Российская Академия Наук

Автоматика и Телемеханика

Журнал основан в 1936 году
Выходит 12 раз в год

3
МАРТ
Москва 2021

Учредители журнала:
Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б., Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Поляк Б.Т., Попков Ю.С., Рутковский В.Ю., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М., Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф., Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П., Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И., Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М., Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США), Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е., Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А., Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталев М.М., Цыбаков А.Б. (Франция), Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
Тел./факс: (495) 334-87-70
Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва
ООО «Объединённая редакция»

© Российская академия наук, 2021
© Редколлегия журнала «Автоматика и телемеханика» (составитель), 2021

Автоматика и телемеханика, № 3, 2021

Линейные системы

© 2021 г. **К.Р. АЙДА-ЗАДЕ, д-р физ.-мат. наук, член-корр. НАН Азербайджана (kamil_aydazade@rambler.ru)**
(Институт систем управления НАН Азербайджана;
Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку),
В.М. АБДУЛЛАЕВ, д-р физ.-мат. наук (vaqif_ab@rambler.ru)
(Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности;
Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку)

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ УПРАВЛЯЕМОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Исследуется задача оптимального управления, описываемая системой обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с краевыми условиями, содержащими точечные и интегральные значения фазовой переменной. В задаче определяются управления, участвующие в дифференциальных уравнениях, и значения правых частей нелокальных краевых условий. Исследованы необходимые условия существования и единственности решения краевой задачи, выпуклости целевого функционала, необходимые условия оптимальности оптимизируемых параметров в задаче управления. Полученные формулы для градиента целевого функционала задачи использованы для численного решения иллюстративной задачи. Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: градиент функционала, выпуклость функционала, нелокальные условия, условия оптимальности, многоточечные условия.

DOI: 10.31857/S0005231021030016

1. Введение

Статья посвящена исследованию задачи оптимального управления системой обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с нелокальными условиями, содержащими слагаемые с точечными и интегральными значениями фазовой функции.

Изучение нелокальных краевых задач было начато еще в [1–3] и продолжено в публикациях многих других исследователей [4–14]. Практическая важность и необходимость изучения нелокальных краевых задач и соответствующих задач управления объясняется тем, что полученная измерениями информация о состоянии объекта в какой-либо точке объекта или в какой-либо момент времени может охватывать состояние нескольких точек или целой окрестности точки или момента времени замера.

Отметим, что различные постановки задач оптимального управления системами с многоточечными и промежуточными условиями рассмотрены во

многих публикациях [15–18]. Для этих задач были получены условия оптимальности в различных формах [19–21] и предложены численные схемы решения включая случаи нелокальности самых дифференциальных (интегро-дифференциальных, нагруженных) уравнений [12, 22].

Данная статья отличается от ранее проведенных исследований в основном тем, что здесь оптимизируемыми являются сами значения правых частей нелокальных краевых условий. На практике такая задача возникает, например, при управлении динамическим объектом, в граничных точках которого имеют место нелокальные краевые условия, обусловленные какими-либо физическими законами, и дополнительно воздействуют источники с оптимизируемыми значениями параметров. В частности, можно привести пример оптимизации напряженного состояния одномерной механической конструкции, находящейся под оптимизируемой распределенной нагрузкой по всей длине конструкции и под оптимизируемыми внешними воздействиями на ее концы.

В статье получены условия существования и единственности решения нелокальной краевой задачи, выпуклости целевого функционала задачи, необходимые условия оптимальности для рассматриваемой задачи оптимального управления и оптимизации. Для получения формул для компонент градиента функционала предложено использовать две техники в зависимости от ранга матрицы коэффициентов при точечных значениях фазовой вектор-функции в нелокальных условиях. Одна техника использует идею метода условного градиента [23, 24], другая — метод Лагранжа [24]. Применение метода Лагранжа приводит к увеличению как числа условий, так и размерности вектора параметров, требующего определения. Поэтому авторы предпочитают, в зависимости от ранга матрицы условий, первый подход.

Результаты данной статьи могут быть использованы в задачах оптимального управления, описываемых нелокальными функциональными уравнениями, при применении к ним каких-либо методов аппроксимации (в частности, методов прямых) по пространственным или временной переменным.

В статье приведены результаты численных экспериментов на примере одной иллюстративной задачи. Для ее численного решения с применением методов оптимизации первого порядка использованы полученные в статье формулы для компонент градиента функционала.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача управления объектом, динамика которого описывается линейной системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = A_1(t)x(t) + A_2(t)u(t), \quad t \in [t^1, t^f], \tag{2.1}$$

с нелокальными (с неразделенными многоточечными и интегральными) условиями и с оптимизируемыми значениями правых частей:

$$\sum_{i=1}^{l_1} \alpha_i x(\tilde{t}^i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int\limits_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}} \beta_j(t)x(t)dt = \vartheta. \tag{2.2}$$

Здесь: $x(t) \in \mathrm{R}^n$ — фазовая переменная; $u(t) \in U \subset \mathrm{R}^r$ — управляющая вектор-функция из класса кусочно-непрерывных функций, допустимые значения которой принадлежат заданному выпуклому компактному множеству U; $\vartheta \in V \subset \mathrm{R}^n$ — вектор, значения которого определяются оптимизируемыми воздействиями внешних источников, V — заданные выпуклое и компактное множество. Заданными являются: кусочно-непрерывные размерности $n \times n$ $A_1(t)$, размерности $n \times r$ $A_2(t)$ и интегрируемые $\beta_j(t)$ размерности $n \times n$ матричные функции; постоянные матрицы α_i, $i = 1, 2, \ldots, l_1$, размерности $n \times n$; упорядоченные моменты времени $\tilde{t}^i, \hat{t}^j \in [t^1, t^f]$, причем $\tilde{t}^i \notin [\hat{t}^{2j-1}, \hat{t}^{2j}]$, $i = 1, 2, \ldots, l_1$, $j = 1, 2, \ldots, l_2$, при этом $t^1 = \tilde{t}^1$, $\tilde{t}^{l_1} = t^f$; l_1, l_2 — целые числа.

Целевым функционалом для нахождения оптимальных управления $u(t)$ и вектора параметров ϑ является

$$J(u, \vartheta) = \int\limits_{t^1}^{t^f} f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)dt + \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta) \to \min_{u(t) \in U, \vartheta \in V}. \tag{2.3}$$

Здесь $f^0(x, u, \vartheta, t)$, $\Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)$ — заданные непрерывно дифференцируемые по $x, \tilde{x}, \hat{x}, u, \vartheta$ функции и использованы обозначения:

$$\tilde{t} = \left(\tilde{t}^1, \tilde{t}^2, \ldots, \tilde{t}^{l_1}\right), \quad \hat{t} = \left(\hat{t}^1, \hat{t}^2, \ldots, \hat{t}^{2l_2}\right),$$

$$\tilde{x} = \left(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \ldots, \tilde{x}^{l_1}\right)^{\mathrm{T}} = \left(x\left(\tilde{t}^1\right), x\left(\tilde{t}^2\right), \ldots, x\left(\tilde{t}^{l_1}\right)\right)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{l_1 n},$$

$$\hat{x} = \left(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \ldots, \hat{x}^{2l_2}\right)^{\mathrm{T}} = \left(x\left(\hat{t}^1\right), x\left(\hat{t}^2\right), \ldots, x\left(\hat{t}^{2l_2}\right)\right)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{2l_2 n},$$

“T” — знак транспонирования.

Будем предполагать, что в (2.2) имеются n линейно независимых условий. В случае меньшего числа линейно независимых условий или, вообще, меньшего числа условий, например n_1, $n_1 < n$, тогда соответственно $\vartheta \in \mathrm{R}^{n_1}$. Это значит, что в задаче имеются $n - n_1$ свободных (незакрепленных) начальных условий. Тогда в условия (2.2) можно добавить еще оптимизируемые значения начальных условий для каких-либо $n - n_1$ компонент фазового вектора $x(t)$, расширив тем самым вектор $\vartheta \in \mathrm{R}^{n_1}$ до $\vartheta \in \mathrm{R}^n$.

3. Получение условий оптимальности

Далее будем предполагать, что для всех допустимых управлений $u(t)$ и параметров ϑ задача (2.1), (2.2) имеет решение, причем единственное. Для этого должно выполняться условие, приведенное в следующей теореме 1. В теореме 1 матрица $F(t, \tau)$ является фундаментальной матрицей решений системы (2.1), т.е. является решением матричной задачи Коши:

$$\dot{F}(t, \tau) = A_1(t)F(t, \tau), \quad t, \tau \in [t^1, t^f], \quad F(t^1, t^1) = E,$$

где E — n-мерная единичная матрица.

Теорема 1. Задача (2.1), (2.2) *для произвольных кусочно-непрерывных вектор функций* $u(t)$ *и вектора параметров* ϑ *имеет решение, причем единственное, если функции* $A_1(t)$, $A_2(t)$ *— кусочно-непрерывны,* $\beta_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, l_2$, *— интегрируемы и*

$$\operatorname{rank}\left[\sum_{i=1}^{l_1} \alpha_i F(\tilde{t}^i, t^1) + \sum_{j=1}^{l_2} \int\limits_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}} \beta_j(t) F(t, t^1) dt\right] = n. \tag{3.1}$$

Доказательства теорем 1, 2, 3 и 4 приведены в Приложении.

Имеет место следующая теорема 2.

Теорема 2. Пусть допустимые множества U, V *и функции* $f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)$ *и* $\Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)$ *по* $x, \tilde{x}, \hat{x}, u, \vartheta$ *выпуклы. Тогда функционал* $J(u, \vartheta)$ *является выпуклым. В случае если дополнительно одна из функций* $f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)$ *и* $\Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)$ *сильно выпукла, то функционал задачи также является сильно выпуклым.*

Исследуем дифференцируемость функционала (2.3) и получим формулы для компонент его градиента по оптимизируемым параметрам $u(t) \in \mathrm{R}^r$, $\vartheta \in \mathrm{R}^n$.

Производные $\partial f^0/\partial x$, $\partial f^0/\partial u$, $\partial f^0/\partial \vartheta$, $\partial \Phi/\partial \tilde{x}^i$, $\partial \Phi/\partial \hat{x}^j$ будем понимать как строки соответствующих размерностей. Для произвольных функций $f(t)$, определенных на отрезке $[t^1, t^f]$, используем обозначения:

$$f(t_\pm) = f(t \pm 0) = \lim_{\substack{\varepsilon \to +0 \\ \varepsilon \geq 0}} f(t \pm \varepsilon), \quad \Delta f(t) = f(t_+) - f(t_-),$$

а для удобства записи далее некоторых формул будем считать, что

$$f(t_+^f) = f(t_-^1) = 0,$$

а $\chi_{\left[\hat{t}^{2j-1}, \hat{t}^{2j}\right]}(t)$, $j = 1, 2, \ldots, l_2$, — характеристическая функция:

$$\chi_{\left[\hat{t}^{2j-1}, \hat{t}^{2j}\right]}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [\hat{t}^{2j-1}, \hat{t}^{2j}], \\ 1, & t \in [\hat{t}^{2j-1}, \hat{t}^{2j}], \qquad j = 1, 2, \ldots, l_2. \end{cases}$$

Пусть ранг расширенной матрицы $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l_1}]$ размерности $n \times l_1 n$ равен $\bar{n}$. Ясно, что

$$\operatorname{rank} \alpha = \bar{n} \leq n. \tag{3.2}$$

В случае $\bar{n} < n$ условия (2.2) за счет их линейной комбинации можно привести к такому виду, что последние $n - \bar{n}$ строк матрицы $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l_1}]$ будут нулевыми. При этом линейной комбинации подвергнутся и интегральные слагаемые в условиях (2.2). Но важно, что эти преобразования не нарушат выполнения условия (3.1) для существования и единственности решения

краевой задачи (2.1), (2.2) для произвольных пар (u, ϑ). Чтобы не вводить новые обозначения, пусть матрицы α_i, $i = 1, 2, \ldots, l_1$, имеют размерности $\bar{n} \times n$, а ранг их расширенной матрицы равен $\bar{n}$. Тогда ограничения (2.2) разобьем на две части: первые $\bar{n}$ ограничений запишем в виде

$$\sum_{i=1}^{l_1} \alpha_i x(\tilde{t}^i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int\limits_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}} \beta_j^1(t) x(t) dt = \vartheta^{(1)}, \tag{3.3}$$

а в последних $n - \bar{n}$ ограничениях будут отсутствовать точечные значения функции $x(t)$:

$$\sum_{j=1}^{l_2} \int\limits_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}} \beta_j^2(t) x(t) dt = \vartheta^{(2)}. \tag{3.4}$$

Здесь матрицы α_i, $\beta_j^1(t)$, $i = 1, 2, \ldots, l_1$, $j = 1, 2, \ldots, l_2$, имеют размерность $\bar{n} \times n$, а матрицы $\beta_j^2(t)$, $j = 1, 2, \ldots, l_2$, — размерность $(n - \bar{n}) \times n$, векторы $\vartheta^{(1)} \in \mathrm{R}^{\bar{n}}$, $\vartheta^{(2)} \in \mathrm{R}^{n-\bar{n}}$, $\vartheta = \left(\vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}\right) \in \mathrm{R}^n$.

В силу изложенного из расширенной матрицы α можно извлечь матрицу (минор) $\widehat{\alpha}$ ранга $\bar{n}$, образованную $\bar{n}$ столбцами матрицы α:

$$\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} \widehat{\alpha}^{11} & \cdots & \widehat{\alpha}^{1i} & \cdots & \widehat{\alpha}^{1\bar{n}} \\ \widehat{\alpha}^{21} & \cdots & \widehat{\alpha}^{2i} & \cdots & \widehat{\alpha}^{2\bar{n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\alpha}^{\bar{n}1} & \cdots & \widehat{\alpha}^{\bar{n}i} & \cdots & \widehat{\alpha}^{\bar{n}\bar{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\alpha}_{s_1}^{1,k_1} & \cdots & \widehat{\alpha}_{s_i}^{1,k_i} & \cdots & \widehat{\alpha}_{s_{\bar{n}}}^{1,k_{\bar{n}}} \\ \widehat{\alpha}_{s_1}^{2,k_1} & \cdots & \widehat{\alpha}_{s_i}^{2,k_i} & \cdots & \widehat{\alpha}_{s_{\bar{n}}}^{2,k_{\bar{n}}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\alpha}_{s_1}^{\bar{n},k_1} & \cdots & \widehat{\alpha}_{s_i}^{\bar{n},k_i} & \cdots & \widehat{\alpha}_{s_{\bar{n}}}^{\bar{n},k_{\bar{n}}} \end{pmatrix}.$$

Здесь k_i является номером столбца матрицы α_{s_i}, $1 \le s_i \le l_1$, $i = 1, 2, \ldots, \bar{n}$, включенного в качестве i-го столбца в матрицу $\widehat{\alpha}$, т.е. i-й столбец матрицы $\widehat{\alpha}$ является k_i-м столбцом матрицы α_{s_i}.

Пусть

$$\widehat{x} = \left(\widehat{x}^{\,1}, \widehat{x}^{\,2}, \ldots, \widehat{x}^{\,\bar{n}}\right)^{\mathrm{T}} =$$
$$= \left(x_{k_1}(\tilde{t}^{s_1}), x_{k_2}(\tilde{t}^{s_2}), \ldots, x_{k_{\bar{n}}}(\tilde{t}^{s_{\bar{n}}})\right)^{\mathrm{T}} = \left(\tilde{x}_{k_1}^{s_1}, \tilde{x}_{k_2}^{s_2}, \ldots, \tilde{x}_{k_{\bar{n}}}^{s_{\bar{n}}}\right)^{\mathrm{T}}$$

есть $\bar{n}$-мерный вектор, состоящий из компонент вектора $x(\tilde{t})$ и образованный из соответствующих матрице $\widehat{\alpha}$ значений x_j-х координат n-мерного вектора $x(t)$ в моменты времени $\tilde{t}^{s_j}$, $1 \le s_j \le l_1$, $j = 1, 2, \ldots, \bar{n}$.

Пусть $\breve{\alpha}$ и $\breve{x}$ есть остаточные матрица размера $(\bar{n} \times (l_1 n - \bar{n}))$ и $(l_1 n - \bar{n})$-мерный вектор, полученные удалением из матрицы α $\bar{n}$ столбцов, а из вектора $\tilde{x}$ $\bar{n}$ компонент, включенных соответственно в матрицу $\widehat{\alpha}$ и вектор $\widehat{x}$.

Пусть i-й столбец матрицы $\breve{\alpha}$ является g_i-м столбцом матрицы α_{q_i}, $1 \le g_i \le n$, $1 \le q_i \le l_1$, $i = 1, 2, \ldots, (l_1 n - \bar{n})$:

$$\breve{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{g_1}^{1,q_1} & \cdots & \alpha_{g_i}^{1,q_i} & \cdots & \alpha_{g_{(l_1 n-\bar{n})}}^{1,q_{(l_1 n-\bar{n})}} \\ \alpha_{g_1}^{2,q_1} & \cdots & \alpha_{g_i}^{2,q_i} & \cdots & \alpha_{g_{(l_1 n-\bar{n})}}^{2,q_{(l_1 n-\bar{n})}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{g_1}^{\bar{n},q_1} & \cdots & \alpha_{g_i}^{\bar{n},q_i} & \cdots & \alpha_{g_{(l_1 n-\bar{n})}}^{\bar{n},q_{(l_1 n-\bar{n})}} \end{pmatrix},$$

$$\breve{x} = \left(x_{g_1}(\tilde{t}^{q_1}), x_{g_2}(\tilde{t}^{q_2}), \ldots, x_{g_{(l_1 n-\bar{n})}}(\tilde{t}^{q_{(l_1 n-\bar{n})}}) \right)^{\mathrm{T}} = \left(\tilde{x}_{g_1}^{q_1}, \tilde{x}_{g_2}^{q_2}, \ldots, \tilde{x}_{g_{(l_1 n-\bar{n})}}^{q_{(l_1 n-\bar{n})}} \right)^{\mathrm{T}}.$$

Ясно, что $(g_i, q_i) \ne (s_j, k_j)$, $j = 1, 2, \ldots, \bar{n}$, $i = 1, 2, \ldots, (l_1 n - \bar{n})$.

Для простоты записи формул $\bar{n}$-мерную квадратную матрицу $\widehat{\alpha}^{\,-1}$ обозначим через C с элементами c_{ij}, а матрицу $(-\widehat{\alpha}^{\,-1}\breve{\alpha})$ размера $(\bar{n} \times (l_1 n - \bar{n}))$ — через B с элементами b_{ij}.

Далее отдельно рассмотрим случаи, когда $\bar{n} = n$ и $\bar{n} < n$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия: функции $A_1(t)$, $A_2(t)$ — кусочно-непрерывны; $f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)$ и $\Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)$ — непрерывно дифференцируемые по $x, \tilde{x}, \hat{x}, u, \vartheta$; краевая задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение при произвольных функциях $u(t) \in U$ и параметрах $\vartheta \in V$.

Тогда функционал (2.3) дифференцируем по управлению $u(t)$ и параметрам ϑ правых частей нелокальных краевых условий, а градиент функционала задачи при $\operatorname{rank}\alpha = \operatorname{rank}\widehat{\alpha} = n$ *определяется формулами*

$$\operatorname{grad}_u J(u, \vartheta) = -A_2^{\mathrm{T}}(t)\psi(t) + \left(\frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial u} \right)^{\mathrm{T}}, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial J(u, \vartheta)}{\partial \vartheta_k} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{k_i}^{s_i}} + \Delta\psi_{k_i}(\tilde{t}^{s_i}) \right] c_{ik} + \tag{3.6}$$

$$+ \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta_k} + \int_{t^1}^{t^f} \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial \vartheta_k} dt, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где вектор-функция $\psi(t)$, непрерывно-дифференцируемая почти всюду на отрезке $[t^1, t^f]$ кроме точек $\tilde{t}^i, \hat{t}^j$, $i = 2, 3, \ldots, l_1 - 1$, $j = 1, 2, \ldots, 2l_2$, является решением сопряженной задачи:

$$\dot{\psi}(t) = -A_1^{\mathrm{T}}(t)\psi(t) + \left(\frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial x} \right)^{\mathrm{T}} + \tag{3.7}$$

$$+ \sum_{j=1}^{l_2} \chi_{\left[\hat{t}^{2j-1}, \hat{t}^{2j}\right]}(t) \beta_j^{\mathrm{T}}(t) (\widehat{\alpha}^{\,-1})^{\mathrm{T}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{k_i}^{s_i}} + \psi_{k_i}(\tilde{t}_-^{s_i}) - \psi_{k_i}(\tilde{t}_+^{s_i}) \right),$$

$$\psi_{g_\nu}(\tilde{t}_+^{q_\nu}) = \psi_{g_\nu}(\tilde{t}_-^{q_\nu}) + \sum_{i=1}^{n} b_{i\nu}\left(\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}_{k_i}^{s_i}} + \psi_{k_i}(\tilde{t}_-^{s_i}) - \psi_{k_i}(\tilde{t}_+^{s_i})\right) + \\ + \frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}_{g_\nu}^{q_\nu}}, \quad \nu = 1,2,\ldots,l_1 n, \tag{3.8}$$

$$\psi_i(\hat{t}_+^j) = \psi_i(\hat{t}_-^j) + \frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\hat{x}_i^j}, \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad j = 1,2,\ldots,2l_2. \tag{3.9}$$

Из теоремы 1 можно получить формулы для более простых частных случаев, когда ранги каких-либо из матриц α_i, $i = 1,2,\ldots,l_1$, равны n и они могут быть приняты в качестве матрицы $\widehat{\alpha}$.

Следствие 1. Если $\operatorname{rank}\alpha_1 = n$, *а следовательно, существует* α_1^{-1}, *то для компонент градиента функционала по* ϑ *можно получить формулу*

$$\operatorname{grad}_\vartheta J(u,\vartheta) = -(\alpha_1^{-1})^{\mathrm{T}}\left[\psi(t^1) - \frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^1}\right] + \\ + \frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\vartheta} + \int\limits_{t^1}^{t^f}\frac{\partial f^0(x(t),u(t),\vartheta,t)}{\partial\vartheta}dt, \tag{3.10}$$

где сопряженная краевая задача имеет вид

$$\dot{\psi}(t) = -A_1^{\mathrm{T}}(t)\psi(t) + \left(\frac{\partial f^0(x(t),u(t),\vartheta,t)}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} + \\ + \sum_{j=1}^{l_2}\chi_{[\hat{t}^{2j-1},\hat{t}^{2j}]}(t)\beta_j^{\mathrm{T}}(t)\left(\alpha_1^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\left(\psi(t^1) - \frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^1}\right), \tag{3.11}$$

$$\alpha_{l_1}^{\mathrm{T}}(\alpha_1^{-1})^{\mathrm{T}}\psi(t^1) + \psi(t^f) = -\frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^{l_1}} + \alpha_{l_1}^{\mathrm{T}}(\alpha_1^{-1})^{\mathrm{T}}\frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^1}, \tag{3.12}$$

$$\psi(\tilde{t}_+^i) = \psi(\tilde{t}_-^i) + \alpha_i^{\mathrm{T}}(\alpha_1^{-1})^{\mathrm{T}}\psi(t^1) + \frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^i} - \\ - \alpha_i^{\mathrm{T}}(\alpha_1^{-1})^{\mathrm{T}}\frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^1}, \quad i = 2,3,\ldots,l_1-1, \tag{3.13}$$

$$\psi(\hat{t}_+^j) = \psi(\hat{t}_-^j) + \frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\hat{x}^j}, \quad j = 1,2,\ldots,2l_2. \tag{3.14}$$

Следствие 2. Если $\operatorname{rank}\alpha_{l_1} = n$, *то для компонент градиента функционала по* ϑ *имеет место формула*

$$\operatorname{grad}_\vartheta J(u,\vartheta) = -(\alpha_{l_1}^{-1})^{\mathrm{T}}\left[\psi(t^f) - \frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^{l_1}}\right] + \\ + \frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\vartheta} + \int\limits_{t^1}^{t^f}\frac{\partial f^0(x(t),u(t),\vartheta,t)}{\partial\vartheta}dt, \tag{3.15}$$

а сопряженная краевая задача имеет вид:

$$\dot{\psi}(t) = -A_1^{\mathrm{T}}(t)\psi(t) + \left(\frac{\partial f^0(x(t),u(t),\vartheta,t)}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} + \tag{3.16}$$

$$+\sum_{j=1}^{l_2}\chi_{\left[\hat{t}^{2j-1},\hat{t}^{2j}\right]}(t)\beta_j^{\mathrm{T}}(t)(\alpha_{l_1}^{-1})^{\mathrm{T}}\left(-\psi(t^f) - \frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}_{l_1}}\right),$$

$$\psi(t^1) + \alpha_1^{\mathrm{T}}(\alpha_{l_1}^{-1})^{\mathrm{T}}\psi(t^f) = \frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^1} - \alpha_1^{\mathrm{T}}(\alpha_{l_1}^{-1})^{\mathrm{T}}\frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^{l_1}}, \tag{3.17}$$

$$\psi(\tilde{t}_+^i) = \psi(\tilde{t}_-^i) - \alpha_i^{\mathrm{T}}(\alpha_{l_1}^{-1})^{\mathrm{T}}\psi(t^f) + \tag{3.18}$$

$$+\frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^i} - \alpha_i^{\mathrm{T}}(\alpha_{l_1}^{-1})^{\mathrm{T}}\frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^{l_1}}, \quad i = 2,3,\ldots,l_1-1,$$

$$\psi(\hat{t}_+^j) = \psi(\hat{t}_-^j) + \frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\hat{x}^j}, \quad j = 1,2,\ldots,2l_2. \tag{3.19}$$

Следствие 3. Если обратима одна из матриц $\alpha_s, 2 \le s \le l_1 - 1$, то

$$\mathrm{grad}_{\vartheta} J(u,\vartheta) = -(\alpha_s^{-1})^{\mathrm{T}}\left[\left(\psi(\tilde{t}_-^s) - \psi(\tilde{t}_+^s)\right) - \frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^s}\right] + \tag{3.20}$$

$$+\frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\vartheta} + \int\limits_{t^1}^{t^f}\frac{\partial f^0(x(t),u(t),\vartheta,t)}{\partial\vartheta}dt,$$

а сопряженная краевая задача имеет вид:

$$\dot{\psi}(t) = -A_1^{\mathrm{T}}(t)\psi(t) + \left(\frac{\partial f^0(x(t),u(t),\vartheta,t)}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} + \tag{3.21}$$

$$+\sum_{j=1}^{l_2}\chi_{\left[\hat{t}^{2j-1},\hat{t}^{2j}\right]}(t)\beta_j^{\mathrm{T}}(t)(\alpha_s^{-1})^{\mathrm{T}}\left(-\left(\psi(\tilde{t}_-^s) - \psi(\tilde{t}_+^s)\right) - \frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^s}\right),$$

$$\psi(t^1) = \alpha_1^{\mathrm{T}}(\alpha_s^{-1})^{\mathrm{T}}\left(\psi(\tilde{t}_-^s) - \psi(\tilde{t}_+^s)\right) + \tag{3.22}$$

$$+\frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^1}\alpha_1^{\mathrm{T}}(\alpha_s^{-1})^{\mathrm{T}}\frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^s},$$

$$\psi(t^f) = -\alpha_{l_1}^{\mathrm{T}}(\alpha_s^{-1})^{\mathrm{T}}\left(\psi(\tilde{t}_-^s) - \psi(\tilde{t}_+^s)\right) - \frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^{l_1}} + \tag{3.23}$$

$$+\alpha_{l_1}^{\mathrm{T}}(\alpha_s^{-1})^{\mathrm{T}}\frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^s},$$

$$\psi(\tilde{t}^i_+) = \psi(\tilde{t}^i_+) + \alpha_i^{\mathrm{T}}(\alpha_s^{-1})^{\mathrm{T}}\left(\psi(\tilde{t}^s_-) - \psi(\tilde{t}^s_+)\right) + \frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^i} - \tag{3.24}$$

$$- \alpha_i^{\mathrm{T}}(\alpha_s^{-1})^{\mathrm{T}}\frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^s}, \quad i = 2,3,\ldots,l_1-1, \quad i \neq s,$$

$$\psi(\hat{t}^j_+) = \psi(\hat{t}^j_-) + \frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\hat{x}^j}, \quad j = 1,2,\ldots,2l_2. \tag{3.25}$$

Теперь рассмотрим случай, когда $\mathrm{rank}\alpha = \bar{n} < n$.

Теорема 4. Пусть выполнены все условия, приведенные в теореме 3, и $\mathrm{rank}\alpha = \bar{n} < n$.

Тогда функционал (2.3) *дифференцируем по управлению* $u(t)$ *и параметрам* ϑ *правых частей нелокальных краевых условий, градиент функционала по управлению* $u(t)$ *определяется формулой* (3.5), *а по параметрам* $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)$ *— следующими формулами:*

$$\frac{\partial J(u,\vartheta)}{\partial\vartheta_k^{(1)}} = \sum_{i=1}^{\bar{n}}\left[\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^{s_i}_{k_i}} + \Delta\psi_{k_i}(\tilde{t}^{s_i})\right]c_{ik} + \tag{3.26}$$

$$+ \frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\vartheta_k^{(1)}} + \int\limits_{t^1}^{t^f}\frac{\partial f^0(x(t),u(t),\vartheta,t)}{\partial\vartheta_k^{(1)}}dt, \quad k = 1,2,\ldots,\bar{n},$$

$$\frac{\partial J(u,\vartheta)}{\partial\vartheta_k^{(2)}} = -\lambda_k + \frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\vartheta_k^{(2)}} + \tag{3.27}$$

$$+ \int\limits_{t^1}^{t^f}\frac{\partial f^0(x(t),u(t),\vartheta,t)}{\partial\vartheta_k^{(2)}}dt, \quad k = 1,2,\ldots,(n-\bar{n}),$$

где $\psi(t) \in \mathrm{R}^n$, $\lambda \in \mathrm{R}^{\bar{n}}$ *удовлетворяют условиям сопряженной задачи:*

$$\dot{\psi}(t) = -A_1^{\mathrm{T}}(t)\psi(t) + \left(\frac{\partial f^0(x(t),u(t),\vartheta,t)}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} - \tag{3.28}$$

$$- \sum_{j=1}^{l_2}\chi_{\left[\hat{t}^{2j-1},\hat{t}^{2j}\right]}(t)(\beta_j^2(t))^{\mathrm{T}}\lambda +$$

$$+ \sum_{j=1}^{l_2}\chi_{\left[\hat{t}^{2j-1},\hat{t}^{2j}\right]}(t)(\beta_j^1(t))^{\mathrm{T}}(\widehat{\alpha}^{-1})^{\mathrm{T}} \times$$

$$\times \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^{s_i}_{k_i}} + \psi_{k_i}(\hat{t}^{s_i}_-) - \psi_{k_i}(\hat{t}^{s_i}_+)\right)\right),$$

$$\psi_{g_\nu}(\tilde{t}_+^{q_\nu}) = \psi_{g_\nu}(\tilde{t}_-^{q_\nu}) + \sum_{i=1}^{\bar{n}} b_{i\nu} \left(\frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{k_i}^{s_i}} + \psi_{k_i}(\tilde{t}_-^{s_i}) - \psi_{k_i}(\tilde{t}_+^{s_i}) \right) + \\ + \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}_{g_\nu}^{q_\nu}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, (l_1 n - \bar{n}), \tag{3.29}$$

$$\psi_i(\hat{t}_+^j) = \psi_i(\hat{t}_-^j) + \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \hat{x}_i^j}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, 2l_2. \tag{3.30}$$

Отметим частный случай, когда $\bar{n} = 0$. Получение формул для компонент градиента по ϑ в этом случае упрощается, так как для всех условий (2.2) будет использован метод Лагранжа, что приведет, конечно, к увеличению размерности задачи за счет увеличения размера вектора λ до n, т.е. $\lambda \in \mathrm{R}^n$. Компоненты градиента функционала, пользуясь выкладками, приведенными в доказательстве теоремы 4 по отношению условий (3.4), можно получить в виде

$$\operatorname{grad}_\vartheta J(u, \vartheta) = \int_{t^1}^{t^f} \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial \vartheta} dt + \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta} - \lambda. \tag{3.31}$$

Формула для $\operatorname{grad}_u J(u, \vartheta)$ будет такой же, как в (3.5), а $\psi(t)$ и λ являются решением сопряженной краевой задачи с $2n$ условиями

$$\dot{\psi}(t) = -A_1^{\mathrm{T}}(t)\psi(t) + \sum_{j=1}^{l_2} \chi_{\left[\hat{t}^{2j-1}, \hat{t}^{2j}\right]}(t)(\beta_j(t))^{\mathrm{T}}\lambda + \\ + \left(\frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial x} \right)^{\mathrm{T}}, \tag{3.32}$$

$$\psi(t^1) = \frac{\partial \Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^1} + \alpha_1^{\mathrm{T}}\lambda, \tag{3.33}$$

$$\psi(t^f) = -\frac{\partial \Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^{l_1}} - \alpha_{l_1}^{\mathrm{T}}\lambda \tag{3.34}$$

и условиями скачка:

$$\psi(\tilde{t}_+^i) = \psi(\tilde{t}_-^i) + \frac{\partial \Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^i} + \alpha_i^{\mathrm{T}}\lambda, \quad i = 2, 3, \ldots, l_1 - 1, \tag{3.35}$$

$$\psi(\hat{t}_+^j) = \psi(\hat{t}_-^j) + \frac{\partial \Phi^{\mathrm{T}}(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \hat{x}^j}, \quad j = 1, 2, \ldots, 2l_2. \tag{3.36}$$

Формулы (3.32)–(3.36) отличаются от формул, приведенных в теоремах 3 и 4, размерностью параметров и числом условий, участвующих в сопряженной задаче. В приведенных в теореме 3 формулах для случая $\operatorname{rank}\alpha = \bar{n} = n$

число краевых условий для сопряженной переменной было равно n, а неизвестных параметров не имелось. В случае $\bar{n} < n$ в формулах (3.27), (3.28) и (3.31)–(3.34) участвует $(n - \bar{n})$-мерный вектор множителей Лагранжа λ, для определения которого имеются еще дополнительные $n - \bar{n}$ краевых условий, общее число которых равно $2n - \bar{n}$.

Замечание. Во многих практических задачах в условии (2.2) оптимизируемыми являются не все компоненты вектора $\vartheta \in \mathrm{R}^n$, а некоторая его часть. В этом случае из приведенных формул градиента функционала необходимо использовать те, которые соответствуют оптимизируемым параметрам.

Теперь сформулируем необходимые условия оптимальности в задаче (2.1)–(2.3).

Теорема 5. Пусть функционал задачи (2.1)–(2.3) *дифференцируем, допустимые множество U кусочно-непрерывных управлений $u(t)$ и множество V параметров ϑ правых частей краевых условий* (2.2) *— выпуклы. Тогда выполнение условий*

$$\langle \mathrm{grad}_u J(u^*, \vartheta^*), u(t) - u^*(t) \rangle \geq 0, \tag{3.37}$$

$$\langle \mathrm{grad}_\vartheta J(u^*, \vartheta^*), \vartheta - \vartheta^* \rangle \geq 0, \tag{3.38}$$

почти для всех $t \in [t^1, t^f]$ необходимо и достаточно для оптимальности тройки $(u^*(t), \vartheta^*, x^*(t))$, где $\mathrm{grad}_u J(u^*, \vartheta^*)$ определяется из формулы (3.5), *а $\mathrm{grad}_\vartheta J(u^*, \vartheta^*)$ определяется в зависимости от ранга расширенной матрицы $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l_1}]$ одной из формул* (3.6), (3.10), (3.15), (3.20), (3.26), (3.27) *или* (3.31).

Используемое в формулах обозначение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение в соответствующих пространствах [24].

Доказательство теоремы следует из выпуклости допустимой области V и выпуклости и дифференцируемости целевого функционала $J(u, \vartheta)$ (см. [23, 24]).

4. Схема численного решения задачи и результаты компьютерных экспериментов

Пользуясь полученными формулами для компонент градиента целевого функционала, для численного решения задачи можно использовать известные итерационные методы оптимизации первого порядка. В случае если допустимые множества оптимизируемых управлений U и параметров V имеют простую структуру (параллелепипед, шар и т.п.), то эффективно использовать метод проекции градиента [23, 24]:

$$\begin{gathered}(u(t))^{k+1} = P_U \left[(u(t))^k - \alpha \, \mathrm{grad}_u J(u^k, \vartheta^k) \right], \\ \vartheta^{k+1} = P_V \left[\vartheta^k - \alpha \, \mathrm{grad}_\vartheta J(u^k, \vartheta^k) \right], \\ \alpha_k = \arg\min_{\alpha \geq 0} J(P_U \left(u^k - \alpha \mathrm{grad}_u J(u^k, \vartheta^k) \right), \\ P_V(\vartheta^k - \alpha \mathrm{grad}_\vartheta J(u^k, \vartheta^k))), \quad k = 0, 1, \ldots\end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь $P_U(u)$ и $P_V(\vartheta)$ — операторы проектирования управления $u(t)$ и параметра ϑ на допустимые множества соответственно U и V, $\alpha_k \geq 0$ — шаг одномерной минимизации.

В случае если допустимое множество V задано в общем виде с помощью равенств и неравенств

$$V = \{\vartheta \in \mathrm{R}^n : g_i(\vartheta) \leq 0, h_j(\vartheta) = 0, i = 1, 2, \ldots, m_1, j = 1, 2, \ldots, m_2\},$$

то можно использовать, например, методы штрафных функций [23, 24]. При этом в приведенных выше формулах несущественно изменятся только выражения для компонент градиента функционала по ϑ за счет добавления в функцию $\Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)$ штрафного члена в качестве слагаемого.

В случае отсутствия ограничений на оптимизируемые параметры можно использовать какие-либо эффективные численные методы безусловной оптимизации, например методы сопряженных градиентов [23, 24].

Для численного решения систем дифференциальных уравнений с многоточечными условиями как для прямой задачи (2.1), (2.2), так и для сопряженной задачи при заданных управлении $u(t)$ и векторе параметров ϑ можно использовать метод сдвига условий, предложенный в публикациях авторов [8, 9, 14, 25]. Другой подход к численному решению задачи (2.1), (2.2) заключается в том, что сначала введением новых $l_2 n$ фазовых переменных и добавлением к исходной системе (2.1) $l_2 n$ дифференциальных уравнений в граничных условиях интегральные слагаемые заменяются точечными. Далее, полученная задача относительно системы дифференциальных уравнений $(l_2 + 1)n$-го порядка с $(l_1 + 2l_2)$ промежуточными значениями фазовой переменной в краевых условиях, в соответствии с методом, предложенным в [26], за счет увеличения порядка системы дифференциальных уравнений в $(l_1 + 2l_2)$ раз приводится к двухточечной задаче, для решения которой можно использовать методы прогонки [26, 27]. Размерность полученной задачи по сравнению с исходной в итоге увеличивается в $(l_1 + 2l_2)(l_2 + 1)$ раз. При этом соответственно увеличатся порядки вспомогательных задач Коши, используемых в методах прогонки для решения нелокальных краевых задач. Применение такого подхода для решения задач оптимального управления, учитывая необходимость многократного решения прямой и сопряженной краевых задач, как было показано в [22], неэффективно.

Возможен частный, но важный случай, когда $A_1(t) = \mathrm{const}$, $t \in [t^1, t^f]$. Тогда и фундаментальная матрица $\Phi(t, \tau) = \mathrm{const}$, $t \in [t^1, t^f]$, и ее одноразовое вычисление не требует больших вычислительных затрат и она занимает малый объем памяти в отличие от хранения фундаментальной матрицы неавтономной системы. В этом случае использование формулы Коши для решения краевых задач (2.1), (2.2) при произвольно заданных допустимых управлениях $u(t)$ и параметрах ϑ приводит к одноразовому решению алгебраической системы порядка n, получаемой из краевых условий, и задачи Коши с использованием начального условия, полученного из алгебраической системы. Поэтому в случае автономных систем, т.е. $A_1(t) = \mathrm{const}$, использование каких-либо схем метода прогонки при решении задач оптимального управления, требующих многократного решения краевых задач, неэффективно.

Задача. Приведем результаты численных экспериментов, полученные при решении задачи оптимального управления, описываемой системой дифференциальных уравнений

$$(4.2)\quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + u - 6\cos(8t) - 22\sin(8t) - 4t^2 + 4t + 4, \\ \dot{x}_2(t) = tx_1(t) + x_2(t) - (24 - 2t)\cos(8t) - 3\sin(8t) - 2t^3 + t^2 - 1, \end{cases} \quad t \in [0, 1],$$

с нелокальными условиями

$$(4.3)\qquad \begin{cases} x_1(0) + x_1(0{,}5) + x_2(1) + \displaystyle\int\limits_{0{,}6}^{0{,}8} (x_1(t) + 2x_2(t))\, dt = \vartheta_1, \\ \displaystyle\int\limits_{0{,}2}^{0{,}4} (x_1(t) - x_2(t))\, dt = \vartheta_2. \end{cases}$$

Имеются ограничения на оптимизируемые параметры:

$$-3 \le \vartheta_1 \le 3, \quad -2 \le \vartheta_2 \le 2, \quad -5 \le u(t) \le 5.$$

Целевой функционал имеет вид

$$(4.4)\quad J(u, \vartheta) = \int\limits_0^1 [x_1(t) + x_2(t) - u(t)]^2\, dt + \delta \cdot \Big[(\vartheta_1 + 0{,}24)^2 + (\vartheta_2 + 1{,}17)^2 + \\ + (x_2(0{,}5) + 1{,}52)^2 + (x_1(1) + 0{,}29)^2 + (x_2(1) - 2{,}97)^2\Big] \to \min.$$

Здесь: $l_1 = 3$, $t^1 = \tilde{t}^1 = 0$, $\tilde{t}^2 = 0{,}5$, $t^f = \tilde{t}^3 = 1$, $l_2 = 2$, $\hat{t}^1 = 0{,}2$, $\hat{t}^2 = 0{,}4$, $\hat{t}^3 = 0{,}6$, $\hat{t}^4 = 0{,}8$, $\delta = 0{,}01$.

Сопряженная задача (3.28) имеет вид

$$(4.5)\qquad \begin{cases} \dot{\psi}_1(t) = -2\psi_1(t) - t\psi_2(t) + \\ \quad + \lambda\chi_{[0{,}2,\ 0{,}4]}(t) + \psi_1(0)\chi_{[0{,}6,\ 0{,}8]}(t) + 2(x_1(t) + x_2(t) - u(t)), \\ \dot{\psi}_2(t) = -\psi_1(t) - \psi_2(t) - \\ \quad - \lambda\chi_{[0{,}2,\ 0{,}4]}(t) + 2\psi_1(0)\chi_{[0{,}6,\ 0{,}8]}(t) + 2(x_1(t) + x_2(t) - u(t)). \end{cases}$$

В условиях (4.3) каждая из матриц

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет ранг, равный 1. Расширенная матрица

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

тоже имеет ранг, равный 1. Это соответствует рассмотренному выше случаю в теореме 4. Матрицу $\hat{\alpha}$ составим из первого столбца и первой строки матрицы α_1:

$$\widehat{\alpha} = (1), \quad \breve{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это значит, что в формулах (3.29), (3.30) индексы $(k_i; s_i)$, $i = 1$, и $(g_\nu; q_\nu)$, $\nu = 1, 2, 3, 4, 5$, имеют следующие значения:

$$\begin{gathered}(k_1; s_1) = (1; 1), \quad (g_1; q_1) = (2; 1), \quad (g_2; q_2) = (1; 2),\\ (g_3; q_3) = (2; 2), \quad (g_4; q_4) = (1; 3), \quad (g_5; q_5) = (2; 3).\end{gathered}$$

Тогда для матриц B и C имеем:

$$B = -\widehat{\alpha}^{\,-1}\breve{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \widehat{\alpha}^{\,-1} = (1).$$

Для элементов векторов $\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^i}$, $i = 1, 2, 3$, имеем:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^{s_1}_{k_1}} = \frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^1_1} = 0,\\
&\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^{q_1}_{g_2}} = \frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^1_2} = 0,\\
&\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^{q_2}_{g_2}} = \frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^2_1} = 0,\\
&\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^{q_3}_{g_3}} = \frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^2_2} = 2\left(x_2(0{,}5) + 1{,}52\right),\\
&\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^{q_4}_{g_4}} = \frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^3_1} = 2\left(x_1(1) + 0{,}29\right),\\
&\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^{q_5}_{g_5}} = \frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^3_2} = 2\left(x_2(1) - 2{,}97\right),\\
&\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\hat{x}^j_i} = 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}$$

Тогда условия (3.29) и (3.30)

$$\begin{gathered}
\psi_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu}_+) = \psi_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu}_-) + b_{1\nu}\left(\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^{s_1}_{k_1}} + \psi_{k_1}(\tilde{t}^{s_1}_-) - \psi_{k_1}(\tilde{t}^{s_1}_+)\right) +\\
+ \frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^{q_\nu}_{g_\nu}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, 5,\\
\psi_i(\hat{t}^j_+) = \psi_i(\hat{t}^j_-) + \frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\hat{x}^j_i}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3, 4,
\end{gathered}$$

примут вид:

$$
(4.6)\qquad \begin{cases} \psi_1(0)+\psi_2(1)=-2(x_2(1)-2{,}97),\\ \psi_2(0)=0,\\ \psi_1(1)=-2(x_1(1)+0{,}29),\\ \psi_1(0{,}5^+)=\psi_1(0{,}5^-)+\psi_1(0),\\ \psi_2(0{,}5^+)=\psi_2(0{,}5^-)+2(x_2(0{,}5)+1{,}52),\\ \psi_i(\hat{t}^j_+)=\psi_i(\hat{t}^j_-),\quad i=1,2,\quad j=1,2,3,4. \end{cases}
$$

Компоненты градиента функционала по $u(t)$ согласно формуле (3.5) определяются в виде

$$
(4.7)\qquad \operatorname{grad}_u J(u,\vartheta)=-\psi_1(t)-2(x_1(t)+x_2(t)-u(t)).
$$

Компоненты градиента функционала по вектору ϑ согласно формулам (3.26), (3.27)

$$
\frac{\partial J(u,\vartheta)}{\partial\vartheta_1^{(1)}}=\left[\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}_{k_1}^{s_1}}+\Delta\psi_{k_1}(\tilde{t}^{s_1})\right]c_{11}+\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\vartheta_1^{(1)}}+
$$

$$
+\int\limits_0^1\frac{\partial f^0(x(t),u(t),\vartheta,t)}{\partial\vartheta_1^{(1)}}dt,
$$

$$
\frac{\partial J(u,\vartheta)}{\partial\vartheta_2^{(2)}}=-\lambda+\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\vartheta_2^{(2)}}+\int\limits_0^1\frac{\partial f^0(x(t),u(t),\vartheta,t)}{\partial\vartheta_2^{(2)}}dt,
$$

определяются так:

$$
(4.8)\qquad \frac{\partial J(u,\vartheta)}{\partial\vartheta_1}=-\psi_1(0)+2(\vartheta_1+0{,}24),\qquad \frac{\partial J(u,\vartheta)}{\partial\vartheta_2}=-\lambda+2(\vartheta_2+1{,}17).
$$

Итерационная процедура метода проекции градиента (4.1) проводилась с точностью по функционалу $\varepsilon=10^{-5}$ из разных начальных точек $(u^{(0)}(t),\vartheta^{(0)})$. Вспомогательные задачи Коши, используемые методом сдвига условий [8] как для решения прямой (4.2)–(4.3), так и сопряженной (4.5)–(4.6) задач, решались методом Рунге–Кутты четвертого порядка с различными шагами $h=0{,}01,\ 0{,}02,\ 0{,}05$.

Проводилось сравнение значений компонент градиента по параметрам ϑ, вычисленных при заданном управлении $u=u(t)$ по формуле (4.8) и с использованием конечноразностной центральной схемы:

$$
(4.9)\qquad \frac{\partial J(u,\vartheta)}{\partial\vartheta_i}\approx\frac{J(u,\vartheta+\varepsilon e_i)-J(u,\vartheta-\varepsilon e_i)}{2\varepsilon},\quad i=1,2,
$$

где векторы $e_1=(1;0), e_2=(0;1)$.

Таблица 1. Значения функционала и нормированных градиентов функционала по параметру ϑ, вычисленные в разных точках и шагах интегрирования

№	Значения параметров $\vartheta^{(0)}$	Шаг h	Значения нормированных градиентов		Значения функционала $J(u^{(0)}, \vartheta^{(0)})$
			$\mathrm{grad}^{(analyt.)}_{\vartheta,norm.} J(u^{(0)}, \vartheta^{(0)})$	$\mathrm{grad}^{(differ.)}_{\vartheta,norm.} J(u^{(0)}, \vartheta^{(0)})$	
1	(–0,125; 1,5)	0,05	(0,07271; 0,99735)	(0,05452; 0,99990)	390,43906819
		0,02	(0,07273; 0,99735)	(0,05992; 0,99892)	392,72670193
		0,01	(0,07273; 0,99735)	(0,06772; 0,99835)	397,30552111
2	(–1,5; 2,5)	0,05	(0,04705; 0,99889)	(0,03482; 0,99969)	669,16154749
		0,02	(0,04706; 0,99889)	(0,03899; 0,99971)	672,12173718
		0,01	(0,04707; 0,99889)	(0,04235; 0,99975)	678,04614524

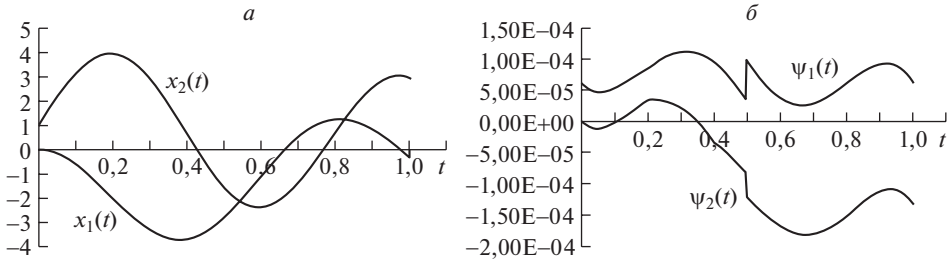
Таблица 2. Начальные значения управления, фазовых переменных, нормированных градиентов, вычисленных по предложенным формулам и по формуле (4.9)

t	$u^{(0)}(t)$	$x_1^{(0)}(t)$	$x_2^{(0)}(t)$	$\psi_1^{(0)}(t)$	$\psi_2^{(0)}(t)$	$\mathrm{grad}^{(analyt.)}_{u,norm.} J$	$\mathrm{grad}^{(differ.)}_{u,norm.} J$
0,00	2,0000	4,5015	–4,9825	–17,6713	0,0000	0,0328	0,0273
0,10	2,0100	4,2276	–3,4452	–14,7732	1,2205	0,0249	0,0193
0,20	2,0400	3,0911	–3,2437	–12,3997	2,0972	0,0243	0,0184
0,30	2,0900	2,1900	–4,8855	–32,9314	29,5948	0,0615	0,0626
0,40	2,1600	2,5457	–7,7654	–51,3018	59,2537	0,0956	0,1016
0,50	2,2500	4,4944	–10,5185	–63,5013	38,6945	0,1158	0,1024
0,60	2,3600	7,4976	–11,8338	–55,3290	39,1857	0,0994	0,0965
0,70	2,4900	10,4889	–11,2326	–50,5133	51,4172	0,0825	0,0817
0,80	2,6400	12,5467	–9,3378	–47,0810	62,2654	0,0665	0,0680
0,90	2,8100	13,4880	–7,4654	–42,9246	61,0030	0,0528	0,0557
1,00	3,0000	14,0259	–6,7815	–39,6537	59,8498	0,0451	0,0479

Таблица 3. Полученные на двадцатой итерации результаты решения задачи

t	Полученное решение				
	$u^{(20)}(t)$	$x_1^{(20)}(t)$	$x_2^{(20)}(t)$	$\psi_1^{(20)}(t)$	$\psi_2^{(20)}(t)$
0,00	1,00029	0,00007	0,99999	0,00006	0,00000
0,10	2,55535	–0,58653	3,14206	0,00005	–0,00000
0,20	1,98011	–1,97840	3,95871	0,00008	0,00003
0,30	–0,35852	–3,29485	2,93638	0,00011	0,00002
0,40	–3,01165	–3,67667	0,66486	0,00010	–0,00003
0,50	–4,32748	–2,80734	–1,52043	0,00010	–0,00012
0,60	–3,45330	–1,10499	–2,34852	0,00004	–0,00017
0,70	–0,85264	0,53120	–1,38383	0,00003	–0,00018
0,80	1,97589	1,26644	0,70963	0,00006	–0,00015
0,90	3,40763	0,83674	2,57099	0,00009	–0,00011
1,00	2,67746	–0,29100	2,96806	0,00006	–0,00013

В табл. 1 приведены значения функционала $J(u, \vartheta)$ и нормированных компонент градиента для разных точек ϑ и шагов интегрирования h, вычисленные по аналитической формуле (4.8) — $\mathrm{grad}^{(analyt.)}_{\vartheta,norm.} J(u, \vartheta)$ и разностной схеме (4.9) — $\mathrm{grad}^{(differ.)}_{\vartheta,norm.} J(u, \vartheta)$, при $u(t) = t^2 + 2$.



Графики полученных решений прямой (a) и сопряженной ($б$) краевых задач.

В табл. 2 приведены величины эвклидовых норм градиента функционала $\operatorname{grad}_u J(u)$ в моменты времени $t_i = 0{,}005i$, $i = 0, 1, \ldots, 200$, вычисленные на первой итерации по аналитической формуле (4.7) — $\operatorname{grad}^{(analyt.)}_{u,norm.} J = \operatorname{grad}^{(analyt.)}_{u,norm.} J(u, \vartheta)$ и разностной схеме (4.9) — $\operatorname{grad}^{(differ.)}_{u,norm.} J = \operatorname{grad}^{(differ.)}_{u,norm.} J(u, \vartheta)$. В этой же таблице приведены результаты решения прямой и сопряженной краевых задач при начальном управлении $u^0(t) = t^2 + 2$.

В табл. 2 и 3 приведены результаты, полученные при решении задачи при числе разбиений временнóго интервала $N = 200$.

В табл. 3 приведены результаты, полученные на двадцатой итерации процедуры (4.1). При этом значение функционала в начальной точке $\vartheta_1^{(0)} = -0{,}125$; $\vartheta_2^{(0)} = 1{,}5$; $u^0(t) = t^2 + 2$ было равно $J(u^{(0)}, \vartheta^{(0)}) = 397{,}30552$, а значение $\lambda = -240{,}1465$. На двадцатой итерации было получено значение функционала $J(u^{(20)}, \vartheta^{(20)}) = 1{,}4 \cdot 10^{-8}$, а значения параметров были следующими: $\vartheta_1^{(20)} = -0{,}2403$, $\vartheta_2^{(20)} = -1{,}1719$, $\lambda^{(20)} = 0{,}0002$.

На рисунке приведены графики полученных решений прямой (a) и сопряженной ($б$) краевых задач.

5. Заключение

В статье исследована линейная задача оптимального управления динамическим объектом, в которой оптимизируемыми кроме управляющих функций, участвующих в дифференциальных уравнениях, являются значения правых частей линейных нелокальных краевых условий. Краевые условия включают в себя в качестве слагаемых значения фазовой переменной в промежуточных точках и интегральные значения фазовой переменной на нескольких интервалах.

Исследованы условия существования и единственности решения краевой задачи с неразделенными краевыми условиями, выпуклость целевого функционала задачи. Применением техники методов Лагранжа и условного градиента сформулированы необходимые условия оптимальности.

Полученные результаты могут быть использованы в исследовании задач управления, описываемых нелинейными системами дифференциальных уравнений с линейными неразделенными краевыми условиями, включающими точечные и интегральные значения фазовых переменных и оптимизируемые правые части.

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы проводится непосредственной подстановкой формулы Коши относительно системы (2.1)

$$x(t) = F(t,t^1)x^1 + \int\limits_{t^1}^{t} F(t,\tau)A_2(\tau)u(\tau)d\tau \tag{П.1}$$

в условия (2.2). После несложных преобразований и группировки получим алгебраическую систему относительно $x^1 = x(t^1)$:

$$Lx^1 = D, \tag{П.2}$$

$$L = \sum_{i=1}^{l_1} \alpha_i F(\tilde{t}^i, t^1) + \sum_{j=1}^{l_2} \int\limits_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}} \beta_j(t) F(t,t^1)dt,$$

$$D = \vartheta - \sum_{i=1}^{l_1} \alpha_i \int\limits_{t^1}^{\tilde{t}^i} F(\tilde{t}^i,\tau)A_2(\tau)u(\tau)d\tau - \sum_{j=1}^{l_2} \int\limits_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}} \beta_j(t) \int\limits_{t^1}^{t} A_2(\tau)u(\tau)d\tau dt.$$

Известно, что система уравнений (П.2) имеет решение, причем единственное, если матрица L обратима, т.е. при выполнении условия (3.1). Ясно, что $\operatorname{rank} L$ не зависит от значений вектора D, а следовательно, не зависит от вектор-функции $u(t)$ и вектора ϑ. А из-за единственности представления (П.1) для решения задачи Коши относительно системы (2.1) и задача (2.1), (2.2) имеет решение, причем единственное, при выполнении условия (3.1). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть (u^1, ϑ^1) и (u^2, ϑ^2) — две пары произвольных допустимых управления и параметров, а $x^1(t)$ и $x^2(t)$ — соответствующие им решения краевой задачи (2.1), (2.2). Тогда

$$\dot{x}^1(t) = A_1(t)x^1(t) + A_2(t)u^1(t), \quad t \in [t^1, t^f], \tag{П.3}$$

$$\sum_{i=1}^{l_1} \alpha_i x^1(\tilde{t}_i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int\limits_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}} \beta_j(t)x^1(t)dt = \vartheta^1, \tag{П.4}$$

$$\dot{x}^2(t) = A_1(t)x^2(t) + A_2(t)u^2(t), \quad t \in [t^1, t^f], \tag{П.5}$$

$$\sum_{i=1}^{l_1} \alpha_i x^2(\tilde{t}_i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int\limits_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}} \beta_j(t)x^2(t)dt = \vartheta^2. \tag{П.6}$$

В силу выпуклости допустимых множеств U и V для произвольного $\sigma \in$ $\in [0;1]$ имеет место:

$$u(t) = \sigma u^1(t) + (1-\sigma)u^2(t) \in U, \quad \vartheta = \sigma\vartheta^1 + (1-\sigma)\vartheta^2 \in V. \tag{П.7}$$

Обозначим $x(t) = \sigma x^1(t) + (1-\sigma)x^2(t)$.

Умножим обе части (П.3) на σ, а (П.5) — на $(1-\sigma)$, полученные равенства почленно сложим и сгруппируем:

$$\sigma \dot{x}^1(t) + (1-\sigma)\dot{x}^2(t) =$$
$$= A_1(t)\left[\sigma x^1(t) + (1-\sigma)x^2(t)\right] + A_2(t)\left[\sigma u^1(t) + (1-\sigma)u^2(t)\right].$$

Отсюда следует, что $x(t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (2.1).

Умножая обе части (П.4) на σ, а (П.6) — на $(1-\sigma)$, складывая полученные равенства, после группировки получим:

$$\sum_{i=1}^{l_1} \alpha_i \left[\sigma x^1(\tilde{t}^i) + (1-\sigma)x^2(\tilde{t}^i)\right] +$$
$$+ \sum_{j=1}^{l_2} \int\limits_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}} \beta_j(t)\left[\sigma x^1(t) + (1-\sigma)x^2(t)\right] dt = \sigma\vartheta^1 + (1-\sigma)\vartheta^2.$$

Учитывая обозначения (П.7), отсюда следует, что тройка $(x(t), u(t), \vartheta)$ удовлетворяет условиям (2.2).

В силу выпуклости функций $f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)$ и $\Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)$ по аргументам $x, \tilde{x}, \hat{x}, u, \vartheta$, имеем:

$$\text{(П.8)} \qquad J(u,\vartheta) = J\Big(\sigma u^1(t) + (1-\sigma)u^2(t), \sigma\vartheta^1 + (1-\sigma)\vartheta^2\Big) =$$
$$= \int\limits_{t^1}^{t^f} f^0\Big(\sigma x^1(t) + (1-\sigma)x^2(t), \sigma u^1(t) + (1-\sigma)u^2(t), \sigma\vartheta^1 + (1-\sigma)\vartheta^2\Big)dt +$$
$$+ \Phi\Big(\sigma\tilde{x}^1 + (1-\lambda\sigma)\tilde{x}^2, \sigma\hat{x}^1 + (1-\lambda\sigma)\hat{x}^2, \sigma\vartheta^1 + (1-\sigma)\vartheta^2\Big) \le$$
$$\le \sigma \int\limits_{t^1}^{t^f} f^0\Big(x^1(t), u^1(t), \vartheta^1\Big)dt + (1-\sigma)\int\limits_{t^1}^{t^f} f^0\Big(x^2(t), u^2(t), \vartheta^2\Big)dt +$$
$$+ \sigma\Phi\Big(\tilde{x}^1, \hat{x}^1, \vartheta^1\Big) + (1-\sigma)\Phi\Big(\tilde{x}^2, \hat{x}^2, \vartheta^2\Big) =$$
$$= \sigma J\Big(u^1, \vartheta^1\Big) + (1-\sigma)J\Big(u^2, \vartheta^2\Big).$$

Отсюда следует выпуклость функционала $J(u,\vartheta)$. Ясно, что если одна из функций $\Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)$, $f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)$ будет строго выпуклой, то знак неравенства в (П.8) будет строгим. Следовательно, и функционал задачи (2.1)–(2.3) будет строго выпуклым. Отсюда следует справедливость утверждения теоремы. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $x(t) \in \mathrm{R}^n$ является решением краевой задачи (2.1), (2.2) при некоторых допустимых управлении $u(t) \in U$, векторе параметров $\vartheta \in V$, а $x^1(t) = x(t) + \Delta x(t)$ — решение задачи (2.1), (2.2), соответствующее приращенным допустимым управлению $u^1(t) = u(t) + \Delta u(t) \in U$ и вектору $\vartheta^1 = \vartheta + \Delta\vartheta \in V$:

$$\dot{x}^1(t) = A_1(t)x^1(t) + A_2(t)u^1(t), \quad t \in [t^1, t^f], \tag{П.9}$$

$$\sum_{i=1}^{l_1} \alpha_i x^1(\tilde{t}^i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int\limits_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}} \beta_j(t)x^1(t)dt = \vartheta^1. \tag{П.10}$$

Из (2.1), (2.2) и (П.9), (П.10) следует, что имеет место:

$$\Delta\dot{x}(t) = A_1(t)\Delta x(t) + A_2(t)\Delta u(t), \quad t \in [t^1, t^f], \tag{П.11}$$

$$\sum_{i=1}^{l_1} \alpha_i \Delta x(\tilde{t}^i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int\limits_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}} \beta_j(t)\Delta x(t)dt = \Delta\vartheta. \tag{П.12}$$

Тогда для приращения функционала (2.3) имеем

$$\Delta J(u,\vartheta) = J(u^1,\vartheta^1) - J(u,\vartheta) = \tag{П.13}$$

$$= \int\limits_{t^1}^{t^f} \Big[f^0(x^1(t), u^1(t), \vartheta^1, t) - f^0(x(t), u(t), \vartheta, t) \Big] dt + \Phi(\tilde{x}^1, \hat{x}^1, \vartheta^1) - \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta) =$$

$$= \int\limits_{t^1}^{t^f} \Bigg[\frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial x} \Delta x(t) + \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial u} \Delta u(t) +$$

$$+ \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial \vartheta} \Delta\vartheta \Bigg] dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l_1} \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \tilde{x}^i} \Delta x(\tilde{t}^i) + \sum_{j=1}^{2l_2} \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \hat{x}^j} \Delta x(\hat{t}^j) + \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta} \Delta\vartheta + R,$$

$$R = o\left(\|\Delta x(t)\|_{C^{1,n}[t^1,t^f]}, \|\Delta u(t)\|_{L_2^r[t^1,t^f]}, \|\Delta\vartheta\|_{\mathrm{R}^n} \right).$$

Здесь R является остаточным членом. При принятых предположениях на данные задачи (2.1), (2.2), пользуясь известной техникой [24], можно получить оценку вида

$$\|\Delta x(t)\|_{C^{1,n}[t^1,t^f]} \le c_1 \|\Delta u(t)\|_{L_2^r[t^1,t^f]} + c_2 \|\Delta\vartheta\|_{\mathrm{R}^n},$$

где положительные c_1, c_2 не зависят от $x(t)$. Отсюда с учетом (П.13) следует дифференцируемость функционала $J(u,\vartheta)$ как по $u(t)$, так и по ϑ.

