СОДЕРЖАНИЕ

Том 503, 2022

МАТЕМАТИКА

ИНФОРМАТИКА

CONTENTS

Volume 503, 2022

MATHEMATICS

COMPUTER SCIENCE

EDN: KAEIBX
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 5–10

МАТЕМАТИКА

УДК 512.745.2

О СУЩЕСТВОВАНИИ *B*-КОРНЕВЫХ ПОДГРУПП НА АФФИННЫХ СФЕРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

© 2022 г. Р. С. Авдеев[1,*], В. С. Жгун[1,2,]**

Представлено академиком РАН В.П. Платоновым 14.12.2021 г.
Поступило 22.12.2021 г.
После доработки 22.12.2021 г.
Принято к публикации 28.12.2021 г.

Пусть X — неприводимое аффинное алгебраическое многообразие, являющееся сферическим относительно действия связной редуктивной группы G. В настоящей работе приведены достаточные условия, сформулированные в терминах комбинаторики весов, для существования на X однопараметрических аддитивных действий, нормализуемых борелевской подгруппой $B \subset G$. В качестве приложения доказано, что всякий G-инвариантный простой дивизор в X можно соединить с открытой G-орбитой при помощи подходящего B-нормализуемого однопараметрического аддитивного действия.

Ключевые слова: действия аддитивных групп, торическое многообразие, сферическое многообразие, корень Демазюра, локально-нильпотентное дифференцирование, теорема о локальной структуре

DOI: 10.31857/S2686954322020059

1. Пусть X — неприводимое алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ нулевой характеристики, снабженное действием связной редуктивной алгебраической группы G. Всякое нетривиальное регулярное действие на X аддитивной группы $\mathbb{G}_a = (\mathbb{K},+)$ индуцирует алгебраическую подгруппу в группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$, называемую $\mathbb{G}_a$*-подгруппой*. Для произвольной $\mathbb{G}_a$-подгруппы H на X всякий ненулевой элемент одномерной алгебры Ли $\mathrm{Lie}(H)$ естественным образом задает локально нильпотентное дифференцирование (кратко ЛНД) ∂ на алгебре регулярных функций $\mathbb{K}[X]$, причем в случае квазиаффинного X подгруппа H может быть восстановлена при помощи взятия экспоненты от ∂.

В настоящей работе нас будут интересовать $\mathbb{G}_a$-подгруппы на X, нормализуемые действием борелевской подгруппы $B \subset G$. Следуя работе [1], мы называем такие $\mathbb{G}_a$-подгруппы ***B*-корневыми подгруппами** на X. Для всякой B-корневой подгруппы H на X присоединенное действие группы B на $\mathrm{Lie}(H)$ сводится к умножению на характер группы B, который мы обозначим через χ_H и будем называть *весом* H. Если ∂ — локально нильпотентное дифференцирование на $\mathbb{K}[X]$, соответствующее H, то ∂ также нормализуется группой B, причем с тем же весом χ_H.

2. Всюду далее будем предполагать, что многообразие X является сферическим, т.е. оно нормально и обладает открытой B-орбитой. Обозначим через $\mathfrak{D}^B$ (соответственно $\mathfrak{D}^G$) конечное множество всех B-инвариантных (соответственно G-инвариантных) простых дивизоров в X. Элементы множества $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^B \backslash \mathfrak{D}^G$ традиционно называются *красками* сферического многообразия X.

Напомним известное разделение красок в X на три типа (см. [2, 3]). Зафиксируем произвольную краску $D \in \mathfrak{D}$. Для нее в группе G всегда можно выбрать минимальную параболическую подгруппу $Q \supset B$ с условием $QD \neq D$. Для каждой подгруппы $F \subset Q$ обозначим через $\bar{F}$ ее образ в Q/Q_r, где Q_r — разрешимый радикал в Q. Выберем произвольную точку z из открытой B-орбиты в X и обозначим через Q_z ее стабилизатор в Q. Заметим, что $Qz \cap D \neq \varnothing$. Поскольку $Q_r \subset B$, естественный морфизм

$$Qz \simeq Q/Q_z \to Q/(Q_zQ_r) \simeq \bar{Q}/\bar{Q}_z \qquad (1)$$

[1] *Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва, Россия*
[2] *Федеральный научный центр "Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук", Москва, Россия*
*E-mail: suselr@yandex.ru
**E-mail: zhgoon@mail.ru

факторизации по Q_r индуцирует сохраняющую коразмерности биекцию между B-орбитами в Qz и $\bar{B}$-орбитами в $\bar{Q}/\bar{Q}_z$. В частности, $\bar{Q}/\bar{Q}_z$ содержит открытую $\bar{B}$-орбиту. Поскольку группа $\bar{Q}$ изоморфна либо SL_2, либо PSL_2, для Q_z имеются следующие три возможности.

Тип (U): $\bar{Q}_z$ содержит максимальную унипотентную подгруппу в $\bar{Q}$. В этом случае $Qz \backslash Bz$ есть одна B-орбита коразмерности 1, совпадающая с $Qz \cap D$.

Тип (T): $\bar{Q}_z$ является максимальным тором в $\bar{Q}$. В этом случае $Qz \setminus Bz$ содержит две B-орбиты коразмерности 1, одна из которых совпадает с $Qz \cap D$.

Тип (N): $\bar{Q}_z$ является нормализатором максимального тора в $\bar{Q}$. В этом случае $Qz \backslash Bz$ есть одна B-орбита коразмерности 1, совпадающая с $Qz \cap D$.

Известно, что определенный выше тип не зависит от выбора минимальной параболической подгруппы $Q \supset B$ с условием $QD \neq D$ (см. [3], Prop. 1). Это позволяет корректно определить тип для каждой краски в X.

Замечание 1. Определенные выше типы (U), (T), (N) красок на X совпадают с типами b, a, a' соответственно в обозначениях Лу́ны (см. [4, §§2.7, 3.4] или [5, §30.10]).

3. Как следует из [1, Prop. 1.6], для всякой B-корневой подгруппы H на X существует не более одного дивизора $D \in \mathfrak{D}^B$ с условием $HD \neq D$. Следующий результат обобщает [1, Cor. 4.25], где рассматривается частный случай аффинного X.

Предложение 1. Пусть B-корневая подгруппа H на X такова, что $HD \neq D$ для некоторого дивизора $D \in \mathfrak{D}^B$. Тогда D либо G-инвариантен, либо является краской типа (T).

Доказательство. Предположим, что D является краской одного из типов (U) или (N), и выберем минимальную параболическую подгруппу $Q \supset B$ с условием $QD \neq D$. Тогда, в обозначениях п. 2, орбита Qz распадается на две B-орбиты $O_1 = Bz$ и $O_2 = O \cap D$. Из обсуждения в [1, § 1.5] вытекает, что в этом случае множество Qz является H-инвариантным, причем каждая H-орбита в Qz изоморфна аффинной прямой $\mathbb{A}^1$ и пересекает O_2 ровно в одной точке. Для каждой подгруппы $F \subset Q$ обозначим через $\tilde{F}$ ее образ в Q/Q_u, где Q_u – унипотентный радикал в Q. По аналогии с (1), морфизм

$$\varphi : Qz \simeq Q/Q_z \to Q/(Q_zQ_u) \simeq \tilde{Q}/\tilde{Q}_z \qquad (2)$$

факторизации по Q_u индуцирует сохраняющую коразмерности биекцию между B-орбитами в Qz и $\tilde{B}$-орбитами в $\tilde{Q}/\tilde{Q}_z$. Поскольку действия групп H и Q_u на Qz коммутируют, на многообразии $\tilde{Q}/\tilde{Q}_z$ индуцируется нетривиальное действие группы H, нормализуемое действием группы $\tilde{B}$. В частности, в $\tilde{Q}/\tilde{Q}_z$ есть ровно две $\tilde{B}$-орбиты $\varphi(O_1)$ и $\varphi(O_2)$, а каждая H-орбита изоморфна $\mathbb{A}^1$ и пересекает $\varphi(O_2)$ ровно в одной точке. Далее мы рассмотрим случаи типов (U) и (N) по отдельности. Условие на каждый из этих типов переформулировано с учетом того, что группа $\bar{Q}$ получается факторизацией группы $\tilde{Q}$ по своему связному центру.

Тип (U): $\tilde{Q}_z$ содержит максимальную унипотентную подгруппу в $\tilde{Q}$. Тогда в $\tilde{Q}/\tilde{Q}_z$ найдется точка, неподвижная относительно унипотентного радикала $\tilde{B}_u$ группы $\tilde{B}$. Поскольку $\tilde{B}_u$ нормализуется группой $\tilde{B}$ и коммутирует с действием H, множество $\tilde{B}_u$-неподвижных точек в $\tilde{Q}/\tilde{Q}_z$ инвариантно относительно обеих групп $\tilde{B}$ и H, а значит, оно совпадает со всем $\tilde{Q}/\tilde{Q}_z$. Следовательно, $\tilde{B}_u$ действует на $\tilde{Q}/\tilde{Q}_z$ тривиально – противоречие.

Тип (N): $\tilde{Q}_z$ содержит подгруппу $\tilde{Q}_z'$ индекса 2, являющуюся прообразом связной компоненты единицы в $\bar{Q}_z$. Тогда естественный морфизм $\psi : \tilde{Q}/\tilde{Q}_z' \to \tilde{Q}/\tilde{Q}_z$ представляет собой неразветвленное двулистное накрытие. Более того, множество $\psi^{-1}(\varphi(O_1))$ является открытой $\tilde{B}$-орбитой в $\tilde{Q}/\tilde{Q}_z'$, а множество $\psi^{-1}(\varphi(O_2))$ распадается на две $\tilde{B}$-орбиты коразмерности 1, которые мы обозначим через D_1 и D_2. Пусть теперь $y = \varphi(z)$ и $\psi^{-1}(y) = \{y_1, y_2\}$. Так как $Hy \simeq \mathbb{A}^1$, то множество $\psi^{-1}(Hy)$ является несвязным объединением двух компонент Y_1 и Y_2, каждая из которых изоморфно отображается на Hy. Без ограничения общности будем считать, что $y_i \in Y_i$ при $i = 1, 2$. Пусть элемент $b \in \tilde{B}$ таков, что $by_1 = y_2$. Тогда $b \in \tilde{B}_z$ и, значит, $by_2 = y_1$. В силу $\tilde{B}$-инвариантности орбиты Hy получаем, что действие элемента b переставляет множества Y_1 и Y_2. С другой стороны, множество $\psi^{-1}(Hy \cap \varphi(O_2))$ состоит из двух точек, принадлежащих разным $\tilde{B}$-орбитам – противоречие.

В терминологии [1, § 4.2], B-корневая подгруппа H на X называется *вертикальной*, если она сохраняет открытую B-орбиту, и *горизонтальной* в противном случае. Если H горизонтальна и $HD \neq D$ для некоторого $D \in \mathfrak{D}^B$, то будем говорить, что H *двигает* D. В соответствии с предложением 1 горизонтальные B-корневые подгруппы можно разделить на два типа.

Определение 1. Пусть H – горизонтальная B-корневая подгруппа на X, и пусть дивизор $D \in \mathcal{D}^B$ таков, что $HD \neq D$. Если $D \in \mathcal{D}^G$, то назовем H *тороидальной*. Если D является краской типа (T), то назовем H *размывающей*.

4. Для всякого подмножества $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ положим $D_{\mathcal{F}} = \bigcup_{D \in \mathcal{F}} D$, $X_{\mathcal{F}} = X \backslash D_{\mathcal{F}}$ и обозначим через $P_{\mathcal{F}}$ стабилизатор в G множества $X_{\mathcal{F}}$. Тогда $P_{\mathcal{F}}$ – параболическая подгруппа в G, содержащая B. Ключевую роль в наших дальнейших рассмотрениях играет теорема о локальной структуре (см. [7, Thm. 2.3, Prop. 2.4], [8, Thm. 1.4]), которая в нашей ситуации формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ – произвольное подмножество и $P = L \leftthreetimes P_u$ – разложение Леви группы $P = P_{\mathcal{F}}$. Тогда существует замкнутое L-инвариантное подмногообразие $Z \subset X_{\mathcal{F}}$, для которого отображение $P_u \times Z \to X_{\mathcal{F}}$, заданное формулой $(p, z) \mapsto pz$, является P-эквивариантным изоморфизмом, где действие P на $P_u \times Z$ определяется по формуле $lu(p, z) = (lupl^{-1}, lz)$ для всех $l \in L$, $u, p \in P_u$, $z \in Z$. Более того, если P совпадает со стабилизатором открытой B-орбиты в X, то коммутант группы L действует на Z тривиально.*

Ниже нам также понадобится следующее наблюдение.

Предложение 2. *Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{D}$ или $\mathcal{F} = \mathcal{D} \backslash \{D_0\}$, где D_0 – краска типа (T). Тогда группа $P_{\mathcal{F}}$ совпадает со стабилизатором открытой B-орбиты в X.*

Доказательство. В случае $\mathcal{F} = \mathcal{D}$ утверждение очевидно, поэтому далее считаем $\mathcal{F} = \mathcal{D} \backslash \{D_0\}$ для некоторой краски D_0 типа (T). Пусть $Q \supset B$ – произвольная минимальная параболическая подгруппа в G. Тогда условие $QD_0 \neq D_0$ может выполняться только в том случае, если $QD' \neq D'$ для некоторой краски $D' \in \mathcal{D} \backslash \{D_0\}$. Значит, если $Q \subset P_{\mathcal{F}}$, то $QD_0 = D_0$. Поскольку $P_{\mathcal{F}}$ порождается как группа всеми содержащимися в ней минимальными параболическими подгруппами, мы получаем $P_{\mathcal{F}} D_0 = D_0$, откуда и следует требуемое.

5. С этого момента и до конца работы будем предполагать, что X – аффинное сферическое G-многообразие. Введем некоторые обозначения.

Зафиксируем максимальный тор $T \subset B$ и обозначим через $\mathfrak{X}(T)$ его решетку характеров. Пусть $\Delta \subset \mathfrak{X}(T)$ – система корней группы G относительно T и $\Lambda^+ \subset \mathfrak{X}(T)$ – моноид доминантных весов относительно B.

Пусть M (соответственно Γ) – решетка (соответственно моноид) весов B-полуинвариантных рациональных (соответственно регулярных) функций на X. В силу аффинности X имеем $M = \mathbb{Z}\Gamma$ (см., например, [5, Prop. 5.14]). Рассмотрим двойственную решетку $N = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ и соответствующее рациональное векторное пространство $N_{\mathbb{Q}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Естественное спаривание $N \times M \to \mathbb{Z}$ будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Поскольку в X есть открытая B-орбита, для каждого $\lambda \in M$ существует единственная с точностью до пропорциональности B-полуинвариантная рациональная функция f_λ на X веса λ. Потребовав, чтобы все такие функции принимали значение 1 в фиксированной точке открытой B-орбиты, будем считать, что $f_\lambda f_\mu = f_{\lambda+\mu}$ для всех $\lambda, \mu \in M$. Каждый дивизор $D \in \mathcal{D}^B$ определяет элемент $\varkappa(D) \in N$ по формуле $\langle \varkappa(D), \lambda \rangle = \operatorname{ord}_D(f_\lambda)$ для всех $\lambda \in M$. В силу нормальности многообразия X имеем

$$\Gamma = \{\lambda \in M \mid \langle \varkappa(D), \lambda \rangle \geq 0 \text{ для всех } D \in \mathcal{D}^B\}. \quad (3)$$

В частности, множество $\{\varkappa(D) \mid D \in \mathcal{D}^B\}$ порождает строго выпуклый конус в $N_{\mathbb{Q}}$.

Для каждого строго выпуклого конуса $\mathscr{C} \subset N_{\mathbb{Q}}$ обозначим через $\mathscr{C}^1$ множество примитивных элементов ρ решетки N, для которых луч $\mathbb{Q}_{\geq 0}\rho$ является гранью конуса $\mathscr{C}$. Для каждого $\rho \in \mathscr{C}^1$ определим множество

$$\mathfrak{R}_\rho(\mathscr{C}) = \{\mu \in M \mid \langle \rho, \mu \rangle = -1; \\ \langle \rho', \mu \rangle \geq 0 \text{ для всех } \rho' \in \mathscr{C}^1 \backslash \{\rho\}\}. \quad (4)$$

Элементы множества $\mathfrak{R}(\mathscr{C}) = \coprod_{\rho \in \mathscr{C}^1} \mathfrak{R}_\rho(\mathscr{C})$ называются *корнями Демазюра* конуса $\mathscr{C}$. Положим

$$\Gamma(\mathscr{C}) = \{\lambda \in M \mid \langle x, \lambda \rangle \geq 0 \text{ для всех } x \in \mathscr{C}\} \quad (5)$$

и рассмотрим алгебру $A(\mathscr{C}) = \bigoplus_{\lambda \in \Gamma(\mathscr{C})} \mathbb{K} f_\lambda$. В дальнейшем нам понадобится следующий хорошо известный результат (см. [9, Thm. 2.7]), дающий описание всех T-нормализуемых ЛНД на алгебре $A(\mathscr{C})$.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{C} \subset N_{\mathbb{Q}}$ – произвольный строго выпуклый конус.*

(а) *Множество весов всех T-нормализуемых ЛНД на $A(\mathscr{C})$ есть $\mathfrak{R}(\mathscr{C})$;*

(б) *Для каждого* $\rho \in \mathscr{C}^1$ *и каждого* $\mu \in \mathfrak{R}_\rho(\mathscr{C})$ *существует единственное с точностью до пропорциональности T-нормализуемое ЛНД* ∂_μ *на* $A(\mathscr{C})$ *веса* μ, *задаваемое формулой*

$$\partial_\mu(f_\lambda) = \langle\rho,\lambda\rangle f_\lambda f_\mu \quad (6)$$

для всех $\lambda \in \Gamma(\mathscr{C})$.

6. Пусть H — B-корневая подгруппа на X и $\mathscr{F}_H = \{D \in \mathscr{D} \mid HD = D\}$. Тогда H сохраняет открытое подмножество $X_{\mathscr{F}_H} \subset X$ и тем самым определяет B-нормализуемое ЛНД на алгебре $\mathbb{K}[X_{\mathscr{F}_H}]$. Заметим, что $\mathscr{F}_H = \mathscr{D}$ в случае вертикальной или тороидальной H и $\mathscr{F}_H = \mathscr{D}\backslash\{D_0\}$ в случае размывающей H, двигающей краску D_0 типа (T).

Пусть теперь $\mathscr{F} = \mathscr{D}$ или $\mathscr{F} = \mathscr{D}\backslash\{D_0\}$, где $D_0 \in \mathscr{D}$ — краска типа (T). Наша цель в данном пункте — описать все B-нормализуемые ЛНД на алгебре $\mathbb{K}[X_\mathscr{F}]$.

Применим теорему 1 и сохраним обозначения Z, L, P_u, используемые в этой теореме. Тогда имеется P-эквивариантный изоморфизм $X_\mathscr{F} \simeq P_u \times Z$, по которому мы будем отождествлять эти два многообразия в дальнейшем. Без ограничения общности будем считать, что $L \supset T$. В силу предложения 2 коммутант группы L действует тривиально на Z. Поскольку $X_\mathscr{F}$ содержит открытую B-орбиту, многообразие Z содержит открытую T-орбиту, которую мы обозначим через Z_0. Зафиксируем также произвольную точку $z_0 \in Z_0$. Обозначим через L_0 ядро действия группы L на Z и положим $T_0 = T \cap L_0$. Заметим, что M состоит в точности из всех характеров тора T, ограничение которых на T_0 тривиально.

Для всякого $\lambda \in M$ ограничение функции f_λ на подмногообразие Z является T-полуинвариантной рациональной функцией, которую мы будем обозначать тем же символом f_λ. Тогда $\mathbb{K}[Z] = \bigoplus_{\lambda\in\Gamma_Z} \mathbb{K}f_\lambda$, где

$$\Gamma_Z = \{\lambda \in M \mid \langle\varkappa(D),\lambda\rangle \geq 0 \text{ для всех } D \in \mathscr{D}^B\backslash\mathscr{F}\}. \quad (7)$$

Без ограничения общности будем считать, что $f_\lambda(z_0) = 1$ для всех $\lambda \in M$.

Рассмотрим присоединенное представление группы L в пространстве $\mathfrak{p}_u = \operatorname{Lie} P_u$ и разложим $\mathfrak{p}_u$ в прямую сумму неприводимых L-инвариантных подпространств. Хорошо известно (см. [6, Thm. 0.1]), что все входящие в данное разложение слагаемые попарно неизоморфны как L-модули; пусть $\Omega \subset \Delta$ — множество старших весов этих слагаемых относительно борелевской подгруппы $B \cap L \subset L$. Для каждого $\alpha \in \Omega$ зафиксируем ненулевой вектор $e_\alpha \in \mathfrak{p}_u$ веса α. Действие группы P_u на себе умножениями справа индуцирует действие алгебры Ли $\mathfrak{p}_u$ на алгебре $\mathbb{K}[P_u]$; для каждого $\alpha \in \Omega$ обозначим через δ_α дифференцирование алгебры $\mathbb{K}[P_u]$, определяемое действием элемента e_α. Это дифференцирование B-инвариантно веса α, автоматически локально нильпотентно и соответствует действию группы $\{\exp(te_\alpha) \mid t \in \mathbb{K}\}$ на P_u умножениями справа. Будем рассматривать δ_α как ЛНД на всей алгебре $\mathbb{K}[P_u \times Z] \simeq \mathbb{K}[P_u] \otimes_\mathbb{K} \mathbb{K}[Z]$, полагая $\delta_\alpha(\mathbb{K}[Z]) = 0$.

Для каждого характера $\mu \in \mathfrak{X}(T)$ положим

$$\begin{aligned} \Omega_\mu &= \{\alpha \in \Omega \mid \mu|_{T_0} = \alpha|_{T_0}\}; \\ \Omega_\mu^0 &:= \{\alpha \in \Omega_\mu \mid \mu - \alpha \in \Gamma_Z\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что условие $\mu|_{T_0} = \alpha|_{T_0}$ равносильно $\mu - \alpha \in M$.

Т е о р е м а 3. *Всякое B-нормализуемое ЛНД веса* μ *на алгебре* $\mathbb{K}[P_u \times Z]$ *имеет вид*

$$\sum_{\alpha\in\Omega_\mu^0} c_\alpha f_{\mu-\alpha}\delta_\alpha + \partial_Z, \quad (9)$$

где $c_\alpha \in \mathbb{K}$ *и* ∂_Z *— некоторое T-нормализуемое ЛНД веса* μ *на* $\mathbb{K}[Z]$, *продолженное тривиально на* $\mathbb{K}[P_u]$. *Обратно, всякое дифференцирование на* $\mathbb{K}[P_u \times Z]$ *указанного вида является B-нормализуемым веса* μ *и локально нильпотентным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ∂ — B-нормализуемое ЛНД веса μ на $\mathbb{K}[P_u \times Z]$, и пусть ∂_Z — ограничение ∂ на подалгебру $\mathbb{K}[Z]$. Далее будем рассматривать ∂_Z как дифференцирование на всей алгебре $\mathbb{K}[P_u \times Z]$, полагая $\partial_Z(\mathbb{K}[P_u]) = 0$. Продолжение дифференцирования $\partial - \partial_Z$ на алгебру $\mathbb{K}[P_u \times Z_0]$ задает B-полуинвариантное веса μ векторное поле ξ на гладком многообразии $P_u \times Z_0$. Поскольку группа B действует на $P_u \times Z_0$ транзитивно, ξ однозначно определяется своим значением v в точке (e, z_0), где $e \in P_u$ — единичный элемент. Так как $\partial - \partial_Z$ действует тривиально на $\mathbb{K}[Z_0]$, то v является $B \cap L_0$-полуинвариантным вектором в $\mathfrak{p}_u$ веса $\mu|_{T_0}$, а значит, $v = \sum_{\alpha\in\Omega_\mu} c_\alpha e_\alpha$ для некоторых $c_\alpha \in \mathbb{K}$. С другой стороны, заметим, что дифференцирование $\sum_{\alpha\in\Omega_\mu} c_\alpha f_{\mu-\alpha}\delta_\alpha$ на $\mathbb{K}[Z_0]$ также B-полуинвариантно веса μ и соответствует тому же касательному вектору в точке (e, z_0), потому оно совпадает с $\partial - \partial_Z$. Поскольку данное дифференцирование сохраняет алгебру $\mathbb{K}[P_u \times Z]$, должно выполняться $c_\alpha = 0$ для всех $\alpha \in \Omega_\mu$ с условием $\mu - \alpha \notin \Gamma_Z$, что и доказывает первое утверждение.

Пусть теперь ∂ – дифференцирование на $\mathbb{K}[P_u \times Z]$ вида (9). Тогда ∂ автоматически B-нормализуемо веса μ, и нам остается проверить, что ∂ локально нильпотентно. Поскольку $\mathbb{K}[P_u]$ является рациональным P_u-модулем (относительно действия справа), достаточно проверить локальную нильпотентность ∂ на произвольном подпространстве вида $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[Z]$, где $V \subset \mathbb{K}[P_u]$ – конечномерное P_u-инвариантное подпространство. Так как образ алгебры $\mathfrak{p}_u$ в $\mathfrak{gl}(V)$ нильпотентен, то в V существует флаг подпространств

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_s = V \tag{10}$$

со свойством $\mathfrak{p}_u V_i \subset V_{i-1}$ для всех $i = 1, \ldots, s$. Отсюда следует, что для всех $i = 1, \ldots, s$, $g \in V_i$ и $f \in \mathbb{K}[Z]$ имеем

$$\begin{aligned} \partial(gf) = \sum_{\alpha\in\Omega_\mu^0} c_\alpha \delta_\alpha(g) f_{\mu-\alpha} f + g\partial_Z(f) \in \\ \in g\partial_Z(f) + V_{i-1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[Z], \end{aligned} \tag{11}$$

поскольку $\delta_\alpha(g) = e_\alpha g \in V_{i-1}$ для всех $\alpha \in \Omega$. Так как ∂_Z – ЛНД на $\mathbb{K}[Z]$, то получаем $\partial^k(gf) \in V_{i-1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[Z]$ для некоторого $k > 0$. Доказательство завершается применением индукции по i.

7. Сохраним предположения и обозначения предыдущего пункта. Теперь изучим вопрос, когда B-нормализуемое ЛНД на алгебре $\mathbb{K}[P_u \times Z]$ сохраняет подалгебру $\mathbb{K}[X]$ и тем самым определяет B-корневую подгруппу на всем многообразии X. Пусть $\lambda \mapsto \overline{\lambda}$ – произвольный оператор проектирования пространства $\mathfrak{X}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ на подпространство $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Пусть также $\mathscr{E}_Z \subset N_{\mathbb{Q}}$ – конус, порожденный множеством $\{\varkappa(D) \mid D \in \mathfrak{D}^B \backslash \mathscr{F}\}$, так что $\Gamma_Z = \Gamma(\mathscr{E}_Z)$ в силу (7) и $\mathbb{K}[Z] = A(\mathscr{E}_Z)$ (см. обозначения в п. 5).

Т е о р е м а 4. *Существует набор констант* $\{C_D \mid D \in \mathscr{F}\}$ *со следующим свойством*: *если* $\mu \in \mathfrak{X}(T)$ *и* $\langle \nu_D, \overline{\mu} \rangle \geq C_D$ *для всех* $D \in \mathscr{F}$, *то всякое* B-*нормализуемое ЛНД на* $\mathbb{K}[P_u \times Z]$ *веса* μ *сохраняет* $\mathbb{K}[X]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $F_1, \ldots, F_k$ – фиксированная система порождающих алгебры $\mathbb{K}[X]$. Для каждого $i = 1, \ldots, k$ имеем $F_i = \sum_{j=1}^{n_i} g_{ij} f_{\lambda_{ij}}$ для некоторых функций $g_{ij} \in \mathbb{K}[P_u]$ и весов $\lambda_{ij} \in \Gamma_Z$. Если ∂ – произвольное дифференцирование алгебры $\mathbb{K}[P_u \times Z]$, то ∂ сохраняет $\mathbb{K}[X]$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{ord}_D(\partial(F_i)) \geq 0$ для всех $D \in \mathscr{F}$ и $i = 1, \ldots, k$.

Чтобы подобрать требуемый набор констант, в силу теоремы 3 для каждого веса $\mu \in \mathfrak{X}(T)$ достаточно потребовать, чтобы каждое слагаемое в сумме (9) сохраняло $\mathbb{K}[X]$.

Для всех $D \in \mathscr{F}$, $i = 1, \ldots, k$ и $\alpha \in \Omega_\mu^0$ при $\delta_\alpha(F_i) \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_D(f_{\mu-\alpha}\delta_\alpha(F_i)) = \operatorname{ord}_D(f_{\mu-\alpha}) + \operatorname{ord}_D(\delta_\alpha(F_i)) = \\ = \langle \nu_D, \overline{\mu} \rangle - \langle \nu_D, \overline{\alpha} \rangle + \operatorname{ord}_D(\delta_\alpha(F_i)). \end{aligned} \tag{12}$$

Если $\partial_Z \neq 0$, то по теореме 2 имеем $\mu \in \mathfrak{R}_\rho(\mathscr{E}_Z)$ для некоторого $\rho \in \mathscr{E}_Z^1$ (в частности, $\mu \in M$ и $\overline{\mu} = \mu$) и существует такая ненулевая константа $c \in \mathbb{K}$, что $\partial_Z(f_\lambda) = c\langle \rho, \lambda \rangle f_\lambda f_\mu$ для всех $\lambda \in \Gamma_Z$. Тогда для всех $D \in \mathscr{F}$ и $i = 1, \ldots, k$ при $\partial_Z(F_i) \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_D(\partial_Z(F_i)) = \operatorname{ord}_D\left(\sum_{j=1}^{n_i} \langle \rho, \lambda_{ij} \rangle g_i f_{\lambda_{ij}} f_\mu\right) = \\ = \langle \nu_D, \overline{\mu} \rangle + \operatorname{ord}_D\left(\sum_{j=1}^{n_i} \langle \rho, \lambda_{ij} \rangle g_i f_{\lambda_{ij}}\right) \geq \\ \geq \langle \nu_D, \overline{\mu} \rangle + \min\{\operatorname{ord}_D(g_i f_{\lambda_{ij}}) \mid j = 1, \ldots, n_i\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Остается заметить, что все выражения в (12) и (13) будут неотрицательны при подходящем выборе искомых констант.

8. Выведем несколько следствий из теорем 3 и 4.

С л е д с т в и е 1. *Все* B-*нормализуемые ЛНД на* $\mathbb{K}[X]$ *одного веса образуют конечномерное векторное пространство над* $\mathbb{K}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу [1, Prop. 4.22] любые две горизонтальных B-корневых подгруппы на X одного и того же веса μ двигают один и тот же дивизор $D \in \mathfrak{D}^B$. Следовательно, в условиях п. 6 можно подобрать такое подмножество $\mathscr{F} \subset \mathfrak{D}$, что все B-корневые подгруппы на X веса μ сохраняют $X_{\mathscr{F}}$. По теоремам 3 и 2 все B-нормализуемые ЛНД на $\mathbb{K}[X_{\mathscr{F}}]$ веса μ образуют конечномерное векторное пространство. Условие сохранения подалгебры $\mathbb{K}[X]$ выделяет подпространство в данном векторном пространстве.

Пусть $\mathscr{E} \subset N_{\mathbb{Q}}$ – конус, порожденный множеством $\{\varkappa(D) \mid D \in \mathfrak{D}^B\}$, так что $\Gamma = \Gamma(\mathscr{E})$ в силу (3).

С л е д с т в и е 2. *Пусть* $D \in \mathfrak{D}^B$, *причем либо* $D \in \mathfrak{D}^G$, *либо* D *является краской типа* (T). *Предположим, что существует элемент* $\rho \in \mathscr{E}^1$ *с условиями* $\varkappa(D) \in \mathbb{Q}_{\geq 0}\rho$ *и* $\varkappa(D') \notin \mathbb{Q}_{\geq 0}\rho$ *для всех* $D' \in \mathfrak{D}^B \backslash \{D\}$. *Тогда существует* B-*корневая подгруппа на* X, *двигающая* D.

Доказательство. Положим $\mathcal{F} = \mathcal{D}$ при $D \in \mathcal{D}^G$ и $\mathcal{F} = \mathcal{D}\backslash\{D\}$ иначе. Сохраним обозначения пп. 6 и 7. Поскольку $\rho \in \mathscr{E}_Z$ и $\mathscr{E}_Z \subset \mathscr{E}$, имеем $\rho \in \mathscr{E}_Z^1$. Выберем любой элемент $\mu \in \mathfrak{R}_\rho(\mathscr{E}_Z)$ и рассмотрим B-нормализуемое ЛНД ∂_μ на $\mathbb{K}[P_u \times Z]$ веса μ, действующее тривиально на $\mathbb{K}[P_u]$ и по формуле (6) на $\mathbb{K}[Z]$. Из условия следует, что существует вес $\lambda \in \Gamma$ со свойствами $\langle\rho,\lambda\rangle = 0$ и $\langle\varkappa(D'),\lambda\rangle > 0$ для всех $D' \in \mathcal{F}$. Тогда для всех целых $N > 0$ имеем $N\lambda + \mu \in \mathfrak{R}_\rho(\mathscr{E}_Z)$. По теореме 4 найдется такое значение N_0, что при всех $N \geq N_0$ ЛНД $\partial_{N\lambda+\mu} = f_{N\lambda}\partial_\mu$ сохраняет подалгебру $\mathbb{K}[X]$ и тем самым определяет B-корневую подгруппу на X. Эта B-корневая подгруппа двигает D в силу [1, Prop. 4.22].

Ввиду [1, Prop. 3.9] всякий дивизор $D \in \mathcal{D}^G$ автоматически удовлетворяет условию следствия 2. Отсюда вытекает следующий результат, который был сформулирован в качестве гипотезы в [1, Conj. 4.29].

Следствие 3. *Для всякого $D \in \mathcal{D}^G$ существует B-корневая подгруппа на X, двигающая D.*

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа Р.С. Авдеева была поддержана грантом Российского научного фонда № 22-41-02019. Работа В.С. Жгуна выполнена в рамках государственного задания по проведению фундаментальных научных исследований по проекту № FNEF-2022-0011, а также в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arzhantsev I., Avdeev R.* Root subroups on affine spherical varieties. 2021. Preprint arXiv:2012.02088v2
2. *Knop F.* On the set of orbits for a Borel subgroup // Comment. Math. Helv. 1995. V. 70. № 2. P. 285–309.
3. *Brion M.* On orbit closures of spherical subgroups in flag varieties // Comment. Math. Helv. 2001. V. 76. № 2. P. 263–299.
4. *Luna D.* Grosses cellules pour les variétés sphériques. In: Algebraic Groups and Lie Groups. Austral. Math. Soc. Lect. Ser. 9. Cambridge Univ. Press, Cambridge. 1997. P. 267–280.
5. *Timashev D.A.* Homogeneous spaces and equivariant embeddings. Encycl. Math. Sci. V. 138. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
6. *Kostant B.* Root systems for Levi factors and Borel-de Siebenthal theory. In: Symmetry and spaces. Birkhauser Boston, 2010. P. 129–152.
7. *Knop F.* The asymptotic behavior of invariant collective motion // Invent. Math. 1994. V. 116. № 1. P. 309–328.
8. *Brion M., Luna D., Vust Th.* Espaces homogénes sphériques // Invent. Math. 1986. V. 84. № 3. P. 617–632.
9. *Liendo A.* Affine $\mathbb{T}$-varieties of complexity one and locally nilpotent derivations // Transform. Groups. 2010. V. 15. № 2. P. 389–425.

ON THE EXISTENCE OF *B*-ROOT SUBGROUPS ON AFFINE SPHERICAL VARIETIES

R. S. Avdeev[a] and V. S. Zhgoon[a,b]

[a] *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia*

[b] *Federal State Institution “Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences”, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.P. Platonov

Let X be an irreducible affine algebraic variety that is spherical with respect to the action of a connected reductive group G. In this paper we provide sucient conditions, formulated in terms of weight combinatorics, for the existence of one-parameter additive actions on X normalized by a Borel subgroup. As an application, we prove that every G-stable prime divisor in X can be connected with the open G-orbit by means of a suitable B-normalized one-parameter additive action.

Keywords: additive group action, toric variety, spherical variety, Demazure root, locally nilpotent derivation, local structure theorem

EDN: PEQXTG
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 11–15

МАТЕМАТИКА

УДК 517.26+517.28

ФОРМУЛЫ ТИПА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКАХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СИСТЕМАМИ

© 2022 г. А. Н. Агаджанов[1,*]

Представлено академиком РАН С.Н. Васильевым 05.11.2021 г.
Поступило 06.10.2021 г.
После доработки 27.02.2022 г.
Принято к публикации 28.02.2022 г.

На основе полиномов Бернштейна получены два класса формул типа Тейлора для произвольных непрерывных функций на отрезках. Эти формулы применимы как к гладким функциям, так и к функциям, которые ни в одной точке не имеют ни конечных, ни бесконечных производных. В работе формулы типа Тейлора рассматриваются в тесной связи с производными числами Дини, существующими для любых непрерывных функций. Приводится пример применения этих формул в задаче управления распределенной колебательной системой, динамика которой подчиняется представлению Даламбера.

Ключевые слова: формула Тейлора, полиномы Бернштейна, фрактальные функции, производные числа Дини, дробные производные Капуто, распределенные системы

DOI: 10.31857/S2686954322020023

Формула Тейлора для гладких функций на конечном отрезке $[a, b]$ является фундаментальным результатом классического математического анализа [1]. Ее вывод принципиально связан с существованием у непрерывных функций, по крайней мере, производной первого порядка, хотя бы в одной внутренней точке этого отрезка. Однако в банаховом пространстве $C[a,b]$ множество таких функций образует лишь множество первой категории по Бэру [2]. Иначе говоря, оно представляется в виде счетного объединения нигде неплотных множеств из $C[a,b]$. С точки зрения теории Бэра, значительно более широким классом непрерывных функций, а именно множеством второй категории в $C[a,b]$, является множество фрактальных функций.

Определение 1. Непрерывную функцию на $[a, b]$ назовем *фрактальной*, если существует множество мощности континуума из $[a, b]$, в точках которого по крайней мере одно из производных чисел Дини обращается в бесконечность.

Примерами фрактальных функций являются непрерывные функции с неограниченной вариацией, у которых на всюду плотных множествах из $[a, b]$ мощности континуума по крайней мере одно из прозводных чисел Дини равняется $+\infty$.

Именно такими являются всюду недифференциуемые функции Больцано, Вейерштрасса, Такаджи, Безиковича и др. [3, 4].

Фрактальными являются также непрерывные функции, сингулярные по Лебегу, которые имеют ограниченную вариацию и производную, равную нулю почти всюду. Более того, у сингулярных функций, не имеющих интервалов монотонности, все производные числа Дини обращаются в бесконечность с соответствующим знаком на множестве мощности континуума и второй категории по Бэру из $[a, b]$ [4].

Вместе с тем существуют непрерывные функции, не имеющие интервалов монотонности, которые в каждой точке интервала (a, b) обладают конечной производной [5]. В соответствии с выше приведенным определением, такие функции фрактальными не являются.

В последние годы фрактальные функции находят применение в задачах, связанных с моделированием хаотической динамики физических систем, а также в задачах управления ими [6–8]. Очевидно, что классическая формула Тейлора в принципе не применима к фрактальным функциям. Этот факт существенно сокращает сферу ее практического применения.

[1] *Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: ashot_ran@mail.ru*

В настоящей работе приведены два класса формул типа Тейлора, справедливых для произвольных функций из $C[a,b]$, структура которых радикально отличается от классической формулы Тейлора.

Центральную роль при построении новых классов формул типа Тейлора играют полиномы Бернштейна, позволяющие при фиксированной степени полиномов и допустимом выборе приращения их аргументов получать сколь угодно точные поточечные приближения произвольных непрерывных функций на конечных отрезках.

1. ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА И КОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ЧИСЛА ДИНИ ОТ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

История появления формулы Тейлора и различных ее доказательств на протяжении последних трех столетий представлена в [9]. В последние десятилетия получены формулы Тейлора на основе различных типов дробных производных от непрерывных функций [10]. С современной точки зрения фундаментальное значение в теории непрерывных функций имеют не только теоремы, связанные с формулой Тейлора, но и теорема Данжуа, которая описывает поведение производных чисел Дини (аналогов классических производных), существующих для любых непрерывных функций [11].

Напомним, что верхним правым производным числом Дини $D^+f(x)$ функции f в точке x называют предел $D^+f(x) = \overline{\lim\limits_{h\to 0+}} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Правое нижнее производное число Дини функции f в точке x определяется как $D_+f(x) = \underline{\lim\limits_{h\to 0+}} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Верхние $D^-f(x)$ и нижние $D_-f(x)$ левые производные числа Дини функции f в точке x определяются аналогично.

С целью полноты изложения приведем формулировку теоремы Данжуа [5, 11].

Теорема 1 (Данжуа). *Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, определенная на отрезке $[a,b]$. Тогда в каждой точке множества полной меры выполняется одно из следующих условий*:

а) $D^+ = D^- = +\infty$, $D_+ = D_- = -\infty$;

б) $D^+ = D_- \neq \pm\infty$, $D_+ = -\infty$, $D^- = +\infty$;

в) $D_+ = D^- \neq \pm\infty$, $D^+ = +\infty$, $D_- = -\infty$;

г) $D^+ = D^- = D_+ = D_- \neq \pm\infty$.

Из теоремы Данжуа следует, что поведение производных чисел Дини отражает как локальную, так и глобальную сложность непрерывных функций.

Ниже представлена теорема, описывающая связь между конечными производными числами Дини и формулами Тейлора для гладких функций. Эти формулы принципиально отличаются друг от друга видом остаточного члена.

Теорема 2. *Пусть x_0 — произвольная точка из (a,b), величина $h > 0$ (это условие не нарушает общности результатов) такова, что $x_0 + h \in (a,b)$. Предположим, что функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до $(n-1)$ порядка на интервале (a,b), а производные числа Дини от функции $f^{(n-1)}(x)$ конечны на (a, b). Тогда имеют место следующие представления:*

$$1.\ f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{h^n f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad (1)$$

если $x_0 \in P$, где P — множество второй категории полной лебеговой меры на (a, b), на котором производные числа Дини от функции $f^{(n-1)}(x)$ конечны и равны; $\xi \in (x_0, x_0+h) \cap P$.

$$2.\ f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{h^n}{n!}\left(t \cdot f_+^{(n)}(\theta) + (1-t)\cdot f_-^{(n)}(\theta)\right), \quad (2)$$

если $x_0 \in P_1$, где *P_1 — нуль-множество первой категории из (a, b), на котором производные числа Дини от функции $f^{(n-1)}(x)$* удовлетворяют *равенствам $D^+f^{(n-1)}(x) = D_+f^{(n-1)}(x) = f_+^{(n)}(x)$ ($f_+^{(n)}(x)$ — правосторонняя производная от $f^{(n-1)}(x)$), $D^-f^{(n-1)}(x) = D_-f^{(n-1)}(x) = f_-^{(n)}(x)$ ($f_-^{(n)}(x)$ — левосторонняя производная от $f^{(n-1)}(x)$), причем $f_+^{(n-1)}(x) \neq f_-^{(n-1)}(x)$.*

Точки из множества P_1 либо принадлежат нуль-множеству типа G_δ, либо нуль-множеству типа $G_{\delta\sigma}$. Параметр $t \in [0,1]$ и определяется по формуле

$$t = \frac{\dfrac{f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h} - f_-^{(n)}(\theta)}{f_+^{(n)}(\theta) - f_-^{(n)}(\theta)},$$

где $\theta \in (x_0, x_0+h) \cap P_1$ — произвольное решение неравенства

$$\left(\frac{f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h} - f_+^{(n)}(\theta)\right) \times \left(\frac{f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h} - f_-^{(n)}(\theta)\right) \le 0.$$

3. а) $$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + \\ + \frac{h^n}{n!}(t_1 D^+ f^{(n-1)}(\theta_1) + (1-t_1)D^- f^{(n-1)}(\theta_1)), \quad (3)$$

где $t_1 = \dfrac{D^- f^{(n-1)}(\theta_1)}{D^- f^{(n-1)}(\theta_1) - D^+ f^{(n-1)}(\theta_1)}$, θ_1 *– произвольное решение неравенства* $D^+ f^{(n-1)}(\theta_1)\cdot D^- f^{(n-1)}(\theta_1) \le 0$;

б) $$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + \\ + \frac{h^n}{n!}(t_2 D^+ f^{(n-1)}(\theta_2) + (1-t_2)D_- f^{(n-1)}(\theta_2)), \quad (4)$$

где $t_2 = \dfrac{D_- f^{(n-1)}(\theta_2)}{D_- f^{(n-1)}(\theta_2) - D^+ f^{(n-1)}(\theta_2)}$, θ_2 *– произвольное решение неравенства* $D^+ f^{(n-1)}(\theta_2)\cdot D_- f^{(n-1)}(\theta_2) \le 0$;

в) $$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + \\ + \frac{h^n}{n!}(t_3 D_+ f^{(n-1)}(\theta_3) + (1-t_3)D^- f^{(n-1)}(\theta_3)), \quad (5)$$

где $t_3 = \dfrac{D^- f^{(n-1)}(\theta_3)}{D^- f^{(n-1)}(\theta_3) - D_+ f^{(n-1)}(\theta_3)}$, θ_3 *– произвольное решение неравенства* $D^- f^{(n-1)}(\theta_3)\cdot D_+ f^{(n-1)}(\theta_3) \le 0$;

г) $$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + \\ + \frac{h^n}{n!}(t_4 D_+ f^{(n-1)}(\theta_4) + (1-t_4)D_- f^{(n-1)}(\theta_4)), \quad (6)$$

где $t_4 = \dfrac{D_- f^{(n-1)}(\theta_4)}{D_- f^{(n-1)}(\theta_4) - D_+ f^{(n-1)}(\theta_4)}$, θ_4 *– произвольное решение неравенства* $D_+ f^{(n-1)}(\theta_4)\cdot D_- f^{(n-1)}(\theta_4) \le 0$,

если $x_0 \in P_2$, *где* P_2 *– нуль-множество первой категории, на котором производные числа Дини попарно не равны друг другу.*

Точки из множества P_2 *либо принадлежат нуль-множеству типа* G_σ, *либо нуль-множеству типа* $G_{\delta\sigma}$.

Следствие 1. *Производные числа Дини от функции* $f^{(n-1)}(x)$ *почти всюду дифференцируемы на* (a, b).

Следствие 2. *Производные числа Дини от функции* $f^{(n-1)}(x)$ *обладают N-свойством Лузина, т.е. образ произвольного измеримого множества из* (a,b) *при отображении производным числом Дини является измеримым множеством из* $\mathbb{R}$, *причем образом произвольного нуль-множества из* (a,b) *является нуль-множество из* $\mathbb{R}$.

Следствие 3. *Производные числа Дини от функции* $f^{(n-1)}(x)$ *удовлетворяют* T_2*-условию на* (a,b), *т.е. почти каждое свое значение они принимают не более счетного числа раз.*

Следствие 4. *Каждое из множеств* P, P_1, P_2 *может быть представлено в виде конечного или счетного объединения множеств, на каждом из которых производные числа Дини от функции* $f^{(n-1)}(x)$ *удовлетворяет условию Липшица.*

Следствие 5. *Множество точек непрерывности функции* $f^{(n)}(x)$ *есть множество* $P_0 \subset P$, *которое является всюду плотным* G_δ*-множеством на* P.

Представления (1), (2) и (3)–(6) – являются формулами Тейлора–Лагранжа, Тейлора–Караматы [12] и Тейлора–Гуднера [13] соответственно. Они справедливы только для непрерывных функций с ограниченными производными числами Дини.

Ниже представлены формулы типа Тейлора для произвольных непрерывных функций на отрезках, у которых производные числа Дини могут принимать бесконечные значения. Как указано выше, именно такой фундаментальной особенностью обладают фрактальные функции.

2. КЛАССЫ ФОРМУЛ ТИПА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА КОНЕЧНЫХ ОТРЕЗКАХ

Не нарушая общности, в дальнейшем будем рассматривать непрерывные функции на отрезке [0, 1].

Теорема 3. *Для произвольной функции* $f \in C[0,1]$ *при* $x_0 \in (0,1)$, $h > 0$, $x_0 + h \in (0,1)$ *имеет место представление*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \\ + A_{0,n}(x_0,h)\cdot f(0) + A_{n,n}(x_0,h)\cdot f(1) + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) A_{k,n}(x_0,h) + R_n(f;x_0,h), \quad (7)$$

где $n \ge 2$, $C_n^k = \dfrac{k!}{k!(n-k)!}$ $(n \ge k)$, $A_{0,\,n}(x_0,\ h) = (1-(x_0+h))^n - (1-x_0)^n$, $A_{n,n}(x_0,h) = (x_0+h)^n - x_0^n$, $A_{k,n} = \sum_{l=0}^{n-k}(-1)^{n-k-l}\cdot C_{n-k}^l\left(\sum_{s=1}^{n-l} C_{n-l}^s \cdot x_0^{n-l-s}\cdot h^s\right)$, $R_n(f;\ x_0,\ h) = r_n^1(f;x_0,h) - r_n^0(f;x_0)$ *– остаточный член, непрерывно зависящий от параметра h и удовлетворяющий условию* $\lim_{h\to 0} R_n(f;x_0,h) = 0$.

Здесь $r_n^0(f;x_0)$, $r_n^1(f;x_0,h)$ *– погрешности приближений функции f полиномом Бернштейна*

$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$ *в точках* x_0 *и* $x_0 + h$ *соответственно.*

Следствие 6. *Непрерывная функция f имеет в точке x_0 конечную производную тогда и только тогда, когда при некотором $n \in N$ существует конечный предел*

$$\lim_{h\to 0} \frac{R_n(f;x_0,h)}{h}.$$

При каждом натуральном значении $n \geq 2$ представление (7) является формулой типа Тейлора первого класса.

Из (7) следует, что для оценивания значений произвольной непрерывной функции f в точках конечного интервала принципиально не требуется наличия у нее производных как целого, так и дробного порядков (любых видов) хотя бы в одной точке.

В отличие от теоремы 3 в следующей теореме указана процедура выбора параметра h в зависимости от конкретной функции f, точки x_0, а также величин n, N и α.

Теорема 4. *Для произвольной функции $f \in C[0,1]$ при $x_0 \in (0,1)$, $h > 0$, $x_0 + h \in (0,1)$, $0 < \alpha < 1$, $n \geq 2$, $N \geq 2$ имеет место представление*

$$\begin{gathered} f(x_0 + h) = f(x_0) + \\ + A_{0,n}(x_0,h)\cdot f(0) + A_{n,n}(x_0,h)\cdot f(1) + \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)((x_0+h)^\alpha \times \\ \times \cdot {}_C Dg_{k,n}(\xi_{k,n}) - x_0^\alpha \cdot {}_C Dg_{k,n}(\lambda_{k,n})) + R_n(f;x_0,h), \end{gathered} \tag{8}$$

где $A_{0,n}(x_0,h) = (1-(x_0+h))^n - (1-x_0)^n$, $A_{n,n}(x_0,h) = (x_0+h)^n - x_0^n$, ${}_C D^\alpha g_{k,n}(t)$ — *производная Капуто от функции* $g_{k,n}(t) = t^k(1-t)^{n-k}$, *которая в каждой точке может быть найдена по формуле*

$$\begin{gathered} {}_C D^\alpha g_{k,n}(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(\alpha-1)} \times \\ \times \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma(p-1+\alpha)}{\Gamma(p+1)} \cdot U_{k,n,p}(t) + \\ + \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{n-k-l} \cdot (n-l) \cdot C_{n-k}^l \cdot t^{n-l-1} \right). \end{gathered}$$

Здесь $U_{k,n,p} = \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{n-k-l} \cdot \frac{(n-l)(n-l-1)}{n-l+p-1} \cdot C_{n-k}^l \cdot t^{n-l-1}$.

