

---

---

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 61, номер 12, 2021 год

---

---

## ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

- Применение кубического сплайна на сетке Бахвалова при наличии пограничного слоя  
*И. А. Блатов, А. И. Задорин, Е. В. Китаева* 1955
- Оценка точности класса итеративно регуляризованных методов Гаусса–Ньютона с апостериорным остановом  
*М. М. Кокурин* 1974
- Тождество для отклонений от точного решения задачи  $\Lambda^* \mathcal{A} \Lambda u + \ell = 0$  и его следствия  
*С. И. Репин* 1986
- 

## ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Спектральный анализ малых возмущений геострофических течений с параболическим вертикальным профилем скорости применительно к океану  
*С. Л. Скороходов, Н. П. Кузьмина* 2010
- 

## УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

- Вопрос существования ограниченных солитонных решений в задаче о продольных колебаниях упругого бесконечного стержня в поле с сильно нелинейным потенциалом  
*Л. А. Бекларян, А. Л. Бекларян* 2024
- Приближенное решение обратных задач для уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением  
*А. М. Денисов* 2040
- Об асимптотике решения задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения переноса с многими пространственными переменными  
*А. В. Заборский, А. В. Нестеров, Д. Ю. Нечаев* 2050
- Sinc-Muntz-Legendre Collocation Method for Solving a Class of Nonlinear Fractional Partial Differential Equations  
*M. Shareef Ajeel, M. Gachpazan, Ali R. Soheili* 2059
- 

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

- Вычислительная реализация модели смешанной размерности теплопереноса в системе грунт–труба в криолитозоне  
*В. И. Васильев, М. В. Васильева, Д. Я. Никифоров, Н. И. Сидняев, С. П. Степанов, А. Н. Цеева* 2060
- Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакции–диффузии–адвекции: теория и применение  
*Н. Н. Нефедов* 2074
- Задача определения коэффициента ослабления для нестационарного уравнения переноса излучения  
*И. В. Прохоров, И. П. Яровенко* 2095
- Новые граничные условия для одномерных сетевых моделей гемодинамики  
*С. С. Симаков* 2109
- Новая смешанная вариационная задача и система Стокса с сингулярной правой частью  
*М. В. Урев* 2125
- 
-



**ОБЩИЕ  
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

УДК 519.988

**ПРИМЕНЕНИЕ КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА НА СЕТКЕ БАХВАЛОВА  
ПРИ НАЛИЧИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ<sup>1)</sup>**

© 2021 г. И. А. Блатов<sup>1,\*</sup>, А. И. Задорин<sup>2,\*\*</sup>, Е. В. Китаева<sup>3</sup>

<sup>1</sup> 443010 Самара, ул. Льва Толстого, 23, Поволжский гос. ун-т телекоммуникаций и информатики, Россия

<sup>2</sup> 630090 Новосибирск, пр-т Акад. Коптюга, 4, Ин-т матем. им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия

<sup>3</sup> 443086 Самара, Московское шоссе, 34А, Самарский национальный исследовательский ун-т, Россия

\*e-mail: blатов@mail.ru

\*\*e-mail: zadorin@ofim.oscsbras.ru

Поступила в редакцию 12.12.2020 г.  
Переработанный вариант 12.12.2020 г.  
Принята к публикации 04.08.2021 г.

Рассматривается задача кубической сплайн-интерполяции на сетке Бахвалова функций с большими градиентами. Получены оценки погрешности на классе функций с большими градиентами в экспоненциальном пограничном слое. В соответствии с полученными оценками погрешность сплайна может неограниченно возрастать при стремлении малого параметра к нулю при фиксированном числе узлов сетки. Предложен модифицированный интерполяционный кубический сплайн с оценкой погрешности порядка  $O(N^{-4})$  равномерно по малому параметру, где  $N$  – число узлов сетки. Библиография: 10. Табл. 2.

**Ключевые слова:** сингулярное возмущение, пограничный слой, сетка Бахвалова, кубический сплайн, модификация, оценка погрешности.

**DOI:** 10.31857/S0044466921120073

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Кубические сплайны широко применяются для гладкой интерполяции функций [1], [2]. При применении разностных методов к решению сингулярно возмущенных задач используются сетки, сгущающиеся в пограничном слое. При этом возникает необходимость восстановления функции для всех значений независимой переменной. В случае кусочно-равномерной сетки Г.И. Шишкина [3] в [4] получены асимптотически точные оценки погрешности и показано, что сходимость интерполяционного процесса неравномерна по малому параметру. Построен модифицированный сплайн на сетке Шишкина, погрешность которого равномерна по малому параметру.

В данной работе исследуется кубическая сплайн-интерполяция [2] на сетке Н.С. Бахвалова [5], сгущающейся в пограничном слое. Получены оценки погрешности интерполяции, которые, однако, не являются равномерными по малому параметру  $\varepsilon$ . На основе численных экспериментов показано, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  погрешность интерполяции на погранслойной составляющей может неограниченно возрастать, и необходима разработка специальных методов интерполяции для данного класса задач. Предложен модифицированный интерполяционный сплайн, позволяющий построить интерполяционный процесс, сходящийся с порядком  $O(N^{-4})$  равномерно по малому параметру  $\varepsilon$ .

**Обозначения.** Зададим сетку интервала  $[0, 1]$ :

$$\Omega = \{x_n : x_n = x_{n-1} + h_n, n = 1, 2, \dots, N, x_0 = 0, x_N = 1\}.$$

Обозначим через  $S(\Omega, k, 1)$  пространство полиномиальных сплайнов степени  $k$  дефекта 1 [2] на сетке  $\Omega$ . В случае необходимости будем считать разбиение  $\Omega$  продолженным левее точки  $x = 0$

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 20-01-00650) и программы фундаментальных исследований СО РАН 1.1.3., проект 0314-2019-0009.

с шагом  $h_1 = x_1 - x_0$  и правее точки  $x = 1$  с шагом  $h_N = x_N - x_{N-1}$ . Под  $C$  и  $C_j$  будем подразумевать положительные постоянные, не зависящие от параметра  $\varepsilon$  и числа узлов сетки. При этом один и тот же символ  $C_j$  может обозначать разные константы. Будем писать  $f = O(g)$ , если справедлива оценка  $|f| \leq C|g|$  и  $f = O^*(g)$ , если  $f = O(g)$  и  $g = O(f)$ ;  $C[a, b]$ ,  $L_2[a, b]$  – пространства непрерывных и квадратично суммируемых на  $[a, b]$  функций с нормами  $\|\cdot\|_{C[a,b]}$  и  $\|\cdot\|_{L_2[a,b]}$  соответственно,  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение в  $L_2[0, 1]$ . Пусть  $h$  – постоянный шаг сетки  $\Omega$  вне области пограничного слоя  $[0, \sigma]$ .

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть интерполируемая функция  $u(x)$  представима в виде

$$u(x) = q(x) + \Phi(x), \quad x \in [0, 1], \quad (2.1)$$

где для некоторой постоянной  $C_1$  имеем

$$|q^{(j)}(x)| \leq C_1, \quad |\Phi^{(j)}(x)| \leq \frac{C_1}{\varepsilon^j} e^{-\alpha x/\varepsilon}, \quad 0 \leq j \leq 4, \quad (2.2)$$

где функции  $q(x)$  и  $\Phi(x)$  в явном виде не заданы,  $\alpha > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ . Декомпозиция (2.1) справедлива для решения сингулярно возмущенной краевой задачи [3].

Зададим сетку интервала  $[0, 1]$  на основе [5].

Пусть  $\sigma = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{4\varepsilon}{\alpha} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right\}$  при  $\varepsilon \leq e^{-1}$  и  $\sigma = 1/2$  при  $\varepsilon > e^{-1}$ .

В случае  $\sigma < \frac{1}{2}$  определим узлы сетки  $\Omega$  по формуле

$$x_n = g(n/N), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (2.3)$$

где

$$g(t) = \begin{cases} -\frac{4\varepsilon}{\alpha} \ln[1 - 2(1 - \varepsilon)t], & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \sigma + (2t - 1)(1 - \sigma), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (2.4)$$

Таким образом, при  $\sigma < \frac{1}{2}$  сетка  $\Omega$  равномерна на промежутке  $[\sigma, 1]$  с шагом  $h = 2(1 - \sigma)/N = O^*(1/N)$ .

В случае  $\sigma = \frac{1}{2}$  сетку  $\Omega$  определим как равномерную с шагом  $1/N$ .

Зададим кубический сплайн  $S_3(x, u) \in S(\Omega, 3, 1)$  на сетке  $\Omega$ , определяемый из условий интерполяции

$$S_3(x_n, u) = u(x_n), \quad 0 \leq n \leq N, \quad S_3'(0, u) = u'(0), \quad S_3'(1, u) = u'(1).$$

Целью работы является оценка погрешности сплайна  $S_3(x, u)$  на сетке, заданной в соответствии с работами [5], [6], в случае функции  $u(x)$ , представимой в виде (2.1), а также построение интерполяционного сплайна, позволяющего получить интерполяционный процесс, сходящийся равномерно по параметру  $\varepsilon$ .

## 3. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

**Теорема 1.** *Найдутся такие постоянные  $C_2$ ,  $C_3$  и  $\beta > 0$ , не зависящие от  $\varepsilon$ ,  $N$ , что при  $\varepsilon \leq C_2 N^{-1}$  будут справедливы оценки*

$$\|S_3(x, u) - u(x)\|_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq C_3 \begin{cases} N^{-4}, & 0 \leq n \leq N/2 - 2, \\ N^{-4} \ln\left(1 + \frac{1}{\varepsilon N}\right) + 1/N^4, & n = N/2 - 1, \\ \frac{N^{-5}}{\varepsilon} e^{-\beta(n-N/2)} + 1/N^4, & N/2 \leq n \leq N - 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

**Теорема 2.** Для произвольной постоянной  $C_2$  найдется такая постоянная  $C_4$ , что при  $C_2 N^{-1} \leq \varepsilon$  будет справедлива оценка

$$\|u(x) - S_3(x, u)\|_{C[0,1]} \leq C_4/N^4. \tag{3.2}$$

В связи с неравномерной по  $\varepsilon$  сходимостью кубического сплайна  $S_3(x, u)$  согласно оценкам (3.1) и результатам вычислительных экспериментов, приведенным ниже, по аналогии с [4] определим модифицированный интерполяционный сплайн. Положим  $\bar{x}_n = (x_n + x_{n+1})/2, n \in [N/2 - 1, N/2], \bar{x}_n = x_n, n \in [0, N/2 - 2] \cup [N/2 + 1, N]$ . Пусть  $\tilde{S}_3(x, u)$  – интерполяционный кубический сплайн, определяемый из условий

$$\tilde{S}_3(\bar{x}_n, u) = u(\bar{x}_n), \quad n \in [0, N], \quad \tilde{S}_3'(0, u) = u'(0), \quad \tilde{S}_3'(1, u) = u'(1). \tag{3.3}$$

**Теорема 3.** Найдутся такие не зависящие от  $\varepsilon, N$  постоянные  $C_2, C$ , что при  $\varepsilon \leq C_2 N^{-1}$  будет справедлива оценка

$$\|u(x) - \tilde{S}_3(x, u)\|_{C[0,1]} \leq CN^{-4}. \tag{3.4}$$

**Замечание 1.** Можно считать, что в теоремах 2, 3 константа  $C_2$  одна и та же. Иначе достаточно в качестве  $C_2$  взять минимум этих констант.

**Замечание 2.** В силу теорем 2, 3 применение интерполяционного сплайна  $\tilde{S}_3(x, u)$  при  $\varepsilon = O(N^{-1})$  и интерполяционного сплайна  $S_3(x, u)$  при  $N^{-1} = O(\varepsilon)$  позволяет получить равномерные по  $\varepsilon$  оценки погрешности порядка  $O(N^{-4})$ .

#### 4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ТЕОРЕМЫ 1

Как и в условии теоремы 1, в этом разделе считаем выполненным условие  $\varepsilon \leq C_2/N$ , где  $C_2$  – достаточно малая константа.

Ниже, не ограничивая общности, будем считать, что в (2.2)  $\alpha = 1$ , так как общий случай сводится к этому заменой  $\alpha x = y$  с сохранением оценок вида (2.2).

**Лемма 1.** При  $\sigma < \frac{1}{2}$  последовательность шагов  $h_n$  при  $n \leq N/2$  монотонно возрастает и справедливы формулы

$$h_n = 4\varepsilon \ln \left( 1 + \frac{2(1-\varepsilon)/N}{1 - 2(1-\varepsilon)\frac{n}{N}} \right), \quad h_{n-1} + h_n = 4\varepsilon \ln \left( 1 + \frac{4(1-\varepsilon)/N}{1 - 2(1-\varepsilon)\frac{n}{N}} \right), \tag{4.1}$$

$$h_n = \begin{cases} O^*\left(\frac{\varepsilon}{N/2 - n}\right), & 1 \leq n \leq N/2 - 1, \\ O^*\left(\varepsilon \ln \left(1 + \frac{1}{N\varepsilon}\right)\right), & n = N/2, \\ h = O^*(1/N), & N/2 + 1 \leq n \leq N. \end{cases} \tag{4.2}$$

Формула (4.1) следует из (2.3) и задания  $g(t)$ , формула (4.2) следует из (4.1).

Пусть

$$N_{n,1}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n}, & x \in [x_n, x_{n+1}] \\ \frac{x_{n+2} - x}{x_{n+2} - x_{n+1}}, & x \in [x_{n+1}, x_{n+2}] \\ 0, & x \notin (x_n, x_{n+2}), \end{cases} \quad -1 \leq n \leq N - 1, \tag{4.3}$$

есть  $B$ -сплайн первой степени,  $\|N_{n,1}\|_{L_2[0,1]} = \frac{1}{\sqrt{3}}(h_{n+1} + h_{n+2})^{1/2}$ . С учетом леммы 1

$$\|N_{n,1}\|_{L_2[0,1]} = \begin{cases} O^*((\varepsilon/(N/2 - n))^{1/2}), & 0 \leq n \leq N/2 - 3, \\ O^*\left(\left(\varepsilon \ln\left(1 + \frac{h}{\varepsilon}\right)\right)^{1/2}\right), & n = N/2 - 2, \\ O^*(h^{1/2}), & N/2 - 1 \leq n \leq N - 1. \end{cases}$$

Пусть  $\tilde{N}_{n,1}(x) = N_{n,1}(x)/\|N_{n,1}\|_{L_2[0,1]}$ ,  $0 \leq n \leq N - 2$ . При  $n = -1$  и  $n = N - 1$  положим  $\tilde{N}_{-1,1}(x) = \tilde{N}_{0,1}(x + h_1)$ ,  $\tilde{N}_{N-1,1}(x) = \tilde{N}_{N-2,1}(x - h_N)$ . Тогда с учетом двух последних формул получаем

$$\|\tilde{N}_{n,1}\|_{C[0,1]} = \begin{cases} O^*((\varepsilon/(N/2 - n))^{-1/2}), & 0 \leq n \leq N/2 - 3, \\ O^*\left(\left(\varepsilon \ln\left(1 + \frac{h}{\varepsilon}\right)\right)^{-1/2}\right), & n = N/2 - 2, \\ O^*(h^{-1/2}), & N/2 - 1 \leq n \leq N - 1. \end{cases} \tag{4.4}$$

Пусть  $e(x) = S_3(x, \Phi) - \Phi(x)$ . Изучим функцию  $e''(x) = S_3''(x, \Phi) - \Phi''(x)$ . Согласно [7, гл. 5], справедлива формула  $S_3''(x, \Phi) = P\Phi''(x)$ , где  $P$  – ортогональный в  $L_2[0, 1]$  проектор на  $S(\Omega, 1, 1)$ . Обозначим через  $\tilde{g}I(x) \in S(\Omega, 1, 1)$  линейный интерполянт  $\Phi''(x)$  в узлах сетки, а через  $gI(x)$  функцию из  $S(\Omega, 1, 1)$ , равную  $\tilde{g}I(x)$  при  $x \in [0, x_{N/2-2}]$  и нулю при  $x \in [x_{N/2-1}, 1]$ . Очевидно, что  $gI(x) \in S(\Omega, 1, 1)$ . Тогда имеем

$$e''(x) = P(\Phi''(x) - gI(x)) + (gI(x) - \Phi''(x)). \tag{4.5}$$

Представим функцию  $P(\Phi''(x) - gI(x))$  в виде

$$P(\Phi''(x) - gI(x)) = \sum_{n=-1}^{N-1} \alpha_n \tilde{N}_{n,1}(x). \tag{4.6}$$

Из условий ортогональности разности  $S_3''(x, \Phi) - \Phi''(x)$  пространству  $S(\Omega, 1, 1)$  получаем систему линейных уравнений для коэффициентов

$$\sum_{n=-1}^{N-1} \alpha_n (\tilde{N}_{n,1}, \tilde{N}_{k,1}) = (\Phi'' - gI, \tilde{N}_{k,1}), \hat{\rho} - 1 \leq k \leq N - 1. \tag{4.7}$$

Представим систему (4.7) в матричном виде

$$\Gamma \alpha = F, \tag{4.8}$$

где  $\Gamma = \{\gamma_{nk}\} = \{(\tilde{N}_{n,1}, \tilde{N}_{k,1})\}$  – матрица Грама нормированных  $B$ -сплайнов, где  $0 \leq \gamma_{nk} \leq 1$ ,

$$F = (F_{-1}, F_0, \dots, F_{N-1})^T, \quad F_j = (\Phi'' - gI, \tilde{N}_{j,1}). \tag{4.9}$$

**Лемма 2.** Матрица  $\Gamma$  имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma &= \text{tridiag}\{a_n, c_n, b_n\}, \quad -1 \leq n \leq N - 1, \quad a_{-1} = b_{N-1} = 0, \\ a_{n+1} &= b_n = O^*(1) > 0, \quad 0 \leq n \leq N - 2, \quad n \neq N/2 - 3, \quad n \neq N/2 - 2, \\ a_{N/2-1} &= b_{N/2-2} = O^*\left(\left(\frac{\varepsilon \ln(1 + h/\varepsilon)}{h}\right)^{1/2}\right), \\ a_{N/2-2} &= b_{N/2-3} = O^*\left(\left(\frac{1}{\ln(1 + h/\varepsilon)}\right)^{1/2}\right), \\ c_n &= 1, \quad 0 \leq n \leq N - 2, \quad c_{-1} = c_{N-1} = 1/\sqrt{2}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Матрица  $\Gamma$  имеет строгое диагональное преобладание по строкам с показателем преобладания  $1/\sqrt{2}$ .

Доказательство получается вычислением интегралов в (4.7) с учетом (4.2)–(4.4). Обозначим через  $\text{cond}_2 \Gamma$  спектральное число обусловленности  $\Gamma$ .

**Следствие 1.** Матрица  $\Gamma$  имеет вид

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix},$$

где  $\Gamma_{11}, \Gamma_{22}$  – трехдиагональные матрицы порядка  $(N/2) \times (N/2)$  и  $(N/2 + 1) \times (N/2 + 1)$  соответственно, с диагональным преобладанием по строкам с показателем преобладания  $1/\sqrt{2}$ ,  $\text{cond}_2 \Gamma = O(1)$ ,  $\text{cond}_2 \Gamma_{ii} = O(1)$ ,  $i = 1, 2$ ;  $\Gamma_{12}$  и  $\Gamma_{21}$  – прямоугольные матрицы с единственным ненулевым элементом порядка  $O^*\left(\left(\frac{\varepsilon \ln(1 + h/\varepsilon)}{h}\right)^{1/2}\right)$  в левом нижнем и правом верхнем углах соответственно. Матрица  $\Gamma_{11}$  имеет вид

$$\Gamma_{11} = \begin{pmatrix} \hat{\Gamma}_{11} & \hat{\Gamma}_{12} \\ \hat{\Gamma}_{21} & \hat{\Gamma}_{22} \end{pmatrix},$$

где  $\hat{\Gamma}_{11}$  – трехдиагональная квадратная матрица порядка  $(N/2 - 1) \times (N/2 - 1)$  со строгим диагональным преобладанием по строкам с показателем преобладания  $1/\sqrt{2}$ ,  $\hat{\Gamma}_{22} = 1$ ,  $\hat{\Gamma}_{21} = (0 \dots 0 a_{N/2-2})$ ;  $\hat{\Gamma}_{12} = \hat{\Gamma}_{21}^T$  – матрицы с единственным ненулевым элементом порядка  $O^*((1 + h/\varepsilon)^{-1/2})$ .

**Лемма 3.** Матрицы  $\Gamma_{11}, \Gamma_{22}$  обратимы, и для элементов обратных матриц  $\tilde{\gamma}_{nk}^{ji}$  при  $i = 1, 2$  справедливы оценки  $|\tilde{\gamma}_{nk}^{ji}| \leq C e^{-\beta|n-k|}$ . Аналогичные оценки справедливы для элементов матрицы  $\hat{\Gamma}_{11}$ . Здесь  $\beta > 0$ ,  $C, \beta$  не зависят от  $N, \varepsilon$ .

**Доказательство.** Обратимость матриц  $\Gamma_{11}, \Gamma_{22}$  и оценки элементов вытекают из строгого диагонального преобладания с показателем преобладания  $1/\sqrt{2}$  и теоремы Демко [8]. Лемма доказана.

**Лемма 4.** Для матрицы  $\Gamma_{11}^{-1}$  справедливо представление

$$\Gamma_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{\Gamma}_{11} & \bar{\Gamma}_{12} \\ \bar{\Gamma}_{21} & \bar{\Gamma}_{22} \end{pmatrix},$$

где элементы  $\bar{\gamma}_{nk}^{ij}$  матриц  $\bar{\Gamma}_{ij}$  при некотором  $\beta > 0$ , не зависящим от  $\varepsilon, N$ , удовлетворяют оценкам

$$|\bar{\gamma}_{nk}^{11}| \leq C e^{-\beta|n-k|}, \quad -1 \leq n, k \leq N/2 - 3; \quad |\bar{\Gamma}_{22}| \leq C, \tag{4.11}$$

$$|\bar{\gamma}_{nk}^{ij}| \leq C(\ln(1 + h/\varepsilon))^{-1/2} e^{-\beta|n-k|}, \quad n = N/2 - 2, \quad -1 \leq k \leq N/2 - 3 \quad \text{при} \quad i = 1, \quad j = 2; \tag{4.12}$$

$$k = N/2 - 2, \quad -1 \leq n \leq N/2 - 3 \quad \text{при} \quad i = 2, \quad j = 1.$$

**Доказательство.** Применяя блочный метод Гаусса, находим

$$\Gamma_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{\Gamma}_{11}^{-1} + \hat{\Gamma}_{11}^{-1} \hat{\Gamma}_{12} \tilde{\Gamma}^{-1} \hat{\Gamma}_{21} \hat{\Gamma}_{11}^{-1} & \hat{\Gamma}_{11}^{-1} \hat{\Gamma}_{12} \tilde{\Gamma}^{-1} \\ \tilde{\Gamma}^{-1} \hat{\Gamma}_{21} \hat{\Gamma}_{11}^{-1} & \tilde{\Gamma}^{-1} \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

где  $\tilde{\Gamma} = \hat{\Gamma}_{22} - \hat{\Gamma}_{21} \hat{\Gamma}_{11}^{-1} \hat{\Gamma}_{12}$ . Здесь обратимость всех блоков и равномерная по  $\varepsilon, N$  ограниченность норм всех обратных матриц вытекает из следствия 1. Отсюда получаем, что и  $\tilde{\Gamma}^{-1}$  равномерно ограничена по норме. Из теоремы Демко [8] получаем, что элементы матрицы  $\hat{\Gamma}_{11}^{-1}$  удовлетворяют оценкам вида (4.11). С учетом этого оценки (4.11), (4.12) вытекают из (4.13) и следствия 1. Лемма доказана.

**Лемма 5.** Для матрицы  $\Gamma^{-1}$  справедливо представление

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}_{11} & \tilde{\Gamma}_{12} \\ \tilde{\Gamma}_{21} & \tilde{\Gamma}_{22} \end{pmatrix},$$

где элементы  $\tilde{\gamma}_{nk}^{ij}$  матриц  $\tilde{\Gamma}_{ij}$  при некоторой постоянной  $\beta > 0$ , не зависящей от  $\epsilon$ ,  $N$ , удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} |\tilde{\gamma}_{nk}^{11}| \leq C e^{-\beta|n-k|}, \quad -1 \leq n, k \leq N/2 - 3; \quad |\tilde{\gamma}_{nk}^{22}| \leq C e^{-\beta|n-k|}, \\ N/2 - 1 \leq n, \quad k \leq N - 1, \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} |\tilde{\gamma}_{nk}^{11}| \leq (\ln(1 + h/\epsilon))^{-1/2} C e^{-\beta|n-k|}, \quad n = N/2 - 2, \quad -1 \leq k \leq N/2 - 3, \\ \text{или} \quad k = N/2 - 2, \quad -1 \leq n \leq N/2 - 3, \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$|\tilde{\gamma}_{nk}^{ij}| \leq C(\epsilon/h)^{1/2} e^{-\beta|n-k|}, \tag{4.16}$$

где  $-1 \leq n \leq N/2 - 3$ ,  $N/2 - 1 \leq k \leq N - 1$  при  $i = 1, j = 2$ ;  $-1 \leq k \leq N/2 - 3$ ,  $N/2 - 1 \leq n \leq N - 1$  при  $i = 2, j = 1$ ;

$$|\tilde{\gamma}_{nk}^{ij}| \leq \left( \frac{\epsilon \ln(1 + h/\epsilon)}{h} \right)^{1/2} e^{-\beta|n-k|}, \tag{4.17}$$

где  $n = N/2 - 2$ ,  $N/2 - 1 \leq k \leq N - 1$  при  $i = 1, j = 2$ ;  $k = N/2 - 3$ ,  $N/2 - 1 \leq n \leq N - 1$  при  $i = 2, j = 1$ .

**Доказательство.** Применяя блочный метод Гаусса аналогично (4.13), находим

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^{-1} + \Gamma_{11}^{-1} \Gamma_{12} \tilde{\Gamma}^{-1} \Gamma_{21} \Gamma_{11}^{-1} & \Gamma_{11}^{-1} \Gamma_{12} \tilde{\Gamma}^{-1} \\ \tilde{\Gamma}^{-1} \Gamma_{21} \Gamma_{11}^{-1} & \tilde{\Gamma}^{-1} \end{pmatrix}, \tag{4.18}$$

где  $\tilde{\Gamma} = \Gamma_{22} - \Gamma_{21} \Gamma_{11}^{-1} \Gamma_{12}$ . Здесь обратимость всех блоков и равномерная по  $\epsilon$ ,  $N$  ограниченность всех обратных матриц вытекают из следствия 1. Более того, из теоремы Демко [8] вытекает, что элементы матрицы  $\Gamma_{11}^{-1}$  удовлетворяют оценкам вида (4.14), поэтому в силу вида матриц  $\Gamma_{12}$ ,  $\Gamma_{21}$  таким же оценкам удовлетворяют и элементы матрицы  $\tilde{\Gamma}$ . Но для матриц, имеющих обратную, ограниченную в спектральной норме константой, не зависящей от порядка матрицы и параметров, определяющих ее элементы, в [9] было доказано, что и элементы обратной матрицы  $\tilde{\Gamma}^{-1}$  удовлетворяют таким же оценкам, возможно, с другой константой  $\beta_1 \in (0, 1)$ , также не зависящей от  $N$ ,  $\epsilon$ . Там же было доказано, что элементы произведения двух матриц, удовлетворяющих оценкам вида (4.14), удовлетворяют таким же оценкам. Отсюда вытекают оценки (4.14).

Оценки (4.15) вытекают из (4.18), леммы 4, следствия 1 и оценок вида (4.14) для элементов  $\tilde{\Gamma}^{-1}$ . Докажем оценки (4.16) при  $i = 1, j = 2$ . Пусть

$$\tilde{\Gamma}^{-1} = \{\tilde{\gamma}_{nk}, N/2 - 1 \leq n, k \leq N - 1\},$$

$$\Gamma_{12} = \{\gamma_{nk}, 1 \leq n \leq N/2 - 2, N/2 - 1 \leq k \leq N - 1\},$$

$\Gamma_{11}^{-1} = \{\gamma_{nk}^{-1}, 1 \leq n, k \leq N/2 - 2\}$ . Поскольку у матрицы  $\Gamma_{12}$  отличен от нуля единственный элемент  $\gamma_{(N/2-2)(N/2-1)}$ , то, перемножая матрицы, находим для элементов матрицы  $\tilde{\Gamma}_{12}^{-1}$ :  $\tilde{\gamma}_{nk}^{12} = \gamma_{n(N/2-2)}^{-1} \gamma_{(N/2-2)(N/2-1)} \tilde{\gamma}_{(N/2-2)k}$ . Учитывая оценки (4.12), (4.10), (4.14) для первого, второго и третьего сомножителей соответственно, получаем (4.16). При  $i = 2, j = 1$  оценки (4.17) получаются в силу симметрии  $\Gamma^{-1}$ . Лемма доказана.

**Лемма 6.** Для элементов  $F_n$  из (4.9) справедливы оценки

$$F_n = \begin{cases} O(h_{n+1}^{5/2} \epsilon^{-4} e^{-x_{n+1}/\epsilon}), & -1 \leq n \leq N/2 - 3, \\ O((\epsilon \ln(1 + h/\epsilon))^{-1/2} \epsilon^{-1} e^{-x_{N/2-1}/\epsilon}), & n = N/2 - 2, \\ O(h^{-1/2} \epsilon^{-1} e^{-x_n/\epsilon}), & N/2 - 1 \leq n \leq N - 1. \end{cases} \tag{4.19}$$

Доказательство получается прямым вычислением интегралов в (4.9) с учетом (4.4) и оценки погрешности формулы линейной интерполяции.

**Лемма 7.** Для коэффициентов  $\alpha_n$  в разложении  $P(\Phi''(x) - gI(x))$  по  $\tilde{N}_{n,1}(x)$  справедливы оценки

$$\alpha_n = \begin{cases} O(h_{n+1}^{5/2} \varepsilon^{-4} e^{-x_{n+1}/\varepsilon}), & -1 \leq n \leq N/2 - 3, \\ O((\varepsilon \ln(1 + h/\varepsilon))^{-1/2} \varepsilon^{-1} e^{-x_{N/2-1}/\varepsilon}), & n = N/2 - 2, \\ O(h^{-1/2} \varepsilon^{-1} e^{-x_{N/2-1}/\varepsilon} e^{-\beta(n-N/2)}), & N/2 - 1 \leq n \leq N - 1. \end{cases} \quad (4.20)$$

**Доказательство.** Имеем  $\alpha = \Gamma^{-1}F$ . Пусть  $\alpha = (\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)})$ , где  $\dim(\alpha^{(1)}) = N/2 - 1$ ,  $\dim(\alpha^{(2)}) = 1$ . Тогда согласно лемме 5, для произвольного  $n \in [-1, N/2 - 3]$  справедливо представление

$$\alpha_n^{(1)} = \alpha_n = \sum_{k=-1}^{N/2-3} \tilde{\gamma}_{nk}^{11} F_k \tilde{\gamma}_{n(N/2-2)}^{11} + F_{N/2-2} + \sum_{k=N/2-1}^{N-1} \tilde{\gamma}_{nk}^{12} F_k. \quad (4.21)$$

В силу (4.14), (4.19) имеем

$$\left| \sum_{k=-1}^{N/2-3} \tilde{\gamma}_{nk}^{11} F_k \right| \leq \frac{C}{\varepsilon^4} h_{n+1}^{5/2} e^{-x_{n+1}/\varepsilon} \sum_{k=-1}^{N/2-3} e^{-\beta|n-k|} e^{-(x_{k+1}-x_{n+1})/\varepsilon} \left( \frac{h_{k+1}}{h_{n+1}} \right)^{5/2}. \quad (4.22)$$

Далее, так как  $h_k/h_n \leq 1$  при  $k \leq n$ , учитывая (4.2), получаем

$$\sum_{k=-1}^n e^{-\beta|n-k|} e^{-(x_{k+1}-x_{n+1})/\varepsilon} \left( \frac{h_{k+1}}{h_{n+1}} \right)^{5/2} \leq \sum_{k=-1}^n e^{\beta(k-n)} e^{\sum_{s=k+1}^{n+1} h_s/\varepsilon} \left( \frac{h_{k+1}}{h_{n+1}} \right)^{5/2} \leq \sum_{k=-1}^n e^{\beta(k-n)} e^{C \ln \frac{N/2-k+1}{N/2-n+1}} = \quad (4.23)$$

$$= \sum_{k=-1}^n e^{\beta(k-n)} \left( \frac{N/2 - k + 1}{N/2 - n + 1} \right)^C \leq \sum_{k=-1}^n e^{\beta(k-n)} (n - k + 1)^C \leq C_1;$$

$$\sum_{k=n+1}^{N/2-3} e^{-\beta|n-k|} e^{-(x_{k+1}-x_{n+1})/\varepsilon} \left( \frac{h_{k+1}}{h_{n+1}} \right)^{5/2} \leq \sum_{k=n+1}^{N/2-3} e^{\beta(n-k)} \left( \frac{N/2 - n}{N/2 - k} \right)^{5/2} \leq C_2. \quad (4.24)$$

В силу (4.15), (4.19), (4.2) имеем

$$\begin{aligned} \left| \tilde{\gamma}_{n(N/2-2)}^{11} F_{N/2-2} \right| &\leq \frac{C}{\varepsilon} h_{n+1}^{5/2} e^{-x_{n+1}/\varepsilon} \varepsilon^4 h_{n+1}^{-5/2} e^{x_{n+1}/\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon}{h} \right)^{1/2} e^{\beta(n-N/2)} \times (\varepsilon \ln(1 + h/\varepsilon))^{-1/2} \frac{1}{\varepsilon} e^{-x_{N/2-1}/\varepsilon} \leq \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^4} h_{n+1}^{5/2} e^{-x_{n+1}/\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon}{h \ln(1 + h/\varepsilon)} \right)^{1/2} (N/2 - n)^{5/2} e^{-\beta|n-N/2|} e^{(x_{n+1}-x_{N/2-1})/\varepsilon} \leq \frac{C_1}{\varepsilon^4} h_{n+1}^{5/2} e^{-x_{n+1}/\varepsilon}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Учитывая (4.16), (4.19), (4.2), имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=N/2-1}^{N-1} \tilde{\gamma}_{nk}^{12} F_k \right| &\leq \frac{C}{\varepsilon} h_{n+1}^{5/2} e^{-x_{n+1}/\varepsilon} \sum_{k=N/2-1}^{N-1} \varepsilon^4 h_{n+1}^{-5/2} e^{x_{n+1}/\varepsilon} \left( \frac{\varepsilon}{h} \right)^{1/2} e^{-\beta|n-k|} h^{-1/2} \varepsilon^{-1} e^{-x_k/\varepsilon} \leq \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^4} h_{n+1}^{5/2} e^{-x_{n+1}/\varepsilon} \sum_{k=N/2-1}^{N-1} \frac{\varepsilon}{h} (N/2 - n)^{5/2} e^{(x_{n+1}-x_k)/\varepsilon} e^{-\beta|n-k|} \leq \frac{C_2}{\varepsilon^4} h_{n+1}^{5/2} e^{-x_{n+1}/\varepsilon} \sum_{k=N/2-1}^{N-1} e^{-\beta/2|n-k|} \leq \frac{C_3}{\varepsilon^4} h_{n+1}^{5/2} e^{-x_{n+1}/\varepsilon}. \end{aligned}$$

Первая оценка в (4.20) получена. Теперь оценим  $\alpha^{(2)}$ . Имеем

$$\alpha^{(2)} = \sum_{k=-1}^{N/2-3} \tilde{\gamma}_{(N/2-2)k}^{11} F_k + \tilde{\gamma}_{(N/2-2)(N/2-2)}^{11} F_{N/2-2} + \sum_{k=N/2-1}^{N-1} \tilde{\gamma}_{(N/2-2)k}^{12} F_k. \quad (4.26)$$

Аналогично имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=-1}^{N/2-3} \tilde{\gamma}_{(N/2-2)k}^{11} F_k \right| &\leq C(\varepsilon \ln(1 + h/\varepsilon))^{-1/2} \varepsilon^{-1} e^{-x_{N/2-1}/\varepsilon} \sum_{k=-1}^{N/2-3} (\varepsilon \ln(1 + h/\varepsilon))^{1/2} e^{x_{N/2-1}/\varepsilon} \varepsilon (\ln(1 + h/\varepsilon))^{-1/2} \times \\ &\times e^{-\beta|N/2-k|} h_{k+1}^{5/2} \frac{1}{\varepsilon} e^{-x_{k+1}/\varepsilon} \leq C_1(\varepsilon \ln(1 + h/\varepsilon))^{-1/2} \varepsilon^{-1} e^{-x_{N/2-1}/\varepsilon} \sum_{k=-1}^{N/2-3} (N/2 - 1 - k)^{-5/2} \times \\ &\times e^{-\beta|N/2-k|} (N/2 - k + 1)^C \leq C_2(\varepsilon \ln(1 + h/\varepsilon))^{-1/2} \varepsilon^{-1} e^{-x_{N/2-1}/\varepsilon}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Так как норма  $\Gamma^{-1}$  равномерно ограничена, то  $|\tilde{\gamma}_{(N/2-2)(N/2-2)}^{11}| \leq C$ . Учитывая (4.19), имеем

$$|\tilde{\gamma}_{(N/2-2)(N/2-2)}^{11} F_{N/2-2}| \leq C(\epsilon \ln(1 + h/\epsilon))^{-1/2} \epsilon^{-1} e^{-x_{N/2-1}/\epsilon}, \tag{4.28}$$

$$\left| \sum_{k=N/2-1}^{N-1} \tilde{\gamma}_{(N/2-2)k}^{12} F_k \right| \leq C(\epsilon \ln(1 + h/\epsilon))^{-1/2} \epsilon^{-1} e^{-x_{N/2-1}/\epsilon} \times$$

$$\times \left( (\epsilon \ln(1 + h/\epsilon))^{1/2} \epsilon e^{x_{N/2-1}/\epsilon} (\epsilon \ln(1 + h/\epsilon))^{1/2} h^{-1/2} e^{-x_{N/2-1}/\epsilon} + \right. \tag{4.29}$$

$$\left. + \sum_{k=N/2}^{N-1} (\epsilon \ln(1 + h/\epsilon))^{1/2} \epsilon e^{x_{N/2-1}/\epsilon} (\epsilon \ln(1 + h/\epsilon))^{1/2} e^{-\beta|N/2-k|} h^{-1/2} \epsilon^{-1} e^{-x_k/\epsilon} \right) \leq$$

$$\leq C_2(\epsilon \ln(1 + h/\epsilon))^{-1/2} \epsilon^{-1} e^{-x_{N/2-1}/\epsilon}.$$

Наконец,

$$\alpha^{(3)} = \sum_{k=1}^{N/2-3} \tilde{\gamma}_{nk}^{21} F_k + \tilde{\gamma}_{n(N/2-2)}^{21} F_{N/2-2} + \sum_{k=N/2-1}^{N-1} \tilde{\gamma}_{nk}^{22} F_k, \tag{4.30}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{N/2-3} \tilde{\gamma}_{nk}^{21} F_k \right| \leq Ch^{-1/2} \epsilon^{-1} e^{-x_{N/2-1}/\epsilon} e^{-\beta(n-N/2)} \sum_{k=1}^{N/2-3} h^{1/2} \epsilon e^{x_{N/2-1}/\epsilon} e^{\beta(n-N/2)} \left(\frac{\epsilon}{h}\right)^{1/2} h_k^{5/2} \epsilon^{-4} e^{-x_{k+1}/\epsilon}; \tag{4.31}$$

$$\sum_{k=1}^{N/2-3} h^{1/2} e^{x_{N/2-1}/\epsilon} e^{\beta(n-N/2)} \left(\frac{\epsilon}{h}\right)^{1/2} h_k^{5/2} \epsilon^{-3} e^{-x_{k+1}/\epsilon} = \sum_{k=1}^{N/2-3} h_k^{5/2} \epsilon^{-5/2} e^{\beta(k-N/2)} \times$$

$$\times e^{(x_{N/2-1}-x_{k+1})/\epsilon} \leq C_1 \sum_{k=1}^{N/2-3} (N/2 - k)^{-5/2} e^{\beta(k-N/2)} (N/2 - k - 1)^C \leq C_2, \tag{4.32}$$

$$|\tilde{\gamma}_{n(N/2-2)}^{21} F_{N/2-2}| \leq Ch^{-1/2} \epsilon^{-1} e^{-x_{N/2-1}/\epsilon} e^{-\beta(n-N/2)} h^{1/2} \epsilon e^{x_{N/2-1}/\epsilon} e^{\beta(n-N/2)} \left(\frac{\epsilon \ln(1 + h/\epsilon)}{h}\right)^{1/2} e^{-\beta(n-N/2)} \times$$

$$\times (\epsilon \ln(1 + h/\epsilon))^{-1/2} \epsilon^{-1} e^{-x_{N/2-1}/\epsilon} = Ch^{-1/2} \epsilon^{-1} e^{-x_{N/2-1}/\epsilon} e^{-\beta(n-N/2)}; \tag{4.33}$$

$$\left| \sum_{k=N/2-1}^{N-1} \tilde{\gamma}_{nk}^{22} F_k \right| \leq C_1 h^{-1/2} \epsilon^{-1} e^{-x_{N/2-1}/\epsilon} e^{-\beta(n-N/2)} \sum_{k=N/2-1}^{N-1} h^{1/2} \epsilon e^{x_{N/2-1}/\epsilon} e^{\beta(n-N/2)} e^{-\beta|n-k|} h^{-1/2} \epsilon^{-1} e^{-x_k/\epsilon}. \tag{4.34}$$

Покажем, что последняя сумма в (4.34) является равномерно ограниченной. Эту сумму запишем в виде

$$\sum_{k=N/2-1}^{N-1} e^{\frac{x_{N/2-1}-x_k}{\epsilon}} e^{\beta(n-N/2)} e^{-\beta|n-k|} = \sum_{k=N/2-1}^n (\dots) + \sum_{k=n+1}^{N-1} (\dots) = \Sigma_1 + \Sigma_2. \tag{4.35}$$

Тогда

$$\Sigma_1 = \sum_{k=N/2-1}^n e^{\frac{x_{N/2-1}-x_k}{\epsilon}} e^{\beta(k-N/2)} = e^{-\beta} + \sum_{k=N/2}^n e^{-(k-N/2)\frac{h}{\epsilon} + \beta(k-N/2)} = e^{-\beta} + \sum_{k=N/2}^n e^{-(k-N/2)(h/\epsilon - \beta)} \leq C_1, \tag{4.36}$$

если  $h/\epsilon \geq 2\beta$ . Далее, при  $h/\epsilon \geq \beta$  имеем

$$\Sigma_2 = \sum_{k=n+1}^{N-1} e^{\frac{x_{N/2-1}-x_k}{\epsilon}} e^{\beta(2n-k-N/2)} \leq \sum_{k=n+1}^{N-1} e^{-2\beta(k-n)} \leq C_1. \tag{4.37}$$

Утверждение леммы следует из (4.21)–(4.37).

**Лемма 8.** *Найдутся такие константы  $C > 0, \beta > 0$ , не зависящие от  $\epsilon, N$ , что будут справедливы оценки*

$$\|P(\Phi'' - gI)(x)\|_{C[x_n, x_{n+1}]} = \begin{cases} O\left(\frac{C}{\epsilon^4} h_{n+1}^2 e^{-x_n/\epsilon}\right), & 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 2, \\ O\left(\frac{C}{\epsilon^2 \ln(1 + h/\epsilon)} e^{-x_{N/2-1}/\epsilon}\right), & n = \frac{N}{2} - 1, \\ O\left(\frac{1}{\epsilon h} e^{-\frac{x_{N/2-1}}{\epsilon}} e^{-\beta|n-\frac{N}{2}|}\right), & \frac{N}{2} \leq n \leq N. \end{cases} \tag{4.38}$$

**Доказательство.** Поскольку в каждом узле  $x_n$  отличен от нуля только один  $B$ -сплайн  $N_{n-1,1}$ , то справедливо равенство  $P(\Phi'' - gI)(x_n) = \alpha_{n-1} \tilde{N}_{n-1,1}(x_n)$ . Отсюда, из леммы 7 и оценок (4.4) следует утверждение леммы.

**Лемма 9.** Пусть  $e(x) = S_3(x, \Phi) - \Phi(x)$ . Справедливы оценки

$$\|e''(x)\|_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq \frac{C}{\varepsilon^4} h_{n+1}^2 e^{-x_n/\varepsilon}, \quad 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 2. \tag{4.39}$$

**Доказательство.** В силу (4.5), (4.38) достаточно оценить  $\|gI(x) - \Phi''(x)\|_{C[x_n, x_{n+1}]}$ . Это выражение представляет собой погрешность формулы линейной интерполяции на интервале  $[x_n, x_{n+1}]$ , поэтому для него справедлива оценка (4.39). Это доказывает лемму.

### 5. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ТЕОРЕМЫ 2

Как и в ограничениях теоремы 2, в этом разделе предполагаем, что  $\varepsilon \geq C_2 N^{-1}$ .

**Лемма 10.** При  $\sigma < \frac{1}{2}$  последовательность шагов  $h_n$ ,  $n \leq N/2$ , монотонно возрастает и справедливы оценки

$$h_n = \begin{cases} O^*\left(\frac{h}{1 + (h/\varepsilon)(N/2 - n)}\right), & 1 \leq n \leq N/2, \\ O^*(h), & N/2 + 1 \leq n \leq N. \end{cases} \tag{5.1}$$

**Доказательство.** В силу (2.3), при  $1 \leq n \leq N/2$  имеем

$$\begin{aligned} h_n &= -4\varepsilon \ln\left(1 - 2(1 - \varepsilon)\frac{n}{N}\right) + 4\varepsilon \ln\left(1 - 2(1 - \varepsilon)\frac{n-1}{N}\right) = 4\varepsilon \ln\left(1 + \frac{2(1 - \varepsilon)/N}{1 - 2(1 - \varepsilon)n/N}\right) = \\ &= O^*\left(\varepsilon \frac{2(1 - \varepsilon)/N}{1 - 2(1 - \varepsilon)n/N}\right) = O^*\left(\varepsilon \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon N/2 + (1 - \varepsilon)(N/2 - n)}\right) = O^*\left(\frac{h}{1 + (h/\varepsilon)(N/2 - n)}\right), \end{aligned}$$

и первая оценка в (5.1) доказана. Вторая оценка очевидна, так как при  $N/2 + 1 \leq n \leq N$  шаги сетки имеют одинаковую длину  $h$ . Лемма доказана.

Рассмотрим  $B$ -сплайн (4.3). Тогда  $\|N_{n,1}\|_{L_2[0,1]} = \frac{1}{\sqrt{3}}(h_{n+1} + h_{n+2})^{1/2}$ , и с учетом (5.1)  $\|N_{n,1}\|_{L_2[0,1]} = O^*(h_{n+1}^{1/2})$ ,  $-1 \leq n \leq N - 1$ .

Пусть  $\tilde{N}_{n,1}(x) = N_{n,1}(x)/\|N_{n,1}\|_{L_2[0,1]}$ . Тогда

$$\|\tilde{N}_{n,1}\|_{C[0,1]} = O^*(h_{n+1}^{-1/2}), \quad -1 \leq n \leq N - 1. \tag{5.2}$$

Пусть  $e(x) = S_3(x, \Phi) - \Phi(x)$ . Повторяя рассуждения, приведенные после леммы 1, и используя те же обозначения, приходим к системе уравнений вида (4.7).

**Лемма 11.** Матрица  $\Gamma$  из (4.8) имеет вид:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \text{tridiag}\{a_n, c_n, b_n\}, \quad -1 \leq n \leq N - 1, \quad a_{-1} = b_{N-1} = 0, \\ a_{n+1} &= b_n = O^*(1) > 0, \quad 0 \leq n \leq N - 2, \\ c_n &= 1, \quad 0 \leq n \leq N - 2, \quad c_{-1} = c_{N-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Матрица  $\Gamma$  имеет строгое диагональное преобладание по строкам с показателем преобладания  $1/\sqrt{2}$ .

Доказательство получается вычислением интегралов в (4.7) с учетом (5.1), (5.2).

**Лемма 12.** Матрица  $\Gamma$  обратима, и для элементов обратной матрицы  $\Gamma^{-1} = \{\tilde{\gamma}_{nk}\}$  справедливы оценки

$$|\tilde{\gamma}_{nk}| \leq C e^{-\beta|n-k|}, \quad \beta > 0. \tag{5.3}$$

**Доказательство.** Обратимость матрицы  $\Gamma$  и оценки элементов вытекают из строгого диагонального преобладания с показателем преобладания  $1/\sqrt{2}$  и теоремы Демко [8]. Лемма доказана.

**Лемма 13.** Для элементов  $F_n$  справедливы оценки

$$F_n = O(h_{n+1}^{5/2} \varepsilon^{-4} e^{-x_n/\varepsilon}), \quad -1 \leq n \leq N-1. \tag{5.4}$$

Доказательство получается прямым вычислением интегралов в (4.9), с учетом (5.2) и оценок погрешности линейной интерполяции.

**Лемма 14.** Найдется достаточно малая постоянная  $C_2$ , что при  $1/N \leq C_2\varepsilon$  для коэффициентов  $\alpha_n$  в (4.6) справедливы оценки

$$|\alpha_n| \leq Ch_{n+1}^{5/2} \varepsilon^{-4} e^{-x_n/\varepsilon}, \quad -1 \leq n \leq N-1. \tag{5.5}$$

**Доказательство.** В силу (5.3), (5.4) имеем

$$\begin{aligned} |\alpha_n| &\leq \left| \sum_{k=-1}^{N-1} \tilde{Y}_{nk} F_{nk} \right| \leq \sum_{k=-1}^{N-1} |\tilde{Y}_{nk}| \cdot |F_{nk}| \leq C \sum_{k=-1}^{N-1} e^{-\beta|n-k|} h_{k+1}^{5/2} \varepsilon^{-4} e^{-x_k/\varepsilon} = \\ &= Ch_{n+1}^{5/2} \varepsilon^{-4} e^{-x_n/\varepsilon} \sum_{k=-1}^{N-1} e^{-\beta|n-k|} e^{(x_n-x_k)/\varepsilon} \left( \frac{h_{k+1}}{h_{n+1}} \right)^{5/2}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Покажем, что сумма в (5.6) ограничена константой. Имеем

$$\sum_{k=-1}^{N-1} e^{-\beta|n-k|} e^{(x_n-x_k)/\varepsilon} \left( \frac{h_{k+1}}{h_{n+1}} \right)^{5/2} = \sum_{k=-1}^n (\dots) + \sum_{k=n+1}^{N-1} (\dots) = \Sigma_1 + \Sigma_2. \tag{5.7}$$

Оценим  $\Sigma_1$ . В силу (5.1) получаем при  $n > k$

$$\frac{x_n - x_k}{\varepsilon} = \frac{h_{k+1} + \dots + h_n}{\varepsilon} \leq \frac{C_3}{N\varepsilon} (n - k) \leq (\beta/2)(n - k), \tag{5.8}$$

если  $\varepsilon \geq 2C_3/(N\beta)$ . Это условие выполнится, если задать  $C_2 = \beta/(2C_3)$ . Учитываем, что в силу (5.1)  $h_{k+1}/h_{n+1} = O(1)$ , поэтому при таком задании  $C_2$

$$\Sigma_1 \leq C_4. \tag{5.9}$$

Наконец, в силу (5.1) при  $n \leq k$  имеем

$$\frac{h_{k+1}}{h_{n+1}} \leq C \max \left\{ \frac{|N/2 - n| + 1}{|N/2 - k| + 1}, k - n, 1 \right\} \leq C(k - n + 1). \tag{5.10}$$

Поэтому

$$\Sigma_2 \leq C_5 \sum_{k=n+1}^{N-1} e^{\frac{\beta}{2}|n-k|} (k - n + 1)^{5/2} \leq C_6. \tag{5.11}$$

Из (5.6)–(5.11) вытекает (5.5). Лемма доказана.

**Лемма 15.** Пусть для произвольных постоянных  $C_2, C_3$  выполняется оценка  $C_2\varepsilon \leq 1/N \leq C_3\varepsilon$ . Тогда найдется постоянная  $C$  такая, что будут справедливы оценки:

$$|\alpha_n| \leq C \begin{cases} h_{n+1}^{5/2} \varepsilon^{-4} e^{-x_n/\varepsilon}, & -1 \leq n \leq N/2 - 1, \\ h^{5/2}, & N/2 \leq n \leq N - 1 \end{cases}. \tag{5.12}$$

**Доказательство.** Пусть  $-1 \leq n \leq N/2 - 1$ . Оценим  $|\alpha_n|$ , используя соотношения (5.6), (5.7). В силу (5.1) имеем

$$\frac{x_n - x_k}{\varepsilon} = \frac{h_{k+1} + \dots + h_n}{\varepsilon} \leq C \left( \frac{1}{N/2 - k} + \dots + \frac{1}{N/2 - n} \right) \leq C_4 \ln \frac{N/2 - k}{N/2 - n}. \tag{5.13}$$

Поэтому с учетом того, что  $(N/2 - k)/(N/2 - n) \leq n - k + 1$ , для  $\Sigma_1$  из (5.7) имеем

$$\Sigma_1 \leq C_5 \sum_{k=-1}^n e^{-\beta|n-k|} (n - k + 1)^{C_4} \leq C_6, \tag{5.14}$$

а оценка (5.11) для  $\Sigma_2$  сохраняет силу. Итак,  $\Sigma_1, \Sigma_2$  ограничены сверху постоянной. С учетом (5.6) получаем оценку (5.12) при  $-1 \leq n \leq N/2 - 1$ .

Рассмотрим случай  $n \geq N/2$ . По аналогии с (5.6) с учетом  $h_{k+1}/h \leq C$  имеем

$$|\alpha_n| \leq Ch^{5/2} \varepsilon^{-4} e^{-x_{N/2-1}/\varepsilon} \sum_{k=-1}^{N-1} e^{(-\beta|n-k| + (x_{N/2-1} - x_k)/\varepsilon)}. \tag{5.15}$$

Далее аналогично (5.7) представим

$$\sum_{k=-1}^{N-1} e^{(-\beta|n-k| + (x_{N/2-1} - x_k)/\varepsilon)} = \sum_{k=-1}^{N/2-1} (\dots) + \sum_{k=N/2}^{N-1} (\dots) = \Sigma_1 + \Sigma_2. \tag{5.16}$$

Очевидно, что  $\Sigma_2 \leq C$ , так как  $x_{N/2-1} - x_k < 0$ . Оценим  $\Sigma_1$ . При  $n \geq N/2$  имеем

$$\Sigma_1 \leq \sum_{k=-1}^{N/2-1} e^{(-\beta|N/2-1-k| + (x_{N/2-1} - x_k)/\varepsilon)}. \tag{5.17}$$

Оценивая  $(x_{N/2-1} - x_k)/\varepsilon$  по аналогии с (5.13), получаем, что оценка для  $\Sigma_1$  соответствует (5.14) при  $n = N/2 - 1$ . Итак, для некоторой постоянной  $C_8$  будет  $\Sigma_1 \leq C_8$ .

По условию леммы  $1/N \leq C_3\varepsilon$ , поэтому с учетом (2.3), (2.4) получаем, что  $\varepsilon^{-4} e^{-x_{N/2-1}} \leq C$ . Теперь оценка (5.12) при  $n \geq N/2$  следует из (5.15)–(5.17). Лемма доказана.

**Лемма 16.** Пусть для некоторой постоянной  $C_2$  будет  $1/N \leq C_2\varepsilon$ . Тогда найдется такая постоянная  $C$ , что будут справедливы оценки

$$\|P(\Phi'' - gI)(x)\|_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq C \begin{cases} h_{n+1}^2 \varepsilon^{-4} e^{-x_n/\varepsilon}, & -1 \leq n \leq N/2 - 1, \\ h^2, & N/2 \leq n \leq N - 1. \end{cases} \tag{5.18}$$

**Доказательство.** Поскольку в каждом узле  $x_n$  отличен от нуля только один  $B$ -сплайн  $N_{n-1,1}$ , то справедливо равенство  $P(\Phi'' - gI)(x_n) = \alpha_{n-1} \tilde{N}_{n-1,1}(x_n)$ . Отсюда, из лемм 14, 15 и оценок (5.2) следует утверждение леммы.

**Лемма 17.** Пусть для некоторой постоянной  $C_2$   $1/N \leq C_2\varepsilon$ . Тогда справедливы оценки

$$\|e''(x)\|_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq C \begin{cases} h_{n+1}^2 \varepsilon^{-4} e^{-x_n/\varepsilon}, & -1 \leq n \leq N/2 - 1, \\ h^2, & N/2 \leq n \leq N - 1. \end{cases} \tag{5.19}$$

**Доказательство.** В силу (4.5), (5.18) достаточно оценить  $\|gI(x) - \Phi''(x)\|_{C[x_n, x_{n+1}]}$ . Но оценка этого выражения вытекает из оценки погрешности формулы линейной интерполяции на отрезке  $[x_n, x_{n+1}]$  и соответствует (5.19). Лемма доказана.

### 6. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ТЕОРЕМЫ 3

Рассмотрим модифицированный сплайн  $\tilde{S}_3(x, u)$  из (3.3). Обозначим через  $N_{n,l}(x)$  нормализованный  $B$ -сплайн степени  $l$  на сетке  $\Omega$  [2]. Для функций  $N_{n,l}(x)$  справедливы следующие формулы (см. [2, с. 31]):

$$N_{n,l}(x) = \frac{x - x_n}{x_{n+l} - x_n} N_{n,l-1}(x) + \frac{x_{n+l+1} - x}{x_{n+l+1} - x_{n+1}} N_{n+1,l-1}(x), \tag{6.1}$$

$$N'_{n,l}(x) = \frac{l}{x_{n+l} - x_n} N_{n,l-1}(x) - \frac{l}{x_{n+l+1} - x_{l+1}} N_{n+1,l-1}(x). \tag{6.2}$$

Представим  $\tilde{S}_3(x, u)$  в виде

$$\tilde{S}_3(x, u) = \sum_{n=-3}^{N-1} \alpha_n N_{n,3}(x).$$

Далее коэффициенты  $\alpha_n$  соответствуют разложению сплайна  $\tilde{S}_3(x, u)$ . Из условий интерполяции (3.3) получаем систему уравнений для коэффициентов:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-3}^{N-1} \alpha_n N'_{n,3}(0) &= u'(0), & \sum_{n=-3}^{N-1} \alpha_n N'_{n,3}(1) &= u'(1), \\ \sum_{n=-3}^{N-1} \alpha_n N_{n,3}(\bar{x}_k) &= u(\bar{x}_k), & -3 \leq k \leq N. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Преобразуем систему (6.3) в соответствии с [10]. Для этого вычислим значения входящих в нее кубических сплайнов и их производных по формулам (6.1), (6.2) и исключим из двух первых и двух последних уравнений неизвестные  $\alpha_{-3}$  и  $\alpha_{N-1}$ . В результате формулы для  $\alpha_{-3}$  и  $\alpha_{N-1}$  будут иметь вид

$$\alpha_{-3} = \left( \frac{1}{2} - \frac{3h_1}{2(2h_1 + h_2)} \right) \alpha_{-2} + \frac{3h_1}{2h_1 + h_2} \alpha_{-1} - 2hu'(0), \quad \alpha_{N-1} = \alpha_{N-3} + 2h_N u'(1), \tag{6.4}$$

а система уравнений для остальных коэффициентов примет вид

$$A\alpha = U, \tag{6.5}$$

где  $A = \{a_{nk}\}$ ,  $-2 \leq n, k \leq N - 2$ , — матрица порядка  $(N + 1) \times (N + 1)$ ,  $U = (U_{-2}, U_{-1}, \dots, U_{N-2})^T$ . Не-нулевые элементы матрицы  $A$  имеют вид

$$\begin{aligned} a_{k(k-1)} &= \frac{h_{k+3}^2}{(h_{k+1} + h_{k+2} + h_{k+3})(h_{k+2} + h_{k+3})}, & a_{kk} &= \frac{h_{k+3}(h_{k+1} + h_{k+2})}{(h_{k+1} + h_{k+2} + h_{k+3})(h_{k+2} + h_{k+3})} + \\ &+ \frac{h_{k+2}(h_{k+3} + h_{k+4})}{(h_{k+2} + h_{k+3} + h_{k+4})(h_{k+2} + h_{k+1})}, \\ a_{k(k+1)} &= \frac{h_{k+2}^2}{(h_{k+2} + h_{k+3} + h_{k+4})(h_{k+2} + h_{k+3})}, & k \in [-1, N/2 - 4], \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned} a_{k(k-1)} = a_{k(k+1)} &= 1/6, & a_{kk} &= 2/3, & k \in [N/2 - 3, N/2], & a_{(-2)(-2)} &= \frac{1}{2} + \frac{h_2}{2(2h_1 + h_2)}, \\ a_{(-2)(-1)} &= \frac{h_1}{2h_1 + h_2}, & a_{(N-2)(N-3)} &= \frac{1}{3}, & a_{(N-2)(N-2)} &= \frac{2}{3}, \end{aligned} \tag{6.7}$$

$$a_{\binom{N-3}{2}\binom{N-4}{2}} = \frac{h_N^2}{8 \left( h_{\frac{N-2}{2}} + h_{\frac{N-1}{2}} + h_{\frac{N}{2}} \right) \left( h_{\frac{N-1}{2}} + h_{\frac{N}{2}} \right)}, \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned} a_{\binom{N-3}{2}\binom{N-3}{2}} &= \frac{\left( h_{\frac{N-2}{2}} + h_{\frac{N-1}{2}} + h_{\frac{N}{2}}/2 \right) h_{\frac{N}{2}}}{4 \left( h_{\frac{N-2}{2}} + h_{\frac{N-1}{2}} + h_{\frac{N}{2}} \right) \left( h_{\frac{N-1}{2}} + h_{\frac{N}{2}} \right)} + \\ &+ \frac{\left( h_{\frac{N}{2}}/2 + h_{\frac{N+1}{2}} \right) \left( h_{\frac{N}{2}}/2 + h_{\frac{N-1}{2}} \right)}{2 \left( h_{\frac{N-1}{2}} + h_{\frac{N}{2}} + h_{\frac{N+1}{2}} \right) \left( h_{\frac{N-1}{2}} + h_{\frac{N}{2}} \right)} + \frac{\left( h_{\frac{N}{2}}/2 + h_{\frac{N+1}{2}} \right)^2}{2 \left( h_{\frac{N-1}{2}} + h_{\frac{N}{2}} + h_{\frac{N+1}{2}} \right) \left( h_{\frac{N}{2}} + h_{\frac{N+1}{2}} \right)}, \end{aligned} \tag{6.9}$$

$$a_{\binom{N-3}{2}\binom{N-2}{2}} = \frac{\left(\frac{h_N}{2} + h_{\frac{N-1}{2}}\right)^2}{2\left(\frac{h_{N-1}}{2} + h_{\frac{N}{2}} + h_{\frac{N+1}{2}}\right)\left(\frac{h_{N-1}}{2} + h_{\frac{N}{2}}\right)} + \frac{\left(\frac{h_N}{2} + h_{\frac{N-1}{2}}\right)\left(\frac{h_N}{2} + h_{\frac{N+1}{2}}\right)}{2\left(\frac{h_{N-1}}{2} + h_{\frac{N}{2}} + h_{\frac{N+1}{2}}\right)\left(\frac{h_{N+1}}{2} + h_{\frac{N}{2}}\right)} + \frac{\left(\frac{h_{N+2}}{2} + h_{\frac{N+1}{2}} + h_{\frac{N}{2}}/2\right)h_{\frac{N}{2}}}{4\left(\frac{h_{N+2}}{2} + h_{\frac{N+1}{2}} + h_{\frac{N}{2}}\right)\left(\frac{h_{N+1}}{2} + h_{\frac{N}{2}}\right)}, \tag{6.10}$$

$$a_{\binom{N-3}{2}\binom{N-1}{2}} = \frac{\frac{h_N^2}{2}}{8\left(\frac{h_{N+2}}{2} + h_{\frac{N+1}{2}} + h_{\frac{N}{2}}\right)\left(\frac{h_{N+1}}{2} + h_{\frac{N}{2}}\right)}, \tag{6.11}$$

$$a_{\binom{N-2}{2}\binom{N-3}{2}} = \frac{\frac{h_{N+1}^2}{2}}{8\left(\frac{h_{N-1}}{2} + h_{\frac{N}{2}} + h_{\frac{N+1}{2}}\right)\left(\frac{h_{N+1}}{2} + h_{\frac{N}{2}}\right)}, \tag{6.12}$$

$$a_{\binom{N-2}{2}\binom{N-2}{2}} = \frac{\left(\frac{h_{N-1}}{2} + h_{\frac{N}{2}} + h_{\frac{N+1}{2}}/2\right)h_{\frac{N+1}{2}}}{4\left(\frac{h_{N-1}}{2} + h_{\frac{N}{2}} + h_{\frac{N+1}{2}}\right)\left(\frac{h_{N+1}}{2} + h_{\frac{N}{2}}\right)} + \frac{\left(\frac{h_{N+1}}{2} + h_{\frac{N+2}}{2}\right)\left(\frac{h_{N+1}}{2} + h_{\frac{N}{2}}\right)}{2\left(\frac{h_{N+1}}{2} + h_{\frac{N+1}{2}} + h_{\frac{N+2}}{2}\right)\left(\frac{h_{N+1}}{2} + h_{\frac{N+2}}{2}\right)} + \frac{\left(\frac{h_{N+1}}{2} + h_{\frac{N+2}}{2}\right)^2}{2\left(\frac{h_{N+1}}{2} + h_{\frac{N+1}{2}} + h_{\frac{N+2}}{2}\right)\left(\frac{h_{N+1}}{2} + h_{\frac{N+2}}{2}\right)}, \tag{6.13}$$

$$a_{\binom{N-2}{2}\binom{N-1}{2}} = \frac{\left(\frac{h_{N+1}}{2} + h_{\frac{N}{2}}\right)^2}{2\left(\frac{h_{N+1}}{2} + h_{\frac{N+1}{2}} + h_{\frac{N+2}}{2}\right)\left(\frac{h_{N+1}}{2} + h_{\frac{N+2}}{2}\right)} + \frac{\left(\frac{h_{N+1}}{2} + h_{\frac{N}{2}}\right)\left(\frac{h_{N+1}}{2} + h_{\frac{N+2}}{2}\right)}{2\left(\frac{h_{N+1}}{2} + h_{\frac{N+1}{2}} + h_{\frac{N+2}}{2}\right)\left(\frac{h_{N+2}}{2} + h_{\frac{N+1}{2}}\right)} + \frac{\left(\frac{h_{N+3}}{2} + h_{\frac{N+2}}{2} + h_{\frac{N+1}{2}}/2\right)h_{\frac{N+1}{2}}}{4\left(\frac{h_{N+3}}{2} + h_{\frac{N+2}}{2} + h_{\frac{N+1}{2}}\right)\left(\frac{h_{N+2}}{2} + h_{\frac{N+1}{2}}\right)}, \tag{6.14}$$

$$a_{\binom{N-2}{2}\binom{N}{2}} = \frac{\frac{h_{N+1}^2}{2}}{8\left(\frac{h_{N+3}}{2} + h_{\frac{N+2}}{2} + h_{\frac{N+1}{2}}\right)\left(\frac{h_{N+2}}{2} + h_{\frac{N+1}{2}}\right)}, \tag{6.15}$$

$$a_{\binom{N-1}{2}\binom{N-2}{2}} = \frac{\frac{h_{N+2}^2}{2}}{\left(\frac{h_{N+2}}{2} + h_{\frac{N+1}{2}} + h_{\frac{N}{2}}\right)\left(\frac{h_{N+2}}{2} + h_{\frac{N+1}{2}}\right)}, \tag{6.16}$$

$$a_{\binom{N-1}{2}\binom{N-1}{2}} = \frac{\left(\frac{h_{N+1}}{2} + h_{\frac{N+2}}{2}\right)h_{\frac{N+2}}}{\left(\frac{h_{N+1}}{2} + h_{\frac{N+1}{2}} + h_{\frac{N+2}}{2}\right)\left(\frac{h_{N+1}}{2} + h_{\frac{N+2}}{2}\right)} + \frac{\left(\frac{h_{N+3}}{2} + h_{\frac{N+2}}{2}\right)h_{\frac{N+1}}{2}}{\left(\frac{h_{N+3}}{2} + h_{\frac{N+2}}{2} + h_{\frac{N+1}{2}}\right)\left(\frac{h_{N+1}}{2} + h_{\frac{N+2}}{2}\right)}, \tag{6.17}$$

$$a_{\binom{N-1}{2}\frac{N}{2}} = \frac{\frac{h_{N+1}^2}{2}}{\left(\frac{h_{N+1}}{2} + h_{\frac{N+2}}{2} + h_{\frac{N+3}}{2}\right)\left(\frac{h_{N+1}}{2} + h_{\frac{N+2}}{2}\right)}. \tag{6.18}$$

Элементы вектора  $U$  имеют вид

$$U_{-2} = u(0) + \frac{1}{3} h_1 u'(0), \quad U_n = u(x_{n+2}), \quad -1 \leq n \leq N-3, \quad U_{N-2} = u(1) - \frac{1}{3} h_1 u'(1). \quad (6.19)$$

Учитывая, что в силу (4.1) имеем  $h_2 = h_1(1 + O(1/N))$ , из (6.7) находим, что в строке с номером  $(-2)$  матрица  $A$  будет иметь диагональное преобладание с показателем преобладания  $1/3 + O(1/N)$ . Отсюда же следует диагональное преобладание с показателем  $1/3$  в строках с номерами  $k \in [N/2, N-2]$ .

Далее в силу (6.6) при  $k \in [-1, N/2 - 4]$  имеем

$$a_{kk} - a_{(k)(k-1)} - a_{(k)(k+1)} = \frac{h_{k+3}(h_{k+1} + h_{k+2} - h_{k+3})}{(h_{k+1} + h_{k+2} + h_{k+3})(h_{k+2} + h_{k+3})} + \frac{h_{k+2}(h_{k+3} + h_{k+4} - h_{k+2})}{(h_{k+2} + h_{k+3} + h_{k+4})(h_{k+2} + h_{k+1})}. \quad (6.20)$$

Но в силу (4.1) получаем

$$h_{k+1} + h_{k+2} - h_{k+3} = 4\epsilon \ln \left( 1 + \frac{4(1-\epsilon)/N}{1-2\epsilon(k+2)/N} \right) - 4\epsilon \ln \left( 1 + \frac{2(1-\epsilon)/N}{1-2\epsilon(k+3)/N} \right). \quad (6.21)$$

Далее,

$$\frac{1-2\epsilon(k+3)/N}{2(1-\epsilon)/N} - \frac{1-2\epsilon(k+2)/N}{4(1-\epsilon)/N} > 0.$$

Поэтому  $h_{k+1} + h_{k+2} - h_{k+3} > 0$  при  $k \leq N/2 - 4$ . Отсюда в силу (6.20), (6.21) и того, что последовательность  $h_k$  возрастает, имеем

$$a_{kk} - a_{(k)(k-1)} - a_{(k)(k+1)} \geq \frac{h_{k+2}(h_{k+3} + h_{k+4} - h_{k+2})}{(h_{k+2} + h_{k+3} + h_{k+4})(h_{k+2} + h_{k+1})} \geq \frac{h_{k+2}h_{k+4}}{(h_{k+2} + h_{k+3} + h_{k+4})(h_{k+2} + h_{k+1})} \geq \frac{h_{k+2}h_{k+4}}{3h_{k+4}2h_{k+2}} \geq \frac{1}{6}, \quad k \in [-1, N/2 - 4].$$

Осталось рассмотреть строки с номерами  $N/2 - 3, N/2 - 2, N/2 - 1$ .

Пусть  $\bar{a}_{nk} = \lim_{\epsilon/h \rightarrow 0} a_{nk}$ . Учитывая, что при  $k \leq N/2 - 1 \lim_{\epsilon/h \rightarrow 0} \frac{h_k}{h_{N/2}} = 0$ , при  $k \geq N/2 + 1 \lim_{\epsilon/h \rightarrow 0} \frac{h_{N/2}}{h_k} = 0$ , из (6.5)–(6.18) получаем, что

$$\begin{aligned} \bar{a}_{(N/2-3)(N/2-4)} &= \frac{1}{8}, & \bar{a}_{(N/2-3)(N/2-3)} &= \frac{7}{8}, & \bar{a}_{(N/2-3)(N/2-2)} &= \bar{a}_{(N/2-3)(N/2-1)} = 0, \\ \bar{a}_{(N/2-2)(N/2-3)} &= \frac{1}{8}, & \bar{a}_{(N/2-2)(N/2-2)} &= \frac{19}{32}, & \bar{a}_{(N/2-2)(N/2-1)} &= \frac{25}{96}, & \bar{a}_{(N/2-2)(N/2)} &= \frac{1}{48}, \\ \bar{a}_{(N/2-1)(N/2-2)} &= \frac{1}{4}, & \bar{a}_{(N/2-1)(N/2-1)} &= \frac{7}{12}, & \bar{a}_{(N/2-1)(N/2)} &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что при достаточно малых  $\epsilon/h$  в строках с номерами  $N/2 - 3, N/2 - 2, N/2 - 1$  также будет диагональное преобладание с показателем преобладания, не зависящим от  $\epsilon, h$ .

Итак, доказана

**Лемма 18.** *Найдутся такие константы  $C_2 > 0, r > 0$ , не зависящие от  $\epsilon, N$ , что при  $\epsilon \leq C_2 N^{-1}$  матрица  $A$  имеет строгое диагональное преобладание по строкам с показателем преобладания  $r$ .*

Изучим аппроксимационные свойства пространства  $S(\Omega, 3, 1)$ .

**Лемма 19.** *Пусть функция  $u(x)$  удовлетворяет оценкам (2.2). Тогда найдется такая функция  $gp_3(x) \in S(\Omega, 3, 1)$ , что будут справедливы оценки*

$$\|u(x) - gp_3(x)\|_{C[0,1]} \leq CN^{-4}, \quad (6.22)$$

$$\|h_{n+1}(u'(x) - gp_3'(x))\|_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq CN^{-4}, \quad n = 0, N - 1. \tag{6.23}$$

**Доказательство.** В соответствии с [2] для кубического сплайна справедлива оценка погрешности

$$|S_3(x, u) - u(x)| \leq \frac{5}{384} \|u^{(4)}\|_{C[0,1]} \max_n h_n^4, \quad x \in [0, 1]. \tag{6.24}$$

Согласно (2.2),  $|q^{(4)}(x)| \leq C_1$ , поэтому в соответствии с (6.24) имеем

$$|S_3(x, q) - q(x)| \leq CN^{-4}, \quad x \in [0, 1]. \tag{6.25}$$

В соответствии с (6.25) остается оценить погрешность на составляющей  $\Phi(x)$ . Тогда при обосновании будем считать, что  $u(x) = \Phi(x)$ ,  $\alpha = 1$ . Будем считать функцию  $u(x)$  продолженной левее точки  $x = 0$  и правее точки  $x = 1$  многочленами Тейлора третьей степени с центрами в  $x = 0$  и  $x = 1$  соответственно. Обозначим через  $P_3$  множество всех многочленов третьей степени. Тогда, согласно [7, с. 137], существует такая функция  $gp_3(x) \in S(\Omega, 3, 1)$ , что справедливы оценки

$$\|u(x) - gp_3(x)\|_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq C \inf_{g \in P_3} \|u(x) - g(x)\|_{C[x_{n-2}, x_{n+3}]}. \tag{6.26}$$

Зафиксируем произвольный отрезок  $[x_n, x_{n+1}]$ . Обозначим через  $P_n(x)$  многочлен Тейлора степени 3 функции  $u(x)$  с центром разложения в точке  $x_{n+3}$ . Имеем

$$u(x) = P_n(x) + \frac{1}{3!} \int_{x_{n+3}}^x (x-s)^3 u^{(4)}(s) ds. \tag{6.27}$$

Из (6.27), (2.2) получаем для  $0 \leq n \leq N - 1$

$$\|u(x) - P_n(x)\|_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq C \int_{x_n}^{x_{n+3}} (s - x_n)^3 \varepsilon^{-4} e^{-s/\varepsilon} ds = C e^{-x_n/\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_n}^{x_{n+3}} \left(\frac{s - x_n}{\varepsilon}\right)^3 e^{-\frac{s-x_n}{\varepsilon}} ds. \tag{6.28}$$

Но в силу (2.3) имеем

$$e^{-x_n/\varepsilon} = \left(1 - 2(1 - \varepsilon) \frac{n}{N}\right)^4 = 16 \left(\frac{N/2 - n + \varepsilon n}{N}\right)^4, \quad 0 \leq n \leq N/2. \tag{6.29}$$

Из (6.28), (6.29), (4.2), учитывая, что  $\varepsilon N \leq C_2$ , при  $0 \leq n \leq N/2 - 4$  получаем

$$\begin{aligned} \|u(x) - P_n(x)\|_{C[x_n, x_{n+1}]} &\leq C e^{-x_n/\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^4} (x_{n+3} - x_n)^4 \leq C_1 e^{-x_n/\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^4} h_n^4 \leq \\ &\leq C_3 \frac{1}{(N/2 - n)^4} \left(\frac{N/2 - n + \varepsilon n}{N}\right)^4 \leq C_4 N^{-4}, \quad 0 \leq n \leq N/2 - 4. \end{aligned} \tag{6.30}$$

При  $N/2 - 3 \leq n \leq N - 1$  имеем

$$\begin{aligned} \|u(x) - P_n(x)\|_{C[x_n, x_{n+1}]} &\leq C e^{-x_n/\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_n}^{x_{n+3}} \left(\frac{s - x_n}{\varepsilon}\right)^3 e^{-\frac{s-x_n}{\varepsilon}} ds \leq C_1 e^{-x_n/\varepsilon} \leq \\ &\leq C_1 e^{-x_{N/2-3}/\varepsilon} = 16 C_1 \left(\frac{3 + \varepsilon(N/2 - 3)}{N}\right)^4 \leq CN^{-4}, \quad N/2 - 3 \leq n \leq N - 1. \end{aligned} \tag{6.31}$$

Из (6.30), (6.31), (6.26) получаем (6.22).

Докажем (6.23). Для этого заметим, что в силу (6.22), (6.30), (6.31) будет

$$\|gp_3(x) - P_n(x)\|_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq C_2 N^{-4}, \quad 0 \leq n \leq N - 1.$$

Но функция  $(gp_3(x) - P_n(x))$  на отрезке  $[x_n, x_{n+1}]$  есть многочлен третьей степени. Поэтому в силу эквивалентности норм в пространстве многочленов третьей степени на фиксированном отрезке будем иметь

$$\|gp'_3(x) - P'_n(x)\|_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq \frac{C}{h_{n+1}} \|gp_3(x) - P_n(x)\|_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq \frac{C_3}{h_{n+1}} N^{-4}. \tag{6.32}$$

Далее, дифференцируя равенство (6.27), получаем

$$u'(x) = P'_n(x) + \frac{1}{2!} \int_{x_{n+3}}^x (x-s)^2 u^{(4)}(s) ds. \tag{6.33}$$

Повторяя для (6.33) выкладки, проделанные с (6.27) при доказательстве (6.22), находим

$$\|u'(x) - P'_n(x)\|_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq C_3 \frac{1}{\varepsilon} N^{-3}, \quad 0 \leq n \leq N-1. \tag{6.34}$$

Из (6.32), (6.34), учитывая соотношение  $h_1 = O(\varepsilon N^{-1})$ , получаем (6.23) при  $n = 0$ . При  $n = N-1$  будет  $\|u^{(4)}(x)\|_{C[x_{N-1}, x_N]} \leq C$  и  $\|u'(x) - P'_n(x)\|_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq C_3 N^{-3}$ , откуда аналогично получаем (6.23) при  $n = N-1$ . Лемма доказана.

### 7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

**Доказательство теоремы 1.** В соответствии с [2] для интерполяционного кубического сплайна  $S_3(x, u) \in S(\Omega, 3, 1)$  справедлива оценка погрешности (6.24).

В соответствии с представлением (2.1)  $S_3(x, u) = S_3(x, q) + S_3(x, \Phi)$ , а для погрешности сплайна на составляющей  $q(x)$  справедлива оценка (6.25). Остается оценить  $\|S_3(x, \Phi) - \Phi(x)\|_{C[x_n, x_{n+1}]}$  для каждого сеточного интервала.

В случае  $\sigma = 1/2$  параметр  $\varepsilon$  ограничен положительной константой снизу, поэтому в соответствии с (6.24), (2.2) сплайн  $S_3(x, \Phi)$  имеет погрешность порядка  $O(N^{-4})$  равномерно по  $\varepsilon$ . Поэтому ниже будем предполагать, что  $\sigma < 1/2$  и  $\varepsilon < e^{-1}$ .

Вначале докажем оценки (3.1) для  $n \leq \frac{N}{2} - 2$ . Зафиксируем  $n \in [0, \frac{N}{2} - 2]$ . Пусть  $e(x) = S_3(x, \Phi) - \Phi(x)$ . Тогда, поскольку  $e(x_n) = e(x_{n+1}) = 0$ , то, рассматривая  $e(x)$  как решение краевой задачи  $e''(x) = e''(x)$  с нулевыми краевыми условиями на интервале  $[x_n, x_{n+1}]$ , получаем

$$e(x) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} G(x, s) e''(s) ds, \tag{7.1}$$

где функция Грина имеет вид

$$G(x, s) = \frac{1}{x_{n+1} - x_n} \begin{cases} (x - x_n)(x_{n+1} - s), & x_n \leq x \leq s, \\ (s - x_n)(x_{n+1} - x), & s < x \leq x_{n+1}. \end{cases}$$

Поскольку  $|G(x, s)| \leq h_{n+1}$ , то из (4.39), (4.2), (2.3) получаем

$$\begin{aligned} \|e(x)\|_{C[x_n, x_{n+1}]} &\leq h_{n+1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} |e''(s)| ds \leq h_{n+1}^2 \|e''(s)\|_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq \frac{C}{\varepsilon^4} e^{-x_n/\varepsilon} h_{n+1}^4 \leq \\ &\leq \frac{C}{(N/2 - n)^4} \left(1 - 2(1 - \varepsilon) \frac{n}{N}\right)^4 = \frac{16C}{N^4} \frac{(N/2 - n + \varepsilon N)^4}{(N/2 - n)^4} \leq \frac{C_1}{N^4}. \end{aligned}$$

С учетом оценки (6.25) получаем оценку (3.1) для  $n \leq \frac{N}{2} - 2$ .

При  $n \geq N/2 - 1$  имеем

$$\|e(x)\|_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq h_{n+1} \left( \int_{x_n}^{x_{n+1}} |\Phi''(s)| ds + \int_{x_n}^{x_{n+1}} |S_3''(s, \Phi)| ds \right). \quad (7.2)$$

Далее, при  $n = N/2 - 1$  имеем

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} |\Phi''(s)| ds \leq \frac{C}{\varepsilon^2} \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{-\frac{s}{\varepsilon}} ds \leq \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{x_n}{\varepsilon}} \leq \frac{C}{\varepsilon N^4}, \quad n = N/2 - 1. \quad (7.3)$$

Учитывая (4.38) и то, что  $gI(x) = 0$  при  $x \geq x_{N/2-1}$ , т.е.  $P(\Phi'' - gI)(x) = S_3''(x, \Phi)$ , получаем

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} |S_3''(s, \Phi)| ds \leq C\varepsilon \ln(1 + h/\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon^2 \ln(1 + h/\varepsilon)} e^{-x_{N/2-1}/\varepsilon} \leq \frac{C}{\varepsilon N^4}, \quad n = N/2 - 1. \quad (7.4)$$

Из (7.2), (7.3), (7.4), (6.25) получаем оценку (3.1) для  $n = \frac{N}{2} - 1$ .

Аналогично при  $n \geq N/2$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} |\Phi''(s)| ds \leq \frac{C}{\varepsilon^2} \int_{x_n}^{x_{n+1}} e^{-\frac{s}{\varepsilon}} ds \leq \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{x_n}{\varepsilon}} = \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} e^{-\frac{x_n - x_{N/2}}{\varepsilon}} \leq \frac{C_1}{\varepsilon} N^{-4} e^{-(n - N/2) \frac{h}{\varepsilon}} \leq \frac{C_1}{\varepsilon N^4} e^{-\beta(n - N/2)}. \quad (7.5)$$

Учитывая, что при  $n \geq N/2$ , согласно сказанному выше,  $S_3''(x, \Phi) = P\Phi''(x)$ ,  $gI(x) = 0$  и учитывая (4.38), получаем

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} |S_3''(s, \Phi)| ds \leq Ch \frac{1}{\varepsilon h} e^{-x_{N/2-1}/\varepsilon} e^{-\beta|n - \frac{N}{2}|} \leq \frac{C}{\varepsilon N^4} e^{-\beta|n - \frac{N}{2}|}. \quad (7.6)$$

Из (7.5), (7.6), леммы 1 и (6.25) следуют оценки (3.1) при  $n \geq N/2$ . Теорема 1 доказана полностью.

**Доказательство теоремы 2.** Оценку (3.2) получим на основе оценивания погрешности на каждом интервале  $[x_n, x_{n+1}]$ . Для погрешности  $e(x)$  на интервале  $[x_n, x_{n+1}]$  справедливо соотношение (7.1). На основе (7.1), (5.19) получаем

$$\|e(x)\|_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq h_{n+1} \int_{x_n}^{x_{n+1}} |e''(s)| ds \leq h_{n+1}^2 \|e''(s)\|_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq C \begin{cases} h_{n+1}^4 \varepsilon^{-4} e^{-x_n/\varepsilon}, & 0 \leq n \leq N/2 - 1, \\ N^{-4}, & N/2 \leq n \leq N - 1. \end{cases} \quad (7.7)$$

Из (2.3), (2.4), (5.1), (7.7) находим при  $n \leq \frac{N}{2} - 1$

$$\|e(x)\|_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq C \left( 1 - 2(1 - \varepsilon) \frac{n}{N} \right)^4 \left( \frac{1/N}{1 + \frac{1}{\varepsilon N} (N/2 - n)} \right)^4 = \frac{16C}{N^4} \frac{(N/2 - n + \varepsilon n)^4}{(N + \frac{N/2 - n}{\varepsilon})^4} \leq \frac{C_1}{N^4}.$$

Отсюда получаем оценку (3.2) при  $x \in [x_n, x_{n+1}]$ ,  $n \leq \frac{N}{2} - 1$ .

При  $N/2 \leq n \leq N - 1$  оценка (3.2) непосредственно вытекает из (7.7). Теорема 2 доказана.

**Доказательство теоремы 3.** Введем в рассмотрение  $\text{err}(x) = \tilde{S}_3(x, u) - gp_3(x)$ , где  $gp_3(x)$  — функция из леммы 19. Представим ее в виде

$$\text{err}(x) = \sum_{n=-3}^{N-1} \beta_n N_{n,3}(x).$$

Тогда аналогично (6.3)–(6.5) для коэффициентов  $\beta_n$  получаем систему

$$A\beta = ERR \quad (7.8)$$

**Таблица 1.** Погрешность интерполяционного кубического сплайна  $S_3(x, u)$ 

$\varepsilon$	$N$					
	$2^4$	$2^5$	$2^6$	$2^7$	$2^8$	$2^9$
$10^{-1}$	$1.33 \times 10^{-4}$	$1.02 \times 10^{-5}$	$6.99 \times 10^{-7}$	$4.52 \times 10^{-8}$	$2.89 \times 10^{-9}$	$1.82 \times 10^{-10}$
$10^{-2}$	$1.72 \times 10^{-4}$	$1.06 \times 10^{-5}$	$6.74 \times 10^{-7}$	$7.95 \times 10^{-8}$	$8.80 \times 10^{-9}$	$8.12 \times 10^{-9}$
$10^{-3}$	$4.82 \times 10^{-4}$	$1.37 \times 10^{-5}$	$7.04 \times 10^{-7}$	$4.38 \times 10^{-8}$	$2.71 \times 10^{-9}$	$1.64 \times 10^{-10}$
$10^{-4}$	$6.35 \times 10^{-3}$	$1.88 \times 10^{-4}$	$5.45 \times 10^{-6}$	$1.56 \times 10^{-7}$	$4.45 \times 10^{-9}$	$1.72 \times 10^{-10}$
$10^{-5}$	$7.22 \times 10^{-2}$	$2.19 \times 10^{-3}$	$6.62 \times 10^{-5}$	$1.98 \times 10^{-6}$	$5.86 \times 10^{-8}$	$1.71 \times 10^{-9}$
$10^{-6}$	$7.73 \times 10^{-1}$	$2.38 \times 10^{-2}$	$7.28 \times 10^{-4}$	$2.22 \times 10^{-5}$	$6.76 \times 10^{-7}$	$2.05 \times 10^{-8}$
$10^{-7}$	8.06	$2.49 \times 10^{-1}$	$7.70 \times 10^{-3}$	$2.37 \times 10^{-4}$	$7.29 \times 10^{-6}$	$2.24 \times 10^{-7}$
$10^{-8}$	83.1	2.58	$7.98 \times 10^{-2}$	$2.47 \times 10^{-3}$	$7.64 \times 10^{-5}$	$2.36 \times 10^{-6}$

и условия

$$\beta_{-3} = \left( \frac{1}{2} - \frac{3h_1}{2(2h_1 + h_2)} \right) \beta_{-2} + \frac{3h_1}{2h_1 + h_2} \beta_{-1} - 2h_1 \text{err}'(0), \quad (7.9)$$

$$\beta_{N-1} = \beta_{N-3} + 2h_N \text{err}'(1).$$

С учетом условий интерполяции для сплайна  $\tilde{S}_3(x, u)$  имеем

$$\text{err}'(0) = u'(0) - gp_3'(0), \quad \text{err}'(1) = u'(1) - gp_3'(1), \quad (7.10)$$

$$ERR = \{ERR_n\}, \quad ERR_n = u(x_{n+2}) - gp_3(x_{n+2}), \quad -2 \leq n \leq N-2, \quad (7.11)$$

причем в силу леммы 19 и (7.10), (7.11) справедливы оценки

$$\max \{ |h_1 \cdot \text{err}'(0)|, |h_N \cdot \text{err}'(1)| \} \leq CN^{-4}, \quad \max_{-2 \leq n \leq N-2} |ERR_n| \leq CN^{-4}. \quad (7.12)$$

Из леммы 18, (7.8), (7.9), (7.12) получаем, что  $\max_{-3 \leq n \leq N-1} |\beta_n| \leq CN^{-4}$ , откуда следует, что

$$\|\text{err}(x)\|_{C[x_n, x_{n+1}]} \leq CN^{-4}, \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (7.13)$$

Из (7.13) и леммы 19 получаем оценку (3.4) теоремы 3.

## 8. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Зададим функцию вида (2.1):

$$u(x) = \cos \frac{\pi x}{2} + e^{-\frac{x}{\varepsilon}}, \quad x \in [0, 1].$$

Результаты расчетов сведены в две таблицы. В таблицах приведены максимальные погрешности сплайновой интерполяции, вычисленные в узлах сгущенной сетки, получающейся из исходной расчетной сетки разбиением каждого ее сеточного интервала на 10 равных частей.

В табл. 1 приведены погрешности сплайна  $S_3(x, u)$  на сетке Бахвалова в зависимости от  $\varepsilon$  и  $N$ . Результаты вычислений согласуются с оценками теоремы 1. Из таблицы видно, что погрешность возрастает при уменьшении  $\varepsilon$  для фиксированного  $N$  при  $\varepsilon < 1/N$ . Этот результат аналогичен результату, установленному в [4] для интерполяционного кубического сплайна на сетке Шишкина.

Теперь остановимся на погрешности модифицированного сплайна  $\tilde{S}_3(x, u)$ , определяемого на основе условий интерполяции (3.3). В табл. 2 приведены погрешности и вычисленные порядки точности для модифицированного сплайна. Результаты вычислений согласуются с погрешностью сплайна порядка  $O(N^{-4})$ .

Таблица 2. Погрешность модифицированного кубического сплайна

$\epsilon$	$N$					
	$2^4$	$2^5$	$2^6$	$2^7$	$2^8$	$2^9$
$10^{-1}$	$2.21 \times 10^{-4}$	$1.85 \times 10^{-5}$	$1.35 \times 10^{-6}$	$9.09 \times 10^{-8}$	$5.02 \times 10^{-9}$	$3.78 \times 10^{-10}$
		3.57	3.78	3.89	3.94	3.97
$10^{-2}$	$1.67 \times 10^{-4}$	$1.09 \times 10^{-5}$	$1.00 \times 10^{-6}$	$1.16 \times 10^{-7}$	$1.45 \times 10^{-8}$	$1.47 \times 10^{-9}$
		3.93	3.45	3.11	3.00	3.31
$10^{-3}$	$1.89 \times 10^{-4}$	$1.10 \times 10^{-5}$	$6.49 \times 10^{-7}$	$4.06 \times 10^{-8}$	$2.59 \times 10^{-9}$	$2.16 \times 10^{-10}$
		4.10	4.09	4.00	3.96	3.59
$10^{-4}$	$2.25 \times 10^{-4}$	$1.35 \times 10^{-5}$	$8.05 \times 10^{-7}$	$4.74 \times 10^{-8}$	$2.77 \times 10^{-9}$	$1.61 \times 10^{-10}$
		4.05	4.07	4.09	4.10	4.10
$10^{-5}$	$2.46 \times 10^{-4}$	$1.51 \times 10^{-5}$	$9.19 \times 10^{-7}$	$5.57 \times 10^{-8}$	$3.35 \times 10^{-9}$	$2.00 \times 10^{-10}$
		4.03	4.04	4.04	4.05	4.07
$10^{-6}$	$2.58 \times 10^{-4}$	$1.60 \times 10^{-5}$	$9.84 \times 10^{-7}$	$6.05 \times 10^{-8}$	$3.71 \times 10^{-9}$	$2.26 \times 10^{-10}$
		4.02	4.02	4.02	4.03	4.03
$10^{-7}$	$2.66 \cdot 10^{-4}$	$1.65 \times 10^{-5}$	$1.02 \times 10^{-6}$	$6.33 \times 10^{-8}$	$3.91 \times 10^{-9}$	$2.41 \times 10^{-10}$
		4.01	4.01	4.01	4.02	4.02
$10^{-8}$	$2.71 \times 10^{-4}$	$1.68 \cdot 10^{-5}$	$1.05 \times 10^{-6}$	$6.50 \times 10^{-8}$	$4.03 \times 10^{-9}$	$2.50 \times 10^{-10}$
		4.01	4.01	4.01	4.01	4.01

### 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Впервые проведен анализ погрешности кубического сплайна на сетке Бахвалова при наличии экспоненциального пограничного слоя. Получена оценка погрешности сплайна, из которой следует, что погрешность может неограниченно расти с уменьшением значения малого параметра. Проведена модификация кубического сплайна, основанная на сдвиге двух точек интерполяции, при которой оценка погрешности становится порядка  $O(N^{-4})$  равномерно по малому параметру. Приведены результаты вычислительных экспериментов, согласующиеся с полученными оценками погрешностей.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L.* The theory of splines and their applications. New York: Academic Press, 1967.
2. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
3. *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.
4. *Блатов И.А., Задорин А.И., Китаева Е.В.* Об интерполяции кубическими сплайнами функций с большими градиентами в пограничном слое // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 1. С. 9–28.
5. *Бахвалов Н.С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9. № 4. С. 841–890.
6. *Linß T.* Layer-Adapted Meshes for Reaction-Convection-Diffusion Problems. Berlin: Springer, 2010.
7. *Бор К.Де.* Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985.
8. *Demko S.* Inverses of band matrices and local convergence of spline projections // SIAM J. Numer. Anal. 1977. V. 14. № 4. P. 616–619.
9. *Блатов И.А.* О методах неполной факторизации для систем с разреженными матрицами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т. 33. № 7. С. 819–836.
10. *Волков Ю.С.* О нахождении полного интерполяционного сплайна через  $B$ -сплайны // Сибирские электронные матем. изв. 2008. Т. 5. С. 334–338.

