СОДЕРЖАНИЕ

Том 57, номер 3, 2021

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 3, с. 295–305

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.911.7

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ИМПУЛЬСНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

© 2021 г. В. С. Климов

Устанавливаются оценки (внутренние и вплоть до границы) решений неравенства $\mathscr{L}(u) \geqslant 0$, где $\mathscr{L}$ – линейный дифференциальный оператор второго порядка с импульсными особенностями. Полученные результаты применимы, в частности, к краевой задаче Неймана. Изучается связь множества решений рассматриваемого неравенства с классом вогнутых функций одного переменного.

DOI: 10.31857/S0374064121030018

Введение. В настоящей работе изучаются решения неравенства $\mathscr{L}(u) \geqslant 0$, где $\mathscr{L}$ – линейный дифференциальный оператор второго порядка, коэффициенты которого имеют импульсные особенности [1, гл. 3].

Первый её пункт содержит определения различных функциональных классов. Его цель состоит в фиксации терминологии и обозначений. Во втором пункте устанавливаются обратные неравенства, позволяющие оценивать нормы первых производных функций из множества $\mathscr{K}(\mathscr{L}) = \{\mathscr{L}(u) \geqslant 0\}$ через более слабые интегральные нормы. Они носят характер внутренних оценок. Третий пункт работы посвящён оценкам вплоть до границы решений дифференциальных неравенств. Основные результаты относятся к случаю смешанного краевого условия, частным случаем которого является условие Неймана.

К данной публикации близки статьи [2–4]. В работе [2] рассматривается дифференциальный оператор $\mathscr{L}(u) = u^{(n)}$, результаты работ [3, 4] применимы к дифференциальным операторам с суммируемыми коэффициентами.

Ниже все банаховы пространства рассматриваются над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Если Z – банахово пространство и $v \in Z$, то через $\|v; Z\|$ обозначается норма элемента v в пространстве Z, а через Z^* – сопряжённое к Z пространство. Запись $Z_1 \to Z_2$ означает непрерывность оператора вложения банахова пространства Z_1 в банахово пространство Z_2; если же оператор вложения вполне непрерывен, то для этого используется запись $Z_1 \Rightarrow Z_2$. Замкнутое подмножество K вещественного нормированного пространства E называют *клином*, если для любых $x, y \in K$ и неотрицательного числа α вытекает, что $x + y \in K$ и $\alpha x \in K$. Если K – клин, то множество $K \bigcap (-K)$ называется его *лезвием*. Клин K называют *конусом*, если его лезвие состоит лишь из одной точки. Далее будет применяться следующее утверждение [5, с. 126].

Предложение. *Пусть E, E_1, E_0 – банаховы пространства, причём $E_1 \Rightarrow E$ и $E \to E_0$. Тогда существует такая функция $\kappa\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, что для каждого элемента $f \in E_1$ и любого положительного числа η справедливо неравенство Эрлинга*

$$\|f; E\| \leqslant \eta \|f; E_1\| + \kappa(\eta)\|f; E_0\|.$$

Библиография, приведённая в конце статьи, весьма краткая. Автор не ставил своей целью дать обширный обзор литературы, посвящённой дифференциальным неравенствам.

1. Функциональные пространства. Если множество $S \subset \mathbb{R}$ измеримо по Лебегу, то $\operatorname{mes} S$ – его мера Лебега; совпадающие п.в. (почти всюду) функции f и g называются *эквивалентными* относительно меры Лебега; это отношением обозначаем как $f \sim g$. Через $\operatorname{ess\,sup} f$ и $\operatorname{ess\,inf} f$ обозначаются существенные верхняя и нижняя грани вещественнозначной функции f соответственно. Если функция f определена на множестве S, то число $\operatorname{osc}\{f; S\} = \operatorname{ess\,sup} f - \operatorname{ess\,inf} f$ называют *существенным колебанием* функции f на этом множестве.

Каждому измеримому подмножеству S действительной прямой можно поставить в соответствие нормированное пространство $L^m(S)$ $(1 \leqslant m \leqslant \infty)$ тех измеримых на S функций $u(x)$ со значениями в $\mathbb{R}$, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|u; L^m(S)\| = \Big(\int\limits_S |u(x)|^m\,dx\Big)^{1/m} \quad (1 \leqslant m < \infty), \quad \|u; L^\infty(S)\| = \operatorname{ess\,sup}|u(x)|.$$

Как обычно, эквивалентные относительно меры Лебега функции отождествляются.

Вариацией функции $u(x)$ на отрезке $J = [a, b]$ называется число

$$V_a^b(u) = \sup \sum_{i=1}^n |u(x_i) - u(x_{i-1})|,$$

где точная верхняя граница берётся по всем возможным разбиениям отрезка J точками $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Совокупность функций с ограниченной вариацией на отрезке J образует линейное пространство, обозначаемое символом $\mathrm{BV}\,(J)$. Иногда число $V_a^b f$ называют *поточечной вариацией* функции f на отрезке $[a, b]$.

Если $v \in L^1(J)$ и

$$u(x) = u(a) + \int\limits_a^x v(s)\,ds,$$

то функцию $u(x)$ называют *абсолютно непрерывной* на отрезке J. В этом случае почти всюду на J функция u дифференцируема и для её производной справедливо равенство $u'(x) = v(x)$ п.в. Функция v является также производной (в смысле Соболева) функции u [6, 7]. Абсолютно непрерывная на отрезке J функция u принадлежит классу $\mathrm{BV}\,(J)$. Имеет место равенство $V_a^b(u) = \|v'; L(J)\|$. Совокупность абсолютно непрерывных на отрезке J функций обозначается символом $AC(J)$. Через $W_m^1(J)$ обозначается часть пространства $AC(J)$, состоящая из функций u, производные которых принадлежат пространству $L^m(J)$ $(1 \leqslant m \leqslant \infty)$. Для функции u из $W_m^1(J)$ имеет смысл и конечна норма

$$\|u; W_m^1(J)\| = \|u; L^m(J)\| + \|u'; L^m(J)\|,$$

относительно которой $W_m^1(J)$ – банахово пространство. Наряду с $W_m^1(J)$ будут использоваться банахово пространство $C(J)$ непрерывных на отрезке функций, а также пространство $C^1(J)$ непрерывно дифференцируемых на J функций, которое можно рассматривать как собственное подпространство пространства $W_\infty^1(J)$. Через $C_0^1(J)$ обозначается часть пространства $C^1(J)$, состоящая из финитных, т.е. обращающихся в нуль вблизи точек a и b, функций.

Множество точек разрыва функции f класса $\mathrm{BV}\,(J)$ конечно или счётно. Существуют односторонние пределы

$$f_r(x) = \lim_{\xi \to x+0} f(\xi) \quad (x \in [a, b)), \quad f_l(x) = \lim_{\xi \to x-0} f(\xi) \quad (x \in (a, b]).$$

Непрерывность функции f в точке a эквивалентна равенству $f(a) = f_r(a)$; аналогично, равенство $f(b) = f_l(b)$ эквивалентно непрерывности функции f в точке b. Если функции f, g принадлежат $\mathrm{BV}\,(J)$ и $f \sim g$, то $f_r(x) = g_r(x)$ и $f_l(x) = g_l(x)$ в естественной области определения.

Однако поточечные вариации $V_a^b f$ и $V_a^b g$ могут быть различными. *Существенной вариацией* функции f на отрезке $J = [a, b]$ называется число

$$\bar V(f, J) = \min\{V_a^b g : g \sim f\}.$$

Минимум в данном равенстве достигается. Действительно (см., например, [8]), если функция $g\colon J \to \mathbb{R}$ непрерывна справа в точке a, непрерывна слева в точке b и

$$\min\{f_r(x), f_l(x)\} \leqslant g(x) \leqslant \max\{f_r(x), f_l(x)\} \quad (a < x < b),$$

то $f \sim g$ и $\bar V(f, J) = V_a^b g$.

Известны и другие эквивалентные определения существенной вариации. Например, верно равенство

$$\bar{V}(f,J)=\sup\left\{\int\limits_a^b f(x)h'(x)\,dx : h\in C_0^1(J),\quad |h(x)|\leqslant 1\right\}.$$

Для непрерывной на отрезке $J=[a,b]$ функции f поточечная и существенная вариации совпадают: $\bar{V}(f,J)=V_a^b f$. Отметим также неравенства

$$\operatorname{osc}\{f,J\}\leqslant\bar{V}(f,J),\quad \bar{V}(fg,J)\leqslant\bar{V}(f,J)\|g;L^\infty(J)\|+\bar{V}(g,J)\|f;L^\infty(J)\|.$$

Обозначим через $\operatorname{bv}(J)$ линейное пространство суммируемых на отрезке $J=[a,b]$ функций f, имеющих конечную существенную вариацию $\bar{V}(f,J)$. Для функции f из $\operatorname{bv}(J)$ имеет смысл и конечна норма $\|f;\operatorname{bv}(J)\|=\|f;L(J)\|+\bar{V}(f,J)$; эквивалентные функции отождествляются. Относительно этой нормы $\operatorname{bv}(J)$ является банаховым пространством.

Определим множество $\mathscr{E}(J)$ как совокупность абсолютно непрерывных функций $u\colon J\to\to\mathbb{R}$, производная u' которых имеет ограниченную существенную вариацию: $\mathscr{E}(J)=\{u\in\in AC(J) : u'\in\operatorname{bv}(J)\}$. Класс $\mathscr{E}(J)$ представляет собой линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Введём в $\mathscr{E}(J)$ норму равенством $\|u;\mathscr{E}(J)\|=\|u;C(J)\|+\bar{V}(u',J)$. Аналогичные функциональные классы изучались многими математиками (см., например, [1, 7–9]), установившими, в частности, полноту пространства $\mathscr{E}(J)$ и разнообразные неравенства типа теорем вложения. Пространство $\mathscr{E}(J)$ непрерывно вложено в пространство $W_m^1(J)$ $(1\leqslant\leqslant m\leqslant\infty)$; при $m\in[1,\infty)$ это вложение компактно. Отметим, что некоторые авторы вместо термина "существенная вариация" используют его сокращённый вариант – "вариация" [1, гл. 3].

Наряду с введённой выше нормой $\|u;\mathscr{E}(J)\|$ в пространстве $\mathscr{E}(J)$ будут использоваться и другие нормы:

$$\|u\|_0=\|u;L(J)\|+\bar{V}(pu';J),\quad \|u\|_1=\|u;C(J)\|+\bar{V}(pu';J).$$

Здесь и далее p – фиксированная функция из $\operatorname{BV}(J)$ такая, что $p_0=\inf\{p(x):x\in J\}>0$, $\bar{p}=\sup\{p(x):x\in J\}<\infty$. Нормы $\|u;\mathscr{E}(J)\|$ и $\|u\|_1$ эквивалентны [1, с. 137]. Доказательство эквивалентности норм $\|u\|_0$ и $\|u\|_1$ опирается на неравенство Эрлинга

$$\|u;C(J)\|\leqslant t(\|u;C(J)\|+\bar{V}(pu';J))+\kappa(t)\|u;L(J)\|,$$

где t – любое положительное число. При $t=1/2$ получаем последовательно оценки

$$\|u;C(J)\|\leqslant 2\kappa(1/2)\|u;L(J)\|+\bar{V}(pu',J),\quad \|u\|_1\leqslant 2\kappa(1/2)\|u;L(J)\|+2\bar{V}(pu',J),$$

из которых очевидно следует эквивалентность норм $\|u\|_0$ и $\|u\|_1$.

В ряде мест далее применяется интеграл Римана–Стилтьеса, обозначаемый символом

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\,dg(x).$$

Сопряжённое к $C(J)$ пространство $C^*(J)$ состоит из линейных функционалов Λ, допускающих представление

$$\Lambda(\varphi)=\int\limits_a^b \varphi(x)\,dg(x),$$

в которых $g\in\operatorname{BV}(J)$; верно равенство $\|\Lambda;C^*(J)\|=V_a^b g$. Возрастание функции g эквивалентно положительности функционала Λ; при этом $\|\Lambda;C^*(J)\|=g(b)-g(a)$.

Если $u \in AC(J)$, $v \in \mathrm{BV}\,(J)$, то справедливо правило интегрирования по частям

$$\int_a^b v(x)u'(x)\,dx = \int_a^b v(x)\,du(x) = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u(x)\,dv(x).$$

Это равенство показывает, что в некоторых случаях интеграл Римана–Стилтьеса сводится к интегралу Лебега.

2. Внутренние оценки. Ниже p, Q, F – функции класса $\mathrm{BV}\,(J)$ (как и выше $J=[a,b]$, $-\infty<a<b$, $p_0=\inf\{p(x) : x\in J\}>0$, $\bar p=\sup\{p(x) : x\in J\}<\infty$); функции p, Q, F непрерывны в точках a, b. Определим на пространстве $H(J)=W_2^1(J)$ функционалы

$$\Lambda(u)=\int_a^b u(x)dF(x), \quad \Psi(u)=\frac{1}{2}\biggl(\int_a^b p(x)(u'(x))^2\,dx+\int_a^b u^2(x)\,dQ(x)\biggr),$$

$$\Phi(u)=\Psi(u)-\Lambda(u).$$

Интегралы в этих равенствах понимаются по Лебегу (или по Риману–Стилтьесу). Функционалы Ψ,Φ дифференцируемы по Фреше на $H(J)$, соответствующие производные определяются соотношениями

$$\Psi'(u)h=\int_a^b p(x)u'(x)h'(x)\,dx+\int_a^b u(x)h(x)\,dQ(x),$$

$$\Phi'(u)h=\Psi'(u)h-\Lambda(h),$$

в которых h – произвольный элемент из $H(J)$.

Обозначим через $H_0(J)$ совокупность функций из $H(J)$, обращающихся в нуль на границе рассматриваемого отрезка, т.е.

$$H_0(J)=\{u\in H : u(a)=u(b)=0\}.$$

Экстремалью функционала Φ назовём функцию u из $H(J)$, удовлетворяющую равенству

$$\Phi'(u)h=0 \ \text{ для всех } \ h\in H_0(J). \tag{1}$$

Равенство (1) называют уравнением Эйлера (в интегральной форме). Если p, Q, F – функции класса $C^1(J)$ и $q=Q'$, $f=F'$, то уравнение Эйлера сводится к линейному дифференциальному уравнению

$$\mathscr{L}(u):=-(pu')'+qu=f; \tag{2}$$

в этом случае экстремали функционала Φ – дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие уравнению (2).

В принятых выше предположениях относительно функций p, Q, F будет использоваться символическая запись уравнения Эйлера (1)

$$\mathscr{L}(u):=-(pu')'+Q'u=F',$$

лишь внешне напоминающая уравнение (2). В этом случае экстремали функционала Φ могут не принадлежать классу $C^1(J)$. Прямые методы вариационного исчисления позволяют установить существование экстремалей, принадлежащих пространству $H(J)$. Вместе с тем удаётся установить определённую повышенную гладкость экстремалей.

Представим функцию Q в жордановой форме $Q(x)=Q^+(x)-Q^-(x)$, где $Q^+(x)=V_a^xQ$. Введём в рассмотрение возрастающую функцию $Q_1(x)=Q^+(x)+Q^-(x)=2V_a^x-Q(x)$. Установим оценки решений u уравнения Эйлера (1).

Лемма 1. *Для любой экстремали* u *функционала* Φ *имеет место оценка*

$$\bar{V}(pu', J) \leqslant \int\limits_a^b |u(x)|\, dQ_1(x) + V_a^b F. \tag{3}$$

Доказательство. Введём в рассмотрение множество $\mathscr{M} = \{h \in C_0^1(J) : |h(x)| \leqslant 1\}$. Для любой функции h из $\mathscr{M}$ справедливо равенство (1), влекущее за собой соотношение

$$\int\limits_a^b p(x)u'(x)h'(x)\, dx = \int\limits_a^b u(x)h(x)\, dQ(x) - \int\limits_a^b h(x)\, dF(x).$$

Очевидно, что

$$\left| \int\limits_a^b u(x)h(x)\, dQ(x) - \int\limits_a^b h(x)\, dF(x) \right| \leqslant \int\limits_a^b |u(x)|\, dQ_1(x) + V_a^b F.$$

Правая часть этого неравенства не зависит от выбора функции h из $\mathscr{M}$, из чего следует требуемая оценка

$$\bar{V}(pu', J) = \sup_{h\in\mathscr{M}} \int\limits_a^b p(x)u'(x)h'(x)\, dx \leqslant \int\limits_a^b |u(x)|\, dQ_1(x) + V_a^b F.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любой экстремали* u *функционала* Φ *имеет место оценка*

$$\|u; \mathscr{E}(J)\| \leqslant k\biggl(\int\limits_a^b |u(x)|\, dQ_1(x) + V_a^b F + \|u; L(J)\|\biggr), \tag{4}$$

в которой k – постоянная, при которой выполняется неравенство $\|u; \mathscr{E}(J)\| \leqslant k\|u\|_0$ для всех $u \in \mathscr{E}(J)$.

Лемма 2 очевидным образом следует из неравенства (3).

Оценки типа (3), (4) именуют *неравенствами коэрцитивности*. Заменяя в (4) отрезок $J = [a, b]$ отрезком $I = [x_1, x_2] \subset J$, приходим к неравенству

$$\bar{V}(pu', I) \leqslant \int\limits_{x_1}^{x_2} |u(x)|\, dQ_1(x) + V_{x_1}^{x_2} F. \tag{5}$$

Если, например, отрезки I стягиваются к точке x_0, а функции Q и F непрерывны в этой точке, то правая часть неравенства (5) стремится к нулю, поэтому верно соотношение

$$\lim_{I\to x_0} \bar{V}(pu'; I) = 0,$$

из которого вытекает непрерывность функции $p(x)u'(x)$ в точке x_0. Это замечание применимо, в частности, к случаям $x_0 = a$ и $x_0 = b$. Таким образом, функция $u'(x)$ непрерывна в точках a и b.

Для функций, удовлетворяющих дополнительным граничным условиям, можно установить оценки, аналогичные (3), (4), но не содержащие функции u в правой части. Такого рода оценки доказаны, например, для однородной задачи Коши или для задачи Дирихле [1, гл. 3]. Для достаточно обширного класса функций F ниже найдены внутренние оценки функции u.

Обозначим через $\mathscr{K}(\mathscr{L})$ клин экстремалей функционала Φ с возрастающей функцией F. Лезвие клина $\mathscr{K}(\mathscr{L})$ совпадает с двумерным пространством $\operatorname{Ker}(\mathscr{L})$ решений однородного уравнения $\mathscr{L}(w)=0$. Для элементов клина $\mathscr{K}(\mathscr{L})$ верны неравенства, имеющие характер внутренних оценок экстремалей функционала Φ.

Введём возрастающие функции

$$p_1(x)=2V_a^x p-p(x), \quad Q_1(x)=2V_a^x Q-Q(x), \quad \mu(x)=x+p_1(x)+Q_1(x).$$

Для непрерывной на отрезке $[c,d]\subset J$ функции g справедливы неравенства

$$\biggl|\int\limits_c^d g(x)\,dp(x)\biggr| \leqslant \int\limits_c^d |g(x)|\,dp_1(x), \quad \biggl|\int\limits_c^d g(x)\,dQ(x)\biggr| \leqslant \int\limits_c^d |g(x)|\,dQ_i(x).$$

Далее используется обозначение

$$\|u;L(J,\mu)\|=\int\limits_a^b |u(x)|\,d\mu(x).$$

Теорема 1. *Для любого отрезка* $J_\delta=[a+\delta,b-\delta]$ $(0<2\delta<b-a)$ *существует такая константа* $c_0(\delta)$, *что для всех функций* u *из* $\mathscr{K}(\mathscr{L})$ *имеет место оценка*

$$\|u;\mathscr{E}(J_\delta)\|\leqslant c_0(\delta)\|u;L(J,\mu)\|. \tag{6}$$

Доказательство. Зафиксируем функцию u из $\mathscr{K}(\mathscr{L})$ и построим связанную с u срезающую функцию h класса $H_0(J)$. Положим для краткости $a_1=a+\delta$, $b_1=b-\delta$.

Разобьём каждый из отрезков $[a,a_1]$ и $[b_1,b]$ на три равные части, которые обозначим через I_1, I_2, I_3 и I_4, I_5, I_6 соответственно (длина каждого из них равна $\delta/3$). Подберём числа

$$x_1\in I_1, \quad x_2\in I_3, \quad x_3\in I_4, \quad x_4\in I_6 \tag{7}$$

таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$|u(x_1)|\leqslant\frac{3}{\delta}\int\limits_{I_1}|u(x)|\,dx, \quad |u(x_2)|\leqslant\frac{3}{\delta}\int\limits_{I_3}|u(x)|\,dx,$$

$$|u(x_3)|\leqslant\frac{3}{\delta}\int\limits_{I_4}|u(x)|\,dx, \quad |u(x_4)|\leqslant\frac{3}{\delta}\int\limits_{I_6}|u(x)|\,dx. \tag{8}$$

Из включений (7) вытекают неравенства $3(x_2-x_1)\geqslant\delta$, $3(x_4-x_3)\geqslant\delta$.

Обозначим через $h(x)$ функцию, определённую на отрезке $J=[a,b]$ и имеющую графиком ломаную линию, последовательно соединяющую точки $(a,0)$, $(x_1,0)$, $(x_2,1)$, $(x_3,1)$, $(x_4,0)$, $(b,0)$. Таким образом, функция $h(x)$ равна единице на отрезке $[x_2,x_3]$, нулю – на отрезках $[a,x_1]$ и $[x_4,b]$, линейна на каждом из отрезков $[x_1,x_2]$ и $[x_3,x_4]$. Как нетрудно видеть, функция h принадлежит пространству $H_0(J)$.

Поскольку $\Phi'(u)h=0$, то справедливо соотношение

$$\int\limits_a^b h(x)\,dF(x)=\int\limits_a^b u(x)h(x)\,dQ(x)+\int\limits_a^b p(x)u'(x)h'(x)\,dx. \tag{9}$$

Оценим интеграл в левой части этого соотношения снизу, а интегралы в правой его части сверху. Так как функция h неотрицательна на отрезке $[a,b]$ и $h(x)=1$ при $x\in[a_1,b_1]$, то

$$\int\limits_a^b h(x)\,dF(x)\geqslant\int\limits_{a_1}^{b_1}1\,dF(x)=F(b_1)-F(a_1). \tag{10}$$

Из определения функции Q_1 вытекает оценка первого интеграла в правой части (9):

$$\left|\int\limits_a^b u(x)h(x)\,dQ(x)\right|\leqslant\int\limits_a^b|u(x)|\,dQ_1(x). \tag{11}$$

Второй интеграл в правой части соотношения (9) равен сумме интегралов:

$$s_1=\int\limits_{x_1}^{x_2}p(x)u'(x)h'(x)\,dx\quad\text{и}\quad s_2=\int\limits_{x_3}^{x_4}p(x)u'(x)h'(x)\,dx.$$

На интервале (x_1,x_2) производная $h'(x)$ постоянна и равна $(x_2-x_1)^{-1}$, поэтому

$$s_1=\frac{1}{x_2-x_1}\int\limits_{x_1}^{x_2}p(x)u'(x)\,dx=\frac{1}{x_2-x_1}\left(p(x)u(x)\Big|_{x_1}^{x_2}-\int\limits_{x_1}^{x_2}u(x)\,dp(x)\right).$$

Из определения функции $p_1(x)$ вытекает оценка

$$-\int\limits_{x_1}^{x_2}u(x)\,dp(x)\leqslant\int\limits_{x_1}^{x_2}|u(x)|\,dp_1(x).$$

Неравенства (8) и условие $\bar p=\sup\{p(x):x\in J\}<\infty$ приводят к оценке

$$p(x)u(x)|_{x_1}^{x_2}\leqslant\frac{6\bar p}{\delta}\int\limits_{x_1}^{x_2}|u(x)|\,dx.$$

Установленные оценки влекут за собой неравенство

$$s_1\leqslant\frac{1}{\delta}\int\limits_{x_1}^{x_2}|u(x)|\,dp_1(x)+\frac{6\bar p}{\delta^2}\int\limits_{x_1}^{x_2}|u(x)|\,dx.$$

Аналогичное неравенство верно и для интеграла s_2:

$$s_2\leqslant\frac{1}{\delta}\int\limits_{x_3}^{x_4}|u(x)|\,dp_1(x)+\frac{6\bar p}{\delta^2}\int\limits_{x_3}^{x_4}|u(x)|\,dx.$$

В итоге приходим к следующей оценке сверху второго интеграла в правой части (9):

$$s_1+s_2\leqslant\frac{1}{\delta}\int\limits_{J^\delta}|u(x)|\,dp_1(x)+\frac{6\bar p}{\delta^2}\int\limits_{J^\delta}|u(x)|\,dx; \tag{12}$$

здесь $J^\delta=[a,a+\delta]\bigcup[b-\delta,b]$.

Из оценок (10)–(12) следует неравенство

$$F(b-\delta)-F(a+\delta)\leqslant\int\limits_a^b|u(x)|\,dQ_1(x)+\frac{1}{\delta}\int\limits_{J^\delta}|u(x)|\,dp_1(x)+\frac{6\bar{p}}{\delta^2}\int\limits_{J^\delta}|u(x)|\,dx.$$

Для завершения доказательства достаточно воспользоваться неравенством коэрцитивности (4), заменяя в нём J на J_1. Следует учесть лишь, что в силу возрастания функции F верно равенство $\|F;\mathrm{BV}\,(J_1)\|=F(b_1)-F(a_1)$. Теорема доказана.

Постоянная $c_0(\delta)$ в неравенстве (6) возрастает при $\delta\to 0$. Анализируя проведённое выше доказательство, можно показать, что $c_0(\delta)=O(\delta^{-2})$ при $\delta\to 0$. Сформулируем одно из следствий теоремы 1, имеющее характер нелинейной теоремы вложения [10]. Введём в рассмотрение множество

$$\mathbb{B}_r=\{u\in C(J):\|u;L(J,\mu)\|\leqslant r\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $J_\delta=[a+\delta,b-\delta]\quad(0<2\delta<b-a),\quad 0<r<\infty$. *Тогда оператор вложения* $\mathscr{K}(\mathscr{L})\bigcap\mathbb{B}_r\to W_p^1(J_\delta)$ *ограничен при* $p\in[1,\infty]$ *и вполне непрерывен, если* $1\leqslant p<\infty$.

Доказательство. Согласно теореме 1 множество $\mathscr{K}(\mathscr{L})\bigcap\mathbb{B}_r$ ограничено в пространстве $\mathscr{E}(J_\delta)$. Поэтому доказываемое утверждение вытекает из теорем вложения для $\mathscr{E}(J_\delta)$. Теорема доказана.

Приведём пример, показывающий, что в теоремах 1, 2 условие $\delta>0$ существенно. Пусть $J=[0,1]$, $\mathscr{L}(u)=-u''$. В этом случае $p(x)\equiv 1$, $Q(x)\equiv 0$, $\mu(x)=2x$, класс $\mathscr{K}(\mathscr{L})$ совпадает с классом вогнутых на J функций. При любом $t\in(0,1)$ имеем

$$f_t(x)=\min\left\{\frac{x}{t},\frac{1-x}{1-t}\right\}\in\mathscr{K}(\mathscr{L})\bigcap\mathbb{B}_1;$$

вместе с тем функция $\gamma(t)=V_0^1f_t=(t(1-t))^{-1}$ неограничена на интервале $(0,1)$.

В приведённом примере функции $f_t(x)$ удовлетворяют однородному условию Дирихле

$$f_t(0)=f_t(1)=0.$$

Для других краевых условий ситуация более благополучна; аналогичные теоремам 1, 2 утверждения верны и в случае $\delta=0$.

3. Дополнительные замечания. Неравенство (7) носит характер внутренних оценок решений дифференциальных неравенств. Для функций, удовлетворяющим некоторым краевым условиям, в работе [3] установлены оценки решений неравенств вплоть до границы. Соответствующие результаты относились к линейным дифференциальным операторам с достаточно регулярными коэффициентами.

Обсудим варианты этих результатов для дифференциальных уравнений с импульсными особенностями. Для большей обозримости будем рассматривать краевые условия вида

$$p(a)u'(a)-k_1u(a)=p(b)u'(b)+k_2u(b)=0,\tag{13}$$

возникающие при изучении экстремалей функционала Больца $\Phi_1\colon H\to\mathbb{R}$, определяемого равенством $\Phi_1(u)=\Phi(u)+(k_1u^2(a)+k_2u^2(b))/2$. Функционал Φ_1 дифференцируем по Фреше на пространстве H и имеет место равенство

$$\Phi_1'(u)h=\Phi'(u)h+k_1u(a)h(a)+k_2u(b)h(b)\quad(h\in H).$$

Элемент u назовём экстремалью функционала Φ_1, если

$$\Phi_1'(u)h=0\ \text{ для всех }\ h\in H.\tag{14}$$

В частности, равенство (14) справедливо для h из H_0. Отсюда следует, что экстремаль u функционала Φ_1 является экстремалью функционала Φ. Можно сказать, что u есть обобщённое решение уравнения Эйлера, удовлетворяющее в обобщённом же смысле краевому условию (13) – естественному условию для функционала Φ_1.

Из (14) вытекает равенство

$$\int\limits_a^b h(x)\,dF(x) = \int\limits_a^b p(x)u'(x)h'(x)\,dx + \int\limits_a^b u(x)h(x)\,dQ(x) + k_1u(a)h(a) + k_2u(b)h(b).$$

Если h – достаточно гладкая функция, например, $h \in C^2(J)$, то

$$\int\limits_a^b p(x)u'(x)h'(x)\,dx = u(x)p(x)h'(x)|_a^b - \int\limits_a^b u(x)\,d(p(x)h'(x)).$$

Таким образом, экстремаль u удовлетворяет соотношению

$$\int\limits_a^b h(x)\,dF(x) = -\int\limits_a^b u(x)\,d(p(x)h'(x)) + \int\limits_a^b u(x)h(x)\,dQ(x) +$$

$$+ u(a)(p(a)h'(a - k_1h(a)) + u(b)(p(b)h'(b) + k_2h(a)). \qquad (15).$$

Существование экстремалей функционала Φ_1 устанавливается с помощью прямых методов вариационного исчисления. Стандартным является предположение о неотрицательности коэффициентов k_1, k_2.

Обозначим через $\mathscr{K}_1(\mathscr{L})$ совокупность экстремалей функционала Φ_1 с возрастающей функцией F.

Теорема 3. *Пусть* $k_1 \geqslant 0$, $k_2 \geqslant 0$. *Тогда существует такая константа* $c_1(J)$, *что для всех функций* u *из* $\mathscr{K}_1(\mathscr{L})$ *имеет место оценка*

$$\|u; \mathscr{E}(J)\| \leqslant c_1(J)\|u; L(J,\mu)\|. \qquad (16)$$

Доказательство. Оценка (16) следует из неравенства (15) при специальном выборе функции h. Определим функцию h как решение краевой задачи

$$h''(x) = -1, \quad p(a)h'(a) - k_1h(a) = p(b)h'(b) + k_2h(b) = 0.$$

Решение данной краевой задачи единственно и положительно на отрезке $J = [a,b]$ $(h(x) \geqslant$ $\geqslant h_0 = \min\{h(a), h(b)\} > 0)$. Из соотношения (15) следует неравенство

$$h_0(F(b) - F(a)) \leqslant \int\limits_a^b h(x)\,dF(x) \leqslant -\int\limits_a^b u(x)\,d(p(x)h'(x)) + \int\limits_a^b u(x)h(x)\,dQ(x),$$

которое влечёт за собой оценку $V_a^bF = F(b) - F(a) \leqslant \mathrm{const}\,\|u; L(J,\mu)\|$. Объединяя эту оценку с оценкой леммы 1, приходим к доказываемому утверждению. Теорема доказана.

Сформулируем вариант теоремы 2.

Теорема 4. *Пусть* $0 < r < \infty$. *Тогда оператор вложения* $\mathscr{K}_1(\mathscr{L}) \bigcap \mathbb{B}_r \to W_p^1(J)$ *ограничен при* $p \in [1,\infty]$ *и вполне непрерывен, если* $1 \leqslant p < \infty$.

Остановимся на дополнительных свойствах клина $\mathscr{K}(\mathscr{L})$, относящихся к специальному классу дифференциальных операторов $\mathscr{L}$. Приведём некоторые определения.

Фундаментальную систему $\{w_1(x), w_2(x)\}$ решений однородного уравнения $\mathscr{L}(w) = 0$ назовём *марковской* на отрезке J, если выполняются следующие два условия: 1) $w_1(x) > 0$ для любого $x \in J$; 2) функция $z(x) = w_2(x)/w_1(x)$ строго возрастает на J. Условие 2) в этом определении можно заменить требованием положительности определителя:

$$\mathscr{D}\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} w_1(x_1) & w_2(x_1) \\ w_1(x_2) & w_2(x_2) \end{vmatrix} \quad (a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b).$$

Если для оператора $\mathscr{L}$ существует соответствующая марковская система, то будем использовать обозначение $\mathscr{L} \in T_0(J)$. Условие $\mathscr{L} \in T_0(J)$ сужает класс допустимых операторов $\mathscr{L}$, однако допускает эффективную проверку. Здесь полезны признаки неосцилляции, в частности, установленный в [1, с. 151] вариант классической теоремы Валле–Пуссена (см., например, [11, гл. 4]).

Предположение $\mathscr{L} \in T_0(J)$ гарантирует весьма интересные свойства функций класса $\mathscr{K}(\mathscr{L})$ [1, 11, 12]. Отметим лишь *свойство обобщённой вогнутости* [11, с. 78]: если $u \in \mathscr{K}(\mathscr{L})$, $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, то существует единственное решение $w(x)$ краевой задачи

$$\mathscr{L}(w)(x) = 0, \quad w(x_1) = u(x_1), \quad w(x_2) = u(x_2); \tag{17}$$

при этом верно неравенство $u(x) > w(x)$ для любого $x \in (x_1, x_2)$.

Обозначим через $[A, B]$ область значений строго возрастающей на $[a, b]$ функции $z(x) = w_2(x)/w_1(x)$. При любом $t \in [A, B]$ уравнение $z(x) = t$ имеет единственное решение $x = g(t)$; определяемая таким образом функция g строго возрастает и непрерывна на отрезке $[A, B]$.

Теорема 5. *Пусть $w_1(x)$, $w_2(x)$ $(x \in J)$ – марковская система решений уравнения $\mathscr{L}(w)=0$. Тогда включение $u\in\mathscr{K}(\mathscr{L})$ эквивалентно строгой вогнутости на $[A, B]$ функции*

$$F(t) = \frac{u(g(t))}{w_1(g(t))}. \tag{18}$$

Доказательство. Пусть $u \in \mathscr{K}(\mathscr{L})$ и $a \leqslant x_1 < x < x_2 \leqslant b$. Обозначим через w решение краевой задачи (17). Тогда найдутся такие числа λ_1, λ_2, что имеют место соотношения

$$u(x) > w(x) = \lambda_1 w_1(x) + \lambda_2 w_2(x),$$

$$u(x_1) = w(x_1) = \lambda_1 w_1(x_1) + \lambda_2 w_2(x_1), \quad u(x_2) = w(x_2) = \lambda_1 w_1(x_2) + \lambda_2 w_2(x_2).$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\begin{vmatrix} w_1(x_1) & w_2(x_1) & u(x_1) \\ w_1(x_2) & w_2(x_2) & u(x_2) \\ w_1(x) & w_2(x) & u(x) \end{vmatrix} = (u(x) - w(x))\mathscr{D}\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} > 0. \tag{19}$$

Введём в рассмотрение функцию $v(x) = u(x)/w_1(x)$ $(x \in J)$. Из неравенства (19) следует, что

$$\begin{vmatrix} 1 & z(x_1) & v(x_1) \\ 1 & z(x_2) & v(x_2) \\ 1 & z(x) & v(x) \end{vmatrix} > 0 \quad (a \leqslant x_1 < x < x_2 \leqslant b).$$

Положим $t = z(x)$, $t_1 = z(x_1)$, $t_2 = z(x_2)$. С учётом этих обозначений приходим к неравенству

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & F(t_1) \\ 1 & t_2 & F(t_2) \\ 1 & t & F(t) \end{vmatrix} > 0 \quad (A \leqslant t_1 < t < t_2 \leqslant B),$$

из которого вытекает, что включение $u \in \mathscr{K}(\mathscr{L})$ влечёт за собой строгую вогнутость функции $F(t)$.

Верно и обратное утверждение. Для его доказательства следует провести рассуждения в обратном порядке. Теорема доказана.

Равенство (18) означает, что обобщённая вогнутость эквивалентна обычной вогнутости некоторой суперпозиции.

Следствие. *В условиях теоремы 5 функция* $u(x)$ *допускает представление*

$$u(x) = F\left(\frac{w_2(x)}{w_1(x)}\right) w_1(x).$$

В общем случае условие $\mathscr{L} \in T_0(J)$ может не выполняться. Однако для любой точки $x_0 \in J$ существует такой отрезок J_1 положительной длины, что $x_0 \in J_1$ и $\mathscr{L} \in T_0(J_1)$. Следовательно, функции класса $\mathscr{K}(\mathscr{L})$ локально являются обобщённо вогнутыми.

В ряде мест работы использовалась самосопряжённость дифференциального оператора $\mathscr{L}$. Как полагает автор, данное предположение не является принципиальным для большинства результатов. Оно принято лишь для упрощения изложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Покорный Ю.В., Бахтина Ж.И., Зверева М.Б., Шабров С.А.* Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах. М., 2009.
2. *Малышев В.А.* Оценки производных n-выпуклых функций // Зап. науч. семинара ПОМИ. 1996. Т. 232. С. 123–133.
3. *Климов В.С., Павленко А.Н.* Нетривиальные решения краевых задач с сильными нелинейностями // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 12. С. 1676–1682.
4. *Климов В.С.* Внутрение оценки решений линейных дифференциальных неравенств // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1034–1044.
5. *Лионс Ж.Л., Мадженес Е.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
6. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., 1988.
7. *Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М., 1983.
8. *Матвеев В.А.* О вариации функции и о коэффициентах Фурье по системам Хаара и Шаудера // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1966. Т. 30. № 6. С. 1397–1419.
9. *Souček J.* Spaces of functions on domain Ω, whose k-th derivatives are measures defined on $\bar{\Omega}$ // Časopis Pest. Mat. 1972. V. 97. P. 10–46.
10. *Малышев В.А.* Нелинейные теоремы вложения // Алгебра и анализ. 1993. Т. 5. № 6. С. 1–38.
11. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. М., 1965.
12. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М., 2004.

Ярославский государственный университет
им. П.Г. Демидова

Поступила в редакцию 06.10.2020 г.
После доработки 14.12.2020 г.
Принята к публикации 22.01.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 3, с. 306–312

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.54

ВЕКТОР-ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА, ВРАЩЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ, НАПРАВЛЯЮЩИЕ ФУНКЦИИ И СУЩЕСТВОВАНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ПО ПУАССОНУ РЕШЕНИЙ

© 2021 г. К. С. Лапин

С использованием метода вектор-функций Ляпунова и метода направляющих функций получены достаточные условия существования ограниченных по Пуассону и достаточные условия существования частично ограниченных по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений.

DOI: 10.31857/S037406412103002X

Применение метода функций Ляпунова [1] к исследованию ограниченности решений дифференциальных систем приведено в работе [2], а его применение к исследованию ограниченности решений относительно части переменных – в монографии [3, с. 223–228]. Обобщение метода функций Ляпунова – метод вектор-функций Ляпунова – изложено в монографиях [4, 5], и в [5] дано приложение метода вектор-функций Ляпунова к выводу условий, обеспечивающих ограниченность всех решений произвольной нелинейной системы. Независимо от методов работы [2] в монографии [6], основываясь на технике вращений векторных полей, был разработан метод направляющих функций, при помощи которого в [6] получены достаточные условия существования ограниченных на всей числовой прямой решений произвольной нелинейной системы.

С другой стороны, в недавних работах автора (см., например, [7]) начато изучение нового вида ограниченности решений – их ограниченности по Пуассону. Понятие ограниченности по Пуассону на полуоси решения состоит в том, что в фазовом пространстве найдутся такой шар и на временно́й полуоси такая счётная система непересекающихся интервалов, последовательность правых концов которых стремится к $+\infty$, что решение при всех значениях времени, принадлежащих этим интервалам, содержится в данном шаре. Очевидно, что ограниченное решение является ограниченным по Пуассону; обратное, как несложно видеть, не верно. В работах автора изучены условия, при выполнении которых все решения дифференциальной системы являются ограниченными по Пуассону.

Настоящая работа посвящена разработке метода исследования условий существования ограниченных по Пуассону решений, который представляет собой синтез метода вектор-функций Ляпунова и метода направляющих функций. При помощи этого метода в работе получены достаточные условия существования ограниченных по Пуассону решений (теорема 1), а также существования частично ограниченных (ограниченных по части переменных) по Пуассону решений (теорема 2). Перейдём теперь к точным определениям и формулировкам.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x), \quad F(t,x) = (F_1(t,x), \ldots, F_n(t,x))^{\mathrm{т}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad n \geqslant 2, \qquad (1)$$

где $F\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица по переменной $x \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, будем предполагать, что все решения системы (1) продолжимы на всю временну́ю полуось $\mathbb{R}_+$.

Далее через $\|\cdot\|$ обозначается евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Решение $x = x(t)$ системы (1) с начальным условием $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ обозначается через $x(t, t_0, x_0)$. Любую неотрицательную возрастающую числовую последовательность $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ такую, что $\lim\limits_{i\to+\infty} \tau_i = +\infty$, далее будем называть *$\mathcal{P}$-последовательностью.*

Напомним [2], что решение $x = x(t, t_0, x_0)$ системы (1) называется *ограниченным*, если существует такое число $\beta > 0$, что при всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено условие $\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant \beta$.

Определение 1. Решение $x = x(t, t_0, x_0)$ системы (1) называется *ограниченным по Пуассону*, если найдутся такие $\mathcal{P}$-последовательность $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ и число $\beta > 0$, что при всех $i \in \mathbb{N}$ выполнено условие $\|x(\tau_i, t_0, x_0)\| \leqslant \beta$.

Очевидно, что если решение системы (1) является ограниченным, то оно будет и ограниченным по Пуассону, поскольку в этом случае в качестве требуемой $\mathcal{P}$-последовательности можно взять любую $\mathcal{P}$-последовательность. Также очевидно, что, при необходимости увеличивая число β, неравенство $\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant \beta$ для ограниченного по Пуассону решения можно считать выполненным при всех t, принадлежащих некоторой последовательности интервалов, правые концы которых стремятся к $+\infty$, как это сказано выше. Поэтому приведённое определение равносильно определению ограниченного по Пуассону решения, данному в работе [8].

Напомним, следуя [4, с. 46–48], необходимые в дальнейшем сведения о вектор-функциях Ляпунова. Пусть задана непрерывно дифференцируемая вектор-функция

$$V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \quad V(t, x) = (V_1(t, x), \ldots, V_k(t, x))^{\mathrm{т}}, \quad k \geqslant 1.$$

Производная в силу системы (1) этой вектор-функции определяется равенством

$$\dot V(t, x) = (\dot V_1(t, x), \ldots, \dot V_k(t, x))^{\mathrm{т}},$$

где $\dot V_i(t, x)$ – производная в силу системы (1) функции $V_i(t, x)$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Далее для векторов $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)^{\mathrm{т}}$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_k)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^k$ запись $\xi \leqslant \eta$ означает, что $\xi_i \leqslant \eta_i$ для любого $1 \leqslant i \leqslant k$. Будем говорить [3, с. 235], что непрерывная вектор-функция

$$f\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k, \quad f(t, \xi) = (f_1(t, \xi), \ldots, f_k(t, \xi))^{\mathrm{т}}, \quad k \geqslant 1,$$

удовлетворяет *условию Важевского,* если для каждого $1 \leqslant s \leqslant k$ функция f_s не убывает по переменным $\xi_1, \ldots, \xi_{s-1}, \xi_{s+1}, \ldots, \xi_k$, т.е. из $\xi_i \leqslant \eta_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $i \neq s$, $\xi_s = \eta_s$ следует $f_s(t, \xi) \leqslant f_s(t, \eta)$. Если f удовлетворяет условию Важевского, то это будем обозначать как $f \in$ $\in W$. Отметим, что при $k = 1$ условие $f \in W$ вырождается, поэтому для любой непрерывной функции $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ условимся считать, что $f \in W$.

Непрерывно дифференцируемая вектор-функция $V\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, удовлетворяющая для любых $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}^n$ условию $V(t, x) \geqslant 0$, где 0 – нулевой вектор в $\mathbb{R}^k$, и система

$$\frac{d\xi}{dt} = f(t, \xi), \quad f \in W, \tag{2}$$

называются соответственно *вектор-функцией Ляпунова* и *системой сравнения* для системы (1), если выполнено следующее условие: $\dot V(t, x) \leqslant f(t, V(t, x))$. Далее всегда будем предполагать, что правая часть системы (2) удовлетворяет локальному условию Липшица по ξ и, кроме того, решения этой системы продолжимы на всю полуось $\mathbb{R}_+$. Так как для системы (2) имеет место единственность решения задачи Коши, то из теоремы Важевского (см., например, [3, с. 236]) следует, что для любой точки $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1), вектор-функция Ляпунова $V\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ и решение $\xi(t, t_0, V(t_0, x_0))$ системы сравнения (2) для системы (1) связаны между собой при всех $t \geqslant t_0$ следующим неравенством:

$$V(t, x(t, t_0, x_0)) \leqslant \xi(t, t_0, V(t_0, x_0)). \tag{3}$$

Напомним теперь необходимые понятия и конструкции, связанные с вращениями векторных полей и операторами сдвига по траекториям [6] (см. также [9]). Пусть Ω – любое компактное подмножество в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$. Непрерывным векторным полем или, более кратко, векторным полем Q на Ω будем называть, следуя [6], любое непрерывное отображение $Q\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$. Для векторного поля Q на Ω рассмотрим его ограничение на $\partial\Omega$, т.е. рассмотрим векторное поле $Q|_{\partial\Omega}\colon \partial\Omega \subset \Omega \to \mathbb{R}^n$. Векторное поле Q на Ω называется *невырожденным* на $\partial\Omega$, если $Q(x) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ для всех $x \in \partial\Omega$. Легко видеть, что любое невырожденное на $\partial\Omega$ векторное поле Q определяет непрерывное отображение

$$T\colon \partial\Omega \to S^{n-1} = \{a \in \mathbb{R}^n : \|a\| = 1\}, \quad T(x) = Q(x)/\|Q(x)\|, \quad x \in \partial\Omega.$$

Вращением $\gamma(Q, \partial\Omega)$ невырожденного на $\partial\Omega$ векторного поля Q называется степень $\deg(T) \in \mathbb{Z}$ отображения $T : \partial\Omega \to S^{n-1}$. В случае, когда компактное подмножество Ω в $\mathbb{R}^n$ является n-мерным гладким ориентируемым многообразием с краем $\partial\Omega$ (см., например, [10]), целое число $\deg(T)$ легко определяется, например, при помощи функтора $H_{n-1}(-;\mathbb{Z})$ сингулярных $(n-1)$-мерных гомологий топологических пространств с целыми коэффициентами [11]. Действительно, непрерывное отображение $T : \partial\Omega \to S^{n-1}$ индуцирует гомоморфизм групп сингулярных гомологий $H_{n-1}(T;\mathbb{Z})\colon H_{n-1}(\partial\Omega;\mathbb{Z}) \to H_{n-1}(S^{n-1};\mathbb{Z})$. Хорошо известно (см., например, [11]), что группы $H_{n-1}(\partial\Omega;\mathbb{Z})$ и $H_{n-1}(S^{n-1};\mathbb{Z})$ изоморфны группе $\mathbb{Z}$ и образующими этих групп являются, соответственно, фундаментальные классы $[\partial\Omega]$ и $[S^{n-1}]$ многообразий $\partial\Omega$ и S^{n-1}. При помощи гомоморфизма групп $H_{n-1}(T;\mathbb{Z})$ и фундаментальных классов $[\partial\Omega]$ и $[S^{n-1}]$ степень отображения $\deg(T) \in \mathbb{Z}$ определяется по следующему правилу:

$$H_{n-1}(T;\mathbb{Z})([\partial\Omega]) = \deg(T)[S^{n-1}].$$

В общем случае, т.е. в случае, когда Ω является произвольным компактным подмножеством в $\mathbb{R}^n$, определение степени $\deg(T) \in \mathbb{Z}$ отображения $T : \partial\Omega \to S^{n-1}$ детально описано в монографии [9, с. 9–29].

Далее будем использовать следующую терминологию. Подмножество

$$\mathrm{Tr}\,(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x(t, 0, x_0), \quad t \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}^n,$$

где $x(t, 0, x_0)$ – решение системы (1) и x_0 – произвольная точка из $\mathbb{R}^n$, будем называть *траекторией* системы (1), *выходящей из точки* x_0. Рассмотрим для любого фиксированного $\tau > 0$ непрерывное отображение

$$U(\tau)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n, \quad U(\tau)(x_0) = x(\tau, 0, x_0),$$

где $x(t, 0, x_0)$ – решение системы (1) и x_0 – произвольная точка из Ω. Отображение $U(\tau)$ называется [6, с. 11–12] *оператором сдвига по траекториям* системы (1) за время $0 \leqslant t \leqslant \tau$. Точкой *$\tau$-невозвращаемости* траектории системы (1) называется [6, с. 101] такая точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$, что для решения $x(t, 0, x_0)$ системы (1) выполнено условие $x(t, 0, x_0) \neq x_0$ при всех $0 < t \leqslant \tau$.

Рассмотрим векторное поле

$$S_0\colon \Omega \to \mathbb{R}^n, \quad S_0(x) = -F(0, x),$$

где $F(t, x)$ – правая часть системы (1). Вращение $\gamma(S_0, \partial\Omega)$ этого векторного поля тесно связано с задачей о существовании неподвижных точек оператора $U(\tau)$ сдвига по траекториям системы (1). Действительно, в [6, с. 102–104] показано, что если невырожденное на $\partial\Omega$ векторное поле $S_0 : \Omega \to \mathbb{R}^n$ имеет вращение $\gamma(S_0, \partial\Omega) \neq 0$ и все точки границы $\partial\Omega$ являются точками τ-невозвращаемости траекторий системы (1), то оператор $U(\tau)$ сдвига по траекториям системы (1) имеет внутри Ω по крайней мере одну неподвижную точку, т.е. такую точку $x \in \Omega \setminus \partial\Omega$, что $U(\tau)(x) = x$. Далее будем использовать следующую терминологию. Подмножества

$$\mathrm{Tr}^+(x_0, t_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x(t, t_0, x_0), \quad t > t_0\} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$\mathrm{Tr}^-(x_0, t_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x(t, t_0, x_0), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0\} \subset \mathbb{R}^n,$$

где $x(t, t_0, x_0)$ – решение системы (1) и (t_0, x_0) – любая точка из $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, будем называть соответственно *правой частью* и *левой частью* траектории $\mathrm{Tr}\,(x(0, t_0, x_0))$ системы (1).

В терминах вектор-функций Ляпунова и вращений векторных полей сформулируем и докажем следующее достаточное условие существования у системы (1) ограниченных по Пуассону решений.

Предложение 1. *Пусть для системы (1) существуют $\mathcal{P}$-последовательность $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$, вектор-функция Ляпунова $V:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ с системой сравнения (2) и неубывающая функция $b:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, обладающая свойством $b(r)\to+\infty$ при $r\to+\infty$, такие, что при любых $x\in\mathbb{R}^n$ и $i\in\mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$b(\|x\|)\leqslant\sum_{q=1}^{k}V_q(\tau_i,x). \tag{4}$$

Кроме того, пусть для системы сравнения (2) выполнены следующие условия:

1) существует компактное в $\mathbb{R}^k$ подмножество $\Omega\subset\operatorname{Im}(V:\{0\}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k)$, для которого векторное поле $S_0:\Omega\to\mathbb{R}^k$, $S_0(\xi)=-f(0,\xi)$, где $f(t,\xi)$ – правая часть системы сравнения (2), является невырожденным на $\partial\Omega$ и $\gamma(S_0,\partial\Omega)\neq0$,

2) для любого $\xi_0\in\partial\Omega$ правая часть $\operatorname{Tr}^+(\xi_0,t_0)$ траектории $\operatorname{Tr}(\xi(0,t_0,\xi_0))$ системы сравнения (2) не имеет в Ω общих точек с левой частью $\operatorname{Tr}^-(\xi_0,t_0)$ этой траектории.

Тогда система (1) имеет по крайней мере одно ограниченное по Пуассону решение.

Доказательство. Рассмотрим для каждого $m\in\mathbb{N}$ оператор $U(m):\Omega\to\mathbb{R}^k$ сдвига по траекториям системы сравнения (2) для системы (1) за время $0\leqslant t\leqslant m$. Так как по условию для любого $(t_0,\xi_0)\in\mathbb{R}_+\times\partial\Omega$ пересечение $\operatorname{Tr}^+(t_0,\xi_0)\bigcap\operatorname{Tr}^-(t_0,\xi_0)\bigcap\Omega$ пусто, то для любого $m\in\mathbb{N}$ все точки границы $\partial\Omega$ являются точками m-невозвращаемости траекторий системы (2). Из этого, как сказано выше, следует, что для каждого $m\in\mathbb{N}$ оператор $U(m)$ имеет неподвижную точку $\vartheta_m\in\Omega\setminus\partial\Omega$.

Рассмотрим семейство решений $\{\xi(t,0,\vartheta_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ системы (2). Из условий доказываемой теоремы следует, что $\xi(t,0,\vartheta_m)\in\Omega\setminus\partial\Omega$ при любом $0\leqslant t\leqslant m$. Действительно, если предположить противное, то для некоторой точки $\xi_0=x(t_0,0,\vartheta_m)\in\operatorname{Tr}(\vartheta_m)$, где $0<t_0<m$ и $\xi_0\in\partial\Omega$, будем иметь

$$\operatorname{Tr}^+(t_0,\xi_0)\bigcap\operatorname{Tr}^-(t_0,\xi_0)\bigcap\Omega=\{\vartheta_m\}\neq\varnothing,$$

что противоречит условиям теоремы.

Рассмотрим в $\Omega\setminus\partial\Omega$ последовательность точек $(\vartheta_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Пользуясь тем, что множество Ω компактно, выберем из последовательности $(\vartheta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ подпоследовательность $(\vartheta_{m_i})_{i\in\mathbb{N}}$, сходящуюся к некоторой точке $\mu\in\Omega$. Покажем, что для решения $\xi(t,0,\mu)$ системы (2) при всех $t\geqslant0$ выполнено условие $\xi(t,0,\mu)\in\Omega$. Предположим противное, т.е. что найдётся число $\eta\geqslant0$, для которого $\xi(\eta,0,\mu)\notin\Omega$. Так как для системы (2) выполнены условия теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий (см., например, [12]), то для достаточно больших i будем иметь $\xi(\eta,0,\vartheta_{m_i})\notin\Omega$, где $\eta\leqslant m_i$. Получено противоречие с включением

$$\xi(t,0,\vartheta_{m_i})\in\Omega\setminus\partial\Omega\subset\Omega\quad\text{при всех}\quad0\leqslant t\leqslant m_i.$$

Таким образом, показано, что $\xi(t,0,\mu)\in\Omega$ для любых $t\geqslant0$. Так как множество Ω компактно в $\mathbb{R}^k$, то в $\mathbb{R}^k$ найдётся такой шар радиуса $\alpha>0$ с центром в нуле, что Ω содержится в этом шаре и, следовательно, для всех $t\geqslant0$ справедливо неравенство $\|\xi(t,0,\mu)\|\leqslant\alpha$.

Покажем теперь, что система (1) имеет ограниченное по Пуассону решение $x(t,0,x_0)$ для некоторого $x_0\in\mathbb{R}^n$. Так как по условию $\Omega\subset\operatorname{Im}(V:\{0\}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k)$, то найдётся такая точка $(0,x_0)\in\{0\}\times\mathbb{R}^n$, что $V(0,x_0)=\mu$. Пользуясь условием (4) и неравенством (3), получаем для решения $x(t,0,x_0)$ системы (1) и решения $\xi(t,0,V(0,x_0))$ системы сравнения (2) неравенства

$$b(\|x(\tau_i,0,x_0)\|)\leqslant\sum_{q=1}^{k}V_q(\tau_i,x(\tau_i,0,x_0))\leqslant\sum_{q=1}^{k}\xi_q(\tau_i,0,V(0,x_0)),$$

справедливые при всех $i\in\mathbb{N}$. Кроме того, для любого $t\geqslant0$ имеем очевидные неравенства

$$\sum_{i=1}^{k}\xi_i(t,0,V(0,x_0))\leqslant\sum_{i=1}^{k}|\xi_i(t,0,V(0,x_0))|\leqslant k\|\xi(t,0,V(0,x_0))\|.$$

Так как $V(0, x_0) = \mu$, то $\|\xi(t, 0, V(0, x_0))\| \leqslant \alpha$ при всех $t \geqslant 0$. Из этого, а также из указанных выше неравенств вытекает, что при всех $i \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $b(\|x(\tau_i, 0, x_0)\|) \leqslant k\alpha$. Пользуясь условием $b(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$ и тем, что число $k\alpha$ фиксировано, выберем такое число $\beta > 0$, чтобы $k\alpha \leqslant b(\beta)$. Отсюда для всех $i \in \mathbb{N}$ получаем неравенство $b(\|x(\tau_i, 0, x_0)\|) \leqslant b(\beta)$, из которого, поскольку функция $b\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ является неубывающей, следует, что $\|x(\tau_i, 0, x_0)\| \leqslant \beta$ при всех $i \in \mathbb{N}$. Таким образом, показано, что решение $x(t, 0, x_0)$ системы (1) ограничено по Пуассону. Предложение доказано.

Пусть заданы произвольные натуральные числа $n \geqslant 2$ и $1 \leqslant m < n$. Для любого фиксированного элемента $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ и соответствующего ему решения $x(t, t_0, x_0) = (x_1(t, t_0, x_0), \ldots, x_n(t, t_0, x_0))^{\mathrm{т}}$ системы (1) рассмотрим отображение

$$y\colon \mathbb{R}_+ \times \{(t_0, x_0)\} \to \mathbb{R}^m, \quad y(t, t_0, x_0) = (x_1(t, t_0, x_0), \ldots, x_m(t, t_0, x_0))^{\mathrm{т}}.$$

Напомним [3], что решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) называется *y-ограниченным*, если существует такое число $\beta > 0$, что для всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено условие $\|y(t, t_0, x_0)\| \leqslant \beta$.

Определение 2. Решение $x = x(t, t_0, x_0)$ системы (1) называется *y-ограниченным по Пуассону*, если найдутся такие $\mathcal{P}$-последовательность $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ и число $\beta > 0$, что при всех $i \in \mathbb{N}$ выполнено условие $\|y(\tau_i, t_0, x_0)\| \leqslant \beta$.

Очевидно, что если решение системы (1) является y-ограниченным, то оно будет и y-ограниченным по Пуассону, поскольку в этом случае в качестве требуемой $\mathcal{P}$-последовательности можно взять любую $\mathcal{P}$-последовательность. Несложно видеть, что приведённое определение равносильно определению y-ограниченного по Пуассону решения, данному в работе [8].

Следующее утверждение является достаточным условием существования у системы (1) y-ограниченных по Пуассону решений.

Предложение 2. *Пусть выполнены все условия предложения 1 с заменой неравенства (4) неравенством*

$$b(\|y\|) \leqslant \sum_{q=1}^{k} V_q(\tau_i, x). \tag{5}$$

Тогда система (1) имеет по крайней мере одно y-ограниченное по Пуассону решение.

Доказательство. Дословно повторяя рассуждения из доказательства предложения 1 и заменяя неравенство (4) неравенством (5), получаем неравенство

$$b(\|y(\tau_i, 0, x_0)\|) \leqslant \sum_{q=1}^{k} V_q(\tau_i, x(\tau_i, 0, x_0)) \leqslant \sum_{q=1}^{k} \xi_q(\tau_i, 0, V(0, x_0)), \quad i \in \mathbb{N}.$$

После этого, дословно повторяя рассуждения из доказательства предложения 1 с заменой $x(t, 0, x_0)$ на $y(t, 0, x_0)$, получаем при всех $i \in \mathbb{N}$ требуемое неравенство $\|y(\tau_i, 0, x_0)\| \leqslant \beta$. Таким образом, показано, что решение $x(t, 0, x_0)$ системы (1) y-ограничено по Пуассону. Предложение доказано.

Напомним теперь необходимые сведения о направляющих функциях и их индексах [6]. Непрерывно дифференцируемая функция $G\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется *направляющей функцией* или, более точно, *r_0-направляющей функцией* для системы (1), если выполнено следующее условие:

$$(\operatorname{grad} G(x), F(t, x)) > 0, \quad t \geqslant 0, \quad \|x\| \geqslant r_0. \tag{6}$$

Рассмотрим векторное поле $\operatorname{grad} G\colon B^n(r_0) \to \mathbb{R}^n$, где $B^n(r_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant r_0\}$. Из условия (6) видно, что векторное поле $\operatorname{grad} G\colon B^n(r_0) \to \mathbb{R}^n$ является невырожденным на $\partial B^n(r_0)$ и, следовательно, определено вращение $\gamma(\operatorname{grad} G, \partial B^n(r_0))$ этого векторного поля. В монографии [6, с. 90–91] показано, что если для любого $r > r_0$ рассмотреть соответствующее векторное поле $\operatorname{grad} G\colon B^n(r) \to \mathbb{R}^n$, которое, очевидно, является невырожденным на $\partial B^n(r)$, то имеет место равенство вращений $\gamma(\operatorname{grad} G, \partial B^n(r)) = \gamma(\operatorname{grad} G, \partial B^n(r_0))$. *Индексом* r_0-направляющей функции G для системы (1) называется целое число $\operatorname{ind}(G)$, определяемое формулой

$$\operatorname{ind}(G) = \gamma(\operatorname{grad} G, \partial B^n(r_0)) = \gamma(\operatorname{grad} G, \partial B^n(r)), \quad r > r_0.$$

В [6, с. 110–111] показано, что если для системы (1) имеется r_0-направляющая функция G, то для любого $r \geqslant r_0$ вращение векторного поля $S_0\colon B(r) \to \mathbb{R}^n$, $S_0(x) = -F(0,x)$, где $F(t,x)$ – правая часть системы (1), и индекс r_0-направляющей функции G связаны между собой равенством

$$\gamma(S_0, \partial B^n(r)) = (-1)^n \operatorname{ind} G.$$

Неограниченной r_0-направляющей функцией для системы (1) называется любая r_0-направляющая функция G для этой системы, которая удовлетворяет условию $G(x) \to +\infty$ при $\|x\| \to +\infty$. В [6, с. 111–113] показано, что для любой неограниченной r_0-направляющей функции G для системы (1) имеет место равенство $\operatorname{ind}(G) = 1$. Из этого следует, что если для системы (1) имеется неограниченная r_0-направляющая функция, то вращение указанного выше векторного поля $S_0\colon B^n(r) \to \mathbb{R}^n$ вычисляется по формуле $\gamma(S_0, \partial B^n(r)) = (-1)^n$.

В терминах вектор-функций Ляпунова и направляющих функций сформулируем и докажем следующее достаточное условие существования у системы (1) ограниченных по Пуассону решений.

Теорема 1. *Пусть для системы (1) существуют $\mathcal{P}$-последовательность $(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$, неубывающая функция $b\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, для которой $b(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$, и вектор-функция Ляпунова $V\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ с системой сравнения (2) такие, что при любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $i \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство (4). Кроме того, пусть существуют числа $r_1 > r_0$ и неограниченная r_0-направляющая функция G для системы*

$$\frac{d\varrho}{dt} = g(t,\varrho), \quad (t,\varrho) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^k, \quad g(t,\varrho) = f(t, \varrho + \overline{r}_1), \quad \overline{r}_1 = (r_1, \ldots, r_1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^k, \tag{7}$$

где $f(t,\xi)$ – правая часть системы (2), и при этом число r_1 удовлетворяет следующими условиями:

1) $G(\varrho) \geqslant M_0$ при всех $\varrho \in \mathbb{R}^k$, $\|\varrho\| = r_1$, где $M_0 = \max\limits_{\|\varrho\| \leqslant r_0} G(\varrho)$;

2) $B^k_{\overline{r}_1}(r_1) = \{\xi \in \mathbb{R}^k | \|\xi - \overline{r}_1\| \leqslant r_1\} \subset \operatorname{Im}(V\colon \{0\} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k)$.