Числа $\xi_{k,n} \equiv \xi_{k,n}(x_0,h,\alpha)$ *при каждом* $k = 1, \ldots, n-1$ *являются корнями уравнений*

$$\begin{gathered} \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{n-k-l} \cdot C_{n-k}^l \cdot \frac{\Gamma(n-l+1)}{\Gamma(n-l-\alpha+1)} \cdot z^{n-l-\alpha} = \\ = \Gamma(\alpha+1)\cdot(x_0+h)^{k-\alpha}\cdot(1-(x_0+h))^{n-k}, \end{gathered}$$

причем $0 \leq \xi_{k,n} \leq x_0 + h$, *числа* $\lambda_{k,n}(x_0,\alpha)$ *при каждом* $k = 1, \ldots, n-1$ *являются корнями уравнений*

$$\begin{gathered} \sum_{l=0}^{n-k} (-1)^{n-k-l} \cdot C_{n-k}^l \cdot \frac{\Gamma(n-l+1)}{\Gamma(n-l-\alpha+1)} \cdot z^{n-l-\alpha} = \\ = \Gamma(\alpha+1)\cdot x_0^{k-\alpha}\cdot(1-x_0)^{n-k}, \end{gathered}$$

причем $0 \leq \lambda_{k,n} \leq x_0$.

Допустимые значения параметра h при фиксированных значениях x_0, α, n, N должны удовлетворять неравенству

$$\begin{gathered} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left| \frac{(x_0+h)^\alpha\cdot(\xi_{k,n})^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(\alpha-1)} \times \right. \\ \times \sum_{p=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(p-1+\alpha)}{\Gamma(p+1)} \cdot U_{k,n,p}(\xi_{k,n}) - \\ - \frac{x_0^\alpha\cdot(\lambda_{k,n})^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(\alpha-1)} \times \\ \left. \times \sum_{p=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(p-1+\alpha)}{\Gamma(p+1)} \cdot U_{k,n,p}(\lambda_{k,n}) \right| \leq 10^{-q}\cdot\varepsilon \end{gathered}$$

где $q > 0$ такое достаточно большое число, что для остаточного члена выполняется неравенство $|R(f;x_0,h)| \leq \varepsilon$.

Для каждой пары натуральных значений $n \geq 2$, $N \geq 2$ и $0 < \alpha < 1$ представление (8) определяет формулу типа Тейлора второго класса.

Отметим, что формула (8) принципиально связана как с представлением производной Капуто порядка $0 < \alpha < 1$ от непрерывных функций из [14], так и с теоремой о среднем для производных Капуто порядка $0 < \alpha < 1$ из [10].

3. ФОРМУЛЫ ТИПА ТЕЙЛОРА В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ

Приведем пример, показывающий значение формул типа Тейлора (7) и (8) в задаче управления одномерной колебательной системой, динамика которой описывается представлением Даламбера [15]:

$$u(x,t) = \frac{\Phi(x-t)+\Phi(x+t)}{2} + \\ + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \Phi(z)dz + \mu(t-x) + \nu(t-(l-x)).$$

Здесь $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ – нечетные продолжения функций $\varphi(x) = \lim\limits_{m\to\infty}\varphi_m(x)$ и $\psi(x) = \lim\limits_{m\to\infty}\psi_m(x)$ соответственно на сегменты $[-l,0]$ и $[l,2l]$. Функция $\mu(t) = \lim\limits_{m\to\infty}\mu_m(t)$ на $[0,\ T]$, $\mu(0) = 0$, $\mu(t) \equiv 0$ при аргументах $t < 0$. Аналогичным условиям удовлетворяет и функция $\nu(t)$. Отметим, что функции $\mu(t)$ и $\nu(t)$ являются функциями, управляющими динамикой системы.

Функции $\varphi_m(x)$, $\psi_m(x)$, $\mu_m(t)$, $\nu_m(t)$ определяются из условий:

$$\varphi_m(x) = u_m(x,0), \qquad \left.\frac{du_m(x,t)}{dt}\right|_{t=0} = \psi_m(x),$$

$$\mu_m(t) = \frac{\varphi_m(t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \psi_m(z)dz, \tag{9}$$

$$\nu_m(t) = \frac{\varphi_m(l-t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{l-t} \psi(z)dz. \tag{10}$$

Функции $u_m(t)$ являются классическими решениями уравнения

$$\frac{\partial^2 u_m(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_m(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

при $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$.

Не нарушая общности, будем считать, что $T = 1$. Из формул (9) и (10) можно найти значения функций $\mu_m(t)$ и $\nu_m(t)$ в точках $\frac{k}{n}$ при $k = 0, \ldots, n$. Затем с помощью предельных переходов определяются значения функций $\mu(t)$ и $\nu(t)$ в этих же точках. Применяя формулы (7) и (8), можно получить оценки управляющих функций $\mu(t)$ и $\nu(t)$ в произвольной точке из интервала (0, 1).

Аналогичные рассуждения справедливы при оценивании соответствующих функций в других задачах управления распределенными системами [15].

В заключение отметим, что представляет несомненный интерес построение формул типа Тейлора для произвольных непрерывных функций от нескольких действительных переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В.И., Поздняк Э.Г.* Основы математического анализа. М.: Наука, 1971.
2. *Окстоби Дж.* Мера и категория. М.: Мир, 1974.
3. *Jarnichi M., Pflug P.* Continuous Nowhere Differentiable Functions. Springer, 2018.
4. *Garg K.M.* // Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 1969. V. XIV. № 10. P. 1441–1452.
5. *Bruckner A.M.* Differentation of Real Function. N.Y.: Amer. Math. Soc., 1994.
6. *Shu-Tang Liu, Pei Wang*. Fractal Control Theory. Springer Nature Singapore Pte Ltd., 2018.
7. *Агаджанов А.Н.* // ДАН. 2017. Т. 473. № 1. С. 7–11.
8. *Агаджанов А.Н.* // ДАН. 2014. Т. 454. № 5. С. 503–506.
9. *Persson L.E., Rafeiro H., Wall P.* // Note Math. 2017. V. 37. № 1. P. 1–21.
10. *Odibat Z.M., Shawagfeh N.T.* Generalized Taylor's formula // Appl. Math. and Comp. 2007. P. 286–293.
11. *Сакс С.* Теория интеграла. М.: Факториал Пресс, 2004.
12. *Wituba R., Hetmaniok E., Slota D.* // Fasciculi mathematics. 2012. V. 48. P. 145–153.
13. *Goodner D.B.* Amer. Math. Monthly // 1960. V. 67. № 9. P. 852–855.
14. *Atanackovic T.M., Stankovic B.* // Mechanics Research Communications. 2008. V. 35. P. 429–438.
15. *Знаменская Л.Н.* Управление упругими колебаниями. М: Физматлит, 2004.

TAYLOR-TYPE FORMULAS FOR ARBITRARY CONTINUOUS FUNCTIONS ON SEGMENTS AND THEIR APPLICATION IN CONTROL PROBLEMS FOR DISTRIBUTED SYSTEMS

A. N. Agadzhanov[a]

[a] *V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS S.N. Vassilyev

In the present report, on the basis of Bernstein polynomials, two classes of Taylor-type formulas for arbitrary continuous functions on intervals are obtained. These formulas are applicable both to smooth functions and to functions that have neither finite nor infinite derivatives at any point. In this paper, Taylor-type formulas are considered in close connection with the derivatives of Dini numbers that exist for any continuous functions. The message provides an example of the application of these formulas in the problem of controlling a distributed oscillatory system, the dynamics of which obeys the d'Alembert representation.

Keywords: Taylor's formula, Bernstein polynomials, fractal functions, derivatives of Dini numbers, fractional derivatives of Caputo, distributed systems

EDN: PQFYJI
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 16–22

МАТЕМАТИКА

УДК 519.115.8

О ДЛИНЕ ФРАГМЕНТОВ ДЛЯ ОДНОЗНАЧНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СЛОВА ПО ПОЛНОМУ МУЛЬТИМНОЖЕСТВУ ФРАГМЕНТОВ ФИКСИРОВАННОЙ ДЛИНЫ

© 2022 г. В. А. Алексеев[1,*], Ю. Г. Сметанин[2]

Представлено академиком РАН К.В. Рудаковым 18.11.2021
Поступило 23.03.2021 г.
После доработки 27.01.2022 г.
Принято к публикации 17.02.2022 г.

Рассмотрена задача о восстановлении слов из конечного алфавита по мультимножеству их фрагментов одной длины. При этом ставится следующее ограничение на восстанавливаемые слова: они должны быть либо периодическими, либо должны содержать периодическое слово как подслово. Показано, что периодическое слово с периодом p восстановимо мультимножеству фрагментов длины k при $k \geq \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{p} \right\rfloor + 5$. Для слова, состоящего из периодического префикса с периодом q, повторяющегося m раз, и периодического суффикса с периодом p, повторяющегося l раз, получена оценка $k \geq \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{P} \right\rfloor + 5$, где $P = \max(p,q)$, при условии $l \geq mq^{\left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{P} \right\rfloor + 5}$.

Ключевые слова: слово, фрагмент, подслово, периодическое слово, восстановление по неполной информации, восстановление слова, реконструкция слова, мультимножество подслов
DOI: 10.31857/S2686954322020035

В общем случае задачу о восстановлении объекта некоторой природы по неполной информации о его “частях” можно рассматривать как задачу распознавания образов [1]. В частности, когда объектами выступают слова как последовательности символов над определенным алфавитом, возникает вопрос о возможности восстановления слова по множеству или мультимножеству его подслов. Эта задача лежит в области дискретной математики, называемой комбинаторикой слов [2–6], где исследуется связь между последовательностями символов и множествами их подпоследовательностей.

Можно отметить несколько приложений, которые имеет задача о восстановлении слов по подсловам. Так, в символьном кодировании произвольная информация представляется в виде последовательности символов и слов [7]. Такой способ представления информации используется, например, при передаче данных по каналам связи [8], когда важно обеспечить надежную передачу такой закодированной информации, исключающую потери, или позволяющую восстановить исходное слово по доступным фрагментам, если потери случаются [9]. Символьное кодирование также используется, например, в области анализа временных рядов [10], в биоинформатике [11].

В работах [12, 13] получены оценки для длины фрагмента, достаточной для того, чтобы произвольное слово можно было восстановить по мультимножеству всех его подслов.

В данной же работе на восстанавливаемые слова накладывается ограничение, состоящее в том, что слова должны содержать периодическое подслово. Это позволяет получить более низкую оценку на достаточную для восстановления слова длину фрагментов. Так, в [17] представлен результат о восстановлении слова с периодическим суффиксом и непериодическим префиксом. Настоящая же работа теоремой 3 о восстановлении слова с периодическим суффиксом и периодическим префиксом усиливает указанный результат, полученный в [17]. Теоремы 1 и 2, связанные с восстановимостью периодических слов, повторяют аналогичные теоремы из [17]. В настоящей работе

[1] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия*
[2] *Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия*
******E-mail: vasiliy.alekseyev@phystech.edu*

рассматривается еще несколько случаев слов, не являющихся периодическими, но содержащих периодическое слово или подслова. А именно, сформулированы и доказаны теоремы о восстановимости для слова с непериодическим подсловом между периодическими префиксом и суффиксом (теорема 4) и для периодического слова с ограничением на повторяющееся подслово (теорема 5). Каждая из этих теорем, в свою очередь, включает результат теоремы 3 как частный случай.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введем следующие обозначения и определения. Греческими буквами будем обозначать слова, малыми латинскими – символы алфавита. Пусть E_2^n – множество слов длины n из алфавита $\{0, 1\}$. Для слова $\alpha = (a_1a_2\ldots a_n) \in E_2^n$ символом $|\alpha|$ обозначается сумма его элементов: $|\alpha| = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Пусть λ означает пустое слово, т.е. слово, длина которого равна нулю. Возведение слова α в степень s является краткой записью для слова, состоящего из s повторов слова α, т.е. $\alpha^s = \beta_1\beta_2\ldots\beta_s$, где $\beta_i = \alpha, i \in \{1,2,\ldots,s\}$.

Для заданного слова $\alpha = (a_1a_2\ldots a_n) \in E_2^n$ и заданного опорного вектора $v = (v_1v_2\ldots v_n)$, где $v_i \in \{0,1\}$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ операция фрагментирования $\langle\alpha\cdot v\rangle$ строит слово длины $|v|$ по следующему правилу:

$$\langle\alpha\cdot v\rangle = \begin{cases} a_i, & v_i = 1 \\ \lambda, & v_i = 0 \end{cases}$$

Фрагментом, или подсловом, слова $\alpha = (a_1a_2\ldots a_n) \in E_2^n$ будем называть слово $\tilde{\alpha} \in E_2^n$ следующего вида:

$$\tilde{\alpha} = (a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k}), \quad 1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n.$$

Пусть $f^*(\alpha)$ – это наименьшая длина фрагментов k, при которой гарантирована однозначность восстановления слова α длины n по мультимножеству его подслов длины k.

Задача. В общем виде задача о восстановлении слова по мультимножеству подслов формулируется следующим образом. Заданы:

набор опорных векторов $V = \{v^1, v^2, \ldots, v^N\}$, $v^i \in E_2^n, |v^i| = k, i \in \{1,2,\ldots,N\}$,

и множество слов $X = \{\chi^1, \chi^2, \ldots, \chi^N\}$, $\chi^i \in E_2^k$, $i \in \{1,2,\ldots,N\}$.

Требуется проверить, является ли набор векторов X набором фрагментов фиксированной длины некоторого неизвестного слова $\alpha \in E_2^n$, построенных с помощью операции фрагментирования векторами из V, и найти все возможные решения.

При этом все оценки, получаемые для случая двоичного алфавита, остаются верными и для произвольного алфавита [3], так как в случае алфавита $\{0,1,\ldots,k\}$ задача сводится к набору из k задач в двоичном алфавите с помощью отображений:

$$\begin{cases} \varphi_i : x \mapsto \begin{cases} 1, & x = i, \\ 0, & x \ne i, \end{cases} \\ i \in \{0,1,\ldots,k\}. \end{cases}$$

Поэтому далее будут рассмотрены только двоичные слова $\alpha = (a_1a_2\ldots a_n), a_i \in \{0,1\}$. Более того, нас будут интересовать периодические слова.

Слово $\alpha = (a_1a_2\ldots a_n), a_i \in \{0,1\}$ называется периодическим с периодом p, если

$$\alpha = (a_1a_2\ldots a_p)^l, \quad a_i \in \{0,1\}. \tag{1}$$

При этом подслово $\tilde{\alpha} = a_1a_2\ldots a_p$ будем называть порождающим подсловом для слова α вида (1).

2. СОСТОЯНИЕ ЗАДАЧИ

Для задачи о восстановлении слова по подсловам известно ее сведение к проверке единственности решения диофантовых уравнений определенного вида [2]. Показано, что задача о существовании и единственности решения является NP-полной.

В случае полного мультимножества фрагментов ($V = E_2^n$) установлено [14], что для однозначного восстановления слова α длины n необходима длина $k \ge \exp(\Omega(\log n))$.

Для того же случая полного мультимножества фрагментов известны следующие оценки на достаточную длину [3, 13, 12]: $k \ge \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $k \ge (1 + o(1))\sqrt{n\log n}$, $k \ge \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{n} \right\rfloor + 5$.

Было изучено несколько частных случаев. Так, показано [15], что для слов, состоящих из l серий, достаточно фрагментов длины l.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Сформулируем первую теорему.

Теорема 1. *Для однозначного восстановления периодического слова длины n с периодом p по мультимножеству всех его фрагментов длины k достаточно выполнения условия*

$$k \ge (1 + o(1))\sqrt{p\log p}.$$

Перед доказательством введем следующее

Определение 1. Пусть $N_\beta(\alpha)$ – это число фрагментов, равных β, в слове α.

В [2] показано, что по $N_\beta(\alpha)$ для всех двоичных слов β длины k однозначно восстанавливаются числа фрагментов всех длин меньше k. Далее сформулируем и докажем лемму, которая непосредственно следует из системы уравнений в [2].

Лемма 1. *Для любого слова* α *по набору его фрагментов вида* x^j1 *однозначно определяется набор его моментов вида* $\sum_{r=1}^{n} a_r r^j$.

Доказательство. Получим формулы для $N_{x^j1}(\alpha)$ при разных j:

$$N_1(\alpha) = \sum_{r=1}^{n} a_r,$$

$$N_{x1}(\alpha) = \sum_{r=1}^{n} (r-1) a_r =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} a_r r - N_1(\alpha) = \sum_{r=1}^{n} a_r r - f_1(N_1(\alpha)),$$

$$\dots$$

$$N_{x^{k-1}1}(\alpha) = \sum_{r=1}^{n} \binom{r-1}{k-1} a_r = \frac{1}{(k-1)!}\sum_{r=1}^{n} a_r r^{k-1} -$$

$$- f_{k-1}\left(N_1(\alpha), N_{x1}(\alpha), \dots, N_{x^{k-2}1}(\alpha)\right).$$

Функции $f_2, f_3, \dots, f_{k-1}$ вычисляются на основе комбинаторных соотношений. Например, найдем выражение функции $f_p(N_1(\alpha), \dots, N_{x^{p-1}1}(\alpha))$, $2 \le p \le k-1$, через полученные на предыдущих шагах $f_1, \dots, f_{p-1}$ (при этом можно положить $f_0 \equiv 0$):

$$N_{x^p1}(\alpha) = \sum_{r=1}^{n} \binom{r-1}{p} a_r = \sum_{r=1}^{n} \frac{(r-1)!}{p!(r-1-p)!} a_r =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{(r-1)\cdot(r-2)\dots(r-p)}{p!} a_r =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{p!} a_r \left\{ r^p + r^{p-1} \sum_{i_1=1}^{p} (-i_1) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{i_1, i_2 \in \{1,2,\dots,p\} \\ i_1 \neq i_2}} (-i_1)(-i_2) + \dots + r^o \prod_{i_p=1}^{p} (-i_p) \right\} =$$

$$= \frac{1}{p!}\sum_{r=1}^{n} a_r r^p + \frac{1}{p!}\sum_{l=1}^{p}\sum_{r=1}^{n} a_r r^{p-l} \times$$

$$\times \sum_{\substack{S \subseteq \{1,\dots,p\} \\ |S| = l}} \prod_{i \in S} (-i) = \frac{1}{p!}\sum_{r=1}^{n} a_r r^p +$$

$$+ \frac{1}{p!}\sum_{l=1}^{p} \left(N_{x^{p-l}1}(\alpha) + f_{p-l}(N_1(\alpha), \dots, N_{x^{p-l-1}1}(\alpha))\right) \times$$

$$\times \sum_{\substack{S \subseteq \{1,\dots,p\} \\ |S| = l}} \prod_{i \in S} (-i) = \frac{1}{p!}\sum_{r=1}^{n} a_r r^p + f_p(N_1(\alpha), \dots, N_{x^{p-1}1}(\alpha)).$$

Так как, по предположению, все $f_1, \dots, f_{p-1}$ известны, то известна и $f_p\left(N_1(\alpha), \dots, N_{x^{p-1}1}(\alpha)\right)$.

Теперь мы можем перейти к доказательству теоремы 1.

Доказательство. Итак, доказательство базируется на результатах, полученных в [13] для достаточной для однозначной реконструкции слова длины фрагментов в случае произвольных слов. Оценка величины $f^*(\alpha)$ в [13] получена на основе анализа следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{r=1}^{n} a_r r^j = s_j(\alpha), \\ 0 \le j \le k-1, \end{cases} \tag{2}$$

для которой при $f^*(\alpha) \le (1 + o(1))\sqrt{n \log n}$ решение единственно.

Пусть слово α состоит из $l = \frac{n}{p}$ периодов: $\alpha = (a_1 a_2 \dots a_p)^l$. Тогда нулевое уравнение $\sum_{r=1}^{n} a_r = s_0(\alpha)$ можно переписать в виде $\sum_{r=1}^{p} a_r = \frac{s_0(\alpha)}{l}$. И для произвольного индекса k' от 1 до $k-1$ включительно:

$$\sum_{r=1}^{n} a_r r^{k'} = \sum_{r=1}^{p} a_r r^{k'} + \sum_{r=p+1}^{2p} a_r r^{k'} + \dots + \sum_{r=(l-1)p+1}^{lp} a_r r^{k'} =$$

$$= \sum_{r=1}^{p} a_r r^{k'} + \sum_{r=1}^{p} a_r (p+1)^{k'} + \dots + \sum_{r=1}^{p} a_r ((l-1)p + r)^{k'} =$$

$$= \sum_{r=1}^{p} a_r r^{k'} + \sum_{r=1}^{p}\sum_{j=0}^{k'} \binom{k'}{j} p^j r^{k'-j} a_r + \dots +$$

$$+ \sum_{r=1}^{p}\sum_{j=0}^{k'} \binom{k'}{j} ((l-1)p)^j r^{k'-j} a_r = l \cdot \sum_{r=1}^{p} a_r r^{k'} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k'}\sum_{r=1}^{p} \binom{k'}{j} ((l-1)p)^j r^{k'-j} a_r =$$

$$= f_{k'}\left(\sum_{r=1}^{p} a_r r^{k'}, \dots, \sum_{r=1}^{p} a_r\right),$$

где $f_{k'}$ – линейная функция, и далее доказательство теоремы в точности повторяет доказательство из [13].

Сформулируем более сильное утверждение.

Теорема 2. *Для однозначного восстановления периодического слова длины n с периодом p по мультимножеству всех его фрагментов длины k достаточно выполнения условия*

$$k \geq \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{p} \right\rfloor + 5.$$

Доказательство. Доказательство основано на [12], где авторы доказывают возможность однозначной реконструкции слова по его подсловам не из анализа системы уравнений (2), как было проделано в [13], но из анализа похожей системы следующего вида:

$$\begin{cases} \sum_{r=1}^{n} a_r r^j = \sum_{r=1}^{n} b_r r^j, \\ 0 \leq j \leq k-1, \end{cases} \tag{3}$$

выписанной для двух слов $\alpha = a_1 \ldots a_n$ и $\beta = b_1 \ldots b_n$. Доказывается, что слова α и β имеют одинаковые мультимножества подслов длины k тогда и только тогда, когда система (3) имеет нетривиальное решение $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$. Таким образом, доказательство сводится к поиску условия, при котором система диофантовых уравнений (3) имеет только тривиальное решение. Авторы [12] затем ссылаются на [16], где получен следующий результат:

$$k \geq \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{n} \right\rfloor + 5.$$

Для случая же периодических слов ранее в данной работе при доказательстве теоремы 1 показано, как систему (3) можно переписать в переменных только $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p$, где p – период слова. Таким образом, оценка на достаточную для однозначного восстановления исходного слова длину подслов получается равной

$$k \geq \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{p} \right\rfloor + 5.$$

Реконструкция слова остается возможной и тогда, когда само слово непериодическое, но состоит из нескольких подслов, по крайней мере одно из которых периодическое. Далее мы рассмотрим несколько случаев таких слов. Каждый случай будет оформлен в виде отдельной теоремы, доказательство которой будет опираться на уже доказанное ранее для периодического слова (теорема 2).

Теорема 3. *Пусть слово* α *состоит из двух подслов*: *префикса и суффикса. Причем оба подслова периодические*:

$$\alpha = (a_1 a_2 \ldots a_q)^m (a_{q+1} a_{q+2} \ldots a_{q+p})^l. \tag{4}$$

Тогда при $l \geq mq^{\left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{P} \right\rfloor + 5}$, *где* $P \equiv \max(p, q)$, *для однозначного восстановления слова* (4) *достаточно длины фрагментов* $k \geq \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{P} \right\rfloor + 5$.

Доказательство. Найдем $s_0(\alpha)$:

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = m\sum_{r=1}^{q} a_r + l\sum_{r=q+1}^{q+p} a_r = s_0(\alpha).$$

При $mq < l$ получаем $\frac{m(a_1 + \ldots + a_q)}{l} < 1$, поэтому

$$\begin{cases} \sum_{r=q+1}^{q+p} a_r = \left\lfloor \frac{s_0(\alpha)}{l} \right\rfloor, \\ \sum_{r=1}^{q} a_r = \left\{ \frac{s_0(\alpha)}{l} \right\} \cdot \frac{l}{m}. \end{cases}$$

Рассмотрим случай $s_1(\alpha)$:

$$s_1(\alpha) = \sum_{r=1}^{qm} a_r r + \sum_{r=qm+1}^{qm+pl} a_r r. \tag{5}$$

Распишем первую сумму в выражении для $s_1(\alpha)$ (5):

$$\sum_{r=1}^{qm} a_r r = a_1 \cdot \sum_{j=0}^{m-1}(qj+1) + \ldots + a_q \cdot \sum_{j=0}^{m-1}(qj+q) =$$
$$= \sum_{r=1}^{q} a_r \left(mr + \frac{qm(m-1)}{2} \right) = m\sum_{r=1}^{q} a_r r + \frac{qm(m-1)}{2}\sum_{r=1}^{q} a_r.$$

Аналогично для второй суммы из выражения (5) получаем:

$$\sum_{r=qm+1}^{qm+pl} a_r r = a_{q+1}\sum_{j=0}^{l-1}(qm+pj+1) +$$
$$+ \ldots + a_{q+p}\sum_{j=0}^{l-1}(qm+pj+p) =$$
$$= \sum_{r=q+1}^{q+p} a_r \left(lr + \frac{2qml + pl(l-1)}{2} \right) =$$
$$= l\sum_{r=q+1}^{q+p} a_r r + \left(qml + \frac{pl(l-1)}{2} \right) \sum_{r=q+1}^{q+p} a_r.$$

И в итоге имеем:

$$s_1(\alpha) = m\sum_{r=1}^{q} a_r r + l\sum_{r=q+1}^{q+p} a_r r + f_1(s_0).$$

При условии $mq(q+1)/2 < l$ уравнения для префикса и суффикса разделяются, как и в случае с $s_0(\alpha)$. Перейдем теперь к случаю произвольного k', такого что $2 \leq k' \leq k-1$:

$$s_{k'}(\alpha) = \sum_{r=1}^{qm} a_r r^{k'} + \sum_{r=qm+1}^{qm+pl} a_r r^{k'}.$$

Распишем первую сумму:

$$\sum_{r=1}^{qm} a_r r^{k'} = \sum_{r=1}^{q} a_r (r^{k'} + \ldots + (q(m-1)+r)^{k'}) =$$
$$= \sum_{r=1}^{q} a_r \sum_{h=1}^{m} (r + q(m-h))^{k'} =$$
$$= \sum_{r=1}^{q} a_r \sum_{h=1}^{m} \sum_{j=0}^{k'} \binom{k'}{j} r^j (q(m-h))^{k'-j} =$$
$$= m \sum_{r=1}^{q} a_r r^{k'} + g_{k'}(s_{k'-1}, \ldots, s_0).$$

В последнем переходе мы оставили отдельно член с показателем степени при r, равном k' (при $j = k'$). Члены, куда r входит в меньшей степени, мы представили с помощью линейной функции $g_{k'}$.

Аналогично для второй суммы имеем:

$$\sum_{r=qm+1}^{qm+pl} a_r r^{k'} = \sum_{r=q+1}^{q+p} a_r ((q(m-1)+r)^{k'} + \ldots +$$
$$+ (q(m-1) + p(l-1) + r)^{k'}) =$$
$$= \sum_{r=q+1}^{q+p} a_r \sum_{h=1}^{l} \sum_{j=0}^{k'} \binom{k'}{j} (q(m-1)+r)^j (p(l-h))^{k'-j} =$$
$$= \sum_{r=q+1}^{q+p} a_r \sum_{h=1}^{l} \sum_{j=0}^{k'} \sum_{s=0}^{j} \binom{k'}{j}\binom{j}{s} (q(m-1))^s r^{j-s} (p(l-h))^{k'-j} =$$
$$= l \sum_{r=q+1}^{q+p} a_r r^{k'} + h_{k'}(s_{k'-1}, \ldots, s_0).$$

Где снова в последнем переходе мы оставили отдельно член с показателем степени при r, равном k' (при $j = k'$ и $s = 0$). Члены, куда r входит в меньшей степени, мы представили с помощью линейной функции $h_{k'}$.

Таким образом, объединяя результаты, полученные для обеих сумм, мы можем вернуться к вычислению $s_{k'}(\alpha)$:

$$s_{k'}(\alpha) = \sum_{r=1}^{qm} a_r r^{k'} + \sum_{r=qm+1}^{qm+pl} a_r r^{k'} =$$
$$= \left(m \sum_{r=1}^{q} a_r r^{k'} + g_{k'}(s_{k'-1}, \ldots, s_0) \right) +$$
$$+ \left(l \sum_{r=q+1}^{q+p} a_r r^{k'} + h_{k'}(s_{k'-1}, \ldots, s_0) \right) =$$
$$= m \sum_{r=1}^{q} a_r r^{k'} + l \sum_{r=q+1}^{q+p} a_r r^{k'} + f_{k'}(s_{k'-1}, \ldots, s_0),$$

где за $f_{k'}$ мы обозначили линейную функцию от $s_{k'-1}, \ldots, s_0$, являющуюся суммой функций $g_{k'}$ и $h_{k'}$.

Так как $\sum_{k=1}^{n} k^p \to \frac{n^{p+1}}{p+1}$, то при $m \cdot \frac{q^k}{k} < l$ разделяются все уравнения и получается две системы. Поэтому, по доказанному ранее для случая периодического слова (теорема 2), при $l \geq mq^{\left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{P} \right\rfloor + 5}$, где $P \equiv \max(p, q)$, размер подслов ограничивается следующим образом: $k \geq \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{P} \right\rfloor + 5$.

Следствие 1. *При $m = 1$ слово α имеет вид слова с непериодическим префиксом и периодическим суффиксом:*

$$\alpha = a_1 a_2 \ldots a_q (a_{q+1} a_{q+2} \ldots a_{q+p})^l.$$

При длине суффикса, большей длины префикса: $l \geq q^{\left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{P} \right\rfloor + 5}$ — для однозначного восстановления слова α достаточно подслов длины $k \geq \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{P} \right\rfloor + 5$ при $P \equiv \max(p, q)$.

Теорема 4. *Пусть слово α состоит из трех подслов: периодического префикса $\bar{\alpha}$, периодического суффикса $\hat{\alpha}$ и непериодического корня $\breve{\alpha}$:*

$$\alpha = \bar{\alpha}\breve{\alpha}\hat{\alpha} = (a_1 a_2 \ldots a_q)^m a_{q+1} a_{q+2} \ldots \times$$
$$\times a_{q+s} (a_{q+s+1} a_{q+s+2} \ldots a_{q+s+p})^l. \quad (6)$$

Тогда при $m \geq s^{k^\star}$ и $l \geq (m-1) q^{k^\star} + (q+s)^{k^\star}$, где $k^\star = \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{P} \right\rfloor + 5$ и $P \equiv \max(p, q, s)$, для однозначного восстановления слова (6) *достаточно $k \geq k^\star$.*

Доказательство. Доказательство опирается на теоремы 2 и 3.

Рассмотрим $s_0(\alpha)$:

$$s_0(\alpha) = \sum_{r=1}^{qm+s+pl} a_r = m \sum_{r=1}^{q} a_r + \sum_{r=q+1}^{q+s} a_r + l \sum_{r=q+s+1}^{q+s+p} a_r.$$

Тогда при $mq + s < l$ разделяются уравнения для двух подслов: $\bar{\alpha}\breve{\alpha}$ и $\hat{\alpha}$.

Рассмотрим k', такой что $1 \leq k' \leq k-1$. Опуская подробные выкладки, аналогичные уже приведенным в доказательстве теоремы 3, получаем:

$$s_{k'}(\alpha) = m \sum_{r=1}^{q} a_r r^{k'} + \sum_{r=q+1}^{q+s} a_r r^{k'} +$$
$$+ l \sum_{r=q+s+1}^{q+s+p} a_r r^{k'} + f_{k'}(s_{k'-1}, \ldots, s_0), \quad (7)$$

где $f_{k'}$ — линейная функция. Таким образом, при выполнении условия $l \geq mq^{k_1^\star} + (q+s)^{k_1^\star} - q^{k_1^\star}$, где $k_1^\star = \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{P_1} \right\rfloor + 5$ и $P_1 = \max(p, qm+s)$, мы получаем разделимость уравнений для слов $\bar{\alpha}\breve{\alpha}$ и $\hat{\alpha}$, а потому и восстановимость целого слова при ограничении на длины подслов $k \geq k_1^\star$.

Однако мы также можем отдельно рассмотреть вопрос о восстановимости слова $\bar{\alpha}\breve{\alpha}$. Действительно, по следствию 1, получаем, что для реконструкции слова $\bar{\alpha}\breve{\alpha}$ по множеству его подслов достаточно, чтобы $m \geq s^{k_2^\star}$, где $k_2^\star = \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{P_2} \right\rfloor + 5$, $P_2 = \max(q, s)$. Тогда длина подслов ограничивается как $k \geq k_2^\star$.

Объединяя условия с $k_1^\star$ и $k_2^\star$, получаем, что слово α восстановимо по подсловам при $m \geq s^{k^\star}$, $l \geq (m-1)q^{k^\star} + (q+s)^{k^\star}$, где $k^\star = \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{P} \right\rfloor + 5$ и $P \equiv \max(p, q, s)$. Длина подслов при этом $k \geq k^\star$.

З а м е ч а н и е. Длина корня $s = 0$ дает случай, уже рассмотренный в теореме 3.

С л е д с т в и е 2. *Длина корня $s = 1$ равносильна наличию одного символа между двумя периодическими подсловами в слове α. В таком случае α восстановимо по подсловам при $l \geq (m-1)q^{k^\star} + (q+1)^{k^\star}$, где $k^\star = \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{P} \right\rfloor + 5$ и $P \equiv \max(p, q)$. Длина подслов k ограничивается соотношением: $k \geq k^\star$.*

С л е д с т в и е 3. *Пусть в слове α вида* (6) *порождающие подслова у префикса и суффикса одинаковы*:

$$\alpha = (a_1 a_2 \ldots a_q)^m a_{q+1} a_{q+1} \ldots a_{q+s} (a_{q+s+1} a_{q+s+2} \ldots a_{q+s+p})^l,$$
$$q = p, \quad a_i = a_j,$$
$$(i, j) \in \{(1, q+s+1), \ldots, (q, q+s+p)\}.$$

Пусть $k^\star = \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{P} \right\rfloor + 5$ и $P \equiv \max(q, s)$. Тогда при $l + m \geq s^{k^\star}$ слово α однозначно восстановимо при $k \geq k^\star$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (7) в случае слова α указанной структуры примет вид:

$$s_{k'}(\alpha) = (m+l)\sum_{r=1}^{q} a_r r^{k'} + \sum_{r=q+1}^{q+s} a_r r^{k'} + f_{k'}(s_{k'-1}, \ldots, s_0).$$

А потому при $m + l \geq (q+s)^{k^\star} - q^{k^\star}$ получаем разделимость уравнений для порождающего подслова префикса (суффикса) и для корня.

Т е о р е м а 5. *Пусть слово α имеет вид*

$$\alpha = ((a_1 a_2 \ldots a_q)^m (a_{q+1} a_{q+2} \ldots a_{q+p})^l)^N, \tag{8}$$

т.е. образовано повторением подслова, которое, в свою очередь, состоит из периодического префикса и суффикса. Тогда при $l \geq mq^{k^\star}$, где $k^\star = \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{P} \right\rfloor + 5$ и $P \equiv \max(p, q)$, для однозначного восстановления слова (8) *достаточно $k \geq k^\star$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Начнем с вычисления $s_0(\alpha)$:

$$s_0(\alpha) = \sum_{r=1}^{N(qm+pl)} a_r = Nm\sum_{r=1}^{q} a_r + Nl\sum_{r=q+1}^{q+p} a_r.$$

При $m < l$ получаем разделимость уравнений:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{r=q+1}^{q+p} a_r = \left\lfloor \frac{s_0(\alpha)}{Nl} \right\rfloor, \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{q} a_r = \left\{ \frac{s_0(\alpha)}{Nl} \right\} \cdot \frac{l}{m}. \end{cases}$$

Введя обозначение $\tilde{n} \equiv qm + pl$, выразим теперь $s_{k'}(\alpha)$ при k', таком что $1 \leq k' \leq k-1$:

$$s_{k'}(\alpha) = \sum_{r=1}^{N\tilde{n}} a_r r^{k'} = \sum_{j=0}^{N-1}\left[\left(\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{r=\tilde{n}j+qi+1}^{\tilde{n}j+qi+q} a_{r-\tilde{n}j-qi} e^{k'}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{r=\tilde{n}j+qm+pi+1}^{\tilde{n}j+qm+pi+p} a_{r-\tilde{n}j-qm-pi+q} r^{k'}\right)\right] =$$
$$= \sum_{j=0}^{N-1}\left[\left(\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{r=1}^{q} a_r (r + \tilde{n}j + qi)^{k'}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\sum_{i=0}^{l-1}\sum_{r=q+1}^{q+p} a_r (r + \tilde{n}j + qm + pi - q)^{k'}\right)\right] =$$
$$= Nm\sum_{r=1}^{q} a_r r^{k'} + Nl\sum_{r=q+1}^{q+p} a_r r^{k'} + f_{k'}(s_{k'-1}, \ldots, s_0).$$

Таким образом, при $\frac{m}{l} \cdot \frac{q^k}{k} < 1$ все уравнения разделяются и получается две системы. По доказанной ранее для периодического слова теореме 2, при $l \geq mq^{k^\star}$, где $k^\star = \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{P} \right\rfloor + 5$ и $P \equiv \max(p, q)$, слово α восстановимо при $k \geq k^\star$.

З а м е ч а н и е. Если $N = 1$, то получаем результат, доказанный ранее в теореме 3 для слова, состоящего фактически из одного повтора подслова с периодическими суффиксом и префиксом.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получена оценка на длину подслова k, достаточную для однозначного восстановления периодического слова длины n с периодом p по мультимножеству его подслов фиксированной длины: $k \geq \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{p} \right\rfloor + 5$. Также получены оценки на k для следующих слов, не являющихся периодическими, но содержащими периодические подслова. Так, для слов, состоящих из периодического префикса и периодического суффикса, доказана возможность однозначного восстановления при достаточной длине суффикса. Показано, что слова, состоящие из периодического префикса, периодического суффикса и непериодического корня, могут быть однозначно восстановлены по мультимножеству фрагментов длины k при выполнении двух условий: малом по сравнению с префиксом корне, с одной стороны, и малом по сравнению с суффиксом префиксе, с другой. Доказана оценка для k в случае периодического слова, порожденного подсловом, в свою очередь, состоящим из двух частей: периодического суффикса и префикса.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-07-00150.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Журавлёв Ю.И.* Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Проблемы кибернетики. 1978. Т. 33. С. 5–68.
2. *Леонтьев В.К., Сметанин Ю.Г.* О восстановлении векторов по набору их фрагментов // ДАН. 1988. Т. 302. № 6. С. 1319–1322.
3. *Manvel B. et al.* Reconstruction of sequences // Discrete Mathematics. 1991. V. 94. № 3. P. 209–219.
4. *Леонтьев В.К.* Распознавание двоичных слов по их фрагментам // ДАН. 1993. Т. 330. № 4. С. 434–436.
5. *Lothaire M.* Combinatorics on words. T. 17. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
6. *Levenshtein V.I.* Efficient reconstruction of sequences from their subsequences or supersequences // Journal of Combinatorial Theory. Series A. 2001. V. 93. № 2. P. 310–332.
7. *Lin J. et al.* Experiencing SAX: a novel symbolic representation of time series // Data Mining and knowledge discovery. 2007. V. 15. № 2. P. 107–144.
8. *Batu T. et al.* Reconstructing strings from random traces // Departmental Papers (CIS). 2004. P. 173.
9. *Kannan S., McGregor A.* More on reconstructing strings from random traces: insertions and deletions // Proc. International Symposium on Information Theory, 2005. ISIT 2005. IEEE. 2005. P. 297–301.
10. *Smetanin Y., Ul'yanov M.* Determining the characteristics of Kolmogorov complexity of time series: an approach based on symbolic descriptions. 2013.
11. *Gusfield D.* Algorithms on stings, trees, and sequences: Computer science and computational biology // Acm Sigact News. 1997. V. 28. № 4. P. 41–60.
12. *Krasikov I., Roditty Ye.* On a reconstruction problem for sequences // J. Combinatorial theory. Series A. 1997. V. 77. № 2. P. 344–348.
13. *Scott A.D.* Reconstructing sequences // Discrete Mathematics. 1997. V. 175. № 1–3. P. 231–238.
14. *Dudık M., Schulman L.J.* Reconstruction from subsequences // J. Combinatorial Theory. Series A. 2003. V. 103. № 2. P. 337–348.
15. *Леонтьев В.К.* Задачи восстановления слов по фрагментам и их приложения // Дискретный анализ и исследование операций 2.2. 1995. С. 26–48.
16. *Borwein P., Erde'lyi T., Ko's G.* Littlewood-type problems on [0, 1] // Proc. London Math. Society. 1999. V. 79. № 1. P. 22–46.
17. *Алексеев В.А., Сметанин Ю.Г.* О возможности восстановления периодического слова по подсловам фиксированной длины // Чебышевский сборник. 2021. Т. 22. № 1 (77). С. 57–66.

ON THE WORD FRAGMENT LENGTH FOR UNAMBIGUOUS RECONSTRUCTION OF A PERIODIC WORD FROM THE COMPLETE MULTISET OF FRAGMENTS OF FIXED LENGTH

V. A. Alekseev[a] **and** $\boxed{\textbf{Y. G. Smetanin}}$[b]

[a] *Moscow Institute of Physics and Technology (MIPT) (National Research University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

[b] *Federal Research Center "Computer Science and Control", Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS K.V. Rudakov

We consider the problem of word reconstruction, where a word is to be reconstructed from a multiset of its fragments of the fixed length. Words consist of symbols from a finite alphabet. Furthermore, we impose the following restriction on the words being reconstructed: they either must be periodic or must contain a periodic word as a subword. It is shown that a periodic word with a period p can be reconstructed from a multiset of its fragments of length k where $k \geq \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{p} \right\rfloor + 5$. For a word consisting of a periodic prefix with a period q, repeated m times, and a periodic suffix with a period p, repeated l times, the estimate becomes $k \geq \left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{P} \right\rfloor + 5$, where $P = \max(p,q)$, subject to $l \geq mq^{\left\lfloor \frac{16}{7}\sqrt{P} \right\rfloor + 5}$.

Keywords: word, fragment, subword, periodic word, reconstruction from incomplete information, word reconstruction, multiset of subwords

EDN: KHDWQU
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 23–25

МАТЕМАТИКА

УДК 512.544.33

ОПИСАНИЕ КООРДИНАТНЫХ ГРУПП НЕПРИВОДИМЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ НАД СВОБОДНЫМИ 2-НИЛЬПОТЕНТНЫМИ ГРУППАМИ

© 2022 г. М. Г. Амаглобели[1,*], А. Г. Мясников[2,], В. Н. Ремесленников[3,***]**

Представлено академиком РАН Ю.Л. Ершовым 05.09.2021 г.
Поступило 03.12.2021 г.
После доработки 03.12.2021 г.
Принято к публикации 23.01.2022 г.

В этой статье мы даем удобное чисто алгебраическое описание координатных групп неприводимых алгебраических множеств над свободной двуступенно нильпотентной (2-нильпотентной) неабелевой группой N конечного ранга. Заметим, что в алгебраической геномeтрии над произвольной группой N естественно рассматривать группы, содержащие N в качестве подгруппы (так называемые N-группы), и гомоморфизмы N-групп, которые являются тождественными на N (N-гомоморфизмы). Как следствие, мы получаем описание всех конечно порожденных групп универсально эквивалентных группе N (в языке с констаниами из N), а также получаем простой критерий, когда конечно порожденная N-группа H, аппроксимируемая N-ретракатами на N, является дискриминируемой такими ретрактами.

Ключевые слова: алгебраическая геометрия над группой, алгебраическое множество, неприводимое алгебраическое множество, координатная группа, дискриминируемость, универсальняа эквивалентность

DOI: 10.31857/S2686954322020047

Основные понятия алгебраической геометрии над группами были изложены в работах Г. Баумслага, А. Мясникова и В. Ремесленникова [1], которым мы следуем в терминологии и обозначениях. Более общая, универсальная алгебраическая геометрия, применимая к произвольным алгебраическим системам, была начата в работах Плоткина, Данияровой, А. Мясникова и В. Ремесленникова и успешно развивается для полугрупп, некоммутативных колец, полурешеток и графов. В настоящее время алгебраическая геометрия над группами стала важным инструментом изучения в комбинаторной, геометрической и теоретико-модельной теории групп. Наиболее полно разработаны алгебро-геометрические методы для свободных групп, гиперболических групп и частично-коммутативных групп, а также для метабелевых, свободных разрешимых и жестких разрешимых групп. Одним из принципиальных открытых вопросов в этой области является построение алгебраической геометрии над нильпотентными группами без кручения, в частности, над свободными нильпотентными группами. Помимо непосредственного интереса к нильпотентным группам, важность этого вопроса заключается также в том, что во многих случаях подгруппа Фиттинга Φ группы G выделится в G некоторой конечной системой уравнений, поэтому алгебраическая геометрия над нильпотентной группой Φ непосредственно вкладывается в алгебраическую геометрию исходной, возможно, не нильпотентной группы G. В этой работе мы описываем алгебраические свойства координатных групп алгебраических множеств и их неприводимых компонент над группой N (топология Зарисского нетерова над группой N, а потому каждое алгебраическое множество есть конечное объединение своих неприводимых компонент). Эти результаты позволяют надеяться на решение других фундаментальных вопросов в алгебраической геометрии над N, например, получить разумное описание множеств решений конечных систем уравнений

[1] *Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили, Тбилиси, Грузия*
[2] *Стивенс Технологический Институт, Хобокен, США*
[3] *Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Омск, Россия*
**E-mail: mikheil.amaglobeli@tsu.ge*
***E-mail: amiasnikov@gmail.com*
****E-mail: remesl@ofim.oscsbras.ru*

над N (несмотря на то, что Диофантова проблема над N неразрешима).

Заметим, что в алгебраической геометрии над произвольной группой N естественно рассматривать группы, содержащие N в качестве подгруппы (так называемые N-группы), и гомоморфизмы N-групп, которые являются тождественными на N (N-гомоморфизмы). Наш подход к описанию координатных групп базируется на некоторых результатах о дискриминируемости, которые также представляет самостоятельный интерес. Напомним, что N-группа H N-аппроксимируется (N-дискриминируется) N-группой G, если для любого $h \in H$, $h \neq 1$, (любых неединичных $h_1, \ldots, h_n \in H$) существует N-гомоморфизм $\phi : H \to G$ такой, что $\phi(h) \neq 1$ ($\phi(h_i) \neq 1$, $i = 1, \ldots, n$). Если $N = 1$, то получаем стандартные понятия аппроксимируемости и дискриминируемости, которые появляются в разных областях теории групп: в теории многообразий групп, в комбинаторной теории групп (группы, аппроксимируемые классом групп $\mathcal{K}$), в геометрической теории групп (как пределы в пространствах Громова–Хаусдорфа) и т.д. В последние годы это понятие начало играть важную роль в теории моделей групп (для характеризации групп универсально эквивалентных данной) и алгебраической геометрии над группами.

В 1967 г. Б. Баумслаг доказал, что группа H дискриминируется свободной неабелевой группой F тогда и только тогда, когда она аппроксимируется группой F и при этом является коммутативно-транзитивной, или CT-группой (отношение коммутирования является транзитивным на множестве неединичных элементов из H, т.е. централизаторы неединичных элементов из H – абелевы). Позже выяснилось, что подобные результаты справедливы для многих других групп (например, для гиперболических групп без кручения). Однако неабелевы нильпотентные группы никогда не являются CT-группами, поскольку всегда имеют нетривиальный центр. Тем не менее оказалось, что можно слегка обобщить определение CT-группы, так что новое определение работает и в классах нильпотентных групп. А именно, группа H называется CT-группой уровня k, $k = 0, 1, \ldots$, или CT_k-группой, если централизатор любого элемента, не лежащего в $Z_k(H)$, является абелевым; здесь $Z_k(H)$ – это k-й член верхнего центрального ряда H. В частности, если $k = 0$, то $Z_0(H) = 1$, а потому CT_0-группы – это, в точности, CT-группы. Заметим, что CT_1-группы – это группы, в которых централизаторы нецентральных элементов – абелевы. Ясно, что N является CT_1-группой. Понятие CT_1-группы было введено в [3].

П р е д л о ж е н и е 1. Пусть N – свободная неабелева к-нильпотентная группа конечного ранга. Если N-группа H N-дискриминируется группой N, то H является CT_{k-1}-группой.

В частности, если N является 2-нильпотентной группой, то N-группа H, N-дискриминируемая группой N, является CT_1-группой. Следующая гипотеза, если она верна, дает аналог теоремы Б. Баумслага для 2-нильпотентных групп.

Г и п о т е з а 1. Пусть N – свободная неабелева 2-нильпотентная группа конечного ранга и H – конечно порожденная N-группа. Тогда H N-дискриминируется группой N тогда и только тогда, когда H является CT_1-группой N-аппроксимируемой группой N.

Теперь мы можем приступить к описанию основных результатов статьи об алгебраической геометрии. Для этого нам понадобятся некоторые определения.

Пусть G – группа из многообразия $\mathcal{N}_2$ нильпотентных групп ступени нильпотентности ≤ 2. Декартова степень $G^n = G \times \cdots \times G$ (n копий) называется аффинным пространством над G. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – множество переменных, $G[X] = G *_{\mathcal{N}_2} F(X)$ – нильпотентное произведение, где $F(X)$ – свободная нильпотентная группа в $\mathcal{N}_2$ с базой X. Система уравнений S (или $S = 1$) над G есть произвольное подмножество из $G[X]$. Элемент $u \in S$ может рассматриваться как групповое слово от переменных $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из G, $u = u(x_1, \ldots, x_n)$. Элемент $p = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ называется решением системы $S = 1$ в G, если $u(g_1, \ldots, g_n) = 1$ в G для каждого $u \in S$. Подмножество V аффинного пространства G^n называется алгебраическим множеством над G, если V – множество всех решений некоторой системы уравнений S из $G[X]$; в этом случае пишем $V = V_G(S)$. Кроме того, для $V = V_G(S)$ определим $Rad(V) = \{u \in G[X] \mid u(p) = 1 \quad \forall p \in V_G(S)\}$. Очевидно, что $Rad(V)$ всегда является нормальной подгруппой в $G[X]$. Группа $\Gamma(V) = G[X] / Rad(V)$ называется координатной группой алгебраического множества V. Заметим, что $\Gamma(V)$ является G-группой относительно естественного вложения $G \to \Gamma(V)$.