**ОБЩИЕ  
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

УДК 517.988

**ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ КЛАССА ИТЕРАТИВНО РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ  
МЕТОДОВ ГАУССА–НЬЮТОНА  
С АПОСТЕРИОРНЫМ ОСТАНОВОМ<sup>1)</sup>**

© 2021 г. М. М. Кокурин

*424001 Йошкар-Ола, пл. Ленина, 1, Марийский государственный университет, Россия  
e-mail: kokurin@nextmail.ru*

Поступила в редакцию 16.12.2020 г.  
Переработанный вариант 16.12.2020 г.  
Принята к публикации 04.08.2021 г.

Исследуется класс итеративно регуляризованных методов Гаусса–Ньютона для решения не-регулярных нелинейных уравнений с гладкими операторами в гильбертовом пространстве. Останов итераций производится по апостериорному способу, близкому к принципу невязки В.А. Морозова. Обосновано регуляризирующее свойство итераций и получена оценка точности получаемого приближения при выполнении условия истокпредставимости искомого решения. Оценка дана в терминах погрешности оператора без привлечения структурных условий на этот оператор. Библ. 14.

**Ключевые слова:** операторное уравнение, нерегулярный оператор, гильбертово пространство, методы Гаусса–Ньютона, итеративная регуляризация, апостериорный останов, оценка точности.

**DOI:** 10.31857/S0044466921120097

**1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

Рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$F(x) = 0_{H_2}, \quad x \in H_1, \quad (1)$$

с дифференцируемым по Фреше оператором  $F : H_1 \rightarrow H_2$ , где  $H_1, H_2$  — гильбертовы пространства,  $0_{H_2}$  — нулевой элемент пространства  $H_2$ . Пусть  $x^*$  — искомое решение уравнения (1). Однозначная разрешимость уравнения (1) далее не предполагается. Считаем, что оператор  $F$  дифференцируем по Фреше, и производная  $F'$  удовлетворяет на шаре

$$\Omega_R(x^*) = \{x \in H_1 : \|x - x^*\|_{H_1} \leq R\}$$

условию Липшица

$$\|F'(x) - F'(y)\|_{L(H_1, H_2)} \leq L\|x - y\|_{H_1}, \quad x, y \in \Omega_R(x^*).$$

Таким образом, для подходящей константы  $M$  выполняется

$$\|F'(x)\|_{L(H_1, H_2)} \leq M, \quad x \in \Omega_R(x^*).$$

Например, можно положить  $M = \|F'(\bar{x})\|_{L(H_1, H_2)} + 2LR$  с произвольной  $\bar{x} \in \Omega_R(x^*)$ .

При наших предположениях, не требующих регулярности оператора  $F$  в окрестности решения, задача (1) является в общем случае некорректной. Регулярность оператора  $F$  по определению означает, что оператор  $F'(x)$ , либо  $F'^*(x)F'(x)$  непрерывно обратим для всех точек  $x$  из некоторой окрестности  $x^*$ .

В виде нерегулярного операторного уравнения (1) записывается широкий спектр нелинейных интегральных уравнений и прикладных обратных задач (см., например, [1], [2] и имеющиеся там

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 20-11-20085).

ссылки). На практике вместо точного оператора  $F$  часто бывает известна лишь его аппроксимация  $F_\delta : H_1 \rightarrow H_2$ . Будем предполагать, что оператор  $F_\delta$  также непрерывно дифференцируем по Фреше и

$$\begin{aligned} \left\| F'_\delta(x) - F'_\delta(y) \right\|_{L(H_1, H_2)} &\leq L \|x - y\|_{H_1}, \\ \left\| F'_\delta(x) \right\|_{L(H_1, H_2)} &\leq M, \quad x, y \in \Omega_R(x^*). \end{aligned} \tag{2}$$

Кроме того, потребуем выполнения оценок

$$\left\| F_\delta(x^*) \right\|_{H_2} \leq \delta, \quad \left\| F'_\delta(x) - F'(x) \right\|_{L(H_1, H_2)} \leq \delta, \quad x \in \Omega_R(x^*) \tag{3}$$

с известным уровнем погрешности  $\delta > 0$ .

Для получения устойчивой аппроксимации точки  $x^*$  по данным  $(\delta, F_\delta)$  могут быть использованы различные классы итерационных процессов (см. [3]–[5]). В настоящей работе объектом исследования является группа итеративно регуляризованных методов типа Гаусса–Ньютона (см. [3, с. 127]):

$$x_{n+1} = \xi - \Theta(F'_\delta(x_n)F'_\delta(x_n), \alpha_n)F'_\delta(x_n)[F_\delta(x_n) - F'_\delta(x_n)(x_n - \xi)]. \tag{4}$$

Здесь  $x_0 \in \Omega_R(x^*)$  — начальное приближение,  $\xi \in H_1$  — параметр процесса, служащий наряду с  $x_0$  аппроксимацией решения  $x^*$ ,  $\{\alpha_n\}$  — управляющая последовательность параметров регуляризации, удовлетворяющая условиям

$$0 < \alpha_{n+1} \leq \alpha_n, \quad \sup_{n=0,1,\dots,\alpha_{n+1}} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \equiv r < +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0. \tag{5}$$

Функция  $\Theta(\lambda, \alpha)$ , называемая порождающей функцией группы методов (4), при каждом  $\alpha \in (0, \alpha_0]$  как вещественнозначная функция аргумента  $\lambda$  должна допускать аналитическое продолжение в открытое множество, содержащее отрезок  $[0, M^2]$ . Наложим на нее следующие условия:

$$\exists C_1 > 0: \forall \alpha \in (0, \alpha_0], \quad \max_{\lambda \in [0, M^2]} |\Theta(\lambda, \alpha)\sqrt{\lambda}| \leq \frac{C_1}{\sqrt{\alpha}}; \tag{6}$$

$$\exists p^* \geq 1: \forall p \in [0, p^*], \quad \exists C_2 = C_2(p) > 0: \forall \alpha \in (0, \alpha_0], \quad \max_{\lambda \in [0, M^2]} |1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda|^p \leq C_2\alpha^p. \tag{7}$$

Пусть для некоторого семейства  $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha \in (0, \alpha_0]}$  положительно ориентированных контуров на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , такого что

$$\sup_{\alpha \in (0, \alpha_0]} \sup_{\lambda \in \Gamma_\alpha} |\lambda| < \infty, \quad \sup_{\alpha \in (0, \alpha_0]} \sup_{\lambda \in \Gamma_\alpha, \mu \in [0, M^2]} \frac{|\lambda| + \mu}{|\lambda - \mu|} < \infty,$$

выполняется соотношение

$$\sup_{\alpha \in (0, \alpha_0]} \int_{\Gamma_\alpha} \frac{|1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda|}{|\lambda|} |d\lambda| < +\infty.$$

В дополнение к этим условиям, изложенным в [3, с. 114], потребуем, чтобы выполнялось

$$\forall v \in (0, M^2), \quad \exists C_3 = C_3(v): \forall \alpha \in (0, \alpha_0], \quad \forall \lambda \in [v, M^2], \quad |1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda| \geq C_3\alpha^{p^*}. \tag{8}$$

Похожее условие использовалось ранее в [6, р. 80]. Здесь и далее константы  $C_1, C_2, \dots$  не зависят от  $n, \delta$ .

Перечисленным выше условиям удовлетворяет, например, функция (см. [3, с. 122])

$$\Theta(\lambda, \alpha) = \frac{1}{\lambda} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha}{\lambda + \alpha} \right)^m \right], \quad m \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

с константой  $p^* = m$ . Итерационный процесс (4), (9) реализуется следующим образом:  $x_{n+1} = x_{n+1}^{(N)}$ , где  $x_{n+1}^{(0)} = \xi$  и точки внутреннего итерационного процесса  $\{x_{n+1}^{(k)}\}_{k=1}^N$  определяются рекуррентно из уравнений

$$(F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n) + \alpha_n E_1)x_{n+1}^{(k+1)} = \alpha_n x_{n+1}^{(k)} + F_\delta'^*(x_n)[F_\delta'(x_n)x_n - F_\delta(x_n)], \quad (10)$$

$$k = 0, 1, \dots, m-1.$$

В частном случае  $m = 1$  имеем хорошо известный итеративно регуляризованный метод Гаусса–Ньютона

$$x_{n+1} = \xi - (F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n) + \alpha_n E_1)^{-1} F_\delta'^*(x_n)[F_\delta(x_n) - F_\delta'(x_n)(x_n - \xi)].$$

Здесь и далее  $E_j$  — единичный оператор в пространстве  $H_j$ ,  $j = 1, 2$ . Заметим, что итерационный процесс (10) заключается в применении к линейаризованному уравнению

$$F_\delta'(x_n)(x - x_n) + F_\delta(x_n) = 0_{H_2}, \quad x \in H_1,$$

$m$  раз итерированного метода Тихонова (см. [7, с. 20]).

Известно, что в случае  $\delta > 0$  процессы вида (4), вообще говоря, расходятся при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому для получения приближения к  $x^*$ , адекватного уровню погрешности  $\delta$ , требуется останов итераций на шаге с подходящим номером  $n = N$ . Различают априорные и апостериорные правила останова. В первом случае количество выполняемых итераций  $N = N(\delta)$  назначается до начала расчетов. Во втором случае момент останова счета определяется непосредственно в процессе реализации итераций, так что номер  $N = N(\delta, F_\delta)$  кроме погрешности  $\delta$  зависит и от приближенного оператора  $F_\delta$ . При выполнении условия истокорпредставимости

$$\xi - x^* = (F'^*(x^*)F'(x^*))^p v, \quad v \in H_1, \quad (11)$$

с показателем  $p \in [1/2, p^*]$  и подходящем априорном правиле останова  $N = N(\delta)$  для методов класса (4) имеет место оценка (см. [3, с. 128])

$$\|x_{N(\delta)} - x^*\|_{H_1} = O(\delta^{2p/(2p+1)}), \quad 1/2 \leq p \leq p^*. \quad (12)$$

Упомянутое правило описывается условием  $\alpha_{N(\delta)}^{p+1/2} \sim \delta$ . Существенным недостатком таких правил останова является то обстоятельство, что в них номер  $N = N(\delta, p)$  помимо  $\delta$  зависит еще и от параметра истокорпредставимости  $p$ , который в прикладных задачах обычно неизвестен.

Преимущества апостериорных правил связаны с возможностью более гибкой настройки итерационного процесса на конкретную задачу за счет использования дополнительной информации о ней, доставляемой оператором  $F_\delta$ . Наиболее известный апостериорный критерий останова (принцип невязки В.А. Морозова) имеет вид

$$\|F_\delta(x_{N(\delta, F_\delta)})\|_{H_2} < \tau \delta \leq \|F_\delta(x_n)\|_{H_2}, \quad 0 \leq n \leq N(\delta, F_\delta) - 1, \quad \tau > 1. \quad (13)$$

Гибкость апостериорных правил вида (13) проявляется в том, что эти правила не требуют задания параметра истокорпредставимости  $p$  и в то же время при подходящих дополнительных условиях обеспечивают выполнение оптимальной по порядку оценки точности (12). Таким образом, итерационный процесс с таким правилом останова обладает свойством самонастройки на задачу с решением из определенного класса истокорпредставимости. Наиболее заверченный вид теория решения нерегулярных уравнений с апостериорными правилами выбора параметра регуляризации имеет в случае линейных уравнений (см. [7, гл. 2, 3]). В нелинейном случае обозначенный выше результат до сих пор удавалось получить (см. [8]–[10]) лишь при наложении на оператор  $F$  дополнительных структурных условий вида

$$F'(x) = L(x, \bar{x})F'(\bar{x}),$$

$$\|E_2 - L(x, \bar{x})\|_{L(H_2, H_2)} \leq d \|x - \bar{x}\|_{H_1}, \quad d > 0; \quad x, \bar{x} \in \Omega_R(x^*). \quad (14)$$

Если отказаться от условий типа (14), то уже для установления сходимости  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|x_{N(\delta, F_\delta)} - x^*\|_{H_1} = 0$  требуется модификация первоначального критерия (13). Один из возможных способов (см. [3, с. 131], [11]) состоит в выборе момента останова из условия

$$\|F_\delta(x_{N(\delta, F_\delta)})\|_{H_2}^2 < \tau\delta \leq \|F_\delta(x_n)\|_{H_2}^2, \quad 0 \leq n \leq N(\delta, F_\delta) - 1; \quad \tau > 1. \tag{15}$$

В этом случае устанавливается, что номер  $N(\delta, F_\delta)$  корректно определен и выполняется оценка точности

$$\|x_{N(\delta, F_\delta)} - x^*\|_{H_1} = O(\alpha_{N(\delta, F_\delta)}^p). \tag{16}$$

Оценка (16) (см. также аналогичную оценку (3.8) в [12]) оставляет открытым вопрос о точности приближения  $x_{N(\delta, F_\delta)}$ , выраженной непосредственно в терминах уровня шума  $\delta$ . Целью настоящей работы является получение такой оценки для итерационного процесса (4). При этом вместо (13), (15) используется следующее модифицированное правило останова:

$$\sqrt{\alpha_{N(\delta, F_\delta)}} \|F_\delta(x_{N(\delta, F_\delta)})\|_{H_2} < \tau\delta \leq \sqrt{\alpha_n} \|F_\delta(x_n)\|_{H_2}, \quad 0 \leq n \leq N(\delta, F_\delta) - 1. \tag{17}$$

Без использования дополнительных предположений относительно оператора  $F$  ниже в теореме 3 устанавливается оценка точности

$$\|x_{N(\delta, F_\delta)} - x^*\|_{H_1} = O(\delta^{2p/(2p^*+1)}), \quad (p^* + 1)/2 \leq p \leq p^*. \tag{18}$$

Как показывает сравнение (18) с оценкой (12), обеспечиваемой априорным правилом останова, получаемая оценка охватывает более узкий отрезок изменения показателей истокорпредставимости  $p$ . Кроме того, оценка (18) уступает по порядку оценке (12) при  $p < p^*$  и совпадает с ней лишь в случае  $p = p^*$ . Тем не менее (18) не предполагает не только каких-либо условий на нелинейность оператора  $F$ , но и наличия априорной информации о значении  $p$  помимо условия  $p \geq (p^* + 1)/2$ .

Структура работы следующая. В разд. 2 устанавливаются корректность правила останова (17) и сходимость получаемых аппроксимаций к решению задачи (1). Раздел 3 посвящен доказательству основного утверждения работы, устанавливающего оценку точности аппроксимаций, доставляемых итерациями (4), (17), в терминах уровня погрешности  $\delta$ .

## 2. СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИЙ

В этом разделе при определенных дополнительных условиях будут установлены корректность правила останова (17) и сходимость порождаемых приближений  $x_{N(\delta, F_\delta)}$  к решению  $x^*$ . Ниже нам понадобится вытекающее из (2) представление

$$F_\delta(y) = F_\delta(x) + F_\delta'(x)(y - x) + G(x, y), \quad x, y \in \Omega_R(x^*); \tag{19}$$

$$\|G(x, y)\|_{H_2} \leq \frac{1}{2} L \|x - y\|_{H_1}^2.$$

Пусть при некотором  $1/2 \leq p \leq p^*$  выполняется условие (11), последовательность итерационных точек  $\{x_n\}$  строится согласно (4),  $x_0 \in \Omega_R(x^*)$ . Используя (19), получаем (см. [3, с. 130]), что если  $x_n \in \Omega_R(x^*)$ , то с подходящими постоянными  $C_4, \dots, C_7$  выполняется

$$\|x_{n+1} - x^*\|_{H_1} \leq \frac{C_4}{\sqrt{\alpha_n}} \|x_n - x^*\|_{H_1}^2 + C_5 \|v\|_{H_1} \alpha_n^p + C_6 \|v\|_{H_1} \|x_n - x^*\|_{H_1} + C_7 \frac{\delta}{\sqrt{\alpha_n}}. \tag{20}$$

Вначале покажем, что условие (17) корректно определяет номер  $N(\delta, F_\delta) \in \mathbb{N}$ . Будем предполагать, что

$$\sqrt{\alpha_0} \|F_\delta(x_0)\|_{H_2} > \tau\delta. \tag{21}$$

Предположим, что номер  $N(\delta, F_\delta)$ , удовлетворяющий (17), не существует. Возможны два случая.

1. Для всех  $n = 1, 2, \dots$  выполняется  $x_n \in \Omega_R(x^*)$  и  $\sqrt{\alpha_n} \|F_\delta(x_n)\|_{H_2} > \tau\delta$ .

2. Найдется номер  $K \in \mathbb{N}$  такой, что  $x_n \in \Omega_R(x^*)$ ,  $\sqrt{\alpha_n} \|F_\delta(x_n)\|_{H_2} > \tau\delta$  для всех  $n = 1, 2, \dots, K$ , но  $x_{K+1} \notin \Omega_R(x^*)$ .

Заметим, что в силу (2)

$$\|F_\delta(x) - F_\delta(y)\|_{H_2} \leq M \|x - y\|_{H_1}, \quad x, y \in \Omega_R(x^*).$$

Поэтому  $\sup_{n=0,1,\dots} \|F_\delta(x_n)\|_{H_2} < \infty$ , и случай 1 противоречит условию  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$  из (5).

Далее укажем условия на параметры процесса (4), (17), при выполнении которых случай 2 также не реализуется. Пусть выполняется условие

$$2\sqrt{\alpha_0} \leq \tau. \quad (22)$$

Тогда для произвольного номера  $1 \leq n \leq K$  с учетом (5) имеем

$$\frac{\tau\delta}{\sqrt{\alpha_n}} \leq \|F_\delta(x_n)\|_{H_2} \leq M \|x_n - x^*\|_{H_1} + \delta \leq M \|x_n - x^*\|_{H_1} + \frac{\tau\delta}{2\sqrt{\alpha_n}}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\delta}{\sqrt{\alpha_n}} \leq \frac{2M}{\tau} \|x_n - x^*\|_{H_1}. \quad (23)$$

Объединяя оценки (20) и (23), получаем

$$\|x_{n+1} - x^*\|_{H_1} \leq \frac{C_4}{\sqrt{\alpha_n}} \|x_n - x^*\|_{H_1}^2 + C_5 \|v\|_{H_1} \alpha_n^p + \left( C_6 \|v\|_{H_1} + \frac{2C_7 M}{\tau} \right) \|x_n - x^*\|_{H_1}. \quad (24)$$

Предположим, что с некоторой постоянной  $l > 0$  выполняется

$$\|x_0 - x^*\|_{H_1} \leq l\alpha_0^p \leq R. \quad (25)$$

Покажем, что при некоторых дополнительных предположениях тогда будет справедливо

$$\|x_n - x^*\|_{H_1} \leq l\alpha_n^p, \quad 0 \leq n \leq K + 1. \quad (26)$$

Доказательство проведем по индукции. При  $n = 0$  искомое утверждение совпадает с (25). Пусть теперь неравенство (26) верно для некоторого номера  $0 \leq n \leq K$ . Убедимся, что тогда

$$\|x_{n+1} - x^*\|_{H_1} \leq l\alpha_{n+1}^p. \quad (27)$$

Из (24) и (5) в силу предположения индукции получаем

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\|_{H_1} &\leq \left[ C_4 l \alpha_n^{p-1/2} + \frac{C_5 \|v\|_{H_1}}{l} + \left( C_6 \|v\|_{H_1} + \frac{2C_7 M}{\tau} \right) \right] l \alpha_n^p \leq \\ &\leq \left[ C_4 l \alpha_0^{p-1/2} + \frac{C_5 \|v\|_{H_1}}{l} + \left( C_6 \|v\|_{H_1} + \frac{2C_7 M}{\tau} \right) \right] r^p l \alpha_{n+1}^p. \end{aligned} \quad (28)$$

Дополнительно к сделанным ранее предположениям будем считать выполненным условие

$$\left[ C_4 l \alpha_0^{p-1/2} + \frac{C_5 \|v\|_{H_1}}{l} + \left( C_6 \|v\|_{H_1} + \frac{2C_7 M}{\tau} \right) \right] r^{p*} \leq 1. \quad (29)$$

Поскольку  $r \geq 1$ , требуемая оценка (27) непосредственно следует из (28), (29). Этим шаг индукции завершен. Из (26) с учетом (5) и (25) теперь следует, что  $x_{K+1} \in \Omega_R(x^*)$ . Мы убедились, что случай 2) также не реализуется. Одновременно доказано следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия (21), (22), (25), (29). Тогда условие (17) корректно определяет номер  $N(\delta, F_\delta) \in \mathbb{N}$ . При этом имеет место оценка

$$\|x_n - x^*\|_{H_1} \leq l\alpha_n^p, \quad 1 \leq n \leq N(\delta, F_\delta). \quad (30)$$

**Замечание 1.** Условие (29) выполняется, если величина  $l$  выбрана достаточно малой, а параметр  $\tau$  достаточно большим так, что

$$\left( C_4 l \alpha_0^{p-1/2} + \frac{2C_7 M}{\tau} \right) r^{p^*} \leq \frac{1}{2}.$$

При этом на элемент  $v$  в условии истокопредставимости (11) следует наложить требование

$$\|v\|_{H_1} < \frac{l}{2(C_5 + C_6 l) r^{p^*}}.$$

Исследуем теперь сходимость приближений  $x_{N(\delta, F_\delta)} = x_{N(\delta, F_\delta)}(F_\delta)$  к решению  $x^*$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Примем техническое предположение о том, что шар  $\Omega_R(x^*)$  не содержит отличных от  $x^*$  решений уравнения (1). Для простоты будем считать, что задана дискретная последовательность приближенных операторов  $\{F_{\delta_q}\}$  с соответствующими уровнями погрешности  $\{\delta_q\} \rightarrow 0$ . Тогда получаем последовательность приближений  $\{x_{N(\delta_q, F_{\delta_q})}(F_{\delta_q})\}$ .

Зафиксируем  $x_0 \in \Omega_R(x^*)$  и будем обозначать через  $x_n(\tilde{F})$  результат  $n$  шагов процесса (4) с  $F_\delta = \tilde{F}$ . Пусть  $x_n^{(q)} = x_n(F_{\delta_q})$ ,  $x_n^* = x_n(F)$ . Ниже нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 1.** Пусть положительная числовая последовательность  $\{\delta_q\}$ ,  $\lim_{q \rightarrow \infty} \delta_q = 0$ , и последовательность  $\{F_{\delta_q}\}$  дифференцируемых по Фреше операторов удовлетворяют соотношениям (2) и (3) с  $\delta = \delta_q$ ,  $F_\delta = F_{\delta_q}$  при любом  $q$ . Тогда для любого номера  $n \in \mathbb{N}$ , при котором  $x_k^{(q)} \in \Omega_R(x^*)$  для всех  $k \leq n$  и  $q \in \mathbb{N}$ , справедливо

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \|x_n^{(q)} - x_n^*\|_{H_1} = 0. \tag{31}$$

**Доказательство** проведем по индукции. Пусть для некоторого номера  $n$ , удовлетворяющего условию леммы, соотношение (31) верно. Тогда  $x_n^* \in \Omega_R(x^*)$ . Отметим, что для номера  $n = 0$  сказанное справедливо. Тогда

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(q)} - x_{n+1}^* &= (\Theta(F_{\delta_q}^{'*}(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}), \alpha_n)F_{\delta_q}^{'*}(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)})(x_n^{(q)} - \xi) - \\ &\quad - \Theta(F^{'*}(x_n^*)F'(x_n^*), \alpha_n)F^{'*}(x_n^*)F'(x_n^*)(x_n^* - \xi)) - \\ &\quad - (\Theta(F_{\delta_q}^{'*}(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}), \alpha_n)F_{\delta_q}^{'*}(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}) - \Theta(F^{'*}(x_n^*)F'(x_n^*), \alpha_n)F^{'*}(x_n^*)F'(x_n^*)) = \\ &= \Theta(F_{\delta_q}^{'*}(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}), \alpha_n)F_{\delta_q}^{'*}(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)})(x_n^{(q)} - x_n^*) + (\Theta(F_{\delta_q}^{'*}(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}), \alpha_n)F_{\delta_q}^{'*}(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}) - \\ &\quad - \Theta(F^{'*}(x_n^*)F'(x_n^*), \alpha_n)F^{'*}(x_n^*)F'(x_n^*)) (x_n^* - \xi) - \\ &\quad - \Theta(F_{\delta_q}^{'*}(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}), \alpha_n)(F_{\delta_q}^{'*}(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}) - F^{'*}(x_n^*)F'(x_n^*)) - \\ &\quad - (\Theta(F_{\delta_q}^{'*}(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}), \alpha_n) - \Theta(F^{'*}(x_n^*)F'(x_n^*), \alpha_n))F^{'*}(x_n^*)F'(x_n^*). \end{aligned} \tag{32}$$

В силу непрерывности функций  $\Theta(\lambda, \alpha_n)$  и  $\Theta(\lambda, \alpha_n)\lambda$  при  $\lambda \in [0, M^2]$  операторы  $\Theta(F_{\delta_q}^{'*}(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}), \alpha_n)$  и  $\Theta(F_{\delta_q}^{'*}(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}), \alpha_n)F_{\delta_q}^{'*}(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)})$  равномерно ограничены по  $q$ . Кроме того,

$$\begin{aligned} &\left\| F_{\delta_q}^{'*}(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}) - F^{'*}(x_n^*)F'(x_n^*) \right\|_{H_1} \leq \left\| F_{\delta_q}^{'*}(x_n^{(q)})(F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}) - F_{\delta_q}'(x_n^*)) \right\|_{H_1} + \\ &+ \left\| F_{\delta_q}^{'*}(x_n^{(q)})(F_{\delta_q}'(x_n^*) - F'(x_n^*)) \right\|_{H_1} + \left\| (F_{\delta_q}^{'*}(x_n^{(q)}) - F^{'*}(x_n^*))F'(x_n^*) \right\|_{H_1} + \left\| (F_{\delta_q}^{'*}(x_n^*) - F^{'*}(x_n^*))F'(x_n^*) \right\|_{H_1} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leq M^2 \left\| x_n^{(q)} - x_n^* \right\|_{H_1} + M(\delta_q + \delta_q \left\| x_n^* - x^* \right\|_{H_1}) + LM \left\| x_n^{(q)} - x_n^* \right\|_{H_1} \left\| x_n^* - x^* \right\|_{H_1} + \\ + M\delta_q \left\| x_n^* - x^* \right\|_{H_1} \rightarrow 0 \quad (q \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left\| \Theta(F_{\delta_q}^{*'}(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}), \alpha_n)F_{\delta_q}^{*'}(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)})(x_n^{(q)} - x_n^*) \right\|_{H_1} = 0, \tag{33}$$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left\| \Theta(F_{\delta_q}^{*'}(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}), \alpha_n)(F_{\delta_q}^{*'}(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}) - F^{*'}(x_n^*)F'(x_n^*)) \right\|_{H_1} = 0. \tag{34}$$

Кроме того, нетрудно видеть, что последовательность операторов  $\{F_{\delta_q}^{*'}(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)})\}$  равномерно сходится к оператору  $F^{*'}(x_n^*)F'(x_n^*)$ , поэтому (см. [13, с. 626]) имеет место сходимость в операторной норме

$$\Theta(F_{\delta_q}^{*'}(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}), \alpha_n)F_{\delta_q}^{*'}(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}) \rightarrow \Theta(F^{*'}(x_n^*)F'(x_n^*), \alpha_n)F^{*'}(x_n^*)F'(x_n^*), \tag{35}$$

$$\Theta(F_{\delta_q}^{*'}(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}), \alpha_n) \rightarrow \Theta(F^{*'}(x_n^*)F'(x_n^*), \alpha_n) \tag{36}$$

при  $q \rightarrow \infty$ . Объединяя (32)–(36), приходим к соотношению

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left\| x_{n+1}^{(q)} - x_{n+1}^* \right\|_{H_1} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим два возможных случая.

1. Последовательность моментов останова  $\{N(\delta_q, F_{\delta_q})\}$  ограничена, так что  $N(\delta_q, F_{\delta_q}) \leq \bar{N}$ ,  $q \in N$ . В этом случае найдется такой номер  $K_0$ , что  $\{N(\delta_q, F_{\delta_q}) : q \geq K_0\}$  есть объединение конечного числа бесконечных стационарных подпоследовательностей вида  $\{N(\delta_{q_j^{(l)}}), F_{\delta_{q_j^{(l)}}}) \equiv N_l\}_{j=1}^\infty$ , где  $N_l \neq N_m$  при  $l \neq m$ . Как следует из (17) и (3), для каждого  $l$  справедливо

$$\frac{\tau\delta_{q_j^{(l)}}}{\sqrt{\alpha_{N_l}}} > \left\| F_{\delta_{q_j^{(l)}}}'(x_{N_l}(F_{\delta_{q_j^{(l)}}})) \right\|_{H_2} \geq \left\| F(x_{N_l}(F_{\delta_{q_j^{(l)}}})) \right\|_{H_2} - \delta_{q_j^{(l)}} - \delta_{q_j^{(l)}} \left\| x_{N_l}(F_{\delta_{q_j^{(l)}}}) - x^* \right\|_{H_1}.$$

В этом двойном неравенстве при любом  $l$  левая часть стремится при  $j \rightarrow \infty$  к нулю, а правая часть в силу леммы 1 к величине  $\left\| F(x_{N_l}^*) \right\|_{H_2}$ . Отсюда следует  $F(x_{N_l}^*) = 0_{H_2}$ . Поскольку по предположению точка  $x^*$  является единственным решением уравнения (1) в шаре  $\Omega_R(x^*)$ , мы имеем  $x_{N_l}^* = x^*$  для каждого  $l$ .

2. В последовательности номеров  $\{N(\delta_q, F_{\delta_q})\}$  имеется неограниченно монотонно возрастающая подпоследовательность  $\{N(\delta_{q_s}, F_{\delta_{q_s}})\}$ . В этом случае, согласно (5), имеем

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \alpha_{N(\delta_{q_s}, F_{\delta_{q_s}})} = 0. \tag{37}$$

Тогда из (30) и (37) следует

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left\| x_{N(\delta_{q_s}, F_{\delta_{q_s}})} - x^* \right\|_{H_1} = 0. \tag{38}$$

Итак, мы показали, что если подпоследовательность номеров  $N(\delta_{q_s}, F_{\delta_{q_s}})$  имеет предел, конечный или бесконечный, то вдоль этой подпоследовательности выполняется (38). Легко видеть, что отсюда следует и

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \left\| x_{N(\delta_q, F_{\delta_q})} - x^* \right\|_{H_1} = 0. \tag{39}$$

В самом деле, в противном случае для некоторого  $\varepsilon > 0$  найдется возрастающая последовательность  $\{q_s\} \subset N$  такая, что

$$\|x_{N(\delta_{q_s}, F_{\delta_{q_s}})} - x^*\|_{H_1} > \varepsilon.$$

Выделив из последовательности номеров  $N(\delta_{q_s}, F_{\delta_{q_s}})$  подпоследовательность, имеющую конечный или бесконечный предел, придем к противоречию с доказанным выше. Мы приходим к следующей теореме.

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия теоремы 1 и заданы последовательности  $\{F_{\delta_q}\}, \{\delta_q\}$  такие, что для каждого  $q$  выполняется (3) с  $F_\delta = F_{\delta_q}, \delta = \delta_q$ . Тогда справедливо (39).

Перейдем к оценке точности приближений, доставляемых итерациями (4), (17).

### 3. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ

Из (30) вытекает оценка

$$\|x_{N(\delta, F_\delta)} - x^*\|_{H_1} \leq l\alpha_{N(\delta, F_\delta)}^p. \tag{40}$$

В этом разделе получим оценку для  $\|x_{N(\delta, F_\delta)} - x^*\|_{H_1}$  непосредственно в терминах уровня погрешности  $\delta$ . В силу теоремы 2

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|x_{N(\delta, F_\delta)} - x^*\|_{H_1} = 0. \tag{41}$$

Дополнительно предположим, что условие истокорпредставимости (11) выполнено с параметром  $(p^* + 1)/2 \leq p \leq p^*$ .

Пусть  $0 \leq n \leq N(\delta, F_\delta) - 1$ . Из (4) следует, что

$$x_{n+1} = x_n - \{[E_1 - \Theta(F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n), \alpha_n)F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n)](x_n - \xi) + \Theta(F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n), \alpha_n)F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n)\}. \tag{42}$$

Кроме того,

$$F_\delta(x_{n+1}) = F_\delta(x_n) + F_\delta'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + G_n,$$

где  $G_n = G(x_n, x_{n+1})$  и, согласно (19),

$$\|G_n\|_{H_2} \leq \frac{1}{2}L\|x_{n+1} - x_n\|_{H_1}^2. \tag{43}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} F_\delta(x_{n+1}) &= F_\delta(x_n) - F_\delta'(x_n)\{[E_1 - \Theta(F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n), \alpha_n)F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n)](x_n - \xi) + \\ &+ \Theta(F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n), \alpha_n)F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n)\} + G_n = F_\delta(x_n) - F_\delta'(x_n)[E_1 - \Theta(F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n), \alpha_n)F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n)] \times \\ &\times (x_n - \xi) - F_\delta'(x_n)\Theta(F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n), \alpha_n)F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n) + G_n. \end{aligned}$$

Используя тождество  $A\Theta(A^*A, \alpha) = \Theta(AA^*, \alpha)A$ , справедливое для произвольного оператора  $A \in L(H_1, H_2)$  и  $\alpha > 0$  (см. [7, с. 34]), запишем

$$\begin{aligned} F_\delta(x_{n+1}) &= [E_2 - \Theta(F_\delta'(x_n)F_\delta'^*(x_n), \alpha_n)F_\delta'(x_n)F_\delta'^*(x_n)]F_\delta(x_n) - \\ &- [E_2 - \Theta(F_\delta'(x_n)F_\delta'^*(x_n), \alpha_n)F_\delta'(x_n)F_\delta'^*(x_n)]F_\delta'(x_n)(x_n - \xi) + G_n. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &[E_2 - \Theta(F_\delta'(x_n)F_\delta'^*(x_n), \alpha_n)F_\delta'(x_n)F_\delta'^*(x_n)]F_\delta'(x_n)(x_n - \xi) = \\ &= [E_2 - \Theta(F_\delta'(x_n)F_\delta'^*(x_n), \alpha_n)F_\delta'(x_n)F_\delta'^*(x_n)]F_\delta(x_n) - F_\delta(x_{n+1}) + G_n. \end{aligned} \tag{44}$$

Из (2) следует, что спектры операторов  $F_\delta'(x)F_\delta'^*(x), x \in \Omega_R(x^*)$ , принадлежат отрезку  $[0, M^2]$  вещественной оси. Зафиксируем  $v \in (0, M^2)$  и обозначим через

$$P_n = \chi(F_\delta'(x_n)F_\delta'^*(x_n)), \quad \chi(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \in [v, M^2], \\ 0, & \lambda \notin [v, M^2], \end{cases}$$

ортопроектор из  $H_2$  на собственное подпространство оператора  $F_\delta'(x_n)F_\delta'^*(x_n)$ , отвечающего части его спектра в отрезке  $[v, M^2]$ .

Подействуем на обе части равенства (44) оператором  $P_n$ . Поскольку  $\|P_n\|_{L(H_2, H_2)} \leq 1$ , из (44) следует

$$\begin{aligned} & \left\| P_n[E_2 - \Theta(F'_\delta(x_n)F_\delta'^*(x_n), \alpha_n)F'_\delta(x_n)F_\delta'^*(x_n)]F'_\delta(x_n)(x^* - \xi) \right\|_{H_2} \leq \\ & \leq \left\| P_n[E_2 - \Theta(F'_\delta(x_n)F_\delta'^*(x_n), \alpha_n)F'_\delta(x_n)F_\delta'^*(x_n)]F'_\delta(x_n) \right\|_{L(H_1, H_2)} \|x_n - x^*\|_{H_1} + \\ & + \left\| P_n[E_2 - \Theta(F'_\delta(x_n)F_\delta'^*(x_n), \alpha_n)F'_\delta(x_n)F_\delta'^*(x_n)] \right\|_{L(H_2, H_2)} \|F_\delta(x_n)\|_{H_2} + \\ & + \|F_\delta(x_{n+1})\|_{H_2} + \|G_n\|_{H_2}, \quad 1 \leq n \leq N(\delta, F_\delta) - 1. \end{aligned} \tag{45}$$

В силу (7)

$$\forall \lambda \in [0, M^2], \quad |1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda| \leq \frac{C_2(p^*)\alpha^{p^*}}{\lambda^{p^*}}.$$

Поэтому

$$\left\| P_n[E_2 - \Theta(F'_\delta(x_n)F_\delta'^*(x_n), \alpha_n)F'_\delta(x_n)F_\delta'^*(x_n)]F'_\delta(x_n) \right\|_{L(H_1, H_2)} \leq \max_{\lambda \in [v, M^2]} (|1 - \Theta(\lambda, \alpha_n)\lambda| \sqrt{\lambda}) \leq C_8 \alpha_n^{p^*}; \tag{46}$$

$$\left\| P_n[E_2 - \Theta(F'_\delta(x_n)F_\delta'^*(x_n), \alpha_n)F'_\delta(x_n)F_\delta'^*(x_n)] \right\|_{L(H_2, H_2)} \leq \max_{\lambda \in [v, M^2]} |1 - \Theta(\lambda, \alpha_n)\lambda| \leq C_9 \alpha_n^{p^*}. \tag{47}$$

Для оценки нормы элемента  $G_n$  воспользуемся (42) и (43). Имеем

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\|_{H_1} & \leq \left\| [E_1 - \Theta(F_\delta'^*(x_n)F'_\delta(x_n), \alpha_n)F_\delta'^*(x_n)F'_\delta(x_n)](x_n - \xi) \right\|_{H_1} + \\ & + \left\| \Theta(F_\delta'^*(x_n)F'_\delta(x_n), \alpha_n)F_\delta'^*(x_n) \right\|_{L(H_2, H_1)} \|F_\delta(x_n)\|_{H_2}. \end{aligned} \tag{48}$$

Здесь

$$\begin{aligned} & \left\| [E_1 - \Theta(F_\delta'^*(x_n)F'_\delta(x_n), \alpha_n)F_\delta'^*(x_n)F'_\delta(x_n)](x_n - \xi) \right\|_{H_1} \leq \\ & \leq \left\| [E_1 - \Theta(F_\delta'^*(x_n)F'_\delta(x_n), \alpha_n)F_\delta'^*(x_n)F'_\delta(x_n)](x_n - x^*) \right\|_{H_1} + \\ & + \left\| [E_1 - \Theta(F_\delta'^*(x_n)F'_\delta(x_n), \alpha_n)F_\delta'^*(x_n)F'_\delta(x_n)](x^* - \xi) \right\|_{H_1}. \end{aligned} \tag{49}$$

Из (6) следует, что при  $\lambda \in [0, \alpha]$  справедливо  $|1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda| \leq C_1 + 1$ , а в силу (7) при  $\lambda \in [\alpha, M]$  имеет место  $|1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda| \leq C_2(p^*)$ . Поэтому для первого слагаемого в правой части (49) выполняется

$$\begin{aligned} & \left\| [E_1 - \Theta(F_\delta'^*(x_n)F'_\delta(x_n), \alpha_n)F_\delta'^*(x_n)F'_\delta(x_n)](x_n - x^*) \right\|_{H_1} \leq \\ & \leq \|x_n - x^*\|_{H_1} \max_{\lambda \in [0, M^2]} |1 - \Theta(\lambda, \alpha_n)\lambda| \leq C_{10} \|x_n - x^*\|_{H_1}. \end{aligned} \tag{50}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} & \left\| [E_1 - \Theta(F_\delta'^*(x_n)F'_\delta(x_n), \alpha_n)F_\delta'^*(x_n)F'_\delta(x_n)](x^* - \xi) \right\|_{H_1} \leq \\ & \leq \left\| [E_1 - \Theta(F'^*(x^*)F'(x^*), \alpha_n)F'^*(x^*)F'(x^*)](x^* - \xi) \right\|_{H_1} + \\ & + \left\| [\Theta(F_\delta'^*(x_n)F'_\delta(x_n), \alpha_n)F_\delta'^*(x_n)F'_\delta(x_n) - \Theta(F'^*(x^*)F'(x^*), \alpha_n)F'^*(x^*)F'(x^*)](x^* - \xi) \right\|_{H_1}. \end{aligned} \tag{51}$$

Для первого слагаемого в правой части (51) с учетом (11) и (7) имеем оценку

$$\begin{aligned} & \| [E_1 - \Theta(F'^*(x^*)F'(x^*), \alpha_n)F'^*(x^*)F'(x^*)](x^* - \xi) \|_{H_1} = \\ & = \| [E_1 - \Theta(F'^*(x^*)F'(x^*), \alpha_n)F'^*(x^*)F'(x^*)](F'^*(x^*)F'(x^*))^p v \|_{H_1} \leq \\ & \leq \|v\|_{H_1} \max_{\lambda \in [0, M^2]} (1 - \Theta(\lambda, \alpha_n)\lambda) \lambda^p \leq C_2(p^*) \|v\|_{H_1} \alpha_n^p. \end{aligned} \tag{52}$$

Заметим, что

$$\| F'_\delta(x_n) - F'^*(x^*) \|_{L(H_1, H_2)} \leq L \|x_n - x^*\|_{H_1} + \delta.$$

Используя это неравенство, оценим второе слагаемое в правой части (51) по схеме из [3, с. 117]:

$$\begin{aligned} & \| [\Theta(F'_\delta(x_n)F'_\delta(x_n), \alpha_n)F'_\delta(x_n)F'_\delta(x_n) - \Theta(F'^*(x^*)F'(x^*), \alpha_n)F'^*(x^*)F'(x^*))](x^* - \xi) \|_{H_1} \leq \\ & \leq C_{11} \|v\|_{H_1} (\|x_n - x^*\|_{H_1} + \delta). \end{aligned} \tag{53}$$

Из (49)–(53) с учетом (30) следует

$$\| [E_1 - \Theta(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n)F'^*(x_n)F'(x_n)](x_n - \xi) \|_{H_1} \leq C_{12} [l + \|v\|_{H_1} + \|v\|_{H_1} l] \alpha_n^p + \|v\|_{H_1} \delta. \tag{54}$$

Для второго слагаемого в правой части (48) справедливо

$$\begin{aligned} & \| \Theta(F'_\delta(x_n)F'_\delta(x_n), \alpha_n)F'_\delta(x_n) \|_{L(H_2, H_1)} \|F'_\delta(x_n)\|_{H_2} \leq \frac{C_{13}}{\sqrt{\alpha_n}} \|F'_\delta(x_n)\|_{H_2} \leq \frac{C_{13}}{\sqrt{\alpha_n}} (\|F'_\delta(x_n) - F'_\delta(x^*)\|_{H_2} + \delta) \leq \\ & \leq \frac{C_{13}}{\sqrt{\alpha_n}} (M \|x_n - x^*\|_{H_1} + \delta) \leq \frac{C_{13}}{\sqrt{\alpha_n}} (Ml\alpha_n^p + \delta). \end{aligned} \tag{55}$$

Из (43), (48), (54), (55) следует

$$\|G_n\|_{H_2} \leq C_{14} \left( l^2 \alpha_n^{2p-1} + \frac{\delta^2}{\alpha_n} \right). \tag{56}$$

Обратимся к левой части неравенства (45). Обозначим через  $Q(x) = \chi(F'_\delta(x)F'_\delta(x))$ ,  $x \in \Omega_R(x^*)$ , ортопроектор из  $H_1$  на собственное подпространство оператора  $F'_\delta(x)F'_\delta(x)$ , соответствующее части его спектра в  $[v, M^2]$ , и положим  $Q_n = Q(x_n)$ . Кроме того, пусть  $Q^* = \chi(F'^*(x^*)F'(x^*))$  — ортопроектор из  $H_1$  на собственное подпространство оператора  $F'^*(x^*)F'(x^*)$ , соответствующее части его спектра в  $[v, M^2]$ . Отметим, что ненулевые части спектров операторов  $F'_\delta(x)F'_\delta(x)$  и  $F'_\delta(x)F'_\delta(x)$  совпадают. С использованием (8) и известного тождества (см. [3, с. 26])

$$\Theta(AA^*, \alpha)A = A\Theta(A^*A, \alpha), \quad A \in L(H_1, H_2), \quad \alpha > 0,$$

получаем оценку

$$\begin{aligned} & \| P_n [E_2 - \Theta(F'_\delta(x_n)F'_\delta(x_n), \alpha_n)F'_\delta(x_n)F'_\delta(x_n)] F'_\delta(x_n) (x^* - \xi) \|_{H_2}^2 = \\ & = \| F'_\delta(x_n) Q_n [E_1 - \Theta(F'_\delta(x_n)F'_\delta(x_n), \alpha_n)F'_\delta(x_n)F'_\delta(x_n)] (x^* - \xi) \|_{H_2}^2 = \\ & = \int_v^{M^2} (1 - \lambda \Theta(\lambda, \alpha))^2 \lambda d \|E_{n\lambda}(x^* - \xi)\|_{H_1}^2 \geq C_{15} \alpha_n^{2p} \int_v^{M^2} d \|E_{n\lambda}(x^* - \xi)\|_{H_1}^2 = C_{15} \alpha_n^{2p} \|Q_n(x^* - \xi)\|_{H_1}^2. \end{aligned} \tag{57}$$

Здесь  $\{E_{nk}\}$  есть семейство спектральных проекторов оператора  $F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n)$ .

Для дальнейшего нам потребуется следующее условие.

**Условие 1.** Точка  $\lambda = \nu$  принадлежит резольвентному множеству оператора  $F'^*(x^*)F'(x^*)$ .

Ввиду условия 1, некоторая окрестность  $(\nu - \varepsilon, \nu + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , свободна от точек спектра  $F'^*(x^*)F'(x^*)$ . Нам понадобится следующая оценка для нормы возмущения спектрального проектора (см., например, [14, § 135]).

**Лемма 2.** Пусть  $A, B$  — ограниченные самосопряженные операторы в  $H_1$ ,

$$\|A\|_{L(H_1, H_1)}, \|B\|_{L(H_1, H_1)} \leq M^2,$$

интервал  $(\nu - \varepsilon_0, \nu + \varepsilon_0)$  лежит в резольвентном множестве операторов  $A, B$  и  $Q_A = \chi(A)$ ,  $Q_B = \chi(B)$ . Тогда для некоторой константы  $D = D(M, \nu, \varepsilon_0)$  выполняется

$$\|Q_A - Q_B\|_{L(H_1, H_1)} \leq D\|A - B\|_{L(H_1, H_1)}.$$

Из (2), (3) следует, что

$$\left\| F_\delta'^*(x)F_\delta'(x) - F'^*(x^*)F'(x^*) \right\|_{L(H_1, H_1)} \leq 2M \left( L\|x - x^*\|_{H_1} + \delta \right). \tag{58}$$

Положим в предыдущих построениях  $n = N(\delta, F_\delta) - 1$ . Ввиду (41) и (58), интервал  $(\nu - \varepsilon/2, \nu + \varepsilon/2)$  свободен от точек спектра оператора  $F_\delta'^*(x_{N(\delta, F_\delta)-1})F_\delta'(x_{N(\delta, F_\delta)-1})$  для всех  $\delta \in (0, \delta_0]$  с достаточно малым  $\delta_0 > 0$ . Применяя лемму 2 к операторам  $A = F_\delta'^*(x_{N(\delta, F_\delta)-1})F_\delta'(x_{N(\delta, F_\delta)-1})$ ,  $B = F'^*(x^*)F'(x^*)$  и используя (58), получаем

$$\|Q_{N(\delta, F_\delta)-1} - Q^*\|_{L(H_1, H_1)} \leq C_{16} \left( \|x_{N(\delta, F_\delta)-1} - x^*\|_{H_1} + \delta \right), \quad \delta \in (0, \delta_0]. \tag{59}$$

Из (57), (59) следует, что при  $n = N(\delta, F_\delta) - 1$  величина

$$\left\| P_n [E_2 - \Theta(F_\delta'(x_n)F_\delta'^*(x_n), \alpha_n)F_\delta'(x_n)F_\delta'^*(x_n)]F_\delta'(x_n)(x^* - \xi) \right\|_{H_2} \tag{60}$$

оценивается снизу выражением

$$\sqrt{C_{15}}\alpha_{N(\delta, F_\delta)}^{p^*} \left( \|Q^*(x^* - \xi)\|_{H_1} - C_{16} \|x_{N(\delta, F_\delta)-1} - x^*\|_{H_1} - C_{16}\delta \right).$$

В дополнение к сделанным ранее предположениям введем следующее условие.

**Условие 2.** Справедливо соотношение

$$Q^*(x^* - \xi) \neq 0_{H_1}.$$

При выполнении условия 2 заключаем, что величина (60) при  $n = N(\delta, F_\delta) - 1$  оценивается снизу величиной  $\kappa\alpha_{N(\delta, F_\delta)}^{p^*}$ ,  $\delta \in (0, \delta_1]$  с подходящим  $0 < \delta_1 \leq \delta_0$  и  $\kappa = \sqrt{C_{15}}\|Q^*(x^* - \xi)\|_{H_1}/2$ .

Объединяя (46), (47), (56), заключаем, что правая часть (45) при  $n = N(\delta, F_\delta) - 1$  оценивается сверху выражением

$$\begin{aligned} & C_{17} \left( \|x_{N(\delta, F_\delta)-1} - x^*\|_{H_1} + \|F_\delta(x_{N(\delta, F_\delta)-1}) - F_\delta(x^*)\|_{H_2} + \|F_\delta(x^*)\|_{H_2} \right) \alpha_{N(\delta, F_\delta)}^{p^*} + \|F_\delta(x_{N(\delta, F_\delta)})\|_{H_2} + \\ & + C_{14} \left( l^2 \alpha_{N(\delta, F_\delta)-1}^{2p-1} + \frac{\delta^2}{\alpha_{N(\delta, F_\delta)-1}} \right) \leq C_{17} ((M + 1) \|x_{N(\delta, F_\delta)-1} - x^*\|_{H_1} + \delta) r^{p^*} \alpha_{N(\delta, F_\delta)}^{p^*} + \\ & + \frac{\tau\delta}{\sqrt{\alpha_{N(\delta, F_\delta)}}} + C_{14} l^2 r^{2p-1} \alpha_{N(\delta, F_\delta)}^{p^*} + C_{14} \frac{\delta^2}{\alpha_{N(\delta, F_\delta)}}. \end{aligned}$$

Здесь при выводе использовались соотношения (2), (5), (17) и условие  $(p^* + 1)/2 \leq p \leq p^*$ . Таким образом, при  $\delta \in (0, \delta_1]$  выполняется

$$\kappa\alpha_{N(\delta, F_\delta)}^{p^*} \leq C_{17} ((M + 1) \|x_{N(\delta, F_\delta)-1} - x^*\|_{H_1} + \delta) r^{p^*} \alpha_{N(\delta, F_\delta)}^{p^*} + \frac{\tau\delta}{\sqrt{\alpha_{N(\delta, F_\delta)}}} + C_{14} l^2 r^{2p-1} \alpha_{N(\delta, F_\delta)}^{p^*} + C_{14} \frac{\delta^2}{\alpha_{N(\delta, F_\delta)}}. \tag{61}$$

Величину  $l$  считаем выбранной настолько малой, что

$$C_{14} l^2 r^{2p^*-1} \leq \kappa/2. \quad (62)$$

Тогда из (61) и (62) следует, что если  $\delta \in (0, \delta_2]$  с подходящим  $0 < \delta_2 \leq \delta_1$ , то

$$\frac{1}{4} \kappa \alpha_{N(\delta, F_\delta)}^{p^*} \leq \frac{\tau \delta}{\sqrt{\alpha_{N(\delta, F_\delta)}}} + C_{14} \frac{\delta^2}{\alpha_{N(\delta, F_\delta)}}. \quad (63)$$

Решая квадратное неравенство (63) относительно  $t = \delta/\sqrt{\alpha_{N(\delta, F_\delta)}}$ , находим

$$\frac{\delta}{\sqrt{\alpha_{N(\delta, F_\delta)}}} \geq C_{18} \alpha_{N(\delta, F_\delta)}^{p^*}.$$

Отсюда следует необходимая нам верхняя оценка  $\alpha_{N(\delta, F_\delta)}$  в терминах  $\delta$ :

$$\alpha_{N(\delta, F_\delta)} \leq C_{19} \delta^{\frac{2}{2p^*+1}}. \quad (64)$$

Объединяя (64) и (40), получаем следующее утверждение.

**Теорема 3.** Пусть  $(p^* + 1)/2 \leq p \leq p^*$ , выполняются предположения теоремы 1, условия 1, 2 и соотношение (62). Тогда справедлива оценка

$$\|x_{N(\delta, F_\delta)} - x^*\|_{H_1} \leq C_{20} \delta^{\frac{2p}{2p^*+1}}, \quad \delta \in (0, \delta_2].$$

**Замечание 2.** Из доказательства теоремы 3 следует, что если показатель  $p$  в (11) удовлетворяет условию  $(p^* + 1)/2 + \varepsilon \leq p \leq p^*$ ,  $\varepsilon > 0$ , то условие (62) может быть снято.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука. Физматлит, 1995.
2. Кабаныхин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2008.
3. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю. Алгоритмический анализ нерегулярных операторных уравнений. М.: ЛЕНАНД, 2012.
4. Кокурин М.Ю. О выпуклости функционала Тихонова и итеративно регуляризованных методах решения нерегулярных нелинейных операторных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 4. С. 651–664.
5. Кокурин М.Ю. Об организации глобального поиска при реализации схемы Тихонова // Изв. вузов. Математика. 2010. № 12. С. 20–31.
6. Engl H.W., Hanke M., Neubauer A. Regularization of Inverse Problems. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Acad. Publ., 1996.
7. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. М.: Наука, 1986.
8. Kaltenbacher B., Neubauer A., Scherzer O. Iterative regularization methods for nonlinear ill-posed problems. Berlin: Walter de Gruyter, 2008.
9. Jin Q., Tautenhahn U. Inexact Newton regularization methods in Hilbert scales // Numer. Math. 2011. V. 117. № 3. P. 555–579.
10. Jin Q. A general convergence analysis of some Newton-type methods for nonlinear inverse problems // SIAM J. Numer. Anal. 2011. V. 49. № 2. P. 549–573.
11. Bakushinsky A., Smirnova A. On application of generalized discrepancy principle to iterative methods for nonlinear ill-posed problems // Numer. Funct. Anal. Optim. 2005. V. 26. № 1. P. 35–48.
12. Pornsawad P., Bockmann C. Modified iterative Runge–Kutta-type methods for nonlinear ill-posed problems // Numer. Funct. Anal. Optim. 2016. V. 37. № 12. P. 1562–1589.
13. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы: Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
14. Русс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.

---



---

**ОБЩИЕ  
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

---



---

УДК 519.63

**ТОЖДЕСТВО ДЛЯ ОТКЛОНЕНИЙ ОТ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ  
 $\Lambda^* \mathcal{A} \Lambda u + \ell = 0$  И ЕГО СЛЕДСТВИЯ**

© 2021 г. С. И. Репин

191023 Санкт-Петербург, Фонтанка, 27, Санкт-Петербургское отд. Матем. ин-та  
им. В.А. Стеклова РАН, Россия

e-mail: repin@pdmi.ras.ru

Поступила в редакцию 13.03.2021 г.

Переработанный вариант 13.03.2021 г.

Принята к публикации 04.08.2021 г.

Для класса эллиптических уравнений вида  $\Lambda^* \mathcal{A} \Lambda u + \ell = 0$  исследуется вопрос о том, как вычислить расстояние между функцией  $u$  и любым ее приближением  $v$  из соответствующего энергетического пространства. Анализ основан на тождестве, которому удовлетворяют нормы отклонений от точного решения этой задачи и точного решения двойственной задачи. Оно имеет ряд следствий. В частности, тождество позволяет оценить максимальное и минимальное расстояния до точного решения, используя только известное приближенное решение, данные задачи и решение специально сконструированной конечномерной задачи. При этом не требуется использовать интерполяционные неравенства Клемана (Clement's interpolation) или процедуры балансировки потока (flux equilibration). Показано, что оценки эквивалентны соответствующим нормам расстояния до решения и пригодны для широкого класса аппроксимаций, который включает как галеркинские приближения, так и достаточно грубые аппроксимации точного решения. Эти результаты проверены в серии численных экспериментов, где сравнивается эффективность различных методов. Библ. 36. Фиг. 6. Табл. 3.

**Ключевые слова:** уравнения эллиптического типа, оценки отклонения от точного решения, апостериорные оценки точности приближенных решений.

DOI: 10.31857/S0044466921120127

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Найти точные решения математических моделей, основанных на уравнениях в частных производных, как правило, не удается и приходится использовать их приближения. При этом неизбежно встает вопрос об их точности. С математической точки зрения он сводится к оценке расстояния между приближенным и точным решениями задачи. Первоначально исследования этого вопроса проводились в рамках теории априорных (асимптотических) оценок скорости сходимости к точному решению (см., например, [1]– [3]). Эти методы позволяли оценить качественный характер сходимости при наличии повышенной регулярности решения, определенной регулярности сетки и гарантии точности всех вычислений. С начала 80-х годов прошлого века новые подходы к численному анализу становятся все более связанными с адаптивными методами, которые основаны на использовании апостериорных оценок, а с середины 90-х годов прошлого века начинается интенсивное исследование полностью вычисляемых и гарантированных оценок отклонения от точного решения. Подробное изложение соответствующей теории можно найти в [4].

В настоящее время известно несколько различных методов, которые используются для апостериорного анализа качества приближенных решений различных математических задач. При их сравнении надо учитывать несколько критериев. К ним относятся точность апостериорной оценки и затраты, необходимые для ее вычисления. Конечно, имеются и другие критерии, так что сравнение разных методов и соответствующих оценок имеет смысл только в том случае, когда четко определен набор необходимых требований. Мы будем обсуждать только те оценки, которые удовлетворяют трем обязательным условиям. Во-первых, они должны быть *гарантированными* мажорантами или минорантами нормы разности между точными и приближенными решениями. Заметим, что в настоящее время известно много разных *индикаторов* ошибок. Этим вопросам посвящено очень большое количество публикаций (см. монографии [5]– [8] и цитиро-

ванную в них литературу). Большинство индикаторов вычисляются достаточно просто и используются как критерии перестроения сеток в адаптивных методах. Обычно индикаторы правильно подсказывают пути разумного перестроения сетки, однако они не дают гарантированных оценок локальных или глобальных норм погрешности приближенных решений. Более того, существуют случаи, когда формальное использование индикаторов может приводить к ошибочным выводам. Из нашего рассмотрения такие методы исключаются.

Второе требование состоит в *экономичности* оценки. Это означает, что затраты на ее вычисление не должны многократно превышать затраты на вычисление самого приближенного решения. Третьим, и вероятно самым важным, является требование *универсальности* оценки, которая должна быть пригодна для широкого класса приближенных решений, включающего как галеркинские аппроксимации, так и те, что существенно отличаются от них. В реальных вычислениях всегда возникают различные ошибки, связанные с приближенным интегрированием, различными округлениями, дефектами в компьютерных программах и многими другими обстоятельствами. Точное выполнение условия галеркинской ортогональности (или другого специфического свойства аппроксимаций типа суперсходимости) трудно гарантировать и необходимо иметь методы контроля точности приближенных решений, свободные от этого и других условий, связанных с особенностями используемого численного метода. Фактически это условие означает, что оценки должны быть получены на функциональном уровне без привлечения дополнительной информации о способе дискретизации задачи, т.е. речь идет о получении вычисляемых оценок разности между точным решением  $u$  задачи и любой функцией  $v$  из соответствующего энергетического пространства (или между точным решением  $p^*$  двойственной задачи и соответствующим приближением  $y^*$ ). Естественно назвать их оценками отклонения от точного решения.

В данной статье исследуются методы построения таких оценок для задач типа (2.1). Анализ основан на тождестве (2.5), которому удовлетворяют нормы отклонений от точного решения этой задачи и точного решения двойственной задачи. Основным результатом можно считать то, что для этого класса задач существуют гарантированные и полностью вычисляемые оценки норм функций  $v - u$  и  $y^* - p^*$  (в соответствующих пространствах), которые обладают указанными свойствами. Они обладают такими же асимптотическими свойствами (в смысле скорости сходимости к точному решению), как и сами нормы отклонения, причем для доказательства этого факта не требуется использования процедур “уравновешивания” потока  $y^*$  или каких-то других специальных условий, предъявляемых к  $v$  или  $y^*$ . Основная идея заключается в том, что та часть тождества (2.5), которая содержит неизвестную функцию  $v - u$ , может быть представлена через решение вспомогательной задачи. Более того, если точное решение этой задачи имеет повышенную регулярность, то можно точное решение вспомогательной задачи заменить на приближенное, а возникающие вследствие этого погрешности оценить с помощью стандартных интерполяционных оценок.

## 2. ТОЖДЕСТВО ДЛЯ НОРМ ОТКЛОНЕНИЙ ОТ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ

Мы рассматриваем класс линейных эллиптических уравнений дивергентного типа, которые могут быть представлены в форме

$$\Lambda^* \mathcal{A} \Lambda u + \ell = 0. \quad (2.1)$$

Пусть  $V$  — банахово пространство с нормой  $\|\cdot\|_V$ ,  $V_0$  — его подпространство,  $V_0^*$  — пространство, сопряженное к  $V_0$ , а  $Y^*$  — гильбертово пространство со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$  и нормой  $\|\cdot\|$  (элементы  $Y^*$  соответствуют так называемым двойственным переменным и помечаются звездочками). Оператор  $A : Y^* \rightarrow Y^*$  считается линейным, ограниченным и самосопряженным, а  $\ell \in V_0^*$ . Ограниченный линейный оператор  $\Lambda : V \rightarrow Y^*$  имеет сопряженный оператор  $\Lambda^* : Y^* \rightarrow V_0^*$ , который определяется равенством

$$(y^*, \Lambda v) = (\Lambda^* y^*, v) \quad \forall v \in V, \quad y^* \in Y^*. \quad (2.2)$$

Предполагается, что

$$0 < \lambda_{\ominus} \|y^*\|^2 \leq (\mathcal{A} y^*, y^*) \leq \lambda_{\oplus} \|y^*\|^2 \quad \forall y^* \in Y^*. \quad (2.3)$$

При этом нормы  $\|y^*\|_{\mathcal{A}} := (\mathcal{A}y^*, y^*)^{1/2}$  и  $\|y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} := (\mathcal{A}^{-1}y^*, y^*)^{1/2}$  эквивалентны норме пространства  $Y^*$ . Обобщенное решение задачи (2.1) определяется как функция  $u \in V_0 + u_0$  (где  $u_0 \in V$  – задано), удовлетворяющая интегральному тождеству

$$(\mathcal{A}\Lambda u, \Lambda w) + \langle \ell, w \rangle = 0 \quad \forall w \in V_0. \quad (2.4)$$

Функция  $p^* := \mathcal{A}\Lambda u$  удовлетворяет уравнению  $\Lambda^*p^* + \ell = 0$  и представляет собой решение соответствующей двойственной задачи (в физических задачах ее принято называть потоком).

В дальнейшем функции  $v \in V_0 + u_0$  и  $y^* \in Y^*$  рассматриваются как аппроксимации  $u$  и  $p^*$  соответственно. Нас интересуют функции

$$e := v - u \in V_0 \quad \text{и} \quad e^* := y^* - p^* \in Y^*,$$

которые представляют собой отклонения от точных решений прямой и двойственной задач. Прежде всего установим тождество, которому удовлетворяют нормы этих функций.

**Лемма 1.** Для любых  $v \in V_0 + u_0$  и  $y^* \in Y^*$  выполняется тождество

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 + \|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 = \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 + 2\langle \mathcal{R}(y^*), e \rangle, \quad (2.5)$$

где  $\mathcal{R}(y^*) = \ell + \Lambda^*y^*$ .

**Доказательство** (2.5) очень простое. Поскольку  $p^* = \mathcal{A}\Lambda u$ , оно прямо следует из равенства

$$\|\mathcal{A}\Lambda e - e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 = \|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 - 2\langle \Lambda e, e^* \rangle + \|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 = \|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 - 2\langle \Lambda^*e^*, e \rangle + \|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2$$

и того, что  $\Lambda^*e^* = \Lambda^*(y^* - p^*) = \ell + \Lambda^*y^*$ .

Тождество (2.5) имеет принципиальный характер. Его левая часть представляет собой естественную характеристику качества приближенных решений, заданную комбинированной (primal–dual) нормой функций отклонения. Отметим, что различные численные методы строят приближения  $v$  и  $y^*$  по-разному. Например, классический метод конечных элементов нацелен на вычисление функции  $v$ , а аппроксимация потока  $y^*$  обычно определяется как функция  $\mathcal{A}\Lambda v$  или некоторая ее регуляризация. Напротив, в популярном методе конечных объемов главное внимание уделено аппроксимации потока  $y^*$ , а функция  $v$  играет вспомогательную роль. В смешанных методах аппроксимации прямой и двойственной переменных  $v$  и  $y^*$  равноправны. Тождество (2.5) никак не связано с особенностями различных методов и в равной степени пригодно для любого из них. Аналогичные тождества известны и для многих других (в том числе нелинейных) краевых задач (см. [9]). Соответствующая теория подробно рассматривается в монографии [10], где изучаются оценки точности математических моделей.

Первое слагаемое в правой части (2.5) не содержит неизвестных функций и может быть вычислено непосредственно. Проблема заключается в другом слагаемом, которое содержит неизвестную функцию  $u$ . Это слагаемое исчезает только при выполнении условия  $e^* \in \text{Ker}\Lambda^*$ , которое накладывает весьма жесткое ограничение на множество допустимых функций  $y^*$ , а именно,

$$y^* \in \mathcal{Q}_\ell^* := \{y^* \in Y^* \mid \langle \Lambda^*y^* + \ell, w \rangle = 0 \quad \forall w \in V_0\}. \quad (2.6)$$

При выполнении (2.6) тождество (2.5) принимает вид

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 + \|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 = \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2. \quad (2.7)$$

Существует целый класс апостериорных методов, основанных на использовании различных вариантов (2.7). В них  $y^*$  определяется как численная аппроксимация потока, построенная на некоторой сетке  $\mathcal{T}_h$  (обозначим ее  $y_h^*$ ), а основные усилия направляются на то, чтобы выполнить (точно или приближенно) условие (2.6). Для этого применяются различные способы проектирования функции  $y_h^*$  на множество  $\mathcal{Q}_\ell^*$  (2.7) (см., например, [11]–[16], где рассматриваются оценки такого типа для конечноэлементных аппроксимаций). Численные процедуры, которые используются для построения соответствующего оператора  $\mathbb{P}_{\mathcal{Q}_\ell^*}^{\mathbb{P}} : Y^* \rightarrow \mathcal{Q}_\ell^*$ , могут быть достаточно сложными и, что самое важное, не всегда гарантируют точное выполнение условия (2.6). При этом неконтролируемый член  $\langle \mathcal{R}(y^*), e \rangle$  в правой части тождества (2.5) считается малым и просто отбрасывается.

Возникает вопрос: можно ли существенно ослабить жесткие требования, накладываемые условием (2.6), и получить из тождества (2.5) вычисляемые и полностью гарантированные оценки для норм погрешностей, которые можно использовать для широкого класса аппроксимаций  $v$  и  $y^*$ ? Положительный ответ был дан в [4], [9], [17], [18], и ряде других публикаций. Пусть

$$y^* \in Q^* := \{\tau^* \in Y^* \in \Lambda^* \tau^* \in \mathcal{V}\},$$

где  $\mathcal{V}$  – гильбертово пространство с нормой  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$  такое, что  $V_0 \subset \mathcal{V} \subset V_0^*$ . Тогда  $Q^*$  также является гильбертовым пространством с произведением

$$(\tau_1^*, \tau_2^*)_{Q^*} := (\tau_1^*, \tau_2^*) + (\Lambda^* \tau_1^*, \Lambda \tau_2^*)_{\mathcal{V}}.$$

В дальнейшем мы считаем, что для любого  $v^* \in \mathcal{V}$  имеет место представление  $\langle v^*, v \rangle = (v^*, v)_{\mathcal{V}}$ ,  $\ell \in \mathcal{V}$ , а нормы согласованы, так что имеет место неравенство

$$\|w\|_{\mathcal{V}} \leq C_{\Lambda} \|\Lambda w\|_{\mathcal{A}} \quad \forall w \in V_0. \tag{2.8}$$

Заметим, что  $Q_{\ell}^*$  является весьма узким аффинным подмножеством  $Q^*$ . Поэтому оператор  $\mathbb{P}_{Q^*} : Y^* \rightarrow Q^*$  построить значительно проще, чем  $\mathbb{P}_{Q_{\ell}^*}$ . Такой оператор производит регуляризацию вычисленного приближенного потока  $y^*$ , если последний не принадлежит  $Q^*$ . При этом  $\mathbb{P}_{Q^*}$  может не быть ортогональным проектором, но должен удовлетворять естественным условиям

$$\mathbb{P}_{Q^*}(y^*) = y^*, \quad \text{если } y^* \in Q^*, \tag{2.9}$$

$$\|\mathbb{P}_{Q^*}(y^*) - \mathbb{P}_{Q^*}(q^*)\|_{\mathcal{A}^{-1}} \leq C_{\mathbb{P}} \|y^* - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \quad \forall y^*, q^* \in Y^* \tag{2.10}$$

с постоянной  $C_{\mathbb{P}} > 0$ , которая зависит от свойств оператора и не зависит от  $y^*$  и  $q^*$ . Заметим, что норму в (2.10) можно заменить на эквивалентную норму  $\|\cdot\|$  (при этом изменится только постоянная  $C_{\mathbb{P}}$ ). Это условие является достаточно слабым. В частности, оно выполнено, если  $\mathbb{P}_{Q^*}$  является линейным ограниченным оператором. Никаких других специальных условий на  $\mathbb{P}_{Q^*}$  не накладывается.

Определим расстояние до множества  $Q_{\ell}^*$  следующим образом:

$$d(y^*) := \inf_{q^* \in Q_{\ell}^*} \|y^* - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}.$$

Вычисляемые мажоранты величины  $d(y^*)$  изучались в [4], [17], [18] и ряде других работ. Было установлено, что если  $y^* \in Q^*$ , то

$$d(y^*) \leq C_{\Lambda} \|\mathcal{R}(y^*)\|_{\mathcal{V}} \quad \forall y^* \in Q^*. \tag{2.11}$$

**Замечание 1.** Если  $\Lambda$  соответствует оператору градиента, то константа  $C_{\Lambda}$  определяется постоянной в неравенстве Фридриха (или Пуанкаре, в зависимости от типа краевых условий). Ее можно уменьшить, если сузить пространство  $Q^*$  и ввести промежуточное пространство  $\tilde{Q}^*$  такое, что  $Q_f^* \subset \tilde{Q}^* \subset Q^*$  (такие оценки подробно рассмотрены в [4]). Конечно, при этом соответствующий оператор проектирования  $\mathbb{P}_{Q^*}$  может оказаться технически более сложным. В данной статье мы не фокусируем внимание на этих вопросах, поскольку анализ и основные результаты не зависят от конкретного выбора  $Q^*$  и соответствующего оператора  $\mathbb{P}_{Q^*}$ .

Первым следствием тождества (2.5) является следующая теорема.

**Теорема 1.** Для любых  $v \in V_0 + u_0$ ,  $w \in V_0$  и  $y^* \in Q^*$  имеют место оценки

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}} \leq \|\mathcal{A} \Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} + C_{\Lambda} \|\mathcal{R}(y^*)\|_{\mathcal{V}}, \tag{2.12}$$

$$\|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 \leq \|\mathcal{A} \Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 + C_{\Lambda}^2 \|\mathcal{R}(y^*)\|_{\mathcal{V}}^2, \tag{2.13}$$

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}} + \|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \geq \|\mathcal{A} \Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} - 2C_{\Lambda} \|\mathcal{R}(y^*)\|_{\mathcal{V}}, \tag{2.14}$$

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 \geq -\|\Lambda w\|_{\mathcal{A}}^2 + 2(\mathcal{A} \Lambda v, \Lambda w) + 2\langle \ell, w \rangle. \tag{2.15}$$

**Доказательство.** Неравенство (2.12) следует из (2.7). Пусть  $q^* \in Q_{\ell}^*$ , тогда

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}} \leq \|\mathcal{A} \Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} + \|y^* - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}. \tag{2.16}$$

Переходя к инфимуму по  $q^*$  и используя (2.11), получаем (2.12).

Для доказательства (2.13) представим последнее слагаемое (2.5) в виде

$$2\langle \mathcal{R}(y^*), v - u \rangle = 2\langle \Lambda^*(y^* - q^*), w - u \rangle = 2(y^* - q^*, \Lambda(v - u)) \leq \|y^* - q^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}^2,$$

где  $q^* \in Q_\ell^*$ . Подставив это неравенство в (2.5), получаем оценку

$$\|y^* - p^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 \leq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \|y^* - q^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2,$$

которая дает (2.13), если перейти к инфимуму по  $q^*$ .

Тождество (2.5) позволяет получить простую миноранту для суммы норм. Ясно, что

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}} + \|q^* - p^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} \geq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} \geq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} - \|y^* - q^*\|_{\mathcal{S}^{-1}},$$

где  $q^* \in Q_f^*$  и  $y^* \in Q^*$ . Поскольку

$$\|q^* - p^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} \leq \|y^* - p^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} + \|y^* - q^*\|_{\mathcal{S}^{-1}},$$

мы заключаем, что

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}} + \|e^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} \geq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} - 2 \inf_{q^* \in Q_f^*} \|y^* - q^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}$$

и приходим к (2.14).

Также (2.5) позволяет вычислить нижнюю грань нормы  $\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}$ . Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}^2 &= \inf_{y^* \in Y^*} \sup_{w \in V_0} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \langle \Lambda^* y^* + \ell, w \rangle \right\} \geq \\ &\geq \sup_{w \in V_0} \inf_{y^* \in Y^*} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + (y^*, \Lambda w) + \langle \ell, w \rangle \right\} = \\ &= \sup_{w \in V_0} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathcal{A}\Lambda v\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 - \frac{1}{2} \|\Lambda(w - v)\|_{\mathcal{S}}^2 + \langle \ell, w \rangle \right\} = \\ &= \sup_{w \in V_0} \left\{ -\frac{1}{2} \|\Lambda w\|_{\mathcal{S}}^2 + (\mathcal{A}\Lambda v, \Lambda w) + \langle \ell, w \rangle \right\}, \end{aligned}$$

мы заключаем, что для любой функции  $w \in V_0$  выполнено (2.15).

**Замечание 2.** Оценку (2.12) часто удобно представить в форме

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 \leq \beta \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \beta' C_\Lambda^2 \|\mathcal{R}(y^*)\|_{V^*}^2, \quad (2.17)$$

где  $\beta$  и  $\beta'$  – любые положительные числа, удовлетворяющие условию  $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta'} = 1$ .

Использование (2.3), (2.8) и оценки

$$2(\Lambda^* e^*, e)_{V^*} \leq 2\|\mathcal{R}(y^*)\|_{V^*} \|e\|_{V^*} \leq 2C_\Lambda \|\mathcal{R}(y^*)\|_{V^*} \|\Lambda e\|_{\mathcal{S}} \leq \gamma C_\Lambda^2 \|\mathcal{R}(y^*)\|_{V^*}^2 + \frac{1}{\gamma} \|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}^2 \quad (2.18)$$

с положительной постоянной  $\gamma$  дает двусторонние оценки для комбинированной нормы с весами. Из (2.5) следует, что

$$\|(e, e^*)\|_{V^*}^2 := \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}^2 + \|e^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 \leq \|\mathcal{A}\Lambda v - \tau^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \gamma C_\Lambda^2 \|\mathcal{R}(y^*)\|_{V^*}^2, \quad (2.19)$$

где  $\gamma > 1$ . Кроме того, мы получаем оценку снизу

$$\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}^2 + \|e^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 \geq \|\mathcal{A}\Lambda v - \tau^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 - \gamma C_\Lambda^2 \|\mathcal{R}(y^*)\|_{V^*}^2, \quad (2.20)$$

которая выполняется для любого  $\gamma > 0$  (конечно, оценка (2.20) может быть грубой и при достаточно больших  $\gamma$  может стать неинтересной, поскольку ее правая часть становится отрицательной).

Правые части (2.12)–(2.14), (2.19) и (2.20) являются полностью вычисляемыми и дают гарантированные двусторонние оценки ошибок для любых аппроксимаций  $v \in V_0 + u_0$  и  $y^* \in Q^*$ .

Единственная техническая проблема, которая может возникнуть, заключается в определении постоянной  $C_\Lambda$ . Для функций, обращающихся в нуль на всей границе области, эта проблема обычно преодолевается легко. В задачах с краевыми условиями смешанного типа можно использовать оценки, полученные в [10], [19], [20].

Оценки (2.12), (2.13), (2.19) и (2.20) являются достаточно точными, если величина  $\|\mathcal{R}(y^*)\|_V$  мала по сравнению с  $\|\mathcal{A}\Lambda v - \tau^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2$ . Если это не так, то точность оценок может существенно ухудшаться. Более того, пусть имеется последовательность приближенных решений  $v_k \in V$  и  $y_k^* \in Y^*$ , которые удовлетворяет условию сходимости

$$v_k \rightarrow u \quad \text{в } V, \quad y_k^* \rightarrow p^* \quad \text{в } Y^*, \quad k \rightarrow +\infty. \tag{2.21}$$

Пусть  $\tilde{y}_k^* := \mathbb{P}_{Q^*} y_k^*$  рассматривается как приближение  $p^*$  (так что  $e_k^* = \tilde{y}_k^* - p^*$ ). Вследствие (2.10),  $\tilde{y}_k^* \rightarrow p^*$  в  $Y^*$  и левая часть (2.19) стремится к нулю. Однако для стремления к нулю правой части требуется существенно более сильное условие, а именно,

$$\|\Lambda^* \tilde{y}_k^* + \ell\|_V \rightarrow 0, \tag{2.22}$$

т.е. требуется сходимость  $\tilde{y}_k^*$  к  $p^*$  в метрике  $Q^*$ . Простые методы регуляризации потока обычно не гарантируют выполнение этого условия даже в тех случаях, когда  $\tilde{y}_k^*$  строится путем регуляризации галеркинских решений. Поэтому использование простых процедур регуляризации может приводить к существенной переоценке величины отклонения. Более сложные процедуры (например, минимизация правой части (2.19) по  $y^*$ ) могут требовать существенных дополнительных затрат (при этом, однако, удастся получить много дополнительной информации о приближенном решении и хорошие индикаторы локальных ошибок; см. [7]).

Далее мы показываем, как можно обойти эти трудности и получить более эффективные оценки ошибок, которые сходятся к нулю при выполнении (2.21). Для этого в дополнение к (2.9) и (2.10) достаточно потребовать выполнения гораздо более слабого условия ограниченности регуляризованного потока  $\tilde{y}_k^*$  в норме  $Q^*$ . Это условие эквивалентно тому, что

$$\|\Lambda^* \tilde{y}_k^* + \ell\|_V \leq c, \tag{2.23}$$

где  $c$  не зависит от  $k$ . Иными словами, вместо жесткого условия (2.22) мы требуем лишь ограниченности нормы  $\|\Lambda^* \mathbb{P}_{Q^*} y_k^* + \ell\|_V$  некоторой (не обязательно маленькой) величиной. Поведение этой нормы в разных примерах показано ниже на фиг. 4, где продемонстрировано, что для галеркинских решений можно рассчитывать не только на ограниченность, но и на достаточно быстрое убывание этой нормы с ростом размерности аппроксимирующего подпространства.

### 3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ $\langle \mathcal{R}(y^*), e \rangle$ С ПОМОЩЬЮ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

#### 3.1. Вспомогательная задача и ее свойства

Определим функцию  $u_{\mathcal{B}\mathcal{R}} \in V_0$  как решение задачи

$$\Lambda^* \mathcal{B} \Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}} = \mathcal{R}(y^*), \tag{3.1}$$

где  $\mathcal{B} : Y^* \rightarrow Y^*$  – самосопряженный оператор такой, что

$$\mu_\ominus \|y\|_{\mathcal{A}}^2 \leq (\mathcal{B}y, y) \leq \mu_\oplus \|y\|_{\mathcal{A}}^2 \quad \forall y^* \in Y^*. \tag{3.2}$$

В выборе  $\mathcal{B}$  имеется достаточно широкая свобода. Мы можем использовать любой оператор, который спектрально эквивалентен  $\mathcal{A}$ . В частности, можно выбрать сам оператор  $\mathcal{A}$ , а можно, например, положить  $\mathcal{B} = \lambda_\oplus \mathbb{I}$ , где  $\mathbb{I}$  – тождественный оператор (в этом случае  $\mu_\ominus = 1$  и  $\mu_\oplus = \lambda_\oplus / \lambda_\ominus$ ). Свободу в выборе  $\mathcal{B}$  естественно использовать для того, чтобы задача (3.1) была “лучше”, чем (2.1) (проще с вычислительной точки зрения и с более регулярным решением). Функция  $u_{\mathcal{B}\mathcal{R}} \in V_0$  удовлетворяет тождеству

$$(\mathcal{B} \Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}, \Lambda w) = \langle \mathcal{R}(y^*), w \rangle \quad \forall w \in V_0. \tag{3.3}$$

Поскольку  $(\mathcal{B}\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}, \Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}) = (y^* - p^*, \Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}) \leq \|y^* - p^*\| \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}\|$ , то

$$\|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*)\|_{\mathcal{B}} \leq \|y^* - p^*\|_{\mathcal{B}^{-1}} \leq \mu_{\ominus}^{-1/2} \|y^* - p^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}. \tag{3.4}$$

Таким образом, норма решения задачи (3.1) подчинена норме отклонения  $y^*$  от  $p^*$ .

Пусть функция  $u_{\mathcal{A}\mathcal{R}}(y^*) \in V_0$  определена тождеством

$$(\mathcal{A}\Lambda u_{\mathcal{A}\mathcal{R}}(y^*), \Lambda w) = \langle \mathcal{R}(y^*), w \rangle \quad \forall w \in V_0. \tag{3.5}$$

Нетрудно установить, что для любого  $y^* \in Y^*$  нормы функций  $u_{\mathcal{A}\mathcal{R}}(y^*)$  и  $u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*)$  удовлетворяют неравенствам

$$\mu_{\ominus} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*)\|_{\mathcal{B}}^2 \leq \|\Lambda u_{\mathcal{A}\mathcal{R}}(y^*)\|_{\mathcal{A}}^2 \leq \mu_{\oplus} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*)\|_{\mathcal{B}}^2. \tag{3.6}$$

Выберем  $y^*$  специального вида, а именно,  $y_v^* := \mathcal{A}\Lambda v$  и  $\tilde{y}_v^* := \mathbb{P}_{Q^*} y_v^*$  и определим число

$$\epsilon_{Q^*} := \|y_v^* - \tilde{y}_v^*\|_{\mathcal{A}^{-1}},$$

которое представляет собой погрешность регуляризации, возникающую при проектировании  $y_v^* \in Y^*$  на множество  $Q^*$ .

**Лемма 2.** Для  $u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y_v^*)$  и  $u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*)$  верны оценки

$$\frac{1}{\mu_{\oplus}} \|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 \leq \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y_v^*)\|_{\mathcal{B}}^2 \leq \frac{1}{\mu_{\ominus}} \|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2, \tag{3.7}$$

$$\frac{1}{\mu_{\oplus}} (\|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} - \epsilon_{Q^*})^2 \leq \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*)\|_{\mathcal{B}}^2 \leq \frac{1}{\mu_{\ominus}} (\|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} + \epsilon_{Q^*})^2, \tag{3.8}$$

где  $e = v - u$  и  $e^* = y_v^* - p^*$ .

**Доказательство.** Из равенства

$$(\mathcal{A}\Lambda(v - u), \Lambda w) = \langle \ell, w \rangle + (\mathcal{A}\Lambda v, \Lambda w) = \langle \ell + \Lambda^* y_v^*, w \rangle = \langle \mathcal{R}(y_v^*), w \rangle \quad \forall w \in V_0$$

следует, что  $u_{\mathcal{A}\mathcal{R}}(y_v^*) = v - u$ , так что

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}} = \|\Lambda u_{\mathcal{A}\mathcal{R}}(y_v^*)\|_{\mathcal{A}}. \tag{3.9}$$

Теперь из (3.6) и (3.9) получаем

$$\frac{1}{\mu_{\oplus}} \|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 \leq \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y_v^*)\|_{\mathcal{B}}^2 \leq \frac{1}{\mu_{\ominus}} \|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2, \tag{3.10}$$

где  $\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 = \|\Lambda(v - u)\|_{\mathcal{A}}^2 = \|y_v^* - p^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2$ , так что (3.10) можно переписать в виде (3.7).

Для доказательства (3.8) напомним, что в соответствии с (3.5) функция  $u_{\mathcal{A}\mathcal{R}}$  удовлетворяет тождеству  $(\mathcal{A}\Lambda u_{\mathcal{A}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*), \Lambda w) = \langle \mathcal{R}(\tilde{y}_v^*), w \rangle$  для любых  $w \in V_0$ . Поскольку

$$\langle \mathcal{R}(\tilde{y}_v^*), e \rangle = (\tilde{y}_v^* - p^*, \Lambda e) = (\tilde{y}_v^* - y_v^*, \Lambda e) + (\mathcal{A}\Lambda e, \Lambda e),$$

мы получаем

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 = (\mathcal{A}\Lambda u_{\mathcal{A}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*), \Lambda e) + (y_v^* - \tilde{y}_v^*, \Lambda e) \leq \|\Lambda u_{\mathcal{A}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*)\|_{\mathcal{A}} \|\Lambda e\|_{\mathcal{A}} + \epsilon_{Q^*} \|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}.$$

Таким образом,

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}} - \epsilon_{Q^*} \leq \|\Lambda u_{\mathcal{A}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*)\|_{\mathcal{A}} \leq \mu_{\oplus}^{1/2} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*)\|_{\mathcal{B}}.$$

Отсюда следует левая часть (3.8). Для того чтобы получить правую часть, используем (3.3):

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*), \Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*)) &= (\tilde{y}_v^* - p^*, \Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*)) \leq \\ &\leq \|\tilde{y}_v^* - p^*\|_{\mathcal{B}^{-1}} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*)\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{1}{\mu_{\ominus}^{1/2}} \|\tilde{y}_v^* - p^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*)\|_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Так как  $\|\tilde{y}_v^* - p^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \leq \|y_v^* - p^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} + \epsilon_{Q^*}$ , мы приходим к (3.8).

Первое из неравенств леммы 2 показывает, что норма  $\|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y_v^*)\|_{\mathcal{B}}$  эквивалентна норме отклонения  $\|y_v^* - p^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}$ . В частности, если  $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ , то эти нормы просто совпадают. Поэтому норма решения задачи (3.1) ведет себя точно так же, как норма  $\|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}$ , и ее использование не может привести к переоценке ошибки. Покажем, что это свойство имеет место и для решений задачи (3.1), порожденной  $\tilde{y}_v^*$ .

**Лемма 3.** Пусть  $y^* \in Y^*$ ,  $\tilde{y}^* := \mathbb{P}_{Q^*} y^*$ , а оператор  $\mathbb{P}_{Q^*}$  удовлетворяет условиям (2.9) и (2.10). Тогда для решений задачи (3.3) с правыми частями  $\mathcal{R}(\tilde{y}^*)$  и  $\mathcal{R}(y^*)$  верна оценка

$$\|\Lambda(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}^*) - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*))\|_{\mathcal{B}} \leq \widehat{C}_{\mathbb{P}} \|y^* - p^*\|_{\mathcal{B}}. \tag{3.11}$$

**Доказательство.** Соответствующие решения  $u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}^*)$  и  $u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*)$  удовлетворяют тождествам

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}^*), \Lambda(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}^*) - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*))) &= \langle \mathcal{R}(\tilde{y}^*), u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}^*) - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*) \rangle, \\ (\mathcal{B}\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*), \Lambda(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}^*) - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*))) &= \langle \mathcal{R}(y^*), u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}^*) - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*) \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\|\Lambda(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}^*) - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*))\|_{\mathcal{B}} \leq \|\tilde{y}^* - y^*\|_{\mathcal{B}^{-1}}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \|\tilde{y}^* - y^*\|_{\mathcal{B}^{-1}} &\leq \mu_{\ominus}^{-1/2} \|\tilde{y}^* - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \leq \mu_{\ominus}^{-1/2} (\|\mathbb{P}_{Q^*}(y^* - p^*)\|_{\mathcal{A}^{-1}} + \|p^* - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}) \leq \\ &\leq \mu_{\ominus}^{-1/2} (1 + C_{\mathbb{P}}) \|y^* - p^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \leq \widehat{C}_{\mathbb{P}} \|y^* - p^*\|_{\mathcal{B}^{-1}}, \end{aligned}$$

получаем (3.11) с  $\widehat{C}_{\mathbb{P}} = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{\mu_{\ominus}}} (1 + C_{\mathbb{P}})$ .

Из (3.11) и (3.7) следует, что если оператор  $\mathbb{P}_{Q^*}$  удовлетворяет условиям (2.9) и (2.10), то

$$\|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*)\|_{\mathcal{B}} \leq \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y_v^*)\|_{\mathcal{B}} + \widehat{C}_{\mathbb{P}} \|y_v^* - p^*\|_{\mathcal{B}^{-1}} \leq C \|y_v^* - p^*\|_{\mathcal{A}^{-1}},$$

где  $C$  зависит от  $\mu_{\ominus}$ ,  $\mu_{\oplus}$  и  $\widehat{C}_{\mathbb{P}}$ . Таким образом, норма  $\|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*)\|_{\mathcal{B}}$  также подчинена  $\|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}$ .

### 3.2. Преобразование $\langle \mathcal{R}(y^*), e \rangle$

Для  $y^* \in Y^*$  с учетом (3.3) имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}(y^*), e \rangle &= |(\mathcal{B}\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*), \Lambda e)| \leq \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*)\|_{\mathcal{B}} \|\Lambda e\|_{\mathcal{B}} \leq \\ &\leq \sqrt{\mu_{\oplus}} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*)\|_{\mathcal{B}} \|\Lambda e\|_{\mathcal{A}} \leq \frac{\gamma}{2} \mu_{\oplus} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*)\|_{\mathcal{B}}^2 + \frac{1}{2\gamma} \|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Из (2.5) и (3.12) следуют оценки (в (3.13)  $\gamma \geq 1$ ):

$$\|(e, e^*)\|_{\gamma} \leq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 + \gamma \mu_{\oplus} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*)\|_{\mathcal{B}}^2, \tag{3.13}$$

$$\frac{\gamma + 1}{\gamma} \|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 + \|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 \geq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 - \gamma \mu_{\oplus} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*)\|_{\mathcal{B}}^2. \tag{3.14}$$

Определим  $p_{\mathcal{B}\mathcal{R}}^* := \mathcal{B}\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*)$ . Тогда (3.13) можно переписать в виде

$$\|(e, e^*)\|_{\gamma} \leq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 + \gamma \mu_{\oplus} \|p_{\mathcal{B}\mathcal{R}}^*\|_{\mathcal{B}^{-1}}^2. \tag{3.15}$$

Правая часть этих оценок стремится к нулю, если  $v$  стремится к  $u$  в  $V$ , а  $y^*$  стремится к  $p^*$  в  $Y^*$ . Более того, используя (3.4), получаем

$$\begin{aligned} & \| \mathcal{A} \Lambda v - y^* \|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \gamma \mu_{\oplus} \| \Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*) \|_{\mathcal{B}}^2 \leq \\ & \leq ( \| \mathcal{A} \Lambda(v - u) \|_{\mathcal{S}^{-1}} + \| p^* - y^* \|_{\mathcal{S}^{-1}} )^2 + \gamma c_{\oplus} \| p^* - y^* \|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 = \\ & = ( \| \Lambda e \|_A + \| e^* \|_{\mathcal{S}^{-1}} )^2 + \gamma c_{\oplus} \| e^* \|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 \leq 2 \| \Lambda e \|_{\mathcal{S}}^2 + (2 + \gamma c_{\oplus}) \| e^* \|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 \end{aligned} \tag{3.16}$$

с постоянной  $c_{\oplus} = \mu_{\oplus} / \mu_{\ominus}$ . Поэтому стремление к нулю правой и левой частей (3.13) происходит с одной скоростью.

Однако функции  $u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*)$  и  $p_{\mathcal{B}\mathcal{R}}^*$  нам неизвестны. Далее мы покажем, как модифицировать оценки (3.13)–(3.15), чтобы использовать их конечномерные аппроксимации.

### 3.3. Дискретная задача

Будем предполагать, что пространства  $V$ ,  $Y^*$ ,  $Q^*$  являются пространствами функций, определенных в ограниченной области  $\Omega$  с липшицевой границей  $\partial\Omega$ . Область  $\Omega$  разделена на непересекающиеся подобласти (ячейки, элементы)  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , так что  $\bar{\Omega} = \cup_{i=1}^n \bar{\Omega}_i$ . Это множество подобластей обозначим через  $\mathcal{T}_{\Omega}$ . Сужения норм пространств  $Y^*$ ,  $V$  и  $\mathcal{V}$  на  $\Omega_i$  обозначаются  $\| \cdot \|_{\Omega_i}$ ,  $\| \cdot \|_{V(\Omega_i)}$  и  $\| \cdot \|_{\mathcal{V}(\Omega_i)}$  соответственно.

Определим пространство  $V_0^m \subset V_0$ ,  $\dim V_0^m = m < \infty$ , и зададим оператор интерполирования  $\pi_m$ , который удовлетворяет условиям

$$\pi_m w_m = w_m \quad \forall w_m \in V_0^m, \quad \| \pi_m w_m \| \leq c_{\pi} \| w \| \quad \forall w \in V_0,$$

где  $c_{\pi} > 0$  не зависит от  $w$ . Величины

$$\chi_{m,\Omega_i}^{\Lambda}(w) := \| \Lambda(\pi_m w - w) \|_{\mathcal{V}(\Omega_i)} \quad \text{и} \quad \chi_{m,\Omega_i}(w) := \| \pi_m w - w \|_{\Omega_i}$$

обозначают погрешности интерполяции функции  $w \in V_0$  на подпространстве  $V_0^m$ . Операторы интерполирования, которые используются в теории конечных элементов и других методов аппроксимации уравнений в частных производных, обычно удовлетворяют интерполяционным неравенствам вида

$$\chi_{m,\Omega_i}(w) \leq C_1(\Omega_i) \| w \|_{W(\Omega_i)} \quad \text{и} \quad \chi_{m,\Omega_i}^{\Lambda}(w) \leq C_2(\Omega_i) \| w \|_{W(\Omega_i)} \quad \forall w \in W. \tag{3.17}$$

В качестве  $\Omega_i$  часто используются симплексы или другие выпуклые многоугольные элементы, а норма  $\| w \|_W$  соответствует пространству  $W$ , которое компактно вложено в  $V$  (при этом областью определения оператора  $\pi_m$  является  $W \cap V_0$ ). Постоянные в (3.17) пропорциональны  $\text{diam} \Omega_i$ , так что возникают веса, содержащие малый параметр. Как будет видно далее, это обстоятельство позволяет существенно улучшить оценки.