Тогда система (1) имеет по крайней мере одно ограниченное по Пуассону решение.

Доказательство. Рассмотрим векторное поле $L_0\colon B^k(r_1) \to \mathbb{R}^k$, определяемое формулой $L_0(\varrho) = -g(0,\varrho)$, где $g(t,\varrho)$ – правая часть системы (7). Из сказанного выше следует равенство $\gamma(L_0, \partial B^k(r_1)) = (-1)^k$. Таким образом, $\gamma(L_0, \partial B^k(r_1)) \neq 0$.

Покажем, что какова бы ни была точка $\varrho_0 \in \partial B^k(r_1)$, правая часть $\mathrm{Tr}^+(\varrho_0, t_0)$ траектории $\mathrm{Tr}(\varrho(0, t_0, \varrho_0))$ системы (7) не имеет в $B^k(r_1)$ общих точек с левой частью $\mathrm{Tr}^-(\varrho_0, t_0)$ этой траектории. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = G(\varrho(t, t_0, \varrho_0))$, $t \geqslant 0$, и её производную

$$\varphi'(t) = \frac{d(G(\varrho(t,t_0,\varrho_0))}{dt} = (\operatorname{grad} G(\varrho(t,t_0,\varrho_0)), g(t, \varrho(t,t_0,\varrho_0))), \quad t \geqslant 0.$$

Так как G является r_0-направляющей функцией для системы (7), то $\varphi'(t) > 0$ для тех $t \geqslant 0$, при которых $\|\varrho(t,t_0,\varrho_0)\| \geqslant r_0$. Очевидно, что $\varphi(t_0) = G(\varrho_0) \geqslant M_0$ и $\varphi(t) \leqslant M_0$ для тех $t \geqslant 0$, при которых $\|\varrho(t,t_0,\varrho_0)\| \leqslant r_0$. Кроме того, очевидно, что $\varphi(t)$ – возрастающая функция для тех $t \geqslant 0$, при которых $\|\varrho(t,t_0,\varrho_0)\| \geqslant r_0$. Из этого вытекает, что для любой точки $\varrho(t,t_0,\varrho_0) \in \mathrm{Tr}^-(\varrho_0, t_0)$ справедливо неравенство $\varphi(t) \leqslant \varphi(t_0)$.

Покажем теперь, что если $\varrho(t,t_0,\varrho_0) \in \mathrm{Tr}^+(\varrho_0, t_0)$, то имеет место неравенство

$$\|\varrho(t,t_0,\varrho_0)\| > r_0.$$

Предположим противное, т.е. что для некоторого $t_1 > t_0$ выполнено условие $\|\varrho(t_1,t_0,\varrho_0)\| \leqslant r_0$ и, следовательно, имеет место неравенство $\varphi(t_1) \leqslant M_0$. Так как $\varphi(t_0) \geqslant M_0$ и $\varphi'(t_0) > 0$, то найдётся такое $t_0 < t' < t_1$, что $\varphi(t') > M_0$ и, следовательно, $\|\varrho(t',t_0,\varrho_0)\| > r_0$. Из этого в силу непрерывности функции $\|\varrho(t,t_0,\varrho_0)\|$ следует, что найдётся $t' < t_2 \leqslant t_1$, для которого $\|\varrho(t_2,t_0,\varrho_0)\| = r_0$ и $\|\varrho(t,t_0,\varrho_0)\| \geqslant r_0$ при $t' < t \leqslant t_2$. Очевидно, что $\varphi(t_2) \leqslant M_0$, поскольку $\|\varrho(t_2,t_0,\varrho_0)\| = r_0$. Поскольку $\|\varrho(t,t_0,\varrho_0)\| \geqslant r_0$ для $t' \leqslant t \leqslant t_2$, то $\varphi'(t) > 0$ при $t' \leqslant t \leqslant t_2$ и, значит, $\varphi(t') < \varphi(t_2)$. Из этого получаем $\varphi(t_2) > M_0$, что противоречит указанному выше неравенству $\varphi(t_2) \leqslant M_0$. Таким образом, для любой точки $\varrho(t, t_0, \varrho_0) \in \mathrm{Tr}^+(\varrho_0, t_0)$ имеем $\|\varrho(t, t_0, \varrho_0)\| > r_0$.

Отсюда получаем, что $\varphi'(t) > 0$ при $t > t_0$ и, следовательно, $\varphi(t) > \varphi(t_0)$ при $t > t_0$. Итак, $\varphi(t) \leqslant \varphi(t_0)$ при $0 \leqslant t \leqslant t_0$ и $\varphi(t) > \varphi(t_0)$ при $t > t_0$. Это означает, что правая часть $\mathrm{Tr}^+(\varrho_0, t_0)$ траектории $\mathrm{Tr}\,(\varrho(0, t_0, \varrho_0))$ системы (7) не имеет в $B^k(r_1)$ общих точек с левой частью $\mathrm{Tr}^-(\varrho_0, t_0)$ этой траектории. Проводя теперь рассуждения, аналогичные тем, что были проведены в доказательстве теоремы 1, получим решение $\varrho(t, 0, \mu)$, где $\mu \in B^k(r_1)$, системы (7), для которого при всех $t \geqslant 0$ выполнено включение $\varrho(t, 0, \mu) \in B^k(r_1)$.

Так как система (7) получается из системы (2) с помощью замены переменных $\xi = \varrho + \overline{r}_1$, то для решения $\xi(t, 0, \mu + \overline{r}_1) = \varrho(t, 0, \mu) + \overline{r}_1$ системы (2) при всех $t \geqslant 0$ выполнено включение $\xi(t, 0, \mu + \overline{r}_1) \in B^k_{\overline{r}_1}(r_1)$. Очевидно включение $\mu + \overline{r}_1 \in B^k_{\overline{r}_1}(r_1)$. Из условия 2) теоремы следует, что найдётся такая точка $(0, x_0) \in \{0\} \times \mathbb{R}^n$, для которой $V(0, x_0) = \mu + \overline{r}_1$. Проводя теперь рассуждения, аналогичные тем, что были проведены в доказательстве предложения 1, получим ограниченность по Пуассону решения $x(t, 0, x_0)$ системы (1). Теорема доказана.

Следующее утверждение является достаточным условием существования у системы (1) y-ограниченных по Пуассону решений.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1 с заменой неравенства (4) неравенством (5). Тогда система (1) имеет по крайней мере одно y-ограниченное по Пуассону решение.*

Доказательство. Дословно повторим рассуждения из доказательства теоремы 1 до момента рассмотрения решения $\xi(t, 0, \mu + \overline{r}_1) = \varrho(t, 0, \mu) + \overline{r}_1$ системы (2), для которого при всех $t \geqslant 0$ выполнено включение $\xi(t, 0, \mu + \overline{r}_1) \in B^k_{\overline{r}_1}(r_1)$, где $V(0, x_0) = \mu + \overline{r}_1 \in B^k_{\overline{r}_1}(r_1)$. После этого, проводя рассуждения аналогичные тем, которые проведены в доказательстве предложения 2, получим, что решение $x(t, 0, x_0)$ системы (1) y-ограничено по Пуассону. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект МК-211.2020.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892.
2. *Yoshizawa T.* Liapunov's function and boundedness of solutions // Funkcial. Ekvac. 1959. V. 2. P. 95–142.
3. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения относительно части переменных. М., 1987.
4. *Абдуллин Р.З., Анапольский Л.Ю., Воронов А.А., Земляков А.С., Козлов Р.И., Маликов А.И, Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости. М., 1987.
5. *Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М., 2001.
6. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., 1966.
7. *Лапин К.С.* Равномерная ограниченность по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений и вектор-функции Ляпунова // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 1. С. 40–50.
8. *Лапин К.С.* Вектор-функции Ляпунова, канонические области Красносельского и существование ограниченных по Пуассону решений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 10. С. 1304–1309.
9. *Звягин В.Г., Корнев С.В.* Метод направляющих функций и его модификации. М., 2018.
10. *Мищенко А.С., Фоменко А.Т.* Курс дифференциальной геометрии и топологии. М., 1980.
11. *Дольд А.* Лекции по алгебраической топологии. М., 1976.
12. *Карташев А.П., Рождественский Б.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М., 1980.

Мордовский государственный педагогический университет
им. М.Е. Евсевьева, г. Саранск

Поступила в редакцию 04.10.2020 г.
После доработки 29.12.2020 г.
Принята к публикации 22.01.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 3, с. 313–325

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.35

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ С ГРАНИЧНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ И ВНУТРЕННИМ НЕЛИНЕЙНЫМ ФОКУСИРУЮЩИМ ИСТОЧНИКОМ ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА РОСТА

© 2021 г. А. Б. Алиев, Г. Х. Шафиева

Для систем одномерных полулинейных волновых уравнений с фокусирующим нелинейным источником, имеющим переменный показатель роста, исследуется смешанная задача с нелинейными диссипативными граничными условиями. Доказаны теоремы о разрушении решений за конечный промежуток времени.

DOI: 10.31857/S0374064121030031

Введение. Для системы двух волновых уравнений

$$u_{i_{tt}} - u_{i_{xx}} = f_i(x, u_1, u_2), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

в которых правые части имеют вид

$$f_1(x, u_1, u_2) = |u_1 + u_2|^{2p(x)}(u_1 + u_2) + |u_1|^{p(x)-1}|u_2|^{p(x)+1}u_1,$$

$$f_2(x, u_1, u_2) = |u_1 + u_2|^{2p(x)}(u_1 + u_2) + |u_1|^{p(x)+1}|u_2|^{p(x)-1}u_2,$$

где $p(x)$ – заданная вещественнозначная функция, рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$u_i(0, t) = 0, \quad t > 0, \tag{2}$$

$$u_{i_x}(l, t) + |u_{i_t}(l, t)|^{r_i - 1}u_{i_t}(l, t) = 0, \quad t > 0, \tag{3}$$

$$u_i(0, x) = u_{i0}(x), \quad u_{i_t}(0, x) = u_{i1}(x), \quad 0 < x < l, \tag{4}$$

здесь r_1, r_2 – фиксированные вещественные числа, бо́льшие единицы, а $u_{10}(x)$, $u_{20}(x)$, $u_{11}(x)$, $u_{21}(x)$ – заданные вещественнозначные функции.

Смешанные задачи с нестационарными граничными условиями возникают в различных задачах механики и оптической физики (см., например, [1]).

Для нелинейных волновых уравнений значительное внимание уделялось изучению смешанной задачи в случае постоянного показателя роста нелинейности, а также исследованию нестационарных граничных условий (см., например, [2–7]). Более конкретно отметим, что вопрос о глобальной разрешимости смешанной задачи для одномерного нелинейного волнового уравнения с линейным нестационарным граничным условием изучен в работе [2], а вопрос о существовании глобального минимального аттрактора соответствующей динамической системы рассмотрен в работе [3].

Смешанная задача для нелинейных волновых уравнений с постоянным показателем роста нелинейности и нелинейным нестационарным граничным условием также достаточно подробно исследована. Например, отметим работы [4, 5], в которых изучен вопрос о разрешимости таких задач и установлено существование глобального минимального аттрактора соответствующей динамической системы. В работах [6, 7] исследован эффект возникновения взрыва за конечное время решений смешанной задачи для полулинейного одномерного волнового уравнения с фокусирующей нелинейностью и нестационарным нелинейным граничным условием.

В последнее время большой интерес вызывают рассмотрение и анализ нелинейных моделей, описываемых уравнениями с переменными показателями роста нелинейности [8–17]. Математические модели физических процессов, таких как поток электрореологических жидкостей или жидкостей с температурно-зависимой вязкостью, фильтрация в пористых средах, нелинейная вязкоупругость и многие другие сводятся к гиперболическим уравнениям с переменными показателями роста нелинейности. Более подробную информацию об этих вопросах можно найти в работах [10–18].

Следует, однако, отметить, что до сих пор имеется мало работ, в которых исследованы гиперболические задачи с нелинейностями типа переменной экспоненты (см., например, [15–18]). Среди этих работ выделим статью [18], в которой исследована начально-краевая задача с граничным условием Дирихле для нелинейного волнового уравнения

$$u_{tt} - \operatorname{div}(|\nabla u|^{r(x)-2}\nabla u) + a|u_t|^{m(x)-2}u_t = b|u|^{p(x)-2}u, \quad t > 0, \quad x \in \Omega,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, а $r(x)$, $m(x)$, $p(x)$ – заданные вещественнозначные функции. Доказано, что при выполнении некоторых соотношений между этими функциями решение соответствующей начально-краевой задачи разрушается за конечное время. Отметим, что эффект разрушения за конечный промежуток времени решений волновых уравнений с постоянным показателем роста нелинейности исследован достаточно подробно (см., например, [19, 20]).

Цель данной работы состоит в нахождении условий, при выполнении которых решения смешанной задачи (1)–(4) разрушаются за конечное время.

Статья имеет следующую структуру: в п. 1 приведены основные понятия и основные результаты данной работы; в п. 2 рассмотрены необходимые сведения о пространствах Лебега с переменным показателем; в п. 3 дано доказательство основной теоремы работы – теоремы 2; в п. 4 представлена схема доказательства теоремы 3.

1. Основные результаты. В полуполосе $Q = (0,l) \times (0,+\infty)$ рассматривается смешанная задача (1)–(4), в которой функция $p(x)$ непрерывна и удовлетворяет логарифмическому условию Липшица, т.е. существует $\delta > 0$ такое, что при любых $x, y \in [0,l]$, для которых $|x-y| < \delta$, выполняется неравенство

$$|p(x) - p(y)| \leqslant \operatorname{const}/|\log|x-y||. \tag{5}$$

Предположим, что

$$1 < \min_{0\leqslant x\leqslant l} p(x) = p_1, \quad \max_{0\leqslant x\leqslant l} p(x) = p_2 < +\infty. \tag{6}$$

Введём линейные пространства

$$H^1 = \{v : v, v' \in L_2(0,l)\}, \quad {}_0H^1 = \{v : v \in H^1, \ \ v(0) = 0\}.$$

В дальнейшем предполагаем, что имеют место включения

$$u_{i0}(\cdot) \in {}_0H^1, \quad u_{i1}(\cdot) \in L_2(0,l), \quad i = 1,2. \tag{7}$$

Определим энергетическую функцию

$$E(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}[\|u_{i_t}(t,\cdot)\|_2^2 + \|u_{i_x}(t,\cdot)\|_2^2] - G(u_1(t,\cdot), u_2(t,\cdot)), \tag{8}$$

где

$$G(u_1,u_2) = \int\limits_0^l \frac{1}{2(p(x)+1)}|u_1(x)+u_2(x)|^{2(p(x)+1)}\,dx + \int\limits_0^l \frac{1}{p(x)+1}|u_1(x)u_2(x)|^{p(x)+1}\,dx.$$

Используем стандартный метод сведения к задаче Коши для дифференциальных уравнений с неограниченным оператором. С этой целью, следуя [5, 6], определим в пространстве $L_2(0,l)$ линейный оператор ${}_0\Delta$ следующим образом:

$$D({}_0\Delta) = \{f : f \in H^2(0,l), \quad f(0) = 0, \quad f'(l) = 0\}, \quad {}_0\Delta f(x) = f''(x), \quad x \in (0,l),$$

где $H^2(0,l) = \{v : v, v', v'' \in L_2(0,l)\}$.

Введём также оператор $N : \mathbb{R} \to H^2$, задав его условием $\alpha \mapsto h = N\alpha$, где $h''(x) = 0$, $0 < x < l$, $h(0) = 0$, $h'(l) = \alpha$, т.е. $N\alpha = \alpha x$.

В пространстве $\mathcal{H} = {}_0H^1 \times L_2(0,l) \times {}_0H^1 \times L_2(0,l)$ зададим оператор A следующим образом:

$$D(A) = \{w = (u_1, v_1, u_2, v_2) \in \mathcal{H}, \quad u_i + Ng(\gamma v_i) \in D({}_0\Delta), \quad i = 1,2\},$$

$$A(w) = (v_1, {}_0\Delta(u_1 + Ng_1(\gamma v_1)), v_2, {}_0\Delta(u_2 + Ng_2(\gamma v_2))),$$

где $g_i(s) = |s|^{r_i - 1} s$, $i = 1,2$.

И, наконец, определим нелинейный оператор $F(\cdot)$ равенством

$$F(w) = (0, f_1(x, u_1, u_2), 0, f_2(x, u_1, u_2)),$$

здесь $w = (u_1, v_1, u_2, v_2) \in \mathcal{H}$. Тогда задача (1)–(4) запишется в следующем виде:

$$w' = A(w) + F(w),$$

$$w(0) = w_0, \tag{9}$$

где $w_0 = (u_{10}(x), u_{11}(x), u_{20}(x), u_{21}(x))$, $0 \leqslant x \leqslant l$.

Несложно доказать, что $-A(\cdot)$ – максимально монотонный оператор, а действующий из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$ оператор $F(\cdot)$ удовлетворяет локальному условию Липшица. Используя метод срезки нелинейной части $F(w)$, нетрудно доказать, что для любого $w_0 \in \mathcal{H}$ задача (9) имеет единственное локально слабое решение (см., например, [4, 21, 22]). При этом слабые решения являются по определению пределом сильных решений, т.е. решений задачи (9) с начальными данными $w_{0n} \in D(A)$, $n \in \mathbb{N}$, где $w_{0n} \to w_0$ в $\mathcal{H}$ при $n \to \infty$ В итоге для задачи (1)–(4) получим следующий результат.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (5)–(7). Тогда существует такое $T' > 0$, что задача (1)–(4) имеет единственное слабое решение $\{u_1(\cdot), u_2(\cdot)\}$, где $u_i(\cdot) \in C([0,T']; {}_0H^1)$, $u'_{i_t}(\cdot) \in C([0,T']; L_2(0,l))$, $u_{i_t}(l,t) \in L^{r_i+1}(0,T')$, $i = 1,2$, и справедливо тождество*

$$E(t) + \sum_{i=1}^{2} \int_0^t |u_{i_\tau}(l,\tau)|^{r_i+1}\, d\tau = E(0). \tag{10}$$

В дальнейшем вместо выражения “слабое решение” будем употреблять термин “решение”.

Наша основная цель – исследовать вопрос отсутствия глобальных решений задачи (1)–(4) при выполнении следующих условий:

$$r_1 \leqslant r_2, \quad r_2 < p_1 + 1. \tag{11}$$

В случае, когда начальная энергия отрицательна, т.е. когда

$$E(0) < 0, \tag{12}$$

получен следующий результат об отсутствии глобальных решений.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (5)–(7), (11) и (12). Тогда решение задачи (1)–(4) разрушается за конечное время.*

Теперь рассмотрим задачу (1)–(4) в случае, когда начальная энергия, вообще говоря, не является отрицательной. Для этого введём следующие обозначения:

$$\alpha_0 = \sum_{i=1}^{2} \|u_{i0_x}(\cdot)\|_2^2, \quad E_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(p_1+1)}\right)\alpha_1,$$

где $\alpha_1 = \{(p_1+1)4^{p_2} l^{p_1+2}\}^{-1/p_1}$.

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия (5)–(7), (11), а также неравенства*

$$l > \frac{1}{2^{p_2}\sqrt{p_1+1}}, \tag{13}$$

$$\alpha_1 < \alpha_0 < 1/l, \tag{14}$$

$$E(0) < E_1. \tag{15}$$

Тогда решение задачи (1)–(4) разрушается за конечное время.

2. Необходимые сведения о пространстве Лебега с переменным показателем. Чтобы доказать теоремы 2 и 3, сначала приведём определение пространства Лебега с переменным показателем и некоторые необходимые в работе свойства этих пространств в одномерном случае.

Пусть $l > 0$, $q(\cdot) : [0,l] \to [1,+\infty)$ – измеримая функция. Введём линейное пространство

$$L_{q(\cdot)}(0,l) = \left\{ v : [0,l] \to \mathbb{R} \text{ – измеримая функция}, \quad \rho_{q(\cdot)}(v) < +\infty \right\},$$

где

$$\rho_{q(\cdot)}(v) = \int\limits_0^l |v(x)|^{q(x)}\, dx.$$

Известно, что величина $\|v\|_{q(\cdot)} = \inf\{\lambda > 0;\ \rho_{q(\cdot)}(\lambda^{-1}v) \leqslant 1\}$ определяет норму в $L_{q(\cdot)}(0,l)$. Более того, если функция $q(x)$ удовлетворяет условию (5) для $q(x) = p(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, т.е.

$$|q(x) - q(y)| \leqslant \mathrm{const}/|\log|x-y||, \quad x, y \in [0,l], \quad |x-y| < \delta, \tag{16}$$

а также условию (6), т.е.

$$1 < q_1 = \min_{0\leqslant x\leqslant l} q(x) \leqslant q(x) \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant l} q(x) = q_2 < +\infty, \tag{17}$$

то $L_{q(\cdot)}(0,l)$ – банахово пространство (см. [10–14]).

Пространство Соболева с переменным показателем определяется следующим образом:

$$W^1_{q(\cdot)}(0,l) = \{v : v, \nabla v \in L_{q(\cdot)}(0,l)\}, \quad \|v\|_{W^1_{q(\cdot)}(0,l)} = \|v\|_{L_{q(\cdot)}(0,l)} + \|\nabla v\|_{L_{q(\cdot)}(0,l)}.$$

Известно, что если для функции $q(x)$ выполнены условия (16) и (17), то $W^1_{q(\cdot)}[0,l] \subset C[0,l]$ (см. [10, 11]). В этом случае между нормой в $L_{q(\cdot)}(0,l)$ и величиной $\rho_{q(\cdot)}(v)$ имеют место следующие соотношения (см. [11, 12]):

$$\min\{\|v\|^{q_1}_{L_{q(\cdot)}(0,l)}, \|v\|^{q_2}_{L_{q(\cdot)}(0,l)}\} \leqslant \rho_{q(\cdot)}(v) \leqslant \max\{\|v\|^{q_1}_{L_{q(\cdot)}(0,l)}, \|v\|^{q_2}_{L_{q(\cdot)}(0,l)}\}.$$

Если для $q(x)$ выполнены условия (16), (17), то имеет место также следующее неравенство Гёльдера:

$$\int\limits_0^l |u(x)v(x)|\, dx \leqslant 2\|u\|_{L_{q(\cdot)}(0,l)}\|v\|_{L_{q'(\cdot)}(0,l)},$$

где $u \in L_{q(\cdot)}(0,l)$, $v \in L_{q'(\cdot)}(0,l)$ и $q'(x) = q(x)/(q(x)-1)$, $0 \leqslant x \leqslant l$ (см. [11, 12]).

Лемма 1. *Пусть для функции $q(x)$ выполнены условия (16), (17). Тогда справедливо неравенство*

$$\|v\|_{q_1}^{q_1} \leqslant \rho_{q(\cdot)}(v) + l^{(q_2-q_1)/q_2}\{\rho_{q(\cdot)}(v)\}^{q_1/q_2}. \tag{18}$$

Доказательство. Введя обозначения $\Omega_- = \{x : |v(x)| \leqslant 1\}$, $\Omega_+ = \{x : |v(x)| > 1\}$, получаем

$$\rho_{q(\cdot)}(v) \geqslant \int\limits_{\Omega_-} |v(x)|^{q_2}\,dx + \int\limits_{\Omega_+} |v(x)|^{q_1}\,dx. \tag{19}$$

С другой стороны, применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$\int\limits_{\Omega_-} |v(x)|^{q_1}\,dx \leqslant l^{(q_2-q_1)/q_1}\bigg(\int\limits_{\Omega_-} |v(x)|^{q_2}\,dx\bigg)^{q_1/q_2}. \tag{20}$$

Из неравенств (19) и (20) следуют оценки

$$\rho_{q(\cdot)}(v) \geqslant \int\limits_{\Omega_+} |v(x)|^{q_1}\,dx \quad \text{и} \quad l^{(q_2-q_1)/q_1}(\rho_{q(\cdot)}(v))^{q_1/q_2} \geqslant \int\limits_{\Omega_-} |v(x)|^{q_1}\,dx,$$

складывая которые, приходим к неравенству (18). Лемма доказана.

Используя определение функционала $\rho_{q(\cdot)}(\cdot)$, нетрудно доказать, что имеет место следующая

Лемма 2. *Пусть для функции $q(x)$ выполнены условия (16), (17). Тогда при любом $v \in {}_0H^1 \bigcap L_{q(\cdot)}(0,l)$ справедлива оценка*

$$\rho_{q(\cdot)}(v) \leqslant l \max\{\|v\|_{C[0,l]}^{q_1}, \|v\|_{C[0,l]}^{q_2}\}, \tag{21}$$

где $\|v\|_{C[0,l]} = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant l} |v(x)|$.

В силу теорем вложения из оценки (21) вытекает, что

$$\rho_{q(\cdot)}(v) \leqslant l \max\{l^{q_1/2}\|v\|_{{}_0H^1}^{q_1}, l^{q_2/2}\|v\|_{{}_0H^1}^{q_2}\}. \tag{22}$$

Рассмотрим функционал

$$G_{a,b}(v_1,v_2) = \int\limits_0^l a(x)|v_1(x)+v_2(x)|^{2q(x)}\,dx + \int\limits_0^l b(x)|v_1(x)v_2(x)|^{q(x)}\,dx,$$

где $0 < a_1 \leqslant a(x) \leqslant a_2 < +\infty$, $0 < b_1 \leqslant b(x) \leqslant b_2 < +\infty$, $x \in [0,l]$. Если функция $q(x)$ непрерывна и $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant l} q(x) > 0$, то $\theta_{q(\cdot)} = \min\limits_{0\leqslant x\leqslant l}\max\limits_{t\in\mathbb{R}}\{|t+1|^{2q(x)} + |t|^{q(x)}\} > 0$.

Лемма 3. *Пусть для функции $q(x)$ выполнены условия (16), (17). Тогда существуют такие положительные числа c_1 и c_2, зависящие от a_1, a_2, b_1, b_2, $\theta_{q(\cdot)}$, что при любых $v_1(\cdot), v_2(\cdot) \in L_{2q(\cdot)}[0,l]$ справедливы следующие неравенства:*

$$c_1\sum_{i=1}^2 \rho_{2q(\cdot)}(v_i) \leqslant G_{a,b}(v_1,v_2) \leqslant c_2\sum_{i=1}^2 \rho_{2q(\cdot)}(v_i).$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\min(a_1,b_1)\bigg\{\int\limits_0^l |v_1(x)+v_2(x)|^{2q(x)}\,dx + 2\int\limits_0^l |v_1(x)v_2(x)|^{q(x)}\,dx\bigg\} \leqslant G_{a,b}(v_1,v_2) \leqslant$$

$$\leqslant \max(a_2,b_2)\bigg\{\int\limits_0^l |v_1(x)+v_2(x)|^{2q(x)}\,dx + 2\int\limits_0^l |v_1(x)v_2(x)|^{q(x)}\,dx\bigg\}.$$

Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства

$$|a+b|^{2q(x)} \leqslant 2^{2q(x)-1}(|a|^{2q(x)} + |b|^{2q(x)}) \ \text{ и } \ |ab|^{q(x)} \leqslant 2^{-1}(|a|^{2q(x)} + |b|^{2q(x)}). \tag{23}$$

С другой стороны,

$$|a+b|^{2q(x)} + 2|ab|^{q(x)} = |b|^{2q(x)}\{|1+a/b|^{2q(x)} + 2|a/b|^{q(x)}\} \geqslant \theta_0|b|^{2q(x)}, \quad \theta_0 = \theta_{q(\cdot)} > 0. \tag{24}$$

Аналогично получим неравенство

$$|a+b|^{2q(x)} + 2|ab|^{q(x)} \geqslant \theta_0|a|^{2q(x)}. \tag{25}$$

Очевидно, что утверждение леммы 3 является следствием неравенств (23)–(25).

3. Доказательство теоремы 2. Отметим, что в доказательствах теорем 2 и 3 все рассуждения проводятся для решений с гладкими начальными данными. Для начальных данных, удовлетворяющих условиям (7), аналогичные утверждения получаются с помощью аппроксимации их гладкими функциями и последующим предельным переходом. В доказательстве величины c_i и c_{kj} для разных индексов i и k, j являются константами, не зависящими от решения задачи (1)–(4).

Из тождества (10) следует оценка

$$E(t) \leqslant E(0), \quad t > 0. \tag{26}$$

Введём обозначение $H(t) = -E(t)$. Из неравенств (12) и (26) вытекает, что

$$H(t) \geqslant -E(0) > 0, \quad t \in [0, \infty). \tag{27}$$

В силу леммы 3 существуют такие постоянные $0 < c_1 \leqslant c_2$, при которых выполняются неравенства

$$c_1 \sum_{i=1}^{2} \rho(u_i) \leqslant G(u_1, u_2) \leqslant c_2 \sum_{i=1}^{2} \rho(u_i), \tag{28}$$

где $\rho(u_i) = \rho_{2(p(\cdot)+1)}(u_i)$. Отсюда, учитывая оценку (27), получаем

$$H(t) \leqslant G(u_1, u_2) \leqslant c_2 \sum_{i=1}^{2} \rho(u_i). \tag{29}$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{2} \rho(u_i) \geqslant c_3 H(t) > -c_3 E(0) > 0, \tag{30}$$

где $c_3 = 1/c_2$. В силу леммы 1 имеем

$$\sum_{i=1}^{2} \|u_i\|_{2(p_1+1)}^{2(p_1+1)} \leqslant \sum_{i=1}^{2} \rho(u_i)\Biggl[1 + l^{(p_2-p_1)/(p_2+1)}\Biggl(\sum_{i=1}^{2} \rho(u_i)\Biggr)^{(p_1-p_2)/(p_2+1)}\Biggr]. \tag{31}$$

Из (27) следует неравенство

$$\Biggl[\sum_{i=1}^{2} \rho(u_i)\Biggr]^{(p_2-p_1)/(p_2+1)} \leqslant (-E(0))^{(p_2-p_1)/(p_2+1)} = c_4,$$

учитывая которое в неравенстве (31), приходим к следующему утверждению.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия (5), (6), (8) и* (u_1, u_2) *– решение задачи (1)–(4). Тогда существует постоянная* $c_5 > 0$ *такая, что*

$$\sum_{i=1}^{2} \|u_i\|_{2(p_1+1)}^{2(p_1+1)} \leqslant c_5 \sum_{i=1}^{2} \rho(u_i). \tag{32}$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями

$$\eta_j = \frac{2(p_1+1)}{r_j+1} \quad \text{и} \quad \eta_j' = \frac{2(p_1+1)}{2p_1+1-r_j},$$

имеем следующее неравенство:

$$\int_0^l |u_j|^{r_j+1}\,dx \leqslant l^{(2p_1+1-r_j)/(2p_1+2)} \biggl(\int_0^l |u_j|^{2(p_1+1)}\,dx\biggr)^{(r_j+1)/(2p_1+1)}. \tag{33}$$

Из (32) и (33) вытекает, что

$$\sum_{j=1}^{2} \int_0^l |u_j|^{r_j+1}\,dx \leqslant c_6 \biggl[\biggl(\sum_{j=1}^{2} \rho(u_j)\biggr)^{(r_1+1)/(2p_1+2)} + \biggl(\sum_{j=1}^{2} \rho(u_j)\biggr)^{(r_2+1)/(2p_1+2)}\biggr]. \tag{34}$$

Далее, используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$|u_j(l,1)|^{r_j+1} \leqslant \frac{1}{l}\int_0^l |u_j(x,t)|^{r_j+1}\,dx + (r_j+1)\int_0^l |u_j(x,t)|^{r_j}|u_{jx}(x,t)|\,dx, \quad j=1,2. \tag{35}$$

Если применить неравенства Гёльдера и Юнга с показателями $\alpha+1$ и $(\alpha+1)/\alpha$, где

$$\frac{1}{2(p_1+1)} < \alpha < 1,$$

то будем иметь

$$\int_0^l |u_j(x,t)|^{r_j}|u_{jx}(x,t)|\,dx \leqslant \frac{\alpha+1}{\alpha}\int_0^l |u_j(x,t)|^{r_j(\alpha+1)/\alpha}\,dx + (\alpha+1)\int_0^l |u_{jx}(x,t)|^{\alpha+1}\,dx, \tag{36}$$

$j = 1, 2.$ В случае же, когда в качестве показателей в неравенстве Гёльдера выбраны числа

$$\eta_j = \frac{2(p_1+1)\alpha}{r_j(\alpha+1)} \quad \text{и} \quad \eta_j' = \frac{2(p_1+1)\alpha}{2(p_1+1)\alpha - r_j(\alpha+1)},$$

получаем неравенство

$$\int_0^l |u_j(x,t)|^{r_j(\alpha+1)/\alpha}\,dx \leqslant l^{(2(p_1+1)\alpha - r_j(\alpha+1))/(2(p_1+1)\alpha)} \times$$

$$\times \biggl(\int_0^l |u_j(x,t)|^{2(p_1+1)}\,dx\biggr)^{(r_j(\alpha+1))/(2(p_1+1)\alpha)}, \quad j=1,2. \tag{37}$$

А в случае, когда в качестве показателей в неравенстве Гёльдера взяты числа $\eta = 2/(\alpha+1)$ и $\eta' = 2/(1-\alpha)$, приходим к неравенству

$$\int\limits_0^l |u_{jx}(x,t)|^{\alpha+1}\,dx \leqslant l^{(1-\alpha)/2}\biggl(\int\limits_0^l |u_{jx}(x,t)|^2\,dx\biggr)^{(\alpha+1)/2}, \quad j=1,2. \tag{38}$$

Отсюда, учитывая неравенства (28), имеем

$$\sum_{j=1}^2 \int\limits_0^l |u_{jx}(x,t)|^{\alpha+1}\,dx \leqslant c_7(G(u_1,u_2))^{(\alpha+1)/2} \leqslant c_8\biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{(\alpha+1)/2}. \tag{39}$$

В силу оценок (35)–(39) из (34) следует неравенство

$$\sum_{j=1}^2 |u_j(l,t)^{r_j+1}| \leqslant c_9\biggl[\biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{(r_1+1)/(2p_1+2)} + \biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{(r_2+1)/(2p_1+2)} +$$

$$+\biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{r_1(\alpha+1)/(2(p_1+1)\alpha)} + \biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{r_2(\alpha+1)/(2(p_1+1)\alpha)} + \biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{(\alpha+1)/2}\biggr]. \tag{40}$$

Из (29) и (40) вытекает неравенство

$$\sum_{i=1}^2 H^{\sigma r_i}(t)|u_i(l,t)|^{r_i+1} \leqslant c_{10}\sum_{i=1}^2\biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{\sigma r_i}\biggl[\biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{(r_1+1)/(2p_1+2)} + \biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{(r_2+1)/(2p_1+2)} +$$

$$+\biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{r_1(\alpha+1)/(2(p_1+1)\alpha)} + \biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{r_2(\alpha+1)/(2(p_1+1)\alpha)} + \biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{(\alpha+1)/2}\biggr] =$$

$$= c_{10}\sum_{i=1}^2\sum_{k=1}^2\biggl|\biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{\xi_{ik}} + \biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{\eta_{ik}} + \biggl(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\biggr)^{\xi_i}\biggr|, \tag{41}$$

где

$$\xi_{ik} = \sigma r_i + \frac{r_k+1}{2(p_1+1)}, \quad \eta_{ik} = \sigma r_i + \frac{(\alpha+1)r_k}{2(p_1+1)\alpha}, \quad \zeta_i = \sigma r_i + \frac{\alpha+1}{2}, \quad i,k=1,2.$$

Если

$$0 < \sigma < \sigma_0 = \min\biggl\{\frac{2(p_1+1)-r_2-1}{2r_2(p_1+1)}, \frac{2(p_1+1)\alpha - r_2(\alpha+1)}{2\alpha(p_1+1)}, \frac{1-\alpha}{2r_2}, \frac{p_1}{2(p_1+1)}\biggr\},$$

то $\xi_{ik} < 1$, $\eta_{ik} < 1$, $\zeta_i < 1$, $i,k=1,2$.

Справедлива следующая

Лемма 5. *Пусть выполнены условия (5)–(7) и* $2 < s < 2(p_1+1)$. *Тогда при любых* $u_1, u_2 \in$ $\in {}_0H^1$ *справедливо неравенство*

$$[\rho(u_j)]^{s/(2p_1+2)} \leqslant c_{11}\biggl(\sum_{k=1}^2 \|u_{k_x}\|_2^2 + \sum_{k=1}^2 \rho(u_k)\biggr). \tag{42}$$

В частности, верно также неравенство

$$\|u_j\|_{2(p_1+1)}^s \leqslant c_{12}\biggl(\sum_{k=1}^2 \|u_{k_x}\|_2^2 + \sum_{k=1}^2 \|u_k\|_{2(p_1+1)}^{2(p_1+1)}\biggr). \tag{43}$$

Доказательство. Для доказательства леммы воспользуемся некоторыми идеями из доказательства леммы 3.2 работы [18].

Если $\rho(u_j) > 1,\ \ j = 1, 2,$ то очевидно, что

$$(\rho(u_j))^{s/(2p_1+2)} \leqslant \rho(u_j). \tag{44}$$

Рассмотрим теперь случай $\rho(u_j) \leqslant 1,\ \ j = 1, 2.$ Предположим, что $\|u_j\|_{C[0,l]} \leqslant 1.$ Тогда в силу леммы 2 и теоремы вложения получаем

$$(\rho(u_j))^{s/(2p_1+2)} \leqslant l^{s/(2p_1+2)}\|u_j\|^s_{C[0,l]} \leqslant l^{s/(2p_1+2)}\|u_j\|^2_{C[0,l]} \leqslant l^{1+s/(2p_1+2)}\|u_{jx}\|^2_2. \tag{45}$$

Если $\|u_j\|_{C[0,l]} > 1,$ то в силу леммы 2 имеем $\rho(u_j) \leqslant l\|u_j\|^{2(p_2+1)}_{C[0,l]}.$ С другой стороны, $\rho(u_j) \leqslant 1,$ поэтому верно неравенство $(\rho(u_j))^{s/(2p_1+2)} \leqslant (\rho(u_j))^{2/(2p_2+2)},$ из которого и оценки (45) вытекает, что

$$(\rho(u_j))^{s/(2p_1+2)} \leqslant l^{s/(2p_2+1)}\|u_j\|^2_{C[0,l]} \leqslant l^{1+s/(2p_2+2)}\|u_{jx}\|^2_2. \tag{46}$$

Таким образом, объединяя (45) и (46), получаем неравенство

$$\Big(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\Big)^{s/(2p_1+2)} \leqslant c_{13}\sum_{j=1}^2 \|u_{jx}\|^2_2. \tag{47}$$

Неравенство (42) является следствием неравенств (44) и (47). Неравенство (43) доказывается аналогичным образом. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 2. Используя оценки (26) и (29), из (42) получаем неравенство

$$\Big(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j)\Big)^{s/(2p_1+2)} \leqslant c_{14}\sum_{j=1}^2 \rho(u_j),$$

в силу которого и неравенства (41) справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^2 H^{\sigma r_i}(t)|u_i(l,t)|^{r_i+1} \leqslant c_{15}\sum_{j=1}^2 \rho(u_j).$$

Введём обозначение

$$L(t) = H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon\sum_{i=1}^2 \int\limits_0^l u_i(x,t)u_{i_t}(x,t)\,dx, \tag{48}$$

где $(u_1(x,t), u_2(x,t))$ – решение задачи (1)–(4). Вследствие (48) имеем

$$L'(t) = (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) + \varepsilon\sum_{i=1}^2 \int\limits_0^l |u_{i_t}(x,t)|^2\,dx - \varepsilon\sum_{i=1}^2 \int\limits_0^l |u_{i_x}(x,t)|^2\,dx -$$

$$- \varepsilon\sum_{i=1}^2 |u_{i_t}(l,t)|^{r_i-1}u_{i_t}(l,t)u_i(l,t) + \varepsilon G_1(u_1,u_2), \tag{49}$$

где

$$G_1(u_1,u_2) = \int\limits_0^l |u_1+u_2|^{2(p(x)+1)}\,dx + 2\int\limits_0^l |u_1u_2|^{p(x)+1}\,dx.$$

Из равенства (49) с учётом оценок (29) получаем, что

$$L'(t) = (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) + 2\varepsilon(1-\eta)(p_1+1)H(t) +$$

$$+\varepsilon(1+(1-\eta)(p_1+1))\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^l |u_{i_t}|^2\,dx + 2\varepsilon((1-\eta)(p_1+1)-1)\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^l |u_{i_x}|^2\,dx -$$

$$-2\varepsilon(1-\eta)(p_1+1)G(u_1,u_2) + \varepsilon G_1(u_1,u_2) - \varepsilon\sum_{i=1}^{2}|u_{i_t}(l,t)|^{r_1-1}u_{i_t}(l,t)u_i(l,t), \tag{50}$$

где $0<\eta<1$. Используя лемму 2 для величины

$$G_2(u_1,u_2) = G_1(u_1,u_2) - 2(1-\eta)(p_1+1)G(u_1,u_2),$$

будем иметь оценку

$$G_2(u_1,u_2) \geqslant c_{16}\bigg[\int\limits_0^l |u_1+u_2|^{2(p(x)+1)}\,dx + \int\limits_0^l |u_1u_2|^{p(x)+1}\,dx\bigg] \geqslant$$

$$\geqslant c_{17}\sum_{j=1}^{2}\int\limits_0^l |u_j(x,t)|^{2(p(x)+1)}\,dx = c_{17}\sum_{j=1}^{2}\rho(u_j). \tag{51}$$

Из представления (50) с учётом оценки (51) вытекает неравенство

$$L'(t) \geqslant (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) + 2\varepsilon(1-\eta)(p_1+1)H(t) +$$

$$+\varepsilon\bigg[\int\limits_0^l |u_t|^2\,dx + \int\limits_0^l |u_x|^2\,dx\bigg] + c_{17}\varepsilon\sum_{j=1}^{2}\rho(u_j) - \varepsilon J, \tag{52}$$

где $J = \sum_{i=1}^2 |u_{i_t}(l,t)|^{r_i-1}u_{i_t}(l,t)u_i(l,t)$.

Пусть $\delta = K^{-r_i/(r_i+1)}H^{(\sigma r_i)/(r_i+1)}(t)$, где $K>0$. Тогда, применяя неравенства Гёльдера и Юнга с показателями $\eta_i' = r_i+1$ и $\eta_i = (r_i+1)/r_i$, $i=1,2$, получаем

$$|J| \leqslant \sum_{i=1}^{2}\frac{r_i}{r_i+1}\delta^{-(r_i+1)/r_i}|u_{i_t}(l,t)|^{r_i+1} + \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{r_i+1}\delta^{r_i+1}|u_{i_t}(l,t)|^{r_i+1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r_2}{r_1+1}KH^{-\sigma}(t)H'(t) + \frac{K^{-r_1}}{r_1+1}c_{18}\sum_{j=1}^{2}\rho(u_j). \tag{53}$$

Из неравенств (52) и (53) следует, что

$$L'(t) \geqslant \left(1-\sigma-\frac{\varepsilon r_2}{r_1+1}K\right)H^{-\sigma}(t)H'(t) + 2\varepsilon(1-\eta)(p_1+1)H(t) +$$

$$+c_{19}\varepsilon\bigg[\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^l |u_{i_t}|^2\,dx + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^l |u_{i_x}|^2\,dx\bigg] + \varepsilon\left(c_{20}-\frac{K^{-r_1}}{r_1+1}c_{21}\right)\sum_{j=1}^{2}\rho(u_j).$$

Отсюда, выбирая $K>0$ достаточно большим и $\varepsilon>0$ достаточно малым, получаем неравенство

$$L'(t)\geqslant c_{22}\biggl[H(t)+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^l |u_{i_t}|^2\,dx+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^l |u_{i_x}|^2\,dx+\sum_{j=1}^{2}\rho(u_j)\biggr],$$

вследствие которого, учитывая лемму 4, имеем

$$L'(t)\geqslant c_{23}\biggl[H(t)+\sum_{i=1}^{2}\|u_{i_t}\|_2^2+\sum_{i=1}^{2}\|u_{i_x}\|_2^2+\sum_{j=1}^{2}\rho(u_j)\biggr]\geqslant$$

$$\geqslant c_{24}\biggl[H(t)+\sum_{i=1}^{2}\|u_{i_t}\|_2^2+\sum_{i=1}^{2}\|u_{i_x}\|_2^2+\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_{2p_1+1}^{2p_1+1}\biggr]\geqslant 0. \tag{54}$$

С другой стороны, в силу (30) для достаточно малых $\varepsilon>0$ верно неравенство $L(0)>0,$ из которого и неравенства (54) следует, что

$$L(t)\geqslant L(0)>0. \tag{55}$$

Используя неравенство Гёльдера, будем иметь

$$\biggl|\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^l u_iu_{i_t}\,dx\biggr|\leqslant\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_2\|u_{i_t}\|_2\leqslant l^{p_1/(2p_1+2)}\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_{2(p_1+1)}\|u_{i_t}\|_2.$$

Далее, применяя неравенства Коши и Юнга с показателями

$$\mu_1=\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}>1\quad\text{и}\quad\mu_2=2(1-\sigma)>1,$$

получаем неравенство

$$\biggl(\int\limits_0^l u_iu_{i_t}\,dx\biggr)^{1/(1-\sigma)}\leqslant c_{25}\biggl[\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_{2(p_1+1)}^{\mu_1/(1-\sigma)}+\sum_{i=1}^{2}\|u_{i_t}\|_2^{\mu_2/(1-\sigma)}\biggr]. \tag{56}$$

Так как $0<\sigma<\sigma_0\leqslant p_1/(2p_1+2),$ то, учитывая неравенства (43), (48) и (56), заключаем, что справедлива оценка

$$L^{1/(1-\sigma)}(t)\leqslant c_{26}\biggl[H(t)+\biggl(\int\limits_0^l u_iu_{i_t}\,dx\biggr)^{1/(1-\sigma)}\biggr]\leqslant$$

$$\leqslant c_{27}\biggl[H(t)+\sum_{i=1}^{2}\|u_{i_t}\|_2^2+\sum_{i=1}^{2}\|u_{i_x}\|_2^2+\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_{2(p_1+1)}^{2(p_1+1)}\biggr]. \tag{57}$$

Сравнивая (54) и (57), будем иметь $L'(t)\geqslant c_{28}[L(t)]^{1/(1-\sigma)},$ $t>0.$ Отсюда следует неравенство

$$L(t)\geqslant\biggl[[L(0)]^{-\sigma/(1-\sigma)}-c_{28}t\frac{\sigma}{1-\sigma}\biggr]^{(\sigma-1)/\sigma}.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{t\to T^*}L(t)=+\infty,$ где

$$T^*=\frac{1-\sigma}{\sigma c_{28}[L(0)]^{\sigma/(\sigma-1)}}.$$

4. Схема доказательства теоремы 3. В силу определения (8) функции $E(t)$ имеем неравенство

$$E(t) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\|u_{i_x}(t,\cdot)\|_2^2 - G(u_1(t,\cdot),u_2(t,\cdot)).$$

Отсюда, используя оценки (22) и (29), получаем

$$E(t) \geqslant \frac{1}{2}\alpha - 2^{2p_2-1}l\,\max\left\{\sum_{i=1}^{2}(l\alpha)^{p_1+1},(l\alpha)^{p_2+1}\right\} = g(\alpha),$$

где $\alpha = \sum_{i=1}^{2}\|u_{i_x}(t,\cdot)\|_2^2$. Если $0 \leqslant \alpha \leqslant l^{-1}$, то $g(\alpha) = h(\alpha)$, где $h(\alpha) = \alpha/2 - 2^{2p_2-1}l(l\alpha)^{p_1+1}$.

Приведём следующие простые свойства $h(\alpha)$:

$$h(0) = 0, \quad \lim_{\alpha\to+\infty} h(\alpha) = -\infty, \quad h'(\alpha_1) = 0,$$

где $\alpha_1 = ((p_1+1)4^{p_2}l^{p_1+2})^{-1/p_1}$, $h'(\alpha) > 0$, если $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$, и $h'(\alpha) < 0$, если $\alpha > \alpha_1$. В силу (14) $l\alpha_1 < 1$.

Лемма 6. *Пусть выполнены условия (5)–(7) и (13)–(15). Тогда существует число α_2 такое, что $\alpha_1 < \alpha_2 < l^{-1}$ и*

$$\sum_{i=1}^{2}\|u_{i_x}(t,\cdot)\|^2 \geqslant \alpha_2. \tag{58}$$

Доказательство. Неравенство (58) докажем, предположив противное, т.е. допустив, что $\sum_{i=1}^{2}\|u_{i_x}(t_0,\cdot)\|^2 < \alpha_2$ в некоторой точке $t_0 > 0$. Так как $h(\alpha_0) = g(\alpha_0) \leqslant E(0) = g(\alpha_2)$ и $g(\alpha)$ – возрастающая функция на $(0,\alpha_1)$, то $\alpha_0 \geqslant \alpha_2$. В силу непрерывности функции $\sum_{i=1}^{2}\|u_{i_x}(t,\cdot)\|^2$ существует такая точка t_1, что $\alpha_1 < \sum_{i=1}^{2}\|u_{i_x}(t_1,\cdot)\|^2 < \alpha_2$. Тогда имеем

$$E(t_1) \geqslant h\left(\sum_{i=1}^{2}\|u_{i_x}(t_1,\cdot)\|_2^2\right) > h(\alpha_2) = E(0).$$

Полученное неравенство противоречит неравенству (26). Таким образом, справедливо неравенство (58). Лемма доказана.

Из неравенств (26) и (58) вытекает, что

$$G(u_1,u_2) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\|u_{i_x}(t,\cdot)\|^2 - E(t) \geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\|u_{i_x}(t,\cdot)\|^2 - E(0) \geqslant \frac{1}{2}\alpha_2 - g(\alpha_2) = 2^{2p_2-1}l^{p_1+2}\alpha_2^{p_1+1}.$$

Сравнив (55) и (58), получим оценку

$$G(u_1(t,\cdot),u_2(t,\cdot)) \geqslant 2^{2p_2-1}l^{p_1+2}\alpha_2^{p_1+1}. \tag{59}$$

Теперь докажем теорему 3. Воспользовавшись неравенством (58), будем иметь

$$E_1 - \left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\|u_{i_t}(t,\cdot)\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\|u_{i_x}(t,\cdot)\|^2\right] \leqslant E_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 \leqslant E_1 - \frac{1}{2}\alpha_1 = -\frac{1}{2(p_1+1)}\alpha_1 < 0.$$

Отсюда следует, что $0 < H(0) \leqslant H(t) \leqslant G(u_1,u_2) \leqslant 2^{2p_2-1}\sum_{i=1}^{2}\rho(u_i)$, где $H(t) = E_1 - E(t)$. Таким образом, при выполнении условий теоремы 3 для решений задачи (1)–(4) справедливы оценки (29).

Далее доказательство теоремы 3 представляет собой повторение доказательства теоремы 2 с небольшим изменением. Следует только отметить, что при установлении неравенства (54), как и в доказательстве теоремы 2, в неравенстве (49) мы должны работать с выражением $2\varepsilon(1-\eta)(p_1+1)H(t)$. При этом, в отличие от доказательства теоремы 2, дополнительно появляется слагаемое $-\varepsilon E_1$. Чтобы провести дальнейшую корректировку доказательства, нужно учесть определение величины E_1 и использовать неравенство $-\varepsilon E_1 \geqslant -\varepsilon MG(u_1(t,\cdot),u_2(t,\cdot))$, где $M=\varepsilon(1-\eta)p_1(\alpha_1/\alpha_2)^{p_1+1}$, которое следует из оценки (59) и определения числа α_1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rauch J.* Hyperbolic Partial Differential Equations and Geometric Optics. Rhode Island, 2012.
2. *Алиев А.Б.* Смешанная задача с диссипацией на границе для квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка // Докл. АН СССР. 1986. Т. 288. № 6. С. 1289–1292.
3. *Алиев А.Б., Ханмамедов А.Х.* О существовании минимального глобального аттрактора для нелинейного волнового уравнения с антидиссипацией в области и диссипацией на части границы // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 3. С. 326–330.
4. *Chueshov I., Eller M., Lasiecka I.* On the attractor for a semilinear wave equation with critical exponent and nonlinear boundary dissipation // Comm. in Partial Differ. Equat. 2002. V. 27. P. 1901–1951.
5. *Chueshov I., Lasiecka I.* Long-time behavior of second order evolution equations with nonlinear damping // Memoirs of Amer. Math. Soc. 2008. V. 195 (912). P. 1–183.
6. *Hongyinping Fenga, Shengjia Li, Xia Zhi.* Blow-up solutions for a nonlinear wave equation with boundary damping and interior source // Nonlin. Anal. 2012. V. 75. P. 2273–2280.
7. *Wenjun Liu, Yun Sun, Gang Li.* Blow-up of solutions for a nonlinear wave equation with nonnegative initial energy // Electr. J. of Differ. Equat. 2013. V. 2013. № 115. P. 1–8.
8. *Жиков В.В.* Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционалов вариационного исчисления // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1983. Т. 47. № 5. С. 961–998.
9. *Жиков В.В.* Оценки типа Мейерса для решения нелинейной системы Стокса // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 1. С. 107–114.
10. *Ruzicka M.* Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory. Lect. Notes in Math. V. 1748. Berlin, 2000.
11. *Lars D., Harjulehto P., Hasto P., Ruzicka M.* Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. Lect. Notes Math. Springer Verlag, 2017.
12. *Almeida A., Samko S.* Embeddings of variable Hajlasz–Sobolev spaces into Holder spaces of variable order // J. Math. Anal. Appl. 2009. V. 353. № 2. P. 489–496.
13. *Fan X., Zhao D.* On the spaces $L^{p(x)}$ and $W^{m,p(x)}$ // J. Math. Anal. Appl. 2001. V. 263. № 2. P. 424–446.
14. *Kovacik O., Rakosnik J.* On spaces and $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ // Czechoslovak Math. J. 1991. V. 41. P. 592–618.
15. *Antontsev S.* Wave equation with $p(x,t)$-laplacian and damping term: blow-up of solutions // C.R. Mecanique. 2011. V. 339. P. 751–755.
16. *Antontsev S.* Wave equation with $p(x,t)$-laplacian and damping term: existence and blow-up // Differ. Equat. Appl. 2011. V. 3. № 4. P. 503–525.
17. *Sun L., Ren Y., Gao W.* Lower and upper bounds for the blow-up time for nonlinear wave equation with variable sources // Comput. Math. Appl. 2016. V. 71. № 1. P. 267–277.
18. *Messaoudi S.A., Talahmeh A.A.* Blow-up in solutions of a quasilinear wave equation with variable-exponent nonlinearities // Math. Meth. Appl. Sci. 2017. P. 1–11.
19. *Корпусов М.О.* О разрушении решения одной нелинейной системы уравнений с положительной энергией // ТМФ. 2012. Т. 171. № 3. С. 355–369.
20. *Bilgin B.A., Kalantarov V.K.* Blow up of solutions to the initial boundary value problem for quasilinear strongly damped wave equations // J. Math. Anal. Appl. 2013. V. 403. № 1. P. 89–94.
21. *Showalter R.E.* Monotone Operators in Banach Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations. Mathematical Surveys and Monographs. V. 49. Amer. Math. Soc., 1997.
22. *Brezis H.* Operateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions Dans les Espaces de Hilbert. Amsterdam, 1973.

Институт математики и механики НАН Азербайджана,
г. Баку,
Азербайджанский технический университет,
г. Баку,
Бакинский государственный университет, Азербайджан

Поступила в редакцию 19.11.2020 г.
После доработки 19.11.2020 г.
Принята к публикации 22.01.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 3, с. 326–337

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2021 г. Г. Э. Гришанина, Э. М. Мухамадиев

Доказано, что необходимым и достаточным условием существования в ограниченной плоской области классического решения у неоднородного бигармонического уравнения является требование усиленной непрерывности функции, стоящей в правой части уравнения.

DOI: 10.31857/S0374064121030043

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о существовании классического решения неоднородного бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in G, \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа, G – ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, а $f(x,y)$ – непрерывная в G функция. Напомним [1–5], что функция $u(x,y)$ называется *классическим* решением уравнения (1), если она в области G имеет все непрерывные частные производные до 4-го порядка включительно и удовлетворяет уравнению (1). Очевидно, что если уравнение (1) имеет классическое решение, то функция $f(x,y)$ является непрерывной функцией. Однако существуют непрерывные функции $f(x,y)$, при которых уравнение (1) не имеет классических решений. Возникает вопрос, каким дополнительным условиям, кроме непрерывности, должна удовлетворять функция $f(x,y)$, чтобы уравнение (1) имело классическое решение. Ответ на этот вопрос для уравнения Пуассона получен в работе [6], а для неоднородной системы Коши–Римана – в работе [7].

Отметим, что наличие свойства гладкости решения важно не только для качественной теории дифференциальных уравнений, но имеет практические приложения, например, при приближённом построении решения дифференциального уравнения и оценке точности приближённого решения.

2. Необходимое условие существования классического решения. Определим множество

$$\widetilde{G} = \{(x,y,s) \in \mathbb{R}^3 : M = (x,y) \in G, \quad |s| < \rho(M, \partial G)\},$$

где $\rho(M,\partial G)$ – расстояние от точки M до границы ∂G области G, и функцию

$$g(x,y,s,\varphi) = f(x + s\cos\varphi, y + s\sin\varphi)$$

на $\widetilde{G} \times [0,2\pi]$. Очевидно, эта функция непрерывна по совокупности переменных. Комплекснозначная функция

$$F_k(x,y,s) = \int\limits_0^{2\pi} g(x,y,s,\varphi)\exp(ik\varphi)\,d\varphi, \quad k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},$$

определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G}$, и для неё справедливо равенство

$$F_k(x,y,0) = 0, \quad (x,y) \in G.$$

Определим функции

$$f_k(x,y,r)=\int\limits_r^{r_1} F_k(x,y,s)\,\frac{ds}{s},\quad 0<r\leqslant r_1(x,y)\equiv\frac{1}{2}\rho(M,\partial G).$$

Определение. Непрерывную функцию $f(x,y)$ назовём *k-усиленно непрерывной*, если функция $f_k(x,y,r)$ имеет непрерывное продолжение на множество $\{(x,y,0):(x,y)\in G\}\subset\widetilde{G}$.

Непрерывная по Гёльдеру функция является k-усиленно непрерывной для любого k. Более общее, чем непрерывность по Гёльдеру, достаточное условие k-усиленной непрерывности функции $f(x,y)$ даёт следующая оценка для функции $F_k(x,y,r)$:

$$|F_k(x,y,r)|\leqslant C(1+|\ln r|)^{\nu},\quad \nu<-1,\quad C=\mathrm{const}>0,\quad 0<r\leqslant r_1(x,y).$$

Теорема 1. *Если уравнение (1) имеет в области G классическое решение, то функция $f(x,y)$ является k-усиленно непрерывной при $k=2$ и $k=4$ в этой области.*

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, сформулируем и докажем несколько вспомогательных утверждений. Пусть функция $u(x,y)$, $(x,y)\in G$, имеет в области G непрерывные частные производные до m-го порядка включительно. Определим функцию

$$v(x,y,r,\varphi)=u(x+r\cos\varphi,y+r\sin\varphi)$$

на множестве $\widetilde{G}\times[0,2\pi]$ и комплекснозначные функции

$$U_k(x,y,r)=\int\limits_0^{2\pi} v(x,y,r,\varphi)\exp(ik\varphi)\,d\varphi,\quad (x,y,r)\in\widetilde{G}.$$

Так как подынтегральная функция на множестве $\widetilde{G}\times[0,2\pi]$ имеет непрерывные по совокупности переменных частные производные по r до порядка m включительно, то функции $U_k(x,y,r)$ имеют в области $\widetilde{G}$ непрерывные частные производные по r до m-го порядка включительно.

Лемма 1. *Пусть функция $u(x,y)$ непрерывна в области G вместе со всеми частными производными до m-го порядка включительно. Тогда при любом $0<k\leqslant m$ для функции $U_k(x,y,r)$ справедливы равенства*

$$U_k(x,y,0)=\frac{\partial U_k}{\partial r}(x,y,0)=\ldots=\frac{\partial^{k-1}U_k}{\partial r^{k-1}}(x,y,0)=0, \tag{2}$$

и равномерно на каждом компактном подмножестве области G имеют место предельные соотношения

$$\lim_{r\to0}\frac{k!}{r^k}U_k(x,y,r)=\lim_{r\to0}\frac{(k-1)!}{r^{k-1}}\frac{\partial U_k(x,y,r)}{\partial r}=\ldots=\lim_{r\to0}\frac{1}{r}\frac{\partial^{k-1}U_k(x,y,r)}{\partial r^{k-1}}=\frac{\partial^k U_k}{\partial r^k}(x,y,0). \tag{3}$$

Доказательство. В силу непрерывной дифференцируемости функции $u(x,y)$ в области G справедливы представления

$$v(x,y,r,\varphi)=u(x,y)+\frac{\partial v}{\partial r}(x,y,0,\varphi)r+\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(x,y,0,\varphi)\frac{r^2}{2!}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\partial^{k-1}v}{\partial r^{k-1}}(x,y,0,\varphi)\frac{r^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{r^k}{(k-1)!}\int\limits_0^1(1-s)^{k-1}\frac{\partial^k v}{\partial r^k}(x,y,rs,\varphi)\,ds, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^q v}{\partial r^q}(x,y,r,\varphi) = \frac{\partial^q v}{\partial r^q}(x,y,0,\varphi) + \frac{\partial^{q+1} v}{\partial r^{q+1}}(x,y,0,\varphi)r + \frac{\partial^{q+2} v}{\partial r^{q+2}}(x,y,0,\varphi)\frac{r^2}{2!} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\partial^{k-1} v}{\partial r^{k-1}}(x,y,0,\varphi)\frac{r^{k-q-1}}{(k-q-1)!} + \frac{r^{k-q}}{(k-q-1)!}\int\limits_0^1 (1-s)^{k-q-1}\frac{\partial^k v}{\partial r^k}(x,y,rs,\varphi)\,ds, \qquad (5)$$

где $0<q<k$ и

$$\frac{\partial^l v}{\partial r^l}(x,y,r,\varphi) = \sum_{j=0}^{l} C_l^j \frac{\partial^l u}{\partial x^{l-j}\partial y^j}\cos^{l-j}\varphi\sin^j\varphi, \quad C_l^j = \frac{l!}{j!(l-j)!},$$

$$\frac{\partial^l u}{\partial x^{l-j}\partial y^j} = \frac{\partial^l u}{\partial x^{l-j}\partial y^j}(x+r\cos\varphi, y+r\sin\varphi).$$

Так как

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(\exp(i\varphi)+\exp(-i\varphi)), \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}(\exp(i\varphi)-\exp(-i\varphi))$$

и

$$\int\limits_0^{2\pi} \exp(ip\varphi)\,d\varphi = \begin{cases} 0, & \text{если } p\neq 0, \\ 2\pi, & \text{если } p=0, \end{cases}$$

то при $0\leqslant j\leqslant l<k$ имеем

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^{l-j}\varphi\sin^j\varphi\exp(ik\varphi)\,d\varphi = 0. \qquad (6)$$

Из представлений (4) и (5) и равенства (6) следует, что

$$U_k(x,y,0) = \int\limits_0^{2\pi} u(x,y)\exp(ik\varphi)\,d\varphi = u(x,y)\int\limits_0^{2\pi}\exp(ik\varphi)\,d\varphi = 0,$$

$$\frac{\partial U_k}{\partial r}(x,y,0) = \int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial v}{\partial r}(x,y,0,\varphi)\exp(ik\varphi)\,d\varphi = 0, \quad \ldots,$$

$$\frac{\partial^{k-1} U_k}{\partial r^{k-1}}(x,y,0) = \int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial^{k-1} v}{\partial r^{k-1}}(x,y,0,\varphi)\exp(ik\varphi)\,d\varphi = 0.$$

Равенства (2) доказаны.