Объединим и упорядочим множества точек $\tilde{t}_i$, $i = 1, 2, \ldots, l_1$, и $\hat{t}_j$, $j = 1, 2, \ldots, 2l_2$, обозначая полученный набор точек через $\bar{t}_s$, $s = 1, 2, \ldots, (l_1 + 2l_2)$.

Перенесем правую часть (П.11) влево, умножим слева скалярно обе части полученного равенства на пока произвольную непрерывно дифференцируемую на интервалах $(\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, (l_1 + 2l_2 - 1)$, n-мерную вектор-функцию $\psi(t)$. Интегрируя по частям полученное равенство и используя обозначения

$$\psi(t^i_+) = \lim_{\varepsilon \to +0} \psi(t_i + \varepsilon), \quad \psi(t^i_-) = \lim_{\varepsilon \to +0} \psi(t_i - \varepsilon),$$

получим:

$$0 = \int\limits_{t^1}^{t^f} \psi^{\mathrm{T}}(t) \Big[\Delta \dot{x}(t) - A_1(t) \Delta x(t) - A_2(t) \Delta u(t) \Big] dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{(l_1+2l_2-1)} \int\limits_{\bar{t}^i}^{\bar{t}^{i+1}} \left[\psi^{\mathrm{T}}(t) \Delta \dot{x}(t) - \psi^{\mathrm{T}}(t) A_1(t) \Delta x(t) - \psi^{\mathrm{T}}(t) A_2(t) \Delta u(t) \right] dt =$$

$$= \psi^{\mathrm{T}}(t^f) \Delta x(t^f) - \psi^{\mathrm{T}}(t^1) \Delta x(t^1) + \int\limits_{t^1}^{t^f} \Big[-\dot{\psi}^{\mathrm{T}}(t) - \psi^{\mathrm{T}}(t) A_1(t) \Big] \Delta x(t) dt +$$

$$+ \int\limits_{t^1}^{t^f} \Big[-\psi^{\mathrm{T}}(t) A_2(t) \Big] \Delta u(t) dt + \sum_{i=2}^{l_1-1} \Big[\psi(\tilde{t}^i_-) - \psi(\tilde{t}^i_+) \Big]^{\mathrm{T}} \Delta x(\tilde{t}^i) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2l_2} \Big[\psi(\hat{t}^j_-) - \psi(\hat{t}^j_+) \Big]^{\mathrm{T}} \Delta x(\hat{t}^j).$$

Прибавив к (П.13) полученное выражение, равное нулю, после несложных преобразований будем иметь:

$$\text{(П.14)} \quad \Delta J(u, \vartheta) = \int\limits_{t^1}^{t^f} \left[-\dot{\psi}^{\mathrm{T}}(t) - \psi^{\mathrm{T}}(t) A_1(t) + \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial x} \right] \Delta x(t) dt +$$

$$+ \int\limits_{t^1}^{t^f} \left[-\psi^{\mathrm{T}}(t) A_2(t) + \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial u} \right] \Delta u(t) dt +$$

$$+ \left[\int\limits_{t^1}^{t^f} \frac{\partial f^0(x(t), u(t), \vartheta, t)}{\partial \vartheta} dt + \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, \hat{x}, \vartheta)}{\partial \vartheta} \right] \Delta \vartheta +$$

$$+\left\{\sum_{i=1}^{l_1}\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}^i}\Delta x(\tilde{t}^i)+\sum_{j=1}^{2l_2}\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\hat{x}^j}\Delta x(\hat{t}^j)+\psi^{\mathrm{T}}(t^f)\Delta x(t^f)-\right.$$

$$-\psi^{\mathrm{T}}(t^1)\Delta x(t^1)+\sum_{i=2}^{l_1-1}\left[\psi(\tilde{t}^i_-)-\psi(\tilde{t}^i_+)\right]^{\mathrm{T}}\Delta x(\tilde{t}^i)+$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{2l_2}\left[\psi(\hat{t}^j_-)-\psi(\hat{t}^j_+)\right]^{\mathrm{T}}\Delta x(\hat{t}^j)\right\}+R.$$

Займемся слагаемыми, находящимися внутри фигурной скобки.

В (П.14) используем условия (П.12) для получения зависимости каких-либо n компонент (nl_1)-мерного вектора

$$\Delta x(\tilde{t})=\Delta\tilde{x}=\left(\Delta x_1(\tilde{t}^1),\Delta x_2(\tilde{t}^1),\ldots,\Delta x_n(\tilde{t}^1),\ldots,\Delta x_i(\tilde{t}^j),\ldots,\Delta x_n(\tilde{t}^{l_1})\right),$$

через остальные $n(l_1-1)$ компонент.

Далее для простоты изложения технических деталей совместно с матричными операциями будем использовать покомпонентные записи формул.

Тогда соотношение (П.12) можно записать в виде:

$$\widehat{\alpha}\,\Delta\,\widehat{x}\,+\breve{\alpha}\Delta\breve{x}+\sum_{j=1}^{l_2}\int\limits_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}}\beta_j(t)\Delta x(t)dt=\Delta\vartheta.$$

Отсюда, учитывая (3.2), имеем

$$\Delta\,\widehat{x}\,=\widehat{\alpha}^{\,-1}\Delta\vartheta-\widehat{\alpha}^{\,-1}\breve{\alpha}\Delta\breve{x}-\sum_{j=1}^{l_2}\int\limits_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}}\widehat{\alpha}^{\,-1}\beta_j(t)\Delta x(t)dt. \tag{П.15}$$

Учитывая принятые обозначения: $C=-\widehat{\alpha}^{\,-1}$, $B=-\widehat{\alpha}^{\,-1}\breve{\alpha}$, (П.15) примет вид

$$\Delta\,\widehat{x}\,=C\Delta\vartheta+B\Delta\breve{x}-\sum_{j=1}^{l_2}\int\limits_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}}\widehat{\alpha}^{\,-1}\beta_j(t)\Delta x(t)dt \tag{П.16}$$

или в покомпонентной форме:

$$\Delta\widehat{x}_{\,i}=\Delta x_{k_i}(\tilde{t}^{s_i})=\sum_{k=1}^{n}c_{ik}\Delta\vartheta_k+\sum_{\nu=1}^{l_1n}b_{i\nu}\Delta x_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu})- \tag{П.17}$$

$$-\sum_{j=1}^{l_2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}}\widehat{\alpha}^{\,-1}\beta^j_{ik}(t)\Delta x_k(t)dt,\quad i=1,2,\ldots,n,\quad 1\le g_\nu\le n.$$

Шестое и седьмое слагаемые в (П.14) запишем так:

$$\psi^{\mathrm{T}}(t^f)\Delta x(t^f) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t^f)\Delta x_j(t^f), \quad \psi^{\mathrm{T}}(t^1)\Delta x(t^1) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(t^1)\Delta x_j(t^1).$$

Объединяя в (П.14) четвертое и восьмое слагаемые и учитывая (П.17), получим:

$$\sum_{i=1}^{l_1}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}_i^j} + \Delta\psi_j(\tilde{t}^i)\right]\Delta x_j(\tilde{t}^i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}_{k_i}^{s_i}} + \Delta\psi_{k_i}(\tilde{t}^{s_i})\right]\Delta x_{k_i}(\tilde{t}^{s_i}) +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{l_1 n}\left[\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}_{g_\nu}^{q_\nu}} + \Delta\psi_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu})\right]\Delta x_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu}) = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}_{k_i}^{s_i}} + \Delta\psi_{k_i}(\tilde{t}^{s_i})\right]\times$$

$$\times\left[\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\Delta\vartheta_k + \sum_{\nu=1}^{l_1 n} b_{i\nu}\Delta x_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu}) - \sum_{j=1}^{l_2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}} \widehat{\alpha}^{\,-1}\beta_{ik}^j(t)\Delta x_k(t)dt\right] +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{l_1 n}\left[\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}_{g_\nu}^{q_\nu}} + \Delta\psi_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu})\right]\Delta x_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu}).$$

Из (П.14) с учетом полученного соотношения имеем:

$$\text{(П.18)} \qquad \Delta J(u,\vartheta) = \int\limits_{t^1}^{t^f}\left[-\dot{\psi}^{\mathrm{T}}(t) - \psi^{\mathrm{T}}(t)A_1(t) + \frac{\partial f^0(x(t),u(t),\vartheta,t)}{\partial x} -\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}_{k_i}^{s_i}} + \Delta\psi_{k_i}(\tilde{t}^{s_i})\right)\sum_{j=1}^{l_2}\chi_{\left[\hat{t}^{2j-1},\hat{t}^{2j}\right]}(t)\widehat{\alpha}^{\,-1}\beta_j(t)\right]\Delta x(t)dt +$$

$$+\int\limits_{t^1}^{t^f}\left[-\psi^{\mathrm{T}}(t)A_2(t) + \frac{\partial f^0(x(t),u(t),\vartheta,t)}{\partial u}\right]\Delta u(t)dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}_{k_i}^{s_i}} + \Delta\psi_{k_i}(\tilde{t}^{s_i})\right)c_{ik} + \frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\vartheta_k} +\right.$$

$$\left.+\int\limits_{t^1}^{t^f}\frac{\partial f^0(x(t),u(t),\vartheta,t)}{\partial\vartheta_k}dt\right\}\Delta\vartheta_k +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{l_1 n}\left[\sum_{i=1}^{n} b_{i\nu}\left(\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}_{k_i}^{s_i}}+\Delta\psi_{k_i}(\tilde{t}^{s_i})\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}_{g_\nu}^{q_\nu}}+\Delta\psi_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu})\right)\right]\Delta x_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu})+$$

$$+\sum_{j=1}^{2l_2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\hat{x}_i^j}+\Delta\psi_i(\hat{t}^j)\right]\Delta x_i(\hat{t}^j)+R.$$

В силу произвольности вектор-функции $\psi(t)$ потребуем, чтобы выражения в первой и в двух последних квадратных скобках (П.18) были равны нулю. Из первого требования получим сопряженную систему дифференциальных уравнений (3.7), а из других двух требований получим выражения:

$$\sum_{i=1}^{n} b_{i\nu}\left[\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}_{k_i}^{s_i}}+\Delta\psi_{k_i}(\tilde{t}^{s_i})\right]+$$

$$+\left[\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}_{g_\nu}^{q_\nu}}+\Delta\psi_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu})\right]=0,\quad \nu=1,2,\ldots,l_1 n,$$

$$\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\hat{x}_i^j}+\Delta\psi_i(\hat{t}^j)=0,\quad i=1,2,\ldots,n,\quad j=1,2,\ldots,2l_2.$$

Отсюда следуют условия (3.8), (3.9).

Тогда искомые компоненты градиента функционала по $u(t)$ и ϑ будут определяться из (П.18) как линейные части приращения функционала при $\Delta u(t)$ и $\Delta\vartheta$ формулами (3.5), (3.6).

Таким образом, теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Займемся условиями оптимальности пары (u,ϑ) при замененных условиях (2.2) на условия (3.3), (3.4). В отличие от приведенных выше выкладок для случая $\bar{n}=n$, далее для учета условий (3.4) будет использован метод Лагранжа и введен $(n-\bar{n})$-мерный дополнительный вектор параметров — множителей Лагранжа.

Снова, используя метод приращения оптимизируемых параметров (u,ϑ), для приращения функционала получим формулу (П.6). Условие (3.4) в приращениях примет вид

$$\sum_{j=1}^{l_2}\int\limits_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}}\beta_j^2(t)\Delta x(t)dt=\Delta\vartheta^{(2)}. \tag{П.19}$$

Перенесем все члены в (П.19) влево, умножим полученное выражение на пока произвольный вектор $\lambda\in\mathrm{R}^{n-\bar{n}}$ и прибавим к (П.14). Для приращения

функционала получим:

$$
\text{(П.20)} \qquad \Delta J(u,\vartheta) = \int\limits_{t^1}^{t^f} \Bigg[-\dot{\psi}^{\mathrm{T}}(t) - \psi^{\mathrm{T}}(t)A_1(t) + \frac{\partial f^0(x(t),u(t),\vartheta,t)}{\partial x} -
$$

$$
- \lambda^{\mathrm{T}} \sum_{j=1}^{l_2} \chi_{\left[\hat{t}^{2j-1},\hat{t}^{2j}\right]}(t)\beta_j^2(t) \Bigg] \Delta x(t)dt +
$$

$$
+ \int\limits_{t^1}^{t^f} \left[-\psi^{\mathrm{T}}(t)A_2(t) + \frac{\partial f^0(x(t),u(t),\vartheta,t)}{\partial u} \right] \Delta u(t)dt +
$$

$$
+ \left[\int\limits_{t^1}^{t^f} \frac{\partial f^0(x(t),u(t),\vartheta,t)}{\partial \vartheta^{(1)}} dt + \frac{\partial \Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial \vartheta^{(1)}} \right] \Delta\vartheta^{(1)} +
$$

$$
+ \left[\int\limits_{t^1}^{t^f} \frac{\partial f^0(x(t),u(t),\vartheta,t)}{\partial \vartheta^{(2)}} dt + \frac{\partial \Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial \vartheta^{(2)}} - \lambda^{\mathrm{T}} \right] \Delta\vartheta^{(2)} +
$$

$$
+ \Bigg\{ \sum_{i=1}^{l_1} \frac{\partial \Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial \tilde{x}^i} \Delta x(\tilde{t}^i) + \sum_{j=1}^{2l_2} \frac{\partial \Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial \hat{x}^j} \Delta x(\hat{t}^j) + \psi^{\mathrm{T}}(t^f)\Delta x(t^f) -
$$

$$
- \psi^{\mathrm{T}}(t^1)\Delta x(t^1) + \sum_{i=2}^{l_1-1} \left[\psi(\tilde{t}^i_-) - \psi(\tilde{t}^i_+) \right]^{\mathrm{T}} \Delta x(\tilde{t}^i) +
$$

$$
+ \sum_{j=1}^{2l_2} \left[\psi(\hat{t}^j_-) - \psi(\hat{t}^j_+) \right]^{\mathrm{T}} \Delta x(\hat{t}^j) \Bigg\} + R.
$$

Займемся слагаемыми, находящимися внутри фигурных скобок, учитывая, что ранг расширенной матрицы $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l_1}]$ в условиях (3.3) равен $\bar{n}$. Из выражения в приращениях

$$
\sum_{i=1}^{l_1} \alpha_i \Delta x(\tilde{t}^i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int\limits_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}} \beta_j^1(t)\Delta x(t)dt = \Delta\vartheta^{(1)},
$$

полученного из (3.3), выразим какие-либо $\bar{n}$ компонент nl_1-мерного вектора $\Delta\tilde{x}(\tilde{t})$ через остальные $nl_1 - \bar{n}$ компонент. Как это было сделано выше, выделим из матрицы α квадратную матрицу (минор) $\widehat{\alpha}$ размера $\bar{n} \times \bar{n}$. Пусть оставшиеся $nl_1 - \bar{n}$ столбцов матрицы α образуют матрицу $\breve{\alpha}$. Соответствующие матрице $\widehat{\alpha}$ элементы вектора $\Delta\tilde{x}(\tilde{t})$ обозначим через $\Delta\widehat{x}\,(\tilde{t})$, оставшиеся

элементы образуют вектор $\Delta\breve{x}(\tilde{t})$. Тогда имеем:

$$\Delta\,\widehat{x}\,(\tilde{t}) = \widehat{\alpha}^{\,-1}\Delta\vartheta^{(1)} - \widehat{\alpha}^{\,-1}\breve{\alpha}\Delta\breve{x}(\tilde{t}) - \widehat{\alpha}^{\,-1}\sum_{j=1}^{l_2}\int\limits_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}}\beta_j^1(t)\Delta x(t)dt,$$

$$\Delta\,\widehat{x}\;= C\Delta\vartheta + B\Delta\breve{x} - \sum_{j=1}^{l_2}\int\limits_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}}\widehat{\alpha}^{\,-1}\beta_j^{(1)}(t)\Delta x(t)dt$$

или в покомпонентной форме:

$$\text{(П.21)}\qquad \Delta\,\widehat{x}_{\,i} = \Delta x_{k_i}(\tilde{t}^{s_i}) = \sum_{k=1}^{n}c_{ik}\Delta\vartheta_k + \sum_{\nu=1}^{l_1 n-\bar{n}}b_{i\nu}\Delta x_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu}) -$$

$$-\sum_{j=1}^{l_2}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\hat{t}^{2j-1}}^{\hat{t}^{2j}}\widehat{\alpha}^{\,-1}\beta_{jik}^{(1)}(t)\Delta x_k(t)dt,\quad i=1,2,\ldots,\bar{n},\quad 1\le g_\nu\le n.$$

Учитывая (П.21), в (П.20) получим:

$$\text{(П.22)}\qquad \Delta J(u,\vartheta) = \int\limits_{t^1}^{t^f}\Bigg[-\dot{\psi}^{\mathrm{T}}(t) - \psi^{\mathrm{T}}(t)A_1(t) + \frac{\partial f^0(x(t),u(t),\vartheta,t)}{\partial x} -$$

$$-\lambda^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{l_2}\chi_{\left[\hat{t}^{2j-1},\hat{t}^{2j}\right]}(t)\beta_j^2(t) +$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}_{k_i}^{s_i}} + (\psi_{k_i}(\tilde{t}_-^{s_i}) - \psi_{k_i}(\tilde{t}_+^{s_i}))^{\mathrm{T}}\right)\right)\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{l_2}\chi_{\left[\hat{t}^{2j-1},\hat{t}^{2j}\right]}(t)\widehat{\alpha}^{\,-1}\beta_j^1(t)\Bigg]\,\Delta x(t)dt +$$

$$+\int\limits_{t^1}^{t^f}\left[-\psi^{\mathrm{T}}(t)A_2(t) + \frac{\partial f^0(x(t),u(t),\vartheta,t)}{\partial u}\right]\Delta u(t)dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{\bar{n}}\Bigg[\sum_{i=1}^{\bar{n}}\left[\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}_{k_i}^{s_i}} + \Delta\psi_{k_i}(\tilde{t}^{s_i})\right]c_{ik} +$$

$$+\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\vartheta_k^{(1)}} + \int\limits_{t^1}^{t^f}\frac{\partial f^0(x(t),u(t),\vartheta,t)}{\partial\vartheta_k^{(1)}}dt\Bigg]\,\Delta\vartheta_k^{(1)} +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-\bar{n}}\left[-\lambda_k+\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\vartheta_k^{(2)}}+\int\limits_{t^1}^{t^f}\frac{\partial f^0(x(t),u(t),\vartheta,t)}{\partial\vartheta_k^{(2)}}dt\right]\Delta\vartheta_k^{(2)}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{l_1n-\bar{n}}\left[\sum_{i=1}^{n}b_{i\nu}\left(\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}_{k_i}^{s_i}}+\Delta\psi_{k_i}(\tilde{t}^{s_i})\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}_{g_\nu}^{q_\nu}}+\Delta\psi_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu})\right)\right]\Delta x_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu})+$$

$$+\sum_{j=1}^{2l_2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\hat{x}_i^j}+\Delta\psi_i(\hat{t}^j)\right]\Delta x_i(\hat{t}^j)+R.$$

В силу произвольности вектор-функции $\psi(t)$ и вектора λ потребуем от них, чтобы выражение в первой квадратной скобке (П.22) было равно нулю, откуда получим сопряженное дифференциальное уравнение (3.28). А в силу произвольности компонент остаточного вектора $\Delta x(\tilde{t})$ и приращений $\Delta x(\hat{t}^i)$, $j=1,2,\ldots,2l_2$, потребуем, чтобы выражения в двух последних квадратных скобках (П.22) были равны нулю:

$$\sum_{i=1}^{\bar{n}}b_{i\nu}\left[\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}_{k_i}^{s_i}}+\Delta\psi_{k_i}(\tilde{t}^{s_i})\right]+\left[\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\tilde{x}_{g_\nu}^{q_\nu}}+\Delta\psi_{g_\nu}(\tilde{t}^{q_\nu})\right]=0,$$

$$\nu=1,2,\ldots,(l_1n-\bar{n}),$$

$$\frac{\partial\Phi(\tilde{x},\hat{x},\vartheta)}{\partial\hat{x}_i^j}+\Delta\psi_i(\hat{t}^j)=0,\quad i=1,2,\ldots,n,\quad j=1,2,\ldots,2l_2.$$

Отсюда получим краевые условия (3.29)–(3.30) для сопряженного уравнения (3.28).

Из (П.22) ясно, что формула для градиента функционала по $u(t)$ будет такой же, как в (3.5), а компоненты градиента по ϑ определяются формулами (3.26), (3.27). Таким образом, теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nicoletti O.* Sulle condizioni iniziali che determiniano gli integrali della diffenziali ordinazie. Atti della R. Acc. Sc. Torino, 1897.
2. *Тамаркин Я.Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. Петроград, 1917.
3. *De la Vallee-Poussin, Ch.J.* Sur l'équation différentielle linéare du second ordre. Détermination d'une integrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'orde n // J. Math. Pures Appl. 1929. V. 8. No. 9.
4. *Кигурадзе И.Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Нов. достижения. 1987. Т. 30. С. 3–103.

5. *Нахушев А.М.* О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 21. № 1. С. 92–101.

6. *Dzhumabaev D.S., Imanchiev A.E.* The Correct Solvability of a Linear Multipoint Boundary Value Problem // Math. J. 2005. V. 5. No. 15. P. 30–38.

7. *Асанова А.Т., Иманчиев А.Е., Кадирбаева Ж.М.* О разрешимости нелокальной задачи для системы дифференциальных уравнений соболевского типа с многоточечным условием // Изв. вузов. Матем. 2019. № 12. С. 3–15.

8. *Aida-zade K.R., Abdullaev V.M.* On the Solution of Boundary Value Problems with Nonseparated Multipoint and Integral Conditions // Diff. Equations. 2013. V. 49. No. 9. P. 1114–1125.

9. *Abdullaev V.M., Aida-zade K.R.* Numerical Method of Solution to Loaded Nonlocal Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations // Comput. Math. Math. Phys. 2014. V. 54. No. 7. P. 1096–1109.

10. *Assanova A.T.* Solvability of a Nonlocal Problem for a Hyperbolic Equation with Integral Conditions // Electr. J. Differ. Equat. 2017. V. 170. P. 1–12.

11. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Об одном подходе к синтезу управления процессами с распределенными параметрами // АиТ. 2012. Т. 73. № 9. С. 3–19.

    Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On an Approach to Designing Control of the Distributed-Parameter Processes // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 9. P. 1443–1455.

12. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Оптимизация размещения точек контроля при синтезе управления процессом нагрева // АиТ. 2017. Т. 78. № 9. С. 49–66.

    Aida-zade K.R., Abdullayev V.M. Optimizing Placement of the Control Points at Synthesis of the Heating Process Control // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 9. P. 1585–1599.

13. *Айда-заде К.Р., Гашимов В.А.* Оптимизация размещения точек контроля в одной задаче синтеза граничного управления процессом нагрева стержня // АиТ. 2018. Т. 79. № 9. С. 122–142.

    Aida-zade K.R., Hashimov V.A. Optimization of Measurement Points Positioning in a Border Control Synthesis Problem for the Process of Heating a Rod // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. P. 1643–1660.

14. *Mardanov M.J., Sharifov Y.A., Zeynalli F.M.* Existence and Uniqueness of the Solutions to Impulsive Nonlinear Integro-Differential Equations with Nonlocal Boundary Conditions // Proc. Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan. 2019. V. 45. No. 2. P. 222–232.

15. *Sharifov Y.A., Mammadova N.B.* Optimal Control Problem Described by Impulsive Differential Equations with Nonlocal Boundary Conditions // Differ. Equations. 2014. V. 50. No. 3. P. 403–411.

16. *Devadze D., Beridze V.* Optimality Conditions and Solution Algorithms of Optimal Control Problems for Nonlocal Boundary-Value Problems // J. Math Sci. 2016. V. 218. P. 731–736.

17. *Зубова С.П., Раецкая Е.В.* Алгоритм решения линейных многоточечных задач управления методом каскадной декомпозиции // АиТ. 2017. Т. 78. № 7. С. 22–38.

    Zubova S.P., Raetskaya E.V. Algorithm to solve linear multipoint problems of control by the method of cascade decomposition // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 7. P. 1189–1202.

18. *Дмитрук А.В., Каганович А.М.* Принцип максимума для задач оптимального управления с промежуточными ограничениями // В сб. “Нелинейная динамика и управление”. М: Физматлит, 2008. Вып. 6. С. 101–136.

19. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.

20. *Ащепков Л.Т.* Оптимальное управление системой с промежуточными условиями // Прикл. матем. механика. 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 215–222.

21. *Васильева О.О., Мизуками К.* Динамические процессы, описываемые краевой задачей: необходимые условия оптимальности и методы решения // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 1. С. 95–100.

22. *Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.* Подход к численному решению задач оптимального управления нагруженными дифференциальными уравнениями с нелокальными условиями // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 5. С. 739–751.

23. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Ленанд, 2019.

24. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002. С. 824.

25. *Aida-zade K.R., Abdullayev V.M.* Solution to a Class of Inverse Problems for System of Loaded Ordinary Differential Equations with Integral Conditions // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2016. V. 24. No. 5. P. 543–558.

26. *Moszynski K.* A Method of Solving the Boundary Value Problem for a System of Linear Ordinary Differential Equation // Algorytmy. Varshava. 1964. V.11. № 3. P. 25–43.

27. *Абрамов А.А.* Вариант метода прогонки // Журн. вычисл. матем. и математ. физ. 1961. Т. 1. № 2. С. 349–352.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.М. Хрусталевым.

Поступила в редакцию 19.07.2020

После доработки 28.09.2020

Принята к публикации 28.10.2020

© 2021 г. **П.Ф. ПРЯШНИКОВА, канд. техн. наук (ppf99999@rambler.ru)**
(Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Севастополе)

D-РАЗБИЕНИЕ ПРИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОГОЧЛЕНА ОТ ДВУХ ПАРАМЕТРОВ

Предложен метод построения областей устойчивости многочлена, коэффициенты которого полиномиальным образом зависят от двух вещественных параметров. Метод основан на аппроксимации областей D-разбиения множеством прямоугольников, на каждом из которых многочлен имеет одно и то же число нулей в левой полуплоскости.

Ключевые слова: многочлен, устойчивость, D-разбиение, полиномиальная зависимость.

DOI: 10.31857/S0005231021030028

1. Введение

Одной из задач теории автоматического управления является построение областей устойчивости многочлена

$$a\left(s,\alpha,\beta\right)=\sum_{k=0}^{n}a_k\left(\alpha,\beta\right)s^k, \tag{1}$$

коэффициенты которого $a_k\left(\alpha,\beta\right)$ $(k=0,\ldots,n)$ есть функции двух параметров α и β, определенные на множестве $\Lambda\subseteq\mathbb{R}^2$. Решение этой задачи заключается в определении множества устойчивости Λ_s, такого что $\Lambda_s\subseteq\Lambda$ и $((\alpha,\beta)\in\Lambda_s)\Leftrightarrow((a\left(s,\alpha,\beta\right)=0)\Rightarrow(\mathrm{Re}\left(s\right)<0))$.

В случае произвольных функций $a_k\left(\alpha,\beta\right)$ $(k=0,\ldots,n)$ единственным средством решения поставленной задачи является метод перебора [1, с. 107–108; 2, с. 136–137]. Метод перебора заключается в том, что вводится сетка Λ_c, такая что $\Lambda_c\subseteq\Lambda$ и множество Λ_c — конечно. В каждом узле сетки $(\alpha,\beta)\in\Lambda_c$ устойчивость многочлена (1) проверяется с помощью существующих критериев устойчивости, чаще всего — с помощью критериев Рауса или Гурвица. В результате проверки множество Λ_c разбивается на два подмножества $\Lambda_c=\Lambda_{cs}\bigcup\Lambda_{cu}$, где множество Λ_{cs} состоит из параметров (α,β) устойчивого многочлена, а множество Λ_{cu} состоит из параметров (α,β) неустойчивого многочлена. В качестве искомого множества Λ_s принимают множество Λ_{cs}. Недостаток метода перебора заключается в том, что Λ_c есть множество меры нуль и вопрос об устойчивости многочлена (1) в точках множества $\Lambda\backslash\Lambda_c$ остается открытым.

В частных случаях функций $a_k\left(\alpha,\beta\right)$ $(k=0,\ldots,n)$ задача определения множества устойчивости Λ_s решается аналитически или методом D-разбиения. Для возможности решения задачи аналитическим методом зависимости $a_k\left(\alpha,\beta\right)$ $(k=0,\ldots,n)$ должны быть настолько простыми, чтобы условия известных критериев устойчивости определяли граничные точки множества Λ_s в виде известных кривых, например алгебраических кривых второго порядка. Наиболее известными такими кривыми являются диаграммы

Вышнеградского. Примеры других кривых приведены в [3, с. 295; 4, с. 406]. Недостаток аналитических методов заключается в узости класса решаемых задач.

Метод D-разбиения обычно используется для линейных зависимостей $a_k(\alpha,\beta) = a_{k,1}\alpha + a_{k,2}\beta + a_{k,0}$ $(a_{k,0}, a_{k,1},\ a_{k,2} \in \mathbb{R})$ $(k = 0,\ldots,n)$. Обзор современного состояния метода D-разбиения и библиография представлены в [5]. В случае линейных зависимостей $a_k(\alpha,\beta)$ может быть найдено параметрическое представление $\alpha = \alpha(\omega)$, $\beta = \beta(\omega)$, $\omega \in [0,+\infty)$, определяющее множество Γ граничных точек подмножеств множества Λ, все точки (α,β) каждого из которых соответствуют одному и тому же числу нулей многочлена (1) в левой полуплоскости. Искомое множество Λ_s есть объединение найденных подмножеств, для которых число нулей многочлена (1) в левой полуплоскости равно n (с учетом кратности нулей). Первый недостаток метода D-разбиения заключается в том, что параметрическое представление $\alpha = \alpha(\omega)$, $\beta = \beta(\omega)$ найдено только для линейной зависимости коэффициентов многочлена (1) от параметров α и β. Для полиномиальной зависимости в [6] предложено использовать методы алгебраической геометрии, позволяющие получить в явном виде уравнение кривой D-разбиения и построить набор точек из каждой связной компоненты D-разбиения. Второй недостаток заключается в том, что функции $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$ непрерывного аргумента $\omega \in [0,+\infty)$ заменяют сеточными функциями $\alpha(\omega_q)$ и $\beta(\omega_q)$ соответственно $(0 \le \omega_0 < \omega_1 < \cdots < \omega_Q = \omega_{\max})$. Таким образом, задача построения граничных точек Γ_s искомого множества Λ_s решается методом перебора, недостаток которого отмечен выше.

В статье предлагается метод, который в отличие от известных методов позволяет с заданной точностью ε определить множество устойчивости Λ_s для полиномиальной зависимости коэффициентов многочлена (1) от двух параметров и при этом не требует замены бесконечных множеств сеточными. В предлагаемом методе использована идея метода D-разбиения о построении множеств, соответствующих одному и тому же числу нулей многочлена (1) в левой полуплоскости. Построение этих областей в предлагаемом методе принципиально отличается от метода D-разбиения, так как не требует получения параметрической зависимости $\alpha = \alpha(\omega)$, $\beta = \beta(\omega)$ и не требует замены бесконечного множества $[0,+\infty)$ сеточным.

2. Постановка задачи

Обозначим $p(\alpha',\alpha'',\beta',\beta'') = \{(\alpha,\beta)|(\alpha,\beta) \in [\alpha';\alpha''] \times [\beta';\beta'];\ \alpha',\alpha'',\beta',\beta'' \in \Lambda;\ \alpha' < \alpha'';\ \beta' < \beta''\}$ — прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, являющийся подмножеством множества Λ.

Рассматривается многочлен (1), коэффициенты которого зависят от параметров α и β полиномиальным образом

$$a_k(\alpha,\beta) = \sum_{\mu=0}^{n_{\alpha,k}} \sum_{\nu=0}^{n_{\beta,k}} a_{k\mu\nu}\alpha^\mu\beta^\nu \quad (k = 0,\ldots,n) \tag{2}$$

на прямоугольнике $\Lambda = p(\alpha_{\min};\ \alpha_{\max};\ \beta_{\min};\ \beta_{\max})$.

Решается задача определения множества устойчивости Λ_s.

Обозначим

$$p_s\left(\alpha', \alpha'', \beta', \beta''\right) =$$
$$= \Big\{ (\alpha, \beta) \mid \big((\alpha, \beta) \in p\left(\alpha', \alpha'', \beta', \beta''\right)\big) \wedge \big((a\,(s, \alpha, \beta) = 0) \Rightarrow (\mathrm{Re}\,(s) < 0)\big) \Big\}$$

— прямоугольник на множестве Λ, в каждой точке которого многочлен (1) устойчив, $P_s = \{p_{s,q}\}_{q=1}^{Q_s}$ — упорядоченное множество прямоугольников $p_s\,(\alpha', \alpha'', \beta', \beta'')$. Предлагается строить множество $\Lambda_r = \bigcup_{p \in P_s} p$ так, чтобы при заданной точности ε построения множества устойчивости Λ_s выполнялось неравенство

$$\rho\,(\Lambda_r, \Lambda_s) \leq \varepsilon, \tag{3}$$

где ρ есть характеристика близости множеств Λ_r и Λ_s. За решение задачи Λ_s предлагается принять множество Λ_r, которое является подмножеством Λ_s и в смысле характеристики (3) отличается от Λ_s на величину, не превосходящую ε. По сути, речь идет о вписывании в множество устойчивости Λ_s прямоугольников $p_{s,q}$ $(q = 1, \ldots, Q_s)$, на каждом из которых многочлен (1) устойчив.

Таким образом, решение задачи заключается в определении характеристики ρ, разработке способа ее вычисления и способа построения прямоугольников $p_{s,q}$ $(q = 1, \ldots, Q_s)$.

3. Теоретическая часть

Предлагаемый метод определения множества устойчивости Λ_s основан на построении множества прямоугольников $P = \{p_q\}_{q=1}^{Q}$, такого что:

1) множество значений параметров $\Lambda = \bigcup_{\mathrm{p} \in P} p$;

2) пересечение каждой пары прямоугольников из множества P есть либо пустое множество, либо одноточечное множество, либо отрезок;

3) множество P включает подмножество $P_a = \{p_{a,q}\}_{q=1}^{Q_a}$, на каждом элементе которого выполняются достаточные условия непрерывности и отсутствия нулей вещественных частей всех нулей многочлена (1);

4) каждый из прямоугольников p множества $P_b = \{p_{b,q}\}_{q=1}^{Q_b} = P \backslash P_a$ имеет диаметр $d_p = \sqrt{(\alpha'' - \alpha')^2 + (\beta'' - \beta')^2}$, не превосходящий заданного значения $d_{\max}$.

Достаточные условия непрерывности вещественных частей нулей многочлена (1) на прямоугольнике p дает теорема 1.

Теорема 1. Вещественные части всех нулей многочлена (1) *непрерывны на прямоугольнике* p*, если каждая из точек* $(\alpha, \beta) \in p$ *не является решением уравнения*

$$a_n\,(\alpha, \beta) = 0. \tag{4}$$

Доказательство теоремы 1 дано в Приложении.

Достаточные условия отсутствия нулей вещественных частей нулей многочлена (1) на прямоугольнике p дает теорема 2.

Теорема 2. Вещественные части всех нулей многочлена (1) *не обращаются в нуль на прямоугольнике* p, *если каждая из точек* $(\alpha, \beta) \in p$ *не является решением уравнения* (4) *и совокупности*

$$\left[\begin{array}{l} \Delta_{n-1}(\alpha, \beta) = 0; \\ a_0(\alpha, \beta) = 0, \end{array}\right. \tag{5}$$

где $\Delta_{n-1}(\alpha, \beta)$ *есть* $(n-1)$*-й определитель Гурвица.*

Доказательство теоремы 2 дано в Приложении.

Следствие. Из теорем 1 и 2 непосредственно следует, что прямоугольник $p \in P_a$, *если каждая из точек* $(\alpha, \beta) \in p$ *не является решением ни одного из уравнений* (4), (5).

Левая часть каждого из уравнений (4), (5) есть многочлен вида

$$\begin{cases} d(\alpha, \beta) = \displaystyle\sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu}(\alpha, \beta); \\ d_{\mu\nu}(\alpha, \beta) = b_{\mu\nu}\alpha^\mu \beta^\nu \quad (b_{\mu\nu} \in \mathbb{R};\ \mu = 0, \ldots, m_\alpha;\ \nu = 0, \ldots, m_\beta). \end{cases} \tag{6}$$

Достаточные условия отсутствия нулей многочлена (6) на прямоугольнике p дает теорема 3.

Теорема 3. Многочлен (6) *не имеет нулей на прямоугольнике* $p(\alpha', \alpha'', \beta', \beta'')$, *если выполняется условие*

$$\begin{cases} p(\alpha', \alpha'', \beta', \beta'') \in P_m; \\ \left[\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} d'_{\mu\nu} > 0; \\ \displaystyle\sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} d''_{\mu\nu} < 0, \end{array}\right. \end{cases} \tag{7}$$

где P_m *— множество прямоугольников, на каждом из которых каждое слагаемое* $d_{\mu\nu}(\alpha, \beta)$ $(\mu = 0, \ldots, m_\alpha;\ \nu = 0, \ldots, m_\beta)$ *является монотонной функцией по каждому аргументу,* $d'_{\mu\nu} = \min_{1 \le k \le 4} d_{\mu\nu}(v_k)$, $d''_{\mu\nu} = \max_{1 \le k \le 4} d_{\mu\nu}(v_k)$, $v_1 = (\alpha', \beta'')$, $v_2 = (\alpha'', \beta'')$, $v_3 = (\alpha'', \beta')$, $v_4 = (\alpha', \beta')$.

Доказательство теоремы 3 дано в Приложении.

Для построения множеств P_a и P_b будем рассматривать следующие преобразования.

Деление прямоугольника $p(\alpha', \alpha'', \beta', \beta'')$ на два прямоугольника:

$$\begin{cases} d_\alpha(p, \lambda):\ p \mapsto \left\{p'_\alpha = p(\alpha', \lambda, \beta', \beta'');\ p''_\alpha = p(\lambda, \alpha'', \beta', \beta'')\right\},\ \lambda \in (\alpha', \alpha'');\\ d_\beta(p, \lambda):\ p \mapsto \left\{p'_\beta = p(\alpha', \alpha'', \beta', \lambda);\ p''_\beta = p(\alpha', \alpha'', \lambda, \beta'')\right\},\ \lambda \in (\beta', \beta'').\end{cases} \tag{8}$$

Деление k-го прямоугольника множества $P = \{p_q = p\left(\alpha'_q, \alpha''_q, \beta'_q, \beta''_q\right)\}_{q=1}^{Q}$ на два прямоугольника:

$$
(9) \qquad \begin{cases} D_\alpha\left(P, \lambda, k\right): \ p = p_k; \ d_\alpha\left(p, \lambda\right) = \left\{p'_\alpha, \ p''_\alpha\right\}; \\ P \mapsto \left(P \backslash \{p_k\}\right) \cup \left\{p_k = p'_\alpha; \ p_{Q+1} = p''_\alpha\right\}; \quad \lambda \in \left(\alpha', \alpha''\right); \\ \\ D_\beta\left(P, \lambda, k\right): \ p = p_k; \ d_\beta\left(p, \lambda\right) = \left\{p'_\beta, \ p''_\beta\right\}; \\ P \mapsto \left(P \backslash \{p_k\}\right) \cup \left\{p_k = p'_\beta; \ p_{Q+1} = p''_\beta\right\}; \quad \lambda \in \left(\beta', \beta''\right). \end{cases}
$$

Деление k-го прямоугольника множества $P = \{p_q = p\left(\alpha'_q, \alpha''_q, \beta'_q, \beta''_q\right)\}_{q=1}^{Q}$ по стороне с наибольшей длиной на два равновеликих прямоугольника:

$$
(10) \qquad D\left(P, k\right) = \begin{cases} D_\alpha\Big(P, (\alpha'_k + \alpha''_k)/2, k\Big), & \text{если} \quad \alpha''_k - \alpha'_k \geq \beta''_k - \beta'_k; \\ D_\beta\Big(P, (\beta'_k + \beta''_k)/2, k\Big), & \text{если} \quad \alpha''_k - \alpha'_k < \beta''_k - \beta'_k. \end{cases}
$$

Перемещение k-го прямоугольника множества $P = \{p_q\}_{q=1}^{Q}$ в множество $\tilde{P} = \{\tilde{p}_q\}_{q=1}^{\tilde{Q}}$:

$$
(11) \qquad \begin{gathered} M\left(P, \tilde{P}, k\right): p = p_k; \\ \begin{pmatrix} P \\ \tilde{P} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} P \backslash \{p_k\}; \ p_q = p_{q+1} \ (q = k, \ldots, Q-1) \\ \tilde{P} \cup \left\{\tilde{p}_{\tilde{Q}+1} = p\right\} \end{pmatrix}. \end{gathered}
$$

На основании теорем 1–3 и преобразований (8)–(11) предлагается *алгоритм* построения множеств P_a и P_b:

1. Положим $P_a = \varnothing$, $P_b = \{\Lambda\}$, $q = 0$.

2. Преобразуем множество P_b так, чтобы выполнялось включение $P_b \subseteq P_m$. С этой целью последовательно находим: $P_b = D_\alpha\left(P_b, 0{,}1\right)$, если $\alpha_{\min} < 0 < \alpha_{\max}$; $P_b = D_\beta\left(P_b, 0{,}1\right)$, если $\beta_{\min} < 0 < \beta_{\max}$; $P_b = D_\beta\left(P_b, 0{,}2\right)$, если $\alpha_{\min} < 0 < \alpha_{\max}$ и $\beta_{\min} < 0 < \beta_{\max}$.

3. Положим $q := q + 1$.

4. Если $q > Q_b$, заканчиваем выполнение алгоритма.

5. Если на прямоугольнике $p_{b,q}$ для каждого из уравнений (4), (5) теорем 1 и 2 выполняются условия теоремы 3, то с помощью преобразования (11) $M\left(P_b, P_a, q\right)$ перемещаем прямоугольник $p_{b,q}$ из множества P_b в множество P_a и переходим к п. 4.

6. Если $d_{p,q} \leq d_{\max}$, то переходим к п. 3.

7. С помощью преобразования (10) $D(P_b, q)$ производим деление прямоугольника $p_{b,q}$ по стороне с наибольшей длиной на два равновеликих прямоугольника и переходим к п. 5.

По построению на каждом прямоугольнике $p_a \in P_a$ выполняются условия теоремы 4.

Теорема 4. Если вещественные части $\mathrm{Re}S\,(\alpha,\beta)$ *всех нулей многочлена* (1) *при полиномиальной зависимости* (2) *непрерывны и не обращаются в нуль на прямоугольнике* $p\,(\alpha',\alpha'',\beta',\beta'')$, *то на этом прямоугольнике все вещественные части* $\mathrm{Re}S\,(\alpha,\beta)$ *сохраняют знак.*

Доказательство теоремы 4 дано в Приложении.

По теореме 4 во всех точках $(\alpha,\beta)\in p_a$ многочлен (1) имеет одно и то же число нулей в левой полуплоскости. Проверяя устойчивость многочлена (1) в одной из точек каждого прямоугольника $p_a\in P_a$, представим множество P_a в виде $P_a=P_r\cup P_u$, где P_r есть множество устойчивых прямоугольников, P_u есть множество неустойчивых прямоугольников.

Точку (α_g,β_g) будем называть граничной, если она является решением хотя бы одного из уравнений (4), (5). Граничные точки D-разбиения образуют подмножество множества граничных точек (α_g,β_g). Достаточное условие принадлежности граничной точки (α_g,β_g) прямоугольнику $p\,(\alpha',\alpha'',\beta',\beta'')$ дает теорема 5.

Теорема 5. Прямоугольник $p\,(\alpha',\alpha'',\beta',\beta'')$ *содержит граничную точку* (α_g,β_g), *если хотя бы один из многочленов уравнений* (4), (5) *принимает в точках* $v_1=(\alpha',\beta'')$, $v_2=(\alpha'',\beta'')$, $v_3=(\alpha'',\beta')$, $v_4=(\alpha',\beta')$ *значения разных знаков.*

Доказательство теоремы 5 дано в Приложении.

Множество P_b представим в виде $P_b=P_g\cup P_x$, где P_g есть множество прямоугольников, для которых выполняются условия теоремы 5, P_x есть множество прямоугольников, для которых не выполняются условия теоремы 5. Множество P_g примем в качестве граничного.

Таким образом множество Λ можно представить в виде $\Lambda=\Lambda_r\cup\Lambda_u\cup\Lambda_g\cup\cup\Lambda_x$, где $\Lambda_r=\bigcup_{\mathrm{p}\in P_r}p$ есть объединение устойчивых прямоугольников, $\Lambda_u=\bigcup_{\mathrm{p}\in P_u}p$ есть объединение неустойчивых прямоугольников, $\Lambda_g=\bigcup_{\mathrm{p}\in P_g}p$ есть объединение прямоугольников диаметра не более $d_{\max}$, содержащих по крайней мере одну граничную точку, $\Lambda_x=\bigcup_{\mathrm{p}\in P_x}p$ есть объединение прямоугольников диаметра не более $d_{\max}$, для которых не выполняются условия принадлежности к одному из множеств P_r, P_u, P_g.

Для искомого множества устойчивости Λ_s справедливы включения

$$\begin{cases}\Lambda_r\subseteq\Lambda_s;\\ \Lambda_s\subseteq\Lambda_r\cup\Lambda_g\cup\Lambda_x.\end{cases}\tag{12}$$

Как было отмечено выше, за область устойчивости будем принимать Λ_r. Из (12) следует, что Λ_r отличается от Λ_s не более чем на $\Lambda_g\cup\Lambda_x$. Поэтому за критерий близости множеств Λ_r и Λ_s предлагается принять

$$\rho\,(\Lambda_r,\Lambda_s)=\begin{cases}S(\Lambda_g)+S\,(\Lambda_x)\,, & \text{если}\quad \Lambda_r=\varnothing;\\ (S(\Lambda_g)+S\,(\Lambda_x))/S\,(\Lambda_r)\,, & \text{если}\quad \Lambda_r\neq\varnothing,\end{cases}\tag{13}$$

где $S(\Omega)$ есть площадь множества Ω. Все площади множеств (13) легко вычисляются, так как каждое из множеств есть объединение прямоугольников.

Следующая теорема гарантирует, что для любой точки устойчивости $(\alpha_0, \beta_0) \in \Lambda$ многочлена $a(s, \alpha, \beta)$ существует такое $d_{\max}$, что эта точка будет накрыта устойчивым прямоугольником $p_0 \in P_r$.

Теорема 6. Если многочлен $a(s, \alpha, \beta)$ устойчив в точке $(\alpha_0, \beta_0) \in \Lambda$, то существует такое положительное вещественное число d, что для любого $d_{\max} \in (0; d)$ существует устойчивый прямоугольник $p_0 \in P_r$, такой что $(\alpha_0, \beta_0) \in p_0$.

Доказательство теоремы 6 дано в Приложении.

Объем вычислений предложенного метода определяется числом арифметических операций v_1 и v_2, необходимых для построения соответственно многочлена $\Delta_{n-1}(\alpha, \beta)$ и множества прямоугольников $P = P_a \cup P_b$. Значение v_1 возрастает при увеличении степеней многочленов $a(s, \alpha, \beta)$, $a_k(\alpha, \beta)$ $(k = 0, \ldots, n)$ и зависит от способа вычисления определителя $\Delta_{n-1}(\alpha, \beta)$. Значение $v_2 = \left(O\left(n^3\right) + O(n_1) + O(n_2) + O(n_3)\right) \cdot O(Q)$, где $O\left(n^3\right)$ — число арифметических операций, необходимых для построения таблицы Рауса, $O(n_1)$, $O(n_2)$, $O(n_3)$ — число арифметических операций, необходимых для проверки выполнения условий (7) для многочленов соответственно уравнений (4) и (5), n — степень многочлена $a(s, \alpha, \beta)$; n_1, n_2, n_3 — число слагаемых многочленов левых частей соответственно уравнений (4) и (5); $O(\cdot)$ — символ “О – большое” [7, с. 164]; Q — число элементов множества P. Значение v_2 возрастает при увеличении степеней многочленов $a(s, \alpha, \beta)$, $a_k(\alpha, \beta)$ $(k = 0, \ldots, n)$. Значение Q возрастает при увеличении сложности границы D-разбиения и уменьшении $d_{\max}$. Сложность границы D-разбиения определяется степенями и коэффициентами многочленов уравнений (4) и (5), причем, как показывают примеры 1–3, доминирующей может быть зависимость от коэффициентов. Значение $d_{\max}$ выбирается путем последовательного уменьшения до достижения заданной точности аппроксимации множества устойчивости Λ_s множеством прямоугольников Λ_r. При уменьшении $d_{\max}$ сохраняются все устойчивые прямоугольники, найденные ранее. Величина $\rho(\Lambda_r, \Lambda_s)$ есть верхняя оценка возможного увеличения площади множества устойчивых прямоугольников при дальнейшем уменьшении $d_{\max}$. Пример 1 иллюстрирует возможность применения предложенного метода с использованием ПЭВМ при достаточно высоких степенях многочленов $a(s, \alpha, \beta)$, $a_k(\alpha, \beta)$ $(k = 0, \ldots, n)$. В примере 1 при $d_{\max} = 10^{-3}$ площадь множества устойчивых прямоугольников при дальнейшем уменьшении $d_{\max}$ может увеличиться не более чем на 61,8 %, а при $d_{\max} = 10^{-4}$ может увеличиться не более чем на 3,38 %.

Вычислительные алгоритмы предложенного метода допускают параллельные вычисления, что может быть использовано для снижения времени решения задачи построения областей устойчивости.

4. Результаты численного эксперимента

Предложенный метод построения областей устойчивости реализован в виде прикладной компьютерной программы в среде разработки Embarcadero RAD Studio. С помощью разработанной программы решены задачи построения областей устойчивости различного уровня сложности. На рис. 2, 4 и 6 множество Λ_r выделено белым цветом, множество Λ_u выделено оттенками

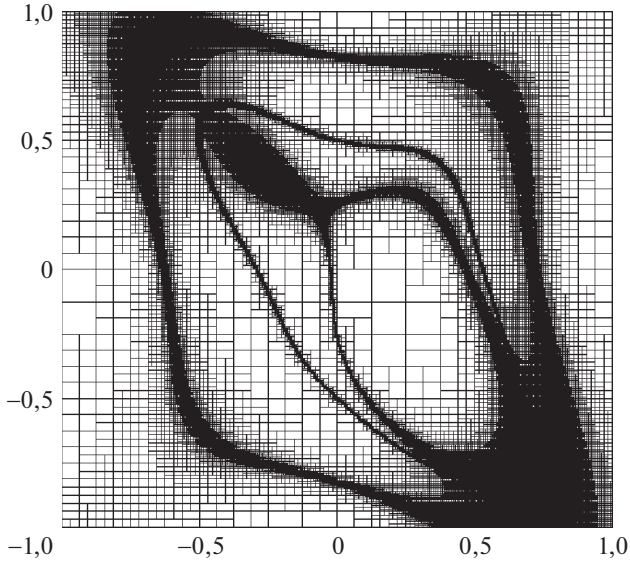


Рис. 1. Множество P примера 1.

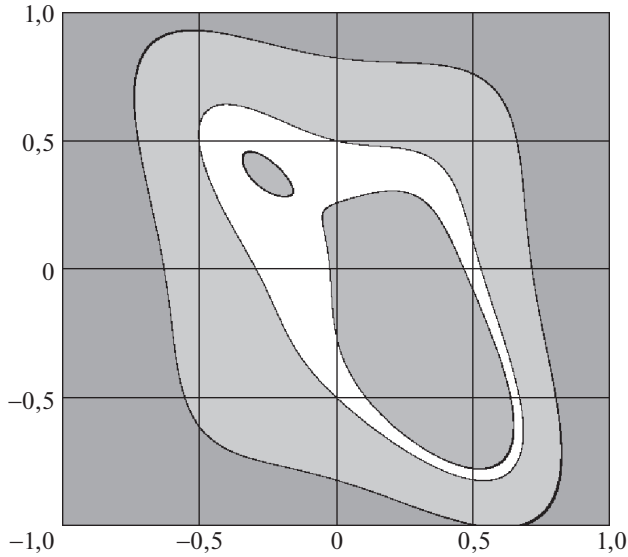


Рис. 2. D-разбиение примера 1.

серого цвета, множества Λ_g и Λ_x выделены черным цветом. Оттенки серого цвета соответствуют различному числу нулей многочлена в правой полуплоскости.

В *примере 1* решена задача построения областей устойчивости в пространстве параметров $(\alpha, \beta) \in [-1; 1] \times [-1; 1]$ многочлена $a(s, \alpha, \beta) = 10(1 + 3\alpha - 10\alpha\beta + 2\alpha^2 + 16\alpha^2\beta^2 - 40\alpha^4 - 16\beta^4) + 10s + 14s^2 + 11s^3 + 5{,}3s^4 + 1{,}6s^5 + 0{,}32s^6 + 0{,}039s^7 + 10^{-4}(27 - \alpha^4 + \beta^2 + \alpha^5\beta^7) \cdot s^8 + 10^{-5}(8 + 1{,}5\alpha\beta + \alpha^2 - 2\beta^2) \cdot s^9$. Левые части уравнений (4), (5) имеют соответственно вид $a_9(\alpha, \beta) = 10^{-5}(8 +$

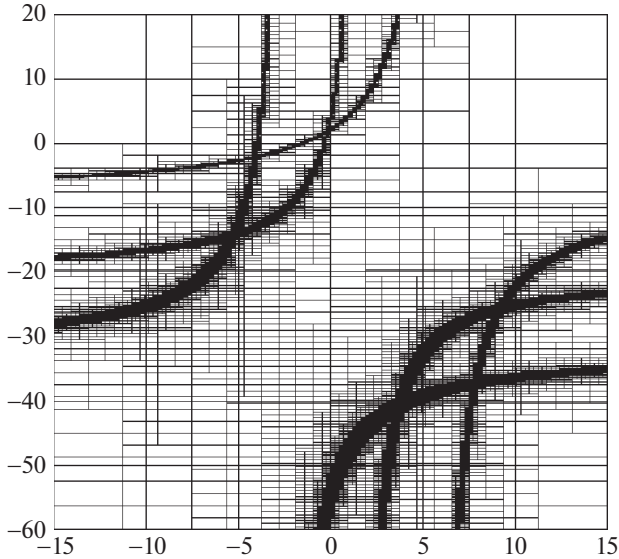


Рис. 3. Множество P примера 2.

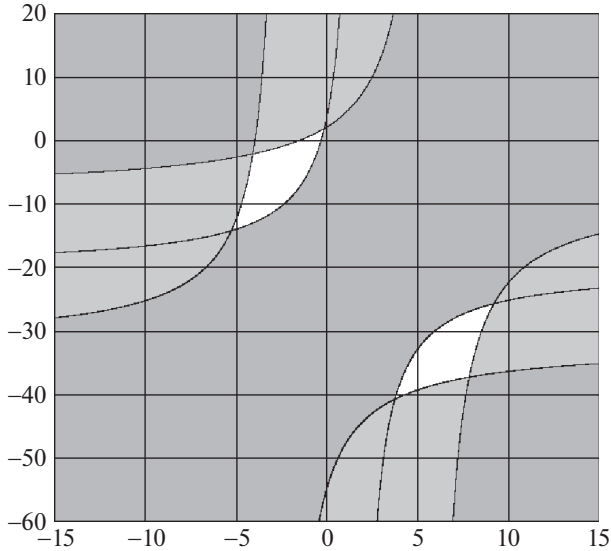


Рис. 4. D-разбиение примера 2.

$+1{,}5\alpha\beta+\alpha^2-2\beta^2)$, $a_0(\alpha,\beta)=10(1+3\alpha-10\alpha\beta+2\alpha^2+16\alpha^2\beta^2-40\alpha^4-16\beta^4)$, $\Delta_8(\alpha,\beta)=-0{,}00065075+\cdots+1{,}0486\cdot10^{-10}\beta^{24}+\cdots-1{,}892\cdot\alpha\beta^{19}+\cdots+$ $+10^{-12}\alpha^{20}\beta^{28}+\cdots+2{,}56\cdot10^{-10}\alpha^{24}$ есть многочлен 48-й степени, включающий 454 слагаемых. Изображение множества прямоугольников P при $d_{\max}=10^{-4}$ приведено на рис. 1, изображение D-разбиения — на рис. 2. Множество P содержит 2809726 прямоугольников, $\rho\,(\Lambda_r,\Lambda_s)=0{,}0338$. При $d_{\max}=10^{-3}$ множество P содержит 159760 прямоугольников, $\rho\,(\Lambda_r,\Lambda_s)=0{,}618$.

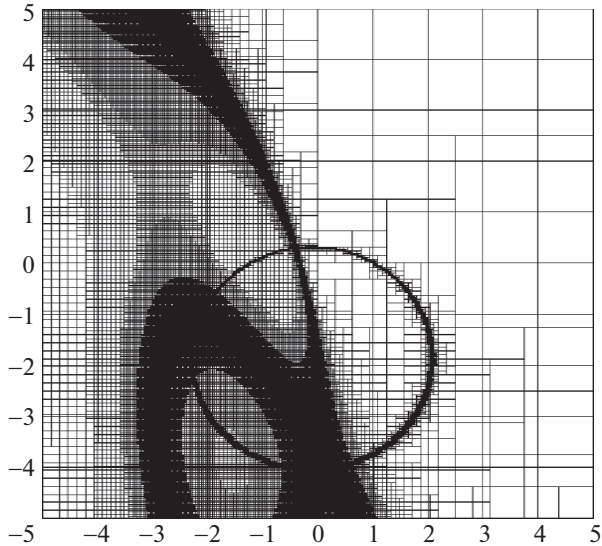


Рис. 5. Множество P примера 3.

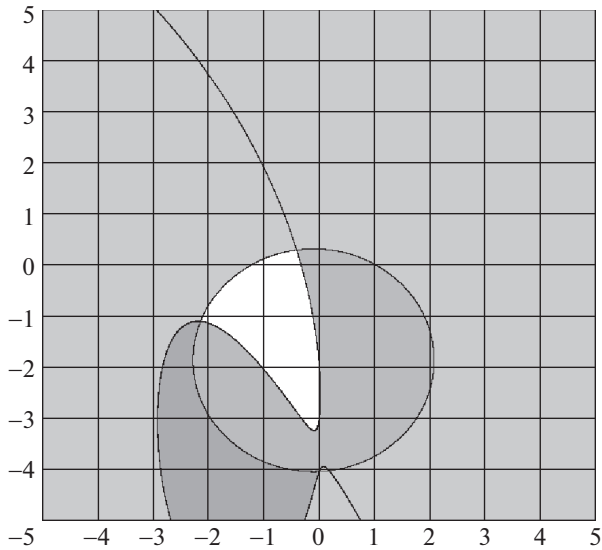


Рис. 6. D-разбиение примера 3.

В *примере 2* решена задача построения областей устойчивости в пространстве параметров $(\alpha, \beta) \in [-15; 15] \times [-60; 20]$ дискретной системы $A + B\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} + C$, где $A = \begin{pmatrix} -0{,}8848 & 0{,}4457 \\ -0{,}8733 & -0{,}9326 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0{,}3914 & 0{,}2508 \\ -0{,}5576 & 0{,}0266 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0{,}1514 & 0{,}7854 \\ -0{,}4255 & -0{,}8148 \end{pmatrix}$ [5, с. 24, пример 7]. Характеристический многочлен непрерывного аналога рассматриваемой дискретной системы имеет вид $a(s, \alpha, \beta) = (49{,}6243 + 32{,}4534\alpha - 22{,}8882\beta + 3{,}95979\alpha\beta) + (-53{,}5986 - 159{,}577\alpha +$

$+ 13{,}6791\beta - 7{,}91957\alpha\beta)s + (503{,}974 + 9{,}2091\alpha + 127{,}124\beta + 3{,}95979\alpha\beta)s^2$. Левые части уравнений (4), (5) имеют соответственно вид $a_2(\alpha,\beta) = 503{,}974 + 9{,}2091\alpha + 127{,}124\beta + 3{,}95979\alpha\beta$, $a_0(\alpha,\beta) = 49{,}6243 + 32{,}4534\alpha - 22{,}8882\beta + 3{,}95979\alpha\beta$, $\Delta_1(\alpha,\beta) = -53{,}5986 - 159{,}577\alpha + 13{,}6791\beta - 7{,}91957\alpha\beta$. Изображение множества прямоугольников P при $d_{\max} = 10^{-4}$ приведено на рис. 3, изображение D-разбиения — на рис. 4. Множество P содержит 291837 прямоугольников, $\rho(\Lambda_r, \Lambda_s) = 0{,}078$.