Свобода в выборе оператора  $\mathcal{B}$  позволяет улучшить свойства вспомогательной задачи. Может оказаться, что гарантировать повышенную регулярность решения в исходной задаче нельзя (например, в случае, когда  $\mathcal{A}$  соответствует матрице с разрывными коэффициентами). Однако  $\mathcal{B}$  можно выбрать достаточно гладким (или вообще не зависящим от координат), так что для любой функции  $g \in \mathcal{V}$  точное решение  $u_{\mathcal{R}}$  задачи  $\Lambda^* \mathcal{B} \Lambda u = g$  принадлежит пространству  $W$  и выполнена оценка

$$\| u_{\mathcal{B}\mathcal{R}} \|_{W(\Omega)} \leq C_{\text{reg}} \| g \|_{\mathcal{V}}. \tag{3.18}$$

В частности, если  $\mathcal{B}$  – тождественный оператор, то достаточно, чтобы повышенной регулярностью обладало решение задачи  $\Lambda^* \Lambda u_{\mathcal{R}} = g$  с  $g \in \mathcal{V}$ . Если  $\Lambda$  соответствует оператору градиента, то данное условие означает повышенную регулярность решения задачи  $\Delta u + g = 0$  для  $g \in L^2(\Omega)$ .

Определим  $u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m} \in V_0^m$  как решение задачи

$$(\mathcal{B} \Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}, \Lambda w_m) = \langle \mathcal{R}(y^*), w_m \rangle \quad \forall w_m \in V_0^m, \tag{3.19}$$

и определим

$$p_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}^* := \mathcal{B}\Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}.$$

Задачу (3.19) можно рассматривать как конечномерный аналог (3.3). Функции  $u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}$  и  $p_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}^*$  можно вычислить с помощью соответствующей численной процедуры, и мы будем считать, что они известны.

Поскольку

$$(\mathcal{B}\Lambda(u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m} - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}}), \Lambda w_m) = 0 \quad \forall w_m \in V_0^m, \tag{3.20}$$

то

$$\|\Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R}}\|_{\mathbb{B}}^2 = \|\Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}\|_{\mathbb{B}}^2 + \|\Lambda(u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m} - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}})\|_{\mathbb{B}}^2 \tag{3.21}$$

и оценки (3.13) и (3.14) можно представить в виде

$$\|(e, e^*)\|_{\mathcal{Y}} \leq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 + \gamma \mu_{\oplus} (\|\Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}\|_{\mathbb{B}}^2 + \|\Lambda(u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m} - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}})\|_{\mathbb{B}}^2), \tag{3.22}$$

$$\frac{\gamma + 1}{\gamma} \|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 + \|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 \geq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 - \gamma \mu_{\oplus} (\|\Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}\|_{\mathbb{B}}^2 + \|\Lambda(u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m} - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}})\|_{\mathbb{B}}^2). \tag{3.23}$$

**Лемма 4.** При выполнении условий леммы 3 и (3.18) имеют место оценки

$$\|\Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}(\tilde{y}^*)\|_{\mathbb{B}} \leq \|\tilde{y}^* - p^*\|_{\mathbb{B}^{-1}}, \tag{3.24}$$

$$\|\Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}(\tilde{y}^*) - \Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R}}(\tilde{y}^*)\|_{\mathbb{B}}^2 \leq \mathcal{E}(\mathcal{T}_{\Omega}, \tilde{y}^*, \tau^*) C_{\text{reg}} \|\mathcal{R}(\tilde{y}^*)\|_{\mathcal{V}}, \tag{3.25}$$

где  $\tau^* \in Q^*$ ,  $C_{\text{reg}}$  определено в (3.18),

$$\mathcal{E}(\mathcal{T}_{\Omega}, \tilde{y}^*, \tau^*) := \left( \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 C_1^2(\Omega_i) \right)^{1/2} + \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 C_2^2(\Omega_i) \right)^{1/2}, \tag{3.26}$$

$$\sigma_i := \|\Lambda^* \tau^* - \mathcal{R}(\tilde{y}^*)\|_{\mathcal{V}(\Omega_i)} \quad \text{и} \quad \alpha_i := \|p_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}^* - \tau^*\|_{\Omega_i}.$$

**Доказательство.** Неравенство (3.24) следует из соотношений

$$(\mathcal{B}\Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}(\tilde{y}^*), \Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}(\tilde{y}^*)) = (\tilde{y}^* - p^*, \Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}(\tilde{y}^*)) \leq \|\tilde{y}^* - p^*\|_{\mathbb{B}^{-1}} \|\Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}(\tilde{y}^*)\|_{\mathbb{B}}.$$

Для оценки  $\|\Lambda(u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m} - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}})\|_{\mathbb{B}}^2$  используем тождество (2.5) в приложении к задаче

$$\Lambda^* \mathcal{B}\Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R}}(\tilde{y}^*) = \mathcal{R}(\tilde{y}^*). \tag{3.27}$$

Имеем

$$\|\Lambda(u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m} - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}})\|_{\mathbb{B}}^2 + \|p_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}^* - p_{\mathbb{R}\mathbb{R}}^*\|_{\mathbb{B}^{-1}}^2 = \|\mathcal{B}\Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m} - p_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}^*\|_{\mathbb{B}^{-1}}^2 + 2\langle \Lambda^* p_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}^* - \mathcal{R}(\tilde{y}^*), u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m} - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}} \rangle.$$

В силу определения функций  $p_{\mathbb{R}\mathbb{R}}^*$  и  $p_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}^*$  следует, что

$$\|\Lambda(u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m} - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}})\|_{\mathbb{B}}^2 = \langle \Lambda^* p_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}^* - \mathcal{R}(\tilde{y}^*), u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m} - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}} \rangle. \tag{3.28}$$

Используя и (3.19) и (3.20), преобразуем правую часть (3.28) следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \Lambda^* p_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}^* - \mathcal{R}(\tilde{y}^*), u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m} - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}} \rangle &= \langle \Lambda_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}^* - \mathcal{R}(\tilde{y}^*), \pi_m u_{\mathbb{R}\mathbb{R}} - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}} \rangle = \\ &= (p_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}^* - \tau^*, \Lambda(\pi_m u_{\mathbb{R}\mathbb{R}} - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}})) + (\Lambda^* \tau^* - \mathcal{R}(\tilde{y}^*), \pi_m u_{\mathbb{R}\mathbb{R}} - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}})_{\mathcal{V}}. \end{aligned}$$

Получились слагаемые, которые содержат погрешности интерполяции. Их можно оценить:

$$\begin{aligned} (p_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}^*(\tilde{y}^*) - \tau^*, \Lambda(\pi_m u_{\mathbb{R}\mathbb{R}}(\tilde{y}^*) - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}}(\tilde{y}^*))) &\leq \sum_{i=1}^n \chi_{m,\Omega_i}^{\Lambda}(u_{\mathbb{R}\mathbb{R}}(\tilde{y}^*)) \alpha_i \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n C_2(\Omega_i) \alpha_i \|u_{\mathbb{R}\mathbb{R}}(\tilde{y}^*)\|_{W(\Omega_i)} \leq \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 C_2^2(\Omega_i) \right)^{1/2} \|u_{\mathbb{R}\mathbb{R}}(\tilde{y}^*)\|_{W(\Omega)} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & (\Lambda^* \tau^* - \mathcal{R}(\tilde{y}^*), \pi_m u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}^*) - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}^*))_V \leq \sum_{i=1}^n \chi_{m, \Omega_i}(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}^*)) \sigma_i \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^n C_1(\Omega_i) \sigma_i \|u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}^*)\|_{W(\Omega_i)} \leq \left( \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 C_1^2(\Omega_i) \right)^{1/2} \|u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}^*)\|_{W(\Omega)}. \end{aligned}$$

Их сумма оценивается величиной

$$\mathcal{E}(\mathcal{T}_\Omega, \tilde{y}^*, \tau^*) \|u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}\| \leq \mathcal{E}(\mathcal{T}_\Omega, \tilde{y}^*, \tau^*) C_{\text{reg}} \|\mathcal{R}(\tilde{y}^*)\|$$

что приводит к (3.25).

**Замечание 3.** Можно выбрать  $\tau^* = \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*(\tilde{y}^*) := \mathbb{P}_Q \cdot p_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*(\tilde{y}^*) \in Q^*$ , т.е. определить эту функцию как регуляризацию потока  $\mathcal{B}\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}(\tilde{y}^*) \in Y^*$ . В этом случае интерполяционный член можно оценить так:

$$\mathcal{E}(\mathcal{T}_\Omega, \tilde{y}^*, \tau^*) \leq C_1 \|\Lambda^* \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*(\tilde{y}^*) - \Lambda^* \tilde{y}^* - \ell\|_{V(\Omega)}^2 + C_2 \|p_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*(\tilde{y}^*) - \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*(\tilde{y}^*)\|_\Omega^2, \tag{3.29}$$

где  $C_1 = \max_i C_1(\Omega_i)$  и  $C_2 = \max_i C_2(\Omega_i)$ . Здесь норма  $\|p_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^* - \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*\|$  оценивает погрешность, связанную с регуляризацией, а норма  $\|\Lambda^*(\tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^* - \tilde{y}^*) - \ell\|$  оценивает невязку уравнения (3.1). Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются свойствами оператора интерполирования  $\pi_m$  и структурой сетки. Если постоянные  $C_1(\Omega_i)$  и  $C_2(\Omega_i)$  на разных ячейках сильно отличаются, то эта оценка может оказаться грубой. Однако она дает необходимую информацию об асимптотических свойствах  $\mathcal{E}$  (см. п. 5.3).

В заключение отметим, что норму разности  $u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m} - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}$  можно оценить, не используя регулярность задачи (3.1).

**Лемма 5.** Для любой функции  $\eta \in V_0$  такой, что  $\Lambda^* \mathcal{B}\Lambda \eta \in \mathcal{V}$ , имеет место оценка

$$\|\Lambda(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m} - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}})\|_{\mathcal{B}}^2 \leq M^2(\eta, \tilde{y}^*, p_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*, \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*) + 2\mathcal{L}(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}, \eta), \tag{3.30}$$

где  $\mathcal{L}(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}, \eta) := (\mathcal{B}\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}, \Lambda \eta) + (\mathcal{R}(\tilde{y}^*), \eta)_V$ , а

$$M(\eta, \tilde{y}^*, p_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*, \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*) := \|p_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^* - \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*\|_{\mathcal{B}^{-1}} + C_\Lambda \|\Lambda^*(\tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^* - \tilde{y}^* + \mathcal{B}\Lambda \eta) - \ell\|_V.$$

**Доказательство.** Преобразуем (3.28) следующим образом:

$$\begin{aligned} \|\Lambda(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m} - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}})\|_{\mathcal{B}}^2 &= (p_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^* - \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*, \Lambda(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m} - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}})) + \\ &+ (\Lambda^* \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^* - \mathcal{R}(\tilde{y}^*) + \Lambda^* \mathcal{B}\Lambda \eta, u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m} - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}})_V + (\mathcal{B}\Lambda \eta, \Lambda(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m} - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}})). \end{aligned}$$

Поскольку

$$(\mathcal{B}\Lambda \eta, \Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}) = (\mathcal{B}\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}, \Lambda \eta) = (\mathcal{R}(\tilde{y}^*), \eta)_V,$$

получаем неравенство

$$\begin{aligned} \|\Lambda(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m} - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}})\|_{\mathcal{B}}^2 &\leq \|p_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^* - \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*\|_{\mathcal{B}^{-1}} \|\Lambda(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m} - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}})\|_{\mathcal{B}} + \\ &+ \|\Lambda^*(\tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^* - \tilde{y}^* + \mathcal{B}\Lambda \eta) - \ell\|_V \|u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m} - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}\|_V + (\mathcal{B}\Lambda \eta, \Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}) - (\mathcal{R}(\tilde{y}^*), \eta)_V \leq \\ &\leq M(\eta, \tilde{y}^*, p_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*, \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*) \|\Lambda(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m} - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}})\|_{\mathcal{B}} + \mathcal{L}(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}, \eta), \end{aligned}$$

из которого следует (3.30).

#### 4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (3.1)

Покажем, как модифицировать оценки (3.13)–(3.15), чтобы использовать конечномерные аппроксимации  $u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}$  и  $p_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*$ .

4.1. Оценка комбинированной нормы

Если решение задачи (3.1) удовлетворяет условию (3.18), то из (3.22) и (3.25) следует, что для любых функций  $v \in V_0 + u_0$  и  $y^*, \tau^* \in Q^*$  выполняется следующая оценка:

$$\|(e, e^*)\|_\gamma \leq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \gamma \mu_\oplus (\|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}\|_{\mathcal{B}}^2 + \mathcal{E}(\mathcal{T}_\Omega, y^*, \tau^*) C_{\text{reg}} \|\mathcal{R}(y^*)\|), \tag{4.1}$$

где  $\gamma \geq 1$ ,  $C_{\text{reg}}$  определено в (3.18), а  $u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}$  определяется задачей (3.19).

Первые два слагаемых в правой части (4.1) вычисляются непосредственно и образуют главную часть оценки. Слагаемое  $\mathcal{E}(\mathcal{T}_\Omega, y^*, \tau^*)$  представляет собой остаточный (интерполяционный) член, появление которого обусловлено тем, что мы заменили точное решение  $u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}$  на его приближение в рамках пространства  $V_0^m$ . Нетрудно видеть, что если заменить  $u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}$  на  $u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}$  и выбрать  $\tau^* = \mathcal{B}\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}$ , то этот член обращается в нуль.

Из (3.30) следует другая оценка, которая не связана с условием (3.18):

$$\|(e, e^*)\|_\gamma \leq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \gamma \mu_\oplus (\|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}\|_{\mathcal{B}}^2 + M^2(\eta, \tilde{y}^*, p_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}^*, \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}^*) + 2\mathcal{L}(u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}, \eta)),$$

где  $\mathcal{L}(u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}, \eta)$  и  $M(\eta, \tilde{y}^*, p_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}^*, \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}^*)$  определены в лемме 5.

4.2. Оценки норм  $\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}^2$  и  $\|e^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}$

Оценка нормы  $\|e^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}$  следует из (3.13). Положив  $\gamma = 1$ , получаем

$$\|e^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 \leq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \mu_\oplus \|\Lambda u_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{B}}^2. \tag{4.2}$$

Используя задачу (3.1), можно также получить двусторонние оценки отдельно для нормы  $\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}^2$ . Для получения мажоранты умножим (2.1) на  $w$ , используем (2.2) и представим выражение в виде

$$(\mathcal{A}\Lambda(u - v), \Lambda w) + \langle \ell, w \rangle + (\mathcal{A}\Lambda v, \Lambda w) = 0.$$

Положим  $w = e$ . Тогда

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}^2 = (\mathcal{A}\Lambda e, \Lambda e) = \langle \Lambda^* y^* + \ell, e \rangle + (\mathcal{A}\Lambda v - y^*, \Lambda e) \leq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} \|\Lambda e\|_{\mathcal{S}} + \langle \mathcal{R}(y^*), e \rangle.$$

Последнее слагаемое можно преобразовать с помощью (3.3)

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}^2 \leq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} \|\Lambda e\|_{\mathcal{S}} + \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}\|_{\mathcal{B}} \|\Lambda e\|_{\mathcal{B}},$$

что приводит к оценке

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}} \leq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} + \mu_\oplus^{1/2} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}\|_{\mathcal{B}}. \tag{4.3}$$

С учетом (3.4), правую часть (4.3) можно оценить так:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} + \mu_\oplus^{1/2} \|\Lambda u_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{B}} &\leq \|\Lambda e\|_{\mathcal{S}} + \|p^* - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} + \mu_\oplus^{1/2} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}\|_{\mathcal{B}} \leq \\ &\leq \|\Lambda e\|_{\mathcal{S}} + (1 + c_\oplus^{1/2}) \|p^* - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}. \end{aligned}$$

Таким образом, если  $\|p^* - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} \leq C \|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}$ , то оценка эквивалентна ошибке. Если в качестве  $y^*$  выбирается  $y_v^* = \mathcal{A}\Lambda v$ , то это условие очевидно выполняется с  $C = 1$ . Любая разумная регуляризация  $\tilde{y}^* = \mathbb{P}_{Q^*} y_v^*$  должна стремиться к  $p^*$  с той же скоростью, с которой  $y_v^*$  стремится к  $p^*$ . Поэтому для  $\tilde{y}^*$  эквивалентность также имеет место.

Для того чтобы сделать оценку полностью вычисляемой, заменим решение задачи (3.3) на решение конечномерной задачи (3.19). Возводя обе части (4.3) в квадрат и используя (3.21) и (3.25), получаем

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}^2 \leq \beta \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \mu_\oplus \beta' (\|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}\|_{\mathcal{B}}^2 + \|\Lambda(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}} - u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m})\|_{\mathcal{B}}^2). \tag{4.4}$$

Для оценки последнего слагаемого можно использовать лемму 5. Этот способ приводит к оценке

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}^2 \leq \beta \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \mu_{\oplus} \beta' (\|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}\|_B^2 + M^2(\eta, \tilde{y}^*, p_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}^*, \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}^*) + 2\mathcal{L}(u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}, \eta)). \quad (4.5)$$

Другой вариант заключается в использовании интерполяционных оценок. Применив их к (4.4), получаем

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}^2 \leq \beta \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \mu_{\oplus} \beta' (\|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}\|_{\mathcal{B}}^2 + \varepsilon), \quad (4.6)$$

где  $\varepsilon := \mathcal{E}(\mathcal{T}_{\Omega}, y^*, \tau^*) C_{\text{reg}} \|\mathcal{R}(y^*)\|_{\mathcal{V}}$ . Аналогичная процедура трансформирует (4.2) в оценку

$$\|e^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 \leq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \mu_{\oplus} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}\|_{\mathcal{B}}^2 + \varepsilon. \quad (4.7)$$

Для нормы  $\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}$  можно получить оценку снизу.

**Лемма 6.** Пусть  $y_v^* = \mathcal{A}\Lambda v$ . Тогда

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}} = \|\Lambda u_{\mathcal{S}\mathcal{R}}(y_v^*)\|_{\mathcal{S}} \geq \mu_{\ominus}^{1/2} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}(y_v^*)\|_{\mathcal{B}}, \quad (4.8)$$

где  $u_{\mathcal{S}\mathcal{R}}(y_v^*)$  является решением задачи

$$(\mathcal{A}\Lambda u_{\mathcal{S}\mathcal{R}}(y_v^*), \Lambda w) = \langle \mathcal{R}(y_v^*), w \rangle \quad \forall w \in V_0, \quad (4.9)$$

а  $u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}(y_v^*)$  является решением задачи (3.19).

**Доказательство.** В соответствии с (2.15)

$$\frac{1}{2} \|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}^2 \geq \sup_{w \in V} \left\{ -\frac{1}{2} \|\Lambda w\|_{\mathcal{B}}^2 + (y_v^*, \Lambda w) + \langle \ell, w \rangle \right\} = \sup_{w \in V} J_{\mathcal{R}}(w), \quad J_{\mathcal{R}}(w) := -\frac{1}{2} \|\Lambda w\|_{\mathcal{S}}^2 + \langle \mathcal{R}(y_v^*), w \rangle.$$

Супремум равен  $\frac{1}{2} \|\Lambda u_{\mathcal{S}\mathcal{R}}(y_v^*)\|_{\mathcal{S}}^2$  и достигается на функции  $u_{\mathcal{S}\mathcal{R}}(y_v^*)$ , которая решает задачу (4.9).

При этом из равенства

$$(\mathcal{A}\Lambda(v - u), \Lambda w) = \langle \ell, w \rangle + (\mathcal{A}\Lambda v, \Lambda w) = \langle \ell + \Lambda^* y_v^*, w \rangle = \langle \mathcal{R}(y_v^*), w \rangle$$

следует, что  $u_{\mathcal{S}\mathcal{R}}(y_v^*) = v - u$ . Заметим, что

$$J_{\mathcal{R}}(w) \geq -\frac{1}{2\mu_{\ominus}} \|\Lambda w\|_{\mathcal{B}}^2 + \langle \mathcal{R}(y_v^*), w \rangle \quad \forall w \in V_0.$$

Поэтому (см. (3.19))

$$\begin{aligned} \sup_{w \in V} J_{\mathcal{R}}(w) &\geq \sup_{w \in V} \left\{ -\frac{1}{2\mu_{\ominus}} \|\Lambda w\|_{\mathcal{B}}^2 + \langle \mathcal{R}(y_v^*), w \rangle \right\} \geq \sup_{w \in V_0^m} \mu_{\ominus} \left\{ -\frac{1}{2} \|\Lambda w\|_{\mathcal{B}}^2 + \langle \mathcal{R}(y_v^*), w \rangle \right\} = \\ &= \mu_{\ominus} \left\{ -\frac{1}{2} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}\|_{\mathcal{B}}^2 + \langle \mathcal{R}(y_v^*), u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m} \rangle \right\} = \frac{\mu_{\ominus}}{2} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}\|_{\mathcal{B}}^2 \end{aligned}$$

и мы получаем (4.8).

В задаче (3.19)  $\mathcal{R}(y^*) \in V_0^*$ . Для того чтобы использовать решение задачи с правой частью из более регулярного класса  $\mathcal{V}$ , используем регуляризацию  $\tilde{y}_v^* := \mathbb{P}_{\mathcal{Q}^*} y_v^* \in \mathcal{Q}^*$ . Определим  $\tilde{u}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}$  как решение задачи

$$(\mathcal{B}\Lambda \tilde{u}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}, \Lambda w_m) = (\mathcal{R}(\tilde{y}_v^*), w_m)_{\mathcal{V}} \quad \forall w_m \in V_0^m. \quad (4.10)$$

Перепишем оценку в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 &\geq \sup_{w \in V} \left\{ -\frac{1}{2} \|\Lambda w\|_{\mathcal{A}}^2 + \langle \Lambda^* y_v^* + \ell, w \rangle \right\} \geq \\ &\geq \sup_{w \in V} \left\{ -\frac{1}{2\mu_{\ominus}} \|\Lambda w\|_{\mathcal{B}}^2 + \langle \Lambda^*(y_v^* - \tilde{y}_v^*), w \rangle + (\mathcal{R}(\tilde{y}_v^*), w)_{\mathcal{V}} \right\} = \\ &= \sup_{w \in V} \left\{ -\frac{1}{2\mu_{\ominus}} \|\Lambda w\|_{\mathcal{B}}^2 - (y_v^* - \tilde{y}_v^*, \Lambda w) + (\mathcal{R}(\tilde{y}_v^*), w)_{\mathcal{V}} \right\}. \end{aligned}$$

Выберем  $w = t\tilde{u}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}$  и используем равенство  $\|\Lambda\tilde{u}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}\|_{\mathcal{B}}^2 = \langle \mathcal{R}(\tilde{y}_v^*), \tilde{u}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m} \rangle$ . Оценка приобретает вид

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 \geq \sup_{t>0} \left\{ \left( 2t - \frac{t^2}{\mu_{\ominus}} \right) \|\Lambda\tilde{u}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}\|_{\mathcal{B}}^2 + 2t(\tilde{y}_v^* - y_v^*, \Lambda\tilde{u}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}) \right\}.$$

Вычисляя максимум по  $t$ , получаем простую миноранту для нормы отклонения от точного решения

$$\|\Lambda e\| \geq \frac{\mu_{\ominus}^{1/2}}{\|\Lambda\tilde{u}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}\|_{\mathcal{B}}} \left( \|\Lambda\tilde{u}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}\|_{\mathcal{B}}^2 + (\tilde{y}_v^* - y_v^*, \Lambda\tilde{u}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}) \right) =: M_{\ominus}(v, \tilde{u}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}), \tag{4.11}$$

которая использует решение задачи (4.10). Отметим, что миноранта (4.11) содержит только известные функции  $\tilde{y}_v^*$ ,  $y_v^*$  и решение конечномерной задачи. Поскольку эти же функции используются и в мажоранте, необходимости в дополнительных вычислениях не возникает.

### 5. ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В качестве примера рассмотрим краевую задачу для уравнения  $\operatorname{div} \mathcal{A} \nabla u + f = 0$  в ограниченной липшицевой области  $\Omega$  с краевым условием  $u = u_0$  на границе  $\partial\Omega$  и  $f \in L^2(\Omega)$ . В этом случае

$$\begin{aligned} V_0 &:= \dot{H}^1(\Omega), \quad \mathcal{V} = L^2(\Omega), \quad Y^* := L^2(\Omega, \mathbb{R}^d), \quad \Lambda v := \nabla v, \quad \ell(v) := \int_{\Omega} f v dx, \\ \Lambda^* y^* &:= -\operatorname{div} y^*, \quad Q^* = H(\Omega, \operatorname{div}) := \{q^* \in Y^* \mid \operatorname{div} q^* \in L^2(\Omega)\}, \end{aligned}$$

$\lambda_{\ominus}$  и  $\lambda_{\oplus}$  соответствуют собственным числам положительно-определенной симметричной матрицы  $\mathcal{A}$ , а постоянную  $C_{\Lambda}$  в (2.8) можно положить равной  $C_F \lambda_{\ominus}^{-1/2}$ , где  $C_F$  — постоянная в неравенстве Фридрихса  $\|w\| \leq C_F(\Omega) \|\nabla w\|$  для функций  $w \in \dot{H}^1(\Omega)$ .

Пусть  $v = v_h \in V_{0h} + u_0$  является конформной аппроксимацией точного решения  $u$  на подпространстве, связанном с разбиением  $\mathcal{T}_h$  на конечные элементы с характерным размером  $h$ . В частности,  $v_h$  может совпадать с галеркинской аппроксимацией  $u_h$ , определенной соотношением

$$\int_{\Omega} \mathcal{A} \nabla u_h \cdot \nabla w_h dx = \int_{\Omega} f w_h dx \quad \forall w_h \in V_{0h} \subset V_0. \tag{5.1}$$

Вектор-функция  $y_h^* = \mathcal{A} \nabla v_h$  является аппроксимацией точного потока  $p^* = \mathcal{A} \nabla u$ . Она не обладает никакой дополнительной регулярностью и может быть кусочно-непрерывной функцией. Оператор  $\mathbb{P}_{\mathcal{Q}^*}$  обычно задается с помощью операции усреднения на отдельных фрагментах сетки  $\mathcal{T}_h$  (patch averaging) или глобально (global averaging). Мы будем обозначать его  $\mathbb{G}_h$ , так что  $\tilde{y}_h^* := \mathbb{G}_h y_h^* \in Q^*$  является регуляризацией потока. В литературе подробно изучены различные операторы, которые часто используются для этой цели (см. [8], [21]–[26] и многие другие работы).

## 5.1. Оценки (2.12)–(2.15) и (2.19)

В рассматриваемом случае эти оценки имеют вид

$$\|\nabla(v_h - u)\|_{\mathcal{S}} \leq \|\mathcal{A}\nabla v_h - \tilde{y}_h^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} + C_\Lambda \|\mathcal{R}(\tilde{y}_h^*)\| \quad (5.2)$$

$$\|\tilde{y}_h^* - p^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 \leq \|\mathcal{A}\nabla w - \tilde{y}_h^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + C_\Lambda^2 \|\mathcal{R}(\tilde{y}_h^*)\|^2 \quad \forall w \in V_0 + u_0, \quad (5.3)$$

$$\|\nabla(v_h - u)\|_{\mathcal{S}}^2 \geq -\|\nabla w\|_{\mathcal{S}}^2 + 2(\mathcal{A}\nabla v_h, \nabla w) + 2\langle \ell, w \rangle \quad \forall w \in V_0, \quad (5.4)$$

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma} \|\nabla(v_h - u)\|_{\mathcal{S}}^2 + \|\tilde{y}_h^* - p^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 \leq \|\mathcal{A}\nabla v_h - \tilde{y}_h^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \gamma C_\Lambda^2 \|\mathcal{R}(\tilde{y}_h^*)\|^2, \quad (5.5)$$

$$\|\nabla(v_h - u)\|_{\mathcal{S}} + \|\tilde{y}_h^* - p^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} \geq \|\mathcal{A}\nabla v_h - \tilde{y}_h^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} - 2C_\Lambda \|\mathcal{R}(\tilde{y}_h^*)\| \quad (5.6)$$

где  $\gamma \geq 1$ , а  $\mathcal{R}(\tilde{y}_h^*) = f - \operatorname{div} \tilde{y}_h^*$ . Отметим, что эти оценки не используют вспомогательную задачу и интерполяционные оценки, но содержат постоянную  $C_F(\Omega)$ .

**Замечание 4.** Современные вычислительные технологии, как правило, используют адаптивные методы, которые решают задачу на последовательности сеток  $\mathcal{T}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , которые последовательно улучшаются там, где это рекомендуют апостериорные индикаторы ошибок. Пусть  $v_k$  и  $y_k^* := \mathcal{A}\nabla v_k$  обозначают приближенные решения, полученные на сетке  $\mathcal{T}_k$ , а  $\tilde{y}_{k+1}^* := \mathbb{G}_{\mathcal{T}_k} y_{k+1}^* \in \mathcal{Q}^*$  является регуляризацией потока на  $\mathcal{T}_{k+1}$ . Теперь оценку (5.2) можно представить в виде

$$\|\nabla(v_k - u)\|_{\mathcal{S}} \leq \|\tilde{y}_k^* - \tilde{y}_{k+1}^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} + C_\Lambda \|\mathcal{R}(\tilde{y}_{k+1}^*)\|. \quad (5.7)$$

Правая часть (5.7) полностью определяется приближенными решениями, полученными на  $\mathcal{T}_k$  и  $\mathcal{T}_{k+1}$ , и легко вычисляется. Эта оценка показывает правильную форму эвристического критерия Рунге, который часто используется в инженерных расчетах (вычисления прекращаются, если разность  $v_k - v_{k+1}$  мала, т.е. уточнение сетки не приводит к существенному изменению приближенного решения). На самом деле близость  $v_k$  и  $v_{k+1}$  не гарантирует близости этих функций к точному решению. Оценка (5.7) показывает, что правильный критерий включает два слагаемых, одно из которых зависит от разности потоков, построенных на сетках  $\mathcal{T}_k$  и  $\mathcal{T}_{k+1}$ , а второе от нормы  $\mathcal{R}(\tilde{y}_{k+1}^*)$ .

## 5.2. Оценки, использующие решение задачи (3.1)

Приведем оценки, в которых используется решение вспомогательной задачи (см. также разд. 2.6.5 книги [10], где рассматривается двойственная (dual mixed) формулировка вспомогательной задачи).

В самом простом случае используется задача с единичным оператором  $\mathcal{B}$ . Пусть  $u_{\mathcal{R}}$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta u_{\mathcal{R}} + \mathcal{R}(\tilde{y}_h^*) = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (5.8)$$

с однородными краевыми условиями. Предположим, что  $u_{\mathcal{R}} \in H^2(\Omega)$  и, более того, нам известна постоянная  $c_{\text{reg}}$  в соответствующей оценке регулярности:

$$\|u_{\mathcal{R}}\|_{2,2,\Omega} \leq c_{\text{reg}} \|f\|_{\Omega}. \quad (5.9)$$

Например, в выпуклой области такая регулярность решения имеет место, причем  $c_{\text{reg}} = 1$  (см. [27]).

В качестве  $V_0^m$  используем конечномерное пространство  $V_{0h} \subset V_0$ . Оно может быть вложено в  $V_{0h}$  или совпадать с этим пространством, но может быть и совершенно независимым. Будем считать, что соответствующая сетка  $\mathcal{T}_h$  образована подобластями  $\Omega_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_h$ , с кусочно-гладки-

ми липшицевыми границами. Приближенное решение  $\tilde{u}_{\mathcal{T}_h} \in V_{0h}$  задачи (5.8) удовлетворяет тождеству

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{u}_{\mathcal{T}_h} \cdot \nabla w_{0h} dx = \int_{\Omega} \mathcal{R}(\tilde{y}_h^*) w_h dx \quad \forall w_{0h} \in V_{0h}. \tag{5.10}$$

Существенным условием является наличие интерполяционного оператора  $\pi_h$ , который непрерывен и удовлетворяет условию  $\pi_h w_{0h} = w_{0h}$  для любой функции  $w_{0h} \in V_{0h}$ .

Если области  $\Omega_i$  являются симплексами, а  $w \in H^2$ , то  $\pi_h$  может быть ассоциирован с хорошо изученным интерполяционным оператором, который определяется условиями  $\pi_h w \in P^1(\Omega_i)$  и  $\pi_h w(x_i) = w(x_i)$ , где  $x_i$  – вершины симплекса. Оценки (3.17) приобретают вид

$$\|w - \pi_h w\|_{2,\Omega_i} \leq C_{h,1}(\Omega_i) \|w\|_{2,2,\Omega_i}, \quad \|\nabla(w - \pi_h w)\|_{2,\Omega_i}(w) \leq C_{h,2}(\Omega_i) \|w\|_{2,2,\Omega_i}. \tag{5.11}$$

Ряд исследований был посвящен получению достаточно точных оценок констант  $C_{h,1}$  и  $C_{h,2}$  для аффинных интерполянтов функций из  $H^2$  на треугольных и четырехугольных элементах  $T_h$  (см. [28]–[30]). Известно, что для такого оператора интерполяционные константы удовлетворяют условиям  $C_{h,1} \leq c_1 h^2$  и  $C_{h,2} \leq c_1 h$  (см., например, [2]). Работа [31] обобщает эти результаты и обосуждает их применение для построения априорных и апостериорных оценок в задаче  $\Delta u + f = 0$  с однородными условиями Дирихле. В частности, для треугольной области  $T_h \in \mathbb{R}^2$  со сторонами  $n$  и  $\alpha_n$  ( $\alpha > 0$ ) и углом  $\theta \in (0, 2\pi)$  между ними было показано, что

$$C_{h,1}(T_h) \leq \frac{v_+(\alpha, \theta)}{2} h^2 C_1, \quad C_{h,2}(T_h) \leq \frac{v_+(\alpha, \theta)}{\sqrt{2v_-(\alpha, \theta)}} h C_2, \tag{5.12}$$

где  $v_-(\alpha, \theta) = 1 + \alpha^2 - \sqrt{1 + 2\alpha^2 \cos 2\theta + \alpha^4}$  и  $v_+(\alpha, \theta) = 1 + \alpha^2 + \sqrt{1 + 2\alpha^2 \cos 2\theta + \alpha^4}$ . Известно, что  $C_1 \leq 0.361$ , а  $C_2 \leq 0.5$ , причем вычисления дают значения  $C_2 \approx 0.489$  и  $C_1 \approx 0.168$  (см. [31]).

Теперь интерполяционный член (4.1) вычисляется по формуле

$$\mathcal{E}(\mathcal{T}_h, \tilde{y}_h^*, \tau^*) = \left( \sum_{i=1}^{n_h} \sigma_i^2 C_{h,1}^2(\Omega_i) \right)^{1/2} + \left( \sum_{i=1}^{n_h} \alpha_i^2 C_{h,2}^2(\Omega_i) \right)^{1/2},$$

где  $\alpha_i = \|\nabla u_{\mathcal{T}_h} - \tau^*\|_{\Omega_i}$  и  $\sigma_i = \|\operatorname{div}(\tilde{y}_h^* - \tau^*) - f\|_{\Omega_i}$ . Оценка (4.1) приобретает вид

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} \|\nabla(u_h - u)\|_{\mathcal{S}}^2 + \|\tilde{y}_h^* - p^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 \leq \|\mathcal{A}\nabla u_h - \tilde{y}_h^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \frac{\gamma}{\lambda_{\ominus}} [\|\nabla u_{\mathcal{T}_h}\|^2 + \epsilon] \tag{5.13}$$

$$c \epsilon = \mathcal{E}(\mathcal{T}_h, \tilde{y}_h^*, \tau^*) \|\operatorname{div} \tilde{y}_h^* - f\|.$$

Приведем также оценки (4.6) и (4.7) :

$$\|\nabla(u_h - u)\|_{\mathcal{S}}^2 \leq \beta \|\mathcal{A}\nabla u_h - \tilde{y}_h^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \mu_{\oplus} \beta' (\|\nabla u_{\mathcal{T}_h}\|^2 + \epsilon), \tag{5.14}$$

$$\|\tilde{y}_h^* - p^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 \leq \|\mathcal{A}\nabla u_h - \tilde{y}_h^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \mu_{\oplus} (\|\nabla u_{\mathcal{T}_h}\|^2 + \epsilon). \tag{5.15}$$

### 5.3. Асимптотические свойства оценок

Рассмотрим важный частный случай, когда задачи (2.1) и (3.1) приближенно решаются на одной и той же сетке  $\mathcal{T}_h$  (т.е.  $h = n$ ). Естественно выбрать  $\tau^* = \tilde{p}_{\mathcal{R},h}^* := \mathbb{G}_h \nabla u_{\mathcal{R},h}$ , где  $\mathbb{G}_h$  – введенный выше оператор регуляризации (осреднения). В этом случае  $\alpha_i = \|p_{\mathcal{R},h}^* - \tilde{p}_{\mathcal{R},h}^*\|_{\Omega_i}$  представляет собой погрешность регуляризации, а  $\sigma_i$  характеризует невязку уравнения (5.8), возникшую вследствие того, что вектор-функция  $p_{\mathcal{R},h}^*$  заменена на регуляризацию  $\mathbb{G}_h p_{\mathcal{R},h}^*$ .

Предположим, что задача решается на последовательности сеток  $\mathcal{T}_h$ , которые удовлетворяют необходимым условиям регулярности (см., например, [2], [6]), так что  $\|\nabla(u - u_h)\|$  убывает пропорционально  $h$ . Пусть оператор  $\mathbb{G}_h$  на сетках  $\mathcal{T}_h$  удовлетворяет условиям (2.9), (2.10) и (2.23).

Тогда  $p_h^*$  стремится к  $p^*$  в норме  $L^2(\Omega)$  со скоростью  $h$  и, согласно (2.10),  $\tilde{p}_h^*$  стремится к  $p^*$  в норме  $L^2(\Omega)$  также со скоростью  $h$ .

Левая часть (5.13) убывает пропорционально  $h^2$ . Нетрудно видеть, что  $\|\mathcal{A}\nabla u_h - \tilde{y}_h^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2$  также убывает со скоростью  $h^2$ . В соответствии с (3.24) норма  $\|\nabla u_{\mathcal{R},m}\|^2$  убывает с той же скоростью. Рассмотрим последнее слагаемое. Норма  $\|\operatorname{div} \tilde{y}_h^* - f\|$  ограничена постоянной, не зависящей от  $h$ . Поэтому асимптотические свойства определяются поведением  $\mathcal{R}(\mathcal{T}_h, \tilde{y}_h^*, \tau^*)$ . В соответствии с (3.29)

$$\mathcal{R}(\mathcal{T}_h, \tilde{y}_h^*, \tilde{p}_{\mathcal{R},h}^*) \leq C_1 \|\operatorname{div}(\tilde{p}_{\mathcal{R},h}^* - \tilde{y}_h^*) - f\|^2 + C_2 \|p_{\mathcal{R},h}^* - \tilde{p}_{\mathcal{R},h}^*\|$$

где  $C_1 \sim h^2$  и  $C_2 \sim h$ . Поскольку  $\mathbb{G}_h$  удовлетворяет (2.23), норма  $\|\operatorname{div}(\tilde{p}_{\mathcal{R},h}^* - \tilde{y}_h^*) - f\|$  ограничена и первое слагаемое убывает не медленнее, чем  $h^2$ . С помощью (2.9) и (2.10) второе слагаемое можно оценить так:

$$\|p_{\mathcal{R},h}^* - \tilde{p}_{\mathcal{R},h}^*\| \leq \|p_{\mathcal{R},h}^* - p_{\mathcal{R}}^*\| + \|p_{\mathcal{R}}^* - \tilde{p}_{\mathcal{R},h}^*\| \leq (1 + C_{\mathbb{P}}) \|p_{\mathcal{R}}^* - \tilde{p}_{\mathcal{R},h}^*\| = (1 + C_{\mathbb{P}}) \|\nabla u_{\mathcal{R},h} - \nabla u_{\mathcal{R}}\|.$$

На последовательности сеток  $\mathcal{T}_h$  решения вспомогательной задачи сходятся к  $u_{\mathcal{R}}$  в норме  $H^1$  со скоростью  $h$  (эта задача является упрощением исходной, поэтому скорость сходимости  $u_{\mathcal{R},h}$  к точному решению не хуже, чем скорость сходимости  $u_h$ , определенной (5.1)). Поэтому норма  $\|p_{\mathcal{R},h}^* - \tilde{p}_{\mathcal{R},h}^*\|$  убывает не медленнее, чем  $h$ . Таким образом, величина  $\epsilon$  убывает как  $h^2$  и мы заключаем, что правая часть (5.13) убывает с той же скоростью, что и норма отклонения в левой части. Такими же асимптотическими свойствами обладают оценки (5.14) и (5.15).

В ряде случаев (при дополнительной регулярности точного решения  $u$  и специальных свойств аппроксимирующих подпространств) удастся доказать, что  $\tilde{y}_h^*$  сходится к  $p^*$  (в норме  $Y^*$ ) быстрее чем  $u_h^*$  (этот феномен известен как *суперсходимость*, см. [21], [23], [24], [26], [32]– [35]). Тогда оценка (3.24) показывает, что норма решения вспомогательной задачи  $\|\nabla u_{\mathcal{R},h}(\tilde{y}_h^*)\|_{\mathcal{R}}$  также убывает с повышенной скоростью, что улучшает качество оценок (5.14) и (5.15). Более того, в этом случае естественно ожидать, что суперсходимость можно получить и в более простой вспомогательной задаче и что член  $\mathcal{R}(\mathcal{T}_h, \tilde{y}_h^*, \tilde{p}_{\mathcal{R},h}^*)$  будет также убывать с повышенной скоростью.

#### 5.4. Сравнение с интерполяционными оценками Клемана

Большая часть работ, посвященных апостериорным оценкам для уравнений в частных производных, связана с так называемым методом невязок (explicit residual method, см., например, [8]). Этот метод использует галеркинскую ортогональность приближенного решения и весьма сложные операторы интерполирования, такие как оператор Клемана (см. [36]). Для подобласти (конечного элемента)  $\Omega_k$  и общей для  $\Omega_k$  и  $\Omega_l$  грани  $\Gamma_{kl}$  оценки Клемана имеют вид

$$\|v - \pi_h v\|_{\Omega_k} \leq \gamma_{1k} \operatorname{diam}(\Omega_k) \|v\|_{1,2,\omega_{1k}(\Omega_k)}, \tag{5.16}$$

$$\|v - \pi_h v\|_{\Gamma_{kl}} \leq \gamma_{2k} |\Gamma_{kl}|^{1/2} \|v\|_{1,2,\omega_{2k}(\Gamma_{kl})}, \tag{5.17}$$

где справа стоят  $H^1$ -нормы для областей  $\omega_{1k}$  и  $\omega_{2k}$ , которые содержат не только  $\Omega_i$ , но и определенный набор соседних подобластей (элементов). Поэтому постоянные  $\gamma_{1k}$  и  $\gamma_{2k}$  сильно зависят от структуры сетки. Их значения трудно определить и необходимо пересчитывать при каждом новом перестроении сетки. При оценке интеграла невязки с помощью (5.16), (5.17) неизбежно происходит переоценка (поскольку норма по  $\Omega_i$  суммируется многократно). Кроме того, сам метод построения апостериорных оценок по методу невязок связан с переоценкой ряда слагаемых.

В (5.13)–(5.15) используются простые интерполяционные оценки (5.11). Нормы, стоящие в их правой части, определяются только на том элементе, где осуществляется интерполирование, а постоянные (5.12) известны и при изменении сетки эти постоянные легко пересчитываются. Оценки (5.13)–(5.15) не используют ортогональность галеркинских аппроксимаций и верны для любых приближенных решений. Приведенные ниже примеры подтверждают их эффективность

для самых разных приближенных решений. Конечно, эти преимущества основаны на использовании повышенной регулярности решения вспомогательной задачи. Проверка этого требования может быть простой в одних случаях (например, для выпуклых областей или областей с гладкими границами) и сложной в других.

5.5. Пример

Мы сравним эффективность различных оценок на примере простой краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx} \rho(x) \frac{du}{dx} = f(x), \quad x \in I := (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0, \tag{5.18}$$

где  $\rho_{\oplus} \geq \rho(x) \geq \rho_{\ominus} > 0$ , а  $f$  – заданная ограниченная функция. Несмотря на простоту, эта задача обладает достаточным разнообразием, чтобы проверить эффективность оценок в различных ситуациях. В этом случае  $\Lambda u = \frac{du}{dx}$ ,  $\Lambda^* y^* = -\frac{dy^*}{dx}$ . Точное решение задачи (5.18) имеет вид

$$u(x) = \int_0^x \frac{g(t) + c}{\rho(t)} dt, \quad u'(x) = \frac{g(x) + c}{\rho(x)}, \quad g(x) := \int_0^x f(t) dt, \tag{5.19}$$

где

$$c := \left( -\int_I \frac{g(t)}{\rho(t)} dt \right) \left( \int_I \frac{1}{\rho(t)} dt \right)^{-1}.$$

При этом

$$p^* = \rho(x) \frac{du}{dx} = g(x) + c, \quad \mu_{\oplus} = \rho_{\oplus}, \quad \mu_{\ominus} = \rho_{\ominus},$$

$$\|e\|_A^2 = \int_I \rho |e'|^2 dx, \quad \|e^*\|_{A^{-1}}^2 = \int_I \rho^{-1} |e^*|^2 dx.$$

Постоянная  $C_{\Lambda}$  определяется условием  $\|w\|^2 \leq C_{\Lambda}^2 \int_I \rho |w'|^2 dx$ , поэтому можно положить  $C_{\Lambda} = 1/\rho_{\ominus}^{1/2} \pi$ . В качестве задачи (3.1) выберем

$$\frac{d^2 u_{\mathcal{R}}}{dx^2} = f - \frac{dy^*}{dx}, \quad x \in I, \quad u_{\mathcal{R}}(0) = u_{\mathcal{R}}(1) = 0. \tag{5.20}$$

Ее точное решение задается соотношениями

$$u_{\mathcal{R}}(x) = \int_0^x (g(t) - y^*) dt + c_{\mathcal{R}} x, \quad u'_{\mathcal{R}}(x) = c_{\mathcal{R}} + g(x) - y^*, \quad p_{\mathcal{R}}^* = \frac{du_{\mathcal{R}}}{dx}, \tag{5.21}$$

где

$$c_{\mathcal{R}} := -\int_0^1 (g(t) - y^*) dt.$$

Приближенные решения строятся на равномерной сетке. Галеркинские решения задач (5.18) и (5.20) обозначим  $u_h$  и  $u_{\mathcal{R},h}$  соответственно. Оператор  $\mathbb{G}_h$  сглаживает приближенный поток  $p_h^* = \rho u_h'$  с помощью стандартного метода, состоящего в усреднении значений справа и слева от узла и аффинном продолжении полученных таким образом значений. При этом  $\mathcal{R}(y^*) = (\mathbb{G}_h \rho u_h')' - f$ . Подчеркнем, что во всех примерах функция  $\tilde{y}_h^*$  была построена с помощью этой простой процедуры регуляризации и никакой дополнительной обработки этой функции, направленной на минимизацию нормы невязки  $\mathcal{R}(\tilde{y}_h^*)$ , не применялось.

Рассмотрим интервал  $I_h = (0, h)$ , и пусть  $w \in H^2(I_h)$ ,  $w(0) = w(h) = 0$ . Нетрудно показать, что

$$\|w'\|_{I_h} \leq \frac{h}{2\pi} \|w''\|_{I_h}, \quad \|w\|_{I_h} \leq \frac{h^2}{4\pi^2} \|w''\|_{I_h}. \tag{5.22}$$

**Таблица 1.** Сравнение норм отклонения от решения с оценками (5.2), (5.3), (5.5), (5.13)–(5.15)

Тип	$\ e\ _{sd}$	$M(e)$	$+M(e)$	$\ e^*\ _{sd^{-1}}$	$M(e^*)$	$+M(e^*)$	$\ (e, e^*)\ _\gamma$	$M(e, e^*)$	$+M(e, e^*)$
1	0.016	0.045	0.018	0.002	0.033	0.017	0.012	0.043	0.017
1	0.024	0.248	0.036	0.016	0.232	0.026	0.023	0.328	0.033
1	0.039	0.504	0.059	0.034	0.487	0.046	0.044	0.689	0.062
1	0.055	0.730	0.080	0.050	0.711	0.064	0.063	1.013	0.089
2	0.017	0.122	0.020	0.003	0.106	0.017	0.013	0.149	0.018
2	0.038	0.762	0.0502	0.0153	0.729	0.037	0.031	1.032	0.041
2	0.084	1.553	0.111	0.032	1.483	0.082	0.068	2.091	0.090
2	0.296	6.483	0.383	0.121	6.241	0.283	0.242	8.823	0.314

Поэтому интерполяционный член имеет вид

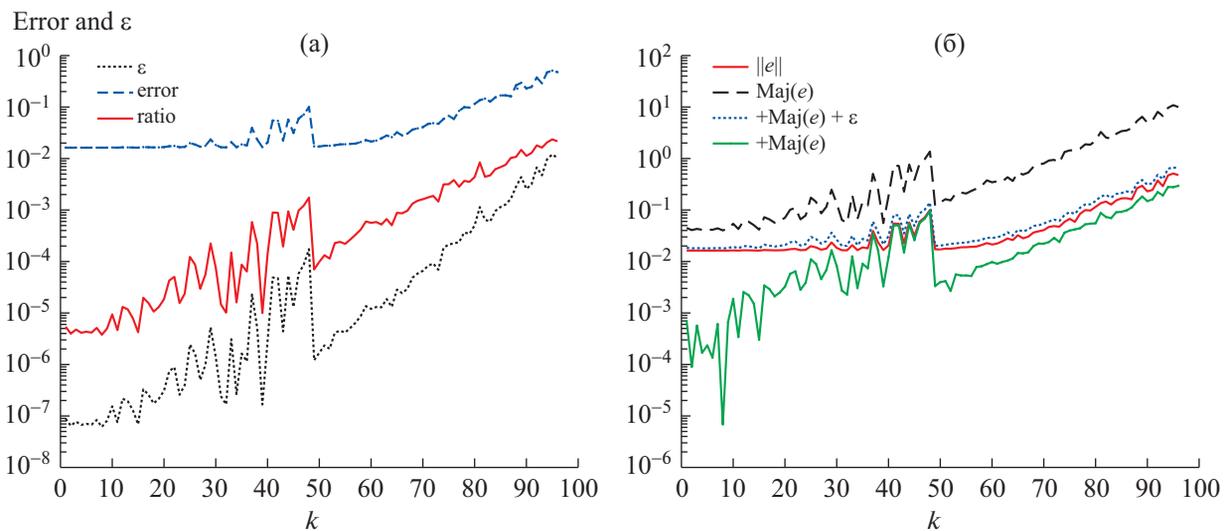
$$\varepsilon(\mathcal{T}_\Omega, \tilde{y}_h^*, \tau^*) := \frac{h^2}{4\pi^2} \|(\mathbb{G}_h \rho(u'_{\mathcal{R},h} + u'_h))' + f\|_l + \frac{h}{2\pi} \|\rho u'_{\mathcal{R},h} - \mathbb{G}_h \rho u'_{\mathcal{R},h}\|_l.$$

Эффективность оценок (5.2), (5.3), (5.5) (5.13)–(5.15) сравнивалась в серии примеров с различными функциями  $\rho$  и  $f$ . Ниже приведены несколько характерных примеров, где эти функции выбирались гладкими и негладкими, а именно,

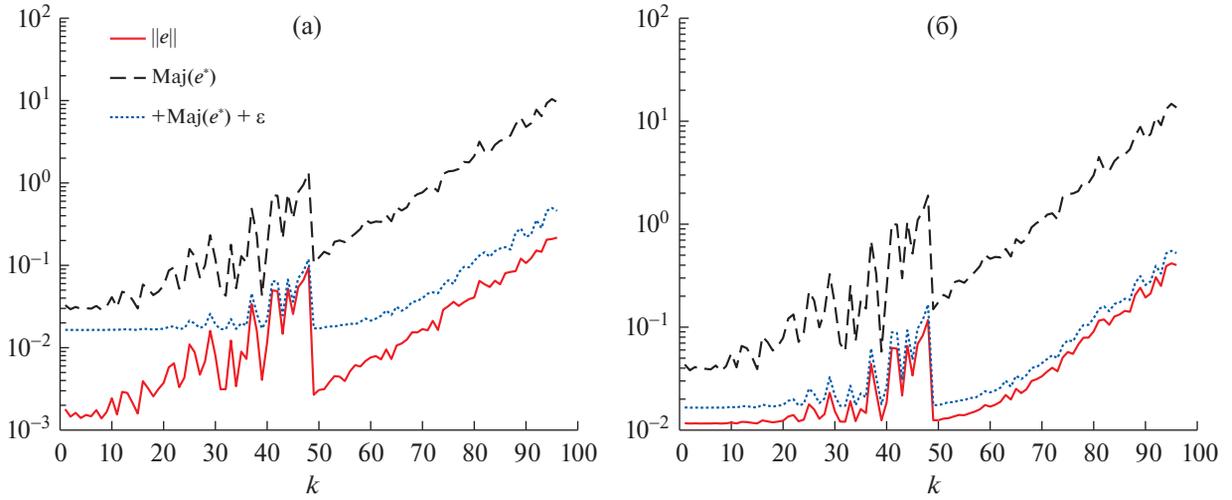
$$f_1 := 1 + 2x \quad \text{и} \quad f_2 := \begin{cases} -1 & x \leq 1/2, \\ 1 & x > 1/2, \end{cases}$$

$$\rho_1 := 1 + 0.5 \sin(8\pi x), \quad \rho_2 = 0.5 + 2 \sin^2(\pi x) \quad \text{и} \quad \rho_3 := \begin{cases} 1 + 4x & x \in [0, 1/4), \\ 3 - 4x & x \in [1/4, 1/2), \\ 4x - 1 & x \in [1/4, 1/2), \\ 5 - 4x & x \in [1/4, 1/2). \end{cases}$$

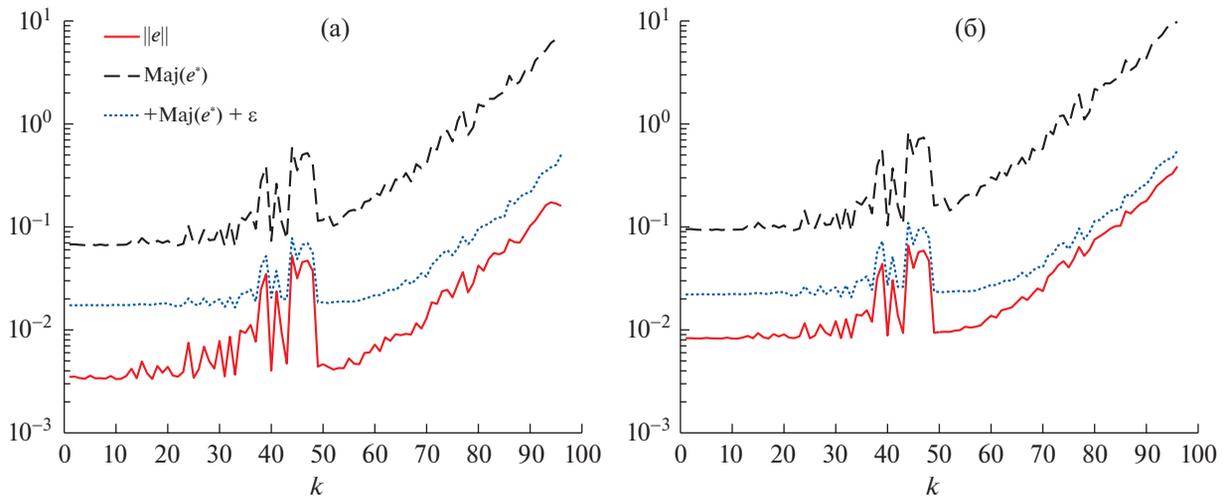
Нас интересует, насколько правильно (5.2), (5.3), (5.5), (5.13)–(5.15) оценивают расстояние до точного решения не только для галеркинских приближений  $u_h$  (когда функция  $\tilde{y}_h^*$  может быть хорошей аппроксимацией  $p^*$ ), но и для широкого набора различных приближенных решений, включая и такие, которые достаточно сильно отличаются от  $u_h$  (так что  $\mathcal{R}(\tilde{y}_h^*)$  не является малой



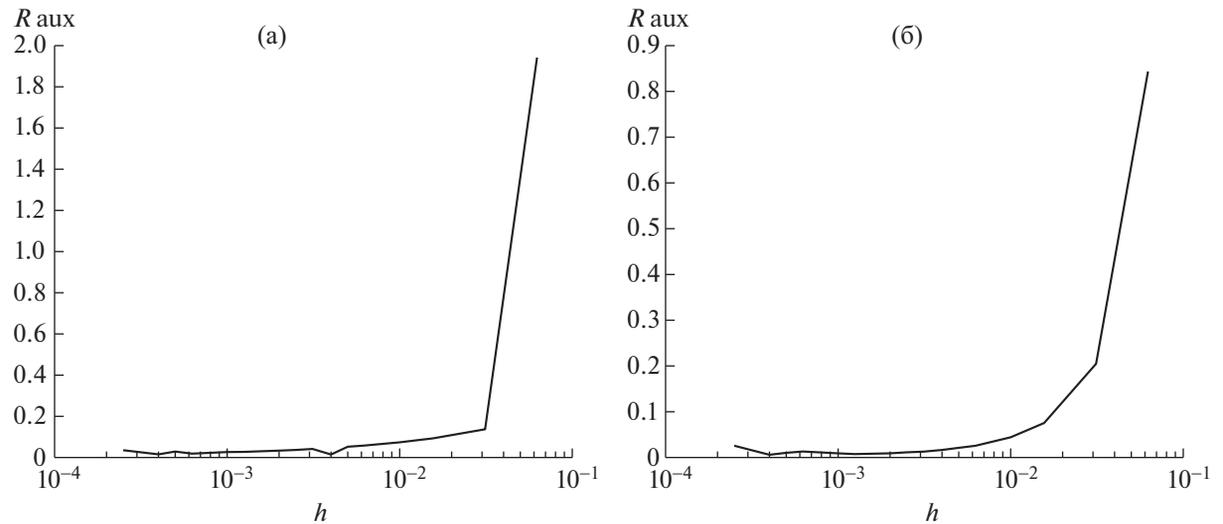
**Фиг. 1.** Слагаемое  $\varepsilon(\mathcal{T}_\Omega, y^*, \tau^*)$  (а) и оценки (5.2) и (5.14) (б).



Фиг. 2. Норма  $\|e^*\|_{S^{l-1}}$  и ее мажоранты (5.3) и (5.13) (а), норма  $\|(e, e^*)\|_{\gamma}$  и ее мажоранты (5.5) и (5.13) (б).



Фиг. 3. Норма  $\|e^*\|_{S^{l-1}}$  и ее мажоранты (5.3) и (5.15) (а), норма  $\|(e, e^*)\|_{\gamma}$  и ее мажоранты (5.5) и (5.13) (б).



Фиг. 4. Норма  $\mathcal{R}(\tilde{y}_h^*)$  в зависимости от  $h$  (для первой и второй серий примеров).

**Таблица 2.** Сравнение точных значений отклонения от решения с оценками (5.2), (5.3), (5.5), (5.13)–(5.15)

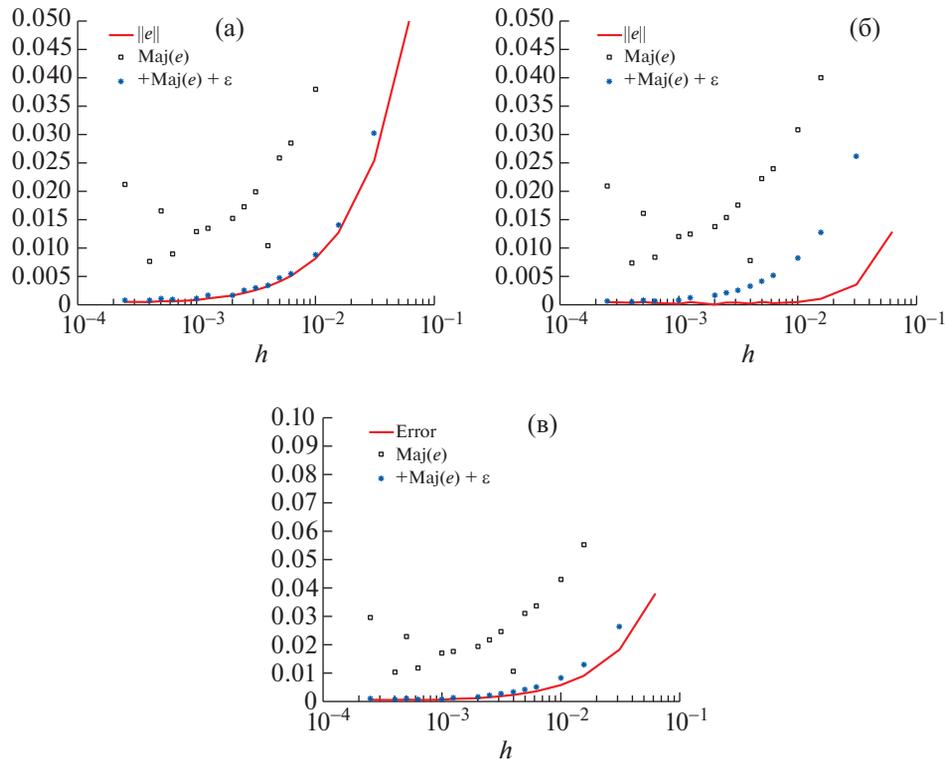
Тип	$\ e\ _{sl}$	$M(e)$	$+M(e)$	$\ e^*\ _{sl}^{-1}$	$M(e^*)$	$+M(e^*)$	$\  (e, e^*) \ _\gamma$	$M(e, e^*)$	$+M(e, e^*)$
1	0.011	0.077	0.033	0.004	0.068	0.017	0.008	0.095	0.022
1	0.013	0.106	0.033	0.008	0.096	0.019	0.012	0.135	0.025
1	0.027	0.274	0.062	0.024	0.263	0.037	0.031	0.371	0.052
1	0.034	0.366	0.079	0.032	0.355	0.049	0.040	0.501	0.068
2	0.012	0.125	0.032	0.004	0.114	0.019	0.010	0.161	0.024
2	0.074	1.432	0.136	0.036	1.373	0.080	0.064	1.942	0.097
2	0.208	3.441	0.345	0.084	3.272	0.211	0.169	4.633	0.244
2	0.316	5.433	0.579	0.162	5.172	0.345	0.276	7.312	0.411

**Таблица 3.** Галеркинские аппроксимации

$N_{int}$	$\ e\ _{sl}$	$M(e)$	$+M(e)$	$\  (e, e^*) \ _\gamma$	$M(e, e^*)$	$+M(e, e^*)$
16	5.06e-02	1.14e+00	1.63e-01	3.80e-02	1.54e+00	1.64e-01
32	2.54e-02	8.42e-02	3.03e-02	1.83e-02	8.66e-02	2.65e-02
64	1.27e-02	5.07e-02	1.41e-02	9.06e-03	5.52e-02	1.29e-02
100	8.14e-03	3.79e-02	8.76e-03	5.78e-03	4.29e-02	8.20e-03
200	4.10e-03	2.59e-02	4.73e-03	2.95e-03	3.11e-02	4.18e-03
400	2.07e-03	1.73e-02	2.52e-03	1.52e-03	2.17e-02	2.15e-03
800	1.12e-03	1.35e-02	1.61e-03	9.27e-04	1.77e-02	1.32e-03
1000	8.32e-04	1.28e-02	1.03e-03	6.12e-04	1.70e-02	8.68e-04
2000	6.41e-04	1.66e-02	1.03e-03	6.71e-04	2.29e-02	9.66e-04
4000	5.28e-04	2.12e-02	8.12e-04	6.13e-04	2.97e-02	8.84e-04
16	3.39e-02	7.02e-01	1.45e-01	5.04e-02	9.18e-01	1.06e-01
32	1.65e-02	2.12e-01	3.47e-02	1.40e-02	2.77e-01	2.45e-02
64	8.33e-03	6.84e-02	1.27e-02	6.26e-03	8.53e-02	9.39e-03
100	5.33e-03	3.27e-02	7.00e-03	3.88e-03	3.91e-02	5.59e-03
200	2.70e-03	1.48e-02	3.56e-03	1.96e-03	1.74e-02	2.81e-03
400	1.34e-03	7.72e-03	1.65e-03	9.61e-04	9.13e-03	1.37e-03
800	7.18e-04	6.73e-03	1.21e-03	5.73e-04	8.60e-03	8.63e-04
1000	5.37e-04	7.46e-03	6.57e-04	3.84e-04	9.80e-03	5.48e-04
2000	2.71e-04	8.57e-03	3.65e-04	1.98e-04	1.17e-02	2.84e-04
4000	4.46e-04	2.25e-02	1.01e-03	5.30e-04	3.16e-02	8.89e-04

величиной). Для этого в  $u_h$  вносились возмущения двух разных типов. В первом случае возмущения были обусловлены функциями  $\phi_1 = x(1-x)$ ,  $\phi_2 = \sin 8\pi x$  и  $\phi_3 = |x - 0.5| - 0.5$ , которые добавлялись со случайными весами. Будем говорить, что это возмущения типа 1. В зависимости от разрешенной магнитуды возмущений получаются достаточно хорошие приближения или, напротив, весьма грубые. Во втором случае возмущения задавались случайным образом в каждом узле независимо (возмущения типа 2). Заметим, что на практике погрешности могут возникать вследствие самых разных причин (от систематических погрешностей численного интегрирования до случайных ошибок, связанных с дефектами компьютерных программ). Поэтому важно проверить устойчивость оценок к возмущениям любых типов.

В первой серии экспериментов  $f = f_1$  и  $\rho = \rho_2$ . При вычислении комбинированной нормы было выбрано  $\gamma = 2$ . В табл. 1 представлены численные результаты. В первом столбце указан тип возмущения. В третьем и четвертом столбцах приведены значения оценок (5.2) и (5.14), в шестом и седьмом – (5.3) и (5.15), а в девятом и десятом показаны значения оценок комбинированной



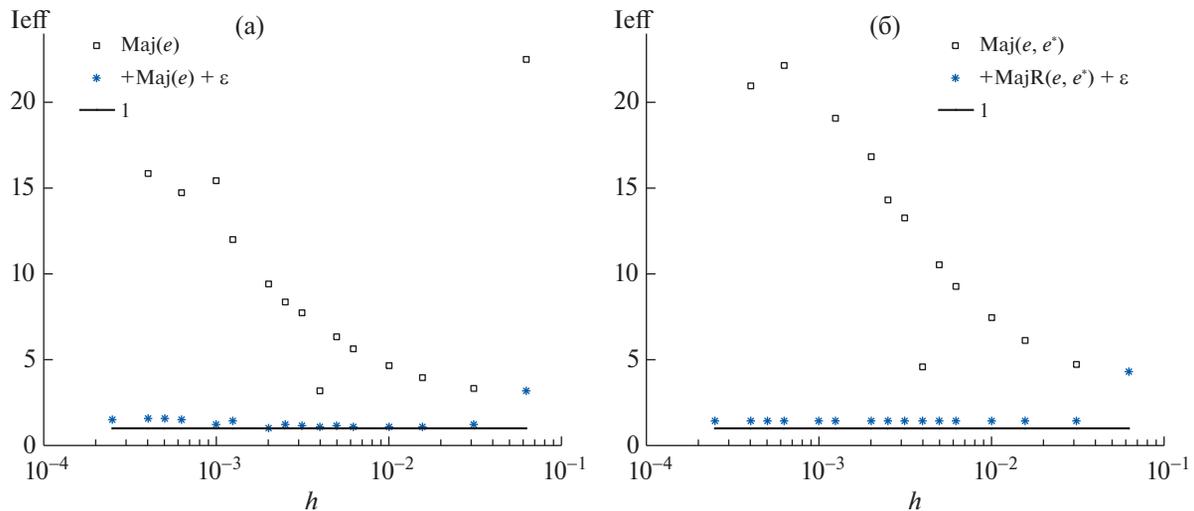
Фиг. 5. Нормы отклонений  $\|e\|_{S^l}$  (а),  $\|e^*\|_{S^l-1}$  (б),  $\|(e, e^*)\|_\gamma$  (в) и их мажоранты.

нормы (5.5) и (5.13). Сначала магнитуда возмущения очень мала, так что первая строка в верхней и нижней половинах таблицы соответствует приближенному решению, которое мало отличается от  $u_h$ . Затем магнитуда постепенно возрастает и последние строки соответствуют решениям, которые достаточно сильно отклоняются от точного. Графически эти данные представлены на фиг. 1б. Ось абсцисс соответствует номеру эксперимента, причем левая часть относится к возмущениям типа 1, а правая к возмущениям типа 2 (этим объясняется скачок в середине графика). С ростом номера эксперимента величина возмущения возрастает и, вместе с этим, возрастает норма ошибки (сплошная красная линия). Относительная норма погрешности  $\|e\|_p / \|u\|_p$  меняется от 0.033 до 0.584. Соответствующая оценка по формуле (5.2) представлена пунктирной линией, а оценка (5.14), использующая решение вспомогательной задачи, обозначена точками. Нижняя линия показывает значения миноранты. Видно, что оценка (5.14) прекрасно воспроизводит значения нормы отклонения, однако (5.2) может существенно завышать эту величину. Эффективность оценки (5.14) обеспечивается малостью величины  $\varepsilon(\mathcal{T}_\Omega, y^*, \tau^*)$ , которая изображена на фиг. 1а. На этом графике верхняя линия показывает величину нормы отклонения от точного решения, а нижняя – величину интерполяционного члена  $\varepsilon(\mathcal{T}_\Omega, y^*, \tau^*)$ . Средняя линия показывает отношение этих величин. Во всех примерах слагаемое  $\varepsilon(\mathcal{T}_\Omega, y^*, \tau^*)$  намного меньше, чем норма отклонения.

На фиг. 2 показано поведение норм и соответствующих мажорант. Видно, что оценки, использующие решение вспомогательной задачи, намного точнее и устойчивы к различным возмущениям. Они хорошо работают как для точных, так и для грубых аппроксимаций точного решения. Соответствующие результаты графически представлены на фиг. 3.

Далее исследовалось поведение оценок для задачи с периодическим коэффициентом  $\rho = \rho_1$  и скачкообразной правой частью  $f_2$ . В табл. 2 показаны нормы отклонений и соответствующие оценки. Тестировались самые разные приближенные решения, у которых относительная норма погрешности варьировалась от 6.9 до 204%.

В заключение приведем примеры, показывающие поведение оценок для галеркинских аппроксимаций при увеличении числа интервалов  $N_{\text{int}}$ . В первой серии примеров, приведенных в



Фиг. 6. Индексы эффективности оценок для галеркинских аппроксимаций.

верхней половине табл. 3, использовались функции  $\rho_3$  и  $f_1$ , а в нижней показаны результаты второй серии для функций  $\rho_2$  и  $f_2$ . При измельчении сетки относительная ошибка галеркинской аппроксимации уменьшалась от 10 до 0.1% в первом случае и от 21 до 3% во втором. На фиг. 4 показана зависимость от  $h$  нормы функции  $\mathcal{R}(\tilde{y}_h^*)$ , которая используется во вспомогательной задаче (5.8). Видно, что эта норма не только ограничена, но и быстро убывает с убыванием  $h$ . На фиг. 5 показано, как изменяются точные значения различных норм погрешности и значения оценок (5.2), (5.3), (5.5), (5.13)–(5.15) в зависимости от  $h$  в первой серии тестов. Результаты для второй серии вполне аналогичны. Как и в предыдущих примерах, оценки, использующие решение вспомогательной задачи (они обозначены звездочками), оказались намного точнее. Поведение индексов эффективности этих оценок приведено на фиг. 6.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brezzi F., Fortin M. Mixed and hybrid finite element methods. Springer Ser. in Computat. Math. 15, New York, 1991.
2. Ciarlet P. The finite element method for elliptic problems. North-Holland, 1987.
3. Roberts J.E., Thomas J.-M. Mixed and hybrid methods. In: Handbook of Numerical Analysis, V. II. North-Holland, Amsterdam, 1991, p. 523–639.
4. Repin S. A posteriori estimates for partial differential equations. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2008.
5. Ainsworth M., Oden J.T. A posteriori error estimation in finite element analysis. John Wiley & Sons, New York, 2000.
6. Eriksson K., Estep D., Hansbo P., Johnson C. Introduction to adaptive methods for differential equations // Acta Numer. 1995. P. 105–158.
7. Mali O., Nettaanmäki P., Repin S. Accuracy verification methods. Theory and Algorithms. Springer, Berlin, 2014.
8. Verfürth R. A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Wiley-Teubner, Stuttgart, 1996.
9. Repin S. Two-sided estimates of deviation from exact solutions of uniformly elliptic equations // Am. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 2003. V. 209. P. 143–171.
10. Repin S., Sauter S. Accuracy of mathematical models. Dimension reduction, simplification and homogenization // EMS Tracts in Math. 2020. V. 33.
11. Kelly D.W. The self equilibration of residuals and complementary error estimates in the finite element method // Int. J. Numer. Meth. Engrg. 1984. V. 20. P. 1491–1506.
12. Ladevéze P., Leguillon D. Error estimate procedure in the finite element method and applications // SIAM J. Numer. Anal. 1983. V. 20. P. 485–509.
13. Braess D. Finite elements. Cambridge Univer. Press, Cambridge, 1997.

14. Braess D., Schöberl J. Equilibrated residual error estimator for edge elements // *Math. Comp.* 2008. V. 77. № 262. 651–672.
15. Ern A., Nicaise S., Vohralik M. An accurate  $H(\text{div})$  flux reconstruction for discontinuous Galerkin approximations of elliptic problems // *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* 2007. V. 345. № 12. P. 709–712.
16. Ern A., Vohralik M. Four closely related equilibrated flux reconstructions for nonconforming finite elements // *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* 2013. V. 351. № 1–2. P. 77–80.
17. Repin S. A posteriori error estimation for nonlinear variational problems by duality theory // *Zapiski Nauchnih Seminarov, V.A. Steklov Math. Inst. (POMI.)* 1997. V. 243. P. 201–214.
18. Repin S. A posteriori error estimation for variational problems with uniformly convex functionals // *Math. Comp.* 2000. V. 69. № 230. P. 481–500.
19. Repin S. Computable majorants of constants in the Poincaré and Friedrichs inequalities // *J. Math. Sci. (N.Y.)* 2012. V. 186. № 2. P. 307–321.
20. Repin S. Poincaré type inequalities for vector functions with zero mean normal traces on the boundary and applications to interpolation methods, in *Contributions to partial differential equations and applications*, P. 411–432, *Comput. Meth. Appl. Sci.* V. 47, Springer, Cham, 2019.
21. Carstensen C., Bartels S. Each averaging technique yields reliable a posteriori error control in FEM on unstructured grids. I Low order conforming, non-conforming and mixed FEM // *Math. Comp.* 2002. V. 71. № 239. P. 945–969.
22. Carstensen C., Funken S.A. Fully reliable localized error control in the FEM // *SIAM J. Sci. Comput.* 2000. V. 21. № 4. P. 1465–1484.
23. Křížek M., Neittaanmäki P. Superconvergence phenomenon in the finite element method arising from averaging gradients // *Numer. Math.* 1984. V. 45. № 1. P. 105–116.
24. Wahlbin L.B. Superconvergence in Galerkin finite element methods // *Lecture Notes in Math.* N 1605, Springer, 1995.
25. Zhang Z., Naga A. A new finite element gradient recovery method: superconvergence property // *SIAM J. Sci. Comput.* 2005. V. 26. № 4. P. 1192–1213.
26. Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis // *Inter. J. Numer. Meth. Engng.* 1987. V. 24. P. 337–357.
27. Ladyženskaya O.A. The boundary value problems of mathematical physics, Springer-Verlag, New York, 1985.
28. Arbenz P. Computable finite element error bounds for poisson’s equation // *IMA J. of Numer. Anal.* 1982. V. 29. P. 475–479.
29. Barnhill R.E., Brown J.H., Mitchell A.R. A comparison of finite element error bounds for Poisson’s equation // *IMA J. Numer. Anal.* 1981. V. 1. P. 95–103.
30. Natterer F. Berechenbare Fehlerschranken für die Methode der finite Elemente // *Inter. Ser. of Numer. Math.* 1975. V. 28. P. 109–121.
31. Liu X., Kikuchi F. Analysis and estimation of error constants for P0 and P1 interpolations over triangular finite elements // *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* 2010. V. 17. P. 27–78.
32. Chow S.-S., Carey G.F., Lazarov R.D. Natural and post-processed superconvergence in semilinear problems // *Numer. Meth. Partial Diff. Eqs.* 1991. V. 7. P. 245–259.
33. Ewing R.E., Lazarov R.D., Wang J. Superconvergence of the velocity along the Gauss lines in mixed finite element methods // *SIAM J. Numer. Anal.* 1991. V. 18. P. 1015–1029.
34. Lazarov R.D. Superconvergence of the gradient for triangular and tetrahedral finite elements of a solution of linear problems in elasticity theory // *Computat. Processes and Syst.* 1988. V. 6. P. 180–191 (in Russian).
35. Zlamal M. Some superconvergence results in the finite element method. In: *Mathematical Aspects of Finite Element Method* (eds. A. Dold and B. Eckmann), Springer Lecture Notes in Math., N. 606, 1975.
36. Clément P. Approximation by the finite element functions using local regularization // *RAIRO Sér. Rouge Anal. Numér. R-2.* 1975. V. 9. P. 77–84.

ОБЫКНОВЕННЫЕ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.63

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ  
ГЕОСТРОФИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ  
ВЕРТИКАЛЬНЫМ ПРОФИЛЕМ СКОРОСТИ  
ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ОКЕАНУ<sup>1)</sup>

© 2021 г. С. Л. Скороходов<sup>1,\*</sup>, Н. П. Кузьмина<sup>2,\*\*</sup>

<sup>1</sup> 119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

<sup>2</sup> 117997 Москва, Нахимовский пр-т, 36, Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Россия

\*e-mail: sskorokhodov@gmail.com

\*\*e-mail: kuzmina@ocean.ru

Поступила в редакцию 17.03.2021 г.  
Переработанный вариант 19.05.2021 г.  
Принята к публикации 20.06.2021 г.

На основе уравнения потенциального вихря в квазигеострофическом приближении представлен анализ устойчивых и неустойчивых возмущений океанских течений конечного поперечного масштаба с параболическим вертикальным профилем скорости (течение типа Пуазейля–Куэтта), т.е. с учетом как линейного, так и постоянного сдвига скорости течения. В модели учитывается влияние вертикальной диффузии плавучести и вертикального трения и полагается, что максимальная скорость среднего течения имеет место на границе слоя. Для анализа используется метод малых возмущений. Задача зависит от нескольких физических параметров и сводится к решению спектральной несамосопряженной задачи для уравнения 4-го порядка с малым параметром при старшей производной. Построены асимптотические разложения собственных функций и собственных значений при малых значениях волнового числа  $k$ . С помощью метода продолжения по параметру  $k$  вычислены траектории собственных значений для различных значений физических параметров задачи. Представлен подробный анализ влияния особенностей вертикальной структуры течения на характеристики устойчивых и неустойчивых возмущений. Показано, что фазовые скорости неустойчивых возмущений могут существенно меняться в зависимости от величины линейного вертикального сдвига скорости течения. Библ. 14. Фиг. 4.

**Ключевые слова:** спектральная несамосопряженная задача, асимптотические разложения, метод продолжения по параметру.

DOI: 10.31857/S0044466921120140

ВВЕДЕНИЕ

Работа продолжает исследования устойчивых и неустойчивых возмущений, типичных для океана геострофических течений с учетом вертикальной диффузии импульса и массы (см. [1]–[8]). В отличие от упомянутых исследований настоящая работа посвящена анализу траекторий собственных значений для течения с параболическим вертикальным профилем скорости (течение типа Пуазейля–Куэтта), т.е. для течения с линейным и постоянным сдвигами скорости. Динамика малых возмущений таких течений описывается линейным уравнением потенциального вихря в квазигеострофическом приближении. Вывод основных уравнений модели подробно представлен в [1]–[4].

**Постановка задачи.** Область, в которой исследуется модельное течение, является бесконечным (вдоль направления течения) горизонтальным слоем с верхней и нижней границами  $z_0$  и  $z_1$  и боковыми границами  $y_0$  и  $y_1$ . Декартовы координаты внутри такого слоя следующие: верти-

<sup>1)</sup>Участие Н.П. Кузьминой в данном исследовании поддерживалось бюджетным финансированием ИО РАН (тема № 0128-2021-0001).

кальная переменная  $z \in [z_0, z_1]$ , поперечная переменная  $y \in [y_0, y_1]$  и продольная переменная  $x$  направлена вдоль течения,  $x \in (-\infty, \infty)$ .

В соответствии с методами исследования неустойчивости течений (см., например, [3]–[5]) представим отклонения безразмерного давления в виде бегущей вдоль оси  $x$  волны:

$$p(x, y, z; t) = \sin\left(\pi n \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}\right) e^{ik(x-ct)} F\left(\frac{z}{H}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (0.1)$$

где  $k$  – волновое число возмущения вдоль координаты  $x$ ,  $(y_1 - y_0)/n$  – масштаб возмущения в поперечном направлении  $y$ ,  $H$  – вертикальный масштаб слоя,  $c$  – комплексная фазовая скорость, а  $F(z/H)$  – искомый вертикальный профиль возмущения давления. В безразмерных переменных задача исследования неустойчивости течений с параболическими вертикальными профилями скорости  $U(z)$  различной кривизны сводится к решению двух спектральных задач на единичном отрезке.

**Задача I.** На отрезке  $z \in [0, 1]$  найти комплекснозначные собственные функции (СФ)  $F = F(z)$  и собственные значения (СЗ) “ $c$ ” – решения уравнения

$$(\alpha z^2 + \beta z - c)(F''' - \text{Bu}(k^2 + \pi^2 n^2)F) - 2\alpha F = \frac{1}{ikR}(F^{(IV)} - \text{BuPr}(k^2 + \pi^2 n^2)F''), \quad (0.2)$$

с краевыми условиями

$$(1 - c)F'(1) - (1 + \alpha)F(1) = \frac{1}{ikR}F'''(1), \quad F''(1) = 0, \quad (0.3)$$

$$-cF'(0) - \beta F(0) = \frac{1}{ikR}F'''(0), \quad F''(0) = 0, \quad (0.4)$$

и при условии

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0. \quad (0.5)$$

**Задача II.** На отрезке  $z \in [-1, 0]$  найти комплекснозначные СФ  $\Phi = \Phi(z)$  и СЗ  $\tilde{c}$  – решения уравнения

$$(-az^2 + bz + 1 - \tilde{c})(\Phi'' - \text{Bu}(k^2 + \pi^2 n^2)\Phi) + 2a\Phi = \frac{1}{ikR}(\Phi^{(IV)} - \text{BuPr}(k^2 + \pi^2 n^2)\Phi''), \quad (0.6)$$

с краевыми условиями

$$-\tilde{c}\Phi'(-1) - (1 + a)\Phi(-1) = \frac{1}{ikR}\Phi'''(-1), \quad \Phi''(-1) = 0, \quad (0.7)$$

$$(1 - \tilde{c})\Phi'(0) - b\Phi(0) = \frac{1}{ikR}\Phi'''(0), \quad \Phi''(0) = 0, \quad (0.8)$$

и при условии

$$a + b = 1, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0. \quad (0.9)$$

В задачах I и II введены следующие обозначения:  $R = \text{Re}H/L$ ,  $\text{Re}$  – число Пекле (аналог числа Рейнольдса),  $H$  – вертикальный масштаб слоя,  $L = y_1 - y_0$  – поперечный масштаб течения,  $n$  – число полуволн в поперечном направлении ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $\text{Pr}$  – число Прандтля,  $\text{Bu}$  – число Бургера,  $i$  – мнимая единица.

Краевые условия в (0.3), (0.4), (0.7), (0.8) с участием третьих производных задают отсутствие протекания на горизонтальных границах слоев, а условия для вторых производных задают равенство нулю потоков плавучести.

Особенность обеих задач заключается в том, что возникающие операторы являются несамосопряженными, при старшей производной стоят малые коэффициенты (для реальных течений величина  $kR$  может быть очень большой), а спектральные параметры  $c$  и  $\tilde{c}$  входят в уравнения и в краевые условия. В обеих задачах будет возникать счетное множество СФ и СЗ. Неустойчивые по времени возмущения давления  $p(x, y, z; t)$  возникают для тех СФ, которым соответствуют СЗ  $c_m$  и  $\tilde{c}_m$  с положительной мнимой частью  $\text{Im}(c) > 0$  и  $\text{Im}(\tilde{c}) > 0$ , что следует из представления (0.1).

## 1. СИММЕТРИЯ СФ И СЗ ЗАДАЧ I И II

Докажем свойство симметрии задач I и II.

**Теорема.** Собственные значения  $c_n$  задачи (0.2)–(0.5) и собственные значения  $\tilde{c}_n$  задачи (0.6)–(0.9) при вещественных параметрах  $\alpha, \beta, a, b, k, R, \text{Pr}, \text{Bu}, n = 1, 2, \dots$ , и условию  $\alpha = a$  обладают симметрией относительно прямой  $\text{Re}(\tilde{c}_n) = \frac{1}{2}$ , т.е.

$$\text{Re}(\tilde{c}_n) = 1 - \text{Re}(c_n), \quad \text{Im}(\tilde{c}_n) = \text{Im}(c_n). \quad (1.1)$$

**Доказательство.** В задаче II сделаем замену  $z = -t$ , тогда  $t \in [0, 1]$ . Учтем теперь, что

$$\frac{d\Phi}{dz} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \frac{d^2\Phi}{dz^2} = \frac{d^2\Phi}{dt^2}, \quad \frac{d^3\Phi}{dz^3} = -\frac{d^3\Phi}{dt^3}, \quad \frac{d^4\Phi}{dz^4} = \frac{d^4\Phi}{dt^4}. \quad (1.2)$$

Перепишем задачу II для функции  $\Phi(t), t \in [0, 1]$ :

$$(-at^2 - bt + 1 - \tilde{c})(\Phi'' - \text{Bu}(k^2 + \pi^2 n^2)\Phi) + 2a\Phi = \frac{1}{ikR}(\Phi^{(IV)} - \text{BuPr}(k^2 + \pi^2 n^2)\Phi''), \quad (1.3)$$

$$\tilde{c}\Phi'(1) - (1 + a)\Phi(1) = \frac{-1}{ikR}\Phi'''(1), \quad \Phi''(1) = 0, \quad (1.4)$$

$$-(1 - \tilde{c})\Phi'(0) - b\Phi(0) = \frac{-1}{ikR}\Phi'''(0), \quad \Phi''(0) = 0. \quad (1.5)$$

Обе части уравнения (1.3) умножим на  $(-1)$  и возьмем комплексное сопряжение в полученном уравнении и в (1.4), (1.5) (сопряженное значение будем обозначать чертой над функциями и параметром:  $\overline{\Phi}, \overline{\tilde{c}}$ ). Учтем вещественность (за исключением СЗ) всех параметров исследуемых задач и аргумента  $t \in [0, 1]$ , а также  $\bar{i} = -i$  и запишем окончательно преобразованную задачу II:

$$(at^2 + bt - 1 + \overline{\tilde{c}})(\overline{\Phi''} - \text{Bu}(k^2 + \pi^2 n^2)\overline{\Phi}) - 2a\overline{\Phi} = \frac{1}{ikR}(\overline{\Phi^{(IV)}} - \text{BuPr}(k^2 + \pi^2 n^2)\overline{\Phi}'), \quad (1.6)$$

$$\overline{\tilde{c}}\overline{\Phi}'(1) - (1 + a)\overline{\Phi}(1) = \frac{1}{ikR}\overline{\Phi}'''(1), \quad \overline{\Phi}''(1) = 0, \quad (1.7)$$

$$-(1 - \overline{\tilde{c}})\overline{\Phi}'(0) - b\overline{\Phi}(0) = \frac{1}{ikR}\overline{\Phi}'''(0), \quad \overline{\Phi}''(0) = 0. \quad (1.8)$$

Сравнивая теперь задачу (0.2)–(0.4) с полученной задачей (1.6)–(1.8) при  $a = \alpha$  (а в силу (0.5), (0.9) и при  $b = \beta$ ), находим, что при условии

$$c = 1 - \overline{\tilde{c}} \quad (1.9)$$

решение  $F(z)$  совпадает с решением  $\overline{\Phi(t)}$  при  $z = t$ , что и доказывает утверждение (1.1) теоремы о симметрии СЗ задач I и II. При этом СФ  $F(z), z \in [0, 1]$  и  $\Phi(z), z \in [-1, 0]$  обладают следующей симметрией:

$$F(z) = \overline{\Phi(-z)}, \quad z \in [0, 1]. \quad (1.10)$$

Теорема доказана.

## 2. МЕТОД РАСЧЕТА СФ И СЗ ЗАДАЧИ I

Из анализа уравнения (0.2) задачи I следует, что собственные функции  $F(z)$  являются целыми функциями, поэтому расчет  $F(z)$  и соответствующих СЗ  $c$  основан на построении степенных разложений  $F(z)$  в граничных точках  $z = 0$  и  $z = 1$  и их гладкой сшивке в некоторой точке  $z_* \in (0, 1)$  (см. [5]–[7]).

Пусть спектральный параметр  $c$  зафиксирован. Тогда  $F(c; z)$  – решение уравнения (0.2) – представим в виде следующих разложений в точках  $z = 0$  и  $z = 1$ :

$$F(c; z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(c)(z-1)^m, \quad F(c; z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(c)z^m, \quad (2.1)$$

сходящихся при всех  $z, |z| < \infty$ . Подставляя представления (2.1) в уравнение (0.2), получаем соотношения для коэффициентов  $a_m$  и  $b_m$ :

$$a_{m+4} = \{(m+1)(m+2)[\text{PrBu}(\pi^2 n^2 + k^2) + (1-c)ikR]a_{m+2} + ikRm(m+1)a_{m+1} + ikR[\text{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)(c-1) - 2\alpha + \alpha m(m-1)]a_m - ikR\text{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)(1+\alpha)a_{m-1} - ikR\alpha\text{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)a_{m-2}\}(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)^{-1}, \quad (2.2)$$

$$b_{m+4} = \{(m+1)(m+2)[\text{PrBu}(\pi^2 n^2 + k^2) - ikRc]b_{m+2} + ikRm(m+1)\beta b_{m+1} + ikR[\text{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)c - 2\alpha + \alpha m(m-1)]b_m - ikR\text{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)\beta b_{m-1} - ikR\text{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)\alpha b_{m-2}\}(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)^{-1}. \quad (2.3)$$

Асимптотическое поведение коэффициентов  $a_m$  и  $b_m$  с ростом номера  $m$  может быть получено на основе теории Пуанкаре–Перрона анализа рекуррентных уравнений (см. [9]), что дает для коэффициентов  $a_m$  и  $b_m$  из (2.2) и (2.3) асимптотику

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} \sim \frac{p_a}{\sqrt{m}}, \quad \frac{b_{m+1}}{b_m} \sim \frac{p_b}{\sqrt{m}}, \quad m \rightarrow \infty, \quad p_a, p_b \neq 0,$$

которая обеспечивает быструю сходимость разложений (2.1) на отрезке  $z \in [0, 1]$ .

Краевые условия (0.3), (0.4) дают связь коэффициентов  $a_m$  и  $b_m$ ,  $m = 0, 1, 2, 3$ :

$$a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{ikR}{6}[(1-c)a_1 - (1+\alpha)a_0], \quad b_2 = 0, \quad b_3 = -\frac{ikR}{6}(cb_1 + \beta b_0). \quad (2.4)$$

Теперь построим функцию  $F_1(c; z)$  в виде первого разложения (2.1), задав коэффициенты  $a_0^{(1)}$  и  $a_1^{(1)}$  следующими:

$$a_0^{(1)} = 1, \quad a_1^{(1)} = 0,$$

коэффициенты  $a_2^{(1)}$  и  $a_3^{(1)}$  определив из (2.4), а все последующие  $a_m^{(1)}$  вычислив из соотношения (2.2), где дополнительно полагаем  $a_{-1}^{(1)} = a_{-2}^{(1)} = 0$ .

Аналогично этому строим вторую функцию  $F_2(c; z)$  в виде разложения в точке  $z = 1$ , но задав  $a_0^{(2)}$  и  $a_1^{(2)}$  следующими:

$$a_0^{(2)} = 0, \quad a_1^{(2)} = 1.$$

Тогда общее решение  $F(c; z)$  уравнения (0.2) с краевыми условиями (0.3) в точке  $z = 1$  есть линейная комбинация  $F_1(c; z)$  и  $F_2(c; z)$ :

$$F(c; z) = t_1 F_1(c; z) + t_2 F_2(c; z), \quad (2.5)$$

с произвольными весовыми коэффициентами  $t_1$  и  $t_2$ .

Теперь построим две функции  $F_3(c; z)$  и  $F_4(c; z)$  в виде вторых разложений (2.1), задав коэффициенты  $b_0^{(1)}$ ,  $b_1^{(1)}$  и  $b_0^{(2)}$ ,  $b_1^{(2)}$ :

$$b_0^{(1)} = 1, \quad b_1^{(1)} = 0, \quad b_0^{(2)} = 0, \quad b_1^{(2)} = 1,$$

положив  $b_2$  и  $b_3$  в соответствии с (2.4), а все последующие коэффициенты  $b_m$  для обоих разложений вычислив из соотношения (2.3) с учетом равенства  $b_{-1}^{(1)} = b_{-1}^{(2)} = 0$ .

Тогда общее решение  $F(c; z)$  уравнения (0.2) с краевыми условиями (0.4) в точке  $z = 0$  есть линейная комбинация  $F_3(c; z)$  и  $F_4(c; z)$ :

$$F(c; z) = t_3 F_3(c; z) + t_4 F_4(c; z), \quad (2.6)$$

с произвольными весовыми коэффициентами  $t_3$  и  $t_4$ .

Теперь задачу построения СФ и вычисления СЗ задачи I (0.2)–(0.5) сведем к сшивке в некоторой точке  $z_* \in (0, 1)$  комбинаций (2.5) и (2.6) и их первых трех производных:

$$t_1 F_1^{(p)}(c; z_*) + t_2 F_2^{(p)}(c; z_*) - t_3 F_3^{(p)}(c; z_*) - t_4 F_4^{(p)}(c; z_*) = 0, \quad p = 0, 1, 2, 3. \quad (2.7)$$

Нетривиальное решение системы (2.7) возможно только в случае равенства нулю вронскиана  $W(F_1, F_2, F_3, F_4)$ :

$$W(F_1, F_2, F_3, F_4; c; z_*) = 0. \quad (2.8)$$

Решая это уравнение, находим искомую комплексную скорость бегущей волны  $c$ , зависящую от параметров задачи (0.2)–(0.5), и весовые коэффициенты  $t_1, t_2, t_3, t_4$ .