В силу (2) и представлений (4) и (5) получаем

$$U_k(x,y,r) = \frac{r^k}{(k-1)!}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 (1-s)^{k-1}\frac{\partial^k v}{\partial r^k}(x,y,rs,\varphi)\exp(ik\varphi)\,ds\,d\varphi,$$

$$\frac{\partial^q U_k}{\partial r^q}(x,y,r) = \frac{r^{k-q}}{(k-q-1)!}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 (1-s)^{k-q-1}\frac{\partial^k v}{\partial r^k}(x,y,rs,\varphi)\exp(ik\varphi)\,ds\,d\varphi, \quad q=\overline{1,k-1}. \quad (7)$$

Из равенств (7), согласно правилу Лопиталя, имеем

$$\lim_{r\to 0}\frac{U_k(x,y,r)}{r^k}k! = k\lim_{r\to 0}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 (1-s)^{k-1}\frac{\partial^k v}{\partial r^k}(x,y,rs,\varphi)\exp(ik\varphi)\,ds\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial^k v}{\partial r^k}(x,y,0,\varphi)\exp(ik\varphi)\,d\varphi,$$

$$\lim_{r\to 0}\frac{(k-1)!}{r^{k-1}}\frac{\partial U_k}{\partial r}(x,y,r) = (k-1)\lim_{r\to 0}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 (1-s)^{k-2}\frac{\partial^k v}{\partial r^k}(x,y,rs,\varphi)\exp(ik\varphi)\,ds\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial^k v}{\partial r^k}(x,y,0,\varphi)\exp(ik\varphi)\,d\varphi, \quad \ldots,$$

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\frac{\partial^{k-1}U_k(x,y,r)}{\partial r^{k-1}} = \lim_{r\to 0}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 \frac{\partial^k v}{\partial r^k}(x,y,rs,\varphi)\exp(ik\varphi)\,ds\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial^k v}{\partial r^k}(x,y,0,\varphi)\exp(ik\varphi)\,d\varphi.$$

Равенства (3) доказаны. Лемма доказана.

Пусть функция $u(x,y)$, $(x,y)\in G$, имеет в области G непрерывные частные производные до 4-го порядка включительно. Положим

$$f(x,y) = \Delta^2 u(x,y), \quad (x,y)\in G. \tag{8}$$

По функциям

$$g(x,y,r,\varphi) = f(x+r\cos\varphi, y+r\sin\varphi), \quad v(x,y,r,\varphi) = u(x+r\cos\varphi, y+r\sin\varphi),$$

$$w(x,y,r,\varphi) = (\Delta u)(x+r\cos\varphi, y+r\sin\varphi)$$

на множестве $\widetilde{G}\times[0,2\pi]$ определим комплекснозначные функции

$$F_k(x,y,r) = \int\limits_0^{2\pi} g(x,y,r,\varphi)\exp(ik\varphi)\,d\varphi,$$

$$U_k(x,y,r) = \int\limits_0^{2\pi} v(x,y,r,\varphi)\exp(ik\varphi)\,d\varphi, \quad (x,y,r)\in\widetilde{G}, \quad k=\overline{1,4},$$

$$V_k(x,y,r) = \int\limits_0^{2\pi} w(x,y,r,\varphi)\exp(ik\varphi)\,d\varphi, \quad (x,y,r)\in\widetilde{G}, \quad k=1,2.$$

Отметим, что функции $F_k(x,y,r)$ непрерывны по совокупности переменных, а функции $V_k(x,y,r)$ и $U_k(x,y,r)$ имеют непрерывные частные производные по всем переменным до 2-го и 4-го порядка включительно соответственно.

Лемма 2. *Справедливы тождества*

$$F_k(x,y,r)=r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^3 U_k}{\partial r^3}+\frac{3}{r^2}\frac{\partial^2 U_k}{\partial r^2}+\frac{5-2k^2}{r^3}\frac{\partial U_k}{\partial r}+\frac{4(4-k^2)}{r^4}U_k\right)+\frac{(4-k^2)(16-k^2)}{r^4}U_k, \quad (9)$$

$$F_k(x,y,r)=r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_k}{\partial r}+\frac{2V_k}{r^2}\right)+\frac{(4-k^2)}{r^2}V_k, \quad (10)$$

где $U_k=U_k(x,y,r)$, $k=\overline{1,4}$, $V_k=V_k(x,y,r)$, $k=1,2$, и $(x,y,r)\in\widetilde{G}$, $r\neq 0$.

Доказательство. Используя определение (8) функции $f(x,y)$, несложно проверить, что функция $g(x,y,r,\varphi)$ удовлетворяет тождеству

$$g(x,y,r,\varphi)=\frac{\partial^4 v}{\partial r^4}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3 v}{\partial r^3}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}-\frac{2}{r^3}\frac{\partial v}{\partial r}+4\frac{v}{r^4}\right)+\frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 v}{\partial\varphi^4}, \quad (11)$$

где $(x,y,r,\varphi)\in\widetilde{G}\times[0,2\pi]$, $r\neq 0$. Умножим тождество (11) на $\exp(ik\varphi)$ и получившееся тождество проинтегрируем от 0 до 2π, воспользовавшись следующим свойством гладких 2π-периодических по φ функций $v(x,y,r,\varphi)$:

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial^l v}{\partial\varphi^l}\exp(ik\varphi)\,d\varphi=(-ik)^l\int\limits_0^{2\pi}v\exp(ik\varphi)\,d\varphi, \quad l\in\mathbb{N},$$

которое следует из легко проверяемого тождества

$$\frac{\partial^l v}{\partial\varphi^l}\exp(ik\varphi)=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial^{l-1}v}{\partial\varphi^{l-1}}\exp(ik\varphi)\right)-ik\left(\frac{\partial^{l-1}v}{\partial\varphi^{l-1}}\exp(ik\varphi)\right).$$

Поменяв местами порядок интегрирования по φ и дифференцирования по r, получим

$$F_k(x,y,r)=\frac{\partial^4 U_k}{\partial r^4}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3 U_k}{\partial r^3}-\frac{2k^2+1}{r^2}\frac{\partial^2 U_k}{\partial r^2}+\frac{2k^2+1}{r^3}\frac{\partial U_k}{\partial r}-\frac{4k^2-k^4}{r^4}U_k. \quad (12)$$

Нетрудно видеть, что правые части равенств (9) и (12) совпадают между собой при $r\neq 0$:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^3 U_k}{\partial r^3}+\frac{3}{r^2}\frac{\partial^2 U_k}{\partial r^2}+\frac{5-2k^2}{r^3}\frac{\partial U_k}{\partial r}+\frac{4(4-k^2)}{r^4}U_k\right)+\frac{(4-k^2)(16-k^2)}{r^4}U_k=$$

$$=\frac{\partial^4 U_k}{\partial r^4}-\frac{1}{r}\frac{\partial^3 U_k}{\partial r^3}+\frac{3}{r}\frac{\partial^3 U_k}{\partial r^3}-\frac{6}{r^2}\frac{\partial^2 U_k}{\partial r^2}+\frac{5-2k^2}{r^2}\frac{\partial^2 U_k}{\partial r^2}-$$

$$-\frac{3(5-2k^2)}{r^3}\frac{\partial U_k}{\partial r}+\frac{4(4-k^2)}{r^3}\frac{\partial U_k}{\partial r}-\frac{16(4-k^2)}{r^4}U_k+\frac{(4-k^2)(16-k^2)}{r^4}U_k=$$

$$=\frac{\partial^4 U_k}{\partial r^4}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3 U_k}{\partial r^3}-\frac{2k^2+1}{r^2}\frac{\partial^2 U_k}{\partial r^2}+\frac{2k^2+1}{r^3}\frac{\partial U_k}{\partial r}-\frac{4k^2-k^4}{r^4}U_k.$$

Тождество (9) доказано.

Аналогично устанавливается тождество (10). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. 1) Рассмотрим случай $k=2$. Из тождества (10) при $k=2$ имеем

$$F_2(x,y,r)=r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_2}{\partial r}+\frac{2V_2}{r^2}\right). \quad (13)$$

Разделив равенство (13) на r и проинтегрировав его по отрезку $[r,r_1]$, $0<r<r_1(x,y)=$ $=2^{-1}\rho(M,\partial G)$, получим

$$f_2(x,y,r)\equiv\int\limits_r^{r_1}F_2(x,y,s)\frac{ds}{s}=\frac{1}{r_1}\frac{\partial V_2}{\partial r}(x,y,r_1)+\frac{2}{r_1^2}V_2(x,y,r_1)-\frac{1}{r}\frac{\partial V_2}{\partial r}(x,y,r)-\frac{2}{r^2}V_2(x,y,r). \quad (14)$$

Согласно лемме 1 имеем

$$\lim_{r\to 0}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}V_1(x,y,r)+\frac{2}{r^2}V_1(x,y,r)\right)=2\frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2}(x,y,0). \tag{15}$$

Следовательно, в силу (15) из тождества (14) следует, что функция $f_2(x,y,r)$ продолжается по непрерывности в точку $r=0$, причём сходимость $\lim\limits_{r\to 0} f_2(x,y,r)=f_2(x,y,0)$ равномерна на каждом компакте из области G.

2) Пусть $k=4$. В силу леммы 2 имеем

$$F_4(x,y,r)=r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^3 U_4}{\partial r^3}+\frac{3}{r^2}\frac{\partial^2 U_4}{\partial r^2}-\frac{27}{r^2}\frac{\partial U_4}{\partial r}-\frac{48}{r^4}U_4\right),$$

где $U_4=U_4(x,y,r)$, $(x,y)\in G$, $0<r\leqslant r_1(x,y)\equiv\rho(M,\partial G)/2$. Разделив это равенство на r и проинтегрировав его по отрезку $[r,r_1]$, получим

$$f_4(x,y,r)=\int\limits_r^{r_1}F_4(x,y,s)\frac{ds}{s}=\frac{1}{r_1}\frac{\partial^3 U_4(x,y,r_1)}{\partial r^3}+\frac{3}{r_1^2}\frac{\partial^2 U_4(x,y,r_1)}{\partial r^2}-\frac{27}{r_1^3}\frac{\partial U_4(x,y,r_1)}{\partial r}-$$

$$-\frac{48}{r_1^4}U_4(x,y,r_1)-\frac{1}{r}\frac{\partial^3 U_4(x,y,r)}{\partial r^3}-\frac{3}{r^2}\frac{\partial^2 U_4(x,y,r)}{\partial r^2}+\frac{27}{r^3}\frac{\partial U_4(x,y,r)}{\partial r}+\frac{48}{r^4}U_4(x,y,r).$$

Из леммы 1 следует, что существуют пределы

$$\lim_{r\to 0}\frac{U_4(x,y,r)}{r^4}=\frac{1}{4!}\frac{\partial^4 U_4(x,y,0)}{\partial r^4},\quad \lim_{r\to 0}\frac{1}{r^{4-l}}\frac{\partial^l U_4(x,y,r)}{\partial r^l}=\frac{1}{(4-l)!}\frac{\partial^4 U_4(x,y,0)}{\partial r^4},\quad l=\overline{1,3},$$

причём сходимость равномерна относительно (x,y) из компактного подмножества области G. Следовательно, функция $f_4(x,y,r)$ продолжается по непрерывности в точку $r=0$ и сходимость $\lim\limits_{r\to 0} f_4(x,y,r)=f_4(x,y,0)$ равномерна на каждом компакте из области G. Теорема доказана.

3. Достаточное условие существования классического решения. Предположим, что функция $f(x,y)$ непрерывна и интегрируема (например, ограничена: $|f(x,y)|\leqslant \mathrm{const}$) в области G. Тогда функция

$$u_0(x,y)=\frac{1}{8\pi}\iint\limits_G f(\xi,\eta)r^2\ln r\,d\xi\,d\eta,\quad r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2,$$

имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно и является обобщённым решением уравнения (1).

При этих предположениях о функции $f(x,y)$ необходимые условия существования классического решения уравнения (1) являются и достаточными, а именно, справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема и k-усиленно непрерывна при $k=2$ и $k=4$ в области G. Тогда функция $u_0(x,y)$ является классическим решением уравнения (1).*

Для доказательства теоремы удобно выразить операции дифференцирования по x и y через дифференциальный оператор Коши–Римана и сопряжённый к нему оператор. Пусть $z=x+iy$, $\overline{z}=x-iy$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)\ \text{ и }\ \frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\bar z},\quad \frac{\partial}{\partial y}=i\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial\bar z}\right).$$

Из этих формул следует, что

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4}=\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\bar z}\right)^4=\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^4+4\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^3\frac{\partial}{\partial\bar z}+6\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial\bar z}\right)^2+4\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\bar z}\right)^3+\left(\frac{\partial}{\partial\bar z}\right)^4,$$

$$\frac{\partial^4}{\partial y\partial x^3}=i\Big(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial\bar z}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\bar z}\Big)^3=i\bigg(\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)^4+2\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)^3\frac{\partial}{\partial\bar z}-2\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial\bar z}\Big)^3-\Big(\frac{\partial}{\partial\bar z}\Big)^4\bigg),$$

$$\frac{\partial^4}{\partial y^2\partial x^2}=i^2\Big(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial\bar z}\Big)^2\Big(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\bar z}\Big)^2=-\bigg(\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)^4-2\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)^2\Big(\frac{\partial}{\partial\bar z}\Big)^2+\Big(\frac{\partial}{\partial\bar z}\Big)^4\bigg),$$

$$\frac{\partial^4}{\partial y^3\partial x}=i^3\Big(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial\bar z}\Big)^3\Big(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\bar z}\Big)=-i\bigg(\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)^4-2\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)^3\frac{\partial}{\partial\bar z}+2\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial\bar z}\Big)^3-\Big(\frac{\partial}{\partial\bar z}\Big)^4\bigg),$$

$$\frac{\partial^4}{\partial y^4}=\Big(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial\bar z}\Big)^4=\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)^4-4\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)^3\frac{\partial}{\partial\bar z}+6\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)^2\Big(\frac{\partial}{\partial\bar z}\Big)^2-4\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial\bar z}\Big)^3+\Big(\frac{\partial}{\partial\bar z}\Big)^4.$$

Таким образом, все частные производные 4-го порядка представляют собой линейные комбинации произведений степеней $(\partial/\partial\bar z)^k(\partial/\partial z)^l$ оператора Коши–Римана и сопряжённого к нему оператора, где $k+l=4$, $l=\overline{0,4}$.

Ниже нам понадобятся действия этих дифференциальных операторов на функции вида $K(z\bar z)$, где $K(u)$ – гладкая функция скалярного аргумента $u>0$. Нетрудно проверить, что справедливы следующие формулы:

$$\Big(\frac{\partial}{\partial\bar z}\Big)^4K(z\bar z)=K^{IV}(z\bar z)z^4,\quad \Big(\frac{\partial}{\partial\bar z}\Big)^3\frac{\partial}{\partial z}K(z\bar z)=K^{IV}(z\bar z)z^3\bar z+3K'''(z\bar z)z^2,$$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial\bar z}\Big)^2\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)^2K(z\bar z)=K^{IV}(z\bar z)z^2\bar z^2+4K'''(z\bar z)z\bar z+2K''(z\bar z),$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)^3K(z\bar z)=K^{IV}(z\bar z)z\bar z^3+3K'''(z\bar z)\bar z^2,\quad \Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)^4K(z\bar z)=K^{IV}(z\bar z)\bar z^4,$$

где через K', K'', K''', K^{IV} обозначены производные первого, второго, третьего и четвёртого порядка от функции $K(u)$ по переменной $u>0$ соответственно.

Например, для функции $K(u)=u\ln u$ имеем

$$K'(u)=\ln u+1,\quad K''(u)=\frac{1}{u},\quad K'''(u)=-\frac{1}{u^2},\quad K^{IV}(u)=\frac{2}{u^3}$$

и, следовательно,

$$\Big(\frac{\partial}{\partial\bar z}\Big)^4K(z\bar z)=2\frac{z}{\bar z^3},\quad \Big(\frac{\partial}{\partial\bar z}\Big)^3\frac{\partial}{\partial z}K(z\bar z)=-\frac{1}{\bar z^2},\quad \Big(\frac{\partial}{\partial\bar z}\Big)^2\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)^2K(z\bar z)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)^3K(z\bar z)=-\frac{1}{z^2},\quad \Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)^4K(z\bar z)=2\frac{\bar z}{z^3}.$$

Рассмотрим несобственный интеграл в смысле главного значения Коши с сингулярным ядром $(\zeta-z)^k|\zeta-z|^{-k-2}$:

$$f_k(z)\equiv\frac{1}{\pi}\iint\limits_G\frac{f(\zeta)(\zeta-z)^k}{|\zeta-z|^{k+2}}\,d\xi\,d\eta=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to0}\iint\limits_{G\setminus U(z,\varepsilon)}\frac{f(\zeta)(\zeta-z)^k}{|\zeta-z|^{k+2}}\,d\xi\,d\eta, \tag{16}$$

где $U(z,\varepsilon)$ – круг с центром в точке z радиуса ε. Заметим, что для вещественной функции $f(z)$ несобственный интеграл (16) существует или не существует одновременно для значения $\pm k$, $k\ne0$.

Следующее утверждение устанавливает связь между свойством k-усиленной непрерывности и существованием и непрерывностью функции $f_k(z)$.

Лемма 3. *Пусть непрерывная функция $f(z) = f(x, y)$ является k-усиленно непрерывной в области G и принадлежит пространству Лебега $L_1(G)$. Тогда несобственный интеграл $f_k(z)$ существует во всех точках области $z \in G$, предельное соотношение (16) выполняется равномерно на каждом компакте $K \subset G$ и функция $f_k(z)$ непрерывна в G.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что для функций $f(z) = f(x, y)$, принадлежащих пространству Лебега $L_1(G)$, при $r_0 > 0$ интеграл

$$\iint\limits_{G\setminus U(z,r_0)} \frac{f(\zeta)(\zeta - z)^k}{|\zeta - z|^{k+2}}\, d\xi\, d\eta$$

определяет непрерывную функцию в G. Пусть $K \subset G$ – компакт, $r_0 = 2^{-1}\min\limits_{z\in K}\rho(z, \partial G)$ и $z \in K$ – фиксированная точка. При $0 < \varepsilon \leqslant r_0$ имеем

$$\iint\limits_{G\setminus U(z,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)(\zeta - z)^k}{|\zeta - z|^{k+2}}\, d\xi\, d\eta = \iint\limits_{G\setminus U(z,r_0)} \frac{f(\zeta)(\zeta - z)^k}{|\zeta - z|^{k+2}}\, d\xi\, d\eta + \iint\limits_{U(z,r_0)\setminus U(z,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)(\zeta - z)^k}{|\zeta - z|^{k+2}}\, d\xi\, d\eta. \tag{17}$$

Переходя к полярным координатам $\zeta - z = re^{i\theta}$ в последнем слагаемом в правой части (17), получаем

$$\iint\limits_{G\setminus U(z,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)(\zeta - z)^k}{|\zeta - z|^{k+2}}\, d\xi\, d\eta = \iint\limits_{G\setminus U(z,r_0)} \frac{f(\zeta)(\zeta - z)^k}{|\zeta - z|^{k+2}}\, d\xi\, d\eta + \int\limits_{\varepsilon}^{r_0}\int\limits_{0}^{2\pi} f(z + re^{i\theta})e^{ik\theta}\, d\theta\, \frac{dr}{r}. \tag{18}$$

Поскольку

$$\int\limits_{\varepsilon}^{r_0}\int\limits_{0}^{2\pi} f(z + re^{i\varphi})e^{ik\varphi}\, d\varphi\, \frac{dr}{r} = \int\limits_{\varepsilon}^{r_0} F_k(z, r)\frac{dr}{r} = f_k(z, \varepsilon) - f_k(z, r_0),$$

то из (18) следует равенство

$$\iint\limits_{G\setminus U(z,\varepsilon)} \frac{f(\zeta)(\zeta - z)^k}{|\zeta - z|^{k+2}}\, d\xi\, d\eta = \iint\limits_{G\setminus U(z,r_0)} \frac{f(\zeta)(\zeta - z)^k}{|\zeta - z|^{k+2}}\, d\xi\, d\eta + f_k(z, \varepsilon) - f_k(z, r_0), \quad z \in K. \tag{19}$$

Так как функция f является k-усиленно непрерывной, то равномерно по $z \in K$ существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_k(z, \varepsilon) = f_k(z, 0).$$

Таким образом, из равенства (19) следует, что предельное соотношение (16) выполняется равномерно на каждом компакте $K \subset G$ и имеет место представление

$$f_k(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{G\setminus U(z,r_0)} \frac{f(\zeta)(\zeta - z)^k}{|\zeta - z|^{k+2}}\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{\pi}(f_k(z, 0) - f_k(z, r_0)), \quad z \in K.$$

Отсюда следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Рассмотрим общее представление вида

$$w(z, \delta) = \int\limits_{0}^{R} \frac{\partial}{\partial\rho} L(\rho, \delta) \cdot h(z, \rho)\, d\rho, \tag{20}$$

где функция $h(z, \rho)$ непрерывна на множестве $G \times (0, 1]$, а вещественнозначная функция $L(\rho, \delta)$ непрерывна на множестве $[0, R] \times (0, 1]$ и удовлетворяет условиям:

1) $L(0,\delta)\equiv 0$, $\lim\limits_{\delta\to 0} L(\rho,\delta)=1$ при $\rho\in(0,R]$;

2) $(\partial/\partial\rho)L(\rho,\delta)$ непрерывна и неотрицательна при $\rho>0$, $\delta\in(0,1]$.

Справедлива

Лемма 4. *Пусть сходимость*

$$\lim_{\rho\to 0} h(z,\rho)=h(z,0)$$

имеет место равномерно по z *на каждом компактном подмножестве области* G. *Тогда справедливо равенство*

$$\lim_{\delta\to 0} w(z,\delta)=h(z,0),$$

сходимость в котором равномерна по z *на каждом компактном подмножестве области* G.

Доказательство. Пусть $G_1\subset \overline{G}_1\subset G$. По $\varepsilon>0$ выберем $\sigma\in(0,R)$ такое, что

$$|h(z,\rho)-h(z,0)|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при} \quad 0<\rho<\sigma, \quad z\in\overline{G}_1.$$

Из представления (20) вытекают равенства

$$w(z,\delta)-h(z,0)=\int\limits_0^R \frac{\partial}{\partial\rho}L(\rho,\delta)(h(z,\rho)-h(z,0))\,d\rho+h(z,0)(L(R,\delta)-L(0,\delta))-h(z,0)=$$

$$=h(z,0)(L(R,\delta)-1)+\int\limits_0^\sigma \frac{\partial}{\partial\rho}L(\rho,\delta)(h(z,\rho)-h(z,0))\,d\rho+\int\limits_\sigma^R \frac{\partial}{\partial\rho}L(\rho,\delta)(h(z,\rho)-h(z,0))\,d\rho.$$

Здесь использовано условие $L(0,\delta)\equiv 0$. Положим $M=\max\{|h(z,\rho)|: z\in\overline{G}_1,\ 0\leqslant\rho\leqslant R\}$. В силу условия 1) существует $\delta_0>0$ такое, что

$$0<L(R,\delta)-L(\sigma,\delta)\leqslant |L(R,\delta)-1|+|1-L(\sigma,\delta)|<\varepsilon/(6M), \quad \delta<\delta_0.$$

Используя условие 2) для функции $L(\rho,\delta)$, имеем оценку

$$|w(z,\delta)-h(z,0)|\leqslant M|L(R,\delta)-1|+K(\sigma,\delta)\frac{\varepsilon}{3}+2M(L(R,\delta)-L(\sigma,\delta))<$$

$$<\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon^2}{6M}+2M\frac{\varepsilon}{6M}<\frac{\varepsilon}{3}\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+1\right)=\varepsilon,$$

если $\varepsilon<M$, $0<\delta<\delta_0$ и $z\in\overline{G}_1$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим семейство функций

$$u_\delta(x,y)=\frac{1}{16\pi}\iint\limits_G f(\xi,\eta)(r^2+\delta)\ln(r^2+\delta)\,d\xi\,d\eta, \quad \delta>0, \quad r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2.$$

Функции $u_\delta(x,y)$ при каждом $\delta>0$ бесконечно дифференцируемы на всей плоскости. Несложно видеть, что все частные производные $\partial^{k+l}u_\delta(x,y)/\partial x^k\partial y^l$ при $\delta\to 0$ равномерно сходятся к соответствующим частным производным $\partial^{k+l}u_0(x,y)/\partial x^k\partial y^l$, если $k+l\leqslant 3$. Поэтому для доказательства существования непрерывных частных производных четвёртого порядка у функции $u_0(x,y)$ достаточно показать, что функции $\partial^4 u_\delta(x,y)/\partial x^k\partial y^l$, где $k+l=4$, при $\delta\to 0$ равномерно на каждом компакте области G сходятся к некоторым функциям

$$w_{kl}(x,y)=\lim_{\delta\to 0}\frac{\partial^4}{\partial x^k\partial y^l}u_\delta(x,y), \quad k+l=4. \tag{21}$$

В силу приведённых выше замечаний существование равномерных пределов (21) равносильно существованию равномерных пределов

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{\partial}{\partial\bar z}\right)^k\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^l u_\delta(z),\quad k+l=4, \tag{22}$$

где

$$u_\delta(z)\equiv u_\delta(x,y)=\frac{1}{16\pi}\iint\limits_G f(\zeta)K(r^2+\delta)\,d\xi\,d\eta,$$

$$\delta>0,\quad z=x+iy,\quad \zeta=\xi+i\eta,\quad r^2=|z-\zeta|^2,\quad K(u)=u\ln u.$$

Согласно лемме Гейне–Бореля при $\delta\to 0$ пределы (22) существуют равномерно по z на любом компактном подмножестве области G тогда и только тогда, когда они равномерно сходятся по z в некоторой окрестности любой точки области G. Поэтому теорема 2 будет доказана, если мы покажем существование равномерного предела (22) в некоторой окрестности любой точки области G.

Пусть $z_0\in G$ и число d удовлетворяет условию $0<3d\leqslant\rho(z_0,\partial G)$, обозначим $U(z,d)=\{\zeta:|\zeta-z|<d\}$. Для $|z-z_0|\leqslant d$ имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial\bar z}\right)^k\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^l u_\delta(z)=J_{k1}(z,\delta)+J_{k2}(z,\delta), \tag{23}$$

где $l=4-k$, $k=\overline{0,4}$, и

$$J_{k1}(z,\delta)=\frac{1}{16\pi}\iint\limits_{G\setminus U(z,d)} f(\zeta)\left(\frac{\partial}{\partial\bar z}\right)^k\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^l K(r^2+\delta)\,d\xi\,d\eta,$$

$$J_{k2}(z,\delta)=\frac{1}{16\pi}\iint\limits_{U(z,d)} f(\zeta)\left(\frac{\partial}{\partial\bar z}\right)^k\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^l K(r^2+\delta)\,d\xi\,d\eta.$$

Нетрудно показать, что имеет место равенство

$$\lim_{\delta\to 0}J_{k1}(z,\delta)=\frac{1}{16\pi}\iint\limits_{G\setminus U(z,d)} f(\zeta)\left(\frac{\partial}{\partial\bar z}\right)^k\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^l K(r^2)\,d\xi\,d\eta, \tag{24}$$

сходимость в котором равномерна по $z\in U(z_0,d)$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что при $\delta\to 0$ предел функции $J_{k2}(z,\delta)$, $k=\overline{0,4}$, существует равномерно по $z\in U(z_0,d)$. Так как имеют место тождества $J_{02}\equiv\bar J_{42}$, $J_{12}\equiv\bar J_{32}$, то достаточно рассмотреть случаи $k=2,3,4$.

В силу равенств

$$\left(\frac{\partial}{\partial\bar z}\right)^4 K(r^2+\delta)=\frac{2(z-\zeta)^4}{(r^2+\delta)^3},\quad r^2=|z-\zeta|^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\bar z}\right)^3 K(r^2+\delta)=\frac{2(z-\zeta)^3(\bar z-\bar\zeta)}{(r^2+\delta)^3}-\frac{3(z-\zeta)^2}{(r^2+\delta)^2}=\left(\frac{2r^2}{(r^2+\delta)^3}-\frac{3}{(r^2+\delta)^2}\right)(z-\zeta)^2,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial\bar z}\right)^2 K(r^2+\delta)=\frac{2r^4}{(r^2+\delta)^3}-\frac{4r^2}{(r^2+\delta)^2}+\frac{2}{(r^2+\delta)},$$

переходя к полярным координатам $\zeta-z=\rho\exp(i\theta)$, для функции $J_{k2}(z,\delta)$ при $k=4,3,2$ имеем

$$J_{42}(z,\delta)=\frac{1}{8\pi}\int\limits_0^d\int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho^5}{(\rho^2+\delta)^3}f(z+\rho\exp(i\theta))\exp(4i\theta)\,d\theta\,d\rho, \tag{25}$$

$$J_{32}(z,\delta)=\frac{1}{16\pi}\int\limits_0^d\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{2\rho^2}{(\rho^2+\delta)^3}-\frac{3}{(\rho^2+\delta)^2}\right)\rho^3 f(z+\rho\exp(i\theta))\exp(2i\theta)\,d\theta\,d\rho, \tag{26}$$

$$J_{22}(z,\delta)=\frac{1}{16\pi}\int\limits_0^d\int\limits_0^{2\pi}\frac{2\delta^2\rho}{(\rho^2+\delta)^3}f(z+\rho\exp(i\theta))\,d\theta\,d\rho. \tag{27}$$

Вследствие условия k-усиленной непрерывности функции $f(z)=f(x,y)$ при $k=2,4$, функции

$$\int\limits_\rho^d\frac{ds}{s}\int\limits_0^{2\pi}f(z+s\exp(i\theta))\exp(ik\theta)\,d\theta=f_k(z,\rho)-f_k(z,d) \tag{28}$$

непрерывны по ρ на отрезке $[0,d]$, дифференцируемы при $\rho>0$ и

$$\frac{df_k(z,\rho)}{d\rho}=-\frac{1}{\rho}\int\limits_0^{2\pi}f(z+\rho\exp(i\theta))\exp(ik\theta)\,d\theta. \tag{29}$$

Воспользовавшись интегрированием по частям, равенства (25), (26) в силу (28) и (29) запишем в виде

$$J_{42}(z,\delta)=\frac{1}{8\pi}\int\limits_0^d\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho^2}{\rho^2+\delta}\right)^3(f_4(z,\rho)-f_4(z,d))\,d\rho, \tag{30}$$

$$J_{32}(z,\delta)=\frac{1}{16\pi}\int\limits_0^d\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{2\rho^6}{(\rho^2+\delta)^3}-\frac{3\rho^4}{(\rho^2+\delta)^2}\right)(f_2(z,\rho)-f_2(z,d))\,d\rho. \tag{31}$$

Каждая из функций

$$L(\rho,\delta)=\left(\frac{\rho^2}{\rho^2+\delta}\right)^3 \quad \text{и} \quad L(\rho,\delta)=3\left(\frac{\rho^2}{\rho^2+\delta}\right)^3-2\left(\frac{\rho^2}{\rho^2+\delta}\right)^2$$

на множестве $[0,R]\times(0,1]$, где $R=d$, удовлетворяет условиям 1) и 2). Поэтому из представлений (30), (31) и леммы 4 следует, что имеют место следующие равенства:

$$\lim_{\delta\to0}J_{42}(z,\delta)=\frac{1}{8\pi}(f_4(z,0)-f_4(z,d)),\quad \lim_{\delta\to0}J_{32}(z,\delta)=-\frac{1}{16\pi}(f_2(z,0)-f_2(z,d)),$$

причём сходимость в них равномерна на круге $|z-z_0|\leqslant d$.

Из равенства (27) вытекает, что равномерно по $z\in U(z_0,d)$ имеет место сходимость

$$\lim_{\delta\to0}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial\bar z}\right)^2u_\delta(z)=\frac{1}{16}f(z).$$

Таким образом, установлено существование предела функции $J_{k2}(z,\delta)$, $k=\overline{0,4}$, при $\delta\to\to0$ равномерного по $z\in U(z_0,d)$. Поэтому из представления (23) и равенства (24) следует существование равномерного по $z\in U(z_0,d)$ предела (22), что и требовалось доказать. Теорема 2 доказана.

Замечание. Из приведённого доказательства вытекает, что для частных производных $(\partial/\partial z)^k(\partial/\partial\bar z)^l u_0(z)$ функции $u_0(z)$ справедливы представления

$$\left(\frac{\partial}{\partial\bar z}\right)^4u_0(z)=\frac{1}{8}f_4(z),\quad \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^4u_0(z)=\frac{1}{8}f_{-4}(z),\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial\bar z}\right)^3u_0(z)=-\frac{1}{16}f_2(z),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^2 u_0(z) = \frac{1}{16} f(z), \quad \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^3 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} u_0(z) = -\frac{1}{16} f_{-2}(z),$$

или для частных производных $(\partial/\partial x)^k(\partial/\partial y)^l u_0(x,y)$ функции $u_0(x,y)$ – представления

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^4 u_0(x,y) = \frac{1}{8}[f_4(z) + f_{-4}(z) - 2f_2(z) - 2f_{-2}(z) + 3f(z)],$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^4 u_0(x,y) = \frac{1}{8}[f_4(z) + f_{-4}(z) + 2f_2(z) + 2f_{-2}(z) + 3f(z)],$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^3\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) u_0(x,y) = \frac{i}{8}[f_{-4}(z) - f_4(z) + f_2(z) - f_{-2}(z)],$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u_0(x,y) = \frac{1}{8}[f(z) - f_4(z) - f_{-4}(z)],$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u_0(x,y) = \frac{i}{8}[f_4(z) - f_{-4}(z) + f_2(z) - f_{-2}(z)].$$

Пример. Функция, определённая формулой

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \ \ (x,y) = (0,0), \\ \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2|\ln(x^2+y^2)|^\beta}, & \text{если} \ \ 0 < x^2+y^2 \leqslant 3/4, \end{cases}$$

при $\beta > 0$ непрерывна в замкнутой области $\overline{G} = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant 3/4\}$. В этой области уравнение Пуассона $\Delta y = f(x,y)$ имеет классическое решение при любом $\beta > 0$, а уравнение $\Delta^2 y = f(x,y)$ не имеет классического решения при $\beta \leqslant 1$ и имеет классическое решение при $\beta > 1$.

Так как всякое обобщённое решение однородного уравнения $\Delta^2(u) = 0$ в области G является бесконечно дифференцируемой функцией (см., например, [5]), то из теоремы 2 следует

Теорема 3. *В условиях теоремы 2 каждое обобщённое решение уравнения (1) в области* G *является классическим решением этого уравнения в этой области.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 5 из работы [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1977.
2. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М., 1966.
3. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1983.
4. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1976.
5. *Олейник О.А.* Лекции об уравнениях с частными производными. М., 2005.
6. *Мухамадиев Э.М., Гришанина Г.Э., Гришанин А.А.* О применении метода регуляризации к построению классического решения уравнения Пуассона // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 4. С. 196–211.
7. *Байзаев С., Гришанина Г.Э., Мухамадиев Э.* О необходимых и достаточных условиях существования классического решения неоднородной системы Коши–Римана // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 2. С. 215–227.

Государственный университет “Дубна”, г. Дубна,
Вологодский государственный университет

Поступила в редакцию 22.07.2020 г.
После доработки 22.07.2020 г.
Принята к публикации 11.12.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 3, с. 338–348

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ ОПЕРЕЖАЮЩЕ-ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ

© 2021 г. А. Н. Зарубин

Исследуется задача Трикоми для опережающе-запаздывающего уравнения смешанного типа. Доказаны теоремы единственности и существования дважды непрерывно дифференцируемого решения.

DOI: 10.31857/S0374064121030055

Введение. Учёт последствия и преддействия в классических задачах математической физики приводит к уравнениям с сосредоточенным или функциональным карлемановским или некарлемановским запаздыванием и опережением по временнóй и (или) пространственной переменным. Такие уравнения позволяют провести глубокий и достаточно полный качественный анализ реальных гидродинамических [1] систем (вихреобразование, перемежаемость, формирование сложных когерентных пятен); построить теорию многослойных оболочек и пластин [2], теорию плазмы [3]; изучить колебания кристаллической решётки [4].

В предлагаемой работе исследуется аналог задачи Трикоми для обобщённого уравнения Лаврентьева–Бицадзе с сосредоточенным некарлемановским запаздыванием и опережением по пространственной координате вида

$$(\operatorname{sgn} y)U_{xx}(x,y) + \sum_{n=-n_1}^{n_2} a_{n+n_1}U_{yy}(x-n\tau,y) = 0 \tag{1}$$

в области $D = D^+ \bigcup D^-$, где $D^+ = \{(x,y) : 0 < x < (n_2+1)\tau,\ \ y > 0\} = \bigcup_{k=0}^{n_2} D_k^+$ и $D^- = \bigcup_{k=0}^{n_2} D_k^{\gamma_{n_2}}$ – эллиптическая и гиперболическая части области D, причём $D_k^+ = \{(x,y) : k\tau < x < (k+1)\tau,\ \ y > 0\}$ $(k = \overline{-n_1, n_2})$; $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$; $\tau = \mathrm{const} > 0$, $a_{n+n_1} \equiv \mathrm{const}$; $D_k^{\gamma_{n_2}} = \{(x,y) : -y + k\tau\gamma_{n_2} < x\gamma_{n_2} < y + (k+1)\tau\gamma_{n_2},\ \ -\gamma_{n_2}\tau/2 < y < 0\}$ $(k = \overline{-n_1, n_2+1})$; $0 < \gamma_0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_{n_2}$; γ_j^2 $(j = \overline{0, n_2})$ – действительные собственные значения матрицы коэффициентов системы уравнений, к которой приводится уравнение (1).

Пусть $D_k = D_k^+ \bigcup D_k^- \bigcup I_k$ $(k = \overline{-n_1, n_2+1})$; $I = \bigcup_{n=-n_1}^{n_2+1} I_n$, $I_n = \{(x,y) : n\tau < x < (n+1)\tau,\ \ y = 0\}$; $J = \bigcup_{k=0}^{n_2-1} J_k = \bigcup_{k=0}^{n_2-1}\{(x,y) : x = (k+1)\tau, y > 0\}$. Тогда $D = (\bigcup_{k=0}^{n_2} D_k) \bigcup (\bigcup_{j=0}^{n_2-1} J_j)$.

1. Постановка задачи. Однозначная разрешимость. Не ограничивая общности, для наглядности и упрощения записи рассмотрим уравнение (1) при $n_1 = n_2 = 1$, т.е. рассмотрим уравнение

$$(\operatorname{sgn} y)U_{xx}(x,y) + a_0U_{yy}(x+\tau,y) + a_1U_{yy}(x,y) + a_2U_{yy}(x-\tau,y) = 0, \tag{2}$$

где $(x,y) \in D = D_0 \bigcup D_1 \bigcup J_0$.

Задача T. Найти в области $D = D_0 \bigcup D_1 \bigcup J_0$ решение $U(x,y) \in C(\overline{D}) \bigcap C^2(D \setminus J_0)$ уравнения (2), удовлетворяющее условиям

$$U(x,y) = r(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D_{-1}}; \tag{3}$$

$$U(x,y) = \rho(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D_2}; \tag{4}$$

$$\lim_{y\to+\infty} U(x,y)=0, \quad 0\leqslant x\leqslant 2\tau; \tag{5}$$

$$U(x,\gamma_j(k\tau-x))=\psi_k(x), \quad k\tau\leqslant x\leqslant (2k+1)\tau/2 \quad (j,k=0,1); \tag{6}$$

условиям сопряжения

$$U(x,0-)=U(x,0+)=\omega(x), \quad 0\leqslant x\leqslant 2\tau, \tag{7}$$

$$U_y(x,0-)=U_y(x,0+)=\nu(x), \quad 0<x<2\tau, \quad x\neq\tau, \tag{8}$$

причём

$$\psi_0(0)=r(0,0); \quad r(x,+\infty)=\rho(x,+\infty)=0, \quad \gamma_j=\sqrt{a_1+(-1)^j a_0} \quad (j=0,1), \tag{9}$$

где $r(x,y)$, $\rho(x,y)$, $\psi_k(x)$ – заданные непрерывные достаточно гладкие функции; $\omega(x)$, $\nu(x)$ и γ_j – искомые функции и собственные значения, которые находятся в процессе решения задачи. Области D и D_{-1}, D_2 показаны на рисунке.

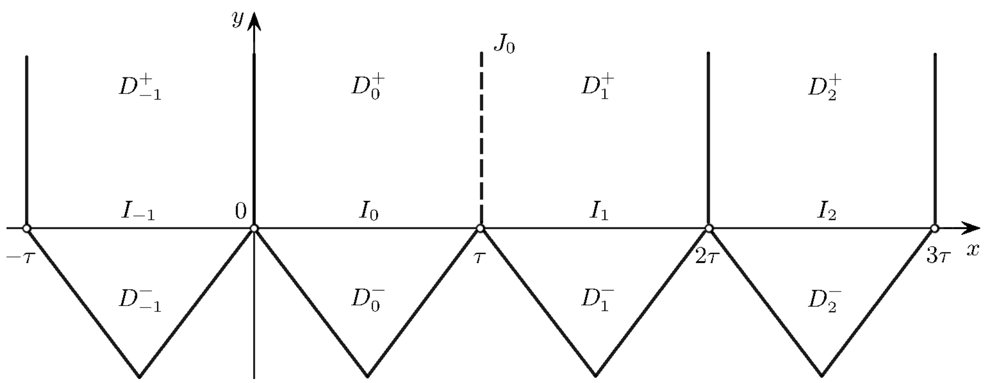

Рисунок. Области $D_k=D_k^+\bigcup D_k^-$, $k=\overline{-1,2}$; область $D=D_0\bigcup D_1\bigcup J_0$; интервалы I_k, $k=\overline{-1,2}$; $I=\bigcup_{k=-1}^2 I_k$; луч J_0.

Теорема. *Если имеют место включения*

$$r(x,y)\in C(\overline{D_{-1}})\bigcap C^4(D_{-1}), \quad \rho(x,y)\in C(\overline{D_2})\bigcap C^4(D_2),$$

$$\psi_k(x)\in C[k\tau,(2k+1)\tau/2]\bigcap C^2(k\tau,(2k+1)\tau/2) \quad (k=0,1),$$

справедливо равенство $a_0=a_2$ *и выполняются соотношения* $a_1>a_0>0$; $r(0,y)=\rho(2\tau,y)$, $y\geqslant 0$; $\psi_0(0)=r(0,0)$; $r(x,+\infty)=\rho(x,+\infty)=0$, $0\leqslant x\leqslant 2\tau$, *то существует единственное решение* $U(x,y)$ *задачи* T.

Доказательство. В терминах функций

$$U_j(x,y)=U(x,y), \quad (x,y)\in D_j \quad (j=-\overline{1,2}), \tag{10}$$

уравнение (2) представим с учётом условий (3), (4) в виде системы уравнений смешанного типа, определённых соответственно в областях D_0 и D_1:

$$(\operatorname{sgn} y)U_{0xx}(x,y)+a_0U_{1yy}(x+\tau,y)+a_1U_{0yy}(x,y)=-a_2r_{yy}(x-\tau,y), \quad (x,y)\in D_0,$$

$$(\operatorname{sgn} y)U_{1xx}(x,y)+a_1U_{1yy}(x,y)+a_2U_{0yy}(x-\tau,y)=-a_0\rho_{yy}(x+\tau,y), \quad (x,y)\in D_1.$$

Заменяя во втором уравнении системы x на $x+\tau$, получаем

$$(\operatorname{sgn} y)U_{0xx}(x,y)+a_0U_{1yy}(x+\tau,y)+a_1U_{0yy}(x,y)=-a_2r_{yy}(x-\tau,y), \quad (x,y)\in D_0, \tag{11}$$

$$(\operatorname{sgn} y)U_{1xx}(x+\tau,y)+a_1U_{1yy}(x+\tau,y)+a_2U_{0yy}(x,y)=-a_0\rho_{yy}(x+2\tau,y), \quad (x,y)\in D_0. \tag{12}$$

Пусть $a_0 = a_2$ и

$$q_j(x,y) = (U_0(x,y) + (-1)^j U_1(x+\tau,y))/2 \quad (j=0,1). \tag{13}$$

Тогда, складывая и вычитая уравнения (11), (12), на основании (13) и (9) приходим к системе уравнений смешанного типа

$$(\operatorname{sgn} y) q_{jxx}(x,y) + \gamma_j^2 q_{jyy}(x,y) = -a_0 f_j(x,y), \quad (x,y) \in D_0, \tag{14}$$

где

$$f_j(x,y) = (r_{yy}(x-\tau,y) + (-1)^j \rho_{yy}(x+2\tau,y))/2 \quad (j=0,1). \tag{15}$$

Множество решений неоднородных уравнений Лаврентьева–Бицадзе (14) содержит все решения уравнения (2), которые можно выделить в силу (13), (10), используя соотношение

$$U(x,y) = U_0(x,y) = q_0(x,y) + q_1(x,y), \quad (x,y) \in D_0, \tag{16}$$

или

$$U(x,y) = U_1(x,y) = q_0(x-\tau,y) - q_1(x-\tau,y), \quad (x,y) \in D_1. \tag{17}$$

Таким образом, поставленная задача редуцируется к двум задачам Трикоми для уравнения (14) относительно функции $q_j(x,y) \in C(\overline{D_0}) \bigcap C^2(D_0)$, причём $q_j(x,y)$, согласно (13), (3)–(8) и равенствам

$$U_0(0,y) = U_0(\tau,y) = U_1(\tau,y) = U_1(2\tau,y) = r(0,y) = \rho(2\tau,y),$$

должны удовлетворять граничным условиям

$$q_j(0,y) = q_j(\tau,y) = \overline{r}_j(y) \equiv r(0,y) + (-1)^j \rho(2\tau,y), \quad y \geqslant 0; \tag{18}$$

$$\lim_{y\to+\infty} q_j(x,y) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \tau; \tag{19}$$

$$q_j(x,\gamma_j(-x)) = \overline{\psi}_j(x) \equiv \psi_0(x) + (-1)^j \psi_1(x+\tau), \quad 0 \leqslant x \leqslant \tau/2; \tag{20}$$

$$q_j(x,0-) = q_j(x,0+) = \overline{\omega}_j(x) \equiv \omega(x) + (-1)^j \omega(x+\tau), \quad 0 \leqslant x \leqslant \tau; \tag{21}$$

$$q_{jy}(x,0-) = q_{jy}(x,0+) = \overline{\nu}_j(x) \equiv \nu(x) + (-1)^j \nu(x+\tau), \quad 0 < x < \tau. \tag{22}$$

Здесь и далее $j = 0,1$.

Единственность решения задачи T для уравнения (2) в области D следует из того, что однородная задача T имеет только тривиальное решение $U(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D}$, поскольку эквивалентна однородной задаче T для уравнения

$$(\operatorname{sgn} y) q_{jxx}(x,y) + \gamma_j^2 q_{jyy}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D_0, \tag{23}$$

при однородных условиях (18)–(20), имеющей только тривиальное решение $q_j(x,y) \equiv 0$ в $\overline{D_0}$.

Доказательство этого факта основано на установлении знакоопределённости интеграла

$$\beta_j = \int\limits_0^\tau \overline{\omega}_j(x) \overline{\nu}_j(x) dx.$$

Лемма 1. *Если* $q_j(x,y)$ *– решение уравнения (23) в области* $\overline{D_0^+}$, *принадлежащее классу* $C(\overline{D_0^+}) \bigcap C^2(D_0^+)$ *и обращающееся в нуль при* $x=0$, $x=\tau$ $(y \geqslant 0)$ *и* $y \to +\infty$ $(0 \leqslant x \leqslant \tau)$, *то*

$$\beta_j \leqslant 0 \tag{24}$$

и
$$\gamma_j^2\beta_j+\iint\limits_{D_0^+}[q_{jx}^2(x,y)+\gamma_j^2q_{jy}^2(x,y)]\,dx\,dy=0. \tag{25}$$

Доказательство проводится известным методом Трикоми [5, с. 491–493; 6, с. 128–130].

Лемма 2. *Если $q_j(x,y)\in C(\overline{D_0^-})\bigcap C^2(D_0^-)$ – решение уравнения (23) в области $\overline{D_0^-}$, обращающееся в нуль на характеристике $y=-\gamma_j x$ $(0\leqslant x\leqslant\tau/2)$, то*
$$\beta_j\geqslant 0. \tag{26}$$

Доказательство проводится аналогично [5, с. 491–493; 6, с. 128–130].

Из неравенств (24), (26) следует, что $\beta_j=0$, а потому в силу (25) имеем равенство
$$\iint\limits_{D_0^+}[q_{jx}^2(x,y)+\gamma_j^2q_{jy}^2(x,y)]\,dx\,dy=0,$$
из которого следует, что $q_{jx}(x,y)=q_{jy}(x,y)\equiv 0$, т.е. $q_j(x,y)\equiv\mathrm{const}$ в D_0^+. Однородность граничных условий в D_0^+ и включение $q_j(x,y)\in C(\overline{D_0^+})$ позволяют утверждать, что $q_j(x,y)\equiv\equiv 0$ в $\overline{D_0^+}$. Значит, $q_j(x,0)\equiv 0$, $0\leqslant x\leqslant\tau$. Последнее тождество в совокупности с однородным условием (20) обеспечивают тривиальность решения $q_j(x,y)\equiv 0$ первой задачи Дарбу в $\overline{D_0^-}$. Из доказанной тривиальности решений $q_j(x,y)$ в $\overline{D_0^+}$ и $\overline{D_0^-}$ вытекает тривиальность решения $q_j(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D_0}$. Таким образом, единственность решения задачи Трикоми для уравнения (14) и граничных условий (18)–(20) в области $\overline{D_0}$ доказана.

Тривиальность решения однородной задачи T для уравнения (2) и граничных условий (3)–(6) в области $\overline{D}$ следует из того, что $q_j(x,y)\equiv 0$ в $\overline{D_0}$, и равенств (16), (17): $U(x,y)==U_j(x,y)\equiv 0$, $(x,y)\in\overline{D_j}$. Это означает единственность решения задачи T для уравнения (2) и граничных условий (3)–(6) в области $\overline{D}$.

Доказательство существования решения $U(x,y)$ задачи T в области D для уравнения (2) основано на решениях $q_j(x,y)$ задач в области эллиптичности D_0^+ и в области гиперболичности D_0^- для уравнения (14).

Задача Неймана–Дирихле. Найти в области D_0^+ решение $q_j(x,y)\in C(\overline{D_0^+})\bigcap C^2(D_0^+)$ уравнения (14)
$$q_{jxx}(x,y)+\gamma_j^2q_{jyy}(x,y)=-a_0f_j(x,y),\quad (x,y)\in D_0^+, \tag{27}$$
удовлетворяющее условиям (18), (19), (22).

Задача Дарбу. Найти в области D_0^- решение $q_j(x,y)\in C(\overline{D_0^-})\bigcap C^2(D_0^-)$ уравнения (14)
$$q_{jxx}(x,y)-\gamma_j^2q_{jyy}(x,y)=a_0f_j(x,y),\quad (x,y)\in D_0^-, \tag{28}$$
удовлетворяющее условиям (20), (22).

Вопрос о существовании решения $q_j(x,y)$ задачи Трикоми для уравнения (14) в области D_0 связан с разрешимостью сингулярного интегрального уравнения относительно функции $\overline{\nu}_j(x)$, $0<x<\tau$, которое будет получено из функциональных соотношений между функциями $\overline{\omega}_j(x)$ и $\overline{\nu}_j(x)$, привнесённых на линию изменения типа $y=0$, $0<x<\tau$ решениями задачи Неймана–Дирихле из D_0^+ и задачи Дарбу из D_0^-.

Лемма 3. *Если имеют место включения $\overline{r}_j(y)\in C[0,+\infty)\bigcap C^2(0,+\infty)$, $\overline{\nu}_j(x)\in C^1(0,\tau)$ и соотношение $\lim\limits_{y\to+\infty}\overline{r}_j(y)=0$, то существует единственное решение задачи Неймана–Дирихле $q_j(x,y)\in C(\overline{D_0^+})\bigcap C^2(D_0^+)$. Это решение представимо в виде*
$$q_j(x,y)=-\gamma_j\int\limits_0^\tau\overline{\nu}_j(\zeta)M_j(x,y;\zeta,0)\,d\zeta-\frac{a_0}{2\gamma_j}\int\limits_0^{+\infty}dz\int\limits_0^\tau f_j(\zeta,0)M_j(x,y;\zeta,z)\,d\zeta+$$

$$+\frac{a_0}{2\gamma_j}\int\limits_0^{+\infty}dz\int\limits_0^{\tau}f_j(\zeta,z)M_j(x,y;\zeta,z)\,d\zeta+\frac{a_0}{2\gamma_j}\int\limits_0^{+\infty}dz\int\limits_0^{\tau}f_j(\zeta,z+y)M_j(x,0;\zeta,z)\,d\zeta+$$

$$+\frac{2}{\gamma_j\tau}\sin\frac{\pi x}{\tau}\int\limits_0^{+\infty}\overline{r}_j(t)\bigg[\frac{\operatorname{ch}(\pi(y-t)/\gamma_j\tau)}{\operatorname{ch}(2\pi(y-t)/\gamma_j\tau)-\cos(2\pi x/\tau)}+$$

$$+\frac{\operatorname{ch}(\pi(y+t)/\gamma_j\tau)}{\operatorname{ch}(2\pi(y+t)/\gamma_j\tau)-\cos(2\pi x/\tau)}\bigg]\,dt,\quad (x,y)\in\overline{D_0^+},\tag{29}$$

где

$$M_j(x,y;\zeta,z)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\operatorname{ch}(\pi(z+y)/\gamma_j\tau)-\cos(\pi(\zeta+x)/\tau)}{\operatorname{ch}(\pi(z+y)/\gamma_j\tau)-\cos(\pi(\zeta-x)/\tau)}.$$

Доказательство. Решение задачи Неймана–Дирихле для уравнения (27) будем искать в виде суммы решений

$$q_j(x,y)=q_{j1}(x,y)+q_{j2}(x,y)\tag{30}$$

двух вспомогательных задач, где функция $q_{j1}(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$q_{j1xx}(x,y)+\gamma_j^2q_{j1yy}(x,y)=-a_0f_j(x,y),\quad (x,y)\in D_0^+,\tag{31}$$

и условиям

$$q_{j1}(0,y)=q_{j1}(\tau,y)=0,\quad y\geqslant 0,\tag{32}$$

$$\lim_{y\to+\infty}q_{j1}(x,y)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant\tau,\tag{33}$$

$$\frac{\partial q_{j1}(x,y)}{\partial y}\bigg|_{y=0}=\overline{\nu}_j(x),\quad 0<x<\tau;\tag{34}$$

а функция $q_{j2}(x,y)$ – уравнению

$$q_{j2xx}(x,y)+\gamma_j^2q_{j2yy}(x,y)=0,\quad (x,y)\in D_0^+,\tag{35}$$

и условиям

$$q_{j2}(0,y)=q_{j2}(\tau,y)=\overline{r}_j(y),\quad y\geqslant 0,\tag{36}$$

$$\lim_{y\to+\infty}q_{j2}(x,y)=0,\quad 0\leqslant x\leqslant\tau,\tag{37}$$

$$\frac{\partial q_{j2}(x,y)}{\partial y}\bigg|_{y=0}=0,\quad 0<x<\tau.\tag{38}$$

Решение первой вспомогательной задачи (31)–(34) будем искать в виде ряда

$$q_{j1}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_{nj}(y)\sin(\mu_nx),\quad (x,y)\in\overline{D_0^+},\quad \mu_n=\frac{n\pi}{\tau},\tag{39}$$

удовлетворяющего условиям (32), предполагая его равномерную сходимость в $\overline{D_0^+}$ и равномерную сходимость в D_0^+ рядов, полученных из него почленным дифференцированием по x и y дважды.

Подстановка ряда (39) в уравнение (31) приводит к разложению в ряд Фурье по синусам правой части уравнения (31), а его обращение – к уравнению

$$C''_{nj}(y)-\frac{\mu_n^2}{\gamma_j^2}C_{nj}(y)=-\frac{a_0}{\gamma_j^2}\overline{f}_{jn}(y)\equiv-\frac{2a_0}{\tau\gamma_j^2}\int\limits_0^{\tau}f_j(\zeta,y)\sin(\mu_n\zeta)\,d\zeta,\quad y>0,\tag{40}$$

в котором в силу (33), (34), (39) функции $C_{nj}(y)$ удовлетворяют соотношениям

$$\lim_{y\to+\infty} C_{nj}(y) = 0, \tag{41}$$

$$C'_{nj}(0) = \frac{2}{\tau}\int\limits_0^\tau \overline{\nu}_j(\zeta)\sin(\mu_n\zeta)\,d\zeta; \tag{42}$$

причём, согласно (40), (15) и условиям теоремы, справедливо равенство

$$\lim_{y\to+\infty} \overline{f}_{jn}(y) = 0. \tag{43}$$

Общее решение уравнения (40), удовлетворяющее условию (41), запишем в виде

$$C_{nj}(y) = k_n e^{-\mu_n y/\gamma_j} + \frac{a_0}{2\gamma_j\mu_n}\int\limits_y^{+\infty} \overline{f}_{jn}(\zeta)e^{-\mu_n(\zeta-y)/\gamma_j}\,d\zeta, \quad y>0, \quad k_n\equiv\mathrm{const}, \tag{44}$$

так как абсолютная сходимость интеграла в (44) вместе с соотношением (43) и правилом Лопиталя позволяют утверждать, что

$$\lim_{y\to+\infty} C_{nj}(y) = \frac{a_0}{2\gamma_j\mu_n}\lim_{y\to+\infty} e^{\mu_n y/\gamma_j}\int\limits_y^{+\infty}\overline{f}_{jn}(\zeta)e^{-\mu_n\zeta/\gamma_j}\,d\zeta =$$

$$= \frac{a_0}{2\gamma_j\mu_n}\lim_{y\to+\infty}\frac{-\overline{f}_{jn}(y)e^{-\mu_n y/\gamma_j}}{-\mu_n\gamma_j^{-1}e^{-\mu_n y/\gamma}} = \frac{a_0}{2\mu_n^2}\lim_{y\to+\infty}\overline{f}_{jn}(y) = 0.$$

Подстановка в (44) значения k_n, которое найдено с помощью условия (42), приводит к решению $C_{nj}(y)$ уравнения (40), удовлетворяющему условиям (41), (42) и имеющему вид

$$C_{nj}(y) = -\frac{\gamma_j}{\mu_n}C'_{nj}(0)e^{-\mu_n y/\gamma_j} + \frac{a_0}{2\mu_n^2}\int\limits_0^{+\infty}\overline{f}'_{jn}(z)e^{-\mu_n(z+y)/\gamma_j}\,dz +$$

$$+ \frac{a_0}{2\gamma_j\mu_n}\int\limits_0^{+\infty}\overline{f}_{jn}(z+y)e^{-\mu_n z/\gamma_j}\,dz, \quad y>0. \tag{45}$$

Равенство (39) вместе с (45), (40), (42) и формулой 5.4.12.6 из [7] для суммирования рядов приводит к искомому решению задачи (31)–(34):

$$q_{j1}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{nj}(y)\sin(\mu_n x) = -\gamma_j\int\limits_0^\tau \overline{\nu}_j(\zeta)M_j(x,y;\zeta,0)\,d\zeta -$$

$$-\frac{a_0}{2\gamma_j}\int\limits_0^{+\infty}dz\int\limits_0^\tau f_j(\zeta,0)M_j(x,y;\zeta,z)\,d\zeta + \frac{a_0}{2\gamma_j}\int\limits_0^{+\infty}dz\int\limits_0^\tau f_j(\zeta,z)M_j(x,y;\zeta,z)\,d\zeta +$$

$$+\frac{a_0}{2\gamma_j}\int\limits_0^{+\infty}dz\int\limits_0^\tau f_j(\zeta,z+y)M_j(x,0;\zeta,z)\,d\zeta, \tag{46}$$

где $M_j(x,y;\zeta,z)$ определено в формулировке леммы 3.

Решение второй вспомогательной задачи (35)–(38) будем искать, используя косинус-преобразование Фурье, удовлетворяющее условиям (37), (38):

$$q_{j2}(x,y)=\int\limits_0^{+\infty}(A_j(\lambda)e^{\lambda\gamma_j x}+B_j(\lambda)e^{-\lambda\gamma_j x})\cos(\lambda y)\,d\lambda,\quad (x,y)\in\overline{D_0^+}. \tag{47}$$

Для нахождения функций $A_j(\lambda)$ и $B_j(\lambda)$ воспользуемся краевыми условиями (36), т.е.

$$q_{j2}(0,y)=\overline{r}_j(y)=\int\limits_0^{+\infty}(A_j(\lambda)+B_j(\lambda))\cos(\lambda y)\,d\lambda,$$

$$q_{j2}(\tau,y)=\overline{r}_j(y)=\int\limits_0^{+\infty}(A_j(\lambda)e^{\lambda\gamma_j\tau}+B_j(\lambda)e^{-\lambda\gamma_j\tau})\cos(\lambda y)\,d\lambda.$$

Так как $\overline{r}_j(y)$ – функция ограниченной вариации на $[0,+\infty)$, $\overline{r}_j(+\infty)=0$, то, обратив косинус-преобразование Фурье, получим

$$A_j(\lambda)+B_j(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\overline{r}_j(t)\cos(\lambda t)\,dt,$$

$$A_j(\lambda)e^{\lambda\gamma_j\tau}+B_j(\lambda)e^{-\lambda\gamma_j\tau}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\overline{r}_j(t)\cos(\lambda t)\,dt.$$

Поэтому

$$A_j(\lambda)=\frac{1}{\pi}\frac{1-e^{-\lambda\gamma_j\tau}}{\operatorname{sh}(\lambda\gamma_j\tau)}\int\limits_0^{+\infty}\overline{r}_j(t)\cos(\lambda t)\,dt,\quad B_j(\lambda)=\frac{1}{\pi}\frac{e^{\lambda\gamma_j\tau}-1}{\operatorname{sh}(\lambda\gamma_j\tau)}\int\limits_0^{+\infty}\overline{r}_j(t)\cos(\lambda t)\,dt.$$

Значит,

$$A_j(\lambda)e^{\lambda\gamma_j x}+B_j(\lambda)e^{-\lambda\gamma_j x}=\frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{ch}(\lambda\gamma_j(2x-\tau)/2)}{\operatorname{ch}(\lambda\gamma_j\tau/2)}\int\limits_0^{+\infty}\overline{r}_j(t)\cos(\lambda t)\,dt.$$

Заменяя подынтегральную функцию в (47) согласно последнему равенству и применяя формулу 1.9.(12) из [8], получаем искомое решение $q_{j2}(x,y)$ задачи (35)–(38):

$$q_{j2}(x,y)=\frac{2}{\gamma_j\tau}\sin\frac{\pi x}{\tau}\int\limits_0^{+\infty}\overline{r}_j(t)\biggl[\frac{\operatorname{ch}(\pi(y-t)/\gamma_j\tau)}{\operatorname{ch}(2\pi(y-t)/\gamma_j\tau)-\cos(2\pi x/\tau)}+$$
$$+\frac{\operatorname{ch}(\pi(y+t)/\gamma_j\tau)}{\operatorname{ch}(2\pi(y+t)/\gamma_j\tau)-\cos(2\pi x/\tau)}\biggr]\,dt,\quad (x,y)\in\overline{D_0^+}. \tag{48}$$

Таким образом, решение задачи Неймана–Дирихле (27), (18), (19), (22) в силу (30), (46), (48) имеет вид (29).