В *примере 3* решена задача построения областей устойчивости в пространстве параметров $(\alpha,\beta) \in [-5;5] \times [-5;5]$ обратной связи $K = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ системы непрерывного времени, заданной матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 79 & 20 & -30 & -20 \\ -41 & -12 & 17 & 13 \\ 167 & 40 & -60 & -38 \\ 33{,}5 & 9 & -14{,}5 & -11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0{,}219 & 0{,}9346 \\ 0{,}047 & 0{,}3835 \\ 0{,}6789 & 0{,}5194 \\ 0{,}6793 & 0{,}831 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0{,}0346 & 0{,}5297 & 0{,}0077 & 0{,}0668 \\ 0{,}0535 & 0{,}6711 & 0{,}3834 & 0{,}4175 \end{pmatrix}$$

[6, с. 46, пример 4]. Характеристический многочлен этой системы $a(s,\alpha,\beta) = (-39{,}115\beta^2 - 146{,}0203\beta - 39{,}115\alpha^2 - 7{,}8565\alpha + 49{,}2585) + (-13{,}8017\beta^2 - 101{,}223\beta - 13{,}8017\alpha^2 - 366{,}9898\alpha - 116{,}492)s + (0{,}1023\beta^2 + 13{,}3905\beta + 0{,}1023\alpha^2 - 34{,}9711\alpha + 62{,}5862)s^2 + (-0{,}8821\beta - 0{,}7704\alpha + 3{,}0635)s^3 + s^4$. Левые части уравнений (4), (5) имеют соответственно вид $a_4(\alpha,\beta) = 1$, $a_0(\alpha,\beta) = -39{,}115\beta^2 - 146{,}0203\beta - 39{,}115\alpha^2 - 7{,}8565\alpha + 49{,}2585$, $\Delta_3(\alpha,\beta) = -36367{,}1 - 39702\beta - 13793\beta^2 - 1521{,}69\beta^3 + 7{,}77969\beta^4 + 1{,}24545\beta^5 - 137463\alpha - 56555\alpha\beta - 5815{,}47\alpha\beta^2 - 189{,}119\alpha\beta^3 + 1{,}08776\alpha\beta^4 - 86405{,}5\alpha^2 - 12995{,}7\alpha^2\beta - 506{,}74\alpha^2\beta^2 + 2{,}4909\alpha^2\beta^3 - 18159{,}2\alpha^3 - 189{,}119\alpha^3\beta + 2{,}17547\alpha^3\beta^2 - 514{,}515\alpha^4 + 1{,}24545\alpha^4\beta + 1{,}08774\alpha^5$. Изображение множества прямоугольников P при $d_{\max} = 10^{-5}$ приведено на рис. 5, изображение D-разбиения — на рис. 6. Множество P содержит 16261342 прямоугольника, $\rho(\Lambda_r, \Lambda_s) = 0{,}00899$.

5. Заключение

В статье предложен новый метод построения областей устойчивости многочлена в пространстве двух параметров, от которых коэффициенты многочлена зависят полиномиальным образом. Предложенный метод и разработанное программное обеспечение могут быть использованы при решении научных и инженерных задач параметрического анализа и синтеза систем управления.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Если $\forall\,(\alpha,\beta) \in p$ имеет место неравенство $a_n(\alpha,\beta) \neq 0$, то на прямоугольнике p нули многочлена (1) являются непрерывными функциями его коэффициентов a_k $(k = 0,\ldots,n)$ [8, с. 252–253]. В свою очередь коэффициенты a_k $(k = 0,\ldots,n)$ при полиномиальной зависимости (2) являются непрерывными функциями переменных α

и β в $\mathbb{R}^2$. Тогда по теореме о непрерывности композиции функций [7, с. 492] нули многочлена (1) являются непрерывными функциями переменных α и β на прямоугольнике p. Из непрерывности нулей следует непрерывность их вещественных частей.

Покажем, что в точках (α, β), в которых $a_n(\alpha, \beta) = 0$, вещественные части нулей многочлена (1) могут иметь бесконечный предел. Сделаем замену переменной $s = \frac{1}{\xi}$, которая при $\xi \neq 0$ отображает многочлен (1) в функцию $f(\xi, \alpha, \beta) = \varphi(\xi, \alpha, \beta)/\xi^n$, где $\varphi(\xi, \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}(\alpha, \beta)\xi^k$. В точках (α, β), в которых $a_0(\alpha, \beta) \neq 0$, нули многочлена $\varphi(\xi, \alpha, \beta)$ есть непрерывные функции переменных α и β. В силу непрерывности, если $\lim\limits_{(\alpha,\beta)\to(\alpha_0,\beta_0)} a_n(\alpha, \beta) = 0$, то при $(\alpha, \beta) \to (\alpha_0, \beta_0)$ у многочлена $\varphi(\xi, \alpha, \beta)$ существует бесконечно малый нуль ξ. При этом у многочлена (1) существует бесконечно большой нуль $s = \frac{1}{\xi}$, вещественная часть которого может стремиться к бесконечности, т.е. не являться непрерывной в точке (α_0, β_0). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим утверждения: A — точка (α, β) не является решением совокупности (5), B — вещественные части нулей многочлена (1) не обращаются в нуль в точке (α, β). Справедливо утверждение $(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathrm{A} \Rightarrow \neg\mathrm{B})$, в силу которого доказательство справедливости требуемого утверждения $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ заменим доказательством справедливости равносильного утверждения $\neg\mathrm{B} \Rightarrow \neg\mathrm{A}$. Если имеет место утверждение $\neg\mathrm{B}$, при котором в точке (α, β) существует нуль s многочлена (1), вещественная часть которого равна нулю, то имеет место равенство $s = i\omega$ $(\omega \in \mathbb{R})$. При $\omega \neq 0$ у многочлена (1) с вещественными коэффициентами существует комплексно-сопряженный нуль $\overline{s} = -i\omega$, отличный от s. По условию теоремы $a_n(\alpha, \beta) \neq 0$ и тогда имеет место формула Орландо [9, с. 465]: $\Delta_{n-1}(\alpha, \beta) = (-1)^{n(n+1)/2} a_n^{n-1}(\alpha, \beta) \cdot \prod_{k<q}^{1,\ldots,n} (s_k(\alpha, \beta) + s_q(\alpha, \beta))$. Так как $s + \overline{s} = 0$, то из формулы Орландо следует $\Delta_{n-1}(\alpha, \beta) = 0$. Если $\omega = 0$, то многочлен (1) имеет нуль $s = 0$, откуда следует $a_0(\alpha, \beta) = 0$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. По условию теоремы каждое слагаемое $d_{\mu\nu}(\alpha, \beta)$ $(\mu = 0, \ldots, m_\alpha; \nu = 0, \ldots, m_\beta)$ является монотонной функцией по каждому аргументу на прямоугольнике p, следовательно принимает наибольшее и наименьшее значения в вершинах прямоугольника, так что $d'_{\mu\nu} = \min_{(\alpha,\beta)\in p} d_{\mu\nu}(\alpha, \beta)$, $d''_{\mu\nu} = \max_{(\alpha,\beta)\in p} d_{\mu\nu}(\alpha, \beta)$. Тогда для любой точки $(\alpha, \beta) \in p$ имеют место неравенства

$$
\text{(П.1)} \qquad \begin{cases} d(\alpha, \beta) = \sum\limits_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum\limits_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu}(\alpha, \beta) \geq \sum\limits_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum\limits_{\nu=0}^{m_\beta} d'_{\mu\nu}; \\ \\ d(\alpha, \beta) = \sum\limits_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum\limits_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu}(\alpha, \beta) \leq \sum\limits_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum\limits_{\nu=0}^{m_\beta} d''_{\mu\nu}. \end{cases}
$$

Если выполняется первое из неравенств совокупности (7), то из первого неравенства системы (П.1) следует, что $d(\alpha, \beta) > 0$ для любой точки $(\alpha, \beta) \in p$ и, следовательно, многочлен $d(\alpha, \beta)$ не имеет нулей на прямоугольнике p. Если

выполняется второе из неравенств совокупности (7), то из второго неравенства системы (П.1) следует, что $d(\alpha,\beta)<0$ для любой точки $(\alpha,\beta)\in p$ и, следовательно, многочлен $d(\alpha,\beta)$ не имеет нулей на прямоугольнике p. Теорема 3 доказана.

Для доказательства теорем 4 и 5 используется теорема П.1.

Теорема П.1 [7, с. 495]. *Если функция $f: E\to\mathbb{R}$, непрерывная на связном множестве E, принимает в точках $a, b\in E$ значения $f(a)=A$, $f(b)=B$, то для любого числа C, лежащего между A и B, найдется точка $c\in E$, в которой $f(c)=C$.*

Доказательство теоремы 4. Аналогично, как и при доказательстве теоремы 2, рассмотрим утверждения: A — непрерывные вещественные части $\mathrm{Re}S(\alpha,\beta)$ всех нулей многочлена (1) не обращаются в нуль на прямоугольнике p, B — все вещественные части $\mathrm{Re}S(\alpha,\beta)$ сохраняют знак на прямоугольнике p. Заменим доказательство справедливости требуемого утверждения А $\Rightarrow$ В доказательством справедливости равносильного утверждения $\neg B\Rightarrow\neg A$. Предположим, что имеет место утверждение $\neg B$, при котором на прямоугольнике p существуют точки (α_1,β_1) и (α_2,β_2), в одной из которых функции $\mathrm{Re}S(\alpha,\beta)$ положительна, а в другой — отрицательна. Если в теореме П.1 положить $E=p$, $f=\mathrm{Re}S(\alpha,\beta)$, $a=(\alpha_1,\beta_1)$, $b=(\alpha_2,\beta_2)$, $A=\mathrm{Re}S(\alpha_1,\beta_1)$, $B=\mathrm{Re}S(\alpha_2,\beta_2)$, $C=0$, то будут выполнены все условия этой теоремы. Тогда по теореме П.1 на прямоугольнике p существует точка $c=(\alpha_0,\beta_0)$, в которой $\mathrm{Re}S(\alpha_0,\beta_0)=0$. Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. По условию теоремы существует пара точек, например v_1, v_2, в которых один из многочленов $d(\alpha,\beta)$ принимает значения разных знаков. Тогда теорема 5 является прямым следствием теоремы П.1, если положить $E=p$, $f=d(\alpha,\beta)$, $a=v_1$, $b=v_2$, $A=d(v_1)$, $B=d(v_2)$, $C=0$. Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. Рассмотрим многочлен (6), каждое слагаемое которого $d_{\mu\nu}(\alpha,\beta)$ $(\mu=0,\ldots,m_\alpha;\ \nu=0,\ldots,m_\beta)$ есть непрерывная функция аргументов α и β. В силу непрерывности для точки $(\alpha_0,\beta_0)\in\mathbb{R}^2$ и для любого $\varepsilon>0$ существует круг $V_{r_{\mu\nu}}(\alpha_0,\beta_0)=$ $=\left\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\mid\sqrt{(\alpha-\alpha_0)^2+(\beta-\beta_0)^2}\le r_{\mu\nu}\right\}$ радиуса $r_{\mu\nu}>0$ с центром в точке (α_0,β_0), такой что $\forall(\alpha,\beta)\in V_{r_{\mu\nu}}(\alpha_0,\beta_0)$ выполняется неравенство $|d_{\mu\nu}(\alpha,\beta)-d_{\mu\nu}(\alpha_0,\beta_0)|<\varepsilon$. Если положить $r=\min\{r_{\mu\nu}\}_{\mu,\nu=0}^{\mu=m_\alpha;\ \nu=m_\beta}$, то на круге $V_r(\alpha_0,\beta_0)=\left\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\mid\sqrt{(\alpha-\alpha_0)^2+(\beta-\beta_0)^2}\le r\right\}$ выполняется система неравенств

$$|d_{\mu\nu}(\alpha,\beta)-d_{\mu\nu}(\alpha_0,\beta_0)|<\varepsilon\,(\mu=0,\ldots,m_\alpha;\quad\nu=0,\ldots,m_\beta)\,. \tag{П.2}$$

Круг $V_r(\alpha_0,\beta_0)$ есть компакт, в силу чего непрерывная функция $d_{\mu\nu}(\alpha,\beta)$ достигает на круге своих наименьшего и наибольшего значений $d_{\mu\nu,\min}=$ $=\min\limits_{(\alpha,\beta)\in V_r(\alpha_0,\beta_0)}d_{\mu\nu}(\alpha,\beta)=d_{\mu\nu}(\alpha_{\mu\nu,\min},\beta_{\mu\nu,\min})$; $d_{\mu\nu,\max}=\max\limits_{(\alpha,\beta)\in V_r(\alpha_0,\beta_0)}d_{\mu\nu}(\alpha,\beta)=$ $=d_{\mu\nu}(\alpha_{\mu\nu,\max},\beta_{\mu\nu,\max})$, где $(\alpha_{\mu\nu,\min},\beta_{\mu\nu,\min})\in V_r(\alpha_0,\beta_0)$ и $(\alpha_{\mu\nu,\max},\beta_{\mu\nu,\max})\in$

$\in V_r(\alpha_0, \beta_0)$. Тогда при $(\alpha, \beta) = (\alpha_{\mu\nu,\min}, \beta_{\mu\nu,\min})$ неравенства (П.2) принимают вид

$$d_{\mu\nu}(\alpha_0, \beta_0) - d_{\mu\nu,\min} < \varepsilon \, (\mu = 0, \ldots, m_\alpha; \quad \nu = 0, \ldots, m_\beta), \tag{П.3}$$

при $(\alpha, \beta) = (\alpha_{\mu\nu,\max}, \beta_{\mu\nu,\max})$ неравенства (П.2) принимают вид

$$d_{\mu\nu,\max} - d_{\mu\nu}(\alpha_0, \beta_0) < \varepsilon \, (\mu = 0, \ldots, m_\alpha; \quad \nu = 0, \ldots, m_\beta). \tag{П.4}$$

Суммируя неравенства (П.3) по $\mu = 0, \ldots, m_\alpha$, $\nu = 0, \ldots, m_\beta$, получим в качестве следствия неравенство $\sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu}(\alpha_0, \beta_0) - \sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu,\min} < (m_\alpha + 1)(m_\beta + 1)\varepsilon$, равносильное неравенству

$$\sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu,\min} > d(\alpha_0, \beta_0) - (m_\alpha + 1)(m_\beta + 1)\varepsilon. \tag{П.5}$$

Аналогично из неравенств (П.4) следует неравенство

$$\sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu,\max} < d(\alpha_0, \beta_0) + (m_\alpha + 1)(m_\beta + 1)\varepsilon. \tag{П.6}$$

Если $d(\alpha_0, \beta_0) > 0$, то можно положить $\varepsilon = d(\alpha_0, \beta_0)(2(m_\alpha + 1)(m_\beta + 1))^{-1}$, и тогда из неравенства (П.5) следует, что существует круг $V_{r'}(\alpha_0, \beta_0)$, на котором выполняется неравенство

$$\sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu,\min} > \frac{d(\alpha_0, \beta_0)}{2} > 0. \tag{П.7}$$

Если $d(\alpha_0, \beta_0) < 0$, то можно положить $\varepsilon = -d(\alpha_0, \beta_0)(2(m_\alpha + 1)(m_\beta + 1))^{-1}$, и тогда из неравенства (П.6) следует, что существует круг $V_{r''}(\alpha_0, \beta_0)$, на котором выполняется неравенство

$$\sum_{\mu=0}^{m_\alpha} \sum_{\nu=0}^{m_\beta} d_{\mu\nu,\max} < \frac{d(\alpha_0, \beta_0)}{2} < 0. \tag{П.8}$$

Из устойчивости многочлена $a(s, \alpha, \beta)$ в точке (α_0, β_0) по критерию устойчивости Гурвица следует, что все значения $a_0(\alpha_0, \beta_0)$, $a_n(\alpha_0, \beta_0)$, $\Delta_{n-1}(\alpha_0, \beta_0)$ или все положительны, или все отрицательны. Каждая из функций $a_0(\alpha, \beta)$, $a_n(\alpha, \beta)$, $\Delta_{n-1}(\alpha, \beta)$ есть многочлен вида (6), в силу чего для этих функций существует круг $V_r(\alpha_0, \beta_0)$, на котором выполняется одно из неравенств (П.7) или (П.8). Положим $d = r$, выберем $d_{\max} \in (0; d)$ и построим множество прямоугольников $P = P_a \cup P_b$. Пусть p есть прямоугольник из множества P, которому принадлежит точка (α_0, β_0). Если предположить, что прямоугольник $p \in P_b$, то справедливо неравенство $d_p \le d_{\max} < d$, следовательно $p \subseteq V_r(\alpha_0, \beta_0)$. Тогда на прямоугольнике p выполняется одно из неравенств (П.7) или (П.8) и, следовательно, $p \in P_a$. Полученное противоречие доказывает, что $p \in P_a$. На каждом прямоугольнике множества P_a многочлен $a(s, \alpha, \beta)$ или устойчив, или неустойчив. Поскольку многочлен $a(s, \alpha, \beta)$ устойчив в точке $(\alpha_0, \beta_0) \in p$, то p есть устойчивый прямоугольник, покрывающий точку (α_0, β_0). Теорема 6 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чернецкий В.И., Дидук Г.А., Потапенко А.А.* Математические методы и алгоритмы исследования автоматических систем. Л.: Энергия, 1970.
2. *Савин М.М., Елсуков В.С., Пятина О.Н.* Теория автоматического управления. Ростов на Дону: Феникс, 2007.
3. *Егоров А.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: Физматлит, 2005.
4. *Dorf R., Bishop R.* Modern Control Systems. New Jersey: Prentice Hall, 2011.
5. *Грязина Е.Н., Поляк Б.Т., Тремба А.А.* Современное состояние метода D-разбиения // АиТ. 2008. № 2. С. 3–40.

   Gryazina E.N., Polyak B.T., Tremba A.A. D-decomposition Technique State-of-the-art // Autom. Remote Control. 2008. V. 69. No. 12. P. 1991–2026.
6. *Васильев О.О.* Исследование D-разбиений методами вычислительной вещественной алгебраической геометрии // АиТ. 2012. № 12. С. 36–55.

   Vasil'ev O.O. Study of D-decompositions by the Methods of Computational Real-valued Algebraic Geometry // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 12. P. 1978–1993.
7. *Зорич В.А.* Математический анализ. Ч. 1. М.: МЦНМО, 2012.
8. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. М.: Физматлит, 2000.
9. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 2010.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 11.08.2017

После доработки 10.06.2020

Принята к публикации 09.07.2020

© 2021 г. А.А. ТРЕМБА, канд. физ.-мат. наук (atremba@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

СМЕШАННАЯ РОБАСТНОСТЬ: АНАЛИЗ СИСТЕМ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМИ И СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ПРИМЕРЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ[1]

Рассматривается вопрос робастности линейных систем с постоянными коэффициентами. Существуют методы и инструменты анализа устойчивости систем со случайными либо детерминированными неопределенностями. При этом нет подходов для анализа систем, содержащих оба типа параметрической неопределенности. В статье проводится классификация типов робастности и вводится новый тип — “смешанная параметрическая робастность”, включающий несколько вариаций. Предлагаемые постановки задач о смешанной робастности могут рассматриваться как промежуточные варианты между классическим детерминированным и вероятностным подходами к робастности. Перечислены несколько случаев, в которых поставленные задачи легко решаются. В общем случае применимы проверки устойчивости робастных систем с помощью сценарного подхода, однако эти проверки могут быть вычислительно сложными. Для вычисления искомой вероятности устойчивости предложен простой графоаналитический подход, основанный на робастном D-разбиении. Этот способ подходит для случая небольшого числа случайных параметров. Итоговая оценка вероятности устойчивости вычисляется детерминированным способом и может быть найдена с произвольной точностью. Описаны приближенные способы решения поставленных задач. Приведены примеры и обобщение смешанной робастности на другие типы систем.

Ключевые слова: смешанная робастность, детерминированная робастность, вероятностная робастность, линейные системы, устойчивость.

DOI: 10.31857/S000523102103003X

1. Введение

В основном в статье рассматриваются динамические системы с постоянными коэффициентами и робастность устойчивости относительно неопределенности[2]. Во введении намеренно не оговорен точный класс систем, здесь

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-11-10015).

[2] В общем случае предлагаемые постановки задач подходят для любых систем, зависящих от параметров, см. подробнее заключительный раздел 6. Допустимо рассматривать и непараметрическую неопределенность, но формальное описание соответствующих задач затруднено. Обобщение смешанной робастности на другие свойства системы или критерии качества, помимо устойчивости, тривиально.

изложены принципиальные подходы к постановкам и решению задач робастности. Далее эти подходы демонстрируются на примере робастной устойчивости. Без потери общности читатель может рассматривать экспоненциальную (асимптотическую) устойчивость линейной системы с одним входом и одним выходом, заданной дробно-рациональной передаточной функцией.

Основная цель работы состоит в описании нового вида неопределенности — смешанной неопределенности и сопутствующей ей робастности систем. Этот вид объединяет два типа неопределенности разной природы: детерминированной и случайной.

Статья организована следующим образом: после обзорного введения с описанием различных типов робастности в разделе 2 предлагается новый тип робастности — смешанная робастность. Формулировки трех подтипов задачи о смешанной робастности приведены в разделе 3 на примере задачи о робастной устойчивости. Там же для некоторых из них описан известный способ решения с помощью сценарного подхода. В разделе 4 для случая маломерного случайного параметра предлагается использовать графический (графо-аналитический) подход, основанный на технике робастного D-разбиения. В подразделе 3.3 предложены процедуры приближенного решения. Примеры приведены в разделе 5. В заключении приведен ряд направлений развития поставленных задач.

1.1. Терминология робастности

Широко используемый в теории управления термин “робастность”[3] можно понимать по-разному в зависимости от контекста и области применения. Как правило, он используется в качестве характеристики или свойства (робастные регуляторы, робастные системы, робастное управление, робастная стабилизация, робастное оценивание и др.), но в контексте статьи этот термин будет рассмотрен как самостоятельный, поскольку интерес представляют разновидности робастности.

Введенный в статистике Боксом и популяризированный Хубером в контексте “устойчивости”, “стабильности” и “грубости” оценок, термин стал использоваться и в теории управления.

Формирование классической теории робастности состоялось в 80-х гг. XX в. В первую очередь исследовалась робастная устойчивость полиномов и матриц, см., например, дискуссию по проблеме робастности, состоялось на 11-м Международном конгрессе по автоматическому управлению IFAC [2]. Позднее к ним добавилась H_∞-теория, M–Δ и μ-анализ, обобщающие различные виды неопределенности. Систематический обзор результатов представлен в [3–5].

В русском языке термин установился не сразу. Понятие “грубости”, соответствующее переводу английского “robust”, было введено в лексикон теории управления Андроновым в немного другом контексте (ему соответствует обратное свойство — “хрупкость”). Стало ясно, что нужно слово, описывающее

[3] Англоязычный термин robustness (robust) трактуется еще более разнообразно. На русском языке термин робастность по отношению к системам управления был систематически использован в монографии [1].

сохранение свойств при изменении системы или, если смотреть с другой стороны, сохранение свойств *множества систем*.

В итоге появился новый термин — “робастность”, который активно использовал в своих работах Я.З. Цыпкин и его ученики [6, 7]. Популяризации термина во многом способствовала монография [1], по сути, закрепившая его. Вместе с этим для обозначения задач робастности продолжают использоваться синонимы “грубость”, “нечувствительность” и др. [8].

Каким образом можно выделить класс задач, связанных с робастностью? Неформально “робастностью” называется свойство нечувствительности (системы) по отношению к неопределенности. Далее приведены две устоявшиеся характеристики робастности, а затем — два основных типа неопределенности: детерминированная и вероятностная. На их основе предлагается ввести новый, смешанный тип робастности, также удовлетворяющий указанным характеристикам.

Во-первых, “робастность” определяется относительно неопределенности, которая может быть параметрической или непараметрической. Непараметрическая включает в себя “немоделируемую динамику”, описываемую в частотной области (H_∞-теория, QFT), структурную неопределенность (например, M–Δ и μ-анализ) и даже внешние помехи. Часто неопределенность задается посредством номинальной системы и присутствующего в ней возмущения[4].

В статье рассматривается параметрическая статическая неопределенность. Истинное значение параметра считается неизвестным, но зафиксированным в течение времени. Тем самым можно говорить о *параметрической робастности*. В этом случае система и ее характеристики явно или неявно зависят от n-мерного вещественного вектора $q \in \mathbb{R}^n$, комплекснозначная неопределенность рассматривается аналогично.

Классическое детерминированное описание неопределенности как множества позже было дополнено вероятностной постановкой, с помощью случайных величин. В подразделах 1.2.1 и 1.2.2 эти типы параметрической неопределенности и связанные с ними задачи описаны подробнее.

Во-вторых, робастность определяется относительно *желаемого/требуемого свойства* системы. Помимо привычной робастной устойчивости, таким свойством может быть выполнение заданного критерия качества, удовлетворение фазовым ограничениям или даже сохранение определенных статистических характеристик системы [3]. Можно рассуждать о робастности “такого-то свойства” по отношению к “такой-то неопределенности”.

Упомянем, что в статистике и анализе данных, где возник термин “робастность”, он понимается в более узком смысле: как чувствительность/нечувствительность к отклонениям распределений и выбросам [7].

[4] Здесь термин “возмущение” используется не для описания внешнего воздействия, а как изменение параметров или иных характеристик системы. Исторически способность системы противодействовать внешним возмущениям или подавлять внешние шумы с *заданными, определенными* характеристиками редко называется робастностью. Вместе с этим способность системы сохранять заданное свойство при *разных* характеристиках внешних сигналов называться робастностью может (робастность относительно вариативности этих характеристик). Граница между этими случаями размыта, устоявшегося общепринятого понимания применимости термина “робастность” нет.

Задача *робастного синтеза* состоит в том, чтобы сделать систему "робастной", т.е. удовлетворить конкретный критерий для конкретной неопределенности. Например, надо найти регулятор заданной структуры, стабилизирующий систему, параметры которой известны в некоторых пределах, и т.п. Полученный регулятор называется "робастным", в данном случае робастно стабилизирующим.

В основе задачи синтеза лежит задача *робастного анализа*, которая состоит в проверке заданного критерия (например, устойчивости) для заданной неопределенности. Далее "задачей о робастности" называется именно задача робастного анализа и ее вариации.

Для постановки задачи анализа существенно то, как именно проверяется требуемый критерий в зависимости от типа неопределенности. Эта проверка может быть бинарной (выполняется/не выполняется), шкалированной или вероятностной. Рассмотрим эти задачи подробнее на примере анализа устойчивости.

1.2.1. "Классический" робастный параметрический анализ (бинарный, гарантирующий подход)

Параметрическую неопределенность удобно задавать параллелепипедом (брусом), эллипсоидом, шаром в какой-либо норме или иным заданным множеством $Q \subset \mathbb{R}^n$. Например, характеристический полином системы может иметь интервальные коэффициенты, которые и являются неопределенными параметрами. Данное множество обычно содержит *номинальное* значение параметра $q_0 \in Q$, задающего номинальную систему. Напомним, что в статье рассматривается статическая параметрическая неопределенность, т.е. параметр, будучи неизвестным, не меняется с течением времени.

Задача робастной устойчивости состоит в проверке устойчивости системы *для каждого* элемента из множества возможных значений (множества неопределенности):

$$\text{Параметрическая система “робастно устойчива”} = \text{Система устойчива для всех } q \in Q. \tag{1}$$

Этот подход реализует концепцию гарантированной устойчивости, принимающий во внимание все "наихудшие" варианты (worst-case) неопределенности. Будем называть подобный вид робастности *детерминированной робастностью*, а задачу — задачей о детерминированной робастности. Результат анализа бинарный: либо робастность есть, либо ее нет.

В качестве примера можно рассмотреть прямоугольник на рис. 1 как множество неопределенных параметров Q и устойчивость в качестве критерия. Каждое значение параметра — точка в двумерном пространстве (q_1, q_2) — соответствует либо устойчивой, либо неустойчивой системе. Пусть множества "устойчивых" и "неустойчивых" параметров разделены некоторой "пограничной" линией, отсекающей часть прямоугольника-неопределенности. Поскольку часть множества Q принадлежит области неустойчивых параметров, то

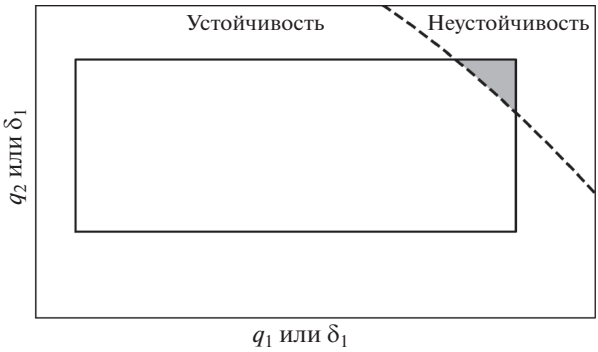


Рис. 1. Иллюстрация детерминированного и вероятностного подхода. Сплошная линия обозначает границу прямоугольного множества неопределенности. Штриховая линия обозначает границу между “устойчивыми” и “неустойчивыми” параметрами. Серая часть прямоугольника соответствует значениям параметров из множества неопределенности, при которых система неустойчива.

решением задачи детерминированной робастной устойчивости будет “Нет”: система не робастно устойчива.

Проверка детерминированной робастности (а тем более решение задачи робастного синтеза) в большинстве случае является принципиально сложной задачей. Для анализа устойчивости существует ряд успешно разрешенных вопросов, таких как Теорема о вершинах, Реберная теорема или знаменитый результат Харитонова о сведении анализа устойчивости интервального семейства полиномов к анализу всего четырех полиномов [5, 9]. Однако эти случаи являются скорее исключением, чем правилом. Для большинства интервальных случаев эта задача является NP-полной, например, для анализа робастности по отношению к неопределенности-многограннику может потребоваться перебор всех вершин этого множества, а число вариантов перебора экспоненциально растет с размерностью [10, 11].

Помимо сложности решения задачи о классической робастности, критике подвергалась сама постановка: почему множество допустимых неопределенных параметров выбирается тем или иным, каков размер этого множества? Например, если неопределенность задана шаром, то как выбирать его радиус? Отметим, что в классическом робастном анализе есть важная задача о радиусе робастной устойчивости (robustness margin), состоящая в определении максимального размера множества неопределенности заданной формы, сохраняющего устойчивость [1, 5].

Для полноты картины следует упомянуть подход, описывающий робастность не-бинарного критерия качества, например перерегулирования. В зависимости от размера множества неопределенности Q значение критерия будет “деградировать” (ухудшаться при увеличении размера) [12]. Кривая деградации в зависимости от размера неопределенности дает полезную информацию для принятия решений. Такой подход назван шкалированной, модулированной робастностью (modulated robustness) [13]. Для бинарного же критерия, такого как устойчивость, переход от устойчивости к неустойчивости “мгновенный” и определяет радиус робастной устойчивости.

Кроме того, множества неопределенности часто формируются исходя из грубых верхних и нижних оценок внутренних параметров, что неизбежно влечет консерватизм решения. Еще одной проблемой классического робастного анализа является встречающаяся "сосульчатая" (icicle) геометрия множества неустойчивых параметров [13]. В этом случае есть параметры, близкие к номинальным, делающие систему неустойчивой, и радиус робастной устойчивости близок к нулю. Но при этом объем множества таких "неустойчивых" параметров может быть пренебрежимо мал по сравнению со всем множеством неопределенности.

Таким образом, будучи несомненно полезным и важным подходом к исследованию и синтезу систем управления, классический, гарантирующий подход к робастности имеет свои ограничения.

1.2.2. Вероятностный робастный параметрический анализ (случайные параметры)

Для преодоления указанных проблем был предложен вероятностный подход. В этом подходе неопределенность в системе считается *вероятностной*, представленной случайным вектором $\delta \in \mathbb{R}^m$ [14]. Этот вектор имеет некоторое распределение на множестве $\Delta \subset \mathbb{R}^m$, являющемся носителем (функции) распределения. Для простоты[5] обозначим такой вид неопределенности вместе с его распределением как $\delta \sim \Delta$. Существенно, что в данном подходе *разрешается* потеря устойчивости (как правило, небольшая), которая описывается в терминах теории вероятности.

Задача *вероятностного анализа* робастной устойчивости состоит в нахождении вероятности устойчивости p^* по отношению к случайной неопределенности δ:

$$p^* = \mathrm{Prob}_{\delta\sim\Delta}\big[\text{Система устойчива для данного } \delta\big]. \tag{2}$$

Эта вероятность равна мере множества "устойчивых" параметров, т.е. значений, при которых система устойчива. Будем называть этот вид устойчивости по отношению к "случайной" неопределенности *вероятностной робастностью*. Это уже не бинарное свойство, оно сопровождается своим значением вероятности.

Вероятность логического утверждения, зависящего от случайной переменной δ, понимается как мера множества, на котором это утверждение истинно. Она равна интегралу Лебега от индикаторной функции этого утверждения, принимающей значения 0, если утверждение ложно, и 1, если истинно. Будем предполагать, что утверждение алгоритмически разрешимо (индикаторная функция вычислима в точках носителя и на его подмножествах). Автор на-

[5] Строго говоря, распределение задается тройкой $(\Delta, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ с множеством элементарных событий Δ, сигма-алгеброй его подмножеств $\mathcal{F}$ и вероятностной мерой $\mathcal{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$, но для краткости избыточные обозначения опущены. Далее мера обозначается символом μ. Используется традиционная мера Лебега, а обозначение распределения ассоциируется с множеством Δ. Рассматриваемые множества неопределенности предполагаются измеримыми. Можно рассматривать как абсолютно непрерывные распределения, заданные функцией плотности распределения, так и дискретные распределения либо их смесь. В контексте робастного анализа с вероятностной точки зрения важен их носитель и (кумулятивная) функция распределения.

меренно не использовал термин “стохастическая робастность”, так как этот термин более широкий и используется чаще по отношению к устойчивости систем со случайными процессами. Следует особо отметить, что система не обладает стохастической динамикой, но часть ее параметров является реализацией конечномерной случайной величины δ.

Задача о вероятностной робастности (2) связана с детерминированной робастностью (1) несколькими путями.

Во-первых, следуя подходу [15], предлагается *методически заменять* детерминированную неопределенность $q \in Q$ случайной неопределенностью δ той же размерности, *равномерно распределенной* на множестве Q (тем самым полагая $\Delta = Q$). Таким образом, “трудная” задача о детерминированной робастности (включая задачи синтеза) заменяется полиномиально сложной [16]. Это связано с тем, что можно эффективно вычислять вероятность устойчивости (2) методом Монте-Карло (см. подраздел 3.2 с подробностями). Очевидно, что новая задача имеет другое содержание, но ее решение может быть интерпретировано в контексте исходной детерминированной задачи. В случае единичной вероятности устойчивости $p^* = 1$ результат можно трактовать[6] как детерминированную робастность по отношению к множеству Q, совпадающему с Δ. Если же вероятность устойчивости меньше единицы, то это соответствует отсутствию детерминированной робастной устойчивости. Полученный результат может привести к разумной корректировке постановки исходной задачи, например, в виде рекомендации уменьшить множество неопределенных параметров.

Во-вторых, неопределенность может быть вероятностной изначально, т.е. описывать случайность значений параметров. В этом случае распределение уже не обязательно равномерное. Согласно классическому подходу к робастности, в качестве множества неопределенности выбирается либо весь носитель случайных параметров, либо его доверительное множество высокой вероятности (множество квантили). В обоих случаях в постановку вносится консерватизм, сопровождаемый вопросами выбора уровня квантили и выбора соответствующего доверительного множества. В то же время исходная вероятностная задача анализа может быть эффективно решена напрямую, и ответом является вероятность устойчивости. Более того, для успешного решения достаточно иметь генератор выборки распределения случайных параметров/систем, а не его аналитическое описание [12]. Этот же подход используется для вероятностных задач синтеза, см. [17].

Ключевая идея — использовать или вводить случайность неопределенных параметров — получила должную популярность: основная монография [12] была переиздана спустя 8 лет. Подход получил широкое распространение и в приложениях, поскольку он строго обосновывает идеи *рандомизации* при анализе и синтезе систем управления.

Рассмотрим тот же рис. 1. Пусть прямоугольник является носителем Δ с равномерным распределением случайного параметра δ. Тогда решение задачи вероятностного робастного анализа (2) дается в точности отношением

[6] С точностью до множеств нулевой вероятности. В зависимости от задачи эта разница может быть ничтожной либо, наоборот, — существенной.

площади незаштрихованной части прямоугольника к его общей площади. Наряду с вероятностью устойчивости удобно использовать *вероятность потери устойчивости* $1 - p^*$. Для равномерного распределения она равна доле заштрихованной части прямоугольника, т.е. 2 %.

Оценка вероятности устойчивости (2) может быть выполнена несколькими способами.

Во-первых, если дано описание множества устойчивых параметров, то меру этого множества можно найти явно. Для равномерного распределения это задача геометрической вероятности: надо найти отношение объемов устойчивых параметров в носителе к объему самого носителя Δ. Эта же величина может быть вычислена с помощью объема множества неустойчивых параметров (см. формулу (13) далее). Сами объемы могут быть найдены аналитически или численно.

Во-вторых, оценка вероятности p^* может быть сделана эмпирически с помощью случайной выборки на множестве неопределенности согласно сопутствующему ему распределению. Для равномерного распределения отношение подмножеств оценивается отношением числа точек, попавших в каждое из подмножеств. Этот подход является самым известным и мощным инструментом для решения вероятностных задач анализа и синтеза. В теории управления он известен как *сценарный подход* и использует идею *рандомизации*, см. подробнее подраздел 3.2. В его основе лежит метод типа Монте-Карло, включающий вычисление необходимого размера выборки для достижения заданного *качества* оцениваемой вероятности [14, 17]. Обширная коллекция рандомизированных алгоритмов для решения вероятностных задач управления приведена в монографии [12] и в ее библиографическом списке. Сценарный подход может быть использован и для решения задач синтеза, которые в статье не рассматриваются.

Отметим, что существуют способы формирования выборки для сложных и неявно заданных множеств неопределенности. В них используются реализации метода Монте-Карло в марковских цепях, организованные как случайное блуждание “биллиардного” типа (Billiard Walk) или “удар–отход” (Hit-and-Run) [18].

Есть и обратная зависимость между вероятностной и детерминированной робастностью. Задачу о вероятностной робастности можно приближенно решать детерминированными методами. Для фиксированного значения вероятности p выбирается множество квантили $Q_p : \mathrm{Prob}_{\delta\sim\Delta}[\delta \in Q_p] = p$, и для него проверяется робастная устойчивость. Если система оказывается устойчивой (в детерминированном смысле относительно Q_p), то вероятность робастной устойчивости не меньше p. Подбор уровня и множества квантили остается во многом эвристической процедурой, во многом из-за “сосульчатого” множества неопределенных параметров.

2. Смешанная робастность

В данном разделе неформально вводится концепция *смешанной робастности*, совмещающей два вышеупомянутых типа робастности. Строгие формулировки приведены в разделе 3.

Рассмотрим линейную систему с постоянными коэффициентами, имеющую и детерминированную параметрическую неопределенность q, и случайную δ. Параметры принадлежат своим множествам $q \in Q \subset \mathbb{R}^n$, $\delta \in \Delta \subseteq \mathbb{R}^m$. Случайный вектор δ распределен на множестве Δ и обозначается как $\delta \sim \Delta$. Параметры распределения здесь несущественны и опущены.

Начнем с простого случая: пусть распределение случайного параметра δ не зависит от значения параметра q (также неопределенного). Анализ устойчивости таких систем включает в себя и вероятностную, и гарантирующую части. Соответственно задача является смесью детерминированной (1) и вероятностной (2) задач. Она состоит в нахождении вероятности

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{Prob}_{\delta\sim\Delta}[\text{Система устойчива для данного } \delta \text{ и всех } q \in Q].$$

Формально поставленная задача может называться задачей о “вероятностной робастности”. В конце концов, *это и есть* задача вероятностного анализа устойчивости типа (2), сформулированная с более сложным утверждением “Система *робастно* устойчива (по q на множестве Q) для данного δ” вместо “Система устойчива для данного δ”. Ее разрешимость с помощью сценарного подхода и связь с известными способами решения обсуждается в подразделе 3.2. Более того, эта задача подпадает под обобщенную формулировку задачи 6.4 из [12] о вычислении (вероятностного) показателя качества системы. Вместе с этим существуют более удобные методы вычисления вероятности (3), использующие особенность постановки.

Во избежания двусмысленности термина “робастность” предпочтительно использовать термин *смешанная параметрическая робастность*. Этот термин подчеркивает не только параметрическую форму неопределенности, но и существенную роль разных типов неопределенности: случайной и не случайной. Поскольку далее рассматриваются только параметрические неопределенности, уточнение “параметрическая/ие” опускается.

В общем случае параметры этих двух видов могут быть зависимыми или подчиненными друг другу, см. раздел 3 статьи. Соответствующие постановки задач являются также новыми. В разделе 4 предложен ряд подходов к решению, специфичных для задач смешанной робастности.

Отметим, что довольно часто встречаются задачи, в которых детерминированная параметрическая робастность смешивается с вероятностной *динамической* неопределенностью в шуме/возмущениях/ограничениях, см. [19–23]. Такие неопределенности также известны под именем структурированно-неструктурированных возмущений (structured-unstructured perturbation) [24]. Другим примером смешивания с зависимыми случайными и не случайными переменными являются задачи оптимизации с квантильными ограничениями, но в них преследуется иная цель. В то же время комбинация случайных и не случайных неопределенных параметров изучалась редко или неявно, для других задач или в другом контексте, в частности для упрощения задачи синтеза регулятора [25] или для оценки некоторого распределения [26].

Далее понятие смешанной робастности проводится на примере анализа линейных систем управления с постоянными коэффициентами, содержащих смешанную (гибридную, совместную) параметрическую неопределенность.

2.1. Мотивирующие факторы для введения смешанной параметрической робастности

Деление между детерминированными и случайными параметрами возникает в нескольких случаях.

Во-первых, в системе эти параметры могут иметь различную природу. Например, случайный параметр δ представляет неопределенность в регуляторе (неточность реализации), в то время как параметр q отвечает за неопределенность в управляемой системе либо наоборот. В [25] подобное разделение было сделано искусственно для не робастной задачи синтеза регулятора. В этом случае часть параметров регулятора случайно выбирались по методу Монте-Карло, а области устойчивости по остальным параметрам легко вычислялись. Основной идеей являлся случайный, рандомизированный подбор регуляторов, этот подход не был связан с анализом робастности.

Во-вторых, выделение нескольких параметров из общего числа варьируемых параметров полезно для более глубокого исследования системы. Этот выбор может быть сделан вручную для оценки так называемой "модулированной" (шкалированной) робастности по отношению к выбранным параметрам либо для оценки потери качества при изменении множества неопределенности [12, 13]. Случайность выделенных параметров может быть навязана искусственно [16]. С одной стороны, эта случайность моделирует нежесткие ограничения, а с другой — отражает априорные представления о неопределенности. В зависимости от задачи случайный параметр можно рассматривать, например, как равномерно или нормально распределенный, с несимметричным распределением, представленный смесью распределений и т.д. Такой подход помогает не только формализовать априорные представления о неопределенности, но также помогает убедиться в отсутствии *хрупкости*, т.е. негативной чувствительности системы к малым изменениям выбранных параметров. А параметры, найденные с помощью оптимизации (без учета робастности), часто именно такие, подробнее об этом эффекте см. [27].

В-третьих, предложенная постановка может возникнуть, если некоторая часть неопределенных параметров ограничена "жестко" (q), а другие параметры ограничены "мягко" (δ). Действительно, даже если использовать вероятностный подход, не обязательно ожидать, что *все* неопределенные параметры представимы случайными величинами. Этот случай включает в себя нечеткие неопределенности, которые, например, могут быть смоделированы как сумма интервального и случайного значений. При этом привлекать специальный аппарат нечеткого исчисления не требуется.

В-четвертых, задача о смешанной робастности является результатом *частичной* рандомизации, при которой только некоторые из исходно детерминированных неопределенных параметров заменяются случайными.

Основным результатом статьи является постановка задач для смешанной параметрической робастности, включающей различные типы неопределенности. В случае нескольких случайных параметров для решения этой задачи предлагается использовать графо-аналитический подход.

Предложенное понятие смешанной робастности по сложности заполняет промежуток между детерминированными задачами и изложенными в [12,

гл. 6] идеями вероятностного анализа этих задач. Тем самым можно найти компромисс между сложностью (вложенной) задачи о детерминированной робастности и "неуверенностью" (т.е. случайностью исхода) решения вероятностной задачи о робастности.

Подчеркнем схожесть и отличия между предложенными задачами о смешанной робастности и вероятностным вычислением показателя качества из [12, гл. 6]. В то время как задача 6.1 в [12] поставлена относительно произвольного критерия, в приведенных примерах предполагается, что случайно распределенный параметр δ — это *единственная* неопределенность. Затем эта неопределенность исследуется вероятностными методами с учетом детерминированных ограничений на нее. Таким образом, одна из задач ставится как поиск вероятности[7]

$$\mathrm{Prob}_{\delta\sim\Delta}\big[P(s,\delta) \text{ гурвицев } \textbf{и } \delta \in Q\big].$$

В предложенной же задаче о смешанной робастности (3) критерий, параметризованный случайной переменной δ, включает внутреннюю робастность по отношению к *другой неопределенности* q. Тем самым простейшая задача о смешанной робастности одновременно охватывает две *различные* группы "робастности": внутреннюю по отношению к параметру q и внешнюю по отношению к параметру δ. Если бы δ был тоже детерминированным (в контексте классической робастности), либо параметр q был бы случайным, то в итоге задача свелась бы к классической детерминированной постановке (1) или к полностью вероятностной постановке (2) соответственно.

Помимо рассмотренного примера независимых случайных и неслучайных параметров, возникают два новых типа смешанной робастности: случайные параметры могут зависеть от неслучайных и наоборот — множество неопределенности детерминированных параметров само может быть случайным, подробнее см. раздел 3.

Смешивание разных типов параметрической робастности и их взаимосвязь в задачах автоматического управления являются новыми. С другой стороны, идея вычисления вероятности попадания случайного параметра δ в "хорошее" или "плохое" множество хорошо известна, см., например, [12, раздел 6.2]. Трудность состоит в удобном описании этих множеств. Для случая маломерного случайного параметра эта задача решена в разделе 4 с помощью робастного D-разбиения.

3. Постановка задач о смешанной робастности

Рассмотрим замкнутую линейную систему с постоянными коэффициентами без запаздывания[8] с двумя типами параметров: детерминированными $q \in Q \subset \mathbb{R}^n$ и случайными $\delta \sim \Delta \subseteq \mathbb{R}^m$. Случайная величина δ распределена

[7] Значение показателя качества в постановке заменено на критерий устойчивости для краткости. Упомянутая глава содержит много других идей анализа, например изучение деградации критерия качества (при случайных параметрах) и т.п., см. также похожий подход к "шкалированной" робастности в [13].

[8] Расширения на другие типы систем представлены в разделе 6.

на множестве Δ с некоторой вероятностной мерой (равномерной, нормальной и т.д.). Еще раз подчеркнем, что предложенные постановки имеют смысл не только для задач устойчивости, но и для любых желаемых свойств системы.

Устойчивость рассматриваемой системы определяется корнями характеристического полинома, коэффициенты которого зависят от параметров

$$P(s,q,\delta) = a_0(q,\delta)s^k + \ldots + a_k(q,\delta).$$

Для устойчивости непрерывной системы этот полином должен быть гурвицевым, т.е. все его корни s_i должны иметь отрицательную вещественную часть $\operatorname{Re} s_i < 0$. Для устойчивости дискретной системы аналогичный полином $P(z,q,\delta)$ должен быть шуровским, т.е. все корни должны находиться внутри единичного круга $|z_i| < 1$. Без потери общности далее рассматривается только непрерывный случай, и устойчивость системы отождествляется со свойством Гурвица ее характеристического полинома.

Задача анализа *смешанной параметрической робастности* состоит в том, чтобы найти вероятность устойчивости по случайной переменной δ при наличии неопределенности q. Поскольку в общем случае случайные и детерминированные параметры могут быть зависимыми друг от друга, приведем три постановки задачи о смешанной робастности.

В самом простом варианте случайная и детерминированная неопределенности полностью независимы, т.е. задача имеет форму (3). Пусть это и самый простой способ смешивания, но он является новым. Здесь неопределенные параметры равноправны.

I. *Задача* о независимой смешанной параметрической робастности (Q–Δ робастность).

Пусть заданы случайный параметр $\delta \sim \Delta \subseteq \mathbb{R}^m$ и множество неопределенности $Q \subset \mathbb{R}^n$, а также характеристический полином системы с постоянными коэффициентами $P(s,q,\delta)$. Требуется найти вероятность устойчивости

$$p^* = \operatorname{Prob}_{\delta\sim\Delta}\Big[P(s,q,\delta) \text{ гурвицев для всех } q \in Q\Big]. \tag{4}$$

В статье эта и последующие значения вероятности называются *вероятностями смешанной робастности* или *вероятностями смешанной робастной устойчивости*.

Далее, множество возможных параметров Q для детерминированной неопределенности может зависеть от случайного параметра δ, т.е., строго говоря, само быть случайным. Тем самым детерминированная неопределенность подчинена случайной.

II. Смешанная *задача* робастности с зависимостью первого типа ($Q(\Delta)$ робастность).

Пусть заданы случайный параметр $\delta \sim \Delta \subseteq \mathbb{R}^m$, значения которого связаны с множествами неопределенности $Q(\delta) \subset \mathbb{R}^n$, и характеристический полином системы с постоянными коэффициентами $P(s,q,\delta)$. Требуется найти вероятность устойчивости

$$p^* = \operatorname{Prob}_{\delta\sim\Delta}\Big[P(s,\delta,q) \text{гурвицев для всех } q \in Q(\delta)\Big]. \tag{5}$$

Отметим, что характеристический полином зависит не только от случайного множества неопределенности q, но и от самого случайного параметра δ. Можно рассматривать форму записи задачи только со случайным множеством (без неопределенности δ в характеристическом полиноме) $\Big[P(s,\bar{q})$ гурвицев для всех $\bar{q} \in \bar{Q}(\delta)\Big]$. Легко показать, что эти постановки эквивалентны.

Наконец, случайный параметр δ (по существу — его распределение и носитель) может зависеть от значения детерминированной неопределенности. Эту постановку можно рассматривать как поиск "наихудшего" варианта неопределенности. При этом неопределенность понимается в расширенном смысле и включает неопределенность в распределении $\Delta(q)$.

III. Смешанная *задача* робастности с зависимостью второго типа ($\Delta(Q)$ робастность).

Пусть заданы множество неопределенных параметров $Q \subset \mathbb{R}^n$ и семейство случайных параметров $\delta \sim \Delta(q) \subseteq \mathbb{R}^m$, параметризованное с помощью $q \in Q$. Для характеристического полинома системы с постоянными коэффициентами $P(s,q,\delta)$ найти гарантированную *вероятность устойчивости*

$$p^* = \inf_{q\in Q} \operatorname{Prob}_{\delta\sim\Delta(q)}\Big[P(s,q,\delta) \text{ гурвицев}\Big]. \tag{6}$$

Эта постановка охватывает параметрические семейства распределений как частный случай, при котором меняются только параметры, но не носитель. Для удобства положим, что указанный минимум достигается (например, если Q компактно, а распределение задано функцией распределения, равномерно непрерывной по параметру q). Вместе с этим предложенная постановка более общая, так как устойчивость системы может зависеть не только от *параметризованного распределения* случайного параметра ($\min_{q\in Q} \operatorname{Prob}_{\delta\sim\Delta(q)}[P(s,\delta)$ гурвицев]), но детерминированный параметр может также влиять на устойчивость непосредственно, например, частью компонент, к примеру $\min_{(q^a,q^b)\in Q} \operatorname{Prob}_{\delta\sim\Delta(q^a)}[P(s,q^b,\delta)$ гурвицев].

Как частный случай, в третий тип попадает задача с фиксированным распределением, при котором неопределенность входит только в сам характеристический полином:

$$\min_{q\in Q} \operatorname{Prob}_{\delta\sim\Delta}[P(s,q,\delta) \text{ гурвицев}].$$

Несмотря на то что в такой постановке оба типа параметров независимы, эта задача принципиально отличается от задачи о Q–Δ робастности (4). Ее также можно интерпретировать как задачу о нахождении *гарантированного "среднего" показателя устойчивости*, понимая вероятность устойчивости $\operatorname{Prob}_{\delta\sim\Delta}[P(s,q,\delta)$ гурвицев] как "усредненное значение устойчивости" по множеству Δ. Схожий подход к минимизации не бинарного критерия описан в [13]. Отметим, что попутно может быть определено "наихудшее" с точки зрения устойчивости значение параметра $q^* \in \operatorname{Arg}\min_{q\in Q}(\cdots)$. Такое значение параметра может быть не единственным, даже если минимум достижим. Если минимум не достигается, возможна постановка задачи о нахождении предельной точки или локализации области "наихудших" параметров.

С точки зрения разрешимости поставленных задач самой простой, по-видимому, является задача о Q–Δ робастности с независимыми неопределенностями (4). Методы, подходящие для решения задачи о $Q(\Delta)$ робастности (5), также подходят и для нее. Задача о $\Delta(Q)$ робастности с обратной зависимостью имеет принципиально другую природу. По-видимому, она наиболее трудоемка (за исключением дискретного случая, см. подраздел 4.3). Для нее в подразделе 3.3 предлагается использовать приближенный метод.

Далее перечислены несколько способов решения поставленных задач о смешанной робастности с помощью известных методов. В подразделе 3.3 предложены методы приближенного решения. В разделе 4 задачу анализа о независимой Q–Δ робастности предлагается решать в два этапа с помощью вспомогательной задачи синтеза.

3.1. Аналитическое решение

Для первых двух задач о смешанной робастности (Q–Δ и $Q(\Delta)$) можно формально описать внутренний критерий с помощью индикаторной функции устойчивости

$$F(\delta) = I[P(s, q, \delta) \text{ робастно устойчив}]. \tag{7}$$

Здесь робастность подразумевается либо для фиксированного множества неопределенности Q, либо для параметризованного $Q(\delta)$. Для разных значения $\delta \in \Delta$ вычисление этой функции сводится к различным задачам о детерминированной робастности. В этом случае решение задачи о смешанной робастности (4) записывается как

$$p^* = \int\limits_{\delta} F(\delta) d\mu, \tag{8}$$

т.е. как мера множества *робастно стабилизирующих* параметров $\Delta_{good} \ni \delta$. Здесь использована мера Лебега μ, лежащая в основе распределения случайного параметра.

Однако функция F редко доступна в явном виде, поскольку ее вычисление включает детерминированную задачу о робастной устойчивости (1), которая может быть трудоемка.

Аналогично характеризуется прямой способ решения задачи $\Delta(Q)$-робастности. Если вероятность устойчивости в параметризованных вероятностных задачах робастности $p^*(q) = \mathrm{Prob}_{\delta \sim \Delta(q)} \big[P(s, q, \delta) \text{ гурвицев}\big]$ имеет явный вид, то решение можно получить с помощью задачи оптимизации $p^* = \min_{q \in Q} p^*(q)$, в общем случае невыпуклой и негладкой.

3.2. Сценарный подход (выборка методом Монте-Карло)

Следуя идее рандомизации в вероятностном анализе, для оценки вероятности (8) может быть использован сценарный подход (выборочный, эмпирический) [14]. Надо выбрать N случайных образцов $\delta^i, i = 1, \ldots, N$, согласно распределению параметра δ и получить долю устойчивых систем, которую

можно записать с помощью индикаторной функции устойчивости как

$$\widehat{p}^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} F(\delta^i).$$

В этом случае неравенство

$$|p^* - \widehat{p}^*| < \varepsilon \tag{9}$$

будет выполнено с вероятностью $1 - 2e^{-2\varepsilon^2 N} \equiv 1 - \theta$ для любой *точности* (accuracy) $\epsilon \in (0, 1)$. Эта вероятность характеризуется уровнем достоверности (confidence level) θ. Достаточного числа образцов, необходимого для достижения (высокой) вероятности $1 - \theta$ с данной (также высокой) точностью ε оценки (8) дается верхней оценкой Чернова [14]:

$$N = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \ln \frac{2}{\theta} \right\rceil. \tag{10}$$

Например, для достижения точности $\varepsilon = 0{,}01$ и уровня достоверности $\theta = 10^{-7}$ нужны 84057 образцов.

Формирование выборки является отдельной задачей, легко решаемой для произвольных непрерывных маломерных распределений (например, методом обращения или отсечения), некоторых распределений векторов и матриц, а также для дискретных распределений [12, главы 14, 16, 18].

Размер выборки может быть значительно уменьшен, если использовать свойство выпуклости критерия. Априори ожидать выпуклости индикаторной функции устойчивости (7) нельзя из-за подзадачи о робастной устойчивости. Таким образом, для достоверного вычисления вероятности устойчивости типичный размер выборки должен быть велик, что особенно затрудняет применение сценарного подхода для задач смешанной робастности.

Как уже упоминалось в разделе 1, в общем случае каждая подзадача сложна. Для прямого же применения сценарного подхода данные задачи должны легко решаться для каждого элемента выборки. И действительно, такие случаи есть.

Робастная устойчивость полинома с независимыми интервальными коэффициентами может быть проверена аналитически с помощью теоремы Харитонова [9]. В этом случае для образца δ^i каждый из коэффициентов $a_j(q, \delta^i)$ должен *независимо* меняться в интервалах $\underline{a}_j(\delta^i) \leqslant a_j(q, \delta^i) \leqslant \bar{a}_j(\delta^i)$. Тогда достаточно проверить гурвицевость четырех “угловых” полиномов. Отметим, что эта проверка верна только для характеристического полинома системы непрерывного времени, для дискретного случая аналогичного результата нет [28].

Отметим также, что для любого числа образцов полученная оценка (9) эмпирическая и *всегда* будет выполнена не гарантированно, а лишь с большой долей уверенности, заданной параметром θ.

3.3. Приближенные методы

Задачи о смешанной робастности подразумевают ответ в виде численного значения, поэтому альтернативой точному решению могут служить верхние и нижние границы вероятности устойчивости.

Можно использовать простые необходимые или достаточные условия робастной устойчивости для вычисления функции $F(\delta^i)$, что приведет к нижним или верхним границам вероятности смешанной робастности. Так, если вместо индикаторной функции устойчивости $F(\delta^i)$ в формуле (8) использовать индикаторную функцию *необходимого* критерия устойчивости, то это даст *верхнюю* границу вероятности устойчивости. Соответственно использование *достаточного* критерия устойчивости даст *нижнюю* границу вероятности (8). В контексте сценарного подхода вычисление критериев может быть намного проще проверки робастной устойчивости, при этом оценка вероятности (9) будет односторонней, а необходимые или достаточное условия устойчивости могут быть слишком консервативными и в результате давать грубые оценки вероятностей смешанной робастности.

Задачу о $Q(\Delta)$ робастной устойчивости с зависимыми параметрами можно приближенно решать как задачу с независимыми параметрами. Во-первых, если итоговое множество ограничено, то можно получить верхнюю и нижнюю границу, объединяя или пересекая множества неопределенности:

$$p^*_{II} \geqslant p^*_{I,\cup} = \mathrm{Prob}_{\delta\sim\Delta}\left[P(s,q,\delta) \text{ гурвицев для всех } q \in Q = \bigcup_{\delta\in\Delta} Q(\delta)\right],$$

$$p^*_{II} \leqslant p^*_{I,\cap} = \mathrm{Prob}_{\delta\sim\Delta}\left[P(s,q,\delta) \text{ гурвицев для всех } q \in Q = \bigcap_{\delta\in\Delta} Q(\delta)\right].$$

Во-вторых, в контексте сценарного подхода для решения задачи о $Q(\Delta)$ робастности в качестве нижней оценки вероятности устойчивости можно использовать решение задачи о Q–Δ робастности относительно объединения множеств $Q = \bigcup_{i=1,\ldots,N} Q(\delta^i)$.

Для всех трех типов задач о смешанной робастности применима идея аппроксимации носителя случайного распределения с помощью множества квантили, упомянутая в конце подраздела 1.2.2. Так, если для фиксированного p и множества $Q_p : \mathrm{Prob}_{\delta\sim\Delta}[\delta \in Q_p] \geqslant p$ полином $P(s,q,\delta)$ робастно устойчив в классическом смысле по отношению к $q \in Q, \delta \in Q_p$, то вероятность робастной устойчивости (4) с независимыми параметрами не меньше p. Для задачи (5) о $Q(\Delta)$ робастности надо проверять робастную устойчивость характеристического полинома по отношению к $q \in \cup_{\delta\in Q_p} Q(\delta), \delta \in Q_p$. Наконец, этот прием можно использовать для задачи (6) о $\Delta(Q)$ робастности, выбрав $Q_p : \forall q \in Q, \mathrm{Prob}_{\delta\sim\Delta(q)}[\delta \in Q_p] \geqslant p$.

3.4. Робастное D-разбиение

Рассмотрим метод синтеза маломерных систем управления, который будет полезен для решения задач о смешанной робастности: задачу о робастной D-устойчивости [29].

Пусть интересующая нас система с постоянными коэффициентами зависит от параметров $d \in \mathbb{R}^m$ и неопределенности $q \in Q \subset \mathbb{R}^n$. Ее характеристический полином $P(s,q,d)$. Предположим, что множество локализации корней D

в комплексной плоскости также является частью постановки задачи. Для задачи робастной стабилизации непрерывных систем это левая комплексная полуплоскость $D = \{s : \operatorname{Re} s < 0\} \subset \mathbb{C}$ и т.д.

Цель задачи синтеза состоит в том, чтобы предоставить такое значение параметра d, при котором все корни характеристического полинома $P(s, q, d)$ лежат в множестве D *для всех допустимых неопределенностей*:

$$d^* : \text{Все корни полинома } P(s, q, d^*) \text{ лежат в } D \text{ для всех } q \in Q. \tag{11}$$

Данная задача иногда называется задачей о робастном расположении корней или задачей синтеза о робастной кластеризации (локализации). Надлежащим выбором множества D можно решать различные задачи синтеза:

а) о робастной стабилизации систем непрерывного времени (D — левая комплексная полуплоскость),

б) о робастной стабилизации дискретных систем (D — внутренность единичного круга),

в) о робастной стабилизации с ограниченной колебательностью (D является сектором в левой комплексной полуплоскости)

и т.д.

Есть разные способы решения этой задачи от алгебраических и оптимизационных до основанных на линейных матричных неравенствах. В практически каждом из этих подходов выдается единственное значение d^*, которое является "наилучшим" по отношению к дополнительно выбранному критерию.

Альтернативным подходом является описание *всего* множества робастно стабилизирующих параметров, которые удовлетворяют задаче (11):

$$D_{stab} = \Big\{ d^* : \text{ Все корни полинома } P(s, q, d^*) \text{ лежат в } D \text{ для всех } q \in Q \Big\}.$$

Робастное D-разбиение является графо-аналитическим методом и чаще всего применяется для одно- и двухмерных параметров. Он позволяет неявно изобразить множество устойчивых параметров $D_{stab} \subseteq \mathbb{R}^m$, а точнее, его *границу* [29]. Эта граница строится с помощью принципа исключения нуля и "заметания" (перебора по сетке) обобщенных частот либо с помощью аналитического вывода уравнений, см. [30–33] и цитируемые там источники.

Основным ограничением практического применения робастного D-разбиения является низкая размерность пространства параметров. Обычно оно может быть сделано для $m = 1, 2$ или максимум для трех параметров.

Снова отметим, что указанная задача является задачей *синтеза*. Она же может быть ключевым компонентом для решения задачи *анализа* смешанной робастности с независимыми параметрами (4).

4. Основные результаты

Для решения задачи о смешанной робастности с независимыми параметрами (4) или зависимостью первого типа (5) предлагается отказ от сценарного

подхода в части формирования подзадач робастного анализа. В общем случае для решения задач о смешанной робастности с зависимыми параметрами предлагается использовать аппроксимации из подраздела 3.3.

Наличие дискретной неопределенности (случайной и/или детерминированной) существенно упрощает решение задач о смешанной робастности.

4.1. Смешанная робастность с независимыми группами детерминированных и случайных параметров (Q–Δ робастность)

Идея состоит в том, чтобы рассматривать случайный параметр δ как детерминированный и для него найти множество "хороших", "робастно устойчивых" параметров

$$\Delta_{stab} = \Big\{\delta : F(\delta) = 1\Big\} =$$
$$= \Big\{\delta : \text{ система робастно устойчива для всех } q \in Q\Big\}.$$

Напомним, что искомая вероятность смешанной робастной устойчивости (4) является вероятностной мерой этого множества. Единственным ограничением подхода является требование его измеримости.