Решение уравнения (2.8) будем строить с помощью итерационного метода Ньютона:

$$c^{(q+1)} = c^{(q)} - W(\dots; c^{(q)}; z_*) \left[ \frac{\partial W(\dots; c^{(q)}; z_*)}{\partial c} \right]^{-1}, \quad q = 0, 1, \dots, \quad (2.9)$$

а начальные приближения  $c^{(0)}$  будем брать на основе метода продолжения по параметру  $k$  и из представленных ниже асимптотических разложений при  $k \rightarrow 0$ .

Необходимая для метода Ньютона производная  $\partial W(\dots; c; z_*)/\partial c$  от вронскиана (2.8) системы (2.7) находилась с помощью явного дифференцирования по спектральному параметру  $c$  разложений для всех производных  $F_1^{(p)}(c; z_*)$ ,  $F_2^{(p)}(c; z_*)$ ,  $F_3^{(p)}(c; z_*)$ ,  $F_4^{(p)}(c; z_*)$  при  $p = 0, 1, 2, 3$ . Такое вычисление явной производной  $\partial W(\dots; c; z_*)/\partial c$  позволило избежать использования конечно-разностной производной

$$\frac{W(\dots; c + \Delta c; z_*) - W(\dots; c; z_*)}{\Delta c}$$

и связанной с ней потери точности при малых  $|\Delta c|$ .

### 3. АСИМПТОТИКА СФ И СЗ ЗАДАЧИ I ПРИ $k \rightarrow 0$

Построим при  $k \rightarrow 0$  асимптотическое разложение СФ и СЗ при ненулевых параметрах  $R$ ,  $Vu$ ,  $Pr$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Здесь необходимо отдельно рассмотреть два варианта: случай конечных (ограниченных) СЗ и случай неограниченных СЗ.

#### 3.1. Ограниченные СЗ

Исследуем сначала асимптотическое разложение при  $k \rightarrow 0$  для СФ и СЗ задачи I (0.2)–(0.5) при условии, что СЗ имеет конечный предел.

Введем следующую сдвигу аргумента  $z$  и СЗ  $c$ :

$$z = w + \frac{1}{2}, \quad c = \omega + \frac{1}{2}. \quad (3.1)$$

Тогда уравнение (0.2) для  $F(w)$  и краевые условия (0.3), (0.4) примут следующий вид на отрезке  $w \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ :

$$F^{(4)} - PrVu(\pi^2 n^2 + k^2)F'' = ikR \left\{ \left( \alpha w^2 + w - \frac{\alpha}{4} - \omega \right) [F'' - Vu(\pi^2 n^2 + k^2)F] - 2\alpha F \right\}, \quad (3.2)$$

$$F''' \left( -\frac{1}{2} \right) = ikR \left[ -\left( \frac{1}{2} + \omega \right) F' \left( -\frac{1}{2} \right) - (1 - \alpha) F \left( -\frac{1}{2} \right) \right], \quad F'' \left( -\frac{1}{2} \right) = 0, \quad (3.3)$$

$$F''' \left( \frac{1}{2} \right) = ikR \left[ \left( \frac{1}{2} - \omega \right) F' \left( \frac{1}{2} \right) - (1 + \alpha) F \left( \frac{1}{2} \right) \right], \quad F'' \left( \frac{1}{2} \right) = 0. \quad (3.4)$$

Используя методы асимптотического анализа (см. [10], [11]), представим решение задачи (3.2)–(3.4) и соответствующее СЗ  $\omega(k)$  в виде разложения по степеням малого параметра  $ikR$ :

$$F(k; w) = \varphi_0(w) + ikR\varphi_1(w) + (ikR)^2\varphi_2(w) + \dots, \quad (3.5)$$

$$\omega(k) = \omega_0 + ikR\omega_1 + (ikR)^2\omega_2 + \dots, \quad k \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

Подстановка (3.5), (3.6) в уравнение (3.2) и краевые условия (3.3), (3.4) приводит к цепочке краевых задач для  $\varphi_0(w)$ ,  $\varphi_1(w)$ , ... . Первая из них, для  $\varphi_0(w)$ , имеет вид

$$\varphi_0''''(w) - \text{Pr}\text{Bu}\pi^2 n^2 \varphi_0''(w) = 0, \quad (3.7)$$

$$\varphi_0'''\left(-\frac{1}{2}\right) = \varphi_0''\left(-\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \varphi_0'''\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi_0''\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \quad (3.8)$$

Решением (3.7), (3.8) является линейная функция

$$\varphi_0(w) = A_0 + B_0 w \quad \forall A_0, B_0. \quad (3.9)$$

Далее, для функции  $\varphi_1(w)$  и величины  $\omega_0$  имеем уравнение

$$\varphi_1''''(w) - \text{Pr}\text{Bu}\pi^2 n^2 \varphi_1''(w) = -\left[\left(\alpha w^2 + w - \frac{\alpha}{4} - \omega_0\right)\text{Bu}\pi^2 n^2 + 2\alpha\right]\varphi_0(w) \quad (3.10)$$

и краевые условия

$$\varphi_1'''\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2} + \omega_0\right)\varphi_0'\left(-\frac{1}{2}\right) - (1 - \alpha)\varphi_0\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \varphi_1''\left(-\frac{1}{2}\right) = 0, \quad (3.11)$$

$$\varphi_1'''\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \omega_0\right)\varphi_0'\left(\frac{1}{2}\right) - (1 + \alpha)\varphi_0\left(\frac{1}{2}\right), \quad \varphi_1''\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \quad (3.12)$$

Решение уравнения (3.10) ищем в виде суммы  $\varphi_1 = \varphi_h + \varphi_{nh}$ , где  $\varphi_h$  – общее решение однородного уравнения, а  $\varphi_{nh}$  – частное решение неоднородного уравнения. Учитывая вид (3.9) для  $\varphi_0$ , выводим следующее представление для функции  $\varphi_{nh}(w)$ :

$$\varphi_{nh}(w) = D_2 w^2 + D_3 w^3 + D_4 w^4 + D_5 w^5, \quad (3.13)$$

где

$$D_2 = \frac{A_0}{2\text{Pr}} \left[ \frac{2\alpha(\text{Pr} + 1)}{\text{Pr}\text{Bu}\pi^2 n^2} - \frac{\alpha}{4} - \omega_0 \right] + \frac{B_0}{\text{Pr}^2 \text{Bu}\pi^2 n^2}, \quad D_3 = \frac{A_0}{6\text{Pr}} + \frac{B_0}{6\text{Pr}} \left[ \frac{2\alpha(\text{Pr} + 3)}{\text{Pr}\text{Bu}\pi^2 n^2} - \frac{\alpha}{4} - \omega_0 \right],$$

$$D_4 = \frac{\alpha}{12\text{Pr}} A_0 + \frac{1}{12\text{Pr}} B_0, \quad D_5 = \frac{\alpha}{20\text{Pr}} B_0. \quad (3.14)$$

Решение  $\varphi_h(w)$  запишем в форме

$$\varphi_h(w) = A_1 \text{sh}\lambda w + B_1 \text{ch}\lambda w + D_0 + D_1 w, \quad \lambda = \pi n \sqrt{\text{Pr}\text{Bu}}, \quad (3.15)$$

с произвольными константами  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $D_0$  и  $D_1$ . Тогда, подставляя решение  $\varphi_1 = \varphi_h + \varphi_{nh}$  в краевые условия (3.11), (3.12), получаем систему для искомых коэффициентов  $A_1$  и  $B_1$ :

$$\lambda^2 B_1 \text{ch}\frac{\lambda}{2} + 2D_2 + 3D_4 = 0, \quad \lambda^2 A_1 \text{sh}\frac{\lambda}{2} + 3D_3 + \frac{5}{2}D_5 = 0,$$

$$\lambda^3 \left( A_1 \text{ch}\frac{\lambda}{2} - B_1 \text{sh}\frac{\lambda}{2} \right) + 6D_3 - 12D_4 + 15D_5 + (1 - \alpha)A_0 + \left( \omega_0 + \frac{\alpha}{2} \right) B_0 = 0,$$

$$\lambda^3 \left( A_1 \text{ch}\frac{\lambda}{2} + B_1 \text{sh}\frac{\lambda}{2} \right) + 6D_3 + 12D_4 + 15D_5 + (1 + \alpha)A_0 + \left( \omega_0 + \frac{\alpha}{2} \right) B_0 = 0.$$

Учитывая соотношения (3.14) и разрешая эту систему относительно  $A_1$  и  $B_1$ , получаем систему относительно коэффициентов  $A_0$  и  $B_0$  в представлении  $\varphi_0(z)$  из (3.9):

$$\left[ \left( \frac{2}{\lambda} + \frac{\lambda}{4} \right) \text{sh}\frac{\lambda}{2} - \text{ch}\frac{\lambda}{2} \right] B_0 + \left[ \frac{2\alpha(\text{Pr} + 1)}{\lambda} \text{sh}\frac{\lambda}{2} - \alpha(\text{Pr} + 1) \text{ch}\frac{\lambda}{2} - \omega_0 \lambda \text{sh}\frac{\lambda}{2} \right] A_0 = 0,$$

$$\left[ \frac{\alpha(\text{Pr} + 3)}{\lambda} \text{ch}\frac{\lambda}{2} - \frac{2\alpha(\text{Pr} + 3)}{\lambda^2} \text{sh}\frac{\lambda}{2} - \frac{\alpha}{2} (\text{Pr} + 1) \text{sh}\frac{\lambda}{2} - \omega_0 \left( \frac{\lambda}{2} \text{ch}\frac{\lambda}{2} + (\text{Pr} - 1) \text{sh}\frac{\lambda}{2} \right) \right] B_0 +$$

$$+\left[\frac{\lambda}{2}\operatorname{ch}\frac{\lambda}{2}-(\operatorname{Pr}+1)\operatorname{sh}\frac{\lambda}{2}\right]A_0=0. \quad (3.16)$$

Для нетривиальности решения системы (3.16) необходимо равенство нулю ее детерминанта, что приводит к квадратному уравнению для искомой величины  $\omega_0$ :

$$Q_2\omega_0^2 - Q_1\omega_0 + Q_0 = 0, \quad (3.17)$$

где

$$Q_2 = \lambda \operatorname{th} \frac{\lambda}{2} \left[ \frac{\lambda}{2} + (\operatorname{Pr} - 1) \frac{\lambda}{2} \right],$$

$$Q_1 = \alpha \operatorname{th} \frac{\lambda}{2} \left[ \operatorname{Pr} + 3 - \left[ \frac{\lambda}{2} (\operatorname{Pr} + 1) + \frac{2}{\lambda} (\operatorname{Pr} + 3) \right] \operatorname{th} \frac{\lambda}{2} \right] + \alpha \left[ \frac{\lambda}{2} + (\operatorname{Pr} - 1) \operatorname{th} \frac{\lambda}{2} \right] (\operatorname{Pr} + 1) \left( \frac{2}{\lambda} \operatorname{th} \frac{\lambda}{2} - 1 \right), \quad (3.18)$$

$$Q_0 = \alpha^2 (\operatorname{Pr} + 1) \left( \frac{2}{\lambda} \operatorname{th} \frac{\lambda}{2} - 1 \right) \left[ \frac{\operatorname{Pr} + 3}{\lambda} - \left[ \frac{\operatorname{Pr} + 1}{2} + \frac{2}{\lambda^2} (\operatorname{Pr} + 3) \right] \operatorname{th} \frac{\lambda}{2} \right] -$$

$$-\left[ \left( \frac{2}{\lambda} + \frac{\lambda}{4} \right) \operatorname{th} \frac{\lambda}{2} - 1 \right] \left[ \frac{\lambda}{2} - (\operatorname{Pr} + 1) \operatorname{th} \frac{\lambda}{2} \right].$$

Решая уравнение (3.17) и учитывая связь (3.1) между параметрами  $s$  и  $\omega$ , получаем главный член  $c_0$  в разложении двух СЗ при  $k \rightarrow 0$ :

$$c_{0,2} = \frac{1}{2} + \frac{Q_1 \pm \sqrt{Q_1^2 - 4Q_0Q_2}}{2Q_2}. \quad (3.19)$$

Коэффициенты  $Q_0, Q_1, Q_2$  в дисперсионном уравнении (3.17) вещественны, поэтому вещественность значений  $c_{0,2}$  в (3.19) зависит от знака дискриминанта  $D = Q_1^2 - 4Q_0Q_2$ . При  $D < 0$  два СЗ  $c_{0,2}$  комплексносопряженные, одно из них лежит в верхней полуплоскости  $\operatorname{Im}c_0 > 0$ , а значит, при малых волновых числах  $k$  в силу представления (3.1), (3.6) оно обеспечивает условие  $\operatorname{Im}c > 0$ , что приводит к неустойчивости исследуемого течения.

При  $D = Q_1^2 - 4Q_0Q_2 > 0$  оба значения  $c_{0,2}$ , как видно из (3.19), лежат на оси  $\operatorname{Im}c_0 = 0$ , а значит, при  $k \rightarrow +0$  это практически соответствует нейтральности возмущений с точностью до первого члена разложения (3.6).

Теперь рассмотрим случай достаточно широких течений, которым соответствуют значения параметра  $\operatorname{Bu} \ll 1$ ; при этом значения  $\operatorname{Pr} \sim 1$ . Тогда, учитывая определение  $\lambda$  в (3.15), заключаем, что при не слишком больших значениях  $n$  величина  $\lambda \ll 1$ . Разложим выражения  $Q_0, Q_1$  и  $Q_2$  из равенств (3.18) в ряд по малому параметру  $\lambda$ , что позволяет получить для  $c_{0,2}$  главный член:

$$c_{0,2} = \frac{1}{2} \pm \left[ \frac{\alpha(\operatorname{Pr} + 3)}{12} - \frac{\sqrt{\alpha^2(\operatorname{Pr} - 1)^2 - 12}}{12} \right] + O(\lambda^2). \quad (3.20)$$

Из (3.20) в частном случае  $\alpha = 0$  следует результат, ранее полученный в [6], что в исходной задаче ограниченные СЗ при  $k \rightarrow 0$  имеют следующую асимптотику при малых  $\lambda = \pi n \sqrt{\operatorname{Pr} \operatorname{Bu}}$ :

$$c_{0,2} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{6} + O(\lambda^2).$$

Отсюда получаем, что исследуемое течение с такими параметрами является неустойчивым.

### 3.2. Неограниченные СЗ

Построение асимптотического разложения при  $k \rightarrow 0$  для СФ и неограниченно растущих СЗ задачи (0.2)–(0.5) проводится так же, как это было сделано в [6].

Домножая обе части уравнения (0.2) и краевого условия (0.4) на величину  $ikR$ , вводя сдвигу  $z = \frac{1}{2} + w$ , обозначая  $\tilde{C} = ikR \left( c - \frac{1}{2} \right)$  и представляя функцию  $F(w)$  и значение  $\tilde{C}$  в виде ряда по степеням малого параметра  $ikR$ ,

$$F(w) = \varphi_0(w) + ikR\varphi_1(w) + \dots, \quad \tilde{C} = ikR \left( c - \frac{1}{2} \right) = \chi_0 + ikR\chi_1 + \dots, \quad (3.21)$$

получаем цепочку краевых задач для  $\varphi_0(w), \varphi_1(w), \dots$ . Первая из них для  $\varphi_0(w)$  и  $\chi_0$  имеет вид

$$\varphi_0''''(w) + (\chi_0 - \text{PrBu}\pi^2 n^2)\varphi_0''(w) - \chi_0 \text{Bu}\pi^2 n^2 \varphi_0(w) = 0, \quad (3.22)$$

$$\varphi_0'''\left(\frac{1}{2}\right) = -\chi_0 \varphi_0'\left(\frac{1}{2}\right), \quad \varphi_0''\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \varphi_0'''\left(-\frac{1}{2}\right) = -\chi_0 \varphi_0'\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \varphi_0''\left(-\frac{1}{2}\right) = 0. \quad (3.23)$$

Представляя решение уравнения (3.22) в виде

$$\varphi_0(w) = A \cos(\lambda w) + B \sin(\lambda w), \quad (3.24)$$

получаем для  $\lambda$  характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - (\chi_0 - \text{PrBu}\pi^2 n^2)\lambda^2 - \chi_0 \text{Bu}\pi^2 n^2 = 0. \quad (3.25)$$

Некратные корни  $\lambda_1^2$  и  $\lambda_2^2$  ( $\lambda_1^2 \neq \lambda_2^2$ ) этого уравнения возникают при условии неравенства нулю его дискриминанта, т.е.

$$(\chi_0 - \text{PrBu}\pi^2 n^2)^2 + 4\chi_0 \text{Bu}\pi^2 n^2 \neq 0; \quad (3.26)$$

в дальнейшем рассмотрении ограничимся только этим условием.

Решение уравнения (3.25) запишем относительно величин  $q_1 = \lambda_1^2$  и  $q_2 = \lambda_2^2$ :

$$q_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ \chi_0 - \text{PrBu}\pi^2 n^2 \pm \sqrt{(\chi_0 - \text{PrBu}\pi^2 n^2)^2 + 4\chi_0 \text{Bu}\pi^2 n^2} \right]. \quad (3.27)$$

Дальнейший анализ задачи (3.22), (3.23) аналогичен решению задачи для  $\mu = 0$  в [6], поэтому приведем здесь окончательные результаты для асимптотики СЗ и СФ.

**3.2.1. Решения  $\varphi_0(w)$  вида  $\cos(\lambda w)$ .** Представляя решение  $\varphi_0(w)$  уравнения (3.22) в виде

$$\varphi_0(w) = A_1 \cos(\sqrt{q_1}w) + A_2 \cos(\sqrt{q_2}w), \quad (3.28)$$

получаем для  $\chi_0$  трансцендентное уравнение

$$\sqrt{q_2}(q_1 - \chi_0) \sin \frac{\sqrt{q_1}}{2} \cos \frac{\sqrt{q_2}}{2} = \sqrt{q_1}(q_2 - \chi_0) \sin \frac{\sqrt{q_2}}{2} \cos \frac{\sqrt{q_1}}{2}, \quad (3.29)$$

где  $q_1$  и  $q_2$  определены в (3.27). Решая (3.29) численно и проверяя условие некрatности корней (3.26), получаем счетное множество искомым коэффициентов  $\chi_0$  в представлении (3.21).

В частных случаях уравнение (3.29) имеет явные решения. Например, при  $\text{Pr} = 1$  получаем условие  $\cos \frac{\sqrt{\chi_0}}{2} = 0$ , решение которого есть

$$\chi_{0,m} = \pi^2 (1 + 2m)^2, \quad m = 0, 1, 2, \dots. \quad (3.30)$$

Тогда счетное множество СЗ исходной задачи, неограниченно растущих при  $k \rightarrow 0$  и  $\text{Pr} = 1$ , имеют асимптотику

$$c_m = -i \frac{\pi^2}{kR} (1 + 2m)^2 + \frac{1}{2} + O(1), \quad k \rightarrow 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots. \quad (3.31)$$

**3.2.2. Решения  $\varphi_0(w)$  вида  $\sin(\lambda w)$ .** Представляя решение  $\varphi_0(w)$  уравнения (3.22) в виде

$$\varphi_0(w) = B_1 \sin(\sqrt{q_1}w) + B_2 \sin(\sqrt{q_2}w), \quad (3.32)$$

получаем для  $\chi_0$  трансцендентное уравнение

$$\sqrt{q_2}(q_1 - \chi_0) \cos \frac{\sqrt{q_1}}{2} \sin \frac{\sqrt{q_2}}{2} = \sqrt{q_1}(q_2 - \chi_0) \cos \frac{\sqrt{q_2}}{2} \sin \frac{\sqrt{q_1}}{2}, \quad (3.33)$$

где  $q_1$  и  $q_2$  определены в (3.27). Решая (3.33) численно и проверяя условие некратности корней (3.26), получаем счетное множество искоемых коэффициентов  $\chi_0$  в представлении (3.21).

В частных случаях уравнение (3.33) имеет явные решения. Например, при  $\text{Pr} = 1$ , аналогично п. 3.2.1, для  $\chi_0$  получаем уравнение  $\sin \frac{\sqrt{\chi_0}}{2} = 0$ . Множество его решений  $\chi_{0,m}$  имеет вид

$$\chi_{0,m} = \pi^2 4m^2, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.34)$$

Таким образом, в исходной задаче для решений вида (3.32) возникает счетное множество СЗ, неограниченно растущих при  $k \rightarrow 0$ ; при  $\text{Pr} = 1$  первые члены их асимптотики имеют вид

$$c_m = -i \frac{\pi^2}{kR} 4m^2 + \frac{1}{2} + O(1), \quad k \rightarrow 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.35)$$

Объединяя вместе результаты (3.31) и (3.35), получаем, что в задаче при  $\text{Pr} = 1$  первые члены асимптотики множества неограниченно растущих СЗ имеют вид

$$c_m = -i \frac{\pi^2}{kR} m^2 + \frac{1}{2} + O(1), \quad m = 1, 2, \dots, \quad k \rightarrow 0. \quad (3.36)$$

#### 4. ТЕСТИРОВАНИЕ АЛГОРИТМА

Для проверки результатов расчета СЗ и СФ исходной задачи (0.2)–(0.5) были проведены многочисленные расчеты в широком диапазоне физических параметров  $\text{Pr}$ ,  $\text{Vi}$ ,  $R$  и  $n$ , параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и волновых чисел  $k$ . При этом варьировалась длина обрываемых разложений (2.1) и их производных по  $z$  и по  $c$ , значительно увеличивалась мантисса в используемой арифметике, изменялась точка сшивки  $z_* \in (0,1)$  разложений в системе (2.7). Итерационный метод Ньютона (2.9) строился так, что начальное приближение  $c^{(0)}$  при малых  $k$  бралось из асимптотических разложений, построенных в разд. 3, а при увеличении  $k$  использовался метод продолжения по параметру. Дополнительным инструментом проверки наличия СЗ в некоторой области  $\mathcal{D}$  на комплексной плоскости “ $c$ ” служил обобщенный принцип аргумента (см. [12]) для аналитической в области  $\mathcal{D}$  функции  $W(c)$ ,

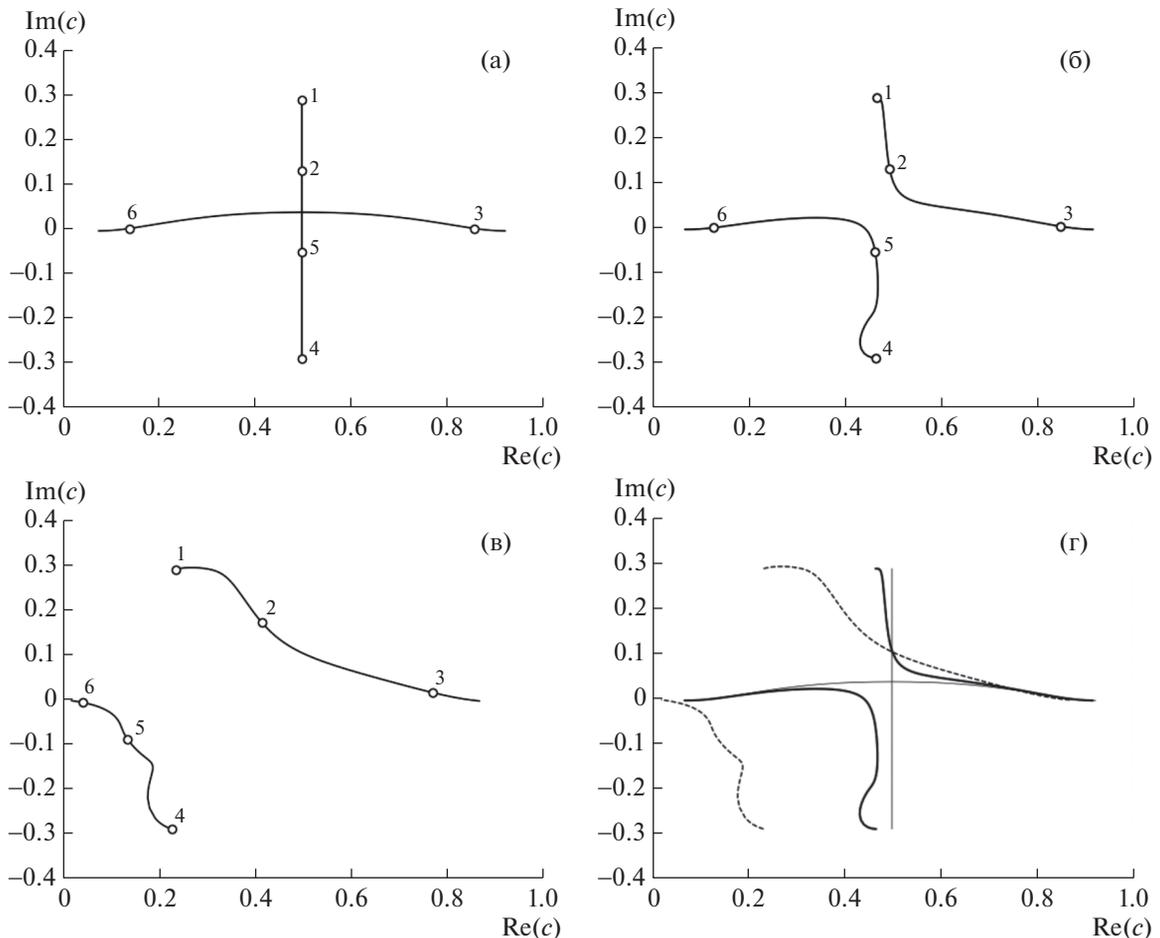
$$K = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathcal{D}} \frac{W'(\dots; c; z_*)}{W(\dots; c; z_*)} dc, \quad \sum_{p=1}^K c_p = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathcal{D}} c \frac{W'(\dots; c; z_*)}{W(\dots; c; z_*)} dc, \quad (4.1)$$

где  $W(\dots; c; z_*)$  – вронкиан (2.8) четырех независимых решений, вычисляемых в точке сшивки  $z_*$ ,  $K$  – число комплексных нулей функции  $W(\dots; c; z_*)$  внутри области  $\mathcal{D}$ ,  $\sum_{p=1}^K c_p$  – сумма координат этих нулей. В качестве области  $\mathcal{D}$  выбирался круг в комплексной плоскости спектрального параметра  $c$ , а интегрирование по границе  $\partial \mathcal{D}$  проводилось с помощью квадратур Гаусса.

Для случая  $\alpha = 0$  результаты расчета СЗ полностью совпали с СЗ, найденными в [6]. Отметим, что в этом случае возникают двойные СЗ с вещественной частью  $\text{Re}(c) = 1/2$  при определенных волновых числах  $k_*$ , которые также совпали с двойными СЗ в [6]. Такое поведение исследуемых СЗ имеет много схожего с траекториями СЗ в задаче Орра–Зоммерфельда для течения Куэтта (см. [13], [14]).

В окрестности этих значений  $k_*$  метод Ньютона (2.9) начинал сходиться очень медленно, что связано со стремлением к нулю не только вронкиана  $W(c)$  (см. (2.8)), но и его производной  $W'(c)$  в точке ветвления  $c_m(k_*)$ . Исключение этой неопределенности типа  $0/0$  приводит к необходимости использования модификации метода Ньютона с включением второй производной:

$$c^{(q+1)} = c^{(q)} - T \pm \sqrt{T^2 - \frac{2W(c^{(q)})}{W''(c^{(q)})}}, \quad T = \frac{W'(c^{(q)})}{W''(c^{(q)})}, \quad q = 0, 1, \dots, \quad (4.2)$$



**Фиг. 1.** Траектории первых двух СЗ задачи I при  $\alpha = 0$  (а), при  $\alpha = 0.1$  (б), при  $\alpha = 0.8$  (в) для параметров  $R = 1$ ,  $Pr = 1$ ,  $Vu = 0.0001$ ,  $n = 1$  и  $k \in (0, 2000]$ . Точки “1” и “4” соответствуют СЗ при  $k = 1$ , точки “2” и “5” – СЗ при  $k = 220$ , точки “3” и “6” – СЗ при  $k = 1000$ ; (г) – для наглядности показаны эти траектории при  $\alpha = 0$  (тонкая сплошная линия), при  $\alpha = 0.1$  (толстая сплошная линия), при  $\alpha = 0.8$  (штриховая линия).

причем знаки  $\pm$  выбираются так, чтобы обеспечить непрерывность обеих ветвей двух функций  $c_m(k)$  и  $c_{m+1}(k)$ . Второй порядок ветвления функций  $c_m(k)$  и  $c_{m+1}(k)$  в окрестности точек  $k_*$  обеспечивает численную устойчивость итерационного процесса (4.2) и его быструю сходимость.

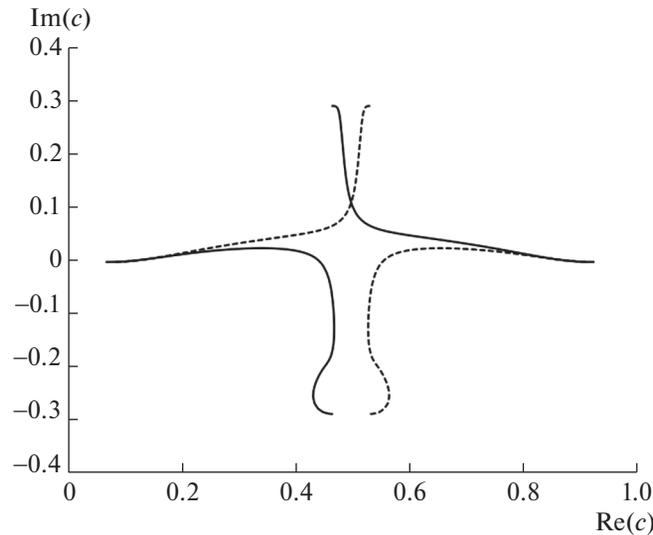
Совокупность описанных методов позволила гарантированно вычислять СЗ и СФ, а также двойные СЗ  $c_m(k_*)$  с относительной точностью не менее 20–40 верных десятичных значащих цифр.

## 5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

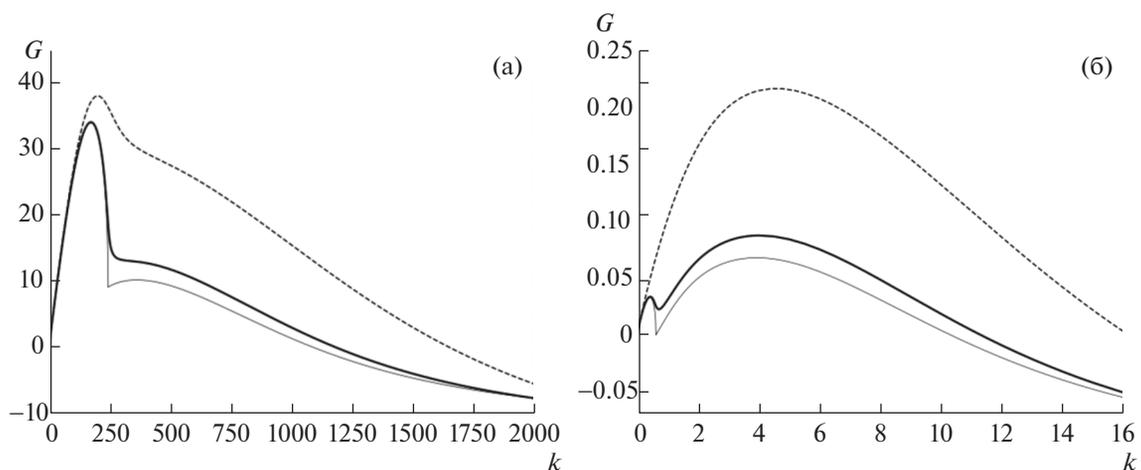
Приведем результаты расчетов спектра задач I и II для различных параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $Pr$ ,  $Vu$ ,  $R$ ,  $n$  и волновых чисел  $k$ .

На фиг. 1 в плоскости комплексного  $s$  приведены траектории первых двух СЗ  $c_1(k)$  и  $c_2(k)$  задачи (0.2)–(0.5) при возрастании числа  $k \in (0, 2000]$  для различных значений  $\alpha$ .

Согласно траекториям, представленным на фиг. 1, кривизна профиля скорости течения, возникающая из-за учета вертикального линейного сдвига скорости ( $\alpha \neq 0$ ), существенно влияет на фазовые скорости как устойчивых, так и неустойчивых возмущений. При постоянном сдвиге течения (фиг. 1а), т.е. при  $\alpha = 0$ , фазовые скорости возмущений имеют постоянную фазовую скорость в широком диапазоне волновых чисел  $k$  (вплоть до  $k \sim 1000$ ), в то время как с учетом ли-



**Фиг. 2.** Траектории первых двух СЗ при  $\alpha = 0.1$  задачи I (сплошные линии) и при  $a = 0.1$  задачи II (штриховые линии) для параметров  $R = 1$ ,  $Pr = 1$ ,  $Bu = 0.0001$ ,  $n = 1$ ,  $k \in (0, 2000]$ .



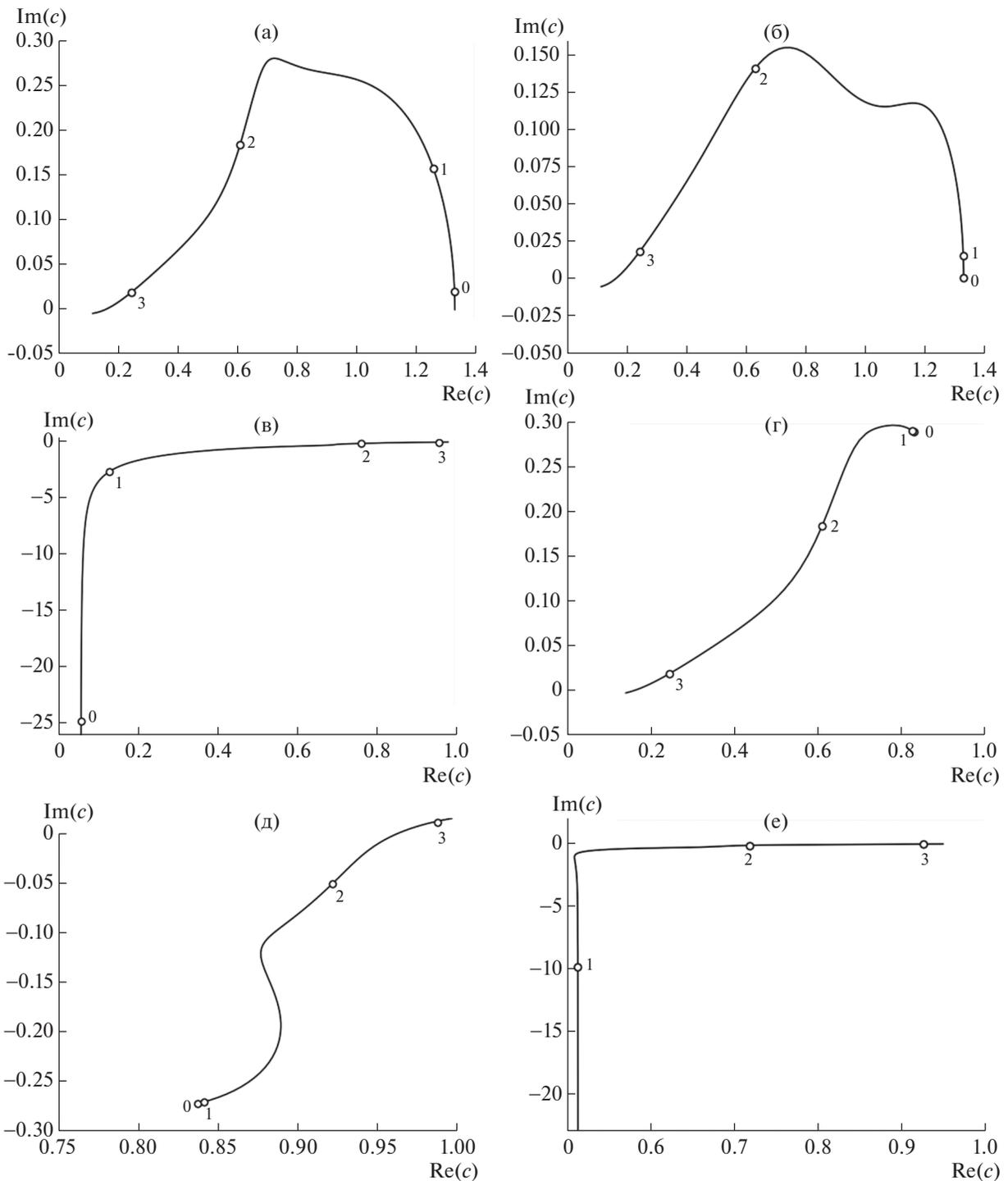
**Фиг. 3.** Зависимость  $G(k)$  при  $\alpha = 0$  (тонкая сплошная линия), при  $\alpha = 0.1$  (толстая сплошная линия), при  $\alpha = 0.8$  (штриховая линия). Фиг. 3а соответствует параметрам  $R = 1$ ,  $Pr = 1$ ,  $Bu = 0.0001$ ,  $n = 1$ ; фиг. 3б – параметрам  $R = 100$ ,  $Pr = 1$ ,  $Bu = 1$ ,  $n = 1$ .

нейного сдвига фазовые скорости возмущений зависят от волнового числа во всем рассмотренном диапазоне  $k \in (0, 2500]$  (фиг. 16, 1в).

На фиг. 2 приведены траектории первых двух СЗ  $c_1(k)$  и  $c_2(k)$  задачи I при  $\alpha = 0.1$  (показаны сплошными линиями) и траектории первых двух СЗ задачи II при  $a = 0.1$  (показаны штриховыми линиями). Представленные траектории иллюстрируют доказанное в разд. 1 свойство симметрии СЗ задач I и II.

На фиг. 3 для задачи I показаны зависимости от волнового числа  $k$  величины  $G(k) = k\text{Im}(c)$ . При  $\text{Im}(c) > 0$  значение  $G$  есть инкремент роста (или скорость роста) неустойчивых возмущений, обратная величина к которому равняется времени увеличения начальной амплитуды возмущения в  $e$  раз.

На фиг. 3а даны зависимости  $G(k)$  для широких течений при различных  $\alpha$ , а на фиг. 3б – для узких течений. Как видно из представленных результатов, для широких течений величина  $G(k)$



**Фиг. 4.** Траектории СЗ  $c_1$  (а),  $c_2$  (б) и  $c_3$  (в) задачи, рассмотренной в [4], [5] для  $R = 1$ ,  $Pr = 1$ ,  $Bu = 0.0001$ ,  $n = 1$ ,  $\alpha = 1$  при  $k \in (0, 2000]$ . Траектории СЗ  $c_1$  (г),  $c_2$  (д) и  $c_3$  (е) задачи II при тех же параметрах. Точки “0” соответствуют СЗ при  $k = 0.1$ , точки “1” – СЗ при  $k = 1$ , точки “2” – СЗ при  $k = 220$ , точки “3” – СЗ при  $k = 1000$ .

достигает максимума при  $k \approx 230$ , а для узких течений – при  $k \approx 4.4$ . Эти результаты показывают, что с увеличением величины  $\alpha$  скорость роста всех неустойчивых возмущений возрастает. Доказательство того, что узкие течения (при  $Bu \geq 1$ ) с постоянным вертикальным сдвигом скорости могут быть неустойчивыми, впервые было получено в [6], [8]. Рассмотренные здесь задачи анализа неустойчивости течения с более сложным вертикальным профилем скорости подтверждают этот результат.

Учитывая, что в океане максимальная скорость течения может наблюдаться не только на верхней границе слоя, например, на поверхности океана, но и внутри слоя, в частности, в “пикноклине”, целесообразно сравнить результаты расчета нашей задачи при  $\alpha = 1$  с результатами исследования неустойчивости течения с профилем скорости течения вида  $U(z) = 1 - z^2$  в области  $z \in [-1, 1]$ , представленными в [4], [5].

На фиг. 4а–4в показаны траектории первых трех СЗ  $c_1, c_2, c_3$  задачи, рассмотренной в [4], [5]. СЗ  $c_1(k)$  и  $c_3(k)$  соответствуют четным СФ, а  $c_2(k)$  – нечетной СФ этой задачи.

На фиг. 4г–4е показаны траектории первых трех  $c_1, c_2, c_3$  задачи II с параметрами, соответствующими фиг. 4а–4в.

Важным отличием представленных траекторий является то, что длинноволновые возмущения течения, имеющего максимум скорости в центральной части слоя, могут иметь фазовую скорость, превышающую максимальную скорость потока.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках уравнения потенциального вихря проводится исследование устойчивых и неустойчивых возмущений геострофического течения с параболическим вертикальным профилем скорости с учетом вертикальной диффузии плавучести, трения и для различных значений волнового числа  $k$  и номера моды  $n$ . Анализ проводится с помощью метода малых возмущений.

Для возникающих двух спектральных задач I и II на отрезках  $[-1, 0]$  и  $[0, 1]$  доказано свойство симметричности СЗ относительно прямой  $\text{Re}(c) = 1/2$ .

Искомые СФ и СЗ задач I и II строятся с помощью степенных разложений для линейно-независимых решений и их гладкой сшивки.

Найдены асимптотики СФ и СЗ при малых значениях волнового числа  $k$  в зависимости от физических параметров  $R, Rg, Bu, n \in \mathbb{N}$ . Показано, что при  $k \rightarrow +0$  в задаче существуют два ограниченных СЗ и счетное множество неограниченно растущих СЗ с предельной точкой  $c = -i\infty$ .

Численный анализ, в частности, показал, что в случае параметра  $\alpha = 0$  при определенных значениях волнового числа  $k$  образуются двойные СЗ, лежащие на прямой  $\text{Re}(c) = 1/2$ .

Представленные результаты дают возможность судить о важных эффектах динамики геострофических течений применительно к океану: 1) увеличение вертикального линейного сдвига в течениях с вертикальным параболическим профилем скорости (т.е. увеличение параметра  $\alpha$ ) может существенно влиять на фазовые скорости устойчивых и неустойчивых возмущений; 2) с учетом вертикальной диффузии массы и импульса течения с поперечным масштабом, меньшим радиуса Россби, могут быть неустойчивыми и в случае параболического вертикального профиля скорости.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузьмина Н.П. Об одной гипотезе образования крупномасштабных интрузий в Арктическом бассейне // *Фундамент. и прикл. гидрофизика*. 2016. Т. 9. № 2. С. 15–26.
2. Kuzmina N.P. Generation of large-scale intrusions at baroclinic fronts: An analytical consideration with a reference to the Arctic ocean // *Ocean Sci*. 2016. V. 12. P. 1269–1277. <https://doi.org/10.5194/os-12-1269-2016>
3. Кузьмина Н.П., Скороходов С.Л., Журбас Н.В., Лыжков Д.А. О неустойчивости геострофического течения с линейным вертикальным сдвигом скорости на масштабах интрузионного расслоения // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2018. Т. 54. № 1. С. 54–63.
4. Кузьмина Н.П., Скороходов С.Л., Журбас Н.В., Лыжков Д.А. Описание возмущений океанских геострофических течений с линейным вертикальным сдвигом скорости с учетом трения и диффузии плавучести // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2019. Т. 55. № 2. С. 73–85.
5. Скороходов С.Л., Кузьмина Н.П. Аналитико-численный метод решения задачи типа Орра–Зоммерфельда для анализа неустойчивости течений в океане // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2018. Т. 58. № 6. С. 1022–1039.
6. Скороходов С.Л., Кузьмина Н.П. Спектральный анализ модельных течений типа Куэтта применительно к океану // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2019. Т. 59. № 5. С. 867–888.
7. Скороходов С.Л., Кузьмина Н.П. Эффективный метод решения модифицированной задачи Орра–Зоммерфельда для анализа неустойчивости течений в Арктическом бассейне // *Таврический вестн. информат. и матем.* 2016. № 3 (32). С. 88–97.

8. Кузьмина Н.П., Скороходов С.Л., Журбас Н.В., Лыжков Д.А. О влиянии трения и диффузии плавучести на динамику геострофических океанских течений с линейным вертикальным профилем скорости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2020. Т. 56. № 6. С. 676–688.
9. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.
10. Найфэ А. Методы возмущений. М.: Наука, 1976. 474 с.
11. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
12. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
13. Скороходов С.Л. Численный анализ спектра задачи Орра–Зоммерфельда // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 10. С. 1672–1691.
14. Скороходов С.Л. Точки ветвления собственных значений оператора Орра–Зоммерфельда // Докл. РАН. 2007. Т. 416. № 5. С. 600–605.

## УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.9

### ВОПРОС СУЩЕСТВОВАНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГОГО БЕСКОНЕЧНОГО СТЕРЖНЯ В ПОЛЕ С СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ<sup>1)</sup>

© 2021 г. Л. А. Бекларян<sup>1,\*\*</sup>, А. Л. Бекларян<sup>2,\*\*</sup><sup>1</sup> 117418 Москва, Нахимовский пр-т, 47, ЦЭМИ РАН, Россия<sup>2</sup> 101000 Москва, Мясницкая ул., 20, НИУ Высшая школа экономики, Россия

\*e-mail: lbeklaryan@outlook.com

\*\*e-mail: abeklaryan@hse.ru

Поступила в редакцию 22.12.2020 г.  
Переработанный вариант 07.04.2021 г.  
Принята к публикации 04.08.2021 г.

Установлено существование семейства ограниченных солитонных решений для конечно разностного волнового уравнения с квадратичным потенциалом. Доказательство проводится в рамках формализма, устанавливающего взаимно однозначное соответствие между солитонными решениями бесконечномерной динамической системы и решениями семейства функционально-дифференциальных уравнений точечного типа. Для рассматриваемого класса уравнений ключевым является также и наличие ряда симметрий. Библ. 18. Фиг. 3.

**Ключевые слова:** волновое уравнение, солитонные решения, нелинейный потенциал.

**DOI:** 10.31857/S0044466921120061

#### ВВЕДЕНИЕ

Для уравнений математической физики, являющихся уравнениями Эйлера–Лагранжа соответствующих вариационных задач, важный класс решений – это решения типа бегущей волны (солитонные решения) (см. [1], [2]). В ряде моделей такие решения хорошо приближаются решениями типа бегущей волны для конечно-разностных аналогов исходных уравнений, которые, взамен непрерывной среды, описывают взаимодействие ступок среды, помещенных в вершинах решетки (см. [1], [3]). Возникающие системы относятся к классу бесконечномерных динамических систем. К наиболее широко рассматриваемым классам подобных задач относятся бесконечномерные системы с потенциалами Френкеля–Конторовой (периодические и медленно растущие потенциалы) и Ферми–Паста–Улама (потенциалы экспоненциального роста), широкий обзор которых приведен в [4].

В теории пластической деформации изучается бесконечномерная динамическая система

$$m\ddot{y}_i = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + \phi(y_i), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad y_i \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где потенциал  $\phi(\cdot)$  задается гладкой периодической функцией. Уравнение (1) является системой с потенциалом Френкеля–Конторовой (см. [3]). Такая система является конечно-разностным аналогом нелинейного волнового уравнения, моделирует поведение счетного числа шаров массы  $m$ , помещенных в целочисленных точках числовой прямой, где каждая пара соседних шаров соединена между собой упругой пружиной, и описывает распространение продольных волн в бесконечном однородном абсолютно упругом стержне.

**Определение 1.**  $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$  называется решением системы (1), если для любого  $i \in \mathbb{Z}$  функция  $y_i(\cdot)$  непрерывно дифференцируема, а ее производная является абсолютно непрерывной функцией, и такая функция почти всюду удовлетворяет уравнению (1).

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00147).

Изучение таких систем с различными потенциалами является одним из интенсивно развивающихся направлений в теории динамических систем. Для них центральной задачей является изучение солитонных решений (решений типа бегущей волны) как одного из наблюдаемых классов волн.

**Определение 2.** Будем говорить, что решение  $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$  системы (1), определенное для всех  $t \in \mathbb{R}$ , имеет тип бегущей волны (является солитонным решением), если существует  $\tau > 0$ , не зависящая от  $t$  и  $i$  такая, что при всех  $i \in \mathbb{Z}$  и  $t \in \mathbb{R}$  выполнено равенство

$$y_i(t + \tau) = y_{i+1}(t).$$

Константу  $\tau$  будем называть *характеристикой* бегущей волны.

Таким образом, для рассматриваемого конечно-разностного аналога волнового уравнения изучение солитонных решений сводится к исследованию пространства решений краевой задачи

$$m\ddot{y}_i(t) = y_{i-1}(t) - 2y_i(t) + y_{i+1}(t) + \phi(y_i(t)), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad y_i \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

$$y_i(t + \tau) = y_{i+1}(t), \quad \tau > 0, \quad (3)$$

с линейными нелокальными краевыми условиями.

Фазовым пространством системы уравнений (2) является пространство бесконечных последовательностей

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}^2 = \overline{\prod_{q \in \mathbb{Z}} \mathbb{R}_q^2}, \quad \mathbb{R}_q^n = \mathbb{R}^2, \quad \kappa \in \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}^2, \quad \kappa = \{\mathbf{x}_i\}_{i \in \mathbb{Z}}, \quad \mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2})' \quad (4)$$

со стандартной тихоновской топологией. В пространстве  $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}^2$  определим семейство гильбертовых подпространств  $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}2\mu}^2$ ,  $\mu \in (0, 1)$ :

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}2\mu}^2 = \left\{ \kappa : \kappa \in \mathcal{H}_{\mathbb{Z}}^2; \sum_{i \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{x}_i\|_{\mathbb{R}^2}^2 \mu^{2|i|} < +\infty \right\}$$

с нормой

$$\|\kappa\|_{\mathbb{Z}2\mu} = \left[ \sum_{i \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{x}_i\|_{\mathbb{R}^2}^2 \mu^{2|i|} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Определим линейный оператор  $\mathbb{A}$ , оператор сдвига  $\mathbb{T}$  и нелинейный оператор  $\mathbb{F}$ , действующие непрерывно из пространства  $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}^2$  в себя по следующему правилу: для любых  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $\kappa \in \mathcal{H}^2$

$$(\mathbb{A}\kappa)_i = (x_{i2}, m^{-1}[x_{(i+1)1} - 2x_{i1} + x_{(i-1)1}])', \quad (\mathbb{T}\kappa)_i = (\kappa)_{i+1}, \quad (\mathbb{F}(\kappa))_i = (0, m^{-1}\phi(x_{i1}))'.$$

Заметим, что оператор сдвига  $\mathbb{T}$  *перестановочен* с операторами  $\mathbb{A}$  и  $\mathbb{F}$ , что свойственно моделям, описывающим процессы в однородных средах.

Система (2)–(3), задающая солитонные решения, может быть переписана в следующей операторной форме:

$$\dot{\kappa} = \mathbb{A} + \mathbb{F}(\kappa), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

$$\kappa(t + \tau) = \mathbb{T}\kappa(t), \quad (6)$$

являющейся краевой задачей с линейными нелокальными краевыми условиями. Краевые условия (6) означают, что *сдвиг решения по времени равен сдвигу по пространству*.

Одним из методов исследования таких систем является конструктивное построение решений, использующее явный вид потенциала и, далее, методами теории возмущений установление факта существования солитонных решений и для близких потенциалов. Другим, часто применяемым способом, является использование наличия симметрий у исходных уравнений. Важным является не только вопрос существования солитонных решений, но и вопрос их единственности. Для этого одним из подходов служит локализация решений в пространстве бесконечно дифференцируемых или аналитических функций. Как правило, в пространстве бесконечно дифференцируемых функций удается показать существование решения, а в пространстве аналитических функций показать их единственность (см. [4]).

В настоящей работе используются возможности иного подхода и созданного на его основе формализма (см. [5]–[8]). Используется локализация солитонных решений заданием их асимптотики как по пространству (параметризованное семейство бесконечномерных фазовых пространств в форме гильбертовых пространств  $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}2\mu}^2, \mu \in (0, 1)$ ), так и по времени. Такой подход основан на существовании взаимно однозначного соответствия солитонных решений для бесконечномерных динамических систем с решениями семейства индуцированных функционально-дифференциальных уравнений точечного типа (см. [5]–[12]).

В случае рассматриваемой задачи солитонные решения (решения системы (2)–(3)) находятся во взаимно однозначном соответствии с решениями однопараметрического семейства индуцированных функционально-дифференциальных уравнений точечного типа

$$\dot{z}_1(t) = z_2(t), \quad (z_1, z_2)' \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

$$\dot{z}_2(t) = m^{-1}[z_1(t - \tau) - 2z_1(t) + z_1(t + \tau) + \Phi(z_1(t))], \tag{8}$$

где параметром семейства является  $\tau \in \mathbb{R}_+$ .

Связь между этими решениями имеет следующий вид:

$$z_1(t) = y_0(t), \quad z_2(t) = \dot{y}_0(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Для изучения вопросов существования и единственности солитонных решений предлагается локализация решений индуцированных функционально-дифференциальных уравнений точечного типа в пространствах функций, мажорируемых функциями заданного экспоненциального роста с показателем экспоненты в качестве параметра:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mu^n C^{(k)}(\mathbb{R}) &= \left\{ z(\cdot) : z(\cdot) \in C^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \max_{0 \leq r \leq k} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|z^{(r)}(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty \right\}, \\ \|z(\cdot)\|_\mu^{(k)} &= \max_{0 \leq r \leq k} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|z^{(r)}(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \mu \in (0, +\infty). \end{aligned} \tag{10}$$

Такой подход оказывается особенно успешным для систем с потенциалами Френкеля–Конторовой. При минимальных ограничениях на потенциал  $\phi(\cdot)$  в виде наличия условия Липшица (квазилинейные потенциалы) отмеченная задача была исследована в монографии [8]. Соответствующую константу Липшица для потенциала  $\phi(\cdot)$  будем обозначать через  $L_\phi$ .

Рассмотрим трансцендентное уравнение относительно двух переменных  $\tau \in (0, +\infty)$  и  $\mu \in (0, 1)$

$$C_\phi \tau (2\mu^{-1} + 1) = \ln \mu^{-1}, \tag{11}$$

где

$$C_\phi = \max\{1; 2m^{-1}\sqrt{L_\phi^2 + 2}\}.$$

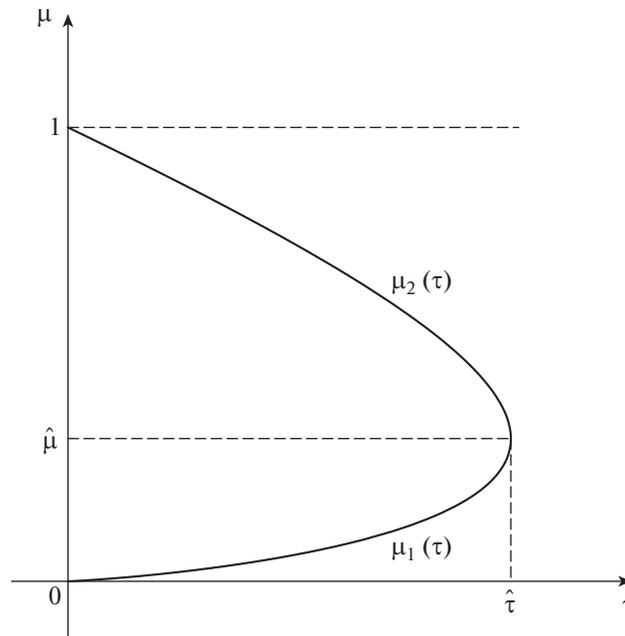
Из уравнения (11) определяется неотрицательная функция  $\tau(\mu), \mu \in [0, 1]$ , со свойством  $\tau(0) = \tau(1) = 0$  и с единственной точкой экстремума (максимума)  $\hat{\mu} \in (0, 1)$ . Функция  $\tau(\mu)$  на полуинтервале  $[0, \hat{\mu})$  – монотонно возрастающая, а на полуинтервале  $(\hat{\mu}, 1]$  – монотонно убывающая. Введем обозначение  $\hat{\tau} = \tau(\hat{\mu})$ . Для величины  $\hat{\tau}$  имеет место некоторая абсолютная оценка  $\hat{\tau} \leq (2C_\phi)^{-1}$  и, в частности,  $\hat{\tau} \leq 1/2$ . На интервале  $[0, \hat{\tau})$  зависимость  $\mu$  от  $\tau$  задается двумя ветвями функций  $\mu_1(\tau), \mu_2(\tau)$ , представленными на фиг. 1.

Сформулируем теорему существования и единственности решения для индуцированного функционально-дифференциального уравнения (7)–(8).

**Теорема 1** (см. [8]). Пусть потенциал  $\Phi$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $L_\phi$ . Тогда при любых начальных данных  $a, b \in \mathbb{R}, \bar{t} \in \mathbb{R}$  и характеристиках  $\tau > 0$ , удовлетворяющих условию

$$0 < \tau < \hat{\tau},$$

в пространстве  $\mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R}), \mu^\tau \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$  для системы функционально-дифференциальных уравнений (7)–(8) существует и причем единственное решение  $(z_1(t), z_2(t))', t \in \mathbb{R}$ , такое, что оно удовлетворяет начальным условиям  $z_1(\bar{t}) = a, z_2(\bar{t}) = b$ . Такое решение, как элемент пространства  $\mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$ , непрерывно зависит от начальных данных  $a, b \in \mathbb{R}$ , а также массы  $m$ , характеристики  $\tau$  и потенциала  $\Phi(\cdot)$ .



Фиг. 1. Графики функций  $\mu_1(\tau)$ ,  $\mu_2(\tau)$ .

Теорема 1 не только гарантирует существование решения, но и задает ограничение его возможного роста по времени  $t$ . Очевидно, что при каждом  $0 < \tau < \hat{\tau}$  пространства  $\mathcal{L}^2_{(\mu_2(\tau)-\varepsilon)}C^{(0)}(\mathbb{R})$  при малых  $\varepsilon > 0$  намного уже, чем пространства  $\mathcal{L}^2_{(\mu_1(\tau)+\varepsilon)}C^{(0)}(\mathbb{R})$ . Теорема гарантирует существование решения в более узких пространствах и единственность в более широких пространствах.

Теорема 1 допускает переформулировку в терминах решений типа бегущей волны (солитонных решений) для исходного волнового уравнения (в терминах системы (2)–(3)).

**Теорема 2** (см. [8]). Пусть потенциал  $\Phi$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $L_\Phi$ . Тогда при любых начальных данных  $\bar{t} \in \mathbb{Z}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{t} \in \mathbb{R}$  и характеристиках  $\tau > 0$ , удовлетворяющих условию

$$0 < \tau < \hat{\tau},$$

для исходной системы дифференциальных уравнений (2) существует единственное решение  $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$  типа бегущей волны (солитонное решение) с характеристикой  $\tau$  такое, что оно удовлетворяет начальным условиям  $y_{\bar{t}} = a$ ,  $\dot{y}_{\bar{t}} = b$ ; для любого параметра  $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$  значения вектор-функции

$$\omega(t) = \{(y_i(t), \dot{y}_i(t))\}_{-\infty}^{+\infty}$$

при любом  $t \in \mathbb{R}$  принадлежат пространству  $\mathcal{H}^2_{\mathbb{Z}2\mu}$ , а функция

$$\rho(t) = \|\omega(t)\|_{2\mu}$$

принадлежит пространству  $\mathcal{L}^1_\mu C^{(0)}(\mathbb{R})$ . Такое решение непрерывно зависит от начальных данных  $a, b \in \mathbb{R}$ , а также массы  $m$ , характеристики  $\tau$  и потенциала  $\Phi(\cdot)$ .

Описание процессов в неоднородных средах и с квазилинейным потенциалом сталкивается с трудностями качественно нового типа. Условие коммутативности правой части системы в операторной форме и оператора сдвига нарушается, вследствие чего пространство солитонных решений оказывается тривиальным. Вместе с тем в рамках развиваемого формализма удастся получить “правильное” расширение понятия бегущей волны (солитонного решения) в виде решений типа квазибегущих волн (см. [13], [14]).

Предметом изучения настоящей работы являются ограниченные солитонные решения.

**Определение 3.** Будем говорить, что солитонное решение  $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$  системы (1) является ограниченным, если  $y_0(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , ограниченная функция.

Для рассматриваемой системы с нелинейным потенциалом суть предлагаемого подхода в том, что по исходной системе с нелинейным потенциалом  $\Phi$  для каждого  $\Delta > 0$  определяется вспомогательная система с периодическим потенциалом  $\Phi_\Delta$  периода  $2\Delta$  и свойством  $\Phi_\Delta|_{[-\Delta, \Delta]} = \Phi|_{[-\Delta, \Delta]}$ . Потенциал для такой вспомогательной системы уже является квазилинейным, и к такой системе применимы утверждения теорем 1 и 2, а также ряд утверждений, являющихся следствием наличия симметрий. Если такая вспомогательная система имеет ограниченные солитонные решения и их фазовый портрет полностью расположен в интервале  $[-\Delta, \Delta]$ , то такие решения будут ограниченными солитонными решениями также и для исходной системы. Реализации такого подхода и посвящена данная работа. Раздел 1 посвящен выводу следствий из существующих симметрий для рассматриваемой системы, на основании которых в разд. 2 доказывается основной результат о существовании ограниченных солитонных решений для конечно-разностного аналога волнового уравнения.

### 1. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ С КВАДРАТИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Будем изучать солитонные решения (решения системы (2)–(3)) с квадратичным потенциалом  $\Phi(\xi) = \alpha\xi^2 + \beta$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta < 0$ :

$$m\ddot{y}_i(t) = y_{i-1}(t) - 2y_i(t) + y_{i+1}(t) + \alpha(y_i(t))^2 + \beta, \quad y_i \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

$$y_i(t + \tau) = y_{i+1}(t), \quad \tau > 0. \quad (13)$$

В рамках такой задачи выявляется ряд универсальных свойств, присущих для систем с нелинейным потенциалом общего вида.

Соответствующее индуцированное функционально-дифференциальное уравнение точечного типа имеет вид

$$\dot{z}_1(t) = z_2(t), \quad (z_1, z_2)' \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (14)$$

$$\dot{z}_2(t) = m^{-1}[z_1(t - \tau) - 2z_1(t) + z_1(t + \tau) + \alpha z_1^2(t) + \beta]. \quad (15)$$

Справедливо соответствие: ограниченному солитонному решению (решению системы (12)–(13)) соответствует решение индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (14)–(15) с ограниченной первой координатой  $z_1(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , и наоборот.

**Замечание 1.** Точки  $\left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, 0\right)'$ ,  $\left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, 0\right)'$  являются единственными неподвижными точками для индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (14)–(15) с квадратичным потенциалом.

Для изучения иных решений индуцированного функционально-дифференциального уравнения с условием ограниченности по первой координате построим семейство вспомогательных функционально-дифференциальных уравнений точечного типа.

Для любого  $\Delta > 0$  определим периодический потенциал  $\Phi_\Delta$  с периодом  $2\Delta$  и свойством  $\Phi_\Delta|_{[-\Delta, \Delta]} = \Phi|_{[-\Delta, \Delta]}$ . Константа Липшица для такой периодической функции  $\Phi_\Delta$  равна  $L_{\Phi_\Delta} = 2\alpha\Delta$  и является монотонно возрастающей по параметру  $\Delta > 0$ . Рассмотрим вспомогательное функционально-дифференциальное уравнение точечного типа

$$\dot{z}_1(t) = z_2(t), \quad (z_1, z_2)' \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (16)$$

$$\dot{z}_2(t) = m^{-1}[z_1(t - \tau) - 2z_1(t) + z_1(t + \tau) + \Phi_\Delta(z_1(t))]. \quad (17)$$

По аналогии с уравнением (11) рассмотрим трансцендентное уравнение относительно двух переменных  $\tau \in (0, +\infty)$  и  $\mu \in (0, 1)$

$$C_{\Phi_\Delta} \tau (2\mu^{-1} + 1) = \ln \mu^{-1}, \quad (18)$$

где

$$C_{\Phi_\Delta} = \max\{1; 2m^{-1}\sqrt{L_{\Phi_\Delta}^2 + 2}\}$$

и  $C_{\Phi_\Delta}$  является монотонно возрастающей по параметру  $\Delta > 0$ .

Решение уравнения (18) описывается функциями  $\mu_{\Delta 1}(\tau)$ ,  $\mu_{\Delta 2}(\tau)$ . Качественное поведение функций  $\mu_{\Delta 1}(\tau)$ ,  $\mu_{\Delta 2}(\tau)$  такое же, как поведение функций  $\mu_1(\tau)$ ,  $\mu_2(\tau)$  на фиг. 1, а величина  $\hat{\tau}$  заменяется соответствующей величиной  $\hat{\tau}_\Delta$ , которая является монотонно убывающей по параметру  $\Delta > 0$ .

Для вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16)–(17) также верна теорема 1, в которой следует потенциал  $\Phi$  заменить на  $\Phi_\Delta$ , функции  $\mu_1(\tau)$ ,  $\mu_2(\tau)$  заменить на функции  $\mu_{\Delta 1}(\tau)$ ,  $\mu_{\Delta 2}(\tau)$ , а величину  $\hat{\tau}$  на  $\hat{\tau}_\Delta$ . Всякое решение  $(z_1(t), z_2(t))'$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , вспомогательного функционально-дифференциального уравнения (16)–(17) со свойством ограниченности по первой координате  $|z_1(t)| \leq \Delta$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , является решением индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (14)–(15) с квадратичным потенциалом и тем же условием ограниченности по первой координате. Таким образом, в силу сформулированного выше правила согласования, нам достаточно установить существование решений вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16)–(17), удовлетворяющих свойству ограниченности по первой координате  $|z_1(t)| \leq \Delta$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Замечание 2.** При параметре  $\Delta$ ,  $\Delta \geq \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}$  точки

$$\left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta, 0\right)', \quad \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta, 0\right)', \quad k \in \mathbb{Z},$$

являются единственными стационарными решениями для вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16)–(17).

В [15] для функционально-дифференциального уравнения точечного типа с квазилинейной правой частью получена теорема существования ограниченного решения. В ней представлены условия нового типа, использующие средние по некоторому периоду для правых частей функционально-дифференциального уравнения точечного типа. Такие условия являются новыми и для обыкновенных дифференциальных уравнений. На их основе получен результат о существовании ограниченного солитонного решения для систем с квазилинейным потенциалом, а также осуществлена численная реализация таких солитонных решений (см. [16], [17]). В рамках такого подхода в [18] получена теорема существования ограниченного решения для функционально-дифференциального уравнения точечного типа и с сильно нелинейной правой частью.

Вместе с тем условия из работы [18] оказываются неприменимыми при изучении ряда систем и, в частности, для рассматриваемого конечно-разностного аналога волнового уравнения с нелинейным потенциалом. Причина в том, что у таких систем и индуцированных ими функционально-дифференциальных уравнений точечного типа имеется ряд симметрий, которые препятствуют выполнению нужных условий из отмеченной работы. В свою очередь, наличие симметрий, поведение векторного поля для определенного выше вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16)–(17), а также наличие теоремы 1 позволяют установить существование решений, удовлетворяющих свойству ограниченности по первой координате  $|z_1(t)| \leq \Delta$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , как для вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа, так и для исходного индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (14)–(15). Опишем такие симметрии.

**Лемма 1.** Решения  $(z_1(t), z_2(t))'$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16)–(17) инвариантны относительно сдвига по времени.

**Доказательство.** Это свойство инвариантности является следствием автономности рассматриваемой системы дифференциальных уравнений.

**Лемма 2.** Если  $(z_1(t), z_2(t))'$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , является решением вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16)–(17), то  $(z_1(t) + 2k\Delta, z_2(t))'$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , при каждом фиксированном  $k \in \mathbb{Z}$  также являются решениями.

**Доказательство.** Это свойство инвариантности является следствием периодичности потенциала  $\Phi_\Delta$  с периодом  $2\Delta$  и может быть получено непосредственной проверкой.

**Лемма 3.** Если  $(z_1(t), z_2(t))'$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , является решением вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16)–(17), то  $(\hat{z}_1(t), \hat{z}_2(t))'$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , где  $\hat{z}_1(t) = z_1(-t)$ ,  $\hat{z}_2(t) = -z_2(-t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , также является решением.

**Доказательство.** Это свойство инвариантности может быть получено непосредственной проверкой.

**Лемма 4.** Пусть  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$ ,  $\mu^\tau \in (\mu_{\Delta 1}(\tau), \mu_{\Delta 2}(\tau))$ , а  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  – решение вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16)–(17), для которого существует точка  $\hat{t}$  со свойством  $z_2(\hat{t}) = 0$ . Тогда фазовый портрет такого решения симметричен относительно горизонтальной оси  $z_2 = 0$ . Более того, для такого решения каждая пара отмеченных симметричных точек задается в терминах самого решения следующим образом:  $(z_1(\hat{t} + t), z_2(\hat{t} + t))'$ ,  $(z_1(-\hat{t} - t), -z_2(-\hat{t} - t))'$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Доказательство.** Пусть решение  $(z_1(t), z_2(t))'$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , удовлетворяет всем условиям из леммы, т.е. найдется такое  $\hat{t}$ , что  $z_2(\hat{t}) = 0$ . Так как решения инвариантны относительно сдвига по времени (лемма 1), то, не нарушая общности, можем положить  $\hat{t} = 0$ . По лемме 3  $(\hat{z}_1(t), \hat{z}_2(t))'$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , где  $\hat{z}_1(t) = z_1(-t)$ ,  $\hat{z}_2(t) = -z_2(-t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , также является решением. Заметим, что при этом  $\hat{z}_1(0) = z_1(0)$ ,  $\hat{z}_2(0) = -z_2(0) = 0$ . Тогда по теореме существования и единственности решения в пространстве функций  $\mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  следует, что решения  $(z_1(t), z_2(t))'$ ,  $(\hat{z}_1(t), \hat{z}_2(t))'$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , совпадают. Тогда для любого  $t \in \mathbb{R}$  из условия  $z_1(t) = \hat{z}_1(t)$ ,  $z_2(t) = \hat{z}_2(t)$  следует, что  $z_1(t) = z_1(-t)$ ,  $z_2(t) = -z_2(-t)$ . Полученные условия доказывают лемму, и фазовый портрет такого решения будет симметричен относительно горизонтальной оси  $z_2 = 0$ .

**Лемма 5.** Пусть  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$ ,  $\mu^\tau \in (\mu_{\Delta 1}(\tau), \mu_{\Delta 2}(\tau))$ , а  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  – решение вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16)–(17) такое, что  $z_2(0) = 0$ . Такое решение является периодическим, но не стационарным, тогда и только тогда, когда найдется  $\hat{t} \neq 0$ , для которого  $z_2(\hat{t}) = 0$ . Минимальное значение таких  $\hat{t}$  равно полупериоду решения.

**Доказательство.** Если решение является периодическим, то значение периода обозначим через  $2\hat{t}$ . По лемме 4 справедливы условия  $z_2(t) = -z_2(-t)$ ,  $t \in [0, \hat{t}]$ . Так как  $\hat{t}$  равно значению минимального полупериода, то для всех  $t \in [0, \hat{t}]$  должны выполняться условия  $z_2(t) = -z_2(-t) \neq 0$ . Тогда из непрерывности решения и условия симметрии решения относительно оси  $z_2 = 0$  следует, что  $z_2(\hat{t}) = 0$ .

Доказательство проведем в обратную сторону. Пусть найдется точка  $\hat{t}$ , для которой выполняется условие  $z_2(\hat{t}) = 0$ . В силу условия симметрии  $z_2(t) = -z_2(-t)$ ,  $t \in [0, \hat{t}]$ , из теоремы 4 следует, что имеет место условие  $z_2(\hat{t}) = -z_2(-\hat{t})$ . С другой стороны, имеет место и другое условие симметрии  $z_1(\hat{t}) = z_1(-\hat{t})$ , что ведет к выполнению равенства  $(z_1(\hat{t}), z_2(\hat{t})) = (z_1(-\hat{t}), z_2(-\hat{t}))$ . Следовательно, такое решение является периодическим, а минимальное значение таких  $\hat{t}$  равно полупериоду решения.

**Лемма 6.** Пусть  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$ ,  $\mu^\tau \in (\mu_{\Delta 1}(\tau), \mu_{\Delta 2}(\tau))$ , а  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  – решение вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16)–(17) такое, что  $z_2(0) = 0$ . Тогда справедливо одно из условий:

(а) либо решение периодическое с полупериодом  $\hat{t}$ , для которого выполняется одно из условий:  $z_1(\hat{t}) \leq z_1(t) \leq z_1(0)$  при  $t \in [0, \hat{t}]$  или  $z_1(0) \leq z_1(t) \leq z_1(\hat{t})$  при  $t \in [0, \hat{t}]$ ;

(б) либо решение не периодическое и выполняется одно из условий:  $z_1(t) \leq z_1(0)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , при  $t \in (-\infty, 0)$  функция  $z_1(\cdot)$  монотонно возрастающая, при  $t \in (0, \infty)$  функция  $z_1(\cdot)$  монотонно убывающая;  $z_1(0) \leq z_1(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , при  $t \in (-\infty, 0)$  функция  $z_1(\cdot)$  монотонно убывающая, при  $t \in (0, \infty)$  функция  $z_1(\cdot)$  монотонно возрастающая.

**Доказательство.** В силу первого уравнения (16), для рассматриваемого решения при прохождении замкнутой верхней полуплоскости  $z_2 \geq 0$  фазового пространства имеется монотонно воз-

растающее поведение координаты  $z_1(t)$ . С другой стороны, при прохождении замкнутой нижней полуплоскости  $z_2 \leq 0$  фазового пространства имеется монотонно убывающее поведение координаты  $z_1(t)$ . В силу леммы 4 (наличие симметрии для такого решения) и леммы 5, решение имеет следующее поведение. Первый случай: решение является периодическим. При положительных моментах времени полупериода ( $t \in [0, \hat{t}]$ ) решение находится в замкнутой нижней полуплоскости  $z_2 \leq 0$  и выполняется первое двойное неравенство. Если при  $t \in [0, \hat{t}]$  решение находится в замкнутой верхней полуплоскости  $z_2 \geq 0$ , то выполняется второе двойное неравенство. Второй случай: а) при отрицательных моментах времени ( $t < 0$ ) решение находится в замкнутой верхней полуплоскости  $z_2 \geq 0$ , а при положительных моментах времени ( $t > 0$ ) решение находится в замкнутой нижней полуплоскости  $z_2 \leq 0$ ; б) с точностью до наоборот. Так как в условиях а) в замкнутой верхней полуплоскости имеет место ограничение  $z_2 \geq 0$ , то, в силу первого уравнения (16), оно будет монотонно возрастающим и будет выполняться соотношение  $z_1(t) \leq z_1(0)$  при  $t > 0$ . Точно так же в замкнутой нижней полуплоскости имеет место ограничение  $z_2 \leq 0$ . Поэтому, в силу первого уравнения (16), оно будет монотонно убывающим и будет выполняться ограничение  $z_1(t) \leq z_1(0)$  при  $t < 0$ . Следовательно, в условиях а) первая координата решения удовлетворяет ограничению  $z_1(t) \leq z_1(0)$  при  $t \in \mathbb{R}$ . Точно так же в условиях б) можно показать, что первая координата решения удовлетворяет ограничению  $z_1(t) \geq z_1(0)$  при  $t \in \mathbb{R}$  и соответствующим условиям монотонности.

**Предложение 1.** Пусть заданы  $\Delta \geq \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}$  и  $\tau \in (0, \tau_\Delta)$ ,  $\mu^\tau \in (\mu_{\Delta 1}(\tau), \mu_{\Delta 2}(\tau))$ . Тогда не существует периодического не стационарного решения  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16)–(17) с начальным условием  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$ .

**Доказательство.** Заметим, что любые два периодических решения либо не имеют точек пересечения для внутренних областей, которые они выделяют, либо эти области вложены одна в другую. Для любого стационарного решения не существует последовательности периодических (но не стационарных) решений  $(z_1^r(\cdot), z_2^r(\cdot))'$ ,  $r = 1, 2, \dots$ , с начальными условиями  $(z_1^r(0), z_2^r(0))' = (a^r, 0)'$ , которые сгущаются к стационарному решению. Это следует из теоремы существования и единственности решения, а также непрерывной зависимости от начальных условий.

Пусть существует периодическое (но не стационарное) решение  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))'$  с начальными условиями  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$ . Тогда найдется не периодическое решение  $(\hat{z}_1(\cdot), \hat{z}_2(\cdot))'$  с начальными условиями  $(\hat{z}_1(0), \hat{z}_2(0))' = (\hat{a}, 0)'$ . Более того, найдутся последовательности периодических решений  $(z_1^r(\cdot), z_2^r(\cdot))'$ ,  $r = 1, 2, \dots$ , с начальными условиями  $(z_1^r(0), z_2^r(0))' = (a^r, 0)'$  и последовательность не периодических решений  $(z_1^l(\cdot), z_2^l(\cdot))'$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , с начальными условиями  $(z_1^l(0), z_2^l(0))' = (a^l, 0)'$  такие, что последовательности начальных данных сгущаются к одному и тому же начальному данному  $(a, 0)'$ . Такое свойство противоречит теореме существования и единственности решения, а также непрерывной зависимости от начальных условий. Предложение доказано.

**Лемма 7.** Пусть  $\Delta \geq \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}$ ,  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$ ,  $\mu^\tau \in (\mu_{\Delta 1}(\tau), \mu_{\Delta 2}(\tau))$ ,  $a$   $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  – решение вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16)–(17) с начальным условием  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$ . Тогда

1) при любом  $a \in \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , выполняется условие  $\dot{z}_2(0) < 0$ ; для  $t \in (-\infty, 0)$  выполнены оценки  $z_2(t) > 0$ ,  $z_1(t) < a$ , и первая координата  $z_1(t)$  монотонно возрастает; для  $t \in (0, \infty)$  выполнены оценки  $z_2(t) < 0$ ,  $z_1(t) < a$  и первая координата  $z_1(t)$  монотонно убывает;

2) при любом  $a \in \left( \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2(k-1)\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta \right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , выполняется условие  $\dot{z}_2(0) > 0$ ; для  $t \in (-\infty, 0)$  выполнены оценки  $z_2(t) < 0$ ,  $z_1(t) > a$ , и первая координата  $z_1(t)$  монотонно убывает; для  $t \in (0, \infty)$  выполнены оценки  $z_2(t) > 0$ ,  $z_1(t) > a$ , и первая координата  $z_1(t)$  монотонно убывает.

**Доказательство.** По лемме 2 решения инвариантны относительно сдвига на  $2\Delta$  по первой координате  $z_1$ . Поэтому нам достаточно рассмотреть решения с начальными значениями  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$ ,  $a \in \left( \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} \right) \cup \left( -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} \right)$ . В силу уравнения (17) и леммы 4, для рассматриваемого решения выполнено соотношение

$$\begin{aligned} \dot{z}_2(0) &= m^{-1}[z_1(-\tau) - 2z_1(0) + z_1(\tau) + \Phi_\Delta(z_1(0))] = m^{-1}[z_1(-\tau) - 2a + z_1(\tau) + \Phi_\Delta(a)] = \\ &= m^{-1}[2z_1(\tau) - 2a + \Phi_\Delta(a)]. \end{aligned} \quad (19)$$

В силу непрерывной зависимости решения системы (16)–(17) от начальных данных и характеристики  $\tau$  (теорема 1), для любого сколь угодно малого  $\delta > 0$  решения на интервале  $[0, 2\tau]$  будут равномерно ограниченными для всех

$$a \in \left[ \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta + \delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - \delta \right] \cup \left[ -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + \delta, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - \delta \right], \quad \tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta). \quad (20)$$

Из системы (16)–(17) следует, что

$$\dot{z}_1(t) = m^{-1}[z_1(t - \tau) - 2z_1(t) + z_1(t + \tau) + \Phi_\Delta(z_1(t))] \quad (21)$$

и, учитывая равномерную ограниченность  $z_1(t)$ ,  $t \in [0, 2\tau]$ , получаем соотношение  $|z_1(\tau) - a| = o(\tau^2)$ . Подставив полученное соотношение в равенство (19), получим представление  $\dot{z}_2(0) = m^{-1}[o(\tau^2) + \Phi_\Delta(a)]$ .

Пусть  $a \in \left[ -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + \delta, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - \delta \right]$ . При таких  $a$  значение потенциала  $\Phi_\Delta(a)$  отрицательное. Поэтому при достаточно малых характеристиках  $\tau$  выполняется неравенство  $\dot{z}_2(0) < 0$ . Из последнего неравенства и начального условия  $z_2(0) = 0$  следует, что при малых  $t > 0$  выполняется условие  $z_2(t) < 0$ , а при малых  $t < 0$  – условие  $z_2(t) > 0$ . По предложению 1 не существует периодического решения, отличного от стационарного. Тогда, в силу симметрии из леммы 4, будут выполняться более сильные соотношения  $z_2(t) < 0$  при  $t > 0$ ,  $z_2(t) > 0$  при  $t < 0$ , а в силу уравнения (16), будут выполняться также и соотношения:  $z_1(t) < a$  при  $t > 0$  и монотонно убывает,  $z_1(t) < a$  при  $t < 0$  и монотонно возрастает.

Если условие  $\dot{z}_2(0) < 0$  будет выполняться при всех характеристиках  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$ , то, в силу произвольности малой величины  $\delta > 0$ , пункт 1) леммы доказан. Покажем, что это так. Пусть найдется  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$ , при котором для решения выполняется условие  $\dot{z}_2(0) = 0$ , а  $\tau$  – нижняя грань таких значений. Очевидно, что  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$ . Из равенства (19) и отрицательности значения потенциала будет следовать условие  $z_1(\tau) > a$ . В силу симметрии из леммы 4, а также отсутствия не стационарных периодических решений (предложение 1), будут выполняться более сильные соотношения:  $z_1(t) > a$  при  $t > 0$  и монотонно возрастает,  $z_1(t) > a$  при  $t < 0$  и монотонно убывает. Это противоречит непрерывной зависимости решения системы (16)–(17) от начальных данных и характеристики  $\tau$  (теорема 1), которая нарушается при значении характеристики, равной  $\tau$ .

Точно так же доказывается пункт 2).

В действительности мы можем получить более сильную оценку для производной  $\dot{z}_2(0)$ .

**Следствие 1.** Пусть  $\Delta \geq \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}$ ,  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$ ,  $\mu^\tau \in (\mu_{\Delta,1}(\tau), \mu_{\Delta,2}(\tau))$ ,  $a (z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  – решение вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16)–(17) с начальным условием  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$ . Тогда

1) при любом  $a \in \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , выполняется условие  $\dot{z}_2(0) < \Phi_\Delta(a)$ ;

2) при любом  $a \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2(k-1)\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , выполняется условие  $\dot{z}_2(0) > \Phi_\Delta(a)$ .

**Доказательство.** Докажем п. 1). Для рассматриваемых  $a$  по предложению 2 имеет место оценка  $z_1(0) < a$ . Тогда из соотношения (19) и отрицательности потенциала  $\Phi_\Delta(a)$  будет следовать оценка  $\dot{z}_2(0) < \Phi_\Delta(a)$ .

Докажем п. 2). Для рассматриваемых  $a$  по предложению 2 имеет место оценка  $z_1(0) > a$ . Тогда из соотношения (19) и положительности потенциала  $\Phi_\Delta(a)$  будет следовать оценка  $\dot{z}_2(0) > \Phi_\Delta(a)$ .

Теперь мы можем описать качественное поведение решений  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа с начальными данными  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

**Предложение 2.** Пусть заданы  $\Delta \geq \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}$  и  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$ ,  $\mu^\tau \in (\mu_{\Delta,1}(\tau), \mu_{\Delta,2}(\tau))$ ,  $a (z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  – решение вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16)–(17) с начальными условиями  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$ . Тогда

1) при любом  $a \in \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , решение по первой координате  $z_1$  не покидает интервал  $\left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta\right)$ , и выполняются соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} z_1(t) = -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} z_2(t) = 0.$$

Граница области фазовых кривых таких решений состоит из двух сепаратрис  $(\bar{z}_1(\cdot), \bar{z}_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$ ,  $(\underline{z}_1(\cdot), \underline{z}_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  со свойствами

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (\bar{z}_1(t), \bar{z}_2(t))' = \left(\pm\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta, 0\right)', \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (\underline{z}_1(t), \underline{z}_2(t))' = \left(\mp\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta, 0\right)'.$$

2) при любом  $a \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2(k-1)\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , решение по первой координате  $z_1$  не покидает интервал  $\left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2(k-1)\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta\right)$ , и выполняются соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} z_1(t) = -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} z_2(t) = 0.$$

Граница области фазовых кривых таких решений состоит из двух сепаратрис  $(\bar{z}_1(\cdot), \bar{z}_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$ ,  $(\underline{z}_1(\cdot), \underline{z}_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{Z})$  и выполняются условия

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (\bar{z}_1(t), \bar{z}_2(t))' = \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2(k-1)\Delta, 0\right)', \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} (\bar{z}_1(t), \bar{z}_2(t))' = \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta, 0\right)',$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (\underline{z}_1(t), \underline{z}_2(t))' = \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta, 0\right)', \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} (\underline{z}_1(t), \underline{z}_2(t))' = \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2(k-1)\Delta, 0\right)'.$$

**Доказательство.** По лемме 2 решения инвариантны относительно сдвига на  $2\Delta$  по первой координате  $z_1$ . Поэтому нам достаточно рассмотреть решения с начальными значениями  $(z_1(0), z_2(0)) = (a, 0)$ ,  $a \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$ . Так как точка  $-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}$  является стационарной точкой для рассматриваемой системы, то нам достаточно рассмотреть начальные значения  $(a, 0)$ , где  $a \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right) \cup \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$ .

Сформулируем ряд утверждений относительно качественного поведения решений.

(i) Пусть решение с начальными условиями  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$ ,  $a \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$  (либо  $a \in \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$ ), по первой координате  $z_1$  не покидают интервала, которому принадлежит  $a$ . Тогда для такого решения справедливы утверждения доказываемого предложения.

Доказательство утверждения (i). Рассматриваемое решение будет удовлетворять всем условиям монотонности из леммы 6. Тогда предел для первой координаты  $z_1(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , будет существовать. Если для такого решения вторая координата  $z_2(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , окажется ограниченной, то утверждения о конечности предела по первой координате и предельных переходах будет следовать из теоремы существования и единственности решения для рассматриваемого функционально-дифференциального уравнения точечного типа и теоремы о продолжении решения до не продолжаемого, основанной на ней.

Покажем ограниченность координаты  $z_2(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Мы уже отмечали, что функция  $z_1(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , монотонна на полупрямых  $t \in (-\infty, 0)$ ,  $t \in (0, +\infty)$  и, соответственно, конечные пределы  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} z_1(t) = A$  существуют. При больших  $|t| > N$  величина  $|z_1(t - \tau) - 2z_1(t) + z_1(t + \tau)|$  будет сколь угодно малой. Если  $A \neq -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}$ , то потенциал  $\Phi_\Delta(z_1(t))$  не равен нулю и, в силу системы (16)–(17), условие  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} z_1(t) = A$  нарушается. Следовательно,  $A = -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}$ . В таком случае при больших  $|t| > N$  правая часть уравнения (17) будет сколь угодно малой. Следовательно, в силу уравнения (16), при  $|t| > N$  значения  $z_2(t)$  будут не только ограниченными, но будут удовлетворять также и условию  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} z_2(t) = 0$ .

Наличие сепаратрис с отмеченными свойствами является следствием теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных данных.

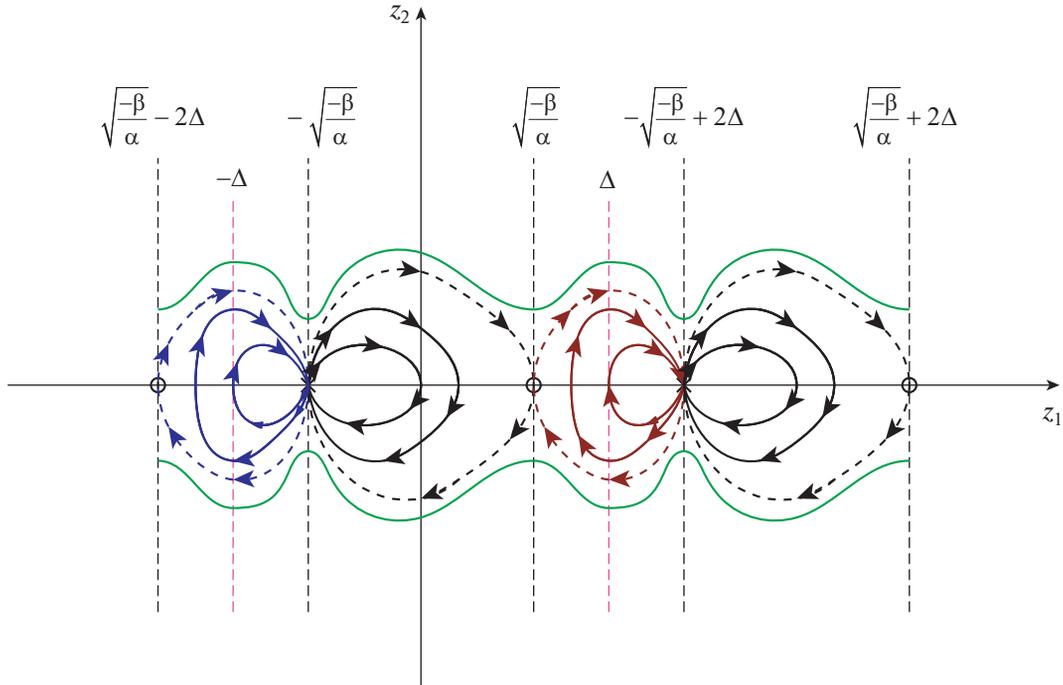
Качественное поведение решений, описанное в предложении 2, показано на фиг. 2.

Утверждение (i) доказано.

Остается показать, что решения с начальными условиями  $(z_1(0), z_2(0)) = (a, 0)$ ,  $a \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$  (либо  $a \in \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$ ), по первой координате  $z_1$  не покидают интервала, которому принадлежит  $a$ .

Для решений с начальными условиями  $(a, 0)'$ , где  $a$  принадлежит одному из рассматриваемых интервалов, сформулируем результат о структуре решений, если известен характер одного из рассматриваемых решений.

(ii) Пусть задано решение  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  с начальными условиями  $(z_1(0), z_2(0))' = (\tilde{a}, 0)'$ ,  $\tilde{a} \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$  (либо  $\tilde{a} \in \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$ ). Если решение по первой координате  $z_1$  не покидает интервал, которому принадлежит  $\tilde{a}$ , тогда для любого  $a \in \left[\tilde{a}, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$  (либо  $a \in \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \tilde{a}\right]$ ) решение с начальными условиями  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$  по первой координате  $z_1$  также не покидают интервал, которому принадлежит  $\tilde{a}$ . Если решение по первой координате  $z_1$  покидает интервал, которому при-



**Фиг. 2.** Качественная картина ограниченных по первой координате  $z_1$  решений вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа с квазилинейной правой частью.

надлежит  $\tilde{a}$ , тогда для любого  $a \in \left( \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, \tilde{a} \right]$  (либо  $a \in \left[ \tilde{a}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} \right)$ ) решение с начальными условиями  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$  также по первой координате  $z_1$  покидают интервал, которому принадлежит  $\tilde{a}$ .

Доказательство утверждения (ii) следует из теоремы существования и единственности решения для рассматриваемого функционально-дифференциального уравнения точечного типа.

Сформулируем результат о структуре решений, для которых первая координата начальных условий  $(a, 0)'$  принадлежит одному из рассматриваемых интервалов в зависимости от характера какого-либо индивидуального решения, для которого первая координата начальных условий принадлежит другому интервалу.

(iii) Пусть задано решение  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  с начальными условиями

$$(z_1(0), z_2(0))' = (\tilde{a}, 0)', \quad \tilde{a} \in \left( \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} \right) \quad \left( \tilde{a} \in \left( -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} \right) \right).$$

Если решение по первой координате  $z_1$  покидает интервал, которому принадлежит  $\tilde{a}$ , тогда для любого  $a \in \left( -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} \right)$  ( $a \in \left( \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} \right)$ ) решение с начальными условиями  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$  по первой координате  $z_1$  не покидают интервал, которому принадлежит  $a$ .

Доказательство утверждения (iii) следует из теоремы существования и единственности решения для рассматриваемого функционально-дифференциального уравнения точечного типа.

Теперь мы можем окончательно сформулировать результат о структуре решений с начальными данными  $(a, 0)'$ , где  $a$  принадлежит рассматриваемым интервалам.

(iv) Всякое решение  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$  с начальными условиями

$$(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)', \quad a \in \left( \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} \right) \quad \left( a \in \left( -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} \right) \right)$$

не покидают интервал, которому принадлежит  $a$ .

Доказательство утверждения (iv). Для определенности будем полагать, что  $a \in \left( \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} \right)$ .

Предположим, что при каком-либо  $\tilde{a} \in \left( \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} \right)$  решение по первой координате  $z_1$  покидает рассматриваемый интервал. В утверждении (ii) описан характер такого решения. Через  $\underline{a}$  обозначим минимальное среди таких  $\tilde{a}$ .

Если  $\underline{a} \in \left( \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} \right)$ , то по утверждению (ii) при каждом  $\tilde{a} \in \left( \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, \underline{a} \right)$  решение по первой координате  $z_1$  также покидает интервал  $\left( \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} \right)$ , а при каждом  $\tilde{a} \in \left[ \underline{a}, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} \right)$  решение по первой координате  $z_1$  не покидает интервал  $\left( \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} \right)$ , их поведение описано в пункте (i) и изображено на фиг. 1. В таком случае для решения с начальными условиями  $(z_1(0), z_2(0))' = (\underline{a}, 0)'$  нарушается непрерывная зависимость от начальных условий. Следовательно,  $\underline{a} = -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}$  и при всех  $\tilde{a} \in \left( \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} \right)$  решение по первой координате  $z_1$  покидает рассматриваемый интервал.

По утверждению (iii) для любого  $a \in \left( -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} \right)$  решения с начальными условиями  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$  по первой координате  $z_1$  не покидают интервал, которому принадлежит  $a$ . В таком случае для решений с начальными условиями  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$ ,  $a \in \left( \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} \right) \cup \left( -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} \right)$ , в окрестности стационарного решения  $\left( -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, 0 \right)'$  нарушается теорема существования и единственности решения, а также непрерывной зависимости от начальных условий. Следовательно, ни при каком  $\tilde{a} \in \left( \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} \right)$  решение по первой координате  $z_1$  не покидает рассматриваемый интервал. Точно так же доказывается, что ни при каком  $\tilde{a} \in \left( -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} \right)$  решение по первой координате  $z_1$  не покидает рассматриваемый интервал. Утверждение (iv) доказано.

Завершим доказательство предложения. По п. (iv) решения с начальными условиями  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$  по первой координате  $z_1$  не покидают интервал, которому принадлежит  $a$ . Тогда, в силу п. (i), для таких решений справедливы все утверждения доказываемого предложения.

