момент некоторого α-го удара; $0 < R \leq 1$ – коэффициент восстановления.

К уравнениям (1) должны быть добавлены начальные условия.

На практике многие коммутационные системы, в которых имеет место дребезг, обладают регулярной или квазирегулярной структурой. То есть для нашей модели $m_1 \approx m_2$; $c_1 \approx c_2$. Также распространены устройства, для которых $m_1 \gg m_2$. В обоих случаях моделирование сводится к исследованию системы с одной степенью свободы.

В первом случае, предположив, что операторы $B_1(p;x_2)$ и $B_2(p;x_2)$ – линейны, вычтем из первого уравнения (1) второе. Имеем

$$m_0\ddot{x} + c_0x + 2\Phi(x,\dot{x}) = -B_0(p;x),$$

где в рассматриваемом приближении при $m_0 = m_1 = m_2$; $c_0 = c_1 = c_2$, $B_0 = B_1 = B_2$ и учтена линейность операторов B_1 и B_2.

Окончательно запишем

$$m\ddot{x} + cx + \Phi_0(x,\dot{x}) + \varepsilon r\Phi_1(x,\dot{x}) = -\varepsilon B(p;x), \tag{2}$$

где $\varepsilon \ll 1$ – малый параметр; $1 - R \equiv r$. Смысл обозначений очевиден и сделано предположение о малости уровня диссипации.

Таким образом модель процесса описывается посредством системы с одной степенью свободы, определяющая координата которой является относительной координатой, а все гладкие члены уравнения движения вдвое меньше исходных.

Проведем анализ именно модели (2). В случае $m_1 \gg m_2$ модель аналогична. Здесь $m = m_2$, так как можно считать $m_1 \to \infty$ и задача сводится к анализу динамики ударного осциллятора, взаимодействующего с неподвижным ограничителем (рис. 2б, здесь $\Delta < 0$).

3. Проанализируем уравнение (2) с помощью метода усреднения в виде, который применительно к виброударным системам был предложен и алгоритмизирован в работе [7] и развит в книгах [5, 6, 8]. Изложим кратко схему методики построения первого приближения.

Предположим, что вырожденная (консервативная) система имеет вид

$$m\ddot{x} + cx + \Phi_0(x, \dot{x}) = 0,$$

где учтено, что $\Phi(x, \dot{x}) = \Phi_0(x, \dot{x}) + (1 - R)\Phi_1(x, \dot{x})$.

Решение задачи в вырожденном случае хорошо известно и изучено [4, 5]

$$x(t) = -J\chi(t - \varphi); \quad \chi(t) = \frac{1}{2\Omega}\frac{\cos\left(\Omega t - \frac{T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Omega T}{2}\right)}, \quad 0 < t \le T,$$

$$J = -2\Omega\Delta\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\Omega T \ge 0; \tag{3}$$

$$\chi(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\exp(ik\omega t)}{\Omega^2 - k^2\omega^2}.$$

Здесь и далее $\Omega = \sqrt{cm^{-1}}$ – собственная частота соответствующего линейного осциллятора.

Вторая формула (3) имеет место только при $0 < t \le T$, а при t вне этого промежутка должно быть произведено продолжение по периодичности или использовано представление в виде ряда Фурье (пятая формула (3)). Импульс удара J – по определению неотрицателен. В консервативной системе он определяется из условия удара $x(0) = \Delta$. Удар в силу автономности системы совмещен здесь с началом отсчета времени.

Осуществим переход к фазовым переменным “импульс-фаза” $(x, \dot{x}) \to (J, \psi)$ в соответствии с формулами

$$x = -J\chi[\psi, \omega(J)], \quad \dot{x} = -J\omega(J)\chi_\psi[\psi, \omega(J)]. \tag{4}$$

При этом $\omega(J) = 2\pi T^{-1}(J)$ и из четвертого соотношения (3) можно получить

$$\omega(J) = \frac{\pi\Omega}{\pi - \mathrm{arctg}[J/(2\Omega\Delta)]}, \quad \Delta > 0, \quad \Omega < \omega < 2\Omega,$$

$$\omega(J) = -\frac{\pi\Omega}{\mathrm{arctg}[J/(2\Omega\Delta)]}, \quad \Delta < 0, \quad 2\Omega < \omega < \infty, \tag{5}$$

$$\omega(J) = 2\Omega = \mathrm{const}, \quad \Delta = 0.$$

Системы с зазором – жестко анизохронны, с натягом – мягко анизохронны, с нулевым зазором – изохронны. Первая вновь введенная переменная J (импульс) – медленная, а переменная ψ (фаза) – быстрая. После ряда преобразований, для новых переменных можно получить уравнения

$$\begin{aligned}\dot J &= -\varepsilon\omega(J)\{rJ\delta^{2\pi}(\psi) + 4B(p; -J\chi[\psi, \omega(J)])\chi_\psi[\psi, \omega(J)]\},\\ \dot\psi &= \omega(J)\{1 + 4\varepsilon J^{-1}B(p; -J\chi[\psi, \omega(J)])\}\{\chi[\psi, \omega(J)] + J\chi_\omega[\psi, \omega(J)]\omega'(J)\},\end{aligned} \tag{6}$$

где обобщенная функция $\delta^{2\pi}(\psi)$ – 2π-периодическая последовательность δ-функций [5, 6].

Для получения медленно изменяющейся эволюционной составляющей процесса достаточно усреднить по быстрой фазе первое уравнение (6). Пусть начальные условия выглядят так: $x(0) = \Delta$, $J = J_0 > 0$. Усредняя первое уравнение (6), после ряда вычислений можно получить "укороченное" уравнение вида

$$\dot J = \varepsilon E_1(J) \equiv -\varepsilon\left\{rT^{-1}(J)J + 4\int\limits_0^{T(J)} B(p; -J\chi[\psi, \omega(J)])\chi_\psi[\psi, \omega(J)]d\psi\right\}, \tag{7}$$

причем зависимость $T(J) = 2\pi/\omega(J)$ устанавливается при помощи соотношений (5). В первом приближении второе уравнение может не использоваться [8].

Таким образом, рассматривая различные модели трения, можно оценить параметры режима с затухающими соударениями.

4. Рассмотрим вначале случай, когда $B = 0$ и на процесс влияет только потеря энергии при соударениях. То есть $r \neq 0$ ($R < 1$). Из уравнения (7) и первого соотношения (5) находим при $\Delta > 0$

$$\dot J = -\frac{\varepsilon rJ\Omega}{2\{\pi - \operatorname{arctg}[J/(2\Omega\Delta)]\}}, \tag{8}$$

где приняты во внимание неравенства, входящие в первое соотношение (5).

Уравнение (8) – уравнение с разделяющимися переменными. Для упрощения задачи заметим, что единственному стационарному режиму соответствует прекращение соударений – обращение импульса удара в ноль: $J = J_0 = 0$. Этот режим – асимптотически устойчив, поскольку при малом возмущении стационарного режима δJ уравнение в вариациях и его решение примут вид

$$\delta\dot J = -\frac{1}{2}\varepsilon r\Omega\delta J; \quad \delta J = \delta J_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon r\Omega t\right). \tag{9}$$

Время возвращения системы на незатухающие свободные синусоидальные колебания (время прекращения виброударного процесса, сопровождаемого дребезгом) – в такой модели бесконечно.

Если система имеет предварительный натяг и $\Delta < 0$, то имеется мягкий анизохронизм и действует второе соотношение (5). В этом случае уравнение (7) при $B = 0$ принимает вид

$$\dot J = -\frac{\varepsilon rJ\Omega}{2\{\operatorname{arctg}[J/(2\Omega\Delta)]\}}. \tag{10}$$

В данном случае стационарное решение отсутствует, поскольку при $J \sim 0$ $\dot J > 0$. Считая импульс малым, линеаризуем уравнение (10)

$$\dot J = \varepsilon r\Omega^2\Delta = -\varepsilon r\Omega^2|\Delta|; \quad J(t) = J_0 - \varepsilon r\Omega^2|\Delta|t, \quad J_0 \sim \varepsilon. \tag{11}$$

Теперь можно оценить время дребезга ($t_Д$)

$$t_Д = J_0(\varepsilon r\Omega^2|\Delta|)^{-1}. \tag{12}$$

В данном случае при $J \to 0$: $\omega(J) \to \infty$, $T(J) \to 0$. Следовательно за время $t_Д$ должно произойти бесконечное число соударений. Р.Ф. Нагаев называл такое динамическое явление квазипластическим ударом [3]. Квазипластический удар – прямой результат идеализации, вносимой гипотезой Ньютона, предполагающей мгновенность ударного взаимодействия.

5. Пусть $\Delta > 0$. Рассмотрим теперь случай $B(p; x) \neq 0$. Поскольку численный анализ основного уравнения (7) не представляет труда при любой модели диссипации энергии, а наша цель – качественный аналитический анализ моделей дребезга, положим теперь $R = 1$, т.е. будем считать соударения упругими и в качестве механизма диссипации выберем вязкое трение: $B(p; x) = 2bpx \equiv 2b\dot{x}$; $b > 0$. Тогда, используя (3), (7), а также вычисления, проведенные в [5, 6] можно получить после интегрирования

$$\dot{J} = -\varepsilon J b(4\Omega^2\Delta^2 J^{-2} + 1)\{1 - [\Omega T(J)]^{-1}\sin[\Omega T(J)]\} \equiv \varepsilon E_1(J). \tag{13}$$

Анализ уравнения (13) сведется к интегралу, невыражаемому через элементарные функции и это уравнение не допускает стационарного решения, поскольку $E_1(J) < 0$.

Проведем оценку времени дребезга. Пусть импульс соударений достаточно мал. Например, начальный импульс для уравнения (13) $J_0 \sim \sqrt{\varepsilon}$. Тогда, оценивая функцию $E_1(J)$, можно показать, что $E_1(J) = -4\varepsilon\Omega^2\Delta^2 b J^{-1} + \varepsilon^2 \ldots$ и, подставляя это выражение в (13), находим

$$J(t) = \sqrt{J_0^2 - 8\varepsilon\Omega^2\Delta^2 bt}; \quad t_Д = J_0^2(8\varepsilon\Omega^2\Delta^2 b)^{-1}. \tag{14}$$

Причем время дребезга определяется из условия неотрицательности подкоренного выражения. Данная система – жестко анизохронна и период стремится к конечной величине с уменьшением импульса, поэтому число соударений, приходящихся на время $t_Д$ – конечно. Рассмотрим случай, когда потери энергии происходят за счет учета свойств материала соударяющихся тел, например, балочки (пружины) (рис. 2) имеют полимерную оплетку. Тогда в уравнении (2)

$$-B(p; x) = \int_{-\infty}^{t} \Gamma(t - s)x(s)ds,$$

где $\Gamma(t)$ – ядро релаксации [9, 10], параметры которого определяются характеристиками материала балочки с полимерной оплеткой.

Правая часть уравнения (7)

$$\varepsilon E_1(J) \equiv -4\varepsilon \int_0^{T(J)} B(p;\ -J\chi[\psi, \omega(J)])\chi_\psi[\psi, \omega(J)]d\psi =$$

$$= 4\varepsilon J \int_0^{T(J)} \int_0^{\infty} \Gamma(s)\chi[\psi, \omega(J)]ds\chi_\psi[\psi, \omega(J)]d\psi.$$

Для вычисления последнего интеграла возьмем форму записи функции $\chi[\psi, \omega(J)]$, определяющую решение (3) в форме бесконечного ряда. Используя вычисления, проделанные ранее в [5, 6], можно получить

$$\varepsilon E_1(J) = -4\varepsilon J\omega^3 \frac{\tilde{\Gamma}_s(\omega)}{\pi^2(\Omega^2 - \omega^2)^2} + \ldots, \tag{15}$$

где многоточие обозначает члены высоко порядка малости, а $\tilde{\Gamma}_s(\omega) = \int_0^\infty \Gamma(s)\sin\omega s ds$ – синус-преобразование Фурье ядра релаксации. Диссипативные свойства материала определяются именно этой величиной [9].

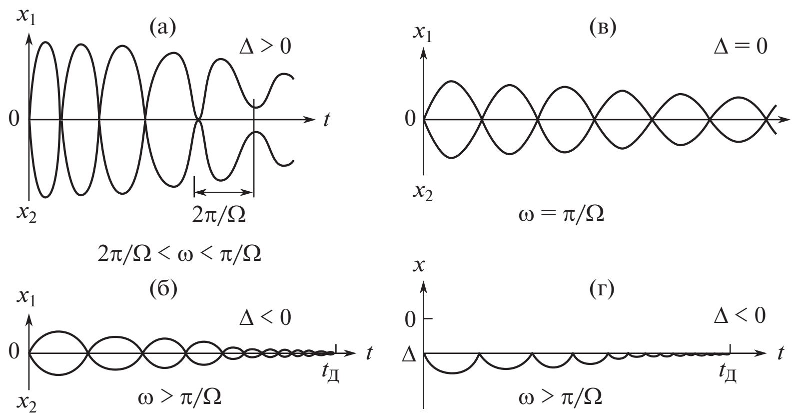


Рис. 3.

Дальнейшее зависит от конкретного вида ядра релаксации, поскольку именно оно определяет правую часть уравнения (7). Подробные рассмотрения здесь невозможны. В любом случае качественно здесь принципиально возможен переход на безударный режим по типу уравнения (8), когда существует стационарное решение $J = 0$, или по типу (13) когда стационарного решения нет. В первом случае модель даст бесконечное время затухания режима с соударениями, во втором – некоторое конечное время дребезга $t_Д$.

Совершенно аналогично рассматриваются и другие случаи действия диссипативных механизмов, а также не рассмотренные случаи комбинации этих механизмов.

Если исходная система близка к изохронной, т.е., если $\Delta = 0$ или $\Delta \approx 0$, усредненные уравнения (6) принимают особенно простой вид. Пусть в системе действуют вязкое трение и учитываются потери энергии при ударе. Тогда, с учетом третьего соотношения (5) $\dot{J} = -\varepsilon(r\Omega\pi^{-1} + b)J$; $\dot{\psi} = 2\Omega$.

Следовательно, для изохронной системы с нулевым зазором или для квазиизохронной системы, когда $\Delta \sim \varepsilon$, $J(t) = J_0 \exp[-\varepsilon(r\Omega\pi^{-1} + b)]$, $\psi(t) = 2\Omega t$.

6. Таким образом, можно, используя вид замены переменных (4), получить представление для закона изменения относительной координаты $x(t) = -J(t)\chi[t, \omega(J)]$, где функция χ определяется при помощи второго или пятого соотношения (3).

Учитывая предпосылки, при которых выводилось уравнение движения (2), можно получить законы движения $x_1(t)$ и $x_2(t)$

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}J(t)\chi[t, \omega(J)]; \quad x_2(t) = \frac{1}{2}J(t)\chi[t, \omega(J)].$$

Эскизы соответствующих графиков даны на рис. 3а, б, в. В верхних полуплоскостях показаны законы движения $x_1(t)$, в нижних – $x_2(t)$. Ось симметрии соответствует точкам контакта.

Характер изменения относительной координаты $x(t)$ показан на рис. 3г. Здесь взят случай бесконечноударного процесса конечной продолжительности при $\Delta < 0$ (12).

Такой же характер движения будет носить и при соударениях некоторого тела с неподвижным ограничителем или телом очень большой массы (п. 2).

Приведенные соотношения дают простые формулы и их можно использовать при проведении “прикидочных” расчетов конкретных систем, например, реле или других контактных и коммуникационных устройств. Более сложные задачи, конкретизирующие характер возможных движений, могут быть рассмотрены при использовании численных методик.

В связи с проведенными рассмотрениями отметим важную проблему описания характеристик глобальных вибрационных полей [11, 12], генерируемых виброударными и редкоударными процессами с дребезгами.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

При поддержке проекта РФФИ (проект № 18-08-00168).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ревич Ю.В.* Азбука электроники. Изучаем Arduino. М.: АСТ: Кладезь, 2017. 224 с.
2. *Мандельштам Л.И.* Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 466 с.
3. *Нагаев Р.Ф.* Механические процессы с повторными затухающими соударениями. М.: Наука, 1985. 200 с.
4. *Кобринский А.А.* Механизмы с упругими связями. М.: Наука, 1964. 292 с.
5. *Бабицкий В.И., Крупенин В.Л.* Колебания в сильно нелинейных системах. М.: Наука, 1972. 390 с.
6. *Babitsky V.I., Krupenin V.L.* Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems. Berlin: Springer-Verlag, 2001. 404 p.
7. *Бабицкий В.И., Ковалева А.С., Крупенин В.Л.* Исследование квазиконсервативных виброударных систем методом усреднения // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1982. № 1. С. 41.
8. *Бурд В.Ш., Крупенин В.Л.* Усреднение в квазиконсервативных системах. М.: Белый Ветер, 2016. 172 с.
9. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
10. *Илюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
11. *Erofeev V.I., Pavlov I.S., Leontiev N.V.* A Mathematical Model for Investigation of Nonlinear Wave Processes in a 2D Granular Medium Consisting of Spherical Particles // Composites: Mechanics, Computations, Applications, An International Journal. 2013. V. 4. № 3. P. 239.
12. *Крупенин В.Л.* Об описании сильно нелинейных вибропроводящих и виброгенерирующих сред // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 4. С. 9.

ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2020, № 3, с. 11–16

МЕХАНИКА МАШИН

УДК 534.1,621.1

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КИНЕМАТИКИ ДВИЖЕНИЙ ПЛАВАЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ В РОТОРНЫХ МЕХАНИЗМАХ

Л. Я. Банах[1,*], Л. И. Тывес[1]

[1]*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*
**e-mail: banl@inbox.ru*

Поступила в редакцию 06.11.2018 г.
Принята к публикации 31.01.2020 г.

Экспериментально исследуется кинематика движений плавающего элемента (кольца) роторного механизма при установившихся низкооборотных режимах вращения. Кольцо установлено с зазором относительно ведущего цилиндрического звена и обегает его, не теряя контакта. Показано, что движение кольца при “лунном” движении ведущего звена представляет собой прямую асинхронную прецессию, при котором его точки описывают эпитрохоиды.

Ключевые слова: ротор, механизм, плавающее кольцо, контакт, прецессия кольца, траектории

DOI: 10.31857/S0235711920030049

Постановка задачи. В роторных механизмах нередко происходит контакт вращающегося ротора с элементами роторной системы. При этом могут быть выделены две различные ситуации: 1) контакты ротора с неподвижным или упруго-закрепленным жестким статором; 2) контакты ротора с подвижными элементами (плавающие или пальчиковые уплотнения, гидростатические опоры с плавающими втулками, инерционные вибродробилки). При этом плавающие элементы в свою очередь могут контактировать со статором или другими плавающими элементами.

Контактные режимы в этих двух случаях существенно различаются.

В первом случае возникает обкатка ротора изнутри по статору, что сопровождается проскальзыванием ротора и приводит к быстрому износу подшипников и тяжелым аварийным ситуациям. Ротор при обкатке совершает асинхронную прецессию в направлении, противоположном скорости вращения (обратная прецессия). При этом скорость прецессии чрезвычайно велика, и давление на статор может в десятки раз превышать вес самого ротора [1–6], вследствие того, что прецессия обратная траектории точек ротора представляет собой гипотрохоиды.

Второй тип контактных режимов – это вращение ротора внутри легких подвижных элементов системы, например, в подшипниках с плавающей втулкой, внутри плавающих уплотнений [7–10]. Плавающие уплотнения обеспечивают хорошую герметизацию уплотнения. Такие режимы при низких скоростях вращения ротора специально поддерживаются в инерционных вибродробилках [2]. Возникновение контактных режимов может привести к повреждению и даже разрушению плавающих элементов. При этом плавающее кольцо “обегает” ротор снаружи в режиме прямой прецессии [3]. В дальнейшем (в отличие от режима обкатки ротора по неподвижному основанию) будем называть такие режимы *обеганием* кольца вокруг ротора. Такого класса системы относятся к механизмам с высшими кинематическими парами.

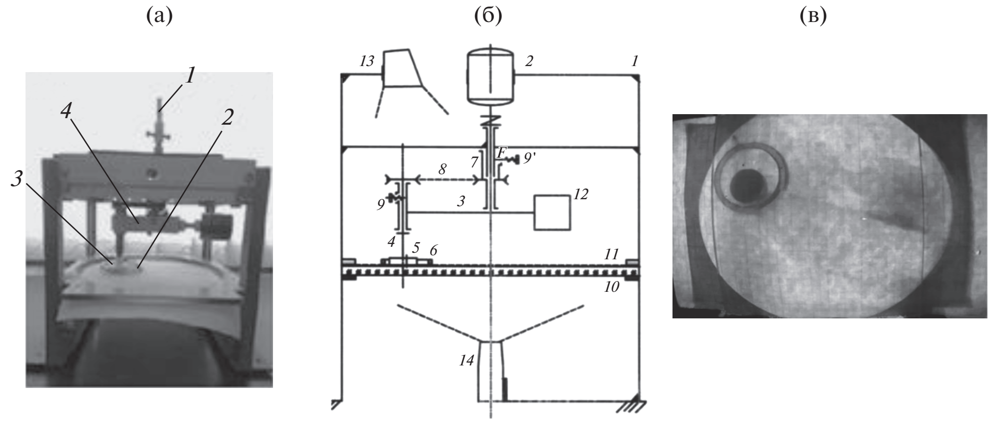


Рис. 1. (а) общий вид экспериментальной установки для кинематического анализа траекторий кольца при “обегании”: *1* – двигатель; *2* – кольцо; *3* – шайба; *4* – рычаг, передающий вращение от двигателя к шайбе *3*; (б) кинематическая схема экспериментальной установки; (в) кадр видеосъемки вращения кольца при его обегании вокруг ротора.

В статье рассматривается система “ротор-плавающее кольцо”. Приводится анализ траекторий, полученных на экспериментальной установке, моделирующей процесс обегания. Процесс обегания – это достаточно сложный многочастотный режим. Поэтому, прежде чем исследовать этот процесс в роторных системах, необходимо вначале на модельной установке исследовать кинематику движений кольца при малых скоростях вращения, найти его траектории и выявить основные закономерности. Найдены экспериментальные траектории движения кольца при различных параметрах системы, что позволяет развить и уточнить результаты теоретического исследования [11].

Описание экспериментальной установки. Для моделирования процесса обегания была сконструирована и изготовлена экспериментальная установка, кинематическая схема и общий вид которой представлены на рис. 1а, б. На основании *1* (рис. 1б) установлен двигатель *2* вращения ведущего вала модели с рычагом *3*, шарнирно связанным на одном конце с осью *4*, на которой укреплены шайба *5*, моделирующая ротор, и одну из шестерен зубчато-ременной передачи *8*. На другом конце рычага *3* установлен противовес *12*, уравновешивающий рычаг *3* с несущими элементами относительно оси его вращения. Кольцо *6*, охватывающее шайбу *5* с зазором, лежит на бумажном листе *11* на стеклянной подложке *10*. Плоскость стеклянной подложки и, соответственно, бумажного листа перпендикулярна осям вращения рычага *3* и шайбы *5*. Зазор между нижней плоскостью шайбы *5* и бумажным листом *11* не превышает 0.5 мм.

Ступица второй шестерни *7* зубчато-ременной передачи *8* установлена либо с возможностью вращения вместе с ведущим валом модели с рычагом *3*, либо с фиксацией относительно неподвижной ступицы на основании *1*. Для имитации лунного вращения модели ротора ось *4* с шайбой *5* и первой шестеренкой зубчато-ременной передачи *8* фиксируется относительно рычага *3* винтом *9*. Перенос винта *9* в позицию *9′* с фиксацией вращений второй шестеренки *7* относительно основания *1* преобразует движение шайбы *5* в круговое поступательное движение. В этом случае шайба *5* и кольцо *6* образуют систему типа “хула-хуп”. В настоящей статье исследуется кинематика роторной системы с “лунным” движением ротора. Установка оснащена приборами освещения *13*, установленными сверху, и видеокамерой *14* – снизу. На кольце *6* имеются видимые на кадрах видеосъемки метки (рис. 1в). Путем покадровой обработки были построены траектории движения кольца.

Параметры данной установки: длина рычага $a = 40$ мм; радиус вращающейся шайбы $r = 10$ мм; внутренние радиусы сменных колец, совершающих обегание $R = 11.5$ мм; 19 мм; 35 мм.

При указанных соотношениях параметров a, r эта установка отличается от традиционных систем "ротор–плавающее кольцо". Отличие так же и в скоростях вращений. В экспериментальной установке они много ниже первой критической скорости вращения роторных систем. Однако, в ней отражена специфическая особенность роторных систем, а именно, "лунное" движение неуравновешенного ротора. При установившемся движении вследствие равенства частот вынужденных колебаний ротора частоте прецессии каждая точка ротора сохраняет свое положение относительно оси вращения, т.е. имеет место прямая синхронная прецессия ротора [13].

Некоторые особенности режима обегания в экспериментальной установке. Прежде, чем перейти к описанию кинематической модели системы "вращающаяся шайба–плавающее кольцо", оценим влияние центробежных сил и сил трения, действующих на кольцо в установившемся режиме движения. В рассматриваемой модели ось шайбы вертикальна, а кольцо скользит как по горизонтальной плоскости, так и по цилиндрической поверхности относительно шайбы.

В установившемся режиме движения при постоянной скорости вращения кольца относительно его центра масс момент сил инерции кольца равен нулю.

Силы сухого трения кольца при скольжении по горизонтальной поверхности в случае низких скоростей вращения не симметричны относительно вектора скорости центра масс кольца. Сила трения на участке кольца с меньшим значением скоростей скольжения (т.е. расположенном ближе к оси вращения "ротора") больше, чем сила трения на участке кольца с большим значением скоростей скольжения. Первые приближаются к силам трения покоя, а вторые к силам трения движения. Гипотетически, эта асимметрия сил трения позволяет представить их в виде вектора силы трения, равного сумме сил трения приведенных к центру масс кольца, и направленного по касательной к траектории его движения, и момента сил трения, равного произведению разности сил трения на упомянутых участках кольца на средний радиус кольца. Такая же ситуация может иметь место вследствие разности технологических сопротивлений среды, в которой перемещается кольцо, и ее нетрудно воспроизвести в экспериментах.

Сумма векторов силы трения и центробежных сил определяет как точку контакта ротора и кольца, так и величину взаимного давления в ней. От соотношения величины силы трения, создаваемой этим давлением, и усилием, создаваемым моментом сил сопротивления на кольце, зависит скорость вращения кольца.

Для оценки влияния сил трения проведен эксперимент, в котором на горизонтальную подложку был наклеен круг наждачной бумаги. При этом скорость вращения кольца увеличилась, но не достигла скорости прецессии.

Указанные особенности относятся только к данной экспериментальной установке. Что же касается роторных систем, то в них нет горизонтальной подложки, а, следовательно, и сил сухого трения между горизонтальной поверхностью и кольцом.

Кинематическая модель движений системы "вращающаяся шайба–плавающее кольцо" в режиме обегания

При соотношениях между параметрами системы, приведенными выше, взаимное расположение геометрических центров шайбы и кольца имеет вид, представленный на рис. 2. Геометрический центр O_1 шайбы совершает круговые движения с амплитудой a вокруг оси вращения O (окружность *5* на рис. 2). Рис. 2 соответствуют следующие обозначения в тексте: $OO_1 = a$, $O_1N = r$ – радиус шайбы, $O_1O_2 = \delta$, $PO_2 = R$ – радиус кольца. Точка N орбиты шайбы – наиболее удаленная от центра вращения. Эта

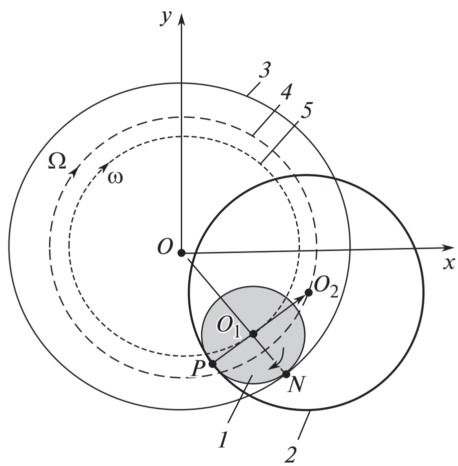


Рис. 2. Взаимное расположение центров: О – центр вращения системы; *1* – шайба; *2* – плавающее кольцо; *3* – траектория точки N шайбы, наиболее удаленной от оси вращения; *4* – траектория центра кольца O_2; *5* – траектория центра шайбы O_1.

точка при вращении шайбы описывает окружность радиуса $r + a$, центр которой лежит на оси вращения О (рис. 2, окружность *3*). Вращение рычага *4* имитирует вращение центра ротора, а длина рычага *4* – пропорциональна величине дисбаланса, шайба *3* при этом совершает "лунное" движение, что имитирует прямую синхронную прецессию неуравновешенного ротора [12]. Это позволяет предположить, что точка контакта на шайбе остается одной и той же.

Действительно, как показали эксперименты, при малом трении между кольцом и опорной плоскостью и сравнительно невысоких скоростях вращения ротора, когда силы инерции кольца также невелики, контакт кольца происходит в такой точке шайбы P, что угол PO_1N примерно равен $\pi/2$. При установившемся движении точка контакта P на шайбе остается практически одной и той же (рис. 2), в то время как точки контакта на кольце различны. Кольцо обкатывает шайбу без отрыва, при этом геометрический центр кольца O_2 также описывает окружность (окружность *4*), концентричную окружности *3*. Радиус этой окружности, определяется из треугольника OO_1O_2 (рис. 2) и равен $\delta = (a^2 + (R - r)^2)^{1/2}$, где R – радиус кольца.

Как показали эксперименты, скорость прецессии геометрического центра кольца совпадает со скоростью прецессии геометрического центра шайбы, как по величине, так и по направлению, то есть $\omega = \Omega$. Это объясняется тем, что прямая, соединяющая центры шайбы и кольца перпендикулярна касательной в точке контакта. Следовательно, когда точка контакта на "роторе" постоянна, скорость вращения этой прямой совпадает со скоростью вращения точки контакта. Поскольку шайба совершает прямую синхронную прецессию со скоростью ω вокруг центра вращения О, то она сообщает кольцу скорость прецессии $\Omega = \omega$ вокруг того же центра О.

Каждая из точек плавающего кольца участвует в двух движениях: вращении вокруг центра кольца со скоростью ω_1 и прецессии центра кольца Ω в том же направлении. Уравнения траектории точек кольца имеют вид

$$x(t) = R\sin\omega_1 t + \delta\sin\Omega t, \quad y(t) = R\cos\omega_1 t + \delta\cos\Omega t. \tag{1}$$

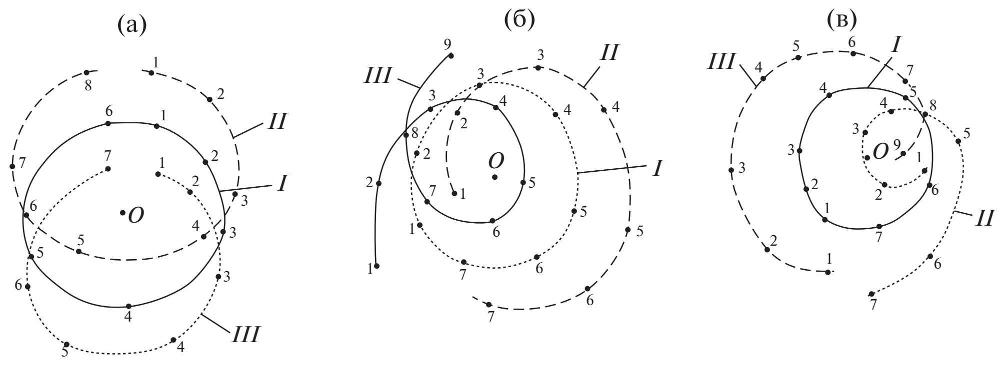


Рис. 3. Экспериментальные траектории точек кольца в режиме обегания: *I* – траектория центра кольца; *II*, *III* – траектории диаметрально противоположных точек кольца: (а) $R/r = 1.1$; (б) $R/r = 1.9$; (в) $R/r = 3.5$.

Скорость вращения кольца можно определить из следующих условий. Радиус кольца больше радиуса шайбы, поэтому за время полного оборота шайбы внутри кольца оно повернется вокруг своего центра на угол, равный $\beta = 2\pi(r/R)$. Следовательно, скорость вращения кольца ω_1 составит

$$\omega_1 = \omega r/R \tag{2}$$

Уравнения (1) в случае прямой прецессии кольца описывают эпитрохоиды, количество петель которых n определяется отношением скорости вращения кольца к скорости прецессии его центра $n = 1 + \omega_1/\Omega$.

При вращении ротора с большими скоростями необходимо исследовать динамические процессы с учетом гидродинамических сил в зазоре, а также сил сухого трения [10].

Экспериментальные траектории точек кольца при "обегании". При обработке экспериментальных данных возникли определенные трудности при фиксации положений точек кольца на траектории. Использование записывающих устройств приводило к введению дополнительного демпфирования между кольцом и диаграммой, что существенно искажало процесс обегания. Поэтому положение точки кольца отмечалось на диаграмме без контакта с кольцом при различных углах поворота рычага ("ротора"). На каждом кадре фиксировалось положение двух диаметрально расположенных точек кольца, что позволило определить также траекторию центра кольца и скорость его прецессии. Эти траектории при различных соотношениях между радиусами колец и шайбы при одном обороте шайбы приведены на рис. 3. Траектории получены при одинаковых коэффициентах трения между кольцом и шайбой, а также между ними и средой, что позволяет провести их сравнительный анализ.

На рис. 3а, б, в представлены траектории точек колец в режиме обегания за один оборот шайбы, полученные на экспериментальной установке. Из (2), в частности, следует, что скорость вращения кольца меньше скорости вращения шайбы, и поэтому при вращении шайбы метки кольца будут отставать от метки шайбы, что и наблюдается в экспериментах. При наличии проскальзывания скорость вращения кольца снижается.

Таким образом, прецессия центра кольца – прямая (в отличие от режима обкатки, когда прецессия обратная) и траектории точек кольца представляют собой эпитрохоиды.

Если радиусы кольца R и шайбы r близки между собой (рис. 3а), траектории точек кольца представляют собой окружности радиуса r^*, что подтверждается соотношениями (1).

Траектории рис. 3 получены при одинаковых коэффициентах трения между кольцом и шайбой, а также между ними и средой. Это позволяет провести сравнение скоростей вращения кольца и шайбы для различных соотношений их радиусов. Получены следующие отношения скорости вращения кольца ω_1 к его скорости прецессии Ω: а) при $R = 19$ мм: $\omega_1/\Omega = 1.6$ и траектория кольца – эпитрохоида с одной петлей (рис. 3б); б) при $R = 30$ мм: $\omega_1/\Omega = 2.7$ и траектория кольца – эпитрохоида с двумя петлями (рис. 3в).

Выводы:

– траектории точек кольца в роторных системах представляют собой эпитрохоиды, количество петель которых n определяется отношением скорости вращения кольца к скорости прецессии его центра;

– прецессия центра кольца – прямая (в отличие от режима обкатки, когда прецессия – обратная);

– траектория центра кольца представляет собой окружность, а скорость прецессии совпадает со скоростью вращения возбудителя колебаний (ротора).

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Поддержано грантом РФФИ № 18-08-00-171а.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Банах Л.Я.* Некоторые явления, возникающие при движении вала в подшипнике с зазором // Машиноведение. 1965 № 1. С. 70.
2. *Блехман И.И.* Вибрационная механика. М.: Наука, 1994. 398 с.
3. *Banakh L.* Contact problems in rotor systems // Vibroengineering. Procedia. October 2016. ISSN 2345-0533. V. 8. P. 90.
4. *Shatochin V.F.* Vibrations of turbogenerator rotors with rolling of rotor to stator. Modeling techniques and software tools. Lap Lambert Academic Publishing. 2016. 308 p.
5. *Костюк А.Г., Шатохин В.Ф., Волоховская О.А.* Особенности движения ротора с задеванием о статор // Теплоэнергетика. 2013. № 9. С. 21.
6. *Никифоров А.Н.* Обобщенная математическая модель ротора Джеффкота–Лаваля с учетом проскальзывания при контактах и несоосности со статором // Вестник научно-технического развития. 2012. № 5(57). С. 41.
7. *Банах Л.Я., Никифоров А.Н.* Снижение уровня вибрации быстроходных роторных систем при помощи плавающих уплотнительных колец // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2013. № 4. С. 20.
8. *Rozhdestvensky Yu., Boyarshinova A. and etc.* Dynamics Analysis of Rotor with Floating Rings Package Bearing // 8-th IFToMM Int. Conf. on Rotor Dynamics. 2010. Seoul. Korea.
9. *Li C.H., Rohde S.M.* On the Steady and Dynamic Performance Characteristics of Floating Ring Bearings // ASME Paper N. 80-C2/Lub-17. 1980
10. *Ахметханов Р.С., Банах Л.Я., Рудис М.А.* Анализ нестационарных колебаний быстровращающихся роторных систем с учетом газодинамических сил // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2001. № 6. С. 16.
11. *Банах Л.Я., Бармина О.В., Кельнер М.С.* Кинематика движений в роторной системе при контакте ротора с плавающими элементами // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 4. С. 26.
12. *Диментберг Ф.М.* Изгибные колебания вращающихся валов Изд. АН СССР. 1959. 247 с.

МЕХАНИКА МАШИН

УДК 681.51

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СТАНОЧНОГО ОБОРУДОВАНИЯ, ПОСТРОЕННОГО НА ОСНОВЕ ВРАЩАТЕЛЬНО-ЛИНЕЙНЫХ МОДУЛЕЙ

В. Л. Афонин[1,*], А. Н. Смоленцев[1], Л. В. Гаврилина[1]

[1]*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*

**e-mail: afoninwl@rambler.ru*

Поступила в редакцию 10.06.2019 г.
Принята к публикации 31.01.2020 г.

Рассмотрено применение вращательно-линейных мехатронных модулей в манипуляторах станочного оборудования для механической обработки. Приводится решение обратной задачи о положении и оценка кинематических возможностей устройства на основе вращательно-линейных мехатронных модулей для станочного оборудования. Получены уравнения динамики, на их основе проведена оценка динамических характеристик и точности обработки сложных поверхностей (на примере обработки пера лопаток газотурбинных двигателей).

Ключевые слова: механизм параллельной структуры и относительного манипулирования, мехатронный приводной модуль, обратная задача о положении, робот-станок, уравнения динамики

DOI: 10.31857/S0235711920030025

Наиболее важными показателями станочного оборудования являются максимально возможные ускорения перемещений инструмента относительно детали, рабочая зона и углы сервиса, а также точность позиционирования. Для повышения максимально возможных ускорений в манипуляторах в работе [1] предложено применение механизмов параллельной структуры, однако небольшие углы сервиса этих устройств существенно ограничивают их технологические возможности.

Ранее для более сложных механизмов в станочном оборудовании предлагалось применять вращательно-линейные мехатронные модули, перемещающие основания кинематических цепей трипода [2]. В ИМАШ РАН были предложены более сложные конструкции аналогичных механизмов с частичной кинематической развязкой, где применен вращательно-линейный привод [3]. Однако подобные механизмы структурно излишне сложны, что снижает точность позиционирования выходного звена. Применение совместного вращательно-поступательного синхронного электродвигателя с ротором в виде набора постоянных магнитов позволяет уменьшить число кинематических пар и упростить конструкцию механизма [4]. Такой электропривод вместе с датчиками положения составляет вращательно-поступательный мехатронный модуль. Исследования в этом направлении продолжаются [5–7], однако эти модули пока не нашли широкого применения из-за конструктивной сложности. Полностью исключить влияние механических эффектов на позиционирование невозможно из-за необходимости применения вращательно-линейных подшипников. В то же время может иметь место электромагнитное взаимодействие, связанное с вихревыми токами в ро-

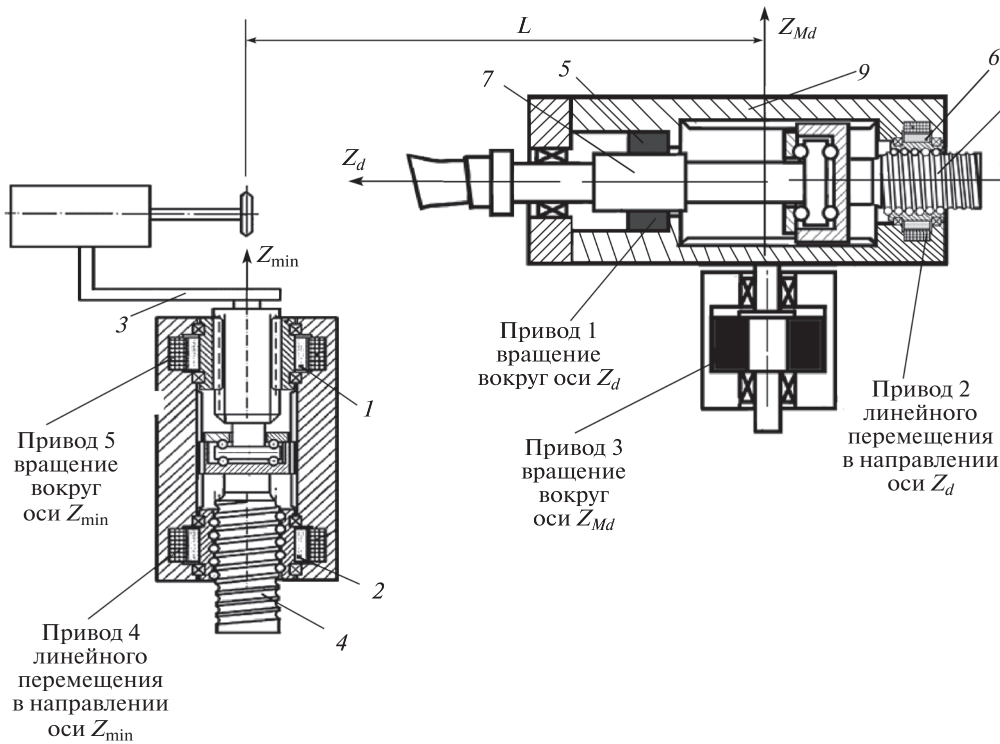


Рис. 1. Робот-станок на основе вращательно-линейных модулей.