Функциональное соотношение между функциями $\overline{\omega}_j(x)$ и $\overline{\nu}_j(x)$, привнесённое из $\overline{D_0^+}$ на линию изменения типа $y=0$, $0\leqslant x\leqslant\tau$, найдём из решения задачи Неймана–Дирихле (29), полагая в нём $y=0$ и дифференцируя:

$$\overline{\omega}_j'(x)=\frac{\gamma_j}{2\tau}\int\limits_0^{\tau}\overline{\nu}_j(\zeta)[\operatorname{ctg}(\pi(\zeta-x)/2\tau)-\operatorname{ctg}(\pi(\zeta+x)/2\tau)]\,d\zeta+\delta_j(x),\quad 0<x<\tau, \tag{49}$$

где

$$\delta_j(x) = \frac{a_0}{4\tau\gamma_j}\int\limits_0^{+\infty} dz \int\limits_0^{\tau} [2f_j(\zeta, z) - f_j(\zeta, 0)]\left[\frac{\sin(\pi(\zeta + x)/\tau)}{\operatorname{ch}(\pi z/\gamma_j\tau) - \cos(\pi(\zeta + x)/\tau)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin(\pi(\zeta - x)/\tau)}{\operatorname{ch}(\pi z/\gamma_j\tau) - \cos(\pi(\zeta - x)/\tau)}\right] d\zeta +$$

$$+ \frac{2\pi}{\gamma_j\tau^2}\cos\frac{\pi x}{\tau}\int\limits_0^{+\infty} \overline{r}_j(t)\frac{\operatorname{ch}(\pi t/\gamma_j\tau)[\operatorname{sh}^2(\pi t/\gamma_j\tau) - \sin^2(\pi x/\tau)]}{[\operatorname{ch}^2(\pi t/\gamma_j\tau) - \cos^2(\pi x/\tau)]^2}\, dt,$$

причём $\delta_j(x) \in C^1[0, \tau]$.

Лемма 4. *Если выполняются включения* $\overline{\nu}_j(x) \in C^1(0, \tau)$, $\overline{\psi}_j(x) \in C[0, \tau/2] \bigcap C^2(0, \tau/2)$ *и равенство* $\overline{\psi}_j(0) = \overline{r}_j(0)$, *то существует единственное решение* $q_j(x, y) \in C(\overline{D_0^-}) \bigcap C^2(D_0^-)$ *задачи Дарбу. Это решение имеет вид*

$$q_j(x, y) = \gamma_j \int\limits_0^{x+y/\gamma_j} \overline{\nu}_j(\zeta)\, d\zeta - \overline{\psi}_j(0) + \overline{\psi}_j((x - y/\gamma_j)/2) + \overline{\psi}_j((x + y/\gamma_j)/2) - B_j(x, y) +$$

$$+ B_j((x - y/\gamma_j)/2, -\gamma_j(x - y/\gamma_j)/2) + B_j((x + y/\gamma_j)/2, -\gamma_j(x + y/\gamma_j)/2), \quad (x, y) \in \overline{D_0^-}, \quad (50)$$

где

$$B_j(x, y) = \frac{a_0}{2\gamma_j}\int\limits_0^y dt \int\limits_{x-(y-t)/\gamma_j}^{x+(y-t)/\gamma_j} f_j(\zeta, t)\, d\zeta.$$

Доказательство представления (50) вытекает из общего решения неоднородного уравнения (28) колебаний струны

$$q_j(x, y) = P_{j1}(x - y/\gamma_j) + P_{j2}(x + y/\gamma_j) -$$

$$- \frac{a_0}{2\gamma_j}\int\limits_0^y dt \int\limits_{x-(y-t)/\gamma_j}^{x+(y-t)/\gamma_j} f_j(\zeta, t)\, d\zeta, \quad (x, y) \in D_0^-, \quad P_{j1}, P_{j2} \in C^2[0, \tau],$$

и краевых условий (20), (22).

Функциональное соотношение между функциями $\overline{\omega}_j(x)$ и $\overline{\nu}_j(x)$, привнесённое из D_0^- на линию изменения типа $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \tau$, найдём из решения (50) задачи Дарбу, полагая в нём $y = 0$ и дифференцируя:

$$\overline{\omega}_j'(x) = \gamma_j\overline{\nu}_j(x) - m_j(x), \quad 0 < x < \tau, \quad (51)$$

где

$$m_j(x) = \frac{a_0}{\gamma_j}\int\limits_0^{-x\gamma_j/2} f_j(x + t/\gamma_j, t)\, dt - \overline{\psi}_j'(x/2),$$

причём $m_j(x) \in C^1[0, \tau]$.

Вопрос о существовании решения задачи Трикоми (14), (18)–(20) в силу условий сопряжения (21), (22) и функциональных соотношений (49), (51) сведён к разрешимости сингулярного интегрального уравнения

$$\overline{\nu}_j(x) - \frac{1}{2\tau}\int\limits_0^\tau \overline{\nu}_j(\zeta)[\operatorname{ctg}(\pi(\zeta-x)/2\tau) - \operatorname{ctg}(\pi(\zeta+x)/2\tau)]\,d\zeta = \Theta_j(x), \quad 0<x<\tau, \tag{52}$$

которое после очевидного преобразований ядра запишем в виде

$$\overline{\nu}_j(x) - \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \overline{\nu}_j(\zeta)\frac{\sin(\pi\zeta/\tau)\,d\zeta}{\cos(\pi\zeta/\tau)-\cos(\pi x/\tau)} = \Theta_j(x), \quad 0<x<\tau, \tag{53}$$

где $\Theta_j(x) = (\delta_j(x)+m_j(x))/\gamma_j$.

Проведя в уравнении (53) замену переменных и функций по формулам

$$\overline{\nu}_j(x) = \overline{\overline{\nu}}_j(y), \quad \Theta_j(x) = \overline{\Theta}_j(y), \quad y = \cos(\pi x/\tau), \quad t = \cos(\pi\zeta/\tau), \tag{54}$$

получим уравнение

$$\overline{\overline{\nu}}_j(y) - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^1 \overline{\overline{\nu}}_j(t)\frac{dt}{t-y} = \overline{\Theta}_j(y), \quad -1<y<1. \tag{55}$$

Переход от уравнения (53) к уравнению (55) законен ввиду монотонности функции $\cos(\pi x/\tau)$, $0<x<\tau$.

Уравнение (55) является уравнением нормального типа [9, с. 177]. Его индекс [9, с. 101, 176] равен нулю. В силу единственности решения задачи Трикоми (14), (18)–(20) уравнение (55) однозначно обратимо.

Регуляризацию сингулярного интегрального уравнения (55) проведём в классе функций $\overline{\overline{\nu}}_j(y)$, удовлетворяющих условию Гёльдера при $y\in(-1,1)$, методом сингуляризации [10, 11].

Действуя на обе части уравнения (55) оператором

$$K\varphi \equiv \varphi(s) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^1 \varphi(p)\frac{dp}{p-s},$$

получаем

$$\overline{\overline{\nu}}_j(y) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^1 \overline{\overline{\nu}}_j(p)\frac{dp}{p-y} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{t-y}\left[\overline{\overline{\nu}}_j(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^1 \overline{\overline{\nu}}_j(p)\frac{dp}{p-t}\right]dt = \overline{\Theta}_j(y) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^1 \overline{\Theta}_j(p)\frac{dp}{p-y},$$

где $-1<y<1$, т.е.

$$\overline{\overline{\nu}}_j(y) - \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-1}^1 \frac{dt}{t-y}\int\limits_{-1}^1 \overline{\overline{\nu}}_j(p)\frac{dp}{p-t} = \overline{\Theta}_j(y) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^1 \overline{\Theta}_j(p)\frac{dp}{p-y}, \quad -1<y<1. \tag{56}$$

Формула Пуанкаре–Бертрана [9, с. 63] позволяет поменять порядок интегрирования в сингулярном повторном интеграле с ядром Коши, а необходимые при этом преобразования приводят к решению уравнения (56) вида

$$\overline{\overline{\nu}}_j(y) = \frac{1}{2}\overline{\Theta}_j(y) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^1 \overline{\Theta}_j(p)\frac{dp}{p-y}, \quad -1<y<1. \tag{57}$$

Возвращаясь к старым переменным и функциям по формулам (54), из уравнения (57) получаем решение сингулярного интегрального уравнения (53):

$$\overline{\nu}_j(x) = \frac{1}{2}\Theta_j(x) + \frac{1}{2\tau}\int\limits_0^\tau \frac{\sin(\pi\zeta/\tau)}{\cos(\pi\zeta/\tau)-\cos(\pi x/\tau)}\Theta_j(\zeta)\,d\zeta, \quad 0<x<\tau,$$

а следовательно, уравнения (52):

$$\overline{\nu}_j(x) = \frac{1}{2}\Theta_j(x) + \frac{1}{4\tau}\int\limits_0^\tau \Theta_j(\zeta)[\operatorname{ctg}(\pi(\zeta-x)/2\tau) - \operatorname{ctg}(\pi(\zeta+x)/2\tau)]\,d\zeta, \quad 0<x<\tau, \tag{58}$$

единственность которого устанавливается теоремой Нётера [9, с. 208].

Найденное в (58) представление функции $\overline{\nu}_j(x)$ позволяет получить с помощью (49) или (51) выражение для $\overline{\omega}_j(x)$.

Подставляя $\overline{\nu}_j(x)$ в (29) и (50), находим искомые решения $q_j(x,y)$ задачи Неймана–Дирихле (27), (18), (19), (22) в области D_0^+ и задачи Дарбу (28), (20), (22) в области D_0^-.

Таким образом, задача Трикоми (14), (18)–(20) решена в области $D_0 = D_0^+ \bigcup D_0^- \bigcup I_0$.

Вернёмся к задаче Трикоми для опережающе-запаздывающего уравнения Лаврентьева–Бицадзе (2) в области D_0.

Её решение в силу (16) и (29) имеет в области $\overline{D_0^+}$ вид

$$U(x,y) = U_0(x,y) = q_0(x,y) + q_1(x,y) = \sum_{j=0}^1 q_j(x,y) =$$

$$= \sum_{j=0}^1 \biggl\{ -\gamma_j \int\limits_0^\tau \overline{\nu}_j(\zeta) M_j(x,y;\zeta,0)\,d\zeta - \frac{a_0}{2\gamma_j}\int\limits_0^{+\infty} dz \int\limits_0^\tau f_j(\zeta,0)M_j(x,y;\zeta,z)\,d\zeta +$$

$$+ \frac{a_0}{2\gamma_j}\int\limits_0^{+\infty} dz \int\limits_0^\tau f_j(\zeta,z)M_j(x,y;\zeta,z)\,d\zeta + \frac{a_0}{2\gamma_j}\int\limits_0^{+\infty} dz \int\limits_0^\tau f_j(\zeta,z+y)M_j(x,0;\zeta,z)\,d\zeta +$$

$$+ \frac{2}{\gamma_j\tau}\sin\frac{\pi x}{\tau}\int\limits_0^{+\infty} \overline{r}_j(t)\biggl[\frac{\operatorname{ch}(\pi(y-t)/\gamma_j\tau)}{\operatorname{ch}(2\pi(y-t)/\gamma_j\tau) - \cos(2\pi x/\tau)} +$$

$$+ \frac{\operatorname{ch}(\pi(y+t)/\gamma_j\tau)}{\operatorname{ch}(2\pi(y+t)/\gamma_j\tau) - \cos(2\pi x/\tau)}\biggr]\,dt\biggr\}, \quad (x,y)\in\overline{D_0^+}; \tag{59}$$

а в области $\overline{D_0^-}$ согласно (16), (50) – вид

$$U(x,y) = U_0(x,y) = q_0(x,y) + q_1(x,y) = \sum_{j=0}^1 q_j(x,y) =$$

$$= \sum_{j=0}^1 \biggl\{ \gamma_j \int\limits_0^{x+y/\gamma_j} \overline{\nu}_j(\zeta)\,d\zeta - \overline{\psi}_j(0) + \overline{\psi}_j((x-y/\gamma_j)/2) + \overline{\psi}_j((x+y/\gamma_j)/2) - B_j(x,y) +$$

$$+ B_j((x-y/\gamma_j)/2, -\gamma_j(x-y/\gamma_j)/2) + B_j((x+y/\gamma_j)/2, -\gamma_j(x+y/\gamma_j)/2)\biggr\}, \quad (x,y)\in\overline{D_0^-}; \tag{60}$$

где функции $f_j(x,y)$, $\overline{r}_j(y)$, $\overline{\psi}_j(x)$, $\overline{\nu}_j(x)$ $(j=0,1)$ определяются равенствами (15), (18), (20), (22) соответственно, причём $\overline{\nu}_j(x)$ – решение сингулярного интегрального уравнения (52), найденное в явной форме (58).

Решение задачи Трикоми для опережающе-запаздывающего уравнения Лаврентьева–Бицадзе (2) в области D_1 можно получить из представлений (59) и (60) для $\overline{D_1^+}$ и $\overline{D_1^-}$ соответственно, если в них заменить x на $x-\tau$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.А., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения. Киев, 1986.
2. *Онанов Г.Г., Скубачевский А.Л.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела // Прикл. механика. 1979. Т. 15. № 5. С. 39–47.
3. *Самарский А.А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935.
4. *Маслов В.П.* Операторные методы. М., 1973.
5. *Франкль Ф.И.* Избранные труды по газовой динамике. М., 1973.
6. *Зарубин А.Н.* Уравнения смешанного типа с запаздывающим аргументом. Орёл, 1997.
7. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М., 1981.
8. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. М., 1969.
9. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М., 1977.
10. *Флайшер Н.М.* Новый метод решения в замкнутой форме для некоторых классов сингулярных интегральных уравнений с регулярной частью // Rev. Roum. Math. Pures Appl. 1965. V. 10. № 5. P. 615–620.
11. *Бабурин Ю.С.* О сингуляризации сингулярных интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. Рязань, 1977. Вып. 10. с. 3–11.

Орловский государственный университет
им. И.С. Тургенева

Поступила в редакцию 08.05.2020 г.
После доработки 08.05.2020 г.
Принята к публикации 11.12.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 3, с. 349–363

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

ЗАДАЧА ДАРБУ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БИАНКИ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

© 2021 г. А. Н. Миронов

Для уравнения Бианки четвёртого порядка доказаны существование и единственность решения задачи Дарбу. Для задачи Дарбу определена функция Римана–Адамара, в терминах которой и построено решение этой задачи.

DOI: 10.31857/S0374064121030067

Задача Дарбу для гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными рассматривалась многими авторами. Можно указать, например, работы [1, гл. 3, § 1; 2–7].

В статье [8] для уравнения Бианки третьего порядка доказаны существование и единственность решения задачи Дарбу, а также определена функция Римана–Адамара, с помощью которой построено решение этой задачи.

В данной работе для уравнения Бианки четвёртого порядка доказаны существование и единственность решения задачи Дарбу и определена функция Римана–Адамара. Уравнения Бианки четвёртого и произвольного порядков рассматривались в работах [9–17].

1. Через $C^{(k_1,\ldots,k_n)}(D)$, где k_i – фиксированные неотрицательные целые числа, $i=\overline{1,n}$, обозначим класс функций $u(x)=u(x_1,\ldots,x_n)$, определённых в области $D\subset\mathbb{R}^n$ и имеющих в ней непрерывные производные $\partial^{r_1+\ldots+r_n}u/\partial x_1^{r_1}\ldots\partial x_n^{r_n}$ при всех $0\leqslant r_i\leqslant k_i$, $i=\overline{1,n}$.

Далее считаем, что в $\mathbb{R}^4$ задана декартова система координат $Oxyzt$.

Уравнением Бианки четвёртого порядка называют уравнение

$$L(u)\equiv u_{xyzt}+a_{1110}u_{xyz}+a_{1101}u_{xyt}+a_{1011}u_{xzt}+a_{0111}u_{yzt}+a_{1100}u_{xy}+a_{1010}u_{xz}+a_{1001}u_{xt}+$$

$$+a_{0110}u_{yz}+a_{0101}u_{yt}+a_{0011}u_{zt}+a_{1000}u_x+a_{0100}u_y+a_{0010}u_z+a_{0001}u_t+a_{0000}u=f(x,y,z,t). \quad (1)$$

Коэффициенты уравнения (1) зависят от (x,y,z,t). Решение класса $C^{(1,1,1,1)}(D)$ уравнения (1) назовём *регулярным* в области D.

Пусть D – область в $\mathbb{R}^4$, ограниченная плоскостями $x=0$, $y=0$, $y=y_1>0$, $z=0$, $z=z_1>0$, $t=x$, $t=t_1>0$. Считаем, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям $a_{ijkl}\in C^{(i,j,k,l)}(\overline{D})$. Обозначим через X, Y, Z, S грани многогранника D при $x=0$, $y=0$, $z=0$, $t=x$ соответственно.

Задача Дарбу. В области D найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_{\overline{X}}=\varphi_1(y,z,t),\quad u|_{\overline{Y}}=\varphi_2(x,z,t),\quad u|_{\overline{Z}}=\varphi_3(x,y,t),\quad u|_{\overline{S}}=\psi(x,y,z), \quad (2)$$

где φ_j, $j=\overline{1,3}$, и ψ – заданные функции, для которых выполнены включения

$$\varphi_1\in C^{(1,1,1)}(\overline{X}),\quad \varphi_2\in C^{(1,1,1)}(\overline{Y}),\quad \varphi_3\in C^{(1,1,1)}(\overline{Z}),\quad \psi\in C^{(1,1,1)}(\overline{S})$$

и условия согласования

$$\varphi_1(y,0,t)=\varphi_3(0,y,t),\quad \varphi_1(0,z,t)=\varphi_2(0,z,t),\quad \varphi_2(x,0,t)=\varphi_3(x,0,t),$$

$$\varphi_1(y,z,0)=\psi(0,y,z),\quad \varphi_2(x,z,x)=\psi(x,0,z),\quad \varphi_3(x,y,x)=\psi(x,y,0).$$

Следуя подходу из [1, гл. 3, § 1, п. 2°], докажем существование и единственность решения задачи Дарбу. Формулу решения задачи Гурса [11; 9, § 3, п. 1, с. 49–51] будем рассматривать как представление произвольного регулярного решения уравнения (1). Из указанной формулы выведем интегральное уравнение Вольтерры второго рода для определения условия Гурса $u(x,y,z,t_1)$ на плоскости $t=t_1$; из существования и единственности решения этого интегрального уравнения будет следовать существование и единственность решения задачи Дарбу (1), (2).

Задача Гурса. В области $G=\{x_0<x<x_2,\ y_0<y<y_2,\ z_0<z<z_2,\ t_0<t<t_2\}$ найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u|_{\overline{X}_0}=\theta_1(y,z,t),\quad u|_{\overline{Y}_0}=\theta_2(x,z,t),\quad u|_{\overline{Z}_0}=\theta_3(x,y,t),\quad u|_{\overline{T}_0}=\theta_4(x,y,z),\tag{3}$$

где θ_k, $k=\overline{1,4}$, – заданные функции, для которых выполнены включения

$$\theta_1\in C^{(1,1,1)}(\overline{X}_0),\quad \theta_2\in C^{(1,1,1)}(\overline{Y}_0),\quad \theta_3\in C^{(1,1,1)}(\overline{Z}_0),\quad \theta_4\in C^{(1,1,1)}(\overline{T}_0)$$

и условия согласования

$$\theta_1(y_0,z,t)=\theta_2(x_0,z,t),\quad \theta_1(y,z_0,t)=\theta_3(x_0,y,t),\quad \theta_1(y,z,t_0)=\theta_4(x_0,y,z),$$

$$\theta_2(x,z_0,t)=\theta_3(x,y_0,t),\quad \theta_2(x,z,t_0)=\theta_4(x,y_0,z),\quad \theta_3(x,y,t_0)=\theta_4(x,y,z_0).$$

Здесь X_0, Y_0, Z_0, T_0 – грани параллелотопа G при $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, $t=t_0$.

Решение задачи Гурса существует и единственно, что можно доказать, переходя к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерры. Именно, непосредственно интегрируя уравнение (1) с учётом условий (3), приходим к интегральному уравнению Вольтерры – аналогично тому, как это сделано в [11, § 2, п. 1, с. 25–26] в случае задачи Гурса для уравнения Бианки третьего порядка. Следовательно, решение задачи Гурса (1), (3) существует, единственно и записывается с помощью резольвент интегральных уравнений.

Кратко опишем построение формулы решения задачи Гурса в терминах функции Римана [9; 11, § 3, п. 1]. Рассмотрим интегральное уравнение

$$v(x,y,z,t)-\int\limits_{\tau}^{t}a_{1110}(x,y,z,\delta)v(x,y,z,\delta)\,d\delta-\int\limits_{\zeta}^{z}a_{1101}(x,y,\gamma,t)v(x,y,\gamma,t)\,d\gamma-$$

$$-\int\limits_{\eta}^{y}a_{1011}(x,\beta,z,t)v(x,\beta,z,t)\,d\beta-\int\limits_{\xi}^{x}a_{0111}(\alpha,y,z,t)v(\alpha,y,z,t)\,d\alpha+$$

$$+\int\limits_{\zeta}^{z}\int\limits_{\tau}^{t}a_{1100}(x,y,\gamma,\delta)v(x,y,\gamma,\delta)\,d\delta\,d\gamma+\int\limits_{\eta}^{y}\int\limits_{\tau}^{t}a_{1010}(x,\beta,z,\delta)v(x,\beta,z,\delta)\,d\delta\,d\beta+$$

$$+\int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\tau}^{t}a_{0110}(\alpha,y,z,\delta)v(\alpha,y,z,\delta)\,d\delta\,d\alpha+\int\limits_{\eta}^{y}\int\limits_{\zeta}^{z}a_{1001}(x,\beta,\gamma,t)v(x,\beta,\gamma,t)\,d\gamma\,d\beta+$$

$$+\int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\zeta}^{z}a_{0101}(\alpha,y,\gamma,t)v(\alpha,y,\gamma,t)\,d\gamma\,d\alpha+\int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\eta}^{y}a_{0011}(\alpha,\beta,z,t)v(\alpha,\beta,z,t)\,d\beta\,d\alpha-$$

$$-\int\limits_{\eta}^{y}\int\limits_{\zeta}^{z}\int\limits_{\tau}^{t}a_{1000}(x,\beta,\gamma,\delta)v(x,\beta,\gamma,\delta)\,d\delta\,d\gamma\,d\beta-\int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\zeta}^{z}\int\limits_{\tau}^{t}a_{0100}(\xi,y,\gamma,\delta)v(\xi,y,\gamma,\delta)\,d\delta\,d\gamma d\xi-$$

$$-\int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\eta}^{y}\int\limits_{\tau}^{t} a_{0010}(\xi,\beta,z,\delta)v(\xi,\beta,z,\delta)\,d\delta\,d\beta d\xi-\int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\eta}^{y}\int\limits_{\zeta}^{z} a_{0001}(\xi,\beta,\zeta,t)v(\xi,\beta,\zeta,t)d\zeta\,d\beta d\xi+$$

$$+\int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\eta}^{y}\int\limits_{\zeta}^{z}\int\limits_{\tau}^{t} a_{0000}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)v(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\,d\delta\,d\gamma\,d\beta\,d\alpha=1. \quad (4)$$

Решение v уравнения (4) существует и единственно и представляет собой функцию Римана [9] для уравнения (1). Понятно, что v зависит также от входящих в уравнение (4) переменных ξ, η, ζ, τ. Если нужно подчеркнуть эту зависимость, то пишут $v=R(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau)$.

Введём следующие обозначения:

$$A_{0001}=R_t-a_{1110}R,\quad A_{0010}=R_z-a_{1101}R,\quad A_{0100}=R_y-a_{1011}R,\quad A_{1000}=R_x-a_{0111}R,$$

$$A_{0011}=R_{zt}-(a_{1110}R)_z-(a_{1101}R)_t+a_{1100}R,\quad A_{0101}=R_{yt}-(a_{1110}R)_y-(a_{1011}R)_t+a_{1010}R,$$

$$A_{0110}=R_{yz}-(a_{1101}R)_y-(a_{1011}R)_z+a_{1001}R,\quad A_{1001}=R_{xt}-(a_{1110}R)_x-(a_{0111}R)_t+a_{0110}R,$$

$$A_{1010}=R_{xz}-(a_{1101}R)_x-(a_{0111}R)_z+a_{0101}R,\quad A_{1100}=R_{xy}-(a_{1011}R)_x-(a_{0111}R)_y+a_{0011}R,$$

$$A_{0111}=R_{yzt}-(a_{1110}R)_{yz}-(a_{1101}R)_{yt}-(a_{1011}R)_{zt}+(a_{1100}R)_y+(a_{1010}R)_z+(a_{1001}R)_t-a_{1000}R,$$

$$A_{1011}=R_{xzt}-(a_{1110}R)_{xz}-(a_{1101}R)_{xt}-(a_{0111}R)_{zt}+(a_{1100}R)_x+(a_{0110}R)_z+(a_{0101}R)_t-a_{0100}R,$$

$$A_{1101}=R_{xyt}-(a_{1110}R)_{xy}-(a_{1101}R)_{xt}-(a_{0111}R)_{yt}+(a_{1010}R)_x+(a_{0110}R)_y+(a_{0011}R)_t-a_{0010}R,$$

$$A_{1110}=R_{xyz}-(a_{1101}R)_{xy}-(a_{1011}R)_{xz}-(a_{0111}R)_{yz}+(a_{1001}R)_x+(a_{0101}R)_y+(a_{0011}R)_z-a_{0001}R, \quad (5)$$

где функция R зависит от переменных x, y, z, t, ξ, η, ζ, τ, а коэффициенты уравнения (1), как сказано выше, – от переменных x, y, z, t.

Непосредственным вычислением несложно убедиться в справедливости тождества

$$(Ru)_{xyzt}\equiv RL(u)+(A_{0001})_{xyz}+(A_{0010})_{xyt}+(A_{0100})_{xzt}+(A_{1000})_{yzt}-(A_{0011})_{xy}-(A_{0101})_{xz}-$$

$$-(A_{0110})_{xt}-(A_{1001})_{yz}-(A_{1010})_{yt}-(A_{1100})_{zt}+(A_{0111})_x+(A_{1011})_y+(A_{1101})_z+(A_{1110})_t, \quad (6)$$

где $u(x,y,z,t)$ – любая функция класса $C^{(1,1,1,1)}$.

Дифференцируя уравнение (4), получаем тождества

$$A_{0001}\equiv 0 \quad \text{при} \quad x=\xi,\quad y=\eta,\quad z=\zeta;\quad A_{0010}\equiv 0 \quad \text{при} \quad x=\xi,\quad y=\eta,\quad t=\tau;$$

$$A_{0100}\equiv 0 \quad \text{при} \quad x=\xi,\quad z=\zeta,\quad t=\tau;\quad A_{1000}\equiv 0 \quad \text{при} \quad y=\eta,\quad z=\zeta,\quad t=\tau;$$

$$A_{0011}\equiv 0 \quad \text{при} \quad x=\xi,\quad y=\eta;\quad A_{0101}\equiv 0 \quad \text{при} \quad x=\xi,\quad z=\zeta;$$

$$A_{0110}\equiv 0 \quad \text{при} \quad x=\xi,\quad t=\tau;\quad A_{1001}\equiv 0 \quad \text{при} \quad y=\eta,\quad z=\zeta;$$

$$A_{1010}\equiv 0 \quad \text{при} \quad y=\eta,\quad t=\tau;\quad A_{1100}\equiv 0 \quad \text{при} \quad z=\zeta,\quad t=\tau;$$

$$A_{0111}\equiv 0 \quad \text{при} \quad x=\xi,\quad t=\tau;\quad A_{1011}\equiv 0 \quad \text{при} \quad y=\eta;$$

$$A_{1101}\equiv 0 \quad \text{при} \quad z=\zeta;\quad A_{1110}\equiv 0 \quad \text{при} \quad t=\tau. \quad (7)$$

Считая в тождестве (6) функцию $u(x,y,z,t)$ решением уравнения (1), меняя ролями переменные (x,ξ), (y,η), (z,ζ), (t,τ) и вычисляя четырёхкратный интеграл по ξ, η, ζ, τ в пределах $x_0<\xi<x$, $y_0<\eta<y$, $z_0<\zeta<z$, $t_0<\tau<t$ с учётом тождеств (7), получаем формулу (4) из [9], которая даёт решение задачи Гурса.

Докажем теперь существование и единственность решения задачи Дарбу при помощи её редукции к задаче Гурса в области D: найти регулярное решение уравнения (1) в D по условиям на плоскостях $x=0$, $y=0$, $z=0$, $t=t_1$. Для этого по данным задачи Дарбу надо однозначно определить недостающее условие задачи Гурса, т.е. функцию $u(x,y,z,t_1)$.

В [9, формула (4)] получена формула для функции $v(x,y,z,t)$. Положим в этой формуле $x_0=0$, $y_0=0$, $z_0=0$, $t_0=t_1$, $t=x$. Тогда левая часть указанной формулы для $u(x,y,z,t)$ обращается в функцию $\psi(x,y,z)$, а сама эта формула примет вид

$$R(x,y,z,t_1,x,y,z,x)u(x,y,z,t_1)-\int\limits_0^z(A_{0010}u)(x,y,\gamma,t_1)\,d\gamma-\int\limits_0^y(A_{0100}u)(x,\beta,z,t_1)\,d\beta-$$

$$-\int\limits_0^x(A_{1000}u)(\alpha,y,z,t_1)\,d\alpha+\int\limits_0^y\int\limits_0^z(A_{0110}u)(x,\beta,\gamma,t_1)\,d\gamma\,d\beta+\int\limits_0^x\int\limits_0^z(A_{1010}u)(\alpha,y,\gamma,t_1)\,d\gamma\,d\alpha+$$

$$+\int\limits_0^x\int\limits_0^y(A_{1010}u)(\alpha,\beta,z,t_1)\,d\beta\,d\alpha-\int\limits_0^x\int\limits_0^y\int\limits_0^z(A_{1110}u)(\alpha,\beta,\gamma,t_1)\,d\gamma\,d\beta\,d\alpha=F, \qquad (8)$$

где правая часть F – известная функция, выражающаяся через функции $\varphi_1(y,z,t)$, $\varphi_2(x,z,t)$, $\varphi_3(x,y,t)$. Уравнение (8) – интегральное уравнение Вольтерры второго рода, решение которого $u(x,y,z,t_1)$ существует и единственно. Действительно, из интегрального уравнения (4) для функции Римана следует, что

$$R(x,y,z,t,x,y,z,\tau)=\exp\biggl(\int\limits_\tau^t a_{1110}(x,y,z,\delta)\,d\delta\biggr)>0.$$

Таким образом, задача Дарбу однозначно редуцируется к задаче Гурса, т.е. решение задачи Дарбу существует и единственно.

2. Очевидно, что решение задачи Дарбу может быть построено в резольвентах интегральных уравнений (т.е. методом последовательных приближений). Перейдём вопросу о возможности построения формулы для решения задачи Дарбу в явном виде в терминах функции типа функции Римана–Адамара, аналогичной по своим свойствам функции Римана–Адамара для уравнения с двумя независимыми переменными [7]. Далее изложение ведётся, следуя схеме рассуждений статьи [8].

Возьмём внутри области D произвольную точку $P(\xi,\eta,\zeta,\tau)$. Она определяет область D_P, ограниченную плоскостями $x=0$, $x=\xi$, $y=0$, $y=\eta$, $z=0$, $z=\zeta$, $t=\tau$, $t=x$. Очевидно, область D_P можно разбить на две части: область D^1, которая ограничена плоскостями $x=0$, $x=\xi$, $y=0$, $y=\eta$, $z=0$, $z=\zeta$, $t=\tau$, $t=\xi$; и область D^2, которая ограничена плоскостями $x=0$, $x=\xi$, $y=0$, $y=\eta$, $z=0$, $z=\zeta$, $t=\xi$, $t=x$. В трёхмерном случае (см. [8, рис. 1]) области D^1 и D^2 представляют собой параллелепипед и призму соответственно. Аналогичные многогранники получаются и в четырёхмерном случае.

Функцию Римана–Адамара задачи Дарбу $H(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau)$ определим равенством

$$H(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau)=\begin{cases}R(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau), & (x,y,z,t)\in D^1,\\ V(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau), & (x,y,z,t)\in D^2.\end{cases} \qquad (9)$$

Требуется определить функцию V. Этому посвящён нижеследующий текст п. 2.

Нам потребуются следующие обозначения: будем обозначать через A_{ijkl} конструкции (5), в которых R заменена на H, через A^-_{ijkl} конструкции (5), в которых R заменена на V, а те же конструкции с функцией R обозначим A^+_{ijkl}.

Будем обозначать пересечение границы области D_P с плоскостью $x=\xi$ через $D_{P[x=\xi]}$, с плоскостями $x=\xi$, $y=\eta$ через $D_{P[x=\xi,y=\eta]}$ и т.д. Обозначим пересечение границы области D_P с плоскостью $x=t$ через T. Пусть

$$V|_{\overline{T}}\equiv 0. \qquad (10)$$

Далее, потребуем выполнения соотношения

$$[A_{1000}](x,\eta,\zeta,\xi,\xi,\eta,\zeta,\tau):=A^+_{1000}(x,\eta,\zeta,\xi+0,\xi,\eta,\zeta,\tau)-A^-_{1000}(x,\eta,\zeta,\xi-0,\xi,\eta,\zeta,\tau)\equiv 0, \quad (11)$$

где, как уже сказано выше, $A^+_{1000}=R_x-a_{0111}R$, $A^-_{1000}=V_x-a_{0111}V$. Данное равенство вместе с очевидным условием (вытекающим из тождества (10))

$$V(\xi,\eta,\zeta,\xi,\xi,\eta,\zeta,\tau)=0$$

приводит для определения функции V на отрезке $D_{P[y=\eta,z=\zeta,t=\xi]}$, где очевидно $0\leqslant x\leqslant\xi$, к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$V_x-a_{0111}V=g(x),\quad V(\xi,\eta,\zeta,\xi,\xi,\eta,\zeta,\tau)=0,$$
$$g(x)=(R_x-a_{0111}R)|_{D_{P[y=\eta,z=\zeta,t=\xi]}}. \quad (12)$$

Решение задачи (12) имеет вид

$$V(x,\eta,\zeta,\xi)=\int\limits_{\xi}^{x}g(\alpha)\exp\biggl(\int\limits_{\alpha}^{x}a_{0111}(\alpha_1,\eta,\zeta,\xi)\,d\alpha_1\biggr)\,d\alpha. \quad (13)$$

Потребуем, чтобы в плоской области $D_{P[y=\eta,z=\zeta]}$ функция V удовлетворяла уравнению

$$A^-_{1001}=V_{xt}-(a_{1110}V)_x-(a_{0111}V)_t+a_{0110}V=0. \quad (14)$$

Тогда функция V в плоской области $D_{P[y=\eta,z=\zeta]}$ определена как решение задачи Дарбу для уравнения (14) с граничными условиями $V|_{D_{P[y=\eta,z=\zeta,t=x]}}=0$ (следствие (10)) и (13). Решение указанной двумерной задачи Дарбу существует и единственно [7].

Далее, потребуем, чтобы скачок функции A_{1100} на многообразии $D_{P[z=\zeta,t=\xi]}$ равнялся нулю, т.е. должно выполняться соотношение

$$[A_{1100}](x,y,\zeta,\xi,\xi,\eta,\zeta,\tau):=A^+_{1100}(x,y,\zeta,\xi+0,\xi,\eta,\zeta,\tau)-A^-_{1100}(x,y,\zeta,\xi-0,\xi,\eta,\zeta,\tau)\equiv 0, \quad (15)$$

где $A^+_{1100}=R_{xy}-(a_{1011}R)_x-(a_{0111}R)_y+a_{0011}R$, $A^-_{1100}=V_{xy}-(a_{1011}V)_x-(a_{0111}V)_y+a_{0011}V$. В результате для определения граничного значения функции V на плоскости $D_{P[z=\zeta,t=\xi]}$ получаем задачу Гурса для гиперболического уравнения второго порядка [1, гл. 1, § 4, п. 4°] с заданными условиями на характеристиках и известной правой частью (которая вычисляется по функции Римана R, которую считаем известной)

$$V_{xy}-(a_{1011}V)_x-(a_{0111}V)_y+a_{0011}V=R_{xy}-(a_{1011}R)_x-(a_{0111}R)_y+a_{0011}R,$$
$$V|_{D_{P[y=\eta,z=\zeta,t=\xi]}}=\int\limits_{\xi}^{x}g(\alpha)\exp\biggl(\int\limits_{\alpha}^{x}a_{0111}(\alpha_1,\eta,\zeta,\xi)\,d\alpha_1\biggr)\,d\alpha,$$
$$V|_{D_{P[z=\zeta,x=\xi,t=\xi]}}=0. \quad (16)$$

Здесь граничные значения являются следствиями соотношений (10), (13). Решение задачи (16) существует и единственно.

Аналогично потребуем, чтобы скачок функции A_{1010} на многообразии $D_{P[y=\eta,t=\xi]}$ равнялся нулю, т.е. должно выполняться соотношение

$$[A_{1010}](x,\eta,z,\xi,\xi,\eta,\zeta,\tau):=A^+_{1010}(x,\eta,z,\xi+0,\xi,\eta,\zeta,\tau)-A^-_{1010}(x,\eta,z,\xi-0,\xi,\eta,\zeta,\tau)\equiv 0. \quad (17)$$

Снова получаем для определения граничного значения функции V на плоскости $D_{P[y=\eta,t=\xi]}$ задачу Гурса для гиперболического уравнения второго порядка

$$V_{xz}-(a_{1101}V)_x-(a_{0111}V)_z+a_{0101}V=R_{xz}-(a_{1101}R)_x-(a_{0111}R)_z+a_{0101}R,$$
$$V|_{D_{P[y=\eta,z=\zeta,t=\xi]}}=\int\limits_{\xi}^{x} g(\alpha)\exp\biggl(\int\limits_{\alpha}^{x} a_{0111}(\alpha_1,\eta,\zeta,\xi)\,d\alpha_1\biggr)\,d\alpha,$$
$$V|_{D_{P[y=\eta,x=\xi,t=\xi]}}=0. \tag{18}$$

Решение задачи (18) существует и единственно [1, гл. 1, § 4, п. 4°].

Потребуем выполнения на многообразии $D_{P[y=\eta]}$ условия

$$A^-_{1011}=V_{xzt}-(a_{1110}V)_{xz}-(a_{1101}V)_{xt}-(a_{0111}V)_{zt}+(a_{1100}V)_x+$$
$$+(a_{0110}V)_z+(a_{0101}V)_t-a_{0100}V=0. \tag{19}$$

Для определения функции V получаем задачу Дарбу в трёхмерном пространстве с граничными условиями

$$V|_{D_{P[y=\eta,t=\xi]}}=\varphi_{24}(x,z),\quad V|_{D_{P[y=\eta,z=\zeta]}}=\varphi_{23}(x,t),\quad V|_{D_{P[y=\eta,t=x]}}=0; \tag{20}$$

первые два условия из (20) определяются из соотношений (18), (14) соответственно, а последнее является следствием тождества (10). Решение задачи Дарбу (19), (20) существует и единственно [8].

Аналогично потребуем, чтобы на многообразии $D_{P[z=\zeta]}$ выполнялось условие

$$A^-_{1101}=V_{xyt}-(a_{1110}V)_{xy}-(a_{1101}V)_{xt}-(a_{0111}V)_{yt}+(a_{1010}V)_x+$$
$$+(a_{0110}V)_y+(a_{0011}V)_t-a_{0010}V. \tag{21}$$

Снова получаем задачу Дарбу в трёхмерном пространстве с граничными условиями

$$V|_{D_{P[z=\zeta,t=\xi]}}=\varphi_{34}(x,y),\quad V|_{D_{P[y=\eta,z=\zeta]}}=\varphi_{23}(x,t),\quad V|_{D_{P[z=\zeta,t=x]}}=0; \tag{22}$$

первые два условия в (22) определяются из соотношений (16), (14) соответственно, а последнее является следствием тождества (10).

Наконец, потребуем, чтобы скачок функции A_{1110} на многообразии $D_{P[t=\xi]}$ равнялся нулю:

$$[A_{1110}](x,y,z,\xi,\xi,\eta,\zeta,\tau):=A^+_{1110}(x,y,z,\xi+0,\xi,\eta,\zeta,\tau)-A^-_{1110}(x,y,z,\xi-0,\xi,\eta,\zeta,\tau)\equiv 0. \tag{23}$$

В результате для определения значения функции V на трёхмерном многообразии $D_{P[t=\xi]}$ (которое является параллелепипедом) получаем задачу Гурса для гиперболического уравнения третьего порядка с заданными условиями на характеристиках и известной правой частью (выраженной через функцию Римана R)

$$V_{xyz}-(a_{1101}V)_{xy}-(a_{1011}V)_{xz}-(a_{0111}V)_{yz}+(a_{1001}V)_x+(a_{0101}V)_y+(a_{0011}V)_z-a_{0001}V=$$
$$=R_{xyz}-(a_{1101}R)_{xy}-(a_{1011}R)_{xz}-(a_{0111}R)_{yz}+(a_{1001}R)_x+(a_{0101}R)_y+(a_{0011}R)_z-a_{0001}R,$$
$$V|_{D_{P[x=\xi,t=\xi]}}=\varphi_{14}(y,z),\quad V|_{D_{P[y=\eta,t=\xi]}}=\varphi_{24}(x,z),\quad V|_{D_{P[z=\zeta,t=\xi]}}=\varphi_{34}(x,y). \tag{24}$$

Граничные условия в (24), очевидно, представляют собой значения функции V, получаемые из соотношений (14), (18), (16) соответственно. Решение задачи (24) существует и единственно [11, § 2, п. 1, с. 25–26].

Функцию Римана–Адамара в области D^2 определим как решение задачи Дарбу для сопряжённого к (1) уравнения

$$L^*(V) \equiv V_{xyzt} - (a_{1110}V)_{xyz} - (a_{1101}V)_{xyt} - (a_{1011}V)_{xzt} - (a_{0111}V)_{yzt} +$$

$$+ (a_{1100}V)_{xy} + (a_{1010}V)_{xz} + (a_{1001}V)_{xt} + (a_{0110}V)_{yz} + (a_{0101}V)_{yt} + (a_{0011}V)_{zt} -$$

$$- (a_{1000}V)_x - (a_{0100}V)_y - (a_{0010}V)_z - (a_{0001}V)_t + a_{0000}V = 0$$

с условиями на многообразиях $D^2_{P[y=\eta]}$, $D^2_{P[z=\zeta]}$, $D^2_{P[t=\xi]}$, $\overline{T} = D^2_{P[x=t]}$, которые вследствие изложенного выше считаем вполне определёнными.

Итак, функция Римана–Адамара определена, существует и единственна в $\overline{D}_P$.

3. Перейдём к построению формулы для решения задачи Дарбу в терминах функции Римана–Адамара (9).

Запишем тождество (6) в дивергентной форме (здесь и всюду далее функция Римана заменяется на функцию Римана–Адамара $H = H(x, y, z, \xi, \eta, \zeta))$:

$$HL(u) = \frac{\partial W_1}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial y} + \frac{\partial W_3}{\partial z} + \frac{\partial W_4}{\partial t}, \tag{25}$$

$$W_1 = \frac{1}{4}(Hu)_{yzt} - \frac{1}{3}(A_{0001}u)_{yz} - \frac{1}{3}(A_{0010}u)_{yt} - \frac{1}{3}(A_{0100}u)_{zt} +$$

$$+ \frac{1}{2}(A_{0011}u)_y + \frac{1}{2}(A_{0101}u)_z + \frac{1}{2}(A_{0110}u)_t - A_{0111}u,$$

$$W_2 = \frac{1}{4}(Hu)_{xzt} - \frac{1}{3}(A_{0001}u)_{xz} - \frac{1}{3}(A_{0010}u)_{xt} - \frac{1}{3}(A_{1000}u)_{zt} +$$

$$+ \frac{1}{2}(A_{0011}u)_x + \frac{1}{2}(A_{1001}u)_z + \frac{1}{2}(A_{1010}u)_t - A_{1011}u,$$

$$W_3 = \frac{1}{4}(Hu)_{xyt} - \frac{1}{3}(A_{0001}u)_{xy} - \frac{1}{3}(A_{0100}u)_{xt} - \frac{1}{3}(A_{1000}u)_{yz} +$$

$$+ \frac{1}{2}(A_{0101}u)_x + \frac{1}{2}(A_{1001}u)_y + \frac{1}{2}(A_{1100}u)_t - A_{1101}u,$$

$$W_4 = \frac{1}{4}(Hu)_{xyz} - \frac{1}{3}(A_{0010}u)_{xy} - \frac{1}{3}(A_{0100}u)_{xz} - \frac{1}{3}(A_{1000}u)_{yz} +$$

$$+ \frac{1}{2}(A_{0110}u)_x + \frac{1}{2}(A_{1010}u)_y + \frac{1}{2}(A_{1100}u)_z - A_{1110}u.$$

Введём следующие обозначения. Обозначим пересечение границы области D^2 с плоскостью $t = \xi$ через E, с плоскостью $x = 0$ через $D^2_{[x=0]}$, с плоскостью $y = 0$ через $D^2_{[y=0]}$, с плоскостями $t = x$, $y = \eta$ через $D^2_{[y=\eta, t=\xi]}$ и т.д.

Проинтегрируем тождество (25) по области D^2. Применяя общую формулу Стокса [18, гл. 13, § 3, п. 4], получаем

$$\iiiint\limits_{D^2} HL(u)\,dx\,dy\,dz\,dt = \iiint\limits_{D^2_{[x=0]}} W_1\,dy\wedge dz\wedge\,dt - \iiint\limits_{D^2_{[y=0]}+D^2_{[y=\eta]}} W_2\,dx\wedge dz\wedge\,dt +$$

$$+ \iiint\limits_{D^2_{[z=0]}+D^2_{[z=\zeta]}} W_3\,dx\wedge dy\wedge dz + \iiint\limits_{E^2} W_4\,dx\wedge dy\wedge dz + \iiint\limits_{\overline{T}} W_1\,dy\wedge dz\wedge\,dt -$$

$$- W_2\,dx\wedge dz\wedge\,dt + W_3\,dx\wedge dy\wedge\,dt - W_4\,dx\wedge dz\wedge dz. \tag{26}$$

Очевидно, что вектором нормали к поверхности S является вектор $\vec{n}=(1,0,0,1)$; следовательно, гиперплоскости (x,z,t), (y,z,t) ортогональны к поверхности S. Поэтому

$$\iiint\limits_{\overline{T}} W_2\,dx\wedge dz\wedge\,dt=0,\qquad \iiint\limits_{\overline{T}} W_3\,dx\wedge dy\wedge\,dt=0.$$

Интегралы по многообразиям $D^2_{[x=0]}$, $D^2_{[y=0]}$, $D^2_{[z=0]}$ представляют собой известные величины, полностью определяемые граничными значениями.

Рассмотрим интеграл

$$\iiint\limits_{\overline{T}} W_1\,dy\wedge dz\wedge\,dt=\iiint\limits_{\overline{T}}\Big(\frac{1}{4}(Vu)_{yzt}-\frac{1}{3}(A^-_{0001}u)_{yz}-\frac{1}{3}(A^-_{0010}u)_{yt}-\frac{1}{3}(A^-_{0100}u)_{zt}+$$
$$+\frac{1}{2}(A^-_{0011}u)_y+\frac{1}{2}(A^-_{0101}u)_z+\frac{1}{2}(A^-_{0110}u)_t-A^-_{0111}u\Big)\,dy\wedge dz\wedge\,dt. \tag{27}$$

На поверхности $\overline{T}$ имеем

$$V\equiv 0,\quad A^-_{0010}=V_z-A^-_{1101}V\equiv 0,\quad A^-_{0100}=V_y-A^-_{1011}V\equiv 0,$$
$$A^-_{0110}=V_{yz}-(A^-_{1101}V)_y-(A^-_{1011}V)_z+A^-_{1001}V\equiv 0,$$

а величины u, u_y, u_z известны (дифференцирование по y и по z производится вдоль поверхности S). Следовательно, интеграл (27) вычисляется по известным граничным значениям.

Совершенно аналогично вычисляется интеграл

$$\iiint\limits_{\overline{T}} W_4\,dx\wedge dy\wedge dz.$$

Вычислим интеграл

$$\iiint\limits_{D^2_{[y=\eta]}} W_2\,dx\wedge dz\wedge\,dt=\iiint\limits_{D^2_{[y=\eta]}}\Big(\frac{1}{4}(Vu)_{xzt}-\frac{1}{3}(A^-_{0001}u)_{xz}-\frac{1}{3}(A^-_{0010}u)_{xt}-\frac{1}{3}(A^-_{1000}u)_{zt}+$$
$$+\frac{1}{2}(A^-_{0011}u)_x+\frac{1}{2}(A^-_{1001}u)_z+\frac{1}{2}(A^-_{1010}u)_t-A^-_{1011}u\Big)\,dx\wedge dz\wedge\,dt=$$
$$=\iint\limits_{D^2_{[y=\eta,t=x]}}\Big(\frac{1}{12}(Vu)_{zt}-\frac{1}{6}(A^-_{0001}u)_z-\frac{1}{6}(A^-_{0010}u)_t+\frac{1}{2}A^-_{0011}u\Big)\,dz\wedge\,dt-$$
$$-\Big(\frac{1}{12}(Vu)_{xt}-\frac{1}{6}(A^-_{0001}u)_x-\frac{1}{6}(A^-_{1000}u)_t+\frac{1}{2}A^-_{1001}u\Big)\,dx\wedge\,dt+$$
$$+\Big(\frac{1}{12}(Vu)_{xz}-\frac{1}{6}(A^-_{0010}u)_x-\frac{1}{6}(A^-_{1000}u)_z+\frac{1}{2}A^-_{1010}u\Big)\,dx\wedge dz+$$
$$+\iint\limits_{D^2_{[y=\eta,x=0]}}\Big(\frac{1}{12}(Vu)_{zt}-\frac{1}{6}(A^-_{0001}u)_z-\frac{1}{6}(A^-_{0010}u)_t+\frac{1}{2}A^-_{0011}u\Big)\,dz\wedge\,dt-$$
$$-\iint\limits_{D^2_{[y=\eta,z=0]}}\Big(\frac{1}{12}(Vu)_{xt}-\frac{1}{6}(A^-_{0001}u)_x-\frac{1}{6}(A^-_{1000}u)_t+\frac{1}{2}A^-_{1001}u\Big)\,dx\wedge\,dt+$$

$$+\iint\limits_{D^2_{[y=\eta,t=\xi]}}\left(\frac{1}{12}(Vu)_{xz}-\frac{1}{6}(A^-_{0010}u)_x-\frac{1}{6}(A^-_{1000}u)_z+\frac{1}{2}A^-_{1010}u\right)dx\wedge dz-$$

$$-\iint\limits_{D^2_{[y=\eta,z=\zeta]}}\left(\frac{1}{12}(Vu)_{xt}-\frac{1}{6}(A^-_{0001}u)_x-\frac{1}{6}(A^-_{1000}u)_t+\frac{1}{2}A^-_{1001}u\right)dx\wedge\,dt. \qquad (28)$$

Здесь $A^-_{1011}\equiv 0$ при $y=\eta$ в силу условия (19) (по определению функции Римана–Адамара), интегралы по многообразиям $D^2_{[y=\eta,t=x]}$, $D^2_{[y=\eta,x=0]}$, $D^2_{[y=\eta,z=0]}$ вычисляются по данным задачи Дарбу.

Рассмотрим оставшиеся два последних слагаемых в (28). Первое из них представляет собой интеграл по прямоугольнику

$$\iint\limits_{D^2_{[y=\eta,t=\xi]}}\left(\frac{1}{12}(Vu)_{xz}-\frac{1}{6}(A^-_{0010}u)_x-\frac{1}{6}(A^-_{1000}u)_z+\frac{1}{2}A^-_{1010}u\right)dx\wedge dz=$$

$$=\frac{1}{12}(Vu)(\xi,\eta,\zeta,\xi)-\frac{1}{12}(Ru)(\xi,\eta,0,\xi)-\frac{1}{12}(Vu)(0,\eta,\zeta,\xi)+\frac{1}{12}(Ru)(0,\eta,0,\xi)-$$

$$-\frac{1}{6}\int\limits_0^\zeta(A^-_{0010}u(\xi,\eta,z,\xi)-A^-_{0010}u(0,\eta,z,\xi))\,dz-$$

$$-\frac{1}{6}\int\limits_0^\xi(A^-_{1000}u(x,\eta,\zeta,\xi)-A^-_{1000}u(x,\eta,0,\xi))\,dx+\frac{1}{2}\iint\limits_{D^2_{[y=\eta,t=\xi]}}A^-_{1010}u\,dx\wedge dz.$$

В последнем слагаемом из (28) верно тождество $A^-_{1001}\equiv 0$ при $y=\eta$ и $z=\zeta$ в силу (14) (по определению функции Римана–Адамара), а интеграл в плоскости (x,t) вычисляется по треугольнику OAB (см. рисунок, AB – отрезок прямой $t=\xi$, OA – отрезок прямой $t=x$). Обозначим положительно ориентированный контур треугольника OAB через L. Применяя формулу Грина, получаем

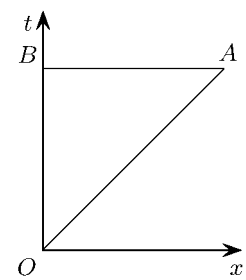

Рисунок. Область вычисления интеграла.

$$-\iint\limits_{D^2_{[y=\eta,z=\zeta]}}\left(\frac{1}{12}(Vu)_{xt}-\frac{1}{6}(A^-_{0001}u)_x-\frac{1}{6}(A^-_{1000}u)_t+\frac{1}{2}A^-_{1001}u\right)dx\wedge\,dt=$$

$$=-\frac{1}{12}\int\limits_L(Vu)_t\,dt-\frac{1}{6}\int\limits_L A^-_{0001}u\,dt+\frac{1}{6}\int\limits_L A^-_{1000}u\,dx=-\frac{1}{12}\int\limits_{OA}(V_tu+Vu_t)\,dt-\frac{1}{12}\int\limits_{BO}(V_tu+Vu_t)\,dt-$$

$$-\frac{1}{6}\int\limits_{OA}A^-_{0001}u\,dt-\frac{1}{6}\int\limits_{BO}A^-_{0001}u\,dt+\frac{1}{6}\int\limits_{OA}A^-_{1000}u\,dx+\frac{1}{6}\int\limits_{AB}A^-_{1000}u\,dx. \qquad (29)$$

Здесь в первом криволинейном интеграле в правой части равенства верно тождество $V\equiv\equiv 0$ на OA; следовательно, все интегралы, кроме последнего, вычисляются по данным задачи Дарбу.

Совершенно аналогично преобразуется интеграл

$$\iiint\limits_{D^2_{[z=\zeta]}}W_3\,dx\wedge dy\wedge\,dt=\iiint\limits_{D^2_{[z=\zeta]}}\left(\frac{1}{4}(Vu)_{xyt}-\frac{1}{3}(A^-_{0001}u)_{xy}-\frac{1}{3}(A^-_{0100}u)_{xt}-\frac{1}{3}(A^-_{1000}u)_{yt}+\right.$$

$$+\frac{1}{2}(A^-_{0101}u)_x+\frac{1}{2}(A^-_{1001}u)_y+\frac{1}{2}(A^-_{1100}u)_t-A^-_{1101}u\Big)\,dx\wedge dy\wedge dt=$$

$$=\iint\limits_{D^2_{[z=\zeta,t=x]}}\left(\frac{1}{12}(Vu)_{yt}-\frac{1}{6}(A^-_{0001}u)_y-\frac{1}{6}(A^-_{0100}u)_t+\frac{1}{2}A^-_{0101}u\right)dy\wedge dt-$$

$$-\left(\frac{1}{12}(Vu)_{xt}-\frac{1}{6}(A^-_{0001}u)_x-\frac{1}{6}(A^-_{1000}u)_t+\frac{1}{2}A^-_{1001}u\right)dx\wedge dt+$$

$$+\left(\frac{1}{12}(Vu)_{xy}-\frac{1}{6}(A^-_{0100}u)_x-\frac{1}{6}(A^-_{1000}u)_y+\frac{1}{2}A^-_{1100}u\right)dx\wedge dy+$$

$$+\iint\limits_{D^2_{[z=\zeta,x=0]}}\left(\frac{1}{12}(Vu)_{yt}-\frac{1}{6}(A^-_{0001}u)_y-\frac{1}{6}(A^-_{0100}u)_t+\frac{1}{2}A^-_{0101}u\right)dy\wedge dt-$$

$$-\iint\limits_{D^2_{[z=\zeta,y=0]}}\left(\frac{1}{12}(Vu)_{xt}-\frac{1}{6}(A^-_{0001}u)_x-\frac{1}{6}(A^-_{1000}u)_t+\frac{1}{2}A^-_{1001}u\right)dx\wedge dt+$$

$$+\iint\limits_{D^2_{[z=\zeta,t=\xi]}}\left(\frac{1}{12}(Vu)_{xy}-\frac{1}{6}(A^-_{0100}u)_x-\frac{1}{6}(A^-_{1000}u)_y+\frac{1}{2}A^-_{1100}u\right)dx\wedge dy-$$

$$-\iint\limits_{D^2_{[y=\eta,z=\zeta]}}\left(\frac{1}{12}(Vu)_{xt}-\frac{1}{6}(A^-_{0001}u)_x-\frac{1}{6}(A^-_{1000}u)_t+\frac{1}{2}A^-_{1001}u\right)dx\wedge dt. \qquad (30)$$

Здесь снова $A^-_{1101}\equiv 0$ при $z=\zeta$ в силу условия (21) (по определению функции Римана–Адамара), интегралы по многообразиям $D^2_{[z=\zeta,t=x]}$, $D^2_{[z=\zeta,x=0]}$, $D^2_{[z=\zeta,y=0]}$ вычисляются по данным задачи Дарбу.

Рассмотрим оставшиеся два последних слагаемых в (30). Первое из них представляет собой интеграл по прямоугольнику

$$\iint\limits_{D^2_{[z=\zeta,t=\xi]}}\left(\frac{1}{12}(Vu)_{xy}-\frac{1}{6}(A^-_{0100}u)_x-\frac{1}{6}(A^-_{1000}u)_y+\frac{1}{2}A^-_{1100}u\right)dx\wedge dy=$$

$$=\frac{1}{12}(Vu)(\xi,\eta,\zeta,\xi)-\frac{1}{12}(Vu)(0,\eta,\zeta,\xi)-\frac{1}{12}(Vu)(\xi,0,\zeta,\xi)+\frac{1}{12}(Vu)(0,0,\zeta,\xi)-$$

$$-\frac{1}{6}\int\limits_0^\eta(A^-_{0100}u(\xi,y,\zeta,\xi)-A^-_{0100}u(0,y,\zeta,\xi))\,dy-\frac{1}{6}\int\limits_0^\xi(A^-_{1000}u(x,\eta,\zeta,\xi)-$$

$$-A^-_{1000}u(x,0,\zeta,\xi))\,dx+\frac{1}{2}\iint\limits_{D^2_{[z=\zeta,t=\xi]}}A^-_{1100}u\,dx\wedge dz.$$

Второе оставшееся слагаемое из (30) совпадает с последним слагаемым из (28) и вычисляется так же, в результате получаем (29).

Далее вычисляем интеграл

$$\iiint\limits_E W_4\,dx\wedge dy\wedge dz=\iiint\limits_E\left(\frac{1}{4}(Vu)_{xyz}-\frac{1}{3}(A^-_{0010}u)_{xy}-\frac{1}{3}(A^-_{0100}u)_{xz}-\frac{1}{3}(A^-_{1000}u)_{yz}+\right.$$

$$+\frac{1}{2}(A^-_{0110}u)_x+\frac{1}{2}(A^-_{1010}u)_y+\frac{1}{2}(A^-_{1100}u)_z-A^-_{1110}u\Big)\,dx\wedge dy\wedge dz=$$

$$=\iint\limits_{E_{[x=\xi]}}\left(\frac{1}{12}(Vu)_{yz}-\frac{1}{6}(A^-_{0010}u)_y-\frac{1}{6}(A^-_{0100}u)_z+\frac{1}{2}A^-_{0110}u\right)dy\wedge dz-$$

$$-\iint\limits_{E_{[y=\eta]}}\left(\frac{1}{12}(Vu)_{xz}-\frac{1}{6}(A^-_{0010}u)_x-\frac{1}{6}(A^-_{1000}u)_z+\frac{1}{2}A^-_{1010}u\right)dx\wedge dz+$$

$$+\iint\limits_{E_{[z=\zeta]}}\left(\frac{1}{12}(Vu)_{xy}-\frac{1}{6}(A^-_{0100}u)_x-\frac{1}{6}(A^-_{1000}u)_y+\frac{1}{2}A^-_{1100}u\right)dx\wedge dy+$$

$$+\iint\limits_{E_{[x=0]}}\left(\frac{1}{12}(Vu)_{yz}-\frac{1}{6}(A^-_{0010}u)_y-\frac{1}{6}(A^-_{0100}u)_z+\frac{1}{2}A^-_{0110}u\right)dy\wedge dz-$$

$$-\iint\limits_{E_{[y=0]}}\left(\frac{1}{12}(Vu)_{xz}-\frac{1}{6}(A^-_{0010}u)_x-\frac{1}{6}(A^-_{1000}u)_z+\frac{1}{2}A^-_{1010}u\right)dx\wedge dz+$$

$$+\iint\limits_{E_{[z=0]}}\left(\frac{1}{12}(Vu)_{xy}-\frac{1}{6}(A^-_{0100}u)_x-\frac{1}{6}(A^-_{1000}u)_y+\frac{1}{2}A^-_{1100}u\right)dx\wedge dy.$$

Первое, четвёртое, пятое и шестое слагаемые в правой части этого равенства вычисляются по известным данным Дарбу. Второе и третье слагаемые дают

$$\iint\limits_{E_{[y=\eta]}}\left(\frac{1}{12}(Vu)_{xz}-\frac{1}{6}(A^-_{0010}u)_x-\frac{1}{6}(A^-_{1000}u)_z+\frac{1}{2}A^-_{1010}u\right)dz\wedge\,dx+$$

$$+\iint\limits_{E_{[z=\zeta]}}\left(\frac{1}{12}(Vu)_{xy}-\frac{1}{6}(A^-_{0100}u)_x-\frac{1}{6}(A^-_{1000}u)_y+\frac{1}{2}A^-_{1100}u\right)dx\wedge dy=$$

$$=\frac{1}{12}Vu(\xi,\eta,\zeta,\xi)-\frac{1}{12}Ru(\xi,\eta,0,\xi)-\frac{1}{12}Vu(0,\eta,\zeta,\xi)+\frac{1}{12}Ru(0,\eta,0,\xi)-$$

$$-\frac{1}{6}\int\limits_0^\zeta((A^-_{0010}u)(\xi,\eta,z,\xi)-(A^-_{0010}u)(0,\eta,z,\xi))\,dz-\frac{1}{6}\int\limits_0^\xi(A^-_{1000}u)(x,\eta,0,\xi)\,dx-$$

$$-\frac{1}{12}Vu(\xi,\eta,\zeta,\xi)-\frac{1}{12}Vu(0,\eta,\zeta,\xi)-\frac{1}{12}Vu(\xi,0,\zeta,\xi)+\frac{1}{12}Vu(0,0,\zeta,\xi)-$$

$$-\frac{1}{6}\int\limits_0^\eta((A^-_{0100}u)(\xi,y,\zeta,\xi)-(A^-_{0100}u)(0,y,\zeta,\xi))\,dy+\frac{1}{6}\int\limits_0^\xi(A^-_{1000}u)(x,0,\zeta,\xi)\,dx-$$

$$-\frac{1}{6}\int\limits_0^\xi(A^-_{1000}u)(x,\eta,\zeta,\xi)\,dx+\frac{1}{2}\iint\limits_{E^1_{[y=\eta]}}A^-_{1010}u\,dz\wedge\,dx-$$

$$-\frac{1}{6}\int\limits_0^\xi(A^-_{1000}u)(x,\eta,\zeta,\xi)\,dx+\frac{1}{2}\iint\limits_{E_{[z=\zeta]}}A^-_{1100}u\,dx\wedge dy.$$

Здесь известны все слагаемые, кроме четырёх последних интегралов.