Дадим комментарий к фиг. 2. График по координате  $z_1$  является  $2\Delta$ -периодичным и симметричным относительно оси  $z_1$ . Малыми кругами обозначены стационарные решения, имеющие гиперболический тип. Крестиками обозначены стационарные решения, являющиеся стоками и истоками для одних и тех же решений и имеющие также гиперболический тип. Штриховыми линиями обозначены сепаратрисы, а зеленым цветом обозначены решения, неограниченные по первой координате  $z_1$ .

## 2. ВОПРОСЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ ПРИ КВАДРАТИЧНОМ ПОТЕНЦИАЛЕ. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

На основе утверждений предложения 2 сформулируем результат о существовании ограниченного по первой координате  $z_1$  решения индуцированного функционально-дифференциального уравнения.

**Теорема 3.** Пусть заданы  $\Delta \geq \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}$  и  $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$ . Тогда при любых  $a \in \left[-\Delta, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right]$  существует решение  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))'$  индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (14)–(15) с квадратичным потенциалом и начальными условиями  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$ , фазовый портрет которого ограничен в  $\mathbb{R}^2$ . Более того, такое решение единственное и по первой координате  $z_1$  удовлетворяет условию ограниченности  $|z_1(t)| \leq \Delta, t \in \mathbb{R}$ .

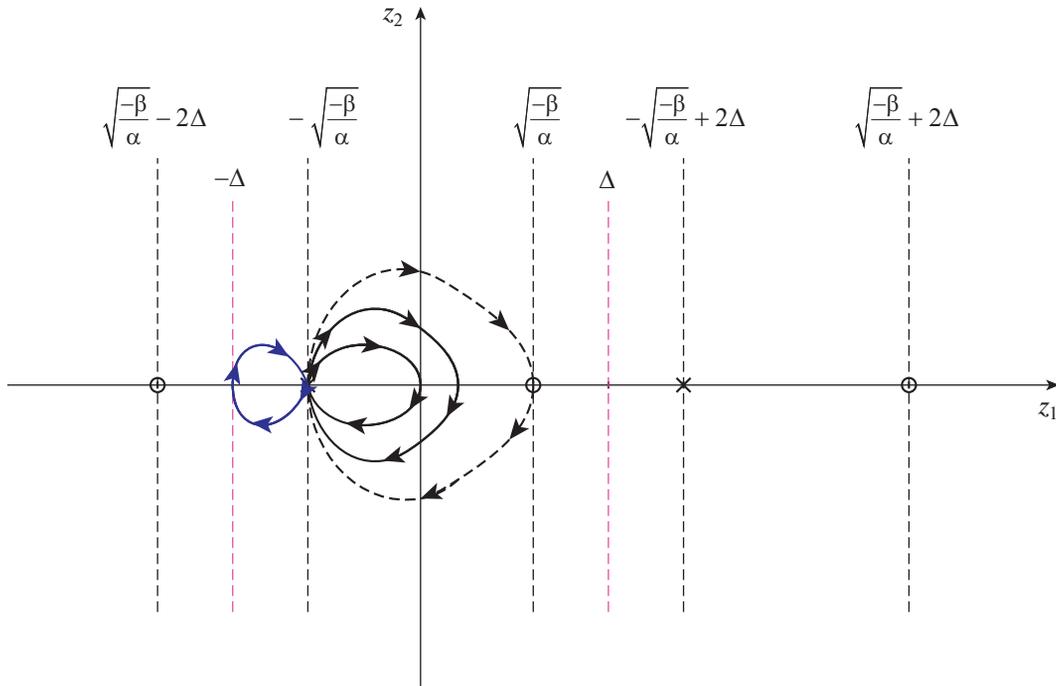
**Доказательство.** По теореме существования и единственности решения для рассматриваемого функционально-дифференциального уравнения точечного типа для соответствующего вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16)–(17) с начальными условиями  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$ ,  $a \in \left[-\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right) \cup \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$ , существует решение  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$ ,  $\mu^\tau \in (\mu_{\Delta 1}(\tau), \mu_{\Delta 2}(\tau))$ , и такое решение единственное. По предложению 2 такое решение удовлетворяет условию ограниченности  $|z_1(t)| \leq \Delta, t \in \mathbb{R}$ . В случае  $a = \pm\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}$  точки  $\left(\pm\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, 0\right)$  задают фазовые портреты стационарных решений и также удовлетворяют условию ограниченности  $|z_1(t)| \leq \Delta, t \in \mathbb{R}$ . Очевидно, что такие решения будут одновременно и решениями индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (14)–(15) с квадратичным потенциалом. Более того, из фиг. 2 следует, что фазовый портрет для таких решений ограничен в  $\mathbb{R}^2$ .

С другой стороны, всякое решение индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (14)–(15) с квадратичным потенциалом, фазовый портрет которого ограничен в  $\mathbb{R}^2$  и удовлетворяет условию ограниченности  $|z_1(t)| \leq \Delta, t \in \mathbb{R}$ , является решением и вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16)–(17). Более того, такое решение принадлежит пространству  $(z_1(\cdot), z_2(\cdot))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$ ,  $\mu^\tau \in (\mu_{\Delta 1}(\tau), \mu_{\Delta 2}(\tau))$ , при любом  $\mu \in (0, 1)$  и, в частности, при любом  $\mu^\tau \in (\mu_{\Delta 1}(\tau), \mu_{\Delta 2}(\tau))$ . Тогда по теореме существования и единственности решения для вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16)–(17) такое решение единственное.

Дадим комментарий к фиг. 3. На фиг. 3 по сравнению с фиг. 2 сохранены только те ограниченные по координате  $z_1$  решения, которые принадлежат цилиндру  $\{(z_1, z_2) : z_1 \in [-\Delta, \Delta]\}$ , так как только такие решения вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа являются одновременно и решениями индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа.

Теперь мы можем привести эквивалентную переформулировку теоремы 3 о существовании решения индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (системы (16)–(17)), ограниченного по первой координате. Такая переформулировка примет форму основного результата о существовании ограниченных солитонных решений для исходного волнового уравнения (для системы (12)–(13)).

**Теорема 4.** Пусть задано  $\Delta \geq \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}$ . Тогда для системы (12)–(13) с квадратичным потенциалом при каждом фиксированном  $\tau, 0 < \tau < \hat{\tau}_\Delta$ , и  $a \in \left[-\Delta, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right]$  существует ограниченное солитонное решение  $\{(y_i(t), \dot{y}_i(t))'\}_{-\infty}^{+\infty}, t \in \mathbb{R}$ , с характеристикой  $\tau$  и начальными данными  $(y_0(0), \dot{y}_0(0))' = (a, 0)'$ , для которого фазовый портрет  $(y_0(t), \dot{y}_0(t))', t \in \mathbb{R}$ , ограничен в  $\mathbb{R}^2$ . Такое решение единственное. Более того, условие ограниченности такого солитонного решения имеет вид  $|y_0(t)| \leq \Delta, t \in \mathbb{R}$ .



**Фиг. 3.** Качественная картина ограниченных по первой координате  $z_1$  решений для индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа с квадратичной нелинейностью правой части.

**Доказательство.** По теореме 3 для  $\Delta \geq \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}$  и  $\tau, 0 < \tau < \hat{\tau}_\Delta$ , а также каждого начального даного  $(a, 0)'$ ,  $a \in \left[-\Delta, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right]$ , существует с ограниченным фазовым портретом в  $\mathbb{R}^2$  решение  $(z_1(t), z_2(t))'$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (14)–(15) с квадратичным потенциалом, с начальным условием  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$  и условием ограниченности по первой координате  $|z_1(t)| \leq \Delta, t \in \mathbb{R}$ . Такое решение единственное. В силу соотношений (9), решению  $(z_1(t), z_2(t))', t \in \mathbb{R}$ , с начальными данными  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$ ,  $a \in \left[-\Delta, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right]$ , соответствует солитонное решение  $\{(y_i(t), \dot{y}_i(t))'\}_{-\infty}^{+\infty}, t \in \mathbb{R}$ , системы (12)–(13) с характеристикой  $\tau$ , начальными условиями  $(y_0(0), \dot{y}_0(0))' = (a, 0)'$ , и имеют место соотношения  $z_1(t) = y_0(t), z_2(t) = \dot{y}_0(t), t \in \mathbb{R}$ . Из последних соотношений следует ограниченность фазового портрета  $(y_0(t), \dot{y}_0(t))', t \in \mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}^2$ , а также условие ограниченности  $|y_0(t)| \leq \Delta, t \in \mathbb{R}$ .

Справедливы рассуждения и в обратную сторону. Пусть при  $\tau, 0 < \tau < \hat{\tau}_\Delta$ , и  $a \in \left[-\Delta, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right]$  для системы (12)–(13) с квадратичным потенциалом существует ограниченное солитонное решение  $\{(y_i(t), \dot{y}_i(t))'\}_{-\infty}^{+\infty}, t \in \mathbb{R}$ , с характеристикой  $\tau$ , начальными данными  $(y_0(0), \dot{y}_0(0))' = (a, 0)'$  и условием ограниченности  $|y_0(t)| \leq \Delta, t \in \mathbb{R}$ , для которого фазовый портрет  $(y_0(t), \dot{y}_0(t))', t \in \mathbb{R}$ , ограничен в  $\mathbb{R}^2$ . В силу соотношений (9),  $(z_1(t), z_2(t))', t \in \mathbb{R}$ , является решением индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (14)–(15) с квадратичным потенциалом и отклонением  $\tau$ , с начальным условием  $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$  и условием ограниченности по первой координате  $|z_1(t)| \leq \Delta, t \in \mathbb{R}$ , для которого фазовый портрет  $(z_1(t), z_2(t))', t \in \mathbb{R}$ , ограничен в  $\mathbb{R}^2$ . По теореме 3 такое решение единственное.

Большинство приведенных предварительных результатов получено без учета конкретного вида нелинейного потенциала. Поэтому представленный подход носит универсальный характер и может быть применен к изучению широкого класса систем с нелинейным потенциалом.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тода М.* Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984. С. 262.
2. *Мива Т., Джимбо М., Датэ Э.* Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечные алгебры. М.: МЦНМО, 2005.
3. *Френкель Я.И., Конторова Т.А.* О теории пластической деформации и двойственности // Ж. эксперим. и теор. физ. 1938. Т. 8. С. 89–97.
4. *Пустыльников Л.Д.* Бесконечномерные нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения и теория КАМ // Успехи матем. наук. 1997. Т. 52. № 3. С. 551–604.
5. *Бекларян Л.А.* Краевая задача для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом // Докл. АН СССР. 1986. С. 291. № 1. С. 19–22.
6. *Бекларян Л.А.* Дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом как бесконечномерная динамическая система // ВЦ АН СССР. Сообщ. по приклад. матем. 1989. С. 18.
7. *Beklaryan L.A.* Functional differential equations // J. of Math. Sci. 2006. V. 135. № 2.
8. *Бекларян Л.А.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход. М: Факториал Пресс, 2007.
9. *Keener J.P.* Propagation and its failure in coupled systems of discrete excitable cells // SIAM J. Appl. Math. 1987. V. 47. № 3. P. 556–572.
10. *Zinner B.* Existence of traveling wavefront solutions for the discrete Nagumo equation // J. of Different. Equat. 1992. V. 96. P. 1–27.
11. *Maller-Paret J.* The global structure of traveling waves in spatially discrete dynamical systems. Brown University, August, 1997.
12. *Maller-Paret J., Cahn J.W., Van Vleck E.S.* Traveling wave solutions for systems of ODEs on two-dimensional spatial lattice // SIAM J. Appl. Math. 1998. V. 59. № 2. P. 455–493.
13. *Бекларян Л.А.* О квазибегущих волнах // Матем. сб. 2010. Т. 201. № 12. С. 1731–1775.
14. *Бекларян Л.А.* Квазибегущие волны как естественное расширение класса бегущих волн // Вестн. Тамбовского гос. ун-та. 2014. Т. 19. № 2. С. 331–340.
15. *Бекларян Л.А.* Новый подход в вопросе существования ограниченных решений для функционально-дифференциальных уравнений точечного типа // Изв. РАН. Сер. матем. 2020. Т. 84. № 2. С. 3–42.
16. *Beklaryan I L.A., Beklaryan A.L.* On the existence of periodic and bounded solutions for functional differential equations of pointwise type with a strongly nonlinear right-hand side // Lobachevskii J. of Math. 2020. V. 41. № 11. P. 2136–2142.
17. *Beklaryan I L.A., Beklaryan A.L.* Approximation of solutions of functional differential equations of pointwise type by solutions of the induced optimization problem // Open Computer Sci. 2020. V. 1. № 11. P. 1–15.
18. *Beklaryan A.L.* Numerical methods for constructing solutions of functional differential equations of pointwise type // Adv. in Systems Sci. and Appl. 2020. V. 20. № 2. P. 56–70.

---

---

**УРАВНЕНИЯ  
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

---

---

УДК 517.958

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ  
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С СИНГУЛЯРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ<sup>1)</sup>**

© 2021 г. А. М. Денисов

*119991 Москва, Ленинские горы, 1, стр. 52, ВМК МГУ, Россия*

*e-mail: den@cs.msu.ru*

Поступила в редакцию 18.11.2020 г.  
Переработанный вариант 16.01.2021 г.  
Принята к публикации 04.08.2021 г.

Для уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением, соответствующим либо малому коэффициенту теплоемкости, либо малому коэффициенту теплопроводности, рассматриваются обратные задачи, состоящие в определении или граничного, или начального условия, или источника по дополнительной информации о решении уравнения. Изучается возможность использования разложения решения уравнения по малому параметру для приближенного решения обратных задач. Библ. 20.

**Ключевые слова:** уравнение теплопроводности, сингулярное возмущение, обратные задачи, приближенное решение.

**DOI:** 10.31857/S0044466921120085

**ВВЕДЕНИЕ**

Обратные задачи для уравнения теплопроводности представляют собой класс обратных задач для уравнений математической физики, весьма важный как с практической, так и с теоретической точки зрения. К настоящему времени они детально изучены во многих работах (см., например, [1]–[7] и имеющуюся там библиографию). Одно из направлений исследования обратных задач для уравнения теплопроводности связано с использованием сингулярного возмущения для приближенного решения обратных задач. Этот подход, названный методом квазиобращения, был предложен в [8]. Он состоит в замене исходного дифференциального уравнения сингулярно возмущенным дифференциальным уравнением, решение которого при малых значениях параметра используется для построения приближенного решения обратной задачи. Метод квазиобращения получил в дальнейшем развитие в [9]–[16] и ряде других работ.

В данной работе для уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением, соответствующим либо малому коэффициенту теплоемкости, либо малому коэффициенту теплопроводности, рассматриваются обратные задачи, состоящие в определении или граничного, или начального условия, или источника по дополнительной информации о решении уравнения. В отличие от указанных выше работ она посвящена изучению возможности применения разложения решения уравнения теплопроводности по малому параметру для приближенного решения обратных задач. Таким образом, вопрос формулируется следующим образом. Можно ли, используя конечное число членов разложения, построить приближенное решение обратной задачи, которое при малых значениях параметра будет близко к точному решению обратной задачи? Оказывается, что, если в разложении по малому параметру ограничиться только одним членом, а именно применять для построения приближенного решения только нулевой член разложения, то ответ будет очень простым и положительным. Если же с целью повышения точности использовать большее число членов разложения, то приближенное решение определяется как решение сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения, и результат будет либо положительным, либо отрицательным для различных обратных задач. Так как общие тенденции прослеживаются для случая, когда приближенное решение строится с использованием только двух членов в разложении по малому параметру, то основные результаты излагаются для него. Возника-

---

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

ющие при этом задачи являются простыми с точки зрения общей теории сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [17]–[20]). Однако важно то, что их характер полностью определяется исходной постановкой соответствующей обратной задачи. Таким образом, предлагаемый подход представляет собой пример взаимосвязи теории обратных задач и теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений.

1. ГРАНИЧНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением

$$\varepsilon^2 u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \tag{1.1}$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1.2}$$

$$u_x(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1.3}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \tag{1.4}$$

где  $\varepsilon$  – положительный малый параметр,  $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < \pi, 0 < t \leq T\}$ . Далее, чтобы подчеркнуть зависимость решения задачи (1.1)–(1.4) от параметра, будем обозначать его  $u(x, t; \varepsilon)$ .

Предположим, что функция  $\mu \in C^{m+1}[0, T]$  и  $\mu^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, \dots, m$ . Из метода разделения переменных следует формула для решения задачи (1.1)–(1.4):

$$u(x, t; \varepsilon) = \mu(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \int_0^t \exp\left[-\frac{(2n+1)^2}{(2\varepsilon)^2}(t-\tau)\right] \mu'(\tau) d\tau \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right). \tag{1.5}$$

Интегрируя по частям, получим следующее разложение функции  $u(x, t; \varepsilon)$  по малому параметру:

$$u(x, t; \varepsilon) = \mu(t) + \sum_{k=1}^m \varepsilon^{2k} \mu^{(k)}(t) f_k(x) + \varepsilon^{2(m+1)} v_{m+1}(x, t; \varepsilon). \tag{1.6}$$

Сформулируем обратную задачу.

**Обратная задача 1.** Пусть функция  $\mu(t)$  неизвестна. Требуется определить  $\mu(t)$ , если задана дополнительная информация о решении задачи (1.1)–(1.4)

$$u(x_0, t; \varepsilon) = g(t; \varepsilon), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1.7}$$

где  $x_0$  – заданное число, а  $g(t; \varepsilon)$  – заданная функция.

Возникает следующий вопрос. Можно ли получить приближенное решение обратной задачи 1, используя представление (1.6), отбросив в нем остаточный член  $\varepsilon^{2(m+1)} v_{m+1}(x, t; \varepsilon)$ ?

Начнем с самого простого случая  $m = 0$ , тогда  $\mu \in C^1[0, T], \mu(0) = 0$ . Учитывая формулу (1.6) и условие (1.7), определим приближенное решение обратной задачи 1  $\tilde{\mu}_0(t; \varepsilon)$  следующим образом:

$$\tilde{\mu}_0(t; \varepsilon) = g(t; \varepsilon), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{1.8}$$

Используя формулу (1.5), получаем, что

$$v_1(x, t; \varepsilon) = -\varepsilon^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \int_0^t \exp\left[-\frac{(2n+1)^2}{(2\varepsilon)^2}(t-\tau)\right] \mu'(\tau) d\tau \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right).$$

Для  $v_1(x, t; \varepsilon)$  справедлива оценка

$$\max_{Q_T} |v_1(x, t; \varepsilon)| \leq c_1 = \|\mu'\|_{C[0, T]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{\pi(2n+1)^3}.$$

Здесь и далее через  $c_i$  обозначаются положительные постоянные, не зависящие от  $\varepsilon$ . Из формул (1.5), (1.8) следует, что

$$\max_{[0, T]} |\mu(t) - \tilde{\mu}_0(t; \varepsilon)| = \max_{[0, T]} |\varepsilon^2 v_1(x_0, t; \varepsilon)| \leq c_1 \varepsilon^2.$$

Эта оценка позволяет считать, что при малых  $\varepsilon$  функция  $\tilde{\mu}_0(t; \varepsilon) = g(t, \varepsilon)$  является приближенным решением обратной задачи 1. Конечно, сказанное выше очевидно с физической точки зрения. При маленькой теплоемкости температура в точке  $x_0$  близка к температуре в точке  $x = 0$ .

Рассмотрим теперь случай  $m = 1$ :  $\mu \in C^2[0, T]$ ,  $\mu(0) = \mu'(0) = 0$ . Для функции  $u(x, t; \varepsilon)$  справедливо представление

$$u(x, t; \varepsilon) = \mu(t) + \varepsilon^2 \mu'(t) f_1(x) + \varepsilon^4 v_2(x, t; \varepsilon), \tag{1.9}$$

где  $f_1(x) = x^2/2 - \pi x$ ,

$$v_2(x, t; \varepsilon) = \varepsilon^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{\pi(2n+1)^3} \int_0^t \exp\left[-\frac{(2n+1)^2}{(2\varepsilon)^2}(t-\tau)\right] \mu''(\tau) d\tau \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right).$$

Очевидно, что

$$\max_{Q_T} |v_2(x, t; \varepsilon)| \leq c_2.$$

Принимая во внимание представление (1.9), определим приближенное решение  $\tilde{\mu}_1(t; \varepsilon)$  обратной задачи 1, как решение задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения

$$\varepsilon^2 \tilde{\mu}_1'(t; \varepsilon) f_1(x_0) + \tilde{\mu}_1(t; \varepsilon) = g(t; \varepsilon), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1.10}$$

$$\tilde{\mu}_1(0; \varepsilon) = 0. \tag{1.11}$$

Рассмотрим разность  $z(t; \varepsilon) = \tilde{\mu}_1(t; \varepsilon) - \mu(t)$ . Эта функция является решением задачи Коши

$$z'(t; \varepsilon) + (\varepsilon^2 f_1(x_0))^{-1} z(t; \varepsilon) = \varepsilon^2 (f_1(x_0))^{-1} v_2(x_0, t; \varepsilon), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1.12}$$

$$z(0; \varepsilon) = 0.$$

Корень характеристического уравнения для дифференциального уравнения (1.12) положителен при любом  $x_0 \in (0, \pi]$ . Поэтому  $z(t; \varepsilon)$  не стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и функцию  $\tilde{\mu}_1(t; \varepsilon)$  нельзя считать приближенным решением обратной задачи 1.

Таким образом, использование разложения (1.6) при  $m = 0$  (формула (1.8)) дает приближенное решение обратной задачи 1. Но при использовании этого разложения для  $m = 1$  решение задачи Коши (1.10), (1.11) не является приближенным решением обратной задачи при малых  $\varepsilon$ .

Отметим, что использование разложения (1.6) для приближенного решения обратной задачи 1 при  $m > 1$  также не даст положительного результата. Действительно, приближенное решение  $\tilde{\mu}_m(t; \varepsilon)$  обратной задачи 1 в этом случае определяется как решение задачи Коши

$$\sum_{k=0}^m \varepsilon^{2k} f_k(x_0) \tilde{\mu}_m^{(k)}(t; \varepsilon) = g(t; \varepsilon), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1.13}$$

$$\tilde{\mu}_m^{(k)}(0; \varepsilon) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \tag{1.14}$$

Функции  $f_k(x)$  являются решениями краевой задачи

$$f_k''(x) = f_{k-1}(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \tag{1.15}$$

$$f_k(0) = f_k'(\pi) = 0, \tag{1.16}$$

$k = 1, 2, \dots, m, f_0(x) = 1$ .

Функция Грина  $G(x, s)$  краевой задачи (1.15), (1.16) отрицательна при всех положительных  $x$  и  $s$ . Следовательно, произведение  $f_k(x) f_{k-1}(x)$  отрицательно для всех  $x \in (0, \pi]$  и  $k = 1, 2, \dots, m$ . Это означает, что однородное дифференциальное уравнение, соответствующее уравнению (1.13), при любом значении  $x_0 \in (0, \pi]$  будет иметь решение экспоненциально растущее при  $\varepsilon$ , стремящемся к нулю. А значит, решение задачи Коши (1.13), (1.14) не будет стремиться к точному решению обратной задачи 1.

2. ЗАДАЧА С ОБРАТНЫМ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением

$$u_t(x, t) = \varepsilon^2 u_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \tag{2.1}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.2}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi. \tag{2.3}$$

Решение этой задачи будем обозначать  $u(x, t; \varepsilon)$ . Предположим, что функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$\varphi \in C^{2m+3}[0, \pi], \quad \varphi^{2k}(0) = \varphi^{2k}(\pi) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m + 1. \tag{2.4}$$

Хорошо известно, что решение задачи (2.1)–(2.3) имеет вид

$$u(x, t; \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(s) \sin ns ds \exp(-\varepsilon^2 n^2 t) \sin nx. \tag{2.5}$$

Применив формулу Тейлора и используя условия (2.4), получим, что для функции  $u(x, t; \varepsilon)$  справедливо представление

$$u(x, t; \varepsilon) = \varphi(x) + \sum_{k=1}^m \varepsilon^{2k} \frac{t^k}{k!} \varphi^{(2k)}(x) + \varepsilon^{2(m+1)} v_{m+1}(x, t; \varepsilon). \tag{2.6}$$

Сформулируем обратную задачу – задачу с обратным направлением времени.

**Обратная задача 2.** Пусть функция  $\varphi(x)$  неизвестна. Требуется определить  $\varphi(x)$ , если задана дополнительная информация о решении задачи (2.1)–(2.3):

$$u(x, T; \varepsilon) = g(x; \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq \pi. \tag{2.7}$$

Рассмотрим вопрос о применении разложения по малому параметру (2.6) для приближенного решения обратной задачи 2.

Пусть  $m = 0$ . Определим приближенное решение обратной задачи  $\tilde{\varphi}_0(x; \varepsilon)$  так:

$$\tilde{\varphi}_0(x; \varepsilon) = g(x; \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq \pi. \tag{2.8}$$

Из формул (2.6)–(2.8) следует, что

$$\max_{[0, \pi]} |\tilde{\varphi}_0(x; \varepsilon) - \varphi(x)| = \max_{[0, \pi]} |\varepsilon^2 v_1(x, T; \varepsilon)| \leq c_3 \varepsilon^2. \tag{2.9}$$

Оценка (2.9) означает, что при малых  $\varepsilon$  функцию  $\tilde{\varphi}_0(x; \varepsilon)$  можно рассматривать в качестве приближенного решения обратной задачи 2.

Пусть  $m = 1$ . Учитывая разложение (2.6), определим приближенное решение обратной задачи 2  $\tilde{\varphi}_1(x; \varepsilon)$  как решение краевой задачи

$$\varepsilon^2 T \tilde{\varphi}_1''(x; \varepsilon) + \tilde{\varphi}_1(x; \varepsilon) = g(x; \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq \pi, \tag{2.10}$$

$$\tilde{\varphi}_1(0; \varepsilon) = \tilde{\varphi}_1(\pi; \varepsilon) = 0. \tag{2.11}$$

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет условиям (2.4) при  $m = 1$  и  $|\sin(\varepsilon^{-1} T^{-1/2} \pi)| \geq a > 0$ . Тогда

$$\max_{[0, \pi]} |\tilde{\varphi}_1(x; \varepsilon) - \varphi(x)| \leq c_4 \varepsilon^3. \tag{2.12}$$

**Доказательство.** Записав представление (2.6) для  $m = 1$ ,  $t = T$  и используя условие (2.7), получим, что функция  $\varphi(x)$  является решением краевой задачи

$$\varepsilon^2 T \varphi''(x; \varepsilon) + \varphi(x; \varepsilon) = g(x; \varepsilon) - \varepsilon^4 v_2(x, T; \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq \pi, \tag{2.13}$$

$$\varphi(0; \varepsilon) = \varphi(\pi; \varepsilon) = 0. \tag{2.14}$$

Рассмотрим функцию  $z(x; \varepsilon) = \tilde{\varphi}_1(x; \varepsilon) - \varphi(x)$ . Из уравнений (2.10), (2.13) и условий (2.11), (2.14) следует, что функция  $z(x; \varepsilon)$  является решением краевой задачи

$$z''(x; \varepsilon) + (\varepsilon^2 T)^{-1} z(x; \varepsilon) = \varepsilon^2 T^{-1} v_2(x, T; \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ z(0; \varepsilon) = z(\pi; \varepsilon) = 0.$$

Решение этой задачи определяется формулой

$$z(x; \varepsilon) = \varepsilon^2 T^{-1} \int_0^\pi G(x, s; \varepsilon) v_2(s, T; \varepsilon) ds, \quad (2.15)$$

где

$$G(x, s; \varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon T^{1/2} [\sin(\varepsilon^{-1} T^{-1/2} \pi)]^{-1} \sin(\varepsilon^{-1} T^{-1/2} x) \sin[\varepsilon^{-1} T^{-1/2} (s - \pi)], & x \leq s, \\ \varepsilon T^{1/2} [\sin(\varepsilon^{-1} T^{-1/2} \pi)]^{-1} \sin(\varepsilon^{-1} T^{-1/2} s) \sin[\varepsilon^{-1} T^{-1/2} (x - \pi)], & s \leq x. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$v_2(x, T; \varepsilon) = \frac{T^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-\xi_n} \varphi_n \sin nx,$$

где

$$\varphi_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(s) \sin ns ds, \quad \xi_n \geq 0.$$

Введем обозначения

$$\varphi_n^{(4)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi^{(4)}(s) \sin ns ds.$$

Из условий теоремы следует, что  $\varphi_n^{(4)} = n^4 \varphi_n$ . Тогда

$$\max_{[0, \pi]} |v_2(x, T; \varepsilon)| = \max_{[0, \pi]} \left| \frac{T^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\xi_n} \varphi_n^{(4)} \sin nx \right| \leq c_5.$$

Из этой оценки и формулы (2.15) следует неравенство (2.12), и теорема 1 доказана.

Сделав дополнительное предположение о гладкости функции  $\varphi(x)$ , можно улучшить оценку (2.12).

**Следствие.** Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того,  $\varphi^{(6)}(x)$  непрерывна на  $[0, \pi]$ . Тогда

$$\max_{[0, \pi]} |\tilde{\varphi}_1(x; \varepsilon) - \varphi(x)| \leq c_6 \varepsilon^4. \quad (2.16)$$

**Доказательство.** При сделанных предположениях существует частная производная

$$\frac{\partial v_2}{\partial x}(x, T; \varepsilon) = \frac{T^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^5 e^{-\xi_n} \varphi_n \cos nx.$$

Так как  $\varphi^{(6)}(x)$  непрерывна на  $[0, \pi]$ , то

$$n^5 \varphi_n = -\frac{1}{n} \int_0^\pi \varphi^{(6)}(s) \sin ns ds.$$

Следовательно,

$$\max_{[0, \pi]} \left| \frac{\partial v_2}{\partial x}(x, T; \varepsilon) \right| \leq c_7. \quad (2.17)$$

Интегрируя по частям интегралы, входящие в формулу (2.15), и используя неравенство (2.17), получаем, что справедлива оценка (2.16).

В предыдущих доказательствах использовалось условие  $|\sin(\varepsilon^{-1}T^{-1/2}\pi)| \geq a > 0$ , обеспечивающее ограниченность функции Грина. От него можно отказаться, сделав дополнительное предположение относительно функции  $\varphi(x)$ , а именно, считая, что известно значение  $\varphi'(0) = \varphi_{01}$ .

Определим в этом случае приближенное решение обратной задачи  $2 \hat{\varphi}_1(x; \varepsilon)$  как решение задачи Коши

$$\varepsilon^2 T \hat{\varphi}_1''(x; \varepsilon) + \hat{\varphi}_1(x; \varepsilon) = g(x; \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$\hat{\varphi}_1(0; \varepsilon) = 0, \quad \hat{\varphi}_1'(0; \varepsilon) = \varphi_{01}.$$

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** Пусть функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет условиям (2.5) с  $m = 1$ ,  $\varphi^{(6)}(x)$  непрерывна на  $[0, \pi]$  и  $\varphi'(0) = \varphi_{01}$ . Тогда

$$\max_{[0, \pi]} |\hat{\varphi}_1(x; \varepsilon) - \varphi(x)| \leq c_8 \varepsilon^4.$$

**Доказательство.** Рассмотрим функцию  $\hat{z}(x; \varepsilon) = \hat{\varphi}_1(x; \varepsilon) - \varphi(x)$ , являющуюся решением задачи Коши

$$\hat{z}''(x; \varepsilon) + (\varepsilon^2 T)^{-1} \hat{z}(x; \varepsilon) = \varepsilon^2 T^{-1} v_2(x, T; \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$\hat{z}(0; \varepsilon) = \hat{z}'(0; \varepsilon) = 0.$$

Для решения этой задачи справедлива формула

$$\hat{z}(x; \varepsilon) = \varepsilon^3 T^{-1/2} \int_0^x \sin[\varepsilon^{-1} T^{-1/2}(x-s)] v_2(s, T; \varepsilon) ds.$$

Интегрируя по частям и используя оценку (2.17), получаем, что

$$\max_{[0, \pi]} |\hat{z}(x; \varepsilon)| \leq c_5 \varepsilon^4,$$

и теорема 2 доказана.

### 3. ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКА

В этом разделе для уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением рассматриваются две обратные задачи, состоящие в определении одной из функций, входящих в источник, при условии, что другая функция известна.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с источником:

$$u_t(x, t) = \varepsilon^2 u_{xx}(x, t) + f(x)p(t), \quad (x, t) \in Q_T, \tag{3.1}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.2}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi. \tag{3.3}$$

Решение задачи (3.1)–(3.3) определяется формулой

$$u(x, t; \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \int_0^t \exp[-n^2 \varepsilon^2 (t - \tau)] p(\tau) d\tau \sin nx, \tag{3.4}$$

где

$$f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(s) \sin ns ds.$$

Предположим, что функция  $f(x)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$f \in C^{2m+3}[0, \pi], \quad f^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(\pi) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m + 1, \tag{3.5}$$

а  $p \in C[0, T]$ .

Проинтегрировав по частям интегралы, входящие в формулу (3.4), получим следующее представление:

$$u(x, t; \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^{2k} f^{(2k)}(x) p_k(t) + \varepsilon^{2(m+1)} v_{m+1}(x, t; \varepsilon), \tag{3.6}$$

где

$$p_k(t) = \int_0^t \frac{(t - \tau)^k}{k!} p(\tau) d\tau, \quad k = 0, 1, \dots, m,$$

а

$$v_{m+1}(x, t; \varepsilon) = (-1)^{m+1} \sum_{n=1}^{\infty} f_n n^{2(m+1)} \int_0^t \exp[-n^2 \varepsilon^2 (t - \tau)] p_m(\tau) d\tau \sin nx.$$

Сформулируем обратную задачу.

**Обратная задача 3.** Пусть функция  $p(t)$  задана, а  $f(x)$  неизвестна. Требуется определить  $f(x)$ , если задана дополнительная информация о решении задачи (3.1)–(3.3):

$$u(x, T; \varepsilon) = g(x; \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq \pi. \tag{3.7}$$

Рассмотрим вопрос о возможности построения приближенного решения этой обратной задачи на основе использования представления (3.6).

Пусть функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям (3.5) при  $m = 0$ . Предположим также, что

$$p_0(T) = \int_0^T p(\tau) d\tau \neq 0. \tag{3.8}$$

Учитывая представление (3.6), определим приближенное решение обратной задачи 3 следующим образом:

$$\tilde{f}_0(x) = (p_0(T))^{-1} g(x; \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq \pi. \tag{3.9}$$

Оценим разность  $f(x) - \tilde{f}_0(x)$ . Из (3.6)–(3.9) следует, что

$$\max_{[0, \pi]} |f(x) - \tilde{f}_0(x)| \leq \varepsilon^2 |p_0(T)|^{-1} \max_{[0, \pi]} |v_1(x, T; \varepsilon)| \leq c_9 \varepsilon^2. \tag{3.10}$$

Из оценки (3.10) следует, что функцию  $\tilde{f}_0(x)$  можно считать приближенным решением обратной задачи 3.

Перейдем к построению приближенного решения в случае  $m = 1$ . Определим приближенное решение обратной задачи  $\tilde{f}_1(x)$  как решение краевой задачи

$$\varepsilon^2 p_1(T) \tilde{f}_1''(x) + p_0(T) \tilde{f}_1(x) = g(x; \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq \pi, \tag{3.11}$$

$$\tilde{f}_1(0) = \tilde{f}_1(\pi) = 0. \tag{3.12}$$

При анализе задачи (3.11), (3.12) нужно рассматривать три случая:  $p_1(T)p_0(T) > 0$ ,  $p_1(T)p_0(T) < 0$  и  $p_1(T)p_0(T) = 0$ .

Очевидно, что первый случай аналогичен случаю  $m = 1$  в обратной задаче 2. Поэтому для него ограничимся формулировкой теоремы, которая доказывается также как следствие теоремы 1.

**Теорема 3.** Пусть  $p_1(T)p_0(T) > 0$ , функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям (3.5) при  $m = 1$ ,  $f^{(6)}(x)$  непрерывна на  $[0, \pi]$  и

$$\left| \sin \left( \pi \sqrt{p_0(T) (\varepsilon^2 p_1(T))^{-1}} \right) \right| \geq a > 0.$$

Тогда

$$\max_{[0, \pi]} |f(x) - \tilde{f}_1(x)| \leq c_{10} \varepsilon^4.$$

Рассмотрим второй случай:  $p_1(T)p_0(T) < 0$ .

**Теорема 4.** Пусть  $p_1(T)p_0(T) < 0$ , а функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям (3.5) при  $m = 1$ . Тогда

$$\max_{[0, \pi]} |f(x) - \tilde{f}_1(x)| \leq c_{11} \varepsilon^4.$$

**Доказательство.** Введем функцию  $z(x; \varepsilon) = \tilde{f}_1(x) - f_1(x)$  и число  $b^2 = -(p_1(T))^{-1} p_0(T)$ . Функция  $z(x; \varepsilon)$  является решением краевой задачи

$$z''(x; \varepsilon) - \varepsilon^{-2} b^2 z(x; \varepsilon) = \varepsilon^2 (p_1(T))^{-1} v_2(x, T; \varepsilon), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$z(0; \varepsilon) = z(\pi; \varepsilon) = 0.$$

Решив эту задачу, получим

$$z(x; \varepsilon) = \varepsilon^3 \left( b p_1(T) \frac{b}{\varepsilon} \pi \right)^{-1} \times$$

$$\times \left[ \int_0^x \operatorname{sh} \frac{b}{\varepsilon} (x - \pi) \operatorname{sh} \frac{b}{\varepsilon} s v_2(s, T; \varepsilon) ds + \int_x^\pi \operatorname{sh} \frac{b}{\varepsilon} x \operatorname{sh} \frac{b}{\varepsilon} (s - \pi) v_2(s, T; \varepsilon) ds \right].$$

Из условий теоремы следует, что

$$\max_{[0, \pi]} |v_2(x, T; \varepsilon)| \leq c_{12}.$$

Тогда

$$\max_{[0, \pi]} |z(x; \varepsilon)| \leq \varepsilon^3 c_{12} \left( b |p_1(T)| \frac{b}{\varepsilon} \pi \right)^{-1} \times$$

$$\times \max_{[0, \pi]} \left[ \int_0^x \operatorname{sh} \frac{b}{\varepsilon} (\pi - x) \operatorname{sh} \frac{b}{\varepsilon} s ds + \int_x^\pi \operatorname{sh} \frac{b}{\varepsilon} x \operatorname{sh} \frac{b}{\varepsilon} (\pi - s) ds \right] \leq c_{11} \varepsilon^4,$$

и теорема 4 доказана.

Перейдем к третьему случаю  $p_1(T) p_0(T) = 0$ . Возможны три варианта. В первом  $p_1(T) = 0$ ,  $p_0(T) \neq 0$ . Тогда

$$\max_{[0, \pi]} |f(x) - \tilde{f}_1(x)| \leq c_{13} \varepsilon^4.$$

Во втором  $p_0(T) = 0$ ,  $p_1(T) \neq 0$  и

$$\max_{[0, \pi]} |f(x) - \tilde{f}_1(x)| \leq c_{14} \varepsilon^2.$$

Третий случай  $p_1(T) = p_0(T) = 0$  для построения приближенного решения на основе уравнения (3.11) является бессодержательным.

Перейдем к задаче определения источника, в которой неизвестной является функция, зависящая от времени.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\varepsilon^2 u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + f(x)p(t), \quad (x, t) \in Q_T, \tag{3.13}$$

$$u(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.14}$$

$$u_x(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.15}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi. \tag{3.16}$$

Будем предполагать, что функции  $f(x)$  и  $p(t)$  удовлетворяют следующим условиям:

$$f \in C^1[0, \pi], \quad f(0) = f'(\pi) = 0, \tag{3.17}$$

$$p \in C^{m+1}[0, T], \quad p^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m. \tag{3.18}$$

Из метода разделения переменных следует формула для решения задачи (3.13)–(3.16)

$$u(x, t; \varepsilon) = (\varepsilon)^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \int_0^t \exp \left[ -\frac{1}{\varepsilon^2} \left( \frac{2n+1}{2} \right)^2 (t - \tau) \right] p(\tau) d\tau \sin \frac{2n+1}{2} x,$$

где

$$f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(s) \sin \frac{2n+1}{2} s ds.$$

Интегрируя по частям, получим следующее представление:

$$u(x, t; \varepsilon) = \sum_{k=0}^m \varepsilon^{2k} F_k(x) p^{(k)}(t) + \varepsilon^{2(m+1)} v_{m+1}(x, t; \varepsilon), \quad (3.19)$$

где

$$F_k(x) = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left( \frac{2}{2n+1} \right)^{2(k+1)} \sin \frac{2n+1}{2} x,$$

а

$$v_{m+1}(x, t; \varepsilon) = (\varepsilon)^{-2} (-1)^{m+1} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left( \frac{2}{2n+1} \right)^{2(m+1)} \int_0^t \exp \left[ -\frac{1}{\varepsilon^2} \left( \frac{2n+1}{2} \right)^2 (t - \tau) \right] p^{(m+1)}(\tau) d\tau \sin \frac{2n+1}{2} x.$$

Для функций  $F_k(x)$  справедливы также формулы

$$F_0(x) = -\int_0^{\pi} G(x, s) f(s) ds, \quad F_{k+1}(x) = \int_0^{\pi} G(x, s) F_k(s) ds, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

где  $G(x, s)$  – функция Грина краевой задачи

$$y''(x) = F(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ y(0) = y'(\pi) = 0.$$

Сформулируем обратную задачу.

**Обратная задача 4.** Пусть функция  $f(x)$  задана, а  $p(t)$  неизвестна. Требуется определить  $p(t)$ , если задана дополнительная информация о решении задачи (3.13)–(3.16):

$$u(x_0, t; \varepsilon) = g(t, \varepsilon), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.20)$$

где  $x_0$  – известная фиксированная точка  $x_0 \in (0, \pi]$ .

Рассмотрим вопрос о возможности построения приближенного решения обратной задачи 4 на основе использования разложения (3.19).

Пусть  $F_0(x_0) \neq 0$  и функция  $p(t)$  удовлетворяет условиям (3.18) при  $m = 0$ . Определив приближенное решение обратной задачи 4 следующим образом:  $p_0(t; \varepsilon) = g(t; \varepsilon) (F_0(x_0))^{-1}$ , получим, что

$$\max_{[0, T]} |p_0(t; \varepsilon) - p(t)| \leq \varepsilon^2 |F_0(x_0)|^{-1} \max_{[0, T]} |v_1(x_0, t; \varepsilon)| \leq c_1 \varepsilon^2.$$

Из этой оценки следует, что функцию  $p_0(t; \varepsilon)$  можно считать приближенным решением обратной задачи 4.

Пусть функция  $p(t)$  удовлетворяет условиям (3.18) при  $m = 1$ . Определим в этом случае приближенное решение обратной задачи 4  $p_1(t; \varepsilon)$  как решение задачи Коши

$$\varepsilon^2 F_1(x_0) p_1'(t; \varepsilon) + F_0(x_0) p_1(t; \varepsilon) = g(t; \varepsilon), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.21)$$

$$p_1(0; \varepsilon) = 0. \quad (3.22)$$

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 5.** Пусть функция  $p(t)$  удовлетворяет условиям (3.18) при  $m = 1$ , а  $f(x)$  такова, что выполнены условия (3.17) и  $F_1(x_0) F_0(x_0) > 0$ . Тогда

$$\max_{[0, T]} |p_1(t; \varepsilon) - p(t)| \leq c_1 \varepsilon^4.$$

**Доказательство.** Введем функцию  $z(x; \varepsilon) = p_1(t; \varepsilon) - p(t)$ . Из представления (3.19), условия (3.20), уравнения (3.21) и условия (3.22) следует, что  $z(t; \varepsilon)$  является решением задачи Коши

$$z'(t; \varepsilon) + F_0(x_0) (\varepsilon^2 F_1(x_0))^{-1} z(t; \varepsilon) = \varepsilon^2 (F_1(x_0))^{-1} v_2(x_0, t; \varepsilon), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.23)$$

$$z(0; \varepsilon) = 0. \quad (3.24)$$

Для функции  $v_2(x_0, t; \varepsilon)$  справедлива оценка

$$\max_{[0, T]} |v_2(x_0, t; \varepsilon)| \leq c_{17}. \quad (3.25)$$

Решение задачи (3.23), (3.24) определяется формулой

$$z(x; \varepsilon) = \varepsilon^2 (F_1(x_0))^{-1} \int_0^t \exp[-F_0(x_0)(\varepsilon^2 F_1(x_0))^{-1}(t - \tau)] v_2(x_0, \tau; \varepsilon) d\tau.$$

Из этой формулы и оценки (3.25) следует утверждение теоремы.

**Замечание 1.** Легко видеть, что при  $F_1(x_0)F_0(x_0) < 0$  решение задачи (3.21), (3.22) не сходится к  $p(t)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Замечание 2.** Так как функция Грина  $G(x, s)$  отрицательна при положительных  $x$  и  $s$ , то для выполнения условия  $F_1(x_0)F_0(x_0) > 0$  необходимо, чтобы функция  $f(x)$  меняла знак на отрезке  $[0, \pi]$ .

**Замечание 3.** Из представления (3.19) следует, что при  $m > 1$  приближенное решение обратной задачи 4 определяется как решение задачи Коши

$$\sum_{k=0}^m \varepsilon^{2k} F_k(x_0) p_m^{(k)}(t) = g(t; \varepsilon), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.26)$$

$$p_m^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Очевидно, что условие неположительности действительных частей корней характеристического уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению (3.26), накладывает сильные ограничения на функцию  $f(x)$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1980.
2. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
3. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностр., 1988.
4. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994.
5. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.V. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, 2000.
6. Isakov V. Inverse problems for partial differential equations. New York: Springer, 2006.
7. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2008.
8. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970.
9. Иванов В.К. Задача квазиобращения для уравнения теплопроводности в равномерной метрике // Дифференц. ур-ния. 1972. Т. 8. № 4. С. 652–658.
10. Самарский А.А., Вабичевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Едиториал УРСС, 2004.
11. Короткий А.И., Цепелев И.А., Исмаил-заде А.Е. Численное моделирование обратных ретроспективных задач тепловой конвекции с приложениями к задачам геодинамики // Изв. Уральского ун-та. 2008. № 58. С. 78–87.
12. Табаринцева Е.В., Менихес Л.Д., Дрозин А.Д. О решении граничной обратной задачи методом квазиобращения // Вестник ЮУГУ. Сер. Математика. Механика, Физика. 2012. Вып. 6. С. 8–13.
13. Денисов А.М. Асимптотика решений обратных задач для гиперболических уравнений с малым параметром при старшей производной // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 5. С. 744–752.
14. Belov Yu.Ya., Kopylova V.G. Determination of source function in composite type system of equations // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2014. Т. 7. Вып. 3. С. 275–288.
15. Denisov A.M., Solov'eva S.I. Numerical determination of the initial condition in cauchy problem for hyperbolic equation with a small parameter // Comp. Math. and Model. 2018. V. 29. № 1. P. 1–9.
16. Денисов А.М., Соловьева С.И. Численное решение обратных задач для гиперболического уравнения с малым параметром при старшей производной // Дифференц. ур-ния. 2018. Т. 54. № 7. С. 919–928.
17. Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Матем. сборник. 1948. Т. 22. № 2. С. 193–204.
18. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
19. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
20. Mishchenko E.F., Kolesov Yu.S., Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. Asymptotic methods in singularly perturbed systems. New York: Consult. Bureau, Plenum Publ. Corp., 1994.

УРАВНЕНИЯ  
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.955

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО  
ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО  
УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С МНОГИМИ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ  
ПЕРЕМЕННЫМИ<sup>1)</sup>

© 2021 г. А. В. Заборский<sup>1,\*</sup>, А. В. Нестеров<sup>2,\*\*</sup>, Д. Ю. Нечаев<sup>2,\*\*\*</sup>

<sup>1</sup>249035 Калужская обл., Обнинск, пр-т Маркса, 14А, ООО НПП “Радико”, Россия

<sup>2</sup>117997 Москва, Стремянный пер., 36, РЭУ им. Г.В. Плеханова, Россия

\*e-mail: alexander.zaborskiy@mail.ru

\*\*e-mail: andrenerov@yandex.ru

\*\*\*e-mail: Nechaev.DYU@rea.ru

Поступила в редакцию 16.02.2021 г.  
Переработанный вариант 28.04.2021 г.  
Принята к публикации 04.08.2021 г.

Строится формальное асимптотическое разложение решения задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения переноса со многими пространственными переменными и слабой нелинейностью. При наложении ряда условий на данные задачи асимптотическое разложение построено в виде рядов по степеням малого параметра с коэффициентами, зависящими от различных растянутых переменных. Получены задачи для определения всех членов асимптотического разложения, в частности, главный член определяется как решение задачи Коши для параболического уравнения. Приведена оценка остаточного члена по невязке. Библ. 11.

**Ключевые слова:** дифференциально-операторные уравнения в частных производных, задача Коши, малая нелинейность, сингулярные возмущения, асимптотические разложения, параболические уравнения.

DOI: 10.31857/S0044466921120188

ВВЕДЕНИЕ

В [1] построено формальное асимптотическое разложение (далее ФАР) по малому параметру  $\varepsilon$  решения задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного слабо нелинейного уравнения переноса  $\varepsilon^2 (U(x, t, p)_t + D(p)U(x, t, p)_x) = L_p U(x, t, p) + \varepsilon F(p, U)$  в критическом случае (т.е. в случае наличия у линейного оператора  $L_p$ , действующего по переменной  $p$ , нулевого однократного собственного значения (см. [2]).

Такие уравнения (не обязательно сингулярно возмущенные) возникают при описании переноса нейтронов (см. [3]–[5]), при линеаризации уравнений типа уравнения Больцмана, уравнений коагуляции (см. [6], [7]), уравнений переноса сложнocomпонентных и реагирующих примесей в атмосфере, и в других задачах математической физики, связанных с описанием процессов переноса. В этих задачах решение зависит не только от координат пространство–время, но и от дополнительной переменной, обозначенной ниже  $p$ , которая может описывать некоторые характеристики субстанции, например, внутреннюю энергию, размеры частиц или иные. Оператор  $L_p$  описывает эволюцию зависимости решения от переменной  $p$  и в подобных задачах часто

<sup>1)</sup> Данное исследование выполнено в рамках государственного задания в сфере научной деятельности Министерства науки и высшего образования РФ на тему “Разработка методологии и программной платформы для построения цифровых двойников, интеллектуального анализа и прогнозирования сложных экономических систем”, номер проекта FSSW-2020-0008.

является интегральным. Так, если  $u(p)$  – плотность частиц размера  $p$ , то динамика процессов коагуляции–диссоциации в линейном приближении может описываться уравнением

$$u_t = L_p u = \int_{p_1}^{p_2} K(p, q) u(q) dq,$$

где ядро  $K(p, q)$  определяется физикой процесса,  $p_1$  и  $p_2$  – минимальный и максимальный размеры частиц. Параметр  $p$  и оператор  $L_p$  могут иметь и иной смысл (см. [3], [4]).

В [1] было отмечено, что несмотря на гиперболический тип дифференциальной части уравнения, при начальных условиях, имеющих вид всплеска, и наличии однократного нулевого значения у оператора  $L_p$ , главный член асимптотики определяется уравнением параболического типа.

В настоящей работе результаты из [1] распространяются на случай аналогичного уравнения с многими пространственными переменными, который представляет интерес для различных прикладных областей.

Основная цель данной работы – построение ФАР для решения задачи Коши для многомерного сингулярно возмущенного уравнения переноса со слабой нелинейностью, поэтому ниже на операторы налагаются очень жесткие условия. Основное внимание уделяется алгоритму построения ФАР решения задачи и получению задач для определения членов разложения, вопросам обоснования полученной асимптотики уделяется меньшее внимание. Отметим, что схожие сингулярно возмущенные дифференциально-операторные уравнения в различных постановках исследовались многими авторами (см., например, [3], [4]).

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения в многомерном случае:

$$\varepsilon^2 \left( U_t + \sum_{i=1}^N D_i(p) U_{x_i} \right) = L_p U + \varepsilon F(p, U), \tag{1}$$

$$U(\bar{x}, 0, p) = w(\bar{x} \varepsilon^{-1}, p), \tag{2}$$

где  $U = U(\bar{x}, t, p)$  – решение;  $\{\bar{x}, t, p\} \in H = \{\|\bar{x}\| < \infty; t > 0; p \in P\}$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$  – малый параметр;  $D_i(p)$  – непрерывные по  $p$  функции;  $L_p$  – линейный оператор, действующий по скалярной переменной  $p \in P$  на функции  $f(\bar{x}, t, p) \in A$ , принадлежащие по  $p$  функциональному пространству  $L$ , соответствующему оператору  $L_p$ , со скалярным произведением  $(h_1(p), h_2(p))$ , и бесконечно дифференцируемых по  $\bar{x}, t$ :  $A = L \otimes C_{\|\bar{x}\| < \infty, t > 0}^\infty$ , причем  $\forall z \in A : L_p z \in A$ . Множество значений  $P$  переменной  $p$  может иметь разный вид, например,  $P = [p_1, p_2]$ . Функция  $F(p, U) \in L \otimes C^\infty$  принадлежит пространству  $L$  по переменной  $p$  и бесконечно дифференцируема по  $U$ .

Пусть оператор  $L_p$  имеет однократное собственное нулевое значение  $\lambda_0 = 0$ . Обозначим через  $h_0(p)$  собственную функцию оператора  $L_p$ , соответствующую его собственному нулевому значению  $\lambda_0$ , а через  $h_0^*(p)$  – собственную функцию сопряженного оператора  $L_p^*$ , соответствующую нулевому собственному значению  $\lambda_0^* = 0$  оператора  $L_p^*$ . Ниже аргумент  $p$ , от которого зависят собственные функции  $h_0(p)$  и  $h_0^*(p)$ , может опускаться.

Остальные требования на задачу (1), (2) будут сформулированы ниже с нумерацией I, II и так далее.

I. Функция  $w(\bar{z}, p)$  вместе со всеми частными производными по пространственным переменным удовлетворяет неравенству  $|w(\bar{z}, p)| \leq C e^{-\beta \|\bar{z}\|^2}$ ,  $C > 0, \beta > 0$ , где постоянные  $C > 0, \beta > 0$  могут зависеть от порядка производных.

II. Все собственные значения  $\lambda$  линейного оператора  $L_p$ , кроме  $\lambda_0$ , имеют отрицательные вещественные части, удовлетворяющие неравенствам  $\text{Re } \lambda \leq -k$ ,  $k > 0$ .

III. Скалярное произведение  $(h_0(p), h_0^*(p))$  отлично от нуля:  $(h_0, h_0^*) \neq 0$ .

**Замечание.** При этом можно выбрать эти функции так, чтобы  $(h_0, h_0^*) = 1$ , что и полагается ниже.

## АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ФАР РЕШЕНИЯ

Алгоритм построения ФАР решения начальной задачи (1), (2) аналогичен алгоритму, использованному в [1]. В соответствии с алгоритмом построения погранслоиных разложений А.Б. Васильевой и В.Ф. Бугузова (см. [2]) ФАР решения ищется в виде суммы регулярной части  $\bar{U}$ , функции всплеска  $S$ , пограничной функции  $\Pi$  и остаточного члена  $R$ :

$$U(\bar{x}, t, p) = \bar{U}(\bar{x}, t, p) + S(\bar{\zeta}, t, p) + \Pi(\bar{\xi}, \tau, p) + R. \quad (3)$$

Назначение функций  $\bar{U}, S, \Pi, R$ , входящих в ФАР (3), а также вид аргументов  $\bar{\zeta}, \bar{\xi}, \tau$  пояснены ниже.

ФАР (3) строится с помощью модификации алгоритмов построения погранслоиных разложений (см. [2]).

Очевидно, что регулярная часть решения ФАР  $\bar{U}(\bar{x}, t, p)$  при начальном условии вида (2), удовлетворяющем условию I и имеющим вид всплеска в малой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x = 0$ , тождественно равна нулю:  $\bar{U}(\bar{x}, t, p) \equiv 0$ .

Таким образом, ФАР решения с точностью  $O(\varepsilon^{M+1})$ , где  $M$  – произвольное натуральное число, строится в виде суммы функции всплеска  $S$ , сосредоточенной в окрестности некоторой линии  $\{l : \bar{\zeta} = 0\}$  (“псевдохарактеристике” уравнения) и пограничной функции  $\Pi$ , сосредоточенной в окрестности границы  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} U(\bar{x}, t, p) &= S(\bar{\zeta}, t, p) + \Pi(\bar{\xi}, \tau, p) + R = \\ &= \sum_{i=0}^M \varepsilon^i (s_i(\bar{\zeta}, t, p) + \pi_i(\bar{\xi}, \tau, p)) + R, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\bar{\zeta} = \{\zeta_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ ,  $\zeta_i = \frac{x_i - V_i t}{\varepsilon}$ , – переменные, с помощью которых описывается функция всплеска  $S(\bar{\zeta}, t, p)$ , здесь  $V_i = (D_i(p)h_0(p), h_0^*(p))$ ;  $\bar{\xi} = \{\xi_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ ,  $\xi_i = \frac{x_i}{\varepsilon}$  и  $\tau = \frac{t}{\varepsilon^2}$  – растянутые переменные, с помощью которых описывается пограничная функция  $\Pi(\bar{\xi}, \tau, p)$ ,  $R$  – остаточный член.

Следуя [2], представим функцию  $F(p, U)$  в виде суммы

$$F(p, U) = SF + \Pi F + RF, \quad (5)$$

где

$$SF = F(p, S), \quad (6)$$

$$\Pi F = F(p, S + \Pi) - F(p, S), \quad (7)$$

$$RF = F(p, S + \Pi + R) - F(p, S + \Pi). \quad (8)$$

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ВСПЛЕСКА  $S$ 

Функция всплеска  $S(\bar{\zeta}, t, p)$  ищется в виде разложения по степеням параметра  $\varepsilon$ :

$$S(\bar{\zeta}, t, p) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k s_k(\bar{\zeta}, t, p), \quad (9)$$

и должна удовлетворять уравнению

$$\varepsilon^2 \left( S_t + \sum_{i=1}^N D_i S_{x_i} \right) = L_p S + \varepsilon SF. \quad (10)$$

Перейдя в уравнении (10) от переменных  $(\bar{x}, t, p)$  к переменным  $(\bar{\zeta}, t, p)$ , получаем

$$L_p S = \varepsilon^2 S_t + \varepsilon \sum_{i=1}^N \Psi_i S_{\zeta_i} - \varepsilon SF, \tag{11}$$

где

$$\Psi_i(p) = D_i(p) - V_i = D_i(p) - (D_i(p)h_0(p), h_0^*(p)). \tag{12}$$

Подставив разложение (9) в (6), получим

$$SF = F\left(p, \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k s_k\right) = F(p, s_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k (F'(p, s_0)s_k + Sf_k), \tag{13}$$

где через  $Sf_k$  обозначены слагаемые, зависящие от  $s_j, j < k$ , штрих означает производную  $F(x, y)$  по второму аргументу.

Подставив (9) и (13) в уравнение (11), стандартным способом (см. [2]) получаем систему уравнений для членов разложения  $s_j$ :

$$\varepsilon^0 : L_p s_0 = 0, \tag{14}$$

$$\varepsilon^1 : L_p s_1 = \sum_{i=1}^N \Psi_i s_{0, \zeta_i} - F(p, s_0), \tag{15}$$

$$\varepsilon^2 : L_p s_2 = \sum_{i=1}^N \Psi_i s_{1, \zeta_i} + s_{0, t} - F'(p, s_0)s_1, \tag{16}$$

...

$$\varepsilon^k : L_p s_k = \sum_{i=1}^N \Psi_i s_{k-1, \zeta_i} + s_{k-2, t} - F'(p, s_0)s_{k-1} - SF_{k-1}. \tag{17}$$

...

Решение уравнения (14) имеет вид

$$s_0 = \varphi_0(\bar{\zeta}, t) h_0(p), \tag{18}$$

где  $\varphi_0$  – пока неизвестная функция.

Для разрешимости уравнения (15) должно выполняться условие разрешимости – ортогональности правой части к собственной функции сопряженного к  $L_p$  оператора  $L_p^*$ , соответствующей его нулевому собственному значению (см. [2]).

В соответствии с этим наложим условие

$$IV. (F(p, U), h_0^*) = 0.$$

При выполнении условия IV условие разрешимости уравнения (15):

$$\left( \sum_{i=1}^N \Psi_i s_{0, \zeta_i} - F(p, s_0), h_0^* \right) = \left( \sum_{i=1}^N \Psi_i s_{0, \zeta_i}, h_0^* \right) - (F(p, s_0), h_0^*) = 0, \tag{19}$$

выполняется, так как в силу определения  $V_i = (D_i(p)h_0, h_0^*)$  и замечания к условию III для всех номеров  $i$  выполняются равенства

$$(\Psi_i s_{0, \zeta_i}, h_0^*) = (\Psi_i \varphi_{0, \zeta_i} h_0, h_0^*) = \varphi_{0, \zeta_i} ((D_i(p) - V_i)h_0, h_0^*) = \varphi_{0, \zeta_i} ((D_i(p)h_0, h_0^*) - V_i) = 0.$$

Соответственно решение уравнения (15) имеет вид

$$s_1 = \varphi_1(\bar{\zeta}, t) h_0(p) + G \left( \sum_{i=1}^N \Psi_i s_{0, \zeta_i} - F(p, s_0) \right), \tag{20}$$

где  $G$  – псевдообратный к  $L_p$  оператор.

**Замечание.** Назовем оператор  $G$  псевдообратным к оператору  $L_p$ , если решение уравнения  $L_p U = F$  при условии  $(F, h_0^*) = 0$  может быть записано в виде  $U = GF + Ch_0$ , где  $C$  не зависит от  $p$ .

Подставляя (18) и (20) в условие разрешимости уравнения (16):

$$\left( \sum_{i=1}^N \Psi_i s_{1, \zeta_i} + s_{0,t} - F'(p, s_0) s_1, h_0^* \right) = 0,$$

с учетом равенств  $(\Psi_i h_0, h_0^*) = 0 \forall i$ , а также условий III, IV получаем уравнение для определения функции  $\varphi_0$ :

$$\varphi_{0,t} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M_{ij} \varphi_{0, \zeta_i \zeta_j} + \sum_{i=1}^N (F_{eff,i}(\varphi_0))_{\zeta_i} = 0, \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned} M_{ii} &= (\Psi_i G \Psi_i h_0, h_0^*), \\ M_{ij} &= ((\Psi_i G \Psi_j h_0, h_0^*) + (\Psi_j G \Psi_i h_0, h_0^*)) / 2, \\ F_{eff,i}(\varphi_0) &= -(\Psi_i G F(p, \varphi_0 h_0), h_0^*). \end{aligned} \tag{22}$$

При условии разрешимости соответствующих уравнений функции  $s_k, k = 1, 2, \dots$ , имеют вид

$$s_k = \varphi_k(\bar{\zeta}, t) h_0(p) + G \left( \sum_{i=1}^N \Psi_i s_{k-1, \zeta_i} + s_{k-2,t} - F'(p, s_0) s_{k-1} - S F_{k-1} \right). \tag{23}$$

Действуя аналогично, выбрав номер  $k$ , записывая условие разрешимости уравнения для номера  $k + 2$ , получаем уравнение для определения функции  $\varphi_k$ :

$$\varphi_{k,t} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N M_{ij} \varphi_{k, \zeta_i \zeta_j} - \sum_{i=1}^N (F_{1,eff})'_{\zeta_i} = \Phi_k, \tag{24}$$

где  $F_{1,eff} = (\Psi_i G F'(p, \varphi_0 h_0) \varphi_k)_{\zeta_i} h_0, h_0^*$ ,  $\Phi_k$  выражаются через уже найденные  $\varphi_j, j < k$ . Отметим, что уравнение (24), в отличие от уравнения (21), линейное.

Таким образом, получены выражения для нахождения  $s_k$  и уравнения для определения входящих в эти выражения функций  $\varphi_k$ .

Наложим условие

V. Квадратичная форма  $\sum_{i,j=1}^N M_{ij} z_i z_j$ , где  $M_{ij}$  определены соотношениями (22), является знакоотрицательной (или полужнакоотрицательной).

При выполнении условия V уравнения (21), (24) будут параболическими.

### ПОСТРОЕНИЕ ПОГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИИ П

Отметим, что ввиду вполне определенного вида зависимости функций  $s_k(\bar{\zeta}, t, p)$  от переменной  $p$  функция  $S$ , вообще говоря, ни в каком приближении не может удовлетворять начальным условиям (2). Для удовлетворения этих условий строится пограничная функция  $\Pi(\bar{\zeta}, \tau, p)$  (см. [2]),  $\bar{\zeta} = \bar{x}/\varepsilon, \tau = t/\varepsilon^2$ , которая удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon^2 \left( \Pi_t + \sum_{i=1}^N D_i(p) \Pi_{x_i} \right) = L_p \Pi + \varepsilon \Pi F, \tag{25}$$

условию

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \Pi = 0, \tag{26}$$

а также совместно с функцией  $S$  удовлетворяет начальным условиям (2)

$$S(\bar{\xi}, 0, p) + \Pi(\bar{\xi}, 0, p) = w(\bar{\xi}, p). \tag{27}$$

Функция  $\Pi$  ищется в виде разложения по степеням  $\varepsilon$ :

$$\Pi(\bar{\xi}, \tau, p) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \pi_k(\bar{\xi}, \tau, p). \tag{28}$$

Перейдя от переменных  $(\bar{x}, t, p)$  к  $(\bar{\xi}, \tau, p)$ , представим уравнение (25) в виде

$$\Pi_{\tau} = L_p \Pi - \varepsilon \sum_{i=1}^N D_i(p) \Pi_{\xi_i} + \varepsilon P F. \tag{29}$$

Подставив разложения (9) и (28) в (7), переходя к переменным  $(\bar{\xi}, \tau, p)$ , разложим  $P F$  в ряд по степеням малого параметра

$$P F = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k P F_k. \tag{30}$$

Подставив (28) и (30) в уравнение (29), стандартным способом из [2] получаем систему уравнений для членов разложения  $p_i$ :

$$\varepsilon^0 : \pi_{0,\tau} = L_p \pi_0, \tag{31}$$

$$\varepsilon^1 : \pi_{1,\tau} = L_p \pi_1 + \tilde{P}_0, \tag{32}$$

$$\varepsilon^i : \pi_{i,\tau} = L_p \pi_i + \tilde{P}_{i-1}, \tag{33}$$

где  $\tilde{P}_i = -\sum_{j=1}^N D_j(p) \pi_{i-1, \xi_j} + P F_{i-1}$  выражаются через функции  $\pi_j$  с номерами  $j < i$ .

Потребуем выполнения следующих условий:

VI. Множество собственных значений оператора  $L_p : \lambda_0, \lambda_1, \dots$  – счетное.

VII. Собственные значения оператора  $L_p : \lambda_0, \lambda_1, \dots$  – однократны, а отвечающие им собственные функции  $h_0(p), h_1(p), \dots$  – ортогональны, нормированы, образуют полную систему функций.

VIII. Функция  $w(\bar{\xi}, p)$  разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд  $w(\bar{\xi}, p) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(\bar{\xi}) h_k(p)$ , который можно почленно дифференцировать по  $\xi$  достаточное количество раз. Отметим, что в этом случае коэффициенты ряда  $w_i(\bar{\xi})$  вместе с функцией  $w$  удовлетворяют неравенствам  $|w_i(\bar{\xi})| \leq C \exp(-\beta \|\bar{\xi}\|^2)$ , где  $C$  и  $\beta$  – константы.

Учитывая условие (26), выпишем  $\pi_0$ :

$$\pi_0(\bar{\xi}, \tau, p) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{0k}(\bar{\xi}) h_k(p) e^{\lambda_k \tau}, \tag{34}$$

где суммирование ведется по номерам, отвечающим ненулевым собственным значениям линейного оператора  $L_p$  (т.е. всем, кроме  $\lambda_0 = 0$ ).

Из равенства (27) следует

$$\varepsilon^0 : s_0(\bar{\xi}, 0, p) + \pi_0(\bar{\xi}, 0, p) = w(\bar{\xi}, p), \tag{35}$$

$$\varepsilon^i : s_i(\bar{\xi}, 0, p) + \pi_i(\bar{\xi}, 0, p) = 0, \quad i \geq 1. \tag{36}$$

Подставляя (18), (34) и условие VII в равенство (35), получаем

$$\varphi_0(\bar{\xi}, 0) h_0(p) + \sum_{k=1}^{\infty} C_{0k}(\bar{\xi}) h_k(p) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(\bar{\xi}) h_k(p). \tag{37}$$

Отсюда, в силу условий VI–VIII, получаем

$$\varphi_0(\bar{\xi}, 0) = w_0(\bar{\xi}), \quad (38)$$

$$C_{0k}(\bar{\xi}) = w_k(\bar{\xi}), \quad k > 0. \quad (39)$$

Таким образом, получено начальное условие (38) для уравнения (41), определяющего функцию  $\varphi_0$ , и определена функция  $\pi_0$  (34), (39).

Построение функций  $\pi_k(\bar{\xi}, \tau, p)$ ,  $k \geq 1$ , почти дословно повторяет соответствующие построения в [1], [2].

Функция  $\pi_1$  удовлетворяет уравнению

$$\pi_{1,\tau} = L_p \pi_1 + \Pi F_1, \quad (40)$$

решение которого имеет вид

$$\pi_1(\bar{\xi}, \tau, p) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{1k}(\bar{\xi}, \tau) h_k(p), \quad (41)$$

суммирование ведется по всем собственным функциям оператора  $L_p$ .

Подставив (41) в (40), умножив скалярно на  $h_j$ , получаем

$$C_{1j,\tau} = C_{1j} \lambda_j + \Gamma_j(\bar{\xi}, \tau), \quad (42)$$

где  $\Gamma_j(\bar{\xi}, \tau) = (\Pi F_1, h_j)$ .

Следуя [2], из условия  $C_{10} \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$  получаем

$$C_{10}(\bar{\xi}, 0) = -\int_{\tau}^{\infty} \Gamma_0(\bar{\xi}, s) ds. \quad (43)$$

Подставив (20) в виде  $s_1 = \varphi_1 h_0 + N_1$ , где  $N_1 = G\left(\sum_1^N \Psi_{i s_0, \zeta_i} - F(p, s_0)\right)$ , и (41) в (36), получаем

$$\varphi_1 h_0 + N_1 + \sum_{k=0}^{\infty} C_{1k} h_k = 0. \quad (44)$$

Умножив (44) на  $h_0$ , получаем

$$\varphi_1(\bar{\xi}, 0) = -(C_{10}(\bar{\xi}, 0) + (N_1, h_0)), \quad (45)$$

умножая (44) на  $h_j$ ,  $j \geq 1$ , получаем

$$C_{1j}(\bar{\xi}, 0) = -(N_1, h_j). \quad (46)$$

Таким образом, получено начальное условие (45) для функции  $\varphi_1$  и определена функция  $\pi_1$  (41).

Построение функций  $\pi_i$  и начальных условий для уравнений, определяющих  $\varphi_i$ , для  $i > 1$  проводится аналогично.

## ОЦЕНКИ ЧЛЕНОВ РАЗЛОЖЕНИЯ

Справедливы теоремы об оценках членов разложений.

**Теорема 1.** При выполнении условий I, V существуют постоянные  $T_1 > 0$ ,  $\kappa > 0$ ,  $C \geq 0$  такие, что на  $[0, T_1]$  все  $\varphi_i(\bar{\zeta}, t)$  для  $i \geq 0$  существуют, единственны и удовлетворяют оценкам

$$|\varphi_i(\bar{\zeta}, t)| < C e^{-\kappa \|\bar{\zeta}\|^2} \quad (47)$$

вместе с частными производными всех порядков.

**Замечание 1.** Величины  $T_1 > 0$ ,  $\kappa > 0$ ,  $C \geq 0$  могут зависеть от номера  $i$ .

**Замечание 2.** Из оценок (47) следуют оценки

$$|s_i(\bar{\zeta}, t, p)| < Ce^{-\kappa\|\bar{\zeta}\|^2}. \tag{48}$$

**Теорема 2.** При выполнении условий II, VI–VIII для любого  $T > 0$  все  $\pi_i(\bar{\xi}, \tau, p)$  на  $[0, T]$  существуют, единственны и имеют оценку

$$|\pi_i(\bar{\xi}, \tau, p)| < Ce^{-\kappa(\tau+\|\bar{\xi}\|^2)}, \tag{49}$$

где  $C > 0, \kappa > 0$  – постоянные.

**Доказательства** этих теорем практически дословно повторяют доказательства соответствующих теорем из [1], [2], [11] и здесь не приводятся. Отметим лишь, что доказательство теоремы 1 основано на методе последовательных приближений с использованием оценок фундаментального решения параболического уравнения (см. [8]).

### ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА R

Будем считать выполненным условие

IX. Пусть решение задачи (1), (2) существует и единственно на некотором промежутке  $[0, T_2]$ , где  $T_2 > 0$  – положительная величина, не зависящая от  $\varepsilon$ .

Оценка остаточного члена проводится по невязке.

**Теорема 3.** Пусть выполняются условия I–IX. Тогда на отрезке  $[0, T]$ , где  $T = \min(T_1, T_2)$ , решение задачи (1), (2) существует и для любого натурального  $M$  представимо в виде

$$\begin{aligned} U(\bar{x}, t) &= S_M(\bar{\zeta}, t, p) + \Pi_M(\bar{\xi}, \tau, p) + R = \\ &= \sum_{i=0}^M \varepsilon^i (s_i(\bar{\zeta}, t, p) + \pi_i(\bar{\xi}, \tau, p)) + R = U_M + R, \end{aligned}$$

где  $S_M, \Pi_M$  есть частичные суммы рядов (9) и (28) (ФАР), остаточный член  $R$  удовлетворяет задаче Коши

$$\varepsilon^2 \left( R_t + \sum_{i=1}^N D_i(p)R_{x_i} \right) = L_p R + \varepsilon R F + r, \quad |\bar{x}| < \infty, \quad t > 0, \quad R(\bar{x}, 0, p) = 0, \tag{50}$$

$r = O(\varepsilon^{M+1})$  – известная функция, удовлетворяющая оценке

$$|r(\bar{\xi}, \tau, p)| < C\varepsilon^{M+1} e^{-\kappa\|\bar{\xi}\|^2}.$$

**Доказательство теоремы 3.** Существование самой величины  $R$  следует из условия IX. Уравнение и начальные условия (50) для функции  $R$ , а также оценка функции непосредственно вытекают из алгоритма построения ФАР, а также оценок (48), (49).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Построено ФАР решения задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения переноса с многими пространственными переменными. Получены задачи для определения всех членов разложения решения по малому параметру.

2. Алгоритм построения ФАР решения задачи (1), (2) без труда распространяется на уравнения с переменными коэффициентами  $D_i(\bar{x}, p), L_p(\bar{x}), F(\bar{x}, U, p)$ .

3. Условие однократности нулевого собственного значения оператора  $L_p$  является существенным. При более высокой кратности нулевого собственного значения поведение решения и, соответственно, структура асимптотики будет иной.

4. Согласование масштабов малости параметра в уравнении (1) и начальных условиях (2) существенно. Если взять начальные условия (2) вида более узкой “шапочки”, то в окрестности начала координат необходимо строить внутреннее разложение, описывающее быстрые переходные процессы и общее ФАР строить методом согласования (см. [10]). В противном случае построение ФАР решения задачи (1), (2) становится тривиальным.

5. Поведение главного члена ФАР в соответствии с параболическим уравнением (21) и, соответственно, бесконечная гладкость ФАР в дальней зоне не зависимо от гладкости начальных условий (2) не противоречит основным свойствам решения уравнения переноса, в соответствии с которыми возможные разрывы начальных условий должны распространяться вдоль характеристик. В [11] прослежена эволюция решения начально-краевой задачи для системы двух уравнений с одной пространственной переменной при несогласованных начальных и краевых условиях. В этом случае точное решение имеет разрыв I рода, распространяющийся вдоль характеристики, выходящей из начала координат. В [11] показано, что этот разрыв экспоненциально затухает как  $\exp(-t/\epsilon^2)$ , на временах порядка  $O(1)$  экспоненциально мал и, соответственно, не входит ни в один член ФАР с конечной степенью параметра  $\epsilon$ .

6. Задача (1), (2) описывает разные процессы в многофазных средах, в частности, процессы переноса различных субстанций. Ход этих процессов можно разделить на два этапа. На начальном этапе,  $t = O(\epsilon^2)$ , решение определяется функциями  $S + \Pi$ , затем происходит установление динамического равновесия между фазами, что соответствует затуханию функции  $\Pi$ . На следующем этапе (в дальней зоне,  $t = O(1)$ , где в силу оценок (49) функция  $\Pi$  асимптотически мала,  $P = O(\epsilon^M) \forall M > 0$ ) решение определяется функцией  $S$ , главный член которой  $s_0 = \varphi_0(\bar{\zeta}, t)h_0(p)$  описывается параболическим уравнением (21) типа многомерного уравнения Бюргерса. Известно (см. [9]), что уравнения типа Бюргерса могут иметь решения вида бегущих волн.

7. Реальные процессы переноса в многофазных средах, как правило, развиваются в трехмерном пространстве. В случае трехмерного пространства при бесконечном количестве фаз начальное возмущение будет перемещаться с эффективной скоростью  $V_{\text{eff}}$  и “диффундировать” по всем трем осям в соответствии с уравнениями (21), (24) и определением переменных  $\bar{\zeta}$ .

8. Знание структуры решения в дальней зоне позволяет строить подходящие разностные схемы и выбирать адаптивные сетки, что актуально для задач большой размерности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Заборский А.В., Нестеров А.В. Асимптотическое разложение решения задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного нелинейного уравнения // Вестник МИФИ. 2015. Т. 4. № 4. С. 333–338.
2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. 106 с.
3. Тупчиев В.А., Чепурко А.Н. Асимптотика решения спектральной задачи переноса нейтронов в слое // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32. № 6. С. 847–850.
4. Латышев В.Н. Об асимптотике решения сингулярно возмущенной спектральной задачи, возникающей в теории переноса. Обнинск: ОИАТЭ, 1987. 26 с.
5. Крючков Э.Ф. Теория переноса нейтронов. Москва.: МИФИ, 2007.
6. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.
7. Галкин В.А. Анализ математических моделей: системы законов сохранения, уравнения Больцмана и Смолуховского. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.
8. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 стр.
9. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны // Серия Синергетика: от прошлого к будущему. № 80. Москва.: URSS, 2017. С. 308.
10. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. С. 334.
11. Нестеров А. В. Об асимптотике решения системы уравнений диффузия–сорбция при малых коэффициентах диффузии // Ж. вычисл. матем. и математ. физ. 1989. Т. 29. № 9. С. 1318–1330.

---

---

**УРАВНЕНИЯ  
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

---

---

УДК 517.955

**SINC-MUNTZ-LEGENDRE COLLOCATION METHOD FOR SOLVING  
A CLASS OF NONLINEAR FRACTIONAL PARTIAL  
DIFFERENTIAL EQUATIONS<sup>1)</sup>**

© 2021 г. **M. Shareef Ajeel<sup>a,\*</sup>, M. Gachpazan<sup>a</sup>, Ali R. Soheili<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*Department of Applied Mathematics, School of Mathematical Sciences Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran*

<sup>\*</sup>*e-mail: mahmoodzz321@gmail.com*

Поступила в редакцию 21.01.2021 г.  
Переработанный вариант 07.06.2021 г.  
Принята к публикации 09.08.2021 г.

**Метод коллокаций для решения класса нелинейных уравнений с дробными производными.** Дан метод решения класса нелинейных уравнений в частных производных дробных степеней. Метод включает разложение решения по пространственной переменной в виде Sinc-функций и по полиномам Мюнца-Лежандра дробной степени по времени. Предложенная аппроксимация решения и использование метода коллокации приводят задачу к системе нелинейных алгебраических уравнений для искомых коэффициентов. Приведенные данные расчетов модельных задач иллюстрируют точность метода. Библ. 21. Фиг. 4. Табл. 3.

**Ключевые слова:** Sinc-функции, полиномы Мюнца-Лежандра дробной степени, уравнения в частных производных дробной степени, метод коллокаций.

**DOI:** 10.31857/S0044466921120024

---

<sup>1)</sup>Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ СМЕШАННОЙ РАЗМЕРНОСТИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В СИСТЕМЕ ГРУНТ–ТРУБА В КРИОЛИТОЗОНЕ<sup>1)</sup>

© 2021 г. В. И. Васильев<sup>1</sup>, М. В. Васильева<sup>1</sup>, Д. Я. Никифоров<sup>1</sup>, Н. И. Сидняев<sup>2</sup>,  
С. П. Степанов<sup>1,\*</sup>, А. Н. Цеева<sup>3</sup>

<sup>1</sup> 677000 Якутск, ул. Белинского, 58, СВФУ, Россия

<sup>2</sup> 105005 Москва, 2-я Бауманская ул., 5, стр. 1, МГТУ, Россия

<sup>3</sup> 677000 Якутск, ул. Дзержинского, 20, ОАО ЯкутПНИИС, Россия

\*e-mail: [sepe2a@inbox.ru](mailto:sepe2a@inbox.ru)

Поступила в редакцию 10.01.2020 г.

Переработанный вариант 16.07.2021 г.

Принята к публикации 04.08.2021 г.

В работе построена и численно реализована математическая модель связанного процесса теплообмена многолетнемерзлого основания здания с системой замораживающих труб и атмосферным воздухом. В качестве математической модели теплопереноса в основании здания взята многомерная задача Стефана в энтальпийной постановке со сглаженными коэффициентами и размазанным источником по температуре. В системе труб теплоперенос описывается одномерным уравнением конвекции-кондукции. Численные результаты на модельных задачах показали, что предложенный численный метод позволяет существенно снижать вычислительную трудоемкость задачи. Библ. 39. Фиг. 6. Табл. 5.

**Ключевые слова:** криолитозона, тепломассоперенос, задача Стефана, метод конечных элементов, вычислительный алгоритм.

**DOI:** 10.31857/S0044466921120176

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассмотрим связанную модель тепломассопереноса в системе грунт–труба, описываемую системой уравнений параболического типа в двумерной или трехмерной области  $\Omega$ , где тепломассоперенос в сети труб изучается в одномерной постановке, поскольку диаметр трубы существенно меньше размеров расчетной области  $\Omega$  и температура по ее сечению практически постоянна. Дискретизация подобных задач при полноразмерном учете толщины труб приводит к задачам большой размерности вследствие необходимости сгущения расчетной сетки в окрестности труб.

Система грунт–труба широко используется в инженерных приложениях. Например, такими системами описывается тепловое взаимодействие многолетнемерзлых грунтов с проложенными в них трубопроводными системами, заполненными теплоносителями. Они могут существенно влиять на температурное состояние вмещающих грунтов и, следовательно, на их термомеханические характеристики [1], [2]. Подобные системы получают и при моделировании системы сезонно-охлаждающих устройств (СОУ), которые устанавливаются с целью формирования массива мерзлых грунтов под фундаментами зданий и инженерных сооружений для предотвращения их размораживания в летне-осенний период. Кроме того, есть и другой класс трубопроводных систем, получивших широкое распространение – тепловые насосы. Они используются для выкачивания тепла из грунта для обогрева зданий (геотермальный тепловой насос) с возможностью переключения с режима отопления зимой на режим конденсирования летом, их математические модели также описываются системами грунт–труба [3]. Такие системы используют разницу температур грунта и пролегающих труб, для обогрева и охлаждения оснований зданий.

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФ (грант 19-11-00230) и Мегагранта Правительства РФ (проект 14.Y26.31.0013).

Подобные задачи встречаются и при решении других прикладных задач. Например, при моделировании фильтрации в трещиновато-пористой среде учет трещин требует специального рассмотрения, поскольку фильтрация в таких средах обладает специфическими свойствами. Трещины отличаются большей проницаемостью и оказывают существенное влияние на течение в пористой среде. Традиционно для связанной системы трещин используют модели двойной пористости [4], [5]. Основной идеей, на которой базируются такие модели, является отдельный расчет течения жидкостей в пористой среде и в трещинах с заданием перетока между ними. Математическая модель двойной пористости записывается следующим образом:

$$c_m \frac{\partial p_m}{\partial t} - \operatorname{div}(k_m \operatorname{grad} p_m) - \alpha_{mf}(p_m - p_f) = q_m, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, t_{\max}]$$

$$c_f \frac{\partial p_f}{\partial t} - \operatorname{div}(k_f \operatorname{grad} p_f) + \alpha_{mf}(p_m - p_f) = q_f, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, t_{\max}]$$

где  $p_m$  и  $p_f$  — давление в пористой среде и в трещинах. Взаимодействие континуумов задается введением функции перетока  $\alpha_{mf}$ , обеспечивающей массообмен между пористой средой и трещинами. Отметим, что в настоящее время существуют много модификаций данной модели, в которых течение в трещинах рассматривается на размерность ниже [6]–[9].

В медицине подобные математические модели встречаются при исследовании течения крови в сосудах и мелких капиллярах с учетом перетока между ними [10]. При этом сеть мелких капилляров рассматривается как однородная среда. В некоторых случаях артерии рассматриваются как сеть сосудов, имеющая довольно сложную геометрическую структуру и рассмотрение полных трехмерных уравнений Навье–Стокса для описания кровотока в них становится затруднительным. Математические модели со смешанной размерностью позволяют учитывать сложные многомасштабные процессы, происходящие в подобных прикладных задачах, которые описываются системой уравнений:

$$-\operatorname{div}(k_t \operatorname{grad} p_t) + \beta(p_t - p_v) \delta_\gamma = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, t_{\max}]$$

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} \left( k_v \frac{\partial p_v}{\partial \tau} \right) + \beta(p_v - p_t) = 0, \quad x \in \gamma, \quad t \in (0, t_{\max}]$$

где  $\gamma$  — одномерная область сети сосудов,  $p_t$  и  $p_v$  — давление в среде и в сети сосудов, через  $\delta_\gamma$  обозначим меру Дирака на одномерной области  $\gamma$  (трещина). Этот термин меры выражает сохранение скорости кровотока (кровь, которая теряется в сосуде, поступает в ткань).

Представленные модели имеют много общего, их отличительной особенностью является использование связанной системы уравнений для вмещающей породы и сети трещин связанных посредством наличия перетока между ними.

Задачи из указанного класса называются задачами со смешанной размерностью. При численной аппроксимации таких задач используются конформные и неконформные расчетные сетки. Под конформными сетками подразумеваются сетки, в которых элементы сетки удовлетворяют условию: если два элемента сетки пересекаются (труба и грунт), то область их пересечения представляет собой их общую грань (или ребро), т.е. соединяются по принципу “узел в узел” [11], [12]. На конформных расчетных сетках можно использовать методы как прямой аппроксимации задач с различными размерностями, так и методы прямого учета, подобные методу дискретной модели трещин (discrete fracture model, DFM), используемого при численном решении задач фильтрации [13]–[17]. В методе конечных элементов для неконформных расчетных сеток используется метод XFEM, что приводит к построению (обогащению) пространства базисных функций [18]. Еще одним методом, в котором используются неконформные сетки — встроенная модель дискретных трещин (embedded discrete fracture model, EDFM). Она базируется на концепции двойной пористости и явно учитывает влияние каждой трещины. В ней используется структурированная сетка для представления матрицы и вводятся дополнительные перетоки путем учета пересечения трещин с матричной сеткой. Таким образом, отпадают проблемы, связанные с необходимостью согласования неструктурированной сетки [19].

Математическая модель теплопереноса в грунте описывается уравнением теплопроводности и учитывает фазовый переход поровой влаги в лед и обратно. Для таких моделей существует два подхода учета фазового перехода: первый, это когда на поверхности (границе) фазового температура постоянна, а второй подход основан на использовании двухфазной модели. В двухфазной

модели нет четкой границы раздела мерзлой и талой зон. Фазовый переход поровой влаги в лед проходит в протяженной области (переходной зоне) — области размазывания в предположении, что фазовый переход проходит в заданном интервале температур [20]–[22].

При построении вычислительной реализации необходимо строить геометрические области и расчетные сетки, в которых геометрическая область труб разрешается сеточно. Расчетные сетки для таких областей имеют области локального сгущения в окрестности труб и приводят при дискретизации исходной задачи к очень большим системам уравнений. Альтернативный подход, используемый в данной работе, основывается на понижении размерности модели на трубе и сведении ее к одномерной гидравлической модели, и далее, в предположении непрерывности поля температур ее аппроксимации с помощью методов, которые аналогичны методам, используемым при моделировании трещин в нефтегазоносных пластах [23], [24]. Полученная таким образом дискретная задача приводит на каждом временном слое к замкнутой системе алгебраических уравнений. Систему уравнений для нахождения распределения температуры можно расширить, добавив учет конвективного переноса тепла (тепломассопереноса). Для расчета скорости фильтрации в грунте используются закон Дарси и уравнение сохранения массы [25], [26]. Математическая модель учитывает наличие фазового перехода поровой влаги, т.е. возникновение зоны мерзлого грунта в области вокруг замораживающих труб и поверхности грунта, обусловленной знакопеременной температурой окружающей среды. Для численного решения задачи фильтрации поровой воды в грунте используется метод фиктивных областей в мерзлом грунте, который был ранее рассмотрен и описан авторами в работе [27].

Основной целью данной работы является построение эффективного вычислительного алгоритма для решения дискретного аналога рассматриваемой задачи в системе грунт–сеть труб [27]–[29].

Работа состоит из введения и семи разделов. В разд. 2 работы описывается энтальпийная математическая модель теплопереноса в промерзающем/протаивающем основании здания со сглаживанием разрывных коэффициентов в грунте с учетом фазового перехода и размазыванием функции источника по температуре. В разд. 3 выводится математическая модель пониженной размерности для описания распределения температуры в трубе. Разд. 4 посвящен построению связанной модели тепло- и массопереноса для системы грунт–труба. В разд. 5 представлена конечно-элементная аппроксимация модели по пространственным переменным и неявная дискретизация по времени. В шестом и в седьмом разделах приводятся расчеты модельной задачи распределения температуры для теплонасосов в двумерной и в трехмерной постановках соответственно.

## 2. ТЕПЛОПЕРЕНОС В ГРУНТЕ

Рассмотрим математическую модель, описывающую динамику распределения температуры системы грунт–труба с учетом фазовых переходов воды в лед и обратно, при заданной температуре фазового перехода  $T^*$  в области  $\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+$  (см. [30], [31]). Здесь  $\Omega^+(t)$  — область, занятая талым грунтом, где температура превышает температуру фазового перехода и  $\Omega^-(t)$  — область, занятая мерзлым грунтом:

$$\Omega^+(t) = \{x \mid x \in \Omega, \quad T(x, t) > T^*\} \quad \Omega^-(t) = \{x \mid x \in \Omega, \quad T(x, t) < T^*\}.$$

Фазовый переход происходит на поверхности раздела областей, занятых талым и мерзлым грунтами  $S = S(t)$ .

Для моделирования процессов теплопереноса с фазовыми переходами используется классическая модель Стефана [32], [33], описывающая тепловые процессы, сопровождающиеся фазовыми превращениями среды с поглощением или выделением скрытой теплоты на поверхности раздела талого и мерзлого грунтов

$$(\alpha(\phi) + \rho^+ L \delta(T - T^*)) \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda(\phi) \operatorname{grad} T) = f, \quad (2.1)$$

где  $L$  — удельная теплота фазового перехода,  $\delta(T - T^*)$  — дельта-функция Дирака. Для коэффициентов уравнения имеем следующие соотношения:

$$\alpha(\phi) = \rho^- c^- + \phi(\rho^+ c^+ - \rho^- c^-), \quad \lambda(\phi) = \lambda^- + \phi(\lambda^+ - \lambda^-),$$

$$\phi = \begin{cases} 0 & T < T^*, \\ 1 & T > T^*, \end{cases} \quad \delta(T - T^*) = \frac{d\phi}{dT},$$

где  $\rho^+, c^+$  и  $\rho^-, c^-$  – плотность и удельная теплоемкость талой и мерзлой зон, соответственно.

Поскольку рассматривается процесс распространения тепла в насыщенной пористой среде, то для коэффициентов объемной теплоемкости в мерзлом и талом грунтах соответственно имеем

$$c^- \rho^- = (1 - m)c_{sc}\rho_{sc} + mc_i\rho_i, \quad c^+ \rho^+ = (1 - m)c_{sc}\rho_{sc} + mc_w\rho_w,$$

где  $m$  – пористость. Индексы  $sc, w, i$  обозначают соответственно скелет пористой среды, воду и лед. Для коэффициентов теплопроводности в талой и мерзлой зоне имеем аналогичные соотношения:

$$\lambda^- = (1 - m)\lambda_{sc} + m\lambda_i, \quad \lambda^+ = (1 - m)\lambda_{sc} + m\lambda_w.$$

На практике фазовые превращения не проходят мгновенно и могут проходить в малом интервале температуры  $[T^* - \Delta, T^* + \Delta]$ . В качестве функции  $\phi$  и  $\delta(T - T^*)$  возьмем достаточно гладкие функции  $\phi_\Delta$  и  $\delta_\Delta(T - T^*)$  [34], зависящие от температуры:

$$\phi_\Delta = \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{T - T^*}{\sqrt{2}\Delta} \right) \right), \quad \delta_\Delta(T - T^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta} \exp \left( -\frac{(T - T^*)^2}{2\Delta^2} \right).$$

Тогда получим следующее уравнение для температуры в области  $\Omega$ :

$$c\rho_\Delta(T) \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda_\Delta(T)\operatorname{grad} T) = f, \tag{2.2}$$

где  $c\rho_\Delta(T) = \alpha(\phi_\Delta) + \rho^+ L\delta_\Delta(T - T^*), \lambda_\Delta(T) = \lambda(\phi_\Delta)$ . Полученное уравнение (2.2) является стандартным квазилинейным параболическим уравнением.

### 3. ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС В ТРУБЕ

Для расчета теплового режима системы труб будем использовать модель пониженной размерности – теплогидравлическую модель (см. фиг. 1). В данной модели мы предполагаем, что в трубе циркулирует хладоноситель (фреон) с достаточно высокой температурой кипения, и поэтому в данной модели мы не будем учитывать фазовый переход хладоносителя в системе труб. Запишем уравнение теплопроводности, описывающее тепловой режим движущегося по трубе хладоносителя в цилиндрической системе координат:

$$c_p\rho_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_\xi \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r\lambda_p \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda_p \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma, \quad t \in (0, t_{\max}] \tag{3.1}$$

где  $c_p, \rho_p$  и  $\lambda_p$  – удельная теплоемкость, плотность и теплопроводность теплоносителя,  $T$  – температура хладоносителя в трубе,  $v_r$  – скорость движения хладоносителя в радиальном направлении и  $v_\xi$  – скорость движения хладоносителя в направлении движения потока.