торе. Поэтому целесообразно собрать аналогичный модуль из комплектующих, производимых серийно, используя синхронные электродвигатели [8].

1. Пятикоординатный робот-станок на основе вращательно-линейных модулей. Вращательно-линейный модуль включает шлицевую втулку *1* (рис. 1), которая передает вращение двигателя и обеспечивает вращательное движение выходного объекта манипулирования. Внутренний вал шлицевой втулки кроме вращения позволяет выполнять линейное перемещение. Линейное перемещение осуществляется через шарико-винтовую пару *2*, *4* (рис. 1), преобразующую вращательное движение двигателя в линейное перемещение выходного вала.

На базе вращательно-линейных модулей возможно создание пятикоординатного робота-станка (рис. 1). Манипулятор перемещения инструмента *1*, *2*, *3*, *4* (рис. 1) представляет собой вращательно-линейный модуль, выполняющий перемещение по двум координатам. Шарико-винтовой преобразователь совместно с приводом (двигатель вращения гайки шарико-винтового преобразователя) осуществляет линейное перемещение вдоль оси $Z_{\min}$. Перемещение инструмента вокруг оси $Z_{\min}$ выполняется приводом через шлицевую втулку. Манипулятор перемещения детали *5*, *6*, *7*, *8*, *9* (рис. 1) включает вращательно-линейный модуль, позволяющий выполнять перемещение детали по двум координатам: линейное перемещение детали вдоль оси Z_d и вращение вокруг оси Z_d, а также включает привод *3* вращения корпуса вращательно-линейного модуля вокруг вертикальной оси Z_{Md}.

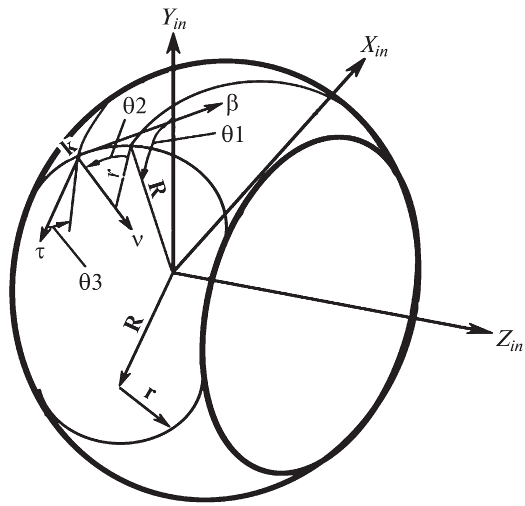


Рис. 2. Обрабатывающий инструмент (шлифовальный круг), имеющий торовую режущую поверхность.

В совокупности манипуляторы перемещения инструмента и детали обеспечивают обработку поверхности детали, создавая относительное перемещение детали и инструмента.

2. Решение кинематической задачи управления пятикоординатным роботом-станком. Решение кинематической задачи управления пятикоординатным роботом-станком состоит в формировании законов управления обобщенными координатами исполнительного механизма, обеспечивая перемещение режущей кромки (сопровождающий трехгранник $(\tau\nu\beta)_k$) по заданной траектории на обрабатываемой поверхности.

В совокупности манипуляторы перемещения детали и инструмента представляют собой механизм относительного манипулирования, который позволяет осуществлять перемещение инструмента относительно обрабатываемой поверхности детали по пяти независимым координатам. Введение вычисляемых, либо задаваемых параметров, определяющих положение режущей кромки на режущей поверхности, позволяют выполнять обработку сложных поверхностей, обеспечивая положение режущей кромки инструмента по шести координатам. Входной информацией для управления обобщенными координатами обрабатывающего станка являются параметры, определяющие траекторию движения инструмента (режущей кромки) по обрабатываемой поверхности детали. Такими параметрами являются координаты сопровождающего трехгранника, связанного с формообразующей режущей кромкой инструмента при ее движении по траектории.

Математически для решения кинематической задачи управления обобщенными координатами исполнительного механизма станка вводится сопровождающий трехгранник $(\tau\nu\beta)_i$, определяющий траекторию движения режущей кромки по обрабатываемой поверхности, ось τ направлена по направлению скорости движения режущей кромки, ось ν – по нормали к поверхности и β – по направлению режущей кромки (рис. 2).

Принятые направления осей координат сопровождающего трехгранника являются условными, так как режущая кромка инструмента не всегда представляет прямую линию. Однако принятое представление для описания формообразования поверхности

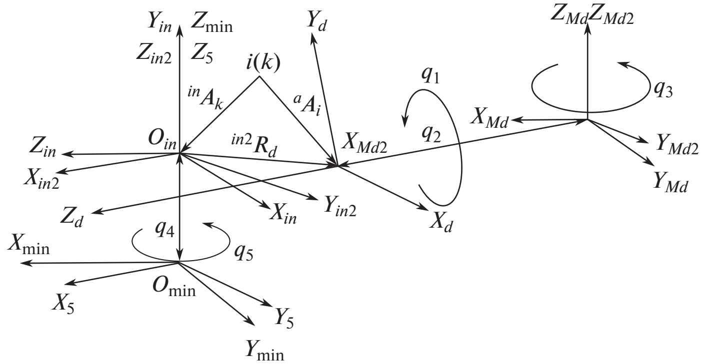


Рис. 3. Декартовые системы координат, принятые для описания кинематических преобразований.

позволяет получить зависимости между движением инструмента относительно детали и обобщенными координатами исполнительного механизма станка.

Решение кинематической задачи применительно для робота-станка на основе вращательно-линейных модулей решается введением декартовых систем координат (рис. 3): $(XYZ)_{Md}$ – неподвижная система координат, связанная с манипулятором перемещения детали, принимается за нулевую систему координат, $(XYZ)_{\min}$ – неподвижная система координат, связанная с манипулятором инструмента, $(XYZ)_{Md2}$ – подвижная система координат, связанная с вращательно-линейным модулем манипулятора детали и перемещаемая относительно системы координат $(XYZ)_{Md}$ на угол q_3, $(XYZ)_d$ – подвижная система координат, в которой задается описание обрабатываемой поверхности детали (движение сопровождающего трехгранника $(\tau\nu\beta)_i$) – ${}^{\mathrm{d}}\mathrm{A}_{\mathrm{i}}(t)$. Данная система координат перемещается относительно системы координат $(XYZ)_{Md2}$: линейное перемещение q_2 и поворот на угол q_1.

Подвижная система координат $(XYZ)_{in}$ (рис. 3) – связана с обрабатывающим инструментом, в которой задается положение режущей кромки $(\tau\nu\beta)_k$. Система координат $(\tau\nu\beta)_{in}$ перемещается относительно $(XYZ)_{\min}$ вращательно-линейным модулем: q_4 – линейное перемещение в направлении оси $Z_{\min}$ и q_5 – вращение вокруг данной оси.

Для решения кинематической задачи и определения обобщенных координат механизма, обеспечивающих перемещение режущей кромки инструмента по заданной траектории на обрабатываемой поверхности детали, используются матрицы Данэвита–Хартенберга, позволяющие одновременно вычислять угловые перемещения звеньев механизма, которые связаны с соответствующей декартовой системой координат и их линейные перемещения. Элементы матриц являются функциями обобщенных координат, что позволяет получать уравнения относительно обобщенных координат, решая которые определяются зависимости между параметрами, определяющими положение режущей кромки на обрабатываемой поверхности, и обобщенными координатами.

Положение трехгранника $(\tau\nu\beta)_i$ в системе координат детали $(XYZ)_d$ определяется матрицей

$$ {}^{\mathrm{d}}\mathbf{A}_{\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} {}^{\mathrm{d}}\mathbf{C}_{\mathrm{i}} & {}^{\mathrm{d}}\mathbf{R}_{\mathrm{i}} \\ \mathbf{0}^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}, \tag{1} $$

где матрица ${}^{\mathrm{d}}\mathbf{C}_{\mathrm{i}}$ размерности [3 · 3] определяет направляющие косинусы осей τ, ν и β относительно осей X, Y, Z и являются функциями текущего времени t, четвертый столбец матрицы (1) ${}^{\mathrm{d}}\mathbf{R}_{\mathrm{i}} = [x_i\ y_i\ z_i]^{\mathrm{T}}$ определяет текущие координаты точки траектории i на обрабатываемой поверхности в системе координат $(XYZ)_d$.

Для определения и управления обобщенными координатами робота-станка необходимо определить точное положение координатной системы $(XYZ)_{\min}$ относительно $(XYZ)_{Md}$. Положение данной системы координат определяется выполнением специальной методики базирования, используя головки типа Ренешоу и специальный типовой образец детали. В качестве начала отсчета для q_5 и q_3 принимаются положения осей $X_{\min}$ и X_{Md}.

Процедура нахождения обобщенных координат выполняется последовательно, начиная с простейшего способа вычисления одной из обобщенных координат. Подставляя затем полученные значения в дальнейшие вычисления, определяются последующие недостающие обобщенные координаты.

Для удобства вычислений вводится промежуточная система координат с центром в 0_{in} – $(XYZ)_{in2}$, оси которой параллельны осям системы $(XYZ)_{Md2}$. Из условия равенства элементов матрицы, определяющей положения трехгранника $(\tau\nu\beta)_i$ в системе координат $(XYZ)_{Md}$, соответствующим элементам матрицы, определяющей положение режущей кромки $(\tau\nu\beta)_k$ также в системе координат $(XYZ)_{Md}$ ${}^{\mathrm{Md}}\mathbf{A}_{\mathrm{i}} = {}^{\mathrm{Md}}\mathbf{A}_{\mathrm{k}}$, составляются системы уравнений, решение которых позволяют определять обобщенные координаты робота-станка, зная параметры положения $(\tau\nu\beta)_i$ в системе координат $(XYZ)_d$.

Для определения обобщенной координаты q_1 и параметра θ_1 из равенства элементов матриц ${}^{\mathrm{Md}}\mathbf{A}_{\mathrm{i}}[3, 1]$, ${}^{\mathrm{Md}}\mathbf{A}_{\mathrm{i}}[3, 2]$, ${}^{\mathrm{Md}}\mathbf{A}_{\mathrm{i}}[3, 3]$ соответствующим элементам матриц ${}^{\mathrm{Md}}\mathbf{A}_{\mathrm{k}}[3, 1]$, ${}^{\mathrm{Md}}\mathbf{A}_{\mathrm{k}}[3, 2]$, ${}^{\mathrm{Md}}\mathbf{A}_{\mathrm{k}}[3, 3]$ составляется система уравнений

$$\begin{gathered}
-\sin(\theta_1)\cos(\theta_3) - \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\sin(\theta_3) = C11 \cdot \sin(q_1) + C21 \cdot \cos(q_1) - \\
-\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) = C12 \cdot \sin(q_1) + C22 \cdot \cos(q_1) - \\
-\sin(\theta_1)\sin(\theta_3) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\cos(\theta_3) = C13 \cdot \sin(q_1) + C23 \cdot \cos(q_1),
\end{gathered} \tag{2}$$

решая которую получим

$$q_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{C22 \cdot \sin(\theta_2) + (C23 \cdot \cos(\theta_3) - C21 \cdot \sin(\theta_3))\cos(\theta_2)}{(C11 \cdot \sin(\theta_3) - C13 \cdot \cos(\theta_3))\cos(\theta_2) - C12 \cdot \sin(\theta_2)}\right),$$

$$\theta_1 = \arccos\left(-\frac{C12 \cdot \sin(q_1) + C22 \cdot \cos(q_1)}{\cos(\theta_2)}\right).$$

Для нахождения обобщенной координаты q_3 определяются координаты вектора ${}^{\mathrm{in2}}\mathbf{R}_{\mathrm{d}}$ в системе координат $(XYZ)_{in2}$. Вектор ${}^{\mathrm{in2}}\mathbf{R}_{\mathrm{d}}$ является суммой двух векторов ${}^{\mathrm{in2}}\mathbf{R}_{\mathrm{d}} = {}^{\mathrm{in2}}\mathbf{R}_{\mathrm{k}} + {}^{\mathrm{k}}\mathbf{R}_{\mathrm{d}}$. Отношение координаты вектора ${}^{\mathrm{in2}}\mathbf{R}_{\mathrm{d}}$ на ось Y – $(Y({}^{\mathrm{in2}}\mathbf{R}_{\mathrm{d}}))$ системы координат $(XYZ)_{in2}$ и расстояния между центрами $0_{\min}$ и 0_{Md} – ${}^{\mathrm{in}}\mathbf{R}_{\mathrm{d}} = \overline{0_{\min}0_{Md}} = L$ является синусом обобщенной координаты угла q_3

$$\sin(q_3) = \frac{Y({}^{\mathrm{in2}}\mathbf{R}_{\mathrm{d}})}{L}. \tag{3}$$

Из уравнения (3) после вычисления $Y({}^{\mathrm{in2}}\mathbf{R}_{\mathrm{d}})$ и преобразования получим

$$q_3 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{A}{L + B}\right), \tag{4}$$

где

$$A = ((-\cos(\theta_3)\cos(\theta_1) + \sin(\theta_2)\sin(\theta_3)\sin(\theta_1))\times$$
$$\times(-C11\cdot x_i - C21\cdot y_i - C31\cdot z_i) + \cos(\theta_2)\sin(\theta_1))\times$$
$$\times(-C12\cdot x_i - C22\cdot y_i - C32\cdot z_i) + ((\cos(\theta_3)\cos(\theta_1) + \sin(\theta_2)\times$$
$$\times\sin(\theta_3)\sin(\theta_1))(-C11\cdot x_i - C21\cdot y_i - C31\cdot z_i) +$$
$$+\cos(\theta_2)\sin(\theta_1))(-C12\cdot x_i - C22\cdot y_i - C32\cdot z_i) +$$
$$+(-\sin(\theta_3)\cos(\theta_1) - \sin(\theta_2)\cos(\theta_3)\sin(\theta_1)(-C13\cdot x_i - C23\cdot y_i - C32\cdot z_i)),$$
$$B = (\cos(\theta_2)\sin(\theta_3)(-C11\cdot x_i - C21\cdot y_i - C31\cdot z_i) +$$
$$+\sin(\theta_2)(-C12\cdot x_i - C22\cdot y_i - C32\cdot z_i)) +$$
$$+\cos(\theta_2)\cos(\theta_3)(-C13\cdot x_i - C23\cdot y_i - C33\cdot z_i)).$$

Обобщенная координата q_2 аналогично q_3 может быть определена из конструктивного расположения манипуляторов перемещения инструмента и детали

$$L\cos(q_3) = z_i + q_2, \tag{5}$$

из которого

$$q_2 = L\cos(q_3) - z_i. \tag{6}$$

Для вычисленных q_1, q_2, q_3, θ_1 и задаваемых θ_2, θ_3 определяются обобщенные координаты q_4 и q_5. Для этого из равенства элементов матриц преобразования координат ${}^{\mathrm{Md}}\mathbf{A}_{\mathrm{i}}$ [3, 4] = ${}^{\mathrm{Md}}\mathbf{A}_{\mathrm{k}}$ [3, 4] составляется уравнение

$$\cos(\theta_1)r(1-\cos(\theta_2)) + (R + r\cos(\theta_1) + q_4 + z_{\min} = x_i\sin(q_1) + y_i\cos(q_1), \tag{7}$$

из которого определяется обобщенная координата q_4

$$q_4 = x_i\sin(q_1) + y_i\cos(q_1) + \cos(\theta_1)r(1-\cos(\theta_2)) - (R + r)\cos(\theta_1) - z_{\min}. \tag{8}$$

Соответственно из равенства элементов матриц ${}^{\mathrm{Md}}\mathbf{A}_{\mathrm{i}}[1, 4] = {}^{\mathrm{Md}}\mathbf{A}_{\mathrm{k}}[1, 4]$ и ${}^{\mathrm{Md}}\mathbf{A}_{\mathrm{i}}[2, 4] = {}^{\mathrm{Md}}\mathbf{A}_{\mathrm{k}}[2, 4]$ составляется система уравнений

$$\begin{gathered}-r\sin(\theta_2)\cos(q_5) - \sin(\theta_1)(R + r\cos(\theta_2))\sin(q_5) + X_{\min} =\\ = (z_i + q_2)\cos(q_3) + (x\sin(q_1) + y_i\cos(q_1))\sin(q_3),\\ -r\sin(\theta_2)\sin(q_5) - \sin(\theta_1)(R + r\cos(\theta_2))\cos(q_5) + Y_{\min} =\\ = (z_i + q_2)\sin(q_3) + (x\sin(q_1) + y_i\cos(q_1))\cos(q_3),\end{gathered} \tag{9}$$

из которой определяется обобщенная координата q_5

$$q_5 = \operatorname{arctg}\left(\frac{-AB \pm D\sqrt{A^2 + B^2 - D^2}}{B^2 - D^2}\right), \tag{10}$$

где $A = (z_i + q_2)\cos(q_3) + (x_i\sin(q_1) + y_i\cos(q_1))\sin(q_3) - X_{\min}$; $B = (z_i + q_2)\sin(q_3) + (x_i\sin(q_1) + y_i\cos(q_1))\cos(q_3) - Y_{\min}$, $D = r\sin(\theta_2)$, $X_{\min}$ и $Y_{\min}$ – координаты, определяющие положение точки $0_{\min}$ в системе координат $(XYZ)_{Md}$.

3. Решение динамической задачи для робота-станка. Вывод динамических уравнений, определение сил и моментов в приводах и кинематических парах производится двумя способами: используя уравнения Лагранжа второго рода, что позволяет учесть все составляющие и проверить полученные выражения методом кинетостатики, позволяющим наглядно обосновать происхождение каждого слагаемого в формулах.

Для манипулятора перемещения детали

1. Момент, развиваемый приводом *1* (рис. 1)

$$M_1 = (J_{5Z} + J_{7Z})\ddot{q}_1, \tag{11}$$

где J_{7Z} – осевой момент инерции вала 7 и J_{5Z} – осевой момент шлицевой втулки *5* относительно оси Z_d (рис. 1).

2. Сила, развиваемая приводом *2* в направлении оси Z_d

$$F_2 = m_7\ddot{q}_2 - m_7(q_2 - l_{C7})\dot{q}_3^2, \tag{12}$$

где $m_7(q_2 - l_{C7})\dot{q}_3^2$ – центробежная сила инерции, определяемая вращением вокруг оси Z_{Md}; m_7 – масса вала *7*; l_{C7} – значение q_2, при котором центр тяжести вала *7* находится на оси привода *3*.

Момент, развиваемый приводом *2* определяется по формуле

$$M_2 = -\frac{J_{6Z}}{k}\ddot{q}_2 - (m_7 + m_7)k\ddot{q}_2 + m_7k(q_2 - l_{C7})\dot{q}_3^2 + m_8k(q_2 - l_{C8})\dot{q}_3^2, \tag{13}$$

где $k = \dfrac{P}{2\pi}$; $P = 0.05$ м.

3. Момент, развиваемый приводом *3* вокруг оси Z_{Md} находим как

$$M_3 = (m_5l_5^2 + m_6l_6^2 + J_{5X} + J_{6X} + J_{7X} + J_{8X} + J_9)\ddot{q}_3 + 2m_7(q_2 - l_{C7})\dot{q}_2\dot{q}_3 + \\ + m_7(q_2 - l_{C7})^2\ddot{q}_3 + 2m_8(q_2 - l_{C8})\dot{q}_2\dot{q}_3 + m_8(q_2 - l_{C8})^2\ddot{q}_3,$$

где $m_5l_5^2 + m_6l_6^2 + J_{5X} + J_{6X} + J_{7X} + J_{8X} + J_9$ – постоянный инерционный коэффициент, образованный центральными моментами инерции звеньев *5*, *6*, *7*, *8* вокруг вертикальной оси и моментом инерции звена *9* вокруг оси Z_{Md}; $m_7(q_2 - l_{C7})^2$ и $m_8(q_2 - l_{C8})^2$ – моменты инерции сосредоточенных масс звеньев *7*, *8* вокруг оси Z_{Md}; l_{C8} – значение q_2, при котором центр тяжести винта *8* находится на оси привода *3*; $2m_7(q_2 - l_{C7})\dot{q}_2\dot{q}_3$ и $2m_8(q_2 - l_{C8})\dot{q}_2\dot{q}_3$ – составляющие от моментов Кориолисовых сил; $\dot{q}_2$ – относительная скорость центра тяжести звена *7* и звена *8*; $\dot{q}_3$ – угловая скорость. Угловые скорости $\dot{q}_2$ и $\dot{q}_3$ ортогональны, поэтому их удвоенное векторное произведение (ускорение Кориолиса) направлено по касательной и равно $2\dot{q}_2\dot{q}_3$. При умножении данных ускорений на соответствующие массы m_7 и m_8 получаются $2m_7\dot{q}_2\dot{q}_3$ и $2m_8\dot{q}_2\dot{q}_3$, действующие каждая на плече $(q_2 - l_{C7})$ – для звена *7* и $(q_2 - l_{C8})$ – для звена *8*.

Для манипулятора перемещения инструмента

1. Сила, развиваемая приводом *4* в направлении оси $Z_{\min}$

$$F_4 = m_3\ddot{q}_4 + m_3g,$$

и момент, развиваемый приводом *4*

$$M_4 = \left(-\frac{J_2}{k} - (m_3 + m_4)k\right)\ddot{q}_4 - (m_3 + m_4)kg,$$

где q_4 – линейное перемещение, выполняемое приводом *4* в направлении оси $Z_{\min}$; g – ускорение от силы тяжести звена *3*.

2. Момент, развиваемый приводом *5*

$$M_5 = (J_1 + J_3)\ddot{q}_5,$$

где J_1 – момент инерции шлицевой втулки.

Несмотря на динамическую развязку внутри модулей, имеется взаимовлияние второго и третьего привода (центробежная сила инерции влияет на второй привод, а Ко-

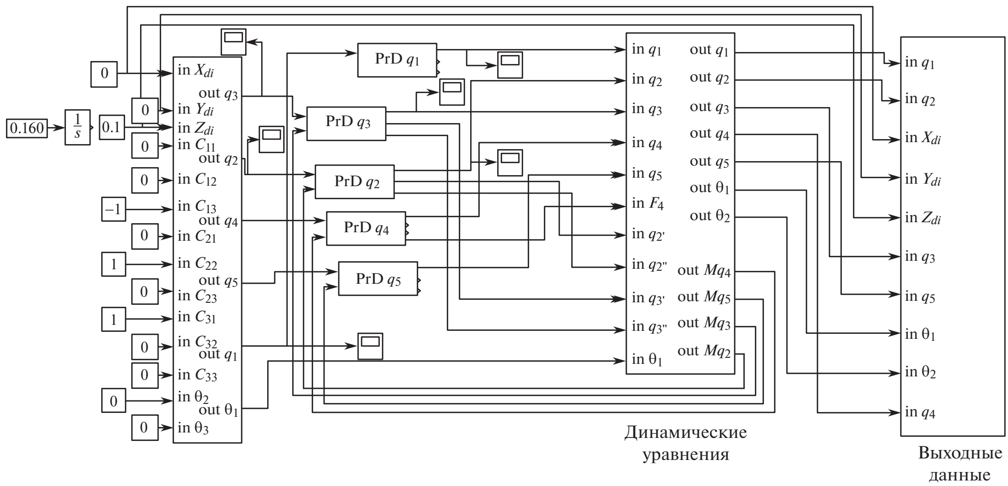


Рис. 4. Динамическая модель робота-станка.

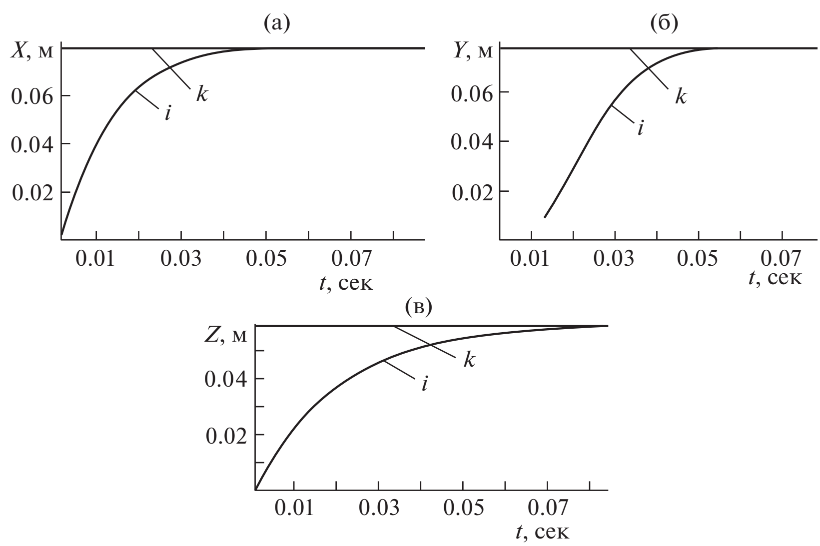


Рис. 5. Переходные процессы при линейном перемещении манипуляторов для совмещения i-й точки обрабатываемой поверхности с k-й точкой режущей кромки.

риолисова сила и переменные моменты инерции от сосредоточенных масс звеньев *7*, *8* влияют на третий привод).

4. Динамическая модель робота-станка. Динамическая модель робота-станка, реализованная в системе MATLAB–SIMULINK приведена на рис. 4.

На рис. 5 приведены переходные процессы при линейном перемещении манипуляторов для совмещения i-й точки обрабатываемой поверхности с k-й точкой режущей кромки по координатам X (рис. 5а), Y (рис. 5б) и Z (рис. 5в) в системе координат

$(XYZ)_{Md}$. В качестве входных сигналов принималось ступенчатое задание линейных координат трехгранника $((\tau\nu\beta), x_i, y_i, z_i)$ в системе координат $(XYZ)_d$.

Заключение. Проведенные исследования применения вращательно-линейных модулей в роботах-станках позволяют сделать вывод о целесообразности использования данных модулей в конструкциях станочного оборудования, роботов, а также в механизмах, где требуется осуществлять линейные перемещения в сочетании с угловыми. Преимущество данных модулей состоит в том, что они позволяют исключить промежуточные кинематические цепи для передачи движения от исполнительного привода к выходному звену. Это повышает точность, исключив погрешности, вносимые передающими механизмами, и позволяет осуществлять прямое регулирование перемещения выходного звена, управляя непосредственно исполнительным приводом. Однако использование вращательно-линейных модулей требует учитывать взаимовлияние между приводами при выполнении перемещения по нескольким управляемым обобщенным координатам.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Устройство для механической обработки изделий сложной пространственной формы. Аксенов В.И., Афонин В.Л., Веденеев В.Н., Власенков А.В., Крайнев А.Ф., РФ Патент 2202465, 2001.
2. Robotic manipulators and rotary linear actuators for use in such manipulators: пат. 0263627A Европейский союз, МПК6 B25J11/00 B25J17/02 B25J9/04/Kohli Dilip; заявители и патентообладатели Kohli Dilip, Sandor George Nason. № US913523; заявл. 30.09.1986; опубл. 13.04.1988. Бюл. № 88/15.
3. Пространственный механизм. Глазунов В.А., Тывес Л.И., Данилин П.О., РФ Патент 2403140, 2008.
4. Rotary-linear actuator: США Патент 5952744, 1996.
5. *Афонин В.Л., Смоленцев А.Н.* Перспективное механообрабатывающее оборудование с элементами интеллектуального управления // Станкоинструмент. 2017. № 2 (7). С. 66.
6. *Афонин В.Л., Смоленцев А.Н., Панфилов А.Н.* Анализ кинематических характеристик робота-станка при введении дополнительных неуправляемых координат // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2014. № 4. С. 63.
7. *Смоленцев А.Н.* Идентификация геометрических параметров робота-станка для заданного обрабатываемого изделия // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2016. № 1. С. 145.
8. *Слепцов В.В., Рокачевский О.А., Аблаева А.Е.* Разработка высокоэффективного электропривода с вентильным двигателем // Приборы. 2017. № 10. С. 26–29.

ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2020, № 3, с. 26–35

МЕХАНИКА МАШИН

УДК 536.461:537.84: 621.4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФУЗИИ ГАЗА В ВАКУУМЕ

© 2020 г. В. А. Котельников[2,*], М. В. Котельников[2,*], Г. С. Филиппов[1,2,], М. А. Платонов[2]**

[1]*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*

[2]*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ), Москва, Россия*

**e-mail: mvk_home@mail.ru*

***e-mail: filippov.gleb@gmail.com*

Поступила в редакцию 06.09.2018 г.
Принята к публикации 31.01.2020 г.

Методами математического моделирования исследована эффузия газа через небольшое отверстие прямоугольной формы в разреженное пространство. Получены функции распределения частиц газа, истекающих из отверстия и моменты этих функций: поля концентраций и скоростей частиц газа. Исследована зависимость эффузии от объема, из которого происходит истечение.

Ключевые слова: функция распределения, уравнение Власова, эффузия, разгерметизация

DOI: 10.31857/S0235711920030062

Истечение газа через относительно малые отверстия в результате теплового движения молекул часто встречается в природе и современной технике. Например, при движении космических аппаратов в ионосфере всегда существует опасность разгерметизации жилых отсеков в результате столкновений с метеоритами, частицами космического мусора, деградации сварных швов, различных аварий и других причин. Появлению больших течей часто предшествуют малые течи, которые трудно поддаются диагностике. Авария на орбитальной станции “Мир” в 1997 году привела к разгерметизации одного из ее модулей [1]. Тогда удалось изолировать поврежденный модуль, однако в конечном итоге это повлияло на срок ее функционирования.

Появление электроракетных двигателей (ЭРД) привело к необходимости создания вакуумных стендов больших размеров для их исследования, диагностики, совершенствования конструкции. Первые работы в области создания ЭРД начались в 60-х годах прошлого столетия по инициативе С.П. Королева и продолжаются до настоящего времени [2]. В практике использования вакуумных стендов приходится уделять много внимания исключению течей при герметизации люков, смотровых окон, в местах введения измерительных систем, в сварных швах и т.д.

Явление эффузии лежит в основе ряда технологических процессов, связанных с разделением смесей газов на отдельные компоненты путем ее пропускания через пористые вещества.

В настоящей статье методами математического моделирования исследуется эффузия газа в разреженное пространство. По этому вопросу встречается достаточно много опубликованных работ [3–18], однако строгого решения задачи на кинетическом

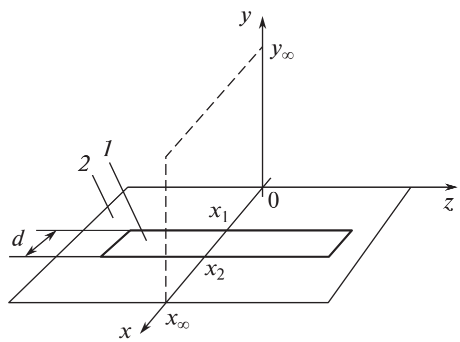


Рис. 1. Расположение отверстия на плоскости (x, z). *1* – отверстие прямоугольной формы; *2* – элемент поверхности; $x_2 - x_1 = d$ – ширина отверстия.

уровне найти не удалось. Отсутствуют детальные исследования особенностей функций распределения частиц газа, истекающих в разреженное пространство.

При выборе физических, математических и численных моделей эффузии газа авторы использовали опыт, накопленный при исследовании динамики потоков разреженной плазмы в теоретических и прикладных задачах [19–22].

Физическая, математическая и численная модели задачи. Рассмотрим разреженный газ, истекающий из объема V в вакуумное пространство через отверстие, размер которого много меньше средней длины свободного пробега частиц газа. Газ в объеме V предполагается равновесным, толщиной стенок пренебрегаем, в струе газа, истекающей из отверстия, столкновениями пренебрегаем.

В общем случае такая задача оказывается шестимерной в фазовом пространстве и нестационарной [19–22]. С целью сокращения размерности задачи отверстие, через которое происходит утечка газа, берется в форме удлиненного прямоугольника. Соответствующие этой физической модели проблемы встречаются на практике в виде малых течей через трещины в обшивках летательных аппаратов и корпусах вакуумных камер.

С учетом сдвиговой симметрии математическая модель задачи оказывается четырехмерной. В декартовой системе координат (рис. 1) функция распределения частиц газа зависит от четырех фазовых переменных (x, y, v_x, v_y) и времени t.

В этом случае кинетическое уравнение (уравнение Власова) имеет вид [19–22]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Уравнение (1) решается при следующих начальных и граничных условиях: за начальный момент времени принимается момент образования щели. На срезе отверстия (граница "втекания") функция распределения предполагается Максвелловской [24]

$$f\Big|_{\substack{\text{граница}\\ \text{втекания}}} = \frac{n_0}{\pi}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m}{2kT}(v_x^2 + v_y^2)\right], \tag{2}$$

где n_0 – невозмущенная концентрация частиц газа в объеме V, m – масса молекул газа, T – температура, k – постоянная Больцмана.

Функция распределения f на срезе отверстия совпадает с (2) с учетом того, что по мере истечения газа из объема V концентрация частиц n_0 изменяется со временем.

На границе “вытекания” ставились “мягкие” граничные условия, получаемые путем экстраполяции функции распределения с прилегающих расчетных слоев.

Формулы для расчета средних скоростей частиц газа и их потоков имеют вид

$$\langle v_x\rangle = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_x f dv_x dv_y}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f dv_x dv_y}, \quad \langle v_y\rangle = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_y f dv_x dv_y}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f dv_x dv_y}, \tag{3}$$

$$J_{\text{из отверстия}} = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} \int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} v_y f(v_x, v_y)\Big|_{\substack{\text{граница}\\ \text{втекания}}} dx dv_x dv_y, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} J_{\text{внешняя граница}} = {} & \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} \int\limits_{0}^{x_\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{0} v_y f(t, x, y_0, v_x, v_y) dx dv_x dv_y + \\ & + \left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{0}^{x_\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} v_y f(t, x, y_\infty, v_x, v_y) dx dv_x dv_y + \\ & + \left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{0}^{y_\infty}\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_y f(t, x_0, y, v_x, v_y) dy dv_x dv_y + \\ & + \left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{0}^{y_\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_y f(t, x_\infty, y, v_x, v_y) dy dv_x dv_y. \end{aligned} \tag{5}$$

Математическая модель (1)–(5) приводилась к безразмерному виду с помощью системы масштабов: $M_n = n_\infty$ – масштаб концентраций; $M_L = d$ – масштаб длины; $M_V = (2kT/m)^{1/2}$ – масштаб скорости. Остальные масштабы выражаются через данные по формулам размерности.

Вычислительная модель задачи основана на методе последовательных итераций по времени, когда моделируется переходный процесс от начального к конечному стационарному состоянию, которое соответствует установлению параметров газа в расчетной области. При этом уравнение Власова (1) решается методом характеристик [23].

Алгоритм расчета реализован в виде компьютерной программы на языке C++ с использованием средств графической библиотеки Open GL. При этом были задействованы более миллиарда ячеек расчетной сетки (400 × 400 × 80 × 80). Область исследования струи имела размер 10 × 10 безразмерных единиц. Расчет на настольном компьютере (четырехъядерный процессор Intel Core i7-6700K, тактовая частота каждого ядра составляет 4 ГГц, оперативная память компьютера 32 Гб) продолжался 44 часа.

Контроль времени окончания счета (момента установления решения) осуществляется визуально с использованием графического окна, выводимого на экран монитора в режиме реального времени [24]. Визуально фиксировался момент, когда поток частиц, вытекающий из отверстия, становился равным потоку через внешние границы расчетной области (рис. 2).

Это свидетельствовало о сохранении массы газа в расчетной области в установившемся стационарном состоянии при реализации вычислительного алгоритма.

Результаты вычислительных экспериментов. На рис. 3 представлены функции распределения частиц истекающего из отверстия газа на различных расстояниях от отверстия на оси симметрии.

На рис. 4 для наглядности те же функции распределения представлены на плоскости (v_x, v_y) в виде изолиний.

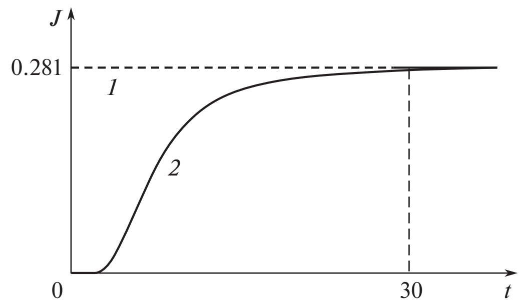


Рис. 2. Эволюция потока частиц газа через границы расчетной области. *1* – поток частиц газа, истекающий из отверстия в расчетную область; *2* – поток частиц газа, вытекающий из расчетной области.

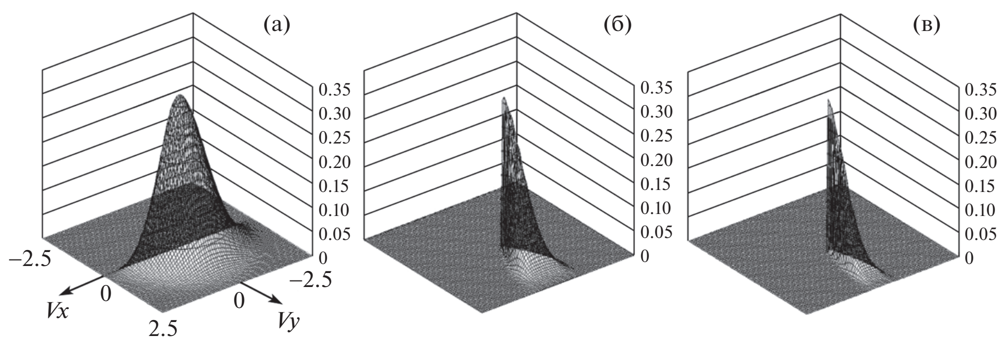


Рис. 3. Зависимость функции распределения частиц газа от координаты y ($x = 5$; $t = 30$): (а) $y = 0.025$; (б) $y = 1.5$; (в) $y = 3$.

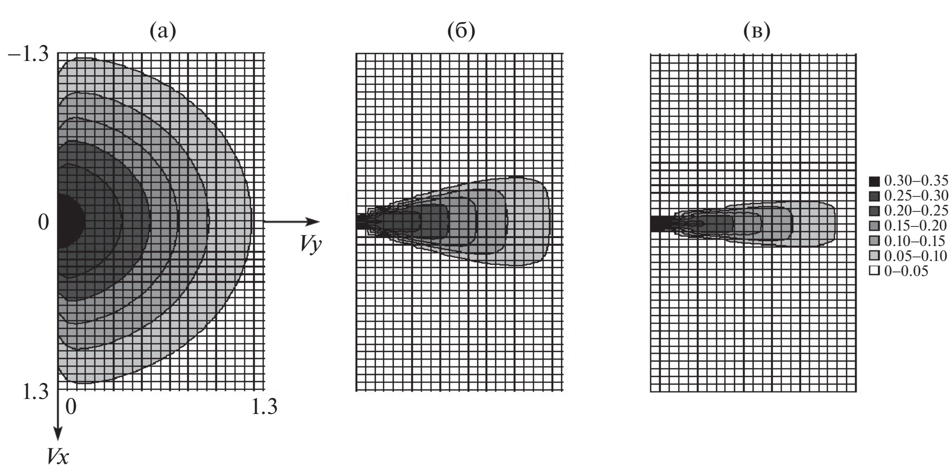


Рис. 4. Изолинии функции распределения частиц газа в зависимости от координаты y ($x = 5$; $t = 30$): (а) $y = 0.025$; (б) $y = 1.5$; (в) $y = 3$.

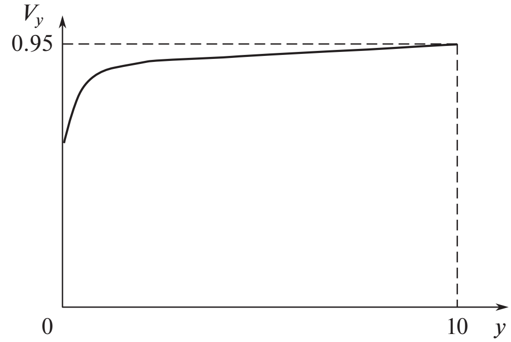


Рис. 5. Зависимость средних скоростей частиц от координаты y вдоль оси симметрии струи (t = 30).

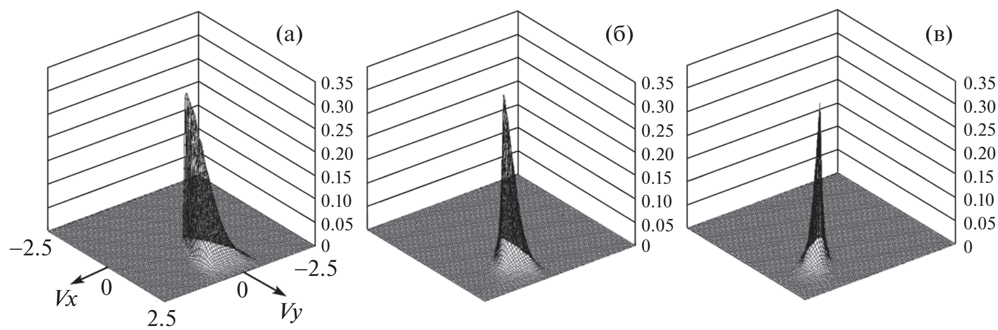


Рис. 6. Зависимость функции распределения частиц газа от координаты x (y = 1.5; t = 30): (а) x = 5; (б) x = 5.75; (в) x = 6.5.