Беря в качестве предбазы замкнутых множеств все алгебраические множества из G^n, превратим G^n в топологическое пространство (топология Зарисского). Стандартным способом определяется в G^n понятие неприводимого алгебраического множества. Известно, что топология Зарисского на G^n для любой линейной группы G, в частности, для каждой конечно порожденной нильпотентной группы, является нетеровой, а значит, каждое алгебраическое множество из G^n распадается в конечное объединение неприводимых алгебраических множеств.

Теорема 1. *Пусть* N *— свободная неабелева нильпотентная группа конечного ранга и* H *конечно порожденная* N*-группа. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) H *есть координатная группа некоторого алгебраического множества из* N^k *для некоторого натурального числа* k;

2) H N*-аппроксимируется группой* N;

3) H *является* N*-подгруппой некоторого конечного прямого произведения* $N^k = N_1 \times \cdots \times N_k$ *групп* $N_i \simeq N$ *для некоторого натурального числа* k, *в котором* N *вложена диагонально*.

Наконец, мы можем сформулировать основной результат.

Теорема 2. *Пусть* N *— свободная неабелева 2-нильпотентная группа конечного ранга и* H *— координатная группа некоторого неприводимого алгебраического множества из* N^n. *Тогда выполняются следующие условия*:

1) H N*-дискриминируется группой* N;

2) H *является* N*-подгруппой некоторого конечного прямого произведения* $N^k = N_1 \times \cdots \times N_k$ *групп* $N_i \simeq N$ *для некоторого натурального числа* k, *в котором* N *вложена диагонально, и, кроме того,* H *является* CT_1*-группой*;

3) H *является* N*-подгруппой некоторого конечного прямого произведения* $N^k = N_1 \times \cdots \times N_k$ *групп* $N_i \simeq N$ *для некоторого натурального числа* k, *в котором* N *вложена диагонально, и, кроме того, для любого* $i = 1, \ldots, k$ *пересечение* $H \cap N_i$ *является абелевой нормальной подгруппой в* H.

Гипотеза 2. *Условия* 1), 2) *и* 3) *для групп* N *и* H *в Теореме* 2 *эквивалентны*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Baumslag G., Myasnikov A., Remeslennikov V.* Algebraic geometry over groups. I. Algebraic sets and ideal theory // J. Algebra. 1999. V. 219. № 1. P. 16–79. https://doi.org/10.1006/jabr.1999.7881

2. *Baumslag B.* Residually free groups // Proc. London Math. Soc. 1967. V. 17. № 3. P. 402–418.

3. *Levin F., Rosenberger G.* On power-commutative and commutation-transitive groups // Proceedings of groups. 1985. St. Andrews. P. 249–253. London Math. Soc. Lecture Note Ser., 121, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986.

DESCRIPTION OF THE COORDINATE GROUPS OF IRREDUCIBLE ALGEBRAIC SETS OVER FREE 2-NILPOTENT GROUPS

M. G. Amaglobeli[a], A. G. Miasnikov[b], and V. N. Remeslennikov[c]

[a] *Ivane Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia*

[b] *Stevens Institute of Technology, Hoboken, USA*

[c] *Omsk Department of Sobolev's Institute of Matematics, Omsk, Russia*

Presented by Academician of the RAS Yu.L. Ershov

In this paper we give a pure algebraic description of the coordinate groups of irreducible algebraic sets over non-abelian free 2-nilpotent group N. As a corollary we describe finitely generated groups H which are universally equivalent to the group N (with constants from N in the language). Besides, we give a pure algebraic criterion when a group H, containing N as a subgroup, and N-separated by N, is in fact N-discriminated by N.

Keywords: algebraic geometry over groups, algebraic set, irreducible algebraic set, coordinate groups, discrimination, universal equivalence

EDN: KTEOJN
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 26–29

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.4

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДИНИ-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПЛОСКИХ ОБЛАСТЯХ

© 2022 г. Е. А. Бадерко[1,*], С. И. Сахаров[1,]**

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 11.01.2022 г.
Поступило 19.01.2022 г.
После доработки 19.01.2022 г.
Принято к публикации 22.01.2022 г.

Рассмотрены первая и вторая начально-краевые задачи для параболических по Петровскому систем второго порядка с коэффициентами, удовлетворяющими условию Дини в плоских областях с негладкими боковыми границами, допускающими, в частности, “клювы”. Доказаны теоремы о единственности классических решений этих задач в классе функций, непрерывных и ограниченных, вместе со своими пространственными производными первого порядка, в замыкании указанных областей.

Ключевые слова: параболическая система, начально-краевая задача, единственность классического решения, негладкая боковая граница, граничные интегральные уравнения

DOI: 10.31857/S2686954322020060

Рассматриваются первая и вторая начально-краевые задачи для одномерных по пространственной переменной, параболических по Петровскому (см. [1]), систем второго порядка в областях с негладкими, вообще говоря, боковыми границами из класса Дини–Гёльдера. Коэффициенты систем удовлетворяют условию Дини. В [2–4] получены теоремы о существовании и свойствах классических решений таких задач. В настоящей работе устанавливается единственность классических решений этих начально-краевых задач в пространстве $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ функций, непрерывных и ограниченных, вместе со своими пространственными производными первого порядка, вплоть до границ указанных областей. В случае областей с гладкими боковыми границами для систем с гёльдеровыми коэффициентами однозначная разрешимость рассматриваемых задач в пространстве Гёльдера $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$, $\alpha \in (0,1)$, следует из [5] (см. также [6, с. 706–707]). Если боковые границы областей негладкие, то в случае одного уравнения единственность решения первой начально-краевой задачи следует из принципа максимума (см., например, [7]), а единственность решения второй начально-краевой задачи получена в [8, 9] с помощью теоремы о знаке косой производной. Заметим, что для систем не имеет места, вообще говоря, принцип максимума (см. [10]). В [11] установлена единственность решений первой и второй начально-краевых задач для одномерных по пространственной переменной параболических систем второго порядка с гёльдеровыми коэффициентами в ограниченной области Ω с негладкими боковыми границами из класса Жевре $H^{(1+\alpha)/2}$ в пространстве $C^{1,0}(\overline{\Omega})$. В [12] доказана единственность классического решения первой начально-краевой задачи для параболической системы с дифференцируемыми коэффициентами в полуограниченной плоской области с боковой границей из класса Дини-Гёльдера $H^{1/2+\omega}$ в пространстве $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ при дополнительном условии на старшую производную $\partial_x^2 u$ этого решения и на характер его гладкости по временной переменной. Здесь ω – некоторый модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини (см. ниже (2)). Заметим, что, как следует из работ [13, 14], такое условие на характер непрерывности боковой границы является точным для классической разрешимости первой начально-краевой задачи в пространстве $C^{1,0}(\overline{\Omega})$.

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
**E-mail: baderko.ea@yandex.ru*
***E-mail: ser341516@yandex.ru*

В полосе $D = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)\}$, $0 < T < +\infty$, рассматривается равномерно параболический матричный оператор

$$Lu = \partial_t u - \sum_{l=0}^{2} A_l(x,t)\partial_x^l u,$$
$$u = (u_1, \ldots, u_m)^{\mathrm{T}}, \quad m > 1,$$

где $A_l = \|a_{ijl}\|_{i,j=1}^m$ – матрицы размерности $m \times m$, элементы которых есть вещественные функции, определенные в $\bar{D}$ и удовлетворяющие условиям:

(a) собственные числа μ_r матрицы A_2 подчиняются неравенству $\mathrm{Re}\mu_r \geq \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x,t) \in \bar{D}$, $r = 1, \ldots, m$,

(b) $|a_{ijl}(x+\Delta x, t+\Delta t) - a_{ijl}(x,t)| \leq \omega_0(|\Delta x|) + \omega_0(|\Delta t|^{1/2})$, $(x+\Delta x, t+\Delta t), (x,t) \in \bar{D}$, $i, j = 1, \ldots, m$, $l = 0,1,2$, где ω_0 – модуль непрерывности такой, что

$$\tilde{\tilde{\omega}}_0(z) = \int_0^z y^{-1}dy\int_0^y \xi^{-1}\omega_0(\xi)d\xi < +\infty, \quad z > 0.$$

В полосе D выделяется область $\Omega = \{(x,t) \in D$: $x > g(t)\}$ с боковой границей $\Sigma = \{(x, t) \in \bar{D}$: $x = g(t)\}$, где функция g удовлетворяет условию:

$$|g(t+\Delta t) - g(t)| \leq |\Delta t|^{1/2}\,\omega_1(|\Delta t|^{1/2}),$$
$$t, t+\Delta t \in [0,T], \tag{1}$$

ω_1 – модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини

$$\tilde{\omega}_1(z) = \int_0^z \xi^{-1}\omega_1(\xi)d\xi < +\infty, \quad z > 0. \tag{2}$$

В области Ω ставится задача отыскания классического решения системы

$$Lu = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{3}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = 0, \quad x \geq g(0), \tag{4}$$

и одному из граничных условий

$$u(g(t),t) = \psi(t), \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

или

$$\partial_x u(g(t),t) = \theta(t), \quad t \in [0,T]. \tag{6}$$

Определим следующие функциональные пространства. Через $\underset{0}{C}[0,T]$ обозначим пространство вектор-функций $\psi : [0,T] \to \mathbb{R}^m$, непрерывных на $[0, T]$, для которых $\psi(0) = 0$, с нормой $\|\psi;[0,T]\|^0 = \max\limits_{[0,T]}|\psi|$. Здесь и далее для любого вектора b под $|b|$ понимаем максимум из модулей компонент b. Пусть

$$\partial^{1/2}\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-\tau)^{-1/2}\psi(\tau)d\tau, \quad t \in [0,T],$$

есть оператор дробного дифференцирования порядка 1/2. Следуя [15], положим

$$\underset{0}{C}^{1/2}[0,T] = \{\psi \in \underset{0}{C}[0,T]\colon \partial^{1/2}\psi \in \underset{0}{C}[0,T],$$
$$\|\psi;[0,T]\|^{1/2} = \|\psi;[0,T]\|^0 + \|\partial^{1/2}\psi;[0,T]\|^0 < +\infty\}.$$

Через $\underset{0}{C}(\bar{\Omega})$ обозначим пространство непрерывных и ограниченных вектор-функций u: $\bar{\Omega} \to \mathbb{R}^m$, для которых $u(x,0) = 0$, с нормой $\|u;\Omega\|^0 = \sup\limits_{\Omega}|u|$. Положим $\underset{0}{C}^{1,0}(\bar{\Omega}) = \{u \in \underset{0}{C}(\bar{\Omega}) : \partial_x u \in \underset{0}{C}(\bar{\Omega})$, $\|u;\Omega\|^{1,0} = \|u;\Omega\|^0 + \|\partial_x u;\Omega\|^0\}$. Под значениями вектор-функций и их производных на границе области Ω понимаем их предельные значения "изнутри" Ω.

Существование классических решений задач (3)–(5) и (3), (4), (6) при сформулированных условиях на коэффициенты системы и боковую границу области установлено в [4] и [2] соответственно, если граничные функции $\psi \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ и $\theta \in \underset{0}{C}[0,T]$. В этих работах решения указанных задач получены в виде векторных параболических потенциалов простого слоя. Основным результатом настоящей работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (a), (b), (1). *Пусть* $u \in \underset{0}{C}^{1,0}(\bar{\Omega})$ – *классическое решение задачи*

$$Lu = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad \partial_x u\big|_{\Sigma} = 0.$$

Тогда $u \equiv 0$ *в* $\bar{\Omega}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (a), (b), (1). *Пусть* $u \in \underset{0}{C}^{1,0}(\Omega)$ – *классическое решение задачи*

$$Lu = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u\big|_{\Sigma} = 0.$$

Тогда $u \equiv 0$ *в* $\bar{\Omega}$.

Замечание (см. [13, 14]). Если $g \in H^{1/2+\omega_1}[0, T]$, причем ω_1 не удовлетворяет условию (2), то классическое решение $u \in \underset{0}{C}^{1,0}(\bar{\Omega})$ задачи (3)–(5) может не существовать.

Для доказательства теоремы 1 сначала, используя результат, полученный в [12], и метод работы [11], получаем теорему о единственности решения второй начально-краевой задачи в случае параболического оператора с дифференцируемыми коэффициентами, удовлетворяющими условию

$$(c)\ \left|\partial_x^k a_{ijl}(x+\Delta x, t+\Delta t) - \partial_x^k a_{ijl}(x,t)\right| \le \le \omega_0(|\Delta x|) + \omega_0(|\Delta t|^{1/2}), \quad (x+\Delta x, t+\Delta t), \quad (x,t) \in \bar{D}, \quad i,j = 1,\ldots,m, \quad l = 0,1,2,\ 0 \le k \le l.$$

Затем рассматриваем оператор со “сглаженными” коэффициентами, зависящими от параметра r,

$$L^{(r)}u = \partial_t u - \sum_{l=0}^{2} A_l^{(r)}(x,t)\partial_x^l u,$$

где $A_l^{(r)} = \left\|a_{ijl}^{(r)}\right\|_{i,j=1}^m$. Коэффициенты оператора $L^{(r)}$ получаются стандартным образом с помощью свертки с гладкой функций (“шапочкой”). Для достаточно малых r коэффициенты оператора $L^{(r)}$ удовлетворяют равномерно по r условию (a) с постоянной параболичности $\delta/2$ и условию (b) (см. [16]). Кроме того, $a_{ijl}^{(r)} \to a_{ijl}$ при $r \to 0$ равномерно на любом компакте из $\bar{D}$.

Далее доказываем теорему 1. Фиксируем произвольно точку $(x_0,t_0) \in \Omega$ и число $\varepsilon > 0$. Рассматриваем область $\Omega_d = \{(x,t) \in \Omega : x > g(t) + d, d < t < T - d\}$ такую, что $(x_0,t_0) \in \Omega_d$ при достаточно малом $d \in (0, T/2)$. Пусть $\bar{u}$ – продолжение вектор-функции u с $\bar{\Omega}$ на $\mathbb{R}^2$ с сохранением класса гладкости $C^{1,0}$ (см. [6, с. 342]), причем такое, что $\bar{u}(x,0) = \partial_x \bar{u}(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$. Функцию $\bar{u}$ “сглаживаем” таким же способом, как и коэффициенты системы, и получаем гладкие вектор-функции u_s такие, что $u_s(x,t) \to u(x,t)$, $s \to 0$, равномерно на любом компакте из $\bar{\Omega}$. Пусть $\zeta_R \in C^\infty(\mathbb{R})$ – функция (“срезка”) со следующими свойствами:

$$0 \le \zeta_R(x) \le 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \zeta_R \equiv 1, \quad |x| \le R, \quad \zeta_R \equiv 0, \quad |x| \ge 2R,$$

$$\left|\frac{d^l\zeta_R}{dx^l}(x)\right| \le CR^{-l}, \quad l = 1, 2,$$

где число $R \ge R_0 = \max(2|x_0|, 1)$. Полагаем $u_{s,R}(x,t) = u_s(x,t)\zeta_R(x)$. Для любых $0 < s < d/2$, $r > 0$ и $R \ge R_0$ вектор-функция $u_{s,R}$ является решением задачи

$$L^{(r)}v = f_{s,R}^{(r)} \quad \text{в} \quad \Omega_d, \quad v(x,d) = h_{s,R,d}(x), \quad x \ge g(d) + d,$$

$$\partial_x v(g(t)+d, t) = \theta_{s,R,d}(t), \quad t \in [d, T-d],$$

где $f_{s,R}^{(r)}(x,t) = L^{(r)}u_{s,R}(x,t)$, $h_{s,R,d}(x) = u_{s,R}(x,d)$, $\theta_{s,R,d}(t) = \partial_x u_{s,R}(g(t)+d, t)$. Из работы [2] в силу установленной выше единственности решения второй начально-краевой задачи в случае параболического оператора с дифференцируемыми коэффициентами и свойств векторных параболических потенциалов следует, что для любых $0 < s < d/2$ и $R \ge R_0$ вектор-функцию $u_{s,R}$ можно представить в виде суммы потенциала Пуассона, объемного потенциала и потенциала простого слоя, последовательно оценивая которые, получаем, что найдутся достаточно большое $R > R_0$ и достаточно малые $d = d(R) > 0$, $s_0 = s_0(d,R) > 0$, $r = r(d,R) > 0$ такие, что $|u_{s,R}(x,t)| < \varepsilon/2$ для любого $s \le s_0$ и, в частности, $|u_s(x_0,t_0)| < \varepsilon/2$. Отсюда, учитывая, что $|u_s(x_0,t_0) - u(x_0,t_0)| < \varepsilon/2$ для достаточно малого $s > 0$, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем утверждение теоремы 1.

Используя результаты работы [4] и теорему 1, доказываем затем теорему 2.

В случае ограниченной области $\Omega = \{(x,t) \in D: g_1(t) < x < g_2(t)\}$ с боковыми границами $\Sigma_s = \{(x,t) \in \bar{D}: x = g_s(t)\}$, $s = 1, 2$, удовлетворяющими условиям

$$\left|g_s(t+\Delta t) - g_s(t)\right| \le |\Delta t|^{1/2}\,\omega_1(|\Delta t|^{1/2}), \quad s = 1, 2, \quad g_1(t) < g_2(t), \quad t, t+\Delta t \in [0,T], \tag{7}$$

где модуль непрерывности ω_1 удовлетворяет условию (2), справедлива следующая

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены условия* (a), (b), (7). *Пусть* $u \in \underset{0}{C}^{1,0}(\bar{\Omega})$ *– классическое решение системы*

$$Lu = 0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = 0, \quad g_1(0) \le x \le g_2(0),$$

и одной из трех пар граничных условий

$$u(g_s(t),t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad s = 1, 2,$$

или

$$\partial_x u(g_s(t),t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad s = 1, 2,$$

или

$$u(g_1(t),t) = 0, \quad \partial_x u(g_2(t),t) = 0, \quad t \in [0,T].$$

Тогда $u \equiv 0$ *в* $\bar{\Omega}$.

Утверждение теоремы 3 получаем, следуя методу из [6, с. 361], используя “разбиение единицы”, как следствие из теорем 1, 2 настоящей работы и теоремы о единственности решения задачи Коши для систем с Дини-непрерывными коэффициентами (см. [16]).

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность академику РАН Е.И. Моисееву и проф. И.С. Ломову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. МГУ, секц. А. 1938. Т. 1. Вып. 7. С. 1–72.
2. *Зейнеддин М.* О потенциале простого слоя для параболической системы в классах Дини / Дисс. ... к.ф.-м.н. М., 1992.
3. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини // Деп. ВИНИТИ РАН. 16.04.92. № 1294-В92.
4. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients // Applicable Analysis. 2021. V. 100. № 13. P. 2900–2910.
5. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. МИАН. 1965. Т. 83. Ч. 3.
6. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
7. *Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // УМН. 1962. Т. 17. Вып. 3 (105). С. 3–146.
8. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* О приложениях принципа максимума к параболическим уравнениям 2-го порядка // ДАН СССР. 1972. Т. 204. № 3. С. 529–532.
9. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Об аналогах теоремы Жиро для параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. мат. журнал. 1973. Т. 14. № 1. С. 86–110.
10. *Мазья В.Г., Кресин Г.И.* О принципе максимума для сильно эллиптических и параболических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Матем. сб. 1984. Т 125 (167). № 4 (12). С. 458–480.
11. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* О единственности решений первой и второй начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных областях на плоскости // Дифф. уравн. 2021. Т. 57. № 8. С. 1039–1048.
12. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* Единственность решения первой начально-краевой задачи для параболической системы второго порядка с дифференцируемыми коэффициентами в полуограниченной негладкой плоской области // Дифф. уравн. 2021. Т. 57. № 5. С. 625–634.
13. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Принцип максимума и локальная регулярность (в смысле Липшица) решений параболического уравнения 2-го порядка вблизи боковой части параболической границы // ДАН СССР. 1974. Т. 219. № 4. С. 785–788.
14. *Камынин Л.И., Химченко Б.Н.* Принцип максимума и локальные оценки Липшица вблизи боковой границы для решений параболического уравнения 2-го порядка // Сиб. матем. журн. 1975. Т. 16. № 6. С. 1172–1187.
15. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифф. уравн. 2016. Т. 52. № 2. С. 198–208.
16. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* О единственности решения задачи Коши для параболических систем // Дифф. уравн. 2019. Т. 55. № 6. С. 822–830.

UNIQUENESS OF SOLUTIONS OF INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR PARABOLIC SYSTEMS WITH DINI-CONTINUOUS COEFFICIENTS IN DOMAINS ON THE PLANE

E. A. Baderko[a] and S. I. Sakharov[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

The first and second initial-boundary value problems for Petrovsky parabolic systems of the second order with coefficients satisfying the Dini condition in domains on the plane with nonsmooth lateral boundaries, admitting, in particular, "beaks", are considered. Theorems on the uniqueness of classical solutions of these problems in the class of functions that are continuous and bounded together with their first-order spatial derivative in the closure of these domains are proved.

Keywords: parabolic system, initial boundary value problem, uniqueness of the classical solution, nonsmooth lateral boundary, boundary integral equations

EDN: IZMOLZ
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 30–32

МАТЕМАТИКА

УДК 519.147

О ПОКРЫТИИ ТОРА КУБАМИ

© 2022 г. И. И. Богданов[1,*], О. Р. Григорян[2], М. Е. Жуковский[1]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 25.12.2021 г.
Поступило 06.01.2022 г.
После доработки 06.01.2022 г.
Принято к публикации 09.02.2022 г.

Мы получили новые оценки и точные значения наименьшего количества кубов со стороной $\varepsilon \in (0, 1)$, покрывающих тор $[\mathbb{R}/\mathbb{Z}]^3$.

Ключевые слова: покрытие кубами, тор, параллельный перенос
DOI: 10.31857/S2686954322020072

1. ИСТОРИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для произвольного $d \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ задача состоит в нахождении минимального количества $\mu(d;\varepsilon)$ кубов $A_1, \ldots, A_\mu$, со стороной ε, покрывающих тор $T^d := [\mathbb{R}/\mathbb{Z}]^d$. Как обычно, под кубом со стороной ε подразумевается множество вида $\{(x_1, \ldots, x_d)\colon x_i \in [x_i^0, x_i^0 + \varepsilon]\}$, а под покрытием — такой набор множеств $A_1, \ldots, A_\mu$, что $A_1 \cup \ldots \cup A_\mu = T^d$. Известно [1], что для всех d и ε справедливо

$$\mu(d;\varepsilon) \geq \lceil 1/\varepsilon \rceil^{(d)}, \quad (1)$$

где $\lceil x \rceil^{(i)} = \left\lceil x \lceil x \rceil^{(i-1)} \right\rceil$ и $\lceil x \rceil^{(1)} = \lceil x \rceil$. Довольно широко изучен случай растущей размерности d. Заметим, что ((1)) влечет $\mu(d;\varepsilon) \geq (1/\varepsilon + o(1))^d$. Из общего результата Эрдеша и Роджерса о покрытиях [2] следует, что $1/\varepsilon$ — правильное основание экспоненты, т.е. $\mu(d;\varepsilon) = (1/\varepsilon + o(1))^d$. Точнее Эрдеш и Роджерс доказали, что $\mu(d;\varepsilon) = O(d\log d(1/\varepsilon)^d)$. Для дискретного тора $T^d = [\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}]^d$, покрываемого кубами со стороной $s \in \{1, \ldots, t\}$, с помощью вероятностного метода нетрудно (см., например, [3]) улучшить эту оценку, убрав логарифмический множитель (здесь подразумевается, что $\varepsilon = s/t$). Нам удалось показать (см. лемму 3 и лемму 3), что дискретная и непрерывная постановка эквивалентны. Тем самым, $\mu(d;\varepsilon) = O(d(1/\varepsilon)^d)$ (как для рациональных, так и для иррациональных ε). Отметим, что из нижней оценки (1) следует лишь $\mu(d;\varepsilon) = \Omega((1/\varepsilon)^d)$.

Что касается малых значений размерности d, то нам известна лишь работа [1], в которой доказано, что при $d = 2$ нижняя оценка (1) точна, т.е. $\mu(2;\varepsilon) = \lceil 1/\varepsilon \lceil 1/\varepsilon \rceil \rceil$.

Мы изучаем случай $d = 3$. Так как $\mu(1;\varepsilon) = \lceil 1/\varepsilon \rceil$ и $\mu(2;\varepsilon) = \lceil 1/\varepsilon \lceil 1/\varepsilon \rceil \rceil$, то

$$\lceil 1/\varepsilon \lceil 1/\varepsilon \lceil 1/\varepsilon \rceil \rceil \rceil \leq \mu(3;\varepsilon) \leq \lceil 1/\varepsilon \lceil 1/\varepsilon \rceil \rceil \lceil 1/\varepsilon \rceil. \quad (2)$$

Заметим, что в размерности 3 нижняя оценка уже не является точной. Так, например, как замечено в [1], $\mu(3;3/7) > \lceil 7/3 \lceil 7/3 \lceil 7/3 \rceil \rceil \rceil$. Нам удалось найти точное значение $\mu(3;\varepsilon)$ при всех $\varepsilon \geq 7/15$ и при ε, близких к $1/r$, $r \in \mathbb{N}$.

Отметим напоследок, что при $\varepsilon = 2/r$, $r \in \mathbb{N}$, соответствующая задача об упаковке (т.е. нахождение минимального количества $\nu(d;\varepsilon)$ непересекающихся кубов со стороной ε в T^d) связана с нахождением емкости Шеннона $c(C_r)$ простого цикла на r вершинах [4], а именно, справедливо равенство $c(C_r) = \sup_{d\geq 1}(\nu(d;2/r))^{1/d}$ (аналогичная связь имеется и при всех других рациональных ε, но соответствующие графы сложнее описать). Для четного r, очевидно, $c(C_r) = r/2$. Если же r нечетно, то значение емкости Шеннона известно лишь при $r = 5$: $c(C_5) = \sqrt{5}$ [5].

[1] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия*
[2] *Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва, Россия*
**e-mail: zhukmax@gmail.com*

2. НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим сперва $\varepsilon \geq 1/2$.

Теорема 1. *Справедливы равенства*

$$\mu(3;\varepsilon) = 8, \quad \varepsilon \in [1/2, 2/3), \quad \mu(3;\varepsilon) = 5,$$
$$\varepsilon \in [2/3, 3/4), \quad \mu(3;\varepsilon) = 4, \quad \varepsilon \in [3/4, 1).$$

Заметим, что при $\varepsilon \in [1/2, 1)$ величина $\mu(3;\varepsilon)$ равна своей нижней оценке в (2) тогда и только тогда, когда $\varepsilon \in [1/2, 4/7) \cup [2/3, 1)$.

Так как при целых $r \geq 2$ и $\varepsilon \in \left[\frac{1}{r}, \frac{1}{r - 1/r^2}\right)$ нижняя и верхняя оценка в (2) совпадают, то, очевидно, $\mu(3;\varepsilon) = r^3$. Мы также нашли такую левую окрестность $1/r$, что при всех ε из этой окрестности нижняя оценка точна. Заметим, что при таких ε разность между верхней и нижней оценкой, наоборот, велика.

Теорема 2. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \left[\frac{1}{r + 1/(r^2 + r + 1)}, \frac{1}{r}\right)$. *Тогда* $\mu(3;\varepsilon) = r^3 + r^2 + r + 1$.

Кроме того, мы расширили упомянутую правую окрестность.

Теорема 3. *Пусть* $r \geq 2$ *— целое число,* $\varepsilon \in \left[\frac{1}{r}, \frac{r^2 - 1}{r^3 - r - 1}\right)$. *Тогда* $\mu(3;\varepsilon) = r^3$.

В некоторых случаях нам удалось усилить нижнюю оценку в (2).

Теорема 4. *Пусть* $r \geq 2$ *— целое число, а* $\xi \in \{1, \ldots, r\}$ *таково, что*

$$\xi^2 \leq \xi + (r+1)\left\lfloor \frac{\xi^2}{r+1} \right\rfloor.$$

Пусть, кроме того,

1) $s = r^2 + r + \xi$,

2) $t = r^3 + r^2 + 2\xi r + \left\lfloor \frac{\xi^2}{r+1} \right\rfloor$ *взаимно просто с* s.

Тогда $\mu\left(3; \frac{s}{t}\right) \geq t + 1$.

Заметим, что так как условие $\xi^2 \leq \xi + (r + 1)\left\lfloor \frac{\xi^2}{r+1} \right\rfloor$ влечет, что либо $\xi \geq \sqrt{r+1}$, либо $\xi = 1$, то в интервале [1/3, 1/2) найдутся только два таких значения $\frac{s}{t} \in \left\{\frac{7}{16}, \frac{8}{21}\right\}$.

Наконец, в некоторых случаях нам удалось усилить и верхнюю оценку в (2).

Теорема 5. *Пусть* $r \geq 2$ *— целое число,* $\xi \in \{1, \ldots, r\}$. *Пусть, кроме того,*

1) $s = r^2 + r + \xi$,

2) $t = r^3 + r^2 + \xi(r + 1)$.

Тогда $\mu\left(3; \frac{s}{t}\right) \leq t$.

Для доказательства полученных результатов мы установили, что задача нахождения $\mu(d;\varepsilon)$ сводится к своему дискретному аналогу – к задаче нахождения минимального количества кубов со стороной s, покрывающих $[\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}]^d$ для некоторых s, t таких, что s/t близко к ε. Таким образом, эти вспомогательные утверждения влекут, что задача сводится к рассмотрению счетного множества значений ε, причем количество таких значений в каждом интервале вида $[1/r, 1/(r-1)]$ конечно.

3. ПЕРЕХОД К ДИСКРЕТНОМУ СЛУЧАЮ

Лемма 1. *Существует такая бесконечная последовательность рациональных чисел* $1 > \frac{s_1}{t_1} > \frac{s_2}{t_2} > \ldots > 0$, *что для каждого* $i \in \mathbb{N}$ *справедливо* $t_i \leq \mu\left(d; \frac{s_i}{t_i}\right)$ *и* $\mu(d;\varepsilon) = \mu\left(d; \frac{s_i}{t_i}\right)$ *для всех* $\varepsilon \in \left[\frac{s_i}{t_i}, \frac{s_{i-1}}{t_{i-1}}\right)$, *где* $s_0 = t_0 = 1$.

Из (2) несложно заметить, для каждого $r \geq 2$ для решения задачи для всех ε в интервале $\left[\frac{1}{r}, \frac{1}{r-1}\right)$ достаточно рассмотреть не более $\frac{r^2(r^3+1)}{2(r-1)} + r^3$ различных значений ε.

Пусть $s \leq t$ – натуральные числа. Пусть $\mu_0(d; s, t)$ – наименьшее количество кубов со стороной, состоящей из s точек, покрывающих тор $[\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}]^d$.

Лемма 2. *Пусть* $r \geq 2$ *— целое число,* $\varepsilon \in \left[\frac{1}{r}, \frac{1}{r-1}\right)$. *Пусть, кроме того,* $\frac{s}{t} \leq \varepsilon$ *— ближайшее к* ε *рациональное число с* $t \leq r^d$. *Тогда* $\mu(d;\varepsilon) = \mu_0(d; s, t)$.

4. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

При $\varepsilon \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ точные значения $\mu(3;\varepsilon)$ приведены в теореме 2. Перечислим точные результаты и некоторые оценки, которые влекут теоремы 2, 3, 4, 5 и лемма 1 для $\varepsilon \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$:

- при $\varepsilon \in \left[\frac{1}{3}, \frac{8}{23}\right)$ справедливо $\mu(3;\varepsilon)' = 27$;

- при $\varepsilon \in \left[\frac{8}{21}, \frac{5}{13}\right)$ справедливо $\mu(3;\varepsilon) \in [22, 24]$;
- при $\varepsilon \in \left[\frac{7}{16}, \frac{4}{9}\right)$ справедливо $\mu(3;\varepsilon) \in [17, 21]$;
- при $\varepsilon \in \left[\frac{4}{9}, \frac{7}{15}\right)$ справедливо $\mu(3;\varepsilon) \in [16, 18]$;
- при $\varepsilon \in \left[\frac{7}{15}, \frac{1}{2}\right)$ справедливо $\mu(3;\varepsilon) = 15$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда, проект № 21-71-10092.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mceliece R.J., Taylor H.* Covering Tori with Squares // J. Combinatorial Theory Ser. A. 1973. V. 14. P. 119–124.
2. *Erdös P., Rogers C.A.* Covering space with convex bodies // Acta Arithmetica. 1962. V. 7. P. 281–285.
3. *Bollobás B., Janson S., Riordan O.* On covering by translates of a set // Random Structures & Algorithms. 2011. V. 38. № 1-2. P. 33–67.
4. *Brouwer A.E., Schrijver A.* Uniform hypergraphs // In: Packing and Covering in Combinatorics, A. Schrijver (Ed.), Math. Centre Tracts. № 106ю Mathematisch Centrum, Amsterdam. 1979. P. 39–73.
5. *Lovász L.* On the Shannon capacity of a graph // IEEE Trans. Inform. Theory. 1979. V. 25 P. 1–7.

ON COVERINGS OF TORI WITH CUBES

I. I. Bogdanov[a], O. R. Grigoryan[b], and M. E. Zhukovskii[a]

[a] *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudnyi, Moscow Region, Russia*
[b] *National research university "Higher School of Economics", Moscow, Russia*
Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

We obtain new bounds as well as exact values of the minimum number of cubes with side $\varepsilon \in (0, 1)$ covering the torus $[\mathbb{R}/\mathbb{Z}]^3$.

Keywords: covering with cubes, torus, translation

EDN: ATDXKP
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 33–39

МАТЕМАТИКА

УДК 517.954.517.982

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ПРАНДТЛЯ ДЛЯ ВЯЗКОЙ МГД–СРЕДЫ О.А. ЛАДЫЖЕНСКОЙ ПРИ ОБТЕКАНИИ КОНФУЗОРА

© 2022 г. Р. Р. Булатова[1,*]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 02.06.2021 г.
Поступило 03.06.2021 г.
После доработки 03.06.2021 г.
Принято к публикации 08.02.2022 г.

В работе доказаны теоремы существования и единственности решений системы уравнений Прандтля для вязкой среды О.А. Ладыженской. Также получены асимптотические разложения решений в зависимости от скорости внешнего потока и поведения функции вдува–отсоса.

Ключевые слова: пограничный слой Прандтля, реологический закон О.А. Ладыженской, конфузор, асимптотики решений

DOI: 10.31857/S2686954322020084

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается магнитогидродинамический пограничный слой жидкости с нелинейным реологическим уравнением О.А. Ладыженской. В работах [1–3] такая система была изучена с использованием преобразования Мизеса, а в работах [4, 5] – с помощью преобразования Крокко (о преобразованиях Мизеса и Крокко см. [6]). О поведении электропроводных жидкостей см. [7]. Другие задачи гидродинамики реологически сложных сред см. [8–12], в которых доказаны теоремы существования и единственности для систем, описывающих поведение жидких кристаллов – нематиков.

В настоящей работе изучены движение жидкости в конфузоре (трубе переменного сечения) и поведение соответствующего пограничного слоя, начиная с носовой точки конфузора.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КРОККО

Рассматривается двумерное стационарное течение модифицированной вязкой жидкости, подчиняющейся реологическому закону О.А. Ладыженской. В этом случае система уравнений Прандтля имеет вид

$$\begin{gathered}\nu\left(1+3d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-u\frac{\partial u}{\partial x}-\\ -v\frac{\partial u}{\partial y}+B^2(U-u)=-U\frac{dU}{dx},\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь ν, d – постоянные, зависящие от свойств жидкости, плотность жидкости ρ предполагается равной единице, $B(x)$, $U(x)$ – заданные достаточно гладкие функции. Функция скорости внешнего потока $U(x)$ связана с давлением $p(x)$ и компонентами электрического поля $B(x)$ соотношением

$$U\frac{dU}{dx}=-\frac{dp}{dx}-EB-B^2U.$$

Система уравнений (1) рассматривается в области $D=\{0<x<X, 0<y<\infty\}$ с граничными условиями

$$\begin{gathered}u(0,y)=0,\quad u(x,0)=0,\quad v(x,0)=v_0(x),\\ u(x,y)\to U(x)\quad \text{при}\quad y\to\infty,\end{gathered}\tag{2}$$

где $U(0)=0$, $U(x)>0$ при $x>0$. Пусть $U_x(0)>0$. Условия $U(0)=0$ и $u(0,y)=0$ определяют точку $x=0$ как точку, в которой происходит остановка внешнего потока жидкости (носовая точка обтекаемого тела) и пограничный слой симметричен относительно этой точки.

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: regina.bulatova@mech.math.msu.su*

О внешнем потоке в окрестности носовой точки обтекаемого тела известно, что скорость потока меняется по закону $U(x) \sim Cx^m$, где $C, m = \text{const} > 0$, причем m зависит от угла $\varphi = 2\pi \dfrac{m}{m+1}$ между образующими обтекаемой поверхности в точке $x = 0$, см. [13].

В работе [4] в аналогичных задачах предполагалось $m = 1$, т.е. пограничный слой рассматривался в окрестности затупленной носовой точки обтекаемого тела.

Определение 1. *Классическим решением задачи* (1), (2) *называются функции* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$, *обладающие следующими свойствами*: $u(x, y)$ *непрерывна в замкнутой области* $\overline{D}$, $v(x, y)$ *непрерывна в* D, *а по* y *в* $\overline{D}$; *функции* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *имеют в* D *непрерывные производные*, *входящие в уравнение* (1); $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *удовлетворяют поточечно уравнениям* (1) *и граничным условиям* (2).

Задачу (1), (2) сводим к краевой задаче для одного квазилинейного уравнения с помощью замены переменных $(x, y) \to (\xi, \eta)$ и введения новой неизвестной функции $w(\xi, \eta)$, где

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{u(x, y)}{U(x)}, \quad w(\xi, \eta) = \frac{u_y(x, y)}{U(x)}. \tag{3}$$

После преобразований получаем одно квазилинейное уравнение

$$\begin{gathered} \nu(1 + 3dU^2w^2)w^2w_{\eta\eta} - \eta U w_\xi + (\eta^2 - 1)U_\xi w_\eta - \\ - \eta U_\xi w + 6\nu dU^2 w_\eta^2 w^3 + (\eta - 1)B^2 w_\eta - B^2 U w = 0 \end{gathered} \tag{4}$$

в области $\Omega = \{0 < \xi < X, 0 < \eta < 1\}$ с граничными условиями

$$\begin{gathered} w(\xi, 1) = 0, \\ (\nu w w_\eta (1 + 3dU^2w^2) - v_0(\xi)w + U_\xi + B^2)\big|_{\eta=0} = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Определение 2. *Функция* $w(\xi, \eta)$ *называется решением задачи* (4), (5), *если* w *непрерывна в* $\overline{\Omega}$ *и имеет непрерывные производные* $w_\xi, w_\eta, w_{\eta\eta}$ *в* Ω; w_η *непрерывна по* η *при* $\eta = 0$; w *удовлетворяет уравнению* (4) *в* Ω *и граничным условиям* (5).

Предположим дополнительно, что $U(x) = x^m V(x)$, $V(x) > 0$ при $0 \le x \le X$, $v_0(x) = x^{\frac{m-1}{2}} v_1(x)$, $V(x) = a + xa_1(x)$, $a > 0$, $v_1(x) = b + xb_1(x)$, $a_1(x)$ и $b_1(x)$ достаточно гладкие функции. Перейдем от функции $w(\xi, \eta)$ к функции $w(\xi, \eta)\xi^{\frac{m-1}{2}}$, сохранив прежнее обозначение.

Получим уравнение

$$\begin{gathered} \nu(1 + 3d\xi^{3m-1}V^2(\xi)w^2)w^2 w_{\eta\eta} - \\ - \eta\xi V(\xi)w_\xi + (\eta^2 - 1)(mV(\xi) + \xi V_\xi(\xi))w_\eta - \\ - \eta\left(\xi V_\xi(\xi) + \frac{3m-1}{2}V(\xi)\right)w + 6\nu d x^{\frac{9m-5}{2}} V^2(\xi) w_\eta^2 w^3 + \\ + (\eta - 1)B^2 w_\eta - B^2 \xi V(\xi) w = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

в области $\Omega = \{0 < \xi < X, 0 < \eta < 1\}$ с граничными условиями

$$\begin{gathered} w(\xi, 1) = 0, \quad (\nu w w_\eta (1 + 3d\xi^{3m-1}V^2(\xi)w^2) - \\ - v_1(\xi)w + mV(\xi) + \xi V_\xi(\xi) + B^2)\big|_{\eta=0} = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Рассмотрим вспомогательную граничную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{gathered} L(Y) \equiv \nu Y^2 Y_{\eta\eta} + (\eta^2 - 1)maY_\eta - \\ - \eta a\frac{3m-1}{2}Y + (\eta - 1)B^2 Y_\eta = 0, \quad 0 < \eta < 1 \end{gathered} \tag{8}$$

с граничными условиями

$$l(Y) \equiv (\nu Y Y_\eta - bY + ma + B^2)\big|_{\eta=0} = 0, \quad Y(1) = 0. \tag{9}$$

В работе доказываются следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $V_x > 0$ *и функции* $a_1(x)$, $a_{1x}(x)$, $a_{1xx}(x)$, $b_1(x)$, $b_{1x}(x)$ *ограничены при* $0 \le x \le X$. *Тогда задача* (4), (5) *в области* Ω, *где* X *зависит от* U, v_0, ν, *имеет положительное при* $\eta < 1$ *решение*, *обладающее следующими свойствами*: $w(\xi, \eta)$ *непрерывна в* $\overline{\Omega}$; *обобщенные производные* w_ξ, w_η, $w_{\eta\eta}$ *существуют и удовлетворяют неравенствам*

$$Ye^{-C_1\xi} \le w \le Ye^{C_2\xi}, \quad Y_\eta e^{C_3\xi} \le w_\eta \le Y_\eta e^{-C_4\xi}, \tag{10}$$

$$|w_\xi(\xi, \eta)| \le C_5 Y, \quad -C_6 \le w^2 w_{\eta\eta} \le -C_7. \tag{11}$$

В любой замкнутой области, *лежащей внутри* Ω, *функция* w *и ее производные*, *входящие в уравнение* (4), *удовлетворяют условию Гёльдера*.

Теорема 2. *Задача* (4), (5) *в области* Ω *может иметь лишь одно неотрицательное решение* w, *обладающее следующими свойствами*: w *непрерывна в* Ω; w_η, $w_{\eta\eta}$, w_ξ *непрерывны во внутренних точках* Ω; $w > 0$ *при* $\eta = 0$; w_η *непрерывна по* η *при* $\eta = 0$.

Теорема 3. *Пусть* $V_x > 0$ *и функции* $a_1(x)$, $a_{1x}(x)$, $a_{1xx}(x)$, $b_1(x)$, $b_{1x}(x)$ *ограничены при* $0 \le x \le X$. *Тогда задача* (1), (2) *в области* D, *при* X, *зависящем от* U *и* v_0, *имеет решение* u, v, *которое обладает* *следующими свойствами*: $u_y > 0$ *при* $y \geq 0$ *и* $x > 0$; *функции* $\frac{u}{U}$, $\frac{u_y}{x^{\frac{m-1}{2}}U}$ *ограничены и непрерывны в* $\bar{D}$; $u > 0$ *при* $y > 0$ *и* $x > 0$; $u \to U$ *при* $y \to \infty$, $u(x,0) = u(0,y) = 0$; $\frac{u_y}{U} > 0$ *при* $y \geq 0$; $\frac{u_y}{U} \to 0$ *при* $y \to \infty$; u_x, u_y, u_{yy} *ограничены и непрерывны в* $\bar{D}$; v *непрерывна в* $\bar{D}$ *по* y *при* $x > 0$; v *непрерывна по* x *и* y *внутри* D; u_{yyy} *ограничена в* $\bar{D}$; u_{xy} *ограничена в* D *при ограниченных* y; u_{xy} *и* u_{yyy} *непрерывны в* $\bar{D}$; $\frac{u_{yy}}{x^{\frac{m-1}{2}}u_y}$ *непрерывна в* $\bar{D}$ *по* y; *имеют место оценки*

$$x^{\frac{m-1}{2}}U(x)Y\left(\frac{u}{U}\right)e^{-C_1x} \leq u_y \leq x^{\frac{m-1}{2}}U(x)Y\left(\frac{u}{U}\right)e^{C_2x},$$

$$Y_\eta\left(\frac{u}{U}\right)e^{C_3x} \leq \frac{u_{yy}}{u_y} \leq Y_\eta\left(\frac{u}{U}\right)e^{-C_4x},$$

$$e^{\left(-\frac{M_1^2}{4}x^{m-1}y^2e^{2C_2x}\right)} \leq 1 - \frac{u}{U} \leq e^{\left(-\frac{M_1^2}{4}x^{m-1}y^2e^{-2C_1x}\right)},$$

где $Y(\eta)$ – решение задачи (8), (9).

Т е о р е м а 4. *Пусть* u, v – *решение задачи* (1), (2) *такое, что*: *производные* u_x, u_y, v_y, u_{yy}, u_{yyy}, u_{xy} *непрерывны в* D; $\frac{u}{U}$ *и* $\frac{u_y}{x^{\frac{m-1}{2}}U}$ *непрерывны в* $\bar{D}$; $u_y > 0$ *при* $y \geq 0$, $x > 0$; $\frac{u_y}{U} > 0$ *при* $y = 0$; $\frac{u_y}{U} \to 0$ *при* $y \to \infty$; $\frac{u_{yy}}{x^{\frac{m-1}{2}}u_y}$, u_x *непрерывны по* y *при* $y = 0$;

$$\frac{u_{yyy}u_y - u_y^2}{u_y^2} \leq 0.$$

Тогда u, v – *единственное решение задачи* (1), (2) *с указанными свойствами*.

Предполагаем далее, что имеют место следующие асимптотики:

$$U(x) = x^m\left(a + \sum_{\beta=1}^{q} a_\beta x^\beta + a_{q+1}(x)\right),$$
$$v_0(x) = x^{\frac{m-1}{2}}\left(b + \sum_{\gamma=1}^{q} b_\gamma x^\gamma + b_{q+1}(x)\right), \tag{12}$$

где $a = \text{const} > 0$; $a_\beta = \text{const}$; $\beta = 1, \ldots, q$; b, $b_\gamma = \text{const}$; $\gamma = 1, \ldots, q$;

$$|a_{q+1}(x)| \leq C_8x^{q+1}, \quad \left|\frac{da_{q+1}}{dx}\right| \leq C_9x^q,$$
$$\left|\frac{d^2a_{q+1}}{dx^2}\right| \leq C_{10}x^{q-1},$$
$$|b_{q+1}(x)| \leq C_{11}x^{q+1}, \quad \left|\frac{db_{q+1}}{dx}\right| \leq C_{12}x^q, \quad q \geq 1.$$

Эти предположения выполняются, в частности, когда производная порядка $q + l + 1$ функции $U(x)$ и производная порядка $q + l$ функции $v_0(x)$ ограничены.

Рассмотрим семейство задач

$$T(Y_l) \equiv \nu Y_0^2Y_{l\eta\eta} + (\eta^2 - 1)maY_{l\eta} - 2\eta aY_l + 2\nu Y_0Y_{0\eta\eta}Y_l + (\eta - 1)B^2Y_{l\eta} = 0, \tag{13}$$

$$t(Y_l) \equiv \left(\nu Y_0Y_{l\eta} + \nu Y_{0\eta}Y_l - bY_l\right)\big|_{\eta=0} = 0, \quad l = 1, \ldots, q. \tag{14}$$

Здесь $Y_0(\eta)$ – решение задачи (8), (9).

Т е о р е м а 5. *Предположим, что для* $U(x)$ *и* $v_0(x)$ *имеем представления* (12) *при* $q \geq 1$. *Тогда для решения* $w(\xi,\eta)$ *задачи* (4), (5) *справедливо асимптотическое разложение вида*

$$\left|w(\xi,\eta) - \sum_{l=0}^{q} Y_l(\eta)\xi^l\right| \leq C_{13}Y_0(\eta)\xi^{q+1}, \quad 0 \leq \xi \leq X, \tag{15}$$

при $\xi \to 0$, *где* Y_l, $l = 1, \ldots, q$ – *решения задачи* (13), (14); Y_0 – *решение уравнения* (8) *с условиями* (9); C_{13} – *положительная постоянная*.

Т е о р е м а 6. *Предположим, что имеют место равенства* (12) *при* $q \geq 1$. *Тогда для решения* u, v *задачи* (1), (2) *справедлива оценка*

$$\left|u_y(x,y) - x^{\frac{m-1}{2}}U(x)\sum_{l=0}^{q}Y_l\left(\frac{u}{U}\right)x^{2l}\right| \leq C_{13}x^{\frac{m-1}{2}}U(x)Y_0\left(\frac{u}{U}\right)x^{2q+2} \tag{16}$$

где Y_m, $m = 1, \ldots, q$ – *решения задачи* (13), (14).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Теоремы 1 и 2 могут быть доказаны с применением методов работы [4] (см. также [14]). Доказательство теоремы 1 проводится методом прямых, т.е. в уравнении задачи (6), (7) мы заменяем w_ξ разностным соотношением и получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой доказываем теорему существования и затем с помощью предельного перехода доказываем существование решения исходного уравнения.

Для любой функции $f(\xi, \eta)$ введем обозначение

$$f^k = f^k(\xi, \eta) \equiv f(kh, \eta),$$
$$h = \text{const} > 0, \quad k = 0, 1, \ldots, [X/h].$$

Уравнения (6) с условиями (7) заменим системой дифференциальных уравнений

$$L_k(w) := \nu(1 + 3d(kh)^{3m-1}(V^k)^2(w^k)^2) \times$$
$$\times (w^k)^2 w^k_{\eta\eta} - \eta kh V^k \frac{w^k - w^{k-1}}{h} +$$
$$+ (\eta^2 - 1)(mV^k + khV^k_\xi)w^k_\eta -$$
$$- \eta\left(\frac{3m-1}{2}V^k + khV^k_\xi\right)w^k +$$
$$+ 6\nu d(kh)^{\frac{9m-5}{2}}(V^k)^2(w^k_\eta)^2(w^k)^3 +$$
$$+ (\eta - 1)B^2 w^k_\eta - B^2 kh V^k w^k = 0,$$
$$0 < \eta < 1, \quad k = 0, 1, \ldots, [X/h],$$

с граничными условиями

$$w^k(1) = 0$$
$$l_k(w) := (\nu(1 + 3d(kh)^{3m-1}(V^k)^2(w^k)^2)w^k w^k_\eta -$$
$$- v^k_1 w^k + mV^k + khV^k_\xi + B^2)\Big|_{\eta=0} = 0.$$

Доказательство существования решения задачи (6), (7) основано на следующих леммах, доказанных в [14]. Далее через M_i и K_i будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от h.

Л е м м а 1. *Задача* (6), (7) *имеет решение* $w^k(\eta)$, $k = 0, 1, \ldots, [X/h]$, *которое непрерывно при* $0 \le \eta \le 1$ *и бесконечно дифференцируемо при* $0 \le \eta < 1$, *если* $V_x > 0$ *при* $0 \le x \le X$ *и* V, V_x, v_0 *ограничены при* $0 \le x \le X$. *Для этого решения справедлива оценка*

$$K_1(1 - \eta) \le w^k(\eta) \le K_2(1 - \eta)\sqrt{-\ln \mu(1 - \eta)}$$

при $kh \le X$, *где* $h \le h_0$, $h_0 = \text{const} > 0$, $\mu = \text{const}$, $0 < \mu < 1$.