Теперь интегрируем тождество (25) по области D^1, где $H=R$ – функция Римана (решение интегрального уравнения (4) в этой области):

$$\iiiint\limits_{D_1} HL(u)\,dx\,dy\,dz\,dt = \iiint\limits_{D^1_{[x=0]}+D^1_{[x=\xi]}} W_1\,dy\wedge dz\wedge\,dt - \iiint\limits_{D^1_{[y=0]}+D^1_{[y=\eta]}} W_2\,dx\wedge dz\wedge\,dt +$$

$$+\iiint\limits_{D^1_{[z=0]}+D^1_{[z=\zeta]}} W_3\,dx\wedge dy\wedge dz + \iiint\limits_{E} W_4\,dx\wedge dy\wedge dz + \iiint\limits_{D^1_{[t=\tau]}} W_4\,dx\wedge dy\wedge dz. \tag{31}$$

Здесь интегралы по многообразиям $D^1_{[x=0]}$, $D^1_{[y=0]}$, $D^1_{[z=0]}$ представляют собой известные величины, полностью определяемые граничными значениями.

Преобразуем интеграл

$$\iiint\limits_{D^1_{[x=\xi]}} W_1\,dy\wedge dz\wedge\,dt = \iiint\limits_{D^1_{[x=\xi]}}\Big(\frac{1}{4}(Ru)_{yzt} - \frac{1}{3}(A^+_{0001}u)_{yz} - \frac{1}{3}(A^+_{0010}u)_{yt} - \frac{1}{3}(A^+_{0100}u)_{zt} +$$

$$+\frac{1}{2}(A^+_{0011}u)_y + \frac{1}{2}(A^+_{0101}u)_z + \frac{1}{2}(A^+_{0110}u)_t - A^+_{0111}u\Big)\,dy\wedge dz\wedge\,dt =$$

$$= \iint\limits_{D^1_{[x=\xi,y=\eta]}}\Big(\frac{1}{12}(Ru)_{zt} - \frac{1}{6}(A^+_{0001}u)_z - \frac{1}{6}(A^+_{0010}u)_t + \frac{1}{2}A^+_{0011}u\Big)\,dz\wedge\,dt -$$

$$- \iint\limits_{D^1_{[x=\xi,z=\zeta]}}\Big(\frac{1}{12}(Ru)_{yt} - \frac{1}{6}(A^+_{0001}u)_y - \frac{1}{6}(A^+_{0100}u)_t + \frac{1}{2}A^+_{0101}u\Big)\,dy\wedge\,dt +$$

$$+ \iint\limits_{D^1_{[x=\xi,t=\tau]}}\Big(\frac{1}{12}(Ru)_{yz} - \frac{1}{6}(A^+_{0010}u)_y - \frac{1}{6}(A^+_{0100}u)_z + \frac{1}{2}A^+_{0110}u\Big)\,dy\wedge dz +$$

$$+ \iint\limits_{D^1_{[x=\xi,y=0]}}\Big(\frac{1}{12}(Ru)_{zt} - \frac{1}{6}(A^+_{0001}u)_z - \frac{1}{6}(A^+_{0010}u)_t + \frac{1}{2}A^+_{0011}u\Big)\,dz\wedge\,dt -$$

$$- \iint\limits_{D^1_{[x=\xi,z=0]}}\Big(\frac{1}{12}(Ru)_{yt} - \frac{1}{6}(A^+_{0001}u)_y - \frac{1}{6}(A^+_{0100}u)_t + \frac{1}{2}A^+_{0101}u\Big)\,dy\wedge\,dt -$$

$$- \iint\limits_{D^1_{[x=\xi,t=\xi]}}\Big(\frac{1}{12}(Ru)_{yz} - \frac{1}{6}(A^+_{0010}u)_y - \frac{1}{6}(A^+_{0100}u)_z + \frac{1}{2}A^+_{0110}u\Big)\,dy\wedge dz. \tag{32}$$

Последние три слагаемых вычисляются по известным данным Дарбу. Первые три слагаемых дают

$$\iint\limits_{D^1_{[x=\xi,y=\eta]}}\Big(\frac{1}{12}(Ru)_{zt} - \frac{1}{6}(A^+_{0001}u)_z - \frac{1}{6}(A^+_{0010}u)_t + \frac{1}{2}A^+_{0011}u\Big)\,dz\wedge\,dt -$$

$$- \iint\limits_{D^1_{[x=\xi,z=\zeta]}}\Big(\frac{1}{12}(Ru)_{yt} - \frac{1}{6}(A^+_{0001}u)_y - \frac{1}{6}(A^+_{0100}u)_t + \frac{1}{2}A^+_{0101}u\Big)\,dy\wedge\,dt +$$

$$+\iint\limits_{D^1_{[x=\xi,t=\tau]}}\left(\frac{1}{12}(Ru)_{yz}-\frac{1}{6}(A^+_{0010}u)_y-\frac{1}{6}(A^+_{0100}u)_z+\frac{1}{2}A^+_{0110}u\right)dy\wedge dz=$$

$$=\frac{1}{12}Ru(\xi,\eta,\zeta,\tau)-\frac{1}{12}Ru(\xi,\eta,0,\tau)-\frac{1}{12}Ru(\xi,\eta,\zeta,0)+\frac{1}{12}Ru(\xi,\eta,0,0)-$$

$$-\frac{1}{6}\int\limits_0^\tau((A^+_{0001}u)(\xi,\eta,\zeta,t)-(A^+_{0001}u)(\xi,\eta,0,t))\,dt-\frac{1}{6}\int\limits_0^\zeta((A^+_{0010}u)(\xi,\eta,z,\tau)-(A^+_{0010}u)(\xi,\eta,z,0))\,dz+$$

$$+\frac{1}{12}Ru(\xi,\eta,\zeta,\tau)-\frac{1}{12}Ru(\xi,\eta,\zeta,0)-\frac{1}{12}Ru(\xi,0,\zeta,\tau)+\frac{1}{12}Ru(\xi,0,\zeta,0)-$$

$$-\frac{1}{6}\int\limits_0^\tau((A^+_{0001}u)(\xi,\eta,\zeta,t)-(A^+_{0001}u)(\xi,0,\zeta,t))\,dt-\frac{1}{6}\int\limits_0^\eta((A^+_{0100}u)(\xi,y,\zeta,\tau)-(A^+_{0100}u)(\xi,y,\zeta,0))\,dy+$$

$$+\frac{1}{12}Ru(\xi,\eta,\zeta,\tau)-\frac{1}{12}Ru(\xi,\eta,0,\tau)-\frac{1}{12}Ru(\xi,0,\zeta,\tau)+\frac{1}{12}Ru(\xi,0,0,\tau)-$$

$$-\frac{1}{6}\int\limits_0^\zeta((A^+_{0010}u)(\xi,\eta,z,\tau)-(A^+_{0010}u)(\xi,0,z,\tau))\,dz-$$

$$-\frac{1}{6}\int\limits_0^\eta((A^+_{0100}u)(\xi,y,\zeta,\tau)-(A^+_{0100}u)(\xi,y,0,\tau))\,dy.$$

Здесь первые слагаемые под знаками определённых интегралов обращаются в нуль согласно (7), оставшиеся слагаемые представляют собой сумму известных в силу условий задачи Дарбу величин и слагаемого $Ru(\xi,\eta,\zeta,\tau)/4$.

Интегралы

$$\iiint\limits_{D^1_{[y=\eta]}}W_2\,dx\wedge dz\wedge\,dt,\quad\iiint\limits_{D^1_{[z=\zeta]}}W_3\,dx\wedge dy\wedge\,dt,\quad\iiint\limits_{D^1_{[t=\tau]}}W_4\,dx\wedge dy\wedge dz$$

вычисляются по той же схеме, что и интеграл (32). Результат вычислений может быть записан с помощью очевидной перестановки переменных в соответствующих формулах. Поэтому на вычислении этих трёх интегралов мы не останавливаемся.

Наконец, преобразуем интеграл

$$\iiint\limits_E W_4\,dx\wedge dy\wedge dz=\iiint\limits_E\left(\frac{1}{4}(Ru)_{xyz}-\frac{1}{3}(A^+_{0010}u)_{xy}-\frac{1}{3}(A^+_{0100}u)_{xz}-\frac{1}{3}(A^+_{1000}u)_{yz}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(A^+_{0110}u)_x+\frac{1}{2}(A^+_{1010}u)_y+\frac{1}{2}(A^+_{1100}u)_z-A^+_{1110}u\right)dx\wedge dy\wedge dz=$$

$$=\iint\limits_{E_{[x=\xi]}}\left(\frac{1}{12}(Ru)_{yz}-\frac{1}{6}(A^+_{0010}u)_y-\frac{1}{6}(A^+_{0100}u)_z+\frac{1}{2}A^+_{0110}u\right)dy\wedge dz-$$

$$-\iint\limits_{E_{[y=\eta]}}\left(\frac{1}{12}(Ru)_{xz}-\frac{1}{6}(A^+_{0010}u)_x-\frac{1}{6}(A^+_{1000}u)_z+\frac{1}{2}A^+_{1010}u\right)dx\wedge dz+$$

$$+\iint\limits_{E_{[z=\zeta]}}\left(\frac{1}{12}(Ru)_{xy}-\frac{1}{6}(A^{+}_{0100}u)_x-\frac{1}{6}(A^{+}_{1000}u)_y+\frac{1}{2}A^{+}_{1100}u\right)dx\wedge dy+$$

$$+\iint\limits_{E_{[x=0]}}\left(\frac{1}{12}(Ru)_{yz}-\frac{1}{6}(A^{+}_{0010}u)_y-\frac{1}{6}(A^{+}_{0100}u)_z+\frac{1}{2}A^{+}_{0110}u\right)dy\wedge dz-$$

$$-\iint\limits_{E_{[y=0]}}\left(\frac{1}{12}(Ru)_{xz}-\frac{1}{6}(A^{+}_{0010}u)_x-\frac{1}{6}(A^{+}_{1000}u)_z+\frac{1}{2}A^{+}_{1010}u\right)dx\wedge dz+$$

$$+\iint\limits_{E_{[z=0]}}\left(\frac{1}{12}(Ru)_{xy}-\frac{1}{6}(A^{+}_{0100}u)_x-\frac{1}{6}(A^{+}_{1000}u)_y+\frac{1}{2}A^{+}_{1100}u\right)dx\wedge dy.$$

Первое, четвёртое, пятое и шестое слагаемые в правой части вычисляются по известным данным Дарбу. Второе и третье слагаемые дают

$$\iint\limits_{E_{[y=\eta]}}\left(\frac{1}{12}(Ru)_{xz}-\frac{1}{6}(A^{+}_{0010}u)_x-\frac{1}{6}(A^{+}_{1000}u)_z+\frac{1}{2}A^{+}_{1010}u\right)dz\wedge\, dx+$$

$$+\iint\limits_{E_{[z=\zeta]}}\left(\frac{1}{12}(Ru)_{xy}-\frac{1}{6}(A^{+}_{0100}u)_x-\frac{1}{6}(A^{+}_{1000}u)_y+\frac{1}{2}A^{+}_{1100}u\right)dx\wedge dy=$$

$$=\frac{1}{12}Ru(\xi,\eta,\zeta,\xi)-\frac{1}{12}Ru(\xi,\eta,0,\xi)-\frac{1}{12}Ru(0,\eta,\zeta,\xi)+\frac{1}{12}Ru(0,\eta,0,\xi)-$$

$$-\frac{1}{6}\int\limits_0^{\zeta}((A^{+}_{0010}u)(\xi,\eta,z,\xi)-(A^{+}_{0010}u)(0,\eta,z,\xi))\,dz-\frac{1}{6}\int\limits_0^{\xi}(A^{+}_{1000}u)(x,\eta,0,\xi)\,dx-$$

$$-\frac{1}{12}Ru(\xi,\eta,\zeta,\xi)-\frac{1}{12}Ru(0,\eta,\zeta,\xi)-\frac{1}{12}Ru(\xi,0,\zeta,\xi)+\frac{1}{12}Ru(0,0,\zeta,\xi)-$$

$$-\frac{1}{6}\int\limits_0^{\eta}((A^{+}_{0100}u)(\xi,y,\zeta,\xi)-(A^{+}_{0100}u)(0,y,\zeta,\xi))\,dy-\frac{1}{6}\int\limits_0^{\xi}(A^{+}_{1000}u)(x,0,\zeta,\xi)\,dx-$$

$$-\frac{1}{6}\int\limits_0^{\xi}(A^{+}_{1000}u)(x,\eta,\zeta,\xi)\,dx+\frac{1}{2}\iint\limits_{E_{[y=\eta]}}A^{+}_{1010}u\,dz\wedge\, dx-$$

$$-\frac{1}{6}\int\limits_0^{\xi}(A^{+}_{1000}u)(x,\eta,\zeta,\xi)\,dx+\frac{1}{2}\iint\limits_{E_{[z=\zeta]}}A^{+}_{1100}u\,dx\wedge dy.$$

Здесь известны все слагаемые, кроме четырёх последних интегралов.

Почленно сложим равенства (26) и (31) с учётом всех сделанных преобразований. Учитывая соотношения (11), (15), (17), (23), а также тождество $R(\xi,\eta,\zeta,\xi,\eta,\zeta)\equiv 1$, получаем

$$u(P)=F(P)+\iiiint\limits_{D^1+D^2}Hf\,dx\,dy\,dz\,dt, \qquad (33)$$

где функция $F(P)$ полностью определена граничными данными задачи Дарбу. Другими словами, все не определяемые через данные задачи Дарбу слагаемые взаимно уничтожаются в силу равенства нулю скачков, определяемых соотношениями (11), (15), (17), (23). Таким образом, равенство (33) даёт искомое представление решения задачи Дарбу $u(P)$ в терминах функции Римана–Адамара.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.
2. *Моисеев Е.И.* Об одном интегральном представлении решения задачи Дарбу // Мат. заметки. 1982. Т. 32. Вып. 2. С. 175–186.
3. *Моисеев Е.И.* О приближении классического решения задачи Дарбу гладкими решениями // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 1. С. 73–87.
4. *Моисеев Е.И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М., 1988.
5. *Сабитов К.Б.* Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений. I // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 6. С. 1023–1032.
6. *Сабитов К.Б., Шарафутдинова Г.Г.* Задачи Коши–Гурса для вырождающегося гиперболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 2003. № 5. С. 21–29.
7. *Джохадзе О.М., Харибегашвили С.С.* Некоторые свойства функций Римана и Римана–Адамара для линейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 4. С. 477–492.
8. *Миронов А.Н.* Задача Дарбу для уравнения Бианки третьего порядка // Мат. заметки. 2017. Т. 102. Вып. 1. С. 64–71.
9. *Жегалов В.И., Севастьянов В.А.* Задача Гурса в четырехмерном пространстве // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 10. С. 1429–1430.
10. *Севастьянов В.А.* Об одном случае задачи Коши // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 12. С. 1706–1707.
11. *Жегалов В.И., Миронов А.Н.* Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань, 2001.
12. *Жегалов В.И., Миронов А.Н., Уткина Е.А.* Уравнения с доминирующей частной производной. Казань, 2014.
13. *Миронов А.Н.* О построении функции Римана для одного уравнения четвёртого порядка // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 12. С. 1698–1701.
14. *Миронов А.Н.* Метод Римана для уравнений со старшей частной производной в $\mathbb{R}^n$ // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47. Вып. 3. С. 584–594.
15. *Кощеева О.А.* О построении функции Римана для уравнения Бианки в n-мерном пространстве // Изв. вузов. Математика. 2008. № 9. С. 40–46.
16. *Миронов А.Н.* Об инвариантах Лапласа одного уравнения четвертого порядка // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1144–1149.
17. *Миронов А.Н.* О некоторых классах уравнений Бианки четвертого порядка с постоянными отношениями инвариантов Лапласа // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 12. С. 1572–1581.
18. *Зорич В.А.* Математический анализ. Ч. 2. М., 1984.

Елабужский институт (филиал)
Казанского (Приволжского) федерального университета

Поступила в редакцию 28.10.2020 г.
После доработки 28.10.2020 г.
Принята к публикации 22.01.2021 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958:624.04

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ С УЧЁТОМ ЕЁ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

© 2021 г. К. Б. Сабитов

Для уравнения колебаний балки с учётом её вращательного движения при изгибе исследуются задачи с начальными условиями и с различными граничными условиями на концах. Установлено энергетическое неравенство, из которого следует единственность решения поставленных четырёх начально-граничных задач. В случае шарнирного закрепления концов доказаны теоремы о существовании и об устойчивости решения задачи в классах регулярных и обобщённых решений.

DOI: 10.31857/S0374064121030079

1. Постановка задач. Изгибные поперечные колебания однородных тонких упругих стержней и балок с учётом их вращательного движения при изгибе описываются дифференциальным уравнением в частных производных четвёртого порядка [1, § 61; 2, с. 168–181; 3, с. 317–321]

$$Lu \equiv u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} - \beta^2 u_{xxtt} - \gamma^2 u_{xx} = F(x,t), \tag{1}$$

где $u(x,t)$ – смещение точек балки в момент времени t, $\alpha^2 = EJ/(\rho S)$, $\beta^2 = r^2$, $\gamma^2 = T_0/\rho$, $F(x,t)$ – непрерывная внешняя сила, рассчитанная на единицу длины балки, E – модуль упругости материала, ρ – линейная плотность балки, S – площадь поперечного сечения балки, $J = r^2 S$ – момент инерции сечения относительно своей горизонтальной оси, r – радиус инерции относительно прямой, проходящей через ось и перпендикулярной к плоскости изгиба, T_0 – сила натяжения, приложенная к концам балки.

Отметим, что многие задачи о колебаниях стержней и балок имеют важное прикладное значение в строительной механике, теории устойчивости вращающихся валов, вибрации кораблей и в других областях; эти задачи изучены в известных работах [4, гл. 7; 5, с. 141–143; 6, с. 387–390; 7, с. 127–129; 8, с. 45; 9, с. 18–53; 10, с. 149–189; 11, с. 22–69] и др.

Для определения колебания (смещения) $u(x,t)$ точек балки длины l нужно задать граничные условия на её концах $x = 0$ и $x = l$. Вид граничных условий зависит от способа закрепления соответствующего конца. Если оба конца подпёрты, т.е. могут свободно вращаться вокруг точки закрепления, то в этом случае граничные условия имеют вид

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(l,t) = u_{xx}(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2}$$

В случае балки с защемлёнными концами выполняются условия

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u(l,t) = u_x(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3}$$

Если оба конца свободны, то справедливы следующие граничные условия:

$$u_{xx}(0,t) = 0, \quad \beta^2 u_{ttx}(0,t) - \alpha^2 u_{xxx}(0,t) = 0,$$
$$u_{xx}(l,t) = 0, \quad \beta^2 u_{ttx}(l,t) - \alpha^2 u_{xxx}(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{4}$$

Если один конец жёстко закреплён, а другой свободен, то тогда, согласно (3) и (4), имеем условия

$$u(0,t) = u_x(0,t) = 0, \quad u_{xx}(l,t) = 0, \quad \beta^2 u_{ttx}(l,t) - \alpha^2 u_{xxx}(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5}$$

Возможны и другие многочисленные случаи задания граничных условий.

Начальные условия такие же, как и в случае уравнения колебаний струны:

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t(x,t)|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{6}$$

Уравнение (1) рассмотрим в области $D = \{(x,t) : 0 < x < l, \ \ 0 < t < T\}$, где l и T – заданные положительные числа, и поставим следующие задачи.

Начально-граничные задачи. Найти определённую в области D функцию $u(x,t)$ со следующими свойствами:

$$u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(\overline{D}), \tag{7}$$

$$Lu(x,t) \equiv F(x,t), \quad (x,t) \in D, \tag{8}$$

которая удовлетворяет начальным условиям (6) и одному из граничных условий (2)–(5), где $F(x,t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что в работах [1, § 61; 2, с. 168–181; 3, с. 317–321] и других при помощи подбора частных решений найдены собственные частоты и форма собственных колебаний для уравнения (1) при $F(x,t) \equiv 0$ с граничными условиями (2) или (3). Но вопросы о построении решений в явной форме и обосновании корректности поставленных выше задач не изучены. В работах [12–14] нами изучены поставленные задачи для уравнения (1), когда $\beta = 0$ и $\gamma = 0$.

В настоящей работе для уравнения колебаний балки с учётом её вращательного движения при изгибе исследуются задачи с начальными условиями и с различными граничными условиями на концах. Установлено энергетическое неравенство, из которого следует единственность решения поставленных в работе четырёх начально-граничных задач. В случае шарнирного закрепления концов доказаны теоремы существования и устойчивости решения задачи в классах регулярных и обобщённых решений.

2. Энергетическое неравенство. Единственность решения. Задачу с условиями (6)–(8) и (N), где N принимает одно из значений 2, 3, 4 и 5, назовём задачей $N-1$, т.е., например, задачу с условиями (6)–(8), (3) будем называть задачей 2.

Теорема 1. *При любом $t \in [0,T]$ для решения задач 1 и 2 справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^l (u_t^2 + \alpha^2 u_{xx}^2 + \gamma^2 u_x^2 + \beta^2 u_{tx}^2)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant e^T \bigg[\int\limits_0^l (\psi^2(x) + \alpha^2 \varphi''^2(x) + \gamma^2 \varphi'^2(x) + \beta^2 \varphi'^2(x))\, dx + \iint\limits_D F^2(x,t)\, dx\, dt \bigg], \tag{9}$$

а для решения задач 3 и 4 – неравенство (9) при $\gamma = 0$.

Отметим, что интеграл

$$E_0(t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^l (\rho S u_t^2 + EJ u_{xx}^2 + TS u_x^2 + r^2 \rho u_{tx}^2)\, dx =$$

$$= \rho S \frac{1}{2} \int\limits_0^l (u_t^2 + \alpha^2 u_{xx}^2 + \gamma^2 u_x^2 + \beta^2 u_{tx}^2)\, dx = \rho S E(t)$$

представляет собой закон сохранения энергии свободных колебаний однородной балки при нулевых граничных условиях (2)–(5).

Действительно, кинетическая энергия движущейся балки составляется из поступательного движения элементов dx параллельно смещению $u(x,t)$ и из вращения тех же элементов вокруг осей, проходящих через центры инерции этих элементов перпендикулярно к плоскости колебаний. Первая часть выражается интегралом

$$\frac{1}{2}\int_0^l \rho S u_t^2(x,t)\,dx.$$

Чтобы получить выражение для второй части, отметим, что угловое смещение элемента dx равно u_x, поэтому его угловая скорость равна u_{xt}. Квадрат этой величины надо умножить на половину момента инерции элемента dx, т.е. на $(1/2)\rho S r^2\,dx$, и проинтегрировать затем по отрезку $[0,l]$. Следовательно, кинетическая энергия колебаний балки в момент времени t находится по формуле

$$K(t)=\frac{1}{2}\int_0^l (\rho S u_t^2+\rho S r^2 u_{xt}^2)\,dx.$$

Если поперечные колебания балки подвержены продольному натяжению T_0, то потенциальная энергия состоит из двух частей. Первая из них зависит от жёсткости, а вторая – от сопротивления растяжению и подобна потенциальной энергии струны, т.е. равна

$$\frac{1}{2}\int_0^l ST_0 u_x^2\,dx.$$

Первая часть на основании работы [13] определяется интегралом

$$\frac{1}{2}\int_0^l ES u_{xx}^2\,dx.$$

Значит, потенциальная энергия колебаний балки в момент времени t находится по формуле

$$\Pi(t)=\frac{1}{2}\int_0^l (ESu_{xx}^2+ST_0u_x^2)\,dx.$$

Следовательно, интеграл $E_0(t)=K(t)+\Pi(t)$ представляет собой полную энергию свободных поперечных колебаний балки.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим тождество

$$u_tLu=\frac{1}{2}(u_t^2+\alpha^2u_{xx}^2+\gamma^2u_x^2+\beta^2u_{xt}^2)'_t+(\alpha^2u_tu_{xxx}-\alpha^2u_{xt}u_{xx}-\gamma^2u_xu_t-\beta^2u_tu_{xtt})'_x,$$

интегрируя которое по области $D_\tau=D\bigcap\{t<\tau\}$, где $0<\tau\leqslant T$, получаем

$$E(\tau)-E(0)+J_1+J_2=\iint\limits_{D_\tau}F(x,t)u_t\,dx\,dt, \tag{10}$$

здесь

$$J_1=\int_0^\tau[\alpha^2(u_tu_{xxx}-u_{xt}u_{xx})-\gamma^2u_xu_t-\beta^2u_tu_{xtt}]|_{x=l}\,dt,$$

$$J_2=-\int_0^\tau[\alpha^2(u_tu_{xxx}-u_{xt}u_{xx})-\gamma^2u_xu_t-\beta^2u_tu_{xtt}]|_{x=0}\,dt.$$

Пусть выполнены граничные условия (2), т.е. $u = u_{xx} = 0$ при $x = 0$ и $x = l$. Тогда $u_t = u_{xxt} = 0$ при $x = 0$ и $x = l$, поэтому интегралы J_1 и J_2 равны нулю.

Если имеют место граничные условия (3), т.е. $u = u_x = 0$ при $x = 0$ и $x = l$, то $u_t = u_{xt} = 0$ при $x = 0$ и $x = l$. Тогда интегралы J_1 и J_2 также равны нулю.

Пусть выполнены условия (4), т.е. $u_{xx} = 0$ и $\beta^2 u_{ttx} - \alpha^2 u_{xxx} = 0$ при $x = 0$ и $x = l$. Тогда $u_t = u_{xxt} = 0$ при $x = 0$ и $x = l$. В этом случае справедливы равенства

$$J_1 = -\gamma^2 \int\limits_0^\tau u_x u_t|_{x=l}\, dt, \quad J_2 = \gamma^2 \int\limits_0^\tau u_x u_t|_{x=0}\, dt, \tag{11}$$

а значит, интегралы J_1 и J_2 равны нулю только в том случае, когда $\gamma = 0$.

Если имеют место граничные условия (5), т.е. $u = u_x = 0$ при $x = 0$ и $u_{xx} = 0$ и $\beta^2 u_{ttx} - \alpha^2 u_{xxx} = 0$ при $x = l$, то $J_2 = 0$, а интеграл J_1 выражается первым равенством в (11) и поэтому равен нулю только тогда, когда $\gamma = 0$.

Тогда из равенства (10) вытекает, что

$$E(\tau) \leqslant E(0) + \frac{1}{2}\iint\limits_{D_\tau} F^2(x,t)\, dx\, dt + \frac{1}{2}\iint\limits_{D_\tau} u_t^2\, dx\, dt = A + \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau dt \int\limits_0^t u_t^2\, dx \leqslant A + \int\limits_0^\tau E(t)\, dt. \tag{12}$$

Отсюда, следуя [15, с. 77], получаем неравенство

$$A + \int\limits_0^T E(t)\, dt \leqslant Ae^T,$$

из которого и неравенства (12) следует оценка (9). Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть правая часть уравнения (1) равна нулю, т.е.* $F(x,t) \equiv 0$. *Тогда если задачи 1 или 2 имеют решение, то при любом* $t \in [0,T]$ *выполняется равенство*

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l [\psi^2(x) + \alpha^2 \varphi''^2(x) + \gamma^2 \varphi'^2(x) + \beta^2 \psi'^2(x)]\, dx, \tag{13}$$

а если имеют решение задачи 3 или 4 – равенство (13) при $\gamma = 0$.

Другими словами, равенство (13) означает, что полная энергия свободных колебаний однородной балки остаётся в течении всего процесса колебаний постоянной и равной её начальной энергии.

Справедливость равенства (13) непосредственно вытекает из соотношения (10).

Следствие 2 (теорема единственности). *Если существует функция* $u(x,t)$, *удовлетворяющая условиям (6)–(8) и одному из граничных условий (2)–(5), то она единственна. При этом в случае задач 3 и 4 коэффициент* $\gamma = 0$.

Доказательство. Пусть существуют две функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, удовлетворяющие условиям следствия 2. Тогда их разность $u_1(x,t) - u_2(x,t) = u(x,t)$ принадлежит классу (7), удовлетворяет однородному уравнению $Lu \equiv 0$ в D, нулевым начальным условиям $u(x,0) = u_t(x,0) \equiv 0$ и одному из граничных условий (2)–(5). Для такого решения в силу равенства (13) имеем

$$E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l (u_t^2 + \alpha^2 u_{xx}^2 + \gamma^2 u_x^2 + \beta^2 u_{xt}^2)\, dx = 0$$

при любом $t \in [0,T]$. Но это равенство возможно только тогда, когда $u_t \equiv 0$, $u_{xx} \equiv 0$, $u_x \equiv 0$, $u_{xt} \equiv 0$ в области D. Первые два из этих тождеств означают, что $u(x,t) = a_1 x + a_2$, где a_1 и a_2 – произвольные постоянные. По условию функция $u(x,t)$ удовлетворяет одному из граничных условий (2)–(5) и нулевым начальным условиям. Из граничных условий (2), (3) и (5) следует, что $a_1 = a_2 = 0$. Функция $u(x,t) = a_1x + a_2$ удовлетворяет граничным условиям (4) при любых a_1 и a_2. Но из начального условия следует, что при любом $x \in [0,l]$ справедливо равенство $u(x,0) = a_1x + a_2 = 0$, которое возможно только при $a_1 = a_2 = 0$. Таким образом, $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$. Следствие доказано.

Для примера построим решение задачи 1, т.е. задачи (6)–(8), (2).

3. Собственные колебания балки, шарнирно опирающейся на концы. Разделяя переменные $u(x,t) = X(x)T(t)$ в уравнении (1) при $F(x,t) \equiv 0$, получаем относительно функции $X(x)$ следующую спектральную задачу:

$$X^{(4)}(x) - (a^2 + \lambda\beta^2)X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{14}$$

$$X(0) = X''(0) = 0, \quad X(l) = X''(l) = 0, \tag{15}$$

где $a^2 = \gamma^2/\alpha^2$. Для построения решения этой спектральной задачи запишем для уравнения (14) его характеристическое уравнение

$$k^4 - (a^2 + \lambda\beta^2)k^2 + \lambda = 0, \tag{16}$$

которое имеет корни $k_1 = \sqrt{t_1}$, $k_2 = -\sqrt{t_1}$, $k_3 = \sqrt{t_2}$, $k_4 = -\sqrt{t_2}$, где

$$t_j = (a^2 + \lambda\beta^2 + (-1)^{j+1}\sqrt{(a^2+\lambda\beta^2)^2 - 4\lambda})/2 \equiv (a^2 + \lambda\beta^2 + (-1)^{j+1}\sqrt{D(\lambda)})/2, \quad j = 1, 2.$$

Если $\lambda = 0$, то $k_1 = a$, $k_2 = -a$, $k_3 = k_4 = 0$ и общее решение уравнения (14) имеет вид

$$X(x) = C_1e^{ax} + C_2e^{-ax} + C_3x + C_4, \tag{17}$$

где C_i, $i = \overline{1,4}$, – произвольные постоянные. Удовлетворяя общее решение (17) граничным условиям (15), получаем $X(x) \equiv 0$.

Исследуем дискриминант $D(\lambda)$ на знак. Если $(a\beta)^2 > 1$, то $D(\lambda) > 0$ при любом $\lambda \in \in \mathbb{R}$. Когда $(a\beta)^2 = 1$ выражение $D(\lambda) > 0$ при всех λ, кроме значения $\lambda = 1/\beta^4$, где $D(1/\beta^4) = 0$. Если $(a\beta)^2 < 1$, то $D(\lambda)$ имеет вид $D(\lambda) = \beta^4(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$, где

$$\lambda_j = (1 + (-1)^{j+1}\sqrt{1 - (a\beta)^2})^2/\beta^4, \quad j = 1, 2,$$

т.е. $D(\lambda) \geqslant 0$, если $\lambda \geqslant \lambda_1$ и $\lambda \leqslant \lambda_2$, и $D(\lambda) < 0$, если $\lambda_2 < \lambda < \lambda_1$. Тогда при $\lambda < 0$ (в этом случае $D(\lambda) > 0$ при любых $a > 0$ и $\beta > 0$) корни имеют разные знаки: $t_1 > 0$ и $t_2 < 0$. Если $\lambda \in (0, \lambda_2] \bigcup [\lambda_1, +\infty)$ корни t_1 и t_2 положительны. При $\lambda \in (\lambda_2, \lambda_1)$ корни t_1 и t_2 являются комплексно сопряжёнными между собой числами.

В случае, когда числа t_1 и t_2 положительны, соответствующие корни характеристического уравнения (16) являются вещественными: $k_2 < k_4 < 0 < k_3 < k_1$. Тогда общее решение уравнения (14) определяется формулой

$$X(x) = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} + C_3e^{k_3x} + C_4e^{k_4x}.$$

Подставив это общее решение в граничные условия (15), получим линейную однородную систему относительно C_i, $i = \overline{1,4}$, с определителем, отличным от нуля. Отсюда следует, что все $C_i = 0$, поэтому в этом случае $X(x) \equiv 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\lambda \in (\lambda_2, \lambda_1)$, т.е. числа t_1 и t_2 комплексно сопряжены между собой:

$$t_j = (a^2 + (-1)^{j+1}\lambda\beta^2 + i\sqrt{|D(\lambda)|})/2 = c + (-1)^{j+1}id, \quad j = 1, 2,$$

где $c = (a^2 + \lambda\beta^2)/2$, $d = \sqrt{|D(\lambda)|}/2 = \sqrt{4\lambda - (a^2 + \lambda\beta^2)^2}/2 = \sqrt{\lambda - c^2}$.

Извлекая корень квадратный из чисел t_1 и t_2, будем иметь

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{c+id} = \pm(\nu + i\omega) \quad \text{и} \quad k_{3,4} = \pm\sqrt{c-id} = \pm(\nu - i\omega),$$

где

$$\nu = \sqrt{(\sqrt{c^2+d^2}+c)/2}, \quad \omega = \sqrt{(\sqrt{c^2+d^2}-c)/2}.$$

Тогда общее решение уравнения (14) находится по формуле

$$X(x) = C_1 e^{\nu x}\cos(\omega x) + C_2 e^{\nu x}\sin(\omega x) + C_3 e^{-\nu x}\cos(\omega x) + C_4 e^{-\nu x}\sin(\omega x). \tag{18}$$

Удовлетворяя общее решение (18) граничным условиям $X(0) = X''(0) = 0$ из (15), получаем, что $C_3 = -C_1$ и $C_4 = C_2$. Тогда функция (18) принимает вид

$$X(x) = 2C_1 \operatorname{sh}(\nu x)\cos(\omega x) + 2C_2 \operatorname{ch}(\nu x)\sin(\omega x).$$

Подчинив эту функцию граничным условиям $X(l) = X''(l) = 0$, получаем следующую систему относительно C_1 и C_2:

$$C_1 \operatorname{sh}(\nu l)\cos(\omega l) + C_2 \operatorname{ch}(\nu l)\sin(\omega l) = 0,$$

$$C_1[(\nu^2-\omega^2)\operatorname{sh}(\nu l)\cos(\omega l) - 2\nu\omega \operatorname{ch}(\nu l)\sin(\omega l)] + C_2[(\nu^2-\omega^2)\operatorname{ch}(\nu l)\sin(\omega l) + 2\nu\omega \operatorname{sh}(\nu l)\cos(\omega l)] = 0.$$

Определитель этой системы равен $-2\nu\omega(\sin^2(\omega l) + \operatorname{sh}^2(\nu l))$ и, значит, отличен от нуля; следовательно, она имеет только нулевое решение $C_1 = C_2 = 0$. Поэтому, как и в предыдущем случае, $X(x) \equiv 0$.

Остаётся рассмотреть случай, когда $\lambda < 0$. В этом случае $t_1 > 0$ и $t_2 < 0$. Тогда $k_1 = \sqrt{t_1} > 0$, $k_2 = -\sqrt{t_1} < 0$, $k_3 = i\sqrt{|t_2|} = i\delta$, $k_4 = -i\delta$, и общее решение уравнения (14) определяется по формуле

$$X(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + C_3\cos(\delta x) + C_4\sin(\delta x). \tag{19}$$

Тогда, исходя из граничных условий (15), получаем систему

$$\begin{gathered} C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ C_1 k_1^2 + C_2 k_2^2 - \delta^2 C_3 = 0, \\ C_1 e^{k_1 l} + C_2 e^{k_2 l} + C_3\cos\delta l + C_4 \sin\delta l = 0, \\ C_1 k_1^2 e^{k_1 l} + C_2 k_2^2 e^{k_2 l} - \delta^2 C_3 \cos\delta l - \delta^2 C_4\sin\delta l = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Определитель этой системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ k_1^2 & k_2^2 & -\delta^2 & 0 \\ e^{k_1 l} & e^{k_2 l} & \cos\delta l & \sin\delta l \\ k_1^2 e^{k_1 l} & k_2^2 e^{k_2 l} & -\delta^2\cos\delta l & -\delta^2\sin\delta l \end{vmatrix} =$$

$$= -\sin\delta l \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1^2 & k_2^2 & -\delta^2 \\ k_1^2 e^{k_1 l} & k_2^2 e^{k_2 l} & -\delta^2\cos\delta l \end{vmatrix} - \delta^2 \sin\delta l \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1^2 & k_2^2 & -\delta^2 \\ e^{k_1 l} & e^{k_2 l} & \cos\delta l \end{vmatrix} =$$

$$= \sin\delta l(e^{k_1 l} - e^{k_2 l})[k_1^2 k_2^2 + (k_1^2 + k_2^2)\delta^2 + \delta^4].$$

Отсюда очевидно, что $\Delta = 0$ только тогда, когда $\sin(\delta l) = 0$, т.е. $\delta l = \sqrt{|t_2|}l = \pi k$, $k \in \mathbb{N}$. С учётом значения t_2 найдём собственные значения

$$\lambda_k = -\frac{(\mu_k^2 a)^2 + \mu_k^4}{1 + (\mu_k \beta)^2}, \quad \mu_k = \frac{\pi k}{l}. \tag{21}$$

Поскольку $\sin(\delta l)=0,$ то $\cos(\delta l)=\pm 1$ и система (20) принимает вид

$$C_1+C_2+C_3=0,$$
$$C_1k_1^2+C_2k_2^2-\delta^2C_3=0,$$
$$C_1e^{k_1l}+C_2e^{k_2l}\pm C_3=0,$$
$$C_1k_1^2e^{k_1l}+C_2k_2^2e^{k_2l}\pm\delta^2C_3=0.$$

Из первого её уравнения найдём значение $C_3=-C_1-C_2,$ подставив которое в остальные уравнения, приходим к системе

$$C_1(k_1^2+\delta^2)+C_2(k_2^2+\delta^2)=0,$$
$$C_1(e^{k_1l}\mp 1)+C_2(e^{k_2l}\mp 1)=0,$$
$$C_1(k_1^2e^{k_1l}\mp\delta^2)+C_2(k_2^2e^{k_2l}\mp\delta^2)=0.$$

Так как $k_1^2=k_2^2=t_1,$ то из первого уравнения полученной системы вытекает равенство C_1+ $+\,C_2=0,$ т.е. $C_2=-C_1.$ Тогда из второго её уравнения следует, что $C_1(e^{k_1l}-e^{k_2l})=0,$ а это равенство возможно только при $C_1=0.$ Поэтому $C_1=C_2=C_3=0,$ и тогда из (19) при условии $C_4\neq 0$ находим соответствующую систему собственных функций

$$X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin(\delta x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin(\sqrt{|t_2|}x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin(\mu_kx),\quad k\in\mathbb{N}. \tag{22}$$

Система функций (22) ортонормирована и полна в $L_2[0,l].$ Введём функции

$$u_k(t)=\int\limits_0^l u(x,t)X_k(x)\,dx,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{23}$$

Дифференцируя тождество (23) дважды по $t\in(0,T)$ и учитывая уравнение (1), получаем

$$u_k''(t)=\int\limits_0^l F(x,t)X_k(x)\,dx+\gamma^2\int\limits_0^l u_{xx}X_k(x)\,dx-\alpha^2\int\limits_0^l u_{xxxx}X_k(x)\,dx+\beta^2\int\limits_0^l u_{xxtt}X_k(x)\,dx. \tag{24}$$

Интегрируя по частям четыре раза с учётом граничных условий (2) и (15), будем иметь

$$\int\limits_0^l u_{xx}X_k(x)\,dx=-\mu_k^2u_k(t),\quad \int\limits_0^l u_{xxxx}X_k(x)\,dx=\mu_k^4u_k(t),\quad \int\limits_0^l (u_{tt})_{xx}X_k(x)\,dx=-\mu_k^2u_k''(t).$$

Подставляя значения этих интегралов в равенство (24), получаем уравнение

$$u_k''(t)+\frac{\gamma^2\mu_k^2+\alpha^2\mu_k^4}{1+\beta^2\mu_k^2}u_k(t)=\frac{F_k(t)}{1+\beta^2\mu_k^2}$$

или с учётом равенств (21) – уравнение

$$u_k''(t)-\lambda_k^2\alpha^2u_k(t)=G_k(t), \tag{25}$$

здесь

$$G_k(t)=\frac{F_k(t)}{1+\beta^2\mu_k^2},\quad F_k(t)=\int\limits_0^l F(x,t)X_k(x)\,dx. \tag{26}$$

Общее решение уравнения (25) находится по формуле

$$u_k(t) = a_k \cos(\alpha\sqrt{|\lambda_k|}t) + b_k \sin(\alpha\sqrt{|\lambda_k|}t) + \frac{\widetilde{F}_k(t)}{(1+\beta^2\mu_k^2)\alpha\sqrt{|\lambda_k|}}, \tag{27}$$

где

$$\widetilde{F}_k(t) = \int\limits_0^t F_k(s)\sin(\alpha\sqrt{|\lambda_k|}(t-s))\,ds,$$

a_k и b_k – произвольные постоянные. Для определения неизвестных a_k и b_k воспользуемся начальными условиями (6) и формулой (23):

$$u_k(0) = \int\limits_0^l u(x,0)X_k(x)\,dx = \int\limits_0^l \varphi(x)X_k(x)\,dx = \varphi_k, \tag{28}$$

$$u_k'(0) = \int\limits_0^l u_t(x,0)X_k(x)\,dx = \int\limits_0^l \psi(x)X_k(x)\,dx = \psi_k. \tag{29}$$

Удовлетворяя функции (27) граничным условиям (28) и (29), находим соответственно, что

$$a_k = \varphi_k \quad \text{и} \quad b_k = \psi_k/(\alpha\sqrt{|\lambda_k|}).$$

Подставив найденные значения a_k и b_k в формулу (27), получим явный вид функций $u_k(t)$:

$$u_k(t) = \varphi_k \cos(\alpha\sqrt{|\lambda_k|}t) + \frac{\psi_k}{\alpha\sqrt{|\lambda_k|}}\sin(\alpha\sqrt{|\lambda_k|}t) + \frac{\widetilde{F}_k(t)}{\alpha\sqrt{|\lambda_k|}(1+\beta^2\mu_k^2)}. \tag{30}$$

На основании частных решений (30) и (22) решение задачи (6)–(8), (2) можно задать в виде ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)X_k(x). \tag{31}$$

Лемма 1. *При любом $t \in [0,T]$ справедливы оценки*

$$|u_k(t)| \leqslant C_1\bigg(|\varphi_k| + \frac{1}{k}|\psi_k| + \frac{1}{k^3}|\widetilde{F}_k(t)|\bigg), \tag{32}$$

$$|u_k''(t)| \leqslant C_3\bigg(k^2|\varphi_k| + k|\psi_k| + \frac{1}{k}|\widetilde{F}_k(t)| + \frac{|F_k(t)|}{k^2}\bigg), \tag{33}$$

здесь и далее C_i – положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от коэффициентов уравнения (1) и числа l.

Справедливость оценок (32) и (33) вытекает непосредственно из формулы (30).

Формально из ряда (31) почленным дифференцированием составим ряды

$$u_{tt} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k''(t)X_k(x), \tag{34}$$

$$u_{xxtt} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k''(t)X_k''(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 u_k''(t)X_k(x), \tag{35}$$

$$u_{xxxx} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)X_k^{(4)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^4 u_k(t)X_k(x). \tag{36}$$

Ряды (31), (34)–(36) при любых $(x,t)\in\overline{D}$ на основании леммы 1 мажорируются рядом

$$C_3\sum_{k=1}^{\infty}(k^4|\varphi_k|+k^3|\psi_k|+kF_k(t_0)), \tag{37}$$

так как $|\widetilde{F}_k(t)|\leqslant TF_k(t_0)$, где $F_k(t_0)=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|F_k(t)|$, а t_0 – некоторая точка из отрезка $[0,T]$.

Лемма 2. *Если* $\varphi(x)\in C^5[0,l]$, $\varphi^{(i)}(0)=\varphi^{(i)}(l)=0$, $i=0,2,4$; $\psi(x)\in C^4[0,l]$, $\psi^{(j)}(0)=$ $=\psi^{(j)}(l)=0$, $j=0,2$; $F(x,t)\in C(\overline{D})\bigcap C_x^2(\overline{D})$, $F(0,t)=F(l,t)=0$, $0\leqslant t\leqslant T$, *то справедливы представления*

$$\varphi_k=\frac{1}{\mu_k^5}\varphi_k^{(5)},\quad \psi_k=\frac{1}{\mu_k^4}\psi_k^{(4)},\quad F_k(t)=-\frac{1}{\mu_k^2}F_k^{(2)}(t), \tag{38}$$

где

$$\varphi_k^{(5)}=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l\varphi^{(5)}(x)\cos(\mu_kx)\,dx,\quad \psi_k^{(4)}=\int\limits_0^l\psi^{(4)}(x)X_k(x)\,dx,\quad F_k^{(2)}(t)=\int\limits_0^lF_{xx}(x,t)X_k(x)\,dx,$$

причём следующие ряды сходятся:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k^{(5)}|^2\leqslant\|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2[0,l]},\quad \sum_{k=1}^{\infty}|\psi_k^{(4)}|^2\leqslant\|\psi^{(4)}(x)\|_{L_2[0,l]},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|F_k^{(2)}(t)|^2\leqslant\|F_{xx}(x,t)\|_{L_2[0,l]},\quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{39}$$

Доказательство. Вычисляя по частям интегралы в равенствах (28), (29) и (26) соответственно пять, четыре и два раза с учётом условий леммы, получаем представления (38). Неравенства (39) – это неравенства Бесселя для коэффициентов разложений в ряд Фурье функций $\varphi^{(5)}(x)$, $\psi^{(4)}(x)$ и $F_{xx}(x,t)$ по системе косинусов и синусов на промежутке $[0,l]$. Лемма доказана.

При выполнении условий леммы 2 на основании представлений (38) ряд (37) оценивается сверху сходящимся рядом

$$C_4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(|\varphi_k^{(5)}|+|\psi_k^{(4)}|+|F_k^{(2)}(t_0)|).$$

Тогда ряды (31), (34)–(36) сходятся на $\overline{D}$ равномерно, следовательно, сумма ряда (31) удовлетворяет условиям (6)–(8) и (2).

Итак, доказана

Теорема 2. *Если функции* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *и* $F(x,t)$ *удовлетворяют условиям леммы 2, то существует единственное решение задачи (6)–(8), (2); это решение может быть представлено суммой ряда (31).*

Теперь установим устойчивость решения поставленной задачи при возмущении начальных данных $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и правой части $F(x,t)$.

Теорема 3. *Для решения* $u(x,t)$ *задачи (6)–(8), (2) имеют место оценки*

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,l]}\leqslant C_5(\|\varphi(x)\|_{L_2[0,l]}+\|\psi(x)\|_{L_2[0,l]}+\|F(x,t)\|_{L_2[0,l]}), \tag{40}$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D})}\leqslant C_6(\|\varphi'(x)\|_{C[0,l]}+\|\psi(x)\|_{C[0,l]}+\|F(x,t)\|_{C(\overline{D})}). \tag{41}$$

Доказательство. Поскольку система функций (22) ортонормирована в $L_2[0,l]$, то из представления (31) с учётом оценки (32) получаем

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2[0,l]} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^2(t) \leqslant 3C_1^2 \sum_{k=1}^{\infty}(|\varphi_k|^2 + |\psi_k|^2 + |F_k(t_0)|^2) \leqslant$$

$$\leqslant C_5^2(\|\varphi(x)\|^2_{L_2[0,l]} + \|\psi(x)\|^2_{L_2[0,l]} + \|F(x,t)\|^2_{L_2[0,l]}).$$

Отсюда следует оценка (40).

Пусть (x,t) – произвольная точка из $\overline{D}$. Тогда из (31) на основании оценки (32) имеем

$$|u(x,t)| \leqslant C_1\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}\biggl(|\varphi_k| + \frac{1}{k}|\psi_k| + \frac{|F_k(t_0)|}{k^3}\biggr). \tag{42}$$

Величину φ_k можно представить в виде

$$\varphi_k = \frac{\varphi_k^{(1)}}{\mu_k}, \quad \varphi_k^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l \varphi'(x)\cos(\mu_k x)\,dx.$$

Тогда из оценки (42) в силу неравенства Коши–Буняковского получаем

$$|u(x,t)| \leqslant \widetilde{C}_1\sum_{k=1}^{\infty}\biggl(\frac{1}{k}|\varphi_k^{(1)}| + \frac{1}{k}|\psi_k| + \frac{1}{k}|F_k(t_0)|\biggr) \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{C}_1\biggl(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\biggr)^{1/2}\biggl[\biggl(\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k^{(1)}|^2\biggr)^{1/2} + \biggl(\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_k|^2\biggr)^{1/2} + \biggl(\sum_{k=1}^{\infty}|F_k(t_0)|^2\biggr)^{1/2}\biggr] =$$

$$= \widetilde{C}_1\frac{\pi}{\sqrt{6}}(\|\varphi'(x)\|_{L_2[0,l]} + \|\psi(x)\|_{L_2[0,l]} + \|F(x,t)\|_{C[0,l]}) \leqslant$$

$$\leqslant C_6(\|\varphi'(x)\|_{C[0,l]} + \|\psi(x)\|_{C[0,l]} + \|F(x,t)\|_{L_2[0,l]}),$$

что и доказывает справедливость оценки (41). Теорема доказана.

Таким образом, нами установлена корректность постановки задачи 1. При этом отметим, что в формулировке теоремы 2, дающей достаточные условия существования решения задачи, на начальные условия (6) наложены сильные предположения об их гладкости. Если ввести понятие обобщённого решения этой задачи, то эти условия можно значительно ослабить.

Определение 1. Решение задачи (6)–(8), (2) из класса $C^{4,2}_{x,t}(\overline{D})$ назовём *классическим*, или *регулярным*, решением этой задачи.

Определение 2. Функцию $u(x,t)$ будем называть *обобщённым решением* задачи (6)–(8), (2), если существует последовательность $u_n(x,t)$, $n \in \mathbb{N}$, регулярных решений задачи (6)–(8), (2) с начальными данными $u_n(x,t) = \varphi_n(x)$, $u_{nt}(x,0) = \psi_n(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, и правыми частями $F_n(x,t)$, $(x,t) \in \overline{D}$, равномерно сходящаяся при $n \to \infty$ к функции $u(x,t)$ на $\overline{D}$. При этом функции $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$ и $F_n(x,t)$ удовлетворяют условиям теоремы 2, и эти последовательности сходятся равномерно на $[0,l]$ и $\overline{D}$ соответственно к функциям $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $F(x,t)$, а последовательность $\varphi'_n(x)$ сходится равномерно на $[0,l]$ к функции $\varphi(x)$.

Теорема 4. *Если* $\varphi(x) \in C^1[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\psi(x) \in C[0,l]$, $F(x,t) \in C(\overline{D})$, *то существует единственное и устойчивое обобщённое решение задачи (6)–(8), (2), которое определяется суммой ряда (29) и является непрерывным на* $\overline{D}$.

Доказательство. Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $F(x,t)$ удовлетворяют условиям теоремы 4. Тогда существуют такие последовательности функций $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$ и $F_n(x,t)$, удовлетворяющих условиям теоремы 2, которые равномерно сходятся на $[0,l]$ и $\overline{D}$ соответственно к функциям $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $F(x,t)$. По функциям $\varphi_n(x)$, $\psi_n(x)$ и $F_n(x,t)$ на основании теоремы 2 построим последовательность $u_n(x,t)$ регулярных решений задачи (6)–(8), (2). В силу линейности изучаемой задачи разность $u_n(x,t)-u_m(x,t)$ является решением задачи (6)–(8), (2) с начальными функциями $\varphi_n(x)-\varphi_m(x)$, $\psi_n(x)-\psi_m(x)$ и правой частью $F_n(x,t)-F_m(x,t)$. Тогда в силу оценки (41) при любых $n,m\in\mathbb{N}$ имеем

$$\|u_n-u_m\|_{C(\overline{D})}\leqslant C_6(\|\varphi_n'-\varphi_m'\|_{C[0,l]}+\|\psi_n-\psi_m\|_{C[0,l]}+\|F_n(x,t_0)-F_m(x,t_0)\|_{C[0,l]}). \qquad (43)$$

Согласно выбору последовательностей $\varphi_n'(x)$, $\psi_n(x)$ и $F_n(x,t)$ они сходятся равномерно на $[0,l]$ и $\overline{D}$ соответственно к функциям $\varphi'(x)$, $\psi(x)$ и $F(x,t)$. Следовательно, для них справедлив критерий Коши о равномерной сходимости. Поэтому из оценки (43) следует справедливость критерия Коши и для последовательности $u_n(x,t)$. Тогда она сходится равномерно на $\overline{D}$ к единственной функции $u(x,t)$, определяемой рядом (31), удовлетворяющей условиям (2) и непрерывной на $\overline{D}$. Из доказательства теоремы 3 вытекает, что для обобщённого решения задачи (6)–(8), (2) справедлива оценка (41), что и означает устойчивость такого решения. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Klebsch A.* Theorie der Elasticital faster Körper. Leipzig, 1862.
2. *Donkin W.F.* Acoustics. Oxford, 1870.
3. *Рэлей Л.* Теория звука. Т. 1. М., 1955.
4. *Крылов А.Н.* Вибрация судов. М., 2012.
5. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1966.
6. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. М., 1967.
7. *Гулд С.* Вариационные методы в задачах о собственных значениях: введение в метод промежуточных задач Вайнштейна. М., 1970.
8. *Коренев Б.Г.* Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. М., 1965.
9. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения с техническими приложениями. М., 1968.
10. *Бидерман В.Л.* Теория механических колебаний. М., 1980.
11. *Андрианов И.В., Данишевский В.В., Иванков А.О.* Асимптотические методы в теории колебаний балок и пластин. Днепропетровск, 2010.
12. *Сабитов К.Б.* Колебания балки с заделанными концами // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2015. Т. 19. № 2. С. 311–324.
13. *Сабитов К.Б.* К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 1. С. 89–100.
14. *Сабитов К.Б* Начальная задача для уравнения колебаний балок // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 5. С. 665–671.
15. *Сабитов К.Б.* Уравнения математической физики. М., 2013.

Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований Республики Башкортостан, Башкирского государственного университета

Поступила в редакцию 08.04.2020 г.
После доработки 22.05.2020 г.
Принята к публикации 13.10.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 3, с. 375–386

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.73

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИДИНАМИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМ ЯДРОМ

© 2021 г. Ш. А. Алимов, А. В. Юлдашева

Доказывается существование и единственность решения задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения, связанного с перидинамической моделью механики твёрдого тела.

DOI: 10.31857/S0374064121030080

1. Введение. Постановка задачи. Формулировка результатов. 1°. В отличие от классической механики сплошных сред, в которой линеаризованная модель описывается дифференциальными уравнениями с частными производными, перидинамическая модель приводит к интегро-дифференциальному уравнению вида

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \int\limits_{\Omega} K(x,y)[u(x,t)-u(y,t)]\,dy = f(x,t), \quad x\in\Omega, \quad t>0, \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x), \quad x\in\Omega, \tag{1.2}$$

где $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – область с кусочно-гладкой границей (см. [1–3]). Здесь u – неизвестная функция, а ядро K, внешняя сила f и начальные условия φ, ψ – заданные функции.

Для этой задачи Коши в работах [4–7] изучались решения, допускающие разрывы первого рода по пространственной переменной, которые исключаются моделями, описываемыми дифференциальными уравнениями.

В данной работе рассматривается симплифицированная модель, в которой предполагается, что $n\geqslant 3$ и все входящие в уравнения (1.1) функции являются вещественнозначными и скалярными, $u:\Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}$, $K:\Omega\times\Omega\to\mathbb{R}$ и $f:\Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}$.

Интегральный оператор в правой части уравнения (1.1) имеет специальное сильно сингулярное ядро $K(x,y)$, определение которого приводится ниже. Особенности этого ядра заключаются в том, что оно вблизи диагонали $x=y$ имеет вид

$$K(x,y)=\frac{c_n}{|x-y|^n}+\gamma(x,y),$$

где $\gamma(x,y)$ – интегрируемая функция, а c_n – постоянная, зависящая только от размерности n, и что оно удовлетворяет граничному условию

$$\frac{\partial}{\partial\nu_x}K(x,y)=0, \quad x\in\partial\Omega, \quad y\in\Omega. \tag{1.3}$$

Здесь $\nu=\nu_x$ – внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$ области Ω в точке $x\in\partial\Omega$.

Соответствующий интегральный оператор

$$Av(x)=\int\limits_{\Omega} K(x,y)[v(x)-v(y)]\,dy \tag{1.4}$$

является гиперсингулярным и неограниченным в классических функциональных пространствах, таких как $L_p(\Omega)$ или соболевские пространства $W_p^l(\Omega)$.

2°. Рассмотрим самосопряжённое расширение оператора Лапласа $-\Delta$, порождённое граничными условиями Неймана. Спектр этого расширения состоит из собственных значений $\{\lambda_k\}$, а собственные функции $\{v_k(x)\}$ удовлетворяют соотношениям

$$-\Delta v_k(x) = \lambda_k v_k(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial v_k(s)}{\partial \nu} = 0, \quad s \in \partial\Omega, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.5}$$

Решение спектральной задачи (1.5) мы понимаем в смысле $W_2^1(\Omega)$ (см. [8, гл. 2, § 3]).

Введём в рассмотрение функцию $L(x, y)$, разложение которой в ряд по собственным функциям задачи (1.5) имеет вид

$$L(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln \lambda_k}{\lambda_k} v_k(x) v_k(y). \tag{1.6}$$

В п. 1 работы показано, что такая функция существует, бесконечно дифференцируема вне диагонали $x = y$, а вблизи диагонали имеет представление

$$L(x, y) = \alpha \frac{\ln|x-y|}{|x-y|^{n-2}} + \eta(x, y), \tag{1.7}$$

где α – постоянная, зависящая только от размерности n, а функция $\eta(x, y)$ бесконечно дифференцируема в области $\Omega \times \Omega$.

Оператор Лапласа, применённый к функции $L(x, y)$ по одной из переменных x или y, имеет на диагонали неинтегрируемую особенность

$$\Delta L(x, y) = -\alpha \frac{n-2}{|x-y|^n} + \Delta\eta(x, y).$$

Определим вне диагонали $x = y$ ядро

$$K(x, y) = (-\Delta_y) L(x, y), \quad x \in \Omega, \quad y \in \Omega. \tag{1.8}$$

Формально можно считать, что разложение по собственным функциям ядра $K(x, y)$ имеет вид

$$K(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (\ln \lambda_k) v_k(x) v_k(y). \tag{1.9}$$

3°. Для каждого числа $\beta \geqslant 0$ определим гильбертово пространство $H^\beta(\Omega) = D((I-\Delta)^{\beta/2})$ с нормой

$$\|u\|_\beta^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (1+\lambda_k)^\beta |(u, v_k)|^2. \tag{1.10}$$

Через $W_2^\alpha(\Omega)$, где $\alpha > 0$, будем обозначать классические пространства Соболева (дробного) порядка α. Для любых $T > 0$ и $m = 0, 1, \ldots$ и произвольного банахова пространства B обозначим через $C^m\{[0, T] \to B\}$ пространство m раз непрерывно дифференцируемых отображений отрезка $[0, T]$ в B.

В данной работе доказывается справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *При любом α из интервала $(0, 1)$ и любом положительном числе $\beta < \alpha/n$ сингулярный интегральный оператор A непрерывно действует из $W_2^\alpha(\Omega)$ в $H^\beta(\Omega)$:*

$$\|Au\|_\beta \leqslant \mathrm{const}\, \|u\|_{W_2^\alpha}.$$

Решением задачи (1.1), (1.2) из класса $H^\beta(\Omega)$ назовём функцию $u \in C^2\{[0, T] \to H^\beta(\Omega)\}$, удовлетворяющую уравнению (1.1) и начальным условиям (1.2).

Основной результат данной работы состоит в следующем.

Теорема 2. *Пусть* $0 < \alpha < 1$ *и* $0 < \beta < \alpha/n$. *Для любого* $T > 0$ *и любых* $\varphi \in W_2^\alpha(\Omega)$, $\psi \in W_2^\alpha(\Omega)$ *и* $f \in C\{[0,T] \to W_2^\alpha(\Omega)\}$ *существует единственное решение задачи (1.1), (1.2) из класса* $C^2\{[0,T] \to H^\beta(\Omega)\}$.

При доказательстве теорем 1 и 2 важную роль играет следующее утверждение, доказательство которого приводится в заключительном пункте работы.

Теорема 3. *При любом* α *из интервала* $(0,1)$ *и любом положительном числе* $\beta < \alpha/n$ *тождественный оператор непрерывно действует из* $W_2^\alpha(\Omega)$ *в* $H^\beta(\Omega)$:

$$\|u\|_\beta \leqslant \mathrm{const}\, \|u\|_{W_2^\alpha}.$$

Доказательство теоремы 3 проводится методом, предложенным В.А. Ильиным (см. [9, гл. 1]).

Отметим, что доказательство всех утверждений в п. 5 не опирается на результаты предыдущих параграфов и проводится независимо от них.

2. Ядро специального вида. Зафиксируем какую-либо невозрастающую функцию $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ такую, что

$$\chi(r) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ r \leqslant 1/2, \\ 0, & \text{если } \ r \geqslant 1. \end{cases}$$

Фиксируем произвольное число $\delta > 0$ и для каждой точки $x \in \Omega$ положим

$$R = R(x) = \min\{\delta, \, \mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega)\},$$

где через $\mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega)$ обозначено расстояние от точки x до границы $\partial\Omega$ области Ω. Обозначив $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega) > \delta\}$, имеем очевидное равенство $R(x) = \delta$, если $x \in \Omega_\delta$.

Введём в рассмотрение следующую функцию (напомним, что $n \geqslant 3$):

$$L_0(x,y) = \alpha|x-y|^{2-n} \ln \frac{1}{|x-y|} \chi\biggl(\frac{|x-y|}{R(x)}\biggr), \tag{2.1}$$

где $\alpha = \Gamma(n/2-1)/(2\pi^{n/2})$.

Заметим, что функцию (2.1) при каждом фиксированном $x \in \Omega$ можно рассматривать как регулярное распределение, принадлежащее классу Соболева $W_2^{-l}(\Omega)$ при $l > (n-4)/2$ (см. [8, гл. 1, § 3]).