Из графиков следует, что функция распределения частиц газа деформируется с удалением от отверстия. Каждая последующая функция является частью предыдущей, что является следствием рассеяния струи. Таким образом, форма функции распределения зависит от взаимного расположения исследуемой точки и эффузионного отверстия.

Изменение формы функции распределения при перемещении по оси y ведет к смещению ее “центра тяжести” в сторону увеличения составляющей v_y. В свою очередь смещение “центра тяжести” функции распределения ведет к увеличению средней скорости частиц в струе (рис. 5).

На рис. 6, 7 показана зависимость функции распределения частиц газа и ее изолиний от координаты x. Отчетливо просматривается рассеивание частиц газа с ростом координаты x. Если на оси симметрии струи (рис. 6а, 7а) средняя скорость частиц направлена по оси y, то с увеличением x угол поворота вектора средней скорости относительно оси симметрии струи увеличивается (рис. 6б, в; 7б, в).

Перейдем теперь к рассмотрению моментов функции распределения. На рис. 8а, б приведено поле концентраций в расчетной области при t = 1.5 (начало эволюции) и в момент t = 30 (установившееся решение).

Распределение концентрации частиц газа вдоль оси симметрии струи приведено на рис. 9.

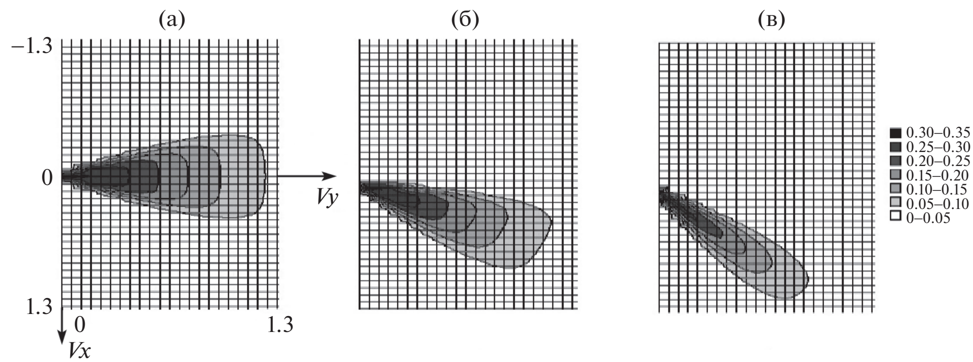


Рис. 7. Изолинии функции распределения частиц газа в зависимости от координаты x ($y = 1.5$; $t = 30$): (а) $x = 5$; (б) $x = 5.75$; (в) $x = 6.5$.

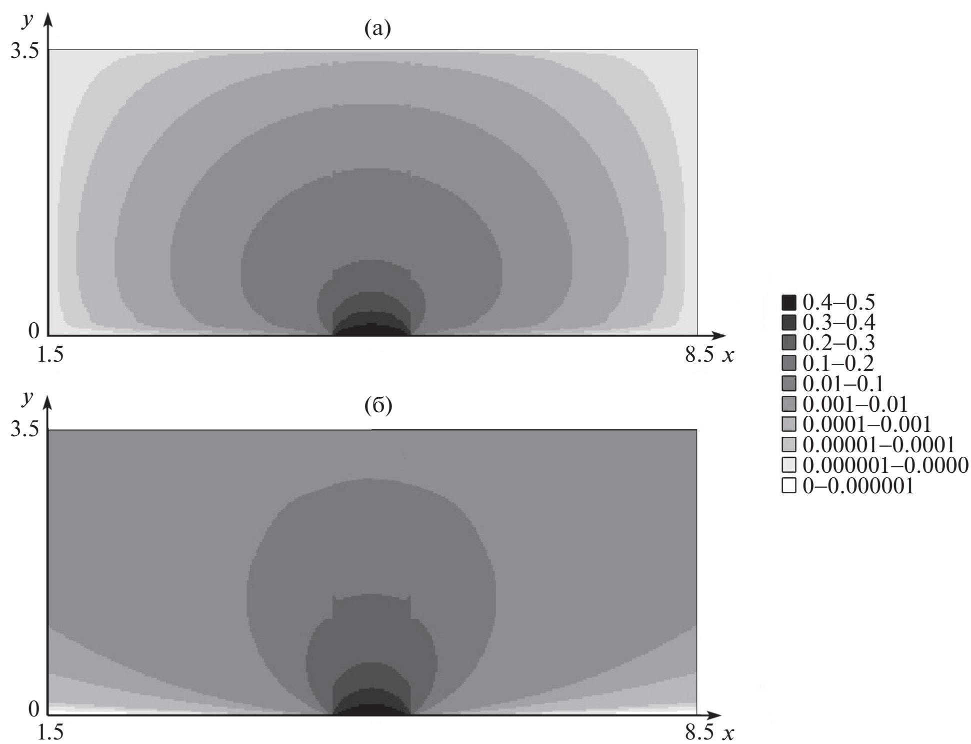


Рис. 8. Изолинии концентраций частиц газа в расчетной области: (а) $t = 1.5$; (б) $t = 30$.

На рис. 10 дано поле скоростей частиц газа на момент установления решения. Поле скоростей имеет осевую симметрию. Из рис. 10 видно, что рассеяние струи усиливается к краям отверстия.

Уточнение граничного условия на срезе отверстия. Граничная функция распределения на срезе отверстия (2) содержит параметр n_0, соответствующий невозмущенной

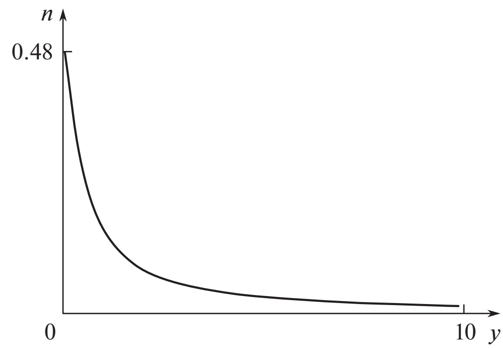


Рис. 9. Эволюция распределения концентрации компонент газа по оси y ($x = 5$).

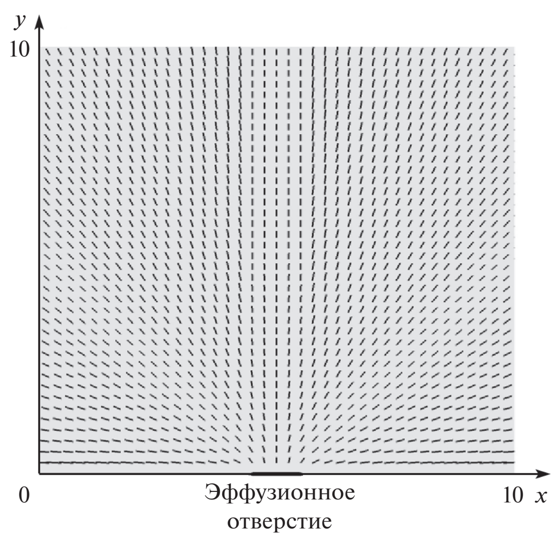


Рис. 10. Поле скоростей частиц газа ($t = 30$).

концентрации газа в объеме V. Этот параметр принят за масштаб концентрации, вследствие чего не входит в безразмерный вид уравнений. Для корректной интерпретации полученных результатов необходимо учитывать, что концентрация в объеме V вследствие эффузии уменьшается. Поэтому зависимость $n_0(t)$ является частью решения данной задачи.

Рассмотрим следующую модельную задачу. Имеется резервуар объемом V (например, жилой отсек космической станции), заполненный газом при нормальных условиях. На стенке резервуара образуется микротрещина площадью S, через которую начинает истекать газ. Считаем, что температура T газа в резервуаре постоянна и равновесное состояние газа со временем не нарушается вследствие малого размера микротрещины. Число частиц ΔN в объеме V, участвующих в хаотическом движении и пересекающих площадку S за интервал времени Δt равно [25]

$$\Delta N = \frac{1}{6} n \langle v \rangle S \Delta t. \tag{6}$$

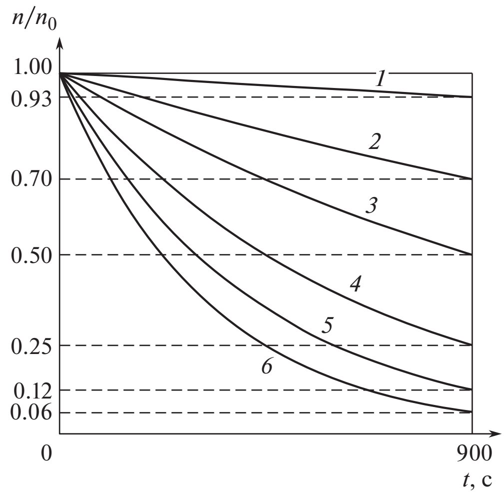


Рис. 11. Зависимость концентрации в резервуаре от времени по формулам (7) и (8) ($T = 300$ K; $\mu = 0.029$ кг/моль; $\Delta t = 1$ с): *1* – $S/V = 10^{-6}$ м$^{-1}$; *2* – 5×10^{-6} м$^{-1}$; *3* – 10^{-5} м$^{-1}$; *4* – 2×10^{-5} м$^{-1}$; *5* – 3×10^{-5} м$^{-1}$; *6* – 4×10^{-5} м$^{-1}$.

Если в момент времени $t = 0$ концентрация частиц n_0, то в момент времени $t = \Delta t$ концентрация равна n_1, в момент $t = 2\Delta t - n_2$ и т.д. Элементарный расчет позволяет получить

$$t = 0; \quad n = n_0;$$

$$t = \Delta t; \quad n = n_1 = n_0\left(1 - \frac{\langle v\rangle S}{6V}\Delta t\right);$$

$$t = 2\Delta t; \quad n = n_2 = n_1\left(1 - \frac{\langle v\rangle S}{6V}\Delta t\right) = n_0\left(1 - \frac{\langle v\rangle S}{6V}\Delta t\right)^2;$$

$$\ldots$$

$$t = N\Delta t; \quad n = n_N = n_0\left(1 - \frac{\langle v\rangle S}{6V}\Delta t\right)^N = n_0\left(1 - \frac{\langle v\rangle S}{6V}\Delta t\right)^{\frac{t}{\Delta t}}.$$

Итак,

$$\frac{n(t)}{n_0} = \left(1 - \frac{\langle v\rangle S}{6V}\Delta t\right)^{\frac{t}{\Delta t}}. \tag{7}$$

При этом должно выполняться неравенство $\frac{\langle v\rangle S}{6V}\Delta t < 1$, или $\Delta t < \frac{6V}{\langle v\rangle S}$.

Численные эксперименты показали, что расчет $\frac{n(t)}{n_0}$ по формуле (7) практически не зависит от шага по времени Δt, если безразмерный шаг по времени

$$\Delta t_{\text{безразм}} = \frac{\Delta t}{M_t} < 10^{-2}.$$

Еще один вывод зависимости $n_0(t)$ приведен в работе [6].

$$\frac{n(t)}{n_0} = e^{-\frac{1}{6}\langle v\rangle \frac{S}{V}t}. \tag{8}$$

Расчет зависимости $\frac{n(t)}{n_0}$ по формулам (7) и (8) практически совпадает и приведен на рис. 11, при этом параметр S/V варьировался.

При исследовании эффузии методами математического моделирования установление решения в расчетной области наступает при времени расчета $t = 30$ единиц безразмерного времени. При ширине микротрещин $d = 10^{-4}$ м [6]

$$t_{\text{уст}} = t_{\text{безраз}} M_t \approx 7.5 \times 10^{-6} \text{ с.} \tag{9}$$

Из (7) и (9) следует, что изменение концентрации в резервуаре в результате эффузии за время установления решения незначительно и им можно пренебречь.

Заключение. Математическое моделирование эффузии разреженного газа в вакуумное пространство позволило получить функции распределения истекающих частиц. Исследована эволюция этих функций в процессе установления решения. Получена зависимость функции распределения от координат (x, y). Вычислены моменты функций распределения: поля концентраций частиц и их скоростей. Сравнение полученных данных с результатами работ [5] и [6] показало удовлетворительное согласование.

Приведенные результаты математического моделирования эффузии газа в вакуумное пространство могут быть полезны разработчикам портативных приборов диагностики малых течей, используемых в вакуумной промышленности и в космической технике. Разработанный оригинальный программный код, основанный на кинетическом подходе к решению эффузионных задач, который сопровождается компьютерной графикой, позволяющей получить наглядное представление об исследуемых физических явлениях, может быть полезен специалистам в области математического моделирования, а также в учебном процессе.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пономарева В.Л.* Космонавтика в личном измерении. М.: Космоскоп, 2016. 386 с.
2. *Кубарев Ю.В.* Полеты на Марс, электрореактивные двигатели настоящего и будущего // Наука и технологии в промышленности. 2006. № 2. С. 19.
3. *Дэшман С.* Научные основы вакуумной техники. М.: Мир, 1964. 715 с.
4. *Саксаганский Г.Л.* Молекулярные потоки в сложных вакуумных структурах. М.: Атомиздат, 1980. 216 с.
5. *Ананьин А.А., Занин А.Н., Семкин Н.Д.* Моделирование процессов утечки газа из модуля космического аппарата // Измерительная техника. 2001. № 4. С. 29.
6. *Занин А.Н.* Устройство регистрации места утечки воздуха из модуля космической станции: Дисс.... к.т.н. СГАУ, 2009. 185 с.
7. *Нестеров С.Б., Васильев Ю.И., Андросов А.В.* Расчет сложных вакуумных систем. М.: МЭИ, 2001. 180 с.
8. *Нестеров С.Б., Асташина М.А., Незнамова Л.О., Васильев Ю.К.* Задачи и методы исследования среды разреженного газа вблизи космического аппарата // Вакуумная техника и технология. 2007. Т. 18. № 3. С. 183.
9. *Асташина М.А.* Молекулярные потоки в сложных объектах с учётом газовыделения поверхностей. Дисс.... к.т.н. М.: МЭИ, 2009. 156 с.
10. *Розанов Л.Н., Скрябнев А.Ю.* Течение газа через круглый трубопровод при больших перепадах давления // Вакуумная техника и технология. 2010. Т. 20. № 1. С. 3.
11. *Скрябнев А.Ю.* Вакуумметрический метод мониторинга герметичности крупных технических объектов. Дисс.... к.т.н. Санкт-Петербург. СПбГПУ, 2012. 146 с.

12. *Tang M.J., Cox R.A., Kalberer M.* Compilation and evaluation of gas phase diffusion coefficients of-reactive trace gases in the atmosphere: v. 1. Inorganiccompounds // Atmos. Chem. Phys. 2014. № 14. P. 9233.
13. *Krewinkel R.* A review of gas turbine effusion cooling studies // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2013. V. 66. P. 706.
14. *Schumacher J.C., Zupanc F.J.* Rodolphe Dudebout Segmented effusion cooled gas turbine engine combustor // US Patent US7546737B2, 2006.
15. *Wahlbeck P.G.* Effusion. VII. The Failure of Isotropy of a Gas in an Effusion Cell and the Transition Region // J. Chem. Phys. 2003. V. 55. № 1709 (1971).
16. *Malhotra M., Kumar S.* Thermal gas effusion from diamond-like carbon films // Diamond and Related Materials, 1997. V. 6. Iss. 12. P. 1830.
17. *Bronson T.J., Zupanc F.J., Yankowich P., Rudrapatna N.* Effusion cooled dual wall gas turbine combustors // US Patent US9897320B2, 2010.
18. *Iczkowski R.P., Margrave J.L., Robinson S.M.* Effusion of Gases through Conical Orifices // J. Phys. Chem. 1963. № 67. 2. P. 229.
19. *Котельников В.А., Ульданов С.В., Котельников М.В.* Процессы переноса в пристеночных слоях плазмы. М.: Наука, 2004. 422 с.
20. *Котельников В.А., Котельников М.В., Гидаспов В.Ю.* Математическое моделирование обтекания тел потоками столкновительной и бесстолкновительной плазмы. М.: Физматлит, 2010. 266 с.
21. *Котельников М.В., Котельников В.А., Морозов А.В.* Математическое моделирование взаимодействия потока разреженной плазмы с поперечным магнитным полем. М.: Издательство МАИ, 2015. 170 с.
22. *Котельников В.А., Гурина Т.А., Демков В.П., Попов Г.А.* Математическое моделирование электродинамики летательного аппарата в разреженной плазме. М.: Изд-во Нац. Акад. Прикл. Наук РФ, 1999. 255 с.
23. *Котельников М.В., Котельников В.А.* Усовершенствованный метод характеристик // Математическое моделирование. 2017. Т. 29. № 5. С. 85.
24. *Котельников М.В., Нгуен Суан Тхау*. Методика использования компьютерной графики в вычислительных экспериментах // Электронный журнал “Труды МАИ”. 2011. № 53.
25. *Савельев И.В.* Курс физики. М.: Наука, главная редакция физ. мат. Литературы. 1989. Т. 1. 352 с.

ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2020, № 3, с. 36–44

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 62.192

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОГО РЕСУРСА

Г. С. Садыхов[1,*], С. С. Кудрявцева[1]

[1] *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия*
**e-mail: gsadykhov@gmail.com*

Поступила в редакцию 31.07.2018 г.
Принята к публикации 31.01.2020 г.

На надежность сложных технических объектов влияет не только длительность безотказной наработки (непрерывный ресурс), но и число безотказных срабатываний типа “включен” объект в работу или “выключен” из нее (дискретный ресурс). Настоящая статья написана с целью частично восполнить этот пробел.

Ключевые слова: средний дискретный ресурс, интенсивность отказов, гамма-процентный дискретный ресурс, геометрический закон распределения ресурса

DOI: 10.31857/S0235711920030116

Анализ отказов технических объектов, работающих в режиме многократного циклического применения, показывает, что доля отказов при частых срабатываниях (типа объект “включен” в нагруженный режим работы или “выключен” из нее) составляет значительную часть в общем потоке отказов и она сопоставима с долей отказов в непрерывном режиме эксплуатации [1, 2]. В существующей обширной литературе по надежности отсутствуют теоретические основы дискретного ресурса.

Попытки найти способ заменить один цикл срабатываний “включено/выключено” на эквивалентную длительность непрерывной работы объекта не привели к успеху [3–7].

Помимо сложных систем, работающих в режиме многократного циклического применения, для ряда технических объектов ресурс определяют только по определенному количеству безотказных срабатываний. Так, для переключателей – это число безотказных переключений, для поршневых насосов – это число безотказных циклов, содержащих срабатывания “сжатие” и “разжатие”, для ламп вспышек – это число безотказных вспышек и т.д.

Определение предельных циклов в результате допустимых нагрузок является одним из основных факторов для обоснования величины назначенного ресурса и срока безопасной эксплуатации объекта [8, 9].

Средний дискретный ресурс. Пусть ζ – число срабатываний объекта до отказа. Тогда средний дискретный ресурс определяется по формуле

$$r = E(\zeta), \tag{1}$$

где $E(\cdot)$ – математическое ожидание величины, стоящей внутри скобок.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Для расчета среднего дискретного ресурса объекта справедлива формула

$$r = \sum_{k=0}^{\infty} P_k, \tag{2}$$

где

$$P_k = P_r(\zeta \geq k+1) \tag{3}$$

— вероятность того, что k срабатываний объекта будет безотказно (здесь $P_r(\cdot)$ — вероятность события, заключенного внутри скобок).

Доказательство. Согласно определению математического ожидания (1) имеем

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} n P_r(\zeta = n).$$

Так как $P_r(\zeta = n) = P_r(\zeta \geq n) - P_r(\zeta \geq n+1)$, то $r = \sum_{n=1}^{\infty} n P_r(\zeta \geq n) - \sum_{n=1}^{\infty} n P_r(\zeta \geq n+1)$.

Откуда найдем $r = 1P_r(\zeta \geq 1) + \sum_{k=2}^{\infty} k P_r(\zeta \geq k) - \sum_{k=2}^{\infty}(k-1) P_r(\zeta \geq k)$.

Объединяя два ряда в один, получим

$$r = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} (k - (k-1)) P_r(\zeta \geq k). \tag{4}$$

Откуда имеем $r = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} P_r(\zeta \geq k)$. Так как $1 + \sum_{k=2}^{\infty} P_r(\zeta \geq k) = \sum_{k=0}^{\infty} P_r(\zeta \geq k+1)$, то, согласно (3), получим искомую формулу (2), что и доказывает теорему.

Замечание 1. Выражение (4) позволяет определить размерность среднего ресурса, которая равна числу срабатываний.

Замечание 2. Доказанная формула (2) имеет аналог формулы расчета среднего непрерывного ресурса $\rho = \int_0^{\infty} P(t)\,dt$, где $P(t)$ — вероятность безотказной работы объекта в течение времени t.

Пример 1. Пусть число безотказных срабатываний объекта имеет следующий закон распределения вероятностей ($P_r(\zeta = k) = p^{k-1}q$):

$$\begin{array}{ccccccc} \zeta & 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots, \\ P_r & q & pq & p^2 q & \ldots & p^{k-1}q & \ldots, \end{array} \tag{5}$$

где p — вероятность безотказности объекта при каждом срабатывании, $q = 1 - p$, $(0 < q < 1)$. Рассчитать средний дискретный ресурс объекта.

Решение. Согласно (3), имеем $P_k = p^k q + p^{k+1} q + \ldots$.

Суммируя геометрическую прогрессию со знаменателем, равным p, получим

$$P_k = p^k. \tag{6}$$

Используя полученную формулу (6) в (2), имеем $r = \sum_{k=0}^{\infty} p^k$.

Отсюда, суммируя ряд, находим средний дискретный ресурс объекта для закона (5), равный

$$r = \frac{1}{q}. \tag{7}$$

Интенсивность отказов. Пусть n — число срабатываний объекта, ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Обозначим через

$$R_n = P_r\left[(\zeta = n)/(\zeta \geq n)\right] \tag{8}$$

условную вероятность отказа объекта в результате n-го срабатывания при условии, что до этого срабатывания отказа не было.

Определение. Интенсивностью отказа объекта в результате n-го срабатывания λ_n назовем отношение величины (8) к единице срабатывания, т.е.

$$\lambda_n = P_r\left[(\zeta = n)/(\zeta \le n)\right](\text{ср.})^{-1}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Используя известную формулу для условной вероятности

$$P_r\left(A/B\right) = \frac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(B\right)}, \tag{10}$$

где события A: $(\zeta = n)$; B: $(\zeta \ge n)$, из (8) получим $R_n = \dfrac{P_r\left(\zeta = n\right)}{P_r\left(\zeta \ge n\right)}$.

Подставляя полученное выражение в (9), найдем формулу расчета интенсивности отказов при n-м срабатывании объекта

$$\lambda_n = \frac{P_r\left(\zeta = n\right)}{P_r\left(\zeta \ge n\right)}(\text{ср.})^{-1}, \quad \left(n = 1, 2, \ldots\right). \tag{11}$$

Для краткости, единицу измерения интенсивности отказов приводить не будем.

Из формулы (11) видно, что

$$0 \le \lambda_n \le 1, \quad \left(n = 1, 2, \ldots\right). \tag{12}$$

При рассмотрении оценки (12) возникает вопрос: достижима ли правая часть оценки для какого-то закона распределения безотказных срабатываний?

Покажем, что если ζ – число безотказных срабатываний объекта имеет любое конечное распределение

$$\begin{array}{ccccccc} \zeta & 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & m, \\ P_r & \Phi_1 & \Phi_2 & \ldots & \Phi_i & \ldots & \Phi_m, \end{array}$$

где $\Phi_i = P_r\left(\zeta = i\right)$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, то интенсивность отказов объекта при последнем срабатывании равна единице, т.е. $\lambda_m = 1$.

Согласно (11) находим $\lambda_m = \dfrac{\Phi_m}{\Phi_m} = 1$, что доказывает достижимость правой части оценки (12); левая часть оценки (12) – очевидна.

Известно, что традиционный показатель “интенсивность отказов объекта в момент времени t” для объектов с непрерывным распределением ресурса определяется по формуле

$$\lambda\left(t\right) = \frac{f\left(t\right)}{P\left(t\right)}, \tag{13}$$

где $f\left(t\right)$ – плотность распределения безотказной наработки, равная $f\left(t\right) = -P'\left(t\right)$, где $P\left(t\right)$ – вероятность безотказной работы объекта в течение времени t.

Видно, что формула (11) расчета интенсивности отказов в результате n-го срабатывания, равная λ_n, не является следствием формулы (13).

Простейшая модель расходования дискретного ресурса. Пусть вероятность того, что каждое срабатывание объекта будет безотказно, равна p, $(0 < p < 1)$, тогда вероятность отказа объекта при n-м срабатывании, согласно теореме умножения независимых событий, равна

$$P_r\left(\zeta = n\right) = p^{n-1}q, \tag{14}$$

где $q = 1 - p$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Поскольку выражение (14) — это общий член геометрической прогрессии: $q, pq, p^2q, \ldots, p^{k-1}q, \ldots$, то модель расходования ресурса (14) называют геометрическим законом.

Теорема 2. Для того, чтобы модель расходования дискретного ресурса подчинялась геометрическому закону (14), необходимо и достаточно, чтобы интенсивность отказов при всех срабатываниях объекта была бы тождественна постоянной и удовлетворяла условия

$$\lambda_n \equiv q, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{15}$$

где q — вероятность отказа объекта при каждом срабатывании, $(0 < q < 1)$.

Доказательство. Докажем необходимость условия (15) для закона (14).

Используя формулы (3) и (6), при $k = n - 1$ имеем $P_r(\zeta \geq n) = p^{n-1}$.

Следовательно, согласно формуле (11), с учетом (14), получим $\lambda_n \equiv q$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, что доказывает необходимость условия (15) для модели расходования дискретного ресурса (14).

Докажем достаточность условия (15), а именно из условия (15) следует, что закон расходования дискретного ресурса имеет вид (14).

Так как $P_r(\zeta = n) = P_{n-1} - P_n$, где правая часть определена соотношением (3) при $k = n - 1$ и $k = n$, то, с учетом (6), получим формулу (14), что доказывает достаточность условия (15).

Теорема 2 имеет аналог для непрерывного ресурса.

Утверждение. Для того, чтобы модель расходования ресурса подчинялась экспоненциальному закону, плотность распределения безотказных наработок которых равна

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \tag{16}$$

где $\lambda > 0$ — постоянная, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda(t)$ — интенсивность отказов была тождественно равной постоянной и удовлетворяла условию $\lambda(t) \equiv \lambda$.

Для экспоненциального закона, плотность распределения которого равна (16), средний ресурс рассчитывается по формуле

$$\rho = \frac{1}{\lambda}. \tag{17}$$

Сравнивая формулу (7) с формулой (17), видим, что формула (7) является аналогом формулы (17). Другими словами, формулы расчета средних значений дискретного и непрерывного ресурсов через интенсивности отказов обоих законов одинаковы.

Теорема 3. Пусть k и m — целые положительные числа. Тогда для геометрического закона распределения ресурса вероятность безотказной работы объекта при срабатывании от $k + 1$ до $k + m$ не зависит от числа предшествующих срабатываний k, а зависит только от последующего количества срабатываний m.

Доказательство. Пусть ζ — число безотказных срабатываний объекта, имеющее геометрический закон распределения ресурса. Тогда вероятность отказа объекта при срабатываниях от $k + 1$ до $k + m$ (в предположении, что объект проработал безотказно до этого) равна $P_r\left[\zeta \in \left[(k+1) \div (k+m)\right] / \zeta \geq k + 1\right]$.

Используя формулу (10), получим

$$P_r\left[\zeta \in \left[(k+1) \div (k+m)\right] / \zeta \geq k + 1\right] = \frac{P_r\left[\zeta \in \left[(k+1) \div (k+m)\right]\right]}{P_r(\zeta \geq k + 1)}. \tag{18}$$

Так как $P_r\left[\zeta \in \left[(k+1)\div(k+m)\right]\right] = P_r(\zeta = k+1) + P_r(\zeta = k+2) + \ldots + P_r(\zeta = k+m)$, то используя (14), имеем

$$P_r\left[\zeta \in \left[(k+1)\div(k+m)\right]\right] = p^k q(1 + p + p^2 + \ldots + p^{m-1}). \tag{19}$$

Учитывая известное соотношение $1 + p + p^2 + \ldots + p^{m-1} = \dfrac{1-p^m}{1-p}$ в правой части (19), получим $P_r\left[\zeta \in \left[(k+1)\div(k+m)\right]\right] = p^k(1-p^m)$. Подставляя полученное выражение в (18), найдем $P_r\left[\zeta \in \left[(k+1)\div(k+m)\right]/\zeta \geq k+1\right] = 1 - p^m$, так как, согласно (3) и (6), $P_r(\zeta \geq k+1) = p^k$.

Следовательно, вероятность безотказной работы объекта при срабатываниях от $(k+1)$ до $(k+m)$ (в предположении, что объект проработал безотказно при срабатываниях до этого) равна p^m, т.е.

$$P_r\left[\zeta \,\overline{\in}\, \left[(k+1)\div(k+m)\right]/\zeta \geq k+1\right] = p^m. \tag{20}$$

Поскольку правая часть (20) не зависит от числа предшествующих срабатываний k, то доказательство теоремы завершается.

В частности, при $k = 0$, согласно (20), имеем

$$P_r(\zeta \geq m+1) = p^m, \tag{21}$$

т.е. безусловная вероятность безотказной работы объекта в результате m срабатываний равна p^m.

Учитывая (21) в (20), получим

$$P_r\left[\zeta \,\overline{\in}\, \left[(k+1)\div(k+m)\right]/\zeta \geq k+1\right] = P_r(\zeta \geq m+1),$$

где $k = 1, 2, \ldots$. Видно, что все условные вероятности безотказной работы объекта при срабатываниях от $(k+1)$ до $(k+m)$ (в предположении, что объект проработал безотказно при срабатываниях до этого) равны безусловной вероятности безотказной работы объекта в результате m срабатываний.

Другими словами, для геометрического закона безотказная работа объекта “в прошлом” не сказывается на величине вероятностей его безотказной работы в “в будущем”.

Теорема 3 имеет аналог в классе непрерывных распределений ресурса.

Утверждение. Пусть η — наработка до отказа объекта, имеющая экспоненциальное распределение (16). Тогда условная вероятность безотказной работы объекта на интервале времени $(t_0, t_0 + t)$ при условии, что он уже проработал безотказно на предшествующем интервале $(0, t_0)$, равна

$$P_r\left[(\eta \,\overline{\in}\, (t_0, t_0 + t))/\eta > t_0\right] = e^{-\lambda t}.$$

Правая часть не зависит от времени t_0 предшествующей работы объекта до начала рассматриваемого интервала времени, а зависит только от длительности времени t (при заданной интенсивности отказов λ).

Выражение вероятности безотказной работы через интенсивности отказов. Для моделирования надежности важно знать связь характеристик надежности через интенсивности отказов.

Теорема 4. Пусть P_k – вероятность безотказной работы объекта в результате k срабатываний. Тогда справедлива формула

$$P_k = \prod_{i=1}^{k} (1 - \lambda_i), \tag{22}$$

где λ_i – интенсивность отказов объекта при i-м срабатывании, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Доказательство. Используя формулу (11), найдем

$$1 - \lambda_i = \frac{P_r(\zeta \geq i + 1)}{P_r(\zeta \geq i)}, \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

С учетом (3), получим рекуррентную формулу

$$P_i = (1 - \lambda_i) P_{i-1}, \quad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{23}$$

Так как $P_0 = 1$, то

$$P_1 = 1 - \lambda_1. \tag{24}$$

Для выражения вероятности воспользуемся формулами (23) и (24), откуда получим

$$P_2 = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2). \tag{25}$$

Для выражения вероятности P_3 воспользуемся формулами (23) и (25), откуда имеем $P_3 = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3)$.

Продолжая и далее этот процесс, найдем $P_k = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)\ldots(1 - \lambda_k)$, что доказывает формулу (22) и тем самым теорему.

Доказанная формула (22) имеет непрерывный аналог, а именно: пусть $\lambda(u)$ – интенсивность отказов, тогда вероятность безотказной работы объекта в течение времени t вычисляется по формуле

$$P(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)\, du\right). \tag{26}$$

При малых значениях интенсивностей отказов λ_i формуле (22) можно придать более схожий вид с формулой (26) $P_k = \exp\left(\sum_{i=1}^{k} \ln(1 - \lambda_i)\right)$, откуда получим приближенную формулу

$$P_k \approx \exp\left(-\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right), \tag{27}$$

поскольку при малых значениях λ_i, $\ln(1 - \lambda_i) \approx -\lambda_i$.

Сравнивая формулы (26) и (27), видим их схожесть.

Формулы (22) и (26) позволяют моделировать надежность.

Пример 2. Пусть интенсивность отказов при срабатываниях объекта равны следующим значениям: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{k-1} = q$, $\lambda_k = 1$, где $0 < q < 1$. Необходимо найти закон распределения вероятностей для числа срабатываний объекта до отказа ζ и доказать, что события

$$\zeta = 1, \quad \zeta = 2, \quad \zeta = 3, \quad \ldots, \quad \zeta = k - 1, \quad \zeta = k \tag{28}$$

образуют полную группу.

Решение. Согласно формуле (22) имеем

$$P_1 = p, \quad P_2 = p^2, \quad P_3 = p^3, \quad \ldots, \quad P_{k-1} = p^{k-1}, \quad P_k = 0, \tag{29}$$

где $p = 1 - q$.

Для первого значения случайной величины ζ получим $P_r(\zeta = 1) = P_r(\zeta \geq 1) - P_r(\zeta \geq 2)$. Так как правая часть равна $1 - P_1$, то, согласно (29), имеем $P_r(\zeta = 1) = q$.

Для второго значения случайной величины ζ получим $P_r(\zeta = 2) = P_r(\zeta \geq 2) - P_r(\zeta \geq 3)$. Поскольку правая часть равна $P_1 - P_2$, то, согласно (29), имеем $P_r(\zeta = 2) = pq$.

Продолжая и далее этот процесс, найдем

$$P_r(\zeta = k-1) = p^{k-2}q,$$
$$P_r(\zeta = k) = P_{k-1} - P_k.$$

Т.к. правая часть второго равенства, согласно (29), равна p^{k-1}, то имеем

$$P_r(\zeta = k) = p^{k-1}.$$

Следовательно, число срабатываний объекта до отказа ζ имеет следующий закон:

$$\begin{array}{ccccccc} \zeta & 1 & 2 & 3 & \dots & k-1 & k, \\ P_r & q & pq & p^2q & \dots & p^{k-2}q & p^{k-1}. \end{array}$$

Видно, что найденный закон является усеченным полного геометрического закона.

Докажем, что события (28) образуют полную группу. Для этого надо показать, что сумма вероятностей всех принимаемых значений ζ равна единице.

В самом деле, $q + pq + p^2q + \ldots + p^{k-2}q + p^{k-1} = q\dfrac{1-p^{k-1}}{1-p} + p^{k-1} = 1.$

Гамма-процентный дискретный ресурс. Пусть задано значение γ, $(0 < \gamma < 1)$. Определим целые числа m, для которых

$$P_m \geq \gamma, \tag{30}$$

где P_m – вероятность того, что m срабатываний объекта будут безотказны.

Определение. Гамма-процентным дискретным ресурсом будем называть наибольшее целое число срабатываний m_γ, которое удовлетворяет оценке (30), т.е.

$$m_\gamma = \max(m / P_m \geq \gamma). \tag{31}$$

В некоторых случаях уровень γ можно задавать не в долях единицы, а в процентах, отсюда и название этого показателя.

Для непрерывного ресурса гамма-процентный ресурс t_γ определяют из уравнения $P(t) = \gamma$, как решение уравнения относительно t, где $P(t)$ – вероятность безотказной работы объекта в течение времени t.

Пример 3. Для геометрического закона распределения ресурса (14) найдем формулу расчета гамма-процентного дискретного ресурса.

Решение. Используя форму (6) в оценке (30), получим $p^m \geq \gamma$.

Логарифмируя, имеем $m \ln p \geq \ln\gamma$, отсюда $m \leq \dfrac{\ln\gamma}{\ln p}$, поскольку $\ln p < 0$ при $0 < p < 1$.

Следовательно, согласно определению гамма-процентного дискретного ресурса (31), найдем искомую формулу

$$m_\gamma = \left[\frac{\ln\gamma}{\ln p}\right], \tag{32}$$

где $[\cdot]$ – целая часть выражения, стоящая внутри скобок.

Заметим, что формула расчета гамма-процентного ресурса для экспоненциального закона распределения равна

$$t_\gamma = \frac{-\ln\gamma}{\lambda}, \tag{33}$$

где $\lambda > 0$ – интенсивность отказов.

Видно, что формула (32) является аналогом формулы (33).

Оценка среднего дискретного ресурса. Покажем, что для целой части среднего дискретного ресурса r справедлива формула

$$[r] = m_\gamma, \tag{34}$$

где $\gamma = P_{[r]}$.

Согласно (31), имеем $m_{P_{[r]}} = \max\left(m/P_m \geq P_{[r]}\right)$.

Для правой части получим $\max\left(m/P_m \geq P_{[r]}\right) = \max\left(m/m \leq [r]\right) = [r]$, что доказывает (34).

Так как при больших значениях r уровень γ, равный $P_{[r]}$, мал, то использовать формулу (34) затруднительно, поскольку потребуется большой объем выборки для проведения ресурсных испытаний. Тогда возникает вопрос: как оценить средний дискретный ресурс в этом случае?

В связи с этим, докажем утверждение, которое свободно от этого недостатка.

Теорема 5. Для среднего дискретного ресурса справедлива достижимая оценка

$$r \geq \gamma\left(1 + m_\gamma\right), \tag{35}$$

где γ – заданный уровень, $(0 < \gamma \leq 1)$; m_γ – гамма-процентный дискретный ресурс.

Доказательство. Используя формулу (2), имеем

$$r \geq \sum_{k=0}^{m_\gamma} P_k. \tag{36}$$

Из определения показателя, согласно (30), при $k \leq m_\gamma$, получим $P_k \geq \gamma$.

Учитывая это неравенство в (36), найдем искомую оценку (35).

Докажем, что оценка (35) достижимая, т.е. существует хотя бы один закон распределения безотказных срабатываний ζ, для которого левая и правая части (35) равны.

В связи с этим рассмотрим закон

$$\begin{array}{ccc} \zeta & 1 & 2, \\ P_r & 0 & 1. \end{array}$$

Видно, что $r = 2$; $m_1 = 1$. Следовательно, правая часть (35) равна 2, что совпадает со значением левой части, что и доказывает теорему.

Выводы. Определены основные понятия дискретного ресурса. Введены показатели дискретного ресурса и доказаны расчетные формулы для них. Установлены оценки для основных показателей дискретного ресурса. Проведен сравнительный анализ расчетных формул, полученных в работе, с показателями непрерывного ресурса. Исследована достижимость установленных оценок. Приведены примеры использования полученных результатов работы.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 07-08-00574-а и № 10-08-00507-а).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Садыхов Г.С., Савченко В.П., Сидняев Н.И.* Модели и методы оценки остаточного ресурса изделий радиоэлектроники. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. 382 с.
2. *Автушенко А.Ф., Алексеев С.В., Садыхов Г.С. и др.* Мощные надгоризонтные РЛС дальнего обнаружения: разработка, испытания, функционирование / Под ред. С.Ф. Боева. М.: Радиотехника, 2013. 168 с.
3. *Klass P.J.* Cycling Tests Increase Reliability Factor "Aviation Week". 1960. V. 73. Sept., № 5. P. 14.
4. *Жаднов В.В., Тихменев А.Н., Полесский С.Н.* Современные подходы к исследованию безотказности электронных средств циклического применения // Надежность и качество: Труды междунар. симпозиума. В 2-х томах / под ред. Н.К. Юркова. Пенза: Изд-во ПГУ, 2012. Т. 1. С. 70.
5. *Садыхов Г.С., Савченко В.П.* Оценка остаточного ресурса с использованием физической модели аддитивного накопления повреждения // Докл. АН. 1995. Т. 343. № 4. С. 469.
6. *Артюхов А.А.* Оценка средней наработки до отказа при частых срабатываниях // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. Труды ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2015. С. 295.
7. *Басов В.Н., Нестеренко Г.И.* Экспериментальное исследование характеристик статической прочности, усталостной долговечности и циклической трещиностойкости листов из алюминиево-литиевых сплавов // Труды ЦАГИ. 2007. В. 2675. С. 181.
8. *Ганиев Р.Ф., Балакшин О.Б., Кухаренко Б.Г.* Флаттер с предельным циклом колебания лопаток ротора турбокомпрессора // Докл. АН. 2012. Т. 446. № 2. С. 159.
9. *Махутов Н.А.* Конструкционная прочность, ресурс и техногенная безопасность. Ч. 2. Обоснование ресурса и безопасности. Новосибирск: Наука, 2005. 610 с.

ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2020, № 3, с. 45–55

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 539.31

К ВОПРОСУ О КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ И ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ ПЕРЕХОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ СТУПЕНЧАТОГО ВАЛА

© 2020 г. М. Н. Ерохин[1,*], П. В. Дородов[2], А. С. Дорохов[3]

[1]Российский государственный аграрный университет – МСХА им. К.А. Тимирязева, Москва, Россия
[2]Ижевская государственная сельскохозяйственная академия, Ижевск, Россия
[3]Федеральный научный агроинженерный центр ВИМ, Москва, Россия
**e-mail: sibirev2011@yandex.ru*

Поступила в редакцию 21.10.2019 г.
Принята к публикации 31.01.2020 г.