Л е м м а 2. *Задача* (8), (9) *имеет решение со следующими свойствами*:

$$M_2(1 - \eta)\sigma \le Y(\eta) \le M_1(1 - \eta)\sigma \quad \text{при} \quad 0 \le \eta \le 1,$$
$$M_1(1 - \eta)(\sigma - K_4) \le Y(\eta) \quad \text{при} \quad 0 < \eta_0 \le \eta < 1,$$
$$-M_4\sigma \le Y_\eta(\eta) \le -M_3\sigma, \quad |YY_{\eta\eta}| \le M_5, \quad YY_{\eta\eta} \le -M_6,$$
$$\sigma = \sqrt{-\ln \mu(1 - \eta)}, \quad \mu = \text{const}, \quad 0 < \mu < 1, \quad (17)$$
$$\nu M_1^2 = 2a, \quad \sigma(0) \ge \frac{|b|}{a} + 2,$$
$$\frac{K_4}{\sigma} < 1 \quad \text{при} \quad \eta > \eta_0 = \text{const} \ge 0.$$

З а м е ч а н и е 1. *Задача* (8), (9) *является задачей* (6), (7) *при* $k = 0$.

Л е м м а 3. *Предположим, что* $V(x) = a + xa_1(x)$, $v_0(x) = b + xb_1(x)$, *и функции* $a_1(x)$, $a_{1x}(x)$, $b_1(x)$ *ограничены при* $0 \le x \le X$. *Тогда при* $0 \le kh \le X$, *где* X *зависит от* $V(x)$, $v_0(x)$, *для решения* $w^k(\eta)$ *задачи* (6), (7) *имеют место неравенства*

$$Ye^{-C_1 kh} \le w^k(\eta) \le Ye^{C_2 kh},$$

где $Y(\eta)$ – *решение задачи* (8), (9).

Далее для обоснования предельного перехода в задаче (6), (7) при $h \to 0$ оцениваются величины

$$r^k = \frac{w^k - w^{k-1}}{h}, \quad z^k = w^k_\eta, \quad (w^k)^2 w^k_{\eta\eta}$$

равномерно по h.

Л е м м а 4. *Пусть выполнены предположения леммы* 3; *кроме того,* $a_{1xx}(x)$ *и* $b_{1x}(x)$ *ограничены. Тогда при достаточно малом* X *и* $0 \le kh \le X$ *решения* $w^k(\eta)$ *задачи* (6), (7) *удовлетворяют неравенствам*

$$\left|\frac{w^k - w^{k-1}}{h}\right| \le C_3 Y(\eta), \quad k = 1, 2, \ldots, \frac{X}{h},$$
$$Y_\eta e^{C_4 kh} \le w^k_\eta \le Y_\eta e^{-C_5 kh}, \quad k = 0, 1, \ldots, \frac{X}{h},$$
$$|(w^k)^2 w^k_{\eta\eta}| < C_6,$$
$$(w^k)^2 w^k_{\eta\eta} < -C_7, \quad k = 0, 1, \ldots, \frac{X}{h},$$

где $Y(\eta)$ – *решение задачи* (8), (9).

Обращая преобразование переменных (3), что возможно в силу свойств решения задачи (4), (5), получаем основной результат о существовании и единственности классического решения задачи (1), (2) в смысле данного нами определения.

4. АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ

В этом разделе доказаны теоремы 5 и 6. Задача (1), (2) решена в предположении, что $V(x)$ и $v_0(x)$ допускают асимптотическое представление при $x \to 0$ до слагаемых не ниже первого порядка по x. При этом полученные оценки функций $w(\varepsilon, \eta)$ и $u_y(x, y)$ дают возможность найти главный член асимптотики этих функций при $x \to 0$. Если известны асимптотические при $x \to 0$ разложения функций $V(x)$ и $v_0(x)$ с любым числом членов, то возможно получить асимптотическое разложение функции $u_y(x, y)$ до слагаемых любого порядка по x и оценить остаточный член разложения.

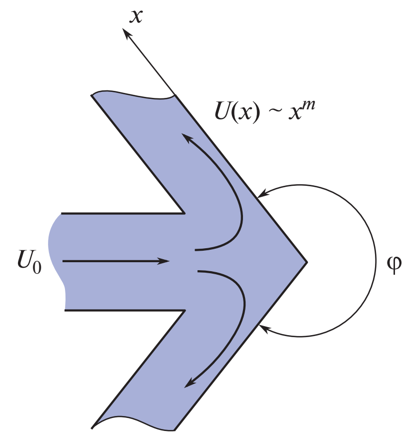

Рис. 1. Конфузор. Предполагается, что $m = \dfrac{\varphi}{2\pi - \varphi} > 1$.

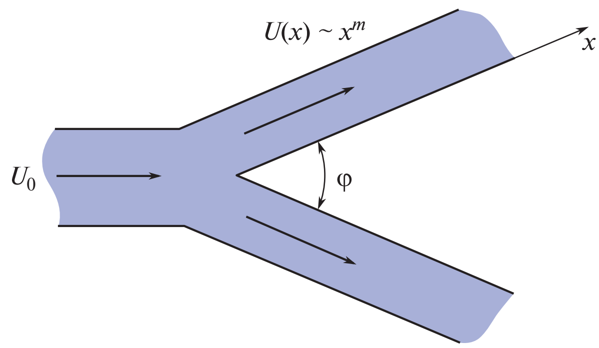

Рис. 2. Клин. Предполагается, что $m = \dfrac{\varphi}{2\pi - \varphi} < 1$.

Предположим, что имеют место асимптотические разложения (12) и воспользуемся утверждениями из [14].

Л е м м а 5. *Задача для уравнения*

$$\nu Y_0^2 Y_{m\eta\eta} + (\eta^2 - 1)a Y_{m\eta} - 2\eta a Y_m + 2\nu Y_0 Y_{0\eta\eta} Y_m + \\ + \nu \sum_{\substack{\rho+l+s=m \\ \rho\neq m, l\neq m, s\neq m}} Y_\rho Y_l Y_{s\eta\eta} + (\eta^2 - 1) \sum_{\substack{\rho+s=m \\ \rho\neq m}} (2s+1) a_s Y_{\rho\eta} - \\ - \eta \sum_{\substack{\rho+s=m \\ \rho\neq m}} (2s+1) a_s Y_\rho - \eta \sum_{\substack{\rho+s=m \\ \rho\neq m}} 2\rho a_s Y_\rho = 0$$

с граничными условиями

$$Y_m(1) = 0$$

$$\left(\nu Y_0 Y_{m\eta} + \nu Y_{0\eta} Y_m - b Y_m - \sum_{\substack{l+s=m \\ s\neq m}} b_l Y_s + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{\rho+s=m \\ \rho\neq m, s\neq m}} \nu Y_s Y_{\rho\eta} - (2m+1) a_m \right) \Bigg|_{\eta=0} = 0,$$

где Y_0 — решение задачи (8), (9), *имеет решение, удовлетворяющее неравенствам*

$$|Y_m| \le N_m (1-\eta)\sigma, \quad |Y_{m\eta}| \le C_m \sigma, \quad |Y_0 Y_{m\eta\eta}| \le R_m,$$

где N_m, C_m, R_m — положительные постоянные, $m = 1, 2, \ldots, q$, а σ задана формулой (17).

Л е м м а 6. *Пусть имеют место асимптотические разложения* (12). *Тогда для решения $w(\xi,\eta)$ задачи* (4), (5) *справедливы оценки*

$$\sum_{m=0}^{q} \xi^m Y_m e^{-C_{14}\xi^{q+1}} \le w \le \sum_{m=0}^{q} \xi^m Y_m e^{C_{15}\xi^{q+1}}$$

при $0 \le \xi \le X$, где $Y_0(\eta)$ — решение задачи (8), (9); *$Y_1(\eta), \ldots, Y_q(\eta)$ — решение системы* (13), *с условиями* (14); *положительные постоянные X, C_{14}, C_{15} зависят от $U(x)$, $v_0(x)$.*

Доказательство теоремы 5. Пусть $C_{16} = \max(C_{14}, C_{15})$. По лемме 6 имеем

$$\sum_{m=0}^{q} \xi^m Y_m e^{-C_{16}\xi^{q+1}} \le w \le \sum_{m=0}^{q} \xi^m Y_m e^{C_{16}\xi^{q+1}}.$$

Отсюда легко следует (15). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 6. Доказательство теоремы вытекает непосредственно из теоремы 5 и определения функции w.

Из неравенства (16) вытекает, в частности, следующая оценка:

$$\left| u_y(x,y) - x^{\frac{m-1}{2}} U(x) \sum_{m=0}^{q} Y_m(0) x^{2m} \right| \le \\ \le C_{16} U(x) Y_0(0) x^{\frac{4q+m+3}{2}}. \tag{18}$$

Из (18) вытекает асимптотическое разложение

$$u_y(x,y) = x^{\frac{m-1}{2}} U(x) \sum_{m=0}^{q} Y_m(0) x^{2m} + \\ + O\left(U(x) x^{\frac{4q+m+3}{2}} \right), \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Поскольку касательная составляющая τ напряжения вязкого трения на поверхности обтекаемого тела равна $\nu\rho u_y(x,0)$, имеем

$$\tau = \nu\rho x^{\frac{m-1}{2}} U(x) \sum_{m=0}^{q} Y_m(0) x^{2m} + \\ + O\left(U(x) x^{\frac{4q+m+3}{2}} \right), \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

для любого целого положительного q. Теорема доказана.

5. КОММЕНТАРИИ

Отметим, что результаты работы остаются верными не только для конфузора (тупой угол φ, см. рис. 1), но и для клина, когда угол φ является острым, см. рис. 2.

При этом скорость в пограничном слое в окрестности острия клина имеет степенной характер $U(x) \sim x^m$, где $m < 1$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана РНФ, грант № 20-1120272.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самохин В.Н., Фадеева Г.М., Чечкин Г.А.* Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье–Стокса // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2011. Т. 28. С. 329–361.
2. *Самохин В.Н., Чечкин Г.А.* Уравнения пограничного слоя обобщенно ньютоновской среды в окрестности критической точки // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2016. Т. 31. С. 158–176.
3. *Bulatova R.R., Chechkin G.A., Chechkina T.P., Samokhin V.N.* On the influence of a magnetic field on the separation of the boundary layer of a non–Newtonian MHD medium // C R Mécanique. 2018. V. 346. № 9. P. 807–814.
4. *Булатова Р.Р., Самохин В.Н.,Чечкин Г.А.* Система уравнений пограничного слоя реологически сложной среды. Переменные Крокко // Доклады РАН. 2019. Т. 487. № 2. С. 7–13.
5. *Булатова Р.Р., Самохин В.Н.,Чечкин Г.А.* О нестационарном пограничном слое вязкой реологически сложной жидкости // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. 2020. Т. 310. С. 40–77.
6. *Олейник О.А., Самохин В.Н.* Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука. Физматлит, 1997 508 с.
7. *Романов М.С., Самохин В.Н., Чечкин Г.А.* О скорости сходимости решений уравнений Прандтля в быстро осциллирующем магнитном поле // ДАН. 2009. Т. 426. № 4. С. 450–456.
8. *Ратью Т.С., Романов М.С., Самохин В.Н., Чечкин Г.А.* Теоремы существования и единственности в двумерной нематодинамике. Конечная скорость распространения возмущений // ДАН. 2015. Т. 462. № 5. С. 519–523.
9. *Chechkin G.A., Ratiu T.S., Romanov M.S., Samokhin V.N.* On Unique Solvability of the Full Three-Dimensional Ericksen-Leslie System // C R Méanique. 2016. V. 344. № 7. P. 459–463.
10. *Chechkin G.A., Chechkina T.P., Ratiu T.S., Romanov M.S.* Nematodynamics and Random Homogenization // Applicable Analysis. 2016. V. 95. № 10. P. 2243–2253.
11. *Chechkin G.A., Ratiu T.S., Romanov M.S., Samokhin V.N.* Existence and Uniqueness Theorems for the Two-Dimensional Ericksen – Leslie System // J. Mathematical Fluid Mechanics. 2016. № 18. P. 571–589.
12. *Chechkin G.A., Ratiu T.S., Romanov M.S.* On the Eringen Model for Nematic Liquid Crystals // C R Méanique. 2021. V. 349. № 1. P. 21–27.
13. *Schlichting H.* A survey of some recent research investigatins on boundary layers and heat transfer // J. Appl. Mech. 1971. V. 47. № 6. P. 289–300.
14. *Булатова Р.Р., Самохин В.Н., Чечкин Г.А.* Уравнения симметричного пограничного слоя для модели вязкой среды О.А. Ладыженской в переменных Крокко // Проблемы математического анализа. 2019. Т. 98. С. 73–100.

ON THE BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF THE PRANDTL'S SYSTEM FOR A VISCOUS MHD ENVIRONMENT O.A. LADYZHENSKAYA AT FLOWING A CONFUSER

R. R. Bulatova

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The article proves existence and uniqueness theorems for solutions of the Prandtl system of equations for a viscous medium O.A. Ladyzhenskaya. We also obtained asymptotic expansions of solutions depending on the speed of the external flow and the behavior of the injection – suction function.

Keywords: Prandtl's boundary layer, Ladyzhenskaya rheological law, confusor, asymptotics of solutions

EDN: FXDHWV
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 40–44

МАТЕМАТИКА

УДК 517.968.72

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ В УГЛЕ

В. В. Власов[1],*, Н. А. Раутиан[1],**

Представлено академиком РАН В.А. Садовничим 24.11.2021 г.
Поступило 06.12.2021 г.
После доработки 18.02.2022 г.
Принято к публикации 19.02.2022 г.

В предлагаемой работе изучаются интегро-дифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Главной частью указанных уравнений является абстрактное параболическое уравнение, возмущенное вольтерровым интегральным оператором. Принципиальное отличие данной работы от имеющихся состоит в том, что мы рассматриваем и изучаем интегро-дифференциальные уравнения для вектор-функций, аргументы которых принимают значения в угловой области комплексной плоскости.

Ключевые слова: вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения, голомофная в угловой области вектор-функция, пространство Харди

DOI: 10.31857/S2686954322020187

В работе [1], а также в монографии [2] изучен класс функций $\Re_2(S_\theta)$, голоморфных в угловой области

$$S_\theta = \{\tau \in \mathbb{C}: |\arg \tau| < \theta\},$$

и таких, что

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \left\{ \int_0^\infty |f(te^{i\varphi})|^2 dt \right\} < \infty.$$

В [1, 2] установлено, что снабженное соответствующей нормой $\Re_2(S_\theta)$ является гильбертовым пространством и для него доказана теорема типа Пэли–Винера.

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – самосопряженный положительный оператор $A^* = A \geq \kappa I$ $(\kappa > 0)$, действующий в пространстве H, имеющий компактный обратный. Через $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ обозначим скалярное произведение и норму в пространстве H соответственно.

В предлагаемой работе изучены классы $\Re_2(S_\theta, H)$ и $W_2^n(S_\theta, A^n)$ функций со значениями в пространстве H, голоморфных в области S_θ. При этом класс $\Re_2(S_\theta, H)$ состоит из вектор-функций, для которых

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int_0^\infty \|f(te^{i\varphi})\|^2 dt < \infty,$$

а класс $W_2^n(S_\theta, A^n)$ из вектор-функций, для которых

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \int_0^\infty \left(\left\| \frac{\partial^n}{\partial t^n} u(te^{i\varphi}) \right\|^2 + \|A^n u(te^{i\varphi})\|^2 \right) dt < \infty.$$

Превратим область определения $D(A^\beta)$ оператора A^β, $\beta > 0$, в гильбертово пространство H_β, введя на норму $\|\cdot\|_\beta = \|A^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A^β. Условимся в дальнейшем называть функцией (без добавления слова "вектор") функцию со значениями в пространстве H, а функцию со значениями в $\mathbb{C}$ называть скалярной или числовой функцией.

Обозначим через $L_2(\mathbb{R}_+, H)$ пространство (классов) функций со значениями в H, измеримых относительно меры Лебега dt на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ и таких, что

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*
**E-mail: victor.vlasov@math.msu.ru*
***E-mail: nadezhda.rautian@math.msu.ru*

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = \left(\int\limits_0^{+\infty} \|f(t)\|^2 dt\right)^{1/2} < +\infty.$$

Через $W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ обозначим пространство Соболева функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$ со значениями в пространстве H, снабженное нормой

$$\|u\|_{W_2^n(\mathbb{R}_+,A^n)} \equiv \left(\int\limits_0^{+\infty} (\|u^{(n)}(t)\|^2 + \|A^n u(t)\|^2) dt\right)^{1/2}.$$

Подробнее о пространствах $W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ см. монографию [3, гл. 1]. Для $n = 0$ полагаем $W_2^0(\mathbb{R}_+, A^0) \equiv L_2(\mathbb{R}_+, H)$. Будем полагать в дальнейшем $\Re_2(S_0, H) = L_2(\mathbb{R}_+, H)$, $W_2^n(S_0, A^n) = W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$.

1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ $\Re_2(S_\theta, H)$, $W_2^n(S_\theta, A^n)$

Укажем основные свойства пространства $\Re_2(S_\theta, H)$.

П р е д л о ж е н и е 1. *Для функции* $f(\tau) \in \Re_2(S_\theta, H)$ *существуют граничные значения* $f(te^{\pm\theta}) \in L_2(\mathbb{R}_+, H)$ *такие, что*

$$\lim_{\varphi\to\pm\theta} \|f(te^{i\varphi}) - f(te^{\pm i\theta})\|_{L_2(\mathbb{R}_+,H)} = 0.$$

Т е о р е м а 1. 1^0 *Класс функций* $\Re_2(S_\theta, H)$ *с нормой*

$$\|f\|_{2,\theta}^* = \sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \left\{\int\limits_0^{+\infty} \|f(te^{i\varphi})\|^2 dt\right\}^{1/2}$$

является банаховым пространством.

2^0. *Класс функций* $\Re_2(S_\theta, H)$ *со скалярным произведением*

$$\langle f, g\rangle_{2,\theta} = \int\limits_0^{+\infty} (f(te^{-i\theta}), g(te^{-i\theta})) dt + \int\limits_0^{+\infty} (f(te^{i\theta}), g(te^{i\theta})) dt$$

является гильбертовым пространством.

3^0. *Если* $f(\tau)$ – *произвольная функция из класса* $\Re_2(S_\theta, H)$ *и*

$$\|f\|_{2,\theta} = \langle f, f\rangle_{2,\theta}^{1/2},$$

то справедливы неравенства

$$\|f\|_{2,\theta}^* \le \sqrt{2}\|f\|_{2,\theta} \le 2\|f\|_{2,\theta}^*.$$

Приведем теорему, являющуюся аналогом теоремы Пэли–Винера для пространства $\Re_2(S_\theta, H)$.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\theta \in (0, \pi/2)$. *Справедливы следующие утверждения*:

1^0. *Класс функций* $\Re_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$ *совпадает с множеством функций, допускающих представление*

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\varphi} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda t e^{-i\varphi}} f(te^{-i\varphi}) dt, \quad |\arg\lambda - \varphi| < \frac{\pi}{2}, \quad \varphi \in (-\theta, \theta), \quad f(\tau) \in \Re_2(S_\theta, H). \tag{1}$$

2^0. *В представлении* (1) *для каждой фиксированной функции* $F(\lambda) \in \Re_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$ *функция* $f(\tau) \in \Re_2(S_\theta, H)$ *единственна, и справедлива формула обращения*

$$f(te^{i\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\varphi} \frac{d}{dt} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ity} - 1}{iy} F\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y - \varphi\right)}|y|\right) dy. \tag{2}$$

3^0. *Если функция* $F(\lambda) \in \Re_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$ *представима функцией* $f(\tau) \in \Re_2(S_\theta, H)$ *по формуле* (1), *то справедливы неравенства*

$$\|F\|_{2,\frac{\pi}{2}+\theta} \le 2\|f\|_{2,\theta} \le 2\sqrt{2}\|F\|_{2,\frac{\pi}{2}+\theta}. \tag{3}$$

Перейдем к рассмотрению и изучению аналогов пространств Соболева $W_2^n(S_\theta, A^n)$ функций, голоморфных в угле S_θ.

Условимся в дальнейшем обозначать через $\frac{du}{d\tau}$ производную функции $u(\tau)$ в смысле функций комплексного переменного. Класс функций $W_2^n(S_\theta, A^n)$ совпадает с классом функций, голоморфных в угле S_θ, таких, что

$$\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta} \left\{\int\limits_0^{+\infty} \left(\left\|\frac{d^n}{d\tau^n} u(te^{i\varphi})\right\|^2 + \|A^n u(te^{i\varphi})\|^2\right) dt\right\}^{1/2} < +\infty.$$

В нижеследующей лемме приведен аналог теоремы о промежуточных производных, широко известной для пространств $W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ (см. [3, с. 29]).

Л е м м а 1. *Пусть функция* $u(\tau) \in W_2^n(S_\theta, A^n)$. *Тогда*

$$A^{n-j} \frac{d^j}{d\tau^j} u(\tau) \in \Re_2(S_\theta, H), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

П р е д л о ж е н и е 2. *Для функции* $u(\tau)\in W_2^n(S_\theta, A^n)$ *существуют граничные значения* $u_{\pm\theta}(t)=u(te^{\pm i\theta})$ *из класса* $W_2^n(\mathbb{R}_+, A^n)$ *такие, что*

$$\lim_{\varphi\to\pm\theta}\int_0^{+\infty}\left(\left\|\frac{d^n}{d\tau^n}u(te^{i\varphi})-\frac{d^n}{d\tau^n}u(te^{\pm i\theta})\right\|^2+\right.$$
$$\left.+\|A^n(u(te^{i\varphi})-u(te^{\pm i\theta}))\|^2\right)dt=0.$$

Т е о р е м а 3. 1^0. *Класс функций* $W_2^n(S_\theta, A^n)$ *с нормой*

$$\|u\|^*_{W_2^n(S_\theta,A^n)}=$$
$$=\sup_{\varphi:|\varphi|<\theta}\left\{\int_0^{+\infty}\left(\left\|\frac{d^n}{d\tau^n}u(te^{i\varphi})\right\|^2+\|A^nu(te^{i\varphi})\|^2\right)dt\right\}^{1/2}$$

является банаховым пространством.

2^0. *Класс функций* $W_2^n(S_\theta, A^n)$ *со скалярным произведением*

$$\langle u,v\rangle_{W_2^n(S_\theta,A^n)}=\int_0^{+\infty}\left\{\left(\frac{d^n}{d\tau^n}u(te^{-i\theta}),\frac{d^n}{d\tau^n}v(te^{-i\theta})\right)+\right.$$
$$+\,(A^nu(te^{-i\theta}),A^nv(te^{-i\theta}))+$$
$$\left.+\left(\frac{d^n}{d\tau^n}u(te^{i\theta}),\frac{d^n}{d\tau^n}v(te^{i\theta})\right)+(A^nu(te^{i\theta}),A^nv(te^{i\theta}))\right\}dt$$

является гильбертовым пространством.

3^0. *Для произвольной функции* $u(\tau)\in W_2^n(S_\theta, A^n)$ *справедливы неравенства*

$$\|u\|^*_{W_2^n(S_\theta,A^n)}\le\sqrt{2}\,\|u\|_{W_2^n(S_\theta,A^n)}\le 2\,\|u\|^*_{W_2^n(S_\theta,A^n)},$$

где

$$\|u\|_{W_2^n(S_\theta,A^n)}=\langle u,u\rangle^{1/2}_{W_2^n(S_\theta,A^n)}.$$

Приведем вариант теоремы о следах для пространства $W_2^n(S_\theta, A^n)$.

Т е о р е м а 4. *Пусть функция* $u(\tau)\in W_2^n(S_\theta, A^n)$. *Тогда в смысле нормы пространства H равномерно относительно* $\arg\tau$, *таких, что* $|\arg\tau|<\theta$, *существуют пределы*

$$\lim_{\tau\in S_\theta,|\tau|\to 0}A^{n-p-\frac{1}{2}}\frac{d^p}{d\tau^p}u(\tau),\quad p=0,1,\ldots,n-1.$$

Уместно отметить, что теоремы 3 и 4, а также предложение 2 приведены в статье [4]. Полные подробные доказательства сформулированных утверждений о пространствах $\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$ и $W_2^n(S_\theta, A^n)$ приведены в депонированной работе [5].

2. КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ $W_2^1(S_\theta, A)$

Рассмотрим начальную задачу для интегро-дифференциального уравнения вида

$$\frac{du}{d\tau}+Au(\tau)-\int_0^\tau K(\tau-s)Au(s)ds=f(\tau),\quad \tau\in S_\theta,\quad (4)$$

$$u(+0)=\varphi_0,\qquad (5)$$

где A — самосопряженный положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий компактный обратный. Ядро $K(\tau)$ принадлежит пространству Харди $\mathfrak{R}_1(S_\theta)$ (см. [7]), правая часть $f(\tau)\in\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$, вектор $\varphi_0\in H_{1/2}$. Отметим, что в интегро-дифференциальном уравнении (4) в интегральном слагаемом интегрирование проводится по отрезку, соединяющему начало координат и точку $\tau\in S_\theta$. Однако в силу регулярности функций $K(\tau)$, $u(\tau)$ интеграл можно брать по любому спрямляемому кусочно-гладкому контуру, соединяющему точки 0 и τ, лежащему в области S_θ.

Основным результатом является теорема о разрешимости задачи (4)–(5) в пространстве $W_2^1(S_\theta, A)$.

Т е о р е м а 5. *Пусть ядро* $K(\tau)$ *принадлежит пространству Харди* $\mathfrak{R}_1(S_\theta)$ *и его преобразование Лапласа* $\hat{K}(\lambda)$ *удовлетворяет оценке*

$$\sup_{\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2}-\theta,\frac{\pi}{2}+\theta\right)}|\hat{K}(re^{i\varphi})|\sup_{\alpha\ge\alpha_0}\frac{a}{(a^2+r^2)^{\frac{1}{2}}(1-\sin\theta)^{\frac{1}{2}}}<1,\quad (6)$$

где $\alpha_0=\inf_{\|x\|=1,x\in D(A)}(Ax,x)$, *вектор-функция* $f(\tau)\in\mathfrak{R}_2(S_\theta, H)$, *вектор* $\varphi_0\in H_{1/2}$. *Тогда существует единственное решение* $u(\tau)\in W_2^1(S_\theta, A)$ *задачи* (4)–(5), *удовлетворяющее оценке*

$$\|u\|_{W_2^1(S_\theta,A)}\le d(\|f\|^2_{\mathfrak{R}_2(S_\theta,H)}+\|\varphi_0\|^2_{1/2})^{1/2}\qquad (7)$$

с постоянной d, не зависящей от вектор-функции $f(\tau)$ *и вектора* φ_0.

С л е д с т в и е 1. *Пусть выполнены условия теоремы 5 и ядро* $K(\tau)\equiv 0$. *Тогда существует единственное решение* $u(\tau)\in W_2^1(S_\theta, A)$ *задачи* (4), (5), *удовлетворяющее неравенству* (6).

Изложим далее идею доказательства теоремы 5. Рассмотрим преобразование Лапласа $\hat{u}(\lambda)$ сильного решения $u(\tau)$ уравнения (4) с нулевыми начальными данными $\varphi_0=0$, которое имеет вид

$$\hat{u}(\lambda) = L^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda).$$

Здесь оператор-функция $L(\lambda)$ является символом уравнения (4) и представима в виде

$$L(\lambda) = \lambda I + A - \hat{K}(\lambda)A,$$

где $\hat{K}(\lambda)$ – преобразование Лапласа ядра $K(t)$, I – единичный оператор в пространстве H.

Для доказательства теоремы 5, согласно теореме 2 (Пэли–Винера), достаточно показать, что вектор-функции $\lambda\hat{u}(\lambda)$ и $A\hat{u}(\lambda)$ принадлежат пространству $\Re_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$, а также получить их оценки. С этой целью мы устанавливаем, что оператор-функция $L^{-1}(\lambda)$ является голоморфной и допускает следующие оценки в области $G_{\theta+\pi/2} = \left\{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\arg\lambda| < \theta + \frac{\pi}{2}\right\}$:

$$\left\|AL^{-1}(\lambda)\right\| < +\infty, \quad \left\|\lambda L^{-1}(\lambda)\right\| < +\infty. \tag{8}$$

В свою очередь, для получения оценок (8) используется представление

$$L^{-1}(\lambda) = (\lambda I + A)^{-1}(I - \hat{K}(\lambda)A(\lambda I + A)^{-1})^{-1} \tag{9}$$

и оценки

$$\left\|A(\lambda I + A)^{-1}\right\| \le \sup_{\alpha\ge\alpha_0}\frac{a}{(a^2 + r^2)^{1/2}(1 - \sin\theta)^{1/2}}, \quad \lambda \in G_{\theta+\pi/2}, \quad \lambda = re^{i\varphi}, \tag{10}$$

$$\left\|\lambda(\lambda I + A)^{-1}\right\| \le \sup_{\alpha\ge\alpha_0}\frac{r}{(a^2 + r^2)^{1/2}(1 - \sin\theta)^{1/2}}, \quad \lambda \in G_{\theta+\pi/2} \quad \lambda = re^{i\varphi}, \tag{11}$$

а также неравенство

$$\left\|\hat{K}(\lambda)A(\lambda I + A)^{-1}\right\| < 1, \quad \lambda \in G_{\theta+\pi/2},$$

вытекающее из неравенств (6), (10), (11) и представления (9).

На основании оценок (8), (10), а также того, что вектор-функция $\hat{f}(\lambda)$ принадлежит пространству $\Re_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$, приходим к тому, что вектор-функции $\lambda\hat{u}(\lambda)$ и $A\hat{u}(\lambda)$ принадлежат пространству $\Re_2(S_{\theta+\pi/2}, H)$. Таким образом, опираясь на теорему 2 (Пэли–Винера), мы получим, что вектор-функции $\frac{du}{d\tau}(\tau)$ и $Au(\tau)$ принадлежат пространству $\Re_2(S_\theta, H)$ и удовлетворяют неравенствам

$$\left\|\frac{du}{d\tau}(\tau)\right\|_{\Re_2(S_\theta,H)} \le d_3\left\|f(\tau)\right\|_{\Re_2(S_\theta,H)}, \tag{12}$$

$$\left\|Au(\tau)\right\|_{\Re_2(S_\theta,H)} \le d_4\left\|f(\tau)\right\|_{\Re_2(S_\theta,H)}. \tag{13}$$

Наконец из неравнств (12) и (13) вытекает оценка

$$\left\|u(\tau)\right\|_{W_2^1(S_\theta,A)} \le d_0\left\|f(\tau)\right\|_{\Re_2(S_\theta,H)}, \tag{14}$$

где $d_0 = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$. Далее, случай неоднородных начальных данных $\varphi_0 \ne 0$ стандартным образом сводится к задаче с однородными начальными данными и новой правой частью уравнения (4) $f_1(\tau) = f(\tau) + h(\tau)$, где

$$h(\tau) = \int_0^\tau K(\tau - \zeta)A\exp(-\zeta A)\varphi_0 d\zeta,$$

с последующей оценкой вектор-функции $h(\tau)$.

З а м е ч а н и е 1. Хорошо известно, что решение начально-краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности при естественных предположениях о начальных данных допускает аналитическое продолжение по временной переменной t в угловую область комплексной плоскости. С этим тесно связана теория аналитических полугрупп операторов (см., например, монографии [6, 8–10]).

В утверждении следствия теоремы 5 установлена не только аналитичность решения абстрактного параболического уравнения, но и получена оценка (7) в гильбертовых пространствах $W_2^1(S_\theta, A)$, $\Re_2(S_\theta, H)$, что является значительно более глубоким результатом, нежели результат об аналитичности (голоморфности) решения.

Из доказанной теоремы 5 также немедленно вытекает утверждение для $\theta = 0$, т.е. для случая, когда задача (4), (5) рассматривается на полуоси $\mathbb{R}_+$, а не в угловой области S_θ. При этом пространство $\Re_2(S_\theta, H)$ переходит в пространство $L_2(\mathbb{R}_+, H)$, а пространство $W_2^1(S_\theta, A)$ в пространство Соболева $W_2^1(\mathbb{R}_+, A)$.

Уместно отметить, что приведенная теорема 5 тесно связана с теоремой 2.1 из работы [11], а также теоремой 3.2.3 из монографии [12]. В указанных теоремах установлена корректная разрешимость начальной задачи для интегро-дифференциального уравнения, близкого уравнению (4), в весовых пространствах Соболева $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)$.

З а м е ч а н и е 2. Существенное отличие приведенной теоремы 5 от результатов о разрешимости в традиционных пространствах Соболева $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)$, ранее установленных в работах [11, 12], состоит в том, что мы приводим оценки преобразования Лапласа решения $\hat{u}(\lambda)$ в области $S_{\theta+\pi/2}$, а не в правой полуплоскости. При этом существенно использовалась теорема 2 (аналог теоремы Пэли–Винера) для угловых областей S_θ и

$S_{\theta+\pi/2}$, в то время как в предшествующих работах использовалась традиционная теорема Пэли–Винера.

Отметим, что ряд утверждений о разрешимости интегро-дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в пространствах Соболева $W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^n)$ приведен в обзорной статье [13].

Ряд глубоких результатов о разрешимости эллиптических функционально-дифференциальных уравнений в пространствах Соболева приведен в работе [14].

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания и предложения.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Теоремы 1 и 2 доказаны при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики. Теоремы 3, 4 доказаны при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований РФФИ, проект 20-01-00288. Теорема 5 доказана при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета "Математические методы анализа сложных систем".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джрбашян М.М., Мартиросян В.М.* Теоремы Винера–Пэли и Мюнца–Саса // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1977. Т. 41. 4. С. 868–894.
2. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представление функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.
3. *Лионс Ж.Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
4. *Власов В.В.* Кратная минимальность части системы корневых векторов пучка М.В. Келдыша // ДАН СССР. 1982. Т. 263. № 6. С. 1289–1293.
5. *Власов В.В.* О некоторых пространствах вектор-функций, голоморфных в угле // Рукопись деп. в ВИНИТИ 20.08.1981 г. № 4177-81. 38 с.
6. *Хилле Э., Филипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: Из-во иностр. лит. 1962. 830 с.
7. *Григорян Ш.А.* О базисности неполных систем рациональных функций в угловых областях // Известия АН Арм. ССР. Математика. 1978. Т. 13. № 5–6. С. 461–489.
8. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
9. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
10. *Engel K.-J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. N.Y.: Springer-Verlag, 2000. Graduate Texts in Mathematics. V. 194. 586 p.
11. *Власов В.В., Раутиан Н.А., Шамаев А.С.* Исследование операторных моделей, возникающих в задачах наследственной механики // Современная математика. Фундаментальные направления. 2012. Т. 45. С. 43–61.
12. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М.: МАКС–Пресс, 2016. 488 с.
13. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Исследование интегро-дифференциальных уравнений методами спектральной теории // Современная математика. Фундаментальные направления. 2021. Т. 67. № 2. С. 255–284.
14. *Skubachevskii A.L.* Boundary-value problems for elliptic functional-differential equations and their applications // Russian Mathematical Surveys. 2016. V. 71. № 5. P. 801–906.

ON CORRECT SOLVABILITY OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN SPACES OF VECTOR FUNCTIONS, HOLOMORPHIC AT THE ANGLE

V. V. Vlasov[a] and N. A. Rautian[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.A. Sadovnichy

The proposed paper studies integro-differential equations with unbounded operator coefficients in Hilbert space. The main part of this equation is an abstract parabolic equation perturbed by the Volterra integral operator. The fundamental difference between this work and the existing ones is that we consider and study integro-differential equations for vector functions, the arguments of which take values in the angular domain on the complex plane.

Keywords: Volterra integro-differential equations, holomophic in the angular domain vector function, Hardy space

EDN: VOAHNW

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 45–47

МАТЕМАТИКА

УДК 519.212.2

О ПОВЕДЕНИИ БИНОМИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВБЛИЗИ МЕДИАНЫ

© 2022 г. Н. А. Волков[1], Д. И. Дмитриев[2], М. Е. Жуковский[1,*]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 27.12.2021 г.
Поступило 06.01.2022 г.
После доработки 06.01.2022 г.
Принято к публикации 10.02.2022 г.

В работе исследуется поведение функции распределения биномиальной случайной величины с параметрами n и $b/(n+c)$ в точке $b-1$ при натуральных $b \le n$ и $c \in [0, 1]$. Полученные результаты имеют непосредственное следствие в широко известной задаче о малых отклонениях сумм независимых случайных величин от их математического ожидания. Кроме того, мы ответили на вопрос о монотонности функции Рамануджана для биномиального распределения, который сформулировали в своей работе Джогдео и Самуэльс в 1968 г.

Ключевые слова: биномиальное распределение, медиана, функция Рамануджана, малые отклонения сумм независимых случайных величин

DOI: 10.31857/S2686954322020199

1. ПУАССОНОВСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И ЗАДАЧА РАМАНУДЖАНА

Пусть $b \in \mathbb{N}$ – натуральное число. Разложим r^b в ряд Тэйлора: $e^b = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b^j}{j!}$. Зададимся вопросом: каково наименьшее натуральное μ такое, что $\sum_{j=0}^{\mu} \frac{b^j}{j!} \ge \frac{1}{2} e^b$? Ответ на этот вопрос хорошо известен.

Пусть ξ – неотрицательная целочисленная случайная величина. Медианой ξ называется наименьшее целое неотрицательное число $\mu := \mu(\xi)$ такое, что $P(\xi \le m) \ge \frac{1}{2}$. Для пуассоновской случайной величины η_b с натуральным параметром b известно [1], что $\mu(\eta_b) = b$, что и является ответом на поставленный выше вопрос. Но насколько близка вероятность $\mathrm{P}(\eta_b \le b)$ к $\frac{1}{2}$? Рамануджан выдвинул гипотезу [2], что

$$y_b := \frac{\frac{1}{2} - \mathrm{P}(\eta_b < b)}{\mathrm{P}(\eta_b = b)} \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \text{ и убывает.}$$

Эта гипотеза была доказана независимо Сего в [3] и Ватсоном в [4]. С тех пор поведение функции y_b было хорошо изучено. В 1913 г. в своем письме Харди Рамануджан выдвинул еще одну гипотезу:

$$y_b = \frac{1}{3} + \frac{4}{135(b + \alpha_b)},$$

где $8/45 \ge \alpha_b \ge 2/21$. Эта гипотеза была подтверждена лишь в 1995 г. Флажолетом и соавт. [5]. В 2003 г. Алм [6] доказал, что α_b убывает, а в 2004 г. Алзер [7] усилил гипотезу Рамануджана:

$$y_b = \frac{1}{3} + \frac{4}{135b} - \frac{8}{2835(b^2 + \beta_b)},$$

где

$$-\frac{1}{3} < \beta_b \le -1 + \frac{4}{\sqrt{21(368 - 135e)}},$$

причем указанные границы являются точными.

2. БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И ЗАДАЧА САМУЭЛЬСА

Пусть $\xi_{b,n}$ – биномиальная случайная величина с параметрами n и b/n, где $b \le n$ – натуральные числа. Хорошо известно, что $\xi_{b,n}$ сходится по рас-

[1] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия*

[2] *ETH Zürich, ETH AI Center, Zurich, Switzerland*

**E-mail: zhukmax@gmail.com*

пределению к случайной величине η_b при $n \to \infty$. Поэтому естественно ожидать, что описанные в предыдущем разделе свойства пуассоновского распределения справедливы и для биномиального распределения при достаточно больших n. Но можно ли ответить на аналогичные вопросы при всех n?

Так как $|\mu(\xi_{b,n}) - b| \leq \ln 2$ [8], медиана биномиальной случайной величины равна $\mu(\xi_{b,n}) = b$. В 1968 г. Джогдео и Самуэльс [9] рассмотрели величину, аналогичную той, которую ввел Рамануджан для пуассоновского распределения:

$$z_{b,n} := \frac{1/2 - P(\xi_{b,n} < b)}{P(\xi_{b,n} = b)}.$$

Теорема 1 (K. Jogdeo, S.M. Samuels, 1968 [9]). *$z_{b,n}$ убывает при $n \geq 2b$, $z_{b,n} \to y_n$ при $n \to \infty$. Более того, для всех $n > 2b$ справедливо $\frac{1}{3} < z_{b,n} < \frac{1}{2}$; при $b < n < 2b$ справедливо $\frac{1}{2} < z_{b,n} < \frac{2}{3}$; $z_{b,\ 2b} = \frac{1}{2} = z_{b,b}$.*

Они также заметили, что $z_{b+1,n} < z_{b,n}$ для всех достаточно больших n, но не смогли уточнить этот результат.

Рассмотрим теперь биномиальную случайную величину $\xi_{b,n,c}$ с параметрами n и $\frac{b}{n+c}$, где $b < n$ — натуральные числа и $c \in [0,1]$. Обозначим $p_{b,n,c} := P(\xi_{b,n,c} < b)$. Исследование монотонности $p_{b,n,c}$ по b мотивировано широко известной задачей о неравенстве малых отклонений, поставленной Самуэльсом [10], которая может быть сформулирована следующим образом: найти минимум $\mathrm{P}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n < n + c)$ по всем множествам независимых неотрицательных случайных величин $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ с одинаковым математическим ожиданием, равным 1. Эта задача до сих пор не решена. Тем не менее известно, что оптимальными случайными величинами являются величины, принимающие два значения с вероятностью 1 (как говорится, с двумя атомами). Если мы далее ограничимся одинаково распределенными случайными величинами с двумя атомами, то сведем исходную задачу к анализу монотонности $p_{b,n,c}$ по b.

Из упомянутого результата Сего и Ватсона следует, что $\mathrm{P}(\eta_b < b)$ возрастает. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} p_{b,n,c} = \mathrm{P}(\eta_b < b)$, то при достаточно больших n справедливо $p_{b+1,n,c} > p_{b,n,c}$. С другой стороны, например, при $n = b + 1$ и $c = 0$ выполнено $0 = p_{b+1,n,c} < p_{b,n,c}$. Таким образом, с ростом n монотонность $p_{b,n,c}$ (как функции от b) меняется.

3. НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Нам удалось решить задачу, поставленную Джогдео и Самуэльсом о монотонности $z_{b,n}$ по b.

Теорема 2. *Пусть $\varepsilon > 0$. Существует такое n_0, что при всех $n \geq n_0$ справедливо следующее.*

1. *Если $n - (1+\varepsilon)\sqrt{\frac{77}{360}n} > b > (1+\varepsilon)\sqrt{\frac{77}{360}n}$, то $z_{b+1,n} > z_{b,n}$;*

2. *Если либо $b > n - (1-\varepsilon)\sqrt{\frac{77}{360}n}$, либо $b < (1-\varepsilon)\sqrt{\frac{77}{360}n}$, то $z_{b+1,n} < z_{b,n}$.*

Кроме того, мы исследовали функцию $p_{b,n,c}$ на монотонность по b.

Теорема 3. *Справедливы следующие утверждения*:

1. *Если $n \geq 3b + 2$, то $p_{b+1,n,0} > p_{b,n,0}$. Если* $n \leq 3b + 1$, то $p_{b+1,n,0} < p_{b,n,0}$;

2. *При всех $1 \leq b < n$ справедливо $p_{b+1,n,1} > p_{b,n,1}$;*

3. *Если $n \geq 3b + 2$ и $c \in (0,1)$, то $p_{b+1,n,c} > p_{b,n,c}$.*

К сожалению, исчерпывающий результат удалось получить лишь для $c = 0$ и $c = 1$. Тем не менее мы нашли асимптотическое значение порога, после которого меняется монотонность.

Теорема 4. *Для всех положительных δ, ε, достаточно больших n и целых $b \in (\varepsilon n, n)$ справедливо следующее*:

1. *Если $b < \frac{n(1-\delta)}{3(1-c)}$, то $p_{b+1,n} > p_{b,n}$;*

2. *Если $b > \frac{n(1+\delta)}{3(1-c)}$, то $p_{b+1,n} < p_{b,n}$.*

Заметим, что из теоремы 3 вытекает следствие в задаче о малых отклонениях при $c = 1$. Пусть $\alpha \in (0, 1)$, $\beta > 1$. Пусть b — целое число такое, что $b < \frac{n+1-n\alpha}{\beta-\alpha} \leq b+1$. Тогда $\mathrm{P}(\xi_1 + \ldots + \xi_n < n+1) \geq p_{b,n,1}$, где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины со средним 1, и равенство выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$ и $\frac{n+1}{\beta} = b + 1$. Аналогичные утверждения можно было бы сформулировать для любого $c \in (0, 1)$, если бы удалось асимптотический результат в теореме 4 сделать точным.

4. B-ФУНКЦИЯ

Напомним, что $\mathrm{B}(x, y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}$. Доказательства приведенных в предыдущем разделе утверждений опираются на следующие полученные нами удобные выражения для $p_{b+1,n,c} - p_{b,n,c}$ и $z_{b,n}$.

Утверждение 1. *Для всех натуральных* $b \le n$ *и* $c \in [0, 1]$ *справедливы равенства*

$$p_{b,n,c} = \frac{\int\limits_0^{1-\frac{b}{n+c}} (1-z)^{b-1} z^{n-b} dz}{b\mathrm{B}(b, n-b+1)},$$

$$z_{b,n} = \frac{\frac{1}{2} b\left(\left[\int\limits_{1-b/n}^{1} - \int\limits_0^{1-b/n}\right](1-z)^{b-1} z^{n-b} dz\right)}{\left(\frac{b}{n}\right)^b \left(1 - \frac{b}{n}\right)^{n-b}}.$$

Анализ этих выражений сводится к исследованию поведения функции $g(z) = (1-z)^{b-1} z^{n-b}$ на $\left[1 - \frac{b+1}{n+c}, 1 - \frac{b}{n+c}\right]$. Ее поведение удается исследовать, используя формулу Тейлора (достаточно разложить до пятого члена) с остаточным членом в форме Лагранжа и следующее удобное представление производных от функции g:

$$\frac{\partial^\ell g}{\partial z^\ell} = (1-z)^{b-1-\ell} z^{n-b-\ell} \times$$
$$\times \sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i} (-1)^{\ell-i} z^{\ell-i} \frac{(n-1-i)!}{(n-1-\ell)!} \frac{(n-b)!}{(n-b-i)!},$$
$$\ell \in \{1, \ldots, \min\{b-1, n-b\}\}.$$

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда, проект № 21-71-10092.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Choi K.P.* On the medians of Gamma distributions and an equation of Ramanujan // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 121. № 1. P. 245–251.
2. *Ramanujan S.* Question 294 // Indian Math. Soc. 1911. V. 3. P. 151–152.
3. *Szegö G.* Über einige von S. Ramanujan gestellte Aufgaben // J. Lond. Math. Soc. 1928. V. 3. P. 225–232.
4. *Watson G.N.* Theorems stated by Ramanujan (V): approximations connected with e^x // Proc. Lond. Math. Soc. 1929. V. 29. P. 293–308.
5. *Flajolet P., Grabner P.J., Kirschenhofer P., Prodinger H.* On Ramanujan's Q-function // J. Comput. Appl. Math. 1995. V. 58. P. 103–116.
6. *Alm S.E.* Monotonicity of the difference between median and mean of gamma distributions and of a related Ramanujan sequence // Bernoulli. 2003. V. 9. P. 351–371.
7. *Alzer H.* On Ramanujan's inequalities for exp(k) // J. Lond. Math. Soc. 2004. V. 69. P. 639–656.
8. *Hamza K.* The smallest uniform upper bound on the distance between the mean and the median of the binomial and Poisson distributions // Statist. Probab. Lett. 1995. V. 23. P. 21–25.
9. *Jogdeo K., Samuels S.M.* Monotone convergence of binomial probabilities and a generalization of Ramanujan's equation // Ann. Math. Statist. 1968. V. 39. № 4. P. 1191–1195.
10. *Samuels S.M.* On a Chebyshev-type inequality for sums of independent random variables // The Ann. of Math. Stat. 1966. V. 37. P. 248–259.

BEHAVIOUR OF BINOMIAL DISTRIBUTIONS NEAR ITS MEDIANS

N. A. Volkov[a], D. I. Dmitriev[b], and M. E. Zhukovskii[a]

[a] *Moscow Institute of Physics and Technology (National Reserch University), Dolgoprudnyi, Moscow Region, Russia*

[b] *ETH Zurich and ETH AI Center, Zurich, Switzerland*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

We study a behaviour of the value of cumulative distribution function of a binomial random variable with parameters n and $b/(n+c)$ at point $b-1$ for positive integers $b \le n$ and real $c \in [0, 1]$. Our results can be applied directly to the well known problem about small deviations of sums of independents random variables from their expectations. Moreover, we give an answer to a question about the monotonicity of the Ramanujan function for the binomial distribution posed by Jogdeo and Samuels in 1968.

Keywords: binomial distribution, median, Ramanujan function, small deviations of sums of independent random variables

EDN: QDRGJQ
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 48–53

МАТЕМАТИКА

УДК 517.63

МАРКОВСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ ЭВОЛЮЦИИ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

© 2022 г. Дж. Гоф[1,*], Ю. Н. Орлов[2,], В. Ж. Сакбаев[2,***], О. Г. Смолянов[3,4]**

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 25.01.2022 г.
Поступило 26.08.2021 г.
После доработки 27.01.2022 г.
Принято к публикации 15.02.2022 г.

Изучается сходимость по вероятности итераций независимых случайных квантовых динамических полугрупп к марковскому процессу, описывающему эволюцию открытой квантовой системы. Статистические свойства динамики открытых квантовых систем со случайными генераторами марковской эволюции описываются на языке закона больших чисел для операторнозначных случайных процессов. Для композиций независимых случайных вполне положительных полугрупп установлена сходимость математических ожиданий к полугруппе преобразований, порождаемой уравнением Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада. При этом устанавливается сходимость по вероятности последовательности операторнозначных функций, значениями которых являются операторы, не обладающие свойством безграничной делимости, к операторнозначной функции, значения которой представляют собой безгранично делимые операторы.

Ключевые слова: случайный линейный оператор, случайная операторнозначная функция, операторнозначный случайный процесс, закон больших чисел, открытые квантовые системы, марковские процессы, уравнение Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада

DOI: 10.31857/S2686954322020102

Обсуждается сходимость по вероятности итераций независимых случайных квантовых динамических полугрупп к марковскому процессу, описывающему эволюцию открытой квантовой системы. При этом применяются однопараметрические семейства вполне положительных отображений алгебры ограниченных линейных операторов в себя, удовлетворяющие уравнению Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада (ГКСЛ) [1–3]. В сообщении исследуются асимптотические свойства последовательности композиций независимых случайных вполне положительных преобразований алгебры $\mathscr{L}(H)$ линейных операторов, действующих в конечномерном комплексном гильбертовом пространстве H. При получении перечисленных результатов используется развитый в работах [4, 5] подход к общей теории случайных полугрупп.

Статистические свойства динамики открытых квантовых систем со случайными генераторами марковской эволюции рассматривались в работах [6, 7]. В предлагаемом в сообщении подходе такие свойства описываются на языке закона больших чисел для операторнозначных случайных процессов. При этом обсуждаются случайные величины со значениями в пространстве сильно непрерывных отображений вещественной полуоси в конус вполне положительных операторов банахова пространства $\mathscr{L}(\mathscr{L}(H))$. Далее используются термины и обозначения из книги [8]. Если E – локально выпуклое пространство, то для обозначения множества линейных непрерывных отображение из E в E будет использоваться символ $\mathscr{L}(E)$ (вместо символа $\mathscr{L}(E, E)$). В частности, линейное пространство линейных непрерывных отображений из $\mathscr{L}(E)$ в $\mathscr{L}(E)$ будет обозначаться символом $\mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$.