Для нахождения этого множества предлагается использовать[9] робастное D-разбиение *в пространстве случайной неопределенности* $\delta \in \mathbb{R}^m$ по отношению к "жестко" ограниченной неопределенности $q \in Q$. Каждая точка множества $\Delta_{stab} \equiv D_{stab}$ обеспечивает робастную устойчивость характеристического полинома по отношению к детерминированной неопределенности q. Затем решение задачи (4) вычисляется как (вероятностная) мера этого множества.

Предлагается следующий алгоритм решения задачи о смешанной робастности (4). Он записан в терминах устойчивости линейной системы с постоянными параметрами, но тривиально модифицируется на иные свойства систем.

Алгоритм 1. Решение задачи о независимой смешанной робастности (Q–Δ робастности).

Шаг 1. Найти множество робастно стабилизирующих параметров Δ_{stab} по отношению к детерминированной неопределенности q

$$\Delta_{stab} = \{\delta : P(s, q, \delta) \text{ гурвицев для всех } q \in Q\}.$$

Шаг 2. Для данной случайной неопределенности $\delta \sim \Delta$ вычислить вероятность устойчивости как

$$p^* = \mathrm{Prob}_{\delta\sim\Delta}[\delta \in \Delta_{stab}] = \mu(\Delta_{stab}). \tag{12}$$

Подчеркнем, что каждый шаг алгоритма может быть выполнен независимо с помощью любого подходящего метода. Например, оценка вероятности (12) на шаге 2 может быть сделана методом Монте-Карло (по сути, тем

[9] Этот способ особенно хорошо подходит для анализа робастности любого свойства системы, определяемого расположением корней характеристического полинома.

же сценарным подходом). Этот подход отличается от прямого сценарного подхода из подраздела 3.2. На шаге 2 каждый случайно выбранный образец δ^i должен быть проверен на принадлежность конструктивно описанному множеству Δ_{stab}, в то время как в прямом сценарном подходе для каждого образца должна решаться подзадача о детерминированной робастности.

Если распределение случайной неопределенности δ равномерно на Δ, то геометрическая вероятность (12) вычисляется как отношение объемов (площадей) множеств

$$p^* = \frac{\mathrm{Vol}(\Delta \cap \Delta_{stab})}{\mathrm{Vol}(\Delta)} = 1 - \frac{\mathrm{Vol}(\Delta \setminus \Delta_{stab})}{\mathrm{Vol}(\Delta)}. \tag{13}$$

При использовании робастного D-разбиения граница множества Δ_{stab} задается поточечно (численно либо сеткой при аналитическом задании границы), тем самым это множество аппроксимируется многоугольником или набором многоугольников, площадь которых может быть найдена точно. Уменьшая сетку, эта аппроксимация позволяет найти площадь Δ_{stab} с требуемой точностью.

Для не равномерного распределения задача (12) о численном нахождении меры множества Δ_{stab} может быть нетривиальной даже при аналитическом описании множества. В одномерном случае задача решается явно (см. подраздел 4.2), в двухмерном и трехмерном случаях можно использовать перебор одного или двух параметров. Вопрос о точности полученных сеточных аппроксимаций и используемых квадратурных формул требует отдельного рассмотрения.

Основным недостатком предлагаемого подхода является низкая размерность случайного параметра δ. Выполнимость первого шага ограничена применимостью техники анализа пространства параметров, такого как робастное D-разбиение, поскольку множество Δ_{stab} может быть конструктивно построено только в одно-, дву- и (максимум) трехмерных случаях.

Другой особенностью является численная сложность построения самого множества Δ_{stab}. Если параметры q, δ входят в коэффициенты характеристического полинома аффинно, то робастное D-разбиение можно построить численно или аналитически [29, 30, 32]. В противном случае построение робастного D-разбиения может быть сложной задачей само по себе. В таких случаях предлагается использовать внутренние или внешние приближения множества Δ_{stab}, получая для них соответственно нижние и верхние оценки вероятности (12).

Для задачи о смешанной $Q(\Delta)$ робастности (с зависимостью первого типа) можно применять этот же алгоритм 1, если на первом шаге удается найти множество робастно стабилизирующих параметров Δ_{stab} с учетом зависимости:

$$\Delta_{stab} = \{\delta : P(s, q, \delta) \text{ гурвицев для всех } q \in Q(\delta)\}.$$

Далее перечислены несколько случаев, в которых задача о смешанной робастности или ее подзадачи могут быть решены явно.

4.2. Скалярная случайная неопределенность

Пусть случайный параметр системы одномерен: $\delta \in \mathbb{R}^1$. Если множество Δ_{stab} непусто, то оно может быть представлено как объединение непересекающихся отрезков[10] $(a_i, b_i]$, $i = 1, \ldots$, где $a_i < b_i$ и $b_i < a_{i+1}$.

Эти интервалы могут быть найдены разными способами, например с помощью одномерного робастного D-разбиения [29] или так называемым методом "разведчика устойчивости" (Stability Feeler), предложенным в [34].

Таким образом, система является робастно устойчивой для некоторого значения δ тогда и только тогда, когда существует интервал $i : a_i < \delta \leqslant b_i$. Значение индикаторной функции устойчивости (7) тривиально вычисляется

$$F(\delta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists i : \delta \in (a_i, b_i], \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для найденных отрезков робастной устойчивости задача о смешанной робастности (4) имеет очевидное решение (8):

$$p^* = \sum_{i=1,\ldots} \big(\mathbf{CDF}(b_i) - \mathbf{CDF}(a_i)\big), \tag{14}$$

т.е. является суммой вероятностей попадания неопределенного параметра δ в каждый из отрезков $(a_i, b_i]$. Решение записано с помощью одномерной функции распределения неопределенного параметра δ

$$\mathbf{CDF}(a) = \mathrm{Prob}_{\delta \sim \Delta}[\delta \leqslant a].$$

4.3. Дискретная неопределенность

Пренебрегая переходными процессами, анализ робастности системы с переключениями можно свести к анализу системы с дискретной неопределенностью. Аналогичным образом конечный набор однотипных систем может быть записан в виде одной системы с добавлением в нее неопределенного дискретного параметра.

Анализ смешанной робастности значительно упрощается при наличии дискретной неопределенности любого типа. Приемы, подобные перечисленным далее, можно использовать в случаях, когда дискретны только некоторые компоненты случайного и/или детерминированного параметров.

4.3.1. Дискретная детерминированная неопределенность

Если число различных значений детерминированных параметров конечно и невелико (например, не превышает K), то подзадачи робастного анализа

[10] Первый и последний отрезки могут иметь бесконечную длину, например быть $(-\infty, b_1]$. Также эти отрезки могут быть открытыми или полуоткрытыми, например для каких-то j быть $[a_j, b_j]$, для других (a_j, b_j) и т.д. Разница между этими случаями имеет меру нуль и для абсолютно непрерывного распределения δ не влияет на вычисление вероятности. Однако в случае дискретного или смешанного распределения эти нюансы необходимо учитывать.

Q–Δ и $Q(\Delta)$ робастной устойчивости (4), (5) сводятся к проверке устойчивости небольшого числа полиномов. В этом случае разумно применять прямой сценарный подход из подраздела 3.2, решая эту подзадачу для конечного же числа образцов δ^i, $i = 1, \ldots$: "$P(s, \delta^i, q^{i,k})$ гурвицев для всех $k \in K_i \subseteq \subseteq 1, \ldots, K$".

Задача $\Delta(Q)$ о смешанной робастности сводится к перебору и решению конечного числа подзадач о вероятностной робастности

$$\text{“}\mathrm{Prob}_{\delta\sim\Delta_k}\Big[P(s, q^k, \delta) \text{ гурвицев}\Big], \quad k = 1, \ldots, K\text{”}.$$

4.3.2. Дискретная случайная неопределенность

Пусть распределение задано набором значений δ^j вместе с вероятностями $p_j = \mathrm{Prob}_{\delta\sim\Delta}[\delta = \delta^j]$, $j = 1, \ldots$ Если множество допустимых значений δ^j конечно и имеет небольшой размер, $j = 1, \ldots, M$, то связанная с ним задача о смешанной $Q(\Delta)$ (или Q–Δ) робастности может быть решена явно.

Алгоритм 2. Решение задачи о смешанной $Q(\Delta)$ робастности с дискретной случайной неопределенностью (5).

Пусть задана случайная величина δ, принимающая значения δ^j с вероятностями p_j, и характеристической полином системы $P(s, q, \delta)$ зависит также от неопределенного параметра $q \in Q(\delta)$.

Для каждого $j = 1, \ldots, M$ решить задачу о детерминированной робастности и вычислить

$$p^* = \sum_{j=1}^{M} p_j \cdot I\Big[P(s, q, \delta^j) \text{ гурвицев для всех } q \in Q(\delta^j)\Big].$$

Технически, этот подход похож на сценарный, но число "образцов" ограничено, а в результате будет получено точное решение. Анализ распадается на M независимых подзадач о детерминированной робастности и его сложность зависит от сложности решения этих подзадач. Как и в случае сценарного подхода, эти подзадачи можно решать параллельно.

Отметим, что этот результат не зависит от размерности случайной неопределенности δ.

Алгоритм 2 применим не только к задаче (5) о смешанной робастности с зависимостью, но и к задаче (4) с независимыми параметрами.

Можно аппроксимировать решение, отбросив ряд "маловероятных" значений параметра δ, и тем самым получить нижнюю оценку вероятности устойчивости. Так же можно поступить, если множество дискретных значений бесконечно.

4.3.3. Дискретная случайная и дискретная детерминированная неопределенность

Данный случай примечателен тем, что в случае конечного числа значений параметров все три варианта задачи о смешанной робастности: Q–Δ, $Q(\Delta)$ и $\Delta(Q)$ легко решаются.

В задаче о Q–Δ робастности случайный параметр задан набором значений δ^j вместе с вероятностями $p_j = \mathrm{Prob}_{\delta\sim\Delta}[\delta = \delta^j]$, $j = 1, \ldots, M$, а детерминированный — набором $Q = \{q^k, k = 1, \ldots, K\}$. Решение дается формулой

$$p^* = \sum_{j=1}^{M} p_j \cdot \prod_{k=1}^{K} I\Big[P(s, q^k, \delta^j) \text{ гурвицев}\Big].$$

В задаче о $Q(\Delta)$ робастности детерминированный параметр задан набором с двумя индексами $\{q^{j,k}, k = 1, \ldots, K_j\}$ для каждого $j = 1, \ldots, M$. Решение дается аналогичной формулой

$$p^* = \sum_{j=1}^{M} p_j \cdot \prod_{k=1}^{K_j} I\Big[P(s, q^{j,k}, \delta^j) \text{ гурвицев}\Big].$$

Наконец, в задаче о $\Delta(Q)$ робастности детерминированная неопределенность задана набором $\{q^k, k = 1, \ldots, K\}$, а случайная – наборами значений $\{\delta^{k,j}, j = 1, \ldots, M_k\}$, $k = 1, \ldots, K$, с вероятностями $p_{k,j} = \mathrm{Prob}_{\delta\sim\Delta_k}[\delta = \delta^{k,j}]$, $j = 1, \ldots, M_k$. В этом случае решение дается формулой

$$p^* = \min_{k=1,\ldots,K} \sum_{j=1}^{M_j} p_{k,j} \cdot I\Big[P(s, q^k, \delta^{k,j}) \text{ гурвицев}\Big].$$

5. Примеры

В первых трех примерах рассматриваются задачи о независимой смешанной робастности (Q–Δ робастности), далее в примерах решаются задачи о зависимой смешанной робастности. В четвертом примере рассмотрена задача о зависимости первого типа ($\Delta(Q)$ робастность), а в пятом – зависимость второго типа ($\Delta(Q)$ робастность). В последних примерах активно используется возможность описать множество устойчивости анализируемой системы на расширенном множестве неопределенностей $Q \times \Delta$.

5.1. Скалярная случайная неопределенность

Рассмотрим немного измененный пример 2 из [34] об устойчивости дискретных систем. Объект управления с передаточной функцией $G(z, K)$, включающей коэффициент усиления, стабилизируется управлением с обратной связью с помощью регулятора $C(z, q_1, q_2)$:

$$G(z, K) = \frac{K}{1 + 3z},$$

$$C(z, q_1, q_2) = \frac{8{,}5 + 3{,}5z}{1 + (8 + q_1)z + (6 + q_2)z^2}.$$

Каждый из неопределенных параметров q_1, q_2 находится в интервале $[-1, 1]$.

Задача о смешанной робастности состоит в том, чтобы определить вероятность устойчивости, рассматривая коэффициент усиления обратной связи K как нормально распределенную случайную величину со средним 2 и стандартным отклонением 0,1. Устойчивость определяется критерием Шура–Кона (а не Гурвица) для характеристического полинома

$$P(z,q,K) = K(8{,}5 + 3{,}5z) + (1+3z)\big(1 + (8+q_1)z + (6+q_2)z^2\big).$$

В [34] определена робастная устойчивость этой системы при $K \in \in [-0{,}11,\ 2{,}21]$, что соответствует первому шагу алгоритма 1. Формула (14) для нормального распределения принимает вид

$$p^* = \frac{1}{0{,}1\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-0{,}11}^{2{,}21} e^{-\frac{(K-2)^2}{2\cdot(0{,}1)^2}} dK =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{2{,}21-2}{0{,}1\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{-0{,}11-2}{0{,}1\sqrt{2}}\right)\right) = 0{,}982.$$

В результате получена точная вероятность смешанной робастной устойчивости.

5.2. Двумерная случайная неопределенность

Рассмотрим пример с замкнутой системой, имеющей характеристический полином

$$P(s,q,\delta) = \big((1+q_1)s^2 + (1+q_2)s - 1\big)s + (s-15)(\delta_1 s + \delta_2 - 0{,}3s^2). \tag{15}$$

Детерминированная неопределенность q ограничена эллипсом $100q_1^2 + 25q_2^2 \leqslant \leqslant 9$, в то время как случайный неопределенный параметр δ равномерно распределен в заштрихованном прямоугольнике (см. рис. 2): $\delta_1 \sim [-4,-2]$, $\delta_2 \sim [-7,-2]$. Этот параметр представляет неопределенность коэффициентов ПИ-регулятора. Цель состоит в решении задачи (4) о смешанной робастности при данных независимых неопределенностях.

Штриховая линия на рис. 2 дает границу множества устойчивости для номинальной системы ($q_1 = q_2 = 0$). Поскольку все возможные случайные параметры попадают в это множество устойчивости, то номинальная система будет робастно устойчива с вероятностью единица по отношению к неопределенности δ.

При наличии эллиптически ограниченной неопределенности q область устойчивости Δ_{stab} уменьшается, так как она соответствует *робастной устойчивости*. Следуя первому шагу алгоритма 1 из раздела 4, это множество построено с помощью робастного D-разбиения. Границы Δ_{stab} изображены на рис. 2 сплошной линией. Видно, что существуют значения неопределенности $\delta \in \Delta \setminus \Delta_{stab}$ вне этой области.

Для равномерного распределения второй шаг алгоритма 1 становится задачей о вычислении геометрической вероятности. В итоге решение задачи о

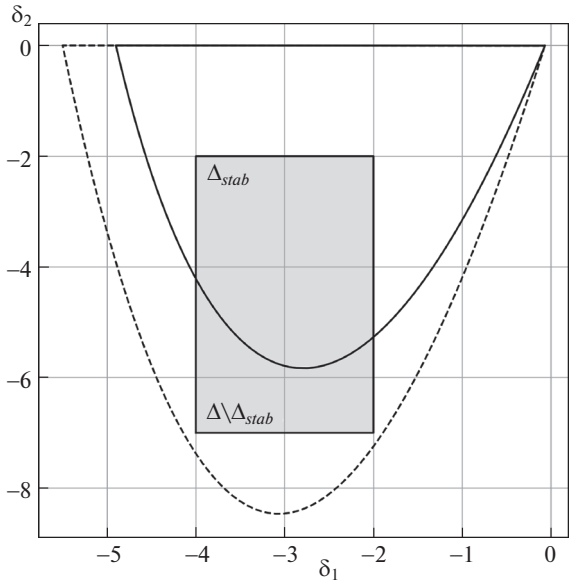


Рис. 2. Номинальное и робастное D-разбиение для характеристического полинома (15). Штриховая линия — граница номинального D-разбиения. Сплошная линия — граница робастного D-разбиения. Серый прямоугольник — носитель (Δ) равномерно распределенной неопределенности δ, разделенный на множество "хороших" (Δ_{stab}) и "плохих" ($\Delta \setminus \Delta_{stab}$) параметров.

смешанной робастности сводится к вычислению площадей 13. В этом примере вероятность смешанной робастности равна $p^* = 0{,}68901$.

Для сравнения эта вероятность была оценена с помощью сценарного подхода: для точности $\varepsilon = 0{,}01$ и уровня достоверности $\theta = 10^{-7}$ на множестве Δ согласно равномерному распределению и оценке (10) были выбраны 84507 образцов случайных параметров δ^i. Для каждого образца была проверена робастная устойчивость полинома $P(s, q, \delta^i)$. В 57856 случаях полином был робастно устойчив, что приводит к оценке $\widehat{p}^* = 0{,}68830$, лежащей в пределах точности $|p^* - \widehat{p}^*| = 7{,}2 \cdot 10^{-4} < \varepsilon$.

5.3. Скалярные случайные и детерминированные неопределенности

Рассмотрим линейную систему с характеристическим полиномом, зависящую от скалярных неопределенных параметров q и δ:

$$P(s, q, \delta) = s^3 + (2 - |q - \delta|)s^2 + 2s^2 + 3. \tag{16}$$

Полином устойчив при $|q - \delta| < 0{,}5$, что геометрически соответствует полосе между прямыми $q - \delta = 0{,}5$ и $q - \delta = -0{,}5$, см. рис. 3 слева.

Далее приведены различные связи между этими двумя параметрами, демонстрирующие все варианты задач о смешанной робастности (4), (5), (6).

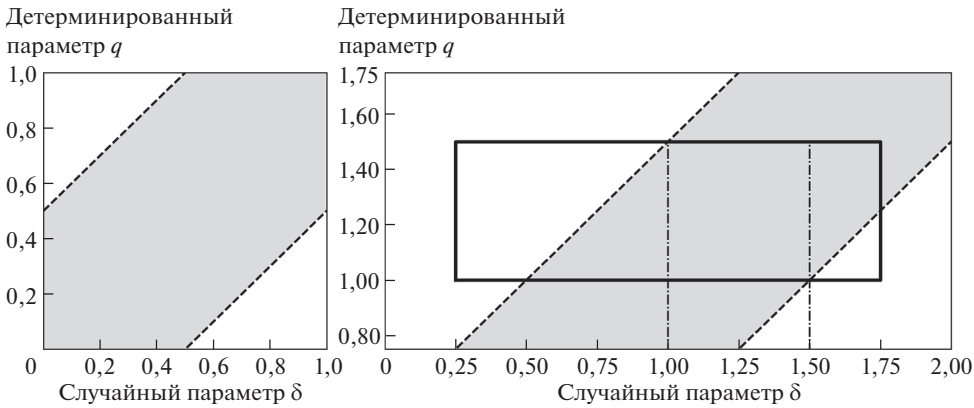


Рис. 3. Пример 3. Серые области с пунктирным границами — множества устойчивости. Слева: область устойчивости полинома (16). Справа: иллюстрация решения задачи из подраздела 5.3.1 о Q–Δ робастности с равномерным распределением случайного параметра. Штрихпунктирные линии по пересечению границ множества неопределенных параметров и множества устойчивости определяют подходящий отрезок $[1, 1{,}5]$ для случайного параметра.

5.3.1. Независимая смешанная робастность (Q–Δ робастность)

Рассмотрим задачу о (Q–Δ робастности (4). Пусть множество значений детерминированного параметра задано интервалом $Q = [1,\ 1{,}5]$, а случайный параметр равномерно распределен на отрезке $\Delta = [0{,}25,\ 1{,}75]$, см. рис. 3, справа.

Здесь применим двухэтапный алгоритм 1 из раздела 4. Полином (16) робастно устойчив (по $q \in Q$) для всех $\delta \in \Delta_{stab} = [1, 1{,}5]$. Вне этого отрезка существуют значения $q \in Q$, нарушающие устойчивость. Согласно (12), (13) вероятность смешанной Q–Δ робастности вычисляется в явном виде как отношение длин отрезков Δ_{stab} и Δ:

$$p^* = \frac{1{,}5 - 1}{1{,}75 - 0{,}25} = \frac{1}{3}.$$

5.3.2. Смешанная робастность с зависимостью первого типа ($Q(\Delta)$ робастность), первый вариант

Пусть случайный параметр δ равномерно распределен на отрезке $\Delta = [0{,}25, 1{,}5]$. Множество значений детерминированного параметра представляет собой случайное множество $Q(\delta) = [1 - \delta/3, 2 - \delta]$, см. рис. 4, слева.

В данном случае можно также применить модифицированный алгоритм 1, описанный в конце раздела 4. Полином (16) робастно устойчив (по $q \in Q(\delta)$) при значениях $\delta \in \Delta_{stab} = [0{,}75, 1{,}125]$. Как и в примере из подраздела 5.3.1, вероятность смешанной $Q(\Delta)$ робастности вычисляется как отношение отрезков

$$p^* = \frac{1{,}125 - 0{,}75}{1{,}5 - 0{,}25} = 0{,}3.$$

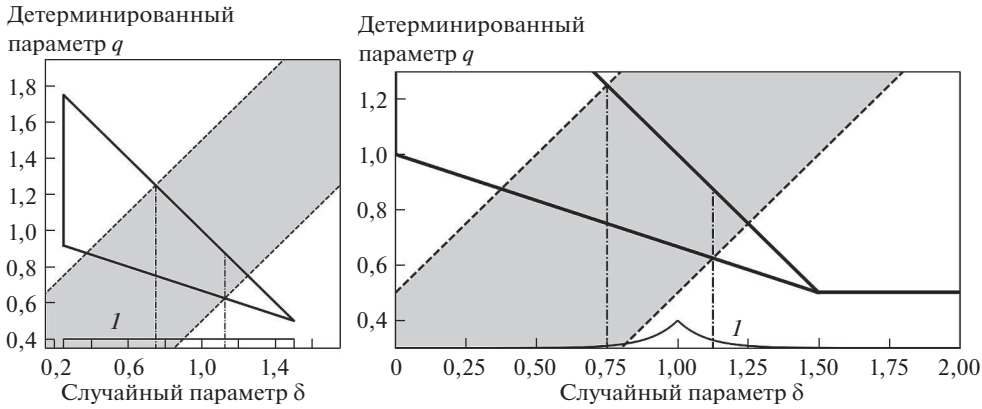


Рис. 4. Серые области с пунктирным границами — множества устойчивости. Сплошные линии — границы множества неопределенности. Штрихпунктирные линии определяют края отрезков случайных параметров (границы множеств $\Delta_{stab} = [0{,}75, 1{,}125]$, одинаковых в обоих случаях). Цифрой *1* схематически обозначены плотности распределения случайного параметра. Слева: пример 5.3.2, первый вариант $Q(\Delta)$ робастности с равномерным распределением случайного параметра. Справа: пример 5.3.3, второй вариант $Q(\Delta)$ робастности с распределением Лапласа случайного параметра.

5.3.3. Смешанная робастность с зависимостью первого типа ($Q(\Delta)$ робастность), второй вариант

В этом варианте случайный параметр δ имеет распределение Лапласа с коэффициентом сдвига 1 и коэффициентом масштаба 0,1. Носитель $\Delta = \mathbb{R}$ не ограничен. Множество значений детерминированного параметра представляет собой случайное множество: отрезок $Q(\delta) = [1 - \delta/3, 2 - \delta]$, если $\delta < 1{,}5$, или одну точку $Q(\delta) = \{0{,}5\}$ для $\delta \geqslant 1{,}5$, см. рис. 4, справа.

Двухэтапный алгоритм 1 применим и в этом случае, множество Δ_{stab} то же и по построению не зависит от распределения. Для скалярной случайной неопределенности и известного закона распределения можно использовать (14):

$$p^* = \mathbf{CDF}_{Laplace}(1{,}125) - \mathbf{CDF}_{Laplace}(0{,}75) =$$
$$= 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{1{,}125-1}{0{,}1}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1-0{,}75}{0{,}1}} = 0{,}8157.$$

5.3.4. Смешанная робастность с зависимостью второго типа ($\Delta(Q)$ робастность)

Рассмотрим детерминированный параметр $q \in Q = [0{,}7, 1{,}1]$ и случайный параметр δ с нормальным распределением $\mathcal{N}(\delta_0, \sigma)$. Параметры распределения зависят от детерминированного параметра: среднее $\delta_0 = 1{,}4 - 0{,}5q$, среднеквадратичное отклонение $\sigma = q/8$, см. рис. 5. Отметим, что параметр q не только влияет на распределение, но и входит в характеристический полином (16) явно.

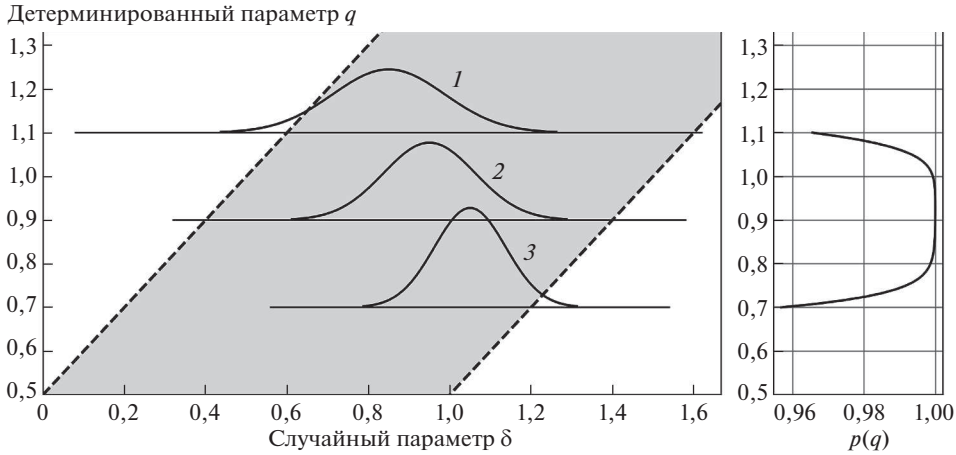


Рис. 5. Пример 5.3.4. Слева: пример $\Delta(Q)$ робастности с нормальным распределением случайного параметра. Серая область с пунктирным границами — множество устойчивости. *1*, *2*, *3* — схематически проиллюстрированы три плотности распределения случайной величины δ для разных значений параметра $q = 1{,}1,\ 0{,}9,\ 0{,}7$. Справа: связь между вероятностью устойчивости $p(q)$ (ось абсцисс) и параметром q (ось ординат).

Вероятность устойчивости $\mathrm{Prob}_{\delta\sim\Delta(q)}$ [Полином (16) гурвицев] можно найти в явном виде по формуле (14), учитывая, что области устойчивости задаются отрезками $D_{stab}(q) = [q - 0{,}5, q + 0{,}5]$:

$$p(q) = \mathrm{Prob}_{\delta\sim\Delta(q)} = \int\limits_{q-0{,}5}^{q+0{,}5} e^{\frac{\delta-(1{,}4-0{,}5q)}{2(q/8)^2}}\, d\delta.$$

График этой вероятности приведен на рис. 5 справа. Решением задачи о смешанной $\Delta(Q)$ робастности является минимальное значение вероятности устойчивости $p = 0{,}9568$ при “наихудшем” $q = 0{,}7$.

6. Заключение и расширения

В статье проведен обзор различных типов параметрической робастности. На примере исследования устойчивости систем с детерминированной и случайной неопределенностями предложены постановки задачи о смешанной робастности.

Задачи отличаются взаимозависимостью детерминированных и случайных групп параметров. Заменой критерия эти постановки элементарно обобщаются на другие свойства системы, например на (робастную) апериодичность и пр. Можно исследовать иные зависимости детерминированных и случайных параметров, в том числе их иерархические графы.

Предлагается алгоритм, разделяющий решение основной задачи о смешанной робастности на два независимых этапа. На первом этапе метод анализа в пространстве параметров описывает подмножество “хороших” случайных

параметров. На втором этапе используется другой метод, который аналитически, численно или методом Монте-Карло оценивает вероятность попадания случайного параметра в указанное множество.

Используемый на первом этапе метод робастного D-разбиения позволяет решать и другие задачи о смешанной робастности.

Во-первых, помимо устойчивости можно проверять нечувствительность к параметрическим возмущениям заданных показателей качества, например запаса устойчивости по усилению и фазе, коэффициента демпфирования и т.п. Эти возможности открываются благодаря тому, что подобные показатели определяются расположением корней характеристического полинома или характеризуются с помощью частотных методов. Одновременная робастность по отношению к нескольким критериям качества исследуется аналогично.

Во-вторых, наряду с линейными системами непрерывного времени предложенный подход позволяет исследовать смешанную робастную устойчивость иных типов линейных систем с постоянными параметрами. Так, устойчивость дискретных систем определяется свойством Шура характеристического полинома; устойчивость систем с запаздыванием определяется свойством Гурвица характеристического квазиполинома; достаточное условие устойчивости систем дробного порядка также описывается расположением корней “полинома” с нецелыми степенями.

Кроме точных решений, в подразделе 3.3 предложен ряд процедур, позволяющих решать задачи о смешанной робастности приближенно.

Помимо решенных, поставлен ряд открытых вопросов: как эффективно решать задачи (5) и (6) о смешанной робастности с зависимыми детерминированными и случайными параметрами? Насколько хорошо их удается решать приближенными методами? На примере из подраздела 5.3 показано, что решение задач смешанной робастности упрощается, если известно подмножество $Q \times \Delta$ объединенного набора параметров, на котором система устойчива. Как описать это множество для иных свойств системы, аналогично тому, как аппарат D-разбиения используется для устойчивости?

Автор выражает сердечную признательность Б.Т. Поляку за поддержку при подготовке статьи, а также благодарит анонимного рецензента, замечания которого позволили существенно улучшить статью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
2. Дискуссия по проблеме робастности в системах управления // АиТ. 1992. № 1. С. 165–176.

   Discussion on Robustness Problems in Control Systems // Autom. Remote Control. 1992. V. 53. No. 1. P. 134–142.
3. *Weinmann A.* Uncertain Models and Robust Control. Springer, 1991.
4. *Barmish B.R.* New Tools for Robustness of Linear Systems. Macmillan Coll Div., 1993.
5. *Bhattacharyya S.P., Chapellat H., Keel L.H.* Robust Control: The Parametric Approach. Prentice Hall, 1995.

6. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Робастная устойчивость линейных систем // ВИНИТИ. Итоги науки и техники. Сер. Технич. кибернетика. 1991. Т. 32. С. 3–31.

7. *Ершов А.А.* Стабильные методы оценки параметров (обзор) // АиТ. 1978. № 8. С. 66–100.

   Ershov A.A. Stable Methods of Estimating Parameters (Survey) // Autom. Remote Control. 1979. V. 39. No. 8. P. 1152–1181.

8. *Браверман М.Э., Розоноэр Л.И.* О грубости линейных динамических систем. I // АиТ. 1991. № 11. С. 17–23.

   Braverman M.E., Rozonoer L.I. Robustness of linear dynamic systems. I // Autom. Remote Control. 1991. V. 52. No. 11. P. 1493–1498.

9. *Харитонов В.Л.* Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифф. уравнения. 1978. Т. 14. № 11. С. 2086–2088.

10. *Nemirovskii A.* Several NP-hard Problems Arising in Robust Stability Analysis // Math. Cont. Signals Syst. 1993. V. 6. No. 2. P. 99–105.

11. *Poljak S., Rohn J.* Checking Robust Nonsingularity is NP-hard // Math. Cont. Signals Syst. 1993. V. 6. No. 1. P. 1–9.

12. *Tempo R., Calafiore G., Dabbene F.* Randomized Algorithms for Analysis and Control of Uncertain Systems: with Applications. Springer, 2013.

13. *Garatti S., Campi M.C.* Modulating Robustness in Control Design: Principles and Algorithms // IEEE Cont. Syst. Mag. 2013. V. 33. No. 2. P. 36–51.

14. *Tempo R., Bai E.W., Dabbene F.* Probabilistic Robustness Analysis: Explicit Bounds for the Minimum Number of Samples // Proc. 35th IEEE Conf. Dec. and Cont. 1996. V. 3. P. 3424–3428.

15. *Barmish B.R., Lagoa C.M.* The Uniform Distribution: A Rigorous Justification for Its Use in Robustness Analysis // Math. Cont. Signals Syst. 1997. V. 10. No. 3. P. 203–222.

16. *Bai E.W., Tempo R., Fu M.* Worst-case Properties of the Uniform Distribution and Randomized Algorithms for Robustness Analysis // Proc. 1997 American Contr. Conf. 1997. V. 1. P. 861–865.

17. *Calafiore G.C., Campi M.C.* The Scenario Approach to Robust Control Design // IEEE Trans. Autom. Cont. 2006. V. 51. No. 5. P. 742–753.

18. *Gryazina E., Polyak B.* Random Sampling: Billiard Walk Algorithm // Europ. J. Oper. Res. 2014. V. 238. No. 2. P. 497–504.

19. *Fan M.K.H., Tits A.L., Doyle J.C.* Robustness in the Presence of Mixed Parametric Uncertainty and Unmodeled Dynamics // IEEE Trans. Autom. Cont. 1991. V. 36. No. 1. P. 25–38.

20. *Jayasuriya S.* Frequency Domain Design for Robust Performance Under Parametric, Unstructured, or Mixed Uncertainties // J. Dyn. Syst. Meas. Cont. 1993. V. 115. No. 2B. P. 439–451.

21. *Reinelt W., Ljung L.* Robust Control of Identified Models with Mixed Parametric and Non-parametric Uncertainties / Proc. 2001 Europ. Cont. Conf. 2001. P. 3564–3569.

22. *Vitus M.P., Zhou Z., Tomlin C.J.* Stochastic Control with Uncertain Parameters via Chance Constrained Control // IEEE Trans. Autom. Cont. 2016. V. 61. No. 10. P. 2892–2905.

23. *da Silva de Aguiar R.S., Apkarian P., Noll D.* Structured Robust Control against Mixed Uncertainty // IEEE Trans. Cont. Syst. Tech. 2018. V. 26. No. 5. P. 1771–1781.

24. *Chapellat H., Dahleh M.A., Bhattacharyya S.P.* Robust Stability under Structured and Unstructured Perturbations // IEEE Trans. Autom. Cont. 1990. V. 35. No. 10. P. 1100–1108.

25. *Fujisaki Y., Oishi Y., Tempo R.* Mixed Deterministic/Randomized Methods for Fixed Order Controller Design // IEEE Trans. Autom. Cont. 2008. V. 53. No. 9. P. 2033–2047.

26. *Wu D., Gao W., Song C., Tangaramvong S.* Probabilistic Interval Stability Assessment for Structures with Mixed Uncertainty // Struct. Safety 2016. V. 58. P. 105–118.

27. *Keel L.H., Bhattacharyya S.P.* Robust, Fragile, or Optimal? // IEEE Trans. Autom. Cont. 1997. V. 42. No. 8. P. 1098–1105.

28. *Джури Э.И.* Робастность дискретных систем // АиТ. 1990. № 5. С. 3–28.

Jury E.I. Robustness of Discrete Systems // Autom. Remote Control. 1990. V. 51. No. 5. P. 571–592.

29. *Петров Н.П., Поляк Б.Т.* Робастное D-разбиение // АиТ. 1991. № 11. С. 41–53.

Petrov N.P., Polyak B.T. Robust D-partition // Autom. Remote Control. 1991. V. 52. No. 11. P. 1513–1523.

30. *Тремба А.А.* Робастное D-разбиение при l_p-ограниченных параметрических неопределенностях // АиТ. 2006. № 12. С. 21–35.

Tremba A.A. Robust D-decomposition under l_p-bounded Parametric Uncertainties // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 12. P. 1878–1892.

31. *Siljak D.D.* A Robust Control Design in the Parameter Space // Proc. 1992 IEEE Int. Symp. Circuits Syst. 1992. V. 6. P. 2723–2727.

32. *Hwang C., Hwang L., Hwang J.* Robust D-partition // J. Chinese Inst. Eng. 2010. V. 33. No. 6. P. 811–821.

33. *Mihailescu-Stoica D., Schrödel F., Adamy J.* All Stabilizing PID Controllers for Interval Systems and Systems with Affine Parametric Uncertainties / 11th Asian Cont. Conf. (ASCC). 2017. P. 576–581.

34. *Matsuda T., Mori T.* Stability Feeler: A Tool for Parametric Robust Stability Analysis and Its Applications // IET Control Theory Applications 2009. V. 3. No. 12. P. 1625–1633.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 08.06.2020

После доработки 01.09.2020

Принята к публикации 10.09.2020

Автоматика и телемеханика, № 3, 2021

Нелинейные системы

© 2021 г. **И.Б. ФУРТАТ, д-р техн. наук (cainenash@mail.ru)**
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург),
П.А. ГУЩИН, канд. техн. наук (guschin.p@mail.ru)
(Губкинский университет, Москва)

ДИСКРЕТНОЕ ПО ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ УПРАВЛЕНИЕ СКАЛЯРНЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ОБЪЕКТАМИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ[1]

Предложен дискретный по пространственной переменной закон управления некоторым классом систем, которые описываются скалярными линейными дифференциальными уравнениями параболического и гиперболического типов с неизвестными параметрами и возмущениями. Доступно конечное множество дискретных измерений (по пространственной переменной) состояния объекта. Закон управления зависит от функции, которая зависит от пространственной переменной и от конечного набора измерений состояния объекта. Приведены примеры данной функции, которая позволяет реализовать управляющий сигнал лишь на отдельных интервалах по пространственной переменной и обеспечивать меньшие затраты на управление по сравнению с некоторыми другими аналогами. Доказана экспоненциальная устойчивость замкнутой системы и робастность по отношению к интервально неопределенным параметрам объекта и внешним ограниченным возмущениям. Численные примеры моделирования подтвердили результаты расчетов и показали эффективность предложенного алгоритма по сравнению с некоторыми существующими аналогами.

Ключевые слова: статический закон управления, линейное дифференциальное уравнение в частных производных, функционал Ляпунова, линейное матричное неравенство, экспоненциальная устойчивость.

DOI: 10.31857/S0005231021030041

1. Введение

В статье рассматривается некоторый класс линейных дифференциальных уравнений параболического и гиперболического типов с распределенным управлением. Такие уравнения могут описывать, например, конвекционно-дифузионные процессы, вращающуюся стойку компрессора с приводом впрыска воздуха, распространение тепла в стержне, колебание струны и т.д.

[1] Результаты раздела 3 получены при поддержке Российского научного фонда (проект № 18-79-10104) в ИПМаш РАН. Результаты разделов 4 и 5 получены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00246) в ИПМаш РАН. Результаты разделов 6 и 7 получены при поддержке гранта Президента РФ (проект № МД-1054.2020.8) в ИПМаш РАН.

Реализуемое конечномерное управление с использованием преобразования Фурье и метода Галеркина рассмотрено в публикациях [1–3]. Для линейных параболических систем в [4] предложен метод управления, основанный на движущихся датчиках и актуаторах вдоль пространственной координаты. В [5, 6] для подобных систем предложено адаптивное управление с использованием процедуры бэкстеппинга, которое достаточно трудоемко в расчете и реализации.

В отличие от [1–6] в настоящей статье будет предложен способ формирования закона управления с использованием дискретизации сигнала измерения по пространственной переменной. Для конечномерных систем подобный подход изучался в течение нескольких последних десятилетий в качестве дискретизации по уровню измеряемого сигнала [7–10] и др. В отличие от непрерывного управления, такое дискретное управление не учитывает поведение объекта между выборками, зато в ряде случаев оно позволяет решить ряд технических задач: управление через цифровые каналы связи, управление с ограничением на информационные каналы связи и т.п. В данной статье дискретизация по пространственной переменной позволит получить реализуемый сигнал управления.

Наблюдаемость систем с дискретными пространственными измерениями изучена в [11]. Дискретное по пространственной переменной управление бесконечномерными системами рассмотрено, например, в [12–15]. Методы [12, 13] неприменимы к неизвестным параметрам системы и не содержат количественного анализа устойчивости замкнутой системы и скорости сходимости решений. В отличие от [12, 13] в [14, 15] предложен метод управления системами параболического типа с неизвестными параметрами с использованием линейных матричных неравенств (ЛМН) для анализа экспоненциальной устойчивости. Однако решения [12–15] не учитывают наличие возмущений.

В настоящей статье, как и в [12–15], будет предложен метод управления с дискретизацией по пространственной переменной. Однако, в отличие от [12–15], предложенный закон управления позволит формировать различные конфигурации регулируемого сигнала по пространственной переменной. Например, по сравнению с [14, 15] предложенный закон управления не требует своей реализации по всей пространственной переменной, а стабилизация объекта может осуществляться с меньшими затратами на регулируемый сигнал. В отличие от [12–15] будет показана экспоненциальная устойчивость замкнутой системы для систем параболического и гиперболического типов в условиях возмущений с использованием ЛМН. Будут приведены численные примеры моделирования и сравнительный анализ эффективности предложенного алгоритма с решением [14, 15] для систем параболического типа.

В статье используются следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n с нормой $|\cdot|$; $\mathbb{R}^{n\times m}$ — множество всех $n \times m$ вещественных матриц; $P > 0$ и $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ означает, что P — симметрическая положительно определенная матрица; симметричные элементы симметрической матрицы будут обозначаться $*$. Непрерывно дифференцируемые функции по всем аргументам будут обозначаться как функции класса $\mathcal{C}^1$. Нижние индек-

сы обозначают частные производные $z_\xi = \frac{\partial z}{\partial \xi}$ и $z_{\xi\xi} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$. $L_2(0,l)$ — гильбертово пространство с квадратично интегрируемыми функциями $z(\xi)$, $\xi \in [0,l]$ с соответствующей нормой $\|z\|^2_{L_2} = \int_0^l z^2(s)ds$. $H_1(0,l)$ — пространство Соболева абсолютно непрерывных скалярных функций $z : [0,l] \to \mathbb{R}$ с нормой $\|z\|^2_{H_1} = \int_0^l z_s^2(s)ds$ и $z_\xi \in L_2(0,l)$. $H_2(0,l)$ — пространство Соболева скалярных функций $z : [0,l] \in \mathbb{R}$ с абсолютно непрерывными производными z_ξ, нормой $\|z\|^2_{H_2} = \int_0^l z_{ss}^2(s)ds$ и $z_{\xi\xi} \in L_2(0,l)$.

2. Постановка задачи

2.1. Модели объектов

1. Пусть первый класс исследуемых объектов описывается скалярным линейным дифференциальным уравнением параболического типа

$$\begin{gathered} z_t(x,t) = a_1 z_{xx}(x,t) + a_2 z_x(x,t) + \phi z(x,t) + u(x,t) + f(x,t), \\ x \in [0,\ l], \quad l > 0, \end{gathered} \tag{1}$$

с граничными условиями Дирихле

$$z(0,t) = z(l,t) = 0 \tag{2}$$

или смешанными граничными условиями

$$z_x(0,t) = \gamma z(0,t), \quad z(l,t) = 0, \quad \gamma \geqslant 0. \tag{3}$$

Здесь $t \geqslant 0$, $z : [0,l] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ — состояние объекта, $u(x,t)$ — сигнал управления, $f(x,t)$ — возмущение класса $\mathcal{C}^1$. Коэффициенты a_1, a_2, ϕ и функция $f(x,t)$ неизвестны, но известны границы интервалов, которым они принадлежат:

$$0 < \underline{a}_1 \leqslant a_1 < \infty, \quad \underline{a}_2 \leqslant a_2 \leqslant \overline{a}_2, \quad \underline{\phi} \leqslant \phi \leqslant \overline{\phi}, \quad |f(x,t)| \leqslant \bar{f}.$$

Величина γ в (3) может быть неизвестной.

Замечание 1. При $u(x,t) = 0$ уравнение (1) описывает конвекционно-дифузионные процессы, а при $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ и $\phi = 0$ — процессы диффузии. В [2] уравнением (1) описывается вращающаяся стойка компрессора с приводом впрыска воздуха $u(x,t)$, где $z(x,t)$ — осевой поток через компрессор. При $u(x,t) = 0$ и $a_2 = 0$ краевая задача (1), (2) описывает распространение тепла в однородном одномерном стержне с фиксированной температурой на концах, где a_1 и ϕ — коэффициенты теплопроводности и теплообмена с окружающей средой соответственно, $z(x,t)$ – значение температуры в момент времени t в точке x.

2. Пусть второй класс исследуемых объектов описывается скалярным линейным дифференциальным уравнением гиперболического типа в виде

$$\begin{gathered} z_{tt}(x,t) = a_1 z_{xx}(x,t) + a_2 z_x(x,t) + \phi z(x,t) - b z_t(x,t) + u(x,t) + f(x,t), \\ x \in [0,\ l], \end{gathered} \tag{4}$$

с граничными условиями Дирихле (2) или смешанными граничными условиями (3). В (4) $\overline{b} > b > \underline{b} > 0$, где вершины $\overline{b}$ и $\underline{b}$ известны. Остальные константы и функции в (4) принимают те же значения, что и в (1).

Замечание 2. При $u(x,t) = 0$ и $a_2 = 0$ краевая задача (4), (2) описывает колебания однородной струны с фиксированными концами и рассеиванием энергии, где a_1, b и ϕ — коэффициенты упругости, диссипации и жесткости соответственно, $z(x,t)$ и $z_t(x,t)$ — прогиб и скорость струны соответственно в момент времени t в точке x.

2.2. Цель управления

Для решения задачи разобьем отрезок $[0,l]$ на N подинтервалов, необязательно равной длины, и обозначим:

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = l, \quad \Delta \geqslant x_{j+1} - x_j, \quad j = 0, \ldots, N-1. \tag{5}$$

Здесь Δ — известная константа. Предположим, что N сенсоров расположены внутри данных подинтервалов, т.е. доступны измерению только сигналы $z(\bar{x}_j, t)$, где $\bar{x}_j \in (x_j, x_{j+1})$, $j = 0, \ldots, N-1$.

Цель управления состоит в разработке дискретного по пространственной переменной x закона управления, который обеспечит экспоненциальную устойчивость замкнутой системы для (1) и (4).

3. Синтез закона управления

Зададим закон управления в виде

$$\begin{gathered} u(x,t) = -KF^j(z(\bar{x}_j,t),x,t), \\ x \in [x_j, x_{j+1}), \quad \bar{x}_j \in (x_j, x_{j+1}), \quad j = 0, \ldots, N-1, \end{gathered} \tag{6}$$

где $K > 0$, функция $F^j(z(\bar{x}_j,t),x,t)$ удовлетворяет следующим условиям:

(а) $F^j(z(\bar{x}_j,t),x,t)$ класса $\mathcal{C}^1$ для любых $t \geqslant 0$ и $x \in [0,l]$;

(б) производная $F^j_x(z(\bar{x}_j,t),x,t)$ ограничена для любых $t \geqslant 0$ и $x \in [0,l]$;

(в) $F^j(z(\bar{x}_j,t),\bar{x}_j,t) = z(\bar{x}_j,t)$, $\bar{x}_j \in (x_j, x_{j+1})$, $j = 0, \ldots, N-1$.

Условие (а) требуется для решения краевой задачи (см. раздел 6). Требования (б) и (в) необходимы для доказательства устойчивости замкнутой системы и ограниченности всех сигналов в ней. Приведем примеры функции $F^j(z(\bar{x}_j,t),x,t)$.

Пример 1. Пусть

$$F^j(z(\bar{x}_j,t),x,t) = \varphi^j(z(\bar{x}_j,t),x,t)z(\bar{x}_j,t),$$

где $\varphi^j(z(\bar{x}_j,t),x,t)$ класса $\mathcal{C}^1$, $\varphi^j_x(z(\bar{x}_j,t),x,t)z(\bar{x}_j,t)$ ограничена для любых x и t, а также $\varphi^j(z(\bar{x}_j,t),\bar{x}_j,t) = 1$. В частности, если $\varphi^j(z(\bar{x}_j,t),x,t) = 1$ для любых x и t, то получим закон управления из [14, 15]. Далее рассмотрим примеры других функций $\varphi^j(z(\bar{x}_j,t),x,t)$.

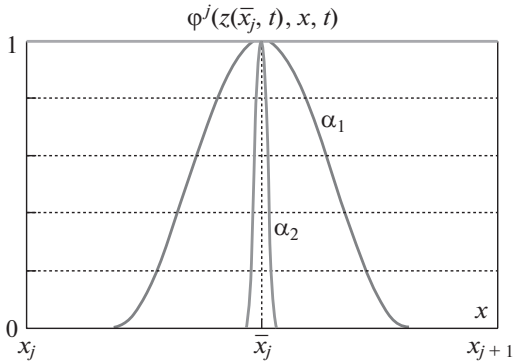


Рис. 1. График функции $\varphi^j(z(\bar{x}_j,t),x,t)$ из примера 2 (при $z(\bar{x}_j,t) = \mathrm{const} > 0$) на интервале $x \in [x_j, x_{j+1})$ при различных значениях $\alpha > 0$ $((\alpha = \alpha_1) < (\alpha = \alpha_2))$.

Пример 2. В [14, 15] $u(x,t) \neq 0$ на всем интервале $[x_j, x_{j+1})$, если $z(\bar{x}_j,t) \neq 0$. Приведем пример, когда $u(x,t) \neq 0$ лишь на части интервала $[x_j, x_{j+1})$ при $z(\bar{x}_j,t) \neq 0$. Пусть в примере 1 функция φ^j задана в виде

$$\varphi^j(z(\bar{x}_j,t),x,t) = \tag{7}$$

$$= \begin{cases} 0{,}5 + 0{,}5\cos\left(\dfrac{\alpha(x-\bar{x}_j)}{1+z^2(\bar{x}_i,t)}\right), \\ \qquad\qquad x \in \left[\bar{x}_j - \dfrac{\pi(1+z^2(\bar{x}_j,t))}{\alpha}; \bar{x}_j + \dfrac{\pi(1+z^2(\bar{x}_j,t))}{\alpha}\right], \\ 0, \quad x \in \left[x_j; \bar{x}_j - \dfrac{\pi(1+z^2(\bar{x}_j,t))}{\alpha}\right) \cup \left(\bar{x}_j + \dfrac{\pi(1+z^2(\bar{x}_j,t))}{\alpha}; x_{j+1}\right). \end{cases}$$

Здесь $\alpha > 0$ — достаточно большое число, которое может быть выбрано из условия $\alpha > \max\left\{\frac{\bar{x}_j - x_j}{\pi(1+z^2(\bar{x}_j,t))}, \frac{x_{j+1}-\bar{x}_j}{\pi(1+z^2(\bar{x}_j,t))}\right\}$. Очевидно, что $\varphi^j(z(\bar{x}_j,t),\bar{x}_j,t) = 1$, $\varphi^j(z(\bar{x}_j,t),x,t)$ класса $\mathcal{C}^1$ и $\varphi^j_x(z(\bar{x}_j,t),x,t)z(\bar{x}_j,t)$ ограничена для любых $t \geqslant 0$, $x \in [0,l]$ и $z(\bar{x}_j,t) \in \mathbb{R}$. Графики функции (7) приведены на рис. 1.

Пример 3. В (7) переход между значениями φ^j зависит от $z(\bar{x}_j,t)$. Далее приведем пример, исключающий данную зависимость. Зададим в примере 2 функцию φ^j в виде

$$\varphi^j(z(\bar{x}_j,t),x,t) =$$

$$= \begin{cases} e^{-\frac{\alpha}{(1+z^2(\bar{x}_j,t))(\beta_j^2-(x-\bar{x}_j)^2)} + \frac{\alpha}{\beta_j(1+z^2(\bar{x}_j,t))}}, \quad x \in (\bar{x}_j - \beta_j; \bar{x}_j + \beta_j), \\ 0, \quad x \in [x_j; \bar{x}_j - \beta_j] \cup [\bar{x}_j + \beta_j; x_{j+1}). \end{cases} \tag{8}$$

Здесь $\alpha > 0$, $\beta_j \leqslant \min\{x_{j+1} - \bar{x}_j, \bar{x}_j - x_j\}$. В отличие от (7) в (8) переход между значениями функции не зависит от $z(\bar{x}_j,t)$, а зависит только от β_j. Очевидно, что $\varphi^j(z(\bar{x}_j,t),\bar{x}_j,t) = 1$, функция $\varphi^j(z(\bar{x}_j,t),x,t)$ класса $\mathcal{C}^1$, а также

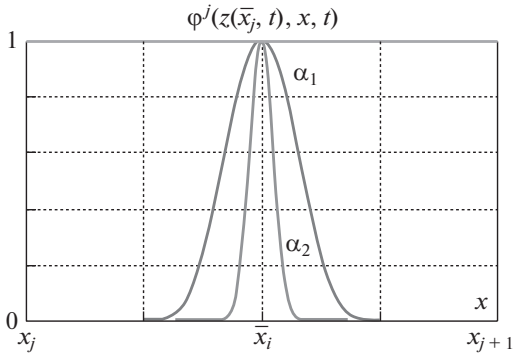


Рис. 2. График функции $\varphi^j(z(\bar{x}_j,t),x,t)$ из примера 3 (при $z(\bar{x}_j,t) = \mathrm{const} > 0$) на интервале $x \in [x_j, x_{j+1})$ при различных значениях $\alpha > 0$ $((\alpha = \alpha_1) < (\alpha = \alpha_2))$.

$\varphi^j_x(z(\bar{x}_j,t),x,t)z(\bar{x}_j,t)$ ограничена для любых $t \geqslant 0$, $x \in [0,l]$ и $z(\bar{x}_j,t) \in \mathbb{R}$. Графики функции (8) приведены на рис. 2.

Замечание 3. В [14] использовался закон управления $u(x,t) = -Kz(\bar{x}_j,t)$, $\bar{x}_j = 0{,}5(x_j + x_{j+1})$, $x \in [x_j, x_{j+1})$, $j = 0,\ldots,N-1$, что является частным случаем (6) (см. пример 1). Если функцию $F^j(z(\bar{x}_j,t),x,t)$ выбрать как в примерах 2 или 3, то из рис. 1 и 2 видно, что площадь под кривой $\varphi^j(z(\bar{x}_j,t),x,t) = 1$ для [14] может быть существенно больше, чем площадь под остальными кривыми. Таким образом, предложенный закон управления может стабилизировать объект (1) при меньших затратах на управление, что далее будет продемонстрировано на численных примерах.

Пример 4. Приведем пример управления, близкого к граничному. Пусть $N = 2$. Тогда отрезок $[0,l]$ имеет следующее разбиение: $0 = x_0 < x_1 = l$. Если выбрать единственную на отрезке $[0,l]$ функцию (7) или (8) с достаточно большим значением α и точкой $\bar{x}_0$, достаточно близкой к левому или правому концу отрезка $[0,l]$, то получим управление, близкое к граничному. Если взять $N = 3$, то можно две точки $\bar{x}_0$ и $\bar{x}_1$ выбрать достаточно близко к левому и правому концам соответственно.

4. Основной результат для системы параболического типа (1)

Подставим (6) в (1) и запишем уравнение замкнутой системы:

$$\begin{gathered} z_t(x,t) = a_1 z_{xx}(x,t) + a_2 z_x(x,t) + f(x,t) - \\ - (K-\phi)z(x,t) + K[z(x,t) - F^j(z(\bar{x}_j,t),x,t)], \\ x \in [x_j, x_{j+1}), \quad j = 0,\ldots,N-1. \end{gathered} \tag{9}$$

Теорема 1. Рассмотрим замкнутую систему (9) *при граничных условиях* (2) *или* (3). *Пусть для заданных коэффициентов* $\bar{R} > 0$, $\Delta > 0$, $\delta > 0$, $K > 0$ *будут разрешимы следующие два линейных матричных неравенства:*

$$\Psi\,(a_2 = \underline{a}_2) \leqslant 0, \quad \Psi\,(a_2 = \overline{a}_2) \leqslant 0, \tag{10}$$

где

$$(11)\quad \Psi = \begin{bmatrix} -2K+2\overline{\phi}+2\delta+K\bar{R} & a_2 & 1 & 0 \\ * & -2\underline{a}_1+\frac{4\Delta^2}{\pi^2}K\bar{R}^{-1} & 0 & -\frac{4\Delta^2}{\pi^2}K\bar{R}^{-1} \\ * & * & -\beta_1 & 0 \\ * & * & * & -\beta_2+\frac{4\Delta^2}{\pi^2}K\bar{R}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Тогда будет выполнено следующее неравенство

$$(12)\qquad \|z(\cdot,t)\|^2_{L_2} \leqslant e^{-2\delta t}\|z(\cdot,0)\|^2_{L_2} + \frac{\gamma}{2\delta},$$

где

$$\gamma = \beta_1 \sup_{t\geqslant 0}\int\limits_0^l f^2(x,t)dx + \beta_2 \sup_{t\geqslant 0}\sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} (F_x^j(x,t))^2 dx.$$

Перед доказательством теоремы 1 рассмотрим две вспомогательные леммы.

Лемма 1 (расширенное неравенство Виртингера). *Пусть* $z \in H_1(0,l)$ — *скалярная функция,* $0=\chi_0<\chi_1<\ldots\chi_{n-1}<\chi_n=l$ *и* $\Delta \geqslant \chi_i-\chi_{i+1}$, $i = 0,\ldots,n-1$. *Если* $z(\chi_i)=0$, $i=1,\ldots,n-1$, *тогда*

$$(13)\qquad \int\limits_0^l z^2(\xi)d\xi \leqslant \frac{4\Delta^2}{\pi^2}\int\limits_0^l z_\xi^2(\xi)d\xi.$$

Доказательство. Перепишем левую часть неравенства (13) в виде

$$\int\limits_0^l z^2(\xi)d\xi = \int\limits_0^{\chi_1} z^2(\xi)d\xi + \sum_{i=1}^{n-2}\int\limits_{\chi_i}^{\chi_{i+1}} z^2(\xi)d\xi + \int\limits_{\chi_{n-1}}^{l} z^2(\xi)d\xi.$$

Применяя неравенство Виртингера [16] к каждому интегральному выражению, получим

$$\int\limits_0^{\chi_1} z^2(\xi)d\xi + \int\limits_{\chi_{n-1}}^{l} z^2(\xi)d\xi + \sum_{i=1}^{n-2}\int\limits_{\chi_i}^{\chi_{i+1}} z^2(\xi)d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4\Delta^2}{\pi^2}\left(\int\limits_0^{\chi_1} z_\xi^2(\xi)d\xi + \int\limits_{\chi_{n-1}}^{l} z_\xi^2(\xi)d\xi\right) + \frac{\Delta^2}{\pi^2}\sum_{i=1}^{n-2}\int\limits_{\chi_i}^{\chi_{i-1}} z_\xi^2(\xi)d\xi \leqslant \frac{4\Delta^2}{\pi^2}\int\limits_0^l z_\xi^2(\xi)d\xi.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть функция $V : [t_0, \infty) \to [0, \infty)$ *дифференцируема на* $[t_0, \infty)$ *и задано дифференциальное неравенство*

$$\dot{V}(t) \leqslant -\delta V(t) + f(t), \tag{14}$$

где $\delta > 0$ *и* $\sup\limits_{t \geqslant t_0} |f(t)| = \beta$. *Тогда справедливо следующее неравенство*

$$V(t) \leqslant e^{-\delta(t-t_0)} V(t_0) + \frac{\beta}{\delta}, \quad t \geqslant t_0. \tag{15}$$

Доказательство. Обозначим

$$y(t) = e^{-\delta(t-t_0)} V(t_0) + \frac{\beta}{\delta}, \quad t \geqslant t_0.$$

Легко проверить, что функция $y(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{y}(t) = -\delta y(t) + \beta, \quad t \geqslant t_0. \tag{16}$$

Воспользуемся принципом сравнения и покажем, что $V(t) \leqslant y(t)$ для любых $t \geqslant t_0$. Пусть $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_n > \ldots$ — последовательность положительных чисел таких, что $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0^+$. Тогда функция

$$\dot{y}_n(t) = -\delta y(t) + \frac{\beta}{\delta} + \frac{\varepsilon_n}{\delta} \tag{17}$$

является решением дифференциального уравнения

$$\dot{y}(t) = -\delta y(t) + \beta + \varepsilon_n. \tag{18}$$

Предположим, что существует $t^* > t_0$, такое что

$$t^* = \inf\{t > t_0 : V(t) \geqslant y_n(t)\}. \tag{19}$$

Тогда $V(t^*) \geqslant y_n(t^*)$ и $V(t) < y_n(t)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$. Из (14) и (18) имеем $\dot{V}(t^*) < \dot{y}_n(t^*)$. С другой стороны, из $V(t) < y_n(t)$ при $t < t^*$ и $V(t^*) = y_n(t^*)$ следует, что $\dot{V}(t^*) \geqslant \dot{y}_n(t^*)$. Пришли к противоречию. Значит, $V(t) < y_n(t)$ для всех $t \geqslant t_0$ и $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, $V(t) \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n(t) = y(t)$ при всех $t \geqslant t_0$. Доказательство леммы 2 закончено.

Доказательство теоремы 1. Для анализа устойчивости замкнутой системы (9) рассмотрим следующий функционал Ляпунова

$$V(t) = \int\limits_0^l z^2(x,t)dx. \tag{20}$$

Дифференцируя $V(t)$ по времени вдоль траекторий (9), составим следующее выражение

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)+2\delta V(t)=2\int\limits_0^l\Big[a_1z(x,t)z_{xx}(x,t)+a_2z(x,t)z_x(x,t)-\\ -(K-\phi)z^2(x,t)+z(x,t)f(x,t)\Big]dx+\\ +2K\sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}z(x,t)\Big[z(x,t)-F^j(x,t)\Big]+2\delta\int\limits_0^l z^2(x,t)dx,\end{aligned}\tag{21}$$

где ради краткости в доказательстве обозначим $F^j(z(\bar{x}_j,t),x,t)=F^j(x,t)$. С учетом граничных условий (2) или (3) проинтегрируем по частям первое слагаемое в (21):

$$\begin{aligned}2a_1\int\limits_0^l z(x,t)z_{xx}(x,t)dx=\\ =2a_1z(x,t)z_x(x,t)\Big|_0^l-2a_1\int\limits_0^l z_x^2(x,t)dx\leqslant-2\underline{a}_1\int\limits_0^l z_x^2(x,t)dx.\end{aligned}\tag{22}$$

Используя неравенство Юнга для предпоследнего слагаемого в (21), получим

$$\begin{aligned}2K\sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}z(x,t)\Big[z(x,t)-F^j(x,t)\Big]dx\leqslant\\ \leqslant K\bar{R}\int\limits_0^l z^2(x,t)dx+K\bar{R}^{-1}\sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\Big[z(x,t)-F^j(x,t)\Big]^2dx.\end{aligned}\tag{23}$$

Согласно условию (в) $z(x,t)=F^j(x,t)$ в точке $x=\bar{x}_j$. Тогда применяя лемму 1 к (23), получим

$$\begin{aligned}K\bar{R}^{-1}\sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\Big[z(x,t)-F^j(x,t)\Big]^2dx\leqslant\\ \leqslant\frac{4\Delta^2}{\pi^2}K\bar{R}^{-1}\sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\Big[z_x^2(x,t)-2z_x(x,t)F_x^j(x,t)+(F_x^j(x,t))^2\Big]dx.\end{aligned}\tag{24}$$

Обозначим $\eta_j = col\{z(x,t), z_x(x,t), f(x,t), F_x^j(x,t)\}$. Применяя (22)–(24) к (21), получим

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) + 2\delta V(t) - \beta_1 \int\limits_0^l f^2(x,t)dx - \beta_2 \sum_{j=0}^{N-1} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} F_x^j(x,t)dx \leqslant \\ \leqslant \sum_{j=0}^{N-1} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \eta_j^{\mathrm{T}} \Psi \eta_j dx,\end{aligned} \tag{25}$$

где Ψ задана в (11). Матрица (11) аффинна по отношению к параметру a_2. Значит, согласно [17] если выполнены ЛМН (10) в вершинах $a_2 = \{\underline{a}_2, \overline{a}_2\}$, то ЛМН $\Psi \leqslant 0$ будет выполнено для любых $a_2 \in [\underline{a}_2, \overline{a}_2]$. Следовательно, будет выполнено неравенство

$$\dot{V}(t) + 2\delta V(t) - \beta_1 \int\limits_0^l f^2(x,t)dx - \beta_2 \sum_{j=0}^{N-1} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} F_x^j(x,t)dx \leqslant 0. \tag{26}$$

Воспользовавшись леммой 2, решение дифференциального неравенства (26) определим в виде

$$V(t) \leqslant V(0)e^{-2\delta t} + \frac{\gamma}{2\delta}. \tag{27}$$

Тогда из (27) следует (12). Теорема 1 доказана.