При описании теплообмена хладоносителя в трубе с вмещающим грунтом необходимо учитывать теплопередачу через тонкую цилиндрическую стенку. Для математического описания данного процесса запишем линейный тепловой поток следующим образом:

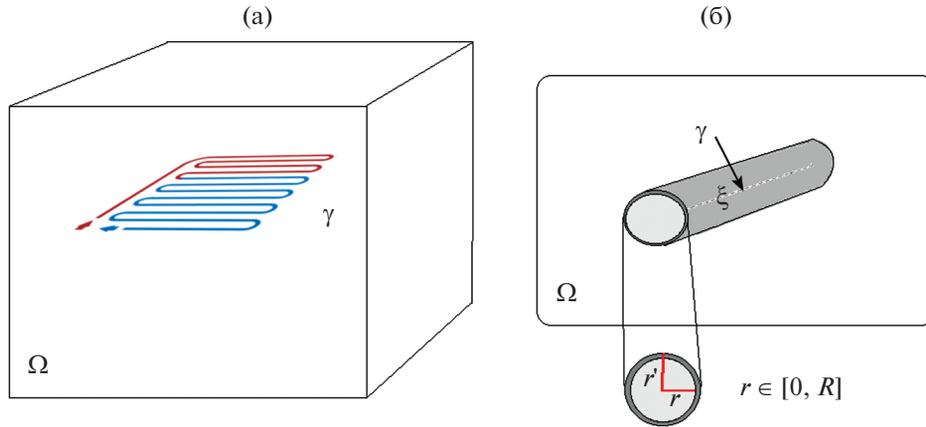
$$q_c = -\alpha\pi(T - T_p), \quad r = R, \tag{3.2}$$

где  $q_c$  – тепловой поток через цилиндрическую стенку,  $T$  – температура грунта,  $T_p$  – температура хладоносителя в трубе.

Здесь для вычисления коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  использованы формулы из работы [35]

$$\alpha = \frac{1}{\beta}, \quad \beta = \frac{1}{r\alpha_p} + \frac{1}{2\lambda_c} \ln \frac{r'}{r} + \frac{1}{r'\alpha_g}, \tag{3.3}$$

где  $\beta$  – термическое сопротивление стенки,  $\lambda_c$  – коэффициент теплопроводности стенки трубы,  $\alpha_p$  и  $\alpha_g$  – коэффициенты теплоотдачи от хладоносителя к стенке и от стенки к грунту,  $r$  и  $r'$  –



**Фиг. 1.** Иллюстрация расчетной области для системы грунт–труба. (а)  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ),  $\gamma \in \mathbb{R}^1$  и  $\gamma \in \Omega$ . (б) усредненная по радиусу модель для сети труб,  $r \in [0, R]$  и  $R$  – радиус трубы.

внутренний и наружный радиусы трубы (см. фиг. 1, где наружный радиус подразумевает учет толщины стенки трубы).

Поскольку для течения в трубах характерны значительные скорости движения хладоносителя в продольном направлении, то целесообразно пренебречь радиальной скоростью течения,  $v_r = 0$ . Далее уравнение (3.1) умножим на радиус  $r$  и проинтегрируем полученное уравнение вдоль оси  $r \in [0, R]$

$$\int_0^R c_p \rho_p r \frac{\partial T}{\partial t} dr + \int_0^R c_p \rho_p r v_\xi \frac{\partial T}{\partial \xi} dr - \int_0^R r \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda_p \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) dr + \lambda_p R \frac{\partial T}{\partial r} = 0. \tag{3.4}$$

Определим среднюю температуру хладоносителя в трубе:

$$T_p = \frac{2}{R^2} \int_0^R r T dr$$

и с учетом контакта трубы с грунтом (3.2)

$$\lambda_p R \frac{\partial T_p}{\partial r} = R \alpha \pi (T - T_p)$$

получим следующее уравнение:

$$\pi R^2 c_p \rho_p \left( \frac{\partial T_p}{\partial t} + v_\xi \frac{\partial T_p}{\partial \xi} \right) - \pi R^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda_p \frac{\partial T_p}{\partial \xi} \right) + 2 R \alpha \pi (T - T_p) = 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma, \quad t \in (0, t_{\max}] \tag{3.5}$$

описывающее модель пониженной размерности в трубе (теплогидравлическая модель).

#### 4. РАСЧЕТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим систему теплового насоса, которая используется для выкачивания тепла из грунта для обогрева зданий с возможностью переключения с режима отопления зимой на режим конденсирования летом. Математическая модель описывается системой грунт–труба, которая использует разницу температур грунта и пролегающих труб. Данная модель описывает тепловое взаимодействие грунтов с трубопроводными системами, заполненными теплоносителями.

Для данной модели, когда стенки трубы сделаны из высокотеплопроводного материала, можно предположить непрерывность температуры на границе контакта трубы и грунта. В данном случае воспользуемся дельта-функцией Дирака и зададим теплоперенос в виде внутренних стоков (источников) тепла в уравнении (2.2):

$$f = q \delta_\gamma, \tag{4.1}$$

где  $q$  – мощность стока тепла и  $\delta_\gamma$  – дельта-функция Дирака, определяющая положение трубы в грунтовом массиве

$$\delta_\gamma(x) = \begin{cases} 1/S, & x \in \gamma, \\ 0, & x \notin \gamma, \end{cases} \quad (4.2)$$

где  $S$  – площадь сечения трубы.

Далее введем индекс  $m$  для грунта и  $p$  для трубы. Предполагая идеальный тепловой контакт между наружной поверхностью труб и окружающего массива грунтов, мощность стоков тепла запишем в виде:

$$q = 2\pi R\alpha_p(T_m - T_p), \quad (4.3)$$

где  $\alpha_p$  – коэффициент теплообмена между поверхностью трубы и теплоносителем, циркулирующим в грунтовом теплообменнике,  $T_m$  – температура грунта,  $T_p$  – температура теплоносителя и  $R$  – радиус трубы. Связанную систему уравнений для температуры грунта (2.1), (4.3) и для температуры системы труб (3.5) запишем в следующем обобщенном виде:

$$\begin{aligned} c\rho_\Delta(T_m)\frac{\partial T_m}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda_\Delta(T_m)\operatorname{grad}T_m) + \kappa(T_m - T_p)\delta_\gamma(x) &= 0, \quad x \in \Omega, \\ b_p\left(\frac{\partial T_p}{\partial t} + v_\xi\frac{\partial T_p}{\partial \xi}\right) - S\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda_p\frac{\partial T_p}{\partial \xi}\right) - \kappa(T_m - T_p) &= 0, \quad x \in \gamma, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где  $b_p = Sc_p\rho_p$ ,  $S = \pi R^2$ ,  $\kappa = 2\pi R\alpha_p$ ,  $\gamma$  – кривая, описывающая расположение системы труб.

Систему уравнений дополним начальным условием

$$T_m(x) = T_p(x) = T_0, \quad x \in \Omega, \quad t = 0, \quad (4.5)$$

и граничным условием Неймана для грунта:

$$-\lambda_\Delta(T_m)\frac{\partial T_m}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (4.6)$$

а на концах трубы зададим различные граничные условия Дирихле и Неймана:

$$\begin{aligned} T_p &= T_d, \quad \xi \in \xi_D, \\ -\lambda_p\frac{\partial T_p}{\partial n} &= 0, \quad \xi \in \xi_N. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Рассмотрим также и полноразмерную математическую модель без понижения порядка по пространственным переменным для уравнения в трубе

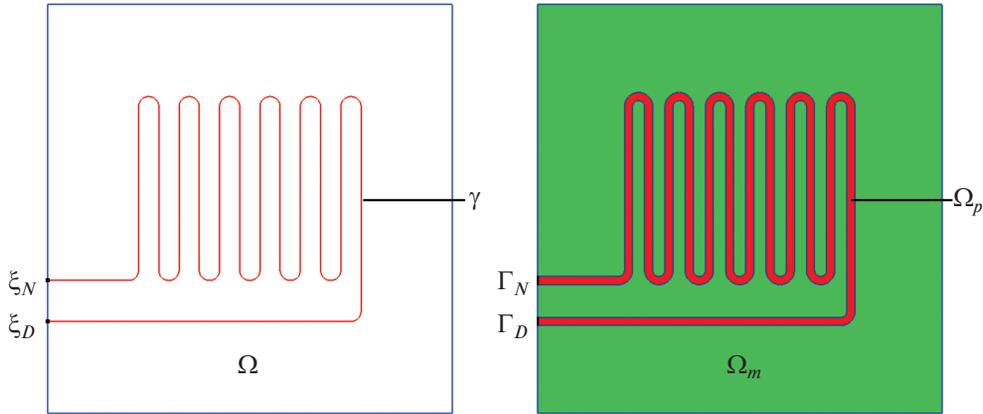
$$\begin{aligned} c\rho_\Delta(T_m)\frac{\partial T_m}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda_\Delta(T_m)\operatorname{grad}T_m) + \alpha_p(T_m - T_p) &= 0, \quad x \in \Omega_m, \\ c_p\rho_p\left(\frac{\partial T_p}{\partial t} + v_\xi \cdot \operatorname{grad}T_p\right) - \operatorname{div}(\lambda_p\operatorname{grad}T_p) - \alpha_p(T_m - T_p) &= 0, \quad x \in \Omega_p, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где  $\Omega_p$  – двумерная подобласть трубы (см. фиг. 2).

Данная система параболических уравнений (4.8) замыкаются начальным и граничными условиями для грунта (4.6) и (4.7), а для области трубы зададим фиксированную температуру  $T_p = T_d$  на границе  $x \in \Gamma_D$ , а на выходе – однородное граничное условие Неймана  $-\lambda_p\frac{\partial T_p}{\partial n} = 0$  при  $x \in \Gamma_N$ .

## 5. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РАСЧЕТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Для аппроксимации рассматриваемой математической модели изучаемого процесса (10)–(13) будем использовать неконформные сетки и метод конечных элементов [9], [36]. Определим триангуляцию  $T_m^h$  расчетной области  $\Omega$ , где  $h$  – некоторый параметр, характеризующий простран-



Фиг. 2. Двумерная область.

ственную сетку и конечно-элементное разбиение  $T_p^h$  расчетной области  $\gamma$ . Определим пространства

$$V_m = \hat{V}_m = H^1(\Omega), \quad V_p = \{v \in H^1(\gamma) : v = T_d, x \in \xi_D\},$$

$$\hat{V}_p = \{v \in H^1(\gamma) : v = 0, x \in \xi_D\},$$

и введем конечномерные пространства  $V_m^h, \hat{V}_m^h \subset V_m, V_p^h, \hat{V}_p^h \subset V_p$ . Далее определим в них следующую вариационную постановку задачи: найти  $(T_m, T_p) \in (V_m^h, V_p^h)$  такие, что

$$\int_{\Omega} c\rho_{\Delta}(\tilde{T}_m^{n+1}) \frac{T_m^{n+1} - T_m^n}{\tau} v_m dx + \int_{\Omega} \lambda_{\Delta}(\tilde{T}_m^{n+1}) \text{grad } T_m^{n+1} \cdot \text{grad } v_m dx + \int_{\gamma} \kappa(T_m^{n+1} - T_p^{n+1}) v_p d\xi = 0,$$

$$\int_{\gamma} b_p \left( \frac{T_p^{n+1} - T_p^n}{\tau} + v_{\xi} \cdot \text{grad}_{\xi} T_p^{n+1} \right) v_p d\xi + S \int_{\gamma} \lambda_p \text{grad}_{\xi} T_p^{n+1} \cdot \text{grad}_{\xi} v_p d\xi -$$

$$- \int_{\gamma} \kappa(T_m^{n+1} - T_p^{n+1}) v_p d\xi = 0, \tag{5.1}$$

где  $v_m \in \hat{V}_m^h$  и  $v_p \in \hat{V}_p^h$ . Для аппроксимации по времени используем устойчивую неявную дискретизацию с шагом по времени  $\tau$ , где  $T_m^n$  и  $T_p^n$  – значения температуры с предыдущего временного слоя.

Будем использовать одну из схем, предложенных в работе [28], где вместо нелинейных коэффициентов будем использовать линейризованные коэффициенты со значениями температуры  $\tilde{T}_m^{n+1}$ , которые являются решениями аналогичной системы:

$$\int_{\Omega} c\rho_{\Delta}(T_m^n) \frac{\tilde{T}_m^{n+1} - T_m^n}{\tau} v_m dx + \int_{\Omega} \lambda_{\Delta}(T_m^n) \text{grad } \tilde{T}_m^{n+1} \cdot \text{grad } v_m dx + \int_{\gamma} \kappa(\tilde{T}_m^{n+1} - T_p^{n+1}) v_p d\xi = 0,$$

$$\int_{\gamma} b_p \left( \frac{T_p^{n+1} - T_p^n}{\tau} + v_{\xi} \cdot \text{grad}_{\xi} T_p^{n+1} \right) v_p d\xi + S \int_{\gamma} \lambda_p \text{grad}_{\xi} T_p^{n+1} \cdot \text{grad}_{\xi} v_p d\xi -$$

$$- \int_{\gamma} \kappa(\tilde{T}_m^{n+1} - T_p^{n+1}) v_p d\xi = 0. \tag{5.2}$$

Далее, аппроксимацию по пространству покажем только для системы (5.1), для системы (5.2) дискретный аналог строится аналогично.

Поясним проблемы вычислительной реализации в следующем виде:

$$T_m = \sum_i^{N_m} T_m^i \phi^i, \quad T_p = \sum_i^{N_p} T_p^i \psi^i, \quad w = \sum_i^{N_m} \phi^i, \quad w_p = \sum_i^{N_m} \psi^i,$$

где  $T_m^i$  и  $T_p^i$  – неизвестные значения,  $\phi^i$  – конечно-элементные базисы при триангуляции  $\mathcal{T}_m^h$ ,  $\psi^i$  – базисные функции разбиения  $\mathcal{T}_p^h$ ,  $N_m$  – число элементов базиса  $\mathcal{T}_m^h$ ,  $N_p$  – число элементов базиса  $\mathcal{T}_p^h$ . Таким образом, после дискретизации системы (5.1) получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} A_m & -A_{mp} \\ -A_{pm} & A_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_m \\ T_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_m \\ f_p \end{pmatrix},$$

где подматрицы и правая часть вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} A_m &= \left\{ a_{ij}^m = \int_{\Omega} \frac{c\rho_{\Delta}(\tilde{T}_m^{n+1})}{\tau} \phi^i \phi^j dx + \int_{\Omega} \lambda_{\Delta}(\tilde{T}_m^{n+1}) \text{grad} \phi^j \cdot \text{grad} \phi^i dx + \int_{\gamma} \kappa \phi^i \phi^j d\xi \right\}, \\ A_p &= \left\{ a_{ij}^p = \int_{\gamma} b_p \left( \frac{\psi^j}{\tau} + v_{\xi} \cdot \text{grad}_{\xi} \psi^j \right) \psi^i d\xi + S \int_{\gamma} \lambda_p \text{grad}_{\xi} \psi^j \cdot \text{grad}_{\xi} \psi^i d\xi + \int_{\gamma} \kappa \psi^i \psi^j d\xi \right\}, \\ A_{mp} &= \left\{ a_{ij}^{mp} = \int_{\gamma} \kappa \psi^j \phi^i d\xi \right\}, \\ A_{pm} &= \left\{ a_{ij}^{pm} = \int_{\gamma} \kappa \phi^j \psi^i d\xi \right\}, \\ f_m &= \left\{ f_i^m = \int_{\Omega} \frac{c\rho_{\Delta}(\tilde{T}_m^{n+1})}{\tau} T_m^n \phi^i dx \right\}, \\ f_p &= \left\{ f_i^p = \int_{\gamma} \frac{b_p}{\tau} T_p^n \psi^i d\xi \right\}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

а также  $T_m$  и  $T_p$  – векторы решения. Отметим, что  $A_{mp} = A_{pm}^T$ .

Ввиду того, что мы рассматриваем связанную задачу, описывающую быстро- и медленнопротекающие процессы, очевидно, что для данной задачи хорошо подойдут схемы расщепления. Пусть  $y = (T_m, T_p)^T$ , тогда дискретную систему можно представить в виде  $Ay = b$ , где

$$A = \begin{pmatrix} A_m & -A_{mp} \\ -A_{mp}^T & A_p \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_m \\ b_p \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Представим матрицу  $A$  в виде суммы матриц  $A = A_1 + A_2$ , тогда получим явно-неявную схему  $A_1 y^{n+1} + A_2 y^n = b$ . В зависимости от  $A_1$  и  $A_2$  получаются различные схемы расщепления [37]. В этом случае на каждом временном слое сначала вычисляется уравнение для быстрого процесса. Только потом рассчитывается медленный процесс [38]. В нашем случае это приводит к системе уравнений с верхне-треугольной матрицей:

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_m & -A_{mp} \\ 0 & A_p \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -A_{mp}^T & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

В данной схеме сначала решается уравнение для трубы, температура грунта берется с предыдущего временного слоя. Затем найденная температура в трубе используется для вычисления температуры в грунте [37].

**Таблица 1.** Количество неизвестных для сеток, где  $N = N_m + N_p$

Сетка	$N_m$	$N_p$	$N$
Эталонная сетка	501 309	51 719	553 028
Сетка 1	22 801	3 619	26 420
Сетка 2	44 521	5 039	49 560
Сетка 3	73 441	6 527	79 968

Аналогично, для второй задачи (4.8), (4.5) и (4.6) определим вариационную постановку: найти  $(T_m, T_p) \in (V_m, V_p)$  такие, что

$$\int_{\Omega} c_{p\Delta}(\tilde{T}_m^{n+1}) \frac{T_m^{n+1} - T_m^n}{\tau} v_m dx - \int_{\Omega} \lambda_{\Delta}(\tilde{T}_m^{n+1}) \text{grad } T_m^{n+1} \cdot \text{grad } v_m dx + \int_{\Omega} \alpha_p (T_m^{n+1} - T_p^{n+1}) v_m dx = 0,$$

$$\int_{\Omega_p} c_p \rho_p \left( \frac{T_p^{n+1} - T_p^n}{\tau} + v_{\xi} \cdot \text{grad } T_p^{n+1} \right) v_p dx - \int_{\Omega_p} \lambda_p \text{grad } T_p^{n+1} \cdot \text{grad } v_p dx -$$

$$- \int_{\Omega_p} \alpha_p (T_m^{n+1} - T_p^{n+1}) v_p dx = 0, \tag{5.6}$$

где  $V_m = \hat{V}_m = H^1(\Omega), V_p = \{v \in H^1(\Omega_p) : v = T_d, x \in \Gamma_D\}, \hat{V}_p = \{v \in H^1(\Omega_p) : v = 0, x \in \Gamma_D\}$ .

### 6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В ДВУМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

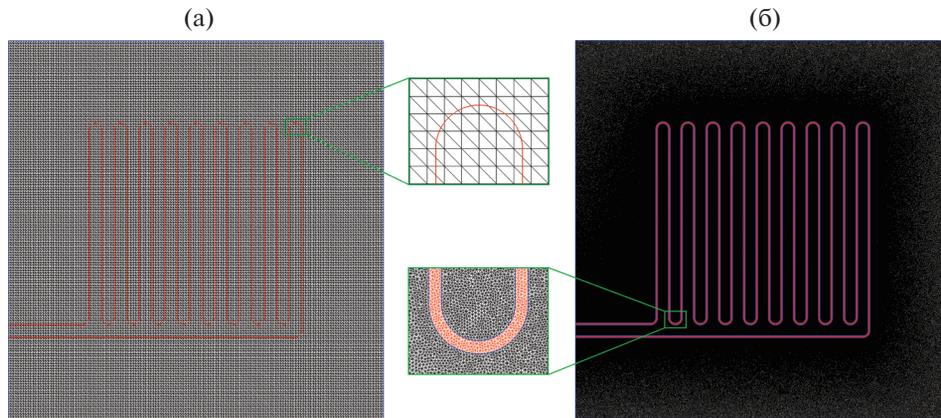
Проведем численное моделирование рассматриваемой задачи в двумерной постановке при следующих значениях входных данных: для талой зоны  $\rho^+ c^+ = 2.5 \times 10^6$  [Дж/(м<sup>3</sup> · °К)],  $k^+ = 1.5$  [Вт/(м · °К)], для мерзлой зоны  $\rho^- c^- = 2.0 \times 10^6$  [Дж/(м<sup>3</sup> · °К)],  $k^- = 2.0$  [Вт/(м · °К)], и для фазового перехода  $\rho^+ L = 60 \times 10^6$  [Дж/м]. В качестве расчетных параметров системы труб используем следующие параметры:  $v_{\xi} = 0.5$  [м/с],  $\rho_p c_p = 10^6$  [Дж/(м<sup>3</sup> · °К)],  $R = 0.05$  [м],  $\alpha_p = 80$  [Вт/(м · °К)] и температура хладоносителя на входе  $T_d = -20^{\circ}\text{C}$ . Коэффициент кондуктивной теплопроводности равен  $k_p = 0.09$  [Вт/(м · °К)]. Грунт и труба имеют начальную температуру  $2.0^{\circ}\text{C}$ . Численное моделирование проводится для квадратной области по  $X = 20$  м и  $Y = 20$  м. Все расчеты проводятся на 30 сут.

Апробацию предложенной модели и численного метода начнем с проверки сходимости численного решения на последовательности сгущающихся сеток по пространственным переменным. Для этого построим три последовательно измельчающиеся грубые сетки (см. табл. 1) для задачи (4.4)–(4.7) и эталонную сетку для задачи (4.8), (4.5), (4.6) без понижения порядка для системы труб (фиг. 3). Зафиксируем шаг по времени  $\tau = 24$  ч. Для сравнения температуры в грунте используем следующую формулу относительной  $L_2$  погрешности в процентах:

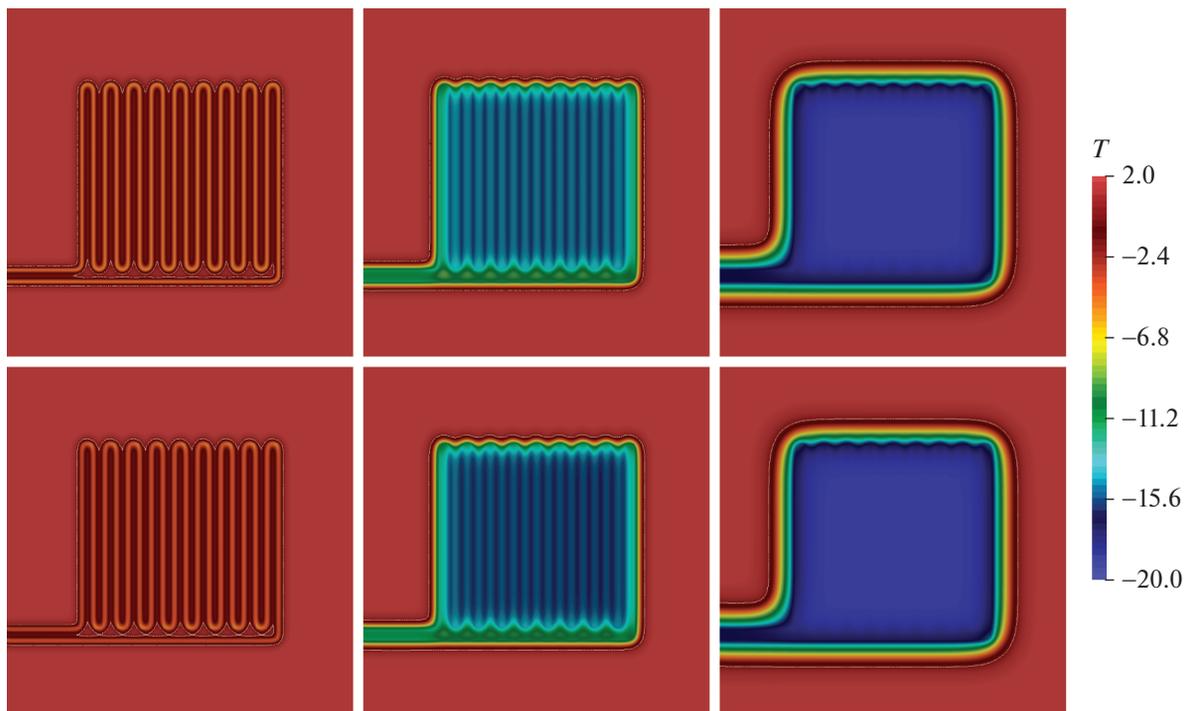
$$e_{L_2} = 100 \cdot \frac{\|T_1 - T_2\|_{L_2}}{\|T_1\|_{L_2}}, \tag{6.1}$$

где  $T_1$  – температура в грунте на эталонной сетке и  $T_2$  – температура в грунте на грубых сетках.

Результаты решения задачи теплопереноса представлены на фиг. 4. Распределение температуры представлено для нескольких временных слоев и иллюстрирует динамику движения хладоносителя в трубе и начало замораживания окружающего грунта. Сравнение предлагаемой модели с полноразмерной моделью отображено на табл. 2. Для проверки сходимости по временной сетке сравним решения с тремя шагами по времени ( $\tau_1 = 48$  ч,  $\tau_2 = 24$  ч и  $\tau_3 = 12$  ч) с решением с шагом по времени  $\tau = 2$  ч (табл. 3) на пространственной сетке 2. Для проверки схемы расщепления (5.5), для трех шагов по времени будем сравнивать решение без расщепления с решением с расщеплением. На табл. 4 представлен результат использования схемы расщепления. Представ-



Фиг. 3. Сетка 1 (а) и эталонная сетка (б).



Фиг. 4. Распределение температуры на различные моменты времени  $t = 1, 5$  и  $30$  сут (слева направо) с  $\tau_1$ . Верхние графики – решение на эталонной сетке, нижние – решение на сетке 1. Белая линия – граница раздела талой и мерзлой грунтов.

ленные результаты иллюстрируют эффективность предложенной новой математической модели для системы труба–грунт в условиях криолитозоны.

На табл. 5 представлено время численной реализации предложенного численного метода за весь период решения задачи в зависимости от сетки и шага по времени. Из представленных дан-

Таблица 2. Относительная погрешность (%) в зависимости от размера сетки при  $\tau = 24$  ч

Сетка	без расщепления	с расщеплением
Сетка 1	0.4	0.41
Сетка 2	0.23	0.24
Сетка 3	0.19	0.21

**Таблица 3.** Относительная погрешность (%) в зависимости от шага по времени  $\tau$  на сетке 2. Сравнение с мелким шагом по времени  $\tau = 2$  ч

Шаг по времени	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$
Погрешность	4.32	2.92	1.96

**Таблица 4.** Относительная погрешность в % в зависимости от шага по времени  $\tau$  на сетке 2. Сравнение со схемой расщепления

Шаг по времени	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$
Погрешность	0.051	0.024	0.013

**Таблица 5.** Время счета на эталонной мелкой сетке, на сетках 1–3 и при использовании схемы расщепления (в секундах) за весь период решения задачи в зависимости от пространственной сетки и от шага по времени

Сетка\Шаг по времени	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$
Эталонная сетка	1582.3	3171.8	6305.4
Сетка 1	4.1	8.4	16.5
Сетка 1 с расщеплением	1.51	2.9	5.9
Сетка 2	9.4	18.7	36.6
Сетка 2 с расщеплением	4.1	8	16.1
Сетка 3	18.5	36.1	69.3
Сетка 3 с расщеплением	8.1	16.1	31.8

ных следует, что предложенный метод значительно ускоряет вычисления за счет понижения размера СЛАУ. Использование схемы расщепления ускорило вычисления более чем в 2 раза. Все вычисления проводились мультифронтальным прямым методом (MUMPS), который представляет собой вариант метода Гаусса для больших разреженных систем уравнений, возникающих при использовании метода конечных элементов [39].

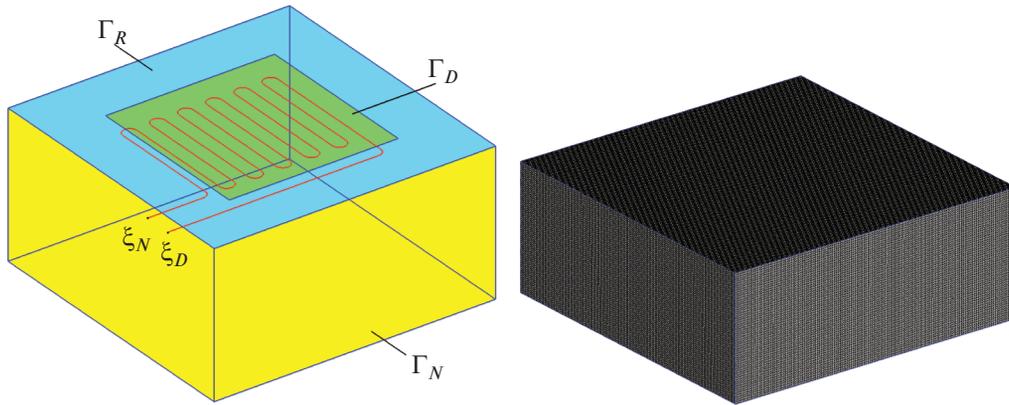
## 7. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Теперь рассмотрим задачу (4.4)–(4.7) в трехмерной области (фиг. 5) за исключением других граничных условий для грунта. Трехмерную задачу решаем с использованием схемы расщепления, где  $N_m = 1390861$  и  $N_p = 3619$ . Как и в двумерной задаче, имеем систему СОУ, расположенную на глубине 1.5 м. Область в плане имеет такие же размеры по 20 м и высоту 8 м. Расчеты проводились за один год с шагом по времени  $\tau = 24$  ч. Температура хладоносителя на входе также равна  $T_d = -20^\circ\text{C}$ . Грунт и труба имеют начальную температуру  $-2.0^\circ\text{C}$ .

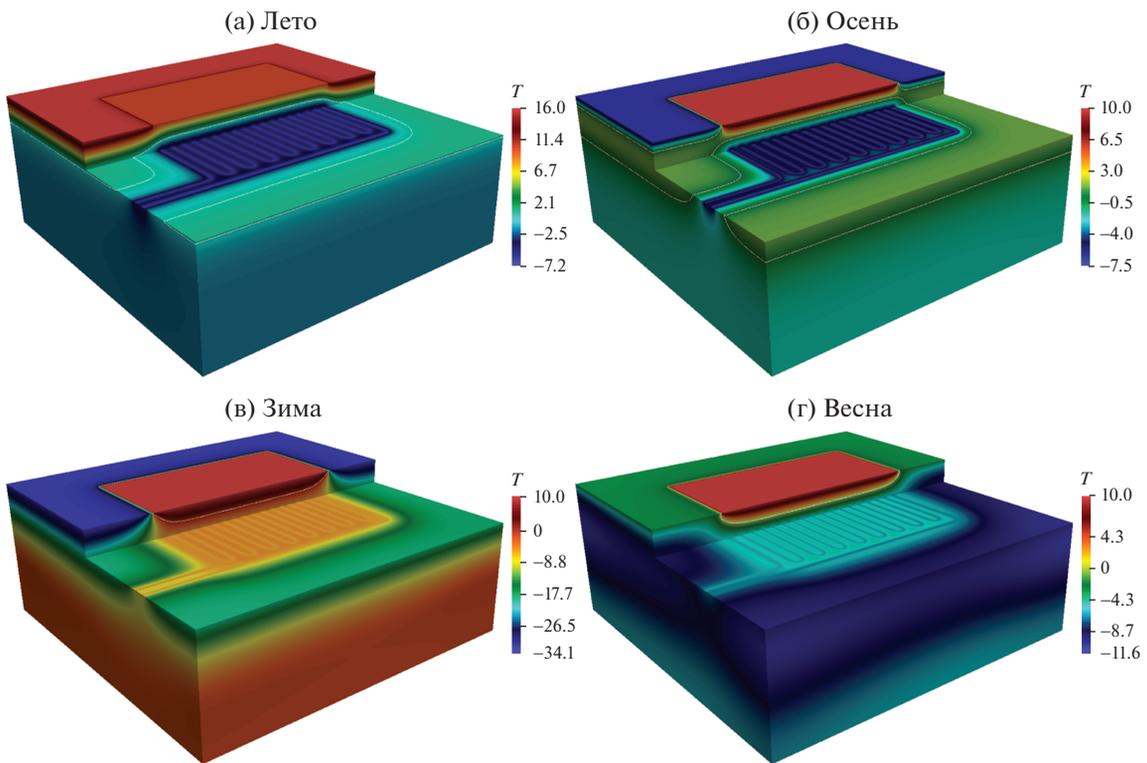
На поверхности грунта по центру на квадратной области с размером  $[12 \text{ м}] \times [12 \text{ м}]$  зададим граничное условие Дирихле с постоянной температурой, равной  $10^\circ\text{C}$ , которое будет моделировать температуру сооружения. На остальной части поверхности грунта задается граничное условие Робина с учетом многолетнего гармонического колебания температуры воздуха, имеющего региональный характер, который в условиях города Якутска варьируется от  $T_w = -35.7^\circ\text{C}$  зимой до  $T_s = 17.3^\circ\text{C}$  летом:

$$\begin{aligned}
 T_m &= 10^\circ\text{C}, \quad x \in \Gamma_D, \\
 -\lambda_\Delta(T_m) \frac{\partial T_m}{\partial n} &= 0, \quad x \in \Gamma_N, \\
 -\lambda_\Delta(T_m) \frac{\partial T_m}{\partial n} &= \alpha(T - T_{\text{air}}), \quad x \in \Gamma_R, \\
 T_{\text{air}} &= \frac{T_w - T_s}{2} \sin\left(\frac{\pi(30(M-1) + \bar{t} + 75)}{180 \cdot 30 \cdot 86400}\right) + \frac{T_w + T_s}{2},
 \end{aligned}$$

где  $\alpha = 14$ ,  $\bar{t} = t/86400$  – время в сутках,  $M = 5$  – начальный месяц.



Фиг. 5. Трехмерная область и пространственная сетка.



Фиг. 6. Распределение температуры в различные моменты времени года. Белая линия – изотерма нуля градусов.

На фиг. 6 показано распределение температуры в грунте в различные моменты времени. Рисунки показаны со срезом некоторой части области для более детального просмотра динамики изменения температуры, где расположена труба. Представленные графики иллюстрируют, что система СОУ позволяет основанию здания находиться в мерзлом состоянии в течение года.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Материалы Международной научно- практической конференции по инженерному мерзлотоведению, посвященной 20-летию создания ООО НПО “Фундаментстройаркос”. Тюмень: Сити-пресс, 2011.
2. Васильев В.И., Сидняев Н.И., Федотов А.А. и др. Моделирование распределения нестационарных температурных полей в криолитозоне при проектировании геотехнических сооружений. М.: Курс, 2017.

3. Крылов В.А., Черноозерский В.А., Никитин А.А. и др. Учет неравномерности температурного поля в геотермальной скважине теплового насоса // Вестн. Международной академии холода. 2015. № 1. С. 75–79.
4. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. матем. и механ. 1960. Т. 24. № 5. С. 852–864.
5. Arbogast T., Douglas J., Hornung U. Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 1990. V. 21. № 4. P. 823–836.
6. Martin V., Jaffre J., Roberts J.E. Modeling fractures and barriers as interfaces for flow in porous media // SIAM Journal on Scientific Computing. 2005. V. 26. № 5. P. 1667–1691.
7. Kalinkin A.A., Laevsky Yu.M. Mathematical model of water-oil displacement in fractured porous medium // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2015. V. 12. P. 743–751.
8. Formaggia L., Fumagalli A., Scotti A., et al. A reduced model for darcy's problem in networks of fractures // ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 2014. V. 48. № 4. P. 1089–1116.
9. D'Angelo C., Scotti A. A mixed finite element method for darcy flow in fractured porous media with non-matching grids // ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 2012. V. 46. № 2. P. 465–489.
10. D'Angelo C., Quarteroni A. On the coupling of 1d and 3d diffusion-reaction equations: application to tissue perfusion problems // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2008. V. 18. № 8. P. 1481–1504.
11. Panfili P., Cominelli A., Scotti A. Using embedded discrete fracture models (edfms) to simulate realistic fluid flow problems / In Second EAGE workshop on naturally fractured reservoirs. 2013. cp-371-00022.
12. Fumagalli A., Scotti A. An efficient xfem approximation of darcy flows in arbitrarily fractured porous media // Oil & Gas Science and Technology—Revue d'IFP Energies nouvelles. 2014. V. 69. № 4. P. 555–564.
13. Kim J., Deo M.D. Finite element, discrete-fracture model for multiphase flow in porous media // AIChE Journal. 2000. V. 46. № 6. P. 1120–1130.
14. Karimi-Fard M., Durlofsky L.J., Aziz K., et al. An efficient discrete fracture model applicable for general purpose reservoir simulators / In SPE Reservoir Simulation Symposium. Society of Petroleum Engineers. 2003. SPE 79699. P. 1–11.
15. Karimi-Fard M., Firoozabadi A., et al. Numerical simulation of water injection in 2d fractured media using discrete-fracture model / In SPE annual technical conference and exhibition. Society of Petroleum Engineers. 2001. SPE 71615. P. 1–16.
16. Vasil'eva M.V., Vasiliev V.I., Krasnikov A.A., Nikiforov D.Y. Numerical simulation of single-phase fluid flow in fractured porous media // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. 2017. T. 159. № 1. P. 100–115.
17. Vasil'ev V.I., Vasil'eva M.V., Gladkikh V.S., et al. Numerical Solution of a Fluid Filtration Problem in a Fractured Medium by Using the Domain Decomposition Method // J. of Applied and Industrial Mathematics. 2018. V. 12. № 4. C. 785–796.
18. Fries T.P., Belytschko T. The extended/generalized finite element method: an overview of the method and its applications // Internat. Journal for Numerical Methods in Eng-ng. 2010. V. 84. № 3. P. 253–304.
19. Nikiforov D.Y., Stepanov S.P. Numerical simulation of the embedded discrete fractures by the finite element method // J. of Physics: Conference Series. 2019. IOP Publishing. Vol. 1158. N 3. Paper 032038.
20. Олейник О.А. Об одном методе решения общей задачи Стефана // Докл. АН. 1960. Т. 135. № 5. С. 1054–1057.
21. Каменомостская С.Л. О задаче Стефана // Матем. сборник. 1961. Т. 53. № 4. С. 489–514.
22. Самарский А.А., Мусеенко Б.Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5. № 5. С. 816–827.
23. Akkutlu I.Y., Efendiev Y., Vasilyeva M., et al. Multiscale model reduction for shale gas transport in a coupled discrete fracture and dual-continuum porous media // J. of Natural Gas Science and Eng-ng. 2017. V. 48. P. 65–76.
24. Chung E.T., Efendiev Y., Leung T., Vasilyeva M. Coupling of multiscale and multicontinuum approaches // GEM—Internat. Journal on Geomathematics. 2017. V. 8. № 1. P. 9–41.
25. Chung E.T., Efendiev Y., Li G., Vasilyeva M. Generalized multiscale finite element method for problems in perforated heterogeneous domains // Applicable Analysis. 2016. V. 95. № 10. P. 2254–2279.
26. Chung E.T., Efendiev Y., Lee Ch. Mixed generalized multiscale finite element methods and applications // Multiscale Modeling & Simulation. 2015. V. 13. № 1. P. 338–366.
27. Вабищевич П.Н., Варламов С.П., Васильев В.И. и др. Численное моделирование температурного поля многолетнемерзлого грунтового основания железной дороги // Матем. моделирование. 2016. Т. 28. № 10. С. 110–124.
28. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: ЛИБРОКОМ, 2009.
29. Vasilyeva M., Vasil'ev V., Stepanov S. Generalized multiscale discontinuous Galerkin method for solving the heat problem with phase change // J. of Computational and Applied Mathematics. 2018. V. 340. P. 645–652.

30. *Pavlova N.V., Vabishchevich P.N., Vasilyeva M.V.* Mathematical modeling of thermal stabilization of vertical wells on high performance computing systems / In International Conference on Large-Scale Scientific Computing. Springer. 2013. P. 636–643.
31. *Степанов С.П., Сурдитов И.К., Васильева М.В. и др.* Разработка программного средства для численного моделирования теплового режима грунтов в условиях криолитозоны // Вестник Северо-Восточного федерального университета им. М.К. Аммосова. 2015. № 47(3). С. 115–125.
32. *Васильев В.И., Максимов А.М., Петров Е.Е. и др.* Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. М.: Физматлит, 1996.
33. *Цыпкин Г.Г.* Течения с фазовыми переходами в пористых средах. М.: Физматлит, 2009.
34. *Vasil'ev V., Vasilyeva M.* An Accurate Approximation of the Two-Phase Stefan Problem with Coefficient Smoothing // Mathematics. 2020. V. 8. № 11. Paper 1924.
35. *Мухеев М.А., Мухеева И.М.* Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1977.
36. *Brenner S., Scott L.* The Mathematical Theory of Finite Element Methods. New York: Springer-Verlag, 2007.
37. *Kolesov A.E., Vabishchevich P.N., Vasilyeva M.V.* Splitting schemes for poroelasticity and thermoelasticity problems // Computers & Mathematics with Applications. 2014. V. 67. № 12. P. 2185–2198.
38. *Вабищевич П.Н., Захаров П.Е.* Численное решение нестационарных задач с различными масштабами времени // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 10. С. 1604–1615.
39. *Amestoy P.R., Duff I.-F., L'Excellent J.Y. et al.* A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2001. V. 23. № 1. P. 15–41.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ФИЗИКА

УДК 519.624.2

Светлой памяти Валентина Федоровича Бутузова посвящается

РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА  
ПЕРЕХОДНЫХ СЛОЕВ В УРАВНЕНИЯХ  
РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ–АДВЕКЦИИ: ТЕОРИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ<sup>1)</sup>

© 2021 г. Н. Н. Нефедов

119991 Москва, Ленинские горы, МГУ, физ. факультет, Россия

e-mail: nefedov@phys.msu.ru

Поступила в редакцию 25.03.2021 г.

Переработанный вариант 25.03.2021 г.

Принята к публикации 04.08.2021 г.

Работа посвящена обзору и анализу современных асимптотических методов исследования сингулярно возмущенных задач с внутренними и пограничными слоями. Центральной частью работы является обзор работ автора, его коллег и учеников. В рассмотрении выделены краевые и начально-краевые задачи для нелинейных уравнений в частных производных эллиптического и параболического типов, а также периодические параболические задачи, которые широко используются в приложениях и носят название уравнений реакции–диффузии и реакции–диффузии–адвекции. Эти задачи могут быть интерпретированы как модели в химической кинетике, синергетике, астрофизике, биологии и других областях. Решения этих задач часто имеют как узкие пограничные области быстрого изменения, так и внутренние слои различных типов (контрастные структуры, движущиеся внутренние слои – фронты), что приводит к необходимости развивать новые асимптотические методы, чтобы исследовать их как формально, так и строго. Представлена и проиллюстрирована на актуальных задачах общая схема строгого исследования контрастных структур в сингулярно возмущенных задачах для уравнений в частных производных, основанная на применении асимптотического метода дифференциальных неравенств. Отражены основные достижения этого направления исследований дифференциальных уравнений в частных производных и выделены ключевые направления его развития. Библ. 89.

**Ключевые слова:** сингулярно возмущенные задачи, асимптотические методы, пограничные и внутренние слои, фронты, уравнения реакции–диффузии–адвекции, контрастные структуры, сбалансированная нелинейность, дифференциальные неравенства, асимптотическая устойчивость по Ляпунову, асимптотическое решение обратных задач.

DOI: 10.31857/S0044466921120103

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных задач теории сингулярных возмущений в настоящее время является исследование нелинейных сингулярно возмущенных уравнений в частных производных, решения которых имеют пограничные и внутренние слои. Такие уравнения представляют большой интерес как в качественной теории дифференциальных уравнений, так и во многих прикладных задачах. В частности, такие уравнения возникают в математических моделях процессов типа реакция–диффузия и реакция–диффузия–адвекция в химической кинетике, синергетике, астрофизике, биологии и других областях, где исследуемые процессы характеризуются узкими пограничными областями быстрого изменения параметров процессов либо резкими внутренними слоями различных типов (контрастные структуры) – стационарными или движущимися (фронтами). Для адекватного математического описания таких процессов нужно развивать новые асимптотические методы исследования нелинейных сингулярно возмущенных задач, исследование которых (начальных задач с малыми параметрами при старших производных) начато

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 20-11-50080).

достаточно давно. Направление исследований, представленное в данной работе, является развитием глубоких идей работ А.Н. Тихонова (см. [1]–[3]), заложивших основы современной теории сингулярных возмущений. Эти работы, объединившие теорию сингулярных возмущений с качественной теорией дифференциальных уравнений и теорией устойчивости Ляпунова, продолженные и развитые в работах А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузова и их учеников и последователей (см. монографию А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова [4]), и по сей день формируют язык теории сингулярных возмущений, несмотря на значительно усложнившиеся рассматриваемые задачи.

Различные направления теории нелинейных сингулярно возмущенных задач интенсивно разрабатываются как у нас в стране, так и за рубежом. Об этом свидетельствует ряд международных конференций, состоявшихся в последние годы и посвященных теории сингулярных возмущений, а также конференции, посвященные внутренним слоям. У нас в стране этими исследованиями занимаются в школе В.П. Маслова и С.Ю. Доброхотова, ученики С.А. Ломова, С.А. Кащенко, С.Д. Глызин и многие другие. Эти работы активно велись и ведутся в США, европейских странах, Японии, Китае (P. Fife, B. McLeod P. Bates, N. Alikakos, Danielle Hilhorst, B. Fidler, L. Recke, K. Scheider, P. Szmolyan, H. Motano, H. Morita K. Sakamoto, Vimura, Nishiura и др). Результаты этих и других специалистов представлены в трудах конференции “Patterns of Dynamics 2016”, проведенной в Берлине, и в специальном выпуске журнала “Discrete and continuous dynamical systems” V. 37, № 2, February 2017 (см. [5]), посвященном памяти Поля Файфа.

Современное состояние асимптотического анализа сингулярно возмущенных задач с пограничными и внутренними слоями можно узнать из обзора [6]. Ряд интересных результатов, развивающих исследование задач с внутренними и пограничными слоями, получен в [7]–[9]. В настоящее время наблюдается значительный рост интереса к сингулярно возмущенным уравнениям с запаздыванием, что связано с рассмотрением более сложных моделей, важных для приложений (см., например, [10], [11] и ссылки в этих работах). Одним из важнейших приложений асимптотического анализа сингулярно возмущенных задач является разработка теории численных методов для задач с переходными слоями. Значительный вклад в развитие этого направления внесли работы А.М. Ильина, Н.С. Бахвалова, Г.И. Шишкина, Н.В. Коптевой а также ирландских математиков М. Стайнза (M. Stynes), Е. О’Риордана (E. O’Riordan) и других. С этими работами можно ознакомиться в обзоре [12]. Ряд интересных результатов в области теории и их применения для численного решения сингулярно возмущенных задач переходными слоями получен в [13]–[18]. Отметим, что это активно развивающееся направление основывается на результатах асимптотического анализа работ, представленных в данном обзоре.

В настоящей работе представлено развитие хорошо известного метода пограничных функций для построения асимптотик решений различных классов задач с внутренними слоями. Основные идеи продемонстрированы на новых классах исследуемых сингулярно возмущенных задач, включающие задачи о движении фронтов, исследования устойчивых стационарных или периодических внутренних слоев в многомерных задачах. Эти результаты являются дальнейшим развитием наших исследований контрастных структур, которые были опубликованы в обзорных статьях [19]–[22].

Контрастными структурами принято называть решения с внутренними слоями нелинейных сингулярно возмущенных уравнений. Такие решения изучаются достаточно давно. Первые результаты в этом направлении были получены А.Б. Васильевой еще в начале 70-х годов прошлого века для двухточечной краевой задачи вида

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} - f(u, x) &= 0, \quad x \in (0, 1), \\ u(0, \varepsilon) &= u^{(0)}, \quad u(1, \varepsilon) = u^{(1)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Было доказано существование решения, близкого при малых  $\varepsilon$  к корню  $u = \varphi_1(x)$  вырожденного уравнения  $f(u, x) = 0$  левее некоторой точки  $x_0$  и близкого к корню  $u = \varphi_2(x)$  правее  $x_0$ . При этом точка  $x_0$  была не известна заранее, а определялась в ходе построения асимптотики. Такие решения принято теперь называть контрастными структурами типа ступеньки. Примером нелинейности, для которой существуют решения указанного выше типа, может служить  $f(u, x) = (u - \varphi(x))(u^2 - 1)$ . В этом случае  $\varphi_1(x) = -1$ ,  $\varphi_2(x) = 1$ , а  $x_0$  – простой корень уравнения  $\varphi(x) = 0$ . Эти результаты были распространены и на некоторые классы одномерных по пространственной переменной квазилинейных уравнений. Методы построения асимптотики таких классов задач и обоснование построенных асимптотик содержатся в монографии А.Б. Васильевой и

В.Ф. Бутузова (см. [4]). Существенный вклад в развитие асимптотических методов исследования нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных внес американский математик П. Файф (P. Fife), общение с которым автор вспоминает с глубокой благодарностью. Им был рассмотрен многомерный аналог задачи (1). Результаты его работ по пограничным и внутренним слоям для многомерного аналога задачи (1) (см. [23], [24]) сыграли существенную роль в развитии этого направления исследований. Отметим, что для доказательства существования пограничного решения и решения с внутренним переходным слоем в [23], [24] применялись методы, аналогичные методам А.Б. Васильевой для одномерных задач, при этом их реализация в многомерных задачах существенно сложнее.

Если рассмотреть двумерный аналог задачи (1)

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 \Delta u &= f(u, x, \varepsilon), & x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2, \\ u(x, \varepsilon) &= g(x), & x \in \partial \mathcal{D},\end{aligned}\tag{2}$$

где  $\varepsilon > 0$  – малый параметр,  $\Delta$  – лапласиан, то контрастная структура может быть определена следующим образом.

*Контрастная структура типа ступеньки* – это решение  $u(x, \varepsilon)$  задачи (2), которое близко к двум различным решениям вырожденного уравнения  $f(u, x, 0) = 0$  по разные стороны от некоторой замкнутой кривой  $\Gamma$  (положение кривой  $\Gamma$  не известно заранее, а определяется в ходе построения асимптотики). В окрестности кривой  $\Gamma$  возникает область быстрого изменения решения – решение в этой области называется *внутренним переходным слоем*. В [25], [26] был предложен новый метод доказательства существования решений сингулярно возмущенных уравнений в частных производных, получивший название асимптотический метод дифференциальных неравенств. Этот метод оказался эффективным, и получила развитие как общая схема этого метода (см., например, [27]–[29]), так и ее применение для других классов сингулярно возмущенных задач – начально-краевых задач для параболических уравнений при описании решений с движущимися внутренними слоями (фронтами), периодических параболических краевых задач, краевых и начально-краевых задач для некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений и некоторых классов систем.

Другой класс сингулярно возмущенных задач, который обсуждается в данной работе, представляют задачи с разрывными нелинейностями (источниками или адвективными коэффициентами), моделирующими переходные слои в области контакта различных сред, а также межфазовые переходы. В работе представлены новые результаты, касающиеся существования решений этого класса задач, их асимптотик и устойчивости.

Исследование рассмотренных задач базируется на асимптотическом методе дифференциальных неравенств. Основная идея этого подхода – построение нижних и верхних решений задачи с помощью формальной асимптотики. Для всех рассмотренных задач доказываются существование решений, оценивается точность асимптотики и исследуется их устойчивость.

Представленные в работе результаты формируют основу для дальнейшего развития и разработки методов асимптотического исследования новых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач для уравнений в частных производных, которые широко используются в качестве математических моделей во многих важных приложениях. Развитие асимптотических методов исследования сложных нелинейных математических моделей с резкими переходными слоями позволит, наряду с решением важных математических вопросов существования, устойчивости и асимптотического приближения решений, развивать эффективные численные методы решения этих классов задач, а также новые концепции решения обратных задач на основе асимптотического анализа, исследования условий разрушения и обострения решений, а также применения полученных результатов в ряде приложений: моделировании контрастных структур в исследовании задач биофизики, экологии, генетики, нелинейной теории волн и других приложений.

Следует отметить, что данный обзор не претендует на полноту. В работе выделено то направление, в котором работает научная школа, которой принадлежит автор, и тот метод, к развитию которого он имеет непосредственное отношение.

## 2. ОСНОВНЫЕ ИДЕИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

В наших работах была разработана общая схема строгого исследования контрастных структур в сингулярно возмущенных задачах для уравнений в частных производных, основанная на при-

менении асимптотического метода дифференциальных неравенств. Ниже для простоты изложения мы поясним эту схему на примере задачи (2), не конкретизируя требования, при которых ее реализация возможна. Как отмечалось во Введении, эта схема состоит из трех основных этапов: построения формальной асимптотики контрастной структуры, модификации асимптотики для построения верхнего и нижнего решений задачи, использования построенных нижних и верхних решений для доказательства асимптотической устойчивости по Ляпунову стационарных или периодических решений в соответствующих классах задач. Эти этапы будут кратко изложены далее в этом разделе.

### 2.1. Построение формальной асимптотики

Контрастные структуры типа ступеньки в задаче (2) и других аналогичных задачах изучаются в предположении, что нелинейность  $f$  является бистабильной, т.е. имеет два устойчивых корня  $\varphi^{(\pm)}(x)$  и неустойчивый корень  $\varphi^{(0)}(x)$ , причем  $\varphi^{(-)}(x) < \varphi^{(0)}(x) < \varphi^{(+)}(x)$  при  $x \in \bar{\mathcal{D}}$ . Положение кривой перехода  $\Gamma_\varepsilon$  между корнями  $\varphi^{(-)}$  и  $\varphi^{(+)}$  обычно определяется условием

$$u(x, \varepsilon) = \varphi^{(0)}(x), \quad x \in \Gamma_\varepsilon$$

(т.е.  $\Gamma_\varepsilon$  определяется как проекция кривой пересечения поверхностей решения  $u(x, \varepsilon)$  и корня  $\varphi^{(0)}(x)$  на область  $\mathcal{D}$ ).

Пусть  $\Gamma_0$  – некоторая замкнутая достаточно гладкая кривая, лежащая в  $\mathcal{D}$ . Введем в окрестности  $\Gamma_0$  локальные координаты  $r, y$ , где  $r$  – расстояние от точки из окрестности до кривой  $\Gamma_0$  вдоль нормали к кривой, взятое со знаком “+”, если точка лежит внутри кривой, и со знаком “–”, если точка лежит во внешней по отношению к кривой области,  $y$  – координата той точки на кривой, из которой выходит указанная нормаль. Уравнение кривой  $\Gamma_\varepsilon$  ищем в виде

$$r = R(y, \varepsilon) = \varepsilon R_1(y) + \varepsilon^2 R_2(y) + \dots \quad (3)$$

Кривая  $\Gamma_0$  и функции  $R_i(y)$  определяются в ходе построения асимптотики.

Кривая  $\Gamma_\varepsilon$  делит  $\bar{\mathcal{D}}$  на внутреннюю  $\bar{\mathcal{D}}^{(+)}$  и внешнюю  $\bar{\mathcal{D}}^{(-)}$  по отношению к ней области.

В области  $\bar{\mathcal{D}}^{(+)}$  рассматриваем задачу

$$\begin{aligned} L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 \Delta u - f(u, x, \varepsilon) &= 0, \quad x \in \bar{\mathcal{D}}^{(+)}, \\ u(x, \varepsilon) &= \varphi^{(0)}(x), \quad x \in \Gamma_\varepsilon. \end{aligned} \quad (4)$$

Асимптотику  $U^{(+)}$  задачи (4) строим по методу пограничных функций (см. [4], [20]) в виде

$$U^{(+)} = \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i (\bar{u}_i^{(+)} + Q_i^{(+)}), \quad (5)$$

где  $\bar{u}_i^{(+)}$  и  $Q_i^{(+)}$  обозначают регулярную и погранслоиную вблизи  $\Gamma_\varepsilon$  части асимптотики.

В области  $\bar{\mathcal{D}}^{(-)}$  рассматриваем задачу

$$\begin{aligned} L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 \Delta u - f(u, x, \varepsilon) &= 0, \quad x \in \bar{\mathcal{D}}^{(-)}, \\ u(x) &= g(x), \quad x \in \partial D, \quad u(x, \varepsilon) = \varphi^{(0)}(x), \quad x \in \Gamma_\varepsilon. \end{aligned} \quad (6)$$

Асимптотику  $U^{(-)}$  задачи (6) строим аналогично (5) в виде

$$U^{(-)} = \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i (u_i^{(-)} + Q_i^{(-)} + \Pi_i), \quad (7)$$

где  $u_i^{(-)}$  обозначает регулярную часть асимптотики, а  $\Pi$  и  $Q^{(-)}$  – погранслоинные части асимптотики вблизи границы  $\partial \mathcal{D}$  и  $\Gamma_\varepsilon$  соответственно. В качестве главных членов регулярных частей асимптотик выбираются  $\bar{u}_0^{(\pm)} = \varphi^{(\pm)}$ , а функции  $Q_i^{(\pm)}$  служат для описания переходного слоя вблизи  $\Gamma_\varepsilon$ .

По самому построению (см. [4], [20]) асимптотики (5) и (7) удовлетворяют задачам (4) и (6) по невязке с точностью  $O(\varepsilon^{n+2})$ , в частности,

$$L_\varepsilon U^{(+)} = L_{0R} \bar{u}_0^{(+)} + L_{0IL} Q_0^{(+)} + \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon^i ((L_R^{(+)} \bar{u}_i^{(+)} + \bar{f}_i^{(+)} + (L_{IL}^{(+)} Q_i^{(+)} + q_i^{(+)})) + O(\varepsilon^{n+2}) = O(\varepsilon^{n+2}), \quad (8)$$

так как все члены в сумме, кроме последнего, равны нулю в силу уравнений для коэффициентов асимптотики, в частности,  $L_{0R} \bar{u}_0^{(+)} = 0$  и  $L_{0IL} Q_0^{(+)} = 0$  – нелинейные уравнения для определения главных членов асимптотики (5). Остальные коэффициенты асимптотики определяются из линейных уравнений с помощью обратимых операторов – оператора  $L_R^{(+)}$ , порождающего регулярную часть асимптотики, и оператора  $L_{IL}^{(+)}$ , порождающего погранслойную часть асимптотики. Аналогичное (8) представление имеет место и для задачи (6):

$$L_\varepsilon U^{(-)} = L_{0R} \bar{u}_0^{(-)} + L_{0IL} Q_0^{(-)} + L_{0BL} \Pi_0 + \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon^i ((L_R^{(-)} \bar{u}_i^{(-)} + \bar{f}_i^{(-)} + (L_{IL}^{(-)} Q_i^{(-)} + q_i^{(-)} + (L_{BL} \Pi_i - \pi_i))) + O(\varepsilon^{n+2}) = O(\varepsilon^{n+2}). \quad (9)$$

При этом  $L_{0BL} \Pi_0 = 0$  – нелинейное уравнение для определения главного члена погранслойной части асимптотики вблизи границы  $\partial \mathcal{D}$ , а следующие пограничные функции определяются из линейных уравнений с помощью обратимого оператора  $L_{BL}$ . Остальные члены в (9) полностью аналогичны соответствующим членам в (8).

В силу граничных условий на кривой  $\Gamma_\varepsilon$  в задачах (4) и (6) асимптотики  $\bar{U}^{(+)}$  и  $\bar{U}^{(-)}$  являются сшитыми до непрерывности (выполнено условие  $C$ -сшивания) на кривой  $\Gamma_\varepsilon$ . Эта кривая (т.е. кривая  $\Gamma_0$ ) и коэффициенты  $R_i$  в разложении (3) определяются из условия  $C^1$ -сшивания асимптотик  $\bar{U}^{(+)}$  и  $\bar{U}^{(-)}$  на  $\Gamma_\varepsilon$ :

$$\varepsilon \frac{\partial \bar{U}^{(-)}}{\partial r} = \varepsilon \frac{\partial \bar{U}^{(+)}}{\partial r}, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \quad (10)$$

рассматриваемого в соответствующем приближении по  $\varepsilon$ . При этом  $\Gamma_0$  обычно находится из нелинейной задачи. Для определения  $R_i$  получаются линейные уравнения вида

$$A^\Gamma R_i = H_i, \quad (11)$$

где  $A^\Gamma$  – обратимый оператор,  $H_i$  – известная на каждом шаге функция.

Более подробно этот алгоритм будет продемонстрирован на примерах в следующих разделах.

## 2.2. Асимптотический метод дифференциальных неравенств

Асимптотический метод дифференциальных неравенств развит нами для тех классов сингулярно возмущенных задач, где работает принцип сравнения эллиптических краевых задач, параболических начально-краевых задач и периодических по времени параболических краевых задач, а также задач для интегро-дифференциальных уравнений. Базовые теоремы сравнения для нелинейных уравнений, основанные на принципе максимума или монотонности линеаризованных операторов, берут начало от известных теорем сравнения С.А. Чаплыгина для начально-краевых задач, теорем Нагумо для краевых задач и являются одним из важнейших инструментов исследования нелинейных уравнений в частных производных. Эти теоремы можно найти в ряде статей и монографий (см., например, [30] и ссылки в этой монографии). Значительный вклад в развитие принципа сравнения внесли М.А. Красносельский, М.Г. Крейн, С.И. Похожаев, Н. Amann, Р. Hess, D.J. Sattinger (см. [31]–[37]). Эти идеи получили дальнейшее развитие в работах для специальных случаев (см. [38]–[44]).

Основной идеей асимптотического метода дифференциальных неравенств является использование модификации формальной асимптотики для построения функций сравнения: нижних и

верхних решений, при этом основным требованием к реализации этого подхода является монотонность линеаризованных на асимптотике нулевого порядка операторов, порождающих асимптотику. Этот подход был предложен в [25], [26], определив стратегию доказательства существования и оценки точности построенной асимптотики. В [27] этот метод распространен на периодические параболические краевые задачи. В этой работе был предложен достаточно эффективный метод доказательства асимптотической устойчивости периодических решений, который затем перенесен на исследование асимптотической устойчивости стационарных решений начально-краевых задач для параболических уравнений типа реакция–диффузия, а затем обобщен и на некоторые более сложные классы квазилинейных уравнений типа реакция–диффузия–адвекция (см. [29], [45]). В последние годы этот подход распространен и на задачи реакции–диффузии–адвекции с разрывными нелинейностями и источниками (см. [46] и ссылки в этой работе). Существенным развитием метода явились результаты по асимптотическому анализу пограничных и внутренних слоев в различных задачах для интегродифференциальных уравнений (см. [28], а также [47] и ссылки в этой работе).

Для удобства изложения напомним известные понятия и факты применительно к задаче (2).

**Определение.** Функции  $\alpha(x, \varepsilon)$  и  $\beta(x, \varepsilon)$  называются *нижним и верхним решениями задачи (2)*, если они удовлетворяют следующим условиям

$$\begin{aligned} (i) \quad & L_\varepsilon \alpha(x, \varepsilon) := \varepsilon \Delta \alpha(x, \varepsilon) - f(\alpha(x, \varepsilon), x, \varepsilon) \geq 0, \\ & L_\varepsilon \beta(x, \varepsilon) \leq 0, \quad x \in \mathcal{D}, \\ (ii) \quad & \alpha(x, \varepsilon) \leq g(x) \leq \beta(x, \varepsilon), \quad x \in \partial \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Известно (см., например, [30]), что если существуют упорядоченные нижнее и верхнее решения задачи (2), т.е.

$$\alpha(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon), \quad x \in \bar{\mathcal{D}},$$

то задача (2) имеет решение  $u(x, \varepsilon)$ , удовлетворяющее неравенствам

$$\alpha(x, \varepsilon) \leq u(x, \varepsilon) \leq \beta(x, \varepsilon), \quad x \in \bar{\mathcal{D}}.$$

При построении формальной асимптотики основное требование к линейным операторам  $L_R$ ,  $L_{BL}$  и  $A^\Gamma$  – их обратимость, при построении нижнего и верхнего решений наши требования более жесткие: мы требуем, чтобы неравенства  $L_R \delta \bar{u} < 0$ ,  $L_{BL} \delta \Pi < 0$  и  $A^\Gamma \delta R < 0$  имели положительные решения в тех же классах функций, в которых с помощью этих операторов строятся соответствующие разложения. Тогда, если добавить  $\delta \bar{u}$  и  $\delta \Pi$  к коэффициентам членов порядка  $\varepsilon^{n+1}$  в регулярной и погранслоистой частях асимптотик (5) и (7) и  $(-\delta R(y))$  к  $R_{n+1}(y)$  из уравнения (3), то получим верхнее решение  $\beta_{n+1}(x, \varepsilon)$ . Аналогично, с помощью добавок  $(-\delta \bar{u})$ ,  $(-\delta \Pi)$ ,  $\delta R$  построим нижнее решение  $\alpha_{n+1}(x, \varepsilon)$ . Проверка по стандартной схеме (см. [26]) показывает, что  $\alpha_{n+1}(x, \varepsilon)$  и  $\beta_{n+1}(x, \varepsilon)$  удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \alpha_{n+1}(x, \varepsilon) = \varepsilon^{n+1} q(x, \varepsilon), \quad L_\varepsilon \beta_{n+1}(x, \varepsilon) = -\varepsilon^{n+1} q(x, \varepsilon), \quad x \in \mathcal{D}, \\ \alpha_{n+1}(x, \varepsilon) \leq g(x) \leq \beta_{n+1}(x, \varepsilon), \quad x \in \partial \mathcal{D}, \end{aligned} \tag{12}$$

где  $q(x, 0) > 0$  в  $\bar{\mathcal{D}}$ . Кроме того, по построению

$$\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} = O(\varepsilon^{n+1}) > 0. \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует, что  $\alpha_{n+1}(x, \varepsilon)$  и  $\beta_{n+1}(x, \varepsilon)$  являются упорядоченными нижним и верхним решениями задачи (2), и, следовательно, существует решение  $u(x, \varepsilon)$  этой задачи, удовлетворяющее неравенствам

$$\alpha_{n+1}(x, \varepsilon) \leq u(x, \varepsilon) \leq \beta_{n+1}(x, \varepsilon). \tag{14}$$

А так как по построению

$$\beta_{n+1} - U_{n+1} = O(\varepsilon^{n+1}), \tag{15}$$

то из (14) и (15) следует, что решение задачи (2) имеет оценку

$$|u(x, \varepsilon) - U_n(x, \varepsilon)| = O(\varepsilon^{n+1}), \quad x \in \bar{\mathcal{D}}.$$

Отметим, что  $\alpha_{n+1}(x, \varepsilon)$  и  $\beta_{n+1}(x, \varepsilon)$ , удовлетворяющие (12), называются асимптотическими нижним и верхним решениями порядка  $(n + 1)$ .

### 2.3. Асимптотический метод дифференциальных неравенств в исследовании асимптотической устойчивости по Ляпунову стационарных и периодических решений

Как отмечалось выше, в [27] был предложен достаточно простой метод доказательства асимптотической устойчивости по Ляпунову периодических решений периодических параболических задач, а также определения локальной области устойчивости и единственности решений с построенной асимптотикой. Этот метод применим и для исследования асимптотической устойчивости стационарных решений с пограничными и внутренними слоями начально-краевых задач для уравнений реакции–диффузии и реакции–диффузии–адвекции. Отметим, что стандартные методы исследования устойчивости, основанные на рассмотрении соответствующих спектральных задач для линеаризованных на решении уравнений, достаточно сложны и не получили существенного развития. Основная сложность такого подхода – это наличие так называемого критического спектра – собственных значений, стремящихся к нулю при стремлении к нулю малого параметра. Такой подход для уравнений в частных производных, называемый методом сингулярного предела задачи на собственные значения, был впервые реализован в [48]. Отметим также, что эта работа сыграла важную роль и в развитии методов построения асимптотик в так называемых задачах со сбалансированной нелинейностью, а также в задачах с адвекцией, где многомерность играет существенную роль в структуре и свойствах устойчивости решения.

Проиллюстрируем схему подхода метода дифференциальных неравенств на задаче (2). Решение задачи (2) можно рассматривать как стационарное решение начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \varepsilon^2 \Delta u - f(u, x, \varepsilon), & x \in \mathcal{D}, & t > 0, \\ u(x, t, \varepsilon) &= g(x), & x \in \partial \mathcal{D}, & t > 0, \\ u(x, 0, \varepsilon) &= u^0(x, \varepsilon). \end{aligned} \quad (16)$$

Можно показать, что если верхнее и нижнее решения задачи (2) достаточно точные ( $n$  достаточно велико, см. предыдущий пункт), то функции  $\hat{\beta}(x, t, \varepsilon)$  и  $\hat{\alpha}(x, t, \varepsilon)$  (которые определяются выражениями

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(x, t, \varepsilon) &= u(x, \varepsilon) + (\beta_n(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon)) e^{-\lambda t}, \\ \hat{\alpha}(x, t, \varepsilon) &= u(x, \varepsilon) + (\alpha_n(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon)) e^{-\lambda t}, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\lambda$  – достаточно малое положительное число,  $\beta_n(x, \varepsilon)$  и  $\alpha_n(x, \varepsilon)$  – верхнее и нижнее решения задачи (2),  $u(x, \varepsilon)$  – решение задачи (2)) удовлетворяют соответствующим дифференциальным неравенствам для параболической начально-краевой задачи (16) (см., например, [30]). Тогда при  $\alpha_n(x, \varepsilon) \leq u^0(x, \varepsilon) \leq \beta_n(x, \varepsilon)$  решение задачи (16)  $u(x, t, \varepsilon)$ , удовлетворяющее неравенствам  $\hat{\alpha}(x, t, \varepsilon) \leq u(x, t, \varepsilon) < \hat{\beta}(x, t, \varepsilon)$ . Из этих неравенств, учитывая представления (17), следует асимптотическая устойчивость стационарного решения задачи (16) с областью устойчивости по крайней мере  $[\alpha_n(x, \varepsilon), \beta_n(x, \varepsilon)]$ ,  $x \in \mathcal{D}$ . Кроме того,  $u(x, \varepsilon)$  локально единственно как решение задачи (2) с этой же областью единственности.

### 3. НЕКОТОРЫЕ АКТУАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ПОГРАНИЧНЫМИ И ВНУТРЕННИМИ СЛОЯМИ

В этом разделе рассмотрен ряд актуальных задач, представляющих интерес как для теории сингулярных возмущений, так и для приложений. При рассмотрении этих задач проиллюстрированы основные идеи и направления развития. Одним из активно развиваемых направлений является исследование существования и устойчивости стационарных гладких решений в одномерной и многомерной задачах реакции–диффузии с разрывными источниками и адвективными членами. Эти задачи моделируют переходные слои на границе контакта двух сред с различными характеристиками. Рассмотрены задачи для стационарного уравнения реакции–диффузии на отрезке и в двумерной области. Особенностью этих задач является разрыв (первого рода) реактивного слагаемого в одномерном случае в некоторой внутренней точке, а в двумерном –

на некоторой гладкой замкнутой кривой. Это новый неизученный ранее класс задач. Разработаны методы построения асимптотических приближений решений, доказано существование гладких стационарных решений уравнений реакции–диффузии с внутренним переходным слоем в окрестности разрывов в одномерном и двумерном случаях, а также получены условия, при которых эти решения являются локально единственными и асимптотически устойчивыми по Ляпунову. Кроме того, указана локальная область притяжения стационарных решений. Эти исследования представлены в [46], [49], [50] (см. также ссылки в этих работах).

Другим важным направлением исследований являются новые классы задач – задачи с модульными нелинейностями. Это новые классы математических задач с разрывными коэффициентами адвекции или(и) разрывными нелинейными источниками. Основной особенностью этих задач является то, что разрывы возникают при некоторых значениях искомой функции. Эти задачи моделируют межфазовые переходы и инициированы исследованиями в нелинейной теории волн (см. [51]–[53]). В [54], [55] проведены исследования начально-краевых задач для уравнений типа уравнения Бюргерса. Доказано существование новых классов решений с движущимся внутренним слоем (фронтом), сформулированы условия нового эффекта в этом классе задач – разрушения (обострения) фронта, и получена оценка времени движения фронта от точки начального положения до точки разрушения. Эти работы продолжили изучение задач для уравнений типа реакция–диффузия и реакция–диффузия–адвекция с движущимися внутренними слоями (фронтами). В [47], [56] было получено асимптотическое приближение фронтов в одномерной параболической и интегро-параболической задачах типа реакция–диффузия. Эти результаты затем были перенесены на квазилинейные уравнения типа реакция–диффузия–адвекция с нелинейным коэффициентом адвекции в [57]–[59]. Отметим, что рассмотрение движущихся внутренних слоев (фронтов) в ограниченных объемах с учетом пространственно-временной неоднородности существенно отличается от широко представленных в литературе исследований решений типа бегущих волн и автомодельных решений (см., например, [60]–[62] и ссылки в этих работах). Аналогичные результаты были получены в исследовании периодических фронтов в параболических периодических краевых задачах, включающих уравнения типа уравнения Бюргерса. Различные задачи этого класса представлены в [63]–[68]. В этих работах рассмотрены многомерные по пространственной переменной периодические задачи с внутренним переходным слоем и выделены классы новых задач, в которых многомерность приводит к новым ранее не изученным условиям существования и устойчивости решения с внутренним переходным слоем. Это задачи с балансом нелинейности, в которых результаты, полученные ранее для задачи реакции–диффузии обобщаются на задачи для уравнения реакции–диффузия–адвекции. Выявлены соотношения между адвекцией и реакцией, при которых адвекция играет существенную роль в устойчивости внутренних переходных слоев.

В [69]–[71] был исследован новый класс нелинейных сингулярно возмущенных задач с сингулярно возмущенными граничными условиями второго рода и третьего рода. Доказано существование стационарных и периодических по времени решений погранслоного типа, построено асимптотическое приближение по малому параметру таких решений. Исследовано множество граничных условий, при которых такие решения существуют, и установлены локальная единственность и асимптотическая устойчивость по Ляпунову таких решений. Показано, что, в отличие от аналогичной задачи Дирихле, где такое решение единственно, в рассматриваемой задаче таких решений может быть несколько, при этом каждое из них обладает своей областью устойчивости и локальной единственности.

Среди активно развиваемых направлений выделим исследование существования и условий устойчивости по Ляпунову стационарных решений начально-краевых задач и периодических решений систем параболических уравнений с быстрыми источниками разной скорости. Построена асимптотика решения, исследована асимптотическая устойчивость периодического решения. Проведено исследование систем уравнений с быстрыми источниками разной скорости в случае различной квазимонотонности правых частей (источников). В [72], [73] рассматриваются сингулярно возмущенные системы параболических уравнений в одномерной и двумерной пространственных областях с периодическими условиями по времени. Исследуется вопрос существования у системы решения типа периодического фронта. Приведен алгоритм построения асимптотического приближения решения, доказана теорема существования решения типа периодического фронта, его локальная единственность и асимптотическая устойчивость. Решение такого вида может описывать резкое изменение физических характеристик некоторой пространственно-неоднородной среды. Системы подобного типа применяются для моделирования переходных процессов в экологии, биофизике, химической кинетике, физике полупроводников и

других областях. Отмеченные выше работы основаны на развитии классических методов построения асимптотик, предложенного в работах А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузовы и их учениками. В последние годы в работах В.Ф. Бутузова был разработан новый метод построения асимптотических приближений решения сингулярно возмущенных уравнений с кратными корнями вырожденных уравнений (см. [74]–[83] и ссылки в этих работах). В данных работах было показано, что в этом случае пограничные и внутренние слои многозонные. Структура переходных слоев, в отличие от случаев простого слоя, существенно зависит от типа граничных условий. Исследование существования решений и их устойчивости было проведено на основе развития асимптотического метода дифференциальных неравенств на этот класс задач.

Среди важных приложений асимптотических методов выделим разработку концепции асимптотического решения обратных задач для нелинейных сингулярно возмущенных уравнений типа реакция–диффузия–адвекция. Особенностью математических моделей указанного типа является наличие в их решениях стационарных или движущихся узких внутренних переходных слоев, что приводит к неустойчивости при численном решении прямых задач и существенным образом усложняет дальнейшее исследование соответствующих обратных задач. Основная идея концепции асимптотического решения обратных задач состоит в том, что асимптотический анализ позволяет свести исходную нелинейную сингулярно возмущенную задачу к набору более простых задач, которые не содержат малых параметров и имеют меньшую пространственную размерность или содержат не дифференциальные, а алгебраические уравнения. Таким образом, применение асимптотического анализа дает возможность установить более простые связи между наблюдаемыми параметрами решения и параметрами обратной задачи, которые необходимо определить (коэффициенты в уравнении, граничные и начальные условия и т.п.), что позволяет принципиально изменить подход к решению обратных задач. Наличие малого параметра в исходной модели обеспечивает при этом достаточно точное качественное и количественное описание решения. За последнее время получены результаты по решению обратных задач для нового класса нелинейных сингулярно возмущенных уравнений типа Бюргерса с модульной и квадратичной адвекцией с периодическими по времени коэффициентами, а также некоторые классы начально-краевых задач. Показано, что в рассматриваемых моделях при определенных условиях асимптотический подход позволяет свести коэффициентные обратные задачи к линейным алгебраическим уравнениям, связывающим с заданной точностью наблюдаемое положение движущегося фронта с входными данными модели (коэффициентами в уравнении и граничными условиями). Таким образом, если имеется возможность наблюдения траектории движения фронта на некотором временном интервале, то вопрос об определении неизвестного коэффициента уравнения или граничного режима сводится к набору простых алгебраических операций. Предложено асимптотическое решение задачи восстановления функции источника в уравнении Бюргерса с модульной адвекцией по известной (точно или приближенно) информации о траектории движения фронта на заданном временном интервале (периоде). Аналогичным образом было получено асимптотическое решение задачи граничного управления, т.е. определения граничных условий, при которых фронт движется по заданному закону. Развиваемый подход продемонстрирован при решении обратной коэффициентной задачи коэффициента линейного усиления на основании асимптотического анализа и эффективных численных методов в случае, когда коэффициент линейного усиления получается на основании решения некорректно поставленной задачи дифференцирования наблюдаемой информации. Продемонстрирована высокая эффективность предлагаемого подхода по сравнению с ранее развитыми для таких классов задач (см. [84]–[87]).

В ряде работ создан новый подход аналитико-численного исследования движущихся фронтов в сингулярно возмущенных моделях типа реакция–диффузия–адвекция. Предложен метод генерации динамически адаптированной сетки для эффективного численного решения задач данного класса. Метод основан на априорной информации о движении и свойствах фронта, полученной в результате строгого асимптотического анализа сингулярно возмущенной параболической задачи. В частности, существенными параметрами, которые учитываются при построении сетки, являются оценки местоположения переходного слоя, его ширина и структура. Предлагаемый аналитико-численный подход позволяет значительно сэкономить вычислительные ресурсы, сократить время счета и повысить стабильность работы вычислительного процесса по сравнению с классическими подходами. Рассмотрены примеры, демонстрирующие основные идеи и методику применения предлагаемого подхода (см., например, [88] и ссылки в этой работе).

Продемонстрированы возможности методов асимптотического анализа в разрешении вопроса о диагностике разрушения решения по времени и пространству уравнения Бюргерса с квадра-

тичной и модульной нелинейностями и кубическим усилением (см. [54]). Результат, полученный методами асимптотического анализа был уточнен с помощью методики численной диагностики разрушения точного решения, которая основана на вычислении апостериорной асимптотически точной оценки погрешности, получаемой при вычислении приближенного решения на последовательности сгущающихся сеток. Численные эксперименты демонстрируют, что асимптотический результат дает хорошую оценку времени разрушения решения и его локализацию по пространству для достаточно широкого диапазона малых параметров. Таким образом, можно утверждать, что создан и развивается новый метод аналитического исследования явлений разрушения решений, областью применения которого является класс сингулярно возмущенных задач (например, задачи для уравнения типа Бюргерса). Важным отличием этого метода от используемых другими исследователями является то, что он позволяет установить факт разрушения решения не только по времени (а также получить асимптотическое приближение времени разрушения), но и определить пространственную локализацию этого явления, что является важным результатом при решении многих прикладных задач. Ниже идеи асимптотического метода дифференциальных неравенств продемонстрированы в двух классах актуальных задач. Эти разделы сейчас активно развиваются и переносятся в новые классы задач, представляющих как теоретический, так и прикладной интерес.

### 3.1. Многомерные внутренние слои в задаче со сбалансированной нелинейностью

В этом разделе мы проиллюстрируем общую схему применения асимптотического метода дифференциальных неравенств на примере задачи о многомерной стационарной контрастной структуре. Эта задача возникает при математическом моделировании различных процессов с межфазовыми переходами.

Рассмотрим пространственно неоднородное уравнение реакции–диффузии с граничными условиями Дирихле

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \epsilon^2 \Delta u - f(u, x, \epsilon), \quad x \in \mathcal{D} \subset R^N, \quad t > 0, \\ u(x) &= g(x), \quad x \in \partial \mathcal{D}, \quad t > 0, \\ u(x, 0, \epsilon) &= u^0(x, \epsilon) \end{aligned} \quad (18)$$

и исследуем вопросы существования и устойчивости по Ляпунову стационарной контрастной структуры. Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

(A1) Вырожденное уравнение  $f(u, x, 0) = 0$  имеет ровно три корня  $u = \varphi^{(\pm)}(x)$ ,  $\varphi^{(0)}(x)$  таких, что

$$\varphi^{(-)}(x) < \varphi^{(0)}(x) < \varphi^{(+)}(x), \quad x \in \bar{\mathcal{D}},$$

и

$$\bar{f}_u^{(\pm)}(x) \equiv f_u(\varphi^{(\pm)}(x), x, 0) > 0, \quad x \in \bar{\mathcal{D}}.$$

Введем в рассмотрение функцию  $I(x)$ :

$$I(x) := \int_{\varphi^{(-)}(x)}^{\varphi^{(+)}(x)} f(u, x, 0) du,$$

и предположим, что

$$(A2) \quad I(x) \equiv 0, \quad x \in \bar{\mathcal{D}}.$$

При выполнении условия (A2) уравнение в задаче (18) называют уравнением со сбалансированной нелинейностью.

(A3) Пусть граничное условие принадлежит области влияния корня  $u = \varphi^{(-)}(x)$ , т.е. выполнено условие

$$\int_{\varphi^{(-)}(x)}^{g(x)} f(u, x, 0) du > 0$$

для всех  $x \in \partial \mathcal{D}$ .

Введем множество  $\mathcal{S}$  гиперповерхностей

$$\mathcal{S} = \{\Gamma \in \mathcal{D} \mid \Gamma - (N - 1)\text{-мерное гладкое связное замкнутое многообразие}\}.$$

Асимптотику решения с внутренним переходным слоем, локализованным вблизи некоторой гиперповерхности  $\Gamma_\varepsilon$ , принадлежащей множеству  $\mathcal{S}$ , строим по схеме, описанной в предыдущем разделе. При этом условия (A1) и (A3) обеспечивают разрешимость задач для определения главных членов асимптотических представлений (5) и (7). Главные члены регулярных частей этих представлений определяются из вырожденного уравнения, а погранслойных – из стандартных краевых задач для автономных ОДУ второго порядка, разрешимость которых устанавливается с помощью анализа на фазовой плоскости (см., например, [20]). Операторы  $L_R^\pm = -f_u(\varphi^{(\pm)}(x)) < 0$  при  $x \in \bar{\mathcal{D}}$ . Следовательно, они обратимы и, более того, позволяют построить нижние и верхние решения нужного порядка с помощью модификации регулярной части асимптотики (см. предыдущий раздел). Порождающий погранслойную часть асимптотического разложения оператор

$$L_{BL} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - f_u(\varphi^{(-)}(x) + \Pi_0, x, 0), \quad x \in \partial\mathcal{D},$$

где  $\rho$  – растянутое расстояние вдоль нормали к границе  $\partial\mathcal{D}$ , хорошо изучен и, в частности, соответствующее неравенство имеет положительное (экспоненциально убывающее) решение в случае монотонной пограничной функции  $\Pi_0(\rho)$ , добавление которого к погранслойной части асимптотики позволяет добиться упорядоченности нижнего и верхнего решений в зоне погранслоя (см. [20]).

Определим функцию  $V_1(x, \Gamma)$  для поверхностей  $\Gamma \in \mathcal{S}$  следующим соотношением:

$$V_1(x, \Gamma) \equiv -\kappa(x, \Gamma)m(x) + J(x; \Gamma),$$

где  $\kappa(x, \Gamma)$  – средняя кривизна поверхности  $\Gamma$ ,

$$m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial \tilde{Q}_0(\tau; x)}{\partial \tau} \right)^2 d\tau,$$

$$J(x; \Gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} [\tau(\nabla_x f(u, x, 0)|_{u=\tilde{Q}_0(\tau; x)} v(x; \Gamma) + f_\varepsilon(\tilde{Q}_0(\tau; x), x, 0)) \frac{\partial \tilde{Q}_0(\tau; x)}{\partial \tau} d\tau, \quad x \in \Gamma,$$

$v(x; \Gamma)$  – вектор единичной нормали к кривой  $\Gamma$ , направленный в  $\mathcal{D}^{(+)}$ ,  $\tilde{Q}_0(\tau; x)$  – решение краевой задачи, описывающей внутренний переходный слой в нулевом приближении:

$$\frac{d^2 \tilde{Q}_0}{d\tau^2} - f(\tilde{Q}_0, x, 0) = 0, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \tilde{Q}_0(\tau; x) = \varphi^{(\pm)}(x), \quad \tilde{Q}_0(0; x) = \varphi^{(0)}(x), \quad x \in \Gamma,$$

$\tau$  – растянутая переменная переходного слоя. Известно, что такая задача имеет единственное решение.

Условие  $C^1$ -сшивания (10) выполняется в первом приближении, если наложить требование (отметим, что в случае сбалансированной нелинейности условие (10) в нулевом приближении выполняется для любой поверхности  $\Gamma$ ):

(A4) Существует поверхность  $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$  такая, что

$$V_1(x, \Gamma_0) \equiv 0, \quad x \in \Gamma_0.$$

Как отмечалось в предыдущем разделе, условие  $C^1$ -сшивания (10) в следующих приближениях приводит к линейным уравнениям для определения коэффициентов  $R_i$  в асимптотическом представлении (3) для поверхности перехода  $\Gamma_\varepsilon$ :

$$A^\Gamma R_i = H_i,$$

где оператор  $A^\Gamma$  выражается через исходные данные следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\Gamma R(x) &:= m(x) \left( \Delta^\Gamma + \sum_{j=1}^{N-1} \kappa_j(x)^2 \right) R(x) + \nabla_\Gamma m(x) \cdot \nabla_\Gamma R(x) - \kappa(x; \Gamma) \frac{\partial m(x)}{\partial \nu(x; \Gamma)} R(x) + J_r(x; \Gamma) R(x) = \\ &= \operatorname{div}_\Gamma (m(x) \nabla_\Gamma R(x)) + \left( \sum_{j=1}^{N-1} \kappa_j(x)^2 \right) R(x) - \kappa(x; \Gamma) \frac{\partial m(x)}{\partial \nu(x; \Gamma)} R(x) + J_r(x; \Gamma) R(x), \quad x \in \Gamma, \end{aligned}$$

где  $\Delta^\Gamma$ ,  $\operatorname{div}_\Gamma$  и  $\nabla_\Gamma$  обозначают, соответственно, операторы Лапласа–Бельтрами, *дивергенции* и *градиента* на поверхности  $\Gamma_0$ , а  $\kappa_j(x)$  ( $j = 1, 2, \dots, N - 1$ ) – главные кривизны  $\Gamma_0$  в точке  $x$ . Функция  $J_r(x; \Gamma)$  определяется следующим образом:

$$J_r(x; \Gamma) \equiv \frac{d}{dr} J(x + r\nu(x; \Gamma); \Gamma_r) \Big|_{r=0}.$$

Оператор  $\mathcal{A}^\Gamma$  является самосопряженным, все его собственные значения действительны. Наше следующее требование

**(A5)** Главное (наибольшее) собственное значение  $\lambda_0$  оператора  $A^\Gamma$  удовлетворяет условию  $\lambda_0 < 0$ .

Оно обеспечивает однозначную разрешимость задач для определения  $R_j$ , а также выполнение условия существования положительного решения у неравенства  $A^\Gamma R < 0$ , которое, как отмечалось в п. 2.2, позволяет построить нижнее и верхнее решения, упорядоченные в зоне переходного слоя. Таким образом, применяя асимптотический метод дифференциальных неравенств, для задачи (18) мы получаем следующий результат.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (A1)–(A5). Тогда для достаточно малых  $\varepsilon$  существует стационарное решение  $u(x, \varepsilon)$  задачи (18) такое, что вне любых сколь угодно малых, но фиксированных окрестностей  $\Gamma_\delta$  поверхности  $\Gamma_0$  и  $\partial \mathcal{D}_\delta$  границы  $\partial \mathcal{D}$  имеет место равномерный предельный переход

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi^{(-)}(x), & x \in \mathcal{D}^{(-)} \setminus \Gamma_\delta \setminus \partial \mathcal{D}_\delta, \\ \varphi^{(+)}(x), & x \in \mathcal{D}^{(+)} \setminus \Gamma_\delta, \end{cases}$$

где  $\mathcal{D}^{(+)}$  и  $\mathcal{D}^{(-)}$  – внутренняя и внешняя по отношению к поверхности  $\Gamma_0$  подобласти  $\mathcal{D}$ . Это решение локально единственно и асимптотически устойчиво с областью устойчивости  $[\alpha_3(x, \varepsilon), \beta_3(x, \varepsilon)]$ .

### 3.2. Периодические фронты в задаче с модульной адвекцией

Проиллюстрируем развитие важного направления исследований задач с разрывными коэффициентами и источниками следующей задачей:

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(u) &:= \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial |u|}{\partial x} - B(u, x, t) = 0, \\ (x, t) \in \mathcal{D} &:= \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, t \in \mathbb{R}\}, \\ u(-1, t, \varepsilon) &= u^{(-)}(t), \quad u(1, t, \varepsilon) = u^{(+)}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, t, \varepsilon) &= u(x, t + T, \varepsilon), \quad t \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq x \leq 1, \end{aligned} \tag{19}$$

для  $\varepsilon \in I_{\varepsilon_0} := \{0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ ,  $0 < \varepsilon_0$ . Функции  $B$ ,  $u^{(-)}$  и  $u^{(+)}$  – достаточно гладкие и  $T$ -периодические по  $t$ .

Определим области:  $\mathcal{D} := (x, t) \in (0; 1) \times (0, T]$ ,  $\mathcal{D}_T^{(-)} := (x, t) \in (0; x^*) \times (0, T]$ ,  $\mathcal{D}^{(+)} := (x, t) \in (x^*; 1) \times (0, T]$ , и дадим следующее определение решения.

**Определение.** Функция  $u(x, t, \varepsilon) \in C(\bar{\mathcal{D}}) \cap C^1 \mathcal{D} \cap C^{1,2}(\mathcal{D}^{(-)} \cup \mathcal{D}^{(+)})$  называется решением задачи (19), если она удовлетворяет уравнению в (19) в каждой  $D_T^{(\mp)}$ , а также граничным условиям.

(A<sub>0</sub>) Предположим, что  $B$ ,  $u^{(-)}$  и  $u^{(+)}$  — достаточно гладкие и  $T$ -периодические по  $t$  функции. Пусть  $u^{(-)}(t) < 0$ ,  $u^{(+)}(t) > 0$  при  $t \in R$ .

При  $\varepsilon = 0$  в (19) получаем так называемое вырожденное уравнение

$$\frac{\partial |u|}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} - B(u, x, t) = 0. \quad (20)$$

Уравнение (20) рассмотрим с одним из дополнительных условий задачи (19):

$$u(-1, t) = u^{(-)}(t), \quad t \in R, \quad (21)$$

$$u(1, t) = u^{(+)}(t), \quad t \in R. \quad (22)$$

Предположим, что выполнены условия

(A<sub>1</sub>) Задачи (20), (21) и (20), (22) имеют решения  $u = \varphi^{(-)}(x, t)$  и  $u = \varphi^{(+)}(x, t)$ , определенные при  $(x, t) \in \bar{\mathcal{D}}$ ,  $T$ -периодические по  $t$  и удовлетворяющие условию

$$\varphi^{(-)}(x, t) < 0 < \varphi^{(+)}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{\mathcal{D}}.$$

Для формулировки следующих условий введем функцию  $I(x, t)$ :

$$I(x, t) := \varphi^{(-)}(x, t) + \varphi^{(+)}(x, t),$$

и потребуем выполнения условий

(A<sub>2</sub>) Задача

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{I(x, t)}{\varphi^{(+)}(x, t) - \varphi^{(-)}(x, t)}, \quad x(t) = x(t + T),$$

имеет решение  $x = x_0(t)$ , удовлетворяющее неравенствам

$$-1 < x_0(t) < 1 \quad \text{при} \quad t \in R.$$

(A<sub>3</sub>) Функция

$$K(x, t) = \frac{I(x, t)}{\varphi^{(+)}(x, t) - \varphi^{(-)}(x, t)} \quad \text{при} \quad x = x_0(t)$$

удовлетворяет условию

$$\int_0^T K_x(x_0(t), t) dt =: d_0 > 0 \quad \text{при} \quad t \in R.$$

Положение внутреннего переходного слоя  $x_*(t, \varepsilon)$  в каждый момент времени  $t$  определим как точку пересечения решения задачи (19) с прямой  $u = 0$ . Асимптотическое приближение функции  $x_*(t, \varepsilon)$  ищем в виде ряда

$$x_*(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots,$$

где  $x_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , —  $T$ -периодические функции, которые определяются из условия  $C^1$ -сшивания асимптотик задач  $D_T^{(-)}$  и  $D_T^{(+)}$  (эти задачи используют дополнительные условия в точке  $x_*(t, \varepsilon) - u(x_*(t, \varepsilon), t) = 0$ ). Формальную асимптотику  $U^{(\mp)}(x, t, \varepsilon)$  решения каждой из этих задач:

$$\begin{aligned} \varepsilon \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\partial |u|}{\partial x} - B(u, x, t) &= 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in \mathcal{D}^{(\mp)}, \\ u(\mp 1, t, \varepsilon) &= u^{(\mp)}(t), \quad u(x_*(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = 0 \quad \text{при} \quad t \in R, \\ u(x, t, \varepsilon) &= u(x, t + T, \varepsilon) \quad \text{при} \quad (x, t) \in \bar{\mathcal{D}}^{(\mp)}, \end{aligned} \quad (23)$$

ищем в виде (по схеме п. 2.1, подробнее см., например, [68])

$$U^{(\mp)}(x, t, \varepsilon) = U^{(\mp)}(x, t, \varepsilon) + Q^{(\mp)}(\xi, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (\bar{U}_i^{(\mp)}(x, t) + Q_i^{(\mp)}(\xi, t)), \quad (24)$$

где  $\bar{U}_i^{(\mp)}$  и  $Q^{(\mp)}$  обозначают регулярную и погранслоиную вблизи  $x_*$  части асимптотики (19).

Для определения функций  $x_i(t)$  используются условия  $C^1$ -сшивания

$$\varepsilon \frac{\partial U^{(-)}}{\partial x}(x_*(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial U^{(+)}}{\partial x}(x_*(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \quad t \in R, \quad (25)$$

в  $i$ -м порядке по  $\varepsilon$ . Используя стандартную процедуру, получаем представление, из которого определяются коэффициенты регулярной части асимптотики (24):

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{U}^{(\pm)}}{\partial x^2} - \frac{\partial \bar{U}^{(\pm)}}{\partial t} \pm \frac{\partial \bar{U}^{(\pm)}}{\partial x} - B(\bar{U}^{(\pm)}, x, t) = 0, \\ (x, t) \in \mathcal{D}^{(\pm)}, \quad u(\pm 1, t, \varepsilon) = u^{(\pm)}(t) \quad \text{при} \quad t \in R. \end{aligned}$$

Очевидно, что главные члены этого представления  $\bar{U}_0^{(\pm)}$  определяются условием  $(A_1)$ , а члены более высоких порядков определяются из линейных задач

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{U}_k^{(\pm)}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \bar{U}_k^{(\pm)}}{\partial x} + B_u(\varphi^{(\pm)}(x, t), x, t) \bar{U}_k^{(\pm)} = f_k^{(\pm)}(x, t) \\ \text{при} \quad (x, t) \in \mathcal{D}^{(\pm)}, \quad \bar{U}_k^{(\pm)}(\pm 1, t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in R, \end{aligned}$$

решение которых можно выписать в явном виде (из него также следует монотонность оператора, порождающего регулярную часть асимптотики).