Для случайных вполне положительных полугрупп установлена сходимость математических ожиданий к полугруппе отображений, порождаемой уравнением ГКСЛ. При этом устанавливается сходимость последовательности оператор-

[1] *Aberystwyth University, Wales, UK*
[2] *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия*
[3] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия*
[4] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: jug@aber.ac.uk*
***E-mail: orlmath@keldysh.ru*
****E-mail: fumi2003@mail.ru*

нозначных функций, значениями которых являются операторы, не обладающие свойством безграничной делимости, к операторнозначной функции, значениями которой служат безгранично делимые операторы.

Отметим, что близкая к тематике настоящего сообщения проблема сходимости по распределению последовательности произведений независимых случайных матриц была исследована в работе [9]. Однако рассматриваемая в сообщении постановка задачи и полученные результаты значительно отличаются от результатов [9]. А именно, теорема 7 [9] представляет закон больших чисел, утверждающий сходимость по распределению последовательности произведений случайных матриц к детерминированной предельной матрице. В то время как закон больших чисел в настоящем сообщении устанавливает сходимость по вероятности последовательности случайных композиций к предельной полугруппе и позволяет дать оценку вероятности отклонения в форме неравенства Чебышева [4].

Отметим, что условия, накладываемые в настоящем сообщении на случайные полугруппы, существенно отличаются от условий, используемых в работах [4, 10]. При этом систематически применяется предложенный в [11] комбинаторный подход.

1. КВАНТОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ПОЛУГРУППЫ

Всюду далее $H = \mathbb{C}^d$, где $d \in \mathbb{N}$. Из конечномерности пространства H вытекает, что любые две нормы в каждом из встречающихся далее тензорных произведениях эквивалентны, и что эти тензорные произведения полны относительно топологий, задаваемых каждой из этих норм.

Пусть далее $\mathcal{L}(H)$ – банахово пространство линейных операторов, действующих в пространстве H, наделенное стандартной операторной нормой; $\mathcal{L}(\mathcal{L}(H))$ – банахово пространство линейных отображений пространства $\mathcal{L}(H)$ в себя, снабженное стандартной операторной нормой. Напомним, что элемент $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(H))$ называется положительным, если $\mathbf{A}(\mathbf{X}) \geq 0$ для любого $\mathbf{X} \in \mathcal{L}(H)$ такого, что $\mathbf{X} \geq 0$.

Элемент $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(H))$ называется вполне положительным отображением пространства $\mathcal{L}(H)$ в себя (см. [12]), если линейный оператор $\mathbf{Id} \otimes \mathbf{A}$, действующий в алгебре $\mathcal{M}_d \otimes \mathcal{L}(H)$ по правилу

$$\mathbf{Id} \otimes \mathbf{A}(\mathbf{M} \otimes \mathbf{X}) = \mathbf{M} \otimes \mathbf{A}(\mathbf{X}) \ \forall \ \mathbf{M} \in \mathcal{M}_d, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{L}(H),$$

является положительным в алгебре операторов $\mathcal{M}_d \otimes \mathcal{L}(H)$, где $\mathcal{M}_d$ – алгебра $d \times d$ матриц над полем комплексных чисел.

Т е о р е м а [13]. *Если $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(H))$, то $\mathbf{A}$ является вполне положительным тогда и только тогда, когда существует набор операторов*

$$\mathbf{V}_a \in \mathcal{L}(H), \quad a = 1, 2, \ldots, d^2, \textit{ такой, что}$$

$$\mathrm{A}(\mathbf{X}) = \sum_{a=1}^{d^2} \mathbf{V}_a \mathbf{X} \mathbf{V}_a^*.$$

Непосредственно проверяется, что справедливы следующие леммы.

Л е м м а 1. *Сумма двух вполне положительных отображений является вполне положительным отображением.*

Л е м м а 2. *Композиция двух вполне положительных отображений является вполне положительным отображением.*

Напомним, что квантовым каналом в пространстве наблюдаемых называется линейное вполне положительное отображение пространства $\mathcal{L}(H)$ в себя, сохраняющие единичный оператор $\mathbf{I} \in \mathcal{L}(H)$. Однопараметрическая непрерывная полугруппа квантовых каналов в алгебре линейных операторов $\mathcal{L}(H)$ называется квантовой динамической полугруппой.

Т е о р е м а (Теорема Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада) [14, 15]. *Генератор $\mathcal{L}$ всякой однопараметрической равномерно непрерывной полугруппы $\mathbf{W}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, вполне положительных отображений пространства $\mathcal{L}(H)$ в себя задается равенством*

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}) = \sum_a \mathbf{L}_a^* \mathbf{X} \mathbf{L}_a - \mathbf{X}\mathbf{K} - \mathbf{K}^* \mathbf{X}, \tag{1}$$

где $\mathbf{K} = \frac{1}{2}\sum_a \mathbf{L}_a^* \mathbf{L}_a + i\mathbf{H}$, $\{\mathbf{L}_a\}$ – *набор из не более чем* $d^2 - 1$ *операторов из алгебры* $\mathcal{M}_d$ *и* $\mathbf{H} = \mathbf{H}^* \in \mathcal{M}_d$.

2. СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛУГРУППЫ

Генератор квантовой динамической полугруппы $\mathcal{L}$ является случайным, если в (1) операторы $\mathbf{L}_a$ и $\mathbf{H}$ являются случайными величинами со значениями в алгебре матриц $\mathcal{M}_d$. Случайной величиной со значениями в пространстве линейных отображений пространства $\mathcal{L}(\mathcal{L}(H))$ в себя называется измеримое отображение вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ в пространство $\mathcal{L}(\mathcal{L}(H))$, наделенное слабой операторной топологией (в случае конечномерного пространства H совпадающей с топологией операторной нормы). Композиции случайных ортогональных преобразований конечномерных евклидовых пространств исследованы в [17].

Ставится задача исследовать свойства композиций независимых случайных процессов со значениями в конусе $\mathscr{L}(\mathscr{L}(H))_{CP}$ вполне положительных отображений пространства $\mathscr{L}(H)$.

Множество равномерно непрерывных квантовых динамических полугрупп, действующих в банаховой алгебре $\mathscr{L}(H)$, обозначим через $QDS(\mathscr{L}(H))$. Между множеством $QDS(\mathscr{L}(H))$, наделенным топологией равномерной на каждом отрезке сходимости в пространстве линейных операторов, и множеством $QDG(\mathscr{L}(H))$ генераторов непрерывных квантовых динамических полугрупп, наделенном топологией операторной нормы, в силу теорем Хилле–Иосиды и Линдблада существует биекция. Заметим, что равномерная непрерывность вытекает из непрерывности в нашем случае.

Пусть Φ_t, $t \geq 0$, – случайная квантовая динамическая полугруппа в алгебре $\mathscr{L}(H)$, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, т.е. $(\Phi_t)_{t\geq 0}$: $\omega \to (\phi_{t,\omega})_{t\geq 0}$ – $\mathscr{F}$-измеримое отображение со значениями в $QDS(\mathscr{L}(H))$. Средним значением случайной полугруппы Φ_t, $t \geq 0$, является ее математическое ожидание $\mathrm{M}[(\Phi_t)_{t\geq 0}]$, определяемое равенством

$$\mathrm{M}[(\Phi_t)] = \int_\Omega \phi_{t,\omega} P(d\omega), \quad t \geq 0.$$

Если Φ_t, $t \geq 0$, – случайная квантовая динамическая полугруппа в алгебре $\mathscr{L}(H)$, то ее математическое ожидание представляет собой однопараметрическое семейство вполне положительных отображений, которое может не являться однопараметрической полугруппой. Однако для широкого класса случайных квантовых динамических полугрупп математическое ожидание $\mathrm{M}[(\Phi_t)]$, $t \geq 0$, эквивалентно по Чернову полугруппе с усредненным генератором. Напомним, что операторнозначная функция $\mathbf{F}$: $[0, +\infty) \to \mathscr{L}(X)$ называется эквивалентной по Чернову полугруппе $\mathbf{U}(t)$, $t \geq 0$, линейных преобразований пространства X, если для каждого $x \in X$ и каждого $T > 0$ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left\|\left(\left(F\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n - U(t)\right)x\right\|_X\right] = 0.$$

Теорема Чернова (см. [16]) предоставляет достаточные условия эквивалентности по Чернову математического ожидания $\mathrm{M}[(\Phi_t)]$, $t \geq 0$, и полугруппы $\exp(\mathrm{M}[\Phi'(0)]t)$, $t \geq 0$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* Φ_t, $t \geq 0$, *– случайная равномерно непрерывная квантовая динамическая полугруппа в алгебре* $\mathscr{L}(\mathscr{L}(H))$, *а* $\mathbf{G}$ *– ее случайный генератор, принимающий значения в шаре некоторого радиуса* $\rho > 0$ *пространства* $\mathscr{L}(\mathscr{L}(H))$. *Тогда если* $\bar{\mathbf{G}} = \int_\Omega \mathbf{G} P(d\omega)$, *то математическое ожидание* $\mathrm{M}[(\Phi_t)]$, $t \geq 0$, *эквивалентно по Чернову полугруппе* $\exp(\bar{\mathbf{G}}t)$, $t \geq 0$.

Достаточно проверить условия теоремы Чернова. Поскольку операторнозначные функции $\phi_{t,\omega}$, $t \geq 0$, при каждом $\omega \in \Omega$ непрерывны, удовлетворяют оценке $\|\phi_{t,\omega}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{L}(H))} \leq \exp(\rho t)$, $t \geq 0$, принимают значения в конусе $(\mathscr{L}(\mathscr{L}(H)))_{CP}$, сохраняют единичный оператор и удовлетворяют условию $\phi_{0,\omega} = \mathrm{Id}$, то всеми этими свойствами обладает и операторнозначная функция $\mathbf{F}(t) = \int_\Omega \phi_{t,\omega} P(d\omega)$, $t \geq 0$. При каждом $\omega \in \Omega$ справедливо равенство $\phi_{t,\omega} = \mathrm{Id} + t\mathbf{G}_\omega + r(t,\omega)$, где $\|r(t,\omega)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq Ct^2\exp(t\rho)$, $\rho = \sup_{\omega\in\Omega}\|\mathbf{G}_\omega\|_{\mathscr{L}(X)}$. Следовательно, $\mathbf{F}(t) = \mathrm{Id} + t\bar{\mathbf{G}} + r(t)$, где $\|r(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq Ct^2\exp(t\rho)$, потому существует производная $\mathbf{F}'(0) = \bar{\mathbf{G}} \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(H))$, причем $\|\bar{\mathbf{G}}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{L}(H))} \leq \rho$. Значит, все условия теоремы Чернова выполнены, что и доказывает теорему 1.

3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Пусть $\mathbf{A}$ – случайная величина со значениями в банаховом пространстве $\mathbb{L} = \mathscr{L}(\mathscr{L}(H))$ линейных операторов, действующих в банаховой алгебре $\mathscr{L}(H)$, определяемая как слабо измеримое отображение вероятностного пространства $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ в пространство $\mathbb{L}$. Слабая измеримость отображения $\mathbf{A}$: $\Omega \to \mathbb{L}$ (т.е. измеримость функций $\langle g, \mathbf{A}f\rangle$ при любых $f \in \mathscr{L}(H)$, $g \in (\mathscr{L}(H))^*$) в случае конечномерного пространства H равносильна измеримости отображения в банахово пространство $\mathbb{L}$ и влечет измеримость вещественнозначной случайной величины $\|\mathbf{A}\|_{\mathbb{L}}$.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\mathbf{U}$ *– действующая в пространстве* $\mathscr{L}(H)$ *случайная квантовая динамическая полугруппа, случайный генератор* $\mathbf{A}$ *которой принимает значение в некотором шаре банахова пространства* $\mathscr{L}(\mathscr{L}(H))$. *Пусть* $\{\mathbf{U}_n\}$ *– последовательность независимых одинаково распределенных случайных полугрупп, распределение каждой из которых совпадает с распределением* U. *Тогда последовательность*

$$\mathbf{W}_n(t) = \mathbf{U}_n\left(\frac{t}{n}\right) \circ \ldots \circ \mathbf{U}_1\left(\frac{t}{n}\right), \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (2)$$

композиций случайных полугрупп сходится по вероятности к однопараметрической полугруппе $\bar{\mathbf{U}}(t) = \exp(\bar{\mathbf{A}}t)$, $t \geq 0$: *для любых* $\mathbf{X} \in \mathscr{L}(H)$, $T > 0$, *и* $\epsilon > 0$ *выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\sup_{t\in[0,T]}\|(\mathbf{W}_n(t) - \bar{\mathbf{U}}(t))\mathbf{X}\|_{L(H)} > \epsilon\}) = 0.$$

Докажем теорему 2. Случайная величина $\mathbf{A}$, принимающая значения в шаре некоторого радиуса $\rho > 0$ банахова пространства $\mathbb{L}$, имеет математическое ожидание $\mathrm{M}(\mathbf{A}) = \bar{\mathbf{A}} \in \mathbb{L}$.

При каждом $t \geq 0$ оператор $\exp(\mathbf{A}t)$ является случайной величиной со значениями в шаре радиуса $\exp(t\rho)$ пространства $\mathbb{L}$. Следовательно, функция $\mathbf{F}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{L}$ определена равенством $\mathbf{F}(t) = \mathrm{M}(\exp(\mathbf{A}t)) = \int\limits_\Omega \exp(\mathbf{A}t) d\mathbf{P}(\omega)$. Согласно теореме 1 [10], функция $\mathbf{F}$ является непрерывным в сильной операторной топологии отображением $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{L}$ (согласно конечномерности пространства $\mathbb{L}$ отображение непрерывно и в топологии нормы).

При каждом $\omega \in \Omega$ и каждом $t \geq 0$ в силу теоремы Лагранжа о среднем (см. 4.6.4 в [8]) имеют место оценки

$$\|\exp(\mathbf{A}t) - \mathbf{I}\|_{\mathbb{L}} \leq t\rho \exp(\rho t). \tag{3}$$

Из теоремы 1 следует, что справедливо равенство $\left.\frac{d}{dt}\mathbf{F}(t)\right|_{t=0} = \bar{\mathbf{A}}$.

Аналог закона больших чисел для композиции случайных полугрупп (2) устанавливается с помощью операторного аналога неравенства Чебышева [4, 11], для получения которого вводится операторнозначная дисперсия случайного оператора. Воспользовавшись конечномерностью пространств H и $\mathcal{L}(H)$, выберем в пространстве $\mathcal{L}(H)$ эквивалентную норме $\|\cdot\|_{L(H)}$ норму $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_2(H)}$ пространства операторов Гильберта–Шмидта, превращающую $\mathcal{L}(H)$ в гильбертово пространство. Символом $\mathcal{L}_2(H)$ обозначим линейное пространство $\mathcal{L}(H)$, наделенное нормой Гильберта–Шмидта. Тогда $(\mathbf{W}_n(t)) \in \mathcal{L}(\mathcal{L}_2(H))$ и $(\mathbf{W}_n(t))^* \in \mathcal{L}(\mathcal{L}_2(H))$ при каждом $n \in \mathbb{N}$ и каждом $t \geq 0$. Поскольку пространство $\mathcal{L}_2(H)$ является гильбертовым, то для композиций случайных операторов со значениями в наделенном сильной операторной топологией пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{L}_2(H))$ применим подход, предложенный в [4, 11]. Определим дисперсию случайной операторнозначной функции (2) равенством

$$\mathbf{D}(\mathbf{W}_n(t)) = \mathrm{M}[(\mathbf{W}_n(t) - \mathrm{M}\mathbf{W}_n(t))^*(\mathbf{W}_n(t) - \mathrm{M}\mathbf{W}_n(t))],$$
$$t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для оценки дисперсии случайной композиции $\mathbf{W}_n$ введем следующее случайное отклонение от математического ожидания. При каждом $k \in \mathbb{N}$ положим $\mathbf{V}_k(t) = \mathbf{U}_k(t) - \mathbf{F}(t)$, $t \geq 0$. Тогда $\mathrm{M}[\mathbf{V}_k(t)] = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, и в силу (3) при каждом $t \geq 0$ с вероятностью 1 выполнена оценка

$$\|\mathbf{V}_k(t)\|_{\mathbb{L}} \leq \|\mathbf{U}_k(t) - \mathbf{I}\|_{\mathbb{L}} + \|F(t) - \mathbf{I}\|_{\mathbb{L}} \leq 2t\rho \exp(t\rho). \tag{4}$$

В силу (2) при каждом $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\mathbf{W}_n(t) = \left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right) + \mathbf{V}_n\left(\frac{t}{n}\right)\right) \circ \ldots \circ \left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right) + \mathbf{V}_1\left(\frac{t}{n}\right)\right),$$
$$t \geq 0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{W}_n(t) = \left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n + \sum_{j=1}^n \left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{j-1} V_j\left(\frac{t}{n}\right)\left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n-j} +$$
$$+ \sum_{1\leq j<k\leq n} \left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{j-1} V_j\left(\frac{t}{n}\right)\left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{k-j-1} V_k\left(\frac{t}{n}\right)\left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n-k} +$$
$$+ \ldots + \mathbf{V}_n\left(\frac{t}{n}\right) \circ \ldots \circ \mathbf{V}_1\left(\frac{t}{n}\right), \quad t \geq 0;$$

$$\mathbf{W}_n^*(t)\mathbf{W}_n(t) = \left(\mathbf{F}^*\left(\frac{t}{n}\right) + \right. \tag{5}$$
$$\left. + \mathbf{V}_1^*\left(\frac{t}{n}\right)\right) \circ \ldots \circ \left(\mathbf{F}^*\left(\frac{t}{n}\right) + \mathbf{V}_n^*\left(\frac{t}{n}\right)\right) \times$$
$$\times \left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right) + \mathbf{V}_n\left(\frac{t}{n}\right)\right) \circ \ldots \circ \left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right) + \mathbf{V}_1\left(\frac{t}{n}\right)\right).$$

Произведение $2n$ биномов в (5) содержит 2^{2n} различных слагаемых. Поскольку математическое ожидание любой из случайных величин $\mathbf{V}_j\left(\frac{t}{n}\right)$ равно нулю, то ненулевой вклад в математическое ожидание суммы из 2^{2n} слагаемых вносят только такие слагаемые, в которых набор сомножителей из $\mathbf{V}_j$ совпадает с набором сомножителей из $\mathbf{V}_k^*$. Поэтому при каждом $t \geq 0$ справедливо равенство

$$\mathrm{M}\mathbf{W}_n^*(t)\mathbf{W}_n(t) = \left(\mathbf{F}^*\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n +$$
$$+ \sum_{j=1}^n \mathrm{M}\left(\mathbf{F}^*\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n-j} \mathbf{V}_j^*\left(\frac{t}{n}\right)\left(\mathbf{F}^*\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{j-1} \times$$
$$\times \mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)^{j-1} V_j\left(\frac{t}{n}\right)\left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n-j} +$$
$$+ \sum_{1\leq j<k\leq n} \mathrm{M}\left(\mathbf{F}^*\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n-k} \mathbf{V}_k^*\left(\frac{t}{n}\right) \times$$
$$\times \left(\mathbf{F}^*\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{k-j-1} \mathbf{V}_j^*\left(\frac{t}{n}\right)\left(\mathbf{F}^*\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{j-1} \circ$$
$$\circ \left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{j-1} \mathbf{V}_j\left(\frac{t}{n}\right)\left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{k-j-1} \mathbf{V}_k\left(\frac{t}{n}\right)\left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n-k} + \ldots +$$
$$+ \mathrm{M}\mathbf{V}_1^*\left(\frac{t}{n}\right) \circ \ldots \circ \mathbf{V}_n^*\left(\frac{t}{n}\right)\mathbf{V}_n\left(\frac{t}{n}\right) \circ \ldots \circ \mathbf{V}_1\left(\frac{t}{n}\right).$$

Следовательно, для дисперсии случайной операторнозначной величины $\mathbf{W}_n(t)$ имеет место равенство

$$\mathbf{D}[\mathbf{W}_n(t)] = \mathrm{M}\mathbf{W}_n^*(t)\mathbf{W}_n(t) - \mathrm{M}\mathbf{W}_n^*(t)\mathrm{M}\mathbf{W}_n(t) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\mathrm{M}\left(\mathbf{F}^*\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n-j} V_j^*\left(\frac{t}{n}\right)\left(\mathbf{F}^*\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{j-1}\times$$
$$\times\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{j-1} V_j\left(\frac{t}{n}\right)\left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n-j} + \ldots$$
$$+\mathrm{M}\mathbf{V}_1^*\left(\frac{t}{n}\right)\circ\ldots\circ\mathbf{V}_n^*\left(\frac{t}{n}\right)\mathbf{V}_n\left(\frac{t}{n}\right)\circ\ldots\circ\mathbf{V}_1\left(\frac{t}{n}\right). \qquad (6)$$

Поскольку $\left\|\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right\|_{\mathbb{L}} \le \exp\left(\frac{t}{n}\rho\right)$, то в силу оценки (4) справедливо неравенство

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}\mathrm{M}\left(\mathbf{F}^*\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n-j} \mathbf{V}_j^*\left(\frac{t}{n}\right)\left(\mathbf{F}^*\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{j-1}\times\right.$$
$$\left.\times F\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{j-1} \mathbf{V}_j\left(\frac{t}{n}\right)\left(F\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n-j}\right\|_{\mathbb{L}} \le C_n^1 e^{2\rho t}\frac{(2\rho t)^2}{n^2}.$$

Оценивая таким же образом оставшиеся слагаемые в формуле (6), в силу (3) и (4) получим оценку

$$\|\mathbf{D}[\mathbf{W}_n(t)]\|_{\mathbb{L}} \le C_n^1 e^{2\rho t}\left(\frac{2t}{n}\rho\right)^2 +$$
$$+C_n^2 e^{2\rho t}\left(\frac{2t}{n}\rho\right)^4 + \ldots + C_n^n e^{2\rho t}\left(\frac{2t}{n}\rho\right)^{2n} =$$
$$= e^{2\rho t}\left[\left(1+\left(\frac{2t}{n}\rho\right)^2\right)^n - 1\right].$$

Согласно формуле Тейлора найдется число $s \in (0, 1)$ такое, что

$$\|\mathbf{D}[\mathbf{W}_n(t)]\|_{\mathbb{L}} \le \frac{t^2\rho^2}{n}e^{2\rho t}\left(1+s\left(\frac{t}{n}\rho\right)^2\right)^n \le$$
$$\le \frac{(2t\rho)^2}{n}e^{2\rho t}e^{t^2\rho^2}.$$

Следовательно, для каждого $T > 0$ существует такое число $C = C(T,\rho) > 0$, что $\sup_{t\in[0,T]}\|\mathbf{D}[\mathbf{W}_n(t)]\|_{\mathbb{L}} < \frac{C}{n}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда согласно неравенству Чебышева для операторнозначных случайных величин (см. лемму 1 в [4]), для любых $T > 0$ и $\mathbf{X} \in \mathscr{L}(H)$ справедливо неравенство

$$P(\{\sup_{t\in[0,T]}\|(\mathbf{W}_n(t) - \mathrm{M}\mathbf{W}_n(t))\mathbf{X}\|_{\mathscr{L}_2(H)} > \epsilon\}) \le$$
$$\le \frac{1}{\epsilon^2}\sup_{t\in[0,T]}\|\mathbf{D}[\mathbf{W}_n(t)]\mathbf{X}\|_{\mathscr{L}_2(H)}. \qquad (7)$$

В силу независимости случайных генераторов имеем $\mathrm{M}(\mathbf{W}_n(t)) = \left(\mathbf{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n$. Согласно теореме 1,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,T]}\|(\mathrm{M}(\mathbf{W}_n(t)) - \bar{\mathbf{U}}(t))\mathbf{X}\|_{\mathscr{L}(H)} = 0$$

для любых $\mathbf{X} \in \mathscr{L}(H)$ и $T > 0$. В силу эквивалентности норм $\mathscr{L}(H)$ и $\mathscr{L}_2(H)$ неравенство (7) доказывает утверждение теоремы 2.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность А.С. Холево за плодотворные обсуждения, позволившие существенно улучшить статью, и за указание на работу [9], посвященную проблеме сходимости по распределению последовательности произведений независимых случайных операторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Davies E.* Quantum theory of open systems. L.: Acad. Press, 1976.
2. *Alicki R., Lendi K.* Quantum dynamical semigroups and applications // Lect. Notes in Phys. 1987. № 286.
3. *Accardi L., Lu Y.G., Volovich I.V.* Quantum theory and its stochastic limit. N.Y.: Springer, 2001.
4. *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Формулы Фейнмана и закон больших чисел для случайных однопараметрических полугрупп // Труды МИАН. 2019. Т. 306. С. 210–226.
5. *Гоф Дж., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Рандомизированное квантование гамильтоновых систем // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 498. С. 31–35.
6. *Tarnovski W., Yusipov I., Laptyeva T., Denosov S., Chruscinski D., Zycxkowski K.* Random generators of Markovian evolution: quantum-classikal transition by superdecoherence // ArXiv: 2105.02369.v2
7. *Bonaccorci S., Cottini F., Mugnolo D.* Random evolution equation: well-posedness, asymptotics and application to graphs // Appl. Math. Optim. 2021. https://doi.org/10.1007/s00245-020-09732-w
8. *Bogachev V.I., Smolyanov O.G.* Topological vector spaces and their applications. Heidelberg: Springer, 2017.
9. *Berger M.A.* Central limit theorem for products of random matrices // Trans. AMS. 1984. V. 285. № 2. P. 777–803.
10. *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Неограниченные случайные операторы и формулы Фейнмана // Изв. РАН. Сер. матем. 2016. Т. 80. № 6. С. 141–172.
11. *Сакбаев В.Ж.* О законе больших чисел для композиций независимых случайных операторов и случайных полугрупп // Труды МФТИ. 2016. Т. 8. № 1. С. 140–152.
12. *Холево А.С.* Введение в квантовую теорию информации. М.: МЦНМО, 2002.
13. *Choi M.-D.* Completely positive linear maps on complex matrices // Linear Algebra and its Applications. 1975. V. 10. P. 285–290.
14. *Gorini V., Kossakowski A., Sudarshan E.C.G.* Completely positive dynamical semigroups of *N*-level systems // J. Math. Phys. 1976. V. 17. P. 821–825.

15. *Lindblad G.* On the generator of completely positive semigroups // Comm. Math. Phys. 1976. V. 48. P. 119–130 (1976).
16. *Chernoff P.* Note on product formulas for operator semigroups // J. Funct. Anal. 1968. V. 2. № 2. P. 238–242.
17. *Замана К.Ю.* Усреднение случайных ортогональных преобразований аргумента функций из $L_2(\mathbb{R}^d)$ и $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ // Уфимский матем. журнал. 2021. Т. 13. № 4.

MARKOV APPROXIMATIONS OF QUANTUM SYSTEM EVOLUTION

J. Gough[a], Yu. N. Orlov[b], V. Zh. Sakbaev[b], and $\boxed{\text{O. G. Smolyanov}}$[c,d]

[a] *Aberystwyth University, Wales, UK*

[b] *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

[c] *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Dolgoprudny, Moscow Region, Russia*

[d] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The convergence in probability of the sequence of iterations of independent random quantum dynamical semigroups to the Markov process describing the evolution of open quantum system is studied. Statistical properties of the dynamics of open quantum systems with random generators of Markovian evolution are described in the terms of law of large numbers for operator valued random processes. For the compositions of independent random semigroups of complete positive operators the convergence of mean values to the semigroup described by the Gorini–Kossakowski–Sudarshan-Lindblad equation is obtained. Moreover, the convergence in probability of the sequence of random operator valued functions with values in the set of operators without the infinitely divisibility property to the operator valued function with values in the set of infinitely divisible operators is established.

Keywords: random linear operator, random operator valued function, operator valued random process, law of large numbers, infinitely divisible operator, open quantum system, Markovian process, Gorini–Kossakowski–Sudarshan–Lindblad equation

EDN: WADSLU
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 54–58

МАТЕМАТИКА

УДК 519.234.3

О КРИТЕРИЯХ РАЗЛИЧЕНИЯ ХВОСТОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРАМЕТРА МАСШТАБА

© 2022 г. Е. О. Кантонистова[1,*], И. В. Родионов[2,]**

Представлено академиком РАН С.Н. Васильевым 02.12.2021 г.
Поступило 03.12.2021 г.
После доработки 13.01.2022 г.
Принято к публикации 16.01.2022 г.

В работе предложены критерии различения разделимых классов хвостов распределений, первый из которых инвариантен относительно параметра масштаба, а второй – относительно параметров сдвига и масштаба, а также доказана их состоятельность. Мы не предполагаем, что рассматриваемые распределения принадлежат какой-либо из областей максимального притяжения.

Ключевые слова: хвост распределения, критерий различения, статистика экстремумов, параметр масштаба, параметр сдвига, область максимального притяжения Гумбеля

DOI: 10.31857/S2686954322020114

1. ВВЕДЕНИЕ

При построении вероятностных моделей для описания рисков в страховой и финансовой сферах, природных явлений и катастроф, а также данных из других областей правильное оценивание хвостов распределений часто имеет определяющее значение. Основной метод работы с хвостами распределений предоставляет стохастическая теория экстремумов, которая позволяет построить модель хвоста распределения и экстраполировать ее за пределы доступных данных. Центральным результатом этой теории является теорема Фишера–Типпета–Гнеденко, или теорема об экстремальных типах. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин с функцией распределения (ф.р.) F, а $X_{(1)} \le \ldots \le X_{(n)}$ – вариационный ряд данной выборки. Теорема утверждает, что если для некоторых последовательностей констант $\{a_n > 0\}$ и $\{b_n\}$ выполнено

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_{(n)} - b_n}{a_n} \le x\right) = \lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x) \quad (1)$$

для некоторой невырожденной ф.р. $G(x)$, то найдутся такие константы $a > 0$, b и γ, что $G(ax + b) = EV_\gamma(x)$, где

$$EV_\gamma(x) = \begin{cases} \exp(-(1+\gamma x)^{-1/\gamma}), & 1+\gamma x > 0, \gamma \ne 0, \\ \exp(-\exp(-x)), & x \in \mathbb{R}, \quad \gamma = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Если (1) и (2) выполнены для ф.р. F, то говорят, что F принадлежит области максимального притяжения (о.м.п.) закона EV_γ, пишем $F \in \mathcal{D}(EV_\gamma)$. Параметр γ, называемый индексом экстремального значения, позволяет разделить распределения, удовлетворяющие условиям теоремы Фишера–Типпета–Гнеденко, на три класса: класс $\gamma > 0$, называемый о.м.п. Фреше, класс $\gamma < 0$ (о.м.п. Вейбулла) и класс $\gamma = 0$ (о.м.п. Гумбеля).

По сравнению со статистическим оцениванием, проверке гипотез в статистике экстремальных значений посвящено не так много работ. Во многом это вызвано тем, что такие задачи, как оценивание высоких квантилей и вероятностей редких событий, можно решить без применения аппарата проверки гипотез для большого числа распределений, встречающихся на практике. А именно, метод заключается в оценивании параметров одной из общих моделей хвоста распределения, среди которых наиболее популярной является модель обобщенного распределения Парето, основанная на применении теоремы Пикандса–Балкема–де Хаана, см., например, монографии [1, 2]. Итак, пусть ф.р. F случайной величины X удовлетворяет условиям теоремы Фишера–Типпета–Гнеденко, тогда для достаточно большого u

[1] *Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия*
[2] *Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: ekantonistova@hse.ru*
***E-mail: vecsell@gmail.com*

$$P(X - u \le x \mid X > u) \approx GP_\gamma(x/\sigma(u)),$$

где $\sigma(u)$ – некоторая положительная функция от u и

$$GP_\gamma(x) = \begin{cases} 1 - (1+\gamma x)^{-1/\gamma}, & 1 + \gamma x > 0, \\ x > 0, \quad \text{если} & \gamma \ne 0, \\ 1 - \exp(-x), x > 0, & \text{если} \quad \gamma = 0. \end{cases}$$

Если же иследователя интересует распределение максимума членов выборки, то для его оценивания, как правило, выбирается блочный метод Гумбеля (см. [1, 2]), основанный на приближении

$$P(X_{(n)} \le x) \approx EV_\gamma((x - \lambda_n)/\delta_n).$$

Подавляющее число работ по проверке гипотез в рамках стохастической теории экстремумов посвящено проверке гипотез о параметрах упомянутых выше моделей, а также о проверке выполнения условий теоремы Фишера–Типпета–Гнеденко, см. обзоры [3, 4]. Данные модели показывают хорошее качество для распределений из о.м.п. Фреше и Вейбулла, однако не так хороши для анализа хвостов распределений из о.м.п. Гумбеля. Действительно, вне зависимости от того, каково поведение хвоста распределения вблизи правой крайней точки (а в о.м.п. Гумбеля лежат распределения с таким разным поведением хвоста, как логнормальное, экспоненциальное и нормальное), он оценивается с помощью приближения экспоненциальным распределением в модели обобщенного распределения Парето и распределением Гумбеля в блочном методе Гумбеля. Далее, обе эти модели основаны на теореме Фишера–Типпета–Гнеденко, а скорость сходимости в ней к распределению Гумбеля может быть крайне медленной (см. [5]). Кроме того, существуют распределения, для которых условия теоремы Фишера–Типпета–Гнеденко не выполняются (например, распределения с супер-тяжелыми хвостами), что препятствует применению описанных методов. Тем самым, возникает потребность в расширении арсенала статистической теории экстремумов и рассмотрении других моделей, кроме EV_γ и GP_γ.

В 2000–2010 гг. появилось несколько моделей, расширивших арсенал методов статистической теории экстремумов, которые пока не так активно используются практиками. Прежде всего отметим модель, предложенную в работе [6]. Следуя описанию этой модели в работе [7], предположим, что хвост распределения случайной величины X (для простоты скажем, что $X \ge 1$ п.н.) записывается в виде

$$1 - F(x) = \exp(-V^{\leftarrow}(\ln x)), \quad x \ge 1, \qquad (3)$$

где $V^{\leftarrow}(x) := \inf\{y : V(y) \ge x\}$ – обобщенная обратная функция для $V(x) = \ln Q(e^{-x})$, где Q, в свою очередь, равна $F^{\leftarrow}$. При этом предполагается, что существует такая положительная функция a, что для всех $t > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{V(tx) - V(x)}{a(x)} = \frac{t^\theta - 1}{\theta},$$

где при $\theta = 0$ правую часть следует понимать как $\ln t$. Тем самым, V принадлежит классу $ERV(\theta)$ детальное описание которого см. в [1]. Заметим, что в случае $\theta > 0$ параметр θ управляет поведением хвоста распределения логвейбулловского типа, т.е. таких функций распределения F, что для всех $t > 0$ выполнено

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 - F(e^{tx}))}{\ln(1 - F(e^x))} = t^{1/\theta}.$$

Представителями этого класса являются, например, логнормальное распределение и функция распределения вида $F(x) = 1 - \exp(-(\ln x)^{1/\theta})$, $x > 1$. В случае, если $0 < \theta < 1$, то $F(x)$ принадлежит о.м.п. Гумбеля, а если $\theta = 1$, то о.м.п. Фреше (см. теорему 1 в [7]). Оценивание высоких квантилей и вероятностей редких событий в рамках этой модели можно найти в [6–9].

Еще одним классом распределений из о.м.п. Гумбеля, заслуживающим внимания, является класс распределений вейбулловского типа [10, 11]. Будем говорить, что ф.р. F имеет хвост типа Вейбулла, если существует $\theta > 0$ такое, что для всех $t > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 - F(tx))}{\ln(1 - F(x))} = t^{1/\theta}.$$

Его представителями являются такие распределения, как экспоненциальное, Вейбулла, нормальное, гамма и многие другие. Модель (3), как и модели EV_γ и GP_γ, не являются хорошим описанием для распределений вейбулловского типа, поскольку для таких распределений и распределений с более легкими хвостами параметр θ в модели (3) равен 0. Оценки вероятностей редких событий и высоких квантилей для распределений вейбулловского типа предложены в работах [10–14] и других.

Тем самым, возникает необходимость в различении моделей хвостов распределений. Если работ по проверке гипотезы о принадлежности распределения о.м.п. Гумбеля против альтернативы, что распределение принадлежит о.м.п. Фреше, достаточно много (см. обзор таких критериев в [3, 15]), то в литературе обнаруживается почти полное отсутствие работ по различению распределений внутри о.м.п. Гумбеля. Здесь можно выделить лишь работу [10], где предложен критерий проверки гипотезы о том, что распределение имеет хвост вейбулловского типа, а также работы [16, 17]. Насколько нам известно, задача проверки гипотезы о том, что распределение имеет хвост логвейбулловского типа, в литературе не рассматривалась. Наконец, отметим работу [18], в которой предложен критерий различения двух разделимых классов хвостов непрерывных распределений, не требующий принадлежности распределения какой-либо из областей максимального притяжения, и работу [19], где доказана применимость этого критерия для распределений, которые не являются непрерывными.

Однако статистики критериев из упомянутых работ не являются инвариантными к изменению параметра сдвига распределения, а относительно параметра масштаба являются инвариантными только критерии из работы [10]. Неточности в определении параметров сдвига и масштаба при анализе хвостов распределений из о.м.п. Гумбеля могут привести к серьезным ошибкам в выводах, поэтому возникает задача построения методов анализа хвостов распределений, инвариантных относительно этих параметров. Эта работа посвящена построению критериев различения классов хвостов распределений, обладающих указанным свойством.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

С этого момента считаем, что все рассматриваемые нами распределения являются непрерывными и что их правая граничная точка равна $+\infty$. Пусть $u_F(t) = \inf\{x\colon F(x) \geq 1 - 1/t\}$ — квантильная функция F. По аналогии с B-условием из работы [18] (см. также [19]) введем следующее условие, необходимое для обоснования асимптотических свойств критериев этой работы.

Определение 1. Скажем, что функции распределения H и G удовлетворяют условию $B'(H,G)$ (B'-условию), если для некоторого t_0 существует $\varepsilon \in (0,1)$ такое, что для каждого $t > t_0$ выполнено

$$\frac{(1 - H(cu_H(t)))^{1-\varepsilon}}{1 - G(cu_G(t))} \text{ не возрастает при } \quad c > 1. \quad (4)$$

Простым примером двух функций распределения, удовлетворяющих B'-условию, являются функции распределения закона Парето G_{α_1} и G_{α_2}, где $G_\alpha(x) = (1 - x^{-\alpha})I(x > 1)$ и $\alpha_1 > \alpha_2$. Тогда легко видеть, что дробь в (4) равняется $c^{\alpha_2 - (1-\varepsilon)\alpha_1} t^{-\varepsilon}$ и поэтому условие $B'(G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2})$ выполнено при $t_0 = 1$ и $\varepsilon = (1 - \alpha_2/\alpha_1)/2$. Следующее определение является аналогом понятия B-разделимости классов хвостов распределений из работы [19].

Определение 2. Назовем классы хвостов распределений A_0 и A_1 B'-разделимыми (справа), если существует такая функция распределения F_0, что хвосты распределений из A_0 легче, чем хвост F_0, а для всех $H \in A_1$ выполнено условие $B'(F_0, H)$ для некоторых (возможно, различных) ε и t_0.

В случае если классы A_0 и A_1 B'-разделимы функцией распределения F_0, пишем, что они $B'(F_0)$-разделимы (справа).

В случае если хвосты распределений из класса A_0 тяжелее, чем хвосты из класса A_1, то будем говорить, что эти два класса являются $B'(F_0)$-разделимыми (слева), если для некоторой функции распределения F_0 хвосты распределений из A_0 тяжелее, чем хвост F_0, а для всех $H \in A_1$ выполнено условие $B'(H, F_0)$ для некоторых (возможно, различных) ε и t_0.

Так, несложно показать, что классы хвостов распределений вейбулловского и логвейбулловского типа B'-разделимы (и справа, и слева) посредством функции распределения

$$F_0(x) = (1 - \exp\{-\exp\{(\ln x)^{1/2}\}\})I(x > 1),$$

а классы хвостов распределений логвейбулловского типа с $\theta < 1$ и регулярно меняющихся хвостов распределений — посредством

$$F_0(x) = 1 - \exp(-\exp(\sqrt{\ln \ln x}) \ln x), \quad x > e.$$

2.1. Критерий различения классов хвостов распределений, инвариантный относительно параметра масштаба

Пусть классы хвостов распределений A_0 и A_1 $B'(F_0)$-разделимы справа. Предложим следующий критерий проверки $H_0 : F \in A_0$ против альтернативы $H_1 : F \in A_1$, инвариантный относительно параметра масштаба распределения

$$\text{если} \quad \tilde{R}_{k,n} > 1 + \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{k}}, \quad \text{то отвергнуть } H_0,$$

где статистика

$$\tilde{R}_{k,n} = \ln\frac{k}{n} - \frac{1}{k}\sum_{i=n-k+1}^{n} \ln\left(1 - F_0\left(u_0(n/k)X_{(i)}/X_{(n-k)}\right)\right),$$

является модификацией статистики $R_{k,n}$ из работ [18] и [19], $u_0(t) = u_{F_0}(t)$, а $u_{1-\alpha}$ — квантиль уровня $1-\alpha$ стандартного нормального распределения. Легко видеть, что распределение статистики $\tilde{R}_{k,n}$ не зависит от параметра масштаба распределения X_1. Если же классы A_0 и A_1 $B'(F_0)$-разделимы слева, то для проверки H_0: $F \in A_0$ против H_1: $F \in A_1$ будем использовать следующий критерий:

$$\text{если} \quad \tilde{R}_{k,n} < 1 + \frac{u_{\alpha}}{\sqrt{k}}, \quad \text{то отвергнуть } H_0.$$

Из следующих двух теорем легко вытекает, что если F_0 лежит либо в о.м.п. Гумбеля, либо в о.м.п. Фреше, то предложенный критерий асимптотически имеет уровень значимости α и является состоятельным на альтернативе H_1 соответственно.

Теорема 1. *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — н.о.р. случайные величины с ф.р. F_0. Пусть F_0 удовлетворяет условию фон Мизеса принадлежности $\mathcal{D}(EV_\gamma)$ для $\gamma \geq 0$ (см. [1])*

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \frac{(1 - F_0(x))F_0''(x)}{F_0'(x)^2} = -\gamma - 1. \tag{5}$$

Пусть последовательность $k = k(n)$ такова, что

$$k \to \infty, \quad k/n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{6}$$

Тогда

$$\sqrt{k}(\tilde{R}_{k,n} - 1) \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad n \to \infty.$$

Заметим, что условию (5) удовлетворяют все распределения из $\mathcal{D}(EV_\gamma)$ с достаточно регулярным поведением хвоста на бесконечности (и, в частности, имеющие дифференцируемую функцию плотности в окрестности $+\infty$), например, такие, как экспоненциальное, нормальное и Парето, см. [1, Remark 1.2.8].

Теорема 2. *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — н.о.р. случайные величины с ф.р. F_1. Пусть функция распределения F_0 удовлетворяет условию* (5)*, а последовательность $k = k(n)$ — условию* (6)*. Если выполнено условие $B'(F_0, F_1)$, то*

$$\sqrt{k}(\tilde{R}_{k,n} - 1) \xrightarrow{P} +\infty, \quad n \to \infty;$$

если же выполнено $B'(F_1, F_0)$, то

$$\sqrt{k}(\tilde{R}_{k,n} - 1) \xrightarrow{P} -\infty, \quad n \to \infty.$$

2.2. Критерий различения классов хвостов распределений, инвариантный относительно параметров сдвига и масштаба

Критерий, предложенный в предыдущем разделе, как и критерии, упомянутые в конце Введения, имеют существенный для статистики экстремумов недостаток: они не являются инвариантными относительно параметра сдвига, что может существенно сказаться на области их применения. Целью этого раздела является предложить критерий различения разделимых классов хвостов распределений, который был бы инвариантен не только относительно параметра масштаба, но и параметра сдвига. Для построения критерия введем следующую статистику:

$$\hat{R}_{k,n} = \ln\frac{k}{n} - \frac{1}{k}\sum_{i=n-k+1}^{n} \ln\left[1 - F_0(u_0(n/k) + \right.$$
$$\left. + \frac{X_{(i)} - X_{(n-k)}}{X_{(n-k)} - X_{(n-2k)}}(u_0(n/k) - u_0(n/(2k))))\right].$$

Обозначим

$$\sigma^2(\gamma) = 1 + \frac{2\gamma^2}{(\gamma+1)^2(2^\gamma - 1)^2}, \quad \gamma > 0,$$

и положим $\sigma^2(0) = 1 + (2(\ln 2)^2)^{-1}$. Асимптотические свойства статистики $\hat{R}_{k,n}$ установлены в двух следующих теоремах.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда*

$$\sqrt{k}(\hat{R}_{k,n} - 1) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2(\gamma)), \quad n \to \infty.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены предположения теоремы* 2. *Если выполнено условие $B'(F_0, F_1)$, то*

$$\sqrt{k}(\hat{R}_{k,n} - 1) \xrightarrow{P} +\infty, \quad n \to \infty;$$

если же выполнено условие $B'(F_1, F_0)$, то

$$\sqrt{k}(\hat{R}_{k,n} - 1) \xrightarrow{P} -\infty, \quad n \to \infty.$$

Как и в предыдущем разделе, рассмотрим два класса хвостов распределений A_0 и A_1, $B'(F_0)$-разделимых справа. Предложим следующий критерий проверки гипотезы H_0:

$$\text{если} \quad \hat{R}_{k,n} > 1 + \frac{\sigma(\gamma)u_{1-\alpha}}{\sqrt{k}}, \quad \text{то отвергнуть } H_0.$$

Этот критерий, очевидно, является инвариантным относительно параметров сдвига и масштаба по построению статистики $\hat{R}_{k,n}$. Также, согласно теоремам 3 и 4, введенный критерий асимптотически имеет уровень значимости α и является состоятельным на альтернативе H_1. Критерий различения классов A_0 и A_1 в случае их $B'(F_0)$-разделимости слева строится аналогично предыдущему разделу.

Замечание 1. Отметим, что из теорем 1–4 следует, что элементы классов A_0 и A_1 (кроме функции распределения F_0 в случае ее принадлежности классу A_0) не обязаны принадлежать какой-либо из областей максимального притяжения.

Замечание 2. По аналогии с работой [20], теоремы 3, 4 могут быть использованы для построения на основе статистики $\hat{R}_{k,n}$ общего метода оценивания параметра хвоста рапределения, инвариантного относительно параметров сдвига и масштаба. Этот метод может быть использован, в частности, для оценивания вейбулловского и логвейбулловского индексов. Мы планируем обратиться к этой задаче в своих будущих исследованиях.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа над разделом 2.1 выполнена И.В. Родионовым за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-00035) в Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *de Haan L., Ferreira A.* Extreme Value Theory: An Introduction. N.Y.: Springer Verlag, 2006. 417 p. https://doi.org/10.1007/0-387-34471-3
2. *Beirlant J., Goegebeur Y., Teugels J., Segers J.* Statistics of Extremes: Theory and Applications. N.Y.: Wiley, 2004. 498 p. https://doi.org/10.1002/0470012382
3. *Hüsler J., Peng L.* Review of testing issues in extremes: in honor of Professor Laurens de Haan // Extremes. 2008. V. 11. P. 99–111. https://doi.org/10.1007/s10687-007-0052-0
4. *Gomes M.I., Guillou A.* Extreme Value Theory and Statistics of Univariate Extremes: A Review // International Statistical Review. 2015. V. 83. I. 2. P. 263–292. https://doi.org/10.1111/insr.12058
5. *Resnick S., de Haan L.* Second-order regular variation and rates of convergence in extreme-value theory // Annals of Probability. 1996. V. 24. I. 1. P. 97–124. https://doi.org/10.1214/aop/1042644709
6. *de Valk C.* Approximation of high quantiles from intermediate quantiles // Extremes. 2016. V. 19. P. 661–686. https://doi.org/10.1007/s10687-016-0255-3
7. *Albert C., Dutfoy A., Gardes L., Girard S.* An extreme quantile estimator for the log-generalized Weibull-tail model // Econometrics and Statistics. 2020. V. 13. P. 137–174. https://doi.org/10.1016/j.ecosta.2019.01.004
8. *de Valk C.* Approximation and estimation of very small probabilities of multivariate extreme events // Extremes. 2016. V. 19. P. 687–717. https://doi.org/10.1007/s10687-016-0252-6
9. *de Valk C., Cai J.-J.* A high quantile estimator based on the log-generalized Weibull tail limit // Econometrics and Statistics. 2018. V. 6. P. 107–128. https://doi.org/10.1016/j.ecosta.2017.03.001
10. *Goegebeur J., Guillou A.* Goodness-of-fit testing for Weibull-type behavior // Journal of Statistical Planning and Inference. 2010. V. 140. I. 6. P. 1417–1436. https://doi.org/10.1016/j.jspi.2009.12.008
11. *Gardes L., Girard S., Guillou A.* Weibull tail-distributions revisited: a new look at some tail estimators // Journal of Statistical Planning and Inference. 2011. V. 141. I. 1. P. 429–444. https://doi.org/10.1016/j.jspi.2010.06.018
12. *Broniatowski M.* On the estimation of the Weibull tail coefficient // Journal of Statistical Planning and Inference. 1993. V. 35. P. 349–366. https://doi.org/10.1016/0378-3758(93)90022-X
13. *Beirlant J., Broniatowski M., Teugels J.L., Vynckier P.* The mean residual life function at great age: applications to tail estimation // Journal of Statistical Planning and Inference. 1995. V. 45. P. 21–48. https://doi.org/10.1016/0378-3758(94)00061-1
14. *Gardes L., Girard S.* Estimating extreme quantiles of Weibull tail distributions // Communications in Statistics – Theory and Methods. 2005. V. 35. I. 4. P. 1065–1080. https://doi.org/10.1081/STA-200056849
15. *Neves C., Fraga Alves M.I.* Testing extreme value conditions – an overview and recent approaches // REVSTAT–Statistical Journal. 2008. V. 6. P. 83–100.
16. *Rodionov I.V.* A discrimination test for tails of Weibull-type distributions // Theory of Probability and its Applications. 2018. V. 63. I. 2. P. 327–335. https://doi.org/10.1137/S0040585X97T989076
17. *Rodionov I.V.* Discrimination of close hypotheses about the distribution tails using highest order statistics // Theory of Probability and its Applications. 2019. V. 63. I. 3. P. 364–380. https://doi.org/10.1137/S0040585X97T989118
18. *Rodionov I.V.* On discrimination between classes of distribution tails // Problems of Information Transmission. 2018. V. 54. I. 2. P. 124–138. https://doi.org/10.1134/S0032946018020035
19. *Kogut N.S., Rodionov I.V.* On tests for distinguishing distribution tails // Theory of Probability and its Applications. 2021. V. 66. I. 3. P. 348–363. https://doi.org/10.1137/S0040585X97T990447
20. *Rodionov I.V.* Inferences on parametric estimation of distribution tails // Doklady Mathematics. 2019. V. 100. I. 2. P. 456–458. https://doi.org/10.1134/S1064562419040094

ON TESTS TO DISTINGUISH DISTRIBUTION TAILS INVARIANT WITH RESPECT TO THE SCALE PARAMETER

E. O. Kantonistova[a] and I. V. Rodionov[b]

[a] *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia*

[b] *V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russia*

Presented by Acdemician of the RAS S.N. Vassilyev

We propose two tests to distinguish between separable classes of distribution tails, the first of those is invariant with respect to the scale parameter and the second is invariant with respect to both location and scale parameters. The asymptotical properties of the proposed tests are established. The belonging of distributions to any maximum domain of attraction is not assumed.