5. Основной результат для системы гиперболического типа (4)

Подставим (6) в (4) и запишем уравнение замкнутой системы:

$$\begin{gathered} z_{tt}(x,t) = a_1 z_{xx}(x,t) + a_2 z_x(x,t) - b z_t(x,t) + f(x,t) - \\ - (K-\phi) z(x,t) + K\Big[z(x,t) - F^j(z(\bar{x}_j,t),x,t)\Big], \\ x \in [x_j, x_{j+1}), \quad j = 0, \ldots, N-1. \end{gathered} \tag{28}$$

Теорема 2. Рассмотрим замкнутую систему (28) *при граничных условиях* (2) *или* (3). *Пусть для заданных коэффициентов* $p \in (-0{,}5; 0{,}5)$, $\bar{R} > 0$, $\Delta > 0$, $\delta > 0$, $K > 0$ *будут разрешимы следующие линейные матричные неравенства в соответствующих вершинах:*

$$\Psi\Big(\phi = \{\underline{\phi}, \overline{\phi}\}, a_2 = \{\underline{a}_2, \overline{a}_2\}, b = \{\underline{b}, \overline{b}\}\Big) \leqslant 0, \tag{29}$$

где

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & 0{,}5pa_2 & \Psi_{13} & 0{,}5p & 0 \\ * & \Psi_{22} & a_2 & 0 & -\dfrac{4\Delta^2}{\pi^2}K\bar{R}^{-1} \\ * & * & \Psi_{33} & 1 & 0 \\ * & * & * & -\beta_1 & 0 \\ * & * & * & * & -\beta_2 + \dfrac{4\Delta^2}{\pi^2}K\bar{R}^{-1} \end{bmatrix}, \tag{30}$$

$$\Psi_{11} = -0{,}5p(K - \overline{\phi}) + 0{,}25K\bar{R}p^2 + 2\delta,$$
$$\Psi_{13} = 1 - 0{,}5pb - K + \phi + K\bar{R}p,$$
$$\Psi_{22} = -p\underline{a}_1 + \frac{4\Delta^2}{\pi^2}K\bar{R}^{-1},$$
$$\Psi_{33} = 0{,}5p - 2\underline{b} + 0{,}5K\bar{R}.$$

Тогда будет выполнено неравенство (12), *параметры которого расчитываются с учетом* (29).

Доказательство. Для анализа устойчивости замкнутой системы (28) рассмотрим функционал Ляпунова в виде

$$V(t) = \int_0^l \Big[a_1 z_x^2(x,t) + z^2(x,t) + pz(x,t)z_t(x,t) + z_t^2(x,t)\Big]dx. \tag{31}$$

При $p \in (-0{,}5; 0{,}5)$ будет справедливо неравенство $z^2 + pzz_t + z_t^2 \geqslant 0$. Значит, $V(t) \geqslant 0$. Дифференцируя $V(t)$ по времени вдоль траекторий (28), составим выражение

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) + 2\delta V(t) = 2\int_0^l \Big[a_1 z_x(x,t)z_{xt}(x,t) + z(x,t)z_t(x,t) + 0{,}5pz_t^2(x,t) + \\ + \Big[0{,}5pz(x,t) + z_t(x,t)\Big]\Big[a_1 z_{xx}(x,t) + a_2 z_x(x,t) - \\ - bz_t(x,t) + f(x,t) - (K-\phi)z(x,t)\Big]dx + \\ + 2K\sum_{j=0}^{N-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}} \Big[0{,}5pz(x,t) + z_t(x,t)\Big]\Big[z(x,t) - F^j(x,t)\Big] + \\ + 2\delta\int_0^l z^2(x,t)dx, \end{aligned} \tag{32}$$

где ради краткости в доказательстве обозначим $F^j(z(\bar{x}_j,t),x,t)=F^j(x,t)$. С учетом граничных условий (2) или (3), проинтегрируем по частям первое слагаемое в (32):

$$
\begin{aligned}
&2a_1\int\limits_0^l z_x(x,t)z_{xt}(x,t)dx=\\
&=2a_1z_x(x,t)z_t(x,t)\Big|_0^l-2a_1\int\limits_0^l z_t(x,t)z_{xx}(x,t)dx=\\
&=-2\underline{a}_1\int\limits_0^l z_t(x,t)z_{xx}(x,t)dx.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Используя неравенство Юнга для предпоследнего слагаемого в (32), получим

$$
\begin{aligned}
&2K\sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\Big[0{,}5pz(x,t)+z_t(x,t)\Big]\Big[z(x,t)-F^j(x,t)\Big]dx\leqslant\\
&\leqslant K\bar{R}\int\limits_0^l\Big[0{,}5pz(x,t)+z_t(x,t)\Big]^2dx+\\
&+K\bar{R}^{-1}\sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\Big[z(x,t)-F^j(x,t)\Big]^2dx.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Так как $z(x,t)=F^j(x,t)$ в точке $x=\bar{x}_j$ (см. условие (в)), то, применяя лемму 1 к (34), получим (24). Обозначим

$$\bar{\eta}_j=col\{z(x,t),z_x(x,t),z_t(x,t),f(x,t),F^j_x(x,t)\}.$$

Применяя (22), (33), (34) и (24) к (32), запишем результат в виде

$$
\begin{aligned}
&\dot{V}(t)+2\delta V(t)-\beta_1\int\limits_0^l f^2(x,t)dx-\beta_2\sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}F^j_x(x,t)dx\leqslant\\
&\leqslant\sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\bar{\eta}_j^{\mathrm{T}}\bar{\Psi}\bar{\eta}_jdx.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Здесь $\bar{\Psi}$ задано в (30). Матрица $\bar{\Psi}$ аффинна по отношению к параметрам ϕ, a_2 и b. Согласно [17] если выполнены ЛМН (29) в вершинах $\phi = \{\underline{\phi}, \overline{\phi}\}$, $a_2 = \{\underline{a}_2, \overline{a}_2\}$ и $b = \{\underline{b}, \overline{b}\}$, то ЛМН $\bar{\Psi} \leqslant 0$ выполнено для любых $\phi \in [\underline{\phi}, \overline{\phi}]$, $a_2 \in [\underline{a}_2, \overline{a}_2]$ и $b \in [\underline{b}, \overline{b}]$. Следовательно, будет выполнено неравенство (35). Воспользовавшись леммой 2, решение дифференциального неравенства (35) можно записать в виде (27). Тогда из (27) следует неравенство (12), параметры которого расчитываются с учетом (29). Теорема 2 доказана.

6. Решение краевой задачи

Покажем, что существуют решения уравнений (9) и (28), удовлетворяющие граничным условиям (2) или (3).

6.1. Замкнутая система (9)

Сначала рассмотрим уравнение (9) с граничными условиями (2). Краевую задачу (9), (2) можно сформулировать как абстрактную неоднородную задачу Коши в гильбертовом пространстве $H = L_2(0, l)$ в виде

$$\dot{z}(t) = \mathcal{A}z(t) + F(t, z(t)), \quad z_0 = z(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{36}$$

Здесь оператор

$$\mathcal{A} = a_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial}{\partial x} + \phi$$

имеет область определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{z \in H_2(0, l) : z(0) = z(l) = 0\},$$
$$F(t, z(t)) = f(t) + u(t),$$

функция $u(t)$ задана в (6). Согласно теореме 1, [18] и [19] инфинитезимальный оператор $\mathcal{A}$ генерирует строго непрерывную экспоненциально устойчивую полугруппу (C_0-полугруппу) $T(t)$. Тогда краевая задача (36) может быть сформулирована как краевая задача на полубесконечном интервале $[0, \infty)$ и ее решения могут быть найдены как решения интегрального уравнения

$$z(t) = T(t)z(0) + \int_0^t T(t-s)F(s, z(s))ds. \tag{37}$$

Так как функция $F(t, z(t))$ класса $\mathcal{C}^1$, то согласно теореме 3.1.3 из [19] существует единственное решение (36), которое удовлетворяет интегральному уравнению (37). Краевая задача при смешанных граничных условиях (3) решается аналогично.

6.2. Замкнутая система (28)

Теперь рассмотрим уравнение (28) с граничными условиями (2) или (3). Запишем сначала краевую задачу (28), (2) как абстрактную неоднородную задачу Коши в гильбертовом пространстве $H = L_2(0, l)$ в виде

$$\dot{\xi}(t) = \bar{\mathcal{A}}\xi(t) + \bar{F}(t, \xi(t)), \quad \xi_0 = \xi(0) \in \bar{\mathcal{A}}, \tag{38}$$

где $\xi = col\{z, z_t\}$, оператор

$$\bar{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \phi & -b \end{bmatrix}$$

имеет область определения

$$\mathcal{D}(\bar{\mathcal{A}}) = \{\xi \in H_2(0, l) : \xi(0) = \xi(l) = 0\},$$
$$\bar{F}(t, \xi(t)) = [0\ 1]^{\mathrm{T}}\,[f(t) + u(t)],$$

функция $u(t)$ задана в (6). Согласно теореме 1, [18] и [19] инфинитезимальный оператор $\mathcal{A}$ генерирует строго непрерывную экспоненциально устойчивую полугруппу (C_0-полугруппу) $T(t)$. Следовательно, дальнейшие рассуждения для уравнения (38) аналогичны рассуждениям для (36) в подразделе 6.1.

7. Численное исследование предложенной схемы управления

7.1. Моделирование системы управления

Пусть $l = 1$. Для моделирования систем (1) и (4) разделим отрезок $[0, 1]$ на 160 подынтервалов одинаковой длины. Тогда шаг дискретизации по пространственной переменной $D = 1/160$. Производные первого и второго порядков по пространственной переменной от функции $z(x, t)$ вычисляются в точках $0 = x_0 < x_1 < \ldots x_l < \ldots < x_{160}$ с помощью формул

$$z_x(x_k, t) = \frac{z(x_{k+1}, t) - z(x_k, t)}{D}$$

и

$$z_{xx}(x_k, t) = \frac{z(x_{k+1}, t) - 2z(x_k, t) + z(x_{k-1}, t)}{D^2}.$$

Для формирования закона управления (6) разделим отрезок $[0, 1]$ поочередно на $N = 2$ и на $N = 10$ равных подынтервалов (см. (5)).

Рассмотрим системы (1) и (4) при граничных условиях Дирихле (2) и $a_1 \geqslant 0{,}5$, $a_2 \in [-5, 5]$, $\phi \in [-5, 5]$, $b = [-5, -1]$, $|f(x, t)| \leqslant 20$ для любых x и t.

Матричные неравенства (10) и (29) разрешимы при $K \geqslant 100$.

7.2. Результаты моделирования для системы (1)

В (1) выберем $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $\phi = 5$, $f(x,t) = 0{,}2[\sin(30kt) + \sin(2kt)]$, $k = 0, \ldots, 160$ и $z(x,0) = \sin(\pi x_k)$. Для моделирования алгоритмов управления рассмотрим два разбиения: $N = 2$ и $N = 10$ (см. (5)). Пусть $\bar{x}_j = 0{,}5(x_j + x_{j+1})$. В законе управления (6) выберем функцию $F^j(z(\bar{x}_j, t), x, t)$ из примера 3, где $\alpha = 10^3$, а также $\beta_j = 1/8$ при $N = 2$ и $\beta_j = 1/80$ при $N = 10$.

На рис. 3–5 представлены решения (1) и графики $u(x,t)$ для:

1) закона управления $u(x,t) = -Kz(\bar{x}_j, t)$ из [14, 15] при $K = 100$;

2) предложенного закона управления (6) при $K = 100$;

3) предложенного закона управления (6) при $K = 500$.

Из рис. 3 и 4 видно, что качество управления по $z(x,t)$ для предложенного закона управления незначительно уступает качеству управления для алгоритма из [14, 15]. При этом предложенный алгоритм обеспечивает экспоненциальную устойчивость по $z(x,t)$ в условиях возмущений. Если же увеличить коэффициент K в предложенном законе управлении в 5 раз, то амплитуда

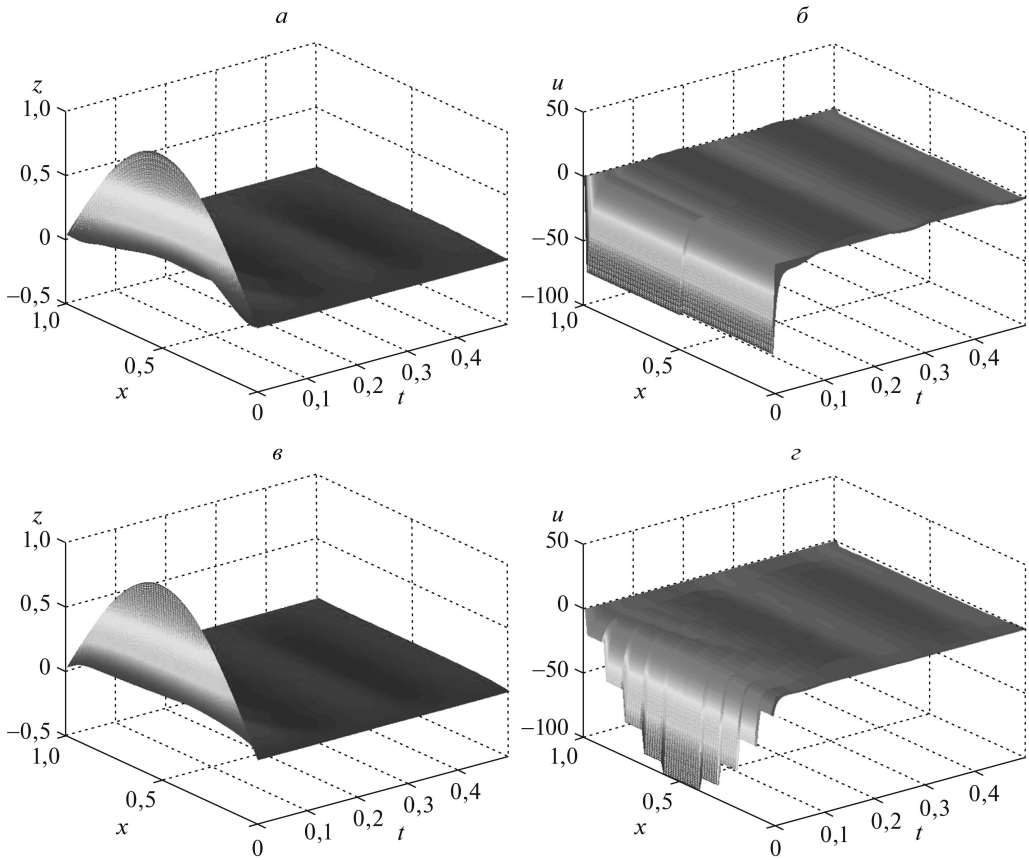


Рис. 3. Пространственно-временные графики по $z(x,t)$ и $u(x,t)$ для [14, 15] при $N = 2$ (*а, б*) и $N = 10$ (*в, г*) при $K = 100$.

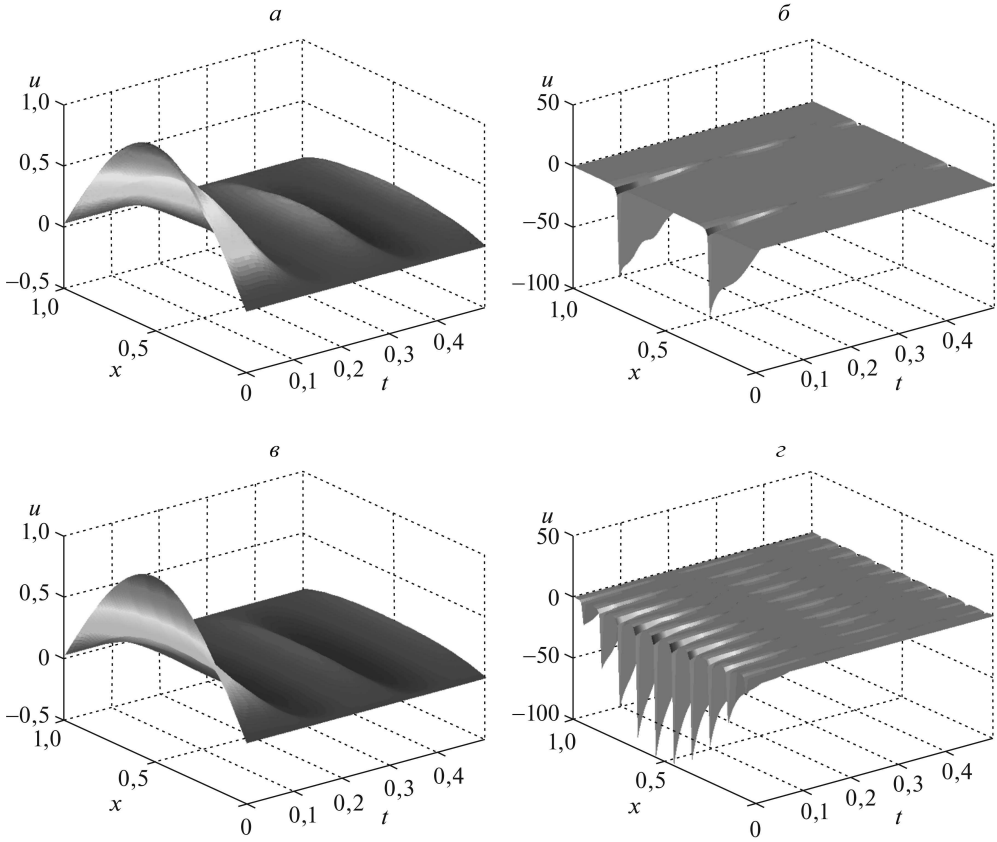


Рис. 4. Пространственно-временные графики по $z(x,t)$ и $u(x,t)$ для предложенного алгоритма при $N = 2$ (*а, б*) и $N = 10$ (*в, г*) при $K = 100$.

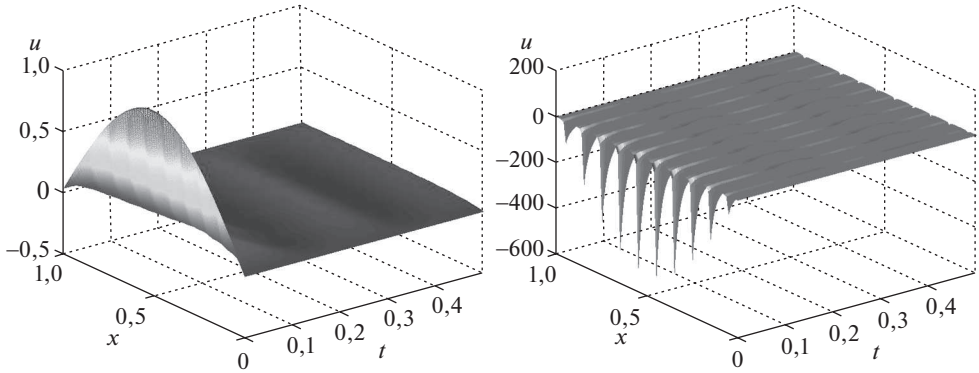


Рис. 5. Пространственно-временные графики по $z(x,t)$ и $u(x,t)$ для предложенного алгоритма при $N = 10$ при $K = 500$.

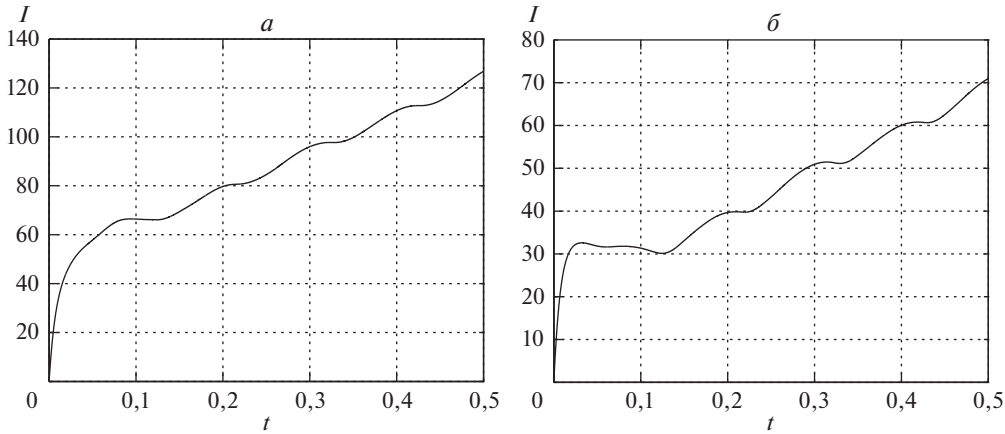


Рис. 6. Разница затрат на управление при $N = 2$ ($а$) и $N = 10$ ($б$) между использованием закона управления из [14, 15] и предложенным законом управления соответственно при $K = 100$.

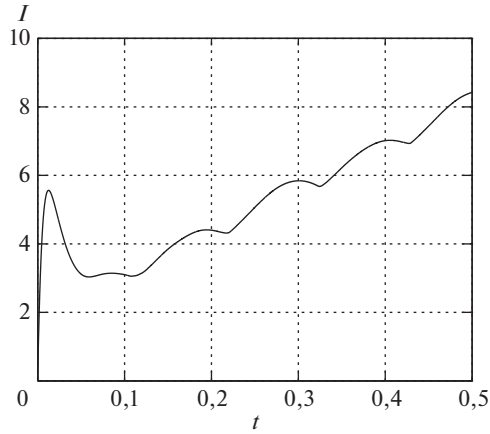


Рис. 7. Разница затрат на управление при $N = 10$ между использованием закона управления из [14, 15] при $K = 100$ и предложенным законом управления при $K = 500$.

управления также возрастет примерно в 5 раз, но при этом скорость экспоненциальной сходимости и качество подавления возмущения в установившемся режиме будет выше, чем у алгоритма из [14, 15] при $K = 100$.

Теперь проанализируем затраты на управление. На рис. 6 и 7 представлена интегральная разность вида

$$I = \sum_{j=0}^{N-1} \int_0^t \left(|u_{F\&B}(\bar{x}_j, s)| - |u_{proposed}(\bar{x}_j, s)|\right) ds,$$

где $u_{F\&B}(\bar{x}_j, t)$ – закон управления [14], $u_{proposed}(\bar{x}_j, t)$ – предложенный закон управления. Из рис. 6 и 7 видно, что затраты на управление у предложенного

алгоритма меньше, чем у [14]. При этом предложенный закон управления принимает ненулевые значения лишь на части пространственной переменной, в то время как управление [14, 15] требует реализации на протяжении всей пространственной переменной, см. рис. 3–5.

Отметим, что результаты моделирования для функции $F^j(z(\bar{x}_j,t),x,t)$ из примера 2 с $\alpha = 100$ сопоставимы с результатами, полученными для функции $F^j(z(\bar{x}_j,t),x,t)$ из примера 3, поэтому они не приводятся.

7.3. Результаты моделирования для системы (4)

При моделировании (4) выберем $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $b = -1$, $\phi = 5$ и $f(x,t) = 0{,}2[\sin(30kt) + \sin(2kt)]$, $k = 0,\ldots,160$, $z(x,0) = \sin(\pi x_k)$ и $z_t(x,0) = 0$. В законе управления (6) зададим параметры как в подразделе 7.2. На рис. 8 и 9 представлены решения (4) и графики $u(x,t)$ для предложенного закона управления (6) при $K = 100$ и $K = 500$, а также при $N = 2$ и $N = 10$. Из рис. 8 и 9 видно, что предложенный алгоритм обеспечивает экспоненциальную устойчивость по $z(x,t)$ в условиях возмущений. Результаты моделиро-

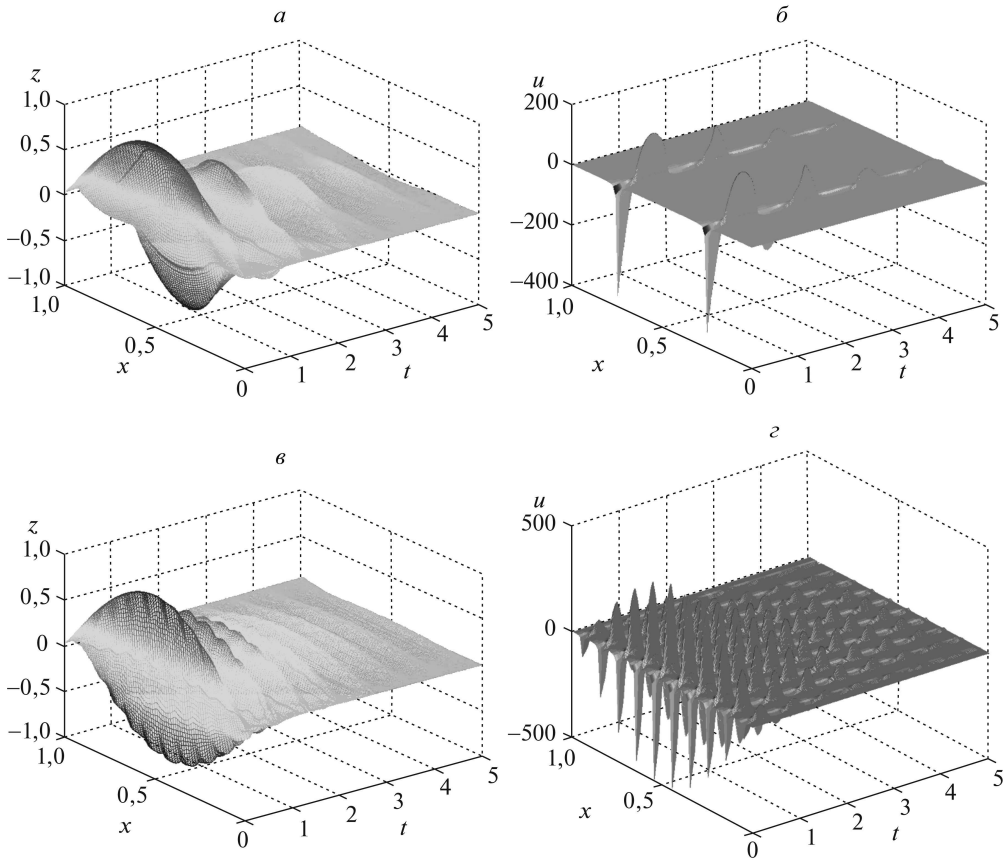


Рис. 8. Пространственно-временные графики по $z(x,t)$ и $u(x,t)$ для предложенного алгоритма при $N = 2$ (*а, б*), $N = 10$ (*в, г*) и $K = 100$.

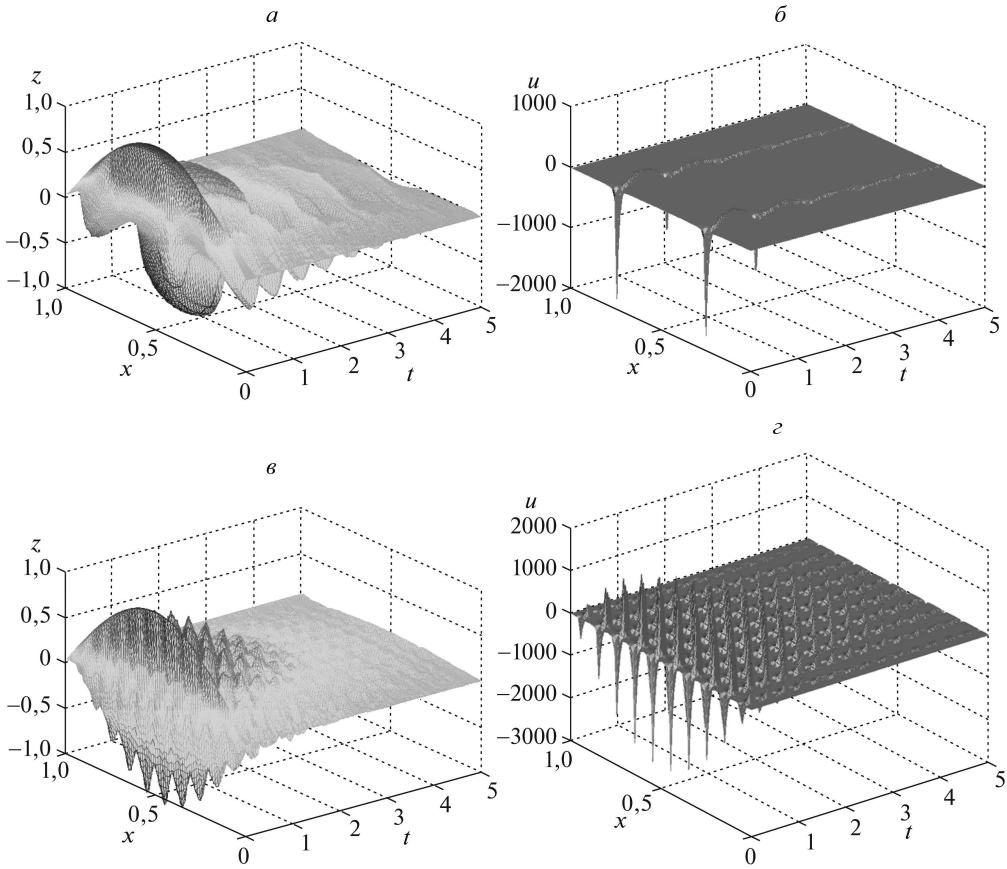


Рис. 9. Пространственно-временные графики по $z(x,t)$ и $u(x,t)$ для предложенного алгоритма при $N = 2$ (*а, б*), $N = 10$ (*в, г*) и $K = 500$.

вания для функции $F^j(z(\bar{x}_j,t),x,t)$ из примера 3 с $\alpha = 100$ сопоставимы с результатами, полученными для функции $F^j(z(\bar{x}_j,t),x,t)$ из примера 2, поэтому они не приводятся.

8. Заключение

Предложен дискретный по пространственной переменной закон управления скалярными линейными дифференциальными уравнениями параболического и гиперболического типов с интервально неопределенными параметрами и внешними ограниченными возмущениями. Для синтеза закона управления используется конечный набор измерений выходного сигнала. Закон управления зависит от функции, зависящей от пространственной координаты и текущего измерения. Данная функция позволяет достигать разных свойств, например обеспечивать пониженные затратами на управление или реализовывать управление, близкое к граничному. Доказана экспоненциальная устойчивость замкнутых систем и робастность по отношению к параметрам и внешним возмущениям.

Численные примеры моделирования подтвердили результаты расчетов и показали эффективность предложенного алгоритма по сравнению с результатом [14, 15] в том смысле, что при меньших затратах на управление можно повысить скорость сходимости решений и повысить качество регулирования в установившемся режиме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Candogan U.O., Ozbay H., Ozaktas H.M.* Controller Implementation for a Class of Spatially-varying Distributed Parameter Systems // IFAC Proceedings Volumes (Proc. 17th IFAC World Congr.). 2008. V. 41. No. 2. P. 7755–7760.
2. *Hagen G., Mezic I.* Spillover Stabilization in Finite-dimensional Control Observer Design for Dissipative Evolution Equations // SIAM J. Control Optim. 2003. V. 42. No. 2. P. 746–768.
3. *Smagina E., Sheintuch M.* Using Lyapunov's Direct Method for Wave Suppression in Reactive Systems // Syst. Control Lett. 2006. V. 55. No. 7. P. 566–572.
4. *Demetriou M.A.* Guidance of Mobile Actuator-plus-sensor Networks for Improved Control and Estimation of Distributed Parameter Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2010. V. 55. P. 1570–1584.
5. *Smyshlyaev A., Krstic M.* On Control Design for PDEs with Spacedependent Diffusivity or Time-dependent Reactivity // Automatica. 2005. V. 41. P. 1601–1608.
6. *Krstic M., Smyshlyaev A.* Adaptive Boundary Control for Unstable Parabolic PDEs-part I: Lyapunov Design // IEEE Trans. Automat. Control. 2008. V. 53. P. 1575–1591.
7. *Delchamps D.F.* Extracting State Information from a Quantized Output Record // Syst. Control Lett. 1989. V. 13. P. 365–372.
8. *Brockett R.W., Liberzon D.* Quantized Feedback Stabilization of Linear Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2000. V. 45. P. 1279–1289.
9. *Baillieul J.* Feedback Coding for Information-Based Control: Operating near the Data Rate Limit // Proc. 41st IEEE Conf. Decision Control, Las Vegas, Nevada, USA, 2002. P. 3229–3236.
10. *Zheng B.-C., Yang G.-H.* Quantized Output Feedback Stabilization of Uncertain Systems with Input Nonlinearities via Sliding Mode Control // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2012. V. 24. No. 2. P. 228–246.
11. *Khapalov A.Y.* Continuous Observability for Parabolic System under Observations of Discrete Type // IEEE Trans. Automat. Control. 1993. V. 38. No. 9. P. 1388–1391.
12. *Cheng M.B., Radisavljevic V., Chang C.C., Lin C.F., Su W.C.* A Sampled Data Singularly Perturbed Boundary Control for a Diffusion Conduction System with Noncollocated Observation // IEEE Trans. Automat. Control. 2009. V. 54. No. 6. P. 1305–1310.
13. *Logemann H., Rebarber R., Townley S.* Generalized Sampled-data Stabilization of Well-posed Linear Infinite-dimensional Systems // SIAM J. Control Optim. 2005. V. 44. No. 4. P. 1345–1369.
14. *Fridman E., Blighovsky A.* Robust Sampled-data Control of a Class of Semilinear Parabolic Systems // Automatica. 2012. V. 48. P. 826–836.
15. *Liu K., Fridman E., Xia Y.* Networked Control under Communication Constraints: A Time-Delay Approach. Springer International Publishing, Advances in Delays and Dynamics, 2020.

16. *Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G.* Inequalities. Cambridge: Cambridge: University Press, 1988.
17. *Fridman E.* Introduction to Time-Delay Systems. Analysis and Control. Birkhauser, 2014.
18. *Henry D.* Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. N.Y.: Springer-Verlag, 1993.
19. *Curtain R., Zwart H.* An Introduction to Infinite-dimensional Linear Systems Theory. N.Y.: Springer-Verlag, 1995.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 18.08.2020

После доработки 20.10.2020

Принята к публикации 28.10.2020

Автоматика и телемеханика, № 3, 2021

Стохастические системы

© 2021 г. **Е.С. ПАЛАМАРЧУК, канд. физ.-мат. наук (e.palamarchuck@gmail.com)**
(Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва)

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СУПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Рассматривается проблема асимптотической суперэкспоненциальной стабилизации траекторий линейного скалярного управляемого случайного процесса. Уравнение динамики процесса содержит аддитивные и мультипликативные шумовые воздействия. С целью достижения стабилизации решается задача оптимального управления на бесконечном интервале с квадратичным целевым функционалом, включающим суперэкспоненциально растущую функцию времени. Для процесса, полученного при применении оптимальной стратегии управления, проводится анализ его стремления к нулевому состоянию в среднем квадратичном, а также с вероятностью единица.

Ключевые слова: линейный регулятор; мультипликативный и аддитивный шум; суперэкспоненциальная стабилизация.

DOI: 10.31857/S0005231021030053

1. Введение

В данной статье рассматривается задача оптимальной асимптотической стабилизации траекторий линейного управляемого случайного процесса. Пусть на полном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ задан скалярный случайный процесс X_t, $t \geqslant 0$, описываемый уравнением

$$dX_t = aX_t dt + bU_t dt + (G_t + g_t X_t + \sigma_t U_t) dw_t \tag{1}$$

с неслучайным начальным условием $X_0 = x$; a и $b \neq 0$ — константы; G_t, g_t, σ_t — известные кусочно-непрерывные функции времени; w_t, $t \geqslant 0$, — одномерный стандартный винеровский процесс; U_t — допустимое управление, т.е. скалярный случайный процесс, согласованный с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geqslant 0}$, $\mathcal{F}_t = \tilde{\sigma}\{w_s,\, s \leqslant t\}$ ($\tilde{\sigma}(\cdot)$ — знак σ-алгебры), такой что уравнение (1) имеет решение. Множество допустимых управлений обозначим $\mathcal{U}$.

Следует отметить, что уравнение (1) одновременно содержит как аддитивные ($G_t dw_t$), так и мультипликативные ($(g_t X_t + \sigma_t U_t) dw_t$) шумовые воздействия, что охватывает достаточно широкий спектр приложений. Так, процесс

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-71-10097) в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН.

вида (1) при $g_t \equiv \sigma_t \equiv 0$ является стандартным в теории линейных регуляторов, см., например, [1, раздел 3.6]. Если $G_t \equiv g_t \equiv 0$, то X_t описывает эволюцию стоимости инвестиционного портфеля, см. [2, гл. 6; 3, раздел 9.2]. Для $G_t \equiv \sigma_t \equiv 0$ уравнение (1) моделирует динамику накопленного объема химического вещества (например, углекислого газа, см. [4]), а при $G_t \neq 0$ используется для отражения изменений в размере популяции [5, раздел 2.4, с. 142] и в инженерных системах [6].

Стабилизация решений (1) означает нахождение такого управления $U \in \mathcal{U}$, что при возрастании параметра времени t соответствующий этому управлению процесс X_t стремится к нулю в том или ином вероятностном смысле. Управление U при этом называется *стабилизирующим*. С целью уточнения скорости сходимости X_t к нулевому состоянию далее вводится соответствующее определение, также см. [3, раздел 4.6; 7, 8].

Определение. Пусть для функции $\bar{\delta}_t > 0$, $t \geqslant 0$, задана функция $h_t = \exp\left\{-2\int_0^t \bar{\delta}_v\, dv\right\}$. Тогда решение X_t уравнения (1) *асимптотически стремится к нулю:* а) *в среднем квадратичном с темпом $\bar{\delta}_t$, если $\limsup_{t\to\infty}(EX_t^2/h_t) < \infty$;* б) *с вероятностью единица и темпом $\bar{\delta}_t$, если существует неслучайная константа $\bar{c} > 0$, такая что неравенство $\limsup_{t\to\infty}(X_t^2/h_t) < \bar{c}$ выполняется с вероятностью единица.*

Указанные в определении соотношения означают, что существуют константы $c_m, c_M > 0$ и конечные моменты времени t_0, $\bar{t}_0(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$, такие что $EX_t^2 \leqslant c_m \exp\left\{-2\int_0^t \bar{\delta}_v\, dv\right\}$ при $t > t_0$ и $X_t^2 \leqslant c_M \exp\{-2_0^t \bar{\delta}_v\, dv\}$, почти наверное (п.н.) для $t > \bar{t}_0(\omega)$. При этом нетрудно заметить, что экспоненциальная сходимость соответствует случаю $\bar{\delta}_t \equiv \delta > 0$. При $\bar{\delta}_t \to 0$, $t \to \infty$, будет субэкспоненциальное убывание верхней границы для решений, например полиномиальное, см. [3, с. 144]. В данной статье рассматривается ситуация, когда $\bar{\delta}_t \to \infty$, $t \to \infty$, т.е. достижение суперэкспоненциальной скорости сходимости решений (1). С этой целью будет решена задача оптимальной суперэкспоненциальной стабилизации, постановка которой осуществляется далее.

Предполагается, что применение любого управления $U \in \mathcal{U}$ на интервале планирования $[0, T]$ порождает издержки, отражаемые в интегральном квадратичном целевом функционале вида

$$J_T(U) = \int_0^T \exp\left\{2\int_0^t \delta_v\, dv\right\}\left(qX_t^2 + U_t^2\right)\, dt, \tag{2}$$

где $U \in \mathcal{U}$ — допустимое управление на интервале $[0, T]$; $q > 0$ — константа; функция δ_t такая, что $\delta_t \to \infty$, $t \to \infty$. Подход с построением функционала вида (2) изначально возник в линейных детерминированных системах, см. [9], при проблеме их экспоненциальной стабилизации. Тогда было показано, что решение $\limsup_{T\to\infty} J_T(U) \to \inf_{U\in\mathcal{U}}$ при $\delta_t \equiv \delta$ в (2) дает экспоненциально стабилизирующее управление. Также известно, см., например, [10, гл. 8], что в стохастических системах при наличии только мультипликативных шумов, т.е. для $G_t \equiv 0$ в (1), экспоненциальная стабилизация в среднем квадратичном

может быть достигнута при оптимальном управлении, найденном из задачи $\limsup_{T\to\infty} EJ_T(U) \to \inf_{U\in\mathcal{U}}$, когда функция $\delta_t \equiv 0$ в (2). Следуя вышеизложенной логике, оптимальная суперэкспоненциальная стабилизация связана с решением задачи управления на бесконечном интервале времени, а точнее — с минимизацией подходящего критерия, построенного на основе (2).

Для уравнения (1) вводится следующее предположение относительно его коэффициентов (параметров шумовых воздействий G_t, g_t и σ_t) и функции δ_t темпа суперэкспоненциальной стабилизации.

Предположение $\mathcal{GD}$. Функция $\delta_t > 0$ — неубывающая дифференцируемая функция, $\delta_t \to \infty$, $t \to \infty$ и $\lim_{t\to\infty}(\dot{\delta}_t/\delta_t^2) = 0$ (знак $\dot{}$ — производная функции по времени). При этом для коэффициентов (1) *выполняется:*

1) $G_t = \sqrt{\gamma_t}\exp\left\{-\int\limits_0^t \delta_v\,dv\right\}G$, *где $G \neq 0$ — константа, а функция γ_t — положительная и удовлетворяет условию*

$$\lim_{t\to\infty}\gamma_t\exp\left\{-\int\limits_0^t 2\bar{\lambda}\delta_t\,dv\right\} = 0 \quad \text{для любой константы} \quad \bar{\lambda} > 0; \tag{3}$$

2) *отношение g_t^2/δ_t — ограничено при $t \geqslant 0$;*

3) *произведение $\sigma_t^2\delta_t$ — ограничено, $t \geqslant 0$, и существуют положительные константы k, k_0, такие что*

$$\limsup_{t\to\infty}\left[\{2(1-kb)+k_0\}\int\limits_0^t \delta_s\,ds + \int\limits_0^t (g_s - k\sigma_s\delta_s)^2\,ds\right] \leqslant 0. \tag{4}$$

Приведенное условие (3), налагаемое на коэффициент диффузии G_t, означает, что в системе имеют место затухающие аддитивные возмущения ($G_t \to 0$, $t \to \infty$), изменение параметров которых оценивается суперэкспоненциально убывающей функцией. Такое предположение о характере шумовых воздействий, в частности, использовалось в [11] при моделировании биологических систем. При наличии в (1) только аддитивных шумов ($g_t \equiv 0$, $\sigma_t \equiv 0$) из 1)–3) следует суперэкспоненциальная стабилизация траекторий процесса $X_t = X_t^{(0)}$ при использовании управления $U_t^{(0)} = -k\delta_t X_t^{(0)}$, см. [12]. Если в (1) присутствуют мультипликативные возмущения и $G_t \equiv 0$, то при соблюдении условий 2) и 3) применение $U_t^{(0)} = -k\delta_t X_t^{(0)}$ гарантирует суперэкспоненциальную стабилизацию в среднем квадратичном. Далее будет показано, по аналогии со случаем системы с ограниченными коэффициентами, см. [13, раздел 4.4], что стабилизируемость влечет существование решения обобщенного уравнения Риккати при $t \geqslant 0$ и дает возможность переходить к рассмотрению задачи стохастического управления на бесконечном интервале времени. Обращаясь к 2) и 3) предположения $\mathcal{GD}$, можно отметить, что в 2) допустимо рассматривать неограниченные на бесконечности коэффициенты g_t

($g_t^2 \to \infty$, $t \to \infty$). В частности, $g_t = \sqrt{\delta_t}$ использовалось в [8] при анализе примера неэкспоненциальной стабилизации решений линейных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Условие в 3) предполагает асимптотическую сингулярность коэффициента σ_t ($\sigma_t \to 0$, $t \to \infty$), например, когда $\sigma_t^2 \delta_t \to 0$, $t \to \infty$. При этом σ_t (по абсолютной величине) не превышает $1/\sqrt{\delta_t}$ (с точностью до константы). Такая специфика в 3) порождается необходимостью в суперэкспоненциальной стабилизации и является более сильным требованием по сравнению со стандартным случаем ограниченных коэффициентов, когда экспоненциальная стабилизируемость достигается при достаточно малых $\sigma_t \equiv \sigma$, см. [14].

Переходя к формулировке задачи управления, отметим, что из-за возможной неограниченности значений $EJ_T(U)$ при $T \to \infty$, см., например, [15], при оптимальной стабилизации будет решаться задача с критерием, включающим нормировку величин $EJ_T(U)$:

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T(U)}{\int\limits_0^T \gamma_t \delta_t \, dt} \to \inf_{U\in\mathcal{U}} . \tag{5}$$

В критерии (5) множитель $\left(\int_0^T \gamma_t \delta_t \, dt\right)^{-1}$ играет роль дисконтирования, т.е. уменьшения значений $EJ_T(U)$. Таким образом, задача оптимальной суперэкспоненциальной стабилизации решений (1) состоит в следующем: определить оптимальное управление U^* из решения (5) и показать, что U^* является асимптотически суперэкспоненциально стабилизирующим для (1). Другими словами, процесс X_t^* при возрастании t должен стремиться к нулю (с вероятностью единица и в среднем квадратичном) с суперэкспоненциальным темпом. Для стохастических систем ранее подобный подход, сочетающий решение задачи управления и анализ сходимости процесса, был реализован в [16, 17]. В данной статье будет исследоваться оптимальность и стабилизирующие свойства управления вида $U_t^* = -(b + \sigma_t g_t)(1 + \sigma_t^2 \Pi_t)^{-1} \Pi_t X_t^*$, где Π_t удовлетворяет обобщенному уравнению Риккати.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 проводится исследование решения обобщенного уравнения Риккати, входящего в структуру оптимального закона управления U^*, а также анализ решений линейных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Раздел 3 содержит основной результат об оптимальности управления U^* и стремлении к нулю соответствующего процесса X^*. В разделе 4 проводится обсуждение критерия (5) с точки зрения использования дисконтирования. В заключении формулируются основные выводы статьи.

2. Анализ обобщенного уравнения Риккати и сходимости решений линейных СДУ

Как отмечено, в формировании оптимального управления U^* будет задействовано решение обобщенного уравнения Риккати, результаты анализа которого сформулированы в лемме 1.

Лемма 1. Пусть выполнено предположение $\mathcal{GD}$. Тогда существует неотрицательная абсолютно непрерывная функция Π_t, $t \geqslant 0$, удовлетворяющая обобщенному уравнению Риккати

$$\dot{\Pi}_t + 2(a+\delta_t)\Pi_t + g_t^2\Pi_t - \frac{(b+\sigma_t g_t)^2}{1+\sigma_t^2\Pi_t}\Pi_t^2 + q = 0. \tag{6}$$

При этом

$$0 < \liminf_{t\to\infty}(\Pi_t/\delta_t) \leqslant \limsup_{t\to\infty}(\Pi_t/\delta_t) < \infty.$$

Таким образом, на основании утверждения леммы 1 можно сделать вывод о существовании закона управления $U_t^* = -(b+\sigma_t g_t)(1+\sigma_t^2\Pi_t)^{-1}\Pi_t X_t^*$. Доказательство леммы 1 и последующих утверждений вынесено в Приложение.

В следующей лемме 2 приводится результат о суперэкспоненциальной верхней оценке для интегрального функционала, содержащего Π_t. Эта оценка в дальнейшем будет использоваться при исследовании асимптотического поведения решений линейных СДУ.

Лемма 2. Пусть выполнено предположение $\mathcal{GD}$. Тогда существуют положительные константы κ, λ, такие что для функции

$$\Phi(t,s) = \exp\left\{\int_s^t \left(a+\delta_v - \frac{b(b+\sigma_v g_v)\Pi_v}{1+\sigma_v^2\Pi_v} + \frac{(g_v^*)^2}{2}\,dv\right)\right\},$$

где

$$g_t^* = g_t - \frac{(b+\sigma_t g_t)}{1+\sigma_t^2\Pi_t}\sigma_t\Pi_t,$$

справедлива оценка

$$\Phi^2(t,s) \leqslant \kappa\exp\left\{-\int_s^t 2\lambda\delta_v\,dv\right\} \quad \text{при} \quad s \leqslant t. \tag{7}$$

Отметим, что результат леммы 2, в частности, позволяет утверждать, что при отсутствии аддитивных возмущений применение закона управления U^* приводит к суперэкспоненциальной стабилизации в среднем квадратичном с темпом $\bar{\delta}_t > \delta_t$. Если аддитивные шумовые воздействия также имеют место, то для анализа траекторий соответствующего процесса потребуется рассмотреть класс уравнений, описываемый далее.

Рассматривается линейное СДУ с аддитивными и мультипликативными возмущениями

$$dZ_t = a_t Z_t\,dt + G_t dw_t + G_t^* Z_t dw_t \tag{8}$$

и неслучайным начальным условием $Z_0 = z$; a_t, G_t, G_t^* — кусочно-непрерывные функциях времени. Пусть для коэффициента a_t и некоторой функции

$\delta_t^* > 0$ выполняется $\limsup_{t\to\infty}(|a_t|/\delta_t^*) < \infty$, при этом функция $\delta_t = \delta^*$ удовлетворяет предположению $\mathcal{GD}$ и отношение $(G_t^*)^2/\delta_t^*$ ограничено ($|\cdot|$ — знак модуля). Для функции G_t предположим, что при некоторой константе $\hat{\lambda} > 0$ имеет место соотношение

$$\lim_{t\to\infty} G_t^2 \exp\left\{2\hat{\lambda}\int\limits_0^t \delta_v^*\,dv\right\} = 0. \tag{9}$$

В приводимой далее лемме 3 содержится результат анализа асимптотической сходимости к нулю процесса Z_t при сформулированных условиях на коэффициенты (8).

Лемма 3. Если для $\Phi^*(t,s) = \exp\left\{\int_s^t \left(a_v + (G_v^*)^2/2\right)\,dv\right\}$ *справедлива оценка*

$$\Phi^*(t,s) \leqslant \kappa^* \exp\left\{-\int\limits_s^t \delta_v^*\,dv\right\}, \quad s \leqslant t,$$

где κ^* *— некоторая положительная константа, то решение* Z_t *линейного СДУ* (8) *асимптотически стремится к нулю с вероятностью единица и в среднем квадратичном с темпом* $\bar{\delta}_t = \alpha\delta_t^*$. *При этом положительная константа* α *такая, что* $\lambda^* - \epsilon < \alpha < \lambda^*$ *при сходимости с вероятностью единица и* $\alpha = \lambda^*$ *для сходимости в среднем квадратичном, здесь* $\lambda^* = \min(1, \hat{\lambda})$, *константа* $\hat{\lambda}$ *взята из условия* (9), $\epsilon > 0$ *— сколь угодно малое число.*

3. Основной результат

При условии выполнения предположения $\mathcal{GD}$ справедливо утверждение леммы 1 и существует закон управления

$$U_t^* = -\frac{b + \sigma_t g_t}{1 + \sigma_t^2 \Pi_t}\Pi_t X_t^*, \tag{10}$$

где процесс X_t^*, $t \geqslant 0$, задается уравнением

$$dX_t^* = \left(a - \frac{b(b + \sigma_t g_t)}{1 + \sigma_t^2 \Pi_t}\Pi_t\right) X_t^* dt + G_t dw_t + g_t^* X_t^* dw_t \tag{11}$$

с начальным условием $X_0^* = x$; функция $g_t^* = g_t - \frac{(b+\sigma_t g_t)}{1+\sigma_t^2\Pi_t}\sigma_t\Pi_t$; функция Π_t, $t \geqslant 0$, удовлетворяет (6).

В следующей теореме формулируется результат об оптимальной асимптотической суперэкспоненциальной стабилизации решений (1).

Теорема. Пусть для фиксированного темпа стабилизации $\delta_t > 0$ *и коэффициентов уравнения* (1) *выполнено предположение* $\mathcal{GD}$ *и*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\gamma_T \delta_T^2}{\int\limits_0^T \gamma_t \delta_t\,dt} = 0. \tag{12}$$

Тогда стратегия управления U^*, определяемая по (10)–(11), *будет обеспечивать оптимальную суперэкспоненциальную стабилизацию решений* (1). *Точнее, решение X_t^* уравнения* (1) *при $U_t = U_t^*$ (см.* (11)) *асимптотически суперэкспоненциально стремится к нулю в среднем квадратичном и с вероятностью единица. Темп сходимости $\bar{\delta}_t = \lambda\delta_t$, где множитель λ — некоторая положительная константа, такая что $\lambda^* - \epsilon < \lambda < \lambda^*$; величина $\lambda^* = 1 + |\bar{\lambda}|$, если* (3) *справедливо при некотором числе $\bar{\lambda} < 0$, и $\lambda^* = 1$ в противном случае, $\epsilon > 0$ — сколь угодно малое число. При этом U_t^* является решением задачи оптимального управления* (5).

Также полезно отметить, каким образом приведенные в разделе 2 леммы 1–3 участвуют в доказательстве основного результата. Во-первых, благодаря лемме 1 устанавливается существование управления U^*. Соотношение (7) леммы 2 используется при построении верхней оценки для разности целевых функционалов $EJ_T(U^*) - EJ_T(U)$, $U \in \mathcal{U}$, а также определении конечности критерия в (5) на управлении U^*. Наконец, из-за того что уравнение (11) представляет собой частный случай (8), для нахождения темпа сходимости процесса X_t^* к нулю применяется лемма 3.

Замечание. Для ситуации включения в уравнение (1) только мультипликативных возмущений ($G_t \equiv 0$) соответствующая задача оптимизации имеет вид $\limsup_{T\to\infty} EJ_T(U) \to \inf_{U\in\mathcal{U}}$ и ее решение (10)–(11) существует при выполнении условий 2), 3) предположения $\mathcal{GD}$. В этом случае темп сходимости $\bar{\delta}_t$ процесса X_t^* к нулевому состоянию равен $\bar{\delta}_t = \lambda\delta_t$, где $\lambda > 1$ — некоторая константа.

4. Критерий оптимальности и дисконтирование

Дисконтирование является часто применяемой процедурой при постановке задач оптимального управления на бесконечном интервале времени, см., например, [18, гл. 6]. Критерий в (5) далее можно преобразовать, соответствующим образом выделив *дисконтирующий множитель* $f_T = \exp\left\{-\int_0^T r_t\,dt\right\}$, при этом $r_t \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, называется *ставкой дисконтирования*. Если $f_T = \left(\int_0^T \gamma_t\delta_t\,dt\right)^{-1}$, то ставка $r_t = \gamma_t\delta_t\left(\int_0^t \gamma_s\delta_s\,ds\right)^{-1} = \beta_t\delta_t$, где $\beta_t = \gamma_t\left(\int_0^t \gamma_s\delta_s\right)^{-1} ds$, и из (12) следует, что функция β_t стремится к нулю при $t \to \infty$. Точнее, имеют место соотношения $\lim_{t\to\infty} \beta_t\delta_t^2 = 0$ и $\lim_{t\to\infty} r_t\delta_t = 0$. Тогда задача (5) принимает вид

$$\limsup_{T\to\infty}\left(\exp\left\{-\int_0^T r_t\,dt\right\} EJ_T(U)\right) \to \inf_{U\in\mathcal{U}},$$

т.е. рассматривается минимизация долгосрочных дисконтированных ожидаемых совокупных потерь. Сравнивая определенную выше ставку дисконтирования r_t и темп роста δ_t подынтегрального множителя в (2), можно отметить, что величина r_t оказывается намного меньше, чем δ_t, что нагляднее будет продемонстрировать на примере.

Пример. Пусть $\gamma_t \equiv \gamma > 0$, тогда ставка $r_t = \left(\int_0^t \delta_s\, ds\right)^{-1} \delta_t$ соответствует дисконтированию с функцией f_t, стремящейся к нулю при $t \to \infty$. В частности, темп стабилизации $\delta_t \sim t^m$, $0 < m < 1$, или $\delta_t \sim \ln^l t$, $l > 0$, приводит к дисконтированию по ставке $r_t \sim 1/(t+1)$, известному как "гиперболическое", см. [19] ($g_t \sim \hat{g}_t$ — обозначение того, что для двух положительных функций g_t, $\hat{g}_t$ имеет место $\lim_{t\to\infty}(g_t/\hat{g}_t) > 0$).

Следует отметить, что для общего случая пары функций (γ_t, δ_t), удовлетворяющих предположению $\mathcal{GD}$ и условию (12), справедливо следующее наблюдение: если $\int_0^t \gamma_s\delta_s\, ds \to \infty$, $t \to \infty$, то будет иметь место "положительное" дисконтирование, т.е. дисконтирование по положительной ставке $r_t > 0$ и функция f_t стремится к нулю при $t \to \infty$. При $\int_0^\infty \gamma_s\delta_s\, ds < \infty$ возникает так называемое "нулевое" дисконтирование, когда функция f_t стремится к константе $\bar{f} > 0$, что выражается в отсутствии неограниченной по времени нормировки функционала для задачи (5), а величина $\bar{f}$ соответствует нулевой ставке $\bar{r} \equiv 0$.

5. Заключение

В статье рассмотрена задача оптимальной суперэкспоненциальной стабилизации решения линейного СДУ (1), содержащего аддитивные и мультипликативные шумовые воздействия. Показано, что при выполнении условий на параметры возмущений и функцию темпа стабилизации (см. предположение $\mathcal{GD}$) закон управления (10)–(11) в виде линейной обратной связи по состоянию является суперэкспоненциально стабилизирующим (см. теорему). Множитель в (10), задающий коэффициент усиления, зависит от решения обобщенного уравнения Риккати (6), существование которого гарантируется при соблюдении требований 2) и 3) предположения $\mathcal{GD}$ (см. лемму 1). Условие, касающееся суперэкспоненциального характера убывания коэффициента диффузии для аддитивных возмущений (см. 1) предположения $\mathcal{GD}$ и (9)), играет ключевую роль при определении асимптотической суперэкспоненциальной сходимости к нулю решения линейного СДУ (см. лемму 3). Введение ограничений на коэффициент диффузии также необходимо для выполнения (12), чтобы стабилизирующее управление U^* оказалось оптимальным в смысле решения задачи управления (5) на бесконечном интервале времени.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Доказательство существования решения (6) основано на предельном переходе при $T \to \infty$ для решений обобщенных уравнений Риккати, рассматриваемых на $[0, T]$, с нулевым граничным условием на правом конце. Пусть $\tilde{\Pi}_t = \delta_t^{-1}\Pi_t$, тогда $\tilde{\Pi}_t$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered}\dot{\tilde{\Pi}}_t + 2\left(a + \delta_t + \dot{\delta}_t\delta_t^{-1}\right)\tilde{\Pi}_t + g_t^2\tilde{\Pi}_t - \\ - (b + \sigma_t g_t)^2\left(1/\delta_t + \sigma_t^2\tilde{\Pi}_t\right)^{-1}\tilde{\Pi}_t^2 + q\delta_t^{-1} = 0.\end{gathered} \tag{П.1}$$

Возникновение функции $\tilde{\Pi}_t$ связано с решением задачи стохастического управления для уравнения вида

$$dx_t = \left(a + \delta_t + \dot{\delta}_t \delta_t^{-1}\right) x_t dt + b u_t dt + (g_t x_t + \sigma_t u_t)\, dw_t \tag{П.2}$$

с начальным условием $x_{t_0} = x$ и целевым функционалом $\tilde{J}_{T,t_0}(u) = \int_{t_0}^T \delta_t^{-1}(q x_t^2 + u_t^2)\, dt$, где $t_0 \geqslant 0$ — произвольный начальный момент времени. Закон управления вида $u_t^{*T} = -(b+\sigma_t g_t)(1/\delta_t + \sigma_t^2 \tilde{\Pi}_t^T)^{-1} \tilde{\Pi}_t^T x_t^{*T}$ является решением задачи $E\tilde{J}_{T,t_0}(u) \to \min$, где функция $\tilde{\Pi}_t^T$ удовлетворяет (П.1) с граничным условием $\tilde{\Pi}_T^T = 0$ см. [2, теорема 7.10, раздел 6.7, с. 334] (индекс ^{T} обозначает решения, определенные на конечных интервалах $[0, T]$). При этом $E\tilde{J}_{T,t_0}(u^{*T}) = \tilde{\Pi}_{t_0}^T x^2$. Так как $\dot{\delta}_t/\delta_t^2 \to 0$, $t \to \infty$, то в силу (4) предположения $\mathcal{GD}$ конкурирующий закон управления $u_t^{(0)} = -k\delta_t x_t^{(0)}$ будет суперэкспоненциально стабилизировать решение уравнения (П.2) в среднем квадратичном. Также при этом имеет место соотношение $\tilde{\Pi}_{t_0}^T x^2 = E\tilde{J}_{T,t_0}(u^{*T}) \leqslant E\tilde{J}_{T,t_0}(u^{(0)}) \leqslant cx^2$, здесь и далее $c > 0$ — некоторая константа, конкретное значение которой не является важным и может меняться от формулы к формуле. Таким образом, функция $\tilde{\Pi}_t^T$ ограничена при $t \geqslant 0$ и не убывает (по T). Тогда стандартная аргументация (см. [1, с. 268]) приводит к тому, что существует предел $\lim_{T\to\infty} \tilde{\Pi}_t^T = \tilde{\Pi}_t$, функция $\tilde{\Pi}_t$ удовлетворяет (П.1) и обладает свойствами неотрицательности и ограниченности сверху. Кроме того, показывается, что при сформулированных условиях имеет место оценка $\liminf_{t\to\infty} \tilde{\Pi}_t > 0$. Действительно, рассмотрим функцию $\bar{\Pi}_t = \tilde{\Pi}_t^{-1}$, которая удовлетворяет уравнению

$$\dot{\bar{\Pi}}_t - 2\left(a + \delta_t + \frac{\dot{\delta}_t}{\delta_t}\right)\bar{\Pi}_t - g_t^2 \bar{\Pi}_t - \frac{q}{\delta_t}\bar{\Pi}_t^2 + \bar{q}_t = 0,$$

где $\bar{q}_t = (b + \sigma_t g_t)^2 (1/\delta_t + \sigma_t^2 \tilde{\Pi}_t)^{-1}$ и $\limsup_{t\to\infty}(\bar{q}_t/\delta_t) < \infty$. Как можно заметить, функция $\bar{\Pi}_t \geqslant 0$ появляется в результате оптимального управления в системе

$$d\bar{x}_t = -\left(a + \delta_t + \dot{\delta}_t \delta_t^{-1} + g_t^2/2\right)\bar{x}_t dt + \sqrt{\bar{q}}\bar{u}_t dt$$

с начальным состоянием $\bar{x}_{t_0} = \bar{x}$ и функционалом $\bar{J}_{\infty,t_0}(\bar{u}) = \int_{t_0}^\infty (\bar{q}_t \bar{x}_t^2 + \delta_t \bar{u}_t^2) dt$ ($\bar{x}$ — некоторая константа). Свойства функций из предположения $\mathcal{GD}$ дают возможность суперэкспоненциальной стабилизации траектории $\bar{x}_t^{(0)}$ управлением $\bar{u}_t^{(0)} \equiv 0$. При этом $\bar{J}_\infty(\bar{u}^{(0)}) \leqslant c\bar{x}^2$, откуда следует, что $\bar{\Pi}_t = \tilde{\Pi}_t^{-1}$ также ограничена сверху. Таким образом, для функции $\Pi_t = \delta_t \tilde{\Pi}_t$, удовлетворяющей (6), имеет место оценка $0 < \liminf_{t\to\infty}(\Pi_t/\delta_t) \leqslant \limsup_{t\to\infty}(\Pi_t/\delta_t) < \infty$. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Рассматривается линейное СДУ с мультипликативным шумом

$$dZ_t = \left(a + \delta_t - \frac{b(b+\sigma_t g_t)\Pi_t}{1 + \sigma_t^2 \Pi_t}\right) Z_t dt + g_t^* Z_t dw_t$$

и неслучайным начальным условием $Z_{t_0} = z$, $z \neq 0$, $t_0 \geqslant 0$. Нетрудно заметить, что $EZ_t^2 = \Phi^2(t, t_0)z^2$. Далее, по формуле Ито и из (6) определяется выражение для дифференциала $d(\Pi_t EZ_t^2)$:

$$d(\Pi_t EZ_t^2) = -q(EZ_t^2) - \frac{(b + \sigma_t g_t)^2 \Pi_t^2}{(1 + \sigma_t^2 \Pi_t)^2}(EZ_t^2).$$

В силу выявленных свойств функции Π_t (см. лемму 1) и предположения $\mathcal{GD}$ $d(\Pi_t EZ_t^2) \leqslant -2\lambda\delta_t(\Pi_t EZ_t^2)$ при некоторой константе $\lambda > 0$, откуда $\Pi_t EZ_t^2 \leqslant$ $\leqslant (\Pi_{t_0} z^2) \exp\left\{-\int_{t_0}^t 2\lambda\delta_v\, dv\right\}$, и $EZ_t^2 \leqslant \kappa \exp\left\{-\int_{t_0}^t 2\lambda\delta_v\, dv\right\} z^2$ при некоторой константе $\kappa > 0$. По отмеченному ранее $EZ_t^2 = \Phi^2(t, t_0)z^2$. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Решение (8) представимо в виде, см. [2, теорема 6.14, с. 47],

$$Z_t = I_t^{(1)} + I_t^{(2)} + I_t^{(3)}, \tag{П.3}$$

где слагаемые $I_t^{(1)} = Y_t z$, $I_t^{(2)} = -Y_t \int_0^t Y_s^{-1} G_s G_s^*\, ds$, $I_t^{(3)} = Y_t \int_0^t Y_s^{-1} G_s\, dw_s$, со случайной функцией $Y_t = \exp\left\{\int_0^t (a_v - (G_v^*)^2/2)\, dv + \int_0^t G_v^* dw_v\right\}$.