Считая x параметром, найдём коэффициенты Фурье функции $L_0(x,y)$ по системе $\{v_k\}$:

$$a_k(x) = \int\limits_\Omega L_0(x,y) v_k(y)\, dy = \alpha \int\limits_{|x-y| \leqslant R} |x-y|^{2-n} \ln\biggl(\frac{1}{|x-y|}\biggr) \chi\biggl(\frac{|x-y|}{R}\biggr) v_k(y)\, dy.$$

Перейдя к сферическим координатам с центром в точке x, получим

$$a_k(x) = \alpha \int\limits_0^R r^{n-1}\, dr \int\limits_{S^{n-1}} r^{2-n} \biggl(\ln \frac{1}{r}\biggr) \chi(r/R) v_k(x + r\theta)\, d\theta =$$

$$= \alpha \int\limits_0^R \biggl(\ln \frac{1}{r}\biggr) \chi(r/R) r\, dr \int\limits_{S^{n-1}} v_k(x + r\theta)\, d\theta. \tag{2.2}$$

Далее применим формулу среднего значения (см. [9, формула (1.1.2)]):

$$\int\limits_{S^{n-1}} v(x + r\theta)\, d\theta = v_k(x) (2\pi)^{n/2} (r\sqrt{\lambda_k})^{1-n/2} J_{n/2-1}(r\sqrt{\lambda_k}).$$

Учитывая эту формулу в представлении (2.2), будем иметь

$$a_k(x) = v_k(x)(2\pi)^{n/2}\alpha\sqrt{\lambda_k}^{1-n/2}\int\limits_0^R \left(\ln\frac{1}{r}\right) J_{n/2-1}(r\sqrt{\lambda_k})\chi(r/R)r^{2-n/2}\,dr.$$

Сделав замену $t = r\sqrt{\lambda_k}$, получим

$$a_k(x) = v_k(x)\alpha\frac{(2\pi)^{n/2}}{\lambda_k}\int\limits_0^{R\sqrt{\lambda_k}} \left(\ln\frac{\sqrt{\lambda_k}}{t}\right)\chi\left(\frac{t}{R\sqrt{\lambda_k}}\right) J_{n/2-1}(t)t^{2-n/2}\,dt. \tag{2.3}$$

Далее воспользуемся тем, что для интеграла

$$b(\mu) = \int\limits_0^{R\mu} \left(\ln\frac{\mu}{t}\right)\chi\left(\frac{t}{R\mu}\right) J_{n/2-1}(t)t^{2-n/2}\,dt$$

имеет место следующее асимптотическое представление:

$$b(\mu) = \frac{\ln\mu}{2^{n/2-2}\Gamma(n/2-1)} + \beta + O_R(\mu^{-N}) \quad \text{при} \quad \mu\to+\infty,$$

справедливое для любого натурального числа N (см. [7, предложение 3.1]). В этом соотношении β – некоторая постоянная, зависящая только от размерности n.

Подставляя это асимптотическое представление в (2.3), получаем следующее равенство:

$$a_k(x) = v_k(x)\left[\frac{\ln\lambda_k}{\lambda_k} + \frac{\gamma}{\lambda_k} + O_x(\lambda_k^{-N})\right].$$

Отсюда и из равенства (2.3) вытекает

Лемма 2.1. *Разложение функции (2.1) в ряд Фурье по собственным функциям задачи (1.5) имеет вид*

$$L_0(x,y) = \sum_{\lambda_k>0}\frac{\ln\lambda_k}{\lambda_k}v_k(x)v_k(y) + \gamma\sum_{\lambda_k>0}\frac{v_k(x)v_k(y)}{\lambda_k} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k(x)v_k(x)v_k(y),$$

где коэффициенты $d_k(x)$ при любом натуральном N удовлетворяют условию

$$|d_k(x)| \leqslant \frac{C_N(x)}{(1+\lambda_k)^N}, \tag{2.4}$$

а величины $C_N(x)$ ограничены по x равномерно на каждом компактном подмножестве области Ω.

Замечание 2.1. *Если $x\in\Omega_\delta$ и $\xi\in\Omega_\delta$, то $R(x) = R(\xi) = \delta$ и $c_k(x) = c_k(\xi)$.*

Обозначим через $G(x,y)$ обобщённую функцию Грина, связанную с задачей (1.5):

$$G(x,y) = \sum_{\lambda_k>0}\frac{v_k(x)v_k(y)}{\lambda_k}.$$

Далее положим

$$R(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(x)v_k(x)v_k(y).$$

Из оценки (2.4) вытекает, что функция $R(x,y)$ бесконечно дифференцируема в области $\Omega_\delta\times\Omega$. Введём функцию

$$L(x,y) = L_0(x,y) - \gamma G(x,y) - R(x,y), \quad (x,y)\in\Omega\times\Omega. \tag{2.5}$$

Лемма 2.2. *Ряд Фурье функции $L(x,y)$, определённой равенством (2.5), имеет вид*

$$L(x,y) = \sum_{\lambda_k>0} \frac{\ln\lambda_k}{\lambda_k} v_k(x)v_k(y). \tag{2.6}$$

Функция $L(x,y)$ бесконечно дифференцируема по y вне диагонали $y=x$ и равномерно на каждом компакте $K\subset\Omega$ её производные удовлетворяют условию

$$|D_y^\alpha L(x,y)| \leqslant \text{const}\,\frac{|\ln|x-y||}{|x-y|^{n-2+\alpha}}, \quad x\in K, \quad y\in\Omega.$$

Доказательство следует из определений (2.1), (2.5) и свойств обобщённой функции Грина $G(x,y)$ (см. [9, гл. 1, § 2]).

Замечание 2.2. *Лемма 2.2 означает, что функция $L(x,y)$ удовлетворяет следующим соотношениям:*

$$\int\limits_\Omega L(x,y)v_k(y)\,dy = \frac{\ln\lambda_k}{\lambda_k}v_k(x), \quad k=1,2,\ldots \tag{2.7}$$

Из результатов работы [10] следует, что ряд (2.6) расходится на множестве положительной меры. Тем не менее, согласно теореме 3 работы [11], он суммируется средними Рисса порядка $s>n-5/2$ равномерно по y на каждом компактном подмножестве области Ω, не содержащем точки x.

Обратим внимание на то, что правая часть равенства (2.5), которая определяет функцию $L(x,y)$, содержит функции, зависящие от параметра δ. Однако из равенства (2.7) и из полноты системы собственных функций (1.5) вытекает, что функция $L(x,y)$ от δ не зависит.

Замечание 2.3. Отметим, что функция $f(y)=\Delta_y L_0(x,y)$ не является локально интегрируемой в области Ω и представляет собой сингулярное распределение из класса $W_2^{-l}(\Omega)$ при $l>n/2$. Из леммы 2.2 и из теоремы 3 работы [11] следует, что разложение (1.9) суммируется средними Рисса порядка $s>n-1/2$ равномерно на каждом компактном подмножестве Ω, не содержащем точку x.

3. Преобразование основного уравнения. Напомним, что сингулярный интегральный оператор A задан равенством (1.4), в котором ядро $K(x,y)$ в свою очередь определяется равенствами (1.6) и (1.8).

Лемма 3.1. *Для любой функции $u\in C_0^\infty(\Omega)$ выполняется равенство*

$$Au(x) = -\sum_{k=1}^\infty (\ln\lambda_k)(u,v_k)v_k(x), \quad x\in\Omega. \tag{3.1}$$

Доказательство. Заметим, что для любой гладкой функции $u(x)$ несобственный интеграл

$$\int\limits_\Omega \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^n}\,dy = -\frac{1}{n-2}\int\limits_\Omega \left(\Delta_y\frac{\ln|x-y|}{|x-y|^{n-2}}\right)[u(x)-u(y)]\,dy, \quad x\in\Omega,$$

является сходящимся. Следовательно, согласно определению (1.8), для любой функции $u\in$ $\in C_0^\infty(\Omega)$ сходится интеграл

$$\int\limits_\Omega K(x,y)[u(x)-u(y)]\,dy = \int\limits_\Omega (-\Delta_y)L(x,y)[u(x)-u(y)]\,dy, \quad x\in\Omega.$$

Положим $B(\varepsilon)=\{y\in\mathbb{R}^n : |x-y|<\varepsilon\}$. Тогда для любой функции $u\in C_0^\infty(\Omega)$ и любой точки $x\in\Omega$, удовлетворяющей условию (1.3), при достаточно малых $\varepsilon>0$ по формуле Грина получаем

$$\int\limits_{\Omega\setminus B(\varepsilon)} \Delta_y L(x,y)[u(x)-u(y)]\,dy = \int\limits_{\Omega\setminus B(\varepsilon)} L(x,y)\Delta_y[u(x)-u(y)]\,dy +$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega}\left([u(x)-u(y)]\frac{\partial L(x,y)}{\partial\nu_y}-L(x,y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}[u(x)-u(y)]\right)d\sigma(y)+$$
$$+\int\limits_{\partial B(\varepsilon)}\left([u(x)-u(y)]\frac{\partial L(x,y)}{\partial\nu_y}-L(x,y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}[u(x)-u(y)]\right)d\sigma(y).$$

Из финитности функции u и из условия (1.3) следует, что интеграл по поверхности $\partial\Omega$ равен нулю.

Согласно (1.7), для любой гладкой функции u поверхностный интеграл по границе шара $B(\varepsilon)$ есть величина $O(\varepsilon\ln 1/\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$. Следовательно, в пределе при $\varepsilon\to 0$ получаем

$$\int\limits_{\Omega}K(x,y)[u(x)-u(y)]\,dy=\int\limits_{\Omega}L(x,y)(-\Delta u(y))\,dy. \tag{3.2}$$

Далее воспользуемся тем, что для любой функции $u\in C_0^\infty(\Omega)$ выполняются равенства $u(y)=\sum_{k=1}^\infty(u,v_k)v_k(y)$ и $-\Delta u(y)=\sum_{k=1}^\infty\lambda_k(u,v_k)v_k(y)$, причём оба ряда сходятся в метрике $L_2(\Omega)$. В таком случае справедливо равенство

$$L(x,y)(-\Delta u(y))=\sum_{k=1}^\infty\lambda_kL(x,y)(u,v_k)v_k(y),\quad x\in\Omega,\quad y\in\Omega,$$

которое можно проинтегрировать почленно. В результате, согласно соотношениям (2.7), получаем

$$\int\limits_{\Omega}L(x,y)(-\Delta u(y))\,dy=\sum_{k=1}^\infty\lambda_k\int\limits_{\Omega}L(x,y)(u,v_k)v_k(y)\,dy=\sum_{k=1}^\infty\ln\lambda_k(u,v_k)v_k(x),\quad x\in\Omega.$$

Отсюда и из (3.2) следует требуемое равенство (3.1). Лемма доказана.

Следствие. *Для любой функции* $u\in C_0^\infty(\Omega)$ *имеет место равенство*

$$\|Au\|_\beta^2=\sum_{k=1}^\infty|(u,v_k)|^2\lambda_k^\beta\ln^2\lambda_k. \tag{3.3}$$

Доказательство теоремы 1. Для доказательства воспользуемся теоремой 3, доказанной в п. 5.

Пусть $u\in W_2^\alpha(\Omega)$, где $0<\alpha<1$, и пусть $0<\beta<\alpha/n$. Согласно теореме 3 для любого положительного $\beta_1<\alpha/n$ выполняется неравенство

$$\|u\|_{\beta_1}\leqslant\mathrm{const}\,\|u\|_{W_2^\alpha}. \tag{3.4}$$

Выберем произвольно число $\beta_1\in(\beta,\alpha/n)$ и применим очевидную оценку $|\ln\lambda_k|\leqslant\mathrm{const}\times\times\lambda_k^{\beta_1-\beta}$, $\lambda_k\geqslant\lambda_1>0$. Тогда из (3.3) и (3.4) следует, что

$$\|Au\|_\beta^2\leqslant\mathrm{const}\sum_{k=1}^\infty|(u,v_k)|^2\lambda_k^{\beta_1}\leqslant\mathrm{const}\,\|u\|_{\beta_1}^2\leqslant\mathrm{const}\,\|u\|_{W_2^\alpha}^2.$$

4. Разрешимость основного уравнения. Будем искать решение уравнения (1.1) в виде ряда по собственным функциям краевой задачи (1.5):

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^\infty c_k(t)v_k(x),\quad x\in\Omega,\quad t\geqslant 0.$$

Тогда, согласно лемме 3.1, имеем

$$Au(x,t) = -\sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)(\ln\lambda_k)v_k(x).$$

В таком случае из уравнения (1.1) получаем

$$c_0''(t) = f_0(t), \tag{4.1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k''(t)v_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty}(\ln\lambda_k)c_k(t)v_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)v_k(x),$$

где $f_k(t) = (f, v_k)$. Следовательно, при $k \geqslant 1$ имеет место уравнение

$$c_k''(t) - (\ln\lambda_k)c_k(t) = f_k(t).$$

Положим

$$\mu_k = \sqrt{\ln\lambda_k}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.2}$$

В этих обозначениях уравнение для функции c_k запишется в виде

$$c_k''(t) - \mu_k^2 c_k(t) = f_k(t). \tag{4.3}$$

Из уравнений (4.1) и (4.3) находим соответственно

$$c_0(t) = a_0 + b_0 t + \int_0^t (t-s)f_0(s)\,ds$$

и

$$c_k(t) = a_k \mathrm{ch}\,(\mu_k t) + b_k \frac{\mathrm{sh}\,(\mu_k t)}{\mu_k} + \frac{1}{\mu_k}\int_0^t \mathrm{sh}\,(\mu_k(t-s))f_k(s)\,ds.$$

Принимая во внимание начальные условия (1.2), приходим к следующим соотношениям для коэффициентов Фурье искомого решения задачи (1.5):

$$c_0(t) = (\varphi, v_0) + (\psi, v_0)t + \int_0^t (t-s)(f, v_0)(s)\,ds,$$

$$c_k(t) = (\varphi, v_k)\mathrm{ch}\,(\mu_k t) + (\psi, v_k)\frac{\mathrm{sh}\,(\mu_k t)}{\mu_k} + \int_0^t \mathrm{sh}\,(\mu_k(t-s))f_k(s)\,ds, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Из уравнений (4.1) и (4.3) следует, что вторая производная по переменной t, входящая в уравнение (1.1), формально разлагается в следующий ряд Фурье:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = (f, v_0)(t)v_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^2 c_k(t)v_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(f, v_k)(t)v_k(x). \tag{4.4}$$

Для доказательства существования решения достаточно убедиться в сходимости в метрике пространства $H^\beta(\Omega)$ рядов (4.4).

Лемма 4.1. *Пусть* $\rho_k \geqslant 0$ *и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k$ *сходится. Тогда при любом* $\varepsilon > 0$ *и любом* $T > 0$ *ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho_k}{\lambda_k^{\varepsilon}}e^{\mu_k t}$$

сходится равномерно на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$.

Доказательство. Заметим, что, согласно обозначениям (4.2),

$$(e^{\mu_k})^{\mu_k} = e^{\mu_k^2} = e^{\ln\lambda_k} = \lambda_k.$$

Отсюда получаем $e^{\mu_k} = \lambda_k^{1/\mu_k}$. Следовательно, для любого $T > 0$ верно равенство

$$e^{\mu_k T} = \lambda_k^{T/\mu_k}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем номер $N = N(\varepsilon, T)$ таким, чтобы при $k \geqslant N$ выполнялось неравенство $\mu_k \geqslant T/\varepsilon$, т.е. $T/\mu_k \leqslant \varepsilon$. Тогда при $k \geqslant N$ будет справедливо неравенство

$$e^{\mu_k T} \leqslant \lambda_k^{\varepsilon}.$$

Следовательно, для всех $t \in [0, T]$ имеет место оценка

$$\frac{\rho_k}{\lambda_k^{\varepsilon}}e^{\mu_k t} \leqslant \rho_k, \quad k \geqslant N, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Поэтому утверждение леммы следует из теоремы Вейерштрасса о равномерной сходимости функционального ряда, мажорируемого сходящимся числовым рядом.

Доказательство теоремы 2. Пусть выполняется условие $0 < \alpha < 1$ и пусть начальные данные (1.2) и правая часть уравнения (1.1) принадлежат следующим классам:

$$\varphi \in W_2^{\alpha}(\Omega), \quad \psi \in W_2^{\alpha}(\Omega), \quad f \in C\{[0, T] \to W_2^{\alpha}(\Omega)\}.$$

Согласно теореме 3 (см. ниже п. 5) отсюда следует, что для любого положительного $\beta_1 < < \alpha/n$ сходится следующий ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|(\varphi, v_k)|^2 + |(\psi, v_k)|^2 + |f_k(t)|^2)\lambda_k^{\beta_1} < \infty. \tag{4.5}$$

Покажем, что в этом случае для любого положительного $\beta < \alpha/n$ ряды (4.4) сходятся в метрике пространства $H^{\beta}(\Omega)$. Согласно определению нормы в пространстве $H^{\beta}(\Omega)$ (см. (1.10)) для этого требуется доказать, что сходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k(t)|^2\mu_k^4\lambda_k^{\beta} < \infty \ \text{ и } \ \sum_{k=1}^{\infty}|(f, v_k)(t)|^2\lambda_k^{\beta} < \infty. \tag{4.6}$$

Отметим, что выполнение условия (4.5) обеспечивает сходимость второго ряда в (4.6), причём принадлежность функции f классу $C\{[0, T] \to W_2^{\alpha}(\Omega)\}$ гарантирует его равномерную по $t \in [0, T]$ сходимость.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы остаётся доказать равномерную по $t \in [0, T]$ сходимость первого ряда в (4.6). Для этого воспользуемся леммой 4.1. Из этой леммы и условия (4.5) следует, что первый ряд в (4.6) мажоририруется сходящимся числовым рядом, что и означает равномерную его сходимость.

5. Доказательство теоремы 3. Напомним, что для любого $h > 0$ символом Ω_h мы обозначили множество $\Omega_h = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > h\}$. Будем говорить, что область Ω принадлежит *классу* B^{τ}, где $0 < \tau \leqslant 1$, и писать $\Omega \in B^{\tau}$, если выполняется условие

$$|\Omega \setminus \Omega_h| \leqslant \operatorname{const} h^{\tau}, \quad 0 < h < 1. \tag{5.1}$$

Далее, будем говорить, что функция f принадлежит *классу* $W_p^\alpha(\Omega)$, если она является следом некоторой функции из $W_p^\alpha(\mathbb{R}^n)$, которую будем обозначать тем же символом f.

Всюду ниже в данном параграфе предполагается, что $f \in W_2^\alpha(\Omega)$, где $0 < \alpha < 1$.

Для каждого $h > 0$ через χ_h обозначим характеристическую функцию множества Ω_h, т.е.

$$\chi_h(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ x \in \Omega_h, \\ 0, & \text{если } \ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega_h. \end{cases}$$

Введём функции

$$P(x,h) = f(x)\chi_{3h}(x), \quad Q(x,h) = f(x)[\chi(x) - \chi_{3h}(x)], \tag{5.2}$$

где $\chi(x)$ – характеристическая функция области Ω. Очевидно, что носитель функции $P(x,h)$ содержится в области Ω_{3h}, а носитель функции $Q(x,h)$– в дополнении $\Omega \setminus \Omega_{3h}$. Очевидно также, что выполняется равенство

$$f(x) = P(x,h) + Q(x,h), \quad x \in \Omega.$$

Лемма 5.1. *Для любого вектора* $u \in \mathbb{R}^n$ *такого, что* $|u| \leqslant h$, *справедлива оценка*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |P(x+u,h) - P(x,h)|^2\,dx \leqslant \operatorname{const} h^{2\alpha\tau/n} \|f\|^2_{W_2^\alpha}. \tag{5.3}$$

Доказательство. Очевидно, что интегрирование в (5.3) ведётся фактически по области Ω_h. Подынтегральную функцию можно представить в следующем виде:

$$P(x+u,h) - P(x,h) = f(x+u)[\chi_{3h}(x+u) - \chi_{3h}(x)] + \chi_{3h}(x)[f(x+u) - f(x)].$$

Поэтому

$$\|P(x+u,h) - P(x,h)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|f(x+u)[\chi_{3h}(x+u) - \chi_{3h}(x)]\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} +$$
$$+ \|\chi_{3h}(x)[f(x+u) - f(x)]\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.4}$$

Для оценки первого слагаемого в правой части неравенства (5.4) заметим, что, согласно теоремам вложения (см. [12, гл. 9, § 9.6]), функция f принадлежит классу $L_{p_1}(\mathbb{R}^n)$, где $p_1 = 2n/(n-2\alpha)$. Положим $p = p_1/2$. Тогда $1/p = 1 - 2\alpha/n$, т.е.

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{2\alpha}{n}.$$

В таком случае

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x+u)[\chi_{3h}(x+u) - \chi_{3h}(x)]|^2\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x+u)|^{2p}\,dx\bigg)^{1/p} \bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\chi_{3h}(x+u) - \chi_{3h}(x)|^{2q}\,dx\bigg)^{1/q}. \tag{5.5}$$

Согласно оценке (5.1) отсюда получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x+u)[\chi_{3h}(x+u) - \chi_{3h}(x)]|^2\,dx \leqslant \operatorname{const}|u|^{\tau/q} \|f\|^2_{W_2^\alpha} \leqslant \operatorname{const} h^{2\alpha\tau/n} \|f\|^2_{W_2^\alpha}. \tag{5.6}$$

Далее,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\chi_{3h}(x)[f(x+u)-f(x)]|^2\,dx \leqslant \mathrm{const}|u|^{2\alpha}\|f\|^2_{W_2^\alpha} \leqslant \mathrm{const}\,h^{2\alpha}\|f\|^2_{W_2^\alpha}. \tag{5.7}$$

Поскольку $\tau < n$, из неравенств (5.6) и (5.7) вытекает требуемая оценка (5.3).

Лемма 5.2. *Для любого $h > 0$ выполняется оценка*

$$\int\limits_{\Omega} |Q(x,h)|^2\,dx \leqslant \mathrm{const}\,h^{2\alpha\tau/n}\|f\|^2_{W_2^\alpha}. \tag{5.8}$$

Доказательство. Воспользовавшись определением (5.2) и оценкой (5.5), получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)[\chi(x)-\chi_{3h}(x)]|^2\,dx \leqslant \biggl(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{2p}\,dx\biggr)^{1/p}\biggl(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\chi(x)-\chi_{3h}(x)|^{2q}\,dx\biggr)^{1/q} \leqslant \mathrm{const}\,h^{\tau/q}\|f\|^2_{W_2^\alpha}.$$

Так как $1/q = 2\alpha/n$, то отсюда следует требуемая оценка (5.8). Лемма доказана.

Обозначим через $P_k(h)$ коэффициенты Фурье функции $P(x,h)$ и, соответственно, через $Q_k(h)$ коэффициенты Фурье функции $Q(x,h)$.

Всюду в дальнейшем предполагается, что $\Omega \in B^\tau$, где $0 < \tau \leqslant 1$.

Лемма 5.3. *Пусть $f \in W_2^\alpha(\Omega)$, где $0 < \alpha < 1$. Тогда при любом $h > 0$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |P_k(h)|^2[\phi(h\sqrt{\lambda_k})-1]^2 \leqslant \mathrm{const}\,h^{2\alpha\tau/n}\|f\|^2_{W_2^\alpha}. \tag{5.9}$$

Доказательство. Введём функцию

$$E(x,h) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{S^{n-1}} P(x+h\theta,h)\,d\theta.$$

Очевидно, что её носитель содержится в области Ω_{2h}. Вычислим коэффициенты Фурье этой функции:

$$E_k(h) = \int\limits_{\Omega} E(x,h)v_k(x)\,dx = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{S^{n-1}} P(x+h\theta,h)v_k(x)\,d\theta\,dx.$$

Проведя замену переменных и меняя порядок интегрирования, получаем

$$E_k(h) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{S^{n-1}} P(x,h)v_k(x+h\theta)\,d\theta\,dx.$$

Далее применим формулу среднего значения (см. [9, формула (1.1.2)]):

$$\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{S^{n-1}} v_k(x+h\theta)\,d\theta = \phi(h\sqrt{\lambda_k})v_k(x),$$

где

$$\phi(t) = 2^{(n-2)/2}\Gamma(n/2)t^{(2-n)/2}J_{(n-2)/2}(t). \tag{5.10}$$

Следовательно, коэффициенты Фурье функции $E(x,h)$ связаны с коэффициентами Фурье $P_k(h)$ функции $P(x,h)$ равенством $E_k(h) = P_k(h)\phi(h\sqrt{\lambda_k})$. Поэтому коэффициенты Фурье функции

$$E(x,h) - P(x,h) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{S^{n-1}} [P(x+h\theta,h) - P(x,h)]\,d\theta$$

равны $P_k(h)[\phi(h\sqrt{\lambda_k})-1]$. Тогда, применяя к функции $E(x,h)-P(x,h)$ равенство Парсеваля, будем иметь

$$\|E(x,h)-P(x,h)\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} |P_k(h)|^2[\phi(h\sqrt{\lambda_k})-1]^2. \tag{5.11}$$

Из леммы 5.1 следует оценка

$$\|E(x,h)-P(x,h)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \operatorname{const} h^{\alpha\tau/n}\|f\|^2_{W_2^\alpha},$$

из которой и равенства (5.11) вытекает требуемое неравенство (5.9).

Лемма 5.4. *Пусть* $f \in W_2^\alpha(\Omega)$, *где* $0<\alpha<1$. *Тогда при любом* $h>0$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k(h)|^2[\phi(h\sqrt{\lambda_k})-1]^2 \leqslant \operatorname{const} h^{2\alpha\tau/n}\|f\|^2_{W_2^\alpha}. \tag{5.12}$$

Доказательство. Для коэффициентов Фурье $Q_k(h)$ функции $Q(x,h)$ в силу оценки (5.8) и равенства Парсеваля получаем следующее неравенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k(h)|^2 \leqslant \operatorname{const} h^{2\alpha\tau/n}. \tag{5.13}$$

Поскольку функция $\phi(t)$, определённая равенством (5.10), равномерно ограничена, выполняется оценка $|\phi(h\sqrt{\lambda_k})-1| \leqslant \operatorname{const}$, из которой и неравенства (5.13) следует требуемая оценка (5.12).

Лемма 5.5. *Пусть* $\Omega \in B^\tau$, *где* $0<\tau\leqslant 1$, *и* $f \in W_2^\alpha(\Omega)$, *где* $0<\alpha<1$. *Тогда при любом* $\mu \geqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\sum_{\mu\leqslant\sqrt{\lambda_k}\leqslant 2\mu} |f_k|^2 \leqslant \operatorname{const} \mu^{-2\alpha\tau/n}\|f\|^2_{W_2^\alpha}, \tag{5.14}$$

где f_k – коэффициенты Фурье функции f.

Доказательство. Так как $f=P+Q$, то из лемм 5.3 и 5.4 следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2[\phi(h\sqrt{\lambda_k})-1]^2 \leqslant \operatorname{const} h^{2\alpha\tau/n}\|f\|^2_{W_2^\alpha}. \tag{5.15}$$

Нетрудно видеть, что существуют числа $a>0$ и $b>0$, для которых $|\phi(t)-1| \geqslant b$, $a\leqslant t\leqslant 2a$. Отсюда и из неравенства (5.15) получаем

$$\sum_{a\leqslant h\sqrt{\lambda_k}\leqslant 2a} |f_k|^2 \leqslant \frac{1}{b^2}\sum_{a\leqslant h\sqrt{\lambda_k}\leqslant 2a} |f_k|^2[\phi(h\sqrt{\lambda_k})-1]^2 \leqslant \frac{1}{b^2}\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2[\phi(h\sqrt{\lambda_k})-1]^2 \leqslant \operatorname{const} h^{2\alpha\tau/n}\|f\|^2_{W_2^\alpha}.$$

Для любого $\mu>0$, положив $h=a/\mu$, получим неравенство (5.14).

Лемма 5.6. *Пусть* $\Omega \in B^\tau$, *где* $0<\tau\leqslant 1$, *и* $f \in W_2^\alpha(\Omega)$, *где* $0<\alpha<1$. *Тогда при любом* $\beta<\alpha\tau/n$ *справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2\lambda_k^\beta \leqslant \operatorname{const} \|f\|^2_{W_2^\alpha}. \tag{5.16}$$

Доказательство. Оценим сумму в левой части оценки (5.16) с помощью двоичного разбиения:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2\lambda_k^\beta = \sum_{0\leqslant\sqrt{\lambda_k}<1} |f_k|^2\lambda_k^\beta + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{2^m\leqslant\sqrt{\lambda_k}<2^{m+1}} |f_k|^2\lambda_k^\beta \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|^2_{L_2(\Omega)} + \operatorname{const}\sum_{m=0}^{\infty} 2^{2m\beta}\sum_{2^m\leqslant\sqrt{\lambda_k}<2^{m+1}} |f_k|^2.$$

Применяя к каждой внутренней сумме лемму 5.5 с $\mu = 2^{2m}$, получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^{2m\beta} \sum_{2^m \leqslant \sqrt{\lambda_k} < 2^{m+1}} |f_k|^2 \leqslant \mathrm{const}\, \|f\|^2_{W_2^\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} 2^{2m\beta} 2^{-2m\alpha\tau/n} = \mathrm{const}\, \|f\|^2_{W_2^\alpha}.$$

Доказательство теоремы 3. По условию область Ω имеет кусочно-гладкую границу и поэтому принадлежит классу B^τ при $\tau = 1$. Поэтому справедливость теоремы 3 вытекает из леммы 5.6, в которой следует положить $\tau = 1$.

Замечание 5.1. Теорема 3 фактически утверждает, что для любого α из интервала $(0, 1)$ классы Соболева $W_2^\alpha(\Omega)$ при любом положительном $\beta < \alpha/n$ содержатся в области определения дробной степени оператора Лапласа: $W_2^\alpha(\Omega) \subset D((-\Delta)^{\beta/2})$.

При этом от функций из соответствующих классов Соболева не требуется выполнения каких-либо граничных условий.

Замечание 5.2. Приведённое выше доказательство теоремы 3 не использует тот факт, что собственные функции оператора Лапласа удовлетворяют краевым условиям (1.5). Следовательно, теорема справедлива для спектральных разложений, отвечающих произвольному самосопряжённому расширению оператора Лапласа с дискретным спектром.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Silling S.A.* Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces // J. Mech. Phys. Solids. 2000. V. 48. № 1. P. 175–209.
2. *Silling S.A., Zimmermann M., Abeyaratne R.* Deformation of a peridynamic bar // J. of Elasticity. 2003. V. 73. P. 173–190.
3. *Seleson P., Parks M.L., Gunzburger M., Lehoucq R.B.* Peridynamics as an upscaling of molecular dynamics // Multiscale Model. Simul. 2009. V. 8. № 1. P. 204–227.
4. *Du Q., Kamm J.R., Lehoucq R.B., Parks M.L.* A new approach for a nonlocal, nonlinear conservation law // SIAM J. Appl. Math. 2012. V. 72. № 1. P. 464–487.
5. *Emmrich E., Lehoucq R., Puhst D.* A nonlocal continuum theory // Lect. Not. in Comput. Sci. and Engineering. 2013. V. 89. P. 45–65.
6. *Alimov S.A., Cao Y., Ilhan O.A.* On the problems of peridynamics with special convolution kernels // J. of Integral Equat. and Appl. 2014. V. 26. № 3. P. 301–321.
7. *Alimov S.A., Sheraliev S.* On the solvability of the singular equation of peridynamics // Complex Variables and Elliptic Equat. 2019. V. 64. № 5. P. 873–887.
8. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, 1965.
9. *Ильин В.А.* Спектральная теория дифференциальных операторов. Самосопряженные дифференциальные операторы. М., 1991.
10. *Ильин В.А., Алимов Ш.А.* О расходимости на множестве положительной меры средних Рисса ядер дробного порядка // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 2. С. 372–373.
11. *Алимов Ш.А., Рахимов А.А.* О локализации спектральных разложений распределений // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 6. С. 792–796.
12. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1977.

Национальный университет Узбекистана
им. Мирзо Улугбека, г. Ташкент,
Ташкентский филиал Московского государственного
университета им. М.В. Ломоносова, Узбекистан

Поступила в редакцию 09.11.2020 г.
После доработки 09.11.2020 г.
Принята к публикации 22.01.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 3, с. 387–398

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.74

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА СВЁРТКИ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

 С. Н. Асхабов

Для интегро-дифференциального уравнения типа свёртки со степенной нелинейностью и переменным коэффициентом, заданного на полуоси $[0,\infty)$, методом весовых метрик в конусе пространства $C^1(0,\infty)$, образованном положительными на $(0,\infty)$ и равными нулю в нуле функциями, доказывается глобальная теорема о существовании и единственности решения, принадлежащего указанному конусу. Показано, что это решение может быть найдено методом последовательных приближений пикаровского типа, установлена оценка скорости сходимости приближений. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

DOI: 10.31857/S0374064121030092

Введение. В работе [1] изучалось нелинейное интегральное уравнение типа свёртки вида

$$u^{\alpha}(x)=a(x)\int\limits_0^x k(x-t)u(t)\,dt,\quad x>0,\quad \alpha>0, \tag{1}$$

возникающее в исследованиях различных физических процессов: при изучении инфильтрации жидкости из цилиндрического резервуара в изотропную однородную пористую среду; при описании процесса распространения ударных волн в трубах, наполненных газом; при решении задачи о нагревании полубесконечного тела при нелинейном теплопередаточном процессе; в моделях популяционной генетики и других (подробнее см. в [2–4]). Важно отметить, что в связи с указанными и другими приложениями особый интерес представляют непрерывные положительные при $x>0$ решения интегрального уравнения (1).

В данной работе в конусе Q, образованном неотрицательными непрерывными на полуоси $[0,\infty)$ вещественнозначными функциями, удовлетворяющими условию $u(0)=0$, изучается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа свёртки

$$u^{\alpha}(x)=a(x)\int\limits_0^x k(x-t)u'(t)\,dt,\quad x>0,\quad \alpha>0, \tag{2}$$

тесно связанное, как будет показано ниже, с уравнением (1).

Исследование основывается на некоторой модификации принципа сжимающих отображений (аналог метода А. Белицкого [5, 6]), позволяющей при удачном выборе метрики доказывать глобальные теоремы существования и единственности решений без ограничений на их область определения (описание метода Белицкого и его преимуществ приведено, например, в монографии [7, гл. 3, п. 3.1.3]).

Отметим, что метод Белицкого неоднократно переоткрывался и в связи с этим была опубликована статья [8], в которой обоснован приоритет Белицкого в разработке данного метода.

На основе полученных точных нижней и верхней априорных оценок решения уравнения (2) мы строим весовое полное метрическое пространство P_b и, применяя аналог метода Белицкого, доказываем глобальную теорему о существовании и единственности решения уравнения (2) как в пространстве P_b, так и во всём классе непрерывных положительных при $x>0$

функций. Показано, что решение уравнения (2) может быть найдено в P_b методом последовательных приближений пикаровского типа. Для последовательных приближений получены оценки скорости их сходимости к точному решению в терминах весовой метрики пространства P_b. Приведены также простые примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

1. Свойства неотрицательных решений. Основным объектом исследования в данной работе является нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа свёртки (2), в котором ядро $k(x)$ и коэффициент $a(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$k \in C^2[0,\infty), \quad k'(x) \text{ не убывает на } [0,\infty), \quad k(0)=0 \text{ и } k'(0)>0, \tag{3}$$

$$a \in C^1[0,\infty), \quad a(x) \text{ не убывает на } [0,\infty) \text{ и } a(x)>0 \text{ при } x>0, \tag{4}$$

где через $C^1[0,\infty)$ обозначено пространство всех непрерывно дифференцируемых на полуоси $[0,\infty)$ функций.

В связи с указанными во введении приложениями и тем, что нас интересуют нетривиальные решения, мы будем разыскивать решения уравнения (2) в конусе

$$Q_0^1 = \{u(x) \in C[0,\infty) \bigcap C^1(0,\infty) : u(0)=0 \text{ и } u(x)>0 \text{ при } x>0\}$$

пространства $C^1(0,\infty)$.

Наряду с интегро-дифференциальным уравнением (2) будет рассматриваться также интегральное уравнение

$$u^\alpha(x) = a(x)\int\limits_0^x k'(x-t)u(t)\,dt, \quad x>0, \quad \alpha>0, \tag{5}$$

решения которого будем искать в конусе

$$Q_0 = \{u(x) \in C[0,\infty) : u(0)=0 \text{ и } u(x)>0 \text{ при } x>0\}$$

пространства непрерывных функций $C[0,\infty)$.

Обозначим также через Q конус, образованный неотрицательными непрерывными на $[0,\infty)$ функциями, т.е. $Q = \{u(x) \in C[0,\infty) : u(x) \geqslant 0\}$.

В связи с тем, что нас интересуют условия, при которых уравнения (2) и (5) имеют нетривиальные решения, докажем следующие три леммы.

Лемма 1. *Пусть $\alpha>0$ и $a(x)$, $k(x)$ – неотрицательные непрерывные на полуоси $[0,\infty)$ функции. Для того чтобы интегро-дифференциальное уравнение (2) имело нетривиальное решение, принадлежащее конусу Q, необходимо, чтобы выполнялось условие*

$$\int\limits_0^\delta k(t)\,dt > 0 \quad \textit{для всех} \quad \delta>0. \tag{6}$$

Доказательство. Допустим противное: существует число $\delta>0$ такое, что $\int_0^\delta k(t)\,dt=0$ и тем не менее уравнение (2) имеет решение $u(x)\not\equiv 0$. Так как ядро $k(x)$ неотрицательно и непрерывно, то из последнего равенства следует, что $k(t)\equiv 0$ при $0\leqslant t\leqslant\delta$. Но тогда из (2) в силу коммутативности свёртки имеем

$$u^\alpha(x) = a(x)\int\limits_0^x k(t)\,u'(x-t)\,dt = 0, \quad \text{если} \quad 0\leqslant x\leqslant\delta.$$

Значит, $u(x)\equiv 0$ при $x\in[0,\delta]$, поэтому и $u'(x)\equiv 0$ при $x\in[0,\delta]$.

Пусть теперь $x \in [\delta, 2\delta]$. Тогда $0 \leqslant x-\delta \leqslant \delta$ и из тождества (2), поскольку $u'(t) = k(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant \delta$, вытекает, что

$$u^{\alpha}(x) = a(x)\int\limits_0^x k(x-t)\,u'(t)\,dt = a(x)\int\limits_\delta^x k(x-t)\,u'(t)\,dt = a(x)\int\limits_0^{x-\delta} k(t)\,u'(x-t)\,dt = 0,$$

так как $k(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant x-\delta \leqslant \delta$. Значит, $u(x) \equiv 0$ и при $x \in [\delta, 2\delta]$.

Итак, мы показали, что $u(x) \equiv 0$ при $x \in [0, 2\delta]$. Продолжая такие же рассуждения далее, заключаем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо тождество $u(x) \equiv 0$ при $x \in [0, n\delta]$, а значит, $u(x) \equiv 0$ на $[0, \infty)$, но это противоречит тому, что $u(x) \not\equiv 0$. Лемма доказана.

Заметим, что условие (6), необходимое для существования нетривиального неотрицательного непрерывного решения уравнения (2), выполняется для ядра $k(x)$, удовлетворяющего условию (3).

Прежде чем продолжить исследование уравнений (2), (5), заметим, что если функция $u(x) \in Q$ является нетривиальным решением уравнения (5) при $a(x) = 1$, то для любого $\delta > 0$ каждый из её сдвигов

$$u_\delta(x) = \begin{cases} u(x-\delta), & \text{если} \;\; x > \delta, \\ 0, & \text{если} \;\; x \leqslant \delta, \end{cases}$$

также является решением уравнения (5), что проверяется непосредственной подстановкой функций $u_\delta(x)$ в это уравнение. Следовательно, уравнение (5) может иметь в конусе Q континуум нетривиальных решений. Поэтому, чтобы задачу отыскания нетривиальных решений уравнения (5) сделать корректной и в связи с тем, что с прикладной точки зрения интерес представляют непрерывные положительные при $x > 0$ решения, будем разыскивать решения уравнения (5) в конусе Q_0.

Это замечание справедливо и для интегро-дифференциального уравнения (2).

Лемма 2. *Пусть $\alpha > 0$ и выполнены условия (3), (4). Если $u(x) \in Q_0$ – решение интегрального уравнения (5), то функция $u(x)$ является неубывающей и непрерывно дифференцируемой на $(0, \infty)$.*

Доказательство. Пусть $u(x) \in Q_0$ – решение уравнения (5) и $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ – произвольные числа такие, что $x_1 < x_2$. Так как $k'(x)$ не убывает на $[0, \infty)$ и неотрицательна, то свёртка

$$(k' * u)(x) = \int\limits_0^x k'(x-t)u(t)\,dt$$

также не убывает, поскольку

$$(k' * u)(x_2) - (k' * u)(x_1) = \int\limits_0^{x_1} [k'(x_2-t) - k'(x_1-t)]u(t)\,dt + \int\limits_{x_1}^{x_2} k'(x_2-t)u(t)\,dt \geqslant 0.$$

Значит, функция $u^{\alpha}(x)$, являясь, согласно (5), произведением двух неубывающих неотрицательных функций, также не убывает на $[0, \infty)$. Следовательно, сама функция $u(x)$ не убывает и поэтому почти всюду дифференцируема на полуоси $[0, \infty)$.

Докажем теперь, что решение $u(x)$ является непрерывно дифференцируемой на $(0, \infty)$ функцией. Так как по условию $k \in C^2[0, \infty)$, то правая часть тождества (5) дифференцируема и в силу свойства коммутативности свёртки [3, § 17] справедливо равенство

$$\left(\int\limits_0^x k'(x-t)u(t)\,dt\right)' = \int\limits_0^x k''(x-t)u(t)\,dt + k'(0)u(x) = \int\limits_0^x k''(t)u(x-t)\,dt + k'(0)u(x). \qquad (7)$$

Поскольку функция $u(x)$ не убывает, а функция $k''(x)$ локально ограничена на $[0,\infty)$, то в силу теоремы о непрерывности свёртки [3, теорема 17.9] производная (7) непрерывна на $[0,\infty)$. Но тогда существует и непрерывна производная левой части тождества (5), что влечёт за собой существование и непрерывность первой производной $u'(x)$ при $x>0$, так как

$$u'(x)=\alpha^{-1}u^{1-\alpha}(x)\left[a'(x)\int\limits_0^x k'(x-t)u(t)dt+a(x)\left(\int\limits_0^x k''(t)u(x-t)\,dt+k'(0)u(x)\right)\right].$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия (3) и (4). Тогда интегральное уравнение (5) при $0<\alpha\leqslant 1$ имеет в конусе Q лишь тривиальное решение $u(x)\equiv 0$.*

Доказательство. При $\alpha=1$ утверждение леммы 3 очевидно, поэтому далее считаем, что $0<\alpha<1$. Допустим противное, т.е. что уравнение (5) имеет нетривиальное решение $u(x)\in Q$. Тогда найдётся $x_0>0$ такое, что $u(x_0)>0$. Очевидно, что $u(0)=0$. Положим

$$x_n=\inf\{x: 0\leqslant x\leqslant x_0 \ \text{ и } \ u(x)=2^{-n}u(x_0)\}.$$

Тогда $u(x_n)=2^{-n}u(x_0)$ и в силу леммы 2 справедливо неравенство $u(t)\leqslant u(x_n)$ при $t<x_n$.

Положим $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=q$. Тогда возможны два случая: $q=0$ и $q>0$.

1) Пусть $q=0$. В этом случае из уравнения (5) следует, что

$$u^\alpha(x_n)=a(x_n)\int\limits_0^{x_n}k'(x_n-t)u(t)\,dt\leqslant a(x_n)u(x_n)\int\limits_0^{x_n}k'(x_n-t)\,dt=a(x_n)u(x_n)k(x_n),$$

или $(u(x_n))^{\alpha-1}\leqslant a(x_n)k(x_n)$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n\to\infty$, с учётом того, что $u(0)=0$, $k(0)=0$ и $\alpha-1<0$, приходим к противоречию: $\infty\leqslant 0$.

2) Пусть $q>0$. Из определения x_n следует, что $q\leqslant x_n$ при любом $n\in\mathbb{N}$ и $u(t)\equiv 0$ при $t\leqslant q$. В самом деле, переходя к пределу при $n\to\infty$ в равенстве $u(x_n)=2^{-n}u(x_0)$, получаем $u(q)=0$. Так как функция $u(x)$ не убывает на $[0,\infty)$ и $u(0)=u(q)=0$, то $u(t)\equiv 0$ для всех $t\leqslant q$. Поэтому из (5) имеем

$$u^\alpha(x_n)=a(x_n)\int\limits_0^{q}k'(x_n-t)\,u(t)\,dt+a(x_n)\int\limits_q^{x_n}k'(x_n-t)\,u(t)\,dt=a(x_n)\int\limits_q^{x_n}k'(x_n-t)\,u(t)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant a(x_n)u(x_n)\int\limits_q^{x_n}k'(x_n-t)\,dt=a(x_n)u(x_n)\int\limits_0^{x_n-q}k'(t)dt=a(x_n)u(x_n)k(x_n-q).$$

Следовательно,

$$(u(x_n))^{\alpha-1}\leqslant a(x_n)k(x_n-q).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n\to\infty$, с учётом того, что $u(x_n)=2^{-n}u(x_0)\to 0$, $k(0)=0$ и $\alpha-1<0$, снова получаем противоречие: $\infty\leqslant 0$. Лемма доказана.

Из леммы 3 вытекает, что уравнения (2) и (5) не имеет смысла исследовать при $0<\alpha\leqslant 1$, поэтому всюду далее без оговорок предполагается, что $\alpha>1$.

Следующая лемма устанавливает связь между интегро-дифференциальным уравнением (2) и интегральным уравнением (5).

Лемма 4. *Пусть выполнены условия (3) и (4). Если $u(x)\in Q_0^1$ является решением интегро-дифференциального уравнения (2), то $u(x)$ принадлежит конусу Q_0 и является решением интегрального уравнения (5). Обратно, если уравнение (5) имеет решение $u(x)\in Q_0$, то $u(x)$ принадлежит конусу Q_0^1 и является решением уравнения (2).*

Доказательство. Пусть $u(x) \in Q_0^1$ является решением уравнения (2). Так как $Q_0^1 \subset Q_0$, то $u(x) \in Q_0$. Поскольку $k(0) = 0$ и $u(0) = 0$, то, вычисляя интеграл в уравнении (2) по частям, получаем

$$u^\alpha(x) = a(x) \int_0^x k(x-t)\, du(t) = a(x) \int_0^x u(t) k'(x-t)\, dt,$$

т.е. функция $u(x)$ является решением уравнения (5).

Обратно, пусть $u(x) \in Q_0$ является решением уравнения (5). Тогда, согласно лемме 2, функция $u(x)$ принадлежит пространству $C^1(0,\infty)$, а значит, $u(x) \in Q_0^1$. Используя свойство коммутативности свёртки, формулу интегрирования по частям и равенства $k(0) = u(0) = 0$, из уравнения (5) имеем

$$u^\alpha(x) = a(x) \int_0^x k'(t) u(x-t)\, dt = a(x) \int_0^x k(t) u'(x-t)\, dt = a(x) \int_0^x k(x-t) u'(t)\, dt,$$

т.е. функция $u(x)$ является решением уравнения (2). Лемма доказана.

Из леммы 4 вытекает, что для доказательства существования в конусе Q_0^1 решения интегро-дифференциального уравнения (2) достаточно доказать существование в конусе Q_0 решения интегрального уравнения (5). Кроме того, из леммы 4 следует, что уравнения (2) и (5) имеют одно и то же множество решений.

Доказательство основных результатов данной статьи основывается на априорных оценках снизу и сверху решений уравнения (5). При доказательстве верхней априорной оценки решения уравнения (5) нам понадобится следующее интегральное неравенство Чебышёва (см., например, [3, лемма 17.1]):

$$\int_0^x v(x-t)\, w(t)\, dt \leqslant \int_0^x v(t)\, w(t)\, dt, \quad x > 0, \tag{8}$$

справедливое для любых неубывающих на $[0,\infty)$ функций $v(x)$ и $w(x)$.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия (3) и (4). Если функция $u(x) \in Q_0$ является решением интегрального уравнения (5), то $u(x)$ удовлетворяет неравенствам*

$$F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x), \tag{9}$$

где

$$F(x) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} k'(0)\right)^{1/(\alpha-1)} a^{1/\alpha}(x) \left(\int_0^x a^{1/\alpha}(t)\, dt\right)^{1/(\alpha-1)},$$

$$G(x) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} a^{1/\alpha}(x) \left(\int_0^x a^{1/\alpha}(t) k'(t)\, dt\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Доказательство. Пусть $u(x) \in Q_0$ – решение уравнения (5). Так как при $x = 0$ неравенства (9) обращаются в очевидные равенства, то будем считать далее, что $x > 0$.

Докажем сначала левое неравенство в (9). Так как $a(x) \geqslant 0$ и $k'(x)$ не убывает на $[0,\infty)$, то из тождества (5) имеем

$$u(x) \geqslant \Big(k'(0) a(x)\Big)^{1/\alpha} \left(\int_0^x u(t)\, dt\right)^{1/\alpha}, \quad x > 0, \tag{10}$$

или, что то же самое, поскольку $k'(0) > 0$ и $u(x) > 0$ при $x > 0$,

$$u(t)\Big(\int\limits_0^t u(s)\,ds\Big)^{-1/\alpha} \geqslant \Big(k'(0)a(t)\Big)^{1/\alpha}, \quad t > 0.$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от 0 до x, получаем

$$\Big(\int\limits_0^x u(t)\,dt\Big)^{(\alpha-1)/\alpha} \geqslant \frac{\alpha-1}{\alpha}(k'(0))^{1/\alpha}\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt, \quad x > 0,$$

откуда

$$\Big(\int\limits_0^x u(t)\,dt\Big)^{1/\alpha} \geqslant \Big(\frac{\alpha-1}{\alpha}\Big)^{1/(\alpha-1)}(k'(0))^{1/[\alpha(\alpha-1)]}\Big(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\Big)^{1/(\alpha-1)}, \quad x > 0. \tag{11}$$

Тогда левое неравенство в (9) непосредственно вытекает из неравенств (10) и (11).

Докажем теперь правое неравенство в (9). Так как в силу условия (3) и леммы 1 функции $k'(x)$ и $u(x)$ не убывают на $[0,\infty)$, то вследствие неравенства Чебышёва (8) из тождества (5) вытекает неравенство

$$u^\alpha(x) = a(x)\int\limits_0^x k'(x-t)u(t)\,dt \leqslant a(x)\int\limits_0^x k'(t)u(t)\,dt, \quad x > 0,$$

т.е.

$$u(x) \leqslant a^{1/\alpha}(x)\Big(\int\limits_0^x k'(t)u(t)\,dt\Big)^{1/\alpha}, \quad x > 0. \tag{12}$$

Из этого неравенства, поскольку $k'(t) > 0$ и $u \in Q_0$, следует, что

$$k'(t)u(t)\Big(\int\limits_0^t k'(s)u(s)\,ds\Big)^{-1/\alpha} \leqslant k'(t)a^{1/\alpha}(t), \quad t > 0.$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от 0 до x, будем иметь

$$\Big(\int\limits_0^x k'(s)u(s)\,ds\Big)^{(\alpha-1)/\alpha} \leqslant \frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x k'(t)a^{1/\alpha}(t)\,dt, \quad x > 0,$$

откуда

$$\Big(\int\limits_0^x k'(t)u(t)\,dt\Big)^{1/\alpha} \leqslant \Big(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x k'(t)a^{1/\alpha}(t)\,dt\Big)^{1/(\alpha-1}, \quad x > 0. \tag{13}$$

Таким образом, правое неравенство в (9) – непосредственное следствие неравенств (12) и (13). Лемма доказана.

Из леммы 5 вытекает, что решения интегрального уравнения (5) естественно искать в классе

$$P = \{u \in C[0,\infty) : F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x)\},$$

где функции $F(x)$ и $G(x)$ определены в лемме 5, а функции $k(x)$ и $a(x)$ удовлетворяют условиям (3) и (4) соответственно.

В силу леммы 4 утверждения леммы 5 справедливы и для уравнения (2).

Пример. Непосредственно проверяется, что функция

$$u^*(x) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}p\right)^{1/(\alpha-1)} a^{1/\alpha}(x)\left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{1/(\alpha-1)}$$

является решением интегрального уравнения (5) при $k(x) = px$, где $p > 0$ – любое число. Следовательно, если $k(x) = px$, то при всех $x \in [0,\infty)$ справедливы равенства $F(x) = u^*(x) = G(x)$, которые показывают, что априорные оценки решения интегрального уравнения (5), доказанные в лемме 5, являются в определённом смысле точными.

2. Теорема существования и единственности при $\alpha > 1$. Определим нелинейный интегральный оператор свёртки T равенством

$$(Tu)(x) = \left(a(x)\int\limits_0^x k'(x-t)u(t)\,dt\right)^{1/\alpha}, \quad x > 0, \quad \alpha > 1.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (3) и (4). Тогда класс P инвариантен относительно нелинейного оператора T, т.е. $T : P \to P$.*

Доказательство. Пусть $u \in P$. Нужно доказать, что тогда и $Tu \in P$, т.е. $Tu \in C[0,\infty)$ и $F(x) \leqslant (Tu)(x) \leqslant G(x)$.

1) Так как функции $k'(x)$, $a(x)$ неотрицательны и принадлежат пространству $C[0,\infty)$, а $1/\alpha > 0$, то очевидно, что оператор T на классе функций $u \in P$ определён корректно и $Tu \in C[0,\infty)$.

2) Покажем, что $(Tu)(x) \geqslant F(x)$. Поскольку $a(x)$, $k'(x)$ неотрицательны, $k'(x)$ не убывает и $u(x) \geqslant F(x)$, то

$$[(Tu)(x)]^\alpha = a(x)\int\limits_0^x k'(x-t)u(t)\,dt \geqslant a(x)\int\limits_0^x k'(x-t)F(t)\,dt \geqslant k'(0)a(x)\int\limits_0^x F(t)\,dt =$$

$$= k'(0)a(x)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}k'(0)\right)^{1/(\alpha-1)}\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\left(\int\limits_0^t a^{1/\alpha}(s)\,ds\right)^{1/(\alpha-1)} dt = [F(x)]^\alpha,$$

т.е. $(Tu)(x) \geqslant F(x)$.

3) Покажем, наконец, что $(Tu)(x) \leqslant G(x)$. Так как $a(x)$, $k'(x)$ неотрицательны и $u(x) \leqslant G(x)$, а функции $k'(x)$ и $G(x)$ не убывают на $[0,\infty)$, то в силу неравенства Чебышёва (8) получаем

$$[(Tu)(x)]^\alpha = a(x)\int\limits_0^x k'(x-t)\,u(t)\,dt \leqslant a(x)\int\limits_0^x k'(x-t)\,G(t)\,dt \leqslant$$

$$\leqslant a(x)\int\limits_0^x k'(t)\,G(t)\,dt = a(x)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)k'(t)\left(\int\limits_0^t a^{1/\alpha}(s)k'(s)\,ds\right)^{1/(\alpha-1)} dt =$$

$$= a(x)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}\frac{\alpha-1}{\alpha}\left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(s)k'(s)\,ds\right)^{\alpha/(\alpha-1)} = [G(x)]^\alpha,$$

т.е. $(Tu)(x) \leqslant G_(x)$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Используя монотонность оператора T (т.е. $(Tu)(x) \leqslant (Tv)(x)$, если $u(x) \leqslant v(x)$) нетрудно (ср. [9, теорема 3.1]) проверить, что последовательность $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $u_0(x) = F(x)$, сходится (как монотонно возрастающая последовательность, ограниченная сверху функцией $G(x)$) к решению уравнения (5), причём [9, теорема 4.1] это решение единственно в классе Q_0.

Наша цель – найти нижнюю и верхнюю границы решения интегро-дифференциального уравнения (2), показать, что это решение можно найти методом последовательных приближений, и установить оценку погрешности и скорости сходимости приближений к этому решению в терминах метрики вводимого ниже полного метрического пространства.

Исследование интегрального уравнения (5) будет основано на принципе сжимающих отображений, и для его применения нам нужно построить соответствующее полное метрическое пространство. Введём в связи с этим следующий класс функций:

$$P_b = \{u(x) \in C[0,b] : F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x)\},$$

где функции $F(x)$ и $G(x)$ определены в лемме 5, а $b > 0$ – произвольное число.

В силу вольтерровости оператора T из теоремы 1 непосредственно вытекает

Следствие. *Если выполнены условия (3) и (4), то класс P_b инвариантен относительно интегрального оператора T.*

Зафиксируем какое-либо число $\beta \geqslant 0$ и зададим на прямом произведении $P_b \times P_b$ функцию ρ_b формулой

$$\rho_b(u_1,u_2) = \sup_{0<x\leqslant b} \frac{|u_1(x)-u_2(x)|}{a^{1/\alpha}(x)e^{\beta x}} \left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{-1/(\alpha-1)}, \quad \beta \geqslant 0. \tag{14}$$

Поскольку $e^{\beta x} \geqslant 1$ и $|u_1(x)-u_2(x)| \leqslant G(x)-F(x)$ для любых $u_1,u_2 \in P_b$, то с учётом того, что функция $k'(x)$ не убывает, для любого $x \in (0,b]$ получаем

$$\frac{|u_1(x)-u_2(x)|}{a^{1/\alpha}(x)e^{\beta x}} \left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)dt\right)^{-1/(\alpha-1)} \leqslant \frac{G(x)-F(x)}{a^{1/\alpha}(x)} \left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)dt\right)^{-1/(\alpha-1)} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} \frac{a^{1/\alpha}(x)}{a^{1/\alpha}(x)} \left[\left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)k'(t)\,dt\right)^{1/(\alpha-1)} - (k'(0))^{1/(\alpha-1)} \left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{1/(\alpha-1)}\right] \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{-1/(\alpha-1)} \leqslant \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} [(k'(x))^{1/(\alpha-1)} - (k'(0))^{1/(\alpha-1)}].$$

Следовательно, для любых $u_1,u_2 \in P_b$ величина $\rho_b(u_1,u_2)$ конечна:

$$\rho_b(u_1,u_2) \leqslant \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} [(k'(b))^{1/(\alpha-1)} - (k'(0))^{1/(\alpha-1)}] \equiv c_b < \infty,$$

т.е. ρ_b – функция из $P_b \times P_b$ в $[0,c_b]$. Несложно убедиться в том, что ρ_b представляет собой метрику на множестве P_b.

Лемма 6. *Множество P_b с метрикой ρ_b является полным метрическим пространством.*

Доказательство. Пусть $\{u_n\}$ – фундаментальная последовательность из P_b. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $N = N(\varepsilon) > 0$, что для всех $m,n \geqslant N$ выполняется неравенство $\rho_b(u_m,u_n) < \varepsilon$, т.е.

$$\frac{|u_m(x)-u_n(x)|}{a^{1/\alpha}(x)e^{\beta x}} \left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{-1/(\alpha-1)} < \varepsilon \tag{15}$$

для всех $m,n \geqslant N$ и любого $x \in (0,b]$. Так как

$$a^{1/\alpha}(x)\biggl(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\biggr)^{1/(\alpha-1)} e^{\beta x} \leqslant a^{1/\alpha}(b)\biggl(\int\limits_0^b a^{1/\alpha}(t)\,dt\biggr)^{1/(\alpha-1)} e^{\beta b} \equiv M,$$

то

$$\frac{|u_m(x)-u_n(x)|}{a^{1/\alpha}(x)e^{\beta x}}\biggl(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\biggr)^{-1/(\alpha-1)} \geqslant \frac{1}{M}|u_m(x)-u_n(x)|.$$

Поэтому вследствие неравенства (15) имеем: $|u_m(x)-u_n(x)| \leqslant M\varepsilon$ для всех $m,n \geqslant N$ и любого $x \in [0,b]$ (здесь мы учли, что $u_m(0) = u_n(0) = 0$), т.е. $\{u_n\}$ является фундаментальной последовательностью в $C[0,b]$. В силу полноты метрического пространства $C[0,b]$ существует функция $u \in C[0,b]$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x). \tag{16}$$

Покажем, что $u \in P_b$. Так как $\{u_n\} \subset P_b$, то для всех n и любого $x \in [0,b]$ выполняется двойное неравенство

$$F(x) \leqslant u_n(x) \leqslant G(x).$$

Переходя в нём к пределу при $n \to \infty$, с учётом равенства (16) получаем: $F(x) \leqslant u(x) \leqslant G(x)$, т.е. $u \in P_b$.

Осталось доказать сходимость последовательности $\{u_n(x)\}$ к функции $u(x)$ по метрике ρ_b. Переходя в неравенстве (15) к пределу при $m \to \infty$, имеем

$$\frac{|u(x)-u_n(x)|}{a^{1/\alpha}(x)e^{\beta x}}\biggl(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\biggr)^{-1/(\alpha-1)} < \varepsilon$$

для всех $n \geqslant N$ и любого $x \in (0,b]$, т.е. $\rho_b(u_n,u) < \varepsilon$ для всех $n \geqslant N$, что и требовалось. Лемма доказана.

Итак, доказано, что если во множестве P_b функций ввести метрику (14), то оно превращается в полное метрическое пространство. Кроме того, мы показали (см. следствие выше), что нелинейный оператор свёртки T действует из P_b в P_b.

Выберем теперь достаточно малое число $c \in (0,b)$ такое, чтобы выполнялось неравенство

$$k'(c) < \alpha k'(0). \tag{17}$$

Очевидно, что такое число c существует, так как $k'(0) > 0$, $k'(x)$ непрерывна и $\alpha > 1$.

Положим

$$\beta = \frac{1}{k'(0)}\sup_{c\leqslant x\leqslant b}\frac{k'(x)-k'(0)}{x}. \tag{18}$$

Справедлива следующее утверждение (ср. [10]).

Лемма 7. *Пусть ядро $k(x)$ удовлетворяет условию (3). Тогда для любого $x \in [0,b]$ справедливо неравенство*

$$k'(x)e^{-\beta x} \leqslant k'(c), \tag{19}$$

где числа c и β определяются условием (17) и формулой (18) соответственно.

Доказательство. Если $k'(x) \equiv \mathrm{const}$, то $\beta = 0$ и неравенство (19) обращается в тождество. Пусть $k'(x) \not\equiv \mathrm{const}$. Тогда $\beta > 0$ в силу условия (3). Рассмотрим отдельно два случая.

1) Пусть $0 \leqslant x \leqslant c$. Тогда, учитывая, что производная $k'(x)$ не убывает и $\beta > 0$, имеем $k'(x)e^{-\beta x} \leqslant k'(x) \leqslant k'(c)$, что и требовалось.

2) Пусть $c \leqslant x \leqslant b$. В этом случае

$$k'(x) = k'(0) + k'(0)x\frac{1}{k'(0)}\frac{k'(x)-k'(0)}{x} \leqslant k'(0)[1+x\beta] \leqslant k'(0)e^{\beta x}.$$

Следовательно, $k'(x) \leqslant k'(0)e^{\beta x} \leqslant k'(c)e^{\beta x}$, откуда получаем, что $k'(x)e^{-\beta x} \leqslant k'(c)$ для любого $x \in [c,b]$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (3), (4). Тогда оператор T действует из P_b в P_b и является сжимающим, при этом для любых $u_1, u_2 \in P_b$ выполняется неравенство*

$$\rho_b(Tu_2, Tu_1) \leqslant \frac{k'(c)}{\alpha k'(0)}\rho_b(u_2, u_1), \tag{20}$$

где число c определяется условием (17).