Keywords: distribution tail, discrimination test, statistics of extremes, scale parameter, location parameter, Gumbel maximum domain of attraction

EDN: QLJTSZ
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 59–63

УДК 517.946

О ЗАДАЧЕ СТЕФАНА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ИНЪЕКЦИЕЙ СРЕДЫ С РЕОЛОГИЧЕСКИМ ЗАКОНОМ О. А. ЛАДЫЖЕНСКОЙ

 М. А. Кисатов[1,*]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 14.10.2021 г.
Поступило 19.10.2021 г.
После доработки 19.10.2021 г.
Принято к публикации 08.02.2022 г.

Работа посвящена теореме существования единственного классического решения задачи Стефана, возникающей при изучении магнитогидродинамического пограничного слоя в вязкой среде с инъекцией модифицированной среды с реологическим законом О.А. Ладыженской.

Ключевые слова: пограничный слой жидкости, вязкая среда, реологический закон О.А. Ладыженской, задача Стефана, задача дифракции пограничного слоя

DOI: 10.31857/S2686954322020126

Изучение задач в областях с подвижными границами является важным направлением в теории дифференциальных уравнений с частными производными, при этом важность изучения этих задач также подчеркивается и многочисленными приложениями. О задачах Стефана см. работы [1, 2], а также литературу в этих работах.

В настоящей работе рассматривается задача Стефана, возникающая в теории магнитогидродинамического пограничного слоя реологически сложных сред. Предполагается, что жидкость с определенными свойствами обтекает пористую поверхность, через которую происходит инъекция жидкости с иными электромагнитными и реологическими свойствами (см. рис. 1). При этом жидкости не смешиваются и их разделяет некоторая поверхность, на которой возникают условия сопряжения параметров, определяющих жидкости. Эта поверхность находится в движении. Обоснование актуальности подобных задач с физической точки зрения можно найти, к примеру, в работе [3]. Похожая задача магнитогидродинамического пограничного слоя с условиями дифракции для двух жидкостей с различными реологическими свойствами была рассмотрена в работе [4]. В работе [5] рассматривалась задача дифракции с инъекцией дилатантной среды в пограничный слой (о дилатантной среде см. также [6]).

Слоистые неньютоновские жидкие среды рассматривались в работах [7–9]. Неоднородные неньютоновские жидкости изучались также в [10]. Модификация О.А. Ладыженской пограничного слоя неньютоновской жидкости изучена в работе [11]. Магнитная среда с реологическим законом О.А. Ладыженской исследовалась в [12], а аналогичная дилатантная жидкость рассматривалась в [13].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

В области $D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$, разделенной непрерывной кривой $\gamma = \{(x, y)\colon y = y_*(x) > 0, 0 \le x \le X\}$ на области

Рис. 1. Инъекция жидкости через мембрану.

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
**E-mail: kisatov@mail.ru*

$$D_1 = \{0 < x < X,\ 0 < y < y_*(x)\} \quad \text{и}$$
$$D_2 = \{0 < x < X,\ y_*(x) < y < \infty\},$$

рассматривается краевая задача для уравнений пограничного слоя. В области D_1 рассматривается система уравнений

$$u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial y} = \nu_1\left(1 + 3k\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho_1}\frac{dp(x)}{dx} - \frac{\sigma_1}{\rho_1}B(x)(u_1B(x) + E(x)), \quad (1)$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0,$$

модифицированной электропроводной среды с реологическим законом О.А. Ладыженской, а в области D_2 – система уравнений

$$u_2\frac{\partial u_2}{\partial x} + v_2\frac{\partial u_2}{\partial y} = \nu_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho_2}\frac{dp(x)}{dx} - \frac{\sigma_2}{\rho_2}B(x)(u_2B(x) + E(x)), \quad (2)$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0.$$

ньютоновской электропроводной среды.

В уравнениях k – малая положительная постоянная, $\nu_1 > 0$, ν_2 – вязкость соответствующей жидкости, $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$ – плотность среды, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ – соответствующая электропроводность, $B(x)$ – y-компонента вектора магнитной индукции, $E(x)$ – компонента вектора напряженности электрического поля, ортогональная плоскости XOY, $p(x)$ – давление.

Соответствующие граничные условия имеют вид

$$\begin{gathered} u_1(0,y) = u_{10}(y) \quad \text{при} \quad 0 \le y \le y_*(0); \\ u_1(x,0) = 0, \quad v_1(x,0) = v_0(x), \\ u_2(0,y) = u_{20}(y) \quad \text{при} \quad y_*(0) \le y < \infty; \\ u_2(x,y) \to U(x) \quad \text{при} \quad y \to \infty, \end{gathered} \quad (3)$$

где значение $y_*(0)$ и функции $u_{10}(y)$, $u_{20}(y)$, $v_0(x)$, $U(x) > 0$ считаются заданными, причем $u_{i0}(y) \le U(0)$, $i = 1, 2$. Зададим на кривой γ условия сопряжения:

$$u_1(x, y_*(x)) = u_2(x, y_*(x)), \quad (4)$$

$$\nu_1\rho_1\frac{\partial u_1(x, y_*(x))}{\partial y}\left(1 + k\left(\frac{\partial u_1(x, y_*(x))}{\partial y}\right)^2\right) = \nu_2\rho_2\frac{\partial u_2(x, y_*(x))}{\partial y}. \quad (5)$$

Кривую γ будем считать гладкой линией тока. В силу этого выполнено

$$\frac{dy_*(x)}{dx} = \frac{v_1(x, y_*(x))}{u_1(x, y_*(x))} = \frac{v_2(x, y_*(x))}{u_2(x, y_*(x))}. \quad (6)$$

В задаче (1)–(6) неизвестными являются функции $u_i(x,y)$, $v_i(x,y)$, $y_*(x)$, $i = 1, 2$. Поскольку граница γ является неизвестной, то рассматриваемая задача является задачей типа Стефана.

Давление $p(x)$ можно исключить из уравнений, выразив через скорость внешнего потока $U(x) > 0$, используя соотношение

$$-\frac{dp(x)}{dx} - \sigma_2 B(x)E(x) = \rho_2 U(x)\frac{dU(x)}{dx} + \sigma_2 B^2(x)U(x).$$

Введем новые обозначения

$$u_0(y) = \begin{cases} u_{10}(y), & 0 \le y \le y_*(0), \\ u_{20}(y), & y_*(0) < y < \infty, \end{cases}$$
$$\nu(y) = \begin{cases} \nu_1, & 0 < y \le y_*(x), \\ \nu_2, & y_*(x) < y < \infty, \end{cases}$$
$$u(x,y) = \begin{cases} u_1(x,y), & (x,y) \in D_1, \\ u_2(x,y), & (x,y) \in D_2, \end{cases}$$
$$v(x,y) = \begin{cases} v_1(x,y), & (x,y) \in D_1, \\ v_2(x,y), & (x,y) \in D_2, \end{cases}$$

и приведем определение обобщенного решения задачи (1)–(6).

О п р е д е л е н и е 1. Обобщенным решением задачи (1)–(6) в области D называются функции $u(x,y)$, $v(x,y)$, $y_*(x)$, $(x,y) \in D$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $u(x,y)$ положительна при $y > 0$, непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, ограничена; $v(x,y)$ принадлежит пространству $L_2^{loc}(D)$ и непрерывна по y при $y = 0$;

2) существуют обобщенные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, производная $\frac{\partial u}{\partial y}$ ограничена, производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ принадлежат пространству $L_2^{loc}(D)$;

3) $u(0,y) = u_0(y)$, $u(x,0) = 0$, $u(x,y) \to U(x)$ при $y \to \infty$, $v(x,0) = v_0(x)$;

4) для любой непрерывной функции $\varphi(x,y)$, имеющей непрерывную производную $\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}$ и равной нулю при $y = 0$ и при достаточно больших y, функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ удовлетворяют интегральному тождеству

$$\iint_D \left[\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho(x,y)}\frac{dp(x)}{dx} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\sigma(x,y)}{\rho(x,y)} B(x)(uB(x) + E(x)) \right)\varphi +$$

$$\left. + \nu(y)\left(1 + k\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] dxdy = 0,$$

где $\rho(x,y) \equiv \rho_i$, $\sigma(x,y) \equiv \sigma_i$ при $(x,y) \in D_i$, $i = 1, 2$;

5) справедливо равенство

$$\frac{dy_*(x)}{dx} = \frac{v(x, y_*(x))}{u(x, y_*(x))};$$

6) почти всюду в области D выполняется равенство

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. *Предположим, что функции* $p'(x)$, $v_0(x)$, $B(x)$, $E(x)$ *непрерывно дифференцируемы на отрезке* $0 \le x \le X$, $u_{i0}(y)$, $u'_{i0}(y)$, $u''_{i0}(y)$, $i = 1$, 2, *ограничены и удовлетворяют условию Гёльдера*, $u'_{10}(0) > 0$, $u_{20}(y) \to U(0)$ *при* $y \to \infty$, $u_{i0}(y) \le U(0)$, $i = 1, 2$, *выполняются равенства*

$$u_{10}(y_*(0)) = u_{20}(y_*(0)),$$

$$\nu_1\rho_1 u'_{10}(y_*(0))(1 + k(u'_{10}(y_*(0)))^2) = \nu_2\rho_2 u'_{20}(y_*(0))$$

и условие согласования в точке $(0, 0)$

$$\nu_1\left(1 + \frac{3}{4}k(u'_{10}(y))^2\right)u''_{10}(y) - v_0(0)u'_{10}(y) -$$

$$-\frac{p'(0)}{\rho_1} - \frac{\sigma_1}{\rho_1}B^2(0)u_{10}(y) -$$

$$-\frac{\sigma_1}{\rho_1}B(0)E(0) = O(y^2) \quad \textit{при} \quad y \to 0.$$

Тогда при некотором $X > 0$ *существует обобщенное решение задачи* (1)–(6). *Если, кроме того, выполняется неравенство*

$$\frac{dp(x)}{dx} + \sigma_i B(x)E(x) \le -\beta_0 < 0,$$

где $\beta_0 = \text{const}$, *то решение существует при любом* $X > 0$. *Если же выполнены условия*

$$\frac{dp(x)}{dx} + \sigma_i B(x)E(x) \le 0, \quad v_0(x) \ge 0,$$

то решение задачи (1)–(6) *единственно.*

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Для доказательства основного результата введем замену фон Мизеса

$$x = x, \quad \psi = \psi(x,y),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u(x,y),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_0(x) - v(x,y), \quad \psi(x,0) = 0,$$

$$w_i(x,\psi) = u_i^2(x,y), \quad i = 1, 2,$$

при которой системы уравнений (1), (2) преобразуются в квазилинейные уравнения

$$\begin{gathered} \nu_1\left(1 + \frac{3}{4}k\left(\frac{\partial w_1}{\partial \psi}\right)^2\right)\sqrt{w_1}\frac{\partial^2 w_1}{\partial \psi^2} - \\ - \frac{\partial w_1}{\partial x} - v_0(x)\frac{\partial w_1}{\partial \psi} - \frac{2\sigma_1 B^2(x)}{\rho_1}\sqrt{w_1} - \\ - \frac{2}{\rho_1}\left(\frac{dp(x)}{dx} + \sigma_1 B(x)E(x)\right) = 0 \end{gathered} \tag{7}$$

в области $\Omega_1 = \{0 < x < X,\ 0 < \psi < \psi_*(x)\}$ и

$$\begin{gathered} \nu_2\sqrt{w_2}\frac{\partial^2 w_2}{\partial \psi^2} - \frac{\partial w_2}{\partial x} - v_0(x)\frac{\partial w_2}{\partial \psi} - \frac{2\sigma_2 B^2(x)}{\rho_2}\sqrt{w_2} - \\ - \frac{2}{\rho_2}\left(\frac{dp(x)}{dx} + \sigma_2 B(x)E(x)\right) = 0 \end{gathered} \tag{8}$$

в области $\Omega_2 = \{0 < x < X,\ \psi_*(x) < \psi < \infty\}$. Граничные условия (3) переходят в условия

$$\begin{gathered} w_1(0,\psi) = w_{10}(\psi), \quad 0 \le \psi \le \psi_*(0); \\ w_1(x,0) = 0, \quad w_2(0,\psi) = w_{20}(\psi), \\ \psi_*(0) \le \psi < \infty, \\ w_2(x,\psi) \to U^2(x) \quad \text{при} \quad \psi \to \infty, \end{gathered} \tag{9}$$

условия сопряжения (4), (5) переходят при $\psi = \psi_*(x)$, $0 \le x \le X$ в условия

$$\begin{gathered} w_1(x,\psi_*(x)) = w_2(x,\psi_*(x)), \\ \nu_1\rho_1\frac{\partial w_1(x,y_*(x))}{\partial \psi}\left(1 + \frac{k}{4}\left(\frac{\partial w_1(x,\psi_*(x))}{\partial \psi}\right)^2\right) = \\ = \nu_2\rho_2\frac{\partial w_2(x,\psi_*(x))}{\partial \psi}, \end{gathered} \tag{10}$$

а неизвестная граница γ – в известную границу

$$\Gamma = \{(x,y)\colon \psi = \psi_*(x) \equiv \psi(x,y_*(x)),\ 0 \le x \le X\},$$

где функция $\psi_*(x)$ находится из соотношений

$$\psi_*(x) = \psi_*(0) + \int_0^x v_0(s)ds,$$

$$\psi_*(0) = \int_0^{y_*(0)} u_{10}(\tau)d\tau, \quad 0 \le x \le X.$$

Введем обозначения

$$\rho \equiv \rho(x,\psi) = \begin{cases} \rho_1, \ 0 < \psi \le \psi_*(x), \\ \rho_2, \ \psi_*(x) < \psi < \infty, \end{cases}$$

$$\sigma \equiv \sigma(x,\psi) = \begin{cases} \sigma_1, \ 0 < \psi \le \psi_*(x), \\ \sigma_2, \ \psi_*(x) < \psi < \infty. \end{cases}$$

Далее доказываются теоремы существования и единственности решений полученной задачи (7)–(10) в следующей формулировке.

Теорема 2. *Если выполнены предположения теоремы* 2, *то обобщенное решение* $w(x,\psi)$ *задачи* (7)–(10) *существует, причем* $w(x,\psi) \to U^2(x)$ *при* $\psi \to \infty$ *равномерно на отрезке* $0 \le x \le X$, *а при* $0 \le \psi \le \psi_1$ *выполняется неравенство*

$$\left| w^{\beta_1 - 1}\frac{\partial w}{\partial x}\right| \le C, \quad 0 < \beta_1 < \frac{1}{2}, \quad C = \text{const}.$$

Теорема 3. *Если* $v_0(x) \ge 0$ *и* $\frac{dp(x)}{dx} + \sigma B(x)E(x) \le 0$, *то решение* $w(x,\psi)$, *полученное в теореме* 2, *единственно.*

Полученное в теореме 2 обобщенное решение $w(x,\psi)$ при $\psi > \psi_*(x) + \Delta$ имеет обычные производные $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial \psi}, \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}$, которые ограничены и удовлетворяют условию Гёльдера. Поэтому функция $w(x,\psi)$ является решением уравнения (8) в классическом смысле.

На основе теорем 2 и 3 с помощью обратной замены переменных получаем доказательство основного результата.

Замечание 1. За счет связи градиентов давления и скорости внешнего течения, неравенство $\frac{dp(x)}{dx} + \sigma B(x)E(x) \le 0$ эквивалентно неравенствам $\rho_i \frac{dU(x)}{dx} + \sigma_i B^2(x) \ge 0$, $i = 1, 2$, которые выполняются при достаточно большом $B^2(x)$. Последнее неравенство означает, что достаточно сильное поперечное магнитное поле предотвращает отрыв пограничного слоя вязкой электропроводной среды. О предотвращении отрыва пограничного слоя см. [12] (а также [14, 15]).

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Oleinik O.A.* On Stefan–type free boundary problems for parabolic equations. In: Seminary 1962–1963 di analisi, algebra, geometria e topologia, 1. Roma. 1965. P. 388–403.
2. *Oleinik O.A., Primicerio M., Radkevich E.V.* Stefan-like problems // Meccanica. 1993. V. 28. P. 129–143.
3. *Ватажин А.Б.* О вдувании в пограничный слой в присутствии магнитного поля электропроводной жидкости или газа // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24. № 5. С. 909–911.
4. *Самохин В.Н.* Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя с условиями дифракции // Дифф. уравнения. 1997. Т. 33. № 8. С. 1106–1113.
5. *Самохин В.Н.* Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя с инъекцией дилатантной среды // Дифф. уравнения. 2010. Т. 46. № 6. С. 846–858.
6. *Самохин В.Н.* О системе уравнений стационарного пограничного слоя дилатантной среды // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 1989. Вып. 14. С. 89–108.
7. *Спиридонов С.В., Чечкин Г.А.* Просачивание пограничного слоя ньютоновской жидкости через перфорированную преграду // Проблемы математического анализа. 2010. Т. 45. С. 93–102.
8. *Линкевич А.Ю., Спиридонов С.В., Чечкин Г.А.* О пограничном слое ньютоновской жидкости, обтекающей шероховатую поверхность и проходящей через перфорированную преграду // Уфимский матем. журн. 2011. Т. 3. № 3. С. 93–104.
9. *Линкевич А.Ю., Спиридонов С.В., Чечкин Г.А.* Усреднение стратифицированной дилатантной жидкости // Современная математика. Фундаментальные направления. 2013. Т. 48. С. 75–83.
10. *Chechkin G.A., Chechkina T.P., Ratiu T.S., Romanov M.S.* Nematodynamics and Random Homogenization // Applicable Analysis. 2016. V. 95. № 10. P. 2243–2253.
11. *Самохин В.Н., Фадеева Г.М., Чечкин Г.А.* Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье–Стокса // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2011. Вып. 28. С. 329–361.
12. *Булатова Р.Р., Самохин В.Н., Чечкин Г.А.* Уравнения магнитогидродинамического пограничного слоя для модифицированной несжимаемой вязкой среды. Отрыв пограничного слоя // Проблемы математического анализа. Т. 92. С. 83–100.
13. *Самохин В.Н.* О системе уравнений магнитогидродинамического пограничного слоя дилатантной среды // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 2. С. 328–336.
14. *Хуснутдинова Н.В.* Об условиях существования безотрывного пограничного слоя при возрастающем давлении // ДАН СССР. 1980. Т. 253. № 5. С. 1095–1099.
15. *Хуснутдинова Н.В.* Математические вопросы управления пограничным слоем с помощью отсосов // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13. № 2. С. 485–489.

ON THE STEFAN PROBLEM FOR A SYSTEM OF EQUATIONS OF A MAGNETOHYDRODYNAMIC BOUNDARY LAYER WITH INJECTION OF A MEDIUM WITH RHEOLOGICAL LAW OF O. A. LADYZHENSKAYA

A. M. Kisatov[a]

[a] *M.V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The work is devoted to the existence theorem for a unique classical solution of the Stefan problem, which arises in the study of a magnetohydrodynamic boundary layer in a viscous medium with injection of a modified medium with the rheological law of O.A. Ladyzhenskaya.

Keywords: boundary layer of fluids, viscous medium, rheological law of O.A. Ladyzhenskaya, Stefan's problem, boundary layer diffraction problem

EDN: MFIUAA
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 64–66

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕННЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ТРЕТЬЕГО РОДА

 А. И. Кожанов[1,*], А. Н. Артюшин[1,], В. В. Шубин[2,***]**

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 27.11.2021 г.
Поступило 02.12.2021 г.
После доработки 02.12.2021 г.
Принято к публикации 03.02.2022 г.

В работе изучается разрешимость начально-краевых задач для линейных параболических уравнений второго порядка с вырожденным граничным условием третьего рода. Приводятся достаточные условия существования и единственности решений. Показывается, что эффект вырождения может привести к неединственности решений в пространстве $W_2^{2,1}$.

Ключевые слова: параболические уравнения второго порядка, краевые задачи, вырожденное граничное условие третьего рода, единственность и неединственность решений, существование решений
DOI: 10.31857/S268695432202014X

П о с т а н о в к а з а д а ч и. Пусть Ω есть ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей Γ, Q есть цилиндр $\Omega\times(0,T)$ конечной высоты T, S есть его боковая граница. Третья начально-краевая задача для параболических уравнений второго порядка в общей постановке – см., например, [1, 2] – представляет собой задачу нахождения решения соответствующего уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию, а также условию

$$a(x,t)\frac{\partial u}{\partial \nu} + b(x,t)u\Big|_S = g(x,t)$$

($\frac{\partial}{\partial \nu}$ – производная по направлению конормали к границе Γ в текущей точке) на боковой поверхности S. Если в этой задаче выполняется $|a(x,t)| \ge a_0 > 0$, то, как хорошо известно, она будет корректной [1] в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$. Ситуация может принципиально измениться, если функция $a(x,t)$ обращается в нуль в каких-либо точках $\overline{S}$. Именно такая ситуация будет анализироваться в настоящей работе. Все рассуждения и выкладки будут проведены для модельного одномерного случая. Более общий случай – случай уравнений с многими пространственными переменными, уравнений с младшими коэффициентами, и т.п. – исследуется лишь с незначительными изменениями по отношению к нижеприведенному.

Итак, пусть $n = 1$, Ω есть интервал $(0, 1)$ оси Ox, Q есть прямоугольник $\Omega\times(0,T)$, $0 < T < +\infty$. Далее, пусть $f(x,t)$, $a(t)$ и $g(t)$ есть заданные функции, определенные при $x \in [0, 1]$, $t \in [0, T]$. Рассмотрим задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$u_t - u_{xx} = f(x,t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0) = 0, \quad x \in (0,1), \tag{2}$$

$$a(t)u_x(0,t) + u(0,t) = g(t), \tag{3}$$

$$u(1,t) = 0. \tag{4}$$

Всюду ниже будем считать, что функция $a(t)$ неотрицательна на отрезке $[0,T]$ (точные условия будут указаны ниже). Заметим, что условие (3) в изучаемой ситуации не позволяет получить обычные энергетические оценки [1, 3, 4] решений в пространствах С.Л. Соболева, и что условия [1], дающие оценку максимума модуля решений, здесь также не выполняются. Тем самым вопрос о существовании и единственности решений задачи (1)–(4) становится нетривиальным.

Е д и н с т в е н н о с т ь и н е е д и н с т в е н н о с т ь р е ш е н и й. Покажем, как можно по-

[1] *Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*
[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*
**E-mail: kozhanov@math.nsc.ru*
***E-mail: alexsp3@yandex.ru*
****E-mail: vlad.v.shubin@gmail.com*

строить нетривиальные решения однородной задачи (1)–(4).

Пусть $\varphi(t)$ есть определенная при $t \geq 0$ непрерывная функция такая, что $\varphi(t) > 0$ при $t > 0$, $\varphi(0) \geq 0$. Положим

$$v(x,t) = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}\frac{\varphi(s)}{\sqrt{t-s}}ds +$$

$$+\frac{1-x}{4\pi}\int_0^t e^{-\frac{(1-x)^2}{4(t-s)}}\frac{ds}{\sqrt{(t-s)^3}}\int_0^s e^{-\frac{1}{4(s-\tau)}}\frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{s-\tau}}d\tau.$$

Для функции $v(x,t)$ выполняются уравнение (1) при $f(x,t) \equiv 0$, условие (2), а также условие (4). Также можно установить, что при $t \to 0$

$$v(0,t) = -\frac{1+o(1)}{\sqrt{4\pi}}\int_0^t \frac{\varphi(s)}{\sqrt{t-s}}ds, \tag{5}$$

$$v_x(0,t) = \varphi(t)(1+o(1)). \tag{6}$$

Положим $a(t) = -\dfrac{v(0,t)}{v_x(0,t)}$. В силу (5), (6) при достаточно малых положительных t выполнено $a(t) > 0$, причем $a(0) = 0$. Таким образом, $v(x,t)$ является нетривиальным решением однородной задачи (1)–(4) для данного $a(t)$.

Далее, выбирая $\varphi(t) = t^m$, $m \geq 0$, получим, что $a(t) \sim C\sqrt{t}$ при $t \to 0$ для некоторого $C > 0$. Выбирая $\varphi(t) = e^{-\frac{1}{t^m}}$, $m > 0$ и используя метод Лапласа [1, 5], получим, что

$$\int_0^t \frac{\varphi(s)}{\sqrt{t-s}}ds = \sqrt{t}\int_0^1 e^{-\frac{1}{t^m(1-\tau)^m}}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} =$$

$$= 2\sqrt{t}\int_0^1 e^{-\frac{1}{t^m(1-s^2)^m}}ds \sim Ct^{\frac{m+1}{2}}e^{-\frac{1}{t^m}},$$

т.е. $a(t) \sim Ct^{\frac{m+1}{2}}$ при $t \to 0$. Таким образом, для любого $\alpha \geq \dfrac{1}{2}$ найдется $a(t)$ такая, что $a(t) \sim Ct^{\alpha}$ при $t \to 0$, и однородная задача (1)–(4) имеет нетривиальное решение.

Определим множество единственности решений краевой задачи (1)–(4).

Пусть $\delta \geq 0$, $\mu > 0$. Введем обозначения

$$h_{\delta,\mu}(t) = e^{\mu\int_t^T \frac{ds}{(a(s)+\delta)^2}}, \quad h_\mu(t) = h_{0,\mu}(t).$$

Для $p > 1$ определим пространство $V_{p,\mu}$:

$$V_{p,\mu} = \Bigg\{u(x,t) \in L_p(Q)\colon \int_Q \frac{h_\mu(t)}{a^2(t)}|u(x,t)|^p\,dQ < +\infty,$$

$$\int_Q h_\mu(t)|u_x(x,t)|^p\,dQ < \infty,$$

$$\int_Q a^{2(p-1)}(t)h_\mu(t)|u_{xx}(x,t)|^p\,dQ < \infty,$$

$$\int_Q a^{2(p-1)}(t)h_\mu(t)|u_t(x,t)|^p\,dQ < \infty\Bigg\}.$$

Теорема 1. *Краевая задача* (1)–(4) *не может иметь более одного решения в пространстве* $V_{p,\mu}$ *при* $p > 1$, $\mu = \dfrac{p^3}{4(p-1)}$.

Доказательство основано на анализе равенства

$$\int_0^t\int_0^1 (u_\tau - u_{xx})h_{\delta,\mu}(\tau)|u|^{p-2}\,u\,dx\,d\tau = 0,$$

в котором $\delta > 0$, с использованием интегрирования по частям и предельного перехода при $\delta \to 0$.

Перейдем к исследованию разрешимости краевой задачи (1)–(4). Уточним, что нашей целью является доказательство существования решения, имеющего все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в уравнение.

Теорема 2. *Пусть*

$$f(x,t) \in L_2(Q), \quad \int_Q h_\mu(t)f^2(x,t)dQ < \infty,$$

$$g(t) \in W_2^1(0,T),$$

$$\int_0^T \frac{h_\mu(t)}{a(t)}g^2(t)dt < \infty,$$

$$\int_0^T a(t)h_\mu(t)(g'(t))^2dt < \infty \text{ *для некоторого* } \mu > 2;$$

$$a(t) \in C[0,T] \cap C^1(0,T], \quad a(0) = 0,$$

$$a(t) > 0 \quad \text{при} \quad t > 0,$$

$$a(t)|a'(t)| \leq a_0 \quad \text{для некоторого } a_0 > 0.$$

Тогда существует единственное решение задачи (1)–(4), *принадлежащее пространству* $V_{2,\mu}$.

Доказательство этой теоремы проводится с помощью метода регуляризации с использованием априорных оценок и предельного перехода.

В целом аналогичные вышеприведенным результаты получены и для вырождающейся третьей начально-краевой задачи для гиперболических уравнений второго порядка (как в одномерном, так и в многомерном по пространственным переменным случаях).

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке (соглашение № 075-15-2019-1613 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
2. *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физике. М.: Изд-во МГУ; Наука, 2004.
3. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
4. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
5. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958.

BOUNDARY PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS WITH DEGENERATE BOUNDARY CONDITION OF THE THIRD KIND

A. I. Kozhanov[a], A. N. Artyushin[a], and V. V. Shubin[b]

[a]*S.L. Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia*

[b]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

The paper studies the solvability of initial - boundary value problems for linear parabolic equations of the second order with a degenerate boundary value condition of the third kind. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of solutions are given. It is shown that the degeneration effect can lead to non-uniqueness of solutions in the space $W_2^{2,1}$.

Keywords: second order parabolic equations, boundary value problems, degenerate boundary condition of the third kind, uniqueness and non-uniqueness of solutions, existence of solutions

EDN: VCFTXC
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 67–69

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.4

КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

 А. Н. Коненков[1,*]

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 11.01.2022 г.
Поступило 19.01.2022 г.
После доработки 19.01.2022 г.
Принято к публикации 22.01.2022 г.

Рассматривается первая краевая задача для одномерной по пространственной переменной параболической системы второго порядка в области с негладкими боковыми границами. Область может быть ограниченной или полуограниченной. Коэффициенты системы удовлетворяют условию Гёльдера и зависят только от пространственной переменной. Начальная и граничная функции предполагаются непрерывными и ограниченными. Устанавливаются существование и единственность классического решения этой задачи.

Ключевые слова: параболическая система, первая краевая задача, негладкая боковая граница, классическое решение

DOI: 10.31857/S2686954322020138

Для параболических уравнений второго порядка единственность классического решения первой краевой задачи следует из принципа максимума. Под классическим решением в области Ω здесь и далее понимается ограниченная функция из класса $C^{2,1}_{x,t}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющая в Ω уравнению, а на параболической границе области – начальному и граничному условиям. В случае, когда коэффициенты уравнения удовлетворяют только условию Гёльдера, существование классического решения первой краевой задачи с непрерывной граничной функцией устанавливается в [1, гл. 3, §4]. Доказательство проводится методом барьеров, который также использует принцип максимума. Однако для параболических систем принцип максимума, вообще говоря, не имеет места [2]. Отметим, что если старшие коэффициенты уравнения имеют производную по пространственной переменной, удовлетворяющую условию Гёльдера, то существование решения может быть установлено с помощью потенциала двойного слоя.

Однозначная разрешимость краевых задач в анизотропных пространствах Гёльдера для широкого класса параболических систем установлена в [3]. При этом рассматривались достаточно гладкие решения: все производные решения, входящие в систему, предполагались непрерывными в замыкании области.

Существование и единственность решения первой и второй краевых задач для параболических систем в ограниченной области на плоскости в классе $C^{1,0}_{x,t}(\bar{\Omega})$ получена в [4–6]. От граничной функции требовалось существование непрерывной производной порядка 1/2, обращающейся в нуль при $t = 0$. Для систем с дифференцируемыми коэффициентами в [7] доказана единственность первой краевой задачи в полуограниченной области в $C^{1,0}_{x,t}(\bar{\Omega})$. Существование решения этой задачи следует из [8]. Во всех этих работах рассматривались области с криволинейными и негладкими, вообще говоря, боковыми границами.

В настоящей работе для параболической системы с одной пространственной переменной исследуются вопросы существования и единственности классического решения первой краевой задачи с непрерывными функциями в начальном и граничном условиях. Область может быть ограниченной или полуограниченной, а ее боковая граница – негладкой.

В полосе $D = \mathbb{R} \times (0, T)$, $0 < T < \infty$, рассматривается параболический оператор

$$Lu = \partial_t u - A(x)\partial_x^2 u - B(x)\partial_x u - C(x)u, \qquad (1)$$

где $u = (u_1, \ldots, u_m)^{\mathrm{T}}$, $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ – матрицы размером $m \times m$ с элементами $a_{ij}(x)$, $b_{ij}(x)$, $c_{ij}(x)$ соответственно. Для оператора L предполагается

[1] *Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина, Рязань, Россия*
**E-mail: a.konenkov@365.rsu.edu.ru*

выполненным условие равномерной параболичности, т.е. собственные значения $\lambda_k(x)$ матрицы $A(x)$ удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re}\lambda_k(x) \ge \mu > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, m; \tag{2}$$

коэффициенты действительны, ограничены и удовлетворяют условию Гёльдера:

$$a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in C^{\alpha}(\mathbb{R}), \quad 0 < \alpha < 1. \tag{3}$$

В полосе D рассматриваем полуограниченную область

$$\Omega = \{(x,t) \in D \mid x > g(t),\, 0 < t < T\}$$

с основанием $\Omega_0 = \bar{\Omega} \cap \{t = 0\}$ и боковой границей

$$\Sigma = \{(x,t) \in D \mid x = g(t),\, 0 < t < T\},$$

где функция g удовлетворяет условию

$$g \in C^{(1+\alpha)/2}([0,T]), \quad 0 < \alpha < 1. \tag{4}$$

В области Ω рассматриваем первую краевую задачу

$$Lu = 0 \text{ в } \Omega, \quad u\big|_{\Sigma} = \psi, \quad u\big|_{t=0} = h. \tag{5}$$

Для множества $E \subset \bar{D}$ обозначим через $C(E)$ пространство непрерывных и ограниченных вектор-функций $f : E \to \mathbb{R}^m$ с нормой

$$|f|_{0,E} = \sup_{(x,t)\in E} |f(x,t)|$$

и положим $\underset{\circ}{C}(E) = \{f \in C(E) \mid f|_{t=0} = 0\}$.

Т е о р е м а 1. *Пусть для оператора L выполнены условия* (2), (3), *а для боковой границы области Ω условие* (4). *Если $\psi \in C(\Sigma)$, $h \in C(\Omega_0)$ и выполнено условие согласования $\psi(g(0)) = h(g(0))$, то существует и единственно классическое решение $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ задачи* (5). *Оно удовлетворяет оценке*

$$|u|_{0,\Omega} \le C(|\psi|_{0,\Sigma} + |h|_{0,\Omega_0}).$$

При наложенных условиях (2), (3) на коэффициенты для оператора L существует фундаментальная матрица решений $\Gamma(x,\xi,t-\tau)$ [9, гл. 1, § 3].

Для доказательства существования решения мы вводим потенциал

$$W\varphi(x,t) = \int_0^t K(x, g(\tau), t-\tau)\varphi(\tau)d\tau \tag{6}$$

с ядром

$$K(x,\xi,t) = \partial_\xi(\Gamma(x,\xi,t)A(\xi)).$$

Т е о р е м а 2. *Функция $\Gamma(x,\xi,t)A(\xi)$ дифференцируема по ξ в полупространстве $t > 0$. Функция K удовлетворяет уравнению $L_{x,t}K(x,\xi,t) = 0$ и справедливы оценки*

$$|\partial_t^l \partial_x^m K(x,\xi,t)| < C_{l,m} t^{-(m+2l+2)/2} e^{-c_{l,m}(x-\xi)^2/t}, \quad m \le 2, \quad l \ge 0, \tag{7}$$

при $t > 0$, $x, \xi \in \mathbb{R}$.

Т е о р е м а 3. *Функция $W : \varphi \to W\varphi$ отображает пространство $\underset{\circ}{C}(\Sigma)$ в $\underset{\circ}{C}(\bar{\Omega})$, причем*

$$|W\varphi|_{0,\bar{\Omega}} \le C|\varphi|_{0,\Sigma}.$$

Для плотности $\varphi \in C(\Sigma)$ справедлива формула скачка

$$W^{\pm}\varphi(g(t),t) = \pm\frac{\varphi(t)}{2} + W^0\varphi(g(t),t), \quad 0 < t \le T, \tag{8}$$

где $W^{\pm}\varphi$ — предельные значения при приближении к точке $(g(t),t)$ справа и слева, а $W^0\varphi$ — прямое значение потенциала $W\varphi$ на кривой $x = g(t)$.

Таким образом, $W\varphi$ обладает многими свойствами потенциала двойного слоя и так же, как последний, может использоваться для решения первой краевой задачи.

С помощью потенциала типа Пуассон [9, гл. 1, 4] задачу (5) можно свести к задаче с нулевой начальной функцией:

$$Lu = 0 \text{ в } \Omega,\ u|\,|_{\Sigma} = \psi,\ u\big|_{t=0} = 0. \tag{9}$$

Будем искать решение этой задачи u в виде потенциала (6) с непрерывной плотностью φ. В силу формулы скачка (8) нахождение u сводится к решению интегрального уравнения Вольтерры второго рода с ядром, имеющим слабую особенность.

Т е о р е м а 4. *Пусть для оператора L выполнены условия* (2), (3), *а для боковой границы области Ω условие* (4). *Если $\psi \in \underset{\circ}{C}(\Sigma)$, то существует и единственно классическое решение $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega) \cap \underset{\circ}{C}(\bar{\Omega})$ задачи* (9). *Оно удовлетворяет оценке*

$$|u|_{0,\Omega} \le C|\psi|_{\Sigma}.$$

Существует функция $\varphi \in \underset{\circ}{C}(\Sigma)$ такая, что $u = W\varphi$ в Ω.

Также мы рассматриваем первую краевую задачу в ограниченной области

$$\Omega = \{(x,t) \in D \mid g_1(t) < x < g_2(t), 0 < t < T\}$$

с боковыми границами

$$\Sigma_i = \{(x,t) \in D \mid x = g_i(t), 0 < t < T\}, \quad i = 1, 2,$$

где функции g_i удовлетворяют условиям

$$g_i \in C^{(1+\alpha)/2}([0,T]), \quad g_1(t) < g_2(t), \quad t \in [0,T], \quad 0 < \alpha < 1. \tag{10}$$

Теорема 5. *Пусть для оператора L выполнены условия* (2), (3)*, а для боковых границ области* Ω *условие* (10). *Если* $\psi_i \in C(\Sigma_i)$, $i = 1, 2$, $h \in C(\Omega_0)$ *и выполнены условия согласования* $\psi_1(g_1(0)) = h(g_1(0))$, $\psi_2(g_2(0)) = h(g_2(0))$, *то существует классическое решение первой краевой задачи*

$$Lu = 0 \quad в \quad \Omega, \quad u|_{\Sigma_1} = \psi_1,$$
$$u|_{\Sigma_2} = \psi_2, \quad u|_{t=0} = h.$$

Оно удовлетворяет оценке

$$|u|_{0,\Omega} \leq C(|\psi_1|_{0,\Sigma_1} + |\psi_2|_{0,\Sigma_2} + |h|_{0,\Omega_0}).$$

При $h \equiv 0$ *существуют функции* $\varphi_i \in \underset{\circ}{C}(\Sigma_i)$, $i = 1, 2$, *такие, что решение представляется в виде суммы потенциалов:* $u = W_1\varphi_1 + W_2\varphi_2$ *в* Ω, *где*

$$W_i\varphi_i(x,t) = \int_0^t K(x, g_i(\tau), t - \tau)\varphi_i(\tau)d\tau, \quad i = 1, 2.$$

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность академику РАН Е.И. Моисееву и проф. И.С. Ломову за обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Наука, 1968. 428 с.
2. *Мазья В.Г., Кресин Г.И.* О принципе максимума для сильно эллиптических и параболических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Матем. сб. 1984. Т. 125 (167). № 4. С. 458–480.
3. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Труды МИАН. 1965. Т. 83. С. 3–163.
4. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифференц. уравн. 2016. Т. 52. № 2. С. 198–208.
5. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем в плоских ограниченных областях с негладкими боковыми границами // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 494. № 5. С. 5–8.
6. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* О единственности решений первой и второй начально-краевых задач для параболических систем в ограниченных областях на плоскости // Дифференц. уравн. 2021. Т. 57. № 8. С. 625–634.
7. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* Единственность решения первой начально-краевой задачи для параболической системы с дифференцируемыми коэффициентами в полуполосе с негладкой боковой границей // Дифференц. уравн. 2021. Т. 57. № 5. С. 625–634.
8. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients // Applicable Analysis. 2021. V. 100. № 13. P. 2900–2910.
9. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. М.: Наука, 1964. 444 с.

CLASSICAL SOLUTIONS OF THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR PARABOLIC SYSTEMS ON THE PLANE

A. N. Konenkov[a]

[a] *Ryazan State University named for S. Yesenin, Ryazan, Russia*

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev The first boundary value problem for a second-order parabolic system with one spatial variable in a domain with nonsmooth lateral boundaries is considered. The domain can be bounded or semi-bounded. The coefficients of the system depend only on the spatial variable and satisfy the Holder condition. The initial and boundary functions are assumed to be continuous and bounded. The existence and uniqueness of the classical solution of this problem is established.

Keywords: parabolic system, first boundary value broblem, nonsmotth lateral boundary, classical solution

EDN: XUAFDI
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 70–75

МАТЕМАТИКА

УДК 517.922

О РАЗЛОЖЕНИЯХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ

© 2022 г. В. С. Самовол[1,*]

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным 13.04.2021 г.
Поступило 18.04.2021 г.
После доработки 28.12.2021 г.
Принято к публикации 21.01.2022 г.

Рассматривается широкий класс нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка с коэффициентами в виде сходящихся степенных рядов в окрестности начала координат. Известны методы степенной геометрии и основанные на них алгоритмы вычисления степенно-логарифмических рядов (рядов Дюлака), формально удовлетворяющих таким уравнениям. Доказывается достаточное условие сходимости таких формальных решений.

Ключевые слова: многоугольник Ньютона, продолжаемое решение, формальное решение, ряд Дюлака, сходимость

DOI: 10.31857/S2686954322020151

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье исследуются обыкновенные дифференциальные уравнения вида

$$\begin{gathered} f(x,Y) = 0, \quad f(x,Y) = \sum_{|I|=0}^{M} a_I(x) Y^I, \\ Y = (y, y', \ldots, y^{(n)}), \quad y = y(x), \quad x, y \in \mathbb{C}, \\ I = (i_0, i_1, \ldots, i_n), \quad i_0, i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{Z}_+, \qquad (1) \\ |I| = i_0 + i_1 + \ldots + i_n, \\ Y^I = y^{i_0} (y')^{i_1} \ldots (y^{(n)})^{i_n}, \end{gathered}$$

$\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел,

функции $a_I(x)$ могут быть представлены в виде равномерно и абсолютно сходящихся в окрестности точки $x = 0$ степенных рядов

$$\begin{gathered} a_I(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{Im} x^{p_{Im}}, \quad a_{Im}, p_{Im} = \text{const}, \\ a_{Im} \in \mathbb{C}, \quad p_{Im} \in \mathbb{R}, \qquad (2) \\ p_{Im} < p_{I(m+1)}, \quad \lim_{m\to\infty} p_{Im} = +\infty. \end{gathered}$$

В (2) под степенными рядами понимаются такие ряды, в которых показатели степеней вещественные, но не обязательно целые числа.

В данной работе мы считаем, что x принадлежит некоторому открытому сектору V с вершиной в нуле и произвольным раствором, меньшим 2π. Под сходимостью рядов в V-окрестности точки $x = 0$ понимается сходимость в области, являющейся пересечением окрестности точки $x = 0$ с сектором V.

В отличие от классической задачи Коши будем искать решения, которые определены в некоторой V-окрестности точки $x = 0$ (так называемые продолжаемые решения), имеют степенную асимптотику при $x \to 0$ и могут быть разложены в V-окрестности начала координат в сходящийся ряд.

В [1] предложен алгоритм вычисления формальных решений уравнения (1) в виде рядов (степенных или степенно-логарифмических) в случае, когда функции $a_I(x)$ являются суммами степенных мономов. Там же был поставлен вопрос о сходимости этих рядов. Для некоторых известных уравнений (уравнений Пенлеве и уравнения Риккати) эта задача была решена (см., например, [2–4]). В [1] было предложено достаточное условие сходимости степенных разложений формальных решений уравнения вида (1). Ниже это условие будет сформулировано применительно к формальным решениям уравнения (1) в виде степенно-логарифмических рядов (рядов Дюлака). Для формулировки этого условия необходимо описать процедуру вычисления первого приближения решения. Эта процедура базируется на понятии многоугольника Ньютона N уравнения (1), который представляет собой замкну-

[1] *Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия*
**E-mail: 555svs@mail.ru*

тую выпуклую оболочку элементов носителя $S(f)$ уравнения (1), т.е. точек Q_{Im}

$$Q_{Im} = (p_{Im} - |\tilde{I}|, |I|),$$
$$|\tilde{I}| = \sum_{k=1}^{n} k i_k, \quad m \in \{1, 2, \ldots\}.$$

Первые приближения являются решениями так называемых укороченных уравнений, соответствующих граням (ребрам и вершинам) указанного многоугольника (искомая функция $u = u(x)$)

$$\hat{f}_\Gamma(x,U) = 0, \quad \hat{f}_\Gamma(x,U) = \sum_{I \in N_\Gamma} a_I(x) U^I,$$
$$U = (u, u', \ldots, u^{(n)}), \quad U^I = u^{i_0}(u')^{i_1} \ldots (u^{(n)})^{i_n}, \tag{3}$$

где N_Γ – это множество наборов I, соответствующих элементам носителя $Q_{I1} = \left(p_{I1} - |\tilde{I}|, |I|\right)$, принадлежащим выбранной грани Г. Для вычисления степенных первых приближений (степенных асимптотик) ищется решение уравнения (3) в виде $u = Ax^\alpha$, $A, \alpha = \mathrm{const}$, $A \neq 0$. В случае ребра, если дополнительно предположить, что оно является наклонным (не горизонтальным), т.е. $|I| \neq \mathrm{const}$ для всех наборов I, входящих в сумму $\hat{f}_\Gamma(x,U)$, число α определяется однозначно, а именно $a = -(1, \alpha)$, где вектор a является внешней нормалью к рассматриваемому ребру. Отметим также, что для всех точек носителя, принадлежащих данному ребру, $\beta = \alpha|I| + p_{I1} - |\tilde{I}| = \mathrm{const}$. Для вычисления параметра A в случае ребра необходимо решить алгебраическое уравнение

$$\sum_{I \in N_\Gamma} a_{I1} \mu(\alpha, I) A^{|I|} = 0,$$
$$\mu(\alpha, I) = \alpha^{i_1} (\alpha(\alpha-1))^{i_2} \ldots (\alpha(\alpha-1) \ldots (\alpha - n + 1))^{i_n}.$$

В случае вершины числа α образуют в нашем случае множество корней некоторого многочлена, при этом вектор $-(1, \mathrm{Re}\,\alpha)$ должен принадлежать так называемому нормальному конусу рассматриваемой вершины, а параметр A является произвольным отличным от нуля числом (см. [1]).

Предположим теперь, что укороченное уравнение (3), соответствующее выбранной грани Г, имеет нетривиальное решение $u(x) = Ax^\alpha$, $A \neq 0$. После замены $y = u(x) + z$ уравнение (1) примет вид

$$\tilde{f}_u(x,Z) = 0, \quad \tilde{f}_u(x,Z) = f(x, U + Z),$$
$$Z = (z, z', \ldots, z^{(n)}), \quad U = (u, u', \ldots, u^{(n)}). \tag{4}$$

Рассмотрим функцию $\hat{f}_\Gamma(x, U + \tilde{Z})$, $\tilde{Z} = (z_0, \ldots, z_n)$, определенную в (3), как многочлен по $\tilde{Z}$ с нулевым свободным членом (см. (3)). Выделим в этом многочлене его линейную часть

$$g_{\Gamma,u}(x, \tilde{Z}) = x^\gamma \sum_{k=0}^{n} b_k x^k z_k,$$

где $\gamma = \beta - \alpha$, $b_0, \ldots, b_n$ — постоянные (зависящие от Г и u). Отметим, что величины b_k, $k = 0, \ldots, n$, можно определить как частные производные многочлена $\hat{f}_\Gamma(x, U + \tilde{Z})$ по переменной z_k, вычисленные при $z_j = 0$, $j = 0, \ldots, n$, $x = 1$. Для представления величин b_k, $k = 0, \ldots, n$, в явном виде могут быть использованы формулы

$$b_k = \sum_{I \in N_\Gamma} a_{I1} A^{|I|-1} \mu_{Ik0} \mu_{Ik1} \ldots \mu_{Ikn}, \quad k = 0, \ldots, n,$$
$$\mu_{I00} = i_0, \quad \mu_{Ik0} = 1 \quad \text{при} \quad k \neq 0,$$

при $1 \le j \le n$, $j \neq k$ $\mu_{Ikj} = (\alpha(\alpha-1) \ldots (\alpha - j + 1))^{i_j}$,

при $1 \le k \le n$ $\mu_{Ikk} = i_k (\alpha(\alpha-1) \ldots (\alpha - k + 1))^{i_k - 1}$, при $i_k \neq 0$, $\mu_{Ikk} = 0$

при $i_k = 0$,

везде полагаем, что $0^0 = 1$.

Запишем уравнение (4) в виде

$$\tilde{\tilde{f}}_u(x,Z) = 0, \quad \tilde{\tilde{f}}_u(x,Z) = x^{-\gamma} \tilde{f}_u(x,Z) =$$
$$= L_{\Gamma,u}(x) z + h_{\Gamma,u}(x,Z), \tag{5}$$
$$L_{\Gamma,u}(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \frac{d^k}{dx^k}.$$

Далее рассмотрим невырожденный случай, когда $|b_0| + \ldots + |b_n| \neq 0$. В этом случае носителем $S(L_{\Gamma,u}(x) z)$ является точка (0, 1), являющаяся вершиной многоугольника $N(\tilde{\tilde{f}}_u(x,Z))$, и среди точек носителя $S(h_{\Gamma,u}(x,Z))$ нет точки (0, 1).

Нашей целью было приведение исходного уравнения в невырожденном случае к виду (5), что всегда возможно. В случае, если исходное уравнение уже имеет указанный вид, первое приближение может быть не степенным, а степенно-логарифмическим (см. следующий раздел).

Условие сходимости формального решения уравнения (1), первое приближение которого описано выше, состоит в том, что порядок дифференциального оператора $L_{\Gamma,u}(x)$ равен порядку исходного уравнения, т.е. $b_n \neq 0$. Это утверждение для степенных разложений было сформулировано в [1, теорема 3.4]. Соответствующее доказательство для разложений в виде степенных рядов с постоянными коэффициентами в случае, когда функции $a_I(x)$ являются конечными суммами степенных мономов, было дано в [5]. Для алгебраического ОДУ аналогичное утверждение в несколько обобщенном виде было предложено в [6] для разложений в виде рядов Дюлака с неотрицательными целыми степенями. Смысл обобщения, представленного в [6], состоит в том, оно включает случай, когда исходная и некоторое конечное число следующих граней многоугольника Ньютона, соответствующих членам разложения, являются вырожденными (т.е. соответствующие операторы $L_{\Gamma,u}(x)$ тривиальны). При этом условие сходимости означает, что в процессе последовательного вычисления элементов формального решения алгебраического ОДУ на некотором шаге появится грань многоугольника Ньютона, для которой соответствующий линейный дифференциальный оператор $L_{\Gamma,u}(x)$ будет нетривиален и его порядок будет равен порядку уравнения. Таким образом, равенство порядков оператора $L_{\Gamma,u}(x)$ и исходного уравнения является базовым условием сходимости разложений формальных решений. В нашей работе мы покажем, что это условие является достаточным условием сходимости степенно-логарифмических разложений решений уравнения (1) (разложений в виде рядов Дюлака с комплексными степенями).