Для построения погранслоинной части асимптотики (24) используется растянутая переменная  $\xi = (x - x_*(t, \varepsilon))/\varepsilon$ , представление А.Б. Васильевой для нелинейности  $B$ , а также представление дифференциального оператора

$$L_\varepsilon = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} x'_*(t, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Для нахождения коэффициентов погранслоинной части асимптотики имеем представление

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 Q^{(\pm)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial x_*(t, \varepsilon)}{\partial t} \frac{\partial Q^{(\pm)}}{\partial \xi} - \frac{\partial Q^{(\pm)}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \mp \frac{\partial}{\partial \xi} (Q^{(\pm)}) \right] + \\ + [B(\bar{U}^{(\pm)}(x_*(t, \varepsilon) + \varepsilon \xi, t, \varepsilon) + Q^{(\pm)}, x_*(t, \varepsilon) + \varepsilon \xi, t) - \\ - B(\bar{U}^{(\pm)}(x_*(t, \varepsilon) + \varepsilon \xi, t, \varepsilon), x_*(t, \varepsilon) + \varepsilon \xi, t)], \\ Q^{(\pm)}(0, t, \varepsilon) + \bar{U}^{(\pm)}(x_*(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Из представления (26) получаем уравнения  $Q_k^{(\pm)}(\xi, t) \equiv Q_k^{(\pm)}(\xi, x_*(t, \varepsilon), t)$ , для которых используется стандартное условие на  $Q_k^{(\pm)}(\pm\infty, t) = 0$ . Для  $Q_0^{(-)}$  и  $Q_0^{(+)}$  получаем следующие задачи:

$$\frac{\partial^2 Q_0^{(-)}}{\partial \xi^2} = (1 - x'_*(t)) \frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial \xi} \quad \text{при} \quad \xi < 0, \quad t \in R, \quad (27)$$

$$Q_0^{(-)}(-\infty, t) = 0, \quad Q_0^{(-)}(0, t) = -\varphi^{(-)}(x_*(t), t), \quad t \in R, \quad (28)$$

и

$$\frac{\partial^2 Q_0^{(+)}}{\partial \xi^2} = (-1 - x'_*(t)) \frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial \xi}, \quad \xi > 0, \quad t \in R, \quad (29)$$

$$Q_0^{(+)}(\infty, t) = 0, \quad Q_0^{(+)}(0, t) = -\varphi^{(+)}(x_*(t), t), \quad t \in R. \quad (30)$$

Решения задач (27), (28) и (29), (30) выписываются в явном виде:  $Q_0^{(-)}(\xi, t) = -\varphi^{(-)}(x_*(t), t)\exp[(1 - x_*(t))\xi]$  и  $Q_0^{(+)}(\xi, t) = -\varphi^{(+)}(x_*(t), t)\exp[(-1 - x_*(t))\xi]$ . Очевидно, что  $Q_0^{(\pm)}(\xi, t)$  имеют оценку  $|Q_0^{(\pm)}(\xi, t)| \leq c\exp(-\kappa|\xi|)$ ,  $\xi \in R^{(\pm)}$ ,  $t \in R$ . Условие  $C^1$ -сшивания (25) в нулевом порядке

$$\frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial \xi}(0, x_0(t), t) = \frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial \xi}(0, x_0(t), t), \quad t \in R,$$

выполняется, так как оно приводится к задаче

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial \xi}(0, x_0(t), t) - \frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial \xi}(0, x_0(t), t) \right) (\varphi^{(+)}(x_0(t), t) - \varphi^{(-)}(x_0(t), t)) = \\ & = \frac{dx_0}{dt} (\varphi^{(+)}(x_0(t), t) - \varphi^{(-)}(x_0(t), t)) + I(x_0(t), t) = 0, \end{aligned}$$

разрешимой в силу условия  $(A_2)$ . Заметим, что это условие является аналогом условия Ранкине–Гюгоньо для рассматриваемого класса задач.

Из представления (26) можно получить задачи для  $Q_1^{(\pm)}$  и  $Q_k^{(\pm)}$  следующих порядков, решение которых выписывается в явном виде. Условие  $C^1$ -сшивания (25) в первом порядке по  $\varepsilon$  достаточно просто приводится к задаче отыскания периодического решения уравнения

$$\frac{dx_1}{dt} + K_x(x_0(t), t)x_1 = \Phi_1(t),$$

где  $\Phi_1(t)$  выражаются через известные функции асимптотики первого порядка. Решение этой задачи гарантировано условием  $(A_2)$ . Функции  $x_k$  следующих порядков определяются из аналогичных задач, а условие  $(A_3)$  является условием однозначной разрешимости и монотонности оператора, порождающего асимптотику положения внутреннего переходного слоя.

Определим  $\mathcal{D}_n^{(-)}$  и  $\mathcal{D}_n^{(+)}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n^{(-)} & := \left\{ (x, t) \in R^2 : -1 \leq x \leq \sum_{i=0}^{n+1} x_i(t)\varepsilon^i, t \in R \right\}, \\ \mathcal{D}_n^{(+)} & := \left\{ (x, t) \in R^2 : \sum_{i=0}^{n+1} x_i(t)\varepsilon^i \leq x \leq 1, t \in R \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим через  $U_n^{(\pm)}$  частичные суммы порядка  $n$  представлений (24),  $\xi$  заменена на  $(x - \sum_{i=0}^{n+1} x_i(t)\varepsilon^i)/\varepsilon$ . Введем также обозначение

$$U_n(x, t, \varepsilon) := \begin{cases} U_n^{(-)}(x, t, \varepsilon) & \text{при } (x, t) \in \mathcal{D}_n^{(-)}, \\ U_n^{(+)}(x, t, \varepsilon) & \text{при } (x, t) \in \mathcal{D}_n^{(+)}. \end{cases}$$

Рассмотрим соответствующую задаче (19) начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{\partial |v|}{\partial x} - B(v, x, t) = 0, \\ & (x, t) \in \mathcal{D} := \{(x, t) : -1 < x < 1, t \in R^+\}, \\ & v(-1, t, \varepsilon) = u^{(-)}(t), \quad v(1, t, \varepsilon) = u^{(+)}(t) \quad \text{при } t \in R^+, \\ & v(x, 0, \varepsilon) = v^0(x, \varepsilon) \quad \text{при } -1 \leq x \leq 1. \end{aligned} \tag{31}$$

Доказательство теоремы существования и устойчивости периодического решения проводится с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств, который в данной задаче использует следующее определение нижнего и верхнего решений.

**Определение.** Функции  $\alpha$  и  $\beta$  называются *упорядоченными нижним и верхним решениями задачи* (19) при  $\varepsilon \in I_{\varepsilon_0}$ , если они удовлетворяют следующим условиям:

- 1°  $\alpha(x, t, \varepsilon) \leq \beta(x, t, \varepsilon)$  при  $(x, t) \in \overline{\mathcal{D}}$ ,
- 2°  $N_\varepsilon(\alpha) \geq 0 \geq N_\varepsilon(\beta)$  при  $(x, t) \in \mathcal{D}^+ \cup \mathcal{D}^-$ ,
- 3°  $\alpha(-1, t, \varepsilon) \leq u^{(-)}(t) \leq \beta(-1, t, \varepsilon)$ ,  
 $\alpha(1, t, \varepsilon) \leq u^{(+)}(t) \leq \beta(1, t, \varepsilon)$  при  $t \in R$ .

В случае, когда  $\alpha$  и  $\beta$  непрерывные в  $\overline{\mathcal{D}}$ , но не гладкие на некоторой периодической кривой  $x = \bar{x}(t)$ , они должны удовлетворять допустимому скачку производной

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}(\bar{x}(t) + 0, t, \varepsilon) \geq \frac{\partial \alpha}{\partial x}(\bar{x}(t) - 0, t, \varepsilon), \tag{32}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x}(\bar{x}(t) + 0, t, \varepsilon) \leq \frac{\partial \beta}{\partial x}(\bar{x}(t) - 0, t, \varepsilon). \tag{33}$$

**Замечание.** Известно (см., например, [33]), что из существования упорядоченных нижнего и верхнего решений следует существование решения  $u(x, t, \varepsilon)$  задачи (19), удовлетворяющее неравенствам

$$\alpha(x, t, \varepsilon) \leq u(x, t, \varepsilon) \leq \beta(x, t, \varepsilon) \quad \text{при} \quad (x, t) \in \mathcal{D} \quad \text{и} \quad \varepsilon \in I_{\varepsilon_0}.$$

В данной задаче используются нижнее и верхнее решения с допустимым скачком производной на модификациях кривых формальной асимптотики положения внутреннего слоя  $x_\alpha$  и  $x_\beta$ . В этом случае имеется такой же результат существования (см., например, [36], [40], а также [39] и ссылки в этих работах).

Имеет место следующая теорема существования решения задачи (19), его локальной единственности и его асимптотической устойчивости как периодического решения начально-краевой задачи (31):

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия  $(A_0)$ – $(A_3)$ . Тогда при достаточно малых  $\varepsilon$  существует решение задачи (19)  $u(x, t, \varepsilon)$  с переходным слоем в окрестности  $x_0(t)$ , удовлетворяющее предельным соотношениям

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, t, \varepsilon) = \begin{cases} \varphi^{(-)}(x, t) & \text{при} \quad -1 \leq x < x_0(t), \quad t \in R, \\ \varphi^{(+)}(x, t) & \text{при} \quad x_0(t) < x \leq 1, \quad t \in R, \end{cases}$$

и оценкам

$$|u(x, t, \varepsilon) - U_n(x, t, \varepsilon)| \leq c\varepsilon^n \quad (x, t) \in \overline{\mathcal{D}},$$

где  $c$  – некоторая положительная постоянная, не зависящая от  $\varepsilon$ . Это решение асимптотически устойчиво как периодическое решение начально-краевой задачи (31) с областью устойчивости по крайней мере  $\alpha_2(x, 0, \varepsilon) \leq u \leq \beta_2(x, 0, \varepsilon)$  и локально единственно в этой области как решение задачи (19).

Для доказательства существования решения и оценки точности асимптотического приближения решения задачи (19) используются нижнее и верхнее решения  $\alpha_n(x, t, \varepsilon)$  и  $\beta_n(x, t, \varepsilon)$ , построенные по схеме п. 2.2. При этом модификация асимптотики положения переходного слоя  $x_*(t, \varepsilon)$  имеет вид

$$x_{n\beta}(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots + \varepsilon^{n+1}(x_{n+1}(t) - \delta(t)),$$

$$x_{n\alpha}(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots + \varepsilon^{n+1}(x_{n+1}(t) + \delta(t)).$$

В этих модификациях, используемых для построения верхнего и нижнего решений, сдвиг  $\delta$  определяется из периодической задачи, введенной в условии  $(A_3)$ :

$$\frac{d\delta(t)}{dt} + K_x(x_0(t), t)\delta(t) = h(t),$$

где  $h(t)$  – периодическая положительная функция. Следовательно,  $\delta > 0$  в силу монотонности оператора этой задачи. Это обеспечивает нужный скачок производных у  $\alpha_n(x, t, \varepsilon)$  и  $\beta_n(x, t, \varepsilon)$ , а также их упорядоченность в окрестности переходного слоя. Выполнение условий определения проводится подстановкой в задачу (19). Доказательство асимптотической устойчивости периодического решения задачи (31) следует из того, что функции  $\hat{\beta}(x, t, \varepsilon)$  и  $\hat{\alpha}(x, t, \varepsilon)$ , определенные при  $(x, t) \in \bar{\mathcal{D}}$  следующими выражениями:

$$\hat{\beta}(x, t, \varepsilon) = \begin{cases} u(x, t, \varepsilon) + (\beta_2^{(-)}(x, t, \varepsilon) - u(x, t, \varepsilon))e^{-\varepsilon\eta}, & (t, x) \in \bar{\mathcal{D}}_{n\beta}^{(-)}, \\ u(x, t, \varepsilon) + (\beta_2^{(+)}(x, t, \varepsilon) - u(x, t, \varepsilon))e^{-\varepsilon\eta}, & (t, x) \in \bar{\mathcal{D}}_{n\beta}^{(+)}, \end{cases}$$

$$\hat{\alpha}(x, t, \varepsilon) = \begin{cases} u(x, t, \varepsilon) + (\alpha_2^{(-)}(x, t, \varepsilon) - u(x, t, \varepsilon))e^{-\varepsilon\eta}, & (t, x) \in \bar{\mathcal{D}}_{n\alpha}^{(-)}, \\ u(x, t, \varepsilon) + (\alpha_2^{(+)}(x, t, \varepsilon) - u(x, t, \varepsilon))e^{-\varepsilon\eta}, & (t, x) \in \bar{\mathcal{D}}_{n\alpha}^{(+)}, \end{cases}$$

где  $u = u(x, t, \varepsilon)$  – периодическое решение задачи (19),  $\beta_2^{(\pm)}(x, t, \varepsilon)$  и  $\alpha_2^{(\pm)}(x, t, \varepsilon)$  – верхнее и нижнее решения задачи (19),  $\bar{\mathcal{D}}_{n\beta}^{(\pm)}$  и  $\bar{\mathcal{D}}_{n\alpha}^{(\pm)}$  – подобласти  $\bar{\mathcal{D}}$ , лежащие справа и слева от кривых  $x_{n\beta}(t, \varepsilon)$  и  $x_{n\alpha}(t, \varepsilon)$ , являются верхним и нижним решениями задачи (31).

Аналогичная схема доказательства применяется и в других периодических задачах, процитированных выше.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной обзорной статье отражено развитие методов асимптотического анализа новых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач для параболических и эллиптических уравнений, включающих так называемые уравнения реакции–диффузии–адвекции с пограничными и внутренними переходными слоями. Эти исследования включают в себя как разработку методов построения формальных асимптотических приближений (удовлетворяющих задаче по невязке), так и строгое обоснование – доказательство существования решения, оценку точности построенного асимптотического приближения, исследование устойчивости решений по Ляпунову. Новизна каждого класса задач может быть определена новыми дифференциальными операторами, производящими асимптотику. В основе строгих математических результатов, представленных в статье, лежит использование асимптотического метода дифференциальных неравенств. Суть этого метода состоит в использовании асимптотики для построения функций сравнения – нижних и верхних решений. При этом выясняются свойства операторов, производящих асимптотику: обратимость, монотонность. Этот метод определяет стратегию исследования. Переход к новым классам задач, в том числе обобщение ряда результатов на многомерный случай, а также на некоторые важные для приложений классы систем, требует развития как методов построения асимптотики и исследования обратимости новых классов операторов, порождающих асимптотику, так и исследования их монотонности. В ряде случаев это потребовало также привлечение и модификацию базовых теорем сравнения, устанавливающих условия существования соответствующих классов решений.

Полученные результаты асимптотического анализа широко используются и составляют основу как для развития теории численных методов, так и для создания эффективных численных алгоритмов для исследования задач с переходными слоями. В ходе работ в этом направлении создан и развивается новый метод аналитического исследования явлений разрушения решений, областью применения которого является класс сингулярно возмущенных задач (например, задачи для уравнения типа Бюргерса).

Известно, что динамика решений начально–краевых задач для параболических уравнений зависит от множества неустойчивых стационарных решений. Представляет интерес развитие методов доказательства существования и установления условий неустойчивости в классах задач, представленных выше. Продвижения в этом направлении представлены в [89].

Среди важных приложений отметим разработку концепции асимптотического решения обратных задач для нелинейных сингулярно возмущенных уравнений типа реакция–диффузия–адвекция. Известно, что наличие в их решениях стационарных или движущихся узких внутренних переходных слоев приводит к неустойчивости при численном решении прямых задач и существенным образом усложняет дальнейшее исследование соответствующих обратных задач. Основная идея концепции асимптотического решения обратных задач состоит в том, что асимп-

тотический анализ позволяет свести исходную нелинейную сингулярно возмущенную задачу к набору более простых задач, которые не содержат малых параметров и имеют меньшую пространственную размерность или содержат не дифференциальные, а алгебраические уравнения. Таким образом, применение асимптотического анализа дает возможность установить более простые связи между наблюдаемыми параметрами решения и параметрами обратной задачи, которые необходимо определить (коэффициенты в уравнении, граничные и начальные условия и т.п.), что позволяет принципиально изменить подход к решению обратных задач.

Полученные результаты асимптотического анализа, развитие численных методов и методов решения обратных задач применены для конкретных математических моделей нелинейной теории волн, биологии, магнитной гидродинамики и урбо-экологических моделям. Среди важных достижений отметим создание модели развития урбоэкосистем, согласно которой городскую экосистему можно рассматривать как активную среду с взаимодействующими природными и антропогенными подсистемами.

Основная часть работы посвящена идеям и результатам автора, его учеников и коллег, работающих на кафедре математики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Автор считает своим приятным долгом выразить им глубокую благодарность. Полученные результаты создают несколько новых направлений в нелинейных задачах с внутренними и переходными слоями и, как нам представляется, определяют мировое лидерство в этой области исследований школы А.Н. Тихонова по теории сингулярных возмущений. Особенную благодарность автор выражает В.Ф. Бутузову за тесное научное взаимодействие в течение многих лет.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Матем. сб. 1948. Т. 22 (64). № 2. С. 193–204.
2. Тихонов А.Н. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры // Матем. сб. 1950. Т. 27 (69). № 1. С. 147–156.
3. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Матем. сб. 1952. Т. 31 (73). № 3. С. 575–586.
4. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.
5. Bates P., Hilhorst D., Matano H., Morita Y. Discrete and continuous dynamical systems. 2017. V. 37. № 2. P. i–iii.
6. Kumar M., Singh A.K. Singular perturbation problems in nonlinear elliptic partial differential equations: a survey // Inter. J. of Nonlinear Sci. 2014. V. 17. № 3. P. 195–2014.
7. Sakamoto K. Infinitely many fine modes bifurcating from radially symmetric internal layers // Asymptot. Anal. 2005. V. 42. P. 55–104.
8. Magnus R. The implicit function theorem and multi-bump solutions of periodic partial differential equations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. 2006. V. 136. P. 559–583.
9. del Pino M., Kowalczyk M., Wei J. Resonance and interior layers in an inhomogeneous phase transition model // SIAM J. Math. Anal. 2007. V. 38. P. 1542–564.
10. Кащенко С.А. Динамика логистического уравнения с двумя запаздываниями // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 5. С. 561–571.
11. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Релаксационные автоколебания в сетях Хопфилда с запаздыванием // Изв. РАН. Сер. матем. 2013. Т. 77. № 2. С. 53–96.
12. Kopteva N., O’Riordan E. Shishkin meshes in the numerical solution of singularly perturbed differential equations // Inter. J. of Numer. Anal. and Model. 2004. V. 1. № 1. P. 1–18.
13. Kopteva N., Stynes M. Stabilised approximation of interior-layer solutions of a singularly perturbed semilinear reaction diffusion problem // Numerische Mathematik. 2011. V. 119. № 2. P. 787–810.
14. O’Riordan E., Quinn J. Numerical method for a nonlinear singularly perturbed interior layer problem // Lectures Notes in Comput. Sci. and Eng. 2011. V. 81. P. 187–195.
15. Quinn J. A numerical method for a nonlinear singularly perturbed interior layer problem using an approximate layer location // Comput. and Appl. Math. 2015. V. 290. № 15. P. 500–515.
16. Franz S., Roos H.-G. The capriciousness of numerical methods for singular perturbations // SIAM Rev. 2011. V. 53. P. 157–173.
17. Fran S., Kopteva N. Green’s function estimates for a singularly perturbed convection-diffusion problem // J. Diff. Eq. 2012. V. 252. P. 1521–1545.
18. Kopteva N. Numerical analysis of a 2d singularly perturbed semilinear reaction-diffusion problem // Lecture Notes in Comput. Sci. 2009. V. 5434. P. 80–91.

19. Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефедов Н.Н. Асимптотическая теория контрастных структур // Автоматика и телемехан. 1997. № 7. С. 4–32.
20. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундамент. и приклад. матем. 1998. Т. 4. № 3. С. 799–851.
21. Butuzov V.F., Nefedov N.N., Schneider K.R. Singularly Perturbed Problems in Case of Exchange of Stabilities // J. of Math. Sci. 2004. V. 121. № 1. P. 1973–2079.
22. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н. Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями // Тр. Матем. института им. В.А. Стеклова РАН. 2010. № 268. С. 268–283.
23. Fife P.C. Semilinear elliptic boundary value problems with small parameters // Arch. Rational Mech. Anal. 1973. V. 52. P. 205–232.
24. Файф П., Гринли У.М. Внутренние переходные слои для эллиптических краевых задач с малым параметром // Успехи матем. наук. 1974. Т. 29. № 4 (178) С. 103–130. (Russian Math. Surveys, 29:4 (1974), 103–131.)
25. Нефедов Н.Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов сингулярно возмущенных уравнений в частных производных // Дифференц. ур-ния. 1995. Т. 31. № 4. С. 719–723.
26. Нефедов Н.Н. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференц. ур-ния. 1995. Т. 31. № 7. С. 1142–1149.
27. Нефедов Н.Н. Асимптотический метод дифференциальных неравенств в исследовании периодических контрастных структур: существование, асимптотика, устойчивость // Дифференц. ур-ния. 2000. Т. 36. № 2. С. 262–269.
28. Нефедов Н.Н., Никитин А.Г. Асимптотический метод дифференциальных неравенств для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Дифференц. ур-ния. 2000. Т. 36. № 10. С. 1398–1404.
29. Nefedov N.N. Comparison principle for reaction-diffusion-advection problems with boundary and internal layers // Lecture Notes in Computer Sci. V. 8236. P. 62–72.
30. Pao C.V. Nonlinear parabolic and elliptic equations. Springer Science Business Media, 1993. 777 p.
31. Крейн М.Г., Рутман М.А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи матем. наук. 1948. V. 3. № 1 (23). P. 3–95.
32. Dancer E.N., Hess P. Behaviour of a semi-linear periodic-parabolic problem when a parameter is small // Lecture Notes in Math. 1990. V. 1450. P. 12–19.
33. Hess P. Periodic-parabolic boundary value problems and positivity. New York: Pitman Res. Notes in Math. Ser., 1991. 139 p.
34. Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. и др. Интегральные уравнения // Итоги науки. Сер. матем. Мат. анализ. 1967. 448 с.
35. Amman H. On the existence of positive solutions of nonlinear elliptic boundary value problems // Indiana Univ. Math. J. 1971. V. 21. P. 125–146.
36. Sattinger D.H. Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems // Indiana Univ. Math. J. 1972. V. 21. № 11. P. 979–1001.
37. Похожаев С.И. Об уравнениях вида  $\Delta u = (x, u, Du)$  // Матем. сб. 1980. V. 113. № 2. С. 324–338.
38. Павленко В.Н., Ульянова О.В. Метод верхних и нижних решений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Изв. вузов. Матем. 1998. № 11. С. 69–76.
39. Levashova N.T., Nefedov N.N., Nikolaeva O.A., Orlov A.O., Panin A.A. The solution with internal transition layer of the reaction-diffusion equation in case of discontinuous reactive and diffusive terms // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. V. 5134. P. 1–15.
40. Павленко В.Н., Ульянова О.В. Метод верхних и нижних решений для уравнений параболического типа с разрывными нелинейностями // Дифференц. ур-ния. 2002. V. 38. № 4. С. 499–504.
41. De Coster C., Obersnel F., Omari P.A. A qualitative analysis via lower and upper solutions of first order periodic evolutionary equations with lack of uniqueness // Handbook of differential equations: ordinary differential equations. 2006. V. 3. С. 203–339.
42. Павленко В.Н. Сильные решения периодических параболических задач с разрывными нелинейностями // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 4. С. 528–539.
43. Kannan R., Lakshmikantham V. Existence of periodic solutions of semilinear parabolic equations and the method of upper and lower solutions // J. Math. Anal. Appl. 1983. V. 97. № 1. P. 291–299.
44. Fife P., Tang M. Comparison principles for reaction–diffusion systems: irregular comparison functions and applications to question of stability and speed propagation of disturbances // J. Differential Equations. 1981. V. 40. № 11. P. 168–185.
45. Nefedov N.N., Recke L., Schnieder K.R. Existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of reaction-advection-diffusion equations // J. of Math. Anal. and Appl. 2013. V. 405. P. 90–103.

46. Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Орлов А.О. Асимптотическая устойчивость стационарного решения многомерного уравнения реакция-диффузия с разрывным источником // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 4. С. 611–620.
47. Нефедов Н.Н., Никитин А.Г., Петрова М.А., Рекке Л. Движущиеся фронты в интегро-параболических уравнениях реакция-адвекция-диффузия // Дифференц. ур-ния. 2011. Т. 47. № 9. С. 1305–1319.
48. Nefedov N.N., Sakamoto K. Multi-dimensional stationary internal layers for spatially inhomogeneous reaction-diffusion equations with balanced nonlinearity // Hiroshima Math. J. 2003. V. 33. № 3. P. 391–432.
49. Орлов А.О., Нефедов Н.Н., Левашова Н.Т. Решение вида контрастной структуры параболической задачи реакция-диффузия в среде с разрывными характеристиками // Дифференц. ур-ния. 2018. Т. 54. № 5. С. 673–690.
50. Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Николаева О.А. Решение с внутренним переходным слоем двумерной краевой задачи реакция-диффузия-адвекция с разрывными реактивным и адвективным слагаемыми // Теор. и матем. физ. 2021. Т. 207. № 2. С. 293–309.
51. Руденко О.В. Линеаризуемое уравнение для волн в диссипативных средах с модульной, квадратичной и квадратично-кубической нелинейностью // Докл. РАН. 2016. Т. 471. № 1. С. 23–27.
52. Руденко О.В. Модульные солитоны // Докл. РАН. 2016. Т. 471. № 6. С. 451–454.
53. Hedberg C.M., Rudenko O.V. Collisions, mutual losses and annihilation of pulses in a modular nonlinear medium // Nonlinear Dyn. 2017. V. 90, P. 2083–2091.
54. Нефедов Н.Н., Руденко О.В. О движении фронта в уравнении типа Бюргерса с квадратичной и модульной нелинейностью при нелинейном усилении. // Докл. РАН. 2018. Т. 478. № 3. С. 274–279.
55. Нефедов Н.Н., Руденко О.В. О движении, усилении и разрушении фронтов в уравнениях типа бюргерса с квадратичной модульной нелинейностью // Докл. РАН. 2020. Т. 493. № 1. С. 26–31.
56. Божжевольнов Ю.В., Нефедов Н.Н. Движение фронта в параболической задаче реакция-диффузия // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 2. С. 276–285.
57. Антипов Е.А., Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н. Асимптотика движения фронта в задаче реакция-диффузия-адвекция // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 10. С. 35–49.
58. Nefedov N.N. Asymptotic analysis of reaction–diffusion–advection problems: Fronts with periodic motion and blow-up // J. of Physics: Conf. Ser. 2017. V. 811. P. 012008.
59. Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Ягремцев А.В. Существование решения в виде движущегося фронта у задачи типа реакция-диффузия-адвекция в случае сбалансированной адвекции // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82. № 5. С. 131–152.
60. Alikakos N.D., Bates P.W., Chen X. Periodic traveling waves and locating oscillating patterns in multidimensional domains // Trans. AMS. 1999. V. 351. № 7. P. 2777–2805.
61. Volpert A.I., Volpert V.A. Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems. Translatio ed. Providence, Rhode Island: Am. Math. Soc. 1994. V. 140. P. 448.
62. Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P. Blow-up in quasilinear parabolic equations. Berlin: Walter de Gruyter, 1995.
63. Nefedov N.N., Nikulin E.I. Existence and stability of periodic contrast structures in the reaction–advection–diffusion problem // Rus. J. of Math. Phys. 2015. V. 22. № 2. P. 215–226.
64. Нефедов Н.Н., Никулин Е.И. Существование и устойчивость периодических контрастных структур в задаче реакция-адвекция-диффузия в случае сбалансированной нелинейности // Дифференц. ур-ния. 2017. Т. 53. № 4. С. 524–537.
65. Nefedov N.N., Nikulin E.I. Existence and asymptotic stability of periodic solutions of the reaction–diffusion equations in the case of a rapid reaction // Rus. J. of Math. Phys. 2018. V. 25. № 1. P. 88–101.
66. Нефедов Н.Н., Никулин Е.И. Существование и асимптотическая устойчивость периодических двумерных контрастных структур в задаче со слабой линейной адвекцией // Матем. заметки. 2019. Т. 106. № 5. С. 708–722.
67. Nefedov N.N., Nikulin E.I., Recke L. On the existence and asymptotic stability of periodic contrast structures in quasilinear reaction-advection-diffusion equations // Rus. J. of Math. Phys. 2019. V. 26. № 1. P. 55–69.
68. Nefedov N.N. The existence and asymptotic stability of periodic solutions with an interior layer of burgers type equations with modular advection // Math. Model. of Natural Phenomena. 2019. V. 4. № 4. P. 1–14.
69. Butuzov V.F., Nefedov N.N., Recke L., Schneider K.R. Periodic solutions with a boundary layer of reaction–diffusion equations with singularly perturbed neumann boundary conditions // Inter. J. of Bifurcation and Chaos. 2014. V. 24. № 8. P. 1440019-1–1440019-8.
70. Нефедов Н.Н., Никулин Е.И. О периодических решениях с пограничным слоем в задаче реакция-диффузия с сингулярно возмущенными граничными условиями третьего рода // Дифференц. ур-ния. 2020. Т. 56. № 12. С. 1641–1650.
71. Нефедов Н.Н., Дерюгина Н.Н. Существование стационарного погранслоного решения в уравнении реакция-диффузия с сингулярным граничным условием Неймана // Вестник Московского университета. Сер. 3: Физика, астрономия. 2020. № 5. С. 30–34.

72. Мельникова А.А. Существование и устойчивость периодического решения типа фронта в двухкомпонентной системе параболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 7. С. 1184–1200.
73. Мельникова А.А., Дерюгина Н.Н. Существование периодического решения в виде двумерного фронта в системе параболических уравнений // Дифференц. ур-ния. 2020. Т. 56. № 4. С. 475–489.
74. Бутузов В.Ф., Бычков А.И. Асимптотика решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения в случае двукратного корня вырожденного уравнения // Дифференц. ур-ния. 2013. Т. 49. № 10. С. 1295–1307.
75. Butuzov V.F., Nefedov N.N., Recke L., Schnieder K.R. On a singularly perturbed initial value problem in the case of a double root of the degenerate equation // Nonlinear Anal. Theory, Meth. and Appl. 2013. V. 83. P. 1–11.
76. Butuzov V.F. Asymptotics of the solution of a system of singularly perturbed equations in the case of a multiple root of the degenerate equation // Differential Equations. 2014. № 2. P. 177–188.
77. Бутузов В.Ф. Асимптотика решения сингулярно возмущенной частично диссипативной системы с кратным корнем вырожденного уравнения // Матем. сборник. 2016. Т. 207. № 8. С. 73–100.
78. Бутузов В.Ф. Асимптотика и устойчивость решения сингулярно возмущенной эллиптической задачи с трехкратным корнем вырожденного уравнения // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Т. 81. № 3. С. 21–44.
79. Бутузов В.Ф. Об асимптотике решения сингулярно возмущенной параболической задачи с многозонным внутренним переходным слоем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 6. С. 961–987.
80. Бутузов В.Ф. Асимптотика решения частично диссипативной системы уравнений с многозонным пограничным слоем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 10. С. 91–112.
81. Бутузов В.Ф. Асимптотика погранслоного решения стационарной частично диссипативной системы с кратным корнем вырожденного уравнения // Матем. сборник. 2019. Т. 210. № 11. С. 76–102.
82. Бутузов В.Ф. О сингулярно возмущенных системах ОДУ с кратным корнем вырожденного уравнения // Изв. РАН. Сер. матем. 2020. Т. 84. № 2. С. 60–89.
83. Бутузов В.Ф. Асимптотика контрастной структуры типа ступеньки в стационарной частично диссипативной системе уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 1. С. 57–84.
84. Лукьяненко Д.В., Волков В.Т., Нефедов Н.Н., Ягола А.Г. Применение асимптотического анализа для решения обратной задачи определения коэффициента линейного усиления в уравнении типа Бюргерса // Вестник Московского университета. Сер. 3: Физика, астрономия. 2019. № 2. С. 38–43.
85. Lukyanenko D.V., Shishlenin M.A., Volkov V.T. Asymptotic analysis of solving an inverse boundary value problem for a nonlinear singularly perturbed time-periodic reaction–diffusion–advection equation // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2019. V. 27. № 5. P. 745–758.
86. Волков В.Т., Нефедов Н.Н. Асимптотическое решение коэффициентных обратных задач для уравнений типа Бюргерса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 6. С. 975–984.
87. Nefedov N.N., Volkov V.T. Asymptotic solution of the inverse problem for restoring the modular type source in burgers' equation with modular advection // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2020. V. 28. № 5. P. 633–639.
88. Волков В.Т., Лукьяненко Д.В., Нефедов Н.Н. Аналитико-численный подход для описания периодических по времени движущихся фронтов в сингулярно возмущенных моделях реакция–диффузия–адвекция // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 1. С. 50–62.
89. Omel'chenko O.E., Recke L., Butuzov V.F., Nefedov N.N. Time-periodic boundary layer solutions to singularly perturbed parabolic problems // J. of Differential Equations. 2017. V. 262. № 9. P. 4823–4862.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ФИЗИКА

УДК 519.634

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ОСЛАБЛЕНИЯ  
ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ<sup>1)</sup>

© 2021 г. И. В. Прохоров<sup>1,2,\*</sup>, И. П. Яровенко<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup> 690041 Владивосток, ул. Радио, 7, Институт прикладной математики ДВО РАН, Россия

<sup>2</sup> 690950 Владивосток, ул. Суханова, 8, Дальневосточный федеральный университет, Россия

\*e-mail: prokhorov@iam.dvo.ru

\*\*e-mail: yarovenko@iam.dvo.ru

Поступила в редакцию 28.03.2020 г.  
Переработанный вариант 28.06.2021 г.  
Принята к публикации 04.08.2021 г.

Рассматривается обратная задача для нестационарного уравнения переноса излучения, заключающаяся в нахождении коэффициента ослабления по известному решению на границе области. Исследованы структура и непрерывные свойства решения начально-краевой задачи для уравнения переноса излучения. При специальных предположениях об источнике излучения показана единственность решения обратной задачи и получена формула для преобразования Радона коэффициента ослабления. Проведен численный анализ качества восстановления томографических изображений искомой функции при различных угловых и временных распределениях плотности потока внешнего источника. Библ. 35. Фиг. 2. Табл. 1.

**Ключевые слова:** нестационарное уравнение переноса, источники излучения, обратные задачи, коэффициент ослабления, томография.

**DOI:** 10.31857/S0044466921120115

ВВЕДЕНИЕ

Постановки обратных задач для уравнений переноса излучения весьма разнообразны и, не смотря на достаточно давнюю историю, интерес со стороны специалистов к обратным задачам теории переноса остается стабильно высоким (см. [1]–[20]). В большинстве задач требуется найти коэффициент ослабления по входящему и выходящему из среды потокам излучения. Такая постановка естественна и традиционна для томографии и соответствует модели, когда можно пренебречь рассеянием и наличием внутренних источников в среде. В этом случае коэффициент ослабления в уравнении остается единственной неизвестной величиной, определяющей свойства среды. Особенно ценны для практики постановки обратных задач, в которых определяется хотя бы один из коэффициентов уравнения и не требуется знание остальных. Например, в [5]–[14] изучались задачи определения коэффициента ослабления с внешними источниками специального типа, подавляющими влияние рассеяния и внутренних источников в облучаемой среде, а также задачи нахождения поверхностей разрывов коэффициентов уравнения по информации только о выходящем излучении. В частности, в [7], [8] для определения коэффициента ослабления в стационарном уравнении переноса было предложено использовать специальный источник излучения, имеющий разрыв первого рода по угловой переменной на некотором подмножестве единичной сферы, например, в горизонтальном сечении. Доказано, что решение представимо в виде суммы баллистической и рассеянной компоненты, причем баллистическая составляющая потока излучения имеет разрыв первого рода, а рассеянная компонента является непрерывной функцией. В недавних работах (см. [19], [20]) доказаны подобные утверждения в случае, когда плотность потока входящего излучения имеет разрывы по пространственным переменным на некоторой кривой, принадлежащей границе просвечиваемой области.

Используя указанные разложения, преобразование Радона коэффициента ослабления выражается через величины разрывов плотности потока входящего и выходящего из среды излу-

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-01-00173) и Минобрнауки РФ (соглашения 075-01095-20-00, 075-02-2020-1482-1).

ния. Таким образом, обратная задача для интегро-дифференциального уравнения сводится к традиционной задаче интегральной геометрии – обращению преобразования Радона в сечении исследуемого трехмерного объекта.

В настоящей статье мы обобщим результаты исследований (см. [7], [8]), полученные для стационарного уравнения переноса излучения, на нестационарный случай. Мы исследуем структуру нестационарного решения прямой задачи и получим формулу для преобразования Радона коэффициента ослабления. Справедливости ради заметим, что для нестационарной модели переноса излучения можно добиться дискриминации рассеивающей составляющей в измеряемом сигнале путем уменьшения длительности зондирующего импульса. Действительно, импульсные источники излучения давно и успешно используются в томографии. Более широкое распространение такие источники получили в оптической томографии, так как в рентгеновском диапазоне создание ультракоротких импульсов сопряжено с более жесткими физическими и технологическими ограничениями. Еще одно важное достоинство импульсных источников в сравнении с традиционными непрерывно излучающими генераторами рентгеновских лучей связано со снижением дозы лучевой нагрузки при томографии биологических объектов.

В работе проведено численное тестирование алгоритма решения обратной задачи на известном фантоме (см. [21]) и показано, что с уменьшением длительности импульса качество восстановленных изображений повышается. Отметим, что принцип фильтрации рассеянного поля основан на различной гладкости баллистической и рассеянной компонент излучения, поэтому в предложенном методе томографирования среды нет острой необходимости в использовании ультракоротких импульсов (см. [22], [23]). Для получения синтетических данных о выходящем излучении программно реализован метод Монте-Карло решения нестационарного уравнения переноса с источниками излучения специального типа.

## 1. ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение следующего вида (см. [17], [22], [24]):

$$\left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \omega \cdot \nabla_r + \mu(r)\right) I(r, \omega, t) = \sigma(r) \int_{\Omega} p(r, \omega \cdot \omega') I(r, \omega', t) d\omega' + J(r, \omega, t). \quad (1)$$

Уравнение (1) описывает нестационарный процесс взаимодействия излучения с веществом, а функция  $I(r, \omega, t)$  интерпретируется как плотность потока частиц в момент времени  $t \in [0, T]$  в точке  $r \in \mathbb{R}^3$ , движущихся со скоростью  $v$  в направлении единичного вектора  $\omega \in \Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 : |\omega| = 1\}$ . Функции  $\mu$  и  $\sigma$  имеют смысл коэффициентов ослабления и рассеяния, а через  $p$  и  $J$  обозначены индикатриса рассеяния и плотность внутренних источников.

Процесс переноса излучения происходит в некоторой многокомпонентной системе  $G$ , состоящей из объединения конечного числа ограниченных и попарно непересекающихся подобластей  $G_1, \dots, G_m$ , причем замыкание  $\bar{G}$  является выпуклым множеством в  $\mathbb{R}^3$ . Поверхность  $\partial \bar{G}$  будем называть внешней границей множества  $G$ , а  $\gamma = \partial G \setminus \partial \bar{G}$  – внутренней границей множества  $G$ .

Относительно множества  $G$  дополнительно предполагаем следующее: любая прямая, имеющая общую точку с  $G$ , пересекает границу  $\partial G$  в конечном числе точек. Это условие, называемое условием обобщенной выпуклости, типично в теории переноса и необременительно с прикладной точки зрения. Возникающая, казалось бы, несогласованность, связанная с наличием линейных участков на поверхности  $\partial G$ , во многих случаях может быть преодолена продолжением этих участков с возможным увеличением числа областей  $G_i$ .

Символом  $\text{mes}_m(X)$  в дальнейшем будем обозначать меру Лебега множества  $X$  в  $\mathbb{R}^m$ . Из условия обобщенной выпуклости нетрудно получить, что  $\text{mes}_3(\partial G) = 0$  (см. [11]).

Обозначим через  $L_{r,\omega}$  луч, исходящий из точки  $r \in \mathbb{R}^3$  в направлении  $\omega$ ,  $L_{r,\omega} = \{r + \omega t : t > 0\}$ , а через  $d(r, \omega)$  – расстояние от точки  $r \in \bar{G}$  до границы  $\partial \bar{G}$  в направлении  $\omega$ , т.е.  $d(r, \omega) = \text{mes}_1(L_{r,\omega} \cap \bar{G})$ . Пусть множество  $\Gamma_{\pm\omega}$  образовано точками  $z \in \partial \bar{G}$ , которые представимы в виде

$$z = r \pm d(r, \pm\omega)\omega, \quad \text{где } r \in G, \quad \omega \in \Omega.$$

Посредством  $\Gamma_\omega$  построим множества  $\Gamma^\pm = \Gamma_{\pm\omega} \times \Omega$ ,  $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$  и для краткости изложения введем ряд обозначений:

$$X = G \times \Omega \times [0, T], \quad X_0 = G \times \Omega \times \{t = 0\}, \quad Y^\pm = \Gamma^\pm \times [0, T], \quad X^- = Y^- \cup X_0.$$

Присоединим к уравнению (1) начальные и граничные условия

$$I|_{X_0} = h_0(r, \omega), \tag{2}$$

$$I|_{Y^-} = h_{\text{ext}}(z, \omega, t). \tag{3}$$

Для удобства введем в рассмотрение функцию

$$h(z, \omega, t) = \begin{cases} h_0(z, \omega), & \text{если } (z, \omega, t) \in X_0, \\ h_{\text{ext}}(z, \omega, t), & \text{если } (z, \omega, t) \in Y^-, \end{cases}$$

и запишем начальное условие (2) и граничное условие (3) в виде

$$I|_{X^-} = h(r, \omega, t). \tag{4}$$

**Задача 1.** В прямой задаче требуется определить функцию  $I$  из уравнения (1) и условия (4) при заданных  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $J$ ,  $p$ ,  $v$ ,  $h$ .

Исследованию прямых задач для стационарных и нестационарных уравнений переноса излучения подобного рода посвящено не мало работ, отметим лишь несколько широко известных монографий по этой тематике, а именно, [24]–[29].

**Задача 2.** Под обратной задачей будем понимать задачу определения функции  $\mu$  из соотношений (1), (4) и дополнительного условия

$$I(z, \omega, t) = H(z, \omega, t), \quad (z, \omega, t) \in Y^+, \tag{5}$$

при заданных  $h$ ,  $H$ ,  $v$ .

Для стационарного уравнения переноса излучения задача 2 при специальных условиях на внешний источник излучения рассматривалась в [5], [7], [8], [11], [14], [19], [20]. В настоящей работе результаты из [7], [8], [11] не только обобщаются на нестационарный случай, но и проводится численный анализ качества томограмм коэффициента ослабления при уменьшении длительности импульса внешнего источника излучения.

## 2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ОСНОВНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

Обозначим через  $C_b(X)$  пространство непрерывных и ограниченных на  $X$  функций. Относительно неотрицательных функций  $\mu(r)$ ,  $\sigma(r)$ ,  $J(r, \omega, t)$ ,  $p(r, \omega \cdot \omega')$  будем предполагать, что  $\mu \geq \text{const} > 0$ ,  $\mu, \sigma \in C_b(G)$ ,  $J \in C_b(X)$ , а функция  $p(r, \omega \cdot \omega') \in C_b(G \times [-1, 1])$  и для всех  $r$  удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{\Omega} p(r, \omega \cdot \omega') d\omega' = 1.$$

Под дифференциальным выражением в левой части уравнения (1) будем понимать производную в точке  $(r, t)$  в направлении вектора  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, 1/v)$ :

$$\left( \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \omega \cdot \nabla_r \right) f(r, \omega, t) = \frac{\partial}{\partial \tau} f(r + \tau\omega, \omega, t + \tau/v) \Big|_{\tau=0},$$

и через  $d^\pm(r, \omega, t)$  обозначим

$$d^-(r, \omega, t) = \min \{d(r, -\omega), vt\}, \quad d^+(r, \omega, t) = \min \{d(r, \omega), v(T - t)\}.$$

Будем говорить, что функция  $f(r, \omega, t)$  принадлежит  $D(X)$ , если выполнены следующие условия:

1) при всех  $(r, \omega, t) \in X$  функция  $f(r + \tau\omega, \omega, t + \tau/v)$  абсолютно непрерывна по  $\tau$ ,  $\tau \in [-d^-(r, \omega, t), d^+(r, \omega, t)]$ ,

2)  $f(r - d^-(r, \omega, t)\omega, \omega, t - d^-(r, \omega, t)/v) = 0$ ,

$$3) \left( \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \omega \cdot \nabla_r + \mu \right) f \in C_b(X).$$

Определим оператор  $\mathcal{L} : D(X) \rightarrow C_b(X)$  следующим равенством:

$$\mathcal{L}f = \left( \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \omega \cdot \nabla_r \right) f + \mu f. \tag{6}$$

Обозначим через  $\Omega_0$  некоторое подмножество нулевой меры на  $\Omega$  и рассмотрим оператор  $\mathcal{S} : C_b(G \times (\Omega \setminus \Omega_0) \times [0, T]) \rightarrow C_b(X)$ , заданный соотношением

$$\mathcal{S}f = \sigma(r) \int_{\Omega} p(r, \omega \cdot \omega') f(r, \omega', t) d\omega'. \tag{7}$$

Так как  $\sigma(r) \in C_b(G)$ ,  $p(r, \omega \cdot \omega') \in C_b(G \times [-1, 1])$ , то при  $f \in C_b(G \times \Omega \setminus \Omega_0 \times [0, T])$  функция  $\mathcal{S}f$  действительно принадлежит пространству  $C_b(G \times \Omega \times [0, T])$  (см. [11]), следовательно, определение оператора  $\mathcal{S}$  корректно.

В следующем разделе рассматривается задача нахождения функции  $f \in D(X)$ , удовлетворяющей уравнению

$$\mathcal{L}f = \mathcal{S}f + J \tag{8}$$

на множестве  $X$ . Из определения функционального пространства  $D(X)$  вытекает, что функция  $f$  является решением прямой задачи (1), (4) с однородными граничными и начальными условиями ( $h = 0$ ), а при переходе через границу раздела сред ( $r \in \partial G \setminus \partial \bar{G}$ ) решение остается непрерывно вдоль направления  $\omega$ .

### 3. РАЗРЕШИМОСТЬ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ С ОДНОРОДНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ И ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Предварительно докажем несколько вспомогательных лемм. Рассмотрим некоторое множество  $G' \times \Omega$ , состоящее из таких точек  $(r, \omega) \in \bar{G} \times \Omega$ , что прямая  $\{r + \tau\omega, -\infty < \tau < +\infty\}$  имеет непустое пересечение с  $G$ . В силу условия обобщенной выпуклости множество  $G$  является подмножеством  $G'$ .

**Лемма 1.** Пусть функция  $\mu(r) \in C_b(G)$  и  $\phi(r, \omega, t) \in C_b(X)$ , тогда функция

$$a(r, \omega, \tau) = \int_0^{\tau} \mu(r + \tau'\omega) d\tau' \tag{9}$$

принадлежит пространству  $C_b(G' \times \Omega \times [0, d(r, \omega)])$  и функция

$$\phi^{\pm}(r, \omega, t) = \int_0^{d^{\pm}(r, \omega, t)} \exp(-a(r, \pm\omega, \tau')) \phi(r \pm \tau'\omega, \omega, t \pm \tau'/v) d\tau' \tag{10}$$

принадлежит пространству  $C_b(X')$ , где  $X' = G' \times \Omega \times [0, T]$ .

**Доказательство.** Докажем первое утверждение леммы. Для начала заметим, поскольку  $\tau \leq d(r, \omega) \leq d$ , где  $d$  — диаметр множества  $\bar{G}$ , то из ограниченности функции  $\mu$  на множестве  $G$  следует ограниченность функции  $a$ . Докажем непрерывность функции  $a(r, \omega, \tau)$  на  $G' \times \Omega \times [0, d(r, \omega)]$ .

Фиксируем произвольную точку  $(r, \omega, \tau) \in G' \times \Omega \times [0, d(r, \omega)]$  и для любой последовательности точек  $(r_n, \omega_n, \tau_n) \in G' \times \Omega \times [0, d(r, \omega)]$ , сходящихся к точке  $(r, \omega, \tau)$  при  $n \rightarrow \infty$ , рассмотрим выражения

$$a(r_n, \omega_n, \tau_n) = \int_0^{\tau_n} \mu(r_n + \tau'\omega_n) d\tau' = \int_0^1 \psi_n(\tau') d\tau',$$

$$a(r, \omega, \tau) = \int_0^{\tau} \mu(r + \tau'\omega) d\tau' = \int_0^1 \psi(\tau') d\tau',$$

где  $\psi_n(\tau') = \tau_n \mu(r_n + \tau'\tau_n \omega_n)$  и  $\psi(\tau') = \tau \mu(r + \tau'\tau \omega)$ .

Заметим, что  $|\psi_n(t')| \leq \text{const}$  для любого  $n$ . Докажем, что при  $n \rightarrow \infty$  последовательность  $\psi_n(t')$  стремится к  $\psi(t')$  почти всюду на  $[0, 1]$ . В силу условия обобщенной выпуклости при любом  $n$  луч  $L_{r_n, \omega_n} = \{r_n + \tau' \omega_n, \tau' \geq 0\}$  пересекает границу  $\partial G$  в конечном числе точек. Пусть  $r_n + \tau_{i,n} \tau_n \omega_n$  ( $i = 1, 2, \dots, q_n, q_n < \infty$ ) – точки пересечения отрезка  $\{r_n + \tau' \tau_n \omega_n, 0 \leq \tau' \leq 1\}$  с границей  $\partial G$ , тогда множество

$$\Pi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{q_n} \tau_{i,k}$$

является счетным подмножеством отрезка  $[0, 1]$ , поскольку представляет собой счетное объединение конечных множеств.

Таким образом, поскольку  $\mu(r) \in C_b(G)$ , то все функции  $\psi_j(\tau')$  из последовательности  $\{\psi_n(\tau')\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , непрерывны по  $\tau'$ ,  $\tau' \in [0, 1] \setminus \Pi$ . Следовательно,  $\psi_n(\tau') \rightarrow \psi(\tau')$  почти всюду на  $[0, 1]$ . Тогда по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a(r_n, \omega_n, \tau_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \psi_n(\tau') d\tau' = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(\tau') d\tau' = \int_0^1 \psi(\tau') d\tau' = a(r, \omega, \tau).$$

В итоге, мы доказали непрерывность функции  $a(r, \omega, \tau)$  на множестве  $G' \times \Omega \times [0, d(r, \omega)]$ .

Докажем второе утверждение леммы. Покажем, что функция  $d^\pm(r, \omega, t)$  принадлежит  $C_b(X')$ . Так как множество  $\bar{G}$  выпуклое, то функцию  $d(r, \omega)$  на этом множестве можно определить следующим образом:

$$d(r, \omega) = \text{mes}_1(L_{r, \omega} \cap \bar{G}) = \int_0^d \chi(r + t\omega) dt,$$

где  $\chi(r)$  – характеристическая функция множества  $\bar{G}$ , диаметр которого равен  $d$ . Поскольку  $\chi(r) \in C_b(G)$ , то, согласно доказанному утверждению в первой части леммы, функция  $d(r, \omega) \in C_b(G' \times \Omega) \subset C_b(G \times \Omega)$ .

По определению  $d^+(r, \omega, t) = \min\{d(r, \omega), v(T - t)\}$  и  $d^-(r, \omega, t) = \min\{d(r, -\omega), vt\}$ , следовательно, функции  $d^\pm(r, \omega, t)$  принадлежат пространству  $C_b(X')$ .

Покажем непрерывность функции  $\Phi^+$ , непрерывность  $\Phi^-$  доказывается аналогично. Ограниченность функции  $\Phi^+$  следует из ограниченности функций  $a(r, \omega, t)$ ,  $\phi(r, \omega, t)$ ,  $d^+(r, \omega, t)$ . Для доказательства непрерывности функции  $\Phi^+$  на множестве  $X'$  зафиксируем произвольную точку  $(r, \omega, t) \in X'$  и для любой последовательности точек  $(r_n, \omega_n, t_n) \in X'$ ,  $(r_n, \omega_n, t_n) \rightarrow (r, \omega, t)$  при  $n \rightarrow \infty$ , рассмотрим выражения

$$\begin{aligned} \Phi^+(r_n, \omega_n, t_n) &= \int_0^{d^+(r_n, \omega_n, t_n)} \exp(-a(r_n, \omega_n, \tau)) \phi(r_n + \tau \omega_n, \omega_n, t_n + \tau/v) d\tau = \int_0^1 \psi_n(\tau') d\tau', \\ \Phi^+(r, \omega, t) &= \int_0^{d^+(r, \omega, t)} \exp(-a(r, \omega, \tau)) \phi(r + \tau \omega, \omega, t + \tau/v) d\tau = \int_0^1 \psi(\tau') d\tau', \end{aligned}$$

где

$$\psi_n(\tau') = d_n^+ \exp(-a(r_n, \omega_n, \tau' d_n^+)) \phi(r_n + \tau' d_n^+ \omega_n, \omega_n, t_n + \tau' d_n^+ / v), \quad d_n^+ = d^+(r_n, \omega_n, t_n),$$

и

$$\psi(\tau') = d^+ \phi(r + \tau' d^+ \omega, \omega, t + \tau' d^+ / v), \quad d^+ = d^+(r, \omega, t).$$

Так как  $d^+(r, \omega, t) \in C_b(X)$ , то аналогично доказанному в первой части утверждения показывается, что  $\psi_n(t') \rightarrow \psi(t')$  при  $n \rightarrow \infty$  почти всюду на  $[0, 1]$ . Из теоремы Лебега заключаем, что функция  $\Phi^+(r, \omega, t)$  непрерывна на множестве  $X$ . Утверждения леммы доказаны.

**Лемма 2.** При любой функции  $F \in C_b(X)$  существует единственное решение  $f \in D(X)$  уравнения

$$\mathcal{L}f = F, \tag{11}$$

которое при всех  $(r, \omega, t) \in X$  задается формулой

$$f(r, \omega, t) = \int_0^{d^-(r, \omega, t)} \exp \left[ -\int_0^\tau \mu(r - \tau'\omega) d\tau' \right] F(r - \tau\omega, \omega, t - \tau/\nu) d\tau \tag{12}$$

и удовлетворяет условию

$$\|f\| = \sup_{(r, \omega, t) \in X} |f(r, \omega, t)| \leq (1 - e^{-\bar{\mu}d}) \left\| \frac{F}{\mu} \right\|, \tag{13}$$

где  $\bar{\mu} = \inf_{r \in G} |\mu(r)|$ .

**Доказательство.** Непосредственно проверяется, что функция  $f$  из (12) удовлетворяет уравнению (11), условиям 1) и 2) из определения пространства  $D$ . По лемме 1 функция  $a(r, \omega, \tau)$ , определенная соотношением (9), принадлежит пространству  $C_b(G' \times \Omega \times [0, d(r, \omega)])$ , поэтому  $a(r, -\omega, \tau)$  принадлежит  $C_b(G' \times \Omega \times [0, d(r, -\omega)])$ . Функция  $F(r, \omega, t)$  принадлежит  $C_b(X)$  по условию, следовательно, согласно лемме 1, функция  $f$  в (12) принадлежит пространству  $C_b(X)$ . Функция  $(\frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial t} + \omega \cdot \nabla_r + \mu)f$  принадлежит  $C_b(X)$ , поскольку  $f$  удовлетворяет уравнению (11), в котором правая часть  $F \in C_b(X)$ .

Для доказательства оценки (13) воспользуемся представлением (12):

$$\begin{aligned} \|f(r, \omega, t)\| &\leq \left\| \int_0^{d^-(r, \omega, t)} \exp \left[ -\int_0^\tau \mu(r - \tau'\omega) d\tau' \right] \mu(r - \tau\omega) \left\| \frac{F}{\mu} \right\| d\tau \right\| \leq \\ &\leq \left\| \frac{F}{\mu} \right\| \left\| 1 - \exp \left[ -\int_0^{d^-(r, \omega, t)} \mu(r - \tau'\omega) d\tau' \right] \right\| \leq (1 - e^{-\bar{\mu}d}) \left\| \frac{F}{\mu} \right\|. \end{aligned} \tag{14}$$

Лемма доказана.

Из утверждений леммы 2 вытекает, что оператор  $\mathcal{L}^{-1} : C_b(X) \rightarrow D(X)$ , определенный формулой

$$\mathcal{L}^{-1}F = \int_0^{d^-(r, \omega, t)} \exp \left[ -\int_0^\tau \mu(r - \tau'\omega) d\tau' \right] F(r - \tau\omega, \omega, t - \tau/\nu) d\tau, \tag{15}$$

существует и ограничен в  $C_b(X)$ .

В пространстве  $D(X)$  введем норму

$$\|f\|_D = \left\| \frac{\mathcal{L}f}{\mu} \right\|. \tag{16}$$

Из (13) вытекает очевидное неравенство

$$\|f\| \leq (1 - e^{-\bar{\mu}d}) \|f\|_D, \tag{17}$$

на основании которого заключаем, что из сходимости в пространстве  $D(X)$  следует сходимость в  $C_b(X)$ . Нетрудно показать, что линейное множество функций  $D$ , наделенное нормой (16), образует банахово пространство.

Из леммы 2 вытекает, что решение уравнения (8) в  $D$  эквивалентно решению уравнения

$$f = \mathcal{L}^{-1}J + \mathcal{L}^{-1}\mathcal{G}f. \tag{18}$$

**Теорема 1.** Уравнение (8) в пространстве  $D$  однозначно разрешимо.

**Доказательство.** Поскольку функция  $p$  неотрицательна и удовлетворяет условию нормировки и, кроме того, справедливо неравенство (17), то для  $\|\mathcal{L}^{-1}\mathcal{G}f\|_D$  получаем

$$\|\mathcal{L}^{-1}\mathcal{G}f\|_D = \left\| \frac{\mathcal{G}f}{\mu} \right\| = \left\| \frac{\sigma(r)}{\mu(r)} \int_{\Omega} p(r, \omega \cdot \omega') f(r, \omega', t) d\omega' \right\| \leq \bar{\lambda} \|f\| \leq \bar{\lambda}(1 - e^{-\bar{\mu}d}) \|f\|_D, \tag{19}$$

где  $\bar{\lambda} = \left\| \frac{\sigma}{\mu} \right\|$ . Так как  $\mu(r) \geq \sigma(r)$ , то  $\bar{\lambda} \leq 1$  и из (19) вытекает, что

$$\|\mathcal{L}^{-1}\mathcal{G}\|_{D \rightarrow D} \leq \bar{\lambda}(1 - e^{-\bar{\mu}d}) < 1.$$

Так как норма оператора  $\mathcal{L}^{-1}\mathcal{G}$ , действующего в банаховом пространстве, меньше единицы, то уравнение (18) однозначно разрешимо и решение может быть найдено методом последовательных приближений

$$f_n = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{G}f_{n-1} + f_0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где  $f_0 = \mathcal{L}^{-1}J$ . Теорема 1 доказана.

Отметим, что условие  $\bar{\lambda} \leq 1$  излишне для существования единственного ограниченного решения на конечном промежутке времени  $t \in [0, T]$ . Действительно, если  $\sigma > \mu$ , то в уравнении (8) можно сделать замену  $f = f_{\lambda} e^{\lambda t}$ , где  $\lambda$  – произвольное число, удовлетворяющее условиям  $\mu(r) + \lambda/v > 0$ ,  $\frac{\sigma(r)}{\mu(r) + \lambda/v} \leq 1$  для всех  $r \in G$ . Тогда из теоремы 1 при соответствующем выборе нормы в пространстве  $D$ , например,

$$\|f_{\lambda}\|_D = \left\| \frac{\mathcal{L}f_{\lambda}}{\mu + \lambda/v} \right\|,$$

вытекает существование и единственность решения  $f_{\lambda}$ , а следовательно, и решения  $f$  уравнения (8). Тем не менее ограничение  $\bar{\lambda} \leq 1$  для неограниченного временного интервала  $t \in [0, \infty)$  гарантирует стабилизацию нестационарного решения  $f$  при  $t \rightarrow \infty$ .

#### 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

В предыдущем разд. 3 мы рассмотрели начально-краевую задачу для уравнения переноса излучения с однородными начальными и граничными условиями. Решение неоднородной начально-краевой задачи (1), (4) можно представить в виде  $I = f + I_0$ , где

$$I_0(r, \omega, t) = h(r - d^-(r, \omega, t)\omega, \omega, t - d^-(r, \omega, t)/v) \exp \left[ - \int_0^{d^-(r, \omega, t)} \mu(r - \tau\omega) d\tau \right] \tag{20}$$

и функция  $f$  принадлежит  $D(X)$  и удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}f = \mathcal{G}f + \mathcal{S}I_0 + J. \tag{21}$$

Так как оператор  $\mathcal{S} : C_b(G \times (\Omega \setminus \Omega_0) \times [0, T]) \rightarrow C_b(X)$  обладает сглаживающими свойствами и  $J \in C_b(X)$ , то функция  $\mathcal{S}I_0 + J$  принадлежит  $C_b(X)$ , даже если функция  $h$  имеет разрывы по переменной  $\omega$ . Следовательно, согласно результатам предыдущего раздела, уравнение (21) однозначно разрешимо в  $D(X)$ . Таким образом, функция  $I$  может быть представлена в виде суммы двух функций –  $f$  и  $I_0$ . Функция  $f$ , имеющая смысл рассеянного поля, непрерывна на множестве  $X' \subset \bar{G} \times \Omega \times [0, T]$ , а нерассеянное излучение  $I_0$  может содержать разрывы по переменной  $\omega$

на множестве  $X'$ . Такая особенность структуры решения уравнения переноса излучения лежит в основе метода решения обратной задачи.

Обозначим величину разрыва функции  $h$  по переменной  $\omega$  при  $\omega \rightarrow \omega^0 = (\omega_1, \omega_2, 0)$  через

$$[h](\xi, \omega^0, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [h(\xi, (\omega_1, \omega_2, \varepsilon), t) - h(\xi, (\omega_1, \omega_2, -\varepsilon), t)]$$

и наложим ограничение на функцию  $h$ :

$$[h](\xi, \omega^0, t) \neq 0, \quad (\xi, \omega^0, t) \in Y^-. \tag{22}$$

Тогда для граничных точек  $(\eta, \omega^0, t) \in Y^+$ , удовлетворяющих ограничению  $d(\eta, -\omega^0) \leq vt \leq vT - d(\eta, -\omega^0)$ , получаем

$$[H](\eta, \omega^0, t) = [f](\eta, \omega^0, t) + [h](\eta - d(\eta, -\omega^0)\omega^0, \omega^0, t - d(\eta, -\omega^0)/v) \exp \left[ - \int_0^{d(\eta, -\omega^0)} \mu(\eta - \tau\omega^0) d\tau \right]. \tag{23}$$

Так как  $f \in C_b(X')$ , то  $[f](\eta, \omega^0, t) = 0$ , и тогда из соотношения (23) при выполнении условия (22) вытекает равенство

$$\int_0^{d(\eta, -\omega^0)} \mu(\eta - \tau\omega^0) d\tau = \ln \frac{[h](\eta - d(\eta, -\omega^0)\omega^0, \omega^0, t - d(\eta, -\omega^0)/v)}{[H](\eta, \omega^0, t)}. \tag{24}$$

В левой части равенства (24) стоит преобразование Радона функции  $\mu$  в любой горизонтальной плоскости  $r_3 = \text{const}$ . После замены переменных соотношение (24) можно переписать в виде

$$\int_{d(r, -\omega^0)}^{d(r, \omega^0)} \mu(r + \tau\omega^0) d\tau = \ln \frac{[h](r - d(r, -\omega^0)\omega^0, \omega^0, t - d(r, -\omega^0)/v)}{[H](r + d(r, \omega^0)\omega^0, \omega^0, t + d(r, \omega^0)/v)}, \tag{25}$$

где  $r$  — любая точка области  $G$ , а переменная  $t$  принадлежит временному промежутку  $[d(r, -\omega^0)/v, T - d(r, \omega^0)/v]$  при достаточно большом  $T$ .

По аналогии со стационарным случаем (см. [8], [11]) доказывается следующая теорема единственности решения обратной задачи.

**Теорема 2.** Пусть при некотором  $t \in (0, T)$  справедливо

$$\Gamma(\eta, \omega, t) = \Gamma'(\eta, \omega, t) \quad \text{на} \quad \Gamma^+, \tag{26}$$

где  $\Gamma, \Gamma'$  — решения начально-краевых задач (1)–(3) для двух совокупностей коэффициентов  $\{\mu'(r), \sigma'(r), p'(\omega \cdot \omega'), J'(r, \omega, t)\}$  и  $\{\mu''(r), \sigma''(r), p''(\omega \cdot \omega'), J''(r, \omega, t)\}$  с одной и той же функцией  $h(\xi, \omega, t)$ , удовлетворяющей условию (22), тогда справедливо соотношение (25) и  $\mu'(r) = \mu''(r)$  почти всюду в  $G$ .

Особенность теоремы заключается в том, что из двух наборов коэффициентов уравнения (1):

$$\{\mu'(r), \sigma'(r), p'(\omega \cdot \omega'), J'(r, \omega, t)\}, \quad \{\mu''(r), \sigma''(r), p''(\omega \cdot \omega'), J''(r, \omega, t)\},$$

утверждается совпадение только  $\mu'$  и  $\mu''$ , а об остальных ничего не говорится. Из формулы (25) следует, что неизвестные функции  $\sigma, p, J$  не влияют на процедуру определения функции  $\mu$ . Привлекая физическую терминологию, можно сказать, что влияние рассеяния и наличие радиоактивных источников в среде подавляются за счет выбора внешнего источника. Так как функция  $h$  имеет разрыв в точке  $\omega^0 = (\omega_1, \omega_2, 0)$ , то функция  $\mu(r)$  восстанавливается “послойно” в горизонтальных плоскостях  $r_3 = \text{const}$ , что является традиционным в рентгеновской томографии (см. [30]).

Время  $t$  в соотношениях (25) и (26) может быть любым, лишь бы в этой точке выполнялось условие (22), гарантирующее наличие ненулевого разрыва функции  $h$ . Однако при численном решении обратной задачи (и при практической реализации метода) желательно, чтобы скачки функций  $h$  и  $H$  были максимальными в моменты времени  $t$  и  $t + d(\eta, -\omega^0)/v$  соответственно. Например, если среда зондируется импульсом, имеющим максимум интенсивности баллистиче-

ской компоненты в момент времени  $t = t_0$ , то в точке  $(\eta, \omega^0) \in \Gamma^+$  выходящий из среды сигнал предпочтительнее измерять в момент времени  $t = t_0 + d(\eta, -\omega^0)/v$ . В этот момент времени отношение компоненты нерассеянного излучения к компоненте рассеянного поля будет максимальным в точке  $(\eta, \omega^0)$ .

### 5. ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМА МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Для проверки алгоритма решения обратной задачи 2 необходимо знание функции  $H$ , которая в физическом эксперименте является измеряемой величиной. При математическом моделировании, чтобы найти  $H$ , нужно решить прямую задачу 1 при всех заданных коэффициентах уравнения (1) и функции  $h$ . Среди большого разнообразия численных методов решения уравнений переноса излучения в многомерном случае методам Монте-Карло альтернативы практически не существует. Мы будем использовать одну из модификаций метода Монте-Карло, называемую методом “сопряженных блужданий”, применение которой оправдано при нахождении плотности потока излучения в фиксированной точке фазового пространства  $X$  (см. [31], [32]).

Обозначим через  $\mathcal{P}$  оператор  $\mathcal{P} : C_b(Y^-) \rightarrow D(X)$ , определенный формулой

$$(\mathcal{P}I)(r, \omega, t) = I(r - d^-(r, \omega, t)\omega, \omega, t - d^-(r, \omega, t)/v) \exp \left[ - \int_0^{d^-(r, \omega, t)} \mu(r - \tau\omega) d\tau \right], \quad (27)$$

тогда приближенное решение задачи (1)–(3) с неоднородным граничным условием можно записать в виде усеченного ряда Неймана

$$I_N = \sum_{n=0}^N (\mathcal{L}^{-1}\mathcal{P})^n I_0, \quad I_0 = \mathcal{P}h + \mathcal{L}^{-1}J. \quad (28)$$

Функция  $I_N$  является аппроксимацией решения начально-краевой задачи  $I$ , и представление (28) служит основой для построения алгоритма Монте-Карло. Каждый элемент последовательности  $I_n, n = 1, 2, \dots, N$ , определяет вклад излучения, испытавшего от 1 до  $n$  актов рассеяния, а слагаемое  $I_0$  учитывает вклад нерассеянного излучения.

Для вычисления усеченного ряда Неймана (28), представляющего собой сумму многомерных интегралов, воспользуемся методом Монте-Карло. Построим траекторию частицы

$$(r_0, \omega_0, t_0), \dots, (r_n, \omega_n, t_n), \quad (29)$$

где точки марковской цепи (29) определяются по следующему правилу:

$$r_{i+1} = r_i - \tau_{i+1}\omega_i, \quad t_{i+1} = t_i - \tau_{i+1}/v, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad r_0 = r, \quad \omega_0 = \omega, \quad t_0 = t. \quad (30)$$

В (30) случайная величина  $\tau_{i+1}$  распределена на промежутке  $[0, d^-(r_i, \omega_i, t_i)]$  с плотностью вероятности

$$\mu(r_i - \tau_{i+1}\omega_i) \exp \left[ - \int_0^{\tau_{i+1}} \mu(r_i - \tau\omega_i) d\tau \right] \left\{ 1 - \exp \left[ - \int_0^{d^-(r_i, \omega_i, t_i)} \mu(r_i - \tau\omega_i) d\tau \right] \right\}^{-1}, \quad (31)$$

а случайный вектор  $\omega_{i+1}$  распределен на единичной сфере  $\Omega$  с переходной плотностью вероятности  $p(r_{i+1}, \omega_i \cdot \omega_{i+1})$ .

Пусть  $\mathbb{E}[\Theta]$  – математическое ожидание случайной величины  $\Theta$ , тогда, согласно методу Монте-Карло, для значения функции  $I_N$  в точке  $(r, \omega, t)$  можно записать выражение

$$I_N(r, \omega, t) = \mathbb{E}[\Theta_N], \quad \Theta_N = \sum_{n=0}^N \theta_n, \quad (32)$$

где  $\theta_0 = I_0(r_0, \omega_0, t_0)$  и случайные величины  $\theta_n$  при  $n > 0$  определяются рекуррентным образом:

$$\theta_{n+1} = \frac{\sigma(r_{n+1})}{\mu(r_{n+1})} \left[ 1 - \exp \left[ - \int_0^{d^-(r_n, \omega_n, t_n)} \mu(r_n - \omega_n \tau) d\tau \right] \right] \theta_n, \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \quad (33)$$

Повторяя описанную процедуру  $M$  раз, получим выборку объемом  $M$  для случайной величины  $\Theta_N$ . Среднее значение выборки дает оценку математического ожидания случайной величины  $\Theta_N$  и, следовательно, приближенное значение  $I_N$  в точке  $(r, \omega, t)$ . Простой анализ рекуррентных соотношений (33) показывает, что реализованный весовой метод Монте-Карло учитывает поглощение и “вылет” частиц из области. Учет этих эффектов приводит к относительно небольшому увеличению трудоемкости метода, но в значительной степени способствует уменьшению дисперсии оценки математического ожидания случайной величины  $\Theta_N$  и повышению точности решения уравнения переноса излучения (см. [32]).

## 6. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В данном разделе приведены результаты численных экспериментов по восстановлению внутренней структуры среды. Тестирование алгоритма проводилось в два этапа. На первом этапе для заданных параметров среды с помощью метода Монте-Карло, описанного в предыдущем разделе, вычислялось выходящее излучение  $H$ . При решении прямой задачи предполагалось, что нестационарный источник облучения  $h$  исследуемой среды импульсного типа (различной длительности) имел разрыв первого рода по угловой переменной в плоскости  $\omega_3 = 0$ . На втором этапе решалась обратная задача с использованием формулы (25), осуществляющей фильтрацию рассеянного излучения, либо с помощью формулы классической томографии

$$\int_{d(r, -\omega^0)}^{d(r, \omega^0)} \mu(r + \tau \omega^0) d\tau = \ln \frac{h(r - d(r, -\omega^0) \omega^0, \omega^0, t - d(r, -\omega^0)/v)}{H(r + d(r, \omega^0) \omega^0, \omega^0, t + d(r, \omega^0)/v)}. \quad (34)$$

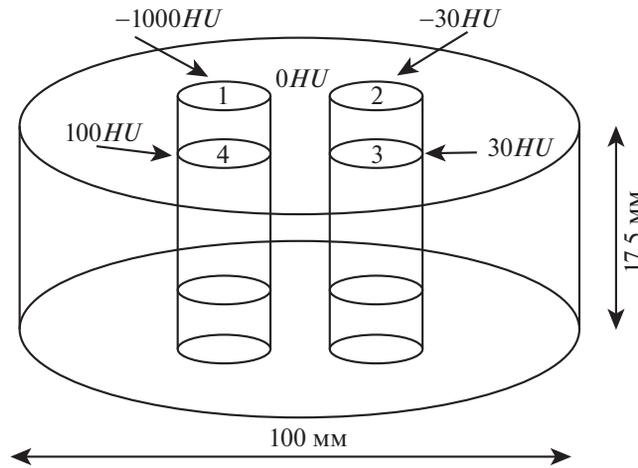
Формула (34) отличается от (25) тем, что под знаком логарифма стоят значения функций  $h$ ,  $H$  в точках границы области, а не величины скачков этих функции. Для нахождения функции  $\mu$  из уравнений (25), (34) можно использовать различные алгоритмы обращения преобразования Радона. Например, широко распространенный в современной литературе алгоритм свертки и обратной проекции (см. [30]).

Тестирование алгоритма решения обратной задачи проводилось на предложенном в [21] фантоме, который специально сконструирован для формальной процедуры оценки качества различных алгоритмов компьютерной томографии. Фантом представляет собой цилиндр высотой и диаметром в 10 см. Внутренний объем цилиндра поделен на пять цилиндрических слоев, каждый из которых играет свою роль при тестировании тех или иных качеств алгоритма реконструкции.

При проведении экспериментов мы ограничились первой секцией фантома, предназначенной для тестирования линейности (см. [33]) восстановленных значений коэффициента ослабления. Данная характеристика является одной из наиболее важных при диагностике и планировании лечения (см. [34]), и сущность данного показателя заключается в следующем. Традиционно в компьютерной томографии значения коэффициента ослабления для различных материалов приводятся в единицах Хаунсфилда ( $HU$ ). Они связаны со значениями коэффициента ослабления вещества  $\mu$  по линейному закону

$$HU = \frac{\mu - \mu_{\text{water}}}{\mu_{\text{water}} - \mu_{\text{air}}} \times 1000, \quad (35)$$

где  $\mu$  — коэффициент ослабления вещества, а  $\mu_{\text{water}}$ ,  $\mu_{\text{air}}$  — коэффициенты ослабления для воды и воздуха соответственно. Применение шкалы Хаунсфилда хорошо себя зарекомендовало в классической компьютерной томографии при диагностировании мягких тканей. В случае восстановления структуры более плотных тканей, таких как кости, относительно малая энергия применяемого излучения и увеличение доли рассеянного излучения приводят к тому, что включения, имеющие одинаковую плотность, дают различные значения коэффициентов ослабления в шкале Хаунсфилда в зависимости от того, где расположено включение. В результате линейная



Фиг. 1. Схематическое изображение фантома для тестирования алгоритма.

связь (35) между единицами Хаунсфилда и коэффициентом ослабления среды нарушается. Особенно остро эта проблема стоит в конусно-лучевой компьютерной томографии (см. [35]).

Схематическое изображение используемого фантома изображено на фиг. 1. Данная секция представляет собой цилиндр диаметром 100 мм и высотой 17.5 мм, выполненный из пластика с коэффициентом ослабления, эквивалентным воде ( $HU = 0$ ). Секция содержит еще четыре цилиндрических включения диаметром 13 мм и высотой 17.5 мм с различными значениями коэффициента ослабления ( $-1000, 30, -30, 100 HU$ ). Следуя методике, предложенной в [21], для проверки линейности вычислялись средние значения коэффициента ослабления для каждого из материалов, входящих в фантом, после этого полученные значения сравнивались с эталонными значениями в единицах Хаунсфилда. Источником излучения выбирался Гауссиан по времени, имеющий вид

$$h(r, \omega, t) = \chi(\omega)I_0 \exp \left[ -4 \ln 2 \frac{(t - t_0)^2}{t_p} \right], \quad (36)$$

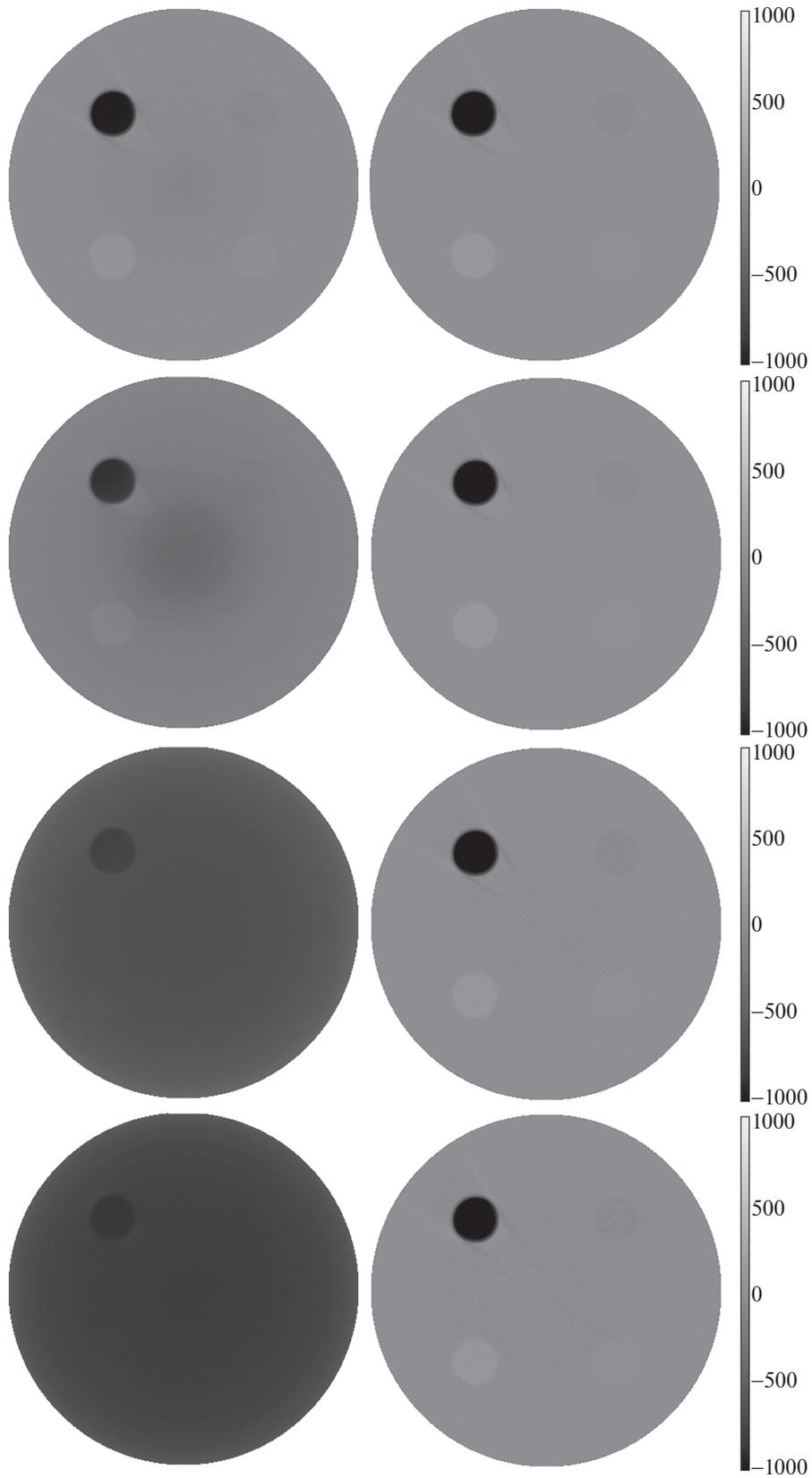
где  $I_0$  – амплитуда импульса,  $t_0$  – момент времени, соответствующий максимальной мощности сигнала, величина  $t_p$  определяет длительность импульса на половине амплитуды, и

$$\chi(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_3 > 0, \\ 0, & \omega_3 \leq 0. \end{cases} \quad (37)$$

В экспериментах были выбраны следующие значения указанных величин:  $I_0 = 32000$ ,  $t_0 = 3$  нс, а величина  $t_p$  варьировалась в экспериментах, принимая значения 3, 30, 300, 3000 пс.

Результаты реконструкции фантома при различной длительности зондирующего импульса приведены на фиг. 2: слева приведены результаты восстановления источника с помощью обращения преобразования Радона, используя формулу (34), а справа – после фильтрации рассеяния за счет применения источника специального типа, основанные на формуле (25). Средние значения восстановленных коэффициентов ослабления в единицах Хаунсфилда приведены в табл. 1. При этом слева указано среднее значение, вычисленное по формуле (34) без предварительной фильтрации рассеяния, а справа приведено значение, полученное при расчетах по формуле (25).

Как видно из табл. 1 и приведенных томограмм, облучение короткими импульсами позволяет фильтровать рассеянную составляющую в выходящем излучении. Поэтому при облучении фантома короткими импульсами получается реконструкция приличного качества даже без применения дополнительной фильтрации рассеяния по формуле (25). В целом погрешность восстановления коэффициента ослабления – на уровне, полученном в [21]. Отметим, что даже в этом “хорошем” случае дополнительная обработка сигнала с помощью формулы (25) дает лучшее соответствие между эталонными и восстановленными значениями коэффициента ослабления. При увеличении длительности импульса качество реконструкции без предварительной обработ-



**Фиг. 2.** Результаты реконструкции фантома при увеличении длительности зондирующего импульса: 3, 30, 300, 3000 пс. Слева приведены результаты реконструкции без обработки сигнала, справа – после фильтрации рассеяния с помощью формулы (25).

**Таблица 1.** Средние значения восстановленных коэффициентов ослабления  $\mu$  в единицах Хаунсфилда при различных значениях длительности зондирующего импульса  $t_p$ 

Номер включения	0		1		2		3		4	
Точное значение $HU$	0		-1000		-30		30		100	
$t_p = 3$ пс	-101	3	-980	-991	-60	-31	-6	25	60	97
$t_p = 30$ пс	-396	-5	-868	-998	-211	-32	-172	24	-128	96
$t_p = 300$ пс	-673	-7	-785	-996	-640	-34	-633	21	-624	93
$t_p = 3000$ пс	-812	-8	-866	-996	-787	-35	-784	21	-779	92

Примечание. Для каждого включения приведено точное значение  $\mu$ , полученное при обращении преобразования Радона без предварительной обработки выходящего излучения (слева) и полученное после фильтрации рассеяния по формуле (25) (справа).

ки сигнала стремительно падает. При длительности импульса 3000 пс не только наблюдается огромное различие в численных значениях восстановленных коэффициентов, но и само наличие трех включений из четырех визуально определяется с трудом. Применение источника специального типа с последующей обработкой, напротив, дает хорошие результаты. Как видно на фиг. 2 справа, внутренняя структура фантома восстановилась с приемлемым качеством при любой длительности импульса. Однако по мере роста длительности импульса качество реконструкции незначительно, но все равно падает. Таким образом, для достижения наилучшего качества реконструкции рекомендуется комбинировать импульсный источник с источником специального типа.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована структура нестационарного решения уравнения переноса излучения с внешним источником специального типа, имеющим разрыв первого рода по угловой переменной. Показано, что решение прямой задачи может быть представлено в виде суммы двух компонент. Первая компонента, описывающая нерассеянное излучение, “переносит разрыв” с границы во внутрь области, а вторая компонента, описывающая рассеянное поле, является непрерывной функцией. Полученное представление использовано при решении обратной задачи определения коэффициента ослабления при известном решении уравнения на границе области. Получена формула для преобразования Радона искомой функции и доказана единственность решения обратной задачи. Проведено численное моделирование процесса рентгеновского облучения неизвестной среды потоком излучения, имеющим различную структуру распределения по временной и угловой переменной. Результаты численных экспериментов показали, что наилучшее качество томографических изображений достигается при облучении комбинированным импульсным источником специального типа.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марчук Г.И. О постановке некоторых обратных задач // Докл. АН СССР. 1964. V. 156. № 3. P. 503–506.
2. Масленников М.В. Проблема Милна с анизотропным рассеянием // Тр. МИАН СССР. 1968. V. 97. P. 3–133.
3. Аниконов Д.С. Об обратных задачах для уравнения переноса // Дифференц. ур-ния. 1974. V. 2. № 1. P. 7–17.
4. Прилепко А.И., Иванков А.Л. Обратные задачи определения коэффициента, индикатрисы рассеяния и правой части нестационарного многоскоростного уравнения переноса // Дифференц. ур-ния. 1985. V. 21. № 5. P. 870–885.
5. Аниконов Д.С. Единственность определения коэффициента уравнения переноса при специальном типе источника // Доклады АН СССР. 1985. V. 284. № 5. P. 1033–1037.
6. Орловский Д.Г., Прилепко А.И. О некоторых обратных задачах для линеаризованного уравнения Больцмана // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 11. С. 1690–1700.
7. Аниконов Д.С., Прохоров И.В. Определение коэффициента уравнения переноса при энергетических и угловых особенностях внешнего излучения // Докл. РАН. 1992. Т. 327. № 2. С. 205–207.
8. Anikonov D.S., Prokhorov I.V., Kovtanyuk A.E. Investigation of scattering and absorbing media by the methods of X-ray tomography // J. of Inverse and Ill-Posed Probl. 1993. V. 1. № 4. P. 259–282.

9. *Antyufeev V.S., Bondarenko A.N.* X-ray tomography in scattering media // *SIAM J. on Appl. Math.* 1996. V. 56. № 2. P. 573–587.
10. *Романов В.Г.* Оценка устойчивости в задаче об определении коэффициента ослабления и индикатрисы рассеяния для уравнения переноса // *Сиб. матем. журн.* 1996. Т. 37. № 2. С. 361–377.
11. *Anikonov D.S., Kovtanyuk A.E., Prokhorov I.V.* Transport Equation and Tomography. Boston-Utrecht: VSP, 2002.
12. *Anikonov D.S., Nazarov V.G., Prokhorov I.V.* Poorly visible media in X-ray tomography. Boston-Utrecht: VSP, 2002.
13. *Терещенко С.А.* Методы вычислительной томографии. М.: Физматлит, 2004.
14. *Ковтанык А.Е., Прохоров И.В.* Численное решение обратной задачи для уравнения переноса поляризованного излучения // *Сиб. журн. вычисл. матем.* 2008. Т. 11. № 1. С. 55–68.
15. *Prokhorov I.V., Yarovenko I.P., Nazarov V.G.* Optical tomography problems at layered media // *Inverse Problems.* 2008. V. 24. № 2. 025019.
16. *Волков Н.П.* Разрешимость некоторых обратных задач для нестационарного кинетического уравнения переноса // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2016. Т. 56. № 9. С. 1622–1627.
17. *Bal G.* Inverse transport theory and applications // *Inverse Probl.* 2009. V. 25. № 5. 053001.
18. *Bellassoued M., Boughanja Y.* An inverse problem for the linear Boltzmann equation with a time-dependent coefficient // *Inverse Probl.* 2019. V. 35. № 8. 085003.
19. *Chen I.K., Kawagoe D.* Propagation of boundary-induced discontinuity in stationary radiative transfer and its application to the optical tomography // *Inverse Probl. and Imag.* 2019. V. 13. № 2. P. 337–351.
20. *Kawagoe D., Chen I.-K.* Propagation of Boundary-Induced Discontinuity in Stationary Radiative Transfer // *J. of Statist. Phys.* 2018. V. 170. № 1. P. 127–140.
21. *Steiding C., Kolditz D., Kalender W.A.* A quality assurance framework for the fully automated and objective evaluation of image quality in cone-beam computed tomography // *Medic. Phys.* 2014. V. 41. 031901.
22. *Кузнецов В.С., Николаева О.В., Басс Л.П., Быков А.В., Приезжев А.В.* Моделирование распространения ультракороткого импульса света через сильно рассеивающую среду // *Матем. моделирование.* 2009. Т. 21. № 4. С. 3–14.
23. *Фетисов Г.В.* Рентгеновские дифракционные методы структурной диагностики материалов: прогресс и достижения // *Успехи физ. наук.* 2020. Т. 190. 1. С. 2–36.
24. *Ершов Ю.И., Шихов С.Б.* Математические основы теории переноса. М.: Атомиздат, 1985.
25. *Владимиров В.С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // *Тр. МИАН СССР.* 1961. Т. 61. С. 3–158.
26. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
27. *Новиков В.М., Шихов С.Б.* Теория параметрического воздействия на перенос нейтронов. М.: Энергоиздат, 1982.
28. *Гермогенова Т.А.* Локальные свойства решений уравнения переноса. М.: Наука, 1986.
29. *Agoshkov V.I.* Boundary value problems for transport equations. Model. and Simulat. in Sci., Engineer. and Technol. Boston, MA: Birkhauser, 1998.
30. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.
31. *Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А. и др.* Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Наука, 1976.
32. *Михайлов Г.А., Медведев И.Н.* Оптимизация весовых алгоритмов статистического моделирования. Новосибирск: Омега Принт, 2011.
33. *Kalender W.A.* Computed tomography: fundamentals, system technology, image quality, applications. 3rd ed. Erlangen Publ., 2011.
34. *Mah P., Reeves T.E., McDavid W.D.* Deriving Hounsfield units using grey levels in cone beam computed tomography // *Dentomaxillofac. Radiol.* 2010. V. 39. P. 323–335.
35. *Pauwels R., Jacobs R., Singer S.R., Mupparapu M.* CBCT-based bone quality assessment: are Hounsfield units applicable? // *Dentomaxillofac Radiol.* 2015. V. 44. № 1. 20140238.

## НОВЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ ГЕМОДИНАМИКИ<sup>1)</sup>

© 2021 г. С. С. Симаков<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>141707 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия

<sup>2</sup>119991 Москва, ул. Трубецкая, 8, стр. 2, Сеченовский университет, Россия

<sup>3</sup>119333 Москва, ул. Губкина, 8, ИВМ РАН, Россия

e-mail: simakov.ss@phystech.edu

Поступила в редакцию 23.03.2021 г.

Переработанный вариант 21.06.2021 г.

Принята к публикации 04.08.2021 г.

Для одномерной сетевой модели гемодинамики предложены новые граничные условия в областях соединения нескольких сосудов. Показано, что новые условия обеспечивают непрерывность решения и его производных в точках соединения сосудов. При асимптотическом переходе они позволяют получать решения, совпадающие с решением в одном сплошном сосуде. Предложены неотражающие граничные условия на концах терминальных сосудов. Представлены результаты численных экспериментов, подтверждающие выводы теоретического анализа. Библ. 51. Фиг. 11.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, гемодинамика, граничные условия, осреднение.

**DOI:** 10.31857/S0044466921120139

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Сердечно-сосудистые заболевания по-прежнему являются лидирующим фактором смертности и инвалидизации во всем мире. Поэтому изучение процессов, связанных с течением крови в сердечно-сосудистой системе, остается актуальной темой многих современных научных исследований, в том числе математических.

Детальное моделирование гемодинамики в крупных сосудах осуществляется с помощью уравнений Навье–Стокса. Такой подход подразумевает решение уравнений в частных производных в областях сложной формы с подвижными границами. Использование моделей данного класса является весьма трудоемким и ресурсоемким. Они используются для локального анализа кровотока в аорте и ее ветвях, в магистральных церебральных сосудах, в аневризмах [1].

Один из широко распространенных и хорошо себя зарекомендовавших подходов к моделированию течения крови в артериальной части кровеносной системы человека состоит в использовании сетевых одномерных динамических моделей [2], [3]. Кровоток в сосудах считается аналогичным пульсирующему течению вязкой несжимаемой жидкости по сети эластичных трубок [4]. Модель движения жидкости в отдельной трубке строится путем осреднения по поперечному сечению уравнений Навье–Стокса [5]. Основные предположения данного подхода и их значимость обсуждаются, например, в [6], [7]. В случае крупных и средних артерий модель асимптотически представима в виде системы нелинейных гиперболических уравнений [7], что существенно расширяет спектр эффективных методов ее численного решения [8].

Обобщение на течение по сети эластичных трубок производится путем постановки начальных и граничных условий на входе в сеть, в точках соединения трубок и в концевых точках терминальных трубок. Граничные условия на входе в сеть, как правило, связаны с моделью функции сердца или сердечного выброса. Сердечный выброс может быть задан в виде функции от времени, получаемой на основе клинических или физиологических данных. Он может быть рассчитан с помощью модели выброса из желудочков в зависимости от давления наполнения пред-

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 21-41-00029).

сердий [2], [9], [10]. Используется также пространственно осредненная динамическая модель сердца [3], в том числе, с учетом динамики его клапанов [11].

Граничные условия в концевых точках терминальных трубок связываются с давлением в микроциркуляторном русле и в венах с помощью закона Пуазейля [4] или с помощью моделей самоподобных древовидных структур, имитирующих области мелких сосудов и микроциркуляции [12]. Широко распространены пространственно осредненные модели виндекесселя, учитывающие импеданс микрососудистого русла, его эластичность и гидродинамическое сопротивление, нелинейно зависящее от давления [13]. Сравнительный анализ использования самоподобных древовидных структур и модели виндекесселя в качестве терминальных граничных условий представлен в [14].

На основе описанного инструментария разработаны методики персонализированного моделирования кровотока на локальных участках артериальной сети (коронарные сосуды, сосуды церебрального отдела, сосуды нижних конечностей и др.) на основе индивидуальных данных конкретного пациента. При этом структурная схема рассматриваемого участка может быть задана с различной точностью на основе данных анатомических атласов, физиологических данных [15], [16], агрегированных данных клинических и лабораторных исследований [17], [18], трехмерных анатомических моделей с высокой степенью детализации [19]. Максимальное правдоподобие структуры сосудистой сети достигается с использованием алгоритмов сегментации медицинских изображений (МРТ/КТ), производящих в начале трехмерную геометрию сосудистого русла, затем выделяющих центральные линии и, в итоге, выполняющих их спрямление с сохранением информации о длинах и диаметрах сосудистых участков [20], [21].