Из предположения о коэффициенте G_t^* и применения закона повторного логарифма для стохастических интегралов, см. [20], следует, что

$$\limsup_{t\to\infty} \left\{|\tilde{I}_t|/h_t\right\} < \infty, \quad \text{где} \quad \tilde{I}_t = \int\limits_0^t G_s^* dw_s,$$

при функции

$$h_t = \left(\int\limits_0^t \delta_v^*\, dv \ln\ln\left(\int\limits_0^t \delta_v^*\, dv\right)\right)^{1/2}.$$

Тогда в представлении (П.3) слагаемое $I_t^{(1)}$ можно оценить как $|I_t^{(1)}| \leqslant$ $\leqslant c_1 \exp\left\{-\alpha_1 \int_0^t \delta_v^*\, dv\right\}$ при $t > t_0(\omega)$ и $1 - \epsilon < \alpha_1 < 1$, здесь и далее $\epsilon > 0$ — сколь угодно малое число, $c_i > 0$ — некоторая константа, i — индекс. Для второго слагаемого $I_t^{(2)}$ выражение $Y_t Y_s^{-1} \leqslant \exp\left\{-\int_s^t \delta_v^*\, dv + \tilde{c}(h_t + h_s)\right\}$ п.н. для $t \geqslant s \geqslant t_0(\omega)$ и некоторой константы $\tilde{c} > 0$. Следовательно, с учетом (9), $|I_t^{(2)}| \leqslant c_2 \exp\left\{-\alpha_2 \int_0^t \delta_v^*\, dv\right\}$, где $\hat{\lambda}^* - \epsilon < \alpha_2 < \hat{\lambda}^*$, $\hat{\lambda}^* = \min(1, \hat{\lambda})$. Для слагаемого $I_t^{(3)}$ из (П.3) определим квадратическую характеристику $\langle M_t\rangle$ мартингала $M_t = \int_0^t G_s Y_s^{-1}\, dw_s$, равную $\langle M_t\rangle = \int_0^t G_s^2 Y_s^{-2}\, ds$. При этом для некоторой константы $m > 0$ и функции $\tilde{h}_t = \exp\left\{m \int_s^t \delta_v^*\, dv\right\}$ выполнено $\limsup_{t\to\infty}\{\langle M_t\rangle/\tilde{h}_t\} < \infty$. В случае когда $\langle M_t\rangle \to \infty$, из закона повторного логарифма следует, что $\limsup_{t\to\infty}\left\{|M_t|(\langle M_t\rangle \ln\ln\langle M_t\rangle)^{-1/2}\right\} < \infty$, и тогда имеет место оценка $(I_t^{(3)})^2 \leqslant c_3 \exp\left\{-2\alpha_3 \int_0^t \delta_v^*\, dv\right\}$, где $\hat{\lambda}^* - \epsilon < \alpha_3 < \hat{\lambda}^*$,

константа $\hat{\lambda}^* = \min(1, \hat{\lambda})$. В ситуации когда $\langle M_\infty \rangle < \infty$, неравенство $\limsup_{t\to\infty}\{|M_t|/\tilde{h}_t\} < \infty$ будет справедливо для любой монотонной функции $\tilde{h}_t > 0$, такой что $\tilde{h}_t \to \infty$, $t \to \infty$, и поэтому $|I_t^{(3)}| \leqslant \tilde{c}_3 \exp\left\{-\tilde{\alpha}_3 \int_0^t \delta_v^*\, dv\right\}$ при $1 - \epsilon < \tilde{\alpha}_3 < 1$ и некоторой константе $\tilde{c}_3 > 0$. Объединяя полученные выше оценки для трех слагаемых (П.3), приходим к соотношению $\limsup_{t\to\infty}\{Z_t^2/h_t\} < \bar{c} < \infty$ при $h_t = \exp\left\{-2\alpha \int_s^t \delta_v^*\, dv\right\}$ и константе $\alpha > 0$, такой что $\lambda^* - \epsilon < \alpha < \lambda^*$, где $\lambda^* = \min(1, \hat{\lambda})$, $\epsilon > 0$ — сколь угодно малое число. Таким образом, решение Z_t асимптотически стремится к нулю с вероятностью единица суперэкспоненциальным образом. Для анализа сходимости Z_t в среднем квадратичном выписывается представление

$$EZ_t^2 = 2\int_0^t (\Phi^*(t,s))^2 G_s G_s^* EZ_s\, ds + \int_0^t (\Phi^*(t,s))^2 G_s^2\, ds + (\Phi^*(t,0))^2 z^2.$$

Так как $EZ_t = \Phi^*(t,0)z$, то из приведенных в условии леммы 3 предположений относительно функции $\Phi^*(t,s)$, а также требований к коэффициентам G_t, G_t^* будет следовать, что $EZ_t^2 \leqslant \hat{c} \exp\left\{-2\alpha \int_s^t \delta_v^*\, dv\right\}$, $t \to \infty$, при некоторой константе $\hat{c} > 0$ и множителе $\alpha = \lambda^*$, где $\lambda^* = \min(1, \hat{\lambda})$. Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы. Сначала доказывается оптимальность U^*. При фиксированном допустимом управлении $U \in \mathcal{U}$ рассматривается представление для разности ожидаемых значений целевых функционалов

$$\begin{aligned} EJ_T(U^*) - EJ_T(U) = 2\exp\left\{\int_0^T 2\delta_v\, dv\right\} E\left(x_T \Pi_T X_T^*\right) - \\ - E\int_0^T \exp\left\{\int_0^t 2\delta_v\, dv\right\}\left(qx_t^2 + u_t^2\right)\, dt, \end{aligned} \tag{П.4}$$

где переменные $x_t = X_t - X_t^*$ и $u_t = U_t - U_t^*$ связаны соотношением

$$dx_t = ax_t dt + bu_t dt + (g_t x_t + \sigma_t u_t) dw_t, \quad x_0 = 0. \tag{П.5}$$

На основании (П.5) с учетом условий в предположении $\mathcal{GD}$ можно выписать оценку

$$\frac{c_0}{\delta_T} \exp\left\{\int_0^T 2\delta_v\, dv\right\} Ex_T^2 \leqslant E\int_0^T \exp\left\{\int_0^t 2\delta_v\, dv\right\}\left(qx_t^2 + u_t^2\right)\, dt \tag{П.6}$$

для любого $T \geqslant 0$, $c_0 > 0$ — некоторая константа. Тогда, используя (П.6) и свойства функции Π_t (см. лемму 1), после применения элементарного нера-

венства $2AB \leqslant A^2/c + cB^2$, справедливого при произвольном $c > 0$ для любых чисел A, B, представление (П.4) оценивается как

$$\text{(П.7)} \qquad EJ_T(U^*) - EJ_T(U) \leqslant \tilde{c}_1 \delta_T^3 \exp\left\{\int\limits_0^T 2\delta_v\, dv\right\} E[(X_T^*)^2]$$

при некоторой константе $\tilde{c}_1 > 0$.

Далее исследуется процесс $\tilde{Z}_t = \delta_t^{3/2} \exp\left\{\int_0^T \delta_v\, dv\right\} X_t^*$ с уравнением динамики $d\tilde{Z}_t = \tilde{a}_t \tilde{Z}_t dt + \tilde{G}_t dw_t + g_t^* \tilde{Z}_t dw_t$ при $\tilde{Z}_0 = \delta_0^{3/2} x$, где коэффициенты $\tilde{a}_t = a + \delta_t + (3/2)\dot{\delta}_t \delta_t^{-1} - b(b + \sigma_t g_t)(1 + \sigma_t^2 \Pi_t)^{-1} \Pi_t$, $\tilde{G}_t = \delta_t^{3/2} \sqrt{\gamma_t} G$. При этом в силу условия $\dot{\delta}_t/\delta_t^2 \to 0$, $t \to \infty$, для $\Phi(t,s) = \exp\left\{\int_s^t (\tilde{a}_v + (g_v^*)^2/2)\, dv\right\}$ справедлива оценка вида (7) с $\tilde{\delta}_t = \tilde{\lambda}\delta_t$, где $0 < \tilde{\lambda} < 1$ — некоторая константа. Тогда $E\tilde{Z}_T^2 \leqslant cL_T$, где функция

$$L_T = \exp\left\{-\int\limits_0^T \tilde{\delta}_v\, dv\right\} \left(1 + \int\limits_0^T \exp\left\{\int\limits_0^t \tilde{\delta}_v\, dv\right\} \delta_t^3 \gamma_t\right) dt.$$

Применяя правило Лопиталя, можно показать, что выполнение (12) влечет за собой сходимость $L_T / \int_0^T \delta_t \gamma_t\, dt$ к нулю при $T \to \infty$. Поэтому, переходя к пределу в (П.7) при $T \to \infty$ и соответствующей нормировке, имеем

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T(U^*)}{\int\limits_0^T \delta_t \gamma_t\, dt} \leqslant \limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T(U)}{\int\limits_0^T \delta_t \gamma_t\, dt},$$

что доказывает оптимальность управления U^* в (5). При этом по формуле Ито $EJ_T(U^*) = \Pi_0 x^2 - \exp\left\{\int_0^T 2\delta_v\, dv\right\} E[(X_T^*)]^2 \Pi_T + G^2 \int_0^T \Pi_t \gamma_t\, dt$. Тогда величина критерия в (5) на управлении U^* оценивается как

$$0 < \limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T(U^*)}{\int\limits_0^T \delta_t \gamma_t\, dt} = \frac{\Pi_0 x^2}{\int\limits_0^\infty \delta_t \gamma_t\, dt} + \limsup_{T\to\infty} \frac{\int\limits_0^T \Pi_t \gamma_t G_t^2\, dt}{\int\limits_0^T \delta_t \gamma_t\, dt} < \infty.$$

Теперь можно перейти к анализу сходимости процесса X_t^* при $t \to \infty$. Для этого используется утверждение леммы 3 с $Z_t = X_t^*$. Тогда в уравнении (8) коэффициенты $a_t = a - b\Pi_t(b + \sigma_t g_t)(1 + \sigma_t^2 \Pi_t)^{-1}$, $G_t^* = g_t^*$, $G_t = G_t$. При этом отношения a_t/δ_t, g_t^*/δ_t, $t \geqslant 0$, ограничены в силу 2), 3) предположения $\mathcal{GD}$ и результатов лемм 1 и 2. Нетрудно заметить, что условия леммы 3 выполнены с $\delta_t^* = \tilde{\lambda}\delta_t$, где $\tilde{\lambda} > 1$ — некоторое число, а величина $\hat{\lambda}$ в

условии (9) удовлетворяет неравенству $\hat{\lambda} < (1-\bar{\lambda})/\tilde{\lambda}$, если значение константы $\bar{\lambda}$ из (3) взять таким, чтобы $1-\bar{\lambda} > 0$. Соответственно в результате имеем асимптотическую суперэкспоненциальную сходимость X_t^* в среднем квадратичном и с вероятностью единица к нулю при темпе $\bar{\delta}_t = \alpha\delta_t^* = \alpha\tilde{\lambda}\delta_t$, где $(1-\bar{\lambda}-\epsilon) < \alpha\tilde{\lambda} < (1-\bar{\lambda})$. Значение константы $\lambda = \alpha\tilde{\lambda} > 1$, если существует $\bar{\lambda} < 0$, при котором имеет место соотношение (3), и $\lambda < 1$ в противном случае. Полагая $\lambda^* = 1 + |\bar{\lambda}|$ и $\lambda^* = 1$ для каждой из указанных выше ситуаций, получаем, что $\lambda^* - \epsilon < \lambda < \lambda^*$ при сколь угодно малом числе $\epsilon > 0$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Наука, 1977.
2. *Yong J., Zhou X.Y.* Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations. N.Y.: Springer, 1999.
3. *Mao X.* Stochastic Differential Equations and Applications. Second edition. Cambridge: Woodhead publishing, 2011.
4. *Xepapadeas A.* Stochastic Analysis: Tools for Environmental and Resource Economics Modeling / Research Tools in Natural Resource and Environmental Economics. Eds. A.A. Batabyal, P. Nijkamp. Singapore: World Scientific Publishing, 2011. P. 55–88.
5. *Ladde A.G., Ladde G.S.* An Introduction to Differential Equations: Stochastic Modeling, Methods and Analysis (V. 2). Singapore: World Scientific Publishing Company, 2013.
6. *Dong L., Wei X., Hu X., Zhang H., Han J.* Disturbance Observer-Based Elegant Anti-Disturbance Saturation Control for a Class of Stochastic Systems // Int. J. Control. 2019. P. 1–13.
7. *Caraballo T.* On the Decay Rate of Solutions of Non-autonomous Differential Systems // Electronic J. Differential Equations 2001. V. 2001. No. 5. P. 1–17.
8. *Caraballo T., Garrido-Atienza M.J., Real J.* Stochastic Stabilization of Differential Systems with General Decay Rate // Syst. Control Lett. 2003. V. 48. No. 5. P. 397–406.
9. *Anderson B.D.O., Moore J.B.* Linear System Optimisation with Prescribed Degree of Stability // Proc. IEEE. IET, 1969. V. 116. No. 12. P. 2083–2087.
10. *Khasminskii R.* Stochastic stability of differential equations. 2nd ed. N.Y.: Springer, 2012.
11. *Zhang D., Lin X., Raz J., Sowers M.* Semiparametric Stochastic Mixed Models for Longitudinal Data // JASA. 1998. V. 93. No. 442. P. 710–719.
12. *Паламарчук Е.С.* Об обобщении логарифмической верхней функции для решения линейного стохастического дифференциального уравнения с неэкспоненциально устойчивой матрицей // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 2. С. 195–201.
13. *Dragan V., Morozan T., Stoica A.M.* Mathematical methods in robust control of linear stochastic systems. N.Y.: Springer, 2006.
14. *Willems J.L., Willems J.C.* Feedback Stabilizability for Stochastic Systems with State and Control Dependent Noise // Automatica. 1976. V. 12. No. 3. P. 277–283.

15. *Паламарчук Е.С.* Анализ критериев долговременного среднего в задаче стохастического линейного регулятора // АиТ. 2016. № 10. С. 78–92.

Palamarchuk E.S. Analysis of Criteria for Long-run Average in the Problem of Stochastic Linear Regulator // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 10. P. 1756–1767.

16. *Phillis Y.A.* Optimal Stabilization of Stochastic Systems // J. Math. Anal. Appl. 1983. V. 94. No. 2. P. 489–500.

17. *Тертычный-Даури В.Ю.* Оптимальная стохастическая стабилизация адаптивных механических систем // АиТ. 1993. № 1. С. 111–118.

Tertychnyj V.Yu. Stochastic Optimal Stabilization of Adaptive Mechanical Systems // Autom. Remote Control. 1993. V. 54. No. 1. P. 104–118.

18. *Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A.* Infinite horizon optimal control: deterministic and stochastic systems. Berlin: Springer, 1991.

19. *Loewenstein G., Prelec D.* Anomalies in Intertemporal Choice: Evidence and an Interpretation // The Quarterly Journal of Economics. 1992. V. 107. No. 2. P. 573–597.

20. *Wang J.-g.* A Law of the Iterated Logarithm for Stochastic Integrals // Stoch. Proc. Appl. 1993. V. 47. No. 2. P. 215–228.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 19.07.2020

После доработки 28.09.2020

Принята к публикации 28.10.2020

Автоматика и телемеханика, № 3, 2021

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2021 г. **А.М. РОМАНКЕВИЧ, д-р техн. наук (romankev@scs.kpi.ua),**
К.В. МОРОЗОВ (mcng@ukr.net),
В.А. РОМАНКЕВИЧ, д-р техн. наук (romankev@scs.kpi.ua)
(Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт им. Игоря Сикорского»)

ФОРМАЛЬНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ПРОЦЕССОРОВ МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ЕЕ ТЕСТИРОВАНИИ

Работа посвящена проблеме самотестирования многопроцессорных систем в рамках модели Препараты–Метца–Чена. Предлагается метод формализации процедуры установления состояния всех процессоров M-диагностируемой системы на основе анализа результатов некоторого множества взаимных тестовых проверок процессорами. Анализ сводится к решению булева уравнения, составленного на основе результатов этих проверок, и позволяет установить либо состояние (исправен/неисправен) всех процессоров системы, либо тот факт, что количество выполненных проверок для этого недостаточно (т.е. состояние каких-то конкретных процессоров не определено). Сказанное остается справедливым в тех случаях, когда число неисправных процессоров в системе не превышает величины M.

Ключевые слова: многопроцессорные системы, диагностический граф, взаимное тестирование процессоров, ПМЧ-модель.

DOI: 10.31857/S0005231021030065

1. Введение и постановка задачи

Многопроцессорные системы (МС) находят все более широкое применение в современной технике и особенно в системах управления сложными объектами. Важной частью работы МС является процесс ее тестирования с целью определения состояния (исправен/отказал) каждого из процессоров. Эта информация может позволить гибко и эффективно использовать имеющиеся резервы и реконфигурировать систему для обеспечения продолжения ее функционирования [1, 2].

Состояние каждого из процессоров может определяться в результате выполнения им некоторого набора тестов и сравнения полученных результатов с эталоном. Если для некоторого процессора результаты сравнения не совпадают, то он определяется как неисправный. Тестирование процессоров может производиться как отдельным специализированным узлом (например, в процессе изготовления), так и в результате их взаимного тестирования (в процессе эксплуатации), когда тестирующий процессор определяет состояние тестируемого. В соответствии с моделью, предложенной в [3], называемой моделью Препараты–Метца–Чена (ПМЧ), результатом тестирования процессора x исправным процессором y будет 1, если в процессе тестирования были

обнаружены ошибки, или 0, если ошибок обнаружено не было. Если же тестирующий процессор y в момент тестирования был неисправен, то в результате может быть получено как 0, так и 1 вне зависимости от состояния тестируемого процессора x. Как и во множестве работ, здесь предполагается, что каналы связи между процессорами исправны, так как вероятность выхода их из строя относительно низкая.

Топология реальных систем не всегда позволяет организовать тестирование каждого процессора любым другим процессором. Эти ограничения могут быть вызваны, в частности, отсутствием непосредственных связей между процессорами, ограничением объема памяти для хранения тестовых программ и эталонных значений результатов тестов (если в системе находятся процессоры разных типов) и др. Возможность тестирования процессоров друг другом можно представить в виде ориентированного графа G, каждая из вершин которого соответствует некоторому процессору, а наличие дуги из некоторой вершины a в некоторую вершину b означает возможность тестирования процессора, соответствующего вершине b, процессором, соответствующим вершине a. Такой граф фактически отражает возможности системы в плане диагностирования.

Для любой МС имеет место t-диагностируемость [4]. Система является t-диагностируемой, если, зная результаты взаимного тестирования процессоров, можно установить состояние всех ее процессоров в случае выхода из строя не более t любых из них.

На выполнение самотестирования система затрачивает определенные ресурсы, поэтому желательно организовать этот процесс так, чтобы проводилось минимальное количество тестовых испытаний. Это позволяет уменьшить общее время тестирования, а чем чаще будет повторяться процесс тестирования, тем быстрее новый отказ будет обнаружен и тем быстрее система может быть реконфигурирована. Иными словами, минимизация количества проводимых тестов является важной задачей [5, 6] что справедливо и для других задач тестирования [7–9].

Будем считать, что процессор может в один и тот же момент либо тестировать другой процессор, либо тестироваться другим процессором. В [10] был предложен алгоритм, позволяющий определить состояние системы путем выполнения не более чем $N + 2p$ тестовых проверок, где N — количество процессоров в системе, а p — число реально неисправных процессоров. Необходимое условие применения этого алгоритма: орграф, отражающий возможности взаимотестирования процессоров МС, должен быть полным. Реальные же структуры далеко не всегда соответствуют полному графу.

В [3] определена теоретическая граница величины t и доказано, что полное диагностирование системы, т.е. определение исправности всех процессоров системы, всегда возможно, если допустимое число неисправных процессоров не превышает величины $[(N-1)/2]$, где N — количество процессоров системы. В [11] показано, что практически всегда это возможно и при большем числе неисправностей.

Во многих случаях определение состояния процессоров системы на основе результатов выполненных взаимных тестовых проверок является довольно сложной и трудоемкой процедурой.

В данной работе решается задача формализации процедуры установления состояния всех процессоров после выполнения определенного количества тестовых испытаний (не обязательно всех возможных) при любой топологии связей (не обязательно полный граф) системы.

Следует отметить, что задача построения полного теста в данной работе не рассматривается, т.е. предполагается, что некоторый набор тестовых проверок задан разработчиком системы.

2. Формальное представление результатов отдельных тестовых проверок

Остановимся на поставленной задаче подробнее. Пусть M-диагностируемая система состоит из N процессоров, и состоянию каждого из них соответствует некоторая булева переменная x_i $(i = 1, \ldots, N)$, принимающая значение 1, если процессор исправен, и 0, если он вышел из строя. В некоторый момент времени часть процессоров исправна, и соответствующие им переменные равны 1. Множество этих переменных обозначим как W. Остальные процессоры неисправны, соответствующие им переменные равны 0, и множество этих переменных обозначим через F. Очевидно, что

$$\left(\bigwedge_{x_i \in W} x_i\right) \wedge \left(\bigwedge_{x_j \in F} \overline{x}_j\right) = 1. \tag{1}$$

Отметим здесь, что если убрать, добавить, либо переставить хотя бы одну инверсию в левой части уравнения (1), оно примет нулевое значение.

Построим таблицу значений результатов тестирования j-го процессора i-м процессором в зависимости от состояний этих процессоров в соответствии с моделью ПМЧ (см. табл. 1).

Таблица 1

x_i	x_j	Результат тестирования
1	1	0
1	0	1
0	1	*
0	0	*

Символом «*» здесь обозначено произвольное значение: 0 либо 1, определяемое моделью ПМЧ.

Запишем основные уравнения, которые лягут в основу решения поставленной задачи.

В соответствии с уравнением (1) и табл. 1 результат тестирования *может быть равен* 0 лишь в двух случаях: оба процессора исправны либо тестирующий процессор неисправен, т.е. когда справедливо

$$x_i x_j \vee \overline{x}_i \equiv x_j \vee \overline{x}_i = 1. \tag{2}$$

В то же время результат тестирования *может быть равен* 1 лишь в двух случаях: если тестирующий процессор исправен, а тестируемый — неисправен либо если тестирующий процессор неисправен, т.е. когда справедливо

$$x_i\overline{x}_j \vee \overline{x}_i \equiv \overline{x}_j \vee \overline{x}_i = 1. \tag{3}$$

3. Выполнение некоторого множества тестовых проверок

Перейдем к собственно формализации. Пусть после проведения $k-1$ тестовых проверок построено некое уравнение вида $V_{k-1}(x_1,\ldots,x_N)=1$. И пусть k-й тест заключается в тестировании j-го процессора i-м процессором. В результате этого теста получено значение r_k. Можем записать

$$R_k(x_i,x_j) \triangleq \begin{cases} x_j \vee \overline{x}_i, \text{ если } r_k = 0 \\ \overline{x}_j \vee \overline{x}_i, \text{ если } r_k = 1, \end{cases} \tag{4}$$

а также

$$V_k(x_1,\ldots,x_N) \triangleq V_{k-1}(x_1,\ldots,x_N) \wedge R_k(x_i,x_j). \tag{5}$$

В соответствии с (2)–(4) видим, что $R_k(x_i,x_j)=1$, следовательно,

$$V_k(x_1,\ldots,x_N) = 1. \tag{6}$$

Далее, используя результаты следующего тестового испытания, получим выражение R_{k+1} и соответственно V_{k+1}. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока не будут учтены результаты всех выполненных тестовых проверок.

В качестве начального выражения будем использовать $V_0(x_1,\ldots,x_N) \triangleq 1$, и, следовательно, $V_1 \triangleq R_1$. После проведения n тестов (где, вообще говоря, должны будут участвовать хотя бы по разу все N процессоров) в результате итеративного применения формулы (5) выражение V_n примет вид

$$V_n \triangleq R_1 \wedge R_2 \wedge \ldots \wedge R_n. \tag{7}$$

Покажем, что решение этого уравнения дает ответ на поставленную в работе задачу.

Действительно, преобразовав выражение (7) в совершенную дизъюнктивную нормальную форму (СДНФ), получим:

$$V_n \equiv C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_K. \tag{8}$$

Таким образом, имеем уравнение:

$$C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_K = 1. \tag{9}$$

Каждое из выражений C_i является конституентой единицы — элементарной конъюнкцией, которая содержит все переменные x_i $(i=1,\ldots,N)$. Очевидно, что только одна из конституент равна 1, и в соответствии с (1) она идентифицирует состояние системы (т.е. представляет состояние каждого из ее процессоров). Докажем, что она будет присутствовать в (9).

Вспомним, что начальный (вырожденный) вариант уравнения (до выполнения любых проверок) имеет вид $1=1$, где левая (или правая) часть может

быть выражена как дизъюнкция всех возможных конституент единицы, среди которых безусловно будет и отвечающая актуальному состоянию системы. Далее, в соответствии с результатами тестов формируются выражения R_i, позволяющие исключить некоторые из конституент (причем часто группами), приближая процесс к единственному решению.

Рассмотрим выражение V_n, полученное после проведения n тестов, представленное в СДНФ (9). Допустим, что данное выражение действительно содержит конституенту, соответствующую реальному состоянию системы, которую обозначим как C_R. Пусть на основе результатов $(n+1)$-го теста было сформировано выражение R_{n+1}. Тогда в соответствии с (5) и (9)

$$\begin{aligned} V_{n+1} \triangleq V_n \wedge R_{n+1} \equiv (C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_K) \wedge R_{n+1} \equiv \\ \equiv C_1 \wedge R_{n+1} \vee C_2 \wedge R_{n+1} \vee \ldots \vee C_K \wedge R_{n+1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Очевидно, что для конституент C_i возможны только два варианта:

1) $C_i \wedge R_{n+1} \equiv C_i$, что соответствует ситуации, когда R_{n+1} не исключает состояния системы, соответствующего C_i.

2) $C_i \wedge R_{n+1} \equiv 0$, что соответствует ситуации, когда R_{n+1} такое состояние исключает.

Покажем, что конституента C_R, отвечающая реальному состоянию системы, исключена быть не может. Отметим, что в соответствии с (1) справедливо

$$C_R = 1. \tag{11}$$

Предположим, что выражение R_{n+1} исключает состояние, соответствующее C_R, т.е.

$$C_R \wedge R_{n+1} \equiv 0. \tag{12}$$

Вспомним, что в соответствии с (2)–(4) справедливо

$$R_{n+1} = 1. \tag{13}$$

Объединив (11) и (13), получим $C_R \wedge R_{n+1} = 1$. В совокупности с (12) это приводит к противоречию вида $0 = 1$, т.е. высказанное предположение неверно. Обобщая вывод для любого V_i , можно утверждать, что ни одно тестовое испытание не приведет к исключению конституенты C_R, отвечающей реальному состоянию системы, и, следовательно, $C_R \wedge R_{n+1} \equiv C_R$, и выражение V_{n+1} в СДНФ также будет содержать конституенту C_R.

Далее обратим внимание на следующее: система M-диагностируема, а потому можно определить ее состояние, если в ней вышло из строя не более чем M процессоров. Предположим, что это так, т.е. в ней действительно вышло из строя M или меньше процессоров. Тогда в соответствии с (1) любая C_j, содержащая более чем M инверсий, будет равна нулю. Иными словами, можно исключать из V_n все C_j, содержащие больше чем M инверсий. Отметим, что конституента C_R, отвечающая реальному состоянию системы, на данном этапе также не будет исключена (если только она не содержит более чем M инверсий, что соответствует ситуации, когда в системе вышло из строя больше чем M процессоров).

В результате после такого преобразования уравнение (9) примет одну из трех форм:

1) $C_i = 1$;

2) $C_{i_1} \vee C_{i_2} \vee \ldots \vee C_{i_L} = 1$;

3) $0 = 1$.

В первом случае в левой части уравнения получена ровно одна конституента единицы, т.е. элементарная конъюнкция, содержащая все переменные x_i $(i = 1, \ldots, N)$. В этом случае, если в системе действительно вышло из строя не более чем M процессоров (т.е. если конъюнкции с большим количеством инверсий были исключены правомерно), в соответствии с (1) возможно определить состояние каждого из процессоров, т.е. поставленную задачу можно считать решенной. Действительно, в соответствии с методом построения и решения булева уравнения можно сказать: исправны все те процессоры, которым соответствуют переменные, входящие в конъюнкцию без инверсий, и неисправны все те процессоры, которым соответствуют переменные, входящие в конъюнкцию с инверсиями.

Во втором случае в выражении осталось более одной элементарной конъюнкции. Если в системе действительно вышло из строя не более чем M процессоров, то можно лишь сказать, что одна из этих конъюнкций действительно соответствует реальному состоянию системы (как уже было показано, она не может быть исключена в соответствии с результатами каких-либо тестов). Иными словами, имеет место некая неопределенность, т.е. тест, выбранный разработчиком, недостаточен для полного диагноза состояний процессоров.

Здесь следует отметить, что для установления состояния системы разработчик может провести дополнительные тестовые проверки, результаты которых могут исключить остальные конъюнкции и тем самым позволят разрешить данную неопределенность. Это могут быть проверки, осуществляемые исправными (они во всех конъюнкциях присутствуют без инверсий) процессорами (см. пример ниже), поскольку таким результатам можно верить в соответствии с ПМЧ-моделью, или какие-то другие, после чего разработчик может повторить предлагаемый анализ. Если же уже были выполнены все тесты, возможные в соответствии с топологией системы, то данный результат, очевидно, означает, что система не является M-диагностируемой.

Третий случай, когда из выражения исключаются все элементарные конъюнкции, может наступить только тогда, когда в системе на самом деле вышло из строя более чем M процессоров (следовательно, конъюнкция, соответствующая реальному состоянию системы, была исключена неправомерно, что, в свою очередь, привело к отсутствию конъюнкций в левой части уравнения). Отметим, что обратное, вообще говоря, не верно: в случае выхода из строя более чем M процессоров уравнение может принимать любую из представленных выше форм.

Таким образом, можем сформулировать следующий алгоритм определения состояния M-диагностируемой системы:

1. На основе результатов очередных l тестовых испытаний сформировать выражения R_{k+1}, R_{k+2}, $\ldots$, R_{k+l} в соответствии с (4).

2. Дополнить выражение V_k, полученное на предыдущих итерациях, до выражения V_{k+l} в соответствии с (5). Для первой итерации в качестве V_0 использовать «1».

3. Преобразовать полученное выражение в СДНФ, исключая все конъюнкции, содержащие более чем M инверсий.

4. Если полученное выражение содержит больше одной конъюнкции, то провести одну или несколько дополнительных тестовых проверок и перейти к п. 1. Если дополнительные тесты провести невозможно, т.е. не проведенных допустимых тестовых проверок не осталось, то система — не M-диагностируема.

5. Если полученное выражение содержит ровно одну конъюнкцию, то определить в соответствии с ней состояние системы, считая процессоры, соответствующие переменным, входящим в нее без инверсий, исправными, а остальные — неисправными.

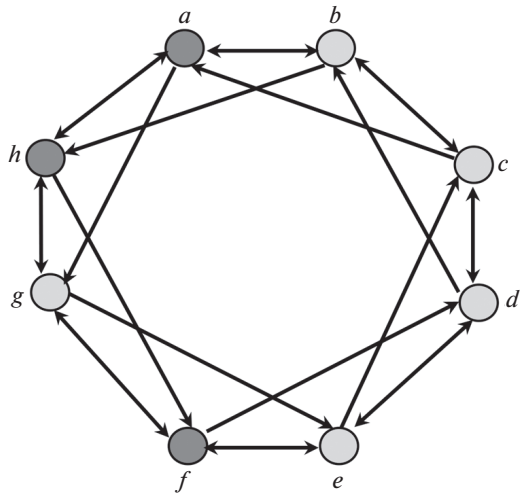
6. Если полученное выражение не содержит конъюнкций, т.е. если в результате проведенных преобразований был получен «0», то в системе вышло из строя больше чем M процессоров.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий описанный метод. Используется модель ПМЧ, и число отказов не превышает половины числа процессоров.

4. Пример

Рассмотрим случай: 3-диагностируемая система состоит из 8 процессоров (обозначим их как a, b, c, d, e, f, g, h). Граф, представляющий топологию связей, представлен на рисунке. Пусть вышли из строя 3 процессора: a, f и h.

Пусть проведены следующие тестовые проверки: $a \to b$, $c \to d$, $e \to f$, $g \to h$, $b \to c$, $d \to e$, $f \to g$, $h \to a$, $c \to a$, $d \to b$, $g \to e$, $h \to f$ (тестирующий процессор указан слева от стрелки, а тестируемый — справа) и пусть получены результаты, которые приведены в табл. 2.



Граф топологии системы.

Таблица 2

№ теста, i	Тестирующий процессор	Тестируемый процессор	Результат теста, r_i	Выражение R_i
1	a	b	0	$R_1 \triangleq b \vee \overline{a}$
2	c	d	0	$R_2 \triangleq d \vee \overline{c}$
3	e	f	1	$R_3 \triangleq \overline{f} \vee \overline{e}$
4	g	h	1	$R_4 \triangleq \overline{h} \vee \overline{g}$
5	b	c	0	$R_5 \triangleq c \vee \overline{b}$
6	d	e	0	$R_6 \triangleq e \vee \overline{d}$
7	f	g	1	$R_7 \triangleq \overline{g} \vee \overline{f}$
8	h	a	0	$R_8 \triangleq a \vee \overline{h}$
9	c	a	1	$R_9 \triangleq \overline{a} \vee \overline{c}$
10	d	b	0	$R_{10} \triangleq b \vee \overline{d}$
11	g	e	0	$R_{11} \triangleq e \vee \overline{g}$
12	h	f	0	$R_{12} \triangleq f \vee \overline{h}$

Можем записать: $V_{12} \triangleq R_1 \wedge R_2 \wedge \ldots \wedge R_{12} = 1$. Выразим V_{12} в форме СДНФ, исключая при этом все конъюнкции, содержащие более чем 3 инверсии:

$$V_{12} \triangleq R_1 \wedge R_2 \wedge \ldots \wedge R_{12} \triangleq$$

$$\triangleq (b \vee \overline{a})(d \vee \overline{c})(\overline{f} \vee \overline{e})(\overline{h} \vee \overline{g})(c \vee \overline{b})(e \vee \overline{d})(\overline{g} \vee \overline{f})(a \vee \overline{h}) \wedge$$

$$\wedge (\overline{a} \vee \overline{c})(b \vee \overline{d})(e \vee \overline{g})(f \vee \overline{h}) = ((b \vee \overline{a})(a \vee \overline{h})(\overline{a} \vee \overline{c}))((d \vee \overline{c})(c \vee \overline{b})(b \vee \overline{d})) \wedge$$

$$\wedge ((\overline{f} \vee \overline{e})(e \vee \overline{d})(e \vee \overline{g}))((\overline{h} \vee \overline{g})(\overline{g} \vee \overline{f})(f \vee \overline{h})) = (ab\overline{c} \vee \overline{a}b\overline{h} \vee b\overline{c}\overline{h} \vee \overline{a}\overline{h} \vee \overline{a}\overline{c}\overline{h}) \wedge$$

$$\wedge (bcd \vee \overline{b}\overline{c}\overline{d})(e\overline{f} \vee e\overline{f}\overline{g} \vee \overline{d}e\overline{f} \vee \overline{d}\overline{f}\overline{g} \vee \overline{d}\overline{e}\overline{g})(\overline{g}\overline{h} \vee f\overline{g}\overline{h} \vee \overline{f}\overline{h} \vee f\overline{g} \vee \overline{f}\overline{g}\overline{h}) =$$

$$= (ab\overline{c} \vee \overline{a}\overline{h})(bcd \vee \overline{b}\overline{c}\overline{d})(e\overline{f} \vee \overline{d}\overline{e}\overline{g})(\overline{f}\overline{h} \vee f\overline{g}) =$$

$$= (\overline{a}bcd\overline{h} \vee \cancel{\overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}\overline{h}})(e\overline{f}\overline{h} \vee \overline{d}\overline{e}f\overline{g} \vee \cancel{\overline{d}\overline{e}\overline{g}\overline{h}}) =$$

$$= \overline{a}bcde\overline{f}g\overline{h} = 1.$$

В результате получена ровно одна конституента единицы, которая соответствует следующему состоянию системы: процессоры b, c, d, e, g — исправны, а процессоры a, f, h — неисправны. Найденное решение соответствует действительному состоянию системы.

Отметим, что, как это и было сделано в примере, исключение элементарных конъюнкций, содержащих более чем M инверсий, правомерно выполнять на любом этапе преобразования. Действительно, в результате раскрытия скобок элементарная конъюнкция порождает выражения с не меньшим, чем содержалось в ней, числом инверсий. Данный прием зачастую позволяет несколько упростить процесс преобразования.

Стоит также отметить, что рассмотренный для данного примера набор тестовых проверок является достаточным для получения однозначного ответа лишь для представленной комбинации результатов тестов. Так, в случае, если бы результаты 8-й и 12-й проверок отличались от представленных (т.е. $r_8 = 1$ и $r_{12} = 1$, что также соответствует модели ПМЧ для рассматриваемого состояния системы), то имело бы место $R_8 \triangleq \overline{a} \vee \overline{h}$ и $R_{12} \triangleq \overline{f} \vee \overline{h}$. Тогда преобразование V_{12} было бы следующим:

$$V_{12} \triangleq R_1 \wedge R_2 \wedge \ldots \wedge R_{12} \triangleq$$
$$\triangleq (b \vee \overline{a})(d \vee \overline{c})(\overline{f} \vee \overline{e})(\overline{h} \vee \overline{g})(c \vee \overline{b})(e \vee \overline{d})(\overline{g} \vee \overline{f})(\overline{a} \vee \overline{h}) \wedge$$
$$\wedge (\overline{a} \vee \overline{c})(b \vee \overline{d})(e \vee \overline{g})(\overline{f} \vee \overline{h}) = ((b \vee \overline{a})(\overline{a} \vee \overline{h})(\overline{a} \vee \overline{c}))((d \vee \overline{c})(c \vee \overline{b})(b \vee \overline{d})) \wedge$$
$$\wedge ((\overline{f} \vee \overline{e})(e \vee \overline{d})(e \vee \overline{g}))((\overline{h} \vee \overline{g})(\overline{g} \vee \overline{f})(\overline{f} \vee \overline{h})) =$$
$$= (\overline{a}b \vee \overline{a}b\overline{c} \vee \overline{a}b\overline{h} \vee b\overline{c}\overline{h} \vee \overline{a} \vee \overline{ac} \vee$$
$$\vee \overline{a}\overline{h} \vee \overline{ac}\overline{h})(bcd \vee \overline{b}\overline{c}\overline{d})(e\overline{f} \vee e\overline{f}\overline{g} \vee \overline{d}e\overline{f} \vee \overline{d}\overline{f}\overline{g} \vee \overline{d}e\overline{g})(\overline{f}\overline{g}\overline{h} \vee \overline{g}\overline{h} \vee \overline{f}\overline{h} \vee \overline{f}\overline{g}) =$$
$$= (b\overline{c}\overline{h} \vee \overline{a})(bcd \vee \overline{b}\overline{c}\overline{d})(e\overline{f} \vee \overline{d}\overline{e}\overline{g})(\overline{g}\overline{h} \vee \overline{f}\overline{h} \vee \overline{f}\overline{g}) =$$
$$= (\overline{a}bcd \vee \cancel{\overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d}})(e\overline{f}\overline{h} \vee e\overline{f}\overline{g} \vee \cancel{\overline{d}\overline{e}\overline{g}\overline{h}} \vee \cancel{\overline{d}\overline{e}\overline{f}\overline{g}}) =$$
$$= \overline{a}bcde\overline{f}\overline{h} \vee \overline{a}bcde\overline{f}\overline{g} = \overline{a}bcde\overline{f}g\overline{h} \vee \overline{a}bcde\overline{f}\overline{g}h \vee \cancel{\overline{a}bcde\overline{f}\overline{g}\overline{h}} =$$
$$= \overline{a}bcde\overline{f}g\overline{h} \vee \overline{a}bcde\overline{f}\overline{g}h = 1.$$

Как видим, в данном случае получено две конституенты единицы, одна из которых ($\overline{a}bcde\overline{f}g\overline{h}$) соответствует действительному состоянию системы. Это означает лишь одно: необходимы дополнительные тестовые проверки. Впрочем, даже полученный частичный результат позволяет сделать некоторые выводы. Так, в обеих конституентах переменные a и f записаны с инверсиями, а b, c, d и e — без инверсий, из чего однозначно следует, что соответствующие первым переменным процессоры неисправны, а вторым — исправны. Состояние же процессоров g и h не определено.

Рассматриваемый пример позволяет дать рекомендации общего характера: для разрешения неопределенности достаточно выполнить проверки подозреваемых процессоров каким-либо из исправных. Для рассматриваемой в примере топологии связей системы достаточно проверки $b \to h$. Действительно, будет получен результат $r_{13} = 1$ и выражение $R_{13} \triangleq \overline{h} \vee \overline{b}$. Тогда в соответствии с (5)

$$V_{13} \triangleq V_{12} \wedge R_{13} = (\overline{a}bcde\overline{f}g\overline{h} \vee \overline{a}bcde\overline{f}\overline{g}h)(\overline{h} \vee \overline{b}) = \overline{a}bcde\overline{f}g\overline{h} = 1.$$

Таким образом получено однозначное решение, соответствующее следующему состоянию системы: процессоры b, c, d, e, g — исправны, а процессоры a, f, h — неисправны. Как и в предыдущем случае, решение соответствует реальному состоянию системы.

5. Заключение

В статье предложен формальный метод, позволяющий установить состояния процессоров M-диагностируемой многопроцессорной системы, сводящий-

ся к решению булева уравнения, сформированного на основе результатов какого-то множества тестовых проверок. Переменные этого уравнения соответствуют состояниям каждого из процессоров. Метод предполагает формальное преобразование булева выражения с исключением всех конъюнкций, содержащих более M инверсий. В результате должно быть получено выражение, содержащее ровно одну конъюнкцию, переменные которой фактически определяют состояния процессоров. Если это не достигнуто, необходимо выполнить дополнительные тестовые проверки. Исходное множество испытаний предполагает участие всех процессоров. Справедливость сказанного выше имеет место лишь для ситуации, когда в системе действительно вышло из строя не более чем M процессоров.

Следует также отметить ряд достоинств предлагаемого метода. В частности, на этапе изготовления он позволяет выявить ситуации, когда система на самом деле не является M диагностируемой (правда, для этого в худшем случае необходимо перебрать все возможные комбинации состояний системы и результатов тестов, что может иметь неприемлемо большую сложность в общем случае, однако может оказаться эффективным для анализа систем, имеющих регулярную структуру). Кроме того, на этапе эксплуатации предложенный метод в определенных случаях позволяет выявить также факт выхода из строя более чем M процессоров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ведешенков В.А.* Организация диагностирования цифровых систем со структурой симметричного двудольного графа // Пробл. управления. 2009. № 6. С. 59–67.

2. *Каравай М.Ф., Подлазов В.С.* Расширенный обобщенный гиперкуб как отказоустойчивая системная сеть для многопроцессорных систем // УБС. 2013. № 45. С. 344–371.

3. *Preparata F.P., Metze G., Chien R.T.* On the Connection Assignment Problem of Diagnosable Systems // IEEE Trans. Electron. Comput. 1967. ES-16. No. 6. P. 848–854.

4. *Hakimi S.L., Amin A.T.* Characterization of Connection Assignment of Diagnosable Systems // IEEE Trans. Comput. 1974. C-23. No. 1. P. 86–88.

5. *Романкевич В.А.* Самотестирование многопроцессорных систем с регулярными диагностическими связями // АиТ. 2017. № 2. С. 115–127.

   Romankevich V.A. Self-testing of Multiprocessor Systems with Regular Diagnostic Connections // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 2. P. 289–299.

6. *Романкевич В.А., Романкевич А.В, Ахмедова Д.Н.* Метод уменьшения количества взаимопроверок при самотестировании многопроцессорных систем // Радиоэлектронные и компьютерные системы. 2018. № 4. С. 61–66.

7. *Drozd J., Drozd A., Al-dhabi M.* A resource approach to on-line testing of computing circuits // Proc. IEEE East-West Design & Test Symposium. Batumi, Georgia, 2015. P. 276–281. https://doi.org/10.1109/EWDTS.2015.7493122

8. *Drozd A., Drozd J., Antoshchuk S., Nikul V., Al-dhabi M.* Objects and Methods of On-Line Testing: Main Requirements and Perspectives of Development // Proc. IEEE East-West Design & Test Symposium. Yerevan, Armenia, 2016. P. 72–76. https://doi.org/10.1109/EWDTS.2016.7807750

9. *Димитриев Ю.К.* О t-диагностируемости мультипроцессорных систем с симметричной циркулянтной структурой // АиТ. 2013. № 1. С. 135–145.

Dimitriev Y.K. On t-diagnosability of Multicore Systems with Symmetric Circulant Structure // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 1. P. 105–112.

10. *Белявский В.Е., Валуйский В.Н., Романкевич А.М. и др.* Самодиагностируемые многомодульные системы: некоторые оценки тестирования // АиТ. 1999. № 8. С. 148–153.

Belyavskii V.E., Valuiskii V.N., Romankevich A.M. and Romankevich V.A. Self-Diagnosable Multimodular Systems: Some Estimates of Testing // Autom. Remote Control. 1999. V. 60. No. 8. P. 1179–1183.

11. *Романкевич А.М., Романкевич В.А.* О диагностировании многопроцессорных систем при отказе более половины процессоров // АиТ. 2017. № 9. С. 84–90.

Romankevich A.M., Romankevich V.A. Diagnosis of Multiprocessor Systems under Failure of More Than Half Processors // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 9. P. 1614–1618.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.Ф. Караваем.

Поступила в редакцию 16.03.2020

После доработки 01.09.2020

Принята к публикации 28.10.2020

Автоматика и телемеханика, № 3, 2021

Управление в технических системах

© 2021 г. **Т.А. МАКАРОВСКИХ, канд. физ. мат. наук (Makarovskikh.T.A@susu.ru), А.В. ПАНЮКОВ, д-р. физ. мат. наук (paniukovav@susu.ru) (Южно-Уральский государственный университет (НИУ), Челябинск)**

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ РЕЖУЩЕГО ИНСТРУМЕНТА ДЛЯ CAD/CAM СИСТЕМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ ПРОЦЕССОВ РАСКРОЯ[1]

Большинство исследований, касающихся траекторий инструмента для режущих машин, посвящены определению траектории при поконтурном вырезании. Современные ресурсосберегающие технологии резки листовых материалов позволяют совмещать контуры вырезаемых деталей, что уменьшает количество отходов материала и сокращает длину резки. Однако совмещение границ вырезаемых контуров является источником ряда ограничений, формализуемых в терминах плоских графов: (1) упорядоченное охватывание, (2) самонепересекающаяся траектория резания. В статье рассмотрены основные структуры данных и алгоритмы, используемые в разрабатываемой CAD/CAM системе технологической подготовки процессов раскроя, допускающей раскройный план с совмещенными контурами, и программное обеспечение, которое для решения задачи маршрутизации по раскройному плану строит гомеоморфный образ графа, решает данную задачу и интерпретирует результаты решения.

Ключевые слова: вырезание из листового материала, раскройный план, совмещение фрагментов контуров деталей, плоский граф, маршрут, алгоритм, структуры данных, программное обеспечение.

DOI: 10.31857/S0005231021030077

1. Введение

Лазерная резка является одной из основных современных технологий, используемых при обработке листового материала, что делает актуальной задачу определения траектории движения режущего инструмента. Задача определения траектории заключается в определении точной последовательности резов. Развитие автоматизации производства привело к появлению технологического оборудования с числовым программным управлением, используемого для резки листовых материалов. Новые технологии позволяют осуществлять вырезание по произвольной траектории с достаточной для практики точностью. Преимуществом при использовании лазерной резки является

[1] Статья выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление № 211 от 16.03.2013 г.), Соглашение № 02.A03.21.0011 и Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание FENU-2020-0022).

минимальность таких показателей, как ширина реза и термические деформации. Целью задачи определения маршрута резки является поиск такого пути режущего инструмента, при котором выполняются условия предшествования, а время, затраченное на вырезание, минимально [1].

Основными ограничениями при лазерной резке являются: (1) все элементы внутренних контуров должны быть вырезаны прежде, чем будет полностью пройден охватывающий их контур (условие OE-охватывания [2]); (2) следует избегать пересечения траектории резки, касания допустимы (NOE-ограничение [1, 3]); (3) в процессе лазерной резки происходит нагревание металлического листа, поэтому необходимо учитывать термальные эффекты [4]; (4) ограничения на расположение точки врезки (построение PPOE-покрытия [5]); (5) общее время, требуемое на выполнение резки, представляющее суммарное время для осуществления всех вырезаний, время на выполнение холостых переходов и время на врезку желательно сокращать.

В [1, 6] приводится классификация задач маршрутизации режущего инструмента и отмечается, что технологии ECP (Endpoint Cutting Problem) и ICP (Intermittent Cutting Problem) за счет возможности совмещения границ вырезаемых деталей позволяют сократить расход материала, длину резки и длину холостых проходов [1]. Проблемы уменьшения отходов материала и максимального совмещения фрагментов контуров вырезаемых деталей решаются на этапе составления раскройного плана.

Несмотря на очевидные преимущества технологий ECP и ICP, в настоящее время большинство отечественных [7–11] и зарубежных [1, 6, 12, 13] публикаций посвящено развитию технологии GTSP (General Travelling Salesman Problem), которая не предполагает совмещение контуров вырезаемых деталей. При использовани технологии GTSP длина траектории будет равна сумме периметров всех контуров, а количество точек врезки — количеству контуров, при этом проблема выполнения отмеченных выше условий оказывается тривиальной.

Для определения последовательности резки фрагментов раскройного плана не используется информация о форме детали, поэтому все кривые без самопересечений и соприкосновений на плоскости, представляющие форму деталей, интерпретируются в виде ребер графа, представляющего гомеоморфный образ раскройного плана, а все точки пересечений и соприкосновений представляются в виде вершин этого графа.

Гомеоморфным образом раскройного плана является плоский граф G с внешней гранью f_0 на плоскости S. Для любой части J графа G (т.е. $J \subseteq \subseteq G$) обозначим через $\mathsf{Int}\,(J)$ теоретико-множественное объединение его внутренних граней (объединение всех связных компонент $S \setminus J$, не содержащих внешней грани). Если J считать пройденной частью маршрута режущего инструмента (очевидно, что J – плоский граф), то $\mathsf{Int}(J)$ интерпретируется как отрезанная от листа часть. Множества вершин, ребер и граней графа J будем обозначать через $V(J)$, $E(J)$ и $F(J)$ соответственно.

Топологическое представление плоского графа G на плоскости S с точностью до гомеоморфизма определяется заданием для каждого ребра $e \in E(G)$ следующих функций [2, 3]: $v_k(e)$, $k = 1, 2,$ — вершины, инцидентные ребру e;

$l_k(e)$, $k = 1, 2$, — ребра, полученные вращением ребра e против часовой стрелки вокруг вершины $v_k(e)$; $r_k(e)$, $k = 1, 2$, — ребра, полученные вращением ребра e по часовой стрелке вокруг вершины $v_k(e)$; $f_k(e)$ — грань, находящаяся справа при движении по ребру e от вершины $v_k(e)$ к вершине $v_{3-k}(e)$, $k = 1, 2$.

Таким образом, используя известные координаты прообразов вершин графа G и размещения фрагментов раскройного плана, являющихся прообразами ребер графа G, любой маршрут в графе G можно интерпретировать как траекторию режущего инструмента.

2. Представление исходных данных в программе

Как правило, раскройный план содержит большие группы однотипных деталей, а для описания размещения детали на раскройном плане достаточно указания величин (x, y, φ), где (x, y) — координаты базовой точки этой детали (обычно это начало координат, к которым привязаны координаты остальных точек), φ – угол поворота детали вокруг ее базовой точки. Поэтому разумно иметь базу данных типовых деталей.

Основными примитивными элементами траекторий маршрута резки являются отрезки прямых и дуги окружностей. Целая окружность представляется как объединение двух дуг с центральными углами φ и $2\pi - \varphi$, $\varphi > 0$. Для идентификации таких примитивов достаточно указать координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) крайних точек v_1 и v_2 соответственно, а также $\mathrm{tg}(\varphi/4)$, где φ — центральный угол дуги (v_1, v_2) окружности, проходящей от точки v_1 до точки v_2 (очевидно, что для отрезка можно считать $\mathrm{tg}(\varphi/4) = 0$). С формальной точки зрения плоская деталь представляет часть плоскости, ограниченной внешней границей и внутренними границами по числу дыр. Каждая граница представляет замкнутый контур, состоящий из такой последовательности примитивов, что начало следующего совпадает с концом предыдущего.

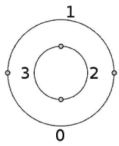
Для представления данных о детали используется формат JSON [14]. На рис. 1 представлены примеры деталей и их описания. Описание каждой детали содержит ее имя в ключевом поле `partid` и список контуров в поле `paths`. Каждый контур представляет из себя трехэлементный массив, состоящий из двух координат концов и значения $\mathrm{tg}(\varphi/4)$. Декартовы координаты конечной точки одного примитива являются координатами начальной точки следующего. Очевидно, что такое представление декартовых координат позволяет легко определять замкнутые контуры (начальные координаты первого примитива совпадают с конечными координатами последнего). Примеры описаний деталей, состоящих из нескольких контуров, число которых больше единицы, приведено на рис. 1,*а* и 1,*д*.

Первым объектом при таком представлении данных будет определение листа, содержащего раскройный план, а все последующие объекты — описания деталей, координаты их опорной точки и ориентция.

Пример раскройного плана с совмещенными границами контуров деталей представлен на рис. 2,*а*.

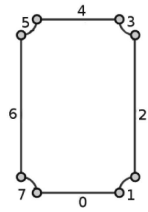
Для определения последовательности резки фрагментов раскройного плана не используется информация о форме детали, поэтому все кривые без са-

а



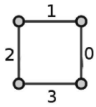

```
{
 "partid": "RING",
  "paths": [
  [
  [200, 100, 1],
  [0, 100, 1],
  [200, 100, 0]],
  [
  [100, 50, -1],
  [100, 150, -1],
  [100, 50, 0]]
  ]
}
```

б



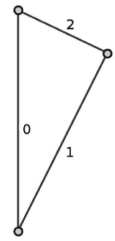

```
{
  "partid": "RECT",
  "paths": [
  [
  [15, 165, 0],
  [93.3484, 165, 0.41421],
  [108.3484, 150, 0],
  [108.3484, 15, 0.4142],
  [93.348, 0, 0],
  [15, 0, 0.4142],
  [0, 15, 0],
  [0, 150, 0.4142],
  [15, 165, 0]]
]}
```

в



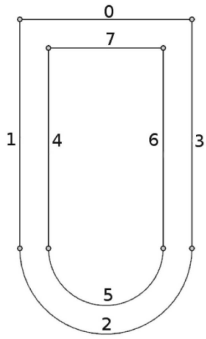

```
{
  "partid": "SQUARE",
  "paths": [
  [
  [50, 50, 0],
  [50, 0, 0],
  [0, 0, 0],
  [0, 50, 0],
  [50, 50, 0]]
]
}
```

г




```
{
  "partid": "RUMB",
  "paths": [
  [
  [0, 0, 0],
  [0, 223.59591, 0],
  [89.7810, 43.83713, 0],
  [0, 0, 0]]
]
}
```

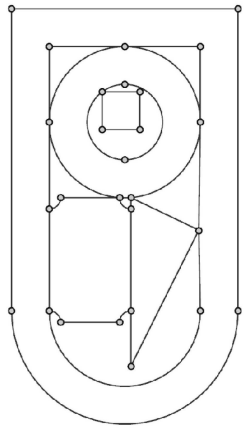
д




```
{
 "partid": "WINDOW",
 "paths": [
 [
    [300, 0, 0],
    [0, 0, 0],
    [0, 400, -1],
    [300, 400, 0],
    [300, 0, 0]
 ],
 [
    [50, 50, 0],
    [50, 400, -1],
    [250, 400, 0],
    [250, 50, 0],
    [50, 50, 0]]
]
}
```

Рис. 1. Примеры и описания деталей, используемых в дальнейшем изложении: *а* – кольцо; *б* – прямоугольник; *в* – квадрат; *г* – треугольник; *д* – окно.

а



б

```
[{
  "partid": "list",
  "paths": [
  [400, 600, 0],
  [400, 0, 0],
  [0, 0, 0],
  [0, 600, 0],
  [400, 600, 0]
]},
{ "partid":"WINDOW", "base":[0, 0, 0]},
{ "partid": "RING", "base": [50, 50, 0]},
{ "partid": "SQUARE", "base": [120, 110, 0]},
{ "partid": "RECT", "base": [50, 250, 0]},
{ "partid": "RUMB", "base": [158.3, 250, 0]}
]
```

Рис. 2. Пример: *а* — раскройный план с совмещенными границами; *б* — JSON-код раскройного плана.

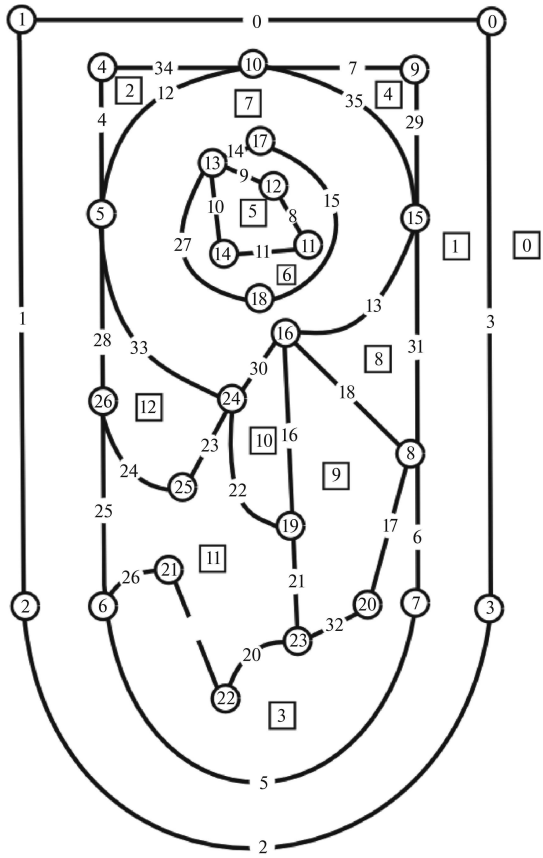


Рис. 3. Пример: гомеоморфный образ раскройного плана с указанием номеров вершин, ребер и граней.

мопересечений и соприкосновений в описании формы деталей можно интерпретировать как ребра графа, а все точки пересечений и соприкосновений — как вершины графа. Для получения представления плоского графа, позволяющего восстановить с точностью до гомеоморфизма исходный раскройный план, необходимо и достаточно в каждой вершине зафиксировать циклический порядок на множестве инцидентных ей ребер. На рис. 3 представлен гомеоморфный образ раскройного плана, изображенного на рис. 2,*a*. Структуры данных, используемые для представления гомеоморфного образа, должны включать всю необходимую информацию для эффективной работы алгоритмов маршрутизации и интерпретации построенных маршрутов [15, 16]. На листинге 1 представлены структуры данных для представления гомеоморфного образа раскройного плана в виде плоского графа.