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

В невырожденном случае уравнение (5) можно записать в следующем виде:

$$L_{\Gamma,u}(x)z = F(x,Z), \tag{6}$$

где

$$Z = (z, z', \ldots, z^{(n)}),$$
$$L_{\Gamma,u}(x) = b_0 + b_1 x\frac{d}{dx} + \ldots + b_n x^n \frac{d^n}{dx^n},$$
$$|b_0| + \ldots + |b_n| \neq 0,$$
$$F(x,Z) = \sum_{|I|=0}^{M} f_I(x)Z^I, \quad f_I(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{Im}x^{p_{Im}},$$
$$\operatorname{Re} p_{Im} \leq \operatorname{Re} p_{I(m+1)}, \quad \lim_{m\to\infty} \operatorname{Re} p_{Im} = +\infty,$$
$$F(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m x^{p_m},$$
$$\operatorname{Re} p_m \leq \operatorname{Re} p_{m+1}, \quad \operatorname{Re} p_1 > \operatorname{Re}\alpha.$$

Отметим, что в (6) числа p_{Im} в случае ребра вещественны, а в случае вершины могут быть комплексными. Будем считать уравнение (6) неоднородным, т.е. $c_1 \neq 0$ (в обратном случае функция $y(x) = Ax^\alpha$ уже является решением исходного уравнения). Точки $Q_1 = (0,1)$, $Q_2 = (\operatorname{Re} p_1, 0)$ являются вершинами многоугольника Ньютона уравнения (6), при этом ребро $[Q_1, Q_2]$ принадлежит его левой границе. Носителем $S\left(L_{\Gamma,u}(x)z\right)$ является точка (0, 1), при этом в уравнении (6) среди точек носителя $S(F(x,Z))$ нет точки (0, 1) (аналогичное условие выполняется в уравнении (5)). В предыдущем разделе отмечалось, что в невырожденном случае исходное уравнение (1) всегда может быть приведено к виду (6). Все ряды в (6) равномерно и абсолютно сходятся в некоторой V-окрестности нуля.

Т е о р е м а. *Если в уравнении (6) выполняется условие $b_n \neq 0$, то данное уравнение имеет продолжаемое решение в виде ряда Дюлака*

$$z = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(\ln x)x^{s_m}, \quad s_m \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}s_m \leq \operatorname{Re}s_{m+1}, \qquad s_1 = p_1, \quad \lim_{m\to\infty}\operatorname{Re}s_m = +\infty, \tag{7}$$

$g_m(\ln x)$ *— многочлены от* $\ln x$. *Данный ряд абсолютно и равномерно сходится в некоторой V-окрестности точки $x = 0$.*

Существование у уравнения (6) формального решения вида (7) установлено в [1]. В нашей теореме утверждается сходимость указанного ряда при условии, что $b_n \neq 0$. Приведем основные элементы доказательства теоремы.

С помощью преобразования

$$z = z_1 + \sum_{1\leq i\leq K} \tilde{g}_i(\ln x)x^{\tilde{s}_i},$$
$$\tilde{s}_i \in \mathbb{C}, \quad \tilde{g}_i(\ln x) \text{ – многочлены от } \ln x,$$

уравнение (6) преобразуется к виду, который отличается от (6) тем, что c_{Im} — не константы, а многочлены от $\ln x$ (степени которых в совокупности ограничены сверху некоторым числом), и в некоторой V-окрестности нуля выполняется оценка $\|F(x,0)\| \leq D|x|^q$, где число $q > 0$ можно выбрать сколь угодно большим (под нормой $\|\nu\|$ абсолютно сходящегося ряда $\nu = \sum_{i=1}^{\infty}\nu_i$ понимается $\sum_{i=1}^{\infty}|\nu_i|$). Считаем, что для преобразованного уравнения (6) данное условие уже выполнено и решение этого уравнения ищем в виде суммы ряда $z_1 = \sum_{m=1}^{\infty} u_m$, где функции $u_m = u_m(x)$ являются решениями следующих уравнений:

$$L_{\Gamma,u}(x)u_1 = F_1(x), \quad F_1(x) = F(x,0), \tag{8}$$

$$L_{\Gamma,u}(x)u_{m+1} = F_{m+1}(x),$$
$$F_{m+1}(x) = F(x,H_m) - F(x,H_{m-1}),$$
$$H_0 = (0,\ldots,0), \quad H_m = (h_m, h_m', \ldots, h_m^{(n)}), \tag{9}$$
$$h_m = \sum_{1\leq i\leq m} u_i, \; m = 1,2,\ldots$$

Функции в правых частях данных уравнений являются степенно-логарифмическими рядами, вследствие чего решения уравнений представляются в виде степенно-логарифмических разложений. Рассмотрим вопрос о сходимости этих разложений.

Поскольку ребро, соединяющее вершины $Q_1 = (0, 1)$ и $Q_2 = (\operatorname{Re} p_1, 0)$, принадлежит левой границе многоугольника Ньютона уравнения (6), то для каждого набора $I : 1 \le |I| \le M$ верно неравенство $\operatorname{Re} p_{I1} > \operatorname{Re} p_1(1 - |I|) + |\tilde{I}|$. Следовательно, за счет некоторого уменьшения чисел $\operatorname{Re} p_1$ и $\operatorname{Re} p_{I1}$ можно считать, что в некоторой V-окрестности нуля W выполняются условия

$$\begin{gathered} \|F(x,0)\| \le D|x|^{\operatorname{Re} p_1}, \quad |f_I(x)| \le D|x|^{\operatorname{Re} p_{I1}}, \\ \operatorname{Re} p_1 > q, \quad x \in W, \\ \operatorname{Re} p_{I1} \ge \operatorname{Re} p_1 (1 - |I|) + |\tilde{I}| + \delta, \\ 1 \le |I| \le M, \quad D, \delta = \text{const} > 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$L(x)v = h(x), \tag{11}$$

где $L(x) = a_0 + a_1 x \dfrac{d}{dx} + \ldots + a_l x^l \dfrac{d}{dx^l}$, $a_l \ne 0$, $h(x)$ – функция, имеющая вид степенного ряда по x, коэффициентами которого являются многочлены от $\ln x$, степени которых в совокупности ограничены некоторым числом, $\|h(x)\| \le C|x|^q$, C, $q = \text{const} > 0$, $x \in W$. Справедлива следующая

Л е м м а. *Существует такое число q_0, зависящее только от параметров оператора $L(x)$, что если $q > q_0$, то уравнение* (11) *имеет решение $v = v(x)$ в виде степенного ряда по x, коэффициентами которого являются многочлены от $\ln x$ (степени которых в совокупности ограничены некоторым числом), и для этого решения выполняются оценки*

$$\begin{gathered} \|v^{(j)}(x)\| \le BC|x|^{q-j}, \quad B = \text{const} > 0, \\ x \in W, \quad j = 0, 1, \ldots, l, \end{gathered} \tag{12}$$

причем величина B не зависит от q, а зависит только от параметров оператора $L(x)$.

Ниже под решениями уравнений вида (11) будем подразумевать решения указанного в лемме вида.

З а м е ч а н и е. Для производных $v^{(j)}(x)$ порядка $j > l$ оценки вида (12) также могут выполняться, но величина B уже будет зависеть от q, примером чему служат оператор $L(x) = 1$ и функции $v(x) = h(x) = x^q$.

Если оператор $L_{\Gamma,u}(x)$ имеет порядок, равный n (т.е. $b_n \ne 0$), то из (10) и из приведенной выше леммы следует существование такого решения $u_1(x)$ уравнения (8), для которого выполняются оценки

$$\begin{gathered} \left\|u_1^{(j)}(x)\right\| \le B_1 D|x|^{\operatorname{Re} p_1 - j}, \quad B_1 = \text{const} > 0, \\ x \in W, \quad j = 0, 1, \ldots, n, \end{gathered}$$

где величина B_1 не зависит от $\operatorname{Re} p_1$, а зависит только от параметров оператора $L_{\Gamma,u}(x)$.

В правую часть уравнения (9) при $m = K + 1$ входят функции $u_i^{(j)}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, K$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Предположим, что при некотором $r > 0$, $r^\delta \le \dfrac{1}{4}$, для этих функций имеют место оценки

$$\begin{gathered} \|u_i^{(j)}(x)\| \le B_1 D|x|^{\operatorname{Re} p_1 - j + (i-1)\delta_1}, \\ \delta_1 = \delta/2, \quad x \in W, \quad |x| \le r, \\ i = 1, \ldots, K, \quad j = 0, 1, \ldots, n. \end{gathered}$$

Тогда для функции $F_{K+1}(x)$ в (9) при $x \in W$, $|x| \le r$, будет выполняться оценка

$$\|F_{K+1}(x)\| \le DM\tilde{M}(4B_1 D)^M |x|^{\operatorname{Re} p_1 + (K-1)\delta_1 + \delta}.$$

Здесь $\tilde{M}$ – число наборов I, для которых $1 \le |I| \le M$.

Выберем число $r > 0$ таким, чтобы выполнялись неравенства

$$\tilde{M}M(4B_1 D)^M r^{\delta_1} \le 1, \quad r^{\delta_1} \le \frac{1}{2}.$$

Тогда для функции $F_{K+1}(x)$ при $x \in W$, $|x| \le r$ будет выполняться оценка

$$\|F_{K+1}(x)\| \le D|x|^{\operatorname{Re} p_1 + K\delta_1}$$

и согласно лемме уравнение (9) при $m = K + 1$ имеет такое решение $u_{K+1}(x)$, что

$$\begin{gathered} \left\|u_{K+1}^{(j)}(x)\right\| \le B_1 D|x|^{\operatorname{Re} p_1 - j + K\delta_1}, \\ x \in W, \quad |x| \le r, \quad j = 0, 1, \ldots, n. \end{gathered}$$

Следовательно, при всех $m \ge 1$, $j = 0, 1, \ldots, n$, для решений $u_m(x)$ уравнений (8) и (9) имеют место оценки

$$\|u_m^{(j)}(x)\| \le B_1 D|x|^{\operatorname{Re} p_1 - j + (m-1)\delta_1}, \quad x \in W, \quad |x| \le r. \tag{13}$$

Из этого следует абсолютная и равномерная сходимость в некоторой V-окрестности нуля рядов $z_1^{(j)} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} u_m^{(j)}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, что завершает доказательство теоремы.

Таким образом, если многоугольник Ньютона уравнения (1) имеет невырожденную грань и соответствующее ей укороченное уравнение (3) имеет нетривиальное решение $u = Ax^\alpha$, то при условии теоремы уравнение (1) имеет продолжаемое решение, обладающее указанной степенной асимптотикой и сходящимся степенно-логарифмическим разложением.

Отметим, что если в (6) порядок l нетривиального оператора $L_{\Gamma,u}(x)$ меньше n (т.е. $b_n = 0$), то в правые части уравнений (9) входят производные функций $u_i(x)$, $1 \le i \le m$ порядка большего, чем l. Согласно замечанию к лемме, в оценках вида (12) для этих производных величина B, вообще говоря, зависит от q и растет вместе с ростом числа q. Это обстоятельство приводит в общем случае к нарушению оценок (13) и к расходимости ряда $z_1 = \sum_{m=1}^{\infty} u_m$. Иллюстрацией здесь может служить уравнение, рассмотренное в [7] Эйлером:

$$y = x + x^2 y'. \qquad (14)$$

Данное уравнение имеет вид (6), оператор $L_{\Gamma,u}(x) = 1$, т.е. $b_0 = 1$, $b_1 = 0$ и условие теоремы не выполняется. Функции $u_m(x)$ (см. (8), (9)) имеют вид: $u_1 = x$, $u_m = (m-1)!x^m$, $m \ge 2$. Уравнение (11) здесь имеет вид $u_m(x) = (m-1)!x^m$, при этом $u_m'(x) = m!x^{m-1}$. Множитель, аналогичный величине B в (12), здесь равен m и, следовательно, оценка (12) не выполняется при $j = 1$ (т.е. не распространяется на функции $u_m'(x)$, $m \ge 2$). В результате ряд $y = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x)$, являющийся формальным решением уравнения (14), расходится.

3. ПРИМЕР УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ

Рассмотрим уравнение Абеля первого рода в нормальной форме:

$$y' + y^3 + cx^p = 0. \qquad (15)$$

Носитель левой части уравнения состоит из трех точек $Q = (-1, 1)$, $Q_1 = (p, 0)$, $Q_2 = (0, 3)$. При $p > -3/2$ их выпуклая оболочка (многоугольник Ньютона) – это треугольник Γ с вершинами Q, Q_1, Q_2 и ребрами $\Gamma_1 = [Q, Q_1]$, $\Gamma_2 = [Q, Q_2]$, $\Gamma_3 = [Q_1, Q_2]$. Левая граница треугольника состоит из указанных трех вершин и двух ребер Γ_1, Γ_2.

Рассмотрим ребро Γ_1. Записывая уравнение (15) в виде

$$L(x)y = F(x, y), \quad L(x) = x\frac{d}{dx},$$
$$F(x, y) = -xy^3 - cx^{p+1},$$

получаем уравнение вида (6), для которого выполнены условия теоремы ($b_1 = 1$). Интегрирование соответствующих уравнений (8) и (9) позволяет получить решение уравнения (15) в виде степенно-логарифмического ряда. Согласно нашей теореме этот ряд будет абсолютно и равномерно сходящимся в некоторой V-окрестности точки $x = 0$. Не ставя целью вычисление явного вида этого ряда, отметим лишь, что при $p > -1$ указанный ряд будет степенным, при $p = -1$ – степенно-логарифмическим, а при $-3/2 < p < -1$ данный ряд (в зависимости от параметра p) может быть как степенным, так и степенно-логарифмическим.

Рассмотрим ребро Γ_2 при $p > -3/2$. Функции $v = v_{1,2}(x) = \frac{\pm 1}{\sqrt{2x}}$ являются решениями укороченного уравнения $v' + v^3 = 0$, соответствующего данному ребру. После замены $y = v_{1,2}(x) + z$ уравнение (15) можем записать в виде (6)

$$L_{\Gamma_2,v}(x)z = F(x, z), \quad L_{\Gamma_2,v}(x) = x\frac{d}{dx} + \frac{3}{2},$$
$$F(x, z) = -3v_{1,2}(x)xz^2 - xz^3 - cx^{p+1}.$$

Условия теоремы здесь выполнены ($b_1 = 1$) и, следовательно, для каждой из функций $v_{1,2}(x)$ данное уравнение имеет решения в виде абсолютно и равномерно сходящихся в некоторой V-окрестности точки $x = 0$ рядов $z_{1,2}(x)$ вида (7). Интегрирование соответствующих уравнений (8) и (9) с учетом неравенства $p > -5/2$ показывает, что указанные ряды $z_{1,2}(x)$ будут степенными. Соответственно, уравнение (15) будет иметь решения $y_{1,2}(x) = v_{1,2}(x) + z_{1,2}(x)$ в виде степенных рядов, абсолютно и равномерно сходящихся в некоторой V-окрестности точки $x = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брюно А.Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // УМН. 2004. Т. 59. № 3 (357). С. 31–80.
2. *Брюно А.Д., Парусникова А.В.* Разложения решений пятого уравнения Пенлеве в окрестности его неособой точки // ДАН. 2012. Т. 442. С. 583–588.
3. *Самовол В.С.* О разложениях решений уравнения Риккати в сходящиеся ряды // Математические заметки. 2019. Т. 105. Вып. 4. С. 603–615.
4. *Самовол В.С.* Об асимптотических разложениях решений уравнения Риккати // ДАН. 2020. Т. 490. С. 59–62.
5. *Брюно А.Д., Горючкина И.В.* Сходимость степенных разложений решений ОДУ. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. № 94. 2013. 16 с.
6. *Гонцов Р.Р., Горючкина И.В.* О сходимости формальных рядов Дюлака, удовлетворяющих алгебраическому ОДУ // Математический сборник. 2019. Т. 210. № 9. С. 3–18.
7. *Euler L.* De seriebus divergentibus // Opera omnia, 1754. ser. I. V. 14. № 247. P. 585–617.

ON CONVERGENT-SERIES EXPANSIONS FOR SOLUTIONS OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

V. S. Samovol[a]

[a] *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

We consider a large class of nonlinear ordinary differential equations of arbitrary order with coefficients in the form of power series that converge in a neighbourhood of the origin. There are known power-geometry methods and algorithms based on them for the computation of power-logarithmic series (Dulac series) that formally satisfy such equations. We prove a sufficient condition for the convergence of such formal solutions.

Keywords: Newton polygon, continuable solution, formal solution, Dulac series, convergence

EDN: EOBMET
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 76–82

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ОБОБЩЕННЫМ ЯДРОМ КОШИ

 А. П. Солдатов[1,2,*]

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 27.02.2021 г.
Поступило 02.03.2021 г.
После доработки 02.03.2021 г.
Принято к публикации 04.02.2022 г.

Рассматриваются сингулярные интегральные операторы на кусочно-гладкой кривой в весовых лебеговых пространствах с кусочно-непрерывными матричными коэффициентами. В отличие от классического случая сингулярные интегралы определяются обобщенными ядрами Коши, возникающими как параметрикс эллиптических систем первого порядка на плоскости. Получен критерий фредгольмовости этих операторов и дана формула их индекса.

Ключевые слова: сингулярные интегральные операторы, кусочно-ляпуновская кривая, обобщенные ядра Коши, фредгольмовость, формула индекса, весовые лебеговые пространства, эллиптические системы первого порядка

DOI: 10.31857/S2686954322020163

В весовом L^p-пространстве l-вектор-функций φ, заданных на кусочно-гладкой ориентируемой кривой Γ, рассмотрим сингулярный интегральный оператор Коши

$$(K\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in \Gamma.$$

Вместе с операторами умножения на кусочно-непрерывные $(l \times l)$-матрицы-функции a, b он определяет классический сингулярный оператор вида

$$2N = a(1 + K) + b(1 - K), \tag{1}$$

где 1 означает единичный оператор. Теории фредгольмовой разрешимости этих операторов посвящена обширная литература. В скалярном случае $l = 1$ итог этой теории подведен в известных монографиях Н.И. Мусхелишвили [1], Ф.Д. Гахова [2] (в весовых гельдеровых пространствах) и Б.В. Хведелидзе [3], И.И. Данилюка [4] (в весовых лебеговых пространствах).

В векторном случае $l > 1$ для произвольной кусочно-гладкой кривой развитые методы встречали определенные затруднения, связанные с некомпактностью интегральных операторов вида $aK - Ka$ и $K^2 - 1$, которые определяются ядрами, приближенно однородных степени -1 относительно расстояний до узлов кривой.

Теория фредгольмовой разрешимости операторов минимальной алгебры, порожденной операторами a и K, построена в монографии И.Ц. Гохберга и Н.И. Крупника [5]. В основе лежал локальный принцип, разработанный И.Б. Симоненко [6]. Другой подход, основанный на привлечении интегральных операторов с ядрами, приближенно однородных степени -1 относительно расстояний до узлов кривой, был предложен в работах Р.В. Дудучава [7] и автора [8]. Современное состояние теории изложено в монографии С.Г. Михлина и С. Пресдорфа [9].

Пусть $(l \times l)$-матрица-функция $J(t)$ непрерывна по Гёльдеру на кривой Γ, причем ее собственные значения лежат в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\nu > 0$ в каждой точке кривой. Удобно с комплексным числом $z = x + iy$ связать матрицу $z_{J(t)} = x1 + yJ(t)$, где 1 означает единичную $(l \times l)$-матрицу. Аналогичный смысл имеет обозначение $dz_{J(t)} = dx1 + J(t)dy$ по отношению к комплексному дифференциалу $dz = dx + idy$. Заметим, что при $z \neq 0$ матрица $z_{J(t)}$ обратима и обратная матрица $z_{J(t)}^{-1}$ однородна степени -1 по переменной z.

[1] *Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Национальный исследовательский университет МЭИ, Академии наук Республики Саха, Якутия, Россия*
******E-mail: soldatov48@gmail.com*

В этих обозначениях сингулярный оператор с обобщенным ядром Коши определяется формулой

$$[K_{(J)}\varphi](t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}(t-t_0)^{-1}_{J(t)}dt_{J(t)}\varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma, \quad (2)$$

где $(l \times l)$-матричное выражение поставлено впереди l-вектора и действует на него по обычному правилу.

Ядро этого типа возникает в связи с тем, что матрица-функция $X(z,t) = z^{-1}_{J(t)}$ по переменной $z = x + iy$ служит параметриксом для эллиптической системы первого порядка

$$\frac{\partial U}{\partial y} - J(z)\frac{\partial U}{\partial x} = F(z), \quad z \in D.$$

Соответственно аналогичные (2) обобщенные интегралы типа Коши

$$\phi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}(t-z)^{-1}_{J(t)}dt_{J(t)}\varphi(t), \quad z \notin \Gamma, \quad (3)$$

можно использовать для исследования краевых задач для этих систем [10]. Вопросы ограниченности оператора $K_{(J)}$ в весовых пространствах и соответствующие граничные свойства интегралов типа Коши (3) подробно были изучены в [11].

Основная цель данного сообщения – получить критерий фредгольмовости и формулу индекса для аналогичных (1) сингулярных операторов

$$2N = a\left(1 + K_{(J)}\right) + b\left(1 - K_{(J)}\right), \quad (4)$$

определяемых обобщенным оператором Коши $K_{(J)}$.

Предварительно остановимся на обозначениях, связанных с кусочно-гладкой кривой. По определению под ней понимается объединение конечного числа гладких дуг, которые попарно могут пересекаться только по своим концам. В круге $|z - \tau| \le \varrho$ с центром в точке $\tau \in \Gamma$ достаточно малого радиуса ϱ кривая Γ распадается на конечное число гладких дуг $G_{\tau,j}$, $1 \le j \le m_\tau$, с общим концом в точке τ. Число ϱ можно выбрать столь малым, что каждая из дуг радиальна в том смысле, что при $0 < r \le \varrho$ окружность $|z - \tau| = r$ пересекает ее (и при том некасательно) в единственной точке. Выбирая r в качестве параметра, в результате получаем гладкую параметризацию дуги $G_{\tau,j}$ вида

$$\gamma_{\tau,j}(r) - \tau = re^{i\theta_{\tau,j}(r)}, \quad 0 < r \le \varrho, \quad (5)$$

где вещественная функция $\theta(r)$ непрерывно дифференцируема на полуоткрытом интервале $(0,\varrho]$ и $\theta(r) \to \theta(0)$, $r\theta'(r) \to 0$ при $r \to 0$. В частности, $|\gamma'(0)| = 1$ и число $\theta(0)$ есть аргумент $\arg\gamma'(0)$ единичного касательного вектора $\gamma'(0)$. Эту параметризацию также называем радиальной.

Радиальные дуги $G_{\tau,j}$ называем концевыми, они разбивают круг $\{|z - \tau| \le \varrho\}$ на n_τ криволинейных секторов $S_{\tau,j}$, $1 \le j \le m_\tau$. Если раствор одного из них равен нулю (т.е. его боковые стороны касаются в точке τ), то τ называем точкой возврата кривой Γ. При $m_\tau = 1$ криволинейный сектор S_τ представляет собой круг с разрезом (вдоль концевой дуги), его раствор, очевидно, равен 2π. Если $m_\tau = 2$ и растворы обоих секторов $S_{\tau,1}$ и $S_{\tau,2}$ равны π, то обе концевые дуги составляют гладкую дугу. Точки τ с этим свойством называем внутренними точками кривой Γ. Точки кривой, не являющиеся внутренними, называются угловыми, их число, очевидно, конечно.

Пусть конечное множество F содержит все угловые точки кривой Γ. Тогда кривая $\Gamma \backslash F$ является гладкой и каждая ее связная компонента гомеоморфна либо открытому интервалу прямой, либо окружности. Эти связные компоненты, дополненные концами в случае дуг, обозначим Γ_j, $1 \le j \le n$. При каждом j кривая Γ_j является либо гладкой дугой (разомкнутой или сомкнутой), либо простым гладким контуром. Для определенности первые m компонент считаем дугами, так что $\sum_\tau m_\tau = 2m$. Каждая кривая Γ_j определенным образом ориентирована, по отношению к которой и понимается криволинейный интеграл (2). Число ϱ в (5) выберем единым для всех точек $\tau \in F$, предполагая, что круги $|z-\tau| \le \varrho$ попарно не пересекаются. Тогда все концевые дуги $G_{\tau,j}$, $1 \le j \le m_\tau$, $\tau \in F$, могут попарно пересекаться только в точках $\tau \in F$. Объединение G_F всех концевых дуг является окрестностью множества F на кривой. С каждым узлом τ можно связать сигнатуру ориентации $\varepsilon_{\tau,j}$, принимающую значение 1, если дуга $G_{\tau,j}$ выходит из точки τ и значение –1, если эта дуга входит в τ.

Введем класс $C(\Gamma, F)$ кусочно-непрерывных $(l \times l)$-матриц-функций, непрерывных вне F и допускающих односторонние пределы в точках $\tau \in F$. Более точно, его элементы $a(t)$ на каждой концевой дуге $G_{\tau,j}$ имеют предел в точке τ, который обозначим $a_{\tau,j}$. Если матрица-функция a обратима, т.е. $\det a(t) \ne 0$ всюду на $\Gamma \backslash F$, включая ее односторонние предельные значения, то можно ввести комплексное число

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma,F}a = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}[\ln\det a]_{\Gamma_j},$$

где квадратные скобки означают приращения непрерывных ветвей логарифма на компонентах Γ_j, взятые в соответствии с их ориентацией. Это число называем индексом Коши матрицы-функции a. В случае $F = \emptyset$ кривая Γ является (составным) гладким контуром и это число целое. В общем случае

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma,F} a = \\ = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{\tau,j} \varepsilon_{\tau,j} \ln \det a_{\tau,j} + \text{целое число}. \qquad (6)$$

Условимся под весовым порядком понимать семейство $\lambda = (\lambda_\tau, \tau \in F)$ вещественных чисел. Соответственно функцию вида

$$\rho_\lambda(t) = \prod_{\tau\in F} |t-\tau|^{\lambda_\tau}, \quad t \in \Gamma, \qquad (7)$$

называем весовой функцией порядка λ. Весовые порядки, которые на всех точках $\tau \in F$ принимают одно и то же значение, отождествляются с вещественными числами.

По определению весовое пространство $L_0^p(\Gamma, F)$ состоит из измеримых комплекснозначных функций $\varphi(t)$ на кривой Γ, для которых $\rho_{-1/p}\varphi \in L^p(\Gamma)$. Относительно соответствующей нормы

$$|\varphi| = \left(\int_\Gamma \left|\rho_\lambda^{-1}(t)\varphi(t)\right|^p \frac{d_1 t}{\rho_1(t)}\right)^{1/p}$$

это пространство банахово. Здесь $d_1 t$ означает элемент длины дуги и, как обычно, две функции, отличающиеся друг от друга на множестве нулевой меры, отождествляются. Таким образом, $L_0^p(\Gamma, F)$ можно трактовать как L^p-пространство относительно меры $\rho_{-1} d_1 t$, а $L_\lambda^p(\Gamma, F)$ состоит из всех функций $\varphi = \rho_\lambda \varphi_0$, $\varphi_0 \in L_0^p$ с перенесенной нормой. Конечно, при $F = \emptyset$ имеем обычное пространство $L^p(\Gamma)$. Это пространство возникает и когда все $\lambda_\tau = -1/p$. Очевидно, семейство банаховых пространств (L_λ^p) монотонно убывает (в смысле вложения) по всем параметрам λ_τ и p.

Принятое определение весовых пространств отличается от более распространенного определения весового пространства $L^p(\Gamma, \rho_\alpha)$ (см., например, [3, 9]), которое задается нормой

$$|\varphi| = \left(\int_\Gamma |\varphi(t)|^p \rho_\alpha(t) d_1 t\right)^{1/p}.$$

Очевидно, при $p\lambda = -\alpha - 1$ оно совпадает с L_λ^p. Одно из достоинств принятого определения весовых пространств состоит в том, что при $-1 < \lambda < 0$ пространство $L_\lambda^p(\Gamma, F)$ содержится в классе $L^1(\Gamma)$ суммируемых функций. Аналогичный факт по отношению к $L^p(\Gamma, \rho_\alpha)$ определяется условием $-1 < \alpha < p - 1$, которое зависит от p. Как показано в [11], обобщенный сингулярный оператор Коши $K_{(J)}$, а вместе с ним и оператор (4) при $-1 < \lambda < 0$ ограничены в пространстве $L_\lambda^p(\Gamma, F)$.

В дальнейшем широко будем пользоваться понятием функции от матриц [12], которое используется для степенной функции

$$f(w) = w^\zeta, \quad 0 < \arg w < 2\pi, \qquad (8)$$

с комплексным показателем ζ. Если спектр $\sigma(A)$ матрицы A не лежит на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, то определено значение $f(A) = A^\zeta$ от этой матрицы. В конкретных ситуациях обычно матрицу A приводят к блочно-диагональному виду: $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_n)$, где A_j имеет единственное собственное значение ν_j. Тогда аналогичный вид имеет и матрица $f(A)$, т.е. $T^{-1}f(A)T = \operatorname{diag}[f(A_1), \ldots, f(A_n)]$. Применительно к функции (8) матрица $f(A_j) = \nu_j^\zeta p_j(\zeta)$ с матричным многочленом

$$p_j(\zeta) = 1 + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\zeta(\zeta-1)\cdots(\zeta-k+1)}{k!}(A_j - \nu_j)^k,$$

где учтено, что матрица $A_j - \nu_j$ нильпотентна и, следовательно, $(A_j - \nu_j)^k = 0$ при $k \ge l$. Определитель этого многочлена тождественно равен единице.

В обозначениях (5) удобно положить

$$q_{\tau,j} = e^{i\theta_{\tau,j}(0)}, \quad Q_{\tau,j} = (q_{\tau,j})_{J(\tau)}. \qquad (9)$$

При $m_\tau \ge 3$ нумерацию дуг $G_{\tau,j}$ и, соответственно, векторов $q_{\tau,j}$ выберем так, чтобы при возрастании j единичные вектора $q_{\tau,j}$ обходили начало координат против часовой стрелки, так что их аргументы $\theta_{\tau,j}(0)$ можно подчинить условию $\arg q_{\tau,1} < \ldots < \arg q_{\tau,m_\tau} < 2\pi + \arg q_{\tau,1}$.

Важно заметить, что при $1 \le k$, $j \le m_\tau$, $k \ne j$, собственные значения матрицы $Q_{\tau,k}Q_{\tau,j}^{-1}$ не лежат на вещественной полуоси. В самом деле, для любого $\nu > 0$ вектор $q_{\tau,k} - \nu q_{\tau,j} \ne 0$, так что матрица $(q_{\tau,k} - \nu q_{\tau,j})_{J(\tau)} = Q_{\tau,k} - \nu Q_{\tau,j}$ обратима, а вместе с ней обратима и матрица $Q_{\tau,k}Q_{\tau,j}^{-1} - \nu$.

В терминах циклической перестановки

$$[k-1] = \begin{cases} k-1, & 2 \le k \le m_\tau, \\ m_\tau, & k = 1, \end{cases}$$

векторы $q_{\tau,k}$ и $q_{\tau,[k-1]}$ являются соседними и поворот по часовой стрелке от $q_{\tau,k}$ к $q_{\tau,[k-1]}$ осуществляется на угол $\arg(q_{\tau,k}q^{-1}_{\tau,[k-1]})$, заключенный между 0 и 2π. В частности, сумма всех этих углов равна 2π.

Пусть для краткости

$$P_{\tau,k}(\zeta) = (Q_{\tau,k}Q^{-1}_{\tau,[k-1]})^{\zeta},$$

где степенная функция определяется (8).

Л е м м а 1. *Для заданных* $x_1, \ldots, x_{m_\tau} \in \mathbb{C}^{l\times l}$ *матрица-функция*

$$x(\zeta) = e^{2\pi i\zeta}P^{-1}_{\tau,1}(\zeta)x_1P^{-1}_{\tau,2}(\zeta)x_2 \cdots P^{-1}_{\tau,n_\tau}(\zeta)x_{m_\tau} \qquad (10)$$

является многочленом и ее определитель равен произведению определителей матриц x_k, $1 \le k \le m_\tau$.

Сформулируем теперь основной результат о фредгольмовости операторов вида (4).

Т е о р е м а 1. *Пусть кусочно-ляпуновская кривая* Γ *не содержит точек возврата, матрица-функция* $J(t)$ *удовлетворяет условию Гёльдера на* Γ *и все ее собственные значения лежат в верхней полуплоскости.*

В этих предположениях оператор N *в* (4) *фредгольмов в пространстве* $L^p_\lambda(\Gamma, F)$, $-1 < \lambda < 0$, *тогда и только тогда, когда матрицы-функции* a, b *обратимы в* $C(\Gamma, F)$ *и*

$$\det[e^{2\pi i\zeta} - c_\tau(\zeta)] \ne 0; \quad \operatorname{Re}\zeta = \lambda_\tau, \quad \tau \in F,$$

где c_τ *определяется формулой* (10) *по отношению к* $x_k = (a^{-1}b)^{-\varepsilon_{\tau,k}}_{\tau,k}$.

При выполнении этих условий индекс этого оператора дается равенством

$$\operatorname{ind} N = \operatorname{Ind}_{\Gamma,F}(a^{-1}b) - \sum_{\tau\in F}\delta_\tau, \qquad (11)$$

где положено

$$\delta_\tau = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\det\left(\frac{e^{2\pi i\zeta} - c_\tau(\zeta)}{e^{2\pi i\zeta} - 1}\right)\right]^{\lambda_\tau+\infty}_{\lambda_\tau-i\infty}.$$

Заметим, что существование конечных пределов выражения в квадратных скобках при $\operatorname{Im}\zeta \to \pm\infty$ на прямой $\operatorname{Re}\zeta = \lambda_\tau$ вытекает из леммы 1. Тот факт, что правая часть равенства (11) дает целое число, является следствием (6) и леммы 1.

Аналогичный результат справедлив и для оператора $2N^1 = (1 + K_{(J)})a + (1 - K_{(J)})b$ с заменой c_τ на матрицу c^1_τ, которая определяется формулой (10) по $x_k = (ba^{-1})_{\tau,k}$.

Теорема 1 в предположении, что матрица $J(t)$ постоянна и имеет единственное собственное значение i, установлена в [8]. В классическом случае $J(t) = i$ матрица-функция c_τ постоянна и совпадает с

$$c^0_\tau = \prod_1^{m_\tau}(a^{-1}b)^{-\varepsilon_{\tau,k}}_{\tau,k}. \qquad (12)$$

В этом случае теорему 1 можно уточнить.

Т е о р е м а 2. *Пусть кусочно-ляпуновская кривая* Γ *не содержит точек возврата.*

Тогда фредгольмовость оператора $2N = a(1 + K) + b(1 - K)$ *равносильно тому, что матрицы-функции* a, b *обратимы в* $C(\Gamma, F)$ *и при каждом* τ *собственные значения матрицы* c^0_τ *в* (12) *не лежат на луче* $\arg z = 2\pi\lambda_\tau$. *При этом имеет место формула* (11) *с*

$$\delta_\tau = \sum_\nu \frac{\ln\nu}{2\pi i}, \qquad (13)$$

где сумма берется по всем собственным значениям ν *матрицы* c_τ *с учетом их кратности, причем значение* $\ln\nu$ *выбрано по условию* $2\pi\lambda_\tau < \arg\nu < 2\pi + 2\pi\lambda_\tau$.

Равенству (13) можно придать также следующую форму. Положим

$$\xi_\tau(t) = \frac{\sin[\pi t(1 + 2\lambda_\tau)]}{\sin[\pi(1 + 2\lambda_\tau)]}, \quad 0 \le t \le 1, \quad \lambda_\tau \ne -\frac{1}{2},$$

и $\xi_\tau(t) = t$ при $\lambda_\tau = -1/2$.

Л е м м а 2. *Собственные значения матрицы* c_τ *не лежат на луче* $\arg z = 2\pi\lambda_\tau$ *тогда и только тогда, когда*

$$\det[1 - \xi_\tau(t) + \xi_\tau(t)c_\tau] \ne 0, \quad 0 \le t \le 1.$$

При этом

$$\delta_\tau = \left[\frac{1}{2\pi i}\ln\det[1 - \xi_\tau(t) + \xi_\tau(t)c_\tau]\right]^1_{t=0}.$$

В этой формулировке теорема 2 установлена И.Ц. Гохбергом и Н.И. Крупником [5].

До сих пор кривая Γ была конечной, т.е. лежала внутри некоторого круга. Пусть она бесконечна и точка $z_0 \notin \Gamma$. По определению эта кривая кусочно-ляпуновская, если аналогичным свойством обладает ее образ при дробно линейном отображении $z \to 1/(z - z_0)$. Во внешности круга $|z| \ge 1/\rho$, где $\rho > 0$ достаточно мало, кривая Γ распадается на конечное число полубесконечных дуг $G_{\infty,j}$, $1 \le j \le n_\infty$, с общим концом в бесконечно удаленной точке ∞. Эти дуги также можно считать радиальными, т.е. каждая окружность $|z| = r$ при $r \ge 1/\rho$ пересекает ее (и при том некасательно) в единственной точке. Тогда аналогично (5) эти дуги описываются параметризациями

$$\gamma_{\infty,j}(r) = re^{i\theta_{\infty,j}(r)}, \quad r \ge 1/\rho, \qquad (14)$$

где вещественная функция $\theta(r)$ непрерывно дифференцируема при $r \geq 1/\rho$ и $\theta(r) \to \theta(\infty)$, $r\theta'(r) \to 0$ при $r \to \infty$. В этом легко убедиться, если заметить, что при инверсии $z \to 1/\overline{z}$ уравнение вида (5) с $\tau = 0$ переходит в уравнение (14) с указанными свойствами функции $\theta(r)$.

Таким образом, существует предел $\gamma'_{\infty,j}(\infty) = \lim\gamma'_{\infty,j}(r)$ при $r \to \infty$, аналогично (9) представляющий собой единичный вектор $q_{\infty,j}$, и его аргумент равен $\theta_{\infty,j}(\infty)$. Как и выше в случае $q_{\infty,j} = q_{\infty,k}$ при $k \neq j$ говорим, что кривая Γ имеет ∞ своей точкой возврата. Нумерацию дуг $G_{\infty,j}$ и векторов $q_{\infty,j}$ по-прежнему выбираем в порядке обхода точки $z = 0$ против часовой стрелки.

Заметим попутно, что радиальная дуга $G_{\tau,j}$ с уравнением (5) является ляпуновской тогда и только тогда, когда обе функции $\theta(r)$ и $r\theta'(r)$ удовлетворяют условию Гёльдера на отрезке $[0, \rho]$. Соответственно полубесконечная радиальная дуга с уравнением (14) является ляпуновской, если указанное требование выполняется по отношению к функции $\theta(1/r)$, $0 \leq r \leq \rho$.

Для бесконечной кривой конечное множество F выбирается аналогично предыдущему, причем в его состав включается и бесконечно удаленная точка ∞. Например, вещественная и мнимая оси образуют кусочно-гладкую кривую с $F = \{0, \infty\}$ и $m = n = 4$, причем роль полубесконечных дуг Γ_j с общими концами в точках 0 и ∞ играют полуоси. Точно также две параллельные прямые составляют кусочно-гладкую кривую с $F = \{\infty\}$ и $m = n = 2$, имеющих бесконечно удаленную точку своей точкой возврата. При этом двумя бесконечными “сомкнутыми” дугами Γ_j с общим концом ∞ служат сами прямые.

Для бесконечной кривой определение (7) весовой функции порядка λ необходимо видоизменить, полагая

$$\rho_\lambda(t) = (1 + |t|)^{\lambda_\infty} \prod_{\tau \in F,\ \tau \neq \infty} \left(\frac{|t - \tau|}{1 + |t|} \right)^{\lambda_\tau}, \quad t \in \Gamma. \tag{15}$$

По отношению к ней весовое пространство $L^p_\lambda(\Gamma, F)$ определяется совершенно аналогично предыдущему. Как и в случае конечной кривой оно рассматривается только при $p > 1$. Полученное семейство банаховых пространств по-прежнему монотонно убывает по вложению относительно параметров p и λ_τ, $\tau \neq \infty$, и монотонно возрастает по λ_∞. Как и выше, при $-1 < \lambda < 0$ функции $\varphi \in L^p_\lambda(\Gamma, F)$ суммируемы.

Пусть точка $z_0 \notin \Gamma$ и функция J^1 на конечной кривой $\Gamma^1 = \{(t - z_0)^{-1}, t \in \Gamma\}$ определяется равенством $J^1[(t - z_0)^{-1}] = J(t)$.

Т е о р е м а 3. *Пусть кусочно-ляпуновская кривая Γ бесконечна и не содержит точек возврата, матрица-функция J^1 удовлетворяет условию Гёльдера на Γ^1 и все ее собственные значения лежат в верхней полуплоскости.*

Тогда все утверждения теоремы 1 *сохраняют свою силу с той разницей, что при $\tau = \infty$ матрица c_τ определяется формулой* (10) *по отношению к $x_k = (a^{-1}b)^{\varepsilon_{\tau,k}}_{\tau,k}$ и в формуле* (11) *слагаемое δ_∞ необходимо заменить на $-\delta_\infty$.*

По отношению к классическому сингулярному оператору Коши K теорема 3 по существу не дает ничего нового, так как теорема 2 инвариантна относительно дробно-линейного преобразования, переводящего бесконечную кривую Γ на конечную кривую Γ^1.

Более точно, пусть для определенности $z_0 = 0$, так что $\Gamma^1 = \{t^{-1}, t \in \Gamma\}$. Аналогичный смысл имеют множество F^1 и концевые дуги $\Gamma^1_{\tau,j}$. Ориентация кривой Γ^1 наследуется ориентацией Γ при отображении $t \to 1/t$, так что сигнатуры ε и ε^1 совпадают, т.е. $\varepsilon^1_\tau = \varepsilon_{1/\tau}$, $\tau \in F^1$. Бесконечные концевые дуги $G_{\infty,j}$ переходят в дуги $\Gamma^1_{0,j}$ с концом $\tau = 0$. Соответственно, единичным касательным вектором в точке $\tau = 0$ служит $q^1_{0,j} = e^{-i\theta_{\infty,j}}$. В частности, если при возрастании j векторы $q_{\infty,j}$ обходят единичную окружность против часовой стрелки, то векторы $q^1_{0,j}$ обходят ее по часовой стрелке.

Очевидно, весовая подстановка

$$\varphi \to \varphi^1(t) = t^{-1}\varphi(t^{-1}) \tag{16}$$

осуществляет изоморфизм $L^p_\lambda(\Gamma, F)$ на банахово пространство $L^p_{\lambda^1}(\Gamma^1, F^1)$ с весовым порядком $\lambda^1 = (\lambda^1_\tau, \tau \in F^1)$, который связан с λ соотношением $\lambda^1_\tau = \lambda_{1/\tau}$ для $\tau \neq 0$ и $\lambda^1_0 = -\lambda_\infty - 1$. При этом условие $-1 < \lambda < 0$ сохраняется и для весового порядка λ^1.

Нетрудно видеть, что при этой подстановке $(K\varphi)^1 = K^1\varphi^1$, где K^1 означает сингулярный оператор Коши K по кривой Γ^1, так что оператор $2N = a(1 + K) + b(1 - K)$ перейдет в аналогичный оператор $2N^1 = a^1(1 + K^1) + b^1(1 - K^1)$ с коэффициентами $a^1(t) = a(1/t)$ и $b^1(t) = b^1(1/t)$. В частности, операторы N и N^1 фредгольмово эквивалентны и их индексы совпадают. В этом можно убедиться и непосредственно, применяя теорему 2 к каждому из этих операторов.

Все предыдущие результаты сохраняют свою силу и в пространствах Гёльдера с весом. Обозначим $C_0^\mu(\Gamma, F)$ пространство всех непрерывных и ограниченных на $\Gamma\backslash F$ вектор-функций φ с конечной нормой

$$|\varphi| = \sup_{t\in\Gamma}|\varphi(t)| + \sup_{t_1\neq t_2}\frac{|(\rho_\mu\varphi)(t_1) - (\rho_\mu\varphi)(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu},$$

где весовая функция ρ_μ порядка μ определяется (7) или (15) в зависимости от типа кривой Γ. Относительно данной нормы это пространство банахово и монотонно убывает относительно μ. Исходя из него, весовое пространство $C_\lambda^\mu(\Gamma, F)$ вводится аналогично L^p-случаю. Полученное семейство пространств монотонно убывает по параметрам μ и λ_τ, $\tau \neq \infty$, и монотонно возрастает по λ_∞ (в случае бесконечной кривой). Аналогичное банахово пространство $C_\lambda^{1,\mu}(\Gamma, F)$ дифференцируемых на $\Gamma\backslash F$ функций определяется условиями $\varphi \in C_\lambda^\mu$, $\varphi' \in C_{\lambda-1}^\mu$, где штрих означает производную по параметру длины дуги. Свойства всех этих пространств подробно описаны в [11].

Обозначим далее $\mathscr{C}^\nu(\Gamma, F)$ класс кусочно-непрерывных $l \times l$-матриц-функций $a \in C(\Gamma, F)$, принадлежащих $C_0^\nu(\Gamma, F)$ и удовлетворяющих условию $a(t) - a_{\tau,j} \in C_{\pm\varepsilon}^\nu(G_{\tau,j}, \tau), 1 \le j \le m_\tau, \tau \in F$, с некоторым $\varepsilon > 0$, где выбирается верхний знак для конечных точек τ и нижний знак для $\tau = \infty$. Аналогичный смысл имеет класс $\mathscr{C}^{1,\nu}(\Gamma, F)$ при замене символа C^ν на $C^{1,\nu}$.

Заметим, что на кусочно-гладкой кривой Γ единичный касательный вектор $e(t)$, $t \in \Gamma\backslash F$, направление которого согласовано с ориентацией кривой, как комплекснозначная функция кусочно-непрерывна на Γ. Рассмотрим класс кусочно-ляпуновских кривых, описываемых условием $e(t) \in \mathscr{C}^\nu(\Gamma, F)$. Заметим, что этот класс инвариантен относительно дробно-линейных преобразований плоскости.

Теорема 4. *Пусть кусочно-ляпуновская кривая* Γ *не содержит точек возврата и* $e(t) \in \mathscr{C}^\nu(\Gamma, F)$, *матрица-функция* J *принадлежит классу* $\mathscr{C}^\nu(\Gamma, F)$, *непрерывна в точках* $\tau \in F$ *и все ее собственные значения лежат в верхней полуплоскости. Пусть коэффициенты* a, b *в* (1), (4) *принадлежат классу* $\mathscr{C}^\nu(\Gamma, F)$.

Тогда теоремы 1–3 *сохраняют свою силу и по отношению к пространству* $C_\lambda^\mu(\Gamma, F)$, $-1 < \lambda < 0$, $0 < \mu < \nu$. *При этом в предположении фредгольмовости любое решение* $\varphi \in L_\lambda^p(\Gamma, F)$ *уравнения* $N\varphi = f$ *с правой частью* $f \in C_\lambda^\mu(\Gamma, F)$ *также принадлежит* $C_\lambda^\mu(\Gamma, F)$. *Если дополнительно функции* a, b, $J \in \mathscr{C}^{1,\nu}(\Gamma, F)$ *и* $f \in C_\lambda^{1,\mu}(\Gamma, F)$, *то и* $\varphi \in C_\lambda^{1,\mu}(\Gamma, F)$.

Заметим, что как и в L^p-случае аналог теоремы 2 (в терминах леммы 2) для пространств $C_\lambda^\mu(\Gamma, F)$ также хорошо известен [9]. В случае, когда матрица-функция $J(t)$ постоянна и имеет единственное собственное значение i, а кривая Γ конечна, теорема 4 установлена в [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
2. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. 3-е изд. М.: Наука, 1977.
3. *Хведелидзе Б.В.* Линейные разрывные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения // Тр. Тбил. мат. ин-та АН ГрССР, 1956. Т. 23. С. 3–158.
4. *Данилюк И.И.* Нерегулярные краевые задачи. М.: Наука, 1975.
5. *Гохберг И.Ц., Крупник Н.И.* Введение в теорию одномерных сингулярных уравнений. Кишинев: Штиинца, 1973.
6. *Симоненко И.Б.* Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений // I, Изв. АН СССР (Сер. матем.)1965. Т. 29. № 3. С. 567–586, II. Изв. АН СССР (Сер. матем.). 1965. Т. 29. № 4. С. 757–782.
7. *Дудучава Р.В.* Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики // Тр. Тбил. матем. ин-та АН ГрССР. 1979. Т. 60. С. 1–135.
8. *Солдатов А.П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М.: Высшая школа, 1991. 266 с.
9. *Mikhllin S.G., Prossdorf S.* Singular integral operators. Berlin: Akademie-Verlag and Springer-Verlag, 1986.
10. *Отелбаев М., Солдатов А.П.* Интегральные представления вектор-функций, основанные на параметриксе эллиптических систем первого порядка // ЖВМиМФ. 2021. Т. 61. № 1. С. 90–99.
11. *Солдатов А.П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи // Современная математика. Фундаментальные направления. 2017. Т. 63. С. 1–189.
12. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. Изд. 4-е. М.: Наука, 1988.

SINGULAR INTEGRAL OPERATORS WITH GENERALIZED CAUCHY KERNAL

A. P. Soldatov[a]

[a] *Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*
[b] *Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, NIU MPEI, Academy of Sciences of the Republic of Sakha (Yakutia), Russia*

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

Singular integral operators with generalized Cauchy kernels are considered on a piece-wise smooth curve. The Fredholm criterium and index formula for these operators are received in the weighted Lebegues spaces.

Keywords: Singular integral operators, generalized Cauchy kernels, weighted Lebegues spaces, Fredholm criterium, index formula

EDN: YTICDS
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 83–86

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА БИЦАДЗЕ–САМАРСКОГО

© 2022 г. О. В. Солонуха[1,2,*]

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 12.11.2021 г.
Поступило 17.11.2021 г.
После доработки 17.11.2021 г.
Принято к публикации 03.02.2022 г.

В ограниченной области рассматривается параболическое уравнение с квазилинейным оператором и нелокальными граничными условиями типа Бицадзе–Самарского. Доказана теорема существования и единственности периодического решения такой задачи.

Ключевые слова: периодическое решение, нелокальные краевые условия типа Бицадзе–Самарского, параболическое уравнение, максимально монотонный оператор, обобщенные решения

DOI: 10.31857/S2686954322020175

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелокальные краевые задачи рассматриваются с 30-х годов XX века, см. работы Т. Карлемана [1]. В 50-е годы XX-го века началось рассмотрение абстрактных нелокальных задач, см. работы М.И. Вишика [2], Ф. Браудера [3] и др. Среди нелокальных параболических задач на ограниченном множестве наиболее изучены задачи с временными нелокальностями, задачи с интегральными нелокальными членами и задачи на прямоугольнике. В данной работе рассматриваются параболические уравнения с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе–Самарского, ср. [4]. Особенностью данных нелокальных условий является то, что они заданы с помощью сдвигов по пространственным переменным в односвязной ограниченной области. Линейные эллиптические и параболические нелокальные краевые задачи типа Бицадзе–Самарского рассматривались в работах [5–10] и др. Нелинейные эллиптические дифференциальные уравнения с нелокальными краевыми условиями изучались в [11].