В статье представлено аналитическое решение прямой краевой и плоской задачи о напряженном состоянии в срединной поверхности ступенчатого вала. В краевой задаче применяется сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши, решение которого находится в виде неограниченного возрастания напряжений на концах интервала интегрирования. Плоская задача представлена в тригонометрических рядах, где постоянные коэффициенты определены из краевых условий, которые предварительно разложены в ряды Фурье. Сравнение полученных результатов с научными источниками и экспериментальные исследования напряженного состояния при помощи лазерного полярископа на плоских прозрачных моделях ступенчатых деталей с галтелями постоянной и переменной кривизны подтвердили адекватность представленного решения.

Ключевые слова: ступенчатый вал, концентрация напряжений, галтель, переходная поверхность, оптимизация формы

DOI: 10.31857/S0235711920030050

Целью исследований является разработка методики расчета оптимальной формы переходной поверхности ступенчатого вала.

Анализ современного состояния рассматриваемой проблемы. Проблемам определения напряжений в местах различных концентраторов с заданной геометрической формой (прямая задача) посвящена обширная область теории упругости и механики деформируемого твердого тела. Концентрация напряжений численно характеризуется коэффициентами концентрации, однако точные аналитические решения для их определения найдены только в некоторых задачах. В последнее время в связи с широким применением математических пакетов программ и численных методов в задачах теории упругости оказывается возможным найти теоретические коэффициенты концентрации напряжений с достаточной для практических целей точностью. Эти коэффициенты в упругой зоне нагружения для различных типов конструктивных элементов приведены в справочниках по концентрации напряжений, нормах, технических условиях на проектирование конструкций и в других аналогичных источниках. В иных задачах, не имеющих даже численного решения, для определения коэффициентов концентрации и закона распределения напряжений применяются экспериментальные методы: фотоупругости, голографической интерферометрии, тензометрии, муаровых полос и др. Но все экспериментальные методы отличаются большой трудоемкостью или высокой стоимостью лабораторного оборудования.

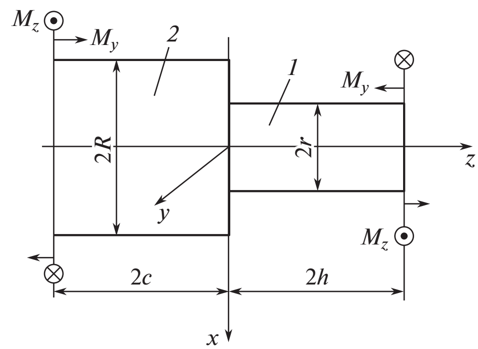


Рис. 1. Элемент ступенчатого вала при изгибе с кручением.

Отыскание оптимальных геометрических форм деталей при их проектировании (обратная задача), когда известно или задается напряженное состояние, встречается с серьезными математическими трудностями. В ряде случаев подобное проектирование оптимальной формы сводится к решению вариационных задач с неизвестными границами, для которых отсутствуют регулярные методы исследования. Известные трудности связаны также с тем, что задачи оптимизации формы упругих тел относятся к числу нелинейных задач механики [1–5].

Разработка методов оптимизации формы деталей конструкций машин, несущих основную нагрузку, имеет важное прикладное и теоретическое значение в решении задач повышения их надежности и в значительной степени активизирует развитие машинных технологий на производстве.

Обоснование актуальности рассматриваемой проблемы. Валы в любом механизме или машине принадлежат к числу наиболее ответственных деталей, выход из строя которых обычно представляет собой угрозу для всего привода. Часто валы имеют ступенчатую форму, разрушение которых связано с возникновением усталостных трещин в местах перехода от меньшего сечения к большему. Для снижения концентрации напряжений переходные поверхности скругляют галтелями постоянной или переменной кривизны, однако остается актуальным вопрос об их оптимальной форме [1, 2].

Задача исследований. Разработка методики расчета оптимальной формы переходной поверхности ступенчатого вала в условиях сложного сопротивления.

Методика исследований. Рассмотрим расчетную схему элемента ступенчатого вала при изгибе с кручением (рис. 1).

Проведем последовательный расчет ступенчатого вала, применяя для жесткого изотропного материала принцип независимости действия силовых факторов (суперпозиции). Вначале решим прямую задачу для элемента вала с концентрацией напряжений (без галтели). Для определения напряжений на линии сопряжения ступени *1* и основания *2* ($|x| \le r$; $z = 0$) воспользуемся особым интегральным уравнением [6–11]

$$a\varphi(x) + \frac{b}{\pi i}\int_{-r}^{r}\frac{\varphi(\xi)}{\xi - x}d\xi = f(x), \tag{1}$$

где при чистом изгибе примем

$$\varphi(x) = \sigma_z(x;0) = \sigma_{z\text{м}},$$

$$f(x) = -i\frac{dw_{\text{м}}}{dx},$$

при чистом кручении

$$\varphi(x) = \tau(x;0) = \tau_{\text{м}},$$

$$f(x) = -i\frac{dv_{\text{м}}}{dx}.$$

Здесь $\sigma_{z\text{м}}$, $\tau_{\text{м}}$ – местные нормальные и касательные напряжения на линии сопряжения; $w_{\text{м}}$, $v_{\text{м}}$ – местные перемещения на линии сопряжения; a, b – упругие постоянные.

Решение уравнения (1), в случае неограниченного возрастания напряжений на концах линии сопряжения, имеет вид [6, 7]

$$\varphi(x) = -\frac{A}{\pi i}\frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}\int_{-r}^{+r}\frac{\sqrt{r^2 - \xi^2}f(\xi)}{\xi - x}d\xi + \frac{B}{\pi\sqrt{r^2 - x^2}}, \tag{2}$$

где A, B – постоянные, зависящие от упругих свойств и внешней нагрузки.

Примем

$$\left.\begin{aligned} w_{\text{м}} &= \theta x, \\ v_{\text{м}} &= \alpha x, \end{aligned}\right\}$$

где θ, α – углы наклона и поворота линии сопряжения.

Тогда из (2) получаем [7]

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{z\text{м}} &= -\frac{A_1\theta x}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \frac{B_1}{\pi\sqrt{r^2 - x^2}}, \\ \tau_{\text{м}} &= -\frac{A_2\alpha x}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \frac{B_2}{\pi\sqrt{r^2 - x^2}}. \end{aligned}\right\}$$

Для определения постоянных воспользуемся условиями равновесия

$$\left.\begin{aligned} \int_{-r}^{r}\sigma_{z\text{м}}dx &= 0, \\ \int_{-r}^{r}\tau_{\text{м}}dx &= 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда $B_1 = B_2 = 0$;

$$\left.\begin{aligned} \int_{-r}^{r}\sigma_{z\text{м}}x dx &= \frac{8M_y}{3\pi r}, \\ \int_{-r}^{r}\tau_{\text{м}}x dx &= \frac{4M_z}{3\pi r}, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} A_1\theta &= -\frac{16M_y}{3\pi^2 r^3}, \\ A_2\alpha &= -\frac{8M_z}{3\pi^2 r^3}, \end{aligned}\right\}$$

где M_y, M_z – изгибающий и крутящий моменты соответственно.

Окончательно местные напряжения на линии сопряжения примут вид

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{z\text{м}} &= \frac{16M_y}{3\pi^2 r^3}\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}},\\ \sigma_{x0} &= 0,\\ \tau_{\text{м}} &= \frac{8\beta M_y}{3\pi^2 r^3}\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где $\beta = M_z/M_y$.

Функции (3), а также нормальные и касательные напряжения для крайнего правого сечения

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{4M_y}{\pi r^4}x,\\ \tau &= \frac{2M_z}{\pi r^4}x = \frac{2\beta M_y}{\pi r^4}x \end{aligned}\right\}$$

и для крайнего левого сечения вала

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{4M_y}{\pi R^4}x,\\ \tau &= \frac{2M_z}{\pi R^4}x = \frac{2\beta M_y}{\pi R^4}x \end{aligned}\right\}$$

раскладываем в ряды Фурье

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{z\text{м}} &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(\lambda x) + A_{n1}\sin(\lambda x)),\\ \tau_{\text{м}} &= B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(B_n\sin(\lambda x) + B_{n1}\cos(\lambda x)),\\ \sigma &= B_0^* + \sum_{n=1}^{\infty}(B_n^*\cos(\lambda x) + B_{n1}^*\sin(\lambda x)),\\ \tau &= D_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(D_n\sin(\lambda x) + D_{n1}\cos(\lambda x)). \end{aligned}\right\}$$

Здесь для левой части вала *2* (основания) при $\lambda = n\pi/R$ свободные члены и коэффициенты рядов запишутся

$$A_{n1} = \frac{16M_y}{3\pi^2 r^3 R}I_{n1}(\lambda r), \quad B_n = \frac{8\beta M_y}{3\pi^2 r^3 R}I_{n1}(\lambda r),$$

$$A_0 = A_n = B_0 = B_{n1} = B_0^* = B_n^* = D_0 = D_{n1} = 0,$$

$$B_{n1}^* = \frac{8M_y}{\pi\lambda^2 R^5}(\sin(n\pi) - (n\pi)\cos(n\pi)),$$

$$D_n = \frac{4\beta M_y}{\pi\lambda^2 R^5}(\sin(n\pi) - (n\pi)\cos(n\pi)),$$

где $I_{n1} = \int_{-r}^{r}\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\sin(\lambda x)\,dx.$

Для правой части вала *1* (ступени) в вышеприведенных формулах необходимо R заменить на r. Записываем напряжения $\sigma_z(x, z)$, $\sigma_x(x, z)$, $\tau_{xz}(x, z)$ для срединной плоскости xz вала в тригонометрических рядах с постоянными коэффициентами C_{in} [7, 11]

$$\sigma_z = \sigma_{z0} - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^2 ((C_{1n} \operatorname{ch}(\lambda z) + C_{2n} \operatorname{sh}(\lambda z) + C_{3n} z \operatorname{ch}(\lambda z) + C_{4n} z \operatorname{sh}(\lambda z)) \cos(\lambda x) + (C_{5n} \operatorname{ch}(\lambda z) + C_{6n} \operatorname{sh}(\lambda z) + C_{7n} z \operatorname{ch}(\lambda z) + C_{8n} z \operatorname{sh}(\lambda z)) \sin(\lambda x));$$

$$\sigma_x = \sigma_{x0} + \sum_{n=1}^{\infty} ((C_{1n} \lambda^2 \operatorname{ch}(\lambda z) + C_{2n}\lambda^2 \operatorname{sh}(\lambda z) + C_{3n}\lambda (2\operatorname{sh}(\lambda z) + \lambda z \operatorname{ch}(\lambda z)) + C_{4n}\lambda (2\operatorname{ch}(\lambda z) + \lambda z \operatorname{sh}(\lambda z))) \cos(\lambda x) + (C_{5n} \lambda^2 \operatorname{ch}(\lambda z) + C_{6n}\lambda^2 \operatorname{sh}(\lambda z) + C_{7n}\lambda (2\operatorname{sh}(\lambda z) + \lambda z \operatorname{ch}(\lambda z)) + C_{8n}\lambda (2\operatorname{ch}(\lambda z) + \lambda z \operatorname{sh}(\lambda z))) \sin(\lambda x));$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz0} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda ((C_{1n}\lambda \operatorname{sh}(\lambda z) + C_{2n}\lambda \operatorname{ch}(\lambda z) + C_{3n} (\operatorname{ch}(\lambda z) + \lambda z \operatorname{sh}(\lambda z)) + C_{4n} (\operatorname{sh}(\lambda z) + \lambda z \operatorname{ch}(\lambda z))) \sin(\lambda x) - (C_{5n}\lambda \operatorname{sh}(\lambda z) + C_{6n}\lambda \operatorname{ch}(\lambda z) + C_{7n} (\operatorname{ch}(\lambda z) + \lambda z \operatorname{sh}(\lambda z)) + C_{8n} (\operatorname{sh}(\lambda z) + \lambda z \operatorname{ch}(\lambda z))) \cos(\lambda x)).$$

Для левой части *2* (основания) вала с граничными условиями

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ \sigma_z\big|_{z=+c} = \sigma_{z\text{м}}, \quad (|x| \le r),\\
&2)\ \tau_{xz}\big|_{z=+c} = \tau_{\text{м}}, \quad (|x| \le r),\\
&3)\ \sigma_z\big|_{z=-c} = \frac{4M_y}{\pi R^4} x, \quad (|x| \le R),\\
&4)\ \tau_{xz}\big|_{z=-c} = \frac{2M_z}{\pi R^4} x, \quad (|x| \le R)
\end{aligned}\right\}$$

и началом координат в точке (0; $-c$) постоянные C_{in}, а также свободные члены рядов определяем по формулам [7, 11]

$$C_{1n} = -\frac{(A_n + B_n^*)(\operatorname{sh}(\lambda c) + \lambda c \operatorname{ch}(\lambda c)) + (B_n - D_n)\lambda c \operatorname{sh}(\lambda c)}{\lambda^2 (\operatorname{sh}(2\lambda c) + 2\lambda c)},$$

$$C_{2n} = -\frac{(A_n - B_n^*)(\operatorname{ch}(\lambda c) + \lambda c \operatorname{sh}(\lambda c)) + (B_n + D_n)\lambda c \operatorname{ch}(\lambda c)}{\lambda^2 (\operatorname{sh}(2\lambda c) - 2\lambda c)},$$

$$C_{3n} = \frac{(A_n - B_n^*)\operatorname{ch}(\lambda c) + (B_n + D_n)\operatorname{sh}(\lambda c)}{\lambda (\operatorname{sh}(2\lambda c) - 2\lambda c)},$$

$$C_{4n} = \frac{(A_n - B_n^*)\operatorname{sh}(\lambda c) + (B_n - D_n)\operatorname{ch}(\lambda c)}{\lambda (\operatorname{sh}(2\lambda c) + 2\lambda c)},$$

$$C_{5n} = -\frac{(A_{n1} - B_{n1}^*)(\operatorname{sh}(\lambda c) + \lambda c \operatorname{ch}(\lambda c)) - (B_{n1} - D_{n1})\lambda c \operatorname{sh}(\lambda c)}{\lambda^2 (\operatorname{sh}(2\lambda c) + 2\lambda c)},$$

$$C_{6n} = -\frac{(A_{n1} - B_{n1}^*)(\operatorname{ch}(\lambda c) + \lambda c \operatorname{sh}(\lambda c)) - (B_{n1} + D_{n1})\lambda c \operatorname{ch}(\lambda c)}{\lambda^2 (\operatorname{sh}(2\lambda c) - 2\lambda c)},$$

$$C_{7n} = \frac{(A_{n1} - B_{n1}^{*})\operatorname{ch}(\lambda c) - (B_{n1} + D_{n1})\operatorname{sh}(\lambda c)}{\lambda(\operatorname{sh}(2\lambda c) - 2\lambda c)},$$

$$C_{8n} = \frac{(A_{n1} - B_{n1}^{*})\operatorname{sh}(\lambda c) - (B_{n1} - D_{n1})\operatorname{ch}(\lambda c)}{\lambda(\operatorname{sh}(2\lambda c) + 2\lambda c)},$$

$$\sigma_{z0} = A_0, \quad \sigma_{x0} = A_0^{*}, \quad \tau_{xz0} = B_0.$$

Для правой части *1* (ступени) вала с граничными условиями

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \sigma_z\big|_{z=+h} = \dfrac{4M_y}{\pi r^4}x, \\ 2)\ \tau_{xz}\big|_{z=+h} = \dfrac{2M_z}{\pi r^4}x, \\ 3)\ \sigma_z\big|_{z=-h} = \sigma_{z\text{м}}, \\ 4)\ \tau_{xz}\big|_{z=-h} = \tau_{\text{м}}, \\ \quad (|x| \le r) \end{array}\right\}$$

и началом координат в точке (0; $+h$) постоянные C_{in}, а также свободные члены рядов определяем по формулам [7, 11]

$$C_{1n} = -\frac{(A_n - B_n^{*})(\operatorname{sh}(\lambda h) + \lambda h\operatorname{ch}(\lambda h)) - (B_n - D_n)\lambda h\operatorname{sh}(\lambda h)}{\lambda^2(\operatorname{sh}(2\lambda h) + 2\lambda h)},$$

$$C_{2n} = \frac{(A_n - B_n^{*})(\operatorname{ch}(\lambda h) + \lambda h\operatorname{sh}(\lambda h)) - (B_n + D_n)\lambda h\operatorname{ch}(\lambda h)}{\lambda^2(\operatorname{sh}(2\lambda h) - 2\lambda h)},$$

$$C_{3n} = -\frac{(A_n - B_n^{*})\operatorname{ch}(\lambda h) - (B_n + D_n)\operatorname{sh}(\lambda h)}{\lambda(\operatorname{sh}(2\lambda h) - 2\lambda h)},$$

$$C_{4n} = \frac{(A_n - B_n^{*})\operatorname{sh}(\lambda h) - (B_n - D_n)\operatorname{ch}(\lambda h)}{\lambda(\operatorname{sh}(2\lambda h) + 2\lambda h)},$$

$$C_{5n} = -\frac{(A_{n1} - B_{n1}^{*})(\operatorname{sh}(\lambda h) + \lambda h\operatorname{ch}(\lambda c)) + (B_{n1} - D_{n1})\lambda h\operatorname{sh}(\lambda h)}{\lambda^2(\operatorname{sh}(2\lambda h) + 2\lambda h)},$$

$$C_{6n} = \frac{(A_{n1} - B_{n1}^{*})(\operatorname{ch}(\lambda h) + \lambda h\operatorname{sh}(\lambda h)) + (B_{n1} + D_{n1})\lambda h\operatorname{ch}(\lambda h)}{\lambda^2(\operatorname{sh}(2\lambda h) - 2\lambda h)},$$

$$C_{7n} = -\frac{(A_{n1} - B_{n1}^{*})\operatorname{ch}(\lambda h) + (B_{n1} + D_{n1})\operatorname{sh}(\lambda h)}{\lambda(\operatorname{sh}(2\lambda h) - 2\lambda h)},$$

$$C_{8n} = \frac{(A_{n1} - B_{n1}^{*})\operatorname{sh}(\lambda h) + (B_{n1} - D_{n1})\operatorname{ch}(\lambda h)}{\lambda(\operatorname{sh}(2\lambda h) + 2\lambda h)},$$

$$\sigma_{z0} = A_0, \quad \sigma_{x0} = A_0^{*}, \quad \tau_{xz0} = B_0.$$

По известной формуле

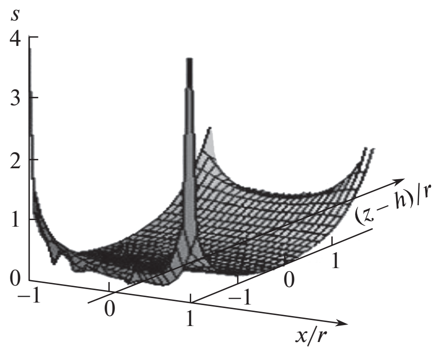


Рис. 2. Эпюра максимальных касательных напряжений в безразмерных величинах для ступени вала.

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

определяем максимальные касательные напряжения и приводим их к безразмерным величинам согласно выражениям (4) и (5)

$$s\left(x/t; z/t\right) = \frac{\tau_{\max}}{\sigma_{н}}, \tag{4}$$

где за эквивалентные номинальные напряжения примем

$$\sigma_{н} = \frac{16M_y}{3\pi^2 r^3}\sqrt{1+\beta^2}. \tag{5}$$

На рис. 2 представлена эпюра максимальных касательных напряжений в безразмерных величинах при $R = c = h = 2r$ и $\beta = 1$ для ступени вала.

Исследование концентрации напряжений в ступенчатых деталях с плоской срединной поверхностью и постоянным радиусом скругления галтели представлено в [11]. Если за эквивалентные номинальные напряжения принять (5), то теоретический коэффициент концентрации α_T по наибольшим эквивалентным напряжениям

$$\sqrt{\sigma_{z0}^2 + 4\tau_0^2} = \frac{16M_y}{3\pi^3 r^3}\sqrt{1+\beta^2}\,\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

при $x \to r$ и условии ограниченности напряжений в галтелях вала, запишется

$$\alpha_T = \lim_{x \to r}\left(\frac{\sqrt{\sigma_{z0}^2 + 4\tau_0^2}}{\sigma_{н}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{r}{r_0}\right)^2}}, \tag{6}$$

где r_0 – радиус ступени вала без галтели ($r_0 > r$). Тогда, воспользовавшись выводами в [11] и выражением (6), получим уравнение

$$\frac{\alpha_T^2}{\alpha_T^2 - 1} - \frac{\left(\alpha_T - 1\right)^2 \rho_0^2}{2} - 2\left(2\sqrt{2} - 1\right)\rho_0^2 - 2\sqrt{2}\rho_0 - 1 = 0, \tag{7}$$

где $\rho_0 = \rho/2r$, ρ – радиус галтели переходной поверхности.

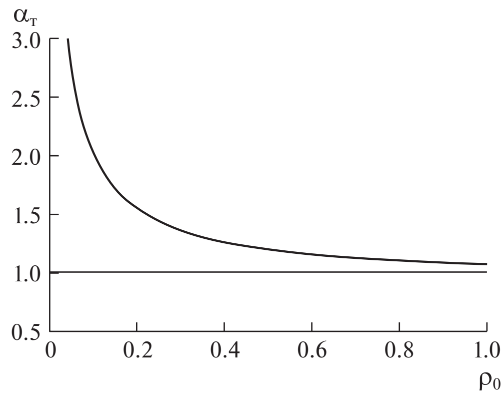


Рис. 3. Изменение теоретического коэффициента концентрации напряжений в зависимости от радиуса галтели ступенчатого вала.

На рис. 3 дано графическое представление уравнения (7) – зависимости теоретического коэффициента концентрации напряжений от радиуса галтели ступенчатого вала.

Полученная кривая хорошо согласуется с эмпирическими данными, приведенными в [11]. Отсюда можно заключить, что галтели ступенчатого вала с постоянным радиусом скругления не являются оптимальной формой переходной поверхности.

Для оптимизации формы переходной поверхности вала решим обратную задачу. Искривленное поле максимальных касательных напряжений (4) (рис. 2) разворачиваем на плоскости xz, тем самым получаем форму срединной поверхности вала в месте перехода ступень – основание, удовлетворяющую условию оптимальности [7, 11]

$$\frac{2\tau_{\max}}{\sigma_н} = k_\sigma \to 1 \quad \text{или} \quad s = \frac{\tau_{\max}}{\sigma_н} \to 0.5.$$

Математически развертка искривленной поверхности $s\left(x/t; z/t\right)$ выполняется путем определения длины ветви L_s функции s

$$L_s\left(z/r\right) = \pm \int\limits_0^{0.99r} \sqrt{1 + \left(\frac{ds}{dx}\right)^2} dx.$$

Здесь знак “плюс” относится к интервалу $0 \le x \le +r$, “минус” – к $-r \le x \le 0$ и, из-за того, что при $x = r$ длина кривой L_s стремится к бесконечности, верхний предел интегрирования значением $x = 0.99r$.

В плоскости xz строим график $L_s = f(z)$ в пределах $\left|x/r\right| \le R/r$, $0 \le z/r \le 2h/r$, который представляет собой оптимальную форму переходной поверхности ступенчатого вала.

Результаты и их обсуждение. На рис. 4 изображена оптимальная форма переходной поверхности ступенчатого вала, рассчитанная по разработанной методике, при $R = c = h = 2r$ и $\beta = 1$.

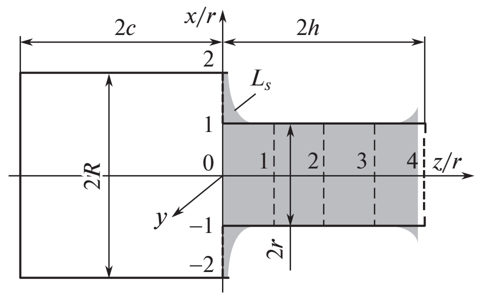


Рис. 4. Оптимальная форма переходной поверхности ступенчатого вала при $R = c = h = 2r$ и $\beta = 1$.

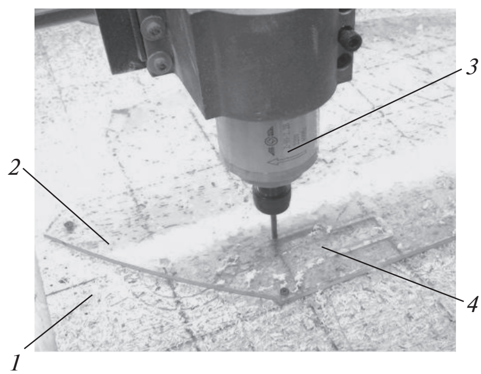


Рис. 5. Изготовление модели срединной поверхности ступенчатого вала.

Для проверки полученного результата проведены экспериментальные исследования напряженного состояния на плоских моделях из листового органического стекла толщиной $\delta = 6$ мм при помощи лазерного полярископа по методике, описанной в [7]. Плоская модель срединной поверхности ступенчатого вала устанавливалась между опорными плитами нагрузочного устройства по схеме шарнирно опертой балки в крайних сечениях и сосредоточенной силой P в месте переходной поверхности ($z = 0$). Чтобы исключить влияние контактных напряжений от жесткого индентора под действием силы P, максимальные касательные напряжения определялись в точках модели при $x \le 0.2r$. Переходные поверхности моделей с постоянными радиусами скругления и оптимальной формы были изготовлены на фрезерно-гравировальном станке с ЧПУ (рис. 5).

Экспериментальное значение максимальных касательных напряжений определялось по формуле [7]

$$\tau_{\max} = C\left(\arcsin\sqrt{\frac{U}{U_{\max}}} - \theta\right),$$

где U – напряжение на фотоприемнике при нагружении модели силой P, мВ; $C = 2.226$ МПа, $\theta = 0.181$, $U_{\max} = 1500$ мВ – тарировочные постоянные.

Таблица 1. Результаты исследования максимальных касательных напряжений в модели срединной поверхности ступенчатого вала на лазерном полярископе

x, мм	Радиус галтели 5 мм		Радиус галтели 20 мм		Оптимальная форма	
	U, мВ	τ_{max}, кПа	U, мВ	τ_{max}, кПа	U, мВ	τ_{max}, кПа
2.4	59	41.515	99	175.449	94	160.326
0	68	74.702	120	235.414	135	275.34
–2.4	110	207.52	193	413.761	257	547.064
–4.8	187	400.375	338	698.107	390	788.162
–7.2	370	754.038	500	967.152	560	1060.324
–9.6	560	1060.324	690	1256.255	718	1297.888
–12.0	1262	2181.705	824	1455.385	760	1360.231
–14.4	353	724.543	742	1339.454	573	1080.221
–16.8	196	420.387	461	905.122	281	593.494
–21.0	130	262.266	152	318.243	140	288.198

Основные результаты исследования для моделей при $R = c = h = 2.1r = 25.2$ мм, $P = 60$ Н, $z = -2$ мм и $\beta = 0$ представлены в табл. 1 и на рис. 6.

Обсуждение и заключения. 1. Из анализа эпюр (рис. 7) следует, что значения коэффициента концентрации напряжений $\alpha_T = k_{\sigma max} = 1.11$ при $\rho_0 = 0.83$ и $\alpha_T = 1.66$ при $\rho_0 = 0.21$ согласуются с теоретической кривой (рис. 3). **2.** Наименьшее значение α_T составляет 1.04 для формы переходной поверхности L_s, рассчитанной по предложенной методике, что указывает на достижение поставленной цели исследований.

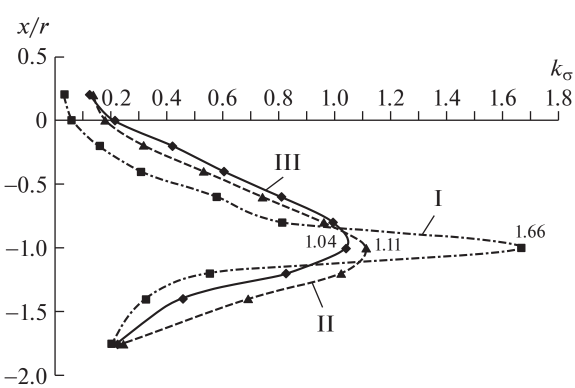


Рис. 6. Напряженное состояние модели ступенчатого вала в переходном сечении при $R = c = h = 2.1r = 25.2$ мм, $x \le 0.2r$, $z = -2$ мм и $\beta = 0$: *I* – с постоянным радиусом скругления $\rho = 5$ мм ($\rho_0 = 0.21$); *II* – с постоянным радиусом скругления $\rho = 20$ мм ($\rho_0 = 0.83$); *III* – с оптимальной формой переходной поверхности.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Francavilla A., Ramakrishnan C.V., Zienkiewicz O.C.* Optimization of shape to minimize stress concentration // J. Strain Anal., 1975. V. 10. P. 63.
2. *Sonmez F.O.* Optimal shape design of shoulder fillets for flat and round bars under various loadings // J. Mechanical Engineering Science. 2009. V. 223. P. 1741.
3. *Pedersen N.L.* Optimization of Bolt Stress // 10th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, May 19–24, 2013, Orlando, Florida, USA. P. 1.
4. *Yang L., Masatoshi S., Yoji S.* Parameter-free method for the shape optimization of stiffeners on thin-walled structures to minimize stress concentration // Journal of Mechanical Science and Technology. 2015. V. 29. P. 1383.
5. *Lian H., Christiansen A.N., Tortorelli D.A., Sigmund O., Aage N.* Combined shape and topology optimization for minimization of maximal von Mises stress // Structural and multidisciplinary optimization. 2017. V. 55(5). P. 1541.
6. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
7. *Дородов П.В.* Комплексный метод расчета и оптимального проектирования деталей машин с концентраторами напряжений: Монография. Ижевск: ФГБОУ ВПО Ижевская ГСХА, 2014. 316 с.
8. *Кулиев В.Д.* Новые эффективные методы решения класса смешанных краевых задач // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. 2015. № 1(23). С. 132.
9. *Урбанович Т.М.* Об особом случае характеристического уравнения с ядром Коши // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 52. № 12. С. 1650.
10. *Урбанович Т.М.* Особый случай сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши // Доклады НАН Беларуси. 2016. Т. 60. № 2. С. 10.
11. *Ерохин М.Н., Дородов П.В.* Метод оптимизации формы несимметричных ступенчатых деталей // Международный технико-экономический журнал. 2016. № 2. С. 10.

ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2020, № 3, с. 56–64

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 621.43.056;629.7.036.5-67:624. 131.34

ВЛИЯНИЕ ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ КОРПУСОВ ТВЕРДОТОПЛИВНЫХ ЗАРЯДОВ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ РАБОТЫ ПУЛЬСИРУЮЩИХ ВЗРЫВНЫХ УСТРОЙСТВ

© 2020 г. В. О. Соловьев[1],*, Г. В. Москвитин[1], Н. М. Овчинников[1], М. С. Кельнер[1], М. С. Пугачев[1]

[1]*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*
**e-mail: solovievvo@yandex.ru*

Поступила в редакцию 12.03.2019 г.
Принята к публикации 31.01.2020 г.

В статье приводится анализ результатов натурных экспериментальных исследований по изучению влияния прочности конструкционных материалов тонкостенных корпусов сосредоточенных зарядов взрывчатых веществ на эффективность работы пульсирующих взрывных устройств различного целевого назначения.

Ключевые слова: твердотопливные пульсирующие взрывные устройства, прочностные свойства корпусов твердотопливных зарядов, специальные электродетонаторы

DOI: 10.31857/S0235711920030128

В работе [1, 2] было показано, что по термодинамическим показателям режим детонационного горения топливной смеси более выгоден, чем режим дефлаграционного горения. В современных условиях, когда энергетические возможности химических топлив практически достигли своего предела, разработчики все чаще ищут новые подходы и пути повышения КПД и мощности энергосиловых установок.

В отличие от режима детонационного горения газовых смесей, детонация твердых взрывчатых веществ (ВВ) является устойчивым процессом и надежно протекает в любых средах и зарядах различной формы. С увеличением плотности ВВ возрастает скорость детонации, а, следовательно, мощность заряда и плотность выделяемой энергии, термодинамический КПД, т.е. возрастает эффективность пульсирующих взрывных устройств (ПВУ) и существенно расширяется область их применения.

Твердотопливные ПВУ – класс машин, включающий в себя автоматическую систему подачи и инициирования зарядов ВВ и совершающих полезную работу серией последовательных взрывов. К таким машинам относятся: устройства и комплексы для взрывобурения горных пород различной крепости; устройства и станки для обработки материалов или получения материалов с новыми физико-механическими свойствами; детонационные ракетные двигатели различного целевого назначения; ударно-волновые и акустические генераторы для воздействия на биообъекты.

Проведенные ранее авторами теоретические и экспериментальные исследования подтвердили эффективность применения взрывореактивных установок (ВУ) для бурения горных пород и твердотопливных детонационных ракетных двигателей (ТДРД) при оснащении их надежной системой подачи зарядов ВВ в рабочую зону с частотой до 1000 Гц и специальными высокобезопасными средствами их инициирования [3–5].

Известны созданные ранее опытные образцы, оснащенные одноразовыми отражателями и кассетами, защищенные патентами [6–8]:

1. Твердотопливные детонационные ракетные двигатели, тяга которых создается серией последовательных взрывов зарядов ВВ, размещенных в одноразовых отражателях (кассетах). После каждого взрыва очередной отражатель формирует продукты взрыва (ПВ) в направленный поток, при этом сам отражатель частично разрушается и отбрасывается от изделия [6, 7].

2. Взрывореактивные установки — безоткатные устройства, состоящие из набора одноразовых кассет, каждая из которых оснащена: отражателями с забойными зарядами ВВ (разрушающие породу на забое) и отражателями с прижимными зарядами ВВ (прижимающие изделие к забою и расширяющие скважину), при этом после направленного истечения ПВ из очередной кассеты разрушенные элементы кассеты и шлам выбрасываются из скважины ударными волнами и расширяющимися газами [4, 8].

Проведенная авторами оценка массогабаритных характеристик ПВУ показала, что для изделий калибром более 250 мм целесообразно использовать неразрушаемые многоразовые отражатели, однако, при этом возникают серьезные проблемы, связанные с живучестью конструкций, прежде всего с отражателями, находящимися в непосредственном контакте с инициируемыми зарядами ВВ.

В работе [9] была предложена концепция защиты стальных отражателей энергоаккумулирующими материалами от разрушающего воздействия ПВ при инициировании зарядов твердых ВВ на их поверхности, и приведены результаты экспериментальных исследований. В экспериментах использовались цилиндрические заряды (диаметр заряда равен их высоте) с плотностью заряжания ВВ $\rho = 10^3$ кг/м^3. Заряды имели массу 6×10^{-3}, 12×10^{-3} и 18×10^{-3} кг и оснащались скальным аммонитом № 3, тротилом, гексогеном, которые формовались в тонкостенных оболочках из алюминиевой фольги для исключения влияния корпуса заряда ВВ на эффект расширения ПВ на поверхности отражателя и фактор их защиты.

Использование многоразовых отражателей требует наличия высокочастотных механических систем для раздельной подачи зарядов ВВ в рабочую зону, что накладывает условия на прочностные свойства корпусов для защиты зарядов ВВ от повреждений.

Несущая способность тонкостенных корпусов для зарядов ВВ зависит не только от геометрических характеристик самих корпусов (диаметра, их высоты и толщины), мощности заряда, но и от прочностных свойств конструкционных материалов, используемых для изготовления этих корпусов.

Настоящая статья посвящена вопросам экспериментального исследования влияния величин временного сопротивления на растяжение $\sigma_в$ конструкционных материалов корпусов твердотопливных зарядов ПВУ различного целевого назначения, изготовленных из сталей марок 3, 20, 45, 30ХГСА, 30ХГСА (закаленная), 65Г, 65Г (закаленная), а также бронзы марки БрОЦ4-3.

Для уточнения величин временного сопротивления конструкционных материалов прутков, из которых изготавливались корпуса зарядов, были проведены испытания по ГОСТ 1497-84 на сервогидравлической машине фирмы “Shimadzu”. При испытаниях использовались образцы, показанные на рис. 1.

Нагружение осуществлялось с постоянной скоростью перемещения активного захвата, которая составляла 0.02 мм/с.

Образцы устанавливались в гидравлические захваты с давлением 15 МПа. Удлинение рабочей части образцов измерялось экстензометром с базой 25 мм (рис. 1).

В процессе испытаний записывались диаграммы в координатах нагрузка — перемещение активного захвата, удлинение образца. Фотография разрушенных образцов представлена на рис. 2.

По времени возрастания и времени воздействия нагрузки на материалы выделяют три режима нагружения: статическое, квазистатическое и динамическое [10, 11]. В свою очередь динамическое нагружение можно разделить на слабое и сильное. Под

Рис. 1. Вид образца с датчиком в процессе испытаний.

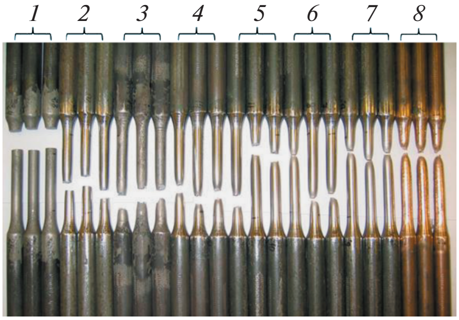


Рис. 2. Образцы прутков, после испытаний: *1* – Сталь 65Г (закаленная); *2* – Сталь 65Г; *3* – Сталь 30ХГСА (закаленная); *4* – Сталь 30ХГСА; *5* – Сталь 45; *6* – Сталь 20; *7* – Сталь 3; *8* – Бронза БрОЦ4-3.

динамическими нагрузками ($t_{\text{н max}} < 2L/c$, $\alpha p_{\max} < p_{\Gamma}$) следует понимать слабое динамическое нагружение. Под сильной динамической нагрузкой понимается ударноволновое нагружение – предельный случай динамического нагружения ($t_{\text{н max}} < 2L/c$, $\alpha p_{\max} \geq p_{\Gamma}$), где $t_{\text{н max}}$ – время возрастания нагрузки до максимального значения, с; L – характерный размер элемента конструкции, м; c – скорость звука в твердом теле, м/с; α – коэффициент согласования, зависящий от особенностей нагружения и вида нагруженного состояния; p_{Γ} – упругий предел на ударной адиабате Гюгонио в ударной волне при одноосном деформированном состоянии, Па; $p_{\max}$ – амплитуда (или максимальное значение внешнего поверхностного давления), Па.

Для исследования слабых динамических нагружений применяется метод составных стержней Гопкинсона [10, 12–15], в том числе и для образцов, нагреваемых до 500°C, при которых прочностные свойства конструкционных сталей падают более чем в 2 раза [16].

На материалы и конструкции при ударноволновом нагружении воздействуют ударные волны и волны разрежения. Ударные волны принято описывать законами сохранения массы, импульса и энергии

$$\rho_0(D_{\text{УВ}} - u_0) = \rho(D_{\text{УВ}} - u),$$

$$p - p_0 = \rho_0(u - u_0)(D_{\text{УВ}} - u_0), \tag{1}$$

$$E - E_0 = \frac{p + p_0}{2}(V_0 - V),$$

где $D_{\text{УВ}}$ – скорость ударной волны, м/с; ρ_0, ρ – плотность ПВ перед и за фронтом ударной волны, кг/м^3; V_0, V – удельный объем ПВ перед и за фронтом ударной волны, м^3/кг; p_0, p – давление ПВ перед и за фронтом ударной волны, Па; u_0, u – массовая скорость ПВ перед и за фронтом ударной волны, м/с; E_0, E – удельная энергия ВВ перед и за фронтом ударной волны, Дж/кг.

Для давлений до нескольких десятков гигапаскалей уравнение состояния Ми-Грюнайзена записывается в виде

$$p = p_x(\rho) + p_{\text{т}} = p_x(\rho) + \Gamma\rho E_{\text{т}},$$

$$E = E_x(\rho) + E_{\text{т}} = E_x(\rho) + C_V T, \tag{2}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial \rho} = \frac{p_x}{\rho^2},$$

где $p_x(\rho)$ – упругая ("холодная") составляющая давления, Па; $E_x(\rho)$ – упругая ("холодная") составляющая внутренней энергии, Дж; $p_{\text{т}}$ – тепловая составляющая давления, Па; $E_{\text{т}}$ – тепловая составляющая внутренней энергии, Дж; Γ – коэффициент Грюнайзена; C_V – теплоемкость при постоянном объеме, Дж/К; T – температура, К.

Для практических целей функцию $p_x(\rho)$ можно представить в виде

$$p_x(\rho) = \frac{\rho_0 c_0^2}{n}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right] = \frac{\rho_0 c_0^2}{n}(\rho_{\text{сж}}^n - 1). \tag{3}$$

Упругая энергия $E_x(\rho)$ зависит от относительного сжатия $\delta_{\text{сж}} = \rho/\rho_0$ как

$$E_x(\delta_{\text{сж}}) = \frac{c_0^2}{n\delta_{\text{сж}}}\left[1 - \frac{n\delta_{\text{сж}}}{n-1} + \frac{\delta_{\text{сж}}^n}{n-1}\right]. \tag{4}$$

Из уравнений (2)–(4) можно получить уравнение ударной адиабаты в явном виде

$$p_{\Gamma} = \frac{\rho_0 c_0^2}{n}\frac{\left(h_{\Gamma} - \frac{n+1}{n-1}\right)\delta_{\text{сж}}^n + \frac{2n\delta_{\text{сж}}}{n-1} - (h_{\Gamma} + 1)}{h_{\Gamma} - \delta_{\text{сж}}}, \tag{5}$$

где $h_{\Gamma} = 2/\Gamma + 1$; c_0 – скорость звука в материале, м/с; n – коэффициент политропы.