Листинг 1. Структуры данных для гомеоморфного образа раскройного плана

```
struct  Vert {// Вершина графа
         double x, y; // координаты вершины
         int sv; // номер компоненты связности содержащей вершину
         int rank; // ранг вершины
         double dpth; // глубина вершины (скорректированный ранг)
         int deg; // степень вершины
         int mark; // метка для поиска в ширину в алгоритмах
         };
struct  Edge { // ребро графа
         int rank; // ранг ребра
         int dpth; // глубина ребра (скорректированный ранг)
         int v1, v2; // номера инцидентных вершин в контейнере
                        vector<Vert> V
         double x_0, y_0, r; // координаты центра дуги и ее радиус
         double v1_ang, v2_ang; // центральные углы возможных дуг
         double v1_ta4, v2_ta4; // тангенсы четвертей соответствующих дуг
         int l1,l2,r1,r2; // номера возможных смежных ребер
                        в vector<Edge> E
         int sv; // номер компоненты связности в контейнере
                        vector<Connect> Sv
         int cycle1, cycle2; // номера контуров в контейнере
                        vector<Cycle> C
         int f1, f2; // номера граней, инцидентных ребру,
                        в vector<Face> F
         int mark; // метка для поиска в ширину в алгоритмах
         };
struct  Face { // Грань графа
         int number; // номер грани (детали, отверстия, дополнительной)
         int dpth; // глубина грани
         };
struct  Connect { // Компонента связности
         int v; // одна из вершин компоненты (номер в vector<Vert> V)
         int outcycle; // номер охватывающего контура в vector<Cycle> C
         int up; // смежная охватывающая компонента
                        (номер в vector<Connect> Sv)
         int rank; // ранг компоненты
         Connect ():v(-1),outcycle(-1),up(-1),rank(-1){}; // конструктор
};
```

```
struct  Cycle { // контур внешней или внутренней грани графа
        int v; // номер вершины контура в контейнере vector<Vert> V
        int e; // номер ребра в контейнере vector<Edge> E, инцидентного v
        int f; // номер грани в контейнере vector<Face>
        vector<int> vertexes; // отсортированные в порядке обхода вершины
        vector<int> edges; // ребра цикла, отсортированные в порядке обхода
        Cycle (int vtx, int edg) : v(vtx), e(edg), f(-1) {}; // конструктор
        Cycle () : v(-1), e(-1), f(-1) {}; // конструктор по умолчанию
};
```

Структура `Vert` содержит поля с указанием декартовых координат соответствующей точки на раскройном плане и ряд вспомогательных полей. Эти данные необходимы для интерпретатора маршрута и при заполнении полей структуры `Edge`. Поля структуры `Edge` содержит номера `v1`, `v2` инцидентных вершин, номера `f1`, `f2` инцидентных граней, номера `l1`, `l2`, `r1`, `r2` соседних в циклическом порядке ребер, значения `v1_ta4`, `v2_ta4` величины $\mathrm{tg}(\varphi/4)$, где φ – центральный угол дуг (v_1, v_2) и (v_2, v_1) соответственно, а также вспомогательные величины. Структура `Face` ставит в соответствие объекты на раскройном плане с гранями его гомеоморфного образа. Структура `Connect` используется для идентификации компонент связности гомеоморфного образа раскройного плана. Структура `Cycle` используется для идентификации контуров, являющихся границами граней. Контейнеры для приведенных структур, другие вспомогательные данные, все используемые методы их заполнения и алгоритмы маршрутизации инкапсулированы в класс `DataHolder` [15–17].

3. Маршрутизация в связных графах

Использование плоского графа в качестве гомеоморфного образа модели раскройного плана позволяет формализовать технологические ограничения на порядок вырезания фрагментов плана резки: во-первых, граф G содержит образы всех возможных элементов траектории инструмента; во-вторых, маршрут резки должен удовлетворять условию упорядоченного охватывания, т.е. отрезанная от листа часть не должна требовать дополнительных разрезаний [2]; в-третьих, должны отсутствовать самопересечения траектории резки [3].

Допустимый маршрут формализуется как упорядоченная последовательность OE-цепей, покрывающая граф [2, определения 4–5].

Определение OE-покрытия вполне конструктивно, доказательством этого факта является эффективность алгоритмов, рассмотренных в [2]. Если связный граф G не является эйлеровым, то он содержит $2k$, $k \geqslant 1$, вершин нечетной степени. В этом случае OE-маршрут состоит из k реберно-непересекающихся цепей. Задача построения такого маршрута решается алгоритмом `OE-Router` [18]. При этом в построенном маршруте длина холостых переходов (т.е. переходов между концом текущей цепи и началом следующей цепи) может не быть оптимальной. Если плоский граф G, представляющий образ раскройного плана, не содержит мостов (т.е. ребер, инцидентных одной грани), то возможно построить OE-маршрут, в котором ребра произвольного

Таблица 1. Алгоритмы построения OE-маршрутов

Название алгоритма	Вычислительная сложность
Eulerian OE-cycle (рекурсивный алгоритм) [2]	$O(\|V\|^2)$
Eulerian OE-cycle (алгоритм OE-Cycle) [2]	$O(\|E\| \cdot \log_2\|V\|)$
OE-Postman Route (алгоритм CPP_OE)	$O(\|E\| \cdot \|V\|)$
OE-Router [18]	$O(\|E\| \cdot \log_2\|V\|)$
M-OE-Router [2]	$O(\|V\|^2)$

паросочетания M на подмножестве $V_{odd} \subset V(G)$ множества вершин нечетной степени и только они соответствуют холостым движениям. Выбор кратчайшего паросочетания M позволяет найти маршрут с минимальной длиной холостых переходов. Отметим, что связные плоские графы, являющиеся образами раскройных планов, как правило, не содержат мостов. Поэтому если M является кратчайшим паросочетанием, то алгоритм `M-OE-Router` строит маршрут с минимальной длиной холостых переходов.

Если граф G, представляющий гомеоморфный образ раскройного плана, связен и не содержит мостов, то алгоритм `M-OE-Router` точно решает задачу, но требует определения кратчайшего паросочетания. Алгоритм `OE-Router` решает задачу для любого графа G, используя жадную стратегию выбора холостого хода. Полный перечень алгоритмов построения OE-маршрутов для связных графов приведен в табл. 1.

4. NOE-маршрутизация

Задача построения эффективных алгоритмов нахождения непересекающихся цепей в плоских графах является открытой: некоторые попытки решить данную задачу были предприняты в [19]. В [20] предложено решение задачи для плоского связного 4-регулярного графа.

Определение 1. Эйлеров цикл C в плоском графе G называется самонепересекающимся, если он гомеоморфен циклическому графу $\tilde{G}$, представляющему плоскую жорданову кривую без самопересечений. Циклический граф $\tilde{G}$ может быть получен из графа G с помощью применения $O(|E(G)|)$ операций расщепления вершин.

Общим случаем является решение задачи построения самонепересекающейся OE-цепи (или NOE-цепи, non-intersecting OE-trail) [21].

Определение 2. Будем говорить, что цепь является NOE-цепью, если она одновременно является OE-цепью и самонепересекающейся цепью.

Определение 3. Систему переходов [22] *цепи, соответствующую самонепересекающейся цепи, будем называть системой непересекающихся переходов.*

Доказательство того факта, что для системы переходов, соответствующей самонепересекающемуся эйлерову циклу, существует такая начальная вершина и такое конечное ребро, смежное внешней грани, для которых построенный цикл будет OE-циклом, во многом схоже с доказательством теоремы 1 в [20] для 4-регулярного графа G, и представляет алгоритм построения NOE-цепи.

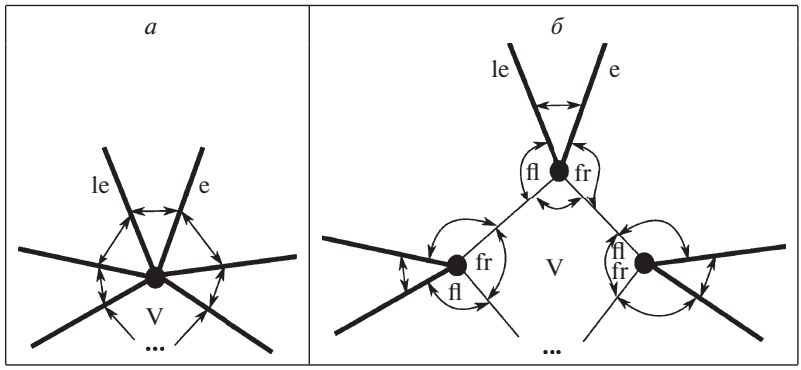


Рис. 4. *а* — Исходные указатели на соседние ребра в расщепляемой вершине. *б* — Расщепление вершины (жирными линиями показаны ребра графа G, тонкими линиями – дополнительные (фиктивные) ребра) и модификация указателей в соответствии с расщеплением.

Для построения самонепересекающейся эйлеровой OE-цепи (или цикла) в плоском эйлеровом графе (в дальнейшем эту цепь будем называть NOE-цепью (non-intersecting OE-chain)), для которой не задано фиксированной системы переходов, можно поступить следующим образом [21].

На множестве вершин $V(G)$ определим булеву функцию

$$\mathrm{Checked}(v) = \begin{cases} \texttt{true}, \text{ если вершина просмотрена;} \\ \texttt{false} \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

При инициализации этой функции все вершины из $V(G)$ объявляются как непросмотренные.

Функция `Non-intersecting`(G) (алгоритм 1) расщепляет в графе G все вершины $v \in V(G)$, $\deg(v) = 2n$, $n \geqslant 3$, на n искусственных вершин степени 4 и вводит n искусственных ребер, инцидентных полученным после расщепления вершинам и образующим цикл (рис. 4). Для выполнения указанных преобразований необходимо просмотреть все функции $v_k(e)$, $k = 1, 2$, определенные для всех ребер e, и внести требуемые модификации во всю систему кодирования графа. В теле функции используется процедура `Handle` (e, $v_k(e)$, k) (алгоритм 2), которая обрабатывает каждую непросмотренную вершину графа G. Обработка заключается в расщеплении вершины $v_k(e)$ в соответствии с рис. 4,*а* и 4,*б*.

Алгоритм 1. Функция `Non-intersecting (G)`

Require: плоский эйлеров граф G;
Ensure: плоский связный 4-регулярный граф G^*;
1: **for all** ($e \in E(G)$) **do** ▷ Просмотреть все ребра графа
2: $k = 1$; ▷ Обработать последовательно функции с индексом 1, а затем – 2
3: **while** ($k \leqslant 2$) **do**
4: **if** ($\overline{\mathrm{Checked}(v_k(e))}$) **then** ▷ Если вершина не была обработана ранее
5: Handle (e, $v_k(e)$, k); ▷ Обработать вершину
6: **end if**

```
        k++;
    end while
end for
Return G*;
```

Алгоритм 2. Процедура Handle (e,v,k)

```
                                    ▷ Проход 1: Определение степени вершины v
e_first = e;
d = 0;                                                  ▷ Степень вершины
repeat                                                  ▷ Просмотреть все ребра
    le = l_k(e);          ▷ Найти смежное ребро, заданное функцией l_k(e)
    if (v_k(le) ≠ v) then
        REPLACE(le);
    end if
    e = le;                  ▷ Учесть текущее ребро при подсчете степени
    d = d + 1;                                          ▷ и перейти к следующему
until (e = e_first);
                ▷ Проход 2: Расщепление вершин, степень которых выше 4
if (d > 4) then
    e = e_first; le = l_k (e); fl=new EDGE; fle = fl; e_first = e; e_next = l_k (le);
    repeat
        e = e_next; le = l_k (e); fr = fl; fl=new EDGE; e_next = l_k (le);
        Pointers(e, le, fr, fl);                ▷ Расставить указатели для ребер
    until (l_k(le) = e_first);
    Pointers(e_first, l_k(e_first), fle, fe);   ▷ Расставить указатели для ребер
end if
```

Введенные процедурой `Handle` n искусственных вершин и n искусственных ребер, инцидентных этим вершинам, образуют цикл. В результате обработки всех вершин графа G получим модифицированный граф G^*, являющийся плоским связным 4-регулярным графом. Для G^* можно применить алгоритм `AOE-TRAIL()`, который построит в нем AOE-цепь T^*. Если затем в T^* все искусственные ребра и инцидентные им вершины, полученные при расщеплении вершины v, заменить на v, то получим NOE-цепь T в исходном графе G. Полученная после удаления ребер цепь будет принадлежать классу OE, так как процедура удаления ребер не нарушает порядка следования оставшихся ребер в цепи, что исключает появление цикла, охватывающего еще непройденные ребра.

5. Маршрутизация для несвязных графов

Если раскройный план содержит детали с отверстиями, а также другие детали, расположенные в этих отверстиях, то плоский граф $G = (V(G), F(G), E(G))$, представляющий гомеоморфный образ раскройного плана, оказывается несвязным. Поскольку вырезанные фрагменты содержат прообразы охваченных граней графа, то требования к маршруту резки, гарантирующие выполнение OE-ограничения, можно формализовать в терми-

Таблица 2. Алгоритмы построения OE-маршрутов для несвязных графов

Название алгоритма	Вычислительная сложность
MultiComponent	$O(\|E\| \cdot \log_2 \|V\|)$
Bridging	$O(\|E\| \cdot \log_2 \|V\|)$
DoubleBridging	$O(\|V\|^2)$
FaceCutting	$O(\|E\| \cdot \log_2 \|V\|)$

нах графа $G' = (F(G),\, V(G),\, E(G))$, двойственного графу G [2]: необходимо, чтобы порядок обхода граней графа G (т.е. вершин графа G') являлся расширением отношения частичного порядка $\prec$:

$$(f_i \prec f_j) \;\Leftrightarrow\; \Big(f_j \text{ принадлежит кратчайшей цепи } T_{G'}^{f_0} \text{ между } f_i \text{ и } f_0\Big),$$

где f_0 — внешняя (бесконечная) грань плоского графа G. Перечень алгоритмов построения OE-маршрутов для несвязных графов приведен в табл. 2. Для построения OE-покрытия в несвязаном графе реализованы следующие подходы: (1) определение допустимого обхода компонент связности графа G; (2) пополнение множества ребер $E(G)$ до множества $E(\tilde{G})$, где $\tilde{G}$ – плоский связный граф.

Первый подход реализуется алгоритмом `MultiComponent`, в котором нахождение искомого OE-маршрута заключается в независимом построении OE-маршрутов для каждой компоненты связности и последующем их объединении в результирующий маршрут в порядке уменьшения рангов компонент связности. Второй подход реализуется алгоритмами `Bridging`, `DoubleBridging` и `FaceCutting` и основан на добавлении мостов в *разделяющих гранях*.

Определение 4 [18]. *Грань $f \in F(G)$ называется разделяющей, если граф $G' \setminus \{f\}$ – несвязный.*

Пусть граф $\tilde{G}$ получен из графа G добавлением между компонентами связности минимального по мощности и по длине множества $\tilde{E}$ мостов, принадлежащих разделяющим граням. Очевидно, что такие ребра в графе G' будут являться ребрами остовного дерева минимального веса. Полученный таким образом граф $\tilde{G}$ является плоским связным графом, для которого можно построить OE-маршрут $M(\tilde{G})$ с помощью алгоритма `OE-Router` [18].

При этом OE-маршрут $M(G)$ строится по маршруту $M(\tilde{G})$ удалением ребер введенного множества $\tilde{E}$. При этом получим множество цепей, представляющих OE-покрытие исходного несвязного графа. Указанный подход реализует алгоритм `Bridging`.

Чтобы обеспечить возможность применения алгоритма `M-OE-Router`, достаточно дополнить граф G до графа $\tilde{\tilde{G}}$ включением множества ребер $\tilde{\tilde{E}} = \cup_{e \in \tilde{E}} \{e_1 = e,\, e_2 = e\}$, т.е. включением двух дубликатов для каждого ребра $e \in \tilde{E}$. Указанный подход в совокупности с алгоритмом `M-OE-Router` реализует алгоритм `DoubleBridging`.

Теорема 1. Если в каждой компоненте связности G_k графа G степени вершин, инцидентных разделяющим граням графа G, четны, то маршрут с

минимальной длиной дополнительных построений реализуется алгоритмом `DoubleBridging`.

Доказательство. Очевидно, что обход каждой компоненты связности должен заканчиваться на внешней границе. Если предположить, что обход компоненты связности начинается из вершины, не принадлежащей внешней границе, то завершится данный фрагмент OE-покрытия в вершине нечетной степени, не принадлежащей границе. Поскольку на границе нет вершин нечетной степени, то в соответствии с определением OE-маршрута часть графа, содержащая внешнюю границу, останется непройденной. В оптимальном решении (полученном алгоритмом `M-OE-Router`) компоненты будут связаны парами кратных ребер. Причем, суммарный вес всех связывающих ребер минимален. Теорема доказана.

Очевидно, что длина введенных мостов в алгоритме `DoubleBridging` не меньше удвоенной длины кратчайшего остова в разделяющей грани.

Еще одним способом получения связного графа без мостов является расщепление вершин, инцидентных разделяющей грани, с помощью гамильтонова цикла (алгоритм `FaceCutting`). Такой подход представляется наиболее целесообразным, поскольку, во-первых, на практике размерность задачи коммивояжера сопоставима с оценками степеней соответствующих разделяющих граней (т.е. достаточно низкая); во-вторых, в соответствии с метрикой графа G даже приближенный полиномиальный алгоритм Кристофидеса [23] для задачи коммивояжера строит гамильтонов цикл в разделяющей грани с длиной, не превышающей удвоенной длины кратчайшего остова.

6. Пример

В табл. 3 (левый столбец) приведено оптимальное NOE-покрытие раскройного плана рис. 2 упорядоченной последовательностью OE-цепей. Первая цепь проходит через квадрат и внутреннюю границу кольца. Вторая — по правой стороне прямоугольника, по внешней границе кольца, и завершается вырезание треугольником и прямоугольником. Третья цепь завершает внутренний контур окна. Четвертая проходит по внешнему контуру окна. Код траектории инструмента в терминах JSON представлен в правом столбце табл. 3. Каждая отдельная цепь соответствует определенной части траектории непре-

Таблица 3. Оптимальное NOE-покрытие раскройного плана рис. 2 упорядоченной последовательностью OE-цепей

Цепь	JSON-код цепи
1	2

chain 1:
v17 e14 v13 e9 v12 e8 v11 e11 v14 e10 v13 e27 v18 e15 v17
	`{ "partid": "chain_1",`
	`"paths": [`
	`[150.0,100.0,-0.162278], [120.0,110.0,-0.0],`
	`[170.0,110.0,-0.0], [170.0,160.0,-0.0],`
	`[120.0,160.0,-0.0], [120.0,110.0,-0.720759],`
	`[150.0,200.0,-1.0], [150.0,100.0,0]`
	`]},`

Таблица 3 (окончание)

1	2

chain 2:
v23 e21 v19 e16 v16 e30 v24 e33 v5 e12 v10 e35 v15 e13 v16 e18 v8 e17 v20 e32 v23 e20 v22 e19 v21 e26 v6 e25 v26
	`{ "partid": "chain_1",`
	`"paths": [`
	`[150.0,400.0,0.0], [150.0,265.0,-0.0],`
	`[150.0,250.0,0.0375], [135.0,250.0,0.374006],`
	`[50.0,150.0,0.4142], [150.0,50.0,0.4142],`
	`[250.0,150.0,0.4142], [150.0,250.0,-0.0],`
	`[250.0,300.0,-0.0], [150.0,475.0,-0.0],`
	`[150.0,400.0,-0.414213],[135.0,415.0,-0.0],`
	`[65.0,415.0,-0.414213], [50.0,400.0,-0.0],`
	`[50.0,265.0,0]`
	`]},`

chain 3:
v19 e22 v24 e23 v25 e24 v26 e28 v5 e4 v4 e34 v10 e7 v9 e29 v15 e31 v8 e6 v7 e5 v6
	`{ "partid": "chain_3",`
	`"paths": [`
	`[150.0,265.0,0.414213], [135.0,250.0,0.0],`
	`[65.0,250.0,0.414213], [50.0,265.0,-0.0],`
	`[50.0,150.0,-0.0], [50.0,50.0,-0.0],`
	`[150.0,50.0,-0.0], [250.0,50.0,-0.0],`
	`[250.0,150.0,-0.0], [250.0,300.0,-0.0],`
	`[250.0,400.0,1.0], [50.0,400.0,0]`
	`]},`

chain 4:
v0 e0 v1 e1 v2 e2 v3 e3 v0
	`{ "partid": "chain_4",`
	`"paths": [`
	`[300.0,0.0,0.0], [0.0,0.0,0.0],`
	`[0.0,400.0,-1.0], [300.0,400.0,0.0],`
	`[300.0,0.0,0]`
	`] }`

рывной резки. Она представляет собой последовательность трехэлементных массивов, содержащих координаты текущей начальной точки примитива, а также значение для нее. При вырезании деталей в соответствии с найденной последовательностью цепей соблюдаются все технологические ограничения.

7. Заключение

Технология, допускающая совмещение границ вырезаемых деталей — современная ресурсосберегающая технология резки. Известны алгоритмы маршрутизации, когда на маршрут движения режущего инструмента одновременно наложены следующие технологические ограничения: (1) отрезанная от листа часть не требует дополнительных разрезаний, (2) отсутствуют самопересечения траектории резки.

В статье дано решение проблемы эффективной программной реализации этих алгоритмов: представлены результаты авторов, использованные при разработке функциональных элементов комплекса программ автоматизированной системы технологической подготовки процессов раскроя листового материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dewil R., Vansteenwegen P., Cattrysse D.* A Review of Cutting Path Algorithms for Laser Cutters // Int. J. Adv. Manuf. Technol. 2016. V. 87. P. 1865–1884. https://doi.org/10.1007/s00170-016-8609-1
2. *Макаровских Т.А., Панюков А.В., Савицкий Е.А.* Математические модели и алгоритмы маршрутизации для САПР технологической подготовки процессов раскроя // АиТ. 2017. № 5. С. 123–140. https://doi.org/10.1134/S0005117917050095

   Makarovskikh T.A., Panyukov A.V., Savitsky E.A. Mathematical Models and Routing Algorithms for CAD Technological Preparation of Cutting Processes // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 4. P. 868–882.
3. *Makarovskikh T., Panyukov A.* The Cutter Trajectory Avoiding Intersections of Cuts // IFAC-PapersOnLine. 2017. V. 50. Iss. 1. P. 2284–2289.

   https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.226
4. *Li X., Liu Zh., Wang F., Yi B., Song Y.* Combining Physical Shell Mapping and Reverse-Compensation Optimisation for Spiral Machining of Free-Form Surfaces // Int. J. Prod. Rts. 2018. https://doi.org/10.1080/00207543.2018.1512763
5. *Makarovskikh T., Panyukov A.* Development of Routing Methods for Cutting out Details // CEUR Workshop Proc. 2018. V. 2098. P. 249–263.

   http://ceur-ws.org/Vol-2098/paper22.pdf
6. *Dewil R., Vansteenwegen P., Cattrysse D., Laguna M., Vossen T.* An Improvement Heuristic Framework for the Laser Cutting Tool Path Problem // Int. J. Prod. Rts. 2015. V. 53. Iss. 6. P. 1761–1776. https://doi.org/10.1080/00207543.2014.959268.
7. *Petunin A., Stylios C.* Optimization Models of Tool Path Problem for CNC Sheet Metal Cutting Machines // IFAC-PapersOnLine. 2016. V. 49. P. 23–28.

   https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.07.544
8. *Petunin A., Chentsov A.G., Chentsov P.A.* About Routing in the Sheet Cutting // Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2017. V. 10 (3). P. 25–39.

   https://doi.org/10.14529/mmp170303
9. *Chentsov A.G., Grigoryev A.M., Chentsov A.A.* Solving a Routing Problem with the Aid of an Independent Computations Scheme // Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2018. V. 11 (1). P. 60–74. https://doi.org/10.14529/mmp180106
10. *Khachay M., Neznakhina K.* Towards Tractability of the Euclidean Generalized Travelling Salesman Problem in Grid Clusters Defined by a Grid of Bounded Height // Communications in Comput. and Inform. Sci. 2018. V. 871. P. 68–77. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-93800-4_6
11. *Chentsov A., Khachay M., Khachay D.* Linear Time Algorithm for Precedence Constrained Asymmetric Generalized Traveling Salesman Problem // IFAC-PapersOnLine. 2016. V. 49. P. 651–655. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.07.767
12. *Hoeft J., Palekar U.* Heuristics for the Plate-cutting Traveling Salesman Problem // IIE Transactions. 1997. V. 29. P. 719–731. https://doi.org/10.1023/A:1018582320737
13. *Dewil R., Vansteenwegen P., Cattrysse D.* Construction heuristics for generating tool paths for laser cutters // Int. J. Prod. Rts. 2014. V. 52 (20). P. 5965–5984. https://doi.org/10.1080/00207543.2014.895064
14. *Crockford D.* The Application/json Media Type for JavaScript Object Notation (JSON). Internet Engineering Task Force, 2006.

    https://www.rfc-editor.org/info/rfc4627

15. *Макаровских Т.А., Панюков А.В., Савицкий Е.А.* Программное обеспечение для задачи построения траектории движения режущего инструмента // Тр. XVIII-й Междунар. молодежной конф. “Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта (CAD/CAM/PDM-2018”. 2018. С. 172–176.

16. *Макаровских Т.А., Панюков А.В., Савицкий Е.А.* Задача построения движения режущего инструмента: программная реализация // Тр. XIII Всеросс. совещания по проблемам управления (ВСПУ-2019). Под общей редакцией Д.А. Новикова. 2019. С. 2650–2654.

17. *Makarovskikh T.A., Panyukov A.V., Savitskiy E.A.* Software Development for Cutting Tool Routing Problems // Procedia Manufacturing. 2019. V. 29. P. 567–574. https://doi.org/10.1016/j.promfg.2019.02.123

18. *Makarovskikh T.A., Panyukov A.V., Savitskiy E.A.* Mathematical Models and Routing Algorithms for Economical Cutting Tool Paths // Int. J. Prod. Rts. 2018. V. 56 (3). P. 1171–1188. https://doi.org/10.1080/00207543.2017.1401746.

19. *Manber U., Bent S.W.* On Non-intersecting Eulerian Circuits // Discrete Applied Mathematics. 1987. V. 18. P. 87–94. https://doi.org/10.1016/0166-218X(87)90045-X

20. *Макаровских Т.А.* Программное обеспечение для построения А-цепей с упорядоченным охватыванием в плоском связном 4-регулярном графе // Вестн. Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Вычислительная математика и информатика. 2019. Т. 8. № 1. С. 36–53. https://doi.org/10.14529/cmse190103

21. *Макаровских Т.А.* Построение самонепересекающихся OE-маршрутов в плоском эйлеровом графе // Вестн. Южно-Уральского гос. ун-та. Сер.: Вычислительная математика и информатика. 2019. Т. 8. № 4. С. 30–42.

    https://doi.org/10.14529/cmse190403

22. *Макаровских Т.А.* О числе *OE*-цепей для заданной системы переходов // Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. Сер.: Математика. Механика. Физика. 2016. Т. 8. № 1. С. 5–12. https://doi.org/10.14529/mmph160101

23. *Garey M.R., Johnson D.S.* Computer and intractability: a guide to the theory of NP-completeness, 1979.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 26.06.2019

После доработки 10.04.2020

Принята к публикации 09.07.2020

© 2021 г. А.А. САРАТОВ, канд. техн. наук (sapford@.tula.net)
(ООО “Интерактивные системы автоматизации проектирования”, Тула)

СИНХРОНИЗАЦИЯ РАБОТЫ ЦЕХОВ В ПОЗАКАЗНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ

Описывается реализованная в системе “САПФОРД” методика согласования и перестройки расписаний цехов и участков при возникновении сбоев в работе служб производства и снабжения. Предложен эффективный метод построения единого производственного расписания завода, оптимизированного по критерию минимизации затрат, связанных с обслуживанием незавершенного производства и штрафами за задержки выполнения заказов. Задача планирования позаказного производства декомпозируется на подзадачи распределения работ по рабочим местам с заданными параметрами в допустимые сроки. Для каждой работы задается целевая функция зависимости прироста цены производства от величины задержки или преждевременного выполнения работы и вычисляется время ее выполнения, при котором не нарушается срок сдачи изделия, а время “пролеживания” детали до начала операции минимально. Согласование критериев подзадач осуществляется методом взаимных штрафов, суть которого заключается в том, что конкурирующие в очередях работы штрафуют друг друга приращениями своих оценок при пропуске вперед конкурента. Первой в очереди оказывается работа с наименьшей суммой собственной критериальной оценки и штрафов за задержку конкурентов. При возникновении задержек производства в одном цехе происходит пересчет оценок задержанных заказов и перестройка очередности выполнения работ в других цехах. Результаты пересчета планов цехов отражаются в цеховых номенклатурах первоочередных работ. Приведен пример решения.

Ключевые слова: производственное расписание, метод взаимных штрафов, система “САПФОРД”.

DOI: 10.31857/S0005231021030089

1. Введение

Управление позаказным производством является наиболее сложным процессом принятия плановых решений из-за высокой динамичности исходных данных о составе производимой продукции и технологии ее изготовления, о сроках поставки материалов и комплектующих и необходимости оперативного пересчета и взаимного согласования производственных циклов изделий.

Традиционный подход к оперативному планированию производства предполагает двухуровневую иерархию, включающую межцеховое и внутрицеховое планирование. При этом для решения задач управления на этих уровнях предлагаются разные системы и методики принятия решений. В позаказном производстве расчет сроков выполнения работ сводится к расчету длительности производственных циклов изделий и к разработке цикловых графиков

выполнения заказов. Для каждой операции рассчитываются сроки ее выполнения путем отсчета от даты окончания изготовления изделия суммарной длительности работ, следующих за этой операцией. Длительность работ берется из технологических процессов. Для учета времени пролеживания заготовок и полуфабрикатов в очередях на распределение по рабочим местам к суммарной длительности работ добавляется резервное время, определяемое опытным путем. Определение фактического времени запуска деталей в производство возлагается на цеховых плановиков. Такой подход требует наличия значительных резервов производственных мощностей, которые могли бы скомпенсировать погрешности планирования на межцеховом уровне, выполненного без детальной проработки производственных расписаний (ПР) цехов.

Для обеспечения высокой пропускной способности позаказных производств необходим инструментарий, который был бы способен производить расчет оптимального производственного расписания предприятия за время, приемлемое для интерактивного планирования, т.е. планировщик должен иметь возможность в реальном режиме времени, за несколько минут, формировать производственные расписания предприятия для различных сочетаний исходных данных (предполагаемые сроки поступления материалов, комплектующих и полуфабрикатов от смежников, непредвиденные задержки производства при отсутствии страховых заделов, смена приоритетов заказов, задержки платежей, аварийные остановки оборудования и т.д.).

Исследования в области теории расписаний для задач класса $Jm|r_j, enttree|\sum \omega_j T_j$ (расписание для множества изделий, имеющих структуры входящих деревьев, с заданными отношениями предшествования операций, выполняемых на множестве рабочих мест, с минимизацией суммы взвешенных запаздываний) [1] привели к решениям, временна́я сложность которых не позволяет выполнять планирование работ предприятия в реальном режиме времени, поскольку в машиностроении размеры задач исчисляются миллионами деталей-операций (ДОП).

Как следствие, известные на российском рынке MES-системы (ФОБОС, PolyPlan, YSB.Enterprise.MesIT-Enterprise APS/MES, APS/MES Preactor и др.) для расчета производственных расписаний используют эвристические методы, основанные на схемах ветвления с функциями предпочтения. Эти методы характеризуются, с вычислительной точки зрения, недостаточно высокой эффективностью, чтобы “накрыть” единым расписанием все машиностроительное предприятие, и применяются для небольших производств цехового уровня. Например, по данным публикации [2] время расчета расписания объемом 100 тысяч операций средствами MES на платформе “1С: Предприятие” составляет 23 часа.

2. Конкурентный метод синтеза производственных расписаний

В системе “САПФОРД” планирование производства осуществляется на основе единого для всего предприятия ПР, оптимизированного по критерию минимизации затрат, связанных с обслуживанием незавершенного производства и штрафами за задержки выполнения заказов. Оперативные планы це-

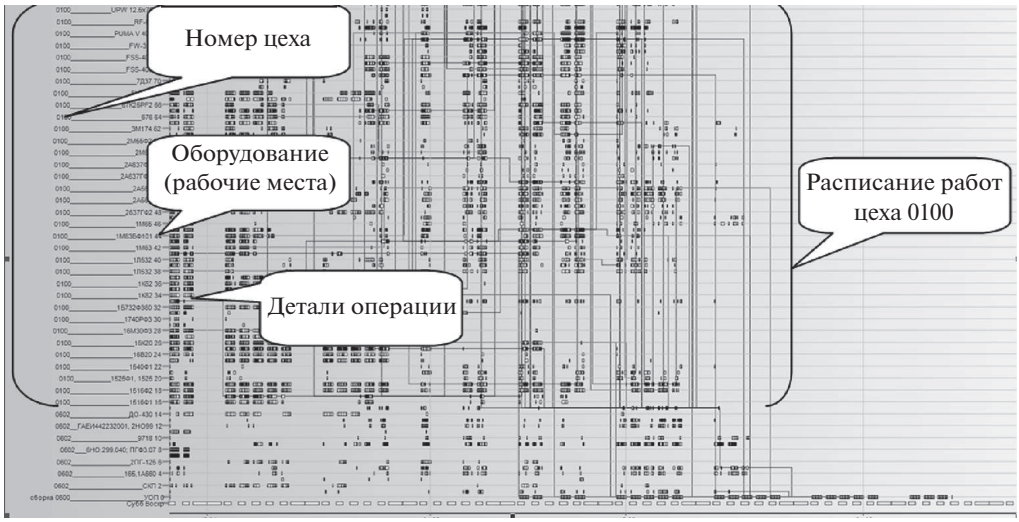


Рис. 1. План работ цеха в составе плана предприятия.

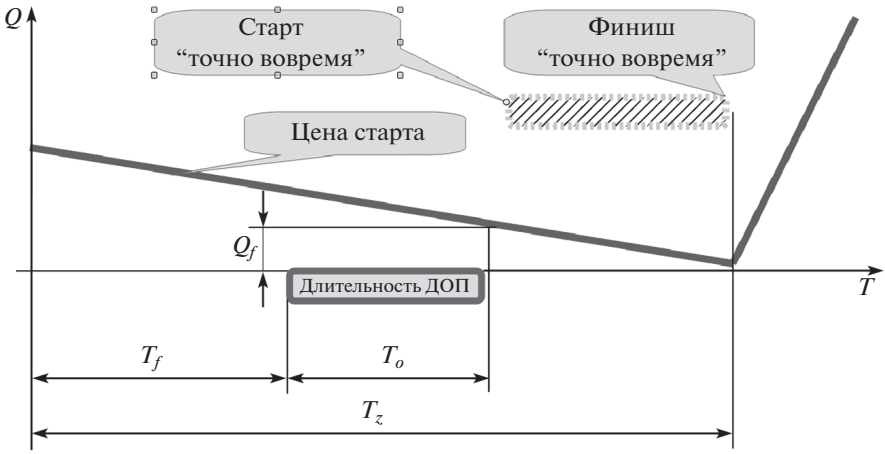


Рис. 2. Оценка срочности ДОП.

хов и участков представляют собой взаимно согласованные фрагменты этого расписания (рис. 1).

В основу алгоритмов синтеза ПР положен принцип декомпозиции общей задачи планирования на подзадачи выполнения деталей-операций и взаимного согласования их критериев оптимальности [3]. В качестве критерия оптимальности ПР предложены те составляющие рентабельности производства, которые в наибольшей степени определяются качеством планирования, т.е. своевременность выполнения заказов и минимизация незавершенного производства. Срыв сроков выполнения ДОП ведет к штрафным санкциям со стороны заказчика, а преждевременное выполнение — к росту стоимости незавершенного производства.

В [4] предложена функция зависимости производственных затрат Q от времени T_f запуска партии ДОП (рис. 2) в виде сплайна (1):

$$Q = \begin{cases} k\left(T_z - T_f - T_o\right), & T_f + T_o < T_z, \\ u\left(T_f + T_o - T_z\right), & T_f + T_o \geq T_z. \end{cases} \tag{1}$$

где

k – коэффициент стоимости преждевременного начала работы;

T_f – фактическое время запуска (начала технологической операции);

T_z – предельно допустимое время выполнения работы, превышение которого ведет к срыву сроков выполнения заказа;

u – коэффициент стоимости задержки технологической операции;

T_o – длительность операции (штучно-калькуляционное время).

Пусть $R = \{r_1, \ldots, r_n\}$ – множество ДОП. При размещении ДОП $r_i \in R$ по рабочим местам для каждой r_i задается целевая функция (1) зависимости прироста $_\Delta q_i$ цены q_i производства от величины задержки или преждевременного выполнения работы и вычисляется время t_i^z выполнения операции, при котором не нарушается срок сдачи изделия, а время “пролеживания” детали до начала операции минимально.

Согласование критериев подзадач осуществляется методом взаимных штрафов [4], суть которого заключается в том, что конкурирующие в очередях ДОП штрафуют друг друга приращениями своих оценок при пропуске вперед конкурента. Первой в очереди оказывается ДОП с наименьшей суммой собственной критериальной оценки и штрафов за задержку конкурентов.

Алгоритм формирования ПР включает моделирование попарных перестановок конкурирующих ДОП r_i, r_j и расчет величин прироста $_\Delta q_i, {}_\Delta q_j$ целевых функции q_i, q_j (1) для задерживаемых работ. Значения $_\Delta q_j$ начисляются к цене q_i ДОП r_i в качестве штрафа за задержку r_j при пропуске вперед ДОП r_i. На рабочее место распределяется ДОП, имеющая наименьшее значение суммы собственной локальной оценки q_i и начисленных штрафов $_\Delta q_j$. Цикл повторяется для оставшихся нераспределенных работ. Поскольку в данном алгоритме отсутствуют процедуры ветвлений по альтернативам, время расчета производственного расписания имеет линейную зависимость от размера задачи, что обуславливает высокую скорость расчетов. Например ПР, включающее 36078 деталей-операций, фрагмент которого приведен на рис. 1, строится за 27 секунд.

3. Перестройка расписаний при возникновении сбоев в работе служб производства и снабжения

При позаказном производстве состав производственной номенклатуры полностью определяется составом выпускаемых изделий, что резко ограничивает возможности создания заделов для компенсации задержек поставок деталей и полуфабрикатов между смежными цехами и участками. Эти задержки являются следствием различной периодичности запуска–выпуска в смежных цехах, различных величин размеров партий, перебоев или непола-

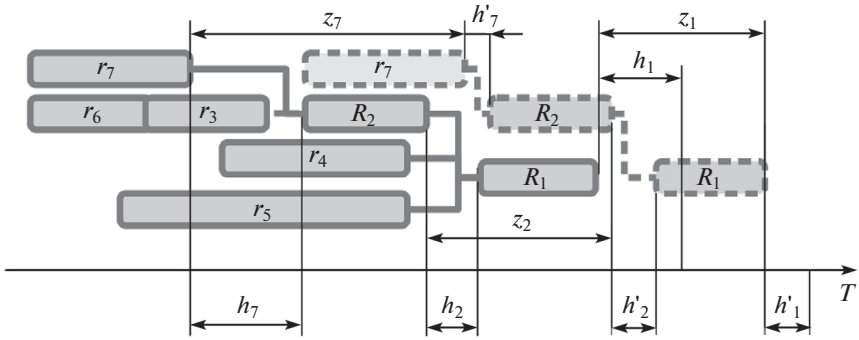


Рис. 3. Задержка сборочных операций при задержке входящих деталей.

док на рабочих местах, возникновения брака, а также нарушений сроков поставки материалов и комплектующих от контрагентов предприятия. Поэтому планировщик должен оперативно перестраивать порядок выполнения работ, чтобы переключать производство на заказы, которые могут быть выполнены с минимальными потерями прибыли предприятия.

Рассмотрим зависимость смещения критичных сроков выполнения ДОП от внеплановых задержек. При задержке любой ДОП задерживаются и все последующие ДОП вплоть до конечной сборочной единицы. Частично или полностью задержки компенсируются запасами времени h_j, предусмотренными при расчете производственных циклов изделий (задержки сборочных работ начинаются после исчерпания межоперационных запасов времени). Например, если изделие R_1 (рис. 3) включает в себя сборку R_2 и детали r_4, r_5, $(r_4, r_5, R_2) \subseteq R_1$, а изделие R_2 включает детали r_3, r_6, r_7, $(r_3, r_6, r_7) \subseteq R_2$, то при задержке работы r_7 на время z_7 сборочная операция изделия R_2 задерживается на время $z_2 = z_7 - h_7 + h'_7$, а сборочная операция изделия R_1 — на время $z_1 = z_7 - h_7 + h'_7 - h_2 + h'_2$, где h_2, h'_2, h_7, h'_7 — запасы времени на выполнение работ r_2, r_7 до их задержки и после корректировки расписания.

Поскольку задержки z_i могут происходить одновременно в разных точках производственного цикла изделия, то итоговая задержка Z_v изготовления изделия R_v определится максимальной длительностью цепи φ_i, связывающей ДОП r_i с финишной операцией изделия R_v, $\varphi_i = (r_i \dots R_v)$:

$$Z_v = \max\left[z_i - \sum_{k=1}^{n_i-1}\left(h_k - h'_k\right)\right], \tag{2}$$

где

n_i – количество ДОП цепи φ_i;

h_k, h'_k – запасы времени на выполнение ДОП $r_k \in \varphi_i$ в исходном и в скорректированном расписаниях.

Задержка Z_v (2) выпуска изделия R_v снижает актуальность (срочность) выполнения всех остальных работ, входящих в его ПЦ, что приводит к отсрочке $_\nabla t_j$ критичного времени выполнения ДОП r_j, принадлежащих R_v, но

относящихся к другим цепям $\varphi_j = (r_j \dots R_v)$:

$$(3) \qquad {}_{\nabla}t_j = \max\left[z_i - \sum_{k=i}^{n_i-1}\left(h_k - h'_k\right)\right] - \sum_{m=j}^{n_j-1}(h'_m - h_m), \quad r_j \in R_v, \quad r_j \notin \varphi_i,$$

где

n_i – количество ДОП цепи φ_j;

h_m, h'_m – запасы времени на выполнение ДОП $r_m \in \varphi_j$ в исходном и в скорректированном расписаниях.

Из (1), (2) следует, что отсрочка ${}_{\nabla}t_j$ ДОП r_j (3) приводит к изменению значения критериальной оценки q_j^* (4):

$$(4) \qquad q_j^* = \begin{cases} k\left(t_j^z + {}_{\nabla}t_j - h_j - t_j^f - t_j^o\right), & t_j^f + t_j^o < t_j^z + {}_{\nabla}t_j - h_j, \\ u\left(t_j^f - {}_{\nabla}t_j - h_j - t_j^z + t_j^o\right), & t_j^f + t_j^o \geq t_j^z + {}_{\nabla}t_j - h_j. \end{cases}$$

При выборе ДОП для размещения на рабочем месте моделируются попарные перестановки $r_j \to r_k$ и $r_k \to r_j$, $r_j \in R_v$, $r_k \in R_\omega$ с расчетом изменений оценок q_k и q_j:

$$(5) \qquad {}_{\Delta}q_j = \begin{cases} k\left(t_j^z + {}_{\nabla}t_j - t_j^f - t_j^o - t_k^o\right), & t_j^f + t_j^o + t_k^o < t_j^z + {}_{\nabla}t_j - h_j, \\ u\left(t_j^f - {}_{\nabla}t_j - t_j^z + t_j^o + t_k^o\right), & t_j^f + t_j^o + t_k^o \geq t_j^z + {}_{\nabla}t_j - h_j, \end{cases}$$

$$(6) \qquad {}_{\Delta}q_k = \begin{cases} k\left(t_k^z + {}_{\nabla}t_k - t_k^f - t_k^o - t_j^o\right), & t_k^f + t_k^o + t_j^o < t_k^z + {}_{\nabla}t_k - h_j, \\ u\left(t_k^f - {}_{\nabla}t_k - t_k^z + t_k^o + t_j^o\right), & t_k^f + t_k^o + t_j^o \geq t_k^z + {}_{\nabla}t_k - h_j, \end{cases}$$

где

${}_{\Delta}q_j$ – цена задержки r_j на время t_k^o при первоочередном распределении r_k, $r_k \to r_j$;

${}_{\Delta}q_k$ – цена задержки r_k на время t_j^o при первоочередном распределении r_j, $r_j \to r_k$;

t_j^o, t_k^o – длительность ДОП r_j, r_k.

К первоочередному распределению назначается ДОП r_j с наименьшей оценкой C_j:

$$(7) \qquad C_j = q_j + \max\left({}_{\Delta}q_k\right), \quad r_j \to r_k,$$

где

C_j – системная оценка цены старта ДОП r_j с момента времени t_j^f,

q_j – локальная оценка цены старта ДОП r_j с момента времени t_j^f.

Для ДОП r_j, имеющих достаточные запасы времени h_j, т.е. $t_j^f + t_j^o < t_j^z + {}_{\nabla}t_j - h_j$, отсрочка ${}_{\nabla}t_j$ приводит к росту стоимости незавершенного

производства, поэтому штрафы ${}_{\Delta}q_j$ за их задержку (5) имеют отрицательные значения, тем самым способствуя более срочным ДОП занять рабочие места.

Отсрочка отстающих ДОП r_j, для которых $t_k^f + t_k^o + t_j^o \geq t_k^z + {}_{\nabla}t_k$, создает запас времени h_j, а задержка r_j при $t_j^f + t_j^o < t_j^z + {}_{\nabla}t_j - h_j$ лишь уменьшает значение q_i и актуальность работы r_j, поскольку штрафы за задержку отсроченных работ (5) уменьшаются относительно штрафов (6) от конкурирующих ДОП $r_k \in R_\omega$.

Таким образом, смещения критичных сроков выполнения ДОП $r_i \in R_v$ от внеплановых задержек снижает конкурентность работ $r_j \in R_v$, $r_j \notin (r_i \ldots R_v)$ при распределении на рабочие места, и вместо них распределяются ДОП $r_k \in R_\omega$, относящиеся к другим заказам и имеющие лучшие оценки C_k (7). Это позволяет использовать конкурентный метод [3] синтеза производственных расписаний для синхронизации оперативных планов цехов при возникновении задержек производства и снабжения от ранее установленных сроков.

Алгоритм формирования и корректировки производственного плана.

1. Расчет длительности ПЦ изделий от контрактных сроков выполнения заказов к датам начальных работ и вычисление критичных сроков t_z выполнения ДОП r_j.
2. Конкурентное размещение работ по рабочим местам [3]:

   2.1. Выбор конкурирующих работ r_i, r_j;

   2.2. Моделирование первоочередного распределения ДОП r_i и размещение на оставшемся ресурсе времени рабочих мест r_j. Вычисление из (5) штрафа ${}_{\Delta}q_j$ за задержку работы r_j и цены C_i (7) первоочередного распределения r_i;

   2.3. Моделирование первоочередного распределения ДОП r_j и размещение на оставшемся ресурсе времени рабочих мест r_i. Вычисление штрафа ${}_{\Delta}q_i$ (6) и цены C_j;

   2.4. Исключение из конкурентов на первоочередное распределение ДОП r_j с более высокой оценкой ($C_j > C_i$);

   2.5. Выполнение шагов 2.1–2.4 для ДОП r_i с оставшимися конкурентами;

   2.6. Распределение на рабочее место ДОП с наименьшей ценой (7);

   2.7. Выполнение 2.1.–2.7. до распределения всех оставшихся ДОП.

3. Формирование составов первоочередных работ цехов.
4. Обновление множества ДОП на основе данных диспетчерского учета выполненных работ. Исключение из плана выполненных работ. Если все работы выполнены, то конец.
5. Если выполнение работ соответствует плану, то переход к п. 4.
6. Корректировка сроков выполнения задержанных ДОП или сроков ожидаемого поступления комплектующих, полуфабрикатов от предприятий-смежников;
7. Корректировка сроков выполнения заказов и пересчет значений t_z, q_j;
8. Переход к п. 2.

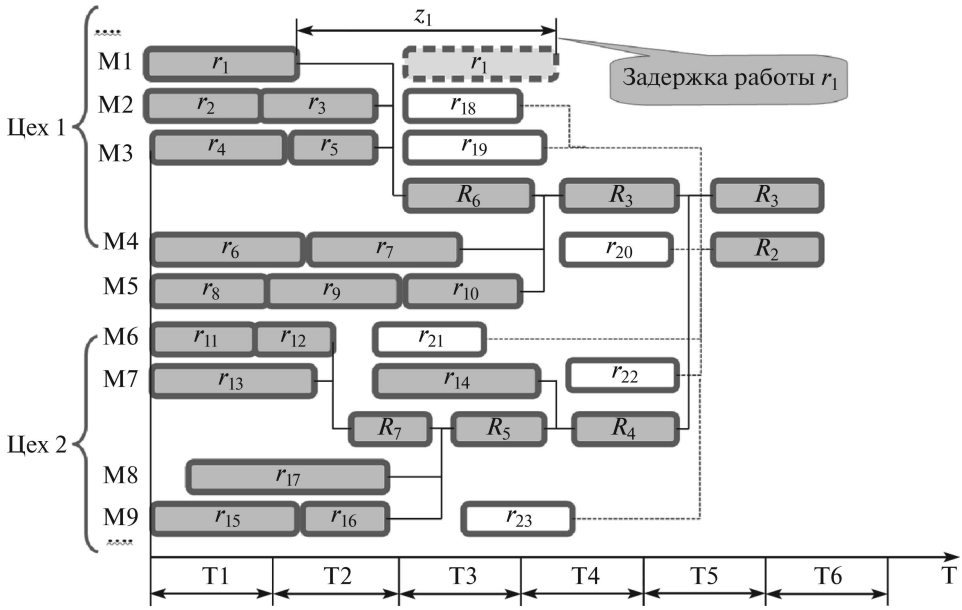


Рис. 4. Расписание работ на периоды T1–T6.

Количество корректировок плана завода (пп. 6, 7, 8 алгоритма) зависит от стабильности процессов производства и снабжения.

Рассмотрим *пример*. Пусть имеется производственное расписание π по изготовлению изделий R_1 и R_2 (рис. 4). Оба изделия изготавливаются в смежных цехах 1 и 2. Изделие R_1 включает узлы R_3 и R_4 ($(R_3, R_4) \subseteq R_1$), а изделие R_2 – детали r_{18}–r_{23}. В свою очередь $(r_8, r_9, r_{10}, R_6) \subseteq R_3$, $(r_{14}, R_5) \subseteq R_4$, $(r_{15}, r_{16}, r_{17}, R_7) \subseteq R_5$, $(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5) \subseteq R_6$, $(r_{11}, r_{12}, r_{13}) \subseteq R_7$. Горизонт планирования включает периоды времени T1–T6. В цехе 1 на рабочем месте M1 выполнение r_1 задерживается на время z_1. Требуется перестроить работу цехов и построить производственное расписание π^* (рис. 5), обеспечивающее первоочередное выполнение работ, относящихся к наиболее актуальным заказам, из числа тех, которые не имеют задержек в производстве и снабжении.

В соответствии с п. 1–5 алгоритма формируем расписание π на период T1–T6. Конкурентность ДОП $r_i \in R_1$ и $r_j \in R_2$ рассчитывается исходя из контрактных сроков выполнения заказов R_1 и R_2 до конца периода T6. Длительность ПЦ изделия R_1 превышает длительность ПЦ заказа R_2, и критичное время выполнения ДОП r_2–r_{16} наступает раньше, чем для r_{18}–r_{23} заказа R_2. Поэтому оценки q_2–q_{16} превышают значения q_{18}–q_{23}, и ДОП r_2–r_{16} распределяются на рабочие места M1–M9 раньше, чем ДОП r_{18}–r_{23} изделия R_2.

Задержка выполнения r_1 ведет к переносу срока сдачи R_1 (п. 6 алгоритма) на конец периода T7. Перенос срока сдачи R_1 приводит к пересчету (п. 7 алгоритма) критичных сроков $r_i \subseteq R_1$ и критериальных оценок q_2–q_{16}. О задержке z_1 становится известно в конце периода T1, когда уже были выполнены ДОП r_2 и r_{11}. Поэтому на период T2 планируется завершение работ r_4, r_6, r_{12}, r_{13}, r_{15}, начатых в период T1, а работы r_3, r_5, r_7, r_9, r_{10}, r_{14}, r_{16},

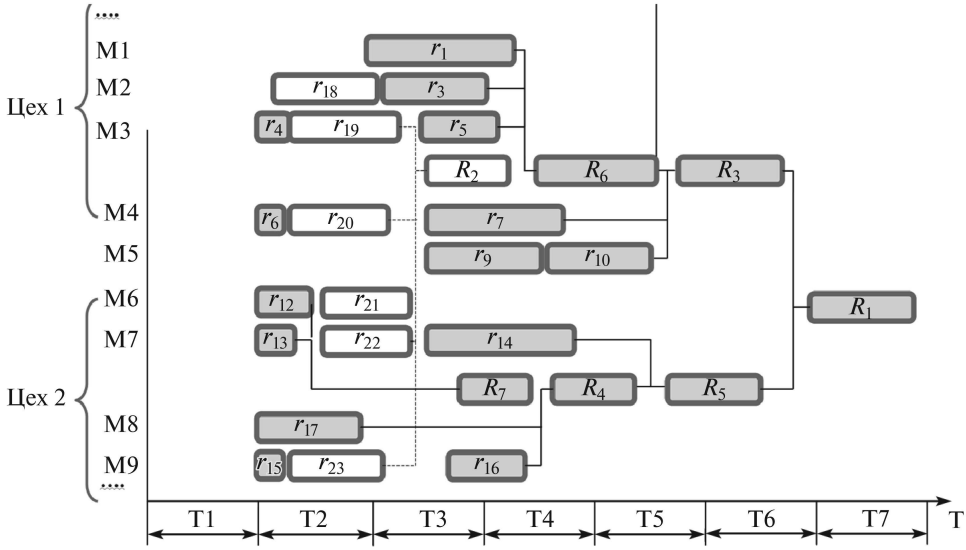


Рис. 5. Расписание работ на периоды T2–T7.

r_{17} получают “отсрочки” критичных сроков выполнения, что в свою очередь снижает их конкурентные оценки q_3, q_5, q_7, q_9, q_{10}, q_{14}, q_{16}, q_{17}.

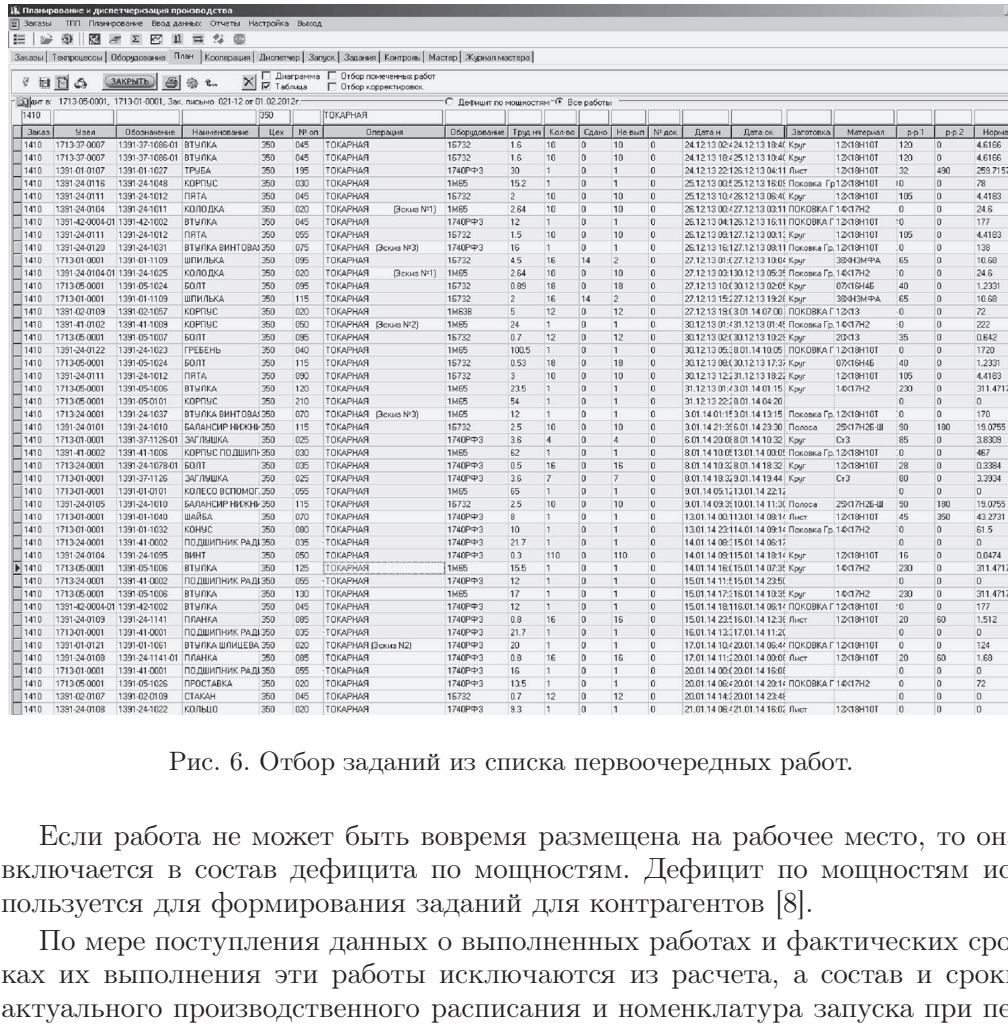
При повторном распределении ДОП по рабочим местам (п. 2 алгоритма) r_3, r_5, r_7, r_9, r_{10}, r_{14}, r_{16}, r_{17} уступают очередь работам r_{18}–r_{23}, относящимся к изделию R_2. В итоге получаем расписание π' на период T2–T7, в котором план работы цеха 2 приведен в соответствие с изменениями в работе цеха 1.

4. Непрерывное планирование

Динамика позаказного производства обуславливает необходимость ежедневного пересчета производственных расписаний по нескольким вариантам исходных данных (предполагаемые сроки поступления материалов, комплектующих и полуфабрикатов от смежников, непредвиденные задержки производства, смена приоритетов заказов и т.д.).

После проведения корректировок исходных данных выполняется перерасчет ПР, анализируются результаты и, если прогноз по срокам выполнения заказов оказывается приемлемым, формируется номенклатура запуска первоочередных работ для каждого цеха и составляются производственные задания участкам (рис. 6).

Формирование производственных партий также ведется на основе оценки конкурентности ДОП и группирования деталей с близкими оценками срочности их изготовления [5], а при интеграции производственных циклов с плановыми ремонтами оборудования используются оценки срочности ремонта, которые соотносятся с оценками срочности (напряженности) технологических операций [6]. Отсутствие в конкурентном методе синтеза ПР процедур ветвления обеспечивает возможность планирования производства завода в режиме реального времени с многократными корректировками исходных данных о режимах работы предприятия [7].