Доказательство. То, что оператор T действует из P_b в P_b, установлено в следствии выше. Докажем неравенство (20), т.е. что оператор T является в силу неравенства (17) сжимающим. Пусть $u_1, u_2 \in P_b$ и $x \in (0,b]$. По теореме Лагранжа для любых $z_1, z_2 > 0$ имеем

$$z_1^{1/\alpha} - z_2^{1/\alpha} = \frac{1}{\alpha}\Theta^{1/\alpha-1}(z_1 - z_2),$$

где Θ – некоторое число, лежащее между z_1 и z_2. Поэтому, если $z_1 \geqslant z_0$ и $z_2 \geqslant z_0$, где $z_0 > 0$, то $\Theta > z_0$ и, значит,

$$|z_1^{1/\alpha} - z_2^{1/\alpha}| \leqslant \frac{1}{\alpha}\frac{|z_1 - z_2|}{z_0^{(\alpha-1)/\alpha}}.$$

Используя это неравенство и то, что $(Tu_1)(x) \geqslant F(x)$ и $(Tu_2)(x) \geqslant F(x)$, для всех $x \in (0,b]$ имеем

$$|(Tu_2)(x) - (Tu_1)(x)| =$$

$$= \left|\left(a(x)\int\limits_0^x k'(x-t)u_2(t)\,dt\right)^{1/\alpha} - \left(a(x)\int\limits_0^x k'(x-t)u_1(t)\,dt\right)^{1/\alpha}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha}(F^\alpha(x))^{(1-\alpha)/\alpha}\left|a(x)\int\limits_0^x k'(x-t)[u_2(t)-u_1(t)]\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}k'(0)\right)^{-1} a^{(1-\alpha)/\alpha}(x)\left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{-1} a(x)\int\limits_0^x k'(x-t)|u_2(t)-u_1(t)|\,dt.$$

Итак,

$$|(Tu_2)(x) - (Tu_1)(x)| \leqslant \frac{a^{1/\alpha}(x)}{(\alpha-1)k'(0)}\left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{-1}\int\limits_0^x k'(x-t)|u_2(t)-u_1(t)|\,dt. \tag{21}$$

Поскольку для любого $x > 0$ выполняется неравенство

$$|u_2(x) - u_1(x)| = a^{1/\alpha}(x)\left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{1/(\alpha-1)} e^{\beta x}\frac{|u_2(x)-u_1(x)|}{a^{1/\alpha}(x)e^{\beta x}}\left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{-1/(\alpha-1)} \leqslant$$

$$\leqslant a^{1/\alpha}(x)\left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{1/(\alpha-1)} e^{\beta x}\rho_b(u_2, u_1),$$

то вследствие оценки (21) с учётом леммы 5 получаем

$$|(Tu_2)(x) - (Tu_1)(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a^{1/\alpha}(x)\rho_b(u_2,u_1)}{(\alpha-1)k'(0)}\left(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\right)^{-1}\int\limits_0^x k'(x-t)a^{1/\alpha}(t)\left(\int\limits_0^t a^{1/\alpha}(s)\,ds\right)^{1/(\alpha-1)} e^{\beta t}\,dt =$$

$$= \frac{a^{1/\alpha}(x)\rho_b(u_2,u_1)e^{\beta x}}{(\alpha-1)k'(0)}\bigg(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\bigg)^{-1}\int\limits_0^x k'(x-t)e^{-\beta(x-t)}a^{1/\alpha}(t)\bigg(\int\limits_0^t a^{1/\alpha}(s)\,ds\bigg)^{1/(\alpha-1)}dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k'(c)a^{1/\alpha}(x)\rho_b(u_2,u_1)e^{\beta x}}{(\alpha-1)k'(0)}\bigg(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\bigg)^{-1}\frac{\alpha-1}{\alpha}\bigg(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(s)\,ds\bigg)^{\alpha/(\alpha-1)} =$$

$$= \frac{k'(c)}{\alpha k'(0)}a^{1/\alpha}(x)e^{\beta x}\bigg(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\bigg)^{1/(\alpha-1)}\rho_b(u_2,u_1).$$

Следовательно, для всех $x\in(0,b]$ имеет место неравенство

$$\frac{|(Tu_2)(x)-(Tu_1)(x)|}{a^{1/\alpha}(x)e^{\beta x}}\bigg(\int\limits_0^x a^{1/\alpha}(t)\,dt\bigg)^{-1/(\alpha-1)} \leqslant \frac{k'(c)}{\alpha k'(0)}\rho_b(u_2,u_1),$$

которое равносильно неравенству (20). Поскольку в силу неравенства (17) коэффициент $k'(c)/[\alpha\, k'(0)]$ в неравенстве (20) меньше единицы, то оператор T является сжимающим. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если выполнены условия (3), (4), то интегральное уравнение (5) имеет в конусе Q_0 (и в классе P_b при любом $b>0$) единственное решение. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений, которые сходятся к нему по метрике (14) при любом $b<\infty$.*

Доказательство. Запишем уравнение (5) в операторном виде: $u=Tu$. Из леммы 6 и теоремы 2 следует, что выполнены все требования принципа сжимающих отображений, из которого непосредственно вытекает, что уравнение (5) имеет единственное решение в метрическом пространстве P_b при любом $b>0$ и это решение может быть найдено методом последовательных приближений, которые сходятся к нему по метрике (14) при любом $b<\infty$.

Покажем, что уравнение (5) имеет единственное решение в конусе Q_0. Из единственности и непрерывности решения уравнения (5) в каждом классе P_b вытекает, что для любых $b_2>b_1$ решение $u_{b_2}\in P_{b_2}$ является непрерывным продолжением решения $u_{b_1}\in P_{b_1}$. Следовательно, если обозначить через $u_n(x)$ решение уравнения (5) в классе P_n, то функция $u(x)=u_n(x)$ при $x\in[n,n+1]$, $n\in\mathbb{N}$, будет решением уравнения (5) в конусе Q_0. Таким образом, существование в конусе Q_0 решения уравнения (5) установлено. Осталось доказать его единственность. Предположим, что в конусе существуют два решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ уравнения (5). Поскольку для этих решений справедливы априорные оценки (9), т.е. $F(x)\leqslant u_i(x)\leqslant G(x)$, $x\in[0,\infty)$, $i=1,2$, то сужение каждого из этих решений на любой отрезок $[0,b]$ является решением уравнения (5) в классе P_b. Поэтому, если бы $u_1(x)\neq u_2(x)$, то нашлось бы $b>$ >0, при котором в классе P_b уравнение (5) имело бы два решения, что невозможно. Теорема доказана.

Таким образом, на основании теоремы 3, используя связь между решениями уравнений (5) и (2), установленную в лемме 4, мы можем сформулировать основной результат данной работы.

Теорема 4. *Если выполнены условия (3), (4), то интегро-дифференциальное уравнение типа свёртки со степенной нелинейностью (2) имеет в конусе Q_0^1 (и в классе P_b при любом $b>0$) единственное решение $u^*(x)$. Это решение удовлетворяет неравенствам (9), и его можно найти в полном метрическом пространстве P_b методом последовательных приближений по формуле $u_n=Tu_{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$, со сходимостью по метрике (14), в которой числа c и β определяются условием (17) и формулой (18). При этом справедлива следующая оценка погрешности:*

$$\rho_b(u_n,u^*)\leqslant\frac{q^n}{1-q}\rho_b(Tu_0,u_0),\quad n\in\mathbb{N},$$

где $q=k'(c)/(\alpha k'(0))<1$, а $u_0(x)\in P_b$ – начальное приближение (произвольная функция).

Приведём теперь несколько простых примеров, иллюстрирующих полученные результаты.

1. Если $k(x) = px$, $p > 0$, $a(x) = 1$, то уравнение (2) имеет в конусе Q_0^1 единственное решение

$$u(x) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} px\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

2. Если $k(x) = e^x - 1$, $a(x) = 1$, то уравнение (2) имеет в конусе Q_0^1 единственное решение $u(x) = (e^{[(\alpha-1)/\alpha]x} - 1)^{1/(\alpha-1)}$.

3. Если $\alpha = 2$, $k(x) = e^x - 1$, $a(x) = e^{2x}$, то уравнение (2) имеет в конусе Q_0^1 единственное решение $u(x) = 2e^{3x/2}(e^{x/2} - 1)$.

4. Если $\alpha = 2$, $k(x) = e^x - 1$, $a(x) = x^2$, то уравнение (2) имеет в конусе Q_0^1 единственное решение $u(x) = (2e^{x/2} - x - 2)x$.

В приведённых примерах ядра $k(x)$ и коэффициенты $a(x)$ удовлетворяют всем требованиям условий (3), (4).

В тех случаях, когда условия теоремы 4 не выполняются, интегро-дифференциальное уравнение (2) может либо не иметь нетривиальных решений, либо иметь континуум нетривиальных решений. Например, если $\alpha = 1$ и $k(x) = x$, то уравнение (2) при $a(x) = 1$ не имеет в конусе Q_0^1 решений. Если $\alpha = 1$ и $k(x) = 1$, то уравнение (2) при $a(x) = 1$ имеет в конусе Q_0^1 континуум решений $u(x) = Ax^q$, где A и q – любые положительные числа. Если же $k(x) = 1$, $a(x) = e^x$, то уравнение (2) имеет лишь тривиальное решение $u(x) \equiv 0$.

В заключение отметим, что, следуя работе [11], можно обобщить результаты данной статьи на случай уравнения вида (2) с неоднородностью $f(x)$ в линейной части.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-41-200001) и публикуется в рамках выполнения государственного задания в соответствии с Дополнительным соглашением от 07.07.2020 № 075-03-2020-239/2 реестр № 248 КБК 01104730290059611.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Askhabov S.N., Betilgiriev M.A.* A-priori estimates for the solutions of a class of nonlinear convolution equations // Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen. 1991. V. 10. № 2. P. 201–204.
2. *Okrasinski W.* Nonlinear Volterra equations and physical applications // Extracta Math. 1989. V. 4. № 2. P. 51–74.
3. *Асхабов С.Н.* Нелинейные уравнения типа свертки. М., 2009.
4. *Brunner H.* Volterra integral equations: an introduction to the theory and applications. Cambridge, 2017.
5. *Белицкий А.* Заметка о применении метода Банаха–Каччиополи–Тихонова в теории обыкновенных дифференциальных уравнений // Бюлл. Польской АН. Отд. 3. 1956. Т. 4. № 5. С. 255–258.
6. *Белицкий А.* Заметка о применении метода Банаха–Каччиополи–Тихонова в теории уравнения $s = f(x, y, z, p, q)$ // Бюлл. Польской АН. Отд. 3. 1956. Т. 4. № 5. С. 259–262.
7. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. М., 1969.
8. *Corduneanu C.* Bielecki's method in the theory of integral equations // Ann. UMCS. Sec. A. Math. 1984. V. 38. P. 49–65.
9. *Okrasinski W.* On a nonlinear Volterra equation // Math. Meth. Appl. Sci. 1986. V. 8. № 3. P. 345–350.
10. *Okrasinski W.* On the existence and uniqueness of nonnegative solutions of a certain nonlinear convolution equation // Annal. Polon. Math. 1979. V. 36. № 1. P. 61–72.
11. *Асхабов С.Н.* Интегро-дифференциальное уравнение типа свёртки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 786–795.

Чеченский государственный педагогический университет, г. Грозный,
Чеченский государственный университет
г. Грозный

Поступила в редакцию 28.07.2020 г.
После доработки 28.07.2020 г.
Принята к публикации 22.01.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 3, с. 399–410

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.7+519.21+517.982.4

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ПОРОЖДЁННЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ЗАДАЧАМИ

© 2021 г. И. В. Мельникова, В. А. Бовкун, У. А. Алексеева

Изучаются связи между стохастическими дифференциальными уравнениями, источниками случайностей в которых являются непрерывные и разрывные случайные процессы, и детерминированными уравнениями для вероятностных характеристик решений этих стохастических уравнений. Для исследования применяются различные подходы, основанные на стохастической формуле замены переменной (формулы Ито), на анализе локальных инфинитезимальных характеристик процесса, на теории полугрупп операторов в сочетании с обобщённым преобразованием Фурье, что позволило получить прямые и обратные интегро-дифференциальные уравнения для различных вероятностных характеристик.

DOI: 10.31857/S0374064121030109

Введение. Широкий класс процессов, возникающих в различных областях естествознания, социальных явлений, экономики, математически можно описать с помощью дифференциальных уравнений со случайными возмущениями – стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ).

Наиболее изученным является класс СДУ, источником случайностей в которых служит винеровский процесс: решения таких уравнений (диффузионные процессы) в силу непрерывности траекторий винеровского процесса также обладают свойством непрерывности траекторий, поэтому моделирование в рамках уравнений диффузионного типа является наиболее подходящим для описания процессов, не имеющих скачков.

Классические диффузионные процессы обладают характерным свойством: дисперсия отклонения процесса за время Δt от начального положения пропорциональна Δt; такие процессы называют *нормальной диффузией*. Однако, например, для процессов диффузии в турбулентных средах или диффузии белка в молекуле ДНК по результатам наблюдений дисперсия отклонения пропорциональна Δt^{μ}, $\mu > 1$. Процессы с такими свойствами (их называют процессами *супердиффузии*), как и процессы со скачками, невозможно описать в рамках нормальной диффузии, но они моделируются при помощи процессов Леви и более общих марковских процессов – процессов типа Леви (см., например, [1]).

Как в приложениях, так и в фундаментальных исследованиях обычно интересуются не столько самим процессом, сколько различными его характеристиками, поэтому связь между стохастическими уравнениями и отвечающими им детерминированными уравнениями для вероятностных характеристик этих стохастических процессов является одним из основных направлений стохастического анализа. Наиболее исследованной эта связь остаётся для диффузионных процессов и соответствующих им уравнений для характеристик, представляющих собой уравнения в частных производных параболического типа (см., например, [2, 3]).

В настоящей работе мы рассматриваем способы перехода от СДУ к уравнениям для вероятностных характеристик на примере класса уравнений, источником случайности в которых служат процессы Леви. Особенность рассматриваемых процессов, отличающая их от диффузионных процессов, состоит в том, что получаемые детерминированные уравнения являются интегро-дифференциальными (псевдодифференциальными). Мы обсуждаем следующие основные подходы.

1. Подход, основанный на стохастическом интеграле Ито (см., например, [4, 5]) – в нём рассматриваются характеристики типа усреднения борелевской функции от изучаемого процесса и на основе формулы Ито выводится интегро-дифференциальное уравнение, решением которого является выбранная характеристика. Имеет место и обратная связь: от уравнений для вероятностных характеристик к стохастическим уравнениям (см, например, [6, 7]).

2. Подход, позволяющий получить уравнения для вероятностных характеристик в предположении существования трёх пределов для изучаемого случайного процесса: пределов при $\Delta t \to 0$ для “первого и второго моментов” при условии близости значений процесса в моменты времени t и $t + \Delta t$ (см. условия (9), (10) ниже) и предела (11), отвечающего за свойства непрерывности процесса (см., например, [2, 8]).

3. Полугрупповой подход, устанавливающий связь между однородными марковскими процессами и переходными полугруппами этих процессов (марковскими, феллеровскими, Леви) (см., например, [9–12]).

4. Подход к изучению свойств стохастических процессов через поведение характеристической функции – преобразования Фурье (в общем случае обобщённого) переходной функции процесса. В этом подходе, примыкающем к предыдущему, формула Леви–Хинчина для безгранично делимых распределений позволяет получить представление Фурье-образа генератора переходной полугруппы в форме полинома второго порядка и некоторого интегрального слагаемого, отвечающего за поведение процесса при наличии разрывных случайных возмущений.

Между всеми этими подходами существуют глубокие и не всегда очевидные связи, не все из которых изучены в желаемой полноте, несмотря на огромное количество работ, посвящённых исследованию указанных вопросов. Например, как мы увидим в настоящей работе, одна и та же функция в первом подходе определяет некоторую вероятностную характеристику процесса, во втором может служить в роли пробной функции при изучении уравнений в пространствах обобщённых функций, а в третьем – начальным условием при действии полугруппы.

Работа состоит из четырёх пунктов. В п. 1 даны ответы на вопросы, что следует понимать под СДУ, источником случайности в котором служит процесс Леви, и каковы условия существования решения этого уравнения. В п. 2 на основе обобщения формулы Ито на случай разрывных процессов выведено обратное интегро-дифференциальное уравнение для вероятностной характеристики вида $g(t,x) := \mathsf{E}^{t,x}[h(X(T))]$, определяемой в общем случае борелевской функцией h от случайного процесса $X = \{X(t) : t \in [0,T]\}$. В п. 3 обсуждается подход, основывающийся на предположении о существовании трёх пределов. Рассмотренный здесь пример позволил продемонстрировать возможности обобщённого дифференцирования при трактовке уравнения для плотности переходной вероятности процесса X. В п. 4 показано, как методами преобразования Фурье может быть получен генератор переходной полугруппы $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ процесса X, который является псевдодифференциальным оператором. На основе этого записано уравнение для характеристик процесса вида $u(t,x) := S(t)h(x)$ и показана связь между свойствами гладкости характеристики $g(t,x)$ и определяющей её функции $h(x)$.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы прояснить связи между свойствами случайных процессов, моделируемых стохастическими уравнениями, интегро-дифференциальными уравнениями для их характеристик, полугруппами операторов, обобщёнными решениями и преобразованием Фурье, поэтому для прозрачности все рассуждения проводятся для случая процессов со значениями в $\mathbb{R}$. Полученные результаты можно перенести на случай значений в $\mathbb{R}^n$. Исследования бесконечномерных задач, которым посвящены наши работы последнего времени, осложняются уже на этапе постановки задачи (см., например, [13–15]), поэтому они потребовали тщательного предварительного анализа в конечномерном случае.

1. Постановка задачи. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX(t) = \alpha(X(t))\,dt + \beta(X(t))\,dL(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

в котором источником случайности является процесс Леви $L = \{L(t) : t \geqslant 0\}$.

Определение 1 [16]. Случайный процесс $L = \{L(t) : t \geqslant 0\}$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbf{P})$ и принимающий значения в фазовом пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, называется *процессом Леви*, если он удовлетворяет следующим условиям:

(L1) представляет собой процесс с независимыми приращениями, т.е. для любых $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n$ случайные величины $L(0)$, $L(t_1) - L(0)$, $L(t_2) - L(t_1)$, $\ldots$, $L(t_n) - L(t_{n-1})$ независимы;

(L2) стартует из нуля п.н., т.е. $L(0) = 0$ п.н.;

(L3) однороден по времени, т.е. закон распределения приращения $\mathcal{L}(L(s+t) - L(s))$, $s, t \geqslant 0$, не зависит от s;

(L4) стохастически непрерывен, т.е. $\mathbf{P}(|L(s+t)-L(s)|>\varepsilon)\to 0$ при $t\to 0$ для любых $s\geqslant 0$, $\varepsilon>0$;

(L5) его траектории непрерывны справа и имеют конечные пределы слева п.н.

Если для процесса L выполнены условия (L1)–(L4), то он называется *процессом Леви по распределению.*

При рассмотрении процессов Леви условие (L5) часто опускают. Это связано с тем, что у любого процесса Леви по распределению существует модификация, траектории которой п.н. непрерывны справа и имеют конечные пределы слева (см., например, [10]). В настоящей работе условие (L5) предполагается выполненным.

Следуя [4], введём величину

$$N(t,A)=\#\{0\leqslant s\leqslant t:\Delta L(s)\in A\},\quad t\geqslant 0,\quad A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\}),$$

равную количеству тех скачков процесса L за промежуток времени $[0,t]$, высота $\Delta L(s):=$ $:=L(s)-L(s-)$ которых принадлежит множеству A. При любых $\omega\in\Omega$ и $t\geqslant 0$ функция $N(t,\cdot)(\omega)$ представляет собой считающую меру на $\mathcal{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, а $\nu(\cdot)=\mathsf{E}[N(1,\cdot)]$ – меру интенсивности, связанную с процессом L. Если множество A ограничено снизу*), то процесс $\{N(t,A):t\geqslant 0\}$ является пуассоновским с интенсивностью $\lambda=\nu(A)$, при этом мера $N(t,A)$ – пуассоновская случайная мера на пространстве $(\mathbb{R}_+\times(\mathbb{R}\setminus\{0\}),\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\bigotimes\mathcal{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\}))$, а мера $\widetilde{N}(t,A):=N(t,A)-t\nu(A)$ – мартингально-значная пуассоновская случайная мера на этом пространстве.

Во введённых обозначениях структура процесса Леви описывается разложением Леви–Ито (см., например, [4, с. 126]):

$$L(t)=at+bW(t)+\int\limits_{|q|\geqslant 1}qN(t,dq)+\int\limits_{|q|<1}q\widetilde{N}(t,dq), \tag{2}$$

где $\{W(t):t\geqslant 0\}$ – стандартный винеровский процесс, a, b – постоянные величины. Благодаря этому представлению становится возможным придать смысл дифференциалу $dL(t)$ в уравнении (1) и получить обобщающую это уравнение математическую модель процесса X в форме СДУ вида

$$X(t)-\xi=\int\limits_0^t a(X(s-))\,ds+\int\limits_0^t b(X(s-))\,dW(s)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{|q|\geqslant 1}K(X(s-),q)N(ds,dq)+\int\limits_0^t\int\limits_{|q|<1}F(X(s-),q)\widetilde{N}(ds,dq),\quad t\in[0,T], \tag{3}$$

где коэффициенты a, b, K, F удовлетворяют условиям существования интегралов. Второе слагаемое в правой части уравнения (3) представляет собой интеграл Ито по винеровскому процессу, а третье слагаемое, поскольку в силу условия (L5) процесс L не может иметь бесконечное число скачков за конечный промежуток времени, является конечной суммой:

$$\int\limits_0^t\int\limits_{|q|\geqslant 1}K(X(s-),q)N(ds,dq)=\sum_{0\leqslant s\leqslant t}K(X(s-),\Delta L(s))\cdot\chi_A(\Delta L(s)),$$

где $A=\{q\in\mathbb{R}:|q|\geqslant 1\}$, $\chi_A(\cdot)$ – характеристическая функция множества A. Наконец, последнее слагаемое в (3) может быть записано следующим образом:

$$\int\limits_0^t\int\limits_{|q|<1}F(X(s-),q)\widetilde{N}(ds,dq)=\int\limits_0^t\int\limits_{|q|<1}F(X(s-),q)N(ds,dq)-\int\limits_0^t\int\limits_{|q|<1}F(X(s-),q)\nu(dq)\,ds.$$

*) $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ и $0\notin\overline{A}$.

Процесс $X = \{X(t) : t \geqslant 0\}$, определяемый уравнением (3), имеет более общую структуру, чем процесс (2), и называется *процессом типа Леви.* Известны достаточно общие условия его существования, которые даёт [4, с. 374, 388] следующая

Теорема 1. *Пусть отображение K является предсказуемым, а отображения a, b, F удовлетворяют условиям Липшица и подлинейного роста: существуют положительные постоянные C_1 и C_2, при которых справедливы неравенства*

$$|a(y) - a(z)| + |b(y) - b(z)| + \int\limits_{|q|<1} |F(y,q) - F(z,q)|\nu(dq) \leqslant C_1|y - z|, \quad y, z \in \mathbb{R},$$

$$a^2(y) + b^2(y) + \int\limits_{|q|<1} F^2(y,q)\nu(dq) \leqslant C_2(1 + y^2), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Тогда существует единственное сильное) решение задачи (3), которое является однородным марковским процессом.*

В настоящей работе выведены интегро-дифференциальные (псевдодифференциальные) уравнения для вероятностных характеристик процесса X, заданного уравнением (3). Для этого использован подход на основе формулы Ито, подход А.Н. Колмогорова, основанный на вычислении пределов, и полугрупповой подход в соединении с преобразованием Фурье.

2. Подход на основе формулы Ито. Формула Ито для разрывного процесса, каковым в общем случае является процесс типа Леви, имеет более сложную структуру, чем в случае непрерывных процессов.

Пусть $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ – процесс типа Леви, определяемый равенством

$$X(t) - \xi = \int\limits_0^t \mathfrak{a}(s)\,ds + \int\limits_0^t \mathfrak{b}(s)\,dW(s) + \int\limits_0^t \int\limits_{|q|\geqslant 1} \mathfrak{K}(s,q)N(ds,dq) +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{|q|<1} \mathfrak{F}(s,q)\widetilde{N}(ds,dq), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Тогда для любой функции $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ с вероятностью 1 имеет место равенство

$$f(t, X(t)) - f(0, X(0)) = \int\limits_0^t \Big(f'_s(s, X(s-)) + \mathfrak{a}(s)f'_x(s, X(s-)) + \frac{1}{2}\mathfrak{b}^2(s)f''_{xx}(s, X(s-)) \Big)\, ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{|q|\geqslant 1} [f(s, X(s-) + \mathfrak{K}(s,q)) - f(s, X(s-))]N(ds,dq) +$$

$$+ \int\limits_0^t \mathfrak{b}(s)f'_x(s, X(s-))\,dW(s) + \int\limits_0^t \int\limits_{|q|<1} [f(s, X(s-) + \mathfrak{F}(s,q)) - f(s, X(s-))]\widetilde{N}(ds,dq) +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{|q|<1} [f(s, X(s-) + \mathfrak{F}(s,q)) - f(s, X(s-)) - \mathfrak{F}(s,q)f'_x(s, X(s-))]\nu(dq)\,ds, \tag{5}$$

называемое *формулой Ито для процесса типа Леви* (4) (см., например, [17; 5, с. 278]).

*) Как принято в стохастическом анализе, *сильным* решением называется процесс, удовлетворяющий п.н. равенству (3) и согласованный с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, порождённой случайными возмущениями, входящими в уравнение.

Рассмотрим процесс $X = \{X(t) : t \geqslant 0\}$ – сильное решение задачи (3). Поскольку X является марковским, ему соответствует функция переходной вероятности $P(t,x;T,A)$ – вероятность перехода процесса X из положения x, в котором он находился в момент времени t, в одно из состояний борелевского множества A за время $T-t$. Важными характеристиками текущего положения процесса, $X(t)=x$, являются функции вида

$$g(t,x) := \mathsf{E}^{t,x}[h(X(T))] = \int\limits_{\mathbb{R}} h(y)P(t,x;T,dy), \quad t\in[0,T], \quad x\in\mathbb{R}, \tag{6}$$

где $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – ограниченная борелевская функция. В следующей теореме на основе формулы Ито выведено интегро-дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $g(t,x)$. Это уравнение является обратным и для него ставится обратная задача Коши с условием $g(T,x)=h(x)$.

Теорема 2. *Пусть $X=\{X(t):t\geqslant 0\}$ – сильное решение задачи (3) с начальным условием $\xi\in\mathbb{R}$. Если функция $g(t,x)$, определяемая равенством (6), имеет непрерывные частные производные g'_t, g'_x, g''_{xx}, то она является решением задачи Коши*

$$-g'_t(t,x) = a(x)g'_x(t,x) + \frac{1}{2}b^2(x)g''_{xx}(t,x) + \int\limits_{|q|\geqslant 1}[g(t,x+K(x,q)) - g(t,x)]\nu(dq) +$$

$$+\int\limits_{|q|<1}[g(t,x+F(x,q)) - g(t,x) - F(x,q)g'_x(t,x)]\nu(dq),$$

$$g(T,x)=h(x), \quad x\in\mathbb{R}, \quad t\in[0,T]. \tag{7}$$

Доказательство. Применив формулу Ито (5) к функции g и процессу X, получим

$$g(t,X(t)) - g(0,X(0)) =$$

$$= \int\limits_0^t \left(g'_s(s,X(s-)) + a(X(s-))g'_x(s,X(s-)) + \frac{1}{2}b^2(X(s-))g''_{xx}(s,X(s-))\right)ds +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{|q|\geqslant 1}[g(s,X(s-)+K(X(s-),q)) - g(s,X(s-))]N(ds,dq) + \int\limits_0^t b(X(s-))g'_x(s,X(s-))\,dW(s) +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{|q|<1}[g(s,X(s-)+F(X(s-),q)) - g(s,X(s-))]\widetilde{N}(ds,dq) +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{|q|<1}[g(s,X(s-)+F(X(s-),q)) - g(s,X(s-)) - F(X(s-),q)g'_x(s,X(s-))]\nu(dq)\,ds. \tag{8}$$

В силу определения функции g и марковского свойства процесса X имеем

$$\mathsf{E}[g(t,X(t))] = \mathsf{E}[\mathsf{E}^{t,X(t)}[h(X(T))]] =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} h(y)P(t,x;T,dy)P(0,\xi;t,dx) = \int\limits_{\mathbb{R}} h(y)P(0,\xi;T,dy) = \mathsf{E}[g(0,X(0))],$$

следовательно, математическое ожидание правой части представления (8) равно нулю. Тогда, согласно стохастической теореме Фубини, справедливо равенство

$$\int_0^t \mathsf{E}\Big[g'_s(s,X(s-)) + a(X(s-))g'_x(s,X(s-)) + \frac{1}{2}b^2(X(s-))g''_{xx}(s,X(s-))\Big]ds +$$

$$+\mathsf{E}\Big[\int_0^t \int_{|q|\geqslant 1} [g(s,X(s-)+K(X(s-),q)) - g(s,X(s-))]N(ds,dq)\Big] +$$

$$+\mathsf{E}\Big[\int_0^t b(X(s-))g'_x(s,X(s-))\,dW(s)\Big] +$$

$$+\mathsf{E}\Big[\int_0^t \int_{|q|<1} [g(s,X(s-)+F(X(s-),q)) - g(s,X(s-))]\widetilde{N}(ds,dq)\Big] +$$

$$+\int_0^t \mathsf{E}\Big[\int_{|q|<1} [g(s,X(s-)+F(X(s-),q)) - g(s,X(s-)) - F(X(s-),q)g'_x(s,X(s-))]\nu(dq)\Big]ds = 0.$$

В силу мартингальности винеровского процесса и меры $\widetilde{N}$ третье и четвёртое слагаемые в этом равенстве нулевые. Воспользовавшись следующим свойством пуассоновской случайной меры N:

$$\mathsf{E}\Big[\int_A f(q)N(ds,dq)\Big] = ds\int_A f(q)\nu(dq), \quad f\in L_1(A),$$

получим

$$\int_0^t \mathsf{E}\Big[g'_s(s,X(s-)) + a(X(s-))g'_x(s,X(s-)) + \frac{1}{2}b^2(X(s-))g''_{xx}(s,X(s-)) +$$

$$+\int_{|q|\geqslant 1} [g(s,X(s-)+K(X(s-),q)) - g(s,X(s-))]\nu(dq) +$$

$$+\int_{|q|<1} [g(s,X(s-)+F(X(s-),q)) - g(s,X(s-)) - F(X(s-),q)g'_x(s,X(s-))]\nu(dq)\Big]ds = 0.$$

В силу произвольности $t\in[0,T]$ отсюда следует, что подынтегральная функция равна нулю при любом $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$:

$$\mathsf{E}\Big[g'_s(s,X(s-)) + a(X(s-))g'_x(s,X(s-)) + \frac{1}{2}b^2(X(s-))g''_{xx}(s,X(s-)) +$$

$$+\int_{|q|\geqslant 1} [g(s,X(s-)+K(X(s-),q)) - g(s,X(s-))]\nu(dq) +$$

$$+\int_{|q|<1} [g(s,X(s-)+F(X(s-),q)) - g(s,X(s-)) - F(X(s-),q)g'_x(s,X(s-))]\nu(dq)\Big] = 0.$$

Если эволюция процесса началась в момент времени $t\in[0,T]$ из точки $X(t)=x\in\mathbb{R}$, то последнее равенство переходит в искомое обратное уравнение (7). Теорема доказана.

3. Подход через предельные соотношения. Этот подход восходит к идеям А.Н. Колмогорова [18] для диффузионных процессов и в нём используются три предельные величины [8, с. 56].

Пусть $p(t,x;T,y)$ – плотность переходной вероятности*) процесса $\{X(t):t\geqslant 0\}$ и пусть при любом $\varepsilon>0$ существуют конечные пределы

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|z-x|<\varepsilon}(z-x)p(t,x;t+\Delta t,z)\,dz=A(t,x)+O(\varepsilon), \tag{9}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|z-x|<\varepsilon}(z-x)^2p(t,x;t+\Delta t,z)\,dz=B(t,x)+O(\varepsilon), \tag{10}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p(t,x;t+\Delta t,z)}{\Delta t}=G(t,x;z)\quad \text{при условии}\quad |z-x|>\varepsilon. \tag{11}$$

Тогда плотность $p(t,x;T,y)$ удовлетворяет обратному уравнению:

$$-p'_t(t,x;T,y)=A(t,x)p'_x(t,x;T,y)+\frac{1}{2}B(t,x)p''_{xx}(t,x;T,y)+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}}(p(t,z;T,y)-p(t,x;T,y))G(t,x;z)\,dz,\quad t\in(0,T). \tag{12}$$

Сходимость в равенствах (9), (10) предполагается равномерной по x и t, а в равенстве (11) – по x, z и t. Отметим, что в случае диффузионных процессов предел (11) равен нулю – этот предел служит характеристикой непрерывности/разрывности процесса.

В качестве примера, иллюстрирующего этот подход, получим обратное уравнение для плотности переходной вероятности процесса

$$X(t)=at+bW(t)+c\mathbf{N}(t),\quad t\geqslant 0, \tag{13}$$

где $W=\{W(t):t\geqslant 0\}$ – стандартный винеровский процесс, $\{\mathbf{N}(t):t\geqslant 0\}$ – пуассоновский процесс с интенсивностью λ, а величины a, b, c – константы. Будем считать, что винеровский и пуассоновский процессы заданы независимо друг от друга, и найдём плотность распределения вероятностей процесса (13) как свёртку плотностей распределения каждого слагаемого. Плотность вырожденного распределения является δ-функцией:

$$p_{a\tau}(z)=\delta(z-a\tau),$$

плотность распределения вероятностей случайной величины $bW(\tau)$ имеет вид

$$p_{bW(\tau)}(z)=\frac{1}{b\sqrt{2\pi\tau}}e^{-z^2/(2\tau b^2)},$$

а плотность распределения случайной величины $c\mathbf{N}(\tau)$ – вид

$$p_{c\mathbf{N}(\tau)}(z)=\sum_{k=0}^{[z/c]}\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}\delta(z-ck)e^{-\lambda\tau}.$$

Поэтому для плотности распределения вероятностей случайной величины $X(\tau)$ получаем

$$p_{X(\tau)}(z)=p_{a\tau}*p_{bW(\tau)}*p_{c\mathbf{N}(\tau)}(z)=\frac{e^{-\lambda\tau}}{b\sqrt{2\pi\tau}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}e^{-(z-ck-a\tau)^2/(2\tau b^2)}.$$

*) Далее для краткости вместо “плотность функции переходной вероятности” будем писать “плотность” везде, где это не вносит двусмысленности.

Пользуясь тем, что рассматриваемые процессы и, как следствие, процесс (13) однородны во времени и пространстве: $p(t,x;T,y) = p(0,0;T-t,y-x)$, а функция $p(0,0;T-t,y-x)$ представляет собой плотность распределения вероятностей $p_{X(T-t)}(y-x)$, будем иметь

$$p(t,x;T,y) = \frac{e^{-\lambda(T-t)}}{b\sqrt{2\pi(T-t)}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda(T-t))^k}{k!}e^{-(y-x-ck-a(T-t))^2/(2b^2(T-t))}.$$

Вычисляя для процесса X его локальные моменты (9) и (10) и функцию $G(t,x;z)$, приходим к формулам

$$A(t,x) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|z-x|<\varepsilon}(z-x)p(t,x;t+\Delta t,z)\,dz = \begin{cases} a, & \varepsilon \leqslant c,\\ a+c\lambda, & \varepsilon > c,\end{cases}$$

$$B(t,x) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|z-x|<\varepsilon}(z-x)^2p(t,x;t+\Delta t,z)\,dz = \begin{cases} b^2, & \varepsilon \leqslant c,\\ b^2+c^2\lambda, & \varepsilon > c,\end{cases}$$

$$G(t,x;z) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{p(t,x;t+\Delta t,z)}{\Delta t} = \begin{cases} \lambda\delta(z-x-c), & \varepsilon \leqslant c,\\ 0, & \varepsilon > c.\end{cases}$$

Найденные предельные величины позволяют записать обратное уравнение (12) для функции $p(t,x;T,y)$ – плотности процесса (13):

$$-p'_t(t,x;T,y) = ap'_x(t,x;T,y) + \frac{b^2}{2}p''_{xx}(t,x;T,y) + \lambda(p(t,x+c;T,y) - p(t,x;T,y)). \qquad (14)$$

В рассмотренном примере плотность процесса X является дифференцируемой только в смысле обобщённых функций. Поскольку в этом случае при малых ε $(\varepsilon \leqslant c)$ функции $A(t,x)$ и $B(t,x)$ постоянны, а $G(t,x;\cdot)$ является δ-функцией, то и само уравнение (14) допускает формализацию в обобщённом смысле; при этом в качестве основных функций достаточно рассмотреть дважды непрерывно дифференцируемые функции переменного x с компактным носителем. Формализовать уравнение (12) в общем случае сложнее, в частности, из-за поведения функций $A(t,x)$ и $B(t,x)$, которые не являются мультипликаторами в этом пространстве основных функций.

Замечание. Обсуждаемый в этом пункте подход позволяет получить, наряду с обратным, и прямое уравнение для плотности переходной вероятности. Пусть при любом $\varepsilon > 0$ равномерно по x и t существуют пределы (9), (10) и равномерно по x, z и t предел (11). Тогда плотность $p(t,x;T,y)$ удовлетворяет прямому уравнению [8, с. 50]

$$p'_T(t,x;T,y) = -\frac{\partial}{\partial y}(A(T,y)p(t,x;T,y)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(B(T,y)p(t,x;T,y)) +$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}}(G(T,z;y)p(t,x;T,z) - G(T,y;z)p(t,x;T,y))\,dz, \quad 0 \leqslant t < T.$$

Это уравнение допускает формализацию в обобщённом смысле на тех же основных функциях, что и уравнение (14), так как $A(T,y)$ и $B(T,y)$ являются мультипликаторами в пространстве непрерывных функций с компактным носителем.

4. Полугрупповой подход. Обсудим ещё один подход к получению детерминированного уравнения, порождённого стохастическим уравнением (3). Этот подход связан с теорией полугрупп операторов и преобразованием Фурье.

Обозначим через $B_b(\mathbb{R}^n)$ пространство функций, ограниченных и измеримых по Борелю на $\mathbb{R}^n$, через $C_0(\mathbb{R}^n)$ – пространство непрерывных на $\mathbb{R}^n$ функций f, для которых $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Пусть $\mathcal{D}$ – пространство Л. Шварца на $\mathbb{R}^n$, а $\mathcal{F}[f](\sigma) = \widehat{f}(\sigma)$ и $\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \check{f}(x)$ – прямое и обратное преобразования Фурье соответственно. Введём несколько понятий.

Определение 2 [10, с. 2]. Однопараметрическое семейство $S = \{S(t) : t \geqslant 0\}$ линейных операторов в пространстве $B_b(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих для любых $t, s \geqslant 0$ и $f \in B_b(\mathbb{R}^n)$ условиям:

(S1) $S(t+s)f = S(t)S(s)f$ (полугрупповое свойство) и $S(0) = \mathrm{id}$;

(S2) если $f \geqslant 0$, т.е. $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, то $S(t)f \geqslant 0$ (сохранение положительности);

(S3) если $f \leqslant 1$, т.е. $f(x) \leqslant 1$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, то $S(t)f \leqslant 1$ (субмарковское свойство);

(S4) $S(t)1 = 1$ (свойство консервативности),

называется *марковской полугруппой*. Семейство S, удовлетворяющее условиям (S1)–(S3), называется *субмарковской полугруппой*.

Если $X = \{X(t) : t \geqslant 0\}$ – однородный марковский процесс в $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ с переходной функцией $P(s, x; t, A)$, то семейство операторов

$$S(t)f(x) := \mathsf{E}^{0,x}[f(X(t))] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)P(0, x; t, dy), \quad f \in B_b(\mathbb{R}^n), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{15}$$

образует полугруппу в пространстве $B_b(\mathbb{R}^n)$, называемую *переходной полугруппой процесса* X, которая является марковской. В частности, это верно для процесса X, являющегося решением задачи (3).

Переходная полугруппа даёт различные характеристики текущего положения процесса $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ при известном начальном положении $X(0) = x$. Напомним, что функция $g(t, x)$, определённая равенством (6), является характеристикой положения процесса $X(t) = x$ при известном конечном положении $X(T)$. Из сравнения функции (6) и семейства (15) становится понятным, почему интегро-дифференциальное уравнение для функции $g(t, x)$, описывающей историю развития процесса до момента времени T, является обратным и задача Коши для него естественным образом получается обратной, в то время как эволюционное уравнение, которое будет получено далее для функции $u(t, x) := S(t)f(x)$, является прямым с начальным условием $f(x)$.

Подклассом введённых полугрупп являются *феллеровские полугруппы* – субмарковские полугруппы, отображающие $C_0(\mathbb{R}^n)$ в $C_0(\mathbb{R}^n)$ и сильно непрерывные в нуле: $\|S(t)f - f\| \to 0$ при $t \to 0$ для любой $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Соответствующие им однородные во времени марковские случайные процессы называются *феллеровскими*.

Особое место среди переходных полугрупп занимают полугруппы, которые удаётся представить в виде операторов свёртки:

$$S(t)f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\eta_t(x - dy), \quad f \in B_b(\mathbb{R}^n), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0. \tag{16}$$

Такой вид операторов открывает возможности для эффективного применения преобразования Фурье. Возможность представления (16) определяется структурой функции переходной вероятности, а именно, её инвариантностью относительно сдвигов фазового пространства, что соответствует свойству полугруппы быть инвариантной относительно пространственных сдвигов. Следующая цепочка утверждений:

1) непрерывный линейный оператор S, действующий из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ в $C(\mathbb{R}^n)$, является оператором свёртки (с ядром $\eta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$) тогда и только тогда, когда он инвариантен относительно сдвигов: $\tau_y(Sf) = S(\tau_y f)$, где $\tau_y f(x) := f(x - y)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ [19, с. 184];

2) (феллеровская) переходная полугруппа процесса X инвариантна относительно сдвигов тогда и только тогда, когда X – процесс Леви [10, с. 35];

3) класс однородных марковских процессов, переходная функция которых инвариантна относительно сдвигов фазового пространства (свойство пространственной аддитивности:

$$P(s, x; t, dy) = P(s, 0; t, dy - x)),$$

совпадает с классом однородных процессов с независимыми приращениями [20, с. 263], приводит нас к рассмотрению однородных (по времени и пространству) марковских процессов с независимыми приращениями – к процессам Леви, для которых ядро оператора (16) определяется равенством

$$\eta_t(x-dy):=P(0,x;t,dy)=P(0,0;t,dy-x).$$

Обозначив $\mu_t:=\mathcal{L}(X(t))$, $t\geqslant 0$, закон распределения для процесса, стартовавшего из нуля п.н., получим более удобное для дальнейших рассуждений представление

$$\eta_t(-dy)=\mu_t(dy)=P(0,0;t,dy). \tag{17}$$

Известно, что закон распределения μ_t стохастически непрерывного процесса с независимыми приращениями, стартующего из нуля п.н. (т.е. процесса со свойствами (L1), (L2), (L4)), является безгранично делимым [16, с. 4]: $\mu_t=(\mu_{t/n})^{*n}$ или, в терминах преобразования Фурье, $\widehat{\mu_t}=(\widehat{\mu_{t/n}})^n$.

Характеристическая функция безгранично делимого распределения μ, согласно формуле Леви–Хинчина, имеет вид

$$2\pi\check{\mu}(\sigma)=2\pi\mathcal{F}^{-1}[\mu]=\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{i\langle\sigma,y\rangle}\mu(dy)=e^{\psi(\sigma)},\quad \sigma\in\mathbb{R}^n, \tag{18}$$

где

$$\psi(\sigma)=i\langle a,\sigma\rangle-\frac{1}{2}\langle\sigma,B\sigma\rangle+\int\limits_{\mathbb{R}^n}(e^{i\langle\sigma,y\rangle}-1-i\langle\sigma,y\rangle\cdot\chi_{|y|\leqslant 1}(y))\nu(dy), \tag{19}$$

$a\in\mathbb{R}^n$, B – симметричная неотрицательно определённая $n\times n$-матрица, ν – мера на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условиям $\nu(\{0\})=0$ и $\int_{\mathbb{R}^n}(|y|^2\wedge 1)\nu(dy)<\infty$. Тройка (a,B,ν) определяется мерой μ однозначно. Верно и обратное: для любой тройки (a,B,ν), удовлетворяющей приведённым условиям, существует безгранично делимая мера μ с характеристической функцией (18), (19).

Таким образом, если X – стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями, стартующий из нуля п.н., то его закон распределения μ_t в каждый момент времени характеризуется тройкой $(a(t),B(t),\nu_t)$, и, тем самым, процесс определяется набором троек $\{(a(t),B(t),\nu_t):t\geqslant 0\}$. Если при этом процесс X является однородным во времени (свойство (L3)), то тройка также однородна: $(a(t),B(t),\nu_t)=(ta,tB,t\nu)$, и характеристическая функция принимает вид

$$2\pi\check{\mu}_t(\sigma)=\mathsf{E}[e^{i\langle\sigma,X(t)\rangle}]=e^{t\psi(\sigma)},$$

где функция $\psi(\sigma)$ определена равенством (19), т.е. процесс Леви полностью характеризуется тройкой (a,B,ν).

Вернёмся к полугруппам, соответствующим процессам Леви, и выведем эволюционное уравнение для характеристики вида $u(t,x)=S(t)f(x)$. Для этого найдём инфинитезимальный генератор переходной полугруппы

$$Af(x):=\lim_{t\to 0}\frac{S(t)f(x)-f(x)}{t}$$

с помощью преобразования Фурье, следуя [11, с. 59]. Чтобы обеспечить существование прямого и обратного преобразований Фурье, сначала для упрощения будем считать, что $f\in\mathcal{D}$. Из представления (16) следует, что

$$\mathcal{F}[S(t)f(x)]=\mathcal{F}[f*\eta_t]=\widehat{f}(\sigma)\widehat{\eta_t}(\sigma),$$

где в силу равенства (17)

$$\widehat{\eta}_t(\sigma) = \mathsf{E}[e^{-i\langle\sigma, X(t)-x\rangle}] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle\sigma,y\rangle}\eta_t(dy) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle\sigma,z\rangle}\mu_t(dz) = 2\pi\check{\mu}_t(\sigma).$$

Тогда

$$Af(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\lim_{t\to 0}\frac{\check{\mu}_t(\sigma)-1}{t}\widehat{f}(\sigma)\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\lim_{t\to 0}\frac{e^{t\psi(\sigma)}-1}{t}\widehat{f}(\sigma)\right] = \mathcal{F}^{-1}[\psi(\sigma)\widehat{f}(\sigma)].$$

Это представление показывает, что генератор переходной полугруппы процесса Леви является псевдодифференциальным оператором с символом $\psi(\sigma)$, определённым в (19). Отсюда, пользуясь свойствами преобразования Фурье, находим генератор полугруппы:

$$Af(x) = \langle a, \nabla f(x)\rangle + \frac{1}{2}\operatorname{div} B\nabla f(x) + \int\limits_{\mathbb{R}^n}(f(x+y) - f(x) - \langle\nabla f(x), y\chi_{|y|\leqslant 1}(|y|)\rangle)\nu(dy).$$

Доказано [9, с. 208], что $C_0^2(\mathbb{R}^n) \subset \operatorname{Dom}(A)$ и полученное представление имеет место для любого $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$.

Если процесс X не является процессом Леви, но является однородным марковским (в частности, процессом типа Леви), то при некоторых дополнительных условиях генератор соответствующей полугруппы операторов $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ также может быть найден из формулы Леви–Хинчина при помощи обратного преобразования Фурье. Именно [10, с. 47], если A – генератор феллеровской полугруппы и $\mathcal{D} \subset \operatorname{Dom}(A)$, то

$$Af(x) = \langle c(x), f(x)\rangle + \langle a(x), \nabla f(x)\rangle + \frac{1}{2}\operatorname{div} B(x)\nabla f(x) + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^n}(f(x+y) - f(x) - \langle\nabla f(x), y\chi_{|y|\leqslant 1}(|y|)\rangle)\nu(x, dy). \tag{20}$$

Таким образом, для вероятностной характеристики

$$u(t,x) = S(t)f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)P(0,0;t,dy-x), \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

процесса X имеет место

Предложение 1. *Пусть X – феллеровский процесс и $\mathcal{D} \subset \operatorname{Dom}(A)$, тогда для любой $f \in \operatorname{Dom}(A)$ функция $u(t,x)$ является решением задачи Коши*

$$u_t'(t,x) = Au(t,x), \quad u(0,x) = f(x), \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

с оператором A, определённым равенством (20).

В заключение, используя полугрупповую технику, докажем

Предложение 2. *Пусть функция $g = g(t,x)$, $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, определена равенством (6). Если процесс X является феллеровским, то для любого $h \in \operatorname{Dom}(A)\bigcap C_0(\mathbb{R}^n)$ функция g дважды непрерывно дифференцируема по x.*

Доказательство. В силу однородности процесса по времени функцию g можно представить как действие полугруппы:

$$g(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} h(y)P(t,x;T,dy) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} h(y)P(0,x;T-t,dy) = S(T-t)h(x), \quad h \in C_0(\mathbb{R}^n).$$

Из коммутируемости полугруппы со своим генератором на его области определения следует, что $g \in \mathrm{Dom}\,(A)$ при $h \in \mathrm{Dom}\,(A)$: $Ag(t,x) = AS(T-t)h(x) = S(T-t)Ah(x)$. Осталось заметить, что функции, входящие в область определения A, дважды непрерывно дифференцируемы. Предложение доказано.

Таким образом, в работе

на основании формулы Ито выведено интегро-дифференциальное уравнение для функции g, определяемой формулой (6);

основываясь на подходе, использующем предельные соотношения (9)–(11), получены прямое и обратное уравнения для плотности переходной вероятности, которые по сути являются обобщёнными;

на основе полугруппового подхода получена прямая задача Коши для вероятностных характеристик типа $S(t)f(x)$;

с использованием полугрупповой техники показано, что условие дифференцируемости по x функции $g(t,x)$ можно перенести на функцию $h(x)$ и, следовательно, не требовать дифференцируемости функции переходной вероятности $P(t,x;T,dy)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке постановления № 211 Правительства Российской Федерации (контракт № 02.A03.21.0006).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dubkov A.A., Spagnolo B., Uchaikin V.V.* Lévy flight superdiffusion: an introduction // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2008. V. 18. № 9. P. 2649–2672.
2. *Скороход А.В.* Исследования по теории случайных процессов. Киев, 1961.
3. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, 1968.
4. *Applebaum D.* Lévy Processes and Stochastic Calculus. Cambridge, 2009.
5. *Protter P.E.* Stochastic Integration and Differential Equations. Berlin; Heidelberg, 2005.
6. *Белопольская Я.И.* Стохастические дифференциальные уравнения. Приложения к задачам математической физики и финансовой математики. М., 2018.
7. *Björk T.* Arbitrage Theory in Continuous Time. Oxford, 2009.
8. *Gardiner C.* Stochastic Methods. A Handbook for the Natural and Social Sciences. Berlin; Heidelberg, 2009.
9. *Sato K.-I.* Levy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge, 1999.
10. *Böttcher B., Schilling R., Wang J.* Lévy Matters III. Lévy-Type Processes: Construction, Approximation and Sample Path Properties. Heidelberg; New York, 2013.
11. *Ито К.* Вероятностные процессы. Вып. II. М., 1963.
12. *Kolokoltsov V.N.* Markov Processes, Semigroups and Generators. Berlin; New York, 2011.
13. *Melnikova I.V.* Stochastic Cauchy Problems in Infinite Dimensions. Regularized and Generalized Solutions. London; New York, 2016.
14. *Мельникова И.В., Бовкун В.А., Алексеева У.А.* Решение квазилинейных стохастических задач в абстрактных алгебрах Коломбо // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 12. С. 1653–1663.
15. *Мельникова И.В., Алексеева У.А., Бовкун В.А.* Связь бесконечномерных стохастических задач с задачами для вероятностных характеристик // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 3. С. 191–205.
16. *Sato K.-I.* Basic Results on Levy Processes // Levy Processes Theory and Applications / Eds. O. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch, S. Resnick. New York, 2001.
17. *Kunita H.* Ito's stochastic calculus: its surprising power for applications // Stoch. Proc. and Appl. 2010. V. 120. № 5. P. 622–652.
18. *Колмогоров А.А.* Об аналитических методах в теории вероятностей // Успехи мат. наук. 1938. № 5. С. 5–41.
19. *Рудин У.* Функциональный анализ. М., 1975.
20. *Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А.* Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М., 1987.

Уральский федеральный университет
им. Первого Президента России Б.Н. Ельцина,
г. Екатеринбург

Поступила в редакцию 24.07.2019 г.
После доработки 12.01.2021 г.
Принята к публикации 22.01.2021 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 3, с. 411–427

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.622.2

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СТЯГИВАЮЩЕГО ОБРАМЛЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕЙЛОРА В АЛГОРИТМАХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ В СИСТЕМАХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2021 г. Н. М. Евстигнеев, О. И. Рябков, Д. А. Шульмин

С помощью интервальных моделей Тейлора (ТМ) строятся алгоритмы вычислительного доказательства существования периодических траекторий в системах обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Хотя ТМ позволяют проводить построение гарантированных оценок семейств решений систем ОДУ, но при интегрировании ОДУ на больших временны́х промежутках входящий в ТМ интервальный остаток начинает расти экспоненциально и становится доминирующей частью оценки пучка решений, делая её практически непригодной. Для устранения этого недостатка создатели ТМ К. Макино и М. Берц предложили идею т.н. “стягивающего обрамления”. Мы формализуем исходный алгоритм в рамках принятых нами определений ТМ и предлагаем свою версию “стягивающего обрамления”, более точно приспособленную к задаче вычислительного доказательства существования периодических траекторий.

DOI: 10.31857/S0374064121030110

Введение. Интервальная арифметика (см. монографии [1–5]) представляет собой основной инструмент для проведения доказательных вычислений (ДВ) в математическом и функциональном анализе и теории дифференциальных уравнений. ДВ можно рассматривать как состоявшийся метод современной математики, с помощью которого уже разрешён ряд проблем, решение которых более традиционными методами либо до сих пор не было найдено, либо является крайне трудоёмким (см., например, обзорную статью [6] или статью [7], посвящённую решению 14-й проблемы Смейла методами ДВ). Развитие данной области ускоряется за счёт появления всё более мощных вычислительных систем, с одной стороны, и за счёт создания всё более эффективных алгоритмов ДВ – с другой.

В наших предыдущих работах [8, 9] ДВ рассматривались в качестве инструмента для доказательства существования периодических траекторий в автономных системах ОДУ. Как в наших, так и в работах других авторов, использующих данный подход к системам ОДУ (например, [10]), проводится построение доказательных оценок для решений и семейств решений систем. Для этого могут применяться методы интервального анализа (например, алгоритм Мура [1] или [11]). Однако в [8] мы использовали методы интегрирования ОДУ, основанные на интервальных моделях Тейлора. Модели Тейлора в некотором смысле обобщают интервальную арифметику и изначально применялись именно в задачах построения гарантированных оценок для задачи Коши в [12–15], хотя их применение не ограничено только этим [16]. В [8] мы воспользовались собственной версией формализации ТМ, в большей степени, чем ранее, сводящей алгоритмы ТМ к использованию интервальной арифметики, в том числе для учёта влияния округлений при работе с коэффициентами полиномов. Указанный подход несколько упрощает реализацию ТМ на различных платформах, в т.ч. на архитектуре CUDA [17]. Однако идея метода при этом остаётся прежней.

Использованный в [8] подход к доказательству существования циклов у автономных систем ОДУ, основывающийся на сечениях Пуанкаре, требует построения оценок решения на достаточно большом временно́м промежутке, а именно – на промежутке, равном периоду цикла. Поэтому даже в примере двумерной системы осциллятора Ван дер Поля, рассмотренном в [8], потребовалось использовать ТМ четвёртого порядка для того, чтобы такое доказательство стало возможным. К сожалению, при переходе к системам высокой размерности, которые в конечном итоге и являются предметом нашего рассмотрения, подобные алгоритмы непригодны из-за слишком высокой сложности. В [9] мы попытались обойти эту трудность, воспользовавшись идеями, применяемыми в топологическом подходе к доказательству существования циклов (см., например, работу [10] и ссылки в ней). При использовании этого подхода не требуется исследовать поведение решения на длительном промежутке времени, вместо этого достаточно показать попадание под действием фазового потока всей окрестности цикла в себя за сколь угодно малое время. На практике численные погрешности не позволяют использовать любые сколь угодно малые промежутки времени и практически пригодными оказываются промежутки, имеющие порядок одной десятой периода цикла. Тем не менее, оказывается, что даже такое уменьшение длин рассматриваемых временны́х промежутков позволяет для доказательства существования периодического решения в осцилляторе Ван дер Поля использовать ТМ всего лишь второго порядка, как это было показано в примере [9].

Более того, данный подход сделал практически возможным доказательство существования цикла в маломодовом приближении Галёркина для задачи о течении Колмогорова [17] при использовании ТМ третьего порядка. В указанной работе была рассмотрена аппроксимация с 79-ю гармониками, что требовало решения соответствующей системы ОДУ. Очевидно, что для системы такой размерности снижение степени сложности алгоритма даже на единицу может быть критическим. Однако у топологического подхода есть и свой недостаток – необходимость рассмотрения всей окрестности цикла, а не только её части, пересекающей сечение Пуанкаре. Это приводит к появлению в выражении для сложности алгоритма дополнительного постоянного (не зависящего от размерности системы) множителя. Данный множитель на практике может быть достаточно большим. В [17] мы показываем, что, согласно нашим оценкам, расчётное время, требуемое для проведения доказательства существования цикла в указанной 79-мерной аппроксимации уравнений Навье–Стокса на кластере из 5 GPU GTX Titan Black, составляет порядка одного месяца. При увеличении размерности системы время расчёта вновь выходит за практически разумные границы.

В настоящей работе мы рассматриваем один из алгоритмических способов ускорения ДВ существования периодических решений. Можно заметить, что оценки решений, получаемые с помощью ТМ низкого порядка (например, второго, из примера в [9]), на начальном отрезке времени интегрирования могут быть достаточно близкими к реальным границам пучка решений, что позволяет показать попадание окрестности цикла в себя в топологическом подходе. Однако при дальнейшем интегрировании эти оценки начинают экспоненциально расходиться. Такое, на первый взгляд, странное поведение отмечалось ещё основоположниками идеи ТМ К. Макино и М. Берцем [18]. Его причина заключается в том, что по мере разрастания интервального остатка ТМ начинает вести себя подобно интервальному числу, а алгоритм интегрирования на основе итераций Пикара вырождается в алгоритм Мура. В этой же работе [18] была предложена и идея устранения подобного недостатка, названная авторами *стягивающим обрамлением*. Суть её состоит в том, чтобы после каждого шага интегрирования модифицировать полученную ТМ при помощи специальной процедуры. Эта процедура должна обладать двумя основными свойствами. Во-первых, получающаяся в её результате ТМ должна содержать в себе все точки исходной ТМ. Во-вторых, новая ТМ должна обладать нулевым остатком или остатком с шириной [1, с. 10] порядка машинной точности. На следующем шаге интегрирования используется уже модифицированная ТМ. Данный подход в ряде случаев позволяет избежать экспоненциального роста остатков – см., например, табл. 7.2 в [19].

Структура статьи следующая. В п. 1 напоминаются основные используемые понятия и обозначения из наших предыдущих работ, а также вводится ряд вспомогательных обозначений и алгоритмов. В п. 2 мы формализуем метод [18] в рамках используемых определений и обозначений и предлагаем свою версию алгоритма стягивающего обрамления. В п. 3 приводим полный алгоритм интегрирования ОДУ с помощью ТМ, включающий в себя шаг применения стягивающего обрамления. В п. 4 сравниваются эффективности двух вариантов стягивающего обрамления как между собой, так и с наивным алгоритмом (без обрамления) на примере попытки доказательства существования периодического решения в системе Ван дер Поля с помощью ТМ второго порядка. Наконец, в заключении содержится обсуждение проделанной работы и возможных вариантов её развития.

1. Определения и вспомогательные утверждения. Необходимые для работы с интервальными моделями Тейлора обозначения, определения, утверждения и алгоритмы представлены в [8, 9]. В этом пункте мы напоминаем некоторые наиболее важные из них, а также вводим несколько дополнительных операций над ТМ и соответствующие алгоритмы, которые понадобятся нам далее. Как и в предыдущих наших работах, нотация, относящаяся к интервальной арифметике, в основном следует монографии [4].

Напомним, что множество интервальных чисел обозначается через $\mathbf{R}$. Интервал (интервальное число) $\mathbf{a} \in \mathbf{R}$ имеет нижнюю $L(\mathbf{a})$ и верхнюю $H(\mathbf{a})$ границы, таким образом $\mathbf{a} = [L(\mathbf{a}), H(\mathbf{a})]$. Интервал от числа a, заданного в приближённой арифметике, обозначается через $[a,]$. Любую операцию, выполняемую с машинной точностью (т.е. в приближённой арифметике), обозначаем через $/\cdot/$, а также считаем, что $/0/ = 0$. Для доказательства утверждений 7 и 8 нам понадобится дополнительное предположение о приближённой арифметике: $/0x/ = 0$. Последнее требование выполнено в любой реализации чисел с плавающей точкой.

Для упрощения в дальнейшем записи обозначим через $R_m(n)$ множество m-к $(i_1, \ldots, i_m)$ целых неотрицательных чисел, удовлетворяющих неравенству $i_1 + \ldots + i_m \leqslant n$, а через $S_m(n)$ – равенству $i_1 + \ldots + i_m = n$. Через $\overrightarrow{\mathrm{id}}_X$ обозначается тождественное отображение множества X в себя. Если из контекста понятно, о каком множестве X идёт речь, то индекс в этом обозначении будем опускать.

Напомним также, что *интервальной моделью Тейлора,* или *тейлоровской моделью* (ТМ), степени n от m переменных $(x_1, \ldots, x_m)$ и размерности q называется дуплет $\langle \vec{P}^n(x_1, \ldots, x_m), \vec{\mathbf{I}} \rangle$, где $\vec{P}^n = (P_1^n, \ldots, P_q^n)^{\mathrm{T}}$ – векторный полином размерности q, степень которого не выше n, $\vec{\mathbf{I}} \in \mathbf{R}^q$ – векторный интервал, называемый *остатком.* Различные модели Тейлора обозначаются как ТМ, ТМ_1 и т.д. Если вектор-функция $\vec{f} : M \to \mathbb{R}^q$ $(M = [-1, 1]^m)$ удовлетворяет ТМ (т.е. для любых $\vec{x} \in M$ и $j = \overline{1, q}$ имеет место включение $f_j(\vec{x}) \in [P_j^n(\vec{x}) + L(\mathbf{I}_j), P_j^n(\vec{x}) + H(\mathbf{I}_j)]$), то это обозначается как $\text{ТМ}(\vec{f})$. Внешняя оценка тейлоровской модели обозначается $\mathcal{EB}(\text{ТМ})$, она обладает следующим свойством: если выполнено $\text{ТМ}(\vec{f})$, то $\vec{f}(\vec{x}) \in \mathcal{EB}(\text{ТМ})$ для каждого $\vec{x} \in M$. Подробнее см. работу [8], в которой также введены основные арифметические операции над ТМ (сложение, вычитание, умножение). В работе [9] дополнительно вводятся операции умножения ТМ на интервал, сложение ТМ с интервальным вектором и умножение на интервальную матрицу.

При изложении материала этого и следующего пунктов будем использовать интервальные модели Тейлора $\text{ТМ}_1 = \langle \vec{P}^{1,n}(\vec{x}), \vec{\mathbf{I}}^1 \rangle$, $\text{ТМ}_2 = \langle \vec{P}^{2,n}(\vec{x}), \vec{\mathbf{I}}^2 \rangle$, $\text{ТМ}_3 = \langle \vec{P}^{3,n}(\vec{x}), \vec{\mathbf{I}}^3 \rangle$, $\text{ТМ}_4 = \langle \vec{P}^{4,n}(\vec{x}), \vec{\mathbf{I}}^4 \rangle$ и $\text{ТМ} = \langle \vec{P}^n(\vec{x}), \vec{\mathbf{I}} \rangle$ и коэффициенты их полиномов обозначать через $\vec{a}_{n_1,\ldots,n_m}$, $\vec{b}_{n_1,\ldots,n_m}$, $\vec{c}_{n_1,\ldots,n_m}$, $\vec{d}_{n_1,\ldots,n_m}$ и $\vec{e}_{n_1,\ldots,n_m}$ соответственно. Некоторые алгоритмы будут принимать на вход q натуральных чисел $(i_1, \ldots, i_q) \in \mathbb{N}^q$, будем считать, что эти числа находятся в диапазоне $2 \leqslant i_j \leqslant m$ и различны, точнее, справедливы неравенства $i_1 < i_2 < \ldots < i_q$. Данное соглашение считаем выполненным также и для входа алгоритма 6 в п. 3.