Я.Б. Зельдович предложил учитывать условия образования ударных волн разрежения, т.е. состояние вблизи критической точки фазового перехода в жидкости, где стираются различия между паром и жидкостью. Причиной образования ударных волн разрежения является фазовый переход первого рода при ударном сжатии, сопровождающийся перестройкой кристаллической решетки с уменьшением ее объема [10].

Данная область является малоизученной и требует новых уравнений состояния ВВ для последующего составления уравнений состояния нагружаемых образцов с целью уточнения расчетных моделей поведения конструкционных материалов при ударно-волновом нагружении. Известны работы, проведенные в России и за рубежом по изучению деформации и разрушения металлических оболочек, оснащенных зарядами ВВ [17, 18].

Существующие расчетно-экспериментальные методы базируются на процессах стационарной детонации для определения режимов нагружения и разрушения образцов. В связи с этим в настоящее время задачи оценки прочности и живучести элемен-

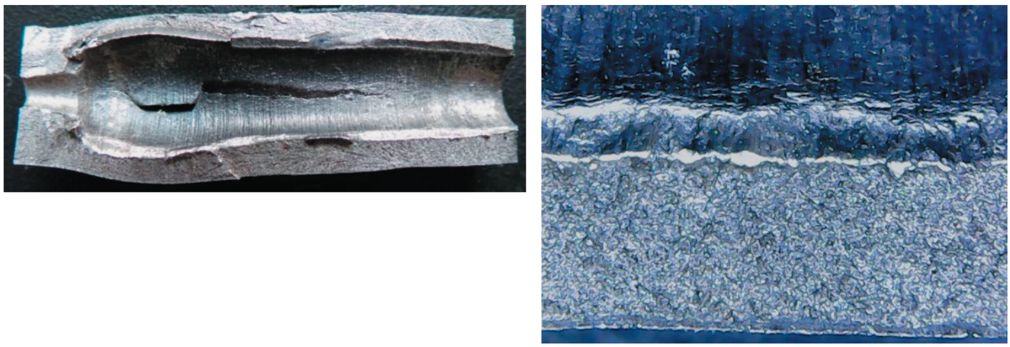


Рис. 3. (а) – вид одноканального образца после взрыва; (б) – увеличенный фрагмент разрушенного образца с застывшим расплавом металла.

тов ПВУ, подверженных ударноволновому нагружению, при нестационарных режимах детонации решаются на основе экспериментальных исследований.

Используемый нами малый оболочечный заряд разработан на основе концепции специального электродетонатора (СЭД), предполагающий переходные режимы формирования пересжатой детонации [5].

Нас интересовали процессы развития детонации малых зарядов ВВ в тонкостенных металлических корпусах толщиной до 3 мм с каналами переменного сечения диаметром от 1 до 6 мм, инициируемых электропроводным пленочным мостиком.

Для понимания процесса развития детонации в каналах малого диаметра при электрическом инициировании ТЭНа пленочным мостиком [5] были проведены оценочные эксперименты на одноканальных образцах, наружные габариты которых имели диаметр 8 мм и длину 30 мм с диаметром канала 3.2 мм и длиной канала 25 мм, оснащенных ТЭН массой 2.4×10^{-4} кг с плотностью заряжания 1200 кг/м^3. Характерный разрушенный ПВ образец испытуемой конструкции из Ст45 представлен на рис. 3.

Из рис. 3а видно, что образующуюся при детонации заряда ТЭН внутреннюю полость образца можно представить в виде сопряженных геометрических фигур: бочкообразной и усеченного конуса. Видно, что раздутие канала происходило по-разному. Так, в начале бочкообразной полости диаметр увеличился в 1.8 раза, в ее середине – в 2 раза, в начале конусообразной – в 1.5 раза, а на выходе – в 1.4 раза.

Цилиндрический канал диаметром 1 мм, предназначенный для подведения электрических проводов с пленочным электропроводным мостиком к заряду ТЭНа, инициируемого взрывной машинкой ПИВ-100М, был деформирован ПВ и приобрел конусообразную форму.

Образовавшаяся после детонации полость конусообразной формы свидетельствует о том, что процесс развивался в режиме пересжатой детонации. На поверхности канала четко видны кольцеобразные, характерные для детонации, следы. Об очень высокой температуре процесса свидетельствуют застывшие капли расплавленного металла (рис. 3б). При различной плотности ТЭН температура в детонационной волне для установившегося режима детонации лежит в диапазоне 3400–4400 K [17, 19, 20].

В качестве заряда ВВ нами использовались СЭД [5], корпуса которых изготавливались из указанных ранее конструкционных материалов.

Экспериментальный стенд представлял собой массивную стальную плиту (подложку), на которую устанавливался свинцовый цилиндр диаметром 40 мм и высотой

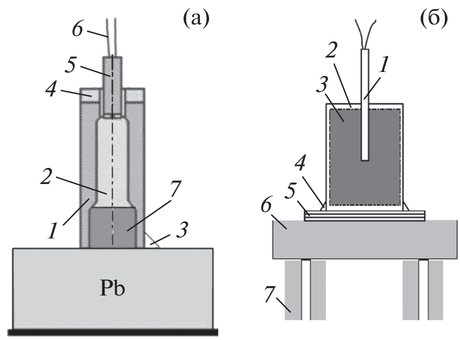


Рис. 4. Стенды для изучения расширения ПВ на поверхности отражателей: (а) – для зарядов ВВ, размещенных в жестких корпусах (*1* – жесткий корпус-отражатель; *2* – инициирующий заряд ВВ; *3* – пластилин; *4* – пробка герметизирующая; *5* – изолятор; *6* – электрические провода; *7* – основной заряд ВВ); (б) – для безкорпусных зарядов ВВ (*1* – электрический детонатор ЭД-202; *2* – корпус из алюминиевой фольги; *3* – основной заряд ВВ *4* – пластилин; *5* – сборка из тонких свинцовых пластин; *6* – отражатель стальной; *7* – стол).

Сталь 3 Сталь 20 Сталь 65 Г (закаленная)

Рис. 5. Характерный вид полостей, образующихся в свинцовых цилиндрах в результате воздействия ПВ СЭД, изготовленных из различных марок стали, и их остатки.

20 мм, на плоский торец которого пластилином крепился СЭД, инициируемый взрывной машинкой ПИВ-100М (рис. 4а).

Следует отметить, что основная масса заряда СЭД (рис. 4а) имеет форму, соответствующую форме заряда, в тонкостенной оболочке из алюминиевой фольги, результаты исследований которого изложены в работе [9] (рис. 4б), диаметр основного заряда равен его высоте. СЭД оснащался ТЭН со средней плотностью заряжания 1.3×10^3 кг/м^3.

Характерный вид полостей, образующихся в свинцовых цилиндрах в результате воздействия ПВ СЭД, а также фрагменты корпусов детонаторов после их срабатывания показаны на рис. 5.

Анализ полученных экспериментальных результатов показал, что после подрыва СЭД на контактной поверхности свинцовых цилиндров, ПВ образуют полости, имеющие форму шарового или эллиптического сегмента. Было установлено, что на форму образуемой полости прямое влияние оказывает временное сопротивление материала корпуса СЭД.

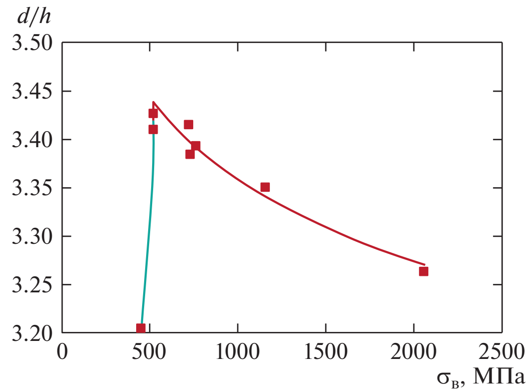


Рис. 6. Зависимость безразмерной величины d/h от временного сопротивления $\sigma_{\text{в}}$ материала корпуса СЭД.

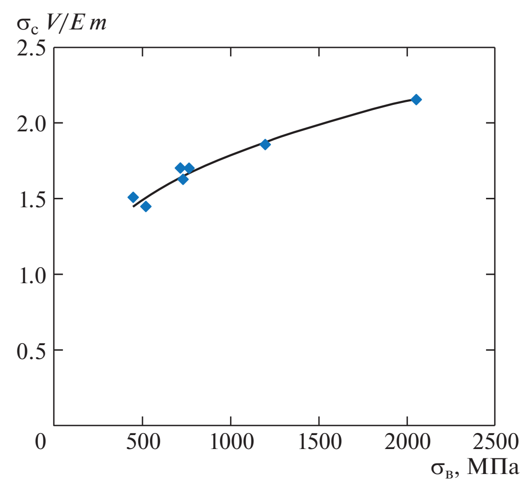


Рис. 7. Зависимость безразмерной величины $\sigma_{\text{c}}V/Em$ от временного сопротивления $\sigma_{\text{в}}$ материала корпуса СЭД.

По результатам экспериментов были построены графики – рис. 6, 7 и получены аналитические зависимости (6)–(8). На рис. 6 наблюдается точка максимума соотношения d/h при $\sigma_{\text{в}} = 520$ МПа, являющаяся точкой стыка двух функций. Из приведенного на рис. 6 графика видно, что при значении $\sigma_{\text{в}} \approx 520$ МПа наблюдается разрыв функции $d/h = f(\sigma_{\text{в}})$, где d – диаметр полости, мм; h – глубина полости, мм; $\sigma_{\text{в}}$ – временное сопротивление материала корпуса, МПа. Правая и левая ветви являются областями компромиссов противоречий двух факторов, а именно: развития процесса детонации (давления и температуры в ударной волне) и временного сопротивления на растяжение $\sigma_{\text{в}}$ конструкционных материалов корпусов заряда ВВ.

Представленная здесь безразмерная зависимость отношения диаметра полости к ее глубине d/h от временного сопротивления $\sigma_{\text{в}}$ материала корпуса СЭД при $\sigma_{\text{в}} \le 520$ МПа выражается зависимостью (6)

$$d/h = 0.225\sigma_в^{0.435} \quad (6)$$

при достоверности аппроксимации $R^2 = 0.997$.

Аналогичная зависимость для материалов с $\sigma_в \geq 520$ МПа имеет вид (7)

$$d/h = 4.306\sigma_в^{-0.036} \quad (7)$$

при $R^2 = 0.957$.

На рис. 7 приведен график зависимости безразмерной величины $\sigma_c V/Em$ от временного сопротивления $\sigma_в$ материала корпуса СЭД, где σ_c – предел прочности на сжатие для свинца, МПа; V – объем полости в свинцовом цилиндре, м^3; E – теплота взрыва ТЭНа, Дж/кг; m – масса ВВ, кг; $\sigma_в$ – временное сопротивление материала корпуса, МПа.

Данная зависимость показывает, что с увеличением временного сопротивления материала корпуса заряда ВВ возрастает эффективность (КПД) деформации (разрушения) нагружаемого ПВ материала, которую можно выразить степенной зависимостью (8)

$$\sigma_c V/Em = 0.29\sigma_в^{0.263} \quad (8)$$

при $R^2 = 0.951$.

Выводы. Установлено, что при увеличении временного сопротивления материала корпуса заряда ВВ в 4 раза КПД разрушения нагружаемого образца (бризантность по свинцу) от сосредоточенного заряда возрастает в 1.5 раза, что свидетельствует о важности выбора материала корпусов для разрабатываемых зарядов (рис. 7) ПВУ различного целевого назначения.

Результаты, полученные в ходе исследований, позволяют рекомендовать использовать конструкционные материалы при проектировании корпусов зарядов с временным сопротивлением: $\sigma_в < 520$ МПа для изделий фугасного действия, оснащенных многоразовыми отражателями, например для ТДРД; $\sigma_в > 520$ МПа для изделий бризантного действия, оснащенных одноразовыми отражателями и кассетами, например для ВУ.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зельдович Я.Б.* К вопросу об энергетическом использовании детонационного горения // ЖТФ. 1940. Т. 10. № 17. С. 1453.
2. *Hoffman H.* Reaction-Propulsion Produced by Intermittent Detonative Combustion // German Ministry of Supply, German Research Institute for Gliding, Report ATI-52365, August 1940.
3. *Степанов Ю.С., Соловьев В.О.* Влияние основных параметров взрывореактивной установки на размеры образуемой полости в мягких горных породах // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 1990. № 2. С. 61.
4. *Фролов К.В., Соловьев В.О., Пацюк В.В.* Об использовании взрывореактивных комплексов малого класса для разрушения горных пород и искусственных материалов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2001. № 5. С. 3.
5. *Соловьев В.О., Думенко В.И.* Электродетонатор и электровоспламенитель для него РФ Патент 2056034, 1992.
6. *Bechtel R., O'Brien Ch.J.* Consumable Detonation Reaction Engine and System. USA Patent 3.889.462, 1975.
7. *Воронецкий А.В., Кутузов Б.Н., Соловьев В.О.* Способ работы и устройство пульсирующего детонационного двигателя с последовательно срабатывающими кассетами. РФ Патент 2245449, 2003.

8. *Соловьев В.О.* Устройство для взрывореактивного бурения, РФ Патент 2064040, 1992.
9. *Соловьев В.О., Кельнер М.С.* Защита стальных отражателей от разрушающего воздействия продуктов детонации, использующихся в твердотопливных пульсирующих взрывных устройствах // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2015. № 1. С. 88.
10. *Селиванов В.В., Кобылкин И.Ф., Новиков С.А.* Взрывные технологии / Под общей ред. В.В. Селиванова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 648 с.
11. *Новиков С.А.* Полезные взрывы. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2000. 293 с.
12. *Новиков С.А., Петров В.А.* Установки взрывного типа для механических испытаний материалов и конструкций: Обзор. М.: ЦНИИатоминформ, 1989.
13. *Новиков С.А, Синицын В.А., Цой П.А.* Исследование динамических диаграмм сжатия металлов при повышенных температурах // Проблемы прочности. 1980. № 11. С. 87.
14. *Пушков В.А., Цибиков А.Н., Юрлов А.В., Окинчиц А.А., Найданова Т.Г.* Результаты исследований диаграмм растяжения меди М1, алюминиевых сплавов АМГ-6 и АМц по методу составного стержня Гопкинсона с применением галтельных образцов. XI Всероссийская конференция по испытаниям и исследованиям свойств материалов “ТестМат” по тематике “Физико-механические испытания, прочность, надежность, высокотемпературные испытания” // Материалы Всероссийской конференции. Москва: ФГУП “ВИАМ”, 2019. С. 280.
15. *Арцруни А.А., Зажилов А.А.* Упрощенная методика динамических испытаний на подрыв материалов и схем защиты наземных транспортных средств. XI Всероссийская конференция по испытаниям и исследованиям свойств материалов “ТестМат” по тематике “Физико-механические испытания, прочность, надежность, высокотемпературные испытания” // Материалы Всероссийской конференции. М.: ГУП “ВИАМ”, 2019. С. 44.
16. Марочник сталей и сплавов / Под ред. А.С. Зубченко. 2-е изд. М.: Машиностроение, 2003. 784 с.
17. Физика взрыва / Под ред. Л.П. Орленко. 3-е изд. В 2 т., Т. 2. М.: Физматлит, 2004. 656 с.
18. *Zhu J.-J., Li W.-B., Wang X.-M., Li W.-B., Zheng Y.* Mid-Explosion Recovery of an Intermediate Phase of a Cylindrical Metal Shell // Combustion, Explosion, and Shock Waves. 2018. V. 54. Iss 2. P. 246.
19. *Волков К.В., Даниленко В.В., Елин В.И.* Синтез алмаза из углерода продуктов детонации // Физика горения и взрыва. 1990. Т. 26. № 3. С. 123.
20. *Пепекин В.И., Губин С.А.* Методы расчета параметров детонации взрывчатых веществ // Химическая физика. 2003. Т. 22. № 9. С. 72.

ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2020, № 3, с. 65–71

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 621.316.52: 669.24′295

УСТРОЙСТВО БЕЗОПАСНОСТИ НА ОСНОВЕ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

© 2020 г. Н. Н. Попов[1,*], Д. В. Пресняков[1], В. Ф. Ларькин[1]

[1] "Российский федеральный ядерный центр — Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики", Саров, Нижегородская обл., Россия

**e-mail: NNPopov@vniief.ru*

Поступила в редакцию 03.12.2018 г.
Принята к публикации 31.01.2020 г.

Разработано устройство на основе сплавов с памятью формы, предназначенное для использования в изделиях машиностроения, в частности, в ядерной технике, с целью предотвращения аварийных ситуаций техногенного и природного характера. Устройство выполняет функцию разрыва электрической цепи при аварийном повышении температуры окружающей среды выше допустимой путем перерезания электрического жгута.

Ключевые слова: устройство безопасности, рабочий элемент, сплавы с памятью формы, Ti–Ni–Nb, Ti–Ni–Nb–Zr

DOI: 10.31857/S0235711920030104

В настоящее время в Российской Федерации создаются новые реакторные установки на быстрых нейтронах [1]. Учитывая сложность и опасность реакторных установок, последние должны оснащаться дополнительными устройствами безопасности, в том числе предназначенными для перерезания электрического жгута при аварийном повышении температуры окружающей среды выше допустимой.

В литературе приведено много информации о перерезающих устройствах [2–12]. Недостатками известных изобретений является сложность их конструкции, необходимость дистанционного управления и недопустимость использования порохов в ряде изделий машиностроения.

Поэтому для устранения перечисленных недостатков, нами разработано устройство безопасности, обеспечивающее разрыв электрической цепи путем перерезания электрических жгутов при повышении температуры окружающей среды выше допустимой с использованием привода на основе тарельчатых деталей, изготовленных из сплавов с памятью формы (СПФ) с широким мартенситным гистерезисом. Устройство имеет упрощенную конструкцию, обладает меньшими габаритами и массой, обеспечивает возможность проверки температуры аварийного срабатывания как перед постановкой устройства в изделие машиностроения, так и в процессе его эксплуатации [13].

В настоящей статье описана конструкция предложенного устройства безопасности и приведены результаты исследований по отработке его работоспособности.

Описание устройства безопасности на основе сплавов с памятью формы. На рис. 1 схематично изображена конструкция перерезающего устройства.

Для обеспечения работоспособности устройства необходимо на опорную пластину *9* положить электрический кабель *11*, часть кабеля *11* закрыть основанием *8*. Электрический кабель *11* должен лежать в канавке, которая выполнена в основании *8*. Основание *8* жестко соединяется с пластиной *9* винтами *12*. В резьбовую часть основа-

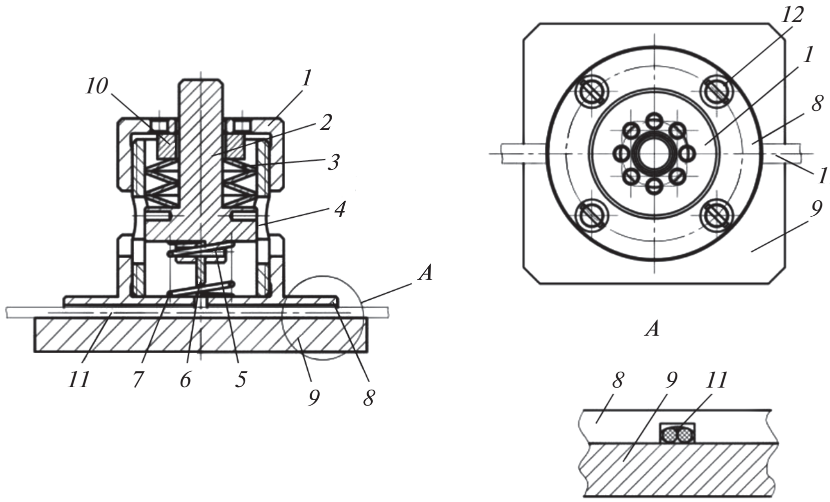


Рис. 1. Схема макета устройства безопасности на основе сплава с памятью формы.

ния *8* вкручивается корпус *4*, который имеет отверстия для подвода тепла к термочувствительным элементам *3* данного устройства. Далее нож *6* при помощи штифта *5* соединяется с поршнем *2*, который в свою очередь устанавливается в корпус *4*, таким образом, чтобы лезвие ножа *6* находилось перпендикулярно электрическому кабелю *11*. Нож *6* изготовлен из токонепроводящего материала. Далее на поршень *2* надеваются тарельчатые термочувствительные элементы *3*, которым перед установкой в устройство задается в мартенситном состоянии деформация сжатием. На резьбовую часть корпуса *4* накручивается крышка *1*, в которой также выполнены отверстия для подвода тепла к термочувствительным элементам *3*. При повышении температуры до пороговых значений термочувствительные элементы *3*, изготовленные из СПФ, начинают восстанавливать свою первоначальную форму и, разжимаясь, преодолевая сопротивление пружины *7*, толкают вниз поршень *2* с ножом *6*. Лезвие ножа *6* упирается в электрический кабель *11* и перерезает его. Для увеличения хода или усилий термочувствительных элементов *3* перерезающего устройства вместо шайбы *10*, заполняющей свободное пространство, можно использовать дополнительный набор термочувствительных элементов *3*, изготовленных из СПФ, в зависимости от конкретных требований к устройству.

Исследование свойств формовосстановления термочувствительных тарельчатых деталей, изготовленных из сплавов с памятью формы. Тарельчатые детали изготавливали из сплавов систем Ti–Ni–Nb [14] партии № 193-11-п и Ti–Ni–Nb–Zr [15] партии № 252. После изготовления их подвергали вакуумному отжигу и проводили замеры исходной высоты H_0. Затем на испытательной машине UTS-100K при температурах T = (–60...–70)°C; (–100...–110)°C и 23°C деталям наводили деформацию сжатием со скоростью деформации $\dot{\varepsilon} \approx 4.8 \times 10^{-3}$ с$^{-1}$ до величины усилия F = 20 кН. Далее измеряли высоту деталей $H_{Д}$ после деформации и нагревали до температуры T = (85–90)°C для определения их термомеханических характеристик (ТМХ). При нагреве тарельчатые детали восстанавливали исходную форму – наблюдалось проявление эффекта памяти формы (ЭПФ). Измеряли высоту деталей $H_{ЭПФ}$ после нагрева.

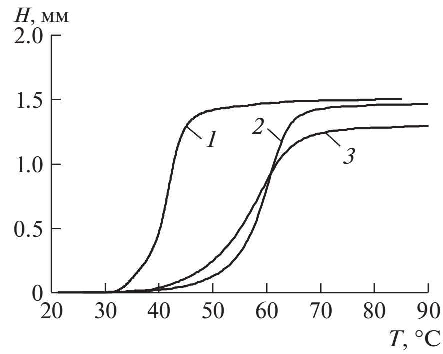


Рис. 2. Типичные диаграммы формовосстановления тарельчатых деталей, изготовленных из сплава Ti–Ni–Nb после предварительно наведенной деформации сжатием со скоростью $\dot{\varepsilon} \approx 4.8 \times 10^{-3}$ с$^{-1}$ при разных температурах: *1* – *T* = (–60...–70)°C; *2* – *T* = (–100...–110)°C; *3* – *T* = 23°C.

По диаграммам формовосстановления тарельчатых деталей (рис. 2) определяли характеристические температуры $A^{\text{н}}_{s\text{ЭПФ}}$ и $A^{\text{к}}_{f\text{ЭФП}}$, соответственно, на начальной и конечной стадии всего этапа формовосстановления при проявлении ЭПФ. Методом касательных определяли характеристические температуры $A_{s\text{ЭПФ}}$ и $A_{f\text{ЭПФ}}$ (характеризуют основное формовосстановление внутри диапазона температур $A^{\text{н}}_{s\text{ЭПФ}}$, $A^{\text{к}}_{f\text{ЭФП}}$) и рассчитывали температурный интервал $|A_{s\text{ЭПФ}} - A_{f\text{ЭПФ}}|$. Величину термически обратимой деформации $\varepsilon_{\text{ЭПФ}}$ и степень восстановления формы $\eta_{\text{ЭПФ}}$ при проявлении ЭПФ определяли по формулам (1) и (2), соответственно

$$\varepsilon_{\text{ЭПФ}} = \frac{\Delta H_{\text{ЭПФ}}}{H_0} \times 100\%; \quad (1)$$

$$\eta_{\text{ЭПФ}} = \frac{\Delta H_{\text{ЭПФ}}}{H_0 - H_{\text{Д}}}, \quad (2)$$

где $\Delta H_{\text{ЭПФ}} = H_{\text{ЭПФ}} - H_{\text{Д}}$.

Полученные результаты представлены в табл. 1, из которой следует, что тарельчатые детали сработали на величину $\Delta H_{\text{ЭПФ}}$ = (1.3–1.7) мм, что составило (37.1–48.6)% от ее высоты H_0 до деформации, при этом значение $\eta_{\text{ЭПФ}}$ составило 0.76–0.92. Увеличение температуры деформации от (–100...–110)°C до 23°C тарельчатых деталей, изготовленных из сплава Ti–Ni–Nb, приводит к снижению величины термически обратимой деформации $\varepsilon_{\text{ЭПФ}}$, степени восстановления формы $\eta_{\text{ЭПФ}}$, высоты детали $\Delta H_{\text{ЭПФ}}$, температур начала основного формовосстановления $A_{s\text{ЭПФ}}$ и наоборот к повышению значений тех же величин (кроме $A_{s\text{ЭПФ}}$, которая понижается) в тарельчатых деталях, изготовленных из сплава системы Ti–Ni–Nb–Zr. Однако, значения величин, наиболее важных для разработанного устройства безопасности рабочих характеристик, таких как температура $A_{s\text{ЭПФ}}$, которая в устройстве характеризует температуру начала перерезания электрического жгута (температурой $A^{\text{н}}_{s\text{ЭПФ}}$ в данной конструкции устройства можно пренебречь, так как зазор между ножом и кабелем (0.6–0.7) мм, а величина перемещения ножа в интервале изменения температур от $A^{\text{н}}_{s\text{ЭПФ}}$ до $A_{s\text{ЭПФ}}$ составляет ≈0.15 мм), а также $\Delta H_{\text{ЭПФ}}$, которая в устройстве характеризует величину пе-

Таблица 1. Результаты исследований термомеханических свойств тарельчатых деталей, изготовленных из сплавов систем Ti–Ni–Nb и Ti–Ni–Nb–Zr при проявлении ЭПФ после предварительно наведенной деформации сжатием со скоростью $\dot{\varepsilon} \approx 4.8 \times 10^{-3}$ $с^{-1}$ при различных температурах

ТМХ	Ti–Ni–Nb			Ti–Ni–Nb–Zr	
	$T_Д$ = = (–100...–110)°C	$T_Д$ = = (–60...–70)°C	$T_Д$ = 23°C	$T_Д$ = = (–60...–70)°C	$T_Д$ = 23°C
H_0, мм	3.5	3.5	3.5	3.5	3.5
$H_Д$, мм	1.8	1.75	1.8	1.95	1.65
$H_{ЭПФ}$, мм	3.25	3.25	3.1	3.25	3.35
$\Delta H_{ЭПФ}$, мм	1.45	1.5	1.3	1.3	1.7
$A^{н}_{sЭПФ}$, °C	36	31	32	27	26
$A^{к}_{f\,ЭФП}$, °C	87	83	89	79	67
$A_{sЭПФ}$, °C	54	38	49	45	38
$A_{fЭПФ}$, °C	65	45	66	58	54
$\varepsilon_{ЭПФ}$, %	41.4	42.9	37.1	37.1	48.6
$\eta_{ЭПФ}$	0.85	0.86	0.76	0.84	0.92
$\lvert A_{sЭПФ} - A_{fЭПФ}\rvert$, °C	11	7	17	13	16

ремещения ножа, изменяются незначительно. С целью сокращения времени и упрощения процесса наведения деформации, было решено тарельчатые детали, изготовленные из сплава Ti–Ni–Nb, перед установкой в макет устройства безопасности деформировать при температуре $T_Д$ = 23°C, а детали из сплава Ti–Ni–Nb–Zr в районе температур (–90...–100)°C.

Определение усилия, необходимого для перерезания жгута. Усилие, необходимое для перерезания электрического жгута, определили в эксперименте с макетом устройства безопасности без рабочих элементов, изготовленных из СПФ. В результате эксперимента установлено, что максимальное усилие, необходимое для перерезания жгута, составило 175 Н, при этом ход рабочих элементов (соответствует величине перемещения ножа) должен быть не менее 2.2 мм. Учитывая тот факт, что ход одного рабочего элемента составляет (1.3–1.7) мм (табл. 1), а также принимая во внимание, что необходим дополнительный запас хода (преодоление зазора между ножом и жгутом величиной 0.6–0.7 мм), было решено использовать в разработанном устройстве безопасности четыре рабочих элемента (рис. 1).

Определение усилий, развиваемых рабочими элементами устройства безопасности. В первом эксперименте тарельчатым деталям, изготовленным из сплава Ti–Ni–Nb, наводили деформацию сжатием при температуре $T_Д$ = 23°C до величины усилия F = 20 кН; тарельчатым деталям, изготовленным из сплава Ti–Ni–Nb–Zr, при температуре (–90...–100)°C. Затем деформированные рабочие элементы устанавливали в макет устройства безопасности и проводили его сборку. При этом нож с поршнем не соединяли, а вместо этого поршень жестко заневоливали с помощью зажимов.

Во втором эксперименте определяли усилия, развиваемые рабочими элементами устройства безопасности при перерезании электрического жгута из двух кабелей марки КИМЭПМ. Макет устройства нагревали в печи VST 12/-/200 до температуры $T_Д$ = = 100°C. Усилия, развиваемые рабочими элементами, регистрировали по показаниям монитора управляющего компьютера испытательной машины UTS-100K. В результате исследований макета устройства безопасности с рабочим приводом, изготовлен-

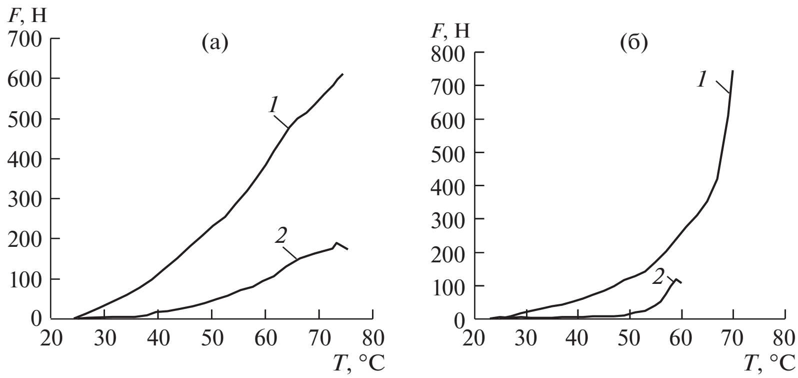


Рис. 3. Диаграммы зависимости усилий от температуры, развиваемых устройством безопасности в заневоленном состоянии и при резке жгута с термочувствительными тарельчатыми деталями, изготовленными из сплава Ti–Ni–Nb, деформированного при $T_Д$ = 23°C (а); и из сплава Ti–Ni–Nb–Zr, деформированного при $T_Д$ = (–90...–100)°C (б); *1* – в заневоленном состоянии; *2* – при резке жгута.

ным из сплава Ti–Ni–Nb, установлено, что максимальное усилие F_{max}, развиваемое им в заневоленном состоянии, составляет 610 Н, а при перерезании электрического жгута 190 Н (рис. 3а). Выявлено, что данный макет устройства является работоспособным. Усилия, развиваемые тарельчатыми деталями при нагреве, возрастают, толкая нож дальше, и при температуре 74°C он полностью перерезает электрический жгут; перемещение ножа при перерезании составляет 2.9 мм, а ширина температурного интервала срабатывания 38°C.

У макета с рабочим приводом из сплава Ti–Ni–Nb–Zr выявлено, что максимальное усилие F_{max}, развиваемое им в заневоленном состоянии, составляет 745 Н, а при перерезании электрического жгута 120 Н (рис. 3б). Установлено, что данный макет устройства является также работоспособным. Усилия, развиваемые тарельчатыми деталями, при температуре 60°C позволяют полностью перерезать электрический жгут; перемещение ножа при этом составляет 2.9 мм, а ширина температурного интервала срабатывания 28°C.

В результате экспериментов было установлено, что максимальное усилие F_{max}, развиваемое тарельчатыми деталями из СПФ в процессе восстановлении формы при нагреве в заневоленном состоянии, значительно превышает максимальные усилия перерезания электрического жгута, состоящего из двух кабелей марки КИМЭПМ. Показано, что конструкция макета устройства для перерезания кабеля является работоспособной, как с рабочим приводом в виде тарельчатых деталей из СПФ системы Ti–Ni–Nb, так и Ti–Ni–Nb–Zr, поскольку в процессе нагрева нож полностью перерезал электрический жгут.

Выводы. Описана конструкция устройства безопасности перерезающего типа, созданная на основе использования сплавов с памятью формы.

Исследованы свойства формовосстановления термочувствительных тарельчатых деталей, изготовленных из сплавов с памятью формы систем Ti–Ni–Nb и Ti–Ni–Nb–Zr. При выбранных размерах, величина формовосстановления составляет $\Delta H_{ЭПФ}$ = = (1.3–1.7) мм. Увеличение температуры наведения деформации тарельчатым деталям из сплава Ti-Ni–Nb приводит к уменьшению термомеханических характеристик, а у деталей из сплава Ti–Ni–Nb–Zr к увеличению.

Установлено, что разработанная конструкция макета устройства для перерезания кабеля с рабочим приводом в виде тарельчатых деталей из сплавов с памятью формы систем Ti–Ni–Nb и Ti–Ni–Nb–Zr является работоспособной, поскольку нож полностью перерезает электрический жгут, состоящий из двух кабелей марки КИМЭПМ при нагреве макета до температуры (60–74)°C, величина перемещения ножа при этом составляет 2.9 мм.

Применение предлагаемого устройства позволяет отказаться от использования недопустимого в ряде областей машиностроения, в частности, в ядерной технике, порохового заряда для привода, отказаться от дистанционного управления, упростить конструкцию и обеспечить большую компактность устройства безопасности.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Попов Н.Н., Ларькин В.Ф., Пресняков Д.В., Гришин Е.Н., Сысоева Т.И., Морозова Т.А., Потемкин Г.А., Костылева А.А.* Исследование свойств сплава 50Ti–40Pd–10Ni с высокотемпературным эффектом памяти формы // Ж. “Физика металлов и металловедение”. 2018. Т. 119. № 3. С. 303.
2. США Патент US6408951 B1. МПК B25D 11/10. Automatic cable-cutting apparatus (Автоматическое устройство для резания кабеля). Lin Pi-Chu. Заявка № US20010854584 от 14.05.2001. Опубл. 25.06.2002.
3. Япония Патент JP3414997 B2. МПК B23D 29/02, B26B 13/06. Wire Cutter (Кусачки для резки проволоки). Toho Koki KK. Заявка № JP19970237332 от 02.09.1997. Опубл. 09.06.2003.
4. Япония Патент JP3529514 B2. МПК B23D 23/00, B23D 33/02, B26D 7/02. Cable cutter. (Станок для отрезки электрического кабеля). Ishihara Kikai Kogyo KK. Заявка № JP19950274976 от 29.09.1995. Опубл. 24.05.2004.
5. США Патент US6735870 B2. МПК B26B 17/00, G02B 6/44, B25F 1/00. Cutter for fiber optic cable and method of using same (Устройство для резки волоконно-оптического кабеля и способ использования устройства). Nordlin William F.; Greenlee Textron Inc. Заявка № US20010027141 от 20.12.2001. Опубл. 18.05.2004.
6. США Патент US6766581 B2. МПК B23D 29/02, B25 B7/12, B26B 17/02, B26B 13/26. Cable cutter/crimper mechanism (Устройство для зажима и резки кабеля). Nordlin William F.; Greenlee textron Inc. Заявка № US20020079089 от 20.02.2002. Опубл. 27.07.2004.
7. США Патент US6813981 B2. МПК B21F 11/00, H02G 1/00, B21F 13/00. Apparatus and method for cutting cables and wires (Устройство для резки кабелей и проводов). Urban Blake R., White Isaac D.M., Dickens James E., Forsberg Kevin, Sawyer Charles, Bellsouth intellectual property corporation. Заявка № US20020306995 от 30.11.2002. Опубл. 09.11.2004.
8. США Патент US6779273 B1. МПК H02G 1/12. Coaxial cable cutting tool (Режущий инструмент для коаксиального кабеля). Lucent technologies Inc. Заявка № US20030400220 от 27.03.2003. Опубл. 24.08.2004.
9. США Патент US6892460 B2. МПК B23D 29/02, B26B 17/00, B26D 3/16, G02B 6/00, G02B 6/25. Pliers-type tool and method for cutting through optical fibre cables (Зажимной инструмент и способ резки волоконно-оптических кабелей). Wilhelm Edgar, Holland-Moritz Georg, Bernd Tomas, Rennsteig Werkzeuge Gmbh. Заявка № US20030416955 от 16.05.2003. Опубл. 17.05.2005.
10. Патент Японии № JP3825239 B2. МПК B21F 11/00, B23D 15/04, B23D 23/00, B23D 33/02. Wire rod coil cutting device (Устройство для резки толстого катушечного кабеля). Kobe steel Ltd. Заявка № JP20000276647 от 12.09.2000. Опубл. 27.09.2006.
11. Патент ВОИС № WO2005023475 A1. МПК B23D 15/14, B23D 17/06, B23D 29/00, F42B 3/00. Tool for cutting cables (Инструмент для отрезки кабелей). Sb Produksjon As; Berg Svein. Заявка № WO2004NO00258 от 02.09.2004. Опубл.: 17.03.2005.

12. *Газизов Б.Г., Горбенко Д.В., Афанасьев В.А.* Пороховой нож. РФ Патент 2287411, МПК B23D 15/14, B21F 11/00. Бюлл. № 32 от 20.11.2006 г.

13. *Попов Н.Н., Белоусов Я.В.* Перерезающее устройство. РФ Патент 2588963, МПК B21F 11/00, B26D 1/08, B26D 5/08. Бюлл. №19 от 10.07.2016 г.

14. *Попов Н.Н., Сысоева Т.И., Аушев А.А., Ларькин В.Ф., Костылева А.А.* Исследование свойств сплава с памятью формы 45Ti–45Ni–10Nb в исходном литом и прессованном состоянии // Ж. “Металлы”. № 6. 2016. С. 59.

15. *Попов Н.Н., Сысоева Т.И., Щедрина Е.В., Пресняков Д.В., Гришин Е.Н.* Влияние видов термической обработки, величины и температуры наводящей деформации на характеристики проявления эффекта памяти формы в сплаве 43 Ti–46Ni–9Nb–2Zr // Ж. “Физика металлов и металловедение”. 2015. Т. 116. № 6. С. 652.

ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2020, № 3, с. 72–78

НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 662.459

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РЕЖИМОВ КОМБИНИРОВАННОЙ ОБРАБОТКИ НА ВЕЛИЧИНУ И ХАРАКТЕР ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОВЕРХНОСТНОМ СЛОЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАР ТРЕНИЯ

А. П. Яковлева[1,*], А. Ю. Албагачиев[2]

[1] *Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия*

[2] *Институт машиноведения имени А.А. Благонравова РАН, г. Москва, Россия*

**e-mail: yakovleva525@mail.ru*

Поступила в редакцию 25.03.2019 г.
Принята к публикации 25.12.2019 г.

В статье выполнен анализ влияния остаточных напряжений в поверхностном слое цилиндрических пар трения на эксплуатационный показатель-износостойкость. Исследованы напряжения I рода после применения комбинированной обработки. Сущность комбинированной обработки заключается в последовательном выполнении электромеханической обработки и алмазном выглаживании. Получена формула для расчета остаточных напряжений возникающих в поверхностном слое после комбинированной обработки. Для удобства расчетов разработана компьютерная программа для вычисления параметра вычисления остаточных напряжений на языке Visual studio 2017 C#. Метод комбинированной обработки создает резерв для повышения эксплуатационных показателей за счет создания сжимающих остаточных напряжений.

Ключевые слова: комбинированная обработка, износ, цилиндрические пары трения, остаточные напряжения, эксплуатационные показатели

DOI: 10.31857/S0235711920020157

В народном хозяйстве широко используются машины и механизмы в которых работают пары трения (штоки, поршни, пробки, седла, золотники, пальцы, валки для размалывания неметаллических материалов). Это детали двигателей, насосов, прядильных машин, культиваторов и др., которые применяют в авиационной, строительной, автомобильной технике, сельхозтехнике и др. Из-за их низкой эксплуатационной надежности велик расход запасных частей. По данным центральных заводских лабораторий ОАО “КАДВИ”, ОАО “РемПутьМаш”, ОАО “Пермские моторы”, ОАО “Калужский турбинный завод” и др. при проведении плановых ремонтных работ 80% деталей имели повышенный износ. Установлено, что наибольшее число отказов (до 80%) обусловлено процессами изнашивания или комплексными причинами, где износ играет доминирующую роль.

Одной из основных особенностей работы цилиндрических пар трения является неравномерность изнашивания вдоль образующей, повышенный износ, вызванный условиями трения: импульсным приложением нагрузки, многократным перемещением контактирующих поверхностей, что приводит к пластическим деформациям, макрорезанию и в конечном итоге к потере работоспособности.