[1] *Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *Математический институт Российского университета дружбы народов, Москва, Россия*
******E-mai: solonukha@yandex.ru*

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей ∂Q класса C^∞ или $Q = (0,d)\times G$, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ – ограниченная область (с границей ∂G класса C^∞, если $n \geq 3$); $Q = (0,d)$ для $n = 1$. Определим цилиндр $\Omega_T := Q\times(0,T)$. Пусть $2 \leq p < \infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$, $f \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$, все функции вещественнозначные. В цилиндре Ω_T рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered}\partial_t w(x,t) - \sum_{1\leq i\leq n}\partial_i A_i(x,t,w,\nabla w) + \\ + A_0(x,t,w,\nabla w) = f(x,t) \quad ((x,t)\in\Omega_T)\end{gathered} \tag{1}$$

с нелокальными граничными условиями

$$\begin{gathered}w|_{\Gamma_{rl}^T} = \sum_{j=1}^{J_0}\gamma_{lj}^r w|_{\Gamma_{rj}^T} \quad (r\in B,\, l = J_0+1,\ldots,J), \\ w|_{\Gamma_{rl}^T} = 0 \quad (r\notin B,\, l = 1,\ldots,J),\end{gathered} \tag{2}$$

где множество $\Gamma^T = \{\Gamma_{rl}^T\}$ определено следующим образом.

Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ – конечное множество векторов h с целочисленными (или соизмеримыми) координатами. Через M обозначим аддитивную группу, порожденную множеством $\mathcal{M}$, через Q_r – открытые связные компоненты множества $Q\backslash\left(\bigcup_{h\in M}(\partial Q+h)\right)$. Множество Q_r называется подобластью. Семейство $\mathcal{R}$ всех подобластей Q_r ($r = 1, 2, \ldots$) называется разбиением области Q.

Условие 1. Пусть $\mathcal{K} = \bigcup_{h_1,h_2\in M} \{\bar{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{\cap\ [(\partial Q + h_2)\backslash(\partial Q + h_1)]}\}$ удовлетворяет условию $\text{mes}_{n-1}(\mathcal{K} \cap \partial Q) = 0$.

Обозначим через Γ_ρ открытые, связные в топологии ∂Q компоненты множества $\partial Q\backslash\mathcal{K}$. Если $(\Gamma_\rho + h) \cap \bar{Q} \neq \emptyset$ для некоторого $h \in M$, то или $\Gamma_\rho + h \subset Q$, или существует $\Gamma_r \subset \partial Q\backslash\mathcal{K}$ такое, что $\Gamma_\rho + h = \Gamma_r$, см. § 7 из [7]. Множества $\{\Gamma_\rho + h$: $\Gamma_\rho + h \subset \bar{Q}, \rho = 1,2,\ldots, h \in M\}$ могут быть разбиты на классы. $\Gamma_{\rho_1} + h_1$ и $\Gamma_{\rho_2} + h_2$ принадлежат одному классу, если

1) существует вектор $h \in M$ такой, что $\Gamma_{\rho_1} + h_1 = \Gamma_{\rho_2} + h_2 + h$;

2) для любых $\Gamma_{\rho_1} + h_1, \Gamma_{\rho_2} + h_2 \subset \partial Q$ нормали к ∂Q в точках $x \in \Gamma_{\rho_1} + h_1$ и $x - h \in \Gamma_{\rho_2} + h_2$ совпадают.

Обозначим множество $\Gamma_\rho + h$ через Γ_{rj}, где r – номер класса, j – номер элемента в классе ($1 \leq j \leq J = J(r)$). Не нарушая общности, будем считать, что $\Gamma_{r1}, \ldots, \Gamma_{rJ_0} \subset Q$, $\Gamma_{r,J_0+1}, \ldots, \Gamma_{rJ} \subset \partial Q$ ($0 \leq J_0 = J_0(r) < J = J(r)$). Как известно, см. § 7 из [7], для любого $\Gamma_{rj} \subset \partial Q$ существует подобласть Q_{sl} такая, что $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{sl}$. Более того, если $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{sl}$, то $\Gamma_{rj} \cap \partial Q_{s_1l_1} = \emptyset$ для любых $(s_1, l_1) \neq (s, l)$; и для каждого $r = 1, 2, \ldots$ существует единственный номер $s = s(r)$ такой, что $N(s) = J(r)$ и $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$ ($l = 1, \ldots, N(s)$) (с точностью до перенумеровки). Обозначим теперь $\Gamma_{rl}^T := \Gamma_{rl} \times (0, T)$.

Условие 2. Для каждой подобласти Q_{sl} ($s = 1, 2, \ldots,\ l = 1, \ldots, N(s)$) и для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $G_{sl} \subset Q_{sl}$ с границей $\partial G_{sl} \in C^1$ такое, что $\text{mes}_n(Q_{sl}\backslash G_{sl}) < \varepsilon$, $\text{mes}_{n-1}(\partial G_{sl} \Delta \partial Q_{sl}) < \varepsilon$.

$L_p(0, T; W_p^1(Q))$ – Соболевское пространство функций, интегрируемых на Ω_T в степени p вместе с первыми производными по x_i, $i = 1, \ldots, n$. Обозначим

$$L_p(0,T;W_{p,\gamma}^1(Q)) := \\ = \{w \in L_p(0,T;W_p^1(Q)) : w \text{ удовлетворяют } (2)\},$$

$$L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q)) := \\ := \{u \in L_p(0,T;W_p^1(Q)) : u|_{x\in\partial Q} = 0 \text{ для п.в. } t \in (0,T)\}.$$

Периодические по t решения (1), (2) должны удовлетворять условию

$$w(x,0) = w(x,T) \quad (x \in Q). \tag{3}$$

Рассматривая производную по t как распределение, введем неограниченный оператор $\partial_t : \mathcal{D}(\partial_t) \to L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ с областью определения

$$\mathcal{D}(\partial_t) := \{w \in L_p(0,T;W_p^1(Q)) : \\ \partial_t w \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q)), w(x,0) = w(x,T)\}. \tag{4}$$

Определим оператор $A : L_p(0,\ T;\ W_{p,\gamma}^1(Q)) \to L_q(0,\ T;\ W_q^{-1}(Q))$ по формуле

$$\langle Aw, v\rangle = \sum_{0\leq i\leq n} \int_{\Omega_T} A_i(x,t,w,\nabla w)\partial_i v(t,x)dxdt \\ \forall v \in L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q)), \tag{5}$$

здесь и ниже $\partial_0 w := w$.

Определение 1. *Функция* $w \in W_g := \mathcal{D}(\partial_t) \cap L_p(0,T;W_{p,\gamma}^1(Q))$ *называется обобщенным решением задачи* (1)–(3), *если она удовлетворяет операторному уравнению*

$$\partial_t w + Aw = f. \tag{6}$$

3. РАЗНОСТНЫЙ ОПЕРАТОР И ИЗОМОРФИЗМ ПРОСТРАНСТВ

Рассмотрим набор вещественных постоянных коэффициентов $\{a_h: h \in \mathcal{M}\}$. Определим разностный оператор R: $L_p(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \to L_p(\mathbb{R}^n \times (0,T))$:

$$Ru(x,t) = \sum_{h\in\mathcal{M}} a_h u(x+h,t), \tag{7}$$

а также оператор $R_Q = P_Q R I_Q$: $L_p(\Omega_T) \to L_2(\Omega_T)$, здесь I_Q: $L_2(\Omega_T) \to L_p(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ – оператор продолжения функций из $L_2(\Omega_T)$ нулем в $(\mathbb{R}^n\backslash Q) \times (0,\ T)$, P_Q: $L_p(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \to L_p(\Omega_T)$ – оператор сужения функций из $L_p(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ на Ω_T. Для исследования свойств оператора R_Q введем матрицы $R_s = \{r_{ml}^s\}_{1\leq m,l\leq N(s)}$:

$$r_{ml}^s = \begin{cases} a_h & (h = h_{sl} - h_{sm} \in \mathcal{M}), \\ 0 & (h_{sl} - h_{sm} \notin \mathcal{M}), \end{cases} \tag{8}$$

где h_{sm} определяется условием $Q_{sm} = Q_{s1} + h_{sm}$. Из ограниченности области Q и формулы (8) следует, что множество различных матриц R_s конечно.

Пусть $\Omega_{s1} = Q_{s1} \times (0,T)$. Изоморфизм $U_s: L_p(\Omega_s) \to \to L_p^N(\Omega_{s1})$ задан по формуле $(U_s u)_l(x,t) = u(x + h_{sl}, t)$. Оператор $R_{Qs}: L_p^N(\Omega_{s1}) \to L_p^N(\Omega_{s1})$, определяемый соотношением $R_{Qs} = U_s R_Q U_s^{-1}$, является оператором умножения на матрицу R_s, при этом $R_Q = \sum_s U_s^{-1} R_s U_s P_s$, где P_s – проектор на $\bigcup_l Q_{sl} \times (0,T)$, см. лемму 8.6 [7] (или лемму 2.6 [8]). Более подробно построение и свойства операторов R_Q и R_{Qs} см. в [7, 8, 10, 11].

Обозначим через $R_{s(r)}$ матрицы, полученные из $R_s (s = s(r))$ путем перенумерования соответствующих столбцов и строк. Пусть e_j^r $(j = 1, \ldots, J(r))$ – j-я строка матрицы размерности $J \times J_0$, полученной путем вычеркивания последних $J - J_0$ столбцов из матрицы $R_{s(r)}$.

Определение 2. Будем говорить, что матрицы R_s соответствуют граничным условиям (2), если выполнено следующее

Условие 3. Существует набор $\{a_h \in \mathbb{R} : h \in \mathcal{M}\}$ такой, что для любого $s = 1, 2, \ldots$ матрицы R_s невырождены, а также для всех $r \in B$ и $s = s(r)$

$$e_l^r = \sum_{1 \le j \le J_0} \gamma_{lj}^r e_j^r \quad (l = J_0 + 1, \ldots.., J). \tag{9}$$

Кроме того, обозначим через R_{s0} матрицу порядка $J_0 \times J_0$, полученную из матрицы R_s вычеркиванием последних $N(s) - J_0$ строк и столбцов.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия* 1–3, *а соответствующие матрицы R_s и R_{s0} $(s = s(r),\ r \in B)$ невырождены. Тогда существует множество $\gamma = \{\gamma_{ml}^r\}$ такое, что оператор $R_Q: L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q)) \to L_p(0,T;W_{p,\gamma}^1(Q))$ – изоморфизм.*

Следствие 1. $w \in W_\gamma$ является обобщенным решением задачи (1)–(3) тогда и только тогда, когда существует решение операторного уравнения

$$\partial_t R_Q u + A R_Q u = f, \quad u \in W, \tag{10}$$

где $W := \mathcal{D}(\partial_t) \cap L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))$, причем $w = R_Q u$.

4. МАКСИМАЛЬНАЯ МОНОТОННОСТЬ ОПЕРАТОРА $\partial_t R_Q$

Определение 3. Оператор Λ: $L_p(0, T; \mathring{W}_p^1(Q)) \supset \mathcal{D}(\Lambda) \to L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ монотонен, если $\langle \Lambda u - \Lambda v, u - v \rangle \ge 0$ для всех $u, v \in \mathcal{D}(\Lambda)$. Плотно определенный, монотонный оператор Λ максимально монотонен, если не существует нетривиального расширения данного оператора, сохраняющего монотонность.

Как известно, оператор ∂_t с областью определения $\mathcal{D}(\partial_t) = W$ максимально монотонен, и $\partial_t^* = -\partial_t$, см. [12, Гл. 3, п. 2.2].

Лемма 1. *$\partial_t R_Q: W \to L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ максимально монотонен.*

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ

Обозначим через R_s^{sym} симметрическую часть матрицы R_s: $R_s^{sym} = \frac{1}{2}(R_s + R_s^*)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1–3; *а также $R_s^{sym} > 0$ $(s = s(r),\ r \in B)$; оператор A: $L_p(0,T;W_p^1(Q)) \to L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ задан формулой* (5), *причем функции $A_i(x,t,\xi)$ измеримы по $(x,t) \in \Omega_T$, T-периодичны по t, дифференцируемы по $\xi_j \in \mathbb{R}$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$, а также справедливы оценки*

$$|A_i(x,t,\xi)| \le g_0(x,t) + c_1 \sum_{0 \le i \le n} |\xi_i|^{p-1} \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{11}$$

$$\sum_{1 \le m,l \le N(s)} \sum_{0 \le i,j \le n} r_{ml}^s A_{ij}(x + h_{sm}, t, \zeta_{m\cdot}) \eta_{lj} \eta_{mi} \ge$$

$$\ge c_2 \sum_{1 \le m \le N(s)} \sum_{1 \le i \le n} |\zeta_{mi}|^{p-2} |\eta_{mi}|^2, \tag{12}$$

$$|A_{ij}(x,t,\xi)| \le g_1(x,t) + c_3 \sum_{0 \le i \le n} |\xi_i|^{p-2} \quad (i, j = 0, 1, \ldots, n), \tag{13}$$

где $A_{ij}(x,t,\xi) := \dfrac{\partial A_i(x,t,\xi)}{\partial \xi_j}$, $g_0 \in L_q(\Omega_T)$, $g_1 \in L_{p/(p-2)}(\Omega_T)$, *константы* $c_1, c_2, c_3 > 0$ *не зависят от* $(x,t) \in \Omega_T$, $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ *и* $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$, $\zeta_{m\cdot} = \{\zeta_{m0}, \zeta_{m1}, \ldots, \zeta_{mn}\}$, $m = 1, \ldots, N(s)$.

Тогда для любого $f \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(3). *Более того, если w_1 и w_2 – решения, соответствующие правым частям f_1 и f_2, то*

$$\|w_1 - w_2\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))}^p \le c_4 \|f_1 - f_2\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}^q, \tag{14}$$

$c_4 > 0$ *не зависит от $w_k \in W_\gamma$ и $f_k \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$.*

При рассмотрении линейного оператора A условия (11)–(13) упростятся.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* 1–3, *а также* $R_s^{sym} > 0$ $(s = s(r),\ r \in B)$; $p = 2$, *оператор* A: $L_2(0,T;W_2^1(Q)) \to L_2(\Omega_T)$ *задан формулой*

$$\langle Aw, v\rangle = \sum_{1\le i,j\le n} \int_{\Omega_T} A_{ij}(x,t)\partial_j w \partial_i v(t,x)dxdt$$

$$\forall v \in L_p(0,T;\mathring{W}_2^1(Q)),$$

причем функции $A_{ij}(x,t)$ *измеримы по* $(x,t) \in \Omega_T$, *M-периодичны по* x, *T-периодичны по* t, $A_{ij} \in L_\infty(\Omega_T)$, *а также для некоторого* $c_5 > 0$, *не зависящего от* $(x,t) \in \Omega_T$,

$$\sum_{1\le i,j\le n} A_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \ge c_5 \sum_{1\le i\le n} |\xi_i|^2. \quad (15)$$

Тогда для любого $f \in L_2(\Omega_T)$ *существует единственное решение операторного уравнения* (10) $u \in W$. *Более того, если* $w_1 = R_Q u_1$ *и* $w_2 = R_Q u_2$ – *решения, соответствующие правым частям* f_1 *и* f_2, *то*

$$\|w_1 - w_2\|_{L_2(0,T;W_2^1(Q))} \le c_6 \|f_1 - f_2\|_{L_2(\Omega_T)}, \quad (16)$$

$c_6 > 0$ *не зависит от* $w_k \in W_\gamma$ *и* $f_k \in L_2(\Omega_T)$.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа подготовлена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания: соглашение № 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Carleman T.* Sur la theorie des equations integrales et ses applications // Verhandlungen des Internat. Math. Kongr. Zürich. 1932. V. 1. P. 138–151.
2. *Вишик М.И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. ММО. 1952. Т. 1. С. 187–264.
3. *Browder F.E.* Non–local elliptic boundary value problems // Amer. J. Math. 1964. V. 86. № 4. P. 735–750.
4. *Бицадзе А.В., Самарский А.А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач // ДАН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.
5. *Моисеев Е. И.* Об отсутствии свойства базисности у системы корневых функций одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 12. С. 2082–2093.
6. *Скубачевский А.Л.* Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы // Матем. сборник. 1986. Т. 129. № 2. С. 279–302.
7. *Skubachevskii A.L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997. V. 91.
8. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // УМН. 2016. Т. 71. № 5 (431). С. 3–112.
9. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* Задача Бицадзе–Самарского для параболической системы на плоскости// ДАН. 2016. Т. 471. № 5. С. 517–519.
10. *Солонуха О.В.* О разрешимости линейной параболической задачи с нелокальными краевыми условиями// Современная математика. Фундаментальные направления. Изд-во РУДН. 2021. Т. 67. № 2. С. 349–362.
11. *Солонуха О.В.* Об одной нелинейной нелокальной задаче эллиптического типа // ЖВМиМФ. 2017. Т. 57. № 3. С. 60–72.
12. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

ON PERIODICAL SOLUTIONS OF PARABOLIC QUASILINEAR EQUATIONS WITH BOUNDARY CONDITIONS OF BITSADZE–SAMARSKII TYPE

O. V. Solonukha[a,b]

[a] *Federal Research Center “Informatics and Control” of the Russian Academy of Science, Moscow, Russia*

[b] *Mathematical Institute of the RUDN University, Moscow, Russia*

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev

We consider the quasilinear parabolic boundary value problem with nonlocal boundary condition of Bitsadze–Samarskii type. The theorem of existence and uniqueness of a periodic solution of such a problem is proved.

Keywords: periodic solution, nonlocal boundary conditions of the Bitsadze–Samarsky type, parabolic equation, maximal monotone operator, generalized solutions

EDN: LGALJF
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 87–90

МАТЕМАТИКА

УДК 517.984.5

СЛАБО СИНГУЛЯРНОЕ УСЛОВИЕ СТЕКЛОВА В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

А. Г. Чечкина[1,2,*]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 25.01.2021 г.
Поступило 26.02.2021 г.
После доработки 26.02.2021 г.
Принято к публикации 08.02.2022 г.

В n-мерной ($n \geq 3$) области рассматривается задача типа Стеклова с быстро меняющимся условием (чередуются условие Стеклова и однородное условие Дирихле). При этом коэффициент в условии Стеклова является быстро осциллирующей функцией, зависящей от малого параметра ε, которая имеет порядок $O(1)$ вне мелких включений в виде шаровых слоев на границе, где она имеет порядок $O((\varepsilon\delta)^{-m})$. Эти включения диаметра $O(\varepsilon\delta)$ расположены на расстоянии порядка $O(\delta)$ друг от друга, где $\delta = \delta(\varepsilon) \to 0$. В случае $m < 2$ (слабая сингулярность) оценена скорость сходимости решений исходной задачи при стремлении малого параметра к нулю.

Ключевые слова: слабая сингулярность, задача Стеклова, граничное усреднение

DOI: 10.31857/S2686954322020096

Сингулярные возмущения коэффициентов дифференциальных уравнений и краевых условий возникают при моделировании различных прикладных задач. Асимптотический анализ таких задач см., например, в работах [1–6]. Непериодические случаи рассмотрены в [7, 8]. Задачи с сингулярностями внутри области изучены в работах [9, 10] (см. также [11, 12]).

Задача типа Стеклова с быстро меняющимся типом краевых условий рассматривалась в [13], где проанализирован весь спектр предельных случаев. Задачи с быстро осциллирующими граничными условиями изучались также в статьях [14, 15].

В настоящей работе рассматривается многомерная задача усреднения типа Стеклова со слабой сингулярностью, даются в соболевских нормах оценки скорости сходимости решений и собственных значений исходных задач от решений и собственных значений, соответственно, усредненных задач при стремлении малого параметра к нулю.

[1] *Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, Уфа, Башкортостан, Россия*
* *E-mail: chechkina@gmail.com*

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Мы предполагаем, что часть границы Γ_2 ($\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$) лежит на гиперплоскости $x_n = 0$, при этом она состоит из трех частей α_ε, β_ε и γ_ε, где α_ε и β_ε образуют единую часть, которую мы обозначаем Γ_ε. Здесь $\gamma_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N_\delta} \gamma_\varepsilon^i$ – объединение $(n-1)$-мерных шаров, а $\beta_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N_\delta} \beta_\varepsilon^i$ – объединение шаровых слоев. Поясним теперь построение. Пусть γ^0 – это $(n-1)$-мерный шар $\{(\xi_1, \dots, \xi_n) \mid \xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 < \varepsilon^2, \xi_n = 0\}$ и пусть $\beta^0 = \{(\xi_1, \dots, \xi_n) \mid \varepsilon^2 < \xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 < 2\varepsilon^2,\ \xi_n = 0\}$ в растянутом пространстве $\mathbb{R}^n$, $\xi \dfrac{x}{\delta}$, γ и β – области, полученные целочисленными сдвигами множеств γ^0 и β_0 на гиперплоскости $\{\xi_n = 0\}$ с центрами в точках $\tilde{\xi}_k = (k_1, \dots, k_{n-1}, 0)$, $k_1, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{N}$. Обозначим $\tilde{\gamma}_\varepsilon$ – гомотетичное сжатие $\delta\gamma$ и $\tilde{\beta}_\varepsilon$ – гомотетичное сжатие $\delta\beta$. При этом (см. рис. 1)

$$\gamma_\varepsilon = \tilde{\gamma}_\varepsilon \cap \partial\Omega, \quad \beta_\varepsilon = \tilde{\beta}_\varepsilon \cap \partial\Omega \quad \alpha_\varepsilon = \Gamma_2 \backslash (\beta_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon).$$

Предполагается, что параметр $\delta(\varepsilon)$, определяющий характерное расстояние между участками γ_ε^i и β_ε^i на границе, стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

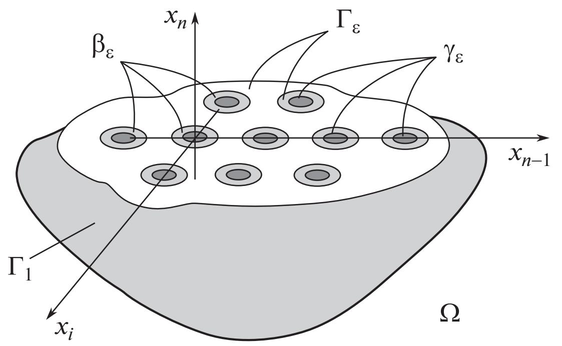

Рис. 1. Область с микронеоднородной структурой границы.

Также заметим, что количество участков β_ε^i и соответственно участков γ_ε^i имеет следующий порядок: $N_\delta = O\left(\frac{1}{\delta^{n-1}}\right)$.

В области Ω рассматривается спектральная задача с быстрой сменой краевых условий и сингулярными коэффициентами

$$\begin{gathered} \Delta u_\varepsilon^k = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ u_\varepsilon^k = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \cup \gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon^k}{\partial x_n} = \lambda_\varepsilon^k \rho^\varepsilon(x) u_\varepsilon^k \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon, \end{gathered} \tag{1}$$

где

$$\rho^\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\varepsilon\delta)^m}, & x \in \beta_\varepsilon, \\ 1, & x \in \alpha_\varepsilon. \end{cases} \tag{2}$$

В этой работе ограничимся только случаем $m < 2$ (слабая сингулярность).

Собственные значения $\{\lambda_\varepsilon^k\}$ занумерованы в порядке неубывания, т.е. $\lambda_\varepsilon^1 \le \lambda_\varepsilon^2 \le \dots \le \lambda_\varepsilon^k \le \dots$, и повторяются с учетом кратности. При этом нормируем собственные функции следующим образом:

$$\int_{\Gamma_2} \rho^\varepsilon(\hat{x}, 0) u_\varepsilon^k(\hat{x}, 0) u_\varepsilon^l(\hat{x}, 0) d\hat{x} = \delta_{kl},$$

здесь $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$.

Для формулировки теорем нам понадобится величина

$$P := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon^{n-2}}{\delta(\varepsilon)}.$$

Обозначим

$$D = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid -\frac{1}{2} < \xi_i < \frac{1}{2}, i = 1, \dots n-1, \xi_n < 0\right\},$$

$$\Sigma = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid -\frac{1}{2} < \xi_i < \frac{1}{2}, i = 1, \dots, n-1, \xi_n = 0\right\}.$$

Пусть функция W^ε, периодическая по переменным $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$, является первой собственной функцией задачи типа Стеклова на ячейке периодичности

$$\begin{gathered} \Delta W^\varepsilon = 0 \quad \text{в} \quad D, \\ W^\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \gamma_0 \\ \frac{\partial W^\varepsilon}{\partial \xi_n} = \theta_\varepsilon W^\varepsilon \quad \text{на} \quad \Sigma \backslash \gamma_0. \end{gathered} \tag{3}$$

Зададим w_ε^δ формулой

$$w_\varepsilon^\delta(x) = 1 + \psi(x_n)\left(W^\varepsilon\left(\frac{x}{\delta}\right) - 1\right) \tag{4}$$

и продолжим ее периодически вдоль гиперплоскости $x_n = 0$. Здесь $\psi(t)$ – гладкая срезающая функция одной переменной, $0 \le \psi \le 1$, $\psi \equiv 1$ в некоторой достаточно малой окрестности Γ_2. Свойства функции w_ε^δ подробно изучены в [13].

Для формулировки результатов рассмотрим краевые задачи

$$\begin{gathered} \Delta u^\varepsilon = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ u^\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \cup \gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_n} = \rho^\varepsilon(x) f(x) \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon. \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \Delta u^0 = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ u^0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \quad (P = +\infty), \\ \left[\begin{gathered} \frac{\partial u^0}{\partial x_n} + P\frac{\sigma_n c_{\gamma_0}}{2} u^0 = f(x) \quad \text{на} \quad \Gamma_2 \\ u^0 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \end{gathered}\right], \quad (P < +\infty), \end{gathered} \tag{6}$$

где σ_n – площадь единичной n-мерной сферы, а $c_{\gamma_0} := \operatorname{cap}(\gamma_0)$ – гармоническая емкость $(n-1)$-мерного диска γ_0.

Имеет место теорема об оценке решений.

Т е о р е м а 1. *Если* $P < +\infty$, u^ε и u^0 – *обобщенные решения задач* (4) *и* (5), *соответственно, то существует такая константа* $K_1(f, \gamma_0, n)$, *не зависящая от* ε *и* δ, *что для достаточно малых* ε *имеем*

$$\|u^0 w_\varepsilon^\delta - u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \le K_1\left(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} + \left|\frac{\varepsilon^{n-2}}{\delta} - P\right| + \varepsilon^{2-m}\delta^{2-m}\right).$$

Если $P = +\infty$, *то существует* $K_2(f, \gamma_0, n)$ *такое, что*

$$\|u^\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \le K_2\left(\frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}} + \varepsilon^{2-m}\delta^{2-m}\right).$$

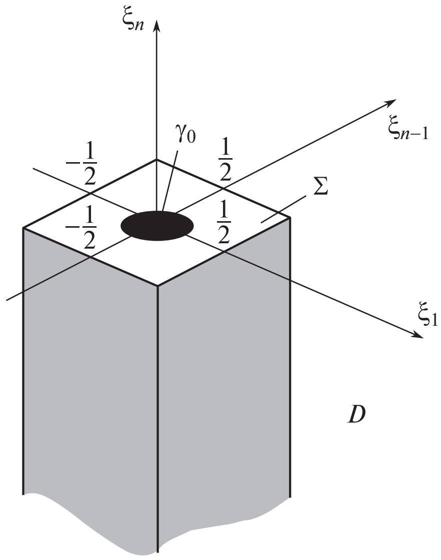

Рис. 2. Ячейка периодичности.

Теперь сформулируем спектральную задачу

$$\Delta u_0^k = 0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$u_0^k = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad (P = +\infty), \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_0^k}{\partial x_n} + P\dfrac{\sigma_n c_{\gamma_0}}{2} u_0^k = \lambda_0^k u_0^k \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \\ u_0^k = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \\ \int\limits_{\Gamma_2} u_0^k u_0^l d\hat{x} = \delta_{kl}, \quad 0 < \lambda_0^1 \le \lambda_0^2 \le \cdots \end{bmatrix} \quad (P < +\infty).$$

Имеет место теорема о сходимости собственных значений и собственных функций.

Теорема 2. *Пусть $\lambda_0^k, \lambda_\varepsilon^k$ являются собственными значениями задач* (6) *и* (1) *соответственно. Тогда*

$$\left|\lambda_0^k - \lambda_\varepsilon^k\right| \le C_k^1\left(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} + \left|\frac{\varepsilon^{n-2}}{\delta} - P\right| + \varepsilon^{2-m}\delta^{2-m}\right), \quad \text{если} \quad P < \infty,$$

$$\lambda_\varepsilon^k \to +\infty \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \quad \text{если} \quad P = +\infty,$$

где постоянные C_k^1, C_k^2 не зависят от ε.

Если кратность собственного значения λ_0^l задачи (7) *равна r, т.е. $\lambda_0^l = \lambda_0^{l+1} = \cdots = \lambda_0^{l+r}$, то для любой собственной функции u_0^l задачи* (7), *соответствующей собственному значению λ_0^l, $\|u_0\|_{L_2(\Omega)} = 1$, существует линейная комбинация $\overline{u}^\varepsilon$ собственных функций задачи* (1), *соответствующих собственному значению $\lambda_\varepsilon^{l+1}, \cdots, \lambda_\varepsilon^{l+r}$ такая, что*

$$\left\|u^\varepsilon - u_0^l\right\|_{L_2(\Omega)} \le$$
$$\le C_l^1\left(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} + \left|\frac{\varepsilon^{n-2}}{\delta} - P\right| + \varepsilon^{2-m}\delta^{2-m}\right), \quad \text{если} \quad P < \infty,$$

$$\left\|u^\varepsilon\right\|_{L_2(\Omega)} \le C_l^2\left(\frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}} + \varepsilon^{2-m}\delta^{2-m}\right), \quad \text{если} \quad P = +\infty,$$

где постоянные C_l^1, C_l^2 не зависят от ε и u_0^l.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А., Соболева Т.С.* О собственных колебаниях струны с присоединенной массой // Сиб. мат. журнал. 1988. Т. 29. № 5. С. 71–91.
2. *Gómez D., Lobo M., Pérez E.* On the Eigenfunctions Associated with the High Frequencies in Systems with a Concentrated Mass // J. Math. Pures Appl. 1999. V. 78. P. 841–865.
3. *Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia É.* Vibration and Coupling of Continuous System. Asymptotic methods. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1989. 421 p.
4. *Chechkin G.A.* On Vibration of Partially Fastened Membrane with Many “Light” Concentrated Masses on the Boundary // C. R. Mмanique. 2004. V. 332. № 12. P. 949–954.
5. *Чечкин Г.А.* Расщепление кратного собственного значения в задаче о концентрированных массах // Успехи мат. наук. 2004. Т. 59. Вып. 4. С. 205–206.
6. *Rybalko V.* Vibration of Elastic Systems with a Large Number of Tiny Heavy Inclusions // Asymptotic Analysis. 2002. V. 32. № 1. P. 27–62.
7. *Перес М.Е., Чечкин Г.А., Яблокова (Доронина) Е.И.* О собственных колебаниях тела с “легкими” концентрированными массами на поверхности // Успехи мат. наук. 2002. Т. 57. Вып. 6. С. 195–196.
8. *Chechkin G.A., Chechkina T.P.* Random Homogenization in a Domain with Light Concentrated Masses // Mathematics. 2020. V. 8. № 5. https://doi.org/10.3390/math8050788
9. *Chechkin G.A., Mel’nyk T.A.* Asymptotics of Eigenelements to Spectral Problem in Thick Cascade Junction with Concentrated Masses // Applicable Analysis. 2012. V. 91. № 6. P. 1055–1095.
10. *Chechkin G.A., Mel’nyk T.A.* Spatial–Skin Effect for Eigenvibrations of a Thick Cascade Junction with “Heavy” Concentrated Masses // Mathematical Methods in Applied Sciences (M2AS). 2014. V. 37, № 1. P. 56–74.
11. *Amirat Y., Chechkin G.A., Gadyl’shin R.R.* Asymptotics of the Solution of a Dirichlet Spectral Problem in a Junction with Highly Oscillating Boundary // C. R. Mécanique. 2008. V. 336. № 9. P. 693–698.
12. *Chechkin G.A., Cioranescu D., Damlamian A., Piatnitski A.L.* On Boundary Value Problem with Singular Inhomogeneity Concentrated on the Boundary //

Journal de Mathématiques Pures et Appliquos. 2012. V. 98. № 2. P. 115–138.

13. *Чечкина А.Г.* Усреднение спектральных задач с сингулярным возмущением условия Стеклова // Известия РАН. 2017. Т. 81. № 1. С. 203–240.

14. *Гадыльшин Р.Р., Чечкин Г.А.* Краевая задача для Лапласиана с быстро меняющимся типом граничных условий в многомерной области // Сиб. мат. журнал. 1999. Т. 40. № 2. С. 271–287.

15. *Oleinik O.A., Chechkin G.A.* Solutions and Eigenvalues of the Boundary Value Problems with Rapidly Alternating Boundary Conditions for the System of Elasticity // Rendiconti Lincei: Mathematica e Applicazioni. Serie 9. 1996. V. 7. № 1. P. 5–15.

WEAKLY SINGULAR STEKLOV CONDITION IN MULTIDIMENSIONAL CASE

A. G. Chechkina[a,b]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

[b] *Institute of Mathematics with Computing Centre, Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

In a n-dimensional ($n > 3$) domain we consider a Steklov-type problem with rapidly changing conditions (the Steklov condition alternates with the homogeneous Dirichlet condition). In addition the coefficient in the Steklov condition is a rapidly oscillating function depending on the small parameter ε of the order $O(1)$ outside small spherical layer inclusions, where it has the order $O((\varepsilon\delta)^{-m})$. These inclusions of the diameter $O(\varepsilon\delta)$, are on the distance of order $O(\delta)$ from each other, where $\delta = \delta(\varepsilon) \to 0$. In the case $m < 2$ (weak singularity), the rate of convergence is estimated for solutions to the original problem as the small parameter tends to zero.

Keywords: Weak singularity, Steklov problem, boundary homogenization

EDN: COMJBF
ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, том 503, с. 91–94

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.612

НЕЯВНАЯ ИТЕРАЦИОННАЯ СХЕМА НА ОСНОВЕ РАСШИРЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

© 2022 г. А. И. Жданов[1,*]

Представлено академиком РАН В.А. Сойфером 10.02.2021 г.
Поступило 12.02.2021 г.
После доработки 01.06.2021 г.
Принято к публикации 24.01.2022 г.

Предложен новый вариант неявной итерационной схемы на основе решения последовательности регуляризованных расширенных линейных систем. Этот подход позволяет существенно повысить скорость сходимости неявной итерационной схемы при сохранении неизменным числа обусловленности задачи на каждой итерации алгоритма. Предлагаемый алгоритм может достаточно эффективно быть использован для построения итерационных алгоритмов регуляризации при решении плохо обусловленных разреженных задач большой размерности.

Ключевые слова: неявная итерационная схема, регуляризованная расширенная линейная система, итеративные алгоритмы регуляризации на основе расширенных систем

DOI: 10.31857/S2686954322020205

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что многие вычислительные задачи принадлежат к классу некорректных или плохо обусловленных задач. Для решения этих задач широко используются многочисленные методы регуляризации. Одним из наиболее эффективных методов регуляризации продолжает оставаться метод регуляризации А.Н. Тихонова [1].

При решении многих прикладных задач, особенно разреженных большой размерности, например, таких, как обработка сигналов и изображений, анализ больших данных, важную роль играют итерационные методы регуляризации [2, 3]. Достоинством итерационных методов регуляризации является тот факт, что для них роль параметра регуляризации выполняет момент останова итераций, который легко реализуется на основе принципа невязки [2]. Итерационный принцип невязки существенно проще, с вычислительной точки зрения, принципа невязки, используемого для прямых (неитерационных) методов регуляризации.

Одним из важнейших алгоритмов построения итерационных схем регуляризации является неявный метод простых итераций на основе нормальных уравнений [3]. Это связано с тем фактом, что он обладает абсолютной сходимостью, в отличие от явных, и достаточно высокой помехоустойчивостью. В [4] был предложен специальный вариант неявной итерационной схемы на основе сингулярного разложения. Однако высокая вычислительная сложность сингулярного разложения не позволяет достаточно эффективно решать большие, в том числе разреженные, задачи.

В настоящей работе предлагается новый вариант неявной итерационной схемы, основанный на последовательном решении регуляризованных расширенных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Этот подход позволяет существенно повысить скорость сходимости алгоритма без потери вычислительной устойчивости (за счет сохранения неизменным числа обусловленности СЛАУ на каждой итерации) неявной итерационной схемы. Данный результат обеспечивается тем фактом, что число обусловленности расширенной СЛАУ значительно меньше числа обусловленности СЛАУ неявной итерационной схемы на основе нормальных уравнений. Важнейшим достоинством предлагаемого алгоритма также является возможность решать большие разреженные задачи.

2. НОВАЯ НЕЯВНАЯ ИТЕРАЦИОННАЯ СХЕМА

Рассматривается произвольная СЛАУ

$$Au = f, \tag{1}$$

где $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $f \in \mathbb{C}^m$, $u \in \mathbb{C}^n$, $m \geq n$ и $\operatorname{rank}(A) = n$.

[1] *Самарский государственный технический университет, Самара, Россия*
**E-mail: zhdanovaleksan@yandex.ru*

Для построения классического варианта неявной итерационной схемы [2] используется симметризация Гаусса произвольной СЛАУ (1), приводящая к нормальной системе уравнений

$$A^*Au = A^*f, \tag{2}$$

где A^* – матрица, сопряженная к матрице A.

На основе нормальной системы (2) непосредственно получается классическая форма неявной итерационной схемы (неявный метод простых итераций) для решения произвольных СЛАУ (1):

$$\begin{aligned}&(\omega^2E_n + A^*A)u_{k+1} = \\ &= \omega^2u_k + A^*f \Leftrightarrow G_\omega u_{k+1} = \omega^2u_k + b,\end{aligned} \tag{3}$$

где $\omega > 0$, E_n – единичная матрица порядка n и $k = 0, 1, \ldots$

Неявная итерационная схема (3) широко используется для получения итерационных алгоритмов регуляризации [2, 3, 5], где номер остановки по k выполняет роль параметра регуляризации.

Ниже приводится новый вариант неявной итерационной схемы.

Преобразуем (3) к виду

$$A^*Au_{k+1} - A^*f + \omega^2u_{k+1} = \omega^2u_k$$

или

$$A^*(f - Au_{k+1}) - \omega^2u_{k+1} = -\omega^2u_k. \tag{4}$$

Пусть

$$r_{k+1} = f - Au_{k+1}, \tag{5}$$

тогда (4) можно записать в виде

$$A^*r_{k+1} - \alpha u_{k+1} = -\alpha u_k, \tag{6}$$

а (5) в виде

$$r_{k+1} + Au_{k+1} = f. \tag{7}$$

Введем новую переменную $y_k = \omega^{-1}r_k$. Объединяя уравнения (6) и (7), получаем расширенную СЛАУ

$$\begin{aligned}\omega y_{k+1} + Au_{k+1} &= f,\\ A^*y_{k+1} - \omega u_{k+1} &= -\omega u_k.\end{aligned} \tag{8}$$

Из (8) непосредственно следует

Утверждение. Неявный метод простых итераций (3) эквивалентен решению последовательности регуляризованных расширенных систем

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\omega E_m & A\\ A^* & -\omega E_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_{k+1}\\ u_{k+1}\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix}f\\ -\omega u_k\end{pmatrix} \Leftrightarrow B_\omega z_{k+1} = g_k^\omega.\end{aligned} \tag{9}$$

Итерационный метод (9) можно рассматривать как специальную вычислительную схему метода (3). Однако при малых α вычисления по итерационной схеме (4) могут, в виду большей численной устойчивости, оказаться намного более целесообразными, чем вычисления по итерационной схеме (3). Кроме того, формирование матрицы A^*A может приводить к ее полному заполнению, даже если исходная матрица A является сильно разреженной, что в конечном итоге не позволяет использовать алгоритм (3) для решения больших разреженных задач.

Спектральное число обусловленности СЛАУ на каждой итерации в алгоритме (3) равно

$$\mu_2(G_\omega) = \frac{\sigma_1^2 + \omega^2}{\sigma_n^2 + \omega^2},$$

где σ_1 и σ_n – максимальное и минимальное сингулярные числа матрицы A соответственно.

Как показано в [6], собственными значениями матрицы B_ω, $\lambda_j(B_\omega)$, $j = 1,\ldots,m + n$, являются числа $\pm\sqrt{\sigma_i^2 + \omega^2}$, $i = 1, 2, \ldots, \tau$, а также ω и $-\omega$ кратностей $m - \tau$ и $n - \tau$ соответственно, где $\tau = \operatorname{rank}(A)$ и $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \ldots \ge \sigma_\tau > 0$ – сингулярные числа матрицы A. Для частного случая, когда $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, аналогичный результат приведен (без доказательства) в работе М.А. Саундерса [7].

Так как $B_\omega = B_\omega^*$ и $\tau = n$, то спектральное число обусловленности матрицы B_ω

$$\begin{aligned}&\mu_2(B_\omega) = \|B_\omega\|_2 \cdot \left\|B_\omega^{-1}\right\|_2 = \\ &= \frac{\max\limits_{1\le j\le m+n}|\lambda_j(B_\omega)|}{\min\limits_{1\le j\le m+n}|\lambda_j(B_\omega)|} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \omega^2}{\sigma_n^2 + \omega^2}},\end{aligned} \tag{10}$$

где $\|\cdot\|_2$ – спектральная матричная норма.

Из (10) следует, что если $\sigma_n < \omega < \sigma_1$, то

$$\mu_2(B_\omega) \approx \frac{\sigma_1}{\omega} = \frac{\|A\|_2}{\omega}, \tag{11}$$

несмотря на число обусловленности матрицы A.

Из (11) получаем важный практический результат: если $\sigma_n < \omega < \sigma_1$, то число обусловленности матрицы B_ω не зависит от обусловленности матрицы A и, следовательно, для плохо обусловленных матриц A число обусловленности $\mu_2(B_\omega) \ll \mu_2(G_\omega)$, так как $\mu_2(B_\omega) = \sqrt{\mu_2(G_\omega)}$. Этот факт гарантирует, что неявная итерационная схема (9), на основе расширенных систем, будет обладать более высокой вычислительной устойчивостью по сравнению с итерационной схемой (3), на основе нормальных систем, при одном и том же значении параметра ω.

3. ИТЕРАЦИОННАЯ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩАЯ СХЕМА

Пусть вместо точных исходных данных (A, f) заданы возмущенные исходные данные $(A, \tilde{f})$, где $\|\tilde{f} - f\| \le \delta$. Здесь $\|f\|$ – евклидова векторная норма.

Для построения итерационной регуляризирующей схемы воспользуемся итерационным алгоритмом (9):

$$\begin{pmatrix} \omega E_m & A \\ A^* & -\omega E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{k+1} \\ u_{k+1} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ -\omega u_k \end{pmatrix} \Leftrightarrow B_\omega z_{k+1} = \tilde{g}_k^\omega. \tag{12}$$

В качестве критерия остановки будет использовано минимальное число k, такое, что

$$k_\delta = \min\left\{k \in \mathbb{N}\colon \|Au_k - \tilde{f}\| \le c\delta\right\}, \tag{13}$$

где константа $c > 1$.

Параметр k_δ, момент останова для итерационной схемы (12), играет роль параметра регуляризации на основе принципа невязки [2], а u_{k_δ} является регуляризованным решением.

Так как $\tilde{f} - Au_k = \omega y_k$, то критерий остановки (13) можно представить в виде

$$k_\delta = \min\left\{k \in \mathbb{N}\colon \omega\|y_k\| \le c\delta\right\}. \tag{14}$$

Использование (14) позволяет снизить вычислительные затраты по сравнению с (13).

4. АНАЛИЗ СХОДИМОСТИ И ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Итерационную схему (3) можно записать в виде

$$u_{k+1} = \Phi(\omega)u_k + g^\omega, \tag{15}$$

где $\Phi(\omega) = \omega^2(\omega^2 E_n + A^*A)^{-1}$ – итерационная матрица, а $g^\omega = (\omega^2 E_n + A^*A)^{-1}b$.

Скорость сходимости итерационного процесса (15) определяется множителем сходимости $\rho(\Phi(\omega))$, где $\rho(\cdot)$ – спектральный радиус матрицы. В [4] показано, что $\rho(\Phi(\omega)) = \dfrac{1}{1+\lambda^2}$, где $\lambda = \dfrac{\sigma_n}{\omega}$.

Очевидно, что $\mu_2(G(\omega)) \to 2$ и $\mu_2(B(\omega)) \to \sqrt{2}$ при $\omega \to \infty$, где $G(\omega) = G_\omega$ и $B(\omega) = B_\omega$. Однако при $\omega \to \infty$ спектральный радиус $\rho(\Phi(\omega)) \to 1$, что приводит к сильному замедлению скорости сходимости.

Видно, что параметр ω, с одной стороны, выполняет роль предобусловливателя, но, с другой стороны, требуется компромис при выборе параметра ω для обеспечения достаточной скорости сходимости алгоритма. Относительно стандартного алгоритма типа (3) замечание о скорости сходимости было сделано в недавней работе [8].

Исследуем сравнение скорости сходимости и чисел обусловленности для алгоритмов (3) и (12).

Пусть параметры ω_1 и ω_2 выбираются из условия $\mu_2(G(\omega_1)) = \mu_2(B(\omega_2))$. Так как $\mu_2(B_\omega) = \sqrt{\mu_2(G_\omega)}$, то очевидно, что $\omega_2 < \omega_1$ и, следовательно, $\rho(\Phi(\omega_2)) < \rho(\Phi(\omega_1))$. Это означает, что неявная итерационная схема (12), на основе расширенных систем, имеет более высокую скорость сходимости по сравнению с (3), на основе нормальных уравнений, при одном и том же числе обусловленности СЛАУ в обоих итерационных схемах.

Рассмотрим случай, когда $\mu_2^2(A) = \mu_2(G(0)) > \epsilon^{-1/2}$, где ϵ – машинный эпсилон. В этом случае для обеспечения гарантированной точности вычислений на каждой итерации неявных итерационных схем (3) и (12) параметры ω_1 и ω_2 должны удовлетворять условиям $\mu_2(G(\omega_1)) \le \epsilon^{-1/2}$ и $\mu_2(B(\omega_2)) \le \epsilon^{-1/2}$ соответственно.

Если параметры ω_1 и ω_2 удовлетворяют условию

$$\mu_2(G(\omega_1)) = \mu_2(B(\omega_2)) \le \epsilon^{-1/2}, \tag{16}$$

то в этом случае $\omega_2 \ll \omega_1$. Отсюда непосредственно имеем, что $\rho(\Phi(\omega_2)) \lll \rho(\Phi(\omega_1))$. Следовательно, при одинаковых числах обусловленности СЛАУ в алгоритмах (3) и (12), алгоритм (12), на основе расширенных линейных систем, будет иметь существенно более высокую скорость сходимости. Этот факт иллюстрируется следующим простым примером.

Ч и с л е н н ы й п р и м е р. Рассмотрим СЛАУ $Au = f$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7.00001 \\ 3 & -7 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}, \quad f = \begin{pmatrix} 0.99998 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3. \tag{17}$$

СЛАУ (17) совместна, ее точное решение $u_* = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, а $\sigma_1 = 13.19$, $\sigma_2 = 3.21 \times 10^{-6}$ и $\mu_2(A) \approx 4.10 \times 10^6$. Для решения СЛАУ (17) использовались алгоритмы (3) и (12). Все вычисления выполнялись в Matlab, где $\epsilon \approx 2.22 \times 10^{-16}$. В данном примере $\tilde{f} = f$. В алгоритмах (3) и (12) параметры выбирались в соответствии с (16):

$$\mu_2(G(\omega_1)) = \mu_2(B(\omega_2)) = 2.9\times 10^6. \qquad (18)$$

Из (18) получаем, что для алгоритма (3) $\omega_1 =$ $= 0.007745$, а для алгоритма (12) $\omega_2 = 3.21\times 10^{-6}$. Для решения СЛАУ в алгоритме (3) применялся метод Холецкого, а в (12) – метод LU-разложения. В качестве критерия остановки использовался критерий:

$$\|Au_k - f\| \leq 1.2\times\epsilon. \qquad (19)$$

Для алгоритма (12) этот критерий, в соответствии с (14), имеет вид $\omega\|y_k\| \leq 1.2\times\epsilon$.

Результаты вычислений. Алгоритм (3), на основе нормальных уравнений, не позволил вообще выполнить критерий (19). Через $k = 1000$, невязка $\|Au_{1000} - f\| = 1.73\times 10^{-5}$, а относительная погрешность решения $\frac{\|u_{1000} - u_*\|}{\|u_*\|} \approx 0.99953$ соответственно.

Для алгоритма (12), на основе расширенных линейных систем, критерий остановки (19) был выполнен при $k = 37$, а относительная погрешность, соответственно, равна

$$\frac{\|u_{37} - u_*\|}{\|u_*\|} \approx 1.57\times 10^{-11}.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Новый вариант неявной итерационной схемы (9) обладает следующими наиболее важными преимуществами перед классической неявной итерационной схемой (3), основанной на нормальной системе уравнений:

1. Неявная итерационная схема (9), в отличие от неявной схемы (3), позволяет достаточно эффективно решать большие разреженные задачи.

2. При одном и том же числе обусловленности матриц G_ω и B_ω неявная итерационная схема (9) позволяет получить существенно более высокую скорость сходимости при решении плохо обусловленных задач. Этот факт особенно важен при решении задач большой размерности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морозов В.А.* Алгоритмические основы методов решения некорректных задач // Вычисл. методы и программирование. 2003. Т. 45. С. 130–141.
2. *Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. М.: Наука, 1986.
3. *Buccini A., Donatelli M., Reichel L.* Itereated Tikhonov regularization with a general penalty terms // Numer. Linear Algebra Appl. 2017. V. 24. P. 1–12.
4. *Zhdanov A.I.* Implicit iterative schemes based on singular decomposition and regularizing algorithms // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]. 2018. V. 22. № 3. P. 549–556.
5. *Nagy J., Palmer K., Perrone L.* Iterative methods for image deblurring: a Matlab object- oriented approach // Numer. Algorithms. 2004. V. 36. P. 73–93.
6. *Zhdanov A.I.* The Method of Augmented Regularized Normal Equations // Comput. Math. and Mathem. Phys. 2012. V. 52. № 2. P. 194–197.
7. *Saunders M.A.* Solution of sparse rectangular systems using LSQR and CRAIG // BIT. 1995. V. 35. P. 588–604.
8. *Spigler R.* On the numerical of ill-conditioned linear systems by regularization and iteration // Numer. Linear Algebra Appl. 2020. P. 1–22.

IMPLICIT ITERATIVE SCHEMES ON BASED OF AUGMENTED LINEAR SYSTEMS

A. I. Zhdanov[a]

[a] *Samara State Technical University, Samara, Russia*

Presented by Academician of the RAS V.A. Soifer

A new version of an implicit iterative scheme based on solving a sequence of regularized augmented linear systems is proposed. This approach makes it possible to significantly increase the rate of convergence of the implicit iterative scheme while keeping the condition number of the problem unchanged at each iteration of the algorithm. The proposed algorithm can be effectively used to construct iterative regularization algorithms for solving ill-conditioned sparse problems of large dimension.

Keywords: implicit iterative scheme, regularized augmented linear system, iterative regularizing algorithms based on augmented systems