Начнём с расширения списка введённых в предыдущих статьях базовых операций над ТМ, а именно, введём операции разности ТМ и векторного интервала, суммы и разности ТМ и (неинтервального) вектора, умножения ТМ на (неинтервальный) скаляр и (неинтервальную) матрицу.

Алгоритм 1. Вход $(\text{ТМ}_1, \vec{\mathbf{y}})$. Выход (ТМ).

Полагаем

$$\vec{e}_{0,\ldots,0} := /\vec{a}_{0,\ldots,0} - \overline{\vec{\mathbf{y}}}/,$$

$$\vec{\mathbf{I}} := \vec{\mathbf{I}}_1 + ([\vec{a}_{0,\ldots,0},] - \vec{\mathbf{y}} - [\vec{e}_{0,\ldots,0},]).$$

Для $(n_1, \ldots, n_m) \neq (0, \ldots, 0)$ полагаем

$$\vec{e}_{n_1,\ldots,n_m} := \vec{a}_{n_1,\ldots,n_m}.$$

Определение 1. Под *разностью* между TM_1 размерности q и интервалом $\vec{\mathbf{y}}$ размерности q будем понимать результат работы алгоритма 1 и обозначать её как $\mathrm{TM}_1 - \vec{\mathbf{y}}$.

Утверждение 1. *Пусть* $\mathrm{TM}_1(\vec{f})$, $\vec{y} \in \vec{\mathbf{y}}$ *и* $\mathrm{TM} = \mathrm{TM}_1 - \vec{\mathbf{y}}$. *Тогда справедливо* $\mathrm{TM}(\vec{f} - \vec{y})$.

Утверждение непосредственно следует из того, что вектор-функция $\vec{f}$ удовлетворяет TM_1.

Следующие операции между ТМ и объектами в приближённой арифметике (скаляр, вектор, матрица) являются по существу чуть более краткой записью операций между ТМ и соответствующими точеными интервалами и не требуют отдельных алгоритмов.

Определение 2. *Произведением* TM_1 и числа u, заданного в приближённой арифметике, будем называть произведение $\mathrm{TM}_1[u,]$ и обозначать его как $\mathrm{TM}_1 u$ или $u\mathrm{TM}_1$.

Утверждение 2. *Пусть* $\mathrm{TM}_1(\vec{f})$, $\mathrm{TM} = u\mathrm{TM}_1$. *Тогда выполняется* $\mathrm{TM}(u\vec{f})$.

Определение 3. *Суммой* TM_1 размерности q и вектора $\vec{y}$ размерности q, заданного в приближённой арифметике, будем называть сумму $\mathrm{TM}_1 + [\vec{y},]$ и обозначать её как $\mathrm{TM}_1 + \vec{y}$ или $\vec{y} + \mathrm{TM}_1$.

Утверждение 3. *Пусть* $\mathrm{TM}_1(\vec{f})$, $\mathrm{TM} = \vec{y} + \mathrm{TM}_1$. *Тогда имеет место* $\mathrm{TM}(\vec{y} + \vec{f})$.

Определение 4. *Разностью* между TM_1 размерности q и вектором $\vec{y}$ размерности q, заданным в приближённой арифметике, будем называть разность $\mathrm{TM}_1 - [\vec{y},]$ и обозначать её как $\mathrm{TM}_1 - \vec{y}$.

Утверждение 4. *Пусть* $\mathrm{TM}_1(\vec{f})$, $\mathrm{TM} = \mathrm{TM}_1 - \vec{y}$. *Тогда справедливо* $\mathrm{TM}(\vec{f} - \vec{y})$.

Определение 5. *Произведением* TM_1 размерности q и матрицы $W \in \mathbb{R}^{q\times q}$, заданной в приближённой арифметике, будем называть произведение $[W,]\mathrm{TM}_1$ и обозначать его как $W\mathrm{TM}_1$.

Утверждение 5. *Пусть* $\mathrm{TM}_1(\vec{f})$, $\mathrm{TM} = W\mathrm{TM}_1$. *Тогда выполняется* $\mathrm{TM}(W\vec{f})$.

Доказательство утверждений 2–5 следует непосредственно из аналогичных свойств операций ТМ с интервалами (утверждение 1 данной статьи и утверждения 2–4 из [9]) и элементарного свойства точечного интервала $u \in [u,]$.

Дополнительно введём новый специальный скалярный интервал $\mathbf{B}^{mon}_{n_1,\ldots,n_m}$. Основное его свойство следующее: $x_1^{n_1}x_2^{n_s}\ldots x_m^{n_m} \in \mathbf{B}^{mon}_{n_1,\ldots,n_m}$ при $\vec{x} \in M$. Это свойство выполнено, если, например, положить $\mathbf{B}^{mon}_{n_1,\ldots,n_m}$ равным $[-1,1]$ для любых $n_1,\ldots,n_m$. Однако оценку можно несколько улучшить, положив $\mathbf{B}^{mon}_{0,\ldots,0} = [1,1]$ и оставив $\mathbf{B}^{mon}_{n_1,\ldots,n_m}$ равным $[-1,1]$ при $(n_1,\ldots,n_m) \neq (0,\ldots,0)$. Конкретный выбор при соблюдении указанного включения не влияет на доказательства свойств ТМ, но изменяет оценки, получаемые при практическом применении алгоритмов.

В п. 2 при формализации алгоритма из [18] нам понадобится ранее не определённая операция дифференцирования полиномиальной части интервальной модели Тейлора, в результате которой получается новая ТМ.

Алгоритм 2. Вход $(\vec{P}^{1,n}(\vec{x}), k)$. Выход $(\mathrm{TM} = \langle \vec{P}^n(\vec{x}), \vec{\mathbf{I}}\rangle)$.

Положим

$$\vec{e}_{n_1,\ldots,n_k,\ldots,n_m} := \begin{cases} 0, & (n_1,\ldots,n_m) \in S_m(n), \\ /(n_k+1)\vec{a}_{n_1,\ldots,n_k+1,\ldots,n_m}/, & (n_1,\ldots,n_m) \in R_m(n-1), \end{cases}$$

$$\vec{\mathbf{I}} := \sum_{(n_1,\ldots,n_m)\in R_m(n-1)} \mathbf{B}^{mon}_{n_1,\ldots,n_m}([(n_k+1),][\vec{a}_{n_1,\ldots,n_k+1,\ldots,n_m},] - [\vec{e}_{n_1,\ldots,n_k,\ldots,n_m},]).$$

Определение 6. Под операцией ТМ-*дифференцирования* полинома $\vec{P}^{1,n}(\vec{x})$ по переменной x_k будем понимать результат работы алгоритма 2 и обозначать её как $(\partial_{\mathrm{TM}}\vec{P}^{1,n}(\vec{x})/\partial x_k)$.

Утверждение 6. *Пусть* ТМ *является* ТМ-*производной полинома* $\vec{P}^{1,n}(\vec{x})$ *по переменной* x_k. *Тогда имеет место* $\mathrm{TM}(\partial\vec{P}^{1,n}(\vec{x})/\partial x_k)$.

Доказательство. Пусть $\partial\vec{P}^{1,n}(\vec{x})/\partial x_k : M \to \mathbb{R}^q$, где $M \triangleq [-1,1]^m \subset \mathbb{R}^m$.

Утверждение, что имеет место $\mathrm{TM}(\partial \vec{P}^{1,n}(\vec{x})/\partial x_k)$, равносильно тому, что для любых вектора $\vec{x} \in M$ и числа $j \in \{1, \ldots, q\}$ справедливо неравенство

$$P_j^n(\vec{x}) + L(\mathbf{I_j}) \leqslant \frac{\partial P_j^{1,n}}{\partial x_k}(\vec{x}) \leqslant P_j^n(\vec{x}) + H(\mathbf{I_j}). \tag{1}$$

Покажем справедливость этого неравенства.

Для любых вектора $\vec{x} \in M$ и числа $j \in \{1, \ldots, q\}$ имеем

$$P_j^{1,n}(\vec{x}) = \sum_{(n_1,\ldots,n_m)\in R_m(n)} \{\vec{a}_{n_1,\ldots,n_m}\}_j x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m},$$

$$P_j^{n}(\vec{x}) = \sum_{(n_1,\ldots,n_m)\in R_m(n)} \{\vec{e}_{n_1,\ldots,n_m}\}_j x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m},$$

$$\frac{\partial P_j^{1,n}(\vec{x})}{\partial x_k} = \sum_{(n_1,\ldots,n_m)\in R_m(n-1)} (n_k+1)\{\vec{a}_{n_1,\ldots,n_k+1,\ldots,n_m}\}_j x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m}.$$

Учитывая, что согласно алгоритму при $(n_1, \ldots, n_m) \in S_m(n)$ коэффициенты $\vec{e}_{n_1,\ldots,n_k,\ldots,n_m}$ равны нулю, представим производную полинома $\vec{P}^{1,n}(\vec{x})$ по переменной x_k в следующем виде:

$$\frac{\partial P_j^{1,n}(\vec{x})}{\partial x_k} = P_j^n(\vec{x}) - P_j^n(\vec{x}) + \frac{\partial P_j^{1,n}(\vec{x})}{\partial x_k} = P_j^n(\vec{x}) - \sum_{(n_1,\ldots,n_m)\in R_m(n-1)} \{\vec{e}_{n_1,\ldots,n_m}\}_j x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m} +$$

$$+ \sum_{(n_1,\ldots,n_m)\in R_m(n-1)} (n_k+1)\{\vec{a}_{n_1,\ldots,n_k+1,\ldots,n_m}\}_j x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m} =$$

$$= P_j^n(\vec{x}) + \sum_{(n_1,\ldots,n_m)\in R_m(n-1)} ((n_k+1)\{\vec{a}_{n_1,\ldots,n_k+1,\ldots,n_m}\}_j - \{\vec{e}_{n_1,\ldots,n_m}\}_j) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m}. \tag{2}$$

Так как

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m} \in \mathbf{B}^{mon}_{n_1,\ldots,n_m}, \quad (n_k+1) \in [(n_k+1),],$$

$$\{\vec{a}_{n_1,\ldots,n_k+1,\ldots,n_m}\}_j \in [\{\vec{a}_{n_1,\ldots,n_k+1,\ldots,n_m}\}_j,], \quad \{\vec{e}_{n_1,\ldots,n_m}\}_j \in [\{\vec{e}_{n_1,\ldots,n_m}\}_j,],$$

то, согласно основной теореме интервального анализа, справедливо следующее включение:

$$\sum_{(n_1,\ldots,n_m)\in R_m(n-1)} ((n_k+1)\{\vec{a}_{n_1,\ldots,n_k+1,\ldots,n_m}\}_j - \{\vec{e}_{n_1,\ldots,n_m}\}_j) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m} \in$$

$$\in \sum_{(n_1,\ldots,n_m)\in R_m(n-1)} \mathbf{B}^{mon}_{n_1,\ldots,n_m}([(n_k+1),][\{\vec{a}_{n_1,\ldots,n_k+1,\ldots,n_m}\}_j,] - [\{\vec{e}_{n_1,\ldots,n_m}\}_j,]).$$

Из определения ТМ-дифференцирования полинома вытекает, что

$$\mathbf{I}_j = \sum_{(n_1,\ldots,n_m)\in R_m(n-1)} \mathbf{B}^{mon}_{n_1,\ldots,n_m}([(n_k+1),][\{\vec{a}_{n_1,\ldots,n_k+1,\ldots,n_m}\}_j,] - [\{\vec{e}_{n_1,\ldots,n_m}\}_j,]),$$

поэтому для любых вектора $\vec{x} \in M$ и числа $j \in \{1, \ldots, q\}$ получаем оценки

$$\sum_{(n_1,\ldots,n_m)\in R_m(n-1)} ((n_k+1)\{\vec{a}_{n_1,\ldots,n_k+1,\ldots,n_m}\}_j - \{\vec{e}_{n_1,\ldots,n_m}\}_j) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m} \geqslant L(\mathbf{I}_j), \tag{3}$$

$$\sum_{(n_1,\ldots,n_m)\in R_m(n-1)} ((n_k+1)\{\vec{a}_{n_1,\ldots,n_k+1,\ldots,n_m}\}_j - \{\vec{e}_{n_1,\ldots,n_m}\}_j)x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_m^{n_m} \leqslant H(\mathbf{I}_j). \tag{4}$$

Из соотношений (2)–(4) следуют неравенства

$$\frac{\partial P_j^{1,n}}{\partial x_k}(\vec{x}) \geqslant P_j^n(\vec{x}) + L(\mathbf{I}_j), \quad \frac{\partial P_j^{1,n}}{\partial x_k}(\vec{x}) \leqslant P_j^n(\vec{x}) + H(\mathbf{I}_j),$$

которые равносильны неравенству (1). Утверждение доказано.

Приведём теперь теорему из [18], сформулировав её в терминах и обозначениях, используемых в настоящей статье. Эта теорема является основой соответствующего метода стягивающего обрамления.

Теорема 1. *Пусть вектор-функции* $\vec{f}(\vec{z})$, $\vec{g}(\vec{z})$ *и числа* $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1) $\vec{f}, \vec{g} : [-1,1]^q \to \mathbb{R}^q$;

2) $\vec{f}, \vec{g} \in C^1([-1,1]^q)$;

3) $\vec{f}(\vec{z}) = \vec{\mathrm{id}}(\vec{z}) + \vec{g}(\vec{z})$ *(напомним, что* $\vec{\mathrm{id}}(\vec{z}) = \vec{z}$);

4) $|g_i(\vec{z})| < \beta$, $|\partial\vec{g}_i(\vec{z})/\partial z_j| < \gamma$ *для всех* $i, j \in \{1,\ldots,q\}$ *и* $\vec{z} \in [-1,1]^q$, *причём*

$$\begin{cases}(1-q\gamma) > 0,\\ (1-\beta) > 0.\end{cases}$$

Тогда для любых векторов $\vec{z}_0 \in [-1,1]^q$ *и* $\vec{v} \in [-\alpha,\alpha]^q$ $(\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0)$ *существует вектор* $\vec{z}_0' \in [-1,1]^q$ *такой, что выполнено равенство*

$$\vec{f}(\vec{z}_0) + \vec{v} = \mu\vec{f}(\vec{z}_0'),$$

где

$$\mu = 1 + \alpha\frac{1+(q-1)\gamma}{(1-(q-1)\gamma)(1-\beta)}.$$

2. Алгоритмы стягивающего обрамления интервальных моделей Тейлора.

Определение 7. Будем говорить, что интервальная модель Тейлора TM является *обрамлением* интервальной модели Тейлора TM_1 (или что TM *обрамляет* TM_1), если имеет место включение $\mathrm{Im}\,(\mathrm{TM}_1) \subset \mathrm{Im}\,(\mathrm{TM})$.

Определение 8. Будем говорить, что алгоритм Algo является *алгоритмом обрамления (обрамляющим алгоритмом)*, если для него выполняются следующие условия:

1) Algo на вход принимает одну модель Тейлора TM_1 и набор индексов $(i_1,\ldots,i_q)$, причём полином $\vec{P}^{1,n}(\vec{x})$ модели TM_1 не зависит от x_i при $i \notin \{i_1,\ldots,i_q\}$;

2) на выходе Algo имеет флаг завершения операции (целое число res, равное 1 в случае успешного завершения работы и 0 в противном случае) и ровно одну модель Тейлора TM;

3) при успешном завершения Algo $(\mathrm{res} = 1)$ TM является обрамлением TM_1, а полином $\vec{P}^n(\vec{x})$ модели TM не зависит от x_i при $i \notin \{i_1,\ldots,i_q\}$.

Будем говорить, что TM является *стягивающим обрамлением* TM_1, если TM обрамляет TM_1 и, кроме того, имеет нулевой или близкий к нулевому (на уровне точности приближённой арифметики) остаток. Аналогично можно ввести и понятие *алгоритма стягивающего обрамления.* Поскольку мы не формализуем здесь понятие “близкий к нулевому” и данные определения не используются в доказываемых нами свойствах алгоритмов, мы не будем вводить эти понятия строго. С другой стороны, при практическом использовании TM для интегрирования ОДУ именно устранение остатка TM на каждом шаге предотвращает их экспоненциальное разрастание.

Оба рассматриваемых в статье алгоритма стягивающего обрамления используют общий принцип (рис. 1): исходная ТМ с помощью линейных преобразований изменяется таким образом, чтобы её линейная часть переводилась в эталонный гиперкуб; осуществляется определённая модификация линейно преобразованной ТМ (основной шаг, свой для каждого алгоритма); к модифицированной ТМ применяются обратные линейные преобразования.

Как сказано во введении, мы рассмотрим два алгоритма стягивающего обрамления. Основной шаг первого (алгоритм 3) основан на результатах, приведённых в работе [18], и предполагает использование теоремы 1. Основной шаг второго алгоритма (алгоритм 4) основывается на использовании интервальной внешней оценки ТМ.

Начнём с формального описания алгоритма, суть которого была изложена в [18]. В этом алгоритме используется операция ТМ-дифференцирования, введённая выше определением 6.

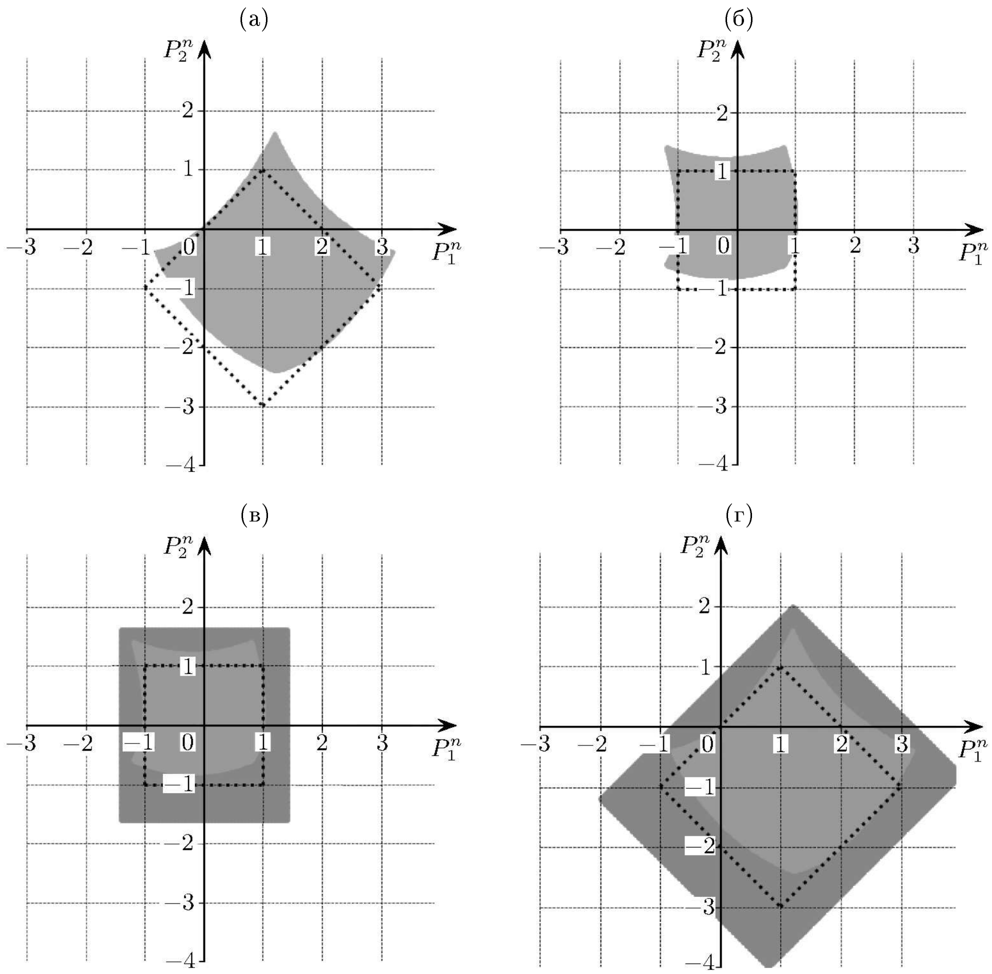

Рис. 1. Общий принцип модификации ТМ (на примере ТМ размерности $q=2$, пунктирной линией отмечена линейная часть исходной ТМ): а) образ исходной ТМ, б) образ линейно преобразованной ТМ, в) образы линейно преобразованной ТМ и её модификации, г) образы исходной ТМ и её модификации.

Алгоритм 3. Вход $(\mathrm{TM}_1, (i_1, \ldots, i_q))$. Выход $(\mathrm{TM}, \mathrm{res})$.

Шаг 1. Сформируем матрицу $W = (W_{lk})_{l,k=1} \in \mathbb{R}^{q\times q}$, элементы которой возьмём следующими:

$$\{W\}_{lk} := \{\vec{a}_{\underbrace{0,\ldots,1}_{i_k},0,\ldots,0}\}_l, \quad k \in \{1,\ldots,q\}, \quad l \in \{1,\ldots,q\}.$$

Шаг 2. Численно обратим матрицу W, полученную в результате матрицу обозначим $\tilde{W}^{-1}$.

Шаг 3. Применим алгоритм 4 из [9] к матрице $\tilde{W}^{-1}$, на выходе получим res_1 и интервальную матрицу $\mathbf{W}$. Если $\mathrm{res}_1 = 0$, положим $\mathrm{res} := 0$ и завершим выполнение алгоритма.

Шаг 4. Положим $\mathrm{TM}_2 := [\tilde{W}^{-1},](\mathrm{TM}_1 - \vec{a}_{0,\ldots,0})$.

Шаг 5. Построим $\mathrm{TM}_3 = \langle \vec{P}^{3,n}(\vec{x}), \vec{\mathbf{I}}^3\rangle$, все коэффициенты полинома которой возьмём равными нулю, кроме следующих:

$$\{\vec{c}_{\underbrace{0,\ldots,1}_{i_k},0,\ldots,0}\}_l := \delta_{kl}, \quad k \in \{1,\ldots,q\}, \quad l \in \{1,\ldots,q\},$$

и положим $\vec{\mathbf{I}}^3 := [\vec{0},]$.

Шаг 6. Положим $\mathrm{TM}_4 := \langle \vec{P}^{2,n}(\vec{x}), [\vec{0},]\rangle - \mathrm{TM}_3$.

Шаг 7. Найдём такое число α, что $\vec{\mathbf{I}}^2 \subset [-\alpha,\alpha]^q$.

Шаг 8. Найдём такое число β, что $\mathcal{EB}(\mathrm{TM}_4) \subset [-\beta,\beta]^q$.

Шаг 9. Найдём такое число γ, что

$$\mathcal{EB}\biggl(\frac{\partial_{\mathrm{TM}}\vec{P}^{2,n}(\vec{x})}{\partial x_k} - \frac{\partial_{\mathrm{TM}}\vec{P}^{3,n}(\vec{x})}{\partial x_k}\biggr) \subset [-\gamma,\gamma]^q, \quad k \in \{i_1,\ldots,i_q\}.$$

Шаг 10. Проверим выполнение условия

$$\begin{cases}([1,]-[q,][\gamma,]) > [0,],\\ ([1,]-[\beta,]) > [0,].\end{cases}$$

Если это условие выполнено, то положим $\mathrm{res} := 1$. В противном случае положим $\mathrm{res} := 0$ и завершим выполнение алгоритма.

Шаг 11. Положим $\boldsymbol{\mu} := [1,] + [\alpha,]\dfrac{[1,] + ([q,]-[1,])[\gamma,]}{([1,]-([q,]-[1,])[\gamma,])([1,]-[\beta,])}$.

Шаг 12. Положим $\mathrm{TM} := \mathbf{W}\boldsymbol{\mu}\langle \vec{P}^{2,n}(\vec{x}), [\vec{0},]\rangle + \vec{a}_{0,\ldots,0}$.

Покажем, что в случае успешного завершения ($\mathrm{res} = 1$) полученная в результате работы алгоритма 3 ТМ является обрамлением исходной TM_1 и её полином зависит только от нужных аргументов, т.е. алгоритм 3 является алгоритмом обрамления.

Утверждение 7. *Пусть алгоритм 3 с входом* $(\mathrm{TM}_1, (i_1,\ldots,i_q))$ *возвращает* $\mathrm{res} = 1$ *и* ТМ, *причём полином* $\vec{P}^{1,n}(\vec{x})$ *не зависит от* x_i *при* $i \notin \{i_1,\ldots,i_q\}$. *Тогда справедливо включение* $\mathrm{Im}\,(\mathrm{TM}_1) \subset \mathrm{Im}\,(\mathrm{TM})$ *и полином* $\vec{P}^n(\vec{x})$ *не зависит от* x_i *при* $i \notin \{i_1,\ldots,i_q\}$.

Доказательство. Пусть $\vec{y} \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{TM}_1)$, тогда существует $\vec{x}_0 \in M = [-1,1]^m$ такой, что для всех $j \in \{1,\ldots,q\}$ выполнено двойное неравенство

$$P_j^{1,n}(\vec{x}_0) + L(\mathbf{I}_j^1) \leqslant \{\vec{y}\}_j \leqslant P_j^{1,n}(\vec{x}_0) + H(\mathbf{I}_j^1).$$

Прибавив полином $P_j^{1,n}(\vec{x}) - P_j^{1,n}(\vec{x}_0)$ ко всем частям этого неравенства, будем иметь

$$P_j^{1,n}(\vec{x}) + L(\mathbf{I}_j^1) \leqslant \{\vec{y}\}_j + P_j^{1,n}(\vec{x}) - P_j^{1,n}(\vec{x}_0) \leqslant P_j^{1,n}(\vec{x}) + H(\mathbf{I}_j^1),$$

это означает, что имеет место $\mathrm{TM}_1(\vec{y} + \vec{P}^{1,n}(\vec{x}) - \vec{P}^{1,n}(\vec{x}_0))$.

Так как $\mathrm{TM}_1(\vec{y}+\vec{P}^{1,n}(\vec{x})-\vec{P}^{1,n}(\vec{x}_0))$, $\tilde{W}^{-1} \in [\tilde{W}^{-1},]$ и в соответствии с алгоритмом $\mathrm{TM}_2 = [\tilde{W}^{-1},](\mathrm{TM}_1 - \vec{a}_{0,\ldots,0})$, то, согласно утверждениям 3 и 4 из [9], справедливо $\mathrm{TM}_2(\tilde{W}^{-1}(\vec{y} - \vec{a}_{0,\ldots,0}+\vec{P}^{1,n}(\vec{x})-\vec{P}^{1,n}(\vec{x}_0)))$. Поэтому для всех $\vec{x} \in M$ и $j \in \{1,\ldots,q\}$ выполнено неравенство

$$P_j^{2,n}(\vec{x}) + L(\mathbf{I}_j^2) \leqslant \{\tilde{W}^{-1}(\vec{y} - \vec{a}_{0,\ldots,0} + \vec{P}^{1,n}(\vec{x}) - \vec{P}^{1,n}(\vec{x}_0))\}_j \leqslant P_j^{2,n}(\vec{x}) + H(\mathbf{I}_j^2),$$

причём $[L(\mathbf{I}_j^2), H(\mathbf{I}_j^2)] \subset [-\alpha,\alpha]$. В частности, для $\vec{x} = \vec{x}_0$ имеем

$$P_j^{2,n}(\vec{x}_0) + L(\mathbf{I}_j^2) \leqslant \{\tilde{W}^{-1}(\vec{y} - \vec{a}_{0,\ldots,0})\}_j \leqslant P_j^{2,n}(\vec{x}_0) + H(\mathbf{I}_j^2).$$

Представим полученное неравенство в следующем виде:

$$P_j^{2,n}(\vec{x}_0) + L(\mathbf{I}_j^2) \leqslant P_j^{2,n}(\vec{x}_0) + \{\tilde{W}^{-1}(\vec{y} - \vec{a}_{0,\ldots,0}) - \vec{P}^{2,n}(\vec{x}_0)\}_j \leqslant P_j^{2,n}(\vec{x}_0) + H(\mathbf{I}_j^2),$$

откуда следует, что для всех $j \in \{1, \ldots, q\}$ справедливо включение

$$\{\tilde{W}^{-1}(\vec{y} - \vec{a}_{0,\ldots,0}) - \vec{P}^{2,n}(\vec{x}_0)\}_j \in [L(\mathbf{I}_j^2), H(\mathbf{I}_j^2)] \subset [-\alpha, \alpha].$$

Согласно предположению утверждения полином $\vec{P}^{1,n}(\vec{x})$ не зависит от x_i при $i \notin \{i_1, \ldots, i_q\}$, поэтому полиномы $\vec{P}^{2,n}(\vec{x})$, $\vec{P}^{3,n}(\vec{x})$ и $\vec{P}^{4,n}(\vec{x})$ также можно рассматривать как не зависящие от x_i при $i \notin \{i_1, \ldots, i_q\}$ (см. замечание 1). Сформируем вектор $\vec{z} = (z_1, \ldots, z_q)^{\mathrm{T}} \in [-1, 1]^q$ с элементами $z_k = x_{i_k}$, $k \in \{1, \ldots, q\}$, и рассмотрим вектор-функцию $\vec{f}(\vec{z}) = \vec{P}^{2,n}(\vec{z})$. Тогда для вектора $\vec{z}_0$, соответствующего вектору $\vec{x}_0$, при всех $j \in \{1, \ldots, q\}$ справедливо включение

$$\{\tilde{W}^{-1}(\vec{y} - \vec{a}_{0,\ldots,0}) - \vec{f}(\vec{z}_0)\}_j \subset [-\alpha, \alpha].$$

Функция $\vec{f}(\vec{z})$ может быть представлена в виде $\vec{f}(\vec{z}) = \vec{\mathrm{id}}(\vec{z}) + \vec{g}(\vec{z})$, тогда согласно алгоритму для всех $\vec{z}^* \in [-1, 1]^q$ и $j \in \{1, \ldots, q\}$ выполнены включения

$$g_j(\vec{z}^*) \in \{\mathcal{EB}(\mathrm{TM}_4)\}_j \subset [-\beta, \beta],$$

$$\frac{\partial \vec{g}_j(\vec{z}^*)}{\partial z_k} \in \left\{\mathcal{EB}\left(\frac{\partial_{\mathrm{TM}} \vec{P}^{2,n}(\vec{z})}{\partial z_k} - \frac{\partial_{\mathrm{TM}} \vec{P}^{3,n}(\vec{z})}{\partial z_k}\right)\right\}_j \subset [-\gamma, \gamma], \quad k \in \{1, \ldots, q\},$$

которые позволяют применить к $\vec{f}(\vec{z})$ теорему 1, вследствие которой при всех $j \in \{1, \ldots, q\}$ имеет место равенство

$$\{\tilde{W}^{-1}(\vec{y} - \vec{a}_{0,\ldots,0})\}_j = \mu f_j(\vec{z}_0'), \quad \vec{z}_0' \in [-1, 1]^q. \tag{5}$$

При переходе от вектора $\vec{z}_0' \in [-1, 1]^q$ к вектору $\vec{x}_0' \in M$ по правилу

$$\vec{x}_0' = \sum_{k=1}^{q} \{\vec{z}_0'\}_k e_{i_k}, \quad \text{где} \quad e_{i_k} = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{i_k}, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m,$$

равенство (5) при любом $j \in \{1, \ldots, q\}$ может быть преобразовано к виду

$$\{\tilde{W}^{-1}(\vec{y} - \vec{a}_{0,\ldots,0})\}_j = \mu P_j^{2,n}(\vec{x}_0'), \quad \vec{x}_0' \in M,$$

причём, согласно основной теореме интервального анализа, $\mu \in \boldsymbol{\mu}$.

Прибавив полином $\mu P_j^{2,n}(\vec{x}) - \mu P_j^{2,n}(\vec{x}_0')$ к обеим частям этого равенства, получим

$$\{\tilde{W}^{-1}(\vec{y} - \vec{a}_{0,\ldots,0})\}_j + \mu P_j^{2,n}(\vec{x}) - \mu P_j^{2,n}(\vec{x}_0') = \mu P_j^{2,n}(\vec{x}),$$

это означает, что справедливо

$$\widetilde{\mathrm{TM}}(\tilde{W}^{-1}(\vec{y} - \vec{a}_{0,\ldots,0}) + \mu \vec{P}^{2,n}(\vec{x}) - \mu \vec{P}^{2,n}(\vec{x}_0')),$$

где $\widetilde{\mathrm{TM}} = \boldsymbol{\mu} \langle \vec{P}^{2,n}(\vec{x}), [\vec{0},] \rangle$.

Так как $\widetilde{\mathrm{TM}}(\tilde{W}^{-1}(\vec{y} - \vec{a}_{0,\ldots,0}) + \mu \vec{P}^{2,n}(\vec{x}) - \mu \vec{P}^{2,n}(\vec{x}_0'))$, $[\tilde{W}^{-1}]^{-1} \in \mathbf{W}$ и в соответствие с алгоритмом $\mathrm{TM} = \mathbf{W} \boldsymbol{\mu} \langle \vec{P}^{2,n}(\vec{x}), [\vec{0},] \rangle + \vec{a}_{0,\ldots,0}$, то, согласно утверждениям 3 и 4 из [9], имеет место $\mathrm{TM}([\tilde{W}^{-1}]^{-1} [\tilde{W}^{-1}(\vec{y} - \vec{a}_{0,\ldots,0}) + \mu \vec{P}^{2,n}(\vec{x}) - \mu \vec{P}^{2,n}(\vec{x}_0')] + \vec{a}_{0,\ldots,0})$. Поэтому для всех $\vec{x} \in M$ и $j \in \{1, \ldots, q\}$ выполнено двойное неравенство

$$P_j^n(\vec{x}) + L(\mathbf{I}_j) \leqslant \{[\tilde{W}^{-1}]^{-1} [\tilde{W}^{-1}(\vec{y} - \vec{a}_{0,\ldots,0}) + \mu \vec{P}^{2,n}(\vec{x}) - \mu \vec{P}^{2,n}(\vec{x}_0')] + \vec{a}_{0,\ldots,0}\}_j \leqslant P_j^n(\vec{x}) + H(\mathbf{I}_j).$$

В частности, для $\vec{x} = \vec{x}_0'$ имеем $P_j^n(\vec{x}_0') + L(\mathbf{I}_j) \leqslant \{\vec{y}\}_j \leqslant P_j^n(\vec{x}_0') + H(\mathbf{I}_j)$, из чего следует, что $\vec{y} \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{TM})$.

Из сказанного выше вытекает, что если $\vec{y} \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{TM}_1)$, то $\vec{y} \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{TM})$. Это равносильно включению $\mathrm{Im}\,(\mathrm{TM}_1) \subset \mathrm{Im}\,(\mathrm{TM})$. О независимости полинома $\vec{P}^n(\vec{x})$ от x_i при $i \notin \{i_1, \ldots, i_q\}$ см. замечание 1. Утверждение доказано.

Замечание 1. Тот факт, что полином $\vec{P}^{3,n}(\vec{x})$ в доказательстве утверждения 7 не зависит от x_i при $i \notin \{i_1, \ldots, i_q\}$, вытекает из самого алгоритма 3. Для полиномов $\vec{P}^{2,n}(\vec{x})$ и $\vec{P}^{4,n}(\vec{x})$ это свойство следует из алгоритма 3, алгоритмов, используемых при построении TM_2 и TM_4 (разность ТМ, разность ТМ и вектора, умножение ТМ на матрицу и число), а также из свойства приближённой арифметики $/0x/ = 0$, указанного в п. 1. Аналогично показывается, что это же свойство выполнено и для результирующего полинома $\vec{P}^n(\vec{x})$, который получается из полинома $\vec{P}^{2,n}(\vec{x})$ при помощи того же набора операций (см. алгоритм 3).

Реализуем второй подход и построим алгоритм стягивающего обрамления ТМ, основанный на использовании интервальной внешней оценки ТМ.

Алгоритм 4. Вход $(\mathrm{TM}_1, (i_1, \ldots, i_q))$. Выход $(\mathrm{TM}, \mathrm{res})$.

Шаг 1. Сформируем матрицу $W = (W_{lk})_{l,k=1}^q \in \mathbb{R}^{q\times q}$, элементы которой возьмём следующими:

$$\{W\}_{lk} := \{\vec{a}_{\underbrace{0,\ldots,1}_{i_k},0,\ldots,0}\}_l, \quad k \in \{1, \ldots, q\}, \quad l \in \{1, \ldots, q\}.$$

Шаг 2. Численно обратим матрицу W, полученную в результате матрицу обозначим $\tilde{W}^{-1}$.

Шаг 3. Применим алгоритм 4 из [9] к матрице $\tilde{W}^{-1}$, на выходе получим res_1 и интервальную матрицу $\mathbf{W}$. Если $\mathrm{res}_1 = 0$, положим $\mathrm{res} := 0$ и завершим выполнение алгоритма. Если $\mathrm{res}_1 = 1$, положим $\mathrm{res} := 1$ и продолжим выполнение алгоритма.

Шаг 4. Положим $\mathrm{TM}_2 := [\tilde{W}^{-1},](\mathrm{TM}_1 -\ \vec{a}_{0,\ldots,0})$.

Шаг 5. Положим $\vec{\mathbf{z}} := \mathcal{EB}(\mathrm{TM}_2)$.

Шаг 6. Построим TM_3, все коэффициенты полинома которой возьмём равными нулю, кроме следующих:

$$\{\vec{c}_{\underbrace{0,\ldots,1}_{i_j},0,\ldots,0}\}_j := \max\{|L(\mathbf{z}_j)|, |H(\mathbf{z}_j)|\}, \quad j \in \{1, \ldots, q\},$$

и положим $\vec{\mathbf{I}}^3 := [\vec{0},]$.

Шаг 7. Положим $\mathrm{TM} := \mathbf{W}\mathrm{TM}_3 +\ \vec{a}_{0,\ldots,0}$.

Покажем, что алгоритм 4 также является алгоритмом обрамления. Заметим, что в отличие от алгоритма 3 алгоритм 4 может завершиться неуспешно $(\mathrm{res} = 0)$ только в случае численного вырождения матрицы линейной части исходной ТМ, в то время как алгоритм 3 может прийти к негативному результату также и на основном шаге.

Утверждение 8. *Пусть алгоритм 4 с входом* $(\mathrm{TM}_1, (i_1, \ldots, i_q))$ *возвращает* $\mathrm{res} = 1$ *и* ТМ. *Тогда имеет место включение* $\mathrm{Im}\,(\mathrm{TM}_1) \subset \mathrm{Im}\,(\mathrm{TM})$ *и полином* $\vec{P}^n(\vec{x})$ *не зависит от* x_i *при* $i \notin \{i_1, \ldots, i_q\}$.

Доказательство. Пусть $\vec{y} \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{TM}_1)$, тогда существует $\vec{x}_0 \in M = [-1, 1]^m$ такой, что для всех $j \in \{1, \ldots, q\}$ выполнено двойное неравенство

$$P_j^{1,n}(\vec{x}_0) + L(\mathbf{I}_j^1) \leqslant \{\vec{y}\}_j \leqslant P_j^{1,n}(\vec{x}_0) + H(\mathbf{I}_j^1).$$

Прибавив полином $P_j^{1,n}(\vec{x}) - P_j^{1,n}(\vec{x}_0)$ ко всем частям этого неравенства, получим

$$P_j^{1,n}(\vec{x}) + L(\mathbf{I}_j^1) \leqslant \{\vec{y}\}_j + P_j^{1,n}(\vec{x}) - P_j^{1,n}(\vec{x}_0) \leqslant P_j^{1,n}(\vec{x}) + H(\mathbf{I}_j^1),$$

это означает, что имеет место $\mathrm{TM}_1(\vec{y} + \vec{P}^{1,n}(\vec{x}) - \vec{P}^{1,n}(\vec{x}_0))$.

Так как $\mathrm{TM}_1(\vec{y}+\vec{P}^{1,n}(\vec{x})-\vec{P}^{1,n}(\vec{x}_0))$, $\tilde{W}^{-1}\in[\tilde{W}^{-1},]$ и в соответствии с алгоритмом $\mathrm{TM}_2 = [\tilde{W}^{-1},](\mathrm{TM}_1-\vec{a}_{0,\ldots,0})$, то, согласно утверждениям 3 и 4 из [9], выполняется $\mathrm{TM}_2(\tilde{W}^{-1}(\vec{y}-\vec{a}_{0,\ldots,0}+\vec{P}^{1,n}(\vec{x})-\vec{P}^{1,n}(\vec{x}_0)))$. Тогда, согласно утверждению 7 из [8], $(\tilde{W}^{-1}(\vec{y}-\vec{a}_{0,\ldots,0}+\vec{P}^{1,n}(\vec{x})-\vec{P}^{1,n}(\vec{x}_0)))\in\mathcal{EB}(\mathrm{TM}_2)$ для всех $\vec{x}\in M$, в частности, для $\vec{x}=\vec{x}_0$ справедливо включение $(\tilde{W}^{-1}(\vec{y}-\vec{a}_{0,\ldots,0}))\in\mathcal{EB}(\mathrm{TM}_2)=\mathbf{z}$, т.е. для всех $j\in\{1,\ldots,q\}$ верны неравенства

$$-\max\{|L(\mathbf{z}_j)|,|H(\mathbf{z}_j)|\}\leqslant L(\mathbf{z}_j)\leqslant\{\tilde{W}^{-1}(\vec{y}-\vec{a}_{0,\ldots,0})\}_j\leqslant H(\mathbf{z}_j)\leqslant\max\{|L(\mathbf{z}_j)|,|H(\mathbf{z}_j)|\}.$$

Для каждого $j\in\{1,\ldots,q\}$ такого, что $\max\{|L(\mathbf{z}_j)|,|H(\mathbf{z}_j)|\}\neq 0$, разделив все части полученного неравенства на $\max\{|L(\mathbf{z}_j)|,|H(\mathbf{z}_j)|\}$, будем иметь

$$-1\leqslant\frac{\{\tilde{W}^{-1}(\vec{y}-\vec{a}_{0,\ldots,0})\}_j}{\max\{|L(\mathbf{z}_j)|,|H(\mathbf{z}_j)|\}}\leqslant 1.$$

Согласно алгоритму $P_j^{3,n}(\vec{x})=\max\{|L(\mathbf{z}_j)|,|H(\mathbf{z}_j)|\}x_{i_j}$ при всех $j\in\{1,\ldots,q\}$, поэтому существует такой вектор $\vec{x}_0'\in M$, что при всех $j\in\{1,\ldots,q\}$ справедливо равенство

$$\{\tilde{W}^{-1}(\vec{y}-\vec{a}_{0,\ldots,0})\}_j=P_j^{3,n}(\vec{x}_0'),\tag{6}$$

вектор $\vec{x}_0'$ в котором определяется следующим образом:

$$\vec{x}_0'=\sum_{\substack{j=1\\ \max\{|L(\mathbf{z}_j)|,|H(\mathbf{z}_j)|\}\neq 0}}^{q}\frac{\{\tilde{W}^{-1}(\vec{y}-\vec{a}_{0,\ldots,0})\}_j}{\max\{|L(\mathbf{z}_j)|,|H(\mathbf{z}_j)|\}}e_{i_j},\quad\text{где}\quad e_{i_j}=(\underbrace{0,\ldots,1}_{i_j},0,\ldots,0)^{\mathrm{т}}\in\mathbb{R}^m.$$

Прибавив полином $P_j^{3,n}(\vec{x})$ к обеим частям равенства (6), получим

$$\{\tilde{W}^{-1}(\vec{y}-\vec{a}_{0,\ldots,0})\}_j+P_j^{3,n}(\vec{x})-P_j^{3,n}(\vec{x}_0')=P_j^{3,n}(\vec{x}),$$

это означает, что имеет место $\mathrm{TM}_3(\tilde{W}^{-1}(\vec{y}-\vec{a}_{0,\ldots,0})+\vec{P}^{3,n}(\vec{x})-\vec{P}^{3,n}(\vec{x}_0'))$.

Так как $\mathrm{TM}_3(\tilde{W}^{-1}(\vec{y}-\vec{a}_{0,\ldots,0})+\vec{P}^{3,n}(\vec{x})-\vec{P}^{3,n}(\vec{x}_0'))$, $[\tilde{W}^{-1}]^{-1}\in\mathbf{W}$ и в соответствии с алгоритмом $\mathrm{TM}=\mathbf{W}\mathrm{TM}_3+\vec{a}_{0,\ldots,0}$, то, согласно утверждениям 3 и 4 из [9], справедливо $\mathrm{TM}([\tilde{W}^{-1}]^{-1}[\tilde{W}^{-1}(\vec{y}-\vec{a}_{0,\ldots,0})+\vec{P}^{3,n}(\vec{x})-\vec{P}^{3,n}(\vec{x}_0')]+\vec{a}_{0,\ldots,0})$. Поэтому для всех $\vec{x}\in M$ и $j\in\{1,\ldots,q\}$ выполнено двойное неравенство

$$P_j^n(\vec{x})+L(\mathbf{I}_j)\leqslant\{[\tilde{W}^{-1}]^{-1}[\tilde{W}^{-1}(\vec{y}-\vec{a}_{0,\ldots,0})+\vec{P}^{3,n}(\vec{x})-\vec{P}^{3,n}(\vec{x}_0')]+\vec{a}_{0,\ldots,0}\}_j\leqslant P_j^n(\vec{x})+H(\mathbf{I}_j).$$

В частности, для $\vec{x}=\vec{x}_0'$ имеем $P_j^n(\vec{x}_0')+L(\mathbf{I}_j)\leqslant\{\vec{y}\}_j\leqslant P_j^n(\vec{x}_0')+H(\mathbf{I}_j)$, откуда следует, что $\vec{y}\in\mathrm{Im}\,(\mathrm{TM})$.

Из сказанного выше вытекает, что если $\vec{y}\in\mathrm{Im}\,(\mathrm{TM}_1)$, то $\vec{y}\in\mathrm{Im}\,(\mathrm{TM})$. Это равносильно включению $\mathrm{Im}\,(\mathrm{TM}_1)\subset\mathrm{Im}\,(\mathrm{TM})$. О независимости полинома $\vec{P}^n(\vec{x})$ от x_i при $i\notin\{i_1,\ldots,i_q\}$ см. замечание 2. Утверждение доказано.

Замечание 2. Для утверждения 8 рассуждения относительно полинома $\vec{P}^n(\vec{x})$ полностью аналогичны тем, которые проведены в замечании 1: полином $\vec{P}^{3,n}(\vec{x})$ не зависит от x_i при $i\notin\{i_1,\ldots,i_q\}$ согласно построению, а сам $\vec{P}^n(\vec{x})$ получается из $\vec{P}^{3,n}(\vec{x})$ умножением на матрицу и прибавлением вектора (см. алгоритм 4).

Замечание 3. Интервал $\mathbf{B}^{mon}_{n_1,\ldots,n_m}$ не вводился нами в статьях [8, 9], вместо него в алгоритмах мы явно использовали интервал $[-1,1]$ для всех мономов. При практическом использовании последняя оценка для свободного члена оказывается достаточно грубой. Для улучшения результата работы алгоритмы 1–6 из статьи [8] и алгоритмы 1 и 5 из [9] могут быть модифицированы следующим образом. Во всех формулах для вычисления остатка $\vec{I}$ результирующей ТМ необходимо в сумме по индексам $n_1,\ldots,n_m$ заменить интервал $[-1,1]$ на интервал

$\mathbf{B}^{mon}_{n_1,\ldots,n_m}$. Например, в [8] в алгоритме 1 изменится присваивание (1), в алгоритме 4 – присваивание для $\vec{\mathbf{A}}$, в алгоритме 5 – присваивание (6) и т.д. Все доказательства остаются верными, если в них выражение "$x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_m^{n_n} \in [-1,1]$" заменяется на "$x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_m^{n_n} \in \mathbf{B}^{mon}_{n_1,\ldots,n_m}$". Наиболее существенное улучшение результата получается при изменении алгоритма 3 из [8] (вычисление оценки полинома) и использующего этот алгоритм алгоритма 7 из [8] (внешняя оценка ТМ). Во всех остальных алгоритмах происходит улучшение результата на уровне точности приближённой арифметики.

3. Алгоритм интегрирования ОДУ и систем ОДУ с использованием модифицированных интервальных моделей Тейлора. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f}(\vec{y}),$$

$$\vec{y}(0) = \vec{y}_0, \tag{7}$$

где правая часть $\vec{f}$ уравнения задана в некоторой области и является в ней липшицевой функцией с константой L, т.е. удовлетворяет неравенству $\|\vec{f}(\vec{y}_2) - \vec{f}(\vec{y}_1)\|_2 \leqslant L\|\vec{y}_2 - \vec{y}_1\|_2$. Через $\vec{F}$ обозначим ТМ-расширение функции $\vec{f}$, а интервальное расширение $[\Delta t,]$ числа Δt – через $\mathbf{\Delta t}$.

На основе алгоритма 10 из [8] построим алгоритм интегрирования ОДУ и систем ОДУ с использованием модифицированных интервальных моделей Тейлора. В данной статье в отличие от [8] мы выделим из общего алгоритма интегрирования один логический блок – выполнение одного шага интегрирования по времени методом итераций Пикара без использования стягивающего обрамления. Одним из входных параметров приводимого ниже алгоритма 5 является величина ϵ. Этот параметр нужен для задания критерия сходимости итераций Пикара и может быть разным в различных реализациях алгоритма. Величина ϵ может быть как вещественным числом, задающим границу изменения остатка ТМ от итерации к итерации, так и целым числом, определяющим количество итераций или комбинацией этих параметров. Конкретный критерий не имеет значения с т.з. доказательных свойств алгоритма, но существенно влияет на качество получаемых оценок и скорость работы.

Алгоритм 5. Вход $(\mathrm{TM}_0, \mathbf{\Delta t}, S, \epsilon, \vec{F})$. Выход $(\mathrm{res},\ \mathrm{TM})$.

Шаг 1. Положим $s := 1$, $\widehat{\mathrm{TM}}^1 := \mathrm{TM}_0$.

Шаг 2. Положим $\widehat{\mathrm{TM}}^{s+1}$ равной выходу алгоритма 9 из [8] с входом $(\mathrm{TM}_0, \widehat{\mathrm{TM}}^s, \mathbf{\Delta t}, \vec{F})$.

Шаг 3. Если $s = n$, перейдём на шаг 4, в противном случае положим $s := s+1$ и перейдём на шаг 2

Шаг 4. Положим $s := 1$. Построим $\overline{\mathrm{TM}}^1$ следующим образом: её полиномиальную часть положим равной полиномиальной части $\widehat{\mathrm{TM}}^{n+1}$, а остаток выберем, основываясь на свойствах TM_0 и полиномиальной части $\widehat{\mathrm{TM}}^{n+1}$ (например, расширив остаток TM_0 или используя оценку полиномиальной части $\widehat{\mathrm{TM}}^{n+1}$).

Шаг 5. Положим $\overline{\mathrm{TM}}^{s+1}$ равной выходу алгоритма 9 из [8] с входом $(\mathrm{TM}_0, \overline{\mathrm{TM}}^s, \mathbf{\Delta t}, \vec{F})$.

Шаг 6. Если алгоритм 8 из [8] с входом $(\overline{\mathrm{TM}}^{s+1},\ \overline{\mathrm{TM}}^s)$ вернул 1, перейдём на шаг 7, иначе положим $\overline{\mathrm{TM}}^{s+1}$ равной некоторой модификации $\overline{\mathrm{TM}}^s$ (например, умножив её остаток на какое-либо число) и перейдём на шаг 8.

Шаг 7. Проверим $\overline{\mathrm{TM}}^{s+1}$ на соответствующее условие сходимости остатка, определяемое параметром ϵ (например, сравнив остаток $\overline{\mathrm{TM}}^{s+1}$ по некоторому критерию близости с остатком $\overline{\mathrm{TM}}^s$ или проверив минимальное количество итераций, для которых проверка из п. 6 завершилась успешно). Если это условие сходимости выполнено, положим $\mathrm{TM} := \overline{\mathrm{TM}}^{s+1}$, $\mathrm{res} := 1$ и завершим алгоритм.

Шаг 8. Если $s = S$, завершим алгоритм, положив $\mathrm{res} := 0$, в противном случае положим $s := s+1$ и перейдём на шаг 5.

Замечание 4. На шагах 1, 2 и 3 выполняется вычисление полиномиальной части ТМ, которая при дальнейших итерациях меняться не будет. Заметим, что во всех используемых на этих шагах алгоритмах работы с ТМ остаток никак не влияет на полиномиальную часть (что, по сути, верно для почти всех базовых ТМ алгоритмов). Поскольку в алгоритме 5 используется только полиномиальная часть $\widehat{\mathrm{TM}}^{n+1}$, на указанных шагах остатки ТМ могут не вычисляться, что даёт возможность для некоторой оптимизации.

Алгоритм 6. Вход $(\mathrm{TM}_0^1, \mathbf{\Delta t}, N, S, \epsilon, \mathrm{Algo}, N_{\mathrm{Algo}}, \vec{F}, (i_1,\ldots,i_q))$. Выход $(N, \{\mathrm{TM}^l\}_{l=1}^N)$.

Шаг 1. Положим $l := 1$.

Шаг 2. Положим TM^l и res равными выходу алгоритма 5 с входом $(\mathrm{TM}_0^l, \mathbf{\Delta t}, S, \epsilon, \vec{F})$. Если $\mathrm{res} = 1$, перейдём на шаг 3, в противном случае положим $N := l-1$ и закончим выполнение.

Шаг 3. Если $l = N$, закончим выполнение, в противном случае положим $\widetilde{\mathrm{TM}}_0^{l+1} := := \mathrm{TM}^l|_{x_1=1}$ и перейдём на шаг 4.

Шаг 4. Если $l \bmod N_{\mathrm{Algo}} \neq 0$, положим TM_0^{l+1} равным $\widetilde{\mathrm{TM}}_0^{l+1}$ и перейдём на шаг 2, в противном случае перейдём на шаг 5.

Шаг 5. Положим TM_0^{l+1} и res равными выходу алгоритма Algo с входом $(\widetilde{\mathrm{TM}}_0^{l+1}, (i_1,\ldots,i_q))$. Если $\mathrm{res} = 0$, положим $N := l-1$ и закончим выполнение, в противном случае положим $l := := l+1$ и перейдём на шаг 2.

Покажем, что алгоритм 6 может быть использован для построения решений ОДУ и систем ОДУ.

Утверждение 9. *Пусть* $\mathrm{TM}_0^l = \langle \vec{P}_0^{l,n}, \vec{I}_0^l\rangle$ *и* $\mathrm{TM}^l = \langle \vec{P}^{l,n}, \vec{I}^l\rangle$ *для* $l = \overline{1,N}$. *Пусть для задачи (7) заданы:*

1) ТМ-*расширение* $\vec{F}$ *функции* f *– правой части уравнения задачи (7);*

2) число Δt *и его интервальное расширение* $\mathbf{\Delta t}$;

3) TM_0^1, *полином которой* $\vec{P}_0^{1,n}$ *не зависит от* x_1 *и для которой существуют* $x_2^0,\ldots,x_m^0$ *из отрезка* $[-1,1]$ *такие, что* $\vec{y}_0 \in [\vec{P}_0^{1,n}(x_2^0,\ldots,x_m^0) + L(\vec{\mathbf{I}}_0^1), \vec{P}_0^{1,n}(x_2^0,\ldots,x_m^0) + H(\vec{\mathbf{I}}_0^1)]$ *(иначе говоря,* $\vec{y}_0 \in \mathrm{Im}\,(\mathrm{TM}_0^1)$*).*

Пусть алгоритм Algo является алгоритмом обрамления. Пусть, далее, алгоритм 6 с входом $(\mathrm{TM}_0^1, \mathbf{\Delta t}, N, S, \epsilon, \mathrm{Algo}, N_{\mathrm{Algo}}, \vec{F}, (2,\ldots,m))$ *вернул* $(N, \{\mathrm{TM}^l\}_{l=1}^N)$. *Тогда классическое решение* $\vec{y}(t)$ *задачи (7) с начальными условиями* $\vec{y}_0$ *существует хотя бы на отрезке* $[0, N\Delta t]$ *и для всех* $l = \overline{1,N}$ *найдутся такие* $x_2^l,\ldots,x_m^l \in [-1,1]$, *для которых при всех* $j \in \{1,\ldots,q\}$ *выполнено двойное неравенство*

$$P_j^{l,n}\left(\frac{t}{\Delta t} - l + 1, x_2^l,\ldots,x_m^l\right) + L(\{\vec{\mathbf{I}}^l\}_j) \leqslant y_j(t) \leqslant P_j^{l,n}\left(\frac{t}{\Delta t} - l + 1, x_2^l,\ldots,x_m^l\right) + H(\{\vec{\mathbf{I}}^l\}_j),$$

где $t \in [(l-1)\Delta t, l\Delta t]$.

Доказательство. Утверждение 9 полностью совпадает с доказательством утверждения 19 из [9] с тем лишь отличием, что при доказательстве неравенства (18) из [9] на каждом шаге индукции необходимо учитывать определение 8 и то, что Algo – алгоритм обрамления, а также способ построения TM_0^{l+1} на шаге 4 алгоритма 6. Кроме того, в силу этого значения $x_2^0,\ldots,x_m^0$, использовавшиеся в оценках на каждом шаге в утверждении 19 из [9], должны быть заменены значениями $x_2^l,\ldots,x_m^l$, которые в общем случае различны для разных шагов l. Утверждение доказано.

Напомним, что, согласно утверждениям 7 и 8, алгоритмы 3 и 4 являются алгоритмами обрамления, т.е. могут быть использованы в качестве Algo.

4. Пример применения. Рассмотрим задачу Коши для классической системы, описывающей осциллятор Ван дер Поля:

$$\frac{dx}{dt} = x - \frac{1}{3}x^3 - y, \quad \frac{dy}{dt} = x, \quad t > 0,$$
$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \tag{8}$$

Решение данной задачи получено аналитически и представляет собой при $x_0 \approx -2.0085$, $y_0 \approx 0$ в фазовом пространстве замкнутую траекторию, что позволяет её наглядно визуализировать. Это обуславливает выбор задачи (8) в качестве модельной для демонстрации построенных в настоящей работе алгоритмов, а полученные результаты можно использовать для доказательства существования периодического решения с использованием методов ДВ.

Для численного описания множества решений задачи (8) используем интервальную модель Тейлора с параметрами $n = 2$, $m = 3$, $q = 2$. При этом полиномиальная часть ТМ $\vec{P}^2(x_1, x_2, x_3)$ определена на множестве $[-1, 1]^3$, остаток $\vec{\mathbf{I}}$ принадлежит $\mathbf{R}^2$, переменная x_1 соответствует переменной t исходной задачи, переменная x_2 – значению функции x, переменная x_3 – значению функции y.

Из численного моделирования известно, что решение задачи (8) имеет замкнутую траекторию в окрестности начальных условий $x_0 \approx -2.0085$, $y_0 \approx 0$, поэтому в качестве начального приближения выберем следующую ТМ:

$$\mathrm{TM}_0^1 = \left\langle \begin{pmatrix} -2.0086 + 0.004x_2 + 0.00002x_3 \\ -0.0011x_2 + 0.0125x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [0,] \\ [0,] \end{pmatrix} \right\rangle.$$

ТМ-расширение $\vec{F}(\mathrm{TM})$ правой части (8) строится естественным образом.

Применим следующие алгоритмы: алгоритм 10 из [8], не использующий обрамление ("наивный" алгоритм Пикара); алгоритм 6 с алгоритмом обрамления 3 (стягивающее обрамление Макино–Берца); алгоритм 6 с алгоритмом обрамления 4 (предложенный в настоящей статье вариант стягивающего обрамления). Используем следующие входные данные:

$$\mathrm{TM}_0^1, \quad \mathbf{\Delta t} = 0.0005, \quad N = 14000 \quad (\text{на один период}),$$

$$S = 5, \quad N_{\mathrm{Algo}} = 1, \quad \vec{F}(\mathrm{TM}), \quad (i_1, i_2) = (2, 3).$$

В качестве критерия завершения итераций Пикара используется условие малости изменения всех остатков от итерации к итерации относительно ширины самих остатков ($\epsilon = 10^{-2}$). На выходе получим последовательность $\{\mathrm{TM}^l\}_{l=1}^N$, описывающую множество решений задачи (8). На рис. 2 и 3 представлены графики, демонстрирующие полученный результат для различных алгоритмов.

Из рис. 2 видно, что множество решений, построенных "наивным" алгоритмом Пикара, претерпевает экспоненциальное расширение в двух направлениях, отвечающих переменным фазового пространства (пунктирная линия). Для алгоритма интегрирования, использующего стягивающее обрамления Макино–Берца, характерно быстрое разрастание оценок множества решений в направлении, касательном циклу (штриховая линия на рис. 2, подробнее – рис. 3, а). Это можно связать с особенностями построения модифицированных ТМ алгоритмом 3, а также структуры ТМ, выбранной в качестве начального приближения.

При прочих равных условиях (ТМ второго порядка) из рассматриваемых алгоритмов траекторию решения задачи (8) за один период позволяет описать только алгоритм интегрирования, использующий предложенный нами вариант стягивающего обрамления. Кроме того, при движении по траектории множество решений, описываемых ТМ, сужается (рис. 3, б), что может быть использовано при доказательстве существования периодического решения в системе (8) (для завершения доказательства необходимо аккуратно описать сечение и использовать результаты интегрирования для оценки отображения Пуанкаре).

Отметим, что попадание начальной окрестности цикла в себя удаётся доказать только в случае использования специально выбранной начальной ТМ, расположенной вдоль собственных векторов матрицы монодромии цикла, как это делалось в [9]. В противном случае происходит численное вырождение линейной части ТМ, ухудшающее результат применения предложенного алгоритма стягивающего обрамления, так как в последнем соответствующая матрица обращается. Однако остальные рассмотренные алгоритмы в этом случае также приводят к отрицательному результату.

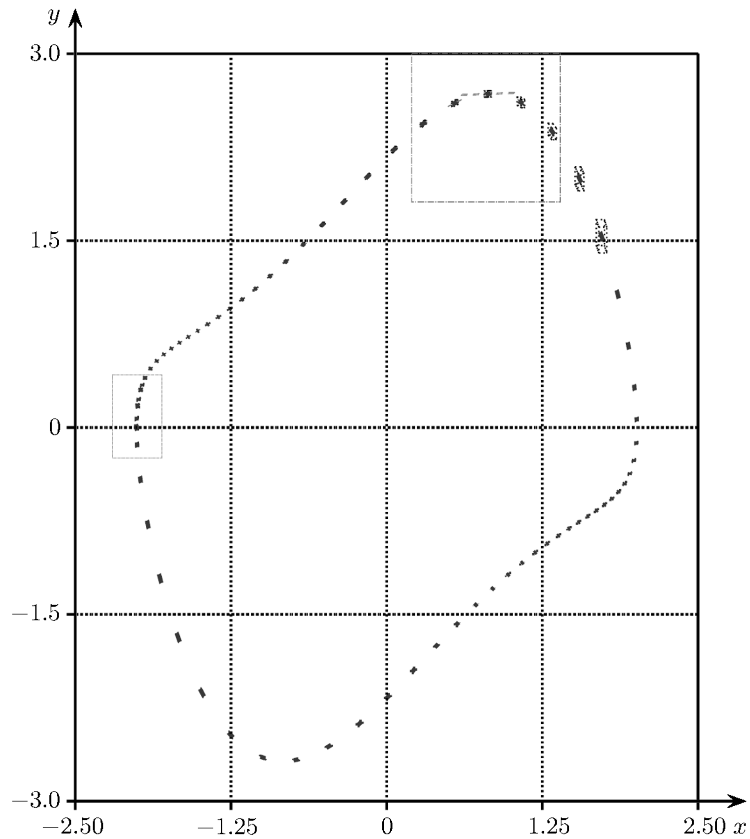

Рис. 2. Множества решений задачи (8), полученные с помощью различных алгоритмов: пунктирная линия – "наивный" алгоритм Пикара; штриховая – стягивающее обрамление Макино–Берца; сплошная – стягивающее обрамление, предложенный вариант.