Эксплуатационные показатели определяются параметрами поверхностных слоев деталей: характеристиками точности формы; волнистостью; твердостью; остаточными напряжениями.

Они формируются под влиянием технологических факторов – режимов и методов обработки, инструмента, способов отделочно-упрочняющей обработки и влияния фактора наследственности.

Уровень остаточных напряжений является важным параметром, определяющим качество изделий, который может играть как положительную, так и отрицательную роль в изменении прочности, жесткости, устойчивости и износостойкости изделий, определяя тем самым их работоспособность при эксплуатации в различных видах и условиях нагружения [1–8].

Значительные остаточные напряжения могут возникать после механической обработки – точения, фрезерования, шлифования. Особенность этих напряжений состоит в том, что они действуют практически только в поверхностном слое глубиной в несколько десятых миллиметра. Но как показывает опыт эксплуатации, именно эти напряжения могут влиять на износостойкость и прочность детали, особенно при действии переменных напряжений [1–7].

Например, в поверхностном слое в процессе шлифования возникают сжимающие температурные напряжения, которые превосходят предел текучести материала и вызывают пластическую деформацию сжатия. После окончания процесса и установления нормальной температуры эта деформация сохраняется, что приводит к растяжению поверхностного слоя со стороны внутренних слоев, т.е. к образованию в нем растягивающих остаточных напряжений. На основании ряда экспериментальных исследований [5–7] можно считать, что после шлифования в поверхностном слое возникают растягивающие напряжения 40–80 кГ/мм^2, на глубине 20–50 мкм.

Технологические остаточные напряжения обуславливают качество и эксплуатационные характеристики металлопродукции [1, 3–5]. Существующие методики определения остаточных напряжений носят в основном экспериментальный характер, не обладают универсальностью, применение их зачастую затруднено и приводит к значительным погрешностям [6, 7].

В настоящей статье исследованы напряжения I рода, т.к. именно они являются наиболее значимыми с точки зрения практического применения.

В исследование влияния остаточных напряжений на работоспособность деталей машин и механизмов внесли вклад Биргер И.А., Давиденков Н.Н., Кобрин М.М., Колмогоров Л.Г., Поздеев А.А., Суслов А.Г., Чепа П.А. и др.

В поверхностном слое металла всегда имеются различные дефекты, которые служат зародышами трещин, поэтому надежность деталей определяется величиной работы распространения трещины. Сжимающие остаточные напряжения, создаваемые на поверхностях деталей различными технологическими методами, препятствуют зарождению и распространению усталостных микротрещин, увеличивая их работу. Поэтому для деталей, работающих в условиях трения скольжения, в случаях реализации усталостного и абразивного износа в процессе эксплуатации, важно создать поверхностный слой с сжимающими остаточными напряжениями [7, 8]. Перспективными методами являются методы комбинированной обработки.

Сущность комбинированной обработки заключается в последовательном выполнении электромеханической обработки (ЭМО) и алмазном выглаживании. С помощью этой технологии представляется возможным осуществить технологическое управление как геометрическими характеристиками, так и физико-механическими свойствами рабочих поверхностей пар трения [9–11].

Положительной особенностью комбинированной обработки является то, что величина и характер остаточных напряжений, полученных на предшествующих операциях, не влияют на формирование напряжений и является барьером при технологической наследственности [12–17].

Экспериментальное определение остаточных напряжений трудоемко и не всегда возможно получить истинное значение. Поэтому актуальной задачей является нахождение аналитических методов, которые могут подтвердить или опровергнуть результат, полученный экспериментально.

На формирование остаточных напряжений при комбинированной обработке влияют температура, силовой фактор, характер структурных и фазовых превращений.

Фактически остаточные напряжения представляют собой алгебраическую сумму температурных, силовых и структурных напряжений [8, 17]

$$\sigma_{\text{ост}} = \sigma_{\text{темп}} + \sigma_{\text{ф}} + \sigma_{\text{мех}}, \tag{1}$$

где $\sigma_{\text{темп}}$ – температурные остаточные напряжения; $\sigma_{\text{ф}}$ – структурно-фазовые остаточные напряжения; $\sigma_{\text{мех}}$ – механические остаточные напряжения.

Температурные остаточные напряжения возникают в результате нагрева и последующего охлаждения обрабатываемой поверхности. Внешний слой металла нагреваясь в процессе комбинированной обработки стремится удлиниться, однако этому препятствует более холодный внутренний слой, следовательно, первый подвергается сжатию, а второй – растяжению. При интенсивном нагреве, когда сила тока превышает значение $I = 500$ А напряжения на поверхности превзойдут предел текучести, что вызовет пластическую деформацию сжатия наружного слоя металла. Во время последующего охлаждения внешний слой стремится сжаться до размеров, меньше первоначальных на величину пластической деформации сжатия. Этому будет препятствовать упругонапряжный внутренний слой. В результате во внешнем слое возникнут остаточные напряжения, которые можно определить, преобразуя формулу [8, 17]

$$\sigma_{\text{темп}}(z) = \alpha E \Delta\Theta(z),$$

где z – текущая координата, определяющая глубину упрочненного поверхностного слоя, м; α – коэффициент линейного расширения материала детали, K^{-1}; $\Delta\Theta(z)$ – максимальная температура на глубине поверхностного слоя детали z.

Максимальную температуру в зоне упрочнения можно представить

$$\begin{aligned}\Delta\Theta(z) = \propto E\frac{(1-\alpha_T)(P_g V_p + N)}{\lambda_1 l_{\text{инс}}\sqrt{\pi}}\Bigg\{&\left(1-\frac{t}{\Delta t}\right)t\left[2\sqrt{at}*e^{\left(-\frac{z^2}{4at}\right)} - \sqrt{\pi}*ercf\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right)\right] - \\ &- \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{\Delta t}\right)*\left[\frac{\left(2\sqrt{at}\right)^3 e^{\left(\frac{z^2}{4at}\right)}}{3} - \frac{4z^2 e^{\left(\frac{z^2}{4at}\right)}\sqrt{at}}{3} + \frac{2}{3}z^3*\sqrt{\pi}ercf\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right)\right] - \\ &- \frac{1}{80a^2\Delta t}\Bigg[(2\sqrt{at})^5 e^{\left(\frac{z^2}{4at}\right)} - \frac{2}{3}z^2(2\sqrt{at})^3*e^{\left(\frac{z^2}{4at}\right)} + \frac{4}{3}z^4 2\sqrt{at}*e^{\left(\frac{z^2}{4at}\right)} - \\ &- \frac{4}{3}z^5\sqrt{\pi}*ercf\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right)\Bigg]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{2}$$

Большое влияние на формирование температуры будет оказывать мощность, которая возникает при прохождении электрического тока при электромеханической обработке. Ее можно представить, как

$$N = IU.$$

Формула (2) является сложной для расчетов и можно воспользоваться вариантом для приблизительных расчетов

$$\Delta\Theta(z) = \propto E\frac{2\alpha_{\text{т}}\left(P_g V_p + IU\right)}{\lambda_1 A\sqrt{\pi}}\left\{\sqrt{at} * e^{\left(\frac{z^2}{4at}\right)} - z\left[1 - ercf\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right)\right]\right\}.$$

Сократим формулу

$$\Delta\Theta(z) = \propto E\frac{2\alpha_{\text{т}}(P_g V_p + IU)}{\lambda_1 A\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{at}e^{\left(\frac{-z^2}{4at}\right)}\right). \tag{3}$$

Т.к. величина $z\left[1 - ercf\left(\frac{z}{2\sqrt{at}}\right)\right]$ является бесконечно малой и не оказывает существенного влияния на значение температуры на поверхности при комбинированной обработке.

В формуле (3): z – текущая координата, м; $\alpha_{\text{т}}$ – коэффициент распределения тепловых потоков (коэффициент теплопоглощения Шарона); P_g – приведенная сила давления инструмента при комбинированной обработке, Н; V_p – скорость вращения детали, м/с; I – сила тока, А; U – напряжение, В; λ_1, λ_2 – теплопроводимость материала детали и инструмента соответственно, Вт м$^{-1}$ К$^{-1}$; $A = l_{\text{инс}}B$; B – ширина упругого контакта ролика по Герцу; $l_{\text{инс}}$ – длина касания инструмента с обрабатываемой поверхностью (ширина ролика-электрода), м; a – температуропроводимость материала детали, м^2/с; t – время контакта, с.

При комбинированной обработке B – ширину упругого контакта ролика по Герцу, можно условно считать равной ширине ролика-электрода. Поэтому,

$$\Delta\Theta(z) = \propto E\frac{2\alpha_{\text{т}}(P_g V_p + IU)}{\lambda_1 l\text{инс}^2\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{at}e^{\left(\frac{-z^2}{4at}\right)}\right). \tag{4}$$

Рассчитать значение интеграла дополнительной функции ошибок можно по формуле

$$ercf\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-x^2}dx.$$

Однако, эта величина не оказывает существенного влияния на температуру в зоне контакта при комбинированной обработке.

Коэффициент распределения тепловых потоков $\alpha_{\text{Т}}$ можно найти по формуле [17]

$$\alpha_{\text{т}} = \frac{\sqrt{\lambda_1 c_1 \rho_1}}{\sqrt{\lambda_1 c_1 \rho_1 + \sqrt{\lambda_2 c_2 \rho_2}}},$$

где λ_1, λ_2 – теплопроводность материала детали и инструмента соответственно, Вт м$^{-1}$ К$^{-1}$; ρ_1, ρ_2 – плотность материала детали и инструмента соответственно, м^3; c_1, c_2 – удельная теплоемкость материала детали и инструмента соответственно, Дж кг$^{-1}$ К$^{-1}$.

Структурно-фазовые остаточные напряжения $\sigma_ф$ определим по формуле [17]

$$\sigma_ф = -E\left(1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\right), \qquad (5)$$

где E – модуль упругости материала, Па; ρ_1 и ρ_2 – плотность материала до и после обработки соответственно.

Формула (5) показывает, если вновь образовавшаяся фаза имеет большой объем и, следовательно, меньшую плотность ρ_2 по сравнению с ρ_1, на обработанной поверхности возникают остаточные напряжения сжатия. В противном случае возникают остаточные напряжения растяжения.

Если неизвестна плотность материала после обработки, то для расчета остаточных напряжений, при структурных изменениях (остаточный аустенит переходит в мартенсит) в поверхностном слое после комбинированной обработки воспользуемся формулой

$$\sigma_ф = \frac{E}{3(1-\mu)}\frac{(P_{2\alpha} - P_{1\alpha})(\rho_\gamma - \rho_\alpha)}{\rho_\gamma - P_{2\alpha}(\rho_\gamma - \rho_\alpha)}, \qquad (6)$$

где E – модуль упругости материала, Па; μ – коэффициент Пуассона; $P_{1\alpha}$ – относительное содержание α-фазы в поверхностном слое детали до обработки, %; $P_{2\alpha}$ – относительное содержание α-фазы в поверхностном слое детали после обработки, %; ρ_γ и ρ_α – плотность γ- и α-фаз соответственно.

Для простоты вычислений будем использовать формулу (5).

Механические остаточные напряжения возникают за счет действия на материал детали усилия со стороны инструмента при ЭМО и при алмазном выглаживании. В результате сжатия в поверхностном слое детали происходит упругопластическая деформация, которая приводит к увеличению плотности дислокаций и отдельного объема деформируемого слоя. Этому препятствуют слои, лежащие ниже. В результате такого взаимодействия в поверхностном слое возникают остаточные напряжения

$$\sigma_{мех}(z) = -\frac{P_g}{\pi} * \left[\frac{3}{2(l_{инс}^2 + z^2)} - \frac{1.2}{l_{инс}^2}\ln\left(\frac{z}{2l_{инс}}\right) - \frac{3}{10l_{инс}^2}\right], \qquad (7)$$

где z – текущая координата, м; P_g – приведенная сила давления, Н;

$$P_g = \sum_{i=1}^{n} P_i,$$

P_i – сила прижима электрода-инструмента и алмазного выглаживателя, Н; $l_{инс}$ – длина касания инструмента с обрабатываемой поверхностью (ширина ролика-электрода), м.

Ввиду того, что площадь касания алмазного выглаживателя и детали значительно меньше касания электрода-инструмента и детали, все расчеты ведем по большему значению.

Возникновение структурно-фазовых остаточных напряжений в поверхностном слое детали обусловлено структурно-фазовыми превращениями материала [8, 17]. В результате пластического деформирования резко увеличивается внутренняя энергия материала (около 10% затрачиваемой на деформацию энергии поглощается деформируемым материалом), что увеличивает вероятность протекания фазовых превращений.

В коррозионностойких аустенитных сталях, из которых изготавливают цилиндрические пары трения, при охлаждении или холодной пластической деформации происходит образование α-фазы мартенситного типа. Количество образующегося мартенсита при данной температуре возрастает с увеличением степени деформации, а при увеличении температуры (т.е. при отдалении от точки мартенситного превращения (а) (б)

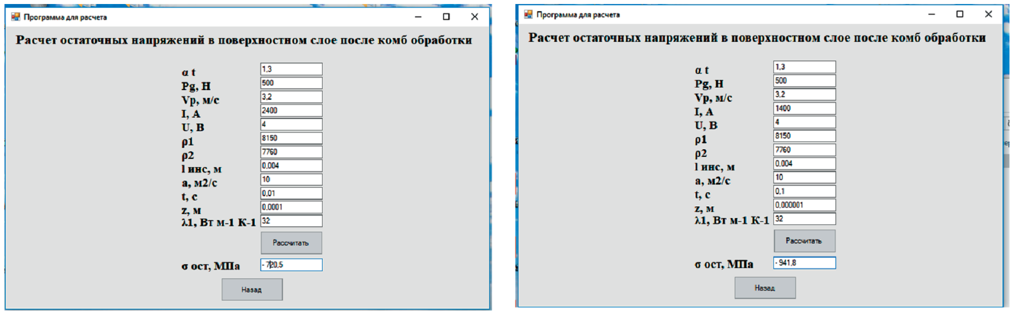


Рис 1. Варианты расчета остаточных напряжений в поверхностном слое цилиндрических пар трения.

M_H) интенсивность мартенситного превращения снижается [7, 8, 12–17]. Существует температура (точка $M_Д$) выше которой образование мартенсита деформации в аустенитных сталях невозможно даже при очень больших деформациях.

Таким образом, пластическая деформация интенсифицирует мартенситное превращение в коррозионностойких аустенитных сталях.

Подставляя (5), (6) и (7) в (1) получим формулу для расчета остаточных напряжений возникающих в поверхностном слое детали после комбинированной обработки

$$\sigma_{\text{ост}} = \propto E\,\frac{2\alpha_{\text{т}}(P_g V_p + IU)}{\lambda_2 l_{\text{инс}}^2\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{ate}^{\left(\frac{-z^2}{4at}\right)}\right) - \\ - \frac{P_g}{\pi}\left[\frac{3}{2(l_{\text{инс}}^2 + z^2)} - \frac{1.2}{l_{\text{инс}}^2}\ln\left(\frac{z}{2l_{\text{инс}}}\right) - \frac{3}{10 l_{\text{инс}}^2}\right] + E\left(1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\right). \tag{8}$$

Для удобства расчетов разработана компьютерная программа для вычисления параметра остаточных напряжения по формуле (8) на языке Visual studio 2017 C#. Все данные заносятся в таблицу и на выходе получаем значение и знак остаточных напряжений в зависимости от режимов комбинированной обработки (рис. 1).

Таким образом, метод комбинированной обработки создает резерв для повышения эксплуатационных показателей за счет создания сжимающих остаточных напряжений (значения получаются со знаком “–” (рис. 1)).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Поздеев А.А., Няшин Ю.И., Трусов П.В.* Остаточные напряжения: теория и приложение. М. 1982. С. 112.
2. *Косарев В.А., Азиков Н.С., Алипов А.Е.* Методика решения физически нелинейных задач прочности конструкций с концентраторами напряжений // Авиационная промышленность. 2014. № 2. С. 26.
3. Investigation of non-local cracking in layered stainless steel with nanostructured interface / X. Guo, A.Y.T. Leung, A.Y. Chen, H.H. Ruan, J. Lu // Scripta Materialia. 2010. V. 63. Iss. 4. P. 403.
4. *Haghpanah B., Nayeb-Hashemi H., Vaziri A.* Elasto-plastic Stresses in a Functionally Graded Rotating Disk // ASME J. of Engineering Materials Technology. 2012. V. 134. Iss. 2. P. 021004.

5. A fast and accurate analysis of the interacting cracks in linear elastic solids / D.F. Li, C.F. Li, S.Q. Shu, Z.X. Wang, J. Lu // International Journal of Fracture. 2008. V. 151. P. 169.
6. *Азиков Н.С., Гайдаржи Ю.В.* Несущая способность косоугольных композиционных панелей // Ж. Конструкции из композиционных материалов. 2015. № 1 (137). С. 3.
7. *Биргер И.А.* Остаточные напряжения. Издание второе, М.: ЛЕНАНД, 2015, 234 с.
8. *Албагачиев А.Ю., Преображенская Е.В.* Исследование остаточных напряжений при совместной отделочно-упрочняющей обработке деталей машин. Материалы научно-технической конференции МГАПИ "Новые материалы и технологии". М.: 2001. С. 19.
9. *Яковлева А.П.* Исследование свойств поверхностного слоя стальных деталей, упрочненных электромеханической обработкой // Ж. Авиационная промышленность. 2012. № 2. С. 8.
10. *Яковлева А.П.* Повышение ресурса работы пар трения металлорежущего оборудования. Сборник: Машиностроение: инновационные аспекты развития материалы I международной научно-практической конференции. 2018. С. 102.
11. *Яковлева А.П.* Эффективность применения комплексирования на токарных станках с ЧПУ // Справочник. Инженерный журнал. 2018. № 11. С. 36. https://doi.org/10.14489/hb.2018.11.P.036
12. *Суслов А.Г.* Инженерия поверхности деталей – резерв повышения конкурентности машин // Справочник. Инженерный журнал. 2001. № 4. Приложение. С. 3.
13. *Безъязычный В.Ф.* Влияние качества поверхностного слоя после механической обработки на эксплуатационные свойства деталей машин // Справочник. Инженерный журнал. 2001. № 4. С. 9.
14. *Суслов А.Г.* Технологическое обеспечение и повышение эксплуатационных свойств деталей машин, технологической оснастки и инструментов // Справочник. Инженерный журнал. 2000. № 1. С. 6.
15. *Албагачиев А.Ю., Иревли С.В.* Эффективные технологические методы обеспечения качества деталей машин. М.: МГАПИ, 2002. 120 с.
16. *Албагачиев А.Ю., Иревли С.В.* Ресурсросберегающий способ обработки деталей машин. Сборник трудов международной научно-практической конференции "Производство-технология-экология". Т. 1. М.: МГТУ "СТАНКИН". С. 15.
17. *Фадеев П.Л., Албагачиев А.Ю.* Повышение надежности деталей машин. М.: Машиностроение. 1993. 96 с.

ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2020, № 3, с. 79–93

НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАШИНОСТРОЕНИИ

УДК 539.4: 678.067

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ КОЛЬЦЕВЫХ И ЛЕНТОЧНЫХ ПРУЖИН ИЗ СТЕКЛОПЛАСТИКА

А. Н. Полилов[1,*], Н. А. Татусь[1], В. В. Жавыркин[1], Ш. Тян[2]

[1]Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия
[2]Xi'an Jiaotong University, провинция Шэньси, Сиань, Китай
**e-mail: polilovan@mail.ru*

Поступила в редакцию 19.12.2018 г.
Принята к публикации 31.01.2020 г.

Изложен метод проектного расчета кассетно-кольцевых и волнистых ленточных пружин из однонаправленного, высокопрочного и низкомодульного стеклопластика, предназначенных в качестве упругой подвески для транспортных средств и летательных аппаратов. Использование разрезных колец с различными зазорами позволяет получить нелинейное изменение податливости подвески. Проанализированы эффекты от создания равнопрочного профилирования ленточных волнистых пружин. Замена стальных пружин на композитные позволяет обеспечить многократное снижение массы при сохранении требований по прочности и податливости.

Ключевые слова: композитная пружина из волнистых лент, профилированная равнопрочная балка, магазинная кольцевая подвеска, прочность, податливость, накопленная упругая энергия, оптимальный профиль кольца, однонаправленный стеклопластик

DOI: 10.31857/S0235711920030098

Стеклопластик на основе непрерывных высокопрочных стеклянных волокон обладает уникальными свойствами для упругих элементов, так как возможная накопленная в нем энергия в расчете на единицу массы оказывается наибольшей по сравнению со всеми известными конструкционными материалами (табл. 1).

Это связано с высокой прочностью и малым модулем упругости стеклопластика при низкой плотности и практически линейной диаграмме деформирования. В то же время, полимерная матрица обладает способностью к демпфированию и шумопоглощению. Именно эти качества определяют эффективность стеклопластика при создании упругих элементов – накопителей энергии: лука, шеста для прыжков, торсиона, кольцевой подвески (раздел 1), ленточных пружин (раздел 2), рессор [1–3]. Еще больший эффект достигается возможностью создавать из стеклопластика профилированные или ветвящиеся упругие элементы [1–3], что для ленточных и кольцевых пружин проиллюстрировано в разделе 3. Кроме инженерных аналитических расчетов [4–7] анализ эффективности профилированных ленточных пружин подтвержден компьютерным моделированием (раздел 4) и пробными экспериментами на полимерных образцах (раздел 5), изготовленных на 3-D принтере.

Авторы видят применение результатов работы для расчета упругих элементов аэрокосмических изделий, где наиболее важным показателем эффективности является снижение массы, поэтому в статье не рассматриваются характерные для подвески автомобилей циклическое нагружение, пробои и удары.

Таблица 1. Способность различных материалов запасать упругую энергию U^* на единицу объема V или массы ρV (приведены предельные деформации ε^* и напряжения при растяжении σ_*)

Материал	ε^*, %	σ_*, МПа	U^*/V, МДж/м^3	ρ, 10^3 кг/м^3	$U^*/(\rho V)$, КДж/кг
Пружинная сталь	0.3	700	1.0	7.8	0.13
Бронза	0.3	400	0.6	8.7	0.06
Древесина тиса	0.9	120	0.5	0.6	0.83
Материал рога	4.0	90	1.8	1.2	1.5
Сухожилие	8.0	70	2.8	1.1	2.5
Резина	300	7.0	10.0	1.2	8.0
Стеклопластик (0)	2.0	1000	10.0	1.9	5.3

1. Кольцевая кассетная подвеска из целых и разрезных колец. На рис. 1 представлена схема кассетной (“магазинной” — magazine) пружины, состоящей из сжимаемых вдоль диаметра колец, которые вырезаны из композитной трубы с окружной намоткой. Добавление нескольких наружных слоев под углами ±45° позволяет существенно повысить поперечную прочность и сопротивление кручению без заметного снижения модуля упругости и предела прочности в окружном направлении.

1.1. Методы расчета прочности, податливости и накопленной упругой энергии

Разрезное кольцо. Для оценки податливости C подвески рассмотрим диаметрально нагруженное силами P тонкостенное кольцо со средним радиусом R, толщиной h и шириной w. Если разрезное кольцо имеет зазор, то смещение точек приложения сил можно оценить по схеме нагружения полукольца (рис. 2а, б).

Простейший подход к оценке перемещений основан на энергетическом принципе Кастильяно, приводящем к интегралу Мора.

Для одного полукольца работа силы P на искомом перемещении u_1 приравнивается накопленной в полукольце упругой энергии U, выраженной через изгибающий момент

$$M = PR\sin\varphi; \tag{1}$$

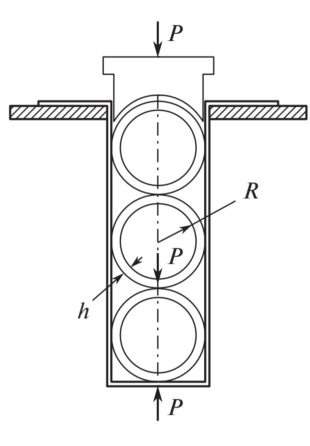


Рис. 1. Кассетно-кольцевая подвеска в виде набора разрезных или сплошных стеклопластиковых колец.

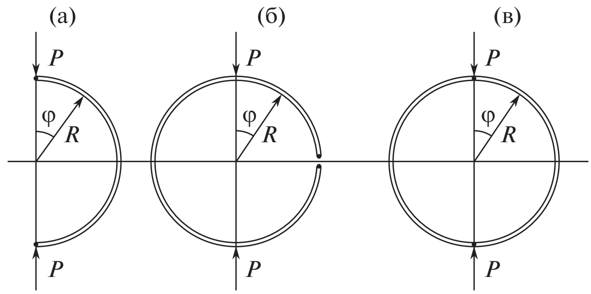


Рис. 2. Схема нагружения для расчета податливости полукольца – (а), разрезного – (б) и сплошного кольца – (в).

$$U_1 = \frac{1}{2} P u_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{M^2(\varphi)}{EI} R d\varphi, \tag{2}$$

где φ – полярный угол, отсчитываемый от вертикальной оси; EI – изгибная жесткость поперечного сечения кольца; $I = wh^3/12$ – момент инерции; E – окружной модуль Юнга.

Данный подход основан на ряде допущений: не учитываются деформации от продольных сил и дополнительные прогибы от межслойных сдвигов. Радиус считается значительно превосходящим толщину, и поэтому локальное изменение кривизны кольца под действием изгибающего момента рассчитывается по формуле для прямой балки. В результате из (1), (2) оценивается податливость одного полукольца

$$C_1 = \frac{u_1}{P} = \frac{R^3}{EI} \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi R^3}{2EI} \approx 1.57 \frac{R^3}{EI}, \tag{3}$$

и это выражение используется для оценки податливости кольцевой подвески и пружины из волнистых листов (раздел 2).

Наибольшее напряжение $\sigma_{\max}$ в полукольце или в разрезном кольце можно выразить через максимальную приложенную нагрузку $P_{\max}$

$$\sigma_{\max} = \frac{6 P_{\max} R}{wh^2} = \beta_1 \frac{P_{\max} R}{wh^2}. \tag{4}$$

Сплошное кольцо. Схема деформирования сплошного кольца диаметральными силами (рис. 2в) требует более сложного рассмотрения с использованием дифференциального уравнения равновесия, но результат по размерности получается сходным с (3). Отсылая читателя за подробным выводом к литературе по строительной механике, выпишем только основные соотношения и результаты.

Связь изменения кривизны κ с изгибающим моментом M считается такой же, как для прямого бруса: $\kappa = \dfrac{M}{EI}$, но изменение кривизны можно выразить также через радиальное смещение u_r кольца: $\kappa = -\dfrac{1}{R^2}\left(\dfrac{d^2 u_r}{d\varphi^2} + u_r\right)$, откуда получается дифференциальное уравнение для нерастяжимой упругой линии

$$\frac{d^2 u_r}{d\varphi^2} + u_r = -\frac{MR^2}{EI} = \frac{PR^3}{EI}\left(\frac{1}{2}\sin\varphi - \frac{1}{\pi}\right). \tag{5}$$

В (5) использовано полученное из уравнений равновесия распределение изгибающих моментов, и решая (5) в тригонометрических функциях, найдем константы интегрирования с учетом симметрии и граничных условий. Окончательная зависимость радиальных смещений от полярного угла имеет вид

$$u_r = \frac{PR^3}{EI}\left(\frac{1}{4}\sin\varphi + \frac{\pi}{8}\cos\varphi - \frac{1}{4}\varphi\cos\varphi - \frac{1}{\pi}\right). \tag{6}$$

Податливость сплошного кольца C_2 можно выразить из (6) через относительное смещение $u_2 = 2u_r$ точек приложения сил для $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$

$$C_2 = \frac{u_2}{P} = \frac{R^3}{EI}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right) \approx 0.149\,\frac{R^3}{EI}, \tag{7}$$

т.е. податливость сплошного кольца (7) при диаметральном сжатии примерно в 10 раз ниже, чем разрезного (3). В дальнейшем будем использовать в выражении для податливости безразмерный коэффициент α_i ($\alpha_1 \approx 18.8$; $\alpha_2 \approx 1.8$)

$$C_i = \frac{u_i}{P} = \frac{R^3}{Ewh^3}\alpha_i. \tag{8}$$

Для n колец фиксированного радиуса R податливость всей подвески в n раз больше, чем для одного кольца.

Для сплошного кольца наибольший момент $M_{\max} = P_{\max}R/\pi$ действует в точках приложения сил, и наибольшее напряжение оказывается примерно в 3 раза ниже, чем в (4) для полукольца

$$\sigma_{\max} = \frac{6P_{\max}R}{\pi wh^2} = \beta_2\frac{P_{\max}R}{wh^2}. \tag{9}$$

Другой способ оценки податливости сплошного кольца описан С.П. Тимошенко со ссылкой на ранние работы лорда Релея (*J.W. Strutt*). Радиальное перемещение представим в виде ряда

$$u_r = \sum_j \left[a_j\cos(j\varphi) + b_j\sin(j\varphi)\right]. \tag{10}$$

Деформация оси кольца выражается через радиальное u_r и окружное u_φ перемещения: $\varepsilon = \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{du_\varphi}{d\varphi} - u_r\right)$, и из гипотезы о нерастяжимости нейтральной линии кольца $\varepsilon = 0$ получим

$$\frac{du_\varphi}{d\varphi} - u_r = 0 \Rightarrow u_\varphi = \sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j}\left[a_j\cos(j\varphi) - b_j\sin(j\varphi)\right]. \tag{11}$$

Значение $j = 1$ исключено, так как оно соответствует перемещению кольца как жесткого целого.

Чтобы найти в (11) неизвестные коэффициенты, применим принцип возможных перемещений и сравним накопленную упругую энергию с работой сил. Упругую энергию выразим через изменение кривизны

$$U_2 = \frac{EI}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)Rd\varphi = \frac{EI}{2R^3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{d^2u_r}{d\varphi^2} + u_r\right)^2 d\varphi = \frac{EI\pi}{2R^3}\sum_{j=2}^{\infty}\left[(j^2-1)^2(a_j^2 + b_j^2)\right]. \tag{12}$$

Сравнивая упругую энергию (12) с работой диаметральных сил на перемещении u_r при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, найдем, что отличными от нуля останутся только коэффициенты a_j

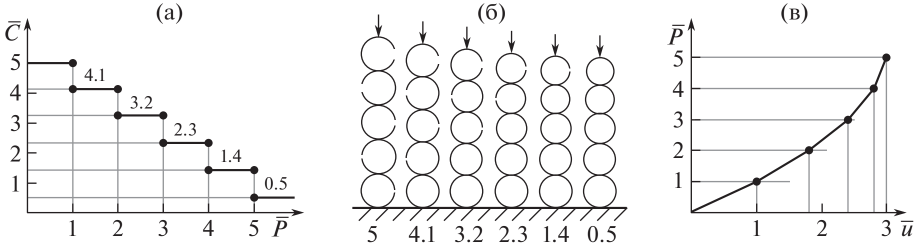


Рис. 3. Нелинейное изменение податливости (а) кассетной кольцевой подвески (б) по мере выбора различных зазоров разрезных колец при сжатии. Зависимость нагрузки от выбранных зазоров (в). $\overline{P}$, $\overline{C}$, $\overline{u}$ – приведенные сила, податливость и ход подвески.

при четных значениях j. Окончательно сближение точек приложения сжимающих сил выразится как удвоенное перемещение $u_r(0)$ в виде быстро сходящегося ряда

$$u_2 = \frac{4PR^3}{\pi EI}\sum_{j=2,4,\ldots}^{\infty}(j^2-1)^{-2} = \frac{4PR^3}{\pi EI}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{225}+\frac{1}{1225}\ldots\right) \approx 0.148\frac{PR^3}{EI}. \tag{13}$$

Результат (13) определения податливости кольца при диаметральном сжатии практически совпадает с (7) и его можно использовать при инженерных расчетах упругой подвески кассетного типа (рис. 1).

1.2. Нелинейное изменение податливости при выборе зазоров. Если стеклопластиковые кольца сплошные, то податливость подвески оказывается довольно низкой (хотя и выше примерно в пять раз, чем у аналогичной стальной пружины). Но если использовать разрезные кольца с разными зазорами, то можно получить податливую и нелинейную подвеску. Податливость при диаметральном сжатии сплошного кольца, как видно из (3), (7), (13), примерно, в 10 раз ниже, чем у разрезного кольца, а податливость, например, пяти колец – в пять раз выше. Условно примем податливость разрезного кольца за единицу. Считаем, что зазоры в кольцах неодинаковые, например: 1, 2, 3, 4, 5 (для наглядности – миллиметров). Пока все пять колец свободно деформируются и их зазоры не выбраны, суммарная податливость составляет пять единиц. По мере роста нагрузки сжатия (в силу линейности задачи – кратно зазорам, например, до 10, 20, 30, 40, 50 кг) один за другим будут выбираться зазоры, и податливость будет последовательно уменьшаться (рис. 3, показано стрелками). Сначала одно кольцо станет в десять раз более жестким, потом – второе, и так – пока податливость всей подвески не станет в десять раз меньше: $5 \to 4.1 \to 3.2 \to 2.3 \to 1.4 \to 0.5$. В результате получается сильно нелинейная (иногда это необходимо) подвеска.

1.3. Расчет на прочность при заданной податливости. Техническое задание при проектном расчете пружин из n колец включает два основных, противоречивых требования: 1) по прочности – максимальное напряжение (4) или (9) не превышает предела прочности σ_*

$$\sigma_{\max} = \beta_i\frac{P_{\max}R}{wh^2} \le \sigma_*; \quad (\beta_1 = 6; \quad \beta_2 \approx 1.91); \tag{14}$$

2) по заданной податливости (8)

$$nC_i = C_* \tag{15}$$

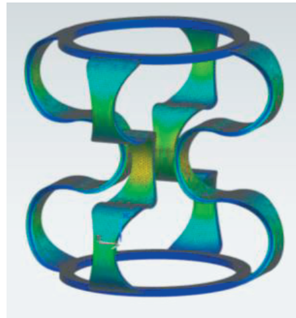


Рис. 4. Пружина из профилированных волнистых лент.

или заданной накопленной упругой энергии U_*

$$U_* = \frac{n}{2} P_{\max} u_i = \frac{n}{2} P_{\max}^2 C_i. \tag{16}$$

Из точного выполнения условия (14) по прочности при заданной податливости (15) или заданной накопленной энергии (16) можно найти необходимые толщину, число n и суммарную массу m колец подвески из стеклопластика с плотностью ρ

$$\begin{gathered} h = \sqrt{\frac{\beta_i P_{\max} R}{w\sigma_*}}; \quad n = \frac{C_* E}{\alpha_i}\sqrt{\frac{\beta_i^3 P_{\max}^3}{w\sigma_*^3 R^3}} = \frac{2U_* E}{\alpha_i}\sqrt{\frac{\beta_i^3}{wP_{\max}\sigma_*^3 R^3}}; \\ m \approx 2\pi\rho n R h w = \frac{2\pi\rho\beta_i^2 C_* E P_{\max}^2}{\alpha_i \sigma_*^2} = \frac{4\pi\rho\beta_i^2 U_* E}{\alpha_i\sigma_*^2}. \end{gathered} \tag{17}$$

Для разрезных колец прочность меньше, чем у сплошных колец, но податливость выше, и числовые коэффициенты в формуле (17) для массы несколько различаются: $\frac{\beta_1^2}{\alpha_1} = \frac{6}{\pi} = 1.91$; $\frac{\beta_2^2}{\alpha_2} = 2.03$, т.е. кассетная подвеска из разрезных колец может быть на 6% легче, чем из сплошных.

Как следует из (17), минимально возможная масса кассетно-кольцевой подвески практически не зависит от размера колец, а зависит лишь от модуля упругости E, прочности σ_* и плотности ρ при заданных податливости (упругой энергии) и предельной нагрузке. Учитывая, что модуль упругости стеклопластика $E^g = 45$ ГПа примерно в пять раз ниже, чем у стали, а плотность в три раза ниже при примерно равной прочности, получаем возможность снижения массы в пятнадцать раз и уменьшения числа колец, т.е. длины подвески в пять раз. Даже, если принять усталостную прочность стеклопластика в два раза ниже, чем у стали, сохраняется возможность снижения массы подвески примерно в четыре раза (без учета массы самой кассеты и узлов крепления).

2. Пружины из волнистых лент. Отмеченные преимущества стеклопластика относятся и к подвеске, схематически изображенной на рис. 4, из композитных волнистых лент ($N = 4$), испытывающих растяжение-сжатие, так как смещение происходит за счет их изгиба. Такие ленты можно изготавливать выкладкой препрегов в волнистую пресс-форму или методом пулформинга [9]. Требования по прочности (14) и податливости (15) остаются прежними. Для качественных оценок (с точностью до числового коэффициента) можно использовать решение для сжатия N лент, каждая из которых состоит из n полуколец.

Пояснения корректности постановки задачи и применяемых методов. 1. Расчет прогибов в криволинейных лентах проводился с применением интеграла Мора. При изгибе кривого бруса сечения не остаются плоскими, происходит смещение нейтральной оси. Но все это важно для толстых брусьев типа крюка крана. Поправка к обычному решению пропорциональна отношению толщины кольца к радиусу, поэтому для тонких лент ее можно не учитывать.

2. Разумеется, при изгибе полукольца изменяется плечо действия силы и, следовательно, изгибающий момент. При этом полуокружность переходит в полуэллипс при сохранении длины нейтральной линии. Одна полуось в результате прогиба уменьшается, а другая увеличивается, вызывая увеличение изгибающего момента при постоянной диаметральной силе. Можно попытаться найти выражение для длины контура полуэллипса. Со времен Л. Эйлера этим занимались десятки ученых, но эта длина (в отличие от длины окружности) не выражается через элементарные функции, а приводит к (табулированным), “неберущимся” эллиптическим интегралам. Никакой заменой переменных их нельзя свести к табличным. Поэтому в инженерных приложениях учет изменения момента в кривых стержнях крайне затруднителен, что видно из приведенного в конце статьи Приложения. Это пояснено данными ниже формулами.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y=b\sqrt{1-(x/a)^2} \Rightarrow y'=-\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

$$\frac{1}{4}S=\frac{\pi}{2}R=\int_0^a\sqrt{1+(y')^2}dx=\frac{1}{a}\int_0^a\sqrt{\frac{a^4-x^2(a^2-b^2)}{a^2-x^2}}dx=$$

$$=a\int_0^1\frac{\sqrt{1-\bar{x}^2(1-\bar{b})}}{\sqrt{1-\bar{x}^2}}d\bar{x}=a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-(1-\bar{b})\sin^2\varphi}\,d\varphi=???$$

$$\bar{x}=x/a;\quad \bar{b}=b/a;\quad \bar{x}=\sin\varphi\le 1;\quad d\bar{x}=\cos\varphi d\varphi.$$

3. Стеклопластик проявляет наследственно упругие свойства. Можно ли ограничиться линейно упругим приближением? Однонаправленный стеклопластик обладает практически линейной диаграммой деформирования до предельной деформации порядка 2–3% (не 0.2% как у стали). Поэтому при нагружении в упругой области (вплоть до больших перемещений ленточных пружин) реологические эффекты можно не учитывать. Был пример из опыта работы в ИМАШ со стеклопластиковыми рессорами. После испытаний рессора была зафиксирована (заневолена) в нагруженном состоянии при своем максимальном прогибе порядка 300 мм. В таком состоянии рессора хранилась более 15 лет. Затем работы по рессорам были продолжены, и эта старая рессора была вновь испытана. Стрела прогиба практически восстановилась, а измеренное при изгибе значение модуля упругости после многолетнего нахождения под максимальной нагрузкой оказалось лишь на 2% меньше значения, измеренного 15 лет назад. Вязкоупругие свойства практически не проявились.

Поэтому далее рассмотрено линейное, “балочное” приближение.

Смещение концов полукольца (рис. 2а) под действием силы P/N выражается из (3), (8) в виде $u_1=\dfrac{u}{n}=\dfrac{\pi PR^3}{2NEI}$, и податливость ленточной пружины из N лент, каждая из которых состоит из n полуколец

$$C_N=\frac{u}{P}=\frac{6\pi nR^3}{NEwh^3}. \tag{18}$$

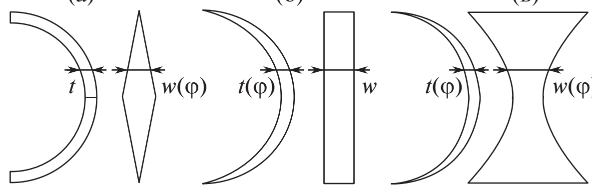


Рис. 5. Варианты профилирования равнопрочных полуколец.

Максимальное напряжение в полукольце должно не превышать допустимого значения

$$\sigma_{\max} = \frac{6P_{\max}R}{Nwh^2} \le \sigma_*. \tag{19}$$

Из одновременного выполнения условия заданной податливости (18) и равенства в условии прочности (19) находим по аналогии с (17) необходимое число полуколец (полуволн), толщину лент и их минимально возможную суммарную массу

$$n = \sqrt{\frac{6C_*^2E^2P_{\max}^3}{\pi^2NwR^3\sigma_*^3}}; \quad h = \sqrt{\frac{6P_{\max}R}{\sigma_*wN}}; \quad m_0 \approx \pi\rho NnRwh = \frac{6\rho P_{\max}^2EC_*}{\sigma_*^2} = \frac{12\rho EU_*}{\sigma_*^2}. \tag{20}$$

Как видно из (20), минимально возможная масса листовой пружины из волнистых лент (из полуколец) вдвое меньше оценки (17) для разрезных колец (просто, масса кольца вдвое больше, чем полукольца), и она при заданных жесткости и предельной нагрузке не зависит от радиуса R, числа волн n и лент N, а зависит лишь от модуля упругости E, прочности σ_* и плотности ρ.