Планирование и диспетчеризация производства

Заказы ТПП Планирование Ввод данных Отчеты Настройка Выход

Заказы | Техпроцессы | Оборудование | План | Кооперация | Диспетчер | Запуск | Задания | Контроль | Мастер | Журнал мастера

ЗАКРЫТЬ | Диаграмма | Таблица | Отбор помеченных работ | Отбор корректировок

Лист в: 1713-05-0001, 1713-01-0001, Зак. письмо 021-12 от 01.02.2012г. | Дефицит по мощностям | Все работы

1410 | 350 | ТОКАРНАЯ

Заказ	Узел	Обозначение	Наименование	Цех	№ оп	Операция	Оборудование	Труд ноч	Кол-во	Сдано	Не вып	N1 док	Дата н	Дата ок	Заготовка	Материал	р-р 1	р-р 2	Норма
1410	1713-37-0007	1391-37-1086-01	ВТУЛКА	350	045	ТОКАРНАЯ	16732	1.6	10	0	10	0	24.12.13	02.12.13	Круг	12Х18Н10Т	120	0	4.6166
1410	1713-37-0007	1391-37-1086-01	ВТУЛКА	350	045	ТОКАРНАЯ	16732	1.6	10	0	10	0	24.12.13	18.12.13	Круг	12Х18Н10Т	120	0	4.6166
1410	1391-01-0107	1391-01-1027	ТРУБА	350	195	ТОКАРНАЯ	1740Ф*Э	30	1	0	1	0	24.12.13	22.12.13	Лист	12Х18Н10Т	32	490	259.7157
1410	1391-24-0116	1391-24-1048	КОРПУС	350	030	ТОКАРНАЯ	1М65	15.2	1	0	1	0	25.12.13	00.12.13	Поковка Гр	12Х18Н10Т	10	0	78
1410	1391-24-0111	1391-24-1012	ПЯТА	350	045	ТОКАРНАЯ	16732	2	10	0	10	0	25.12.13	10.12.13	Круг	12Х18Н10Т	105	0	4.4183
1410	1391-24-0104	1391-24-1011	КОЛОДКА	350	020	ТОКАРНАЯ	(Эскиз №1)	1М65	2.64	10	0	10	26.12.13	00.12.13	ПОКОВКА Г	14Х17Н2	0	0	24.6
1410	1391-42-0004-01	1391-42-1002	ВТУЛКА	350	045	ТОКАРНАЯ	1740Ф*Э	12	1	0	1	0	26.12.13	04.12.13	ПОКОВКА Г	12Х18Н10Т	10	0	177
1410	1391-24-0111	1391-24-1012	ПЯТА	350	055	ТОКАРНАЯ	16732	1.5	10	0	10	0	26.12.13	09.12.13	Круг	12Х18Н10Т	105	0	4.4183
1410	1391-24-0120	1391-24-1031	ВТУЛКА ВИНТОВА	350	075	ТОКАРНАЯ	(Эскиз №3)	1740Ф*Э	16	1	0	1	26.12.13	16.12.13	Поковка Гр.	12Х18Н10Т	0	0	138
1410	1713-01-0001	1391-01-1109	ШПИЛЬКА	350	095	ТОКАРНАЯ	16732	4.5	16	14	2	0	27.12.13	01.12.13	38ХНЗМФА	38ХНЗМФА	65	0	10.68
1410	1391-24-0104-01	1391-24-1025	КОЛОДКА	350	020	ТОКАРНАЯ	(Эскиз №1)	1М65	2.64	10	0	10	27.12.13	03.12.13	Поковка Гр.	14Х17Н2	0	0	24.6
1410	1713-05-0001	1391-05-1024	БОЛТ	350	095	ТОКАРНАЯ	16732	0.89	18	0	18	0	27.12.13	10.12.13	Круг	07Х16Н6	40	0	1.2331
1410	1713-01-0001	1391-01-1109	ШПИЛЬКА	350	115	ТОКАРНАЯ	16732	2	16	14	2	0	27.12.13	15.12.13	Круг	38ХНЗМФА	65	0	10.68
1410	1391-02-0109	1391-02-1057	КОРПУС	350	020	ТОКАРНАЯ	1М638	5	12	0	12	0	27.12.13	18.12.13	ПОКОВКА Г	12Х13	0	0	72
1410	1391-41-0102	1391-41-1009	КОРПУС	350	050	ТОКАРНАЯ	(Эскиз №2)	1М65	24	1	0	1	30.12.13	01.01.14	Поковка Гр.	14Х17Н2	0	0	222
1410	1713-05-0001	1391-05-1007	БОЛТ	350	095	ТОКАРНАЯ	16732	0.7	12	0	12	0	30.12.13	02.01.14	Круг	20Х13	35	0	0.642
1410	1391-24-0122	1391-24-1023	ГРЕБЕНЬ	350	040	ТОКАРНАЯ	1М65	100.5	1	0	1	0	30.12.13	05.01.14	ПОКОВКА Г	12Х18Н10Т	0	0	1720
1410	1713-05-0001	1391-05-1024	БОЛТ	350	115	ТОКАРНАЯ	16732	0.53	18	0	18	0	30.12.13	08.01.14	Круг	07Х16Н6	40	0	1.2331
1410	1391-24-0111	1391-24-1012	ПЯТА	350	090	ТОКАРНАЯ	16732	3	10	0	10	0	30.12.13	12.01.14	Круг	12Х18Н10Т	105	0	4.4183
1410	1713-05-0001	1391-05-1006	ВТУЛКА	350	120	ТОКАРНАЯ	1М65	23.5	1	0	1	0	31.12.13	01.01.14	Круг	14Х17Н2	230	0	311.4717
1410	1713-05-0001	1391-05-0101	КОРПУС	350	210	ТОКАРНАЯ	1М65	54	1	0	1	0	31.12.13	22.12.13	01.01.14	04.01.14	0	0	0
1410	1713-24-0001	1391-24-1037	ВТУЛКА ВИНТОВАЯ	350	020	ТОКАРНАЯ	(Эскиз №3)	1М65	12	1	0	1	03.01.14	01.01.14	03.01.14	13.01.14	Поковка Гр.	12Х18Н10Т	0	170
1410	1391-24-0101	1391-24-1010	БАЛАНСИР НИЖНИ	350	115	ТОКАРНАЯ	16732	2.5	10	0	10	0	03.01.14	21.12.13	06.01.14	23.12.13	Полоса	25Х17Н2Б-Ш	90	180	19.0755
1410	1713-01-0001	1391-37-1126-01	ЗАГЛУШКА	350	025	ТОКАРНАЯ	1740Ф*Э	3.6	4	0	4	0	6.01.14	20.08.13	01.14	10.32	Круг	Ст3	85	0	3.8309
1410	1391-41-0002	1391-41-1006	КОРПУС ПОДШИПН	350	030	ТОКАРНАЯ	1М65	62	1	0	1	0	8.01.14	10.01.13	01.14	00.01	Поковка Гр.	12Х18Н10Т	0	0	467
1410	1713-24-0001	1391-24-1078-01	БОЛТ	350	035	ТОКАРНАЯ	1740Ф*Э	0.5	16	0	16	0	8.01.14	10.32	8.01.14	18.32	Круг	12Х18Н10Т	28	0	0.3384
1410	1713-01-0001	1391-37-1126	ЗАГЛУШКА	350	025	ТОКАРНАЯ	1740Ф*Э	3.6	7	0	7	0	9.01.14	18.32	9.01.14	19.44	Круг	Ст3	60	0	3.3934
1410	1713-01-0001	1391-01-0101	КОЛЕСО ВСПОМОГ	350	055	ТОКАРНАЯ	1М65	65	1	0	1	0	9.01.14	05.12.13	13.01.14	22.12			0	0	0
1410	1391-24-0105	1391-24-1010	БАЛАНСИР НИЖНИ	350	115	ТОКАРНАЯ	16732	2.5	10	0	10	0	9.01.14	09.35	10.01.14	11.30	Полоса	25Х17Н2Б-Ш	90	180	19.0755
1410	1713-01-0001	1391-01-1040	ШАЙБА	350	070	ТОКАРНАЯ	1740Ф*Э	8	1	0	1	0	13.01.14	00.13.01	14.08.14	Лист	12Х18Н10Т	45	350	43.2731
1410	1713-01-0001	1391-01-1032	КОНУС	350	080	ТОКАРНАЯ	1740Ф*Э	10	1	0	1	0	13.01.14	23.14.01	14.09.14	Поковка Гр.	14Х17Н2	0	0	61.5
1410	1713-24-0001	1391-41-0002	ПОДШИПНИК РАДИ	350	035	ТОКАРНАЯ	1740Ф*Э	21.7	1	0	1	0	14.01.14	08.15.01	14.06.14				0	0	0
1410	1391-24-0104	1391-24-1095	ВИНТ	350	050	ТОКАРНАЯ	1740Ф*Э	0.3	110	0	110	0	14.01.14	09.15.01	14.19.14	Круг	12Х18Н10Т	16	0	0.0474
1410	1713-05-0001	1391-05-1006	ВТУЛКА	350	125	ТОКАРНАЯ	1М65	15.5	1	0	1	0	14.01.14	16.15.01	14.07.35	Круг	14Х17Н2	230	0	0	311.4717
1410	1713-24-0001	1391-41-0002	ПОДШИПНИК РАДИ	350	055	ТОКАРНАЯ	1740Ф*Э	12	1	0	1	0	15.01.14	11.15.01	14.23.14				0	0	0
1410	1713-05-0001	1391-05-1006	ВТУЛКА	350	130	ТОКАРНАЯ	1М65	17	1	0	1	0	15.01.14	12.16.01	14.10.35	Круг	14Х17Н2	230	0	0	311.4717
1410	1391-42-0004-01	1391-42-1002	ВТУЛКА	350	045	ТОКАРНАЯ	1740Ф*Э	12	1	0	1	0	15.01.14	18.16.01	14.08.14	ПОКОВКА Г	12Х18Н10Т	10	0	177
1410	1391-24-0109	1391-24-1141	ПЛАНКА	350	085	ТОКАРНАЯ	1740Ф*Э	0.8	16	0	16	0	15.01.14	23.16.01	14.12.35	Лист	12Х18Н10Т	20	60	1.512
1410	1713-01-0001	1391-41-0001	ПОДШИПНИК РАДИ	350	035	ТОКАРНАЯ	1740Ф*Э	21.7	1	0	1	0	16.01.14	13.17.01	14.11.20				0	0	0
1410	1391-01-0121	1391-01-1061	ВТУЛКА ШЛИЦЕВА	350	020	ТОКАРНАЯ	(Эскиз N2)	1740Ф*Э	20	1	0	1	17.01.14	10.42	20.01.14	06.44	ПОКОВКА Г	12Х18Н10Т	0	0	124
1410	1391-24-0108	1391-24-1141-01	ПЛАНКА	350	085	ТОКАРНАЯ	1740Ф*Э	0.8	16	0	16	0	17.01.14	11.22	20.01.14	00.00	Лист	12Х18Н10Т	20	60	1.69
1410	1713-01-0001	1391-41-0001	ПОДШИПНИК РАДИ	350	055	ТОКАРНАЯ	1740Ф*Э	16	1	0	1	0	20.01.14	00.12	20.01.14	16.08			0	0	0
1410	1713-05-0001	1391-05-1026	ПРОСТАВКА	350	020	ТОКАРНАЯ	1740Ф*Э	13.5	1	0	1	0	20.01.14	06.42	20.01.14	20.14	ПОКОВКА Г	14Х17Н2	0	0	72
1410	1391-02-0107	1391-02-0109	СТАКАН	350	045	ТОКАРНАЯ	16732	0.7	12	0	12	0	20.01.14	14.32	20.01.14	23.45			0	0	0
1410	1391-24-0108	1391-24-1022	КОЛЬЦО	350	020	ТОКАРНАЯ	1740Ф*Э	8.3	1	0	1	0	21.01.14	06.42	21.01.14	18.02	Лист	12Х18Н10Т	0	0	0

Рис. 6. Отбор заданий из списка первоочередных работ.

Если работа не может быть вовремя размещена на рабочее место, то она включается в состав дефицита по мощностям. Дефицит по мощностям используется для формирования заданий для контрагентов [8].

По мере поступления данных о выполненных работах и фактических сроках их выполнения эти работы исключаются из расчета, а состав и сроки актуального производственного расписания и номенклатура запуска при перерасчетах меняются. Тем самым производственное планирование ведется непрерывно, с каждым днем пополняясь новыми данными, изменениями в портфеле заказов, сведениями о фактических сроках поставки материалов, комплектующих, работ смежников и т.п. Высокая скорость расчетов обеспечивает выполнение производственного планирования в режиме реального времени. Например, ПР Сафоновского электромашиностроительного завода (концерн “РУСЭЛПРОМ”), включающее более 50 тысяч операций, формируется за 2–3 мин, а расписание производства ЦКБМ (“РОСАТОМ”), включающее более 100 тысяч операций, формируется за 5–4 мин.

5. Заключение

Предложенный метод синхронизации планов производственных подразделений обеспечивает оперативную, в режиме реального времени, адаптацию плановых показателей к воздействиям внутренних и внешних факторов, задерживающих ход производства. Высокая скорость расчета номенклатуры первоочередных работ обеспечивает возможность непрерывного планирова-

ния производства. Результаты статьи реализованы в системе “САПФОРД” (www.sapford.ru.) и могут быть использованы планово-диспетчерскими службами машиностроительных предприятий с позаказным характером производства без ограничений по объемам номенклатуры запуска и горизонту планирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лазарев А.А. и др.* Теория расписаний. Задачи и алгоритмы. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2011.
2. *Артемов А.А.* Цифровое производство с использованием систем Appius–PLM и 1С: MES на платформе “1С: Предприятие” // Журн. “САПР и Графика” 2019. № 9. С. 18–23.
3. *Саратов А.А.* Конкурентный метод синтеза производственных расписаний // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2014. № 3. С. 104–110.
4. *Саратов А.А.* Согласование производственных циклов методом взаимных штрафов // Автоматизация процессов управления. 2019. № 1. С. 66–73.
5. *Саратов А.А.* Конкурентный метод расчета партий запуска в позаказном производстве // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2018. № 8. С. 179–184.
6. *Саратов А.А.* Планирование планово-предупредительных ремонтов оборудования при автоматизированном синтезе производственных расписаний // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2017. № 12. С. 217–225.
7. *Кузьмин А.М., Саратов А.А.* Оптимизация номенклатуры запуска в позаказном производстве // Тез. 12 Всеросс. конф. молодых ученых и специалистов “Будущее машиностроения России”. Москва, 2016. С. 41–45.
8. *Саратов А.А.* Оптимизация структуры кооперации в позаказном производстве // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2018. № 6. С. 435–443.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 20.02.2020

После доработки 28.08.2020

Принята к публикации 10.09.2020

Автоматика и телемеханика, № 3, 2021

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2021 г. Ю.С. ПОПКОВ, д-р техн. наук (popkov@isa.ru)
(Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, Москва;
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
Ю.А. ДУБНОВ (yury.dubnov@phystech.edu)
(Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, Москва;
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, Москва),
А.Ю. ПОПКОВ, канд. техн. наук (apopkov@isa.ru)
(Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, Москва)

ЭНТРОПИЙНО-РАНДОМИЗИРОВАННОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ[1]

Предложен новый метод рандомизированного проектирования, основанный на энтропийной оптимизации случайных матриц-проекторов (ERP-метод). Введено понятие индикатора компактности матрицы данных, который сохраняется в матрицах-проекциях. Сформулирован алгоритм ERP в виде задачи условной максимизации энтропийного функционала, заданного на функциях плотности распределения вероятностей матриц-проекторов. Рассмотрен дискретный вариант этой задачи, получены условия существования и единственности ее положительного решения. Развиты процедуры реализации энтропийно-оптимальных матриц-проекторов путем сэмплирования функций плотности распределения вероятностей (ПРВ).

Ключевые слова: случайное проектирование, сжатие и растяжение матрицы данных, матрицы-проекторы, индикатор компактности, сэмплирование функции плотности, дисперсионные множества, интерквартильные множества.

DOI: 10.31857/S0005231021030090

1. Введение

Процедуры машинного обучения, ориентированные на задачи классификации, кластеризации и прогнозирования, оперируют данными, представленными в виде матриц “объекты–признаки”, из которых формируются обучающие и тестовые коллекции данных. В процессе формирования обучающей

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-07-00470).

коллекции и в особенности в результате ее применения для решения упомянутых выше задач часто оказывается, что признаков недостаточно или слишком много, так же как и объектов. Другими словами, возникает необходимость в преобразованиях имеющейся матрицы данных в обучающую и тестовую коллекции.

Эти преобразования касаются как “сжатия”, так и “растяжения” матрицы данных. В терминах “объекты–признаки” возникает семейство задач “сжатия”: редукция количества признаков, редукция количества объектов и параллельная редукция того и другого; и семейство задач “растяжения”: расширение пространства признаков, увеличение количества данных (условных “объектов”) и параллельное увеличение того и другого. Если преобразования “сжатия” очень популярны в теории и практике машинного обучения, то преобразованиям “растяжения” уделяется не столь широкое внимание. Хотя исследователи, занимающиеся проблемами классификации и кластеризации, часто сталкивались с тем, что в указанных проблемах в маломерных пространствах признаков они неразрешимы или дают низкую точность, тогда как при увеличении размеров признакового пространства удается решить задачу с хорошей точностью. Аналогичные эффекты наблюдаются и при недостаточном количестве данных.

Проблемам “сжатия” матрицы данных посвящена обширная литература, некоторое представление о которой можно составить по обзорам [1–3] и монографиям [4–7].

Данная проблема вложена в более общую: приближение заданного набора многомерных точек маломерным аффинным многообразием [8]. Здесь следует отметить метод главных компонент (МГК) (Principal Component Analysis (PCA)) [9–11] и его робастные версии [12]. Следует отметить, что МГК применяется для матриц данных ограниченной размерности, так как вычисление собственных чисел является весьма трудоемкой задачей. Для многомерных задач применяют латентный семантический анализ ЛСА (Latent Semantic Analysis (LSA)), основанный на сингулярном разложении матрицы [13].

Редуцированные коллекции данных используются для решения различных задач машинного обучения. Поэтому было бы полезным в процедурах редукции учитывать проблемную ориентацию их использования. Этот эффект достигается в линейном дискриминационном анализе (ЛДА) (Linear Discriminant Analysis (LDA)) [14, 15].

Учет в процедурах редукции последующих применений “сжатых” матриц – тренд, который просматривается в задачах обработки больших объемов данных: распознавание по видеопотокам, классификация коллекций документов и др. В этих случаях применяется метод случайных проекций (RP), базирующийся на асимптотическом эффекте проецирования на пространство достаточно большой размерности, при котором в среднем сохраняется расстояние между точками (лемма Джонсона–Линденштраусса [16]). Экспериментально показано, что для генерации случайных матриц-проекторов может быть использовано стандартное нормальное распределение, а в некоторых случаях равномерное распределение [17–19].

Совсем иная ситуация, когда возникает необходимость в “растяжении” матрицы данных. Наиболее часто такая необходимость имеет место в задачах анализа таких данных, механизмы генерации которых неизвестны. Одной из форм представления данных являются многомерные временные ряды. Примером таких объектов являются процессы, происходящие в мозгу живых существ и, прежде всего, человека, макро-проявления которых фиксируются в виде электрических сигналов ЭЭГ [20]. Аналогичная ситуация имеет место при отображении биржевой деятельности в виде временных рядов котировок акций, валют, товаров и финансовых инструментов [21]. В последнее время весьма популярными становятся исследования электорального поведения населения во время выборов, предсказание которого осуществляется путем анализа ретроспективной динамики процессов выборов, отображенной в соответствующих временных рядах [22].

В этих работах применялись так называемые модельные конструкции временных рядов, а формирование признакового пространства осуществлялось последовательным отбором признаков с привлечением методов фильтрации [23], условной энтропии [24], взаимной информации “признак–класс” [25], кросс-энтропии Кульбака–Ляйблера [26].

Однако в некоторых задачах, частично упомянутых выше, использовать модель временного ряда трудно или невозможно из-за отсутствия знания о механизмах его происхождения. Поэтому важными являются попытки отображения компонент временного ряда в конечный набор чисел — признаков многомерного временного ряда. Полагая, что многомерный временной ряд кодирует свойства объекта, последнее означает, что формируется признаковое пространство объекта.

В [27] была предложена процедура безмодельного отображения временного ряда в конечную совокупность характеризующих его чисел, основанную на теории ε-сложности. В дальнейшем [28, 29] эта процедура была тестирована на задачах бинарной классификации одного класса ЭЭГ-сигналов в области психиатрии. Результаты этих исследований показали, с одной стороны, что технология ε-сложности может служить основой для безмодельной классификации временных рядов, а с другой — что для достижения удовлетворительной точности классификации возникает необходимость в увеличении размерности признакового пространства.

В данной работе развивается новый метод “сжатия” и “растяжения” матрицы с не вполне достоверными данными, основанный на построении рандомизированных матриц-проекторов (ERP-метод). Развит алгоритм оптимизации функции плотности распределения вероятностей (ПРВ) матриц-проекторов с учетом сохранения *индикатора компактности* матрицы данных. Алгоритм сформулирован в терминах условной максимизации энтропийного функционала, определенного на функциях ПРВ матриц-проекторов. При этом оптимальные оценки функций ПРВ соответствуют условиям максимальной неопределенности. Реализация рандомизированных матриц-проекторов осуществляется путем сэмплирования оптимальных ПРВ с использованием bootstrap-процедуры и метода Монте-Карло [30, 31]. Рассмотрены задачи рандомизированного проектирования с фиксированными эле-

ментами множества матриц-проекторов, на котором определена дискретная функция распределения вероятностей. Сформулирован алгоритм ее оптимизации и выбора полезных числовых характеристик множества случайных матриц-проекторов.

2. Формулировки задач энтропийно-рандомизированного проектирования

1. Точечно-множественное представление матрицы данных: индикатор компактности

Рассмотрим матрицу данных “объекты–признаки”:

$$U_{(m\times s)} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{(1)} \\ \cdots \\ \mathbf{u}^{(m)} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}^{(i)} = \left\{u_1^{(i)}, \ldots, u_s^{(i)}\right\} \in R^s, \quad i = \overline{1,m}. \tag{2.1}$$

Здесь m — количество объектов, s — количество признаков, R^s — признаковое пространство. Будем полагать, что элементы матрицы данных стандартизованы, т.е. $u_{ij} \in [0,1]$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,s}$.

Точечно-множественным отображением матрицы $U_{(m\times s)}$ в признаковом пространстве $R^s_{(m)}$ будем называть множество $\mathfrak{U}^s_m$ точек $\left\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(m)}\right\}$.

В качестве характеристики разброса точек в множестве $\mathfrak{U}^s_m$ определим *индикатор компактности* ρ_U как среднее арифметическое расстояний между точками[2]:

$$\rho_U = \frac{2}{m(m-1)} \sum_{(\alpha,\beta)=1,\, \alpha<\beta}^{m} \varrho\left(\mathbf{u}^{(\alpha)}, \mathbf{u}^{(\beta)}\right), \tag{2.2}$$

где $\varrho\left(\mathbf{u}^{(\alpha)}, \mathbf{u}^{(\beta)}\right)$ — расстояние между точками $\mathbf{u}^{(\alpha)}, \mathbf{u}^{(\beta)}$. Если элементы матрицы данных стандартизованы и выбрано евклидово расстояние, то

$$0 \leqslant \varrho\left(\mathbf{u}^{(\alpha)}, \mathbf{u}^{(\beta)}\right) \leqslant \sqrt{2} \qquad \text{для всех } (\alpha,\beta) = \overline{1,m},$$

$$0 \leqslant \rho_U \leqslant 1. \tag{2.3}$$

Определим следующие классы трансформаций матрицы данных:

- (mr)-*класс*: $U_{(m\times s)} \to Y_{(m\times r)}$, множество $\mathfrak{Y}^r_m$ в пространстве $R^r_{(m)}$;
- (ns)-*класс*: $U_{(m\times s)} \to B_{(n\times s)}$, множество $\mathfrak{B}^s_n$ в пространстве $R^s_{(n)}$;
- (nr)-*класс*: $U_{(m\times s)} \to Z_{(n\times r)}$, множество $\mathfrak{Z}^r_n$ в пространстве $R^r_{(n)}$.

[2] Могут быть выбраны и другие индикаторы, например максимальное расстояние между точками и др.

2. Случайные матрицы-проекторы и их вероятностные характеристики

1. Проектирование на пространство $R^r_{(m)}$ (генерация множества $\mathfrak{Y}^r_m$).

Эту операцию будем осуществлять с помощью матрицы-проектора $Q_{(s\times r)}$:

$$
\begin{gathered}
Y_{(m\times r)} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}^{(1)} \\ \cdots \\ \mathbf{y}^{(m)} \end{pmatrix} = U_{(m\times s)} Q_{(s\times r)}; \\
y^{(i)}_j = \sum_{k=1}^{s} u_{ik} q_{kj}, \quad i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,r}.
\end{gathered} \tag{2.4}
$$

Матрица-проектор $Q_{(s\times r)}$ случайная интервального типа, т.е.

$$
Q_{(s\times r)} \in \mathcal{Q} = [Q^-, Q^+]. \tag{2.5}
$$

Вероятностные свойства матрицы-проектора характеризуются непрерывно-дифференцируемой функцией плотности распределений вероятностей (ПРВ) $P(Q)$, определенной на $\mathcal{Q}$.

Векторы $\mathbf{y}^{(i)}$ образуют множество $\mathcal{Y}^r_m$ из m r-мерных точек. Определим расстояние между ними $\varrho(\mathbf{y}^{(\alpha)}, \mathbf{y}^{(\beta)} \,|\, Q_{(s\times r)})$ и индикатор компактности

$$
\rho_Y(Q) = \frac{2}{m(m-1)} \sum_{(\alpha,\beta)=1,\, \alpha<\beta}^{m} \varrho\left(\mathbf{y}^{(\alpha)}, \mathbf{y}^{(\beta)} \,|\, Q_{(s\times r)}\right). \tag{2.6}
$$

Поскольку значения элементов матрицы-проектора — случайные числа, то среднее расстояние (2.6) принимает случайные значения.

Определим математическое ожидание индикатора компактности:

$$
\bar{\rho}_Y = \int\limits_{\mathcal{Q}} P(Q)\rho_Y(Q)dQ. \tag{2.7}
$$

2. Проектирование на пространство $R^{(n\times s)}$ (генерация множества $\mathfrak{B}^s_n$).

Эту операцию осуществим с помощью матрицы-проектора $T_{(n\times m)}$ со случайными элементами:

$$
\begin{gathered}
B_{(n\times s)} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^{(1)} \\ \cdots \\ \mathbf{b}^{(n)} \end{pmatrix} = T_{(n\times m)} U_{(m\times s)}; \\
b^{(i)}_j = \sum_{k=1}^{m} t_{ik}\, u_{kj}, \quad i = \overline{1,n}; \quad j = \overline{1,s}.
\end{gathered} \tag{2.8}
$$

Матрица-проектор $T_{(n\times m)}$ случайная интервального типа, т.е.

$$
T_{(n\times m)} \in \mathcal{T} = [T^-, T^+]. \tag{2.9}
$$

Ее вероятностные свойства характеризуются функцией ПРВ $W(T)$, определенной на $\mathcal{T}$.

Векторы $\mathbf{b}^{(i)}$ образуют множество $\mathfrak{B}_n^s$ из s-мерных точек в количестве $n < m$. Определим индикатор компактности в виде

$$\rho_B(T) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{(\alpha,\beta),\, \alpha<\beta}^{n} \varrho(\mathbf{b}^{(\alpha)}, \mathbf{b}^{(\beta)} \,|\, T) \tag{2.10}$$

и его математическое ожидание:

$$\bar{\rho}_B = \int\limits_{\mathcal{T}} W(T)\rho_B(T)dT. \tag{2.11}$$

3. Проектирование на пространство $R^r_{(n)}$ (генерация множества $\mathfrak{Z}_n^r$).

Эту операцию будем осуществлять с помощью случайных матриц-проекторов $T_{n\times m}$ и $Q_{(s\times r)}$:

$$Z_{(n\times r)} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}^{(1)} \\ \cdots \\ \mathbf{z}^{(n)} \end{pmatrix} = T_{(n\times m)} U_{(m\times s)} Q_{(s\times r)}; \tag{2.12}$$

$$z_j^{(i)} = \sum_{p=1}^{m} t_{ip} \sum_{k=1}^{s} u_{pk}\, q_{kj}, \qquad i = \overline{1,n}; \quad j = \overline{1,r}.$$

Указанные матрицы-проекторы — интервального типа:

$$\begin{aligned} &T_{(n\times m)} \in \mathcal{T} = [T^-, T^+], \\ &Q_{(s\times r)} \in \mathcal{Q} = [Q^-, Q^+]. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Вероятностные свойства матриц-проекторов характеризуются функцией совместного ПРВ $F(T,Q)$, определенной на множестве

$$\mathcal{F} = \mathcal{T} \bigotimes \mathcal{Q}. \tag{2.14}$$

Векторы $\mathbf{z}^{(i)}$ образуют множество $\mathfrak{Z}_n^r$ из r-мерных точек. Индикатор компактности этого множества:

$$\rho_Z(T,Q) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{(\alpha,\beta),\, \alpha<\beta}^{n} \varrho(\mathbf{z}^{\alpha}, \mathbf{z}^{\beta} \,|\, T, Q). \tag{2.15}$$

Математическое ожидание индикатора компактности имеет вид

$$\bar{\rho}_Z = \int\limits_{\mathcal{F}} F(T,Q)\rho_Z(T,Q)dTdQ. \tag{2.16}$$

Соотношения между размерами (m,s) матрицы данных и размерами $(m,r),(n,s),(n,r)$ матриц-проекций характеризуют ее “сжатие” или “растяжение”: если $r < s$, $n < m$, то “сжатие”; если $r > s$, $n > m$, то “растяжение”.

3. Алгоритмы энтропийно-рандомизированного проектирования

Рассмотрим проектирование на пространство $R^r_{(n)}$, которое осуществляет трансформацию матрицы данных одновременно по двум ее параметрам.

Алгоритм энтропийно-рандомизированного проектирования (*ERP-алгоритм*) представляет собой MEE-оценку функции ПРВ $F(T,Q)$ с включенным в нее условием балансирования (равенства) индексов компактности матриц данных $U_{(m\times s)}$ и проекции $Z_{(n\times r)}$.

MEE-оценка [32] функции $F(B,Q)$ определяется следующим алгоритмом:

$$\mathcal{H}[F(T,Q)] = -\int\limits_{\mathcal{F}} F(T,Q)\,\ln\,F(T,Q)\,dTdQ \Rightarrow \max, \tag{3.1}$$

$$\int\limits_{\mathcal{F}} F(T,Q)dTdQ = 1,$$

$$\int\limits_{\mathcal{F}} F(T,Q)\rho_Z(T,Q)dTdQ = \rho_U.$$

Задача (3.1) является функциональной задачей на условный экстремум ляпуновского типа: все их компоненты являются интегральными функционалами [33].

Интегральная форма этой задачи позволяет использовать для формулировки условий оптимальности функционал Лагранжа со скалярными множителями Лагранжа:

$$\mathcal{L}[F(T,Q)] = \mathcal{H}[F(T,Q)] + \mu\left(1 - \int\limits_{\mathcal{F}} F(T,Q)dTdQ\right) +$$

$$+\,\lambda\left(\rho_U - \int\limits_{\mathcal{F}} F(T,Q)\rho_Z(T,Q)dTdQ\right). \tag{3.2}$$

В терминах производных Гато [33] ($\mathfrak{G}_F$) условия стационарности функционала Лагранжа приобретают следующий вид:

$$\mathfrak{G}_F\mathcal{L}[F(T,Q)] = 0. \tag{3.3}$$

Энтропийно-оптимальная функция ПРВ матриц-проекторов имеет вид [32]

$$F^*(T,Q\,|\,\lambda) = \frac{\exp\left(-\lambda\;\rho_Z(T,Q)\right)}{\mathbb{F}(\lambda)}, \tag{3.4}$$

$$\mathbb{F}(\lambda) = \int\limits_{\mathcal{F}} \exp\left(-\lambda\;\rho_Z(T,Q)\right)dTdQ.$$

Из выражений (3.4) видно, что структура функции ПРВ зависит от выбранной функции расстояний (2.15) и не зависит от параметра λ, определяемого из уравнения баланса индикаторов компактности:

$$\Phi(\lambda) = \int\limits_{\mathcal{F}} \exp\left(-\lambda\, \rho_Z(T,Q)\right) \left(\rho_Z(T,Q) - \rho_U\right) dT dQ = 0. \tag{3.5}$$

Поскольку параметр λ является масштабным, можно использовать его приближенное значение, получаемое из линеаризованного уравнения (3.5):

$$\tilde{\lambda} = \frac{\int_{\mathcal{F}} \left(\rho_Z(T,Q) - \rho_U\right) dT dQ}{\int_{\mathcal{F}} \rho_Z(T,Q) \left(\rho_Z(T,Q) - \rho_U\right) dT dQ}. \tag{3.6}$$

Пример 1. Пусть матрица данных и индикаторы компактности, построенные на евклидовом и манхэттенском расстояниях, имеет вид

$$U_{(3\times 2)} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}9 & 0{,}2 \end{pmatrix}; \qquad \rho_U^E = 0{,}506, \quad \rho_U^M = 0{,}933.$$

Рассмотрим проектирование на пространство $R^2_{(1)}$:

$$Z_{(2\times 1)} = \mathbf{z}^{(2)} = T_{(2\times 3)} U_{(3\times 2)} \mathbf{q}(2),$$

где

$$\mathcal{T} = [T^-, T^+], \quad T^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad T^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{Q} = [\mathbf{q}^-, \mathbf{q}^+], \quad \mathbf{q}^- = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор $\mathbf{z}^{(2)}$ имеет следующие компоненты:

$$z_1 = q_1 \sum_{j=1}^{3} t_{1j} u_{j1} + q_2 \sum_{j=1}^{3} t_{1j} u_{j2}, \quad z_2 = q_1 \sum_{j=1}^{3} t_{2j} u_{j1} + q_2 \sum_{j=1}^{3} t_{2j} u_{j2}.$$

Рассмотрим два вида расстояний между элементами вектора $\mathbf{z}$:

— евклидово

$$\rho_Z^E(T,\mathbf{q}) = (z_1 - z_2)^2 = \left[q_1 \sum_{j=1}^{3} u_{j1}(t_{1j} - t_{2j}) - q_2 \sum_{j=1}^{3} u_{j2}(t_{1j} - t_{2j}) \right]^2;$$

— манхэттенское

$$\rho_Z^M(T,\mathbf{q}) = |z_1 - z_2| = \left| q_1 \sum_{j=1}^{3} u_{j1}(t_{1j} - t_{2j}) - q_2 \sum_{j=1}^{3} u_{j2}(t_{1j} - t_{2j}) \right|.$$

Энтропийно-оптимальные ПРВ случайных матриц-проекторов (3.4) имеют вид:

— для евклидового расстояния

$$F_E^*(T, \mathbf{q} \,|\, \lambda) = \frac{\exp\left(-\lambda\, \rho_Z^E(T, \mathbf{q})\right)}{\mathbb{F}(\lambda)}, \tag{3.7}$$

$$\mathbb{F}_E(\lambda) = \int\limits_{\mathcal{F}} \exp\left(-\lambda\, \rho_Z^E(T, \mathbf{q})\right)\, dT\, d\mathbf{q};$$

— для манхэттенского расстояния

$$F_M^*(T, \mathbf{q} \,|\, \lambda) = \frac{\exp\left(-\lambda\, \rho_Z^M(T, \mathbf{q})\right)}{\mathbb{F}(\lambda)}, \tag{3.8}$$

$$\mathbb{F}_M(\lambda) = \int\limits_{\mathcal{F}} \exp\left(-\lambda\, \rho_Z^M(T, \mathbf{q})\right)\, dB\, d\mathbf{q}.$$

Параметр λ определяется из следующих уравнений для евклидова и манхэттенского расстояний соответственно:

$$\int\limits_{\mathcal{F}} \exp\left(-\lambda\, \rho_Z^E(T, \mathbf{q})\right) \left(\rho_Z^E(T, \mathbf{q}) - \delta\, \rho_U^E\right)\, dT\, d\mathbf{q} = 0, \tag{3.9}$$

$$\int\limits_{\mathcal{F}} \exp\left(-\lambda\, \rho_Z^M(T, \mathbf{q})\right) \left(\rho_Z^M(T, \mathbf{q}) - \delta\, \rho_U^M\right)\, dT\, d\mathbf{q} = 0.$$

В равенствах (3.7)–(3.9)

$$\mathcal{F} = \mathcal{T} \bigotimes \mathcal{Q}.$$

Качественное представление о морфологии многомерных функций ПРВ (3.7), (3.8) дают некоторые их сечения.

а) *матрица-проектор T задана*:

$$T^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующие сечения ненормированных функций (3.7), (3.8) имеют вид:

$$F_E^*(T^*, \mathbf{q}) \sim \exp\left[-\lambda\, (0,41 q_1 - 0,28 q_2)^2\right), \quad (q_1, q_2) \in [-1, 1],$$
$$F_M^*(T^*, \mathbf{q}) \sim \exp\left[-\lambda\, |0,41 q_1 - 0,28 q_2|\right), \quad (q_1, q_2) \in [-1, 1].$$

б) *матрица-проектор T и вектор-проектор $\mathbf{q}^{(2)}$ имеют вид*:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ t_{21} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{q}^{(2)} = \begin{pmatrix} q_1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующие сечения ненормированных функций (3.7), (3.8) имеют вид:

$$F_E^*(T^*, \mathbf{q}) \sim \exp\left[-\lambda\left(-0{,}1q_1t_{21} - 0{,}4q_1 + 0{,}8t_{21} + 0{,}2\right)^2\right),$$
$$q_1 \in [-1,1], \quad t_{21} \in [0,1],$$

$$F_M^*(B^*, \mathbf{q}) \sim \exp\left[-\lambda\left|-0{,}1q_1t_{21} - 0{,}4q_1 + 0{,}8t_{21} + 0{,}2\right|\right),$$
$$q_1 \in [-1,1], \quad t_{21} \in [0,1].$$

Заметим, что полученные ПРВ случайных проекторов энтропийно-оптимальны для соответствующей матрицы данных и существенно отличаются от нормального распределения, рекомендуемого для применения при случайном проектировании (см., например [19]).

4. Реализация случайных проекторов и их числовых характеристик

Стандартный способ реализации случайных проекторов состоит в сэмплировании энтропийно-оптимальных ПРВ $P(Q), W(T), F(T,Q)$, при которых сохраняется межвекторное расстояние матрицы данных в ее матрицах-проекциях. В результате сэмплирования ПРВ трансформируются в последовательность случайных матриц-проекторов:

$$F^*(T,Q) \Rightarrow \left(T^{(1)}, Q^{(1)}\right), \ldots, \left(T^{(N)}, Q^{(N)}\right), \ldots \tag{4.1}$$

Общий метод генерации случайных последовательностей с заданной функцией ПРВ изложен в [34]. Свойство сохранения указанного выше баланса может не выполняться для каждого в отдельности элемента этой последовательности, но “в среднем” оно выполняется. Поэтому в качестве реализуемого эмпирического проектора можно принять матрицы

$$\bar{T} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T^{(i)}, \qquad \bar{Q} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Q^{(i)}. \tag{4.2}$$

Точные значения “средних” матриц-проекторов определяются следующими равенствами:

$$\bar{T} = \int\limits_{\mathcal{F}} T\, F(T,Q)dTdQ, \qquad \bar{Q} = \int\limits_{\mathcal{F}} Q\, F(T,Q)dTdQ. \tag{4.3}$$

Хотя интегралы в этих равенствах многомерные, но подынтегральные функции представляют собой экспоненты от полиномов. Это часто позволяет получить аналитические формулы для вычисления многомерных интегралов.

Кроме того проблему вычисления многомерных интегралов можно решить приближенными методами: методом Монте-Карло и методами полиномиальной аппроксимации подынтегральных функций.

Функция ПРВ $F^*(T,Q)$ определена на ограниченном множестве $\mathcal{F}$ (2.14). Поэтому в качестве реализуемого проектора может быть использована пара матриц

$$(T^*, Q^*) = \arg\max_{\mathcal{F}} F(T,Q). \tag{4.4}$$

5. Случайные матрицы-проекторы с заданными значениями элементов

1. Множество $(0,1)$-матриц-проекторов и его упорядочение

Рассмотрим процедуру проектирования на пространство $R^r_{(m)}$, осуществляемого матрицей-проектором $Q_{(s\times r)}$ со случайными элементами, принимающими значения 0 или 1.

Представим матрицу вектором-строкой длины sr. Количество различных последовательностей из 0 и 1, т.е. количество различных векторов-строк равно $N = 2^{rs}$. В качестве примера для $s = 3$, $r = 1$ таких векторов будет 8:

$$000, 100, 010, 001, 110, 011, 101, 111;$$

для $s = 4$, $r = 1$ их будет 16:

$$0000, 1000, 0100, 0010, 0001, 1100, 0110, 0011,$$
$$1001, 0101, 1010, 1111, 1110, 0111, 1011, 1101.$$

Для матрицы-проектора $Q_{(s\times r)}$ существует конечное множество $\mathbb{Q}$ ее $(0,1)$-реализаций:

$$\mathbb{Q} = \{Q^{(1)}, \ldots, Q^{(N)}\}, \qquad N = 2^{sr}. \tag{5.1}$$

Полагая, что реализации случайные, их вероятностные свойства будем характеризовать функцией дискретного распределения вероятностей (ДРВ) $W(\alpha)$ с дискретным носителем $\alpha \in \mathcal{A} = [1, N]$, где

$$W(\alpha) = \mathbf{w} = \{w_\alpha\, \alpha = \overline{1, N}\}. \tag{5.2}$$

Матрица-проекция

$$\begin{gathered} Y^{(\alpha)}_{(m\times r)} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}^{(\alpha)}_{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(\alpha)}_{(m)} \end{pmatrix} = U_{(m\times s)} Q^{(\alpha)}_{(s\times r)}; \\ y^{(\alpha,i)}_j = \sum_{k=1}^{s} u_{ik} q^{(\alpha)}_{kj}, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, r}. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Индикатор компактности множества $\mathfrak{Y}^{(\alpha)}$:

$$\rho^{(\alpha)}_Y(Q) = \frac{2}{m(m-1)} \sum_{(\kappa,\beta)=1,\, \kappa<\beta}^{m} \varrho^{(\alpha)} \left(\mathbf{y}^{(\kappa)}, \mathbf{y}^{(\beta)} \,|\, Q^{(\alpha)}_{(s\times r)}\right). \tag{5.4}$$

Упорядочим последовательность (5.1) в соответствии со следующей последовательностью неравенств:

$$0 < \rho^{(1)}_Y(Q) < \rho^{(2)}_Y(Q) < \cdots < \rho^{(N)}_Y(Q). \tag{5.5}$$

2. MEE-оценка функций ДРВ

MEE-оценка функции ДРВ $W(\alpha)$ определяется следующим алгоритмом:

$$H(\mathbf{w}) = -\sum_{\alpha=1}^{N} w_\alpha \ln w_\alpha \Rightarrow \max \tag{5.6}$$

при ограничениях:

— нормировка

$$\sum_{\alpha=1}^{N} w_\alpha = 1, \tag{5.7}$$

— баланс индикаторов компактности

$$\sum_{\alpha=1}^{N} w_\alpha \, \rho_Y^{(\alpha)}(Q) = \rho_U. \tag{5.8}$$

Задача (5.6)–(5.8) является конечномерной задачей на условный экстремум с вогнутой целевой функцией (информационной энтропией) и линейными ограничениями-равенствами.

Рассмотрим функцию Лагранжа

$$L(\mathbf{w}, \lambda) = H(\mathbf{w}) + \mu \left(1 - \sum_{\alpha=1}^{N} w_\alpha\right) + \lambda \left(\rho_U - \sum_{\alpha=1}^{N} w_\alpha \rho_Y^{(\alpha)}(Q)\right). \tag{5.9}$$

Из условий стационарности этой функции получаем, что энтропийно-оптимальное распределение вероятностей имеет вид

$$w_\alpha^* = \frac{\exp\left(-\lambda \rho_Y^{(\alpha)}(Q)\right)}{\sum\limits_{\alpha=1}^{N} \exp\left(-\lambda \rho_Y^{(\alpha)}(Q)\right)}, \qquad \alpha = \overline{1, N}, \tag{5.10}$$

где параметр λ определяется из следующего уравнения:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \exp\left(-\lambda \rho_Y^{(\alpha)}(Q)\right) \left(\rho_Y^{(\alpha)}(Q) - \rho_U\right) = 0, \qquad -\infty < \lambda < \infty. \tag{5.11}$$

Воспользуемся заменой $z = \exp(-\lambda)$. Тогда уравнение (5.11) примет вид

$$\varphi(z) = \sum_{\alpha=1}^{N} z^{h_\alpha} c_\alpha = 0, \quad z \geqslant 0; \quad c_\alpha = (h_\alpha - \rho_U), \quad h_\alpha = \rho_Y^{(\alpha)}. \tag{5.12}$$

Теорема 1. Пусть существует $\alpha = l$ такое, что

$$\begin{aligned} c_\alpha &< 0 \quad \text{для } \alpha = 1, \ldots, l, \\ c_\alpha &\geqslant 0 \quad \text{для } \alpha = l+1, \ldots, N, \end{aligned} \tag{5.13}$$

и согласно (5.5)

$$0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_l < h_{l+1} < \cdots < h_N. \tag{5.14}$$

Тогда уравнение (5.12) *имеет единственное положительное решение* $z^* > 0$.

Доказательство приведено в Приложении.

3. Стратегии выбора "подходящей" матрицы-проекции из $\mathbb{Q}$ (5.1)

Энтропийно-оптимальная ДРВ $W^*(\alpha) = w^*_\alpha$, $\alpha = \overline{1, N}$ (5.12) характеризует вероятности реализации элементов (матриц-проекторов) из множества $\mathbb{Q}$ (5.1). Но для формирования конкретной матрицы-проекции $Y_{(m\times r)}$ необходима конкретная матрица-проектор из множества $\mathbb{Q}$. Можно предложить следующие стратегии для осуществления указанного выбора.

1. Матрица-проекция с максимальной вероятностью. Пусть в (5.5) разность $\Delta_\rho = \rho_Y^{(N)} - \rho_Y^{(1)}$ достаточно велика. Это означает, что в ДРВ (5.12) максимальное значение вероятности существенно больше минимального. Тогда реализуемая матрица-проектор имеет номер

$$\alpha^* = \arg \max_{1 \leqslant \alpha \leqslant N} w^*_\alpha. \tag{5.15}$$

2. Средняя матрица-проектор. В случае, когда $\Delta_\rho = \rho_Y^{(N)} - \rho_Y^{(1)}$ мала, возрастание последовательности $\{\rho^{(\alpha)}\}$ происходит с небольшой скоростью. Поэтому целесообразнее использовать осреднение для определения реализуемой матрицы-проектора:

$$\tilde{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N} \alpha w^*_\alpha, \qquad \alpha^* = \lfloor \tilde{\alpha} \rfloor, \tag{5.16}$$

где $\lfloor \bullet \rfloor$ — целая часть числа $\bullet$.

3. Медианная матрица-проектор определяется следующим равенством:

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha^*} w^*_\alpha = \sum_{\alpha=\alpha^*+1}^{N} w^*_\alpha. \tag{5.17}$$

4. Осреднение матриц-проекций. Данная стратегия состоит из следующих этапов. На первом этапе выделяются подмножества матриц-проекторов, обладающие определенными свойствами. На втором — формируется подмножество соответствующих им матриц-проекций. Затем вычисляется средняя матрица-проекция.

Если второй и третий этапы связаны со стандартными для математической статистики вычислениями, то первый требует дополнительных комментариев. Выделение подмножеств матриц-проекторов основано на правилах, которые отображают желаемые свойства этих подмножеств. В зависимости от

правила выделения подмножества матриц-проекторов будем различать дисперсионные и интерквартильные подмножества.

Рассмотрим *дисперсионные подмножества*, для чего вычислим среднеквадратичное значение (с.к.з.) переменной α:

$$\sigma_\alpha^* = \lfloor \tilde{\sigma} \rfloor, \qquad \tilde{\sigma} = \sqrt{D_\alpha}, \quad D_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} (\alpha^* - \alpha)^2 w_\alpha. \tag{5.18}$$

Определим дисперсионный интервал

$$\mathcal{I}_\alpha = \left[\alpha^* - \sigma_\alpha^*, \alpha^* + \sigma_\alpha^*\right]. \tag{5.19}$$

Дисперсионное подмножество:

$$\tilde{\mathbb{Q}} = \left\{Q^{(\alpha^* - \sigma_\alpha^*)}, \ldots, Q^{(\alpha^* + \sigma_\alpha^*)}\right\}. \tag{5.20}$$

Для каждого элемента этого подмножества вычисляются соответствующие матрицы-проекции:

$$\tilde{\mathcal{Y}} = \left\{Y_{(m\times r)}^{(\alpha^* - \sigma_\alpha^*)}, \ldots, Y_{(m\times r)}^{(\alpha^* + \sigma_\alpha^*)}\right\}. \tag{5.21}$$

На последнем этапе вычисляется средняя по дисперсионному множеству матрица-проекция:

$$\bar{Y}_{(m\times r)}^{D} = \frac{1}{2\sigma_\alpha^*} \sum_{\alpha=\alpha^*-\sigma_\alpha^*}^{\alpha^*+\sigma_\alpha^*} Y_{(m\times r)}^{(\alpha)}. \tag{5.22}$$

Рассмотрим процедуру формирования *интерквартильных подмножеств*. Энтропийно-оптимальная функция распределения вероятностей, согласно (5.10), имеет вид

$$F^*(\beta) = \sum_{\alpha=1}^{\beta} w_\alpha^*, \qquad \beta \in [0, N]. \tag{5.23}$$

Напомним, что κ^*-квартилью случайной переменной α является множество $\mathcal{A}^{(\kappa^*)}$ ее значений $[1, \beta^*]$, где β^* есть целая часть решения уравнения $F^*(\beta) = \kappa^*$.

Рассмотрим два квартильных множества: $\mathcal{A}^{(\kappa_1^*)}$ и $\mathcal{A}^{(\kappa_2^*)}$, причем $\kappa_1^* > \kappa_2^*$. Каждому из этих множеств соответствуют подмножества матриц-проекторов:

$$\mathbb{Q}(\kappa_1^*) = \left\{Q^{(1)}, \ldots, Q^{(\alpha(\kappa_1^*))}\right\},$$

$$\mathbb{Q}(\kappa_2^*) = \left\{Q^{(1)}, \ldots, Q^{(\alpha(\kappa_2^*))}\right\}, \tag{5.24}$$

где $\alpha(\kappa)$ – количество элементов в подмножестве $\mathbb{Q}(\kappa)$. Образуем подмножество матриц-проекторов

$$\mathbb{Q}(\kappa_1^* - \kappa_2^*) = \left\{ Q^{(\alpha(\kappa_2^*))}, \ldots, Q^{(\alpha(\kappa_1^*))} \right\}, \tag{5.25}$$

которое является $(\kappa_1^* - \kappa_2^*)$-интерквантильным подмножеством $\mathcal{I}^{(\kappa_1^* - \kappa_2^*)}$ энтропийно-оптимальных матриц-проекторов. Количество элементов в этом подмножестве равно $M_{(\kappa_1^* - \kappa_2^*)} = \alpha(\kappa_1^*) - \alpha(\kappa_2^*)$.

Для каждого элемента подмножества $\mathcal{Q}(\kappa_1^* - \kappa_2^*)$ (5.25) вычисляются соответствующие матрицы-проекции

$$\mathcal{Y}(\kappa_1^* - \kappa_2^*) = \left\{ Y_{(m\times r)}^{\alpha(\kappa_2^*)}, \ldots, Y_{(m\times r)}^{\alpha(\kappa_1^*)} \right\}. \tag{5.26}$$

Средняя по подмножеству $\mathcal{I}^{(\kappa_1^* - \kappa_2^*)}$ матрица-проекция:

$$\bar{Y}_{(m\times r)}^{K} = \frac{1}{M_{(\kappa_1^* - \kappa_2^*)}} \sum_{\alpha=\alpha(\kappa_2^*)}^{\alpha(\kappa_1^*)} Y_{(m\times r)}^{\alpha}. \tag{5.27}$$

6. Алгоритм энтропийно-рандомизированного проектирования с заданными значениями элементов матриц-проекторов

$dERP$-алгоритм состоит из двух последовательных этапов. На первом вычисляется энтропийно-оптимальная ДРВ на множестве заданных матриц-проекторов, сохраняющая индикатор компактности матрицы данных. Второй этап состоит в реализации “подходящей” матрицы-проектора из заданного множества с учетом энтропийно-оптимальной ДРВ.

Алгоритм 1 ($dERP$-алгоритм).

Шаг 0. Нормировка матрицы-данных

$$u_{ij} := \frac{u_{ij} - u_{min}}{u_{max} - u_{min}}, \qquad i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,s}.$$

Шаг 1. Вычисление индикатора компактности матрицы данных

$$\rho_U := \frac{2!(m-2)!}{m!} \sum_{\beta,\gamma=1,\,\gamma<\beta}^{m} \varrho(\mathbf{u}^{(\beta)}, \mathbf{u}^{(\gamma)}).$$

Шаг 2. Генерация множества $\mathfrak{Q}$ матриц-проекторов с элементами 0,1

$$Q^{(\alpha)}, \qquad \alpha = \overline{1,N}, \quad N = 2^{rs}.$$

Шаг 3. Формирование множества $\mathfrak{Y}$ матриц-проекций с элементами

$$y_{i,k}^{(\alpha)} := \sum_{\nu=1}^{s} u_{i,\nu} q_{\nu,k}^{(\alpha)}, \qquad i = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,r},$$

и векторами-строками

$$\mathbf{y}_\nu^\alpha := \left\{ y_{\nu,1}^{(\alpha)}, \ldots, y_{\nu,r}^{(\alpha)} \right\}, \qquad \nu = \overline{1,m}.$$

Шаг 4. Вычисление индикаторов компактности матриц-проекций

$$\rho_Y^{(\alpha)} := \frac{2!(m-2)!}{m!} \sum_{\nu,\mu=1,\,\nu<\mu}^{m} \varrho(\mathbf{y}^{(\nu)}, \mathbf{y}^{(\mu)}), \qquad \alpha = \overline{1,N}.$$

Шаг 5. Определение значения множителя Лагранжа λ^* из уравнения

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \exp\left(-\lambda \rho_Y^{(\alpha)}(Q)\right) \left(\rho_Y^{(\alpha)}(Q) - \rho_U\right) = 0, \qquad -\infty < \lambda < \infty,$$

и определение энтропийно-оптимальной ДРВ

$$w_\alpha^* = \frac{\exp\left(-\lambda \rho_Y^{(\alpha)}(Q)\right)}{\sum\limits_{\alpha=1}^{N} \exp\left(-\lambda \rho_Y^{(\alpha)}(Q)\right)}, \qquad \alpha = \overline{1,N}.$$

Шаг 6. Формирование и выбор стратегий реализации энтропийно-оптимальных матриц-проекторов:

— *матрица-проекция с максимальной вероятностью*

$$Q^{(\alpha^*)} : \alpha^* = \arg\max_\alpha w(\alpha \,|\, \lambda^*);$$

— *средняя матрица-проекция*

$$Q^{(\tilde{\alpha})} : \tilde{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N} \alpha w_\alpha^*;$$

— *медианная матрица-проектор*

$$Q^{(\hat{\alpha})} : \sum_{\alpha=1}^{\hat{\alpha}} = \sum_{\alpha=\hat{\alpha}+1}^{N} w_\alpha^*;$$

— *средняя по дисперсионному подмножеству матрица-проекция*

$$\bar{Y}_{(m\times r)}^D = \frac{1}{2\sigma_\alpha^*} \sum_{\alpha=\alpha^*-\sigma_\alpha^*}^{\alpha^*+\sigma_\alpha^*} Y_{(m\times r)}^{(\alpha)},$$

— *средняя по* $(\kappa_1^* - \kappa_2^*)$*-интерквартильному подмножеству матрица-проекция*

$$\bar{Y}_{(m\times r)}^K = \frac{1}{M_{(\kappa_1^*-\kappa_2^*)}} \sum_{\alpha=\alpha(\kappa_2^*)}^{\alpha(\kappa_1^*)} Y_{(m\times r)}^{\alpha}.$$

Матрицы-проекции, вычисляемые на 6-м шаге алгоритма, могут использоваться как исходные матрицы данных для решения задач машинного обучения.

7. Заключение

Предлагается новый метод “сжатия” и “растяжения” матрицы данных, основанный на энтропийно-рандомизированном проектировани (ERP). Сформулирован алгоритм ERP в виде задачи условной максимизации функционала энтропии, определенного на функциях ПРВ матриц-проекторов. Получены условия существования и единственности положительного решения в указанной задаче. Рассмотрен случай конечных множеств матриц-проекторов, на которых существуют дискретные функции распределения вероятностей (ДРВ) и сформулирован алгоритм их энтропийной оптимизации. Реализация энтропийно-рандимизированных проекций осуществляется сэмплированием оптимальных ПРВ (ДРВ), генерацией множеств матриц-проекторов и использованием их числовых характеристик: средних, медианных, средних по дисперсионному или интерквартильному множеству.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Воспользуемся условиями (5.13), (5.14), и уравнение (5.12) представим в виде

$$\phi(z) = \frac{\sum\limits_{\alpha=l+1}^{N} z^{h_\alpha} c_\alpha}{\sum\limits_{\alpha=1}^{l} z^{h_\alpha} c_\alpha} = 1. \tag{П.1}$$

Согласно (5.5) $h_{l+1} - h_1 > 0$, и

$$\phi(z) = z^{(h_{l+1}-h_1)} \frac{\sum\limits_{\alpha=l+2}^{N} z^{h_\alpha} c_\alpha + c_{l+1}}{\sum\limits_{\alpha=2}^{l} z^{h_\alpha} c_\alpha + c_1}. \tag{П.2}$$

Отсюда следует, что

$$\phi(0) = 0.$$

Представим теперь функцию $\phi(z)$ в виде

$$\phi(z) = z^{(h_N-h_l)} \frac{\sum\limits_{\alpha=l+1}^{N-1} z^{h_\alpha-h_N} c_\alpha + c_N}{\sum\limits_{\alpha=1}^{l-1} z^{h_\alpha-h_l} c_\alpha + c_l}. \tag{П.3}$$

Нетрудно увидеть, что

$$\phi(\infty) = +\infty.$$

Рассмотрим производную

$$\phi'(z) = \frac{\sum\limits_{\beta=1}^{l} \sum\limits_{\alpha=l+1}^{N} c_\beta\, c_\alpha (h_\alpha - h_\beta) z^{(h_\beta - h_\alpha)}}{\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{l} c_\alpha\, z^{h_\alpha}\right)^2} > 0. \tag{П.4}$$

Следовательно, функция $\phi(z)$ монотонно-возрастающая, и уравнения (П.1), (П.2) имеют единственное положительное решение $z^* > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Carreira-Perpinan M.A.* A review of dimension reduction techniques. Tachnical report CS-96-09, Department of Computer Science, University of Sheffield, 1997.
2. *Imola K.* A survey of dimension reduction techniques. Center for Applied Scientific Computing, Lawrence Livermore National Laboratory, 2002.
3. *Cunningham P.* Dimension Reduction. Technical Report UCD-CSI-2007-7, University College Dublin, 2007.
4. *Айвазян С.А., Бухштабер В.М., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д.* Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности. М.: Финансы и статистика, 1989.
5. *Friedman J., Hastie T., Tibshirani R.* Element of Statistical Learning: Prediction, Inference and Data Mining. Springer, 2001.
6. *Bishop C.* Pattern Recognition and Machine Learning, ser. Information Science and Statistics, Springer, 2006.
7. *Comon P., Jutten C.* Handbook of Blind Source Separation. Independent Component Analysis and Applications. Academic Press, Oxford UK, 2010.
8. *Bruckstein A.M., Donoho D.L., Elad M.* From Sparse Solutions of Systems of Equations to Sparse Modeling of Signals and Images. SIAM Rev. 2009. V. 51. No. 1. P. 34–81.
9. *Pirson K.* On lines and planes of closest fit to systems of points in space // Philosophical Magazine. 1901. V. 2. P. 559–572.
10. *Кендал М.Дж., Стюарт А.* Статистические выводы и связи / Пер. с англ. М.: Наука, 1973.
11. *Jolliffe I.T.* Principal Component Analysis. N.Y. Springer-Verlag, 2002.
12. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Метод главных компонент: робастные версии // АиТ. 2017. № 3. С. 130–148.

    Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Principle component analysis: Robust versions // Autom Remote Control 2017. V. 78. P. 490–506.

    https://doi.org/10.1134/S0005117917030092.
13. *Deerwester S.C., Dumias S.T., Landaurer T.K., Furnas G.W., Harshman R.A.* Indexing by latent semantic analysis // J. American Society of Information Sciences. 1990. V. 41. No. 6. P. 391–407.
14. *Fisher R.A.* The Use of Multiple Measurements in Taxonomic Problems // Annals of Eugenics. 1936. V. 7. P. 179–188.
15. *McLachlan G.J.* Discriminant Analysis and Statistical Pattern Recognition. Wiley Interscience, 2004.

16. *Johnson W.B., Lindenstrauss J.* Extension Of Lipshitz mapping into Hilbert space // In: Conference in modern analysis and probability. American Mathematical Society. 1984. V. 26. P. 189–206.

17. *Achlioptas D.* Database-friendly random projections // Proceedings of the twentieth ACM Symposium on Principles of database systems. P. 274–281.

18. *Bingham E., Mannila H.* Random projection in dimensionality reduction: applications to image and text data // Proceedings of the seventh ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining. P. 245–250.

19. *Vempala S.S.* The random projection method. American Mathematical Society, 2005. V. 65.

20. *Ганин И.П., Косиченко Е.А., Каплан А.Я.* Особенности ЭЭГ-реакций на эмоционально значимые стимулы в тезнологии интерфейса мозг-компьютер на волне P300 // Журн. высш. нерв. деятельности им. И.П. Павлова. 2017. Т. 67. № 4. С. 453–463.

21. *Huber F., Zorner T.O.* Threshold cointegrationin international exchange rates: A Bayesian approach // International Journal of Forecasting. 2019. V. 35. P. 458–473.

22. *Kosinskia M., Stillwella D., Groepelb T.* Private traits and attributtes are predictable from digital records of human behaviour // Proceedings of the National Agademy of Sciences of the USA. 2013. 110(15). P. 5802–5805.

23. *Blum A., Langly P.* Selection of relevant feature and examples in machine learning // Artificial Intelligence. 1997. V. 97. Nos. 1–2. P. 245–271.

24. *Cover T.M., Thomas J.A.* Elements of Information Theory. N.Y.: John Wiley and Sons, 1991.

25. *Peng H.C., Long F., Ding C.* Feature selection based on mutual information: criteria of max-dependency, max-relevance, and min-redudancy // IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2005. V. 27. No. 8. P. 1226–1238.

26. *Zhang Y., Li S., Wang T., Zhang Z.* Divergence-based feature selection for separate classes // Neurocomputing. 2013. V. 101. P. 32–42.

27. *Дарховский Б.С., Каплан А.Я., Шишкин С.Л.* О подходе к оценке сложности кривых (на примере электроэнцефалограммы человека) // АиТ. 2002. № 3. С. 134–140.

    Darhovsky B.S., Kaplan A.Ya., Shishkin S.L. On an Approach to the Estimation of the Complexity of Curves (Using as an Example an Electroencephalogram of a Human Being) // Autom. Remote Control. 2002. V. 63. No. 3. P. 468–474.

28. *Дарховский Б.С., Пирятинская А.* Новый подход к проблеме сегментации временных рядов произвольной структуры // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. 2014. Т. 287. С. 61–74.

29. *Darhovsky B., Piryatinska A.* Quickest detection of changes in the generating mechanism of a time series via the ε-complexity of continuous functions // Sequantial Analysis. 2014. V. 33. P. 231–250.

30. *Efron B.* Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife // Annals of Statistics. 1979. V. 7. No. 1. P.1–26.

31. *Bach F.R.* Bolasso: model consistent Lasso estimation through the bootstrap // Proceedings of the 25-th International Conference on Machine Learning. 2008. P. 33–40.

32. *Попков Ю.С.* Асимптотическая эффективность оценок максимальной энтропии // Доклады Российской Академии Наук. Математика, Информатика, Процессы Управления. 2020. Т. 493. С. 104–107.

    https://doi.org/10.31857/S2686954320040165.

Popkov Y.S. Asymptotic Efficiency of Maximum Entropy Estimates // Doklady Mathematics. 2020. V. 102. No. 1. P. 350–352.

https://doi.org/10.1134/S106456242004016X.

33. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
34. *Дарховский Б.С., Попков Ю.С., Попков А.Ю., Алиев А.С.* Метод генерации случайных векторов с заданной функцией плотности распределения вероятностей // АиТ. 2018. № 9. С. 31–45. https://doi.org/10.31857/S000523100001408-2.

    Darkhovsky, B.S., Popkov, Y.S., Popkov, A.Y., Aliev, A.S. A Method of Generating Random Vectors with a Given Probability Density Function // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 9. P. 1569–1581.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 12.07.2020

После доработки 23.09.2020

Принята к публикации 28.10.2020

СОДЕРЖАНИЕ

Линейные системы

Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М. Оптимизация правых частей нелокальных краевых условий управляемой динамической системы . . . 3

Пряшникова П.Ф. *D*-разбиение при полиномиальной зависимости коэффициентов многочлена от двух параметров . . . 32

Тремба А.А. Смешанная робастность: анализ систем с неопределенными детерминированными и случайными параметрами на примере линейных систем . . . 47

Нелинейные системы

Фуртат И.Б., Гущин П.А. Дискретное по пространственной переменной управление скалярными линейными распределенными объектами параболического и гиперболического типов . . . 77

Стохастические системы

Паламарчук Е.С. Об оптимальной суперэкспоненциальной стабилизации решений линейных стохастических дифференциальных уравнений . . . 98

Робастное, адаптивное и сетевое управление

Романкевич А.М., Морозов К.В., Романкевич В.А. Формальный метод определения состояния процессоров многопроцессорной системы при ее тестировании . . . 112

Управление в технических системах

Макаровских Т.А., Панюков А.В. Программное обеспечение для задачи построения траектории движения режущего инструмента для CAD/CAM систем технологической подготовки процессов раскроя . . . 123

Саратов А.А. Синхронизация работы цехов в позаказном производстве . . . 138

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

Попков Ю.С., Дубнов Ю.А., Попков А.Ю. Энтропийно-рандомизированное проектирование . . . 149

CONTENTS

Linear Systems

Aida-zade K.R., Abdullayev V.M. Optimization of the Right-Hand Sides of Non-Local Boundary Conditions of the Controlled Dynamic System 3

Pryashnikova P.F. *D*-Decomposition at the Polynomial Dependence of the Polynomial Coefficients on Two Parameters 32

Tremba A.A. Mixed Robustness: Analysis of Systems with Uncertain Deterministic and Random Parameters on the Example of Linear Systems 47

Nonlinear Systems

Furtat I.B., Gushchin P.A. Discrete on Spatial Variable Control of Linear Parabolic and Hyperbolic Systems 77

Stochastic Systems

Palamarchuk E.S. On Optimal Super Exponential Stabilization of Solutions to Linear Stochastic Differential Equations 98

Robust, Adaptive and Network Control

Romankevich A.M., Morozov K.V., Romankevich V.A. A Formal Method of Processors' State Determination in a Multiprocessor System on Its Testing 112

Control in Technical Systems

Makarovskikh T.A., Panyukov A.V. Software for the Problem of Constructing the Cutting Tool Trajectory for CAD/CAM Systems of the Cutting Processes Technological Preparation 123

Saratov A.A. Synchronization of Workshops in Order Based Production 138

Optimization, System Analysis, and Operations Research

Popkov Yu.S., Dubnov Yu.A., Popkov A.Yu. Entropy-Randomized Projection 149