Несмотря на многочисленные допущения при выводе уравнений одномерной модели, неточности и высокую вариабельность входных данных, сопоставление результатов расчетов с данными из других источников позволило обосновать применимость данного подхода. Сравнение результатов одномерного и трехмерного моделирования представлено, например, в [22], [23]. Сопоставление расчетов, выполненных с помощью одномерной модели, и результатов лабораторных экспериментов с упругими трубками и вязкой жидкостью может быть найдено в [24], [25], [26]. Систематическое сравнение результатов персонализированного моделирования гемодинамики в одномерном приближении с клиническими данными представлено в работах [27], [28], [29].

Аналогичный подход используется для описания динамики дыхательного газа в дыхательной системе [3], [30], течения лимфы в лимфатической системе [31], [32], [33], движения транспорта по дорожной сети мегаполиса, передачи информации в компьютерных сетях, распространения газовых примесей в вентиляционных сооружениях [34] и др.

Несмотря на широкое распространение одномерных моделей, некоторые аспекты их математических формулировок до сих пор обсуждаются. Например, в [35] показано, что произвол в выборе начальных условий может при определенных условиях нарушить единственность решения. Большинство современных математических формулировок граничных условий в точках соединения однотипных сосудов не обеспечивают гладкости решения и его сходимости к решению в одном сосуде при предельном переходе, состоящем в стремлении к нулю диаметра одного из сосудов в бифуркации при условии равенства между собой диаметров и упругих свойств двух других сосудистых сегментов. В данной работе предлагается формулировка граничных условий в области стыковок сосудов, свободная от этого недостатка.

Тестирование сетевых моделей производится на упрощенных конфигурациях трубок с параметрами, характерными для сосудов. При этом известные на сегодняшний день граничные условия на выходах из сети оказывают существенное влияние на исследуемое внутри сети решение в силу наличия отраженных волн. Эта проблема устраняется в данной работе путем формулировки новых неотражающих граничных условий в концевых точках терминальных трубок (сосудов).

Оставшаяся часть статьи имеет следующую структуру. Разд. 2 посвящен описанию и анализу используемых математических моделей. В п. 2.1 кратко представлена одномерная и полностью осредненная по пространству (нульмерная) модель течения вязкой несжимаемой жидкости в упругой трубке. В п. 2 кратко рассматриваются три варианта широко распространенных граничных условий в области соединения сосудов. Граничные условия в концевых точках представлены в п. 3. В данном разделе впервые предложены неотражающие граничные условия на концах терминальных сосудов. Анализ существующих и постановка новых граничных условий представлены в п. 4. Показано, что новые условия обеспечивают непрерывность решения и его производных в точках соединения сосудов. При соответствующем асимптотическом переходе они позволяют получать решения, совпадающие с решением в одном сплошном сосуде. Результаты

численных экспериментов, подтверждающих теоретический анализ, представлены в разд. 3. Итоги подводятся в разд. 4.

## 2. ОДНОМЕРНАЯ СЕТЕВАЯ МОДЕЛЬ ГЕМОДИНАМИКИ

### 2.1. Осредненные по пространству модели течения вязкой несжимаемой жидкости в упругой трубке/сосуде

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости в упругой трубке, диаметр которой намного меньше ее длины. Осреднение уравнений Навье-Стокса по поперечному сечению такой трубки в предположении, что скорость направлена вдоль оси трубки, а смещения стенки происходят в плоскости, перпендикулярной этой линии, дает (Более подробно о всех предположениях и выводе уравнений см., например, [5], [6], [7].)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Su)}{\partial x} = 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \frac{\partial u^2}{\partial x} + (\alpha - 1) \frac{u^2}{S} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = K_r \frac{u}{S}, \tag{2.2}$$

где  $t$  – время,  $x$  – координата, отсчитываемая вдоль оси трубки,  $S(t, x)$  – площадь поперечного сечения трубки с координатой  $x$ ,  $u(t, x)$  – осредненная по поперечному сечению скорость,  $\rho = 1.04 \text{ г/см}^3$  – плотность крови,  $\nu = 4 \times 10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}$  – вязкость крови,

$$K_r = -2\pi(\gamma + 2)\nu, \quad \alpha = \frac{\gamma + 2}{\gamma + 1}, \tag{2.3}$$

$\gamma$  – параметр, определяющий форму профиля скорости (для параболического профиля  $\gamma = 2$ , для плоскопараллельного профиля  $\gamma = 1$ ).

В [7] показано, что если упругие свойства стенки сосуда описываются соотношением

$$P(S) = p_{ext} + \rho_w c_0^2 (e^{S/S_0} - 1), \tag{2.4}$$

где  $S_0$  – поперечное сечение трубки с жидкостью в недеформированном состоянии,  $c_0$  – скорость распространения малых возмущений в материале стенки сосуда, то одномерная модель (2.1), (2.2), (2.4) для артерий представляет собой систему нелинейных гиперболических уравнений в дивергентном виде

$$\partial \mathbf{V} / \partial t + \partial \mathbf{F}(\mathbf{V}) / \partial x = \mathbf{G}(\mathbf{V}), \tag{2.5}$$

где

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} S \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} Su \\ \frac{u^2}{2} + \frac{P(S)}{\rho} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ -K_r \frac{u}{S} \end{pmatrix}.$$

Для сегмента упругой цилиндрической трубки с длиной по порядку величины, равной пространственному шагу сетки при дискретизации уравнений (2.5) во внутренних точках ( $L \approx \Delta x$ ), (2.2) может быть сведено к виду [7]

$$I \frac{d^2 V}{dt^2} + R_h \frac{dV}{dt} + \Delta P = 0, \tag{2.6}$$

где  $V = LS$  – объем рассматриваемой области,  $Q = \frac{dV}{dt}$  – объемный поток,  $I = \rho L^2 V^{-1}$ ,  $R_h = 2\pi\nu(\gamma + 2)\rho L^3 V^{-2}$ ,  $\Delta P$  – перепад давления между входным и выходным сечениями. Данное соотношение далее будет использовано для формулировки новых граничных условий в области соединения упругих трубок/сосудов (см. п. 2.4).

## 2.2. Граничные условия в областях соединения сосудов

Обобщение одномерной модели течения вязкой несжимаемой жидкости в эластичной трубке (2.5) для описания потока в сети, образованной такими трубками, производится путем постановки граничных условий на входах и выходах из нее (соединения с камерами сердца и концевые точки терминальных сосудов), а также во внутренних точках сети, представляющих собой соединения сосудистых сегментов (бифуркации артерий, анастомозы, артериовенозные соединения и др.). В данном разделе кратко рассматриваются три варианта широко распространенных граничных условий в области соединения сосудов. Их анализ и постановка новых граничных условий представлены в п. 2.4.

Во внутренних точках каждого сосудистого сегмента рассматривается система двух нелинейных уравнений (2.5), имеющая гиперболический тип. Поэтому количество граничных условий на каждом конце сосудистого сегмента должно быть равно двум. При этом граничные условия должны включать условия совместности вдоль характеристик, покидающих область.

В [6], [9], [34], [45], [47], [48] и др. показано, что в концевых точках одномерных областей интегрирования (2.5) существуют две характеристики. Многократно отмечается [3], [5], [9], [45] и др., что в большинстве физиологических режимов течение крови является дозвуковым. Т.е. одна из характеристик всегда направлена внутрь области интегрирования, а вторая — вне ее. Таким образом, на каждом конце сосуда требуется учет одного условия совместности

$$\omega_{ki} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{V}_k}{\partial t} + \lambda_{ki} \frac{\partial \mathbf{V}_k}{\partial x} \right) = \mathbf{G}_k, \quad k = k_1, k_2, \dots, k_{M_l}, \quad i = 1, 2, \quad (2.7)$$

и одного дополнительного граничного условия. Здесь  $l$  — индекс точки соединения сосудов,  $\{k_1, \dots, k_{M_l}\}$  — индексы сосудов в точке соединения,  $M_l$  — количество сосудов в точке соединения,  $\lambda_{ki}, \omega_{ki}$  — собственное значение и соответствующий левый собственный вектор матрицы  $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{V}$ . Конкретное значение  $i$  устанавливается в соответствии с наклоном характеристики и типом концевой точки сосуда (начало или конец). В начале сосуда  $\lambda_{ki} < 0$ , в конце сосуда  $\lambda_{ki} > 0$ . Конкретный вид  $\lambda_{ki}$  и  $\omega_{ki}$  найден, например, в [6], [9], [34] и др.

В каждой точке соединения сосудов закон сохранения массы принято записывать в виде

$$\sum_{k=k_1, k_2, \dots, k_{M_l}} \varepsilon_k S_k(t, \tilde{x}_k) u_k(t, \tilde{x}_k) = 0, \quad (2.8)$$

где  $\varepsilon_k = 1, \tilde{x}_k = 0$  для сосуда, исходящего из точки соединения,  $\varepsilon_k = -1, \tilde{x}_k = L_k$  для сосуда, входящего в точку соединения.

При соединении  $M_l$  сосудов условия (2.7), (2.8) дают  $M_l + 1$  уравнение. В то время как количество неизвестных  $S_{k_i}, u_{k_i}$  равно  $2M_l$ . Оставшиеся граничные условия могут быть получены в предположении о сохранении полного давления [2], [12], [18], [19], [47], [48]

$$\frac{u_k^2(t, \tilde{x}_k)}{2} + \frac{P_k(S_k(t, \tilde{x}_k))}{\rho} = I^l, \quad k = k_1, k_2, \dots, k_{M_l}, \quad (2.9)$$

статического давления

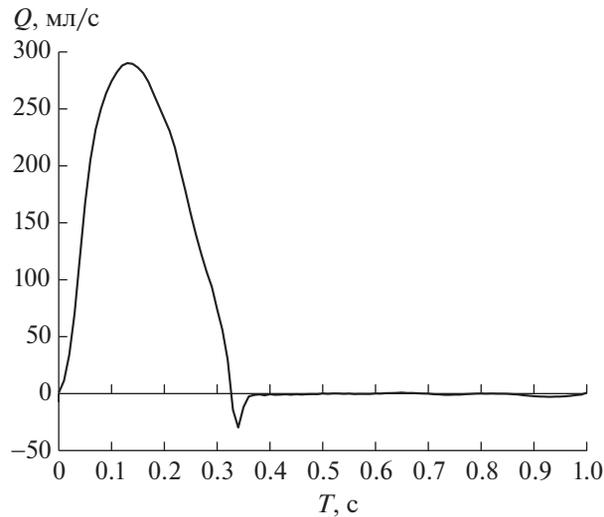
$$P_k(S_k(t, \tilde{x}_k)) = \rho I^l, \quad k = k_1, k_2, \dots, k_{M_l}, \quad (2.10)$$

или выполнения закона Пуазейля [3]

$$P_k(S_k(t, \tilde{x}_k)) - p^l(t) = \varepsilon_k R_k^l S_k(t, \tilde{x}_k) u_k(t, \tilde{x}_k), \quad k = k_1, k_2, \dots, k_{M_l}, \quad (2.11)$$

где  $I^l$  и  $p^l$  — соответственно полное и статическое давление в узле  $l$ ,  $R_k^l$  — гидродинамическое сопротивление концевой точки сосуда в узле  $l$ .

Уравнения (2.7), (2.8), объединенные с одним из уравнений (2.9), (2.10) или (2.11) образуют систему, содержащую  $2M_l + 1$  алгебраических и дифференциальных уравнений, которая на текущем шаге по времени может быть решена, например, методом Ньютона с использованием в качестве начального приближения значений на предыдущем шаге по времени.



Фиг. 1. Граничное условие на входе в сосудистую сеть ( $Q_h(t)$ ).

2.3. Граничные условия в конечных точках сети

Параметры модельных сосудистых сегментов, на которых проводились численные расчеты в данной работе, близки к характерным параметрам аорты человека (см. п. 3). На входе в сосудистую сеть в качестве граничного условия задавалась характерная зависимость сердечного выброса  $Q_h$  от времени [16] (см. фиг. 1)

$$S_{in}(t, 0)u_{in}(t, 0) = Q_h(t). \tag{2.12}$$

При проведении численных расчетов (см. п. 3) в конечных точках конечных (терминальных) сосудов ставились неотражающие граничные условия в виде

$$\omega_{q1} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{V}_q}{\partial t} + \lambda_{q1} \frac{\partial \mathbf{V}_q}{\partial x} \right) = \omega_{q2} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{V}_q}{\partial t} + \lambda_{q2} \frac{\partial \mathbf{V}_q}{\partial x} \right), \tag{2.13}$$

где  $q$  – индекс конечного сосуда,  $\lambda_{q1}$ ,  $\omega_{q1}$  – собственные значения и левые собственные векторы матрицы  $(\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{V})_q$  при  $x = L_q$

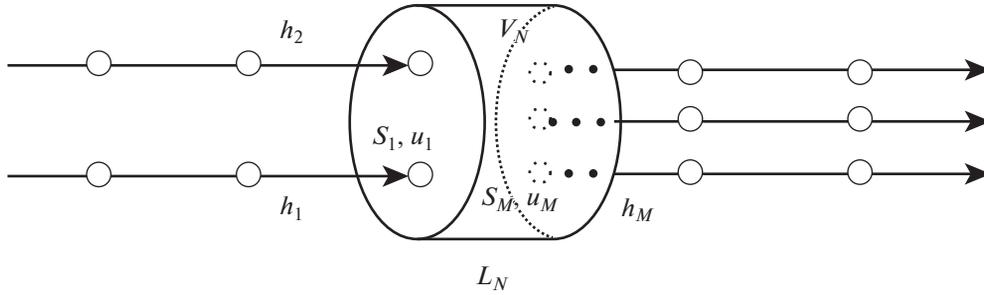
$$\left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{V}} \right)_q = \begin{pmatrix} u_q & S_q \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_q}{\partial S_q} & u_q \end{pmatrix},$$

$$\lambda_{qi} = u_q + (-1)^i \sqrt{\frac{S_q}{\rho} \frac{\partial P_q}{\partial S_q}}, \quad \omega_{qi} = \left\{ \sqrt{\frac{1}{\rho S_q} \frac{\partial P_q}{\partial S_q}}, (-1)^i \right\}, \quad i = 1, 2.$$

Для конца терминального сосуда значение  $i = 1$  соответствует характеристике, покидающей область интегрирования ( $\lambda_{q1} > 0$ ), а значение  $i = 2$  соответствует характеристике, идущей внутрь области ( $\lambda_{q2} < 0$ ). Поэтому неотражающие условия на конце терминального сосуда представляют собой (13) совместно с (7) при  $i = 1$ . Неявная дискретизация (7) с первым порядком дает

$$\omega_i \cdot \left( \frac{\mathbf{V}(t_{n+1}, x_L) - \mathbf{V}(t_n, x_L)}{\tau} + \lambda_i \frac{\mathbf{V}(t_{n+1}, x_L) - \mathbf{V}(t_{n+1}, x_{L-1})}{h} \right) = \mathbf{G}(t_{n+1}, x_{L-1}), \tag{2.14}$$

индекс  $q$ , показывающий номер терминального сосуда, опущен для краткости,  $x_L = L_q$ ,  $x_{L-1} = L_q - h_q$ ,  $h_q$ ,  $\tau$  – шаги дискретизации по пространству и времени. Условия (2.7) могут быть дискретизированы и с более высоким порядком [49].



Фиг. 2. Схема области соединения сосудов.

Поскольку расчеты во внутренних и граничных точках производятся поочередно (см. п. 3), то в (2.14) неизвестными величинами являются  $S(t_{n+1}, x_L)$ ,  $u(t_{n+1}, x_L)$ . Тогда представим (2.15) в виде

$$S(t_{n+1}, x_L) = \alpha_i u(t_{n+1}, x_L) + \beta_i, \quad i = 1, 2, \tag{2.15}$$

где  $\alpha_i, \beta_i$  зависят от известных в данный момент времени  $t_{n+1}$  величин, определенных на предыдущем шаге по времени  $t_n$  и на текущем шаге по времени во внутренних точках.

В итоге разностная дискретизация неотражающих граничных условий на конце терминального сосуда (2.13) совместно с (2.7) при  $i = 1$  имеет вид

$$S_q(t, L_q) = -\frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_2 - \alpha_1}, \quad u_q(t, L_q) = \frac{\beta_1 \alpha_2 - \beta_2 \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}. \tag{2.16}$$

#### 2.4. Граничные условия в области соединения сосудов и непрерывность решения

Условия (2.8), объединенные с (2.9), (2.10) или (2.11), широко используются в одномерных сетевых моделях гемодинамики. Условие (2.8) является следствием (2.1) при  $S'_i \approx 0$ . Условие (2.9) следует из второго уравнения в (2.5) при  $u'_i \approx 0$  и пренебрежении вязким трением в области соединения. Условие (2.10) может быть получено из (2.2) при  $(Su)'_i \approx 0$  и  $(\alpha Su^2)'_x \approx 0$ . Ни один из вариантов граничных условий (2.7), (2.8), объединенных с (2.9), (2.10) или (2.11), не обеспечивает непрерывность производных решения по времени в области соединения сосудов в следующих двух предельных случаях: соединение двух одинаковых сосудов и соединение двух одинаковых сосудов с третьим сосудом, имеющим бесконечно малый диаметр. В этих случаях решение в области соединения должно совпадать с решением для одного более длинного сосуда без выделения области соединения внутри него (сплошной сосуд). Следует также отметить, что для граничных условий (2.7), (2.8), (2.9) и использования схем второго порядка аппроксимации для дискретизации как уравнений внутри одномерных областей (2.5), так и для условий совместности (2.7), эффективный порядок сходимости не превышал 1.7 [49], что говорит о существенном вкладе погрешности математической модели в области соединения.

Для решения этой проблемы используем подход, аналогичный [42], в котором для постановки граничных условий между одномерной и трехмерной областью использовалась пространственно осредненная динамическая модель упругого резервуара. Пусть область соединения  $L$  образована  $M$  сосудами (см. фиг. 2).

Граничные условия в области соединения включают закон сохранения массы и импульса, которые, используя (2.6), запишем в виде

$$\frac{dV_N}{dt} = \sum_{j=1}^M \varepsilon_j S_j u_j, \quad j = 1, \dots, M, \tag{2.17}$$

$$I_N \frac{d^2 V_N}{dt^2} + R_N \frac{dV_N}{dt} + P_{\text{int}} - P_{\text{ext}} = 0, \tag{2.18}$$

где  $P_{\text{ext}}$  — среднее давление на границе области соединения сосудов,  $P_{\text{int}}$  — давление в области соединения, которое определяется упругостью стенок области. Здесь и далее в этом разделе для компактности записи считаем  $S_j = S_j(t, \tilde{x}_j)$ ,  $u_j = u_j(t, \tilde{x}_j)$ .

Для окончательной постановки задачи в области соединения сосудов необходимо задание начальных условий для (2.18) и определения такой методики вычисления  $P_{\text{ext}}, P_{\text{int}}$  с учетом свойств всех соединяющихся сосудов, которая бы обеспечивала корректную асимптотику при предельном переходе к сплошному сосуду, включая непрерывность упругих свойств материала стенки.

Материал стенки артерий имеет трехслойную структуру. Два из них (медиа и адвентиция) могут быть представлены как композитный материал, состоящий из однородного изотропного матрикса, усиленного двумя семействами спиральных волокон [36], [44]. В здоровых сосудах эти слои полностью определяют упругий отклик при нагрузке внутренним давлением. Материал области соединения имеет ту же структуру и упругие свойства. Однако следует учесть, что область соединения сформирована из тканей, упругие свойства которых должны быть близки всем формирующим ее сосудам (как входящим, так и исходящим). Свойства этих сосудов могут отличаться между собой. Примем во внимание еще тот факт, что при отхождении мелкого сосуда от крупного магистрального материал области соединения фактически имеет те же свойства, что и магистральный сосуд. Основываясь на приведенных рассуждениях, запишем определяющее соотношение для области соединения сосудов в виде

$$P_{\text{int}}(V_N) = \frac{\sum_{j=1}^M P_j \left( \frac{V_N}{L_N} \right) (S_0)_j^l}{M \sum_{j=1}^M (S_0)_j^l}. \tag{2.19}$$

Здесь  $P_j$  – определяющее соотношение (2.4) для сосуда  $j$ . Наилучший результат достигается при  $l = 5$ . При этом значении  $l$  в случае ответвления с малым относительно магистрального сосуда диаметром давлением в магистрали наиболее близко к давлению в сплошном сосуде (см. п. 3.2). При дальнейшем увеличении  $l > 5$  существенного изменения в решении не происходит. Величина  $V_N L_N^{-1}$  имеет смысл характерного поперечного сечения области соединения. Вклад давлений на концах сосудов в среднее давление на границе области можно оценить с помощью закона Пуазейля

$$P_j(S_j) - P_{\text{int}} = R_j S_j u_j \sim S_j^4,$$

поскольку гидродинамическое сопротивление  $R_j \sim S_j^2$ , а с учетом (2.15)  $u_j \sim S_j$

$$P_{\text{ext}}(S_1, S_2, \dots, S_M) = \frac{\sum_{j=1}^M P_j(S_j) S_j^4}{\sum_{j=1}^M S_j^4}. \tag{2.20}$$

При соединении двух одинаковых сосудов (2.19), (2.20) дают

$$P_{\text{int}}(V_N) = P_1 \left( \frac{V_N}{L_N} \right) = P_2 \left( \frac{V_N}{L_N} \right),$$

$$P_{\text{ext}}(S_1, S_2) \approx \frac{1}{2} (P_1(S_1) + P_2(S_2)),$$

поскольку  $S_1 \approx S_2$ . То есть область соединения имеет те же упругие свойства, что и образующие ее сосуды, а среднее давление на границе определяется средним давлением на концах сосудов.

В случае отхождения мелкого сосуда от крупного магистрального сосуда  $S_1 \approx S_2 \approx S \gg S_3$ ,  $P_1 = P_2 = P$

$$P_{\text{int}} \left( \frac{V_N}{L_N} \right) = P \left( \frac{V_N}{L_N} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{S_3}{S} \right)^5 \cdot P_3 \left( \frac{V_N}{L_N} \right) \approx P \left( \frac{V_N}{L_N} \right),$$

$$P_{\text{ext}}(S_1, S_2, S_3) \approx \frac{1}{2} (P_1(S_1) + P_2(S_2)) + \frac{1}{2} \left( \frac{S_3}{S} \right)^5 \cdot P_3(S_3) \approx \frac{1}{2} (P_1(S_1) + P_2(S_2)),$$

т.е. упругость области соединения практически полностью определяется упругостью магистральных сосудов, а среднее давление на границе определяется средним давлением на концах

магистральных сосудов, поскольку даже большое давление в мелком сосуде не оказывает существенного влияния в силу большего гидродинамического сопротивления этого сосуда.

Будем считать, что характерный линейный размер области соединения определяется усреднением характерных линейных размеров концевых участков сосудов, полученных при дискретизации внутренней области сосудов по пространству с шагом  $h_j$  с учетом пропорциональности диаметрам сосудов  $d_j$

$$L_N = \frac{\sum_{j=1}^M h_j d_j}{\sum_{j=1}^M d_j}. \quad (2.21)$$

По предположению одномерной модели  $d_j \ll L_j$  и можно выбрать  $h_j \approx d_j$ .

Как при соединении двух одинаковых сосудов, так и при отхождении мелкого сосуда от крупного магистрального сосуда ( $S_{01} = S_{02} \gg S_{03}$ ), (2.21) дает

$$L_N \approx h_1 \approx h_2.$$

Характерный начальный объем  $V_N(0)$  области соединения определяется усреднением объемов концевых участков сосудов  $V_{0j} = S_{0j} h_j$ , полученных при дискретизации сосудов с шагом  $h_j$  с учетом пропорциональности  $(S_{0j})^l$

$$V_N(0) = \frac{\sum_{j=1}^M V_{0j} (S_{0j})^l}{\sum_{j=1}^M (S_{0j})^l}. \quad (2.22)$$

Выбор конкретного значения  $l$  в (2.22) не оказывает существенного влияния, поскольку перед началом основных расчетов проводятся предварительные расчеты до достижения всеми переменными, заданными в расчетных узлах сосудистой сети, периодического режима. Следует, однако, отметить, что при  $l = 0$  для областей соединения сосудов с существенно разными  $S_{0j}$  значение  $V_N(0)$ , вычисленное по (2.22), может оказаться далеким от значений при периодическом режиме течения и для достижения этого режима может потребоваться большее время для предварительных расчетов. Например, при отхождении мелкого сосуда от крупного магистрального сосуда ( $S_{01} = S_{02} \gg S_{03}$ ) получаем  $V_N(0) \approx \frac{2}{3} V_{01,2}$ , хотя, очевидно, в этом случае хорошим начальным условием, близким к периодическому режиму, является  $V_N(0) \approx \frac{2}{3} V_{01,2}$ . Поэтому в (2.22) следует выбирать по крайней мере  $l \geq 1$ .

Область соединения сосудов имеет сложную трехмерную геометрию и структуру материала стенки. Течения в таких областях существенно трехмерные и должны изучаться с помощью совместных упруго-гидродинамических (FSI) моделей (см., например, [6]). Предложенный в данном разделе подход позволяет оценить параметры кровотока при протекании через область соединения сосудов с точностью приемлемой для моделирования с использованием одномерной модели (2.5). Адекватность подхода подтверждается вычислительными экспериментами (см. п. 3).

Условия (2.17), (2.18), как и ранее, дополняются соответствующими условиями совместности (2.7) вдоль характеристики, покидающей область интегрирования.

В результате алгоритм вычисления граничных условий на концах сосудов, формирующих область соединения  $N$  при переходе между слоями по времени  $t_n$  и  $t_{n+1}$ , состоит в решении задачи Коши для уравнения (2.18) с начальными условиями  $V_N(t_n)$  (известно с предыдущего шага) и  $\frac{dV_N(t_n)}{dt}$  (определяется из (2.17) при  $t = t_n$ ). При использовании явного метода (2.20) содержит значения  $S_j$  при  $t = t_n$  и интегрирование (2.18) не представляет труда. После этого  $S_j$  при  $t = t_{n+1}$  находятся как корни уравнений  $P_j(S_j) = P_{\text{int}}(V_N(t_{n+1}))$ , и, далее,  $u_j$  из дискретизации условий совместности (2.15)

вдоль характеристики, покидающей область интегрирования. При использовании неявного метода для (2.18) уравнение (2.20) содержит значения  $S_j$  при  $t = t_{n+1}$ . Это приводит к возникновению вложенного итерационного процесса, поскольку неизвестными теперь являются не только  $V_N$  и  $\frac{dV_n}{dt}$ , но и  $S_j$ .

В заключение данного раздела отметим следующее. Пусть один из входящих в область соединения сосудов  $j_1$  и один из исходящих из области соединения сосудов  $j_2$  имеют одинаковые свойства  $((c_0)_{j_1} = (c_0)_{j_2}, (S_0)_{j_1} = (S_0)_{j_2})$ . Пусть диаметры остальных сосудов стремятся к нулю. При  $h_{j_1} = h_{j_2} = h$  и в силу сделанных предположений имеем решение, которое асимптотически совпадает с решением (2.5) для одного сосуда длины  $2L$  с точностью  $O(h)$ .

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Рассмотрим две группы численных экспериментов. В первой группе численных экспериментов (см. п. 3.1) рассмотрим случай соединения двух одинаковых сосудов и одного сосуда с теми же параметрами, но вдвое большей длины (модель сплошного сосуда). Будем сравнивать численное решение в соединенных сосудах с численным решением в сплошном сосуде в зависимости от модели граничных условий в узле. Численное решение в сплошном сосуде будем считать эталонным, поскольку получение аналитического решения данной задачи не представляется возможным.

Во второй группе численных экспериментов (см. п. 3.2) рассмотрим модификацию случая, рассматриваемого в первой группе, состоящую в добавлении бокового ответвления. Будем сравнивать численное решение в двух магистральных сосудах с численным решением в сплошном сосуде в зависимости от радиуса (поперечного сечения) ответвления.

Для всех случаев скорость распространения малых возмущений в стенке сосуда  $c_0 = 900$  см/с, шаг по пространству  $h = 1$  см, шаг по времени  $\tau = 5 \times 10^{-5}$  с. Для всех случаев, за исключением модели сплошного сосуда  $L = 10$  см. Для сплошного сосуда  $L = 21$  см. В первой группе численных экспериментов для всех случаев  $d = 2$  см. Во второй группе  $d_1 = d_2 = d_{\text{single}} = 2$  см,  $0.4 \text{ см} \leq d_3 \leq 2 \text{ см}$

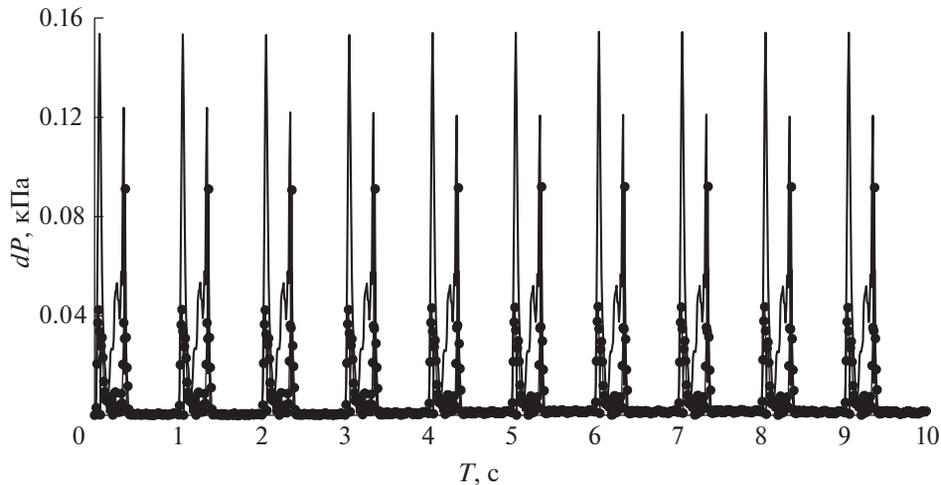
$$\left( (S_0)_j = \frac{\pi d_j^2}{4} \right).$$

Расчеты во внутренних точках сосудов проводились с помощью монотонной сеточно-характеристической схемы первого порядка [51]. Расчеты области соединения сосудов проводились с помощью явного метода Эйлера первого порядка. Расчет внутренних и граничных точек производился поочередно, что в целом представляет собой вариант схемы с расщеплением. Используемый шаг по времени обеспечивает устойчивость обоих методов.

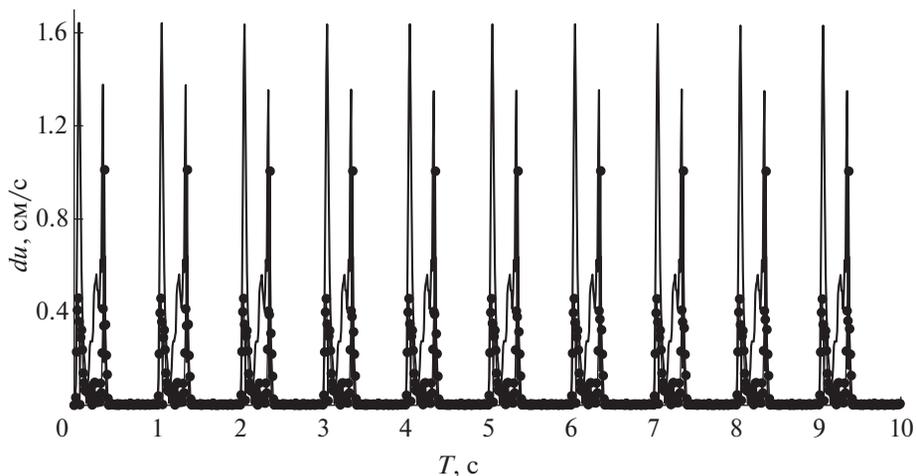
#### 3.1. Сравнение модели сплошного сосуда с моделями сосуда, разделенного точкой соединения

Рассмотрим модель, состоящую из двух последовательно соединенных сосудов, параметры которых близки к типичным параметрам аорты человека. Рассмотрим влияние модели граничных условий в области соединения на численное решение. Будем рассматривать три типа граничных условий в области соединения, которые включают в себя (2.9), (2.10) или (2.18) и один сплошной сосуд вдвое большей длины. На фиг. 5 и фиг. 6 представлены результаты расчетов давления  $P$  и скорости  $u$  с граничными условиями, включающими (2.18) в течение 10 сердечных циклов (10 с) на расстоянии 11 см от входа в первый сосуд. Это соответствует началу второго сосуда, находящегося вблизи точки соединения сосудов. Временной период, равный десяти сердечным циклам, выбран исходя из необходимости контроля за установлением периодического режима, поскольку начальные условия этому режиму не соответствуют. Как видно из фиг. 5, 6, установление периодического режима происходит за один сердечный цикл. Однако в модели сосудистой сети, содержащей десятки или сотни элементов, для этого требуется более длительное время. Отсчет давления производится от минимального (диастолического) давления в аорте. Результаты расчетов находятся в физиологическом диапазоне [15], [16].

Будем сравнивать численное решение в соединенных сосудах с численным решением в сплошном сосуде в зависимости от модели граничных условий в узле. Будем трактовать эту раз-



**Фиг. 3.** Динамика абсолютной погрешности давления на расстоянии 11 см от входа для модели с использованием (2.18) (круглые маркеры) и модели с использованием (2.9) (без маркеров).

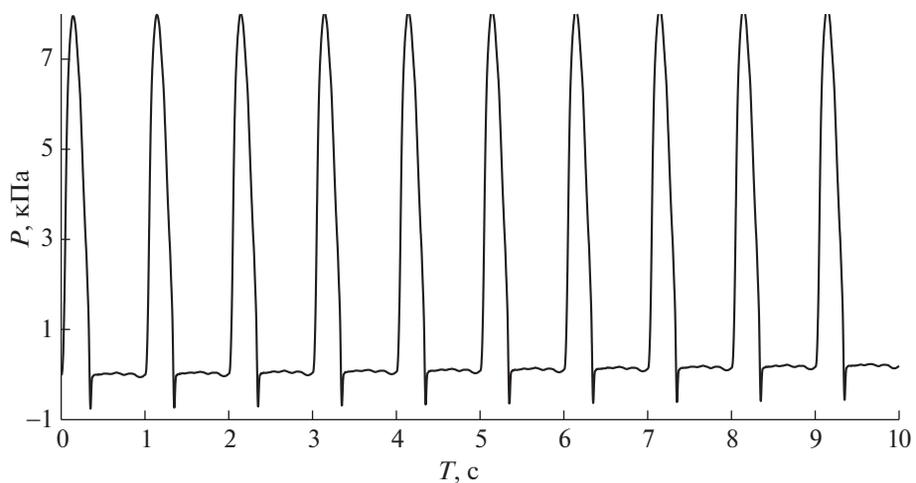


**Фиг. 4.** Динамика абсолютной погрешности скорости на расстоянии 11 см от входа для модели с использованием (2.18) (круглые маркеры) и модели с использованием (2.9) (без маркеров).

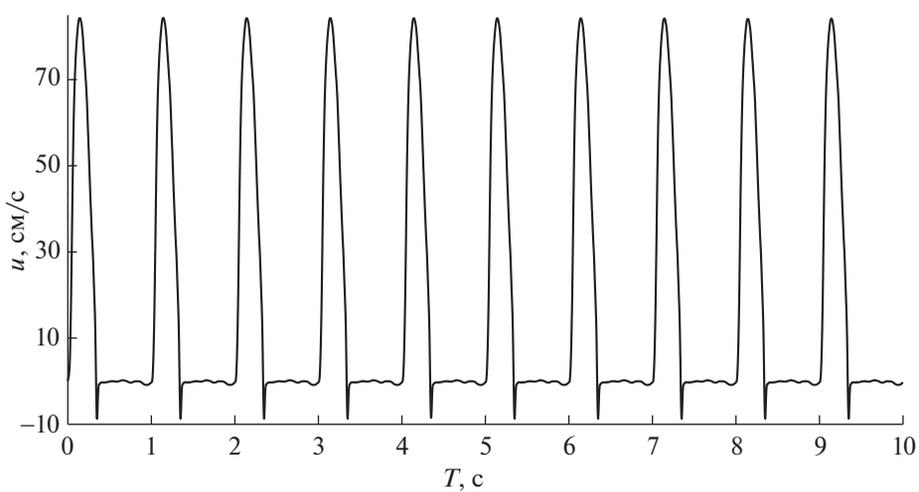
ность как погрешность. На фиг. 3, 4 представлены абсолютные отклонения давления  $dP$  и скорости  $du$  в центре сплошного сосуда (на расстоянии 11 см от входа) между численным решением в сплошном сосуде и численными решениями в моделях с использованием (2.9) и (2.18). Максимальные абсолютные отклонения для обеих моделей наблюдаются в начале и в конце систолы. Модель с использованием (2.9) демонстрирует существенно более высокую погрешность в начале систолы.

Более высокая погрешность для модели с использованием (2.9) объясняется тем, что на каждом шаге по времени в области соединения сосудов решается система нелинейных уравнений методом Ньютона. Начальное приближение задается на основе значений с предыдущего шага по времени. Однако в начале и в конце систолы наблюдается резкое изменение решения, что приводит к ухудшению точности начального приближения. Увеличение шага по времени приводит к дополнительному ухудшению точности и, в итоге, к нарушению критериев на выбор начального приближения и неустойчивости решения системы нелинейных уравнений в области соединения сосудов. Это ограничение может оказаться более жестким, чем ограничение на шаг, налагаемое условием устойчивости разностной схемы во внутренних точках сосуда.

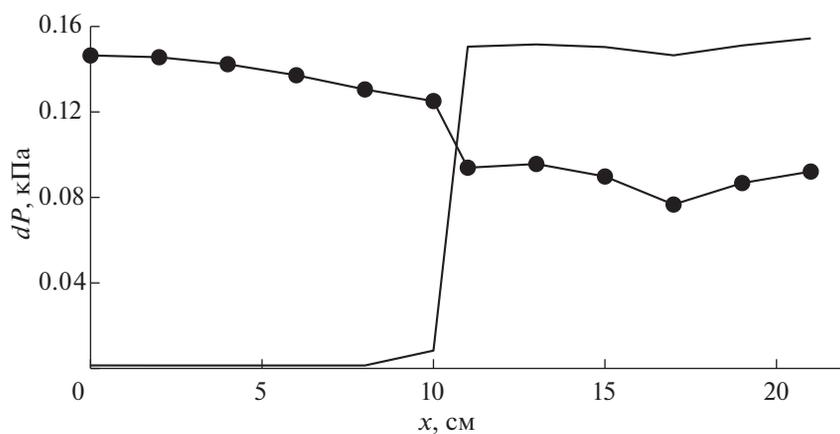
Увеличение погрешности в начале и конце систолы для модели с использованием (2.18) также связано с выбором начальных условий для задачи Коши с использованием значений на предыдущем шаге по времени. В данном случае проблема может быть решена повышением порядка аппроксимации численного метода для решения задачи Коши и использования неявных схем.



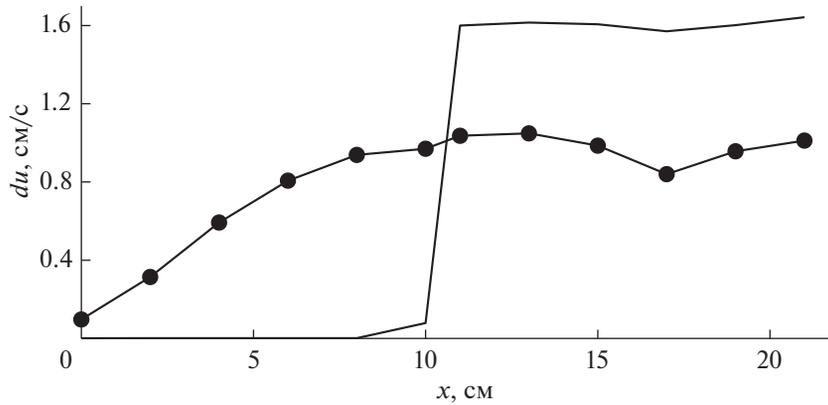
Фиг. 5. Давление на расстоянии 11 см от входа по модели с использованием (2.18).



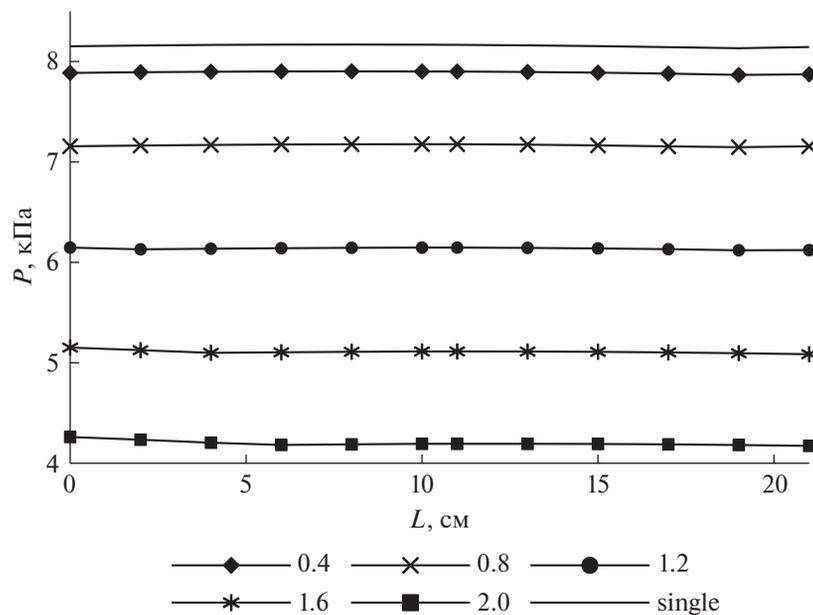
Фиг. 6. Скорость на расстоянии 11 см от входа по модели с использованием (2.18).



Фиг. 7. Максимум абсолютной погрешности давления по длине сосуда для модели с использованием (2.18) (круглые маркеры) и модели с использованием (2.9) (без маркеров).



Фиг. 8. Максимум абсолютной погрешности скорости по длине сосуда для модели с использованием (2.18) (круглые маркеры) и модели с использованием (2.9) (без маркеров).

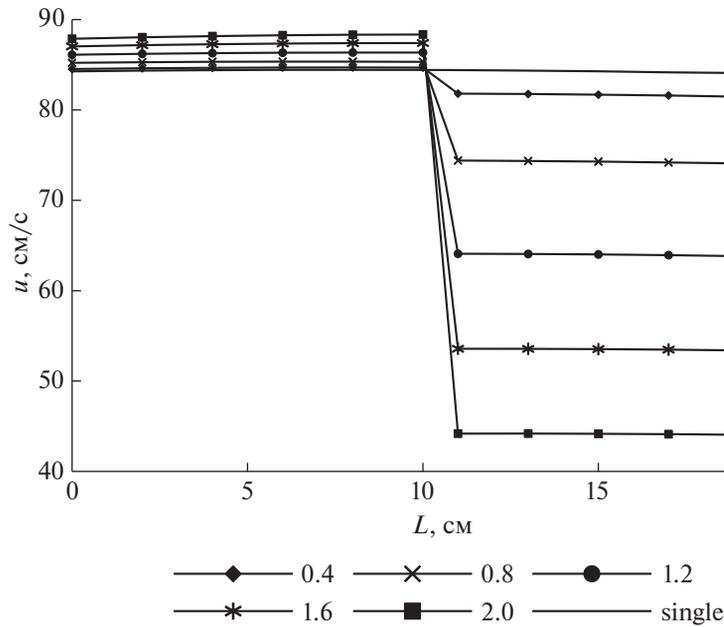


Фиг. 9. Пиковое (систолическое) давление по длине магистрального сосуда в зависимости от диаметра ответвления.

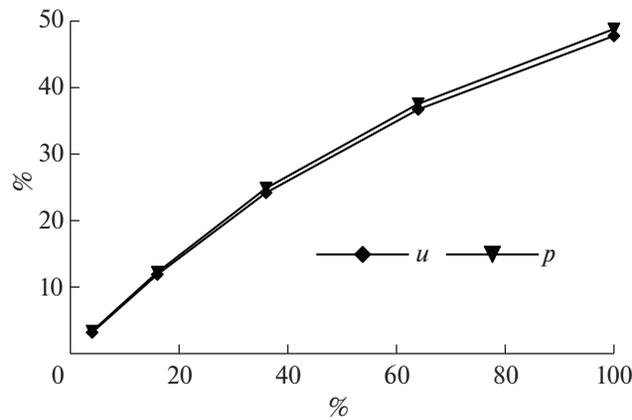
На фиг. 7, 8 представлены распределения максимальных по времени абсолютных отклонений давления  $dP$  и скорости  $du$  между численным решением в сплошном сосуде и численными решениями в моделях с использованием (2.9) и (2.18) по длине сосуда. Как видно из фиг. 3, 4, максимумы для модели с использованием (2.9) достигаются периодически в начале каждой систолы, а максимумы для модели с использованием (2.18) достигаются периодически в конце каждой систолы.

Следует отметить, что на фиг. 7, 8 для модели с использованием (2.9) в области соединения сосудов наблюдается скачок абсолютного отклонения численного решения как давления, так и скорости. Для модели с использованием (2.18) происходит незначительное падение абсолютного отклонения давления. При этом абсолютная погрешность скорости непрерывна. Таким образом, наличие точки соединения сосудов с использованием (2.9) приводит к значительному повышению абсолютной погрешности.

Максимальная относительная разница численных решений между моделью с использованием (2.9) и моделью с использованием (2.10) составила не более 0.5% для давления и 0.1% для скорости. Поэтому для сохранения наглядности результаты расчетов по модели с использовани-



**Фиг. 10.** Пиковая (систолическая) скорость по длине магистрального сосуда в зависимости от диаметра ответвления.



**Фиг. 11.** Максимальное относительное отклонение скорости и давления от значений в сплошном сосуде в зависимости от площади ответвления.

ем (2.10) на фиг. 5–8 не представлены. Все сказанное относительно модели с использованием (2.9) остается справедливым и для модели с использованием (2.10).

### 3.2. Сравнение модели сплошного сосуда с моделью бифуркации

Рассмотрим модель, состоящую из двух последовательно соединенных магистральных сосудов, к которым присоединен еще один сосуд (ответвление). Магистральные сосуды имеют те же параметры, что и в п. 3.1, а диаметр ответвления изменяется от 2 до 0.4 см. Соответственно, параметр  $S_0$  в ответвлении изменяется от 100 до 4% от соответствующего значения в магистральных сосудах.

На фиг. 9, 10 представлены пиковые (систолические) значения давления и скорости по длине двухсегментного магистрального сосуда в зависимости от диаметра ответвления, поскольку именно эти величины наиболее сильно отличаются по отношению к соответствующим величинам в одном сплошном сосуде (представлены на фиг. 9, 10 сплошной линией). Из фиг. 9 видно,

что уменьшение диаметра приводит к повышению систолического давления в магистральном сосуде до величины, которая наблюдается в сплошном сосуде. Аналогично ведет себя и скорость на фиг. 10.

Представление о количественной оценке сходимости к решению в сплошном сосуде дает фиг. 11. На нем представлена зависимость максимальной относительной разницы давления и скорости в зависимости от отношения параметра  $(S_0)_3$  в ответвлении к  $(S_0)_{1,2}$  магистрального сосуда. При снижении  $(S_0)_3/(S_0)_{1,2}$  от 100 до 4% относительное отклонение как давления, так и скорости падает от 50 до 3%, что соответствует теоретическим ожиданиям в предельном случае при стремлении диаметра ответвления  $d_3$  к нулю.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе впервые предложены и проанализированы новые граничные условия для области соединения сосудов, кровотока в которых описывается одномерной моделью гемодинамики. По построению новые граничные условия асимптотически обеспечивают непрерывность решения и производных решения по времени с первым порядком по пространству в двух случаях: при сравнении решения в сплошном сосуде и сосуде, разделенном точкой соединения; при сравнении решения в сплошном сосуде и магистральном сосуде с ответвлением при стремлении диаметра ответвления к нулю.

Проведены две серии численных экспериментов. Результаты первой серии позволяют провести сравнительный анализ поведения численного решения при использовании различных вариантов граничных условий в области соединения сосудов (непрерывность интеграла Бернулли, непрерывность давления, новые условия). Показано, что новые граничные условия дают меньшую абсолютную погрешность и обеспечивают гладкость решения. Результаты второй серии численно подтверждают сходимость решения в магистральном сосуде с ответвлением при стремлении диаметра ответвления к нулю к решению в сплошном сосуде.

Существует потенциал развития численной реализации новых граничных условий за счет повышения порядка аппроксимации и использования неявных схем. При этом, однако, придется преодолеть трудности, связанные с определением неизвестных на промежуточных и верхнем временном слое, что приведет к необходимости использования вложенных итерационных процедур, появлению ограничений, связанных с их сходимостью, соответствующему повышению вычислительных ресурсов.

Сравнение с моделью, использующей граничные условия, включающие в себя закон Пуазейля (2.11), методологически затруднено, поскольку (2.11) содержит дополнительный эмпирический параметр (гидродинамическое сопротивление  $R$ ), определение которого связано с анализом данных конкретного пациента, а в общем виде неоднозначно. Тем не менее значения  $R$ , позволяющие достичь хорошего совпадения с моделью сплошного сосуда, существуют. В целом эта модель имеет те же недостатки, что и модели с использованием (2.9) или (2.10).

Использование в данной работе неотражающих граничных условий в концевых точках сосудов оправдывается тем, что рассматриваются модели локального участка сосудистого русла. Учет влияния граничных условий на уровне перехода артериальной сети в микроциркуляторную привело бы к ненужному усложнению модели. С другой стороны, использование широко распространенных видов граничных условий на выходе из сети такого малого масштаба (свободный сток, давление, модель виндкесселя и др.) приводит к появлению в решении отраженных волн, имеющих нефизиологическое происхождение, что затруднило бы сравнительный анализ. Следует отметить, что граничные условия вида (2.13) для одномерных моделей гемодинамики в данной работе используются впервые.

В данной работе расчеты проводились на локальных сосудистых структурах с параметрами, характерными для аорты человека. Применимость предлагаемого подхода для других условий, характерных для кровотока в других сосудах, не вызывает сомнений, поскольку параметры кровотока в аорте в определенном смысле являются лимитирующими: самая высокая жесткость стенки, самое высокое число Рейнольдса. В дальнейшем планируется провести апробацию предложенных граничных условий в точках соединения сосудов на сетях коронарных и церебральных сосудов, имеющих параметры реальных пациентов, а также на сети сосудов системного круга.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Matatyukov M.Y., Khe A.K., Parshin D.V., Plotnikov P.I., Chupakhin A.P.* On the energy of a hydroelastic system: blood flow in an artery with a cerebral aneurysm // *J. of applied mechanics and technical physics*. 2019. V. 60. № 6. P. 977–988.
2. *Абакумов М.В., Гаврилюк К.В., Есикова Н.Б., Кошелев В.Б., Лукин А.В., Мухин С.И., Соснин Н.В., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П.* Математическая модель гемодинамики сердечно-сосудистой системы // *Дифференц. ур-ния*. 1997. Т. 33. № 7. С. 892–898.
3. *Холодов А.С.* Некоторые динамические модели внешнего дыхания и кровообращения с учетом их связности и переноса веществ // *Компьютерные модели и прогресс медицины*. М.: Наука, 2001. С. 127–163.
4. *Борзов А.Г., Мухин С.И., Соснин Н.В.* Консервативные схемы переноса вещества по системе сосудов, замкнутых через сердце // *Дифференц. ур-ния*. 2012. Т. 48. № 7. С. 919–928.
5. *Formaggia L., Quarteroni A., Veneziani A.* Cardiovascular Mathematics: Modeling and Simulation of the Circulatory System. V. 1. Heidelberg: Springer, DE, 2009.
6. *Vassilevski Yu., Olshanskii M., Simakov S., Kolobov A., Danilov A.* Personalized computational hemodynamics: models, methods, and applications for vascular surgery and antitumor therapy. London, San Diego, Cambridge, Oxford: Academic Press, 2020.
7. *Simakov S.S.* Spatially averaged haemodynamic models for different parts of cardiovascular system // *Russian j. of numerical analysis and mathematical modelling*. 2020. V. 35. № 5. P. 285–294.
8. *Bessonov N., Sequeira A., Simakov S., Vassilevski Yu., Volpert V.* Methods of blood flow modelling // *Mathematical modelling of natural phenomena*. 2016. V. 11. № 1. P. 1–25.
9. *Абакумов М.В., Ашметков И.В., Есикова Н.Б., Кошелев В.Б., Мухин С.И., Соснин Н.В., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Хруленко А.Б.* Методика математического моделирования сердечно-сосудистой системы // *Матем. моделирование*. 2000. Т. 12. № 2. С. 106–117.
10. *Буничева А.Я., Мухин С.И., Соснин Н.В., Хруленко Н.Б.* Математическое моделирование квазиодномерной гемодинамики // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2015. Т. 55. № 8. С. 1381–1392.
11. *Simakov S.S.* Lumped parameter heart model with valve dynamics // *Russian j. of numerical analysis and mathematical modelling*. 2019. V. 34. № 5. P. 289–300.
12. *Olufsen M.S., Peskin C.S., Kim W.Y., Pedersen E.M., Nadim A., Larsen J.* Numerical simulation and experimental validation of blood flow in arteries with structured-tree outflow conditions // *Annals of biomedical engineering*. 2000. V. 28. P. 1281–1299.
13. *Mynard J.P., Smolich J.J.* One-dimensional haemodynamic modeling and wave dynamics in the entire adult circulation // *Annals of biomedical engineering*. 2015. V. 43. № 6. P. 1443–1460.
14. *Guan D., Liang F., Gremaud P.A.* Comparison of the Windkessel model and structured-tree model applied to prescribe outflow boundary conditions for a one-dimensional arterial tree model // *J. of biomechanics*. 2016. V. 49. № 9. P. 1583–1592.
15. *Schmidt R.F., Thews G.* Human Physiology. Berlin: Springer-Verlag, Germany, 1989.
16. *Ganong W.F.* Review of Medical Physiology. Stamford, CT: Appleton and Lange, 1999.
17. *Avolio A.P.* Multi-branched model of the human arterial system // *Medical & biological engineering & computing*. 1980. V. 18. P. 709–718.
18. *Alastruey J., Parker K.H., Peiró J., Sherwin S.J.* Analysing the pattern of pulse waves in arterial networks: a time-domain study // *J. of engineering mathematics*. 2009. V. 64. № 4. P. 331–351.
19. *Blanco P.J., Watanabe S.M., Passos M.A.R.F., Lemos P.A., Feijóo R.A.* An anatomically detailed arterial network model for one-dimensional computational hemodynamics // *IEEE Transaction on biomedical engineering*. 2015. V. 62. № 11. P. 736–753.
20. *Vassilevski Y.V., Danilov A.A., Simakov S.S., Gamilov T.M., Ivanov Y.A., Pryamonosov R.A.* Patient-specific anatomical models in human physiology // *Russian j. of numerical analysis and mathematical modelling*. 2015. V. 30. № 3. P. 185–201.
21. *Danilov A., Ivanov Yu., Pryamonosov R., Vassilevski Yu.* Methods of graph network reconstruction in personalized medicine // *International j. for numerical methods in biomedical engineering*. 2016. V. 32. № 8. e02754.
22. *Xiao N., Alastruey-Arimon J., Figueroa C.A.* A systematic comparison between 1D and 3D hemodynamics in compliant arterial models // *International j. for numerical methods in biomedical engineering*. 2014. V. 30. № 2. С. 204–231.
23. *Гогниева Д.Г., Першина Е.С., Митина Ю.О., Гамилов Т.М., Прямоносоев Р.А., Гогберидзе Н.А., Рожков А.Н., Василевский Ю.В., Симаков С.С., Лианг Ф., Сеницын В.Е., Бетелин В.Б., Шекочихин Д.Ю., Сыркин А.Л., Копылов Ф.Ю.* Сравнение диагностической эффективности методик неинвазивного расчета фракционного резерва кровотока, основанных на построении одномерной и трехмерной математических моделей // *Кардиоваскулярная терапия и профилактика*. 2020. Т. 19. № 2. 2303.
24. *Alastruey J., Khir A.W., Matthys K.S., Segers P., Sherwin S.J., Verdonck P.R., Parker K.H., Peiró J.* Pulse wave propagation in a model human arterial network: assessment of 1-D visco-elastic simulations against in vitro measurements // *J. of biomechanics*. 2011. V. 44. № 12. P. 2250–2258.

25. Boileau E., Nithiarasu P., Blanco P.J., Müller L.O., Fossan F.E., Hellevik L.R., Donders W.P., Huberts W., Willemet M., Alastruey J. A benchmark study of numerical schemes for one-dimensional arterial blood flow modelling // International j. for numerical methods in biomedical engineering. 2015. V. 31. № 10. e02732.
26. Dobroserdova T., Simakov S., Gamilov T., Pryamonosov R., Sakharova E. Patient-specific blood flow modelling for medical applications // MATEC Web of Conferences. 2016. V. 76. 05001.
27. Sugimoto K., Liang F., Takahara Y., Mogi K., Yamazaki K., Takagi S., Liu H. Assessment of cardiovascular function by combining clinical data with a computational model of the cardiovascular system // The j. of thoracic and cardiovascular surgery. 2013. V. 145. № 5. P. 1367–1372.
28. Carson J.M., Pant S., Roobottom C., Alcock R., Javier Blanco P., Alberto Bulant C., Vassilevski Y., Simakov S., Gamilov T., Pryamonosov R., Liang F., Ge X., Liu Y., Nithiarasu P. Non-invasive coronary CT angiography-derived fractional flow reserve: A benchmark study comparing the diagnostic performance of four different computational methodologies // International j. for numerical methods in biomedical engineering. 2019. V. 35. № 10. e03235.
29. Gognieva D., Mitina Y., Gamilov T., Pryamonosov R., Vasilevskii Y., Simakov S., Liang F., Ternovoy S., Serova N., Tebenkova E., Sinitsyn V., Pershina E., Abugov S., Mardanian G., Zakarian N., Kirakosian V., Betelin V., Shechekochikhin D., Syrkin A., Kopylov P. Noninvasive assessment of the fractional flow reserve with the CT FFRc 1D method: final results of a pilot study // Global heart. 2021. V. 16. № 1. 1.
30. Golov A., Simakov S., Soe Y.N., Pryamonosov R., Mynbaev O., Kholodov A. Multiscale CT-based computational modeling of alveolar gas exchange during artificial lung ventilation, cluster (Biot) and periodic (Cheyne-Stokes) breathings and bronchial asthma attack // Computation. 2017. V. 5. № 1. 11.
31. Мозохина А.С., Мухин С.И. О квазиодномерном течении жидкости с анизотропной вязкостью в сжимающемся сосуде // Дифференц. ур-ния. 2018. Т. 54. № 7. С. 956–962.
32. Savinkov R., Grebennikov D., Puchkova D., Chereshnev V., Sazonov I., Bocharov G. Graph theory for modeling and analysis of the human lymphatic system // Mathematics. 2020. V. 8. № 12. 2236.
33. Mozokhina A., Savinkov R. Mathematical modelling of the structure and function of the lymphatic system // Mathematics. 2020. V. 8. № 9. 1467.
34. Холодов Я.А. Разработка сетевых вычислительных моделей для исследования нелинейных волновых процессов на графах // Компьютерные исследования и моделирование. 2019. Т. 11. № 5. С. 777–814.
35. Poroshina A.B., Vedenev V.V. Existence and uniqueness of steady state of elastic tubes conveying power law fluid // Russian j. of biomechanics. 2018. V. 22. № 2. P. 169–193.
36. Holzapfel G.A. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models // J. of elasticity. 2001. V. 61. P. 1–48.
37. Sackinger P.A., Schunk P.R., Rao R.R. A Newton-Raphson pseudo-solid domain mapping technique for free and moving boundary problems: a finite element implementation // J. of computational physics. 1996. V. 125. № 1. P. 83–103.
38. Rosar M.E., Peskin C.S. Fluid flow in collapsible elastic tubes: A three-dimensional numerical model // New York j. of mathematics. 2001. V. 7. P. 281–302.
39. Quarteroni A., Tuveri M., Veneziani A. Computational vascular fluid dynamics: problems, models and methods // Computing and visualization in science. 2000. V. 2. P. 163–197.
40. Danilov A., Lozovskiy A., Olshanskii M., Vassilevski Y. A finite element method for the Navier-Stokes equations in moving domain with application to hemodynamics of the left ventricle // Russian j. of numerical analysis and mathematical modelling. 2017. V. 32. № 4. P. 225–236.
41. Vassilevski Y., Danilov A., Lozovskiy A., Olshanskii M., Salamatova V., Chang S.M., Han Y., Lin C.H. A stable method for 4D CT-based CFD simulation in the right ventricle of a TGA patient // Russian j. of numerical analysis and mathematical modelling. 2020. V. 35. № 5. P. 315–324.
42. Dobroserdova T., Olshanskii M., Simakov S. Multiscale coupling of compliant and rigid walls blood flow models // International j. for numerical methods in fluids. 2006. V. 82. № 12. P. 799–817.
43. Čanić S., Kim E.H. Mathematical analysis of the quasilinear effects in a hyperbolic model blood flow through compliant axi-symmetric vessels // Mathematical methods in the applied sciences. 2003. V. 26. P. 1161–1186.
44. Vassilevski Y.V., Salamatova V.Y., Simakov S.S. On the elasticity of blood vessels in one-dimensional problems of hemodynamics // Computational mathematics and mathematical physics. 2015. Т. 55. № 9. P. 1567–1578.
45. Van de Vosse F.N., Stergiopoulos N. Pulse wave propagation in the arterial tree // Annual review of fluid mechanics. 2011. V. 43. P. 467–499.
46. Симаков С.С. Современные методы математического моделирования кровотока с помощью осредненных моделей // Компьютерные исследования и моделирование. 2018. Т. 10. № 5. С. 581–604.
47. Müller L.O., Toro E. A global multiscale mathematical model for the human circulation with emphasis on the venous system // International j. of numerical methods in biomedical engineering. 2014. V. 30. № 7. P. 681–725.
48. Sherwin S., Franke V., Peiró J., Parker K. One-dimensional modelling of a vascular network in space-time variables // J. of engineering mathematics. 2003. V. 47. P. 217–250.
49. Simakov S., Gamilov T. Computational study of the cerebral circulation accounting for the patient-specific anatomical features // Smart innovation, systems and technologies: International conference on 50 years of the development of grid-characteristic method, GCM50 2018. 2019. V. 133. P. 309–330.
50. Milisic V., Quarteroni A. Analysis of lumped parameter models for blood flow simulations and their relation with 1D models // ESAIM: Mathematical modelling and numerical analysis. 2004. V. 38. № 4. P. 613–632.
51. Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. М.: Юрайт, 2018.

## НОВАЯ СМЕШАННАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА И СИСТЕМА СТОКСА С СИНГУЛЯРНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ<sup>1)</sup>

© 2021 г. М. В. Урев<sup>1,2</sup><sup>1</sup> 630090 Новосибирск, пр-т Лаврентьева, 6, Институт вычислительной математики  
и математической геофизики СО РАН, Россия<sup>2</sup> 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2, Новосибирский гос. ун-т, Россия  
e-mail: mih.urev2010@yandex.ruПоступила в редакцию 11.11.2020 г.  
Переработанный вариант 11.11.2020 г.  
Принята к публикации 04.08.2021 г.

В работе с помощью расширенной схемы абстрактной смешанной вариационной задачи рассмотрена смешанная вариационная постановка двумерной задачи Стокса в ограниченной области с сингулярной правой частью, в частности, дельта-функцией. Сформулированы условия, при выполнении которых доказана теорема о разрешимости и устойчивости решения такой обобщенной задачи. Библ. 13.

**Ключевые слова:** двумерная задача Стокса, расширенная смешанная постановка, сингулярная правая часть, дробные пространства Соболева.

DOI: 10.31857/S0044466921120152

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  – ограниченная односвязная область с достаточно гладкой границей  $\partial\Omega$ . Рассматривается стационарная задача Стокса движения вязкой несжимаемой жидкости

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, & \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 & \text{в } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1-\varepsilon}(\Omega)$ ,  $0 < \varepsilon < 1/2$ ,  $\nu > 0$ ,  $H^s(\Omega)$  обозначает гильбертово пространство Соболева порядка  $s$  с нормой  $\|\cdot\|_{s,\Omega}$  и полунормой  $|\cdot|_{s,\Omega}$  (в очевидных случаях пишем  $\|\cdot\|_s$  и  $|\cdot|_s$ ) [1, с. 56]. Векторы и пространства, состоящие из вектор-функций, компоненты которых принадлежат  $H^s(\Omega)$ , будем обозначать полужирным шрифтом так, что

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2), \quad \mathbf{H}^s(\Omega) = (H^s(\Omega))^2.$$

Для пространства вектор-функций  $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbf{H}^s(\Omega)$  норма  $\mathbf{u}$  обозначается аналогично скалярному случаю и определяется равенством

$$\|\mathbf{u}\|_{s,\Omega}^2 = \|u_1\|_{s,\Omega}^2 + \|u_2\|_{s,\Omega}^2.$$

В случае, когда  $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^s(\Omega)$  и  $s \geq -1$  вопрос существования, единственности и регулярности обобщенного решения задачи (1) вариационным смешанным методом изучен достаточно полно [2, с. 56], [3, с. 80]. Если  $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1-\varepsilon}(\Omega)$ , то обобщенное решение задачи (1) будем искать с помощью расширенного смешанного вариационного метода [4]. Дадим описание этого метода в абстрактной форме.

Пусть  $X_i, M_i, i = 1, 2$  — четыре вещественных гильбертовых пространства, снабженных скалярными произведениями  $(\cdot, \cdot)_{X_i}, (\cdot, \cdot)_{M_i}$  с соответствующими нормами  $\|\cdot\|_{X_i}, \|\cdot\|_{M_i}$ . Сопряженные

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Новосибирской области (проект 20-41-540003); госконтракта ИВМиМГ СО РАН.

к  $X_i, M_i$  пространства обозначим соответственно как  $X'_i, M'_i$  с нормами  $\|\cdot\|_{X'_i}, \|\cdot\|_{M'_i}$ . Через  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначим отношение двойственности между пространством и его сопряженным пространством.

Введем три непрерывные билинейные формы:

$$a(\cdot, \cdot) : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad b_1(\cdot, \cdot) : X_2 \times M_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad b_2(\cdot, \cdot) : X_1 \times M_1 \rightarrow \mathbb{R},$$

для которых выполняются неравенства

$$\begin{aligned} a(u, v) &\leq C \|u\|_{X_1} \|v\|_{X_2} \quad \forall u \in X_1, \quad \forall v \in X_2, \\ b_1(v, p) &\leq C \|v\|_{X_2} \|p\|_{M_2} \quad \forall v \in X_2, \quad \forall p \in M_2, \\ b_2(u, q) &\leq C \|u\|_{X_1} \|q\|_{M_1} \quad \forall u \in X_1, \quad \forall q \in M_1. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующую вариационную задачу. Даны  $F \in X'_2$  и  $G \in M'_1$ . Требуется найти пару  $(u, p) \in X_1 \times M_2$  такую, что

$$\begin{aligned} a(u, v) + b_1(v, p) &= \langle F, v \rangle \quad \forall v \in X_2, \\ b_2(u, q) &= \langle G, q \rangle \quad \forall q \in M_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Определим два линейала  $V_{X_1}$  и  $V_{X_2}$ :

$$\begin{aligned} V_{X_1} &= \{u \in X_1; b_2(u, q) = 0 \quad \forall q \in M_1\}, \\ V_{X_2} &= \{v \in X_2; b_1(v, p) = 0 \quad \forall p \in M_2\}. \end{aligned}$$

Отметим, что ввиду непрерывности билинейных форм  $b_i(\cdot, \cdot)$  линейалы  $V_{X_i}$  являются замкнутыми подпространствами пространств  $X_i$  соответственно. Приведем теорему из работы [4] о разрешимости и устойчивости решения расширенной смешанной вариационной задачи (2).

**Теорема 1.** Пусть в задаче (2) для непрерывных билинейных форм  $a(\cdot, \cdot), b_i(\cdot, \cdot)$  выполняются следующие условия:

(i)

$$\sup_{v \in V_{X_2}, \|v\|_{X_2} \leq 1} |a(u, v)| \geq C_1 \|u\|_{X_1} \quad \forall u \in V_{X_1}, \tag{3}$$

$$\sup_{u \in V_{X_1}} |a(u, v)| > 0 \quad \forall v \in V_{X_2}, \quad v \neq 0, \tag{4}$$

где  $C_1$  – положительная постоянная;

(ii) билинейные формы  $b_i(\cdot, \cdot)$  удовлетворяют inf – sup условию, т.е. существуют константы  $\beta_i > 0$  такие, что

$$\inf_{p \in M_2} \sup_{v \in X_2} \frac{b_1(v, p)}{\|v\|_{X_2} \|p\|_{M_2}} \geq \beta_1, \tag{5}$$

$$\inf_{q \in M_1} \sup_{u \in X_1} \frac{b_2(u, q)}{\|u\|_{X_1} \|q\|_{M_1}} \geq \beta_2. \tag{6}$$

Тогда задача (2) имеет единственное решение  $(u, p) \in X_1 \times M_2$  с оценкой устойчивости

$$\|u\|_{X_1} + \|p\|_{M_2} \leq K (\|F\|_{X'_2} + \|G\|_{M'_1}),$$

где  $K$  – положительная постоянная.

## 2. РАСШИРЕННАЯ СМЕШАННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СТОКСА С СИНГУЛЯРНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Приведем предварительные сведения. Пусть тройка гильбертовых пространств  $V, H, V'$  является оснащением пространства  $H$  [5, с. 11], т.е.  $V$  плотно вложено в  $H$  и  $H$  плотно вложено в  $V'$ . Для  $f \in V'$  полагают

$$(x, f)_H := f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x, y_n)_H, \quad y_n \in H, \quad x \in V.$$

Эта формула позволяет расширить скалярное произведение в  $H$  на тот случай, когда один множитель принадлежит  $V$ , а второй  $V'$ . Говорят, что функционал  $f \in V'$  представлен через скалярное произведение в  $H$  (теорема Рисса). При сделанных предположениях относительно  $V, H, V'$  приведем следующее утверждение.

**Лемма 1.** Пусть тройка гильбертовых пространств  $V, H, V'$  является оснащением пространства  $H$ . Тогда для каждого элемента  $v \in V$  существует функционал  $f \in V'$  такой, что

$$\|v\|_V = \|f\|_{V'} \quad \text{и} \quad (v, f)_H = \|v\|_V^2.$$

**Доказательство.** Определим линейный функционал  $f$  на одномерном подпространстве  $F$ , состоящем из элементов вида  $\alpha v, \alpha \in \mathbb{R}$ , формулой  $f(\alpha v) = \alpha \|v\|_V^2$ . Норма  $f$  на подпространстве  $F$  равна  $\|v\|_V$ . По теореме Хана-Банаха функционал  $f$  можно продолжить на все  $V$  с сохранением нормы  $\|v\|_V$ . Представляя  $f \in V'$  через скалярное произведение в  $H$ , получаем  $f(v) = (v, f)_H = \|v\|_V^2$ .

Пусть

$$L_{2,0}(\Omega) := \left\{ f \in L_2(\Omega) : \int_{\Omega} f dx = 0 \right\}, \quad H_{\perp}^{\varepsilon}(\Omega) := H^{\varepsilon}(\Omega) \cap L_{2,0}(\Omega).$$

Положим  $M_1 = H_{\perp}^{\varepsilon}(\Omega), M_2 = M_1'$ . Нетрудно видеть, что  $M_1$  плотно и непрерывно вложено в  $L_{2,0}(\Omega)$ . Действительно, если  $f \in L_{2,0}(\Omega)$ , то усредненная функция

$$f_h(x) = \int_{\Omega} f(y) \omega_h(|x - y|) dy, \quad h > 0,$$

где  $\omega_h(|x - y|)$  – некоторое ядро усреднения, также имеет по теореме Фубини нулевое среднее и  $f_h(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2), f_h \equiv 0$ , вне  $\Omega^h = \bigcup_{x^0 \in \Omega} \{|x - x^0| < h\}$ . Далее обычная аппроксимация с помощью усреднения и срезания носителя (см., например, [6, с. 119], [1, с. 47, с. 71]) дает, что множество функций из  $C_0^{\infty}(\Omega)$  с нулевым средним плотно в  $L_{2,0}(\Omega)$  и в  $H_{\perp}^{\varepsilon}(\Omega)$ . Таким образом, тройка пространств  $M_1, L_{2,0}(\Omega), M_2$  является оснащением пространства  $L_{2,0}(\Omega)$ . Для  $g \in M_2$  норма определяется в виде

$$\|g\|_{M_2} = \sup_{0 \neq u \in M_1} \frac{\int_{\Omega} g u dx}{\|u\|_{\varepsilon}}.$$

Очевидно  $\|g\|_{M_2} \leq \|g\|_{- \varepsilon}$ . Приведем два следствия леммы 1.

**Следствие 1.** Для каждой функции  $u \in M_1$  существует функционал  $f \in M_2$  такой, что

$$\|u\|_{\varepsilon} = \|f\|_{M_2} \quad \text{и} \quad \int_{\Omega} f u dx = \|u\|_{\varepsilon}^2.$$

Реализация отношения двойственности между  $M_1$  и  $M_2$  через скалярное произведение в  $L_2(\Omega)$  позволяет сформулировать двойственное утверждение.

**Следствие 2.** Для каждого функционала  $f \in M_2$  существует функция  $u \in M_1$  такая, что

$$\|f\|_{M_2} = \|u\|_{\varepsilon} \quad \text{и} \quad \int_{\Omega} f u dx = \|f\|_{M_2}^2.$$

Далее будем использовать следующую теорему 2.4 из [7], которая доказана с помощью построения левого обратного оператора для оператора градиента  $\nabla$  и привлечения теории интерполяции.

**Теорема 2.** Пусть область  $\Omega$  является звездной относительно некоторого внутреннего шара, тогда оператор  $\nabla^s := \nabla : H_{\perp}^s(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^{s-1}(\Omega), s \in [0, 1]$ , является ограниченным и инъективным с замкнутой областью значений.

Теорема 2 устанавливает, что оператор  $\nabla^s \in \mathcal{L}(H_{\perp}^s(\Omega); \mathbf{H}^{s-1}(\Omega))$  взаимно-однозначно отображает  $H_{\perp}^s(\Omega)$  на замкнутую область своих значений  $\mathcal{R}(\nabla^s)$ , которая является гильбертовым пространством. По теореме Банаха об обратном операторе [8, с. 225] оператор, обратный к  $\nabla^s$ , ограничен, т.е.  $\nabla^s$  является изоморфизмом и имеет место обобщенное неравенство Пуанкаре

$$\|q\|_{s,\Omega} \leq C \|\nabla q\|_{s-1,\Omega} \quad \forall q \in H_{\perp}^s(\Omega), \quad s \in [0,1], \quad C > 0.$$

Отметим, что оператор  $-\nabla^s$  является сопряженным к оператору  $\operatorname{div}^s := \operatorname{div} \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_0^{1-s}(\Omega); M_2)$ . Тогда, так как  $\mathcal{R}(\nabla^s)$  есть замкнутое подпространство в  $\mathbf{H}^{s-1}(\Omega)$ , мы можем применить теорему Банаха об операторах с замкнутой областью значений [9, с. 284], из которой следует, что

$$\mathcal{R}(\nabla^s) = V_s^0,$$

где  $V_s = \ker(\operatorname{div}^s)$  – ядро оператора  $\operatorname{div}^s$ , а  $V_s^0 \subset \mathbf{H}^{s-1}(\Omega)$  обозначает полярное множество для  $V_s \subset \mathbf{H}_0^{1-s}(\Omega)$ :

$$V_s^0 = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^{s-1}(\Omega) : \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in V_s\}.$$

Из леммы Гальярдо [10, с. 93] следует, что всякую ограниченную область, удовлетворяющую условию конуса, можно представить в виде объединения конечного числа ограниченных областей, каждая из которых звездна относительно некоторого содержащегося в ней шара.

Далее везде  $\varepsilon \in (0, 1/2)$ . Сформулируем свойства операторов  $\nabla^\varepsilon$  и  $\operatorname{div}^\varepsilon$  в виде следующей леммы для области, удовлетворяющей условию конуса.

**Лемма 2.** Пусть ограниченная открытая область  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  удовлетворяет условию конуса. Тогда

- (i) оператор  $\nabla^\varepsilon$  есть изоморфизм из  $H_{\perp}^\varepsilon(\Omega)$  на  $V_\varepsilon^0$ ;
- (ii) оператор  $\operatorname{div}^\varepsilon$  есть изоморфизм из  $V_\varepsilon^\perp$  на  $M_2$ .

**Доказательство.** Обоснование требует только пункт (ii). Благодаря (i) и так как  $\operatorname{div}^\varepsilon$  есть сопряженный оператор для  $-\nabla^\varepsilon$ , мы имеем, что  $\operatorname{div}^\varepsilon$  является изоморфизмом из  $(V_\varepsilon^0)'$  на  $M_2 = (H_{\perp}^\varepsilon(\Omega))'$ . Теперь достаточно доказать, что  $V_\varepsilon^0$  может быть отождествлено с  $(V_\varepsilon^\perp)'$ , где  $V_\varepsilon^\perp$  есть ортогональное дополнение к  $V_\varepsilon$ . Пусть  $f$  – любой элемент из  $(V_\varepsilon^\perp)'$  и пусть  $\tilde{f}$  – продолжение  $f$  на  $\mathbf{H}_0^{1-\varepsilon}(\Omega)$  с помощью равенства

$$\langle \tilde{f}, \mathbf{u} \rangle = \langle f, \mathbf{u}^\perp \rangle \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^{1-\varepsilon}(\Omega),$$

где  $\mathbf{u}^\perp$  – ортогональная проекция  $\mathbf{u}$  на  $V_\varepsilon^\perp$ . Тогда  $\tilde{f} \in V_\varepsilon^0$  и линейное отображение  $f \rightarrow \tilde{f}$  изометрически отображает  $(V_\varepsilon^\perp)'$  на  $V_\varepsilon^0$ , что позволяет их отождествить и получить утверждение (ii)

$$(V_\varepsilon^0)' = ((V_\varepsilon^\perp)')' = V_\varepsilon^\perp.$$

**Следствие 3.** Для заданного функционала  $g \in M_2$  существует вектор-функция  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^{1-\varepsilon}(\Omega)$  такая, что

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= g \quad \text{в } \Omega, \\ \|\mathbf{v}\|_{1-\varepsilon} &\leq C \|g\|_{M_2} \leq C \|g\|_{-\varepsilon}, \end{aligned} \tag{7}$$

где константа  $C > 0$  зависит только от  $\Omega$ .

**Лемма 3.** Для заданной функции  $f \in M_1$  существует вектор-функция  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^{1+\varepsilon}(\Omega)$  такая, что

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= f \quad \text{в } \Omega, \\ \|\mathbf{u}\|_{1+\varepsilon} &\leq C \|f\|_\varepsilon, \end{aligned} \tag{8}$$

где константа  $C > 0$  зависит только от  $\Omega$ .

**Доказательство.** Доказательство леммы 3 аналогично доказательству леммы 5.4.2 в [11] для случая  $\varepsilon = 0$ . Если  $\varepsilon \in (0, 1/2)$ , то следует использовать результаты о регулярности решений эллиптических краевых задач в дробных пространствах Соболева (см., например, [11, гл. 3]).

Перейдем к рассмотрению задачи (1), когда  $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1-\varepsilon}(\Omega)$ . В таком случае теория смешанных вариационных задач, содержащаяся, например, в [3], [12], [13] для задачи (1) не применима. Сформулируем расширенную смешанную вариационную постановку (2) для задачи (1) и применим теорему 1 для установления существования и устойчивости решения полученной задачи.

Пусть  $X_1 = \mathbf{H}_0^{1-\varepsilon}(\Omega)$ ,  $X_2 = \mathbf{H}_0^{1+\varepsilon}(\Omega)$ . Требуется найти пару  $(\mathbf{u}, p) \in X_1 \times M_2$ :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b_1(\mathbf{v}, p) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{-1-\varepsilon, 1+\varepsilon} \quad \forall \mathbf{v} \in X_2, \tag{9}$$

$$b_2(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \forall q \in M_1,$$

где  $a(\cdot, \cdot), b_1(\cdot, \cdot), b_2(\cdot, \cdot)$  – билинейные формы, определяемые в виде

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v} \rangle_{-\varepsilon, \varepsilon} = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{u} \in X_1, \quad \forall \mathbf{v} \in X_2,$$

$$b_1(\mathbf{v}, p) = -\langle p, \operatorname{div} \mathbf{v} \rangle_{-\varepsilon, \varepsilon} = -\int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} dx \quad \forall \mathbf{v} \in X_2, \quad \forall p \in M_2,$$

$$b_2(\mathbf{u}, q) = \langle \operatorname{div} \mathbf{u}, q \rangle_{-\varepsilon, \varepsilon} = \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} dx \quad \forall \mathbf{u} \in X_1, \quad \forall q \in M_1.$$

Здесь и далее для краткости принято  $\nu = 1$ , а через  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-s, s}$  ( $s > 0$ ) обозначено отношение двойственности между  $H^{-s}(\Omega)$  и  $H_0^s(\Omega)$ , а также между аналогичными векторными и тензорными пространствами, которое реализовано через скалярное произведение в  $L_2(\Omega), \mathbf{L}_2(\Omega)$  или  $(L_2(\Omega))^4$ .

Приступим к доказательству непрерывности и выполнимости  $\inf - \sup$  условия для билинейных форм  $b_1(\cdot, \cdot)$  и  $b_2(\cdot, \cdot)$ .

**Лемма 4.** *Билинейные формы  $b_1(\cdot, \cdot)$  и  $b_2(\cdot, \cdot)$  непрерывны, т.е.*

$$b_1(\mathbf{v}, p) \leq C \|\mathbf{v}\|_{1+\varepsilon} \|p\|_{M_2} \quad \forall \mathbf{v} \in X_2, \quad \forall p \in M_2, \tag{10}$$

$$b_2(\mathbf{u}, q) \leq C \|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon} \|q\|_{M_1} \quad \forall \mathbf{u} \in X_1, \quad \forall q \in M_1. \tag{11}$$

**Доказательство.** Отметим, что если  $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in X_1$ , то

$$\operatorname{div} \mathbf{u} \in H^{-\varepsilon}(\Omega) \quad \text{и} \quad \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{-\varepsilon, \Omega} \leq C \|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon, \Omega}. \tag{12}$$

Действительно, так как отображение

$$\mathbf{u} \rightarrow \tilde{\mathbf{u}} = \text{продолжение } \mathbf{u} \text{ нулем вне } \Omega$$

является непрерывным отображением  $\mathbf{H}_0^{1-\varepsilon}(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^{-\varepsilon}(\mathbb{R}^2)$  [1, с. 78] и

$$\widehat{\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix \cdot y} \left( \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} \right) dx = iy_1 \widehat{\tilde{u}_1} + iy_2 \widehat{\tilde{u}_2},$$

то

$$\begin{aligned} \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{-\varepsilon, \Omega}^2 &\leq \|\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}\|_{-\varepsilon, \mathbb{R}^2}^2 \leq C_1 \|\widehat{\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}}\|_{-\varepsilon, \mathbb{R}^2}^2 = \\ &= C_1 \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\mathbf{y}|^2)^{-\varepsilon} |iy_1 \widehat{\tilde{u}_1} + iy_2 \widehat{\tilde{u}_2}|^2 d\mathbf{y} \leq 2C_1 \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\mathbf{y}|^2)^{1-\varepsilon} |\widehat{\tilde{\mathbf{u}}}|^2 d\mathbf{y} = \\ &= 2C_1 \|\widehat{\tilde{\mathbf{u}}}\|_{1-\varepsilon, \mathbb{R}^2}^2 \leq C_2 \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{1-\varepsilon, \mathbb{R}^2}^2 \leq C \|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon, \Omega}^2, \end{aligned}$$

где для  $v \in H^s(\mathbb{R}^2)$

$$\|v\|_{s,\mathbb{R}^2}^2 := \int_{\mathbb{R}^2} (1+|y|^2)^s |\hat{v}(y)|^2 dy,$$

$\hat{v}$  – преобразование Фурье функции  $v$  и нормы  $\|\cdot\|_{s,\mathbb{R}^2}$  и  $\|\cdot\|_{s,\mathbb{R}^2}$  эквивалентны [1, с. 45].

Используя (12) и неравенство Шварца, получаем

$$\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} dx \leq \|q\|_{\epsilon} \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{-\epsilon} \leq C \|q\|_{\epsilon} \|\mathbf{u}\|_{1-\epsilon} \quad \forall \mathbf{u} \in X_1, \quad \forall q \in M_1,$$

т.е. требуемое неравенство (11). Неравенство (10) устанавливается аналогично.

**Лемма 5.** Для билинейных форм  $b_1(\cdot, \cdot)$  и  $b_2(\cdot, \cdot)$  выполняются inf – sup условия (5) и (6) из теоремы 1, т.е. существуют константы  $\beta_1, \beta_2 > 0$ :

$$\inf_{p \in M_2} \sup_{\mathbf{v} \in X_2} \frac{b_1(\mathbf{v}, p)}{\|\mathbf{v}\|_{1+\epsilon} \|p\|_{M_2}} \geq \beta_1, \tag{13}$$

$$\inf_{q \in M_1} \sup_{\mathbf{u} \in X_1} \frac{b_2(\mathbf{u}, q)}{\|\mathbf{u}\|_{1-\epsilon} \|q\|_{\epsilon}} \geq \beta_2. \tag{14}$$

**Доказательство.** Докажем неравенство (14). Пусть  $q$  – произвольная функция из  $M_1$ . Тогда из следствия 1 леммы 1 следует, что существует функционал  $f \in M_2$  такой, что

$$\|f\|_{M_2} = \|q\|_{\epsilon} \quad \text{и} \quad \int_{\Omega} f q dx = \|q\|_{\epsilon}^2.$$

Для такой  $f$  из следствия 3 и неравенства (7) получим, что существует вектор-функция  $\mathbf{u} \in X_1$  такая, что

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = f \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \|f\|_{M_2} \geq \frac{1}{C} \|\mathbf{u}\|_{1-\epsilon}.$$

Тогда имеем

$$b_2(\mathbf{u}, q) = \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} dx = \int_{\Omega} q f dx = \|q\|_{\epsilon} \|f\|_{M_2} \geq \frac{1}{C} \|q\|_{\epsilon} \|\mathbf{u}\|_{1-\epsilon}.$$

Отсюда следует неравенство (14) с  $\beta_2 = 1/C$ . Неравенство (13) с помощью леммы 3 и неравенства (8) устанавливается аналогично.

Пусть  $\mathbf{J}(\Omega)$  – множество бесконечно дифференцируемых финитных в  $\Omega$  соленоидальных векторов. За  $V_{X_1}$  примем пополнение  $\mathbf{J}(\Omega)$  по норме пространства  $X_1 = \mathbf{H}_0^{1-\epsilon}(\Omega)$ , а за  $V_{X_2}$  – пополнение  $\mathbf{J}(\Omega)$  по норме пространства  $X_2 = \mathbf{H}_0^{1+\epsilon}(\Omega)$ ,  $\epsilon \in (0, 1/2)$ . Используя лемму 2, можно показать, модифицируя доказательство теоремы 1.6 из [2], что  $V_{X_1} = \ker \operatorname{div}^{\epsilon}$ ,  $V_{X_2} = \ker \operatorname{div}^{-\epsilon}$ .

Перейдем к рассмотрению билинейной формы  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  на  $V_{X_1} \times V_{X_2}$ .

**Лемма 6.** Билинейная форма  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  непрерывна на  $X_1 \times X_2$  и для нее выполняются условия (3) и (4) теоремы 1 на  $V_{X_1} \times V_{X_2}$ , т.е. существуют константы  $C_1, C_2 > 0$  такие, что

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq C_1 \|\mathbf{u}\|_{1-\epsilon} \|\mathbf{v}\|_{1+\epsilon} \quad \forall \mathbf{u} \in X_1, \quad \forall \mathbf{v} \in X_2, \tag{15}$$

$$\sup_{\mathbf{v} \in V_{X_2}, \|\mathbf{v}\|_{1+\epsilon} \leq 1} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq C_2 \|\mathbf{u}\|_{1-\epsilon} \quad \forall \mathbf{u} \in V_{X_1}, \tag{16}$$

$$\sup_{\mathbf{u} \in V_{X_1}} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) > 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_{X_2}, \quad \mathbf{v} \neq 0. \tag{17}$$

**Доказательство.** Аналогично выводу неравенства (12), можно получить, что

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{u}\|_{-\epsilon} &\leq C \|\mathbf{u}\|_{1-\epsilon} \quad \forall \mathbf{u} \in X_1, \\ \|\nabla \mathbf{v}\|_{\epsilon} &\leq C \|\mathbf{v}\|_{1+\epsilon} \quad \forall \mathbf{v} \in X_2. \end{aligned} \tag{18}$$

Теперь применим неравенство Шварца и неравенства (18) для получения оценки непрерывности (15) формы  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  на  $X_1 \times X_2$ :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} dx \leq \|\nabla \mathbf{u}\|_{-\varepsilon} \|\nabla \mathbf{v}\|_{\varepsilon} \leq C \|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon} \|\mathbf{v}\|_{1+\varepsilon} \quad \forall \mathbf{u} \in X_1, \quad \forall \mathbf{v} \in X_2.$$

Нетрудно видеть, что тройка пространств  $X_1, L_2(\Omega), X_1$  является оснащением пространства  $L_2(\Omega)$ . Пусть  $\mathbf{u}$  — любая вектор-функция из  $V_{X_1}$ . Тогда из леммы 1 получим, что существует функционал  $\mathbf{g} \in X_1$  такой, что  $\|\mathbf{g}\|_{-1+\varepsilon} = \|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon}$  и

$$\langle \mathbf{g}, \mathbf{u} \rangle_{-1+\varepsilon, 1-\varepsilon} = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dx = \|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon}^2. \tag{19}$$

Для доказательства неравенства (16) рассмотрим решение  $(\mathbf{v}, p)$  задачи Стокса (1) с правой частью  $\mathbf{g}$ . В нашем двумерном случае нахождение скорости  $\mathbf{v}$  можно путем введения функции тока  $\phi$  так, что  $v_1 = \partial\phi/\partial x_2, v_2 = -\partial\phi/\partial x_1$  свести к решению краевой задачи для бигармонического уравнения относительно  $\phi$ :

$$\begin{aligned} \Delta^2 \phi &= \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \quad \text{в } \Omega, \\ \phi|_{\partial\Omega} &= 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{20}$$

Известные результаты о регулярности решения эллиптических краевых задач (см., например, [11, теорема 3.8.1]) дают для решения задачи (20) оценку

$$\|\phi\|_{2+\varepsilon} \leq C \|\psi\|_{-2+\varepsilon}, \quad \psi = \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2},$$

из которой следует, что

$$\|\mathbf{v}\|_{1+\varepsilon} \leq C \|\mathbf{g}\|_{-1+\varepsilon}. \tag{21}$$

Тогда, так как  $\mathbf{v} \in V_{X_2}$ , то из первого уравнения системы (1) имеем

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{g}, \mathbf{w} \rangle_{-1+\varepsilon, 1-\varepsilon} \quad \forall \mathbf{w} \in V_{X_1}. \tag{22}$$

Возьмем в качестве пробной функции в (22) вместо  $\mathbf{w}$  вектор  $\mathbf{u}$ . Тогда применяя (19) и (21), получаем

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \langle \mathbf{g}, \mathbf{u} \rangle_{-1+\varepsilon, 1-\varepsilon} = \int_{\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} dx \|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon}^2 = \\ &= \|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon} \|\mathbf{g}\|_{-1+\varepsilon} \geq \frac{1}{C} \|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon} \|\mathbf{v}\|_{1+\varepsilon} \quad \forall \mathbf{u} \in V_{X_1}. \end{aligned}$$

Откуда следует справедливость неравенства (16) с  $C_2 = 1/C$ . Ввиду включения  $V_{X_2} \subseteq V_{X_1}$  выполнение условия (17) является очевидным. Для каждого  $\mathbf{v} \in V_{X_2}$  полагаем  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ , тогда получаем

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx > 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_{X_2}, \quad \mathbf{v} \neq 0.$$

Откуда следует выполнение условия (17).

Таким образом, для смешанной вариационной формулировки (9) задачи Стокса (1) выполнены все условия теоремы 1 и можно сформулировать окончательный результат в виде следующей теоремы.

**Теорема 3.** *Задача Стокса (1), когда  $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1-\varepsilon}(\Omega)$  ( $0 < \varepsilon < 1/2$ ), имеет единственное обобщенное решение  $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}_0^{1-\varepsilon}(\Omega) \times (H_1^{\varepsilon}(\Omega))'$  как решение смешанной вариационной задачи (9), и для него справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon, \Omega} + \|p\|_{-\varepsilon, \Omega} \leq C \|\mathbf{f}\|_{-1-\varepsilon, \Omega},$$

где  $C > 0$  — положительная постоянная, не зависящая от  $\mathbf{f}$ .

## 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По теореме вложения Соболева, когда  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , пространство  $\mathbf{H}^{1+\varepsilon}(\Omega)$  непрерывно вкладывается в  $\mathbf{C}(\bar{\Omega})$ . Отсюда следует, что дельта-функция Дирака  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ , действующая на функции  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^{1+\varepsilon}(\Omega)$  как  $(\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \mathbf{v}(\mathbf{x})) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0)$  является линейным непрерывным функционалом на пространстве  $\mathbf{H}_0^{1+\varepsilon}(\Omega)$ , т.е. принадлежит пространству  $\mathbf{H}^{-1-\varepsilon}(\Omega)$ . Таким образом, в случае, когда в задаче Стокса (1) на месте функции  $\mathbf{f}$  в правой части стоит сингулярная обобщенная функция  $\Psi(\mathbf{x}_0)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  применима теорема 3.

Приведенный в работе анализ расширенной смешанной постановки (9) задачи Стокса (1) с сингулярной правой частью может служить основой для построения и обоснования численных схем метода конечных элементов в дробных пространствах Соболева.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
2. Темам Р. Уравнения Навье–Стокса: Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.
3. Girault V., Raviart P.-A. Finite element methods for Navier-Stokes equations. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
4. Nicolaides R.A. Existence, uniqueness and approximation for generalized saddle point problems // SIAM J. Numer. Anal. 1982. V. 19. № 2. P. 349–357.
5. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуи Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. М.: Наука, 1989.
6. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
7. Guermond J.-L. The LBB condition in fractional Sobolev spaces and applications // IMA J. Numer. Anal. 2009. V. 29. P. 790–805.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
9. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
10. Adams R.A., Fournier J.F. Sobolev spaces. 2nd ed. Acad. Press – Elsevier, 2003.
11. Babuška I., Aziz A.K. The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations. A.K. Aziz, ed. Academic Press, New York and London, 1972.
12. Brenner S.C., Scott L.R. The mathematical theory of finite element methods. Berlin: Springer-Verlag, 2002.
13. Brezzi F., Fortin M. Mixed and hybrid finite element methods. Berlin: Springer-Verlag, 1991.