За счет низких плотности и модуля, высокой прочности и линейной упругости ленточные волнистые пружины из стеклопластика оказываются по массе и по долговечности значительно эффективнее стальных упругих элементов.

3. Энергетический метод анализа возможного снижения массы за счет профилирования

3.1. Диаметрально нагруженное равнопрочное полукольцо. Поскольку изгибающий момент (1) в диаметрально сжимаемом полукольце пропорционален синусу полярного угла, можно применить равнопрочное профилирование (кроме концевых участков с постоянными размерами сечения)

$$\begin{gathered} w_i(\varphi)h_i^2(\varphi) = w_{*i}h_{*i}^2\sin\varphi; \quad \varphi_0 \le \varphi \le \pi/2; \\ w_i(\varphi) = w_i(\varphi_0); \quad h_i(\varphi) = h_i(\varphi_0); \quad 0 \le \varphi \le \varphi_0; \\ w_{*i} = w_i(\pi/2); \quad h_{*i} = h_i(\pi/2). \end{gathered} \tag{21}$$

В (21) и далее нижний индекс i означает один из наиболее естественных типов равнопрочного полукольца с постоянными: толщиной $i = 1$ (рис. 5а), шириной $i = 2$ (рис. 5б) или площадью сечения (констэра) $i = 3$ (рис. 5в); $i = 0$ относится к полукольцу с постоянными размерами сечений.

Объем таких профилированных полуколец и накопленную в них упругую энергию можно рассчитать интегрированием

$$
\begin{aligned}
V_{*i} &= 2R\left[\int\limits_{\varphi_0}^{\pi/2} w_i(\varphi)\,h_i(\varphi)\,d\varphi + w_i(\varphi_0)\,h_i(\varphi_0)\int\limits_0^{\varphi_0} d\varphi\right] = V_{0i}\delta_{Vi}; \quad V_{0i} = \pi R w_{*i} h_{*i};\\
U_{*i} &= \frac{P^2R^3}{E}\left[\int\limits_{\varphi_0}^{\pi/2}\frac{\sin^2\varphi}{I_i(\varphi)}d\varphi + \int\limits_0^{\varphi_0}\frac{\sin^2\varphi}{I_i(\varphi_0)}d\varphi\right] = U_{0i}\delta_{Ui}; \quad U_{0i} = \frac{\pi P^2R^3}{4E}\frac{12}{w_{*i}h_{*i}^3}.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Для случая профилированного полукольца из условий прочности (19) при наибольшей нагрузке P_* и заданной накопленной энергии U_* (16) можно из (22) найти требуемые размеры наиболее нагруженного центрального сечения

$$
\sigma_* = \frac{6P_*R}{w_{*i}h_{*i}^2}; \quad U_* = U_{0i}\delta_{Ui} \Rightarrow h_{*i} = \frac{\pi\sigma_* P_* R^2\delta_{Ui}}{2EU_*}; \quad w_{*i} = \frac{24E^2U_*^2}{\pi^2\sigma_*^3 P_* R^3\delta_{Ui}^2}.
\tag{23}
$$

Из (23) по аналогии с (17) можно оценить необходимую массу профилированного полукольца и сравнить его с массой (20) однородного полукольца, удовлетворяющего тем же условиям по прочности и накопленной энергии

$$
m \approx \pi\rho R w_{*i} h_{*i}\delta_{Vi} = \frac{12\rho E U_*}{\sigma_*^2}\frac{\delta_{Vi}}{\delta_{Ui}} = m_0\delta_m.
\tag{24}
$$

В (24) у коэффициента формы по массе $\delta_m = \delta_{Vi}/\delta_{Ui}$ индекс i специально опущен, чтобы подчеркнуть, что для всех “идеальных” равнопрочных полуколец (см. ниже) этот коэффициент одинаков и равен 1/2.

1) полукольцо с постоянной толщиной $h_1(\pi/2) = h_{*1}$ (рис. 5а). Из (21)

$$
\begin{aligned}
h_1(\varphi) &= h_{*1}; \quad w_1(\varphi) = w_{*1}\sin\varphi \quad \text{при} \quad \varphi_0 \le \varphi \le \pi/2;\\
h_1(\varphi) &= h_{*1}; \quad w_1(\varphi) = w_{*1}\sin\varphi_0 \quad \text{при} \quad 0 \le \varphi \le \varphi_0.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Согласно (22) коэффициенты формы по объему δ_{V1}, накопленной энергии δ_{U1} и массе δ_{m1} для полукольца типа *1* определяются выражениями

$$
\delta_{V1} = \frac{V_1}{V_0} = \frac{2}{\pi}\left[\int\limits_{\varphi_0}^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi + \sin\varphi_0\int\limits_0^{\varphi_0}d\varphi\right] =
$$

$$
= \frac{2}{\pi}[\cos\varphi_0 + \varphi_0\sin\varphi_0] \xrightarrow[\varphi_0\to 0]{} \frac{2}{\pi}; \quad (\xrightarrow[\varphi_0\to\pi/2]{} 1);
$$

$$
\delta_{U1} = \frac{U_1}{U_0} = \frac{4}{\pi}\left[\int\limits_{\varphi_0}^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi + \int\limits_0^{\varphi_0}\frac{\sin^2\varphi}{\sin\varphi_0}d\varphi\right] =
$$

$$
= \frac{4}{\pi}\left[\cos\varphi_0 + \frac{\varphi_0 - \frac{1}{2}\sin 2\varphi_0}{2\sin\varphi_0}\right] \xrightarrow[\varphi_0\to 0]{} \frac{4}{\pi}; \quad (\xrightarrow[\varphi_0\to\pi/2]{} 1);
$$

$$
\delta_{m1} \xrightarrow[\varphi_0\to 0]{} \frac{1}{2}.
$$

2) полукольцо с постоянной шириной $w_1(\pi/2) = w_{*1}$ (рис. 5б). Из условия равнопрочности (21)

$$h_2(\varphi) = h_{*2}\sqrt{\sin\varphi}; \quad w_1(\varphi) = w_{*1} \quad \text{при} \quad \varphi_0 \le \varphi \le \pi/2;$$
$$h_1(\varphi) = h_{*1}\sqrt{\sin\varphi_0}; \quad w_1(\varphi) = w_{*1} \quad \text{при} \quad 0 \le \varphi \le \varphi_0.$$

Этот случай оказывается сложнее для аналитики, так как интегралы не берутся в квадратурах, однако, окончательный вывод о снижении массы за счет равнопрочного профилирования остается прежним

$$\delta_{V2} = \frac{V_2}{V_0} = \frac{2}{\pi}[X + \varphi_0 \sin\varphi_0] \xrightarrow[\varphi_0\to 0]{} \frac{2}{\pi}X; \ \left(\xrightarrow[\varphi_0\to\pi/2]{} 1\right); \quad X = \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \sqrt{\sin\varphi}\,d\varphi;$$
$$\delta_{U2} = \frac{U_2}{U_0} = \frac{4}{\pi}\left[X + \int_0^{\varphi_0} \frac{\sin^2\varphi}{\sin^{3/2}\varphi_0}d\varphi\right] = \frac{4}{\pi}\left[X + \frac{\varphi_0 - ½\sin 2\varphi_0}{2\sin^{3/2}\varphi_0}\right] \xrightarrow[\varphi_0\to 0]{} \frac{4X}{\pi}; \tag{26}$$
$$\Rightarrow \delta_{m1} \xrightarrow[\varphi_0\to 0]{} \frac{1}{2}.$$

3) Полукольцо с постоянной площадью сечения — констэра

$$\begin{aligned} h_3(\varphi) &= h_{*3}\sin\varphi; \quad w_3(\varphi) = w_{*3}\sin^{-1}\varphi \quad \text{при} \quad \varphi_0 \le \varphi \le \pi/2; \\ h_3(\varphi) &= h_{*3}\sin\varphi_0; \quad w_1(\varphi) = w_{*1}\sin^{-1}\varphi_0 \quad \text{при} \quad 0 \le \varphi \le \varphi_0. \end{aligned} \tag{27}$$

Этот вариант равнопрочного профилирования наиболее предпочтителен для волокнистых композитов, так как сохранение площади сечения позволяет использовать постоянное число непрерывных волокон, что принципиально для сохранения прочности при профилировании. Хотя площадь сечения сохраняется, за счет роста податливости, а значит — накопленной упругой энергии — коэффициент снижения массы оказывается прежним

$$\begin{aligned} \delta_{V3} &= \frac{V_3}{V_0} = \frac{2}{\pi}\left[\int_{\varphi_0}^{\pi/2} d\varphi + \int_0^{\varphi_0} d\varphi\right] = 1; \\ \delta_{U3} &= \frac{U_3}{U_0} = \frac{4}{\pi}\left[\int_{\varphi_0}^{\pi/2} d\varphi + \int_0^{\varphi_0} \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi_0}d\varphi\right] = \\ &= \frac{4}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \varphi_0 + \frac{\varphi_0 - 1/2\sin 2\varphi_0}{2\sin^2\varphi_0}\right] \xrightarrow[\varphi_0\to 0]{} 2; \ \left(\xrightarrow[\varphi_0\to\pi/2]{} 1\right); \\ \delta_{m3} &= \frac{\delta_{V3}}{\delta_{U3}} \xrightarrow[\varphi_0\to 0]{} \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{28}$$

Приведенные результаты иллюстрируют, что любое диаметрально нагруженное, “идеально” равнопрочное полукольцо при заданных прочности и накопленной энергии вдвое легче, чем полукольцо с постоянными размерами сечений.

Реально не удастся достичь такого снижения массы благодаря только профилированию из-за невозможности создать неограниченно широкое и бесконечно тонкое полукольцо типа констэра, но за счет высокой прочности, низкой плотности и низкого модуля Юнга стеклопластик в подобных пружинах из волнистых лент способен обеспечить снижение массы примерно в пятнадцать раз по сравнению со стальным аналогом.

3.2. Эффективность равнопрочных балок при разных условиях нагружения. Приведенные выше иллюстрации можно обобщить на случай консольной балки длины l под действием изгибающего момента, изменяющегося по произвольному степенному закону

$$M(\bar{x}) = M(1)\,\bar{x}^{\gamma}; \quad \bar{x} = x/l. \tag{29}$$

Примем изменения размеров прямоугольных сечений для выполнения условия равнопрочности согласно (29) в степенном виде

$$w(\bar{x}) = w(1)\,\bar{x}^{\alpha}; \quad h(\bar{x}) = h(1)\,\bar{x}^{\beta}; \quad \sigma = \frac{6M}{wh^2} \Rightarrow \alpha + 2\beta = \gamma. \tag{30}$$

Случай концевой силы соответствует $\gamma = 1$, равномерно распределенная нагрузка — $\gamma = 2$, линейно растущая от конца балки нагрузка — $\gamma = 3$.

С помощью теоремы Кастильяно можно сразу, без вычисления прогибов, оценить накопленную упругую энергию в балке с переменным сечением под действием изменяющегося по длине момента

$$U_* = \frac{6l}{E}\int_0^l \frac{M^2(\bar{x})}{w(\bar{x})\,h^3(\bar{x})}\,d\bar{x}. \tag{31}$$

Из заданных значений максимального момента $M(1)$, прочности σ_* (32, п. 1) и упругой энергии U_* (32, п. 2) найдем требуемые размеры корневого сечения профилированной равнопрочной балки

$$\begin{gathered}
1. \quad \sigma_* = \frac{6M(1)}{w(1)\,h^2(1)};\\
2. \quad U_* = \frac{6M^2(1)\,l}{Ew(1)\,h^3(1)}\int_0^1 \bar{x}^{2\gamma-\alpha-3\beta}d\bar{x} = U_0\delta_U; \quad \delta_U = \frac{1+2\gamma}{1+2\gamma-\alpha-3\beta};\\
\text{из} \quad 1.\text{–}2. \Rightarrow h(1) = \frac{\sigma_* M(1)\,l}{U_* E\,(1+2\gamma-\alpha-3\beta)} = h_0\delta_U;\\
w(1) = \frac{6U_*^2E^2\,(1+2\gamma-\alpha-3\beta)^2}{\sigma_*^3 M(1)\,l^2} = w_0\delta_U^{-2}; \quad \delta_V = \frac{V_s}{V_0} = \int_0^1 \bar{x}^{\alpha+\beta}d\bar{x} = \frac{1}{1+\alpha+\beta},
\end{gathered} \tag{32}$$

где w_0; h_0 — постоянные размеры прямоугольной балки ($\alpha = \beta = 0$), удовлетворяющей тем же условиям по прочности и запасенной энергии.

Теперь можно найти требуемую массу профилированной балки, сравнив ее с прямоугольной

$$m = \rho w(1)\,h(1)\,l\delta_V = \frac{\rho w_0 h_0 l \delta_V}{\delta_U} = m_0\delta_m. \tag{33}$$

Учитывая соотношение равнопрочности $\alpha_i = \gamma - 2\beta_i$, находим

$$\delta_{mi} = \frac{\delta_{Vi}}{\delta_{Ui}} = \frac{1+2\gamma-\alpha_i-3\beta_i}{(1+2\gamma)(1+\alpha_i+\beta_i)} = \frac{1+2\gamma-\gamma-\beta_i}{(1+2\gamma)(1+\gamma-\beta_i)} = \frac{1}{1+2\gamma}. \tag{34}$$

Результат (34) означает постоянство коэффициента снижения массы любой равнопрочной балки с заданной упругой энергией для каждого вида нагружения: для концевой силы возможно снижение массы в три раза, для распределенной нагрузки — в пять, для линейно растущей от конца к корню — в семь раз. Сравнивая (34) с формулой (28), можно заключить, что изменение изгибающего момента в полукольце, про-

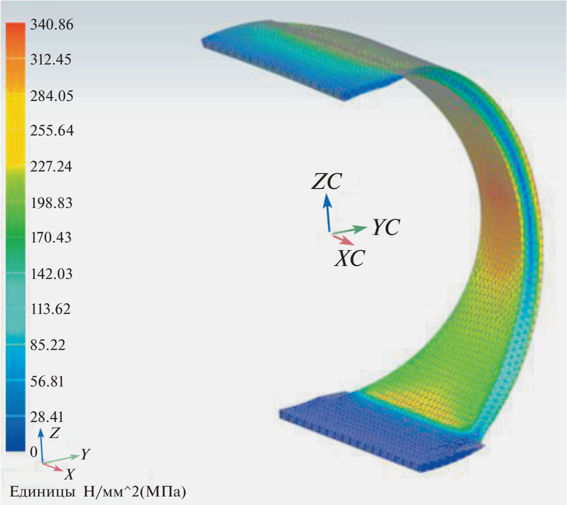


Рис. 6. 3-D модель профилированного полукольца и результаты МКЭ-расчетов напряжений.

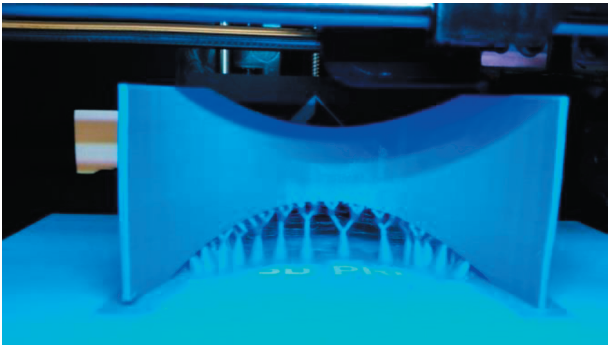


Рис. 7. Процесс 3-D печати равнопрочного полукольца.

порциональное синусу полярного угла, эквивалентно по снижению массы случаю степенного изменения момента в балке с показателем $\gamma = 1/2$, что соответствует изменению уровня распределенной нагрузки пропорционально $\bar{x}^{5/2}$.

Компьютерное моделирование и МКЭ-расчеты равнопрочных колец и волнистых лент. Для уточнения расчетов перемещений и напряжений в нагруженных кольцах, профилированных полукольцах (рис. 6) и пружинах из волнистых лент (рис. 4) были построены соответствующие компьютерные 3-D модели и проведены расчеты методом конечных элементов (МКЭ). Результаты оказались в удовлетворительном согласии с аналитическими, упрощенными расчетами.

В качестве полезного инженерного приложения для автоматизированного проектного расчета ленточных пружин был написан “калькулятор” на языке Swift в интегрированной среде разработки XCode 9.3 для платформы программного обеспечения Apple IOS 11.4. Использовать его весьма просто и удобно. Приложение состоит из одного экрана, на котором в соответствии с техническими требованиями и характеристиками выбранного материала для пружины вводятся в текстовые поля следующие

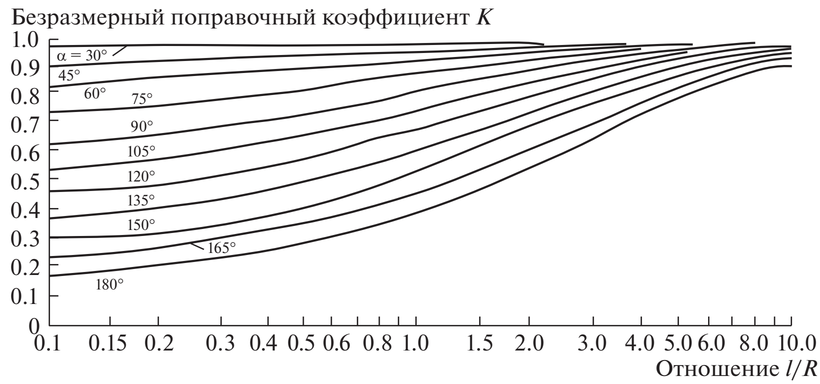


Рис. 8. Зависимость поправочного коэффициента K от отношения длины прямолинейного участка l к радиусу закругления пружины R и от полярного угла круговой части пружин.

параметры: максимальная нагрузка; податливость; высота пружины; ширина ленты; число лент; предел прочности; модуль Юнга; коэффициенты формы. После ввода всех параметров и команды "рассчитать" на экране появятся необходимые число полуколец и значение толщины ленты, полученные из условий, заданных прочности и податливости.

4. Изготовление на 3-D принтере и испытания модельных образцов

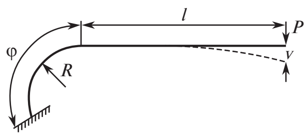
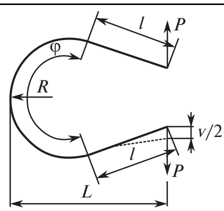
Модельные образцы ленточных пружин, а также профилированных и обычных полуколец с одинаковыми размерами наиболее нагруженного сечения были изготовлены на 3-D принтере из стандартных (неармированных) пластиков. Масса полуколец — обычного и типа констэра была одинаковой, но за счет профилирования (при равной прочности) податливость полукольца констэра оказалась примерно на 70% выше, чем у аналогичного полукольца с постоянными размерами сечения, что удовлетворительно согласуется с результатами МКЭ-расчетов и с оценками по приближенной (балочной) формуле (28). Для изготовления реальных композитных образцов пружин из равнопрочных волнистых лент необходима отработка технологии 3-D печати композитных деталей с расположением по заданным траекториям пропитанных связующим жгутов волокон (рис. 7).

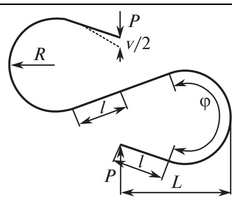
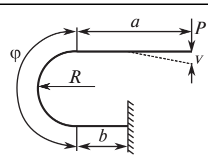
Приложение. Методы расчета плоских пружин различной геометрии. Для получения наглядных результатов, отражающих только влияние профилирования листов на податливость и несущую способность, в настоящей статье использовалось самое простое допущение о полукольцевой форме звена пружины из волнистых лент. При этом не рассматривалось влияние связи одного полукольца с соседним, а эта связь — из соображений симметрии — эквивалентна жесткому защемлению, т.е. запрещению поворота концов полуколец. При проектировании реальных пружин необходим более корректный учет их размеров и формы. В табл. 2 [8] приведены схемы нагружения практически применяемых звеньев ленточных пружин с соответствующими расчетными формулами для податливости и максимальных напряжений.

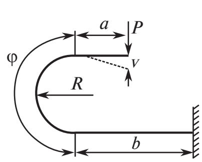
Поправочный коэффициент K для этих формул представлен в виде номограмм на рис. 8 и этот коэффициент зависит от отношения длины прямолинейного участка l к радиусу закругления пружины R, а также от полярного угла α круговой части пружины (табл. 2). Этот коэффициент K оказывает существенное влияние на точность расчетов прогибов ленточных пружин.

Выводы: 1. Ленточная пружина из волнистых стеклопластиковых лент может обеспечивать многократное снижение массы по сравнению со стальным аналогом при за-

Таблица 2.

<table>
<tr><th>Тип пружины</th><th>Прогиб пружины</th><th colspan="3">Предельная нагрузка и максимальное напряжение</th></tr>
<tr><td></td><td>$v_1 = \dfrac{KPR^3}{3EI}\left(\dfrac{l}{R} + \varphi\right)^3$
Для нахождения K при $\alpha = \varphi$</td><td colspan="2">Для $0 \le \alpha \le 90$
$P = \dfrac{W\sigma}{l + R\sin\varphi}$
$\sigma = \dfrac{PR\left(\dfrac{l}{R} + \sin\varphi\right)}{W}$</td><td>Для $90 \le \alpha \le 180$
$P = \dfrac{W\sigma}{l + R}$
$\sigma = \dfrac{PR\left(\dfrac{l}{R} + 1\right)}{W}$</td></tr>
<tr><td></td><td>$v_2 = \dfrac{2KPR^3}{3EI}\left(\dfrac{l}{R} + \dfrac{\varphi}{2}\right)^3$
Для нахождения K при $\alpha = \varphi/2$</td><td colspan="3" rowspan="2">$P = \dfrac{W\sigma}{L}$

$\sigma = \dfrac{PL}{W}$</td></tr>
<tr><td></td><td>$v_3 = 2v_2 =$
$= \dfrac{4KPR^3}{3EI}\left(\dfrac{l}{R} + \dfrac{\varphi}{2}\right)^3$
Для нахождения K при $\alpha = \varphi/2$</td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="7">$v_4 = v_5 =$
$= \dfrac{P}{3EI}\left[2KR^3\left(\dfrac{a}{R} + \dfrac{\varphi}{2}\right)^3 + \right.$
$\left. + (b - a)^3\right]$
Для нахождения K при $\alpha = \varphi/2$</td><td colspan="3">$P = \dfrac{W\sigma}{\lambda}$

$\sigma = \dfrac{P\lambda}{W}$</td></tr>
<tr><td rowspan="6"></td><td>Первый случай</td><td>Второй случай</td><td>λ-плечо силы</td></tr>
<tr><td>$a \ge b$</td><td>–</td><td>$a + R$</td></tr>
<tr><td>$a > b$</td><td>$(a - b) <$
$< (a + R)$</td><td>$a + R$</td></tr>
<tr><td>$a < b$</td><td>$(b - a) >$
$> (a + R)$</td><td>$b - a$</td></tr>
<tr><td>$a = 0$</td><td>$b \le R$</td><td>R</td></tr>
<tr><td>$a = 0$</td><td>$b > R$</td><td>b</td></tr>
</table>

данных несущей способности и накопленной упругой энергии. **2.** Кассетная подвеска из разрезных стеклопластиковых колец обладает существенно нелинейной жесткостью, что положительно сказывается на обеспечении плавности движения транспортного средства. **3.** Любая равнопрочная балка при заданных прочности и накопленной упругой энергии дает по сравнению с прямоугольной **трехкратное** снижение массы при нагружении концевой силой и **пятикратное** при равномерно распределенной нагрузке. Для изменения изгибающего момента по степенному закону $M(\bar{x}) \sim \bar{x}^{\gamma}$ коэффициент снижения массы выражается простой формулой $\delta_m = (1 + 2\gamma)^{-1}$. **4.** Равнопрочное профилирование диаметрально нагруженного кольца в идеальном случае приводит к двукратному снижению массы, что соответствует степенному закону изменения изгибающего момента с показателем $\gamma = 1/2$.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны И.Г.Кайшаури за помощь в выполнении экспериментальной и расчетной части работы.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 18-08-00372, 18-58-53020) и Национального научного фонда Китая (NSFC 51575430, 51811530107).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Полилов А.Н., Татусь Н.А., Шабалин В.В.* Особенности проектирования упругих элементов в виде профилированных композитных балок // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2011. № 6. С. 34. *Polilov A.N., Tatus N.A., Shabalin V.V.* Peculiarities of constructing elastic elements in the form of shaped composite beams // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2011. V. 40. № 6. P. 532.

2. *Полилов А.Н., Татусь Н.А., Плитов И.С.* Оценка влияния разориентации волокон на жесткость и прочность профилированных композитных элементов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2013. № 5. С. 58. *Polilov A.N., Tatus N.A., Plitov I.S.* Estimating the effect of misorientation of fibers on stiffness and strength of profiled composite elements // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2013. V. 42. № 5. P. 390.

3. *Полилов А.Н., Татусь Н.А.* Биомеханика прочности волокнистых композитов. ФизМатЛит. Москва. 2018. 328 с. ISBN: 978-5-9221-1760-9.

4. *Кербер М.Л.* Полимерные композиционные материалы. Структура. Свойства. Технологии. СПб.: Профессия, 2008. 560 с.

5. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.

6. *Карпинос Д.М.* Композиционные материалы. Справочник. Киев: Наукова думка, 2007. 563 с.

7. *Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г.* Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 446 с.

8. *Conklin R.M., Forry D.R.* Design of flat-wound tension springs, Trans. AS ME 74, 5, 743–749, July 1952.

9. *Goldsworthy W.B.* 2012. Pulforming. In: Nicolais L., Borzacchiello A. (Eds.), Wiley Encyclopedia of Composites. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, ISBN: 978-0-470-12828-2, pp. 2542-2544. https://doi.org/10.1002/9781118097298.weoc209

ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2020, № 3, с. 94–101

АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ

УДК 621.01

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАШИННОГО ПИЛЬНОГО АГРЕГАТА

© 2020 г. Д. М. Мухаммадиев[1,*], Ф. Х. Ибрагимов[1], Т. Д. Мухаммадиев[1]

[1]Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан

**e-mail: davlat_mm@mail.ru*

Поступила в редакцию 21.07.2018 г.
Принята к публикации 31.01.2020 г.

В статье рассмотрены динамические характеристики пильного джина как подсистемы с сосредоточенными и распределенными параметрами. На основе изучения машинного агрегата построены графики, позволившие установить максимальные значения угла относительного поворота и угла поворота вала пильного цилиндра при кручении.

Ключевые слова: волокноотделительные машины, джин, пильный цилиндр, машинный агрегат с сосредоточенными и распределенными параметрами, электродвигатель, крутильные колебания, математическая модель, угол поворота вала

DOI: 10.31857/S0235711920030086

1. Анализ современного состояния рассматриваемой проблемы. Изучение машин в виде машинных агрегатов позволяет более точно оценить динамические процессы, происходящие в системе привод–передаточный–исполнительный механизм под действием технологических нагрузок [1].

В работе [2] разработана динамическая модель машинного агрегата, включающего рабочий орган, электропривод и упруго-диссипативную муфту. Составлена математическая модель машинного агрегата. Реализация модели в компьютерной программе позволяет выполнить компьютерный эксперимент при варьировании механических параметров динамической системы, обосновать энергосберегающие параметры и режимы функционирования машинных агрегатов.

В работе Н.В. Лощинина [3] выводится дифференциальное уравнение движения машинного агрегата с вариатором при передаточном отношении $\omega_1/\omega_2 = i(t, \omega_2)$, зависящем от времени t и угловой скорости ω_2 ведомого вала вариатора. Составлены соответствующие формулы и выявлен динамический смысл для определенных обобщенных параметров агрегата: момента инерции агрегата, движущего момента, а также суммарного момента движущих сил и сил полезного сопротивления, приведенных к ведомому валу вариатора.

Авторы [4] теоретически исследовали многомассовые крутильные системы, сопряженные с большим объемом вычислений. В [4] рассматриваются теоретические вопросы свободных и вынужденных многомассовых крутильных колебаний при наличии зазоров в системах машин.

Согласно [5], правильный выбор параметров электропривода служит – необходимым условием высокопроизводительной и экономичной работы машинного агрегата. При динамическом синтезе электропривода предложено определять не только момент инерции маховой массы, но и передаточное отношение передаточного механизма из условия обеспечения максимального КПД двигателя и возможности запуска привода. В соответствии с предложенной методикой проведен динамический анализ и рассмотрен синтез плунжерного насоса.

В статье Ю.С. Корнеева и др. [6] о машинном агрегате с пускозащитной муфтой определено время разгона ведомой полумуфты вместе с технологической машиной.

В работе [7] предложен систематический подход при моделировании машинных агрегатов. Установлено отсутствие общего согласия относительно определения, структуры и классификации подсистем машинных агрегатов. Изложены общие принципы моделирования машинных агрегатов. Показано, что машинный агрегат обрабатывается как полная интеграция электронной подсистемы управления, подсистемы электропривода и механической рабочей подсистемы.

И.И. Вульфсоном [8] проанализированы некоторые неисследованные факторы, влияющие на колебания в приводах машин с цикловыми механизмами при учете характеристик электродвигателя. Предложена инженерная методика расчета подобных систем, базирующаяся на применении матриц перехода, хорошо приспособленных к компьютерным процедурам. Выявлен специфический эффект, связанный с высокой эквивалентной “податливостью” двигателя и изменением приведенных инерционных и упруго-диссипативных характеристик привода. Показана эффективность реализации условий квазистационарности при оптимизации параметров.

В монографиях [9, 10] изложены современные методы расчета колебаний машин, включая механизмы циклового действия (рычажные, кулачковые, шаговые и т.п.). Приведены приемы схематизации и корректного математического описания колебательных систем при учете переменности параметров и нелинейностей, в частности, составление системы дифференциальных уравнений для динамических моделей механизмов, включающих элементы с распределенными параметрами. Для снижения трудоемкости расчета предложена менее идеализированная расчетная схема, в которой соответствующий элемент отображается в виде подсистемы с распределенными параметрами.

Н.С. Пискуновым [11], составлено уравнение крутильных колебаний однородного цилиндрического стержня в виде уравнения Лапласа.

В работах [12, 13] установлено, что неравномерное вращение пильного цилиндра может ухудшить процесс джинирования и повредить волокна. В статье [14] с использованием уравнения Лагранжа II рода составлено уравнение движения машинного агрегата 156-пильного цилиндра джина для определения закона изменения частоты и неравномерности вращения ротора электродвигателя и пильного цилиндра в зависимости от упруго-диссипативных параметров муфты, момента инерции электродвигателя, момента инерции и сопротивления пильного цилиндра при различных их значениях.

Значение величины кратности пускового момента относительно номинального составляет 1.5–6. Но для использованного нами асинхронного электродвигателя оно равно 2 [15]. Из этого следует, что максимальная нагрузка на электродвигатель приходит в момент пуска.

2. Обоснование актуальности рассматриваемой проблемы. В настоящей статье изучается динамика пуска электродвигателя и крутильных колебаний вала пильного цилиндра джина с сосредоточенными и распределенными параметрами, который характеризуется достаточно большой длиной и обладает немалой податливостью.

3. Постановка задачи. Для изучения динамических характеристик рассчитаем систему, состоящую из подсистем с сосредоточенными и распределенными параметрами. Математическую модель первой подсистемы составим, согласно материалам работ [12–14], второй подсистемы – по материалам [8–11].

4. Изложение существа решения задачи, проблемы.

4.1. Подсистема машинного агрегата с сосредоточенными параметрами. Как следует из динамической модели пильного цилиндра (ПЦ) (рис. 1), угловое перемещение

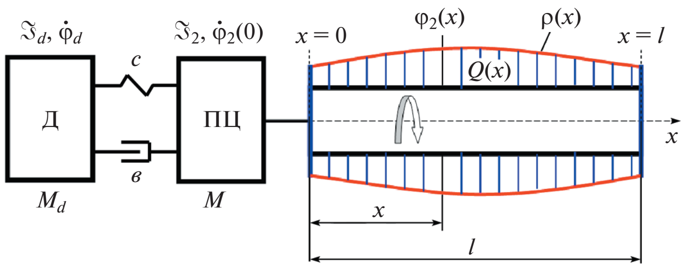


Рис. 1. Динамическая модель пильного цилиндра.

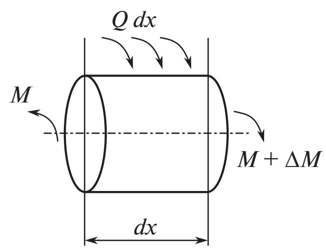


Рис. 2. Схематическое представление действующих моментов на элементарный участок вала.

электродвигателя (Д) через муфту передается длинному валу ПЦ, крутильные колебания которого могут оказаться довольно существенными.

В принятой динамической модели пильного цилиндра (рис. 1) использованы следующие условные обозначения: $\Im_d$, $\Im_2$ – сосредоточенные моменты инерции электродвигателя и пильного цилиндра, кг м^2; $\Im$ – распределенный момент инерции вала пильного цилиндра и жестко связанных с ним деталей, кг·м^2; c, $в$ – коэффициенты жесткости (Н м/рад) и диссипации (Н м с/рад) муфты; φ_d, $\varphi_2(x)$ – абсолютные координаты соответствующих сечений, рад; $Q(x)$ – распределенная обобщенная сила, приложенная к валу пильного цилиндра.

В качестве обобщенных координат примем φ_d и $\varphi_2(x)$. Сечением $x = 0$ разделим динамическую модель (рис. 1) на подсистемы с сосредоточенными и распределенными параметрами.

В указанном сечении к отсеченным частям следует приложить два реактивных момента M_- и M_+, которые равны по величине и противоположны по направлению, т.е. $M_+ = -M_-$ (рис. 2).

Во избежание возможных ошибок при выборе знака реактивного момента целесообразно руководствоваться следующим правилом: реактивный момент на “выходе” элемента (рис. 2, справа) считается положительным, если его направление совпадает с выбранным положительным направлением отсчета углов $\varphi_2(x)$; для реактивного момента на “входе” элемента (рис. 2, слева) правило знаков обратное.

Подставив определенные члены в уравнения Лагранжа, получим дифференциальные уравнения движения машинного агрегата пильного цилиндра в общем виде

$$\left.\begin{aligned} \Im_d\ddot\varphi_d &= M_d - c(\varphi_d - i\varphi_2) - в(\dot\varphi_d - i\dot\varphi_2)\\ \Im_2\ddot\varphi_2 &= ci(\varphi_d - i\varphi_2) + вi(\dot\varphi_d - i\dot\varphi_2) - M \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

где $i = 1$; $M = M_{\text{ср}} + M_0\sin(\omega_2 t + \varphi_{20})$.

При исследовании машинных агрегатов важно правильно выбрать характеристики двигателя. В настоящее время используются статическая, линеаризованная динамическая, уточненная динамическая и механическая динамическая характеристики асинхронных электродвигателей. Одним из наиболее перспективных направлений является приближенное рассмотрение электромагнитных переходных процессов, протекающих в двигателе, и их математическое описание системой дифференциальных уравнений. Поэтому при исследовании динамических параметров ПЦ мы использовали динамическую механическую характеристику асинхронного электродвигателя. Эта характеристика учитывает, как электромагнитные переходные процессы пуска, так и установившееся движение, описываемое системой дифференциальных уравнений, содержащих составляющие вектора потокосцеплений статора и ротора при синхронной скорости вращения осей координат, и имеет вид [12—14]

$$\left.\begin{aligned} M_D &= 3PK_r\omega_o\left(\psi_{X2}\psi_{Y1}-\psi_{X1}\psi_{Y2}\right)/2\sigma x_S \\ \dot\psi_{X1} &= U_m\cos\gamma-\omega_o\alpha'_S\psi_{X1}+\omega_o\alpha'_S K_r\psi_{X2}+\omega_o\psi_{Y1} \\ \dot\psi_{Y1} &= U_m\sin\gamma-\omega_o\alpha'_S\psi_{Y1}+\omega_o\alpha'_S K_r\psi_{Y2}-\omega_o\psi_{X1} \\ \dot\psi_{X2} &= -\omega_o\alpha'_r\psi_{X2}+\omega_o\alpha'_r K_S\psi_{X1}+\omega_o\psi_{Y2}-\varphi_D\psi_{Y2} \\ \dot\psi_{Y2} &= -\omega_o\alpha'_r\psi_{Y2}+\omega_o\alpha'_r K_S\psi_{Y1}-\omega_o\psi_{X2}+\varphi_D\psi_{X2} \end{aligned}\right\}, \qquad (2)$$

где ψ_{X1}, ψ_{Y1} — составляющие обобщенного вектора потокосцеплений статора по осям x и y, вращающихся с синхронной скоростью; ψ_{X2}, ψ_{Y2} — составляющие обобщенного вектора потокосцеплений ротора по осям x и y.

Далее определяем паспортные параметры и коэффициенты асинхронного двигателя 4А280М8УЗ [12, 13, 15]: $N_D = 75$ кВт; $n_D = 735$ об./мин; $M_K = 1948.8$ Н·м; $M_H = M_{DK}/2 = 974.4$ Н м; $f_C = 50$ Гц; $U_m = 220$ В; $\eta = 0.925$; $\cos\varphi = 0.85$; $\omega_0 = 78.54$ с$^{-1}$; $\omega_{\text{н}} = 76.97$ с$^{-1}$; $S_{\text{н}} = 0.02$; $S_K = 0.07464$; $P = 4$; $I_{D\text{н.ф.}} = 144.53$ А; $\Im_D = 4.20$ кг м^2; $K_S = x_\mu/\alpha_S = 0.956$; $K_r = x_\mu/\alpha_r = 0.952$; $x_\mu = 3.957$ Ом; $r_1 = 0.043$ Ом; $r_2 = 0.032$ Ом; $\alpha_S = r_1/x_S = 0.0103$; $\alpha'_S = \alpha_S/\sigma = 0.115$; $\alpha_r = r_2/x_r = 0.0077$; $\alpha'_r = \alpha_r/\sigma = 0.0858$; $\sigma = 1 - K_SK_r = 0.0896$; $x_S = x_\mu + x_1 = 4.14$ Ом; $x_r = x_\mu + x_2 = 4.155$ Ом; $x_1 = 0.1826$ Ом; $x_2 = 0.1979$ Ом.

Для исследования машинного агрегата пильного цилиндра джина 5ДП-156 были экспериментально определены момент инерции пильного цилиндра методом разгона $\Im_2 = 1.244$ кг м^2, технологическая нагрузка, действующая на вращающийся вал пильного цилиндра $M = M_{\text{ср}} + M_0\sin(\pi\omega_2 t + \varphi_{20})$ (здесь $M_{\text{ср}} = 843.72$ Н м; $M_0 = 78.78$ Н м; $\omega_2 = \pi \times 735/30$ рад/с; t — время; φ_{20} — начальная фаза) и далее расчетным путем установлена жесткость $c = 23065.2$ Н м/рад и коэффициент диссипации *в* = 128.5346 Н м с/рад муфты [12, 13].

Для изучения на ЭВМ динамики пуска электродвигателя и крутильных колебаний вала пильного цилиндра с сосредоточенными параметрами решены уравнения движения машинного агрегата пильного цилиндра (1) с характеристикой приводного двигателя (2). Использован численный метод Рунге—Кутта для дифференциального уравнения второго порядка $S = d^2\varphi/dt^2 = F(t, \varphi, \varphi')$, имеющий погрешность Δt^4.

Реализация уравнений движения машинного агрегата пильного цилиндра (1) с характеристикой приводного двигателя (2) позволила установить закономерность изменения углового ускорения пильного цилиндра в зависимости от t (рис. 3, 4).

Как показывают результаты анализа рис. 3, критический движущий момент электродвигателя составляет 40000 Н м, переходный процесс протекает в течение 3 с, а максимальное значение углового ускорения пильного цилиндра достигает 8739.828 рад/с^2 при

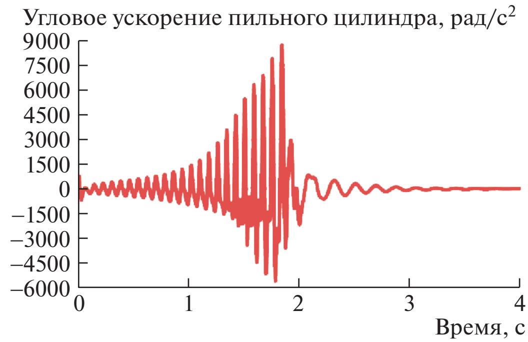


Рис. 3. Изменение углового ускорения пильного цилиндра в зависимости от времени.

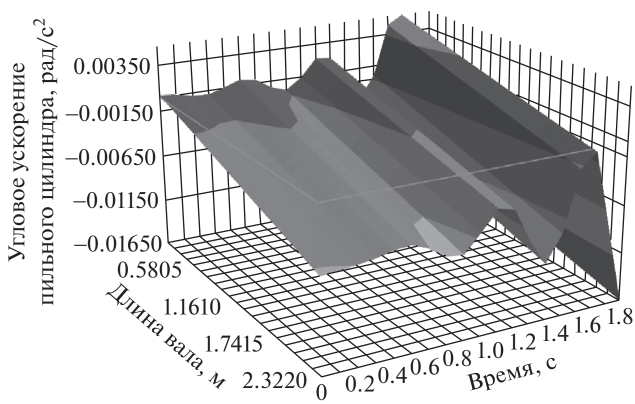


Рис. 4. Изменение углового ускорения пильного цилиндра в зависимости от времени по длине вала.

t = 1.844 с. Закономерность изменения углового ускорения можно выразить в виде функции

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} = \ddot{\varphi}(t) = 200e^{2.05t}\cos 75t. \tag{3}$$

4.2. Подсистема машинного агрегата с распределенными параметрами. Рассмотрим подсистему с распределенными параметрами [8–11]. Выделим на валу пильного цилиндра элементарный участок с длиной dx (рис. 1, 2), момент инерции которого равен $\rho = \frac{\partial \Im}{\partial x}dx$. В общем случае, если под $\Im$ понимать переменный приведенный момент инерции, неравномерно распределенный вдоль оси x, может оказаться, что $\rho = \rho(x, t)$; при $\Im$ = const имеем $\rho = \rho(x)$; при равномерном распределении масс $\rho = \Im/l$ = const, где l – длина вала.

Для выделенного элемента воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента, согласно которой производная от кинетического момента по времени равна сумме приложенных внешних моментов

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial\varphi_2}{dt}\right)dx = -M + (M + dM) + Qdx, \tag{4}$$

где $dM = \frac{\partial M}{\partial x}dx$ – приращение момента M на участке dx.

Элементарную угловую деформацию $d\varphi_2$ можно выразить следующим образом:

$$d\varphi_2 = \frac{M}{GI(x)}dx, \tag{5}$$

где $G = 8 \times 10^{10}$ Н/м ^{2}– модуль сдвига для вала из стали; $I(x)$ – полярный момент инерции вала, который в общем случае может меняться вдоль оси x.

Из зависимости (5) найдем момент

$$M = GI(x)\frac{d\varphi_2}{dx}, \tag{6}$$

а из выражения (6) – его дифференциал $dM = G\frac{\partial}{\partial x}\left(I(x)\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)dx$.

После подстановки зависимости (6) в уравнение (4) и сокращения на dx получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}\right) - G\frac{\partial}{\partial x}\left(I(x)\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right) = Q(x). \tag{7}$$

Если $\rho = \text{const}$ и $I(x) = \text{const} = 9.817 \times 10^{-6}$ м^4, уравнение (7) примет вид

$$\rho\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} - GI\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} = Q(x), \tag{8}$$

при этом распределенная по длине $x \in [0; l]$ обобщенная сила, приложенная к валу пильного цилиндра, будет иметь вид

$$Q(x) = \frac{M_{\text{ср}}+M_0\cos(\pi\omega_2 t + \varphi_{20})}{R\Delta\varphi_2 l}x, \tag{9}$$

где $M_{\text{ср}} = 843.72$ Н м; $M_0 = 78.78$ Н м; $\omega_2 = \pi \times 735/30$ рад/с; t – время; $\varphi_{20} = 0$ – начальная фаза; $l = 2.322$ м – длина вала пильного цилиндра; $R = 0.16$ м – радиус пильных дисков; $\Delta\varphi_2 = \pi/3$ – сектор дуги пильного диска. Тогда уравнение (8) примет вид

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} = \frac{1}{GI}\left(200\rho e^{2.05t}\cos 75t - \frac{M_{\text{ср}} + M_0\cos\pi\omega_2 t}{R\Delta\varphi_2 l}x\right). \tag{10}$$

При $\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} = \varphi_{2x}$ уравнение (10) запишем как

$$\ddot{\varphi}_{2x} = \frac{1}{GI}\left(200\rho e^{2.05t}\cos 75t - \frac{M_{\text{ср}} + M_0\cos\pi\omega_2 t}{R\Delta\varphi_2 l}x\right), \tag{11}$$

$$\dot{\varphi}_{2x} = \frac{1}{GI}\left((200\rho e^{2.05t}\cos 75t)x - \frac{M_{\text{ср}} + M_0\cos\pi\omega_2 t}{2R\Delta\varphi_2 l}x^2 + C_1\right), \tag{12}$$

$$\varphi_{2x} = \frac{1}{GI}\left((200\rho e^{2.05t}\cos 75t)\frac{x^2}{2} - \frac{M_{\text{ср}} + M_0\cos\pi\omega_2 t}{6R\Delta\varphi_2 l}x^3 + C_1 x + C_2\right). \tag{13}$$

Если $x = 0$, $\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = \dot{\varphi}_{2x} = 0$, $\varphi_{2x} = 0$, тогда при $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$ уравнения (12) и (13) примут вид

$$\dot{\varphi}_{2x} = \frac{1}{GI}\left((200\rho e^{2.05t}\cos 75t)x - \frac{M_{\text{ср}} + M_0\cos\pi\omega_2 t}{2R\Delta\varphi_2 l}x^2\right), \tag{14}$$

$$\varphi_{2x} = \frac{1}{GI}\left((200\rho e^{2.05t}\cos 75t)\frac{x^2}{2} - \frac{M_{\text{ср}} + M_0\cos\pi\omega_2 t}{6R\Delta\varphi_2 l}x^3\right). \tag{15}$$

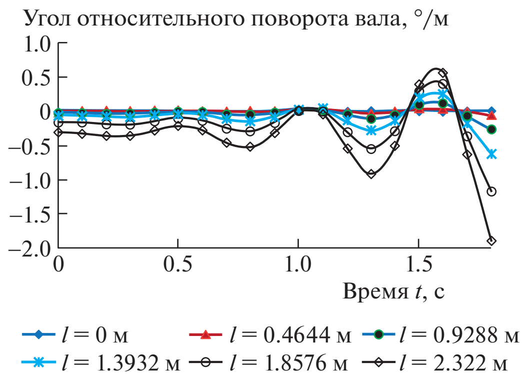


Рис. 5. Изменение угла относительного поворота вала пильного цилиндра в зависимости от времени для различной длины вала.

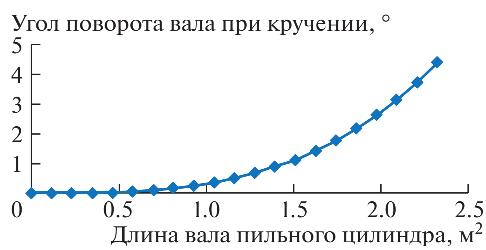


Рис. 6. Изменение углового поворота вала пильного цилиндра при кручении в зависимости от длины вала (для t = 1.8 с).

На основе решения уравнений (14), (15) изучена динамика крутильных колебаний вала пильного цилиндра джина с распределенными параметрами. Построены графики изменения угла относительного поворота вала пильного цилиндра (рис. 5) и углового поворота вала при кручении (рис. 6) в зависимости от длины вала l.

В результате этого установлены максимальные значения угла относительного поворота и угла поворота вала пильного цилиндра при кручении равные, соответственно 1.89°/м и 4.39°.

5. Обсуждение результатов в научном и прикладном аспектах. Изучение машин в виде машинных агрегатов позволило установить динамику пуска электродвигателя и крутильных колебаний вала пильного цилиндра джина с распределенными параметрами. Для этого были использованы подсистемы как с сосредоточенными параметрами (уравнения Лагранжа II рода), так и с распределенными (уравнение Лапласа в цилиндрических координатах).

Изучение машинного агрегата пильного цилиндра с сосредоточенными параметрами показало, что критический движущий момент электродвигателя составляет 40000 Н·м, переходный процесс протекает в течение 3 с, а максимальное значение углового ускорения пильного цилиндра достигает 9000 рад/с^2 при t = 1.8 с.

На основе построенных графиков (рис. 5, 6) в результате изучения машинного агрегата пильного цилиндра с распределенными параметрами установлены максимальные значения угла относительного поворота и угла поворота вала пильного цилиндра при кручении – соответственно 1.89°/м и 4.39°.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Артоболевский И.И.* Теория механизмов и машин / Учеб. для втузов. Изд. 4, перераб. и доп. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 640 с.
2. *Коршун В.Н.* Обоснование энергосберегающих параметров машинных агрегатов с электроприводом // Вестник КрасГАУ. 2013. № 5. С. 188.
3. *Лощинин Н.В.* Уравнение движения и обобщённые параметры машинного агрегата с вариатором // Вестник РАЕН. 2017. № 4. С. 44.
4. *Попович В.С., Пестрецов Р.Е.* Особенности приведения крутильных систем в машинных агрегатах с зазорами // Ползуновский вестник. ФГБОУ ВПО "Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова". 2015. № 4-1. С. 27.
5. *Тимофеев Г.А., Люминарский И.Е., Люминарская Е.С.* Динамический анализ и синтез механизмов с учетом механической характеристики асинхронного электродвигателя // Инженерный журнал "Наука и инновации. МГТУ имени Н.Э. Баумана". 2017. № 5. С. 8.
6. *Корнеев Ю.С., Гордон В.А., Корнеева Е.Н., Гулидова Т.Ю.* Расчет времени разгона привода с пускозащитной муфтой. Динамический анализ и синтез механизмов с учетом механической характеристики асинхронного электродвигателя // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева. 2016. № 2. С. 41.
7. *Jozef Steinhauser, Milan Nad'.* Principles of Modelling of Machine Aggregates. Acta Technica Corvininesis – Bulletin of Engineering. Oct–Dec. 2015. V. 8. Issue 4. P. 57.
8. *Вульфсон И.И.* К проблеме снижения виброактивности приводов цикловых машин при учете динамических характеристик электродвигателя // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 4. С. 12.
9. *Вульфсон И.И.* Динамика цикловых машин. СПб.: Политехника, 2013. 425 с.
10. *Vulfson I.* Dynamics of Cyclic Machines. (Expanded Edition of the Monograph [3] translation). Heidelberg. New York. Dordrecht; London: Springer, 2015. 410 p.
11. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное интегральное исчисление для втузов // Учебное пособие для втузов. Изд. 13. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. Т. 2. 560 с.
12. *Мухаммадиев Д.М.* Исследование математической модели машинного агрегата двухбарабанного питателя // Известия вузов. Технология текстильной промышленности, 2008. № 4. С. 115.
13. *Мухаммадиев Д.М., Рахматкариев Ш.У., Арифджанов А.З.* Анализ статических и динамических характеристик пильного цилиндра волокноотделителя // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. № 2. С. 13.
14. *Мухаммадиев Д.М.* Исследование неравномерности вращения пильного цилиндра джина 5ДП-156 при различных характеристиках асинхронного электродвигателя // Вестник КрасГАУ. 2008. № 1. С. 236.
15. *Кравчик А.Э и др.* Асинхронные двигатели серии 4А. М.: Энергоиздат, 1982. 504 с.

ПРОБЛЕМЫ МАШИНОСТРОЕНИЯ И НАДЕЖНОСТИ МАШИН 2020, № 3, с. 102–112

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕХАНИКА, ДИАГНОСТИКА, ИСПЫТАНИЯ

УДК 621.81: 620.16

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ И ДОЛГОВЕЧНОСТИ ДЕТАЛЕЙ МАШИН ПО УСТАЛОСТНОМУ РАЗРУШЕНИЮ

Ж. Б. Бакиров[1], А. А. Танирбергенова[2,*]

[1]Карагандинский государственный технический университет, Караганда, Казахстан

[2] Северо-Казахстанский государственный университет им. М. Козыбаева, Петропавловск, Казахстан

**e-mail: 1975.anar_tanir@mail.ru*

Поступила в редакцию 01.12.2018 г.
Принята к публикации 31.01.2020 г.

Рассматривается задача расчета надежности и долговечности деталей машин по усталостному разрушению при случайных изменениях действующих и предельных напряжений. По скорректированной линейной теории суммирования повреждений получено трансцендентное уравнение, связывающее число циклов до разрушения с параметрами случайного нагружения и предела выносливости. Из этого уравнения определяется пороговое значение предела выносливости, соответствующее разрушающему числу циклов за срок службы. Надежность равна вероятности превышения пределом выносливости этого значения. Получены аналитические зависимости для определения вероятностных характеристик долговечности при одновременном случайном изменении нормальных и касательных напряжений.

Ключевые слова: надежность, долговечность, усталостное разрушение, циклы нагружения, амплитуда напряжения, предел выносливости, случайная величина

DOI: 10.31857/S0235711920030037

Для прогнозирования показателей надежности и долговечности технических систем в настоящее время наиболее часто применяется статистическая теория надежности. Она применима к объектам и деталям, используемым в массовом количестве в однородных условиях, где возможен сбор экспериментальных данных по причинам и интенсивностям отказов. Однако многие детали машин уникальны и дороги и изготавливаются в таком малом количестве, что не может быть речи о сборе статистических данных по их отказам. Да и условия их работы сильно отличаются. В этом случае расчет показателей надежности и долговечности должен быть выполнен на основе теоретических исследований и аналитических расчетов.

В послевоенные годы началось внедрение статистических методов в машиностроение в связи с расчетом долговечности деталей машин, работающих в условиях переменных напряжений. Существенный вклад в этом направлении сделан С.В. Серенсеном и его сотрудниками. В начале 60-х годов начинается внедрение теории случайных процессов к решению задач надежности. В машиностроении этот подход активно развивался В.В. Болотиным. В настоящее время опубликовано ряд монографий, в которых обобщены проведенные исследования в этом направлении [1–5]. Количество публикаций на эту актуальную тему в периодических изданиях и материалах научных конференций продолжает расти [6–14].

В настоящей статье в достаточно общем виде рассматривается задача расчета надежности и долговечности деталей машин по усталостному разрушению в вероятностной постановке. В результате решения задачи неявно определена монотонно убывающая во времени функция надежности $H(t)$, которая дает надежность (вероятность неразрушения) детали по истечении определенного промежутка времени (срока службы, межремонтного периода механизма). Она также позволяет определить долговечность детали, если приравнять надежность нулю (усталостное разрушение).

Процесс накопления усталостных повреждений рассматривается на макроуровне и описывается скорректированной теорией линейного суммирования повреждений. Предельное состояние материала описывается кривой усталости.

Кривые усталости большинства материалов можно описать зависимостью

$$S_a^m N = R_{-1}^m N_0 \quad \text{при} \quad N \le N_0; N = \infty \quad \text{при} \quad N > N_0, \tag{1}$$

где m – постоянная материала; R_{-1} – предел выносливости лабораторного образца; N_0 – базовое число циклов; S_a – амплитуда симметричного цикла напряжений; N – число циклов до разрушения.

Для конкретных деталей машин вместо R_{-1} используется предел выносливости детали $R_g = R_{-1}/K_{-1}$, вычисленный с учетом общего коэффициента изменения предела выносливости. При несимметричном цикле напряжений вместо S_a используется амплитуда приведенного симметричного цикла

$$S_{\text{пр}} = S_a + \left(\psi_\sigma / K_{-1}\right) S_m.$$

В связи с большим разбросом опытных данных испытанию подвергается большое количество образцов и строится полная вероятностная диаграмма. Ее можно представить в виде семейства кривых усталости в координатах $S - N$, соответствующих различной вероятности разрушения P или в виде кривых распределения долговечности в координатах $P - N$, соответствующих различным напряжениям S. Наиболее часто применяется медианная кривая усталости и для нее в литературе приводятся постоянные материала.

Для расчетов на надежность основное значение имеет закон распределения предела выносливости. Многочисленные опытные данные свидетельствуют о том, что для этой зависимости можно принять нормальное или логарифмически нормальное распределение [1].

При расчете надежности деталей машин исключительно важны расчетные методы распространения результатов испытаний образцов на натурные детали. Такие возможности открывает статистическая теория подобия усталостного разрушения. Согласно этой теории распределение предела выносливости детали $f\left(R_g\right)$ аппроксимируется нормальным законом. При этом медианное значение $\overline{R}_g$ и коэффициент вариации k_{Rg} предела выносливости детали определяется по формулам [1]

$$\overline{R}_{\text{g}} = \varepsilon_\infty \overline{R}_{-1}\left(1+l\right), \quad k_{Rg} = 0.5(1-10^{-2\sigma})l/(1+l), \tag{2}$$

где $l = \dfrac{1-\varepsilon_\infty}{\varepsilon_\infty}\left(\dfrac{1}{88.3}\dfrac{L}{G}\right)^{-\nu}$; L – периметр зоны концентраций напряжений; G – относительный градиент напряжений.

При ориентировочных расчетах принимается $\sigma = 0.045$–0.05 для конструкционных сталей и $\sigma = 0.05$–0.06 – для сплавов, $\varepsilon_\infty = 0.5$, $\nu = 0.1$.

Для расчета надежности детали по усталостному разрешению надо знать закон распределения амплитуд расчетных напряжений $f(s)$. На стадии проектирования для простых циклов его можно определить преобразованием плотностей вероятностей или решением задач статистической динамики [15, 16]. Если напряжение представляет собой гормонический процесс со случайной амплитудой или узкополосной стационарный гауссовский процесс, плотность распределения амплитуды подчиняется закону Рэлея

$$f(S) = (S/\sigma_S^2)\exp(-S^2/2\sigma_s^2),$$

где σ_S^2 – дисперсия напряжения.

Характеристики нагруженности можно получить путем имитационного моделирования или путем натурных тензометрических измерений при испытаниях детали. По осциллограмме или выборке напряжений образуют массив случайных амплитуд S_i и строят гистограмму. Далее подбирается наиболее подходящий теоретический закон распределения амплитуды. Для этой цели часто используется правая ветвь нормального распределения

$$f(s) = \sigma_s^{-1}\sqrt{2/\pi}\exp(-s^2/2\sigma_s^2).$$

Если напряжение случайно не только по амплитуде, но и по коэффициенту асимметрии, то сначала производится схематизация процесса, целью которой является получение функции распределения амплитуд напряжений, эквивалентной данному случайному процессу по степени вносимого усталостного повреждения [11]. К способам схематизации относятся методы максимумов, размахов, полных циклов. Принято считать, что наиболее приемлемые результаты дает метод полных циклов. Схему реализаций этого метода и расчетные формулы можно найти в [1, 17].

Если напряжение является стационарным гауссовским процессом, то для определения плотности распределения амплитуд можно использовать выражения [17]

$$f(S) = \begin{cases} k_0^2 S\exp(-k_0^2\alpha^2 S^2/2) & S < S_*, \\ k_0^{-1} CS\exp(-S^2/2) & S \geq S_*, \end{cases}$$

где k_0 – первоначальное отношение среднего числа экстремумов к среднему числу нулей.

$$\alpha = \sqrt{2(a+3b)/ab}; \quad C = k_0^{-a/b}\exp(S_*^2/2); \quad S_* = \sqrt{a\ln k_0}/k_0.$$

Для определения “a” и “b” имеются два уравнения

$$k_0^{-a/b} = 1 - \frac{ab}{2k_0(a+b)}[1 - k_0^{-(a+b)/b}] = k_0\left\{1 - \frac{ab}{2(a+3b)}[1 - k_0^{(a+3b)/b}]\right\}.$$

Рассмотрим расчет надежности по усталостному разрушению при регулярной случайной загруженности. Надежность в этом случае равна вероятности непревышения случайной амплитудой детерминированной или случайной величины предела выносливости при базовом или ограниченном числе циклов. Решение таких задач в общем виде и при различных сочетаниях действующих и предельных напряжений приведено в [15]. Для нормального закона распределения предельных и действующих напряжений надежность равна

$$H = \Phi(t), \tag{3}$$

где $t = (n_N - 1)/\sqrt{n_N^2 k_{R_g}^2 + k_s^2}$, $n_N = \overline{R}_g/m_s$, $k_{R_g} = \sigma_{R_g}/\overline{R}_g$; Φ – табулированная функция распределения нормального закона.

Используя выражение (1), получаем

$$n_N = \overline{R}_g/m_s = n_0 \quad \text{при} \quad N > N_0; \quad n_N = n_0(N_0/N)^m \quad \text{при} \quad N \leq N_0.$$

Эти формулы позволяют рассчитать функцию распределения ресурса детали, то есть зависимость надежности от срока службы N.

Определение надежности по усталостному разрушению при случайном нагружении проведем по скорректированной гипотезе линейного суммирования повреждений, согласно которой условие усталостного разрушения за N циклов имеет вид [2, 5]

$$a_p \le a = N/N_p(s),$$

где $N_P(s)$ – разрушающее число циклов на уровне напряжений S; a_P – расчетное относительное усталостное повреждение.

При случайном изменении напряжений с учетом (1) имеем

$$a = N\int \frac{f(s)}{N_p(s)}ds = \frac{N}{N_0 R_g^m}\int_{R_g}^{S_m} s^m f(s)ds. \tag{4}$$

Здесь S_m максимальное значение амплитуды, которое можно найти, задавшись вероятностью непревышения этого значения H_{sm}. Тогда S_m определяется как корень уравнения

$$H_{sm} = \int_{-\infty}^{S_m} f(S)\,dS = F(S_m), \tag{5}$$

то есть S_m – равна квантили распределения, соответствущей H_{sm}.

Переходя от блочного нагружения к непрерывному случайному нагружению, запишем выражение для определения расчетного повреждения

$$a_p = \left[\int_{MR_g}^{\infty} sf(s)ds/\int_{MR_g}^{\infty} f(s)ds - MR_g\right]/(S_m - MR_g),$$

где $M = 0.5–0.7$ – относительный уровень повреждающих амплитуд.

Если при расчетах по этой формуле получается $a_P < 0.2$, то принимаем $a_P = 0.2$.

Для вычисления коэффициента a введем обозначение

$$U = \left[\int_{MR_g}^{\infty} sf(s)ds\right]/\left[\sigma_s\int_{MR_g}^{\infty} f(s)ds\right]. \tag{6}$$

Запишем $a_p = (U - Mx_0)/(b - Mx_0)$, $b = S_m/\sigma_s$, $x_0 = R_g/\sigma_s$.

Теперь из уравнения (4), приняв $a = a_P$, можно найти ресурс детали

$$N = a_p N_0 R_g^m / I, \tag{7}$$

где

$$I = \int_{R_g}^{S_m} s^m f(s)ds \tag{8}$$

Интегралы (6) и (8) можно вычислить, используя табулированную функцию χ^2-распределения (Пирсона) – $P(x, n)$. Для распределения Рэлея

$$\begin{gathered} I/R_g^m = 2^{m/2}\Gamma(1+2m)[P(x_0^2, m+1) - P(b^2, m+1)]/x_0^m; \\ U = \sqrt{\pi/2}P(x_0^2/4, 3)/P(x_0^2/4, 2). \end{gathered} \tag{9}$$

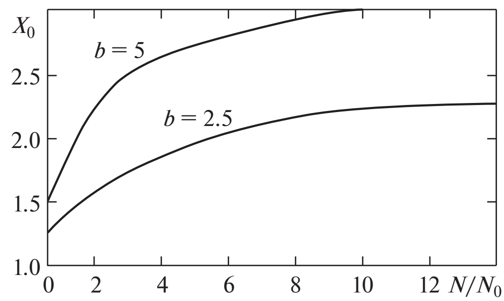


Рис. 1

Правая ветвь нормального распределения

$$I/R_g^m = 2^{m/2}\Gamma[(m+1)/2][P(x_0^2, m+1) - P(b^2, m+1)]/\sqrt{\pi x_0^m};$$
$$U = \sqrt{2/\pi}P(x_0^2/4.2)/P(x_0^2/4.1). \tag{10}$$

В этих формулах $\Gamma(n)$ – полная гамма-функция.

Из этих соотношений при $S_m \to \infty$ как частные случаи получаются выражения, приведенные в [1].

Для расчета надежности из уравнения (7) находим пороговое значение предела выносливости R_*, соответствующего сроку службы в N циклов и заданному нагружению. Если фактический предел выносливости R_g больше R_*, то деталь не разрушится за N циклов. Следовательно, надежность детали по усталостному разрушению равна вероятности указанного события и определяется по формуле

$$H = P(R_g > R_*) = \int_{R_*}^{\infty} f_R(R_g)dR_g = 1 - \Phi(\gamma), \tag{11}$$

где $\gamma = (R_* - \overline{R}_g)/\sigma_g$.

Трансцендентное уравнение (7) решается графически или на ЭВМ. Для практических расчетов полезно заранее построить график зависимости N/N_0 от x_0 для различных материалов m и нагружений b

$$N/N_0 = a_p R_g^m/I = f(x_0, m, b).$$

Такой график для усеченного нормального закона амплитуды при $m = 9$ приведен на рис. 1.

Для определения порогового значения R_* для материала деталей (m, N_0) при заданном нагружении (b, $f(S)$) и срока службы N из графика находим x_0, а через него $R_* = x_0\sigma_S$. Далее по формуле (11) определяется надежность детали.

Если предел выносливости является детерминированной величиной, то из уравнения (7) или графика находим параметр b, а затем максимальное значение амплитуды S_m. Далее из уравнения (5) находим вероятность непревышения этого значения, что соответствует надежности детали.

Для расчета долговечности необходимо знать распределение числа циклов до разрушения N. Многочисленные испытания показали, что оно подчиняется логарифмически нормальному закону [1].

$$f(N) = (\sqrt{2\pi}N\sigma_z)^{-1}\exp[-(\ln N - m_z)^2/2\sigma_z^2], \tag{12}$$

где $z = \ln N$; σ_z, m_z — математическое ожидание и стандарт, определяемые экспериментально при испытаниях с постоянной амплитудой.

Вероятностные характеристики числа N при этом равны

$$m_N = \exp(m_z + \sigma_z^2/2), \quad k_N = \sigma_N/m_N = (\exp\sigma_z^2 - 1)^{1/2}. \tag{13}$$

Если путем испытаний определены m_N и k_N, то параметры распределения определяются как

$$\sigma_z^2 = \ln(k_N^2 + 1), \quad m_z = \ln m_N - \sigma_z^2/2. \tag{14}$$

Вероятность разрушения при числе циклов N_P будет равна

$$P = F(N_P) = \int_0^{N_P} f(N)dN = \Phi\left(\frac{\ln N_P - m_z}{\sigma_z}\right).$$

Отсюда, задавшись надежностью H_*, можно определить долговечность детали

$$N_P = \exp(\gamma_P\sigma_z + m_z), \tag{15}$$

где γ_P — квантиль нормального распределения, соответствующий вероятности $P = 1 - H_*$.

Для конкретных деталей экспериментальное опредление параметров распределения (12) является очень трудоемким. В реальных условиях амплитуда напряжений имеет случайный характер. Поэтому исключительно важна разработка методов определения долговечности деталей с учетом случайных факторов.

Выражение (7), определяющее ресурс детали представим в виде $N = a/\bar{v}$, где $\bar{v}$ — среднее значение повреждения за один цикл

$$\bar{v} = \int_0^\infty [f_{(S)}/N_{(S)}]dS.$$

Второй момент и дисперсия единичного повреждения определяются по формулам

$$\left\langle \nu^2 \right\rangle = \int_0^\infty [f_{(s)}/N_{(s)}^2]ds, \quad \sigma_\nu^2 = \left\langle \nu^2 \right\rangle - \bar{\nu}^2. \tag{16}$$

Число циклов до разрушения определяет долговечность детали в случае регулярного нагружения. При сложных циклах нагружения среднее значение долговечности $\bar{T}$ определяется через среднее время $\bar{t}$ между нагружениями

$$\bar{T} = \bar{t}N = \bar{t}a/\bar{v} = a\bar{t}N_0R_g^m/I. \tag{17}$$

Дисперсия долговечности определяется по формуле [13]

$$\sigma_T^2 = \bar{T}\bar{t}[\sigma_\nu^2/\bar{\nu}^2 + \sigma_t^2/\bar{t}^2], \tag{18}$$

где σ_t^2 — дисперсия времени между нагружениями.

Распеделение долговечности подчиняется логарифмически нормальному закону и определяется выражением (12) с заменой N на T.

Покажем определение показателей долговечности на примере релеевского распределения амплитуды. В этом случае по формулам (17) и (9) при больших S_m получаем

$$\overline{T} = \frac{2^{-m/2}T_0 x_0^m}{\Gamma(1+m/2)Q(x_0^2, m+2)}, \quad Q(x,m) = 1 - P(x,m), \quad T_0 = aN_0\overline{t}. \tag{19}$$

Дисперсия единичного повреждения по (16) равна

$$\sigma_\nu^2 = 2^m\Gamma(m+1)Q(x_0^2, 2m+2)/N_0^2 x_0^{2m} - (T_0/N_0\overline{T})^2.$$

Дисперсию долговечности найдем по формуле (18). При этом распределение времени между нагружениями считаем релеевским

$$\sigma_t^2/\overline{t}^2 = \left\langle t^2 \right\rangle/\overline{t}^2 - 1 = 4/\pi - 1.$$

Теперь

$$\sigma_T^2 = \overline{t}\,\overline{T}\left[\frac{\Gamma(m+1)Q(x_0^2, 2m+2)}{\Gamma(1+m/2)Q(x_0^2, m+2)} + \frac{4}{\pi} - 2\right].$$

Экспериментальная проверка полученных зависимостей [2, 13] показывает, что среднее значение долговечности хорошо согласуется с опытными данными, а реальное рассеяние долговечности намного больше, чем это предсказывает последняя формула. Основная причина этого заключается в том, что при расчетах мы учитывали только случайный характер амплитуд напряжений, а механические свойства материала полагали детерминированными. Однако, предел выносливости является случайной величиной и его рассеяние оказывает существенное влияние на рассеяние долговечности.

Один из путей решения этой задачи предложен В.В. Болотиным [2] и состоит в применении формулы полной вероятности и аппроксимации условного распределения долговечности в виде дельта-функции. В результате получено распределение долговечности в виде

$$P(T) = -\frac{d}{dT}\left[\int_{T<\overline{T}(R)} f(R)dR\right] = \frac{d}{dT}F[R_*(T)], \tag{20}$$

где $F(R)$ – функция распределения предела выносливости; $R_*(t)$ – корень уравнения

$$\overline{T}(R) = t. \tag{21}$$

Функция надежности системы определяется по формуле

$$H(t) = \int_{\overline{T}(R)>t} f(R)dR = 1 - F[R_*(t)]. \tag{22}$$

При использовании формул (20) и (22) возникают трудности, связанные с определением функции R_* из уравнения (21). Если характеристическая долговечность определяется уравнением (19), то аналитическое определение функции $R_*(t)$ невозможно из-за наличия трансцендентной функции $Q(x_0^2, m+2)$. В этом случае иногда можно пользоваться приближенным решением, не учитывающим рассеяние функции $Q(x_0^2, m+2)$. Тогда

$$R_*(t) = \sqrt{2}\sigma_S[Q(b_0^2, m+2)\Gamma(1+m/2)t/T_0]^{1/m}, \tag{23}$$

где $b_0 = m_R/\sigma_S$; m_R – математическое ожидание предела выносливости.

Пусть предел выносливости имеет двухпараметрическое распределение Вейбулла $F(R) = 1 - \exp(-R^{\beta}/a)$. Тогда распределение долговечности и функцию надежности можно найти по формулам (20) и (22)

$$P(T) = \alpha L T^{\alpha-1} \exp(-LT^{\alpha}), \quad H(t) = \exp(-Lt^{\alpha}), \tag{24}$$

где $\alpha = \beta/m$, $L = (\sqrt{2}\sigma_S)^{\beta}[Q(b_0^2, m+2)\Gamma(1 + m/2)/T_0]^{\alpha}/a$.

Из этих выражений можно найти все вероятностные характеристики долговечности. Долговечность детали с заданной надежностью H_* будет равна $T = (-\ln H_*/L)^{m/\beta}$.

Математическое ожидание и коэффициент вариации долговечности

$$m_T = L^{-m/\beta}\Gamma(1 + m/\beta), \quad k_T = \sqrt{\frac{\Gamma(1 + 2m/\beta)}{\Gamma^2(1 + m/\beta)} - 1}.$$

В общем случае для учета рассеяния предела выносливости применяют метод статистического моделирования. Из выражения (19) выпишем члены, зависящие от R: $u = x^m/Q(x^2, m+2)$, где $x = b = R/\sigma_S$ — случайная величина.

Тогда $T = L_0 u$, где $L_0 = T_0/2^{m/2}\Gamma(1 + m/2)$.

Пусть для определенности предел выносливости имеет нормальное распределение. Задаемся постоянными параметрами нагружения и материала (σ_S, σ_R, m, m_R) и генерируем величину x, имеющую нормальное распределение с параметрами $b_0 = m_R/\sigma_S$, $\sigma_0 = \sigma_R/\sigma_S = k_R b_0$.

Путем задания большого числа реализации находим значение u и после статистической обработки определяем его закон распределения. Экспериментальные данные о рассеянии долговечности [2, 17] и проведенные расчеты дают основание принять для величины u логарифмически-нормальный закон распределения

$$P(u) = (\sqrt{2\pi}ud)^{-1} \exp[-(\ln u - c)^2/2d^2],$$

где параметры распределения c и d находятся через моменты величины u по формулам $c = 2\ln\bar{u} - 0.5\ln\langle u^2\rangle$, $d^2 = \ln\langle u^2\rangle - 2\ln\bar{u}$.

Через моменты величины u находим и моменты долговечности

$$\bar{T} = L_0\bar{u}, \quad \sigma_T^2 = L_0^2(\langle u^2\rangle - \bar{u}^2), \quad k_T = [\langle u^2\rangle/\bar{u}^2 - 1]^{1/2}.$$

Преобразованием плотности вероятности $P(u)$ находим распределение долговечности

$$P(T) = (\sqrt{2\pi}Td)^{-1} \exp[-(\ln T - A)^2/2d^2], \quad A = C + \ln L_0. \tag{25}$$

Определение гамма-процентного ресурса производится по формуле (15)

$$T = L_0 \exp(C + d\gamma_P).$$

Аналитическое решение задачи можно получить, если пренебречь рассеянием функции $Q(b_0^2, m+2)$. Вероятностные характеристики долговечности тогда будут вычисляться по формулам

$$\bar{T} = L_0\bar{y}/Q(b_0^2, m+2), \quad k_T = b_0^m m k_R/\bar{y}, \tag{26}$$

где $\bar{y} = b_0^m[1 + m(m-1)k_R^2/2]$.

На рис. 2 показан график зависимости коэффициента вариации долговечности от коэффициента вариации предела выносливости при различных b_0 для $m = 6$ (*1*, при $b_0 = 1$; *2*, при $b_0 = 2$; *3*, при $b_0 = 3$).

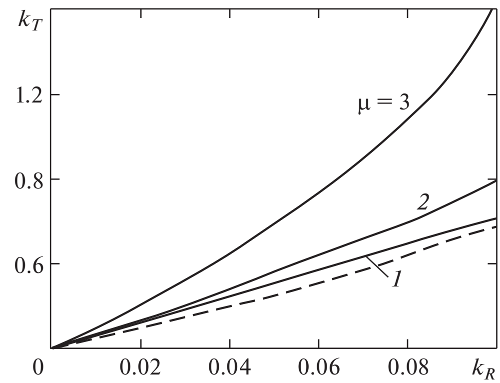


Рис. 2

Там же пунктирными линиями показана эта же зависимость без учета рассеяния функции $Q(b_0^2, m+2)$. Важно отметить, что в этом случае k_T не зависит от b_0. Такой же характер имеют кривые и при других m, хотя коэффициент вариации k_T увеличивается с ростом m.

Если в детали возникает плоское напряженное состояние с амплитудами нормальных S_σ и касательных S_τ напряжений, являющихся случайными функциями, то расчет долговечности производится с применением одного из критериев разрушения. Чаще всего используется эллиптическая зависимость, выраженная через эквивалентные напряжения $S_{\sigma e}$, $S_{\tau e}$

$$(S_{\sigma e}/R_{g\sigma})^2 + (S_{\tau e}/R_{g\tau})^2 = 1.$$

Эквивалентное напряжение найдем из условия равенства $\bar{v}$ единичному повреждению от эквивалентного напряжения

$$\bar{v}_{1e} = 1/N(s) = S_e^m/N_0 R_g^m.$$

Отсюда находим $S_{\sigma e} = I_\sigma^{1/m_\sigma}$, $S_{\tau e} = I_\tau^{1/m_\tau}$, где m_σ, m_τ – показатели кривой усталости при испытаниях по нормальным и касательным напряжениям.

Если на деталь действуют только нормальные напряжения, то ее долговечность можно определить по формуле (7) и соответствующий ей предел выносливости равен $R_{g\sigma} = (N_\sigma I_\sigma / a_\sigma N_{0\sigma})^{1/m_\sigma}$.

Число циклов до разрушения в общем случае нагружения $N = a_\sigma N_{0\sigma} = a_\tau N_{0\tau}$ находим $S_{\sigma e}/R_{g\sigma} = (N/N_\sigma)^{1/m_\sigma}$. Тогда критерий разрушения примет вид

$$(N/N_\sigma)^{2/m_\sigma} + (N/N_\tau)^{2/m_\tau} = 1. \tag{27}$$

Для многих материалов $m_\sigma = m_\tau = m$. Тогда из (27) имеем

$$N = \frac{N_\sigma N_\tau}{(N_\sigma^{2/m} + N_\tau^{2/m})^{m/2}}. \tag{28}$$

Плотность распределения долговечности определяется выражением (12). Чтобы найти параметры распределения, введем обозначения $z = \ln N$, $z_1 = \ln N_\sigma$, $z_2 = \ln N_\tau$ и прологарифмируем выражение (28)

$$z = z_1 + z_2 - 0.5m\ln(e^{2z_1/m} + e^{2z_2/m}).$$

Отсюда находим математическое ожидание

$$m_z = m_{z1} + m_{z2} - 0.5m\ln[\exp(2m_{z1}/m) + \exp(2m_{z2}/m)]. \quad (29)$$

Дисперсию z находим по приближенной формуле

$$D_z = d_1^2\sigma_{z1}^2 + d_2^2\sigma_{z2}^2, \quad (30)$$

где $d_1 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial z_1}\right)_m = 1 - \dfrac{1}{1 + (\bar{N}_\tau/\bar{N}_\sigma)^{2/m}}$; $d_2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial z_2}\right)_m = 1 - \dfrac{1}{1 + (\bar{N}_\sigma/\bar{N}_\tau)^{2/m}}$.

В этих формулах m_{z1}, m_{z2}, σ_{z1}^2, σ_{z2}^2 определяются экспериментально. При этом $\bar{N}_\sigma$, $\bar{N}_\tau$ определяются по формуле (13). Если экспериментально определены вероятностные характеристики $\bar{N}_\sigma$, $\bar{N}_\tau$, $\sigma_{N\sigma}$, $\sigma_{N\tau}$, то параметры распределения нормальных и касательных напряжений определяются по формуле (14).

После определения параметров распределения гамма-процентный ресурс деталей определяются по формуле (15).

Таким образом, в статье получены следующие новые научные результаты: **1.** На основе статистических закономерностей усталостного разрушения получены формулы для расчета надежности деталей машин по усталостному разрушению, когда расчетные и предельные напряжения представляют собой случайные величины с известными законами распределения. **2.** На основе скорректированной теории линейного суммирования повреждений получены соотношения для расчета долговечности деталей машин при случайных воздействиях с учетом рассеяния предела выносливости. **3.** Предложена методика расчета долговечности при случайном изменении компонент плоского напряженного состояния.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Серенсен С.В., Когаев В.П., Шнейдерович Р.М.* Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. М.: Машиностроение, 1975. 488 с.
2. *Болотин В.В.* Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1984. 312 с.
3. *Решетов Д.Н., Иванов А.С., Фадеев В.З.* Надежность машин. М.: Высшая школа, 1988. 238 с.
4. Проблемы надежности и ресурса в машиностроении / Под ред. К.В. Фролова и А.П. Гусенкова. М.: Машиностроение, 1986. 428 с.
5. *Беленький Д.М.* Теория надежности машин и металлоконструкций. М.: Феникс, 2004. 607 с.
6. *Tang J.* An efficient asymptotic approach for assessing fatigue reliability // Trans. ASME. J. Pressure Vessel Technol. 1999. V. 121. № 2. P. 220.
7. *Kumar Girish, Jain Vipul, Gandhi O.P.* Reliability and modeling of mechanical systems using stochastic Petri net. Conference: ASME 2011 Power Conference. Location: Denver, 2011 // Proceedings of the ASME Power Conference 2011. V. 2. P. 211.
8. *McDonald Mark, Zaman Kais, Mahadevan Sankaran*. Probabilistic analysis with sparse data // AIAA Journal. 2013. V. 51. № 2. P. 281.

9. *Zhao Yong Xiang.* A fatigue reliability analysis method including super long life regime // Int. J. Fatigue. 2012. V. 35. № 1. P. 79.
10. *Тамразян А.Г.* Расчет элементов конструкций при заданной надежности и нормальном распределении нагрузки и несущей способности // Вестн. МГСУ. 2012. № 10. С. 109.
11. *Гусев А.С., Щербаков В.И., Стародубцева С.А.* Расчет усталостной долговечности элементов конструкции при случайных процессах нагружения сложной структуры // Вестник машиностроения. 2015. № 12. С. 20.
12. *Березин И.И., Халтурин В.К., Абызов А.А.* Моделирование рабочих процессов и обеспечение надежности инженерных машин при многофакторной случайной загрузке во времени // Международная конференция по промышленной инженерии (ICIE). Челябинск, Россия, 2015. Серия книг: “Методология”. Т. 129. С. 851.
13. *Труханов В.М.* Математические модели роста уровня надежности технической системы с учетом управляющих воздействий, выраженных в виде вероятностей и наложенных ограничений // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 4. С. 39.
14. *Гриб В.В., Петрова И.М., Романов А.Н.* Оценка вероятности отказа механических систем моделирования технического состояния // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 5. С. 55.
15. *Бакиров Ж.Б.* Вероятностные методы расчета элементов конструкций. Караганда: Изд-во КарГТУ, 2001. 180 с.
16. *Бакиров Ж.Б.* Стохастические задачи механических колебаний. Караганда: Изд-во КарГТУ, 2012. 239 с.
17. *Гусев А.С.* Сопротивление усталости и живучесть конструкций при случайных нагрузках. М.: Машиностроение, 1989. 248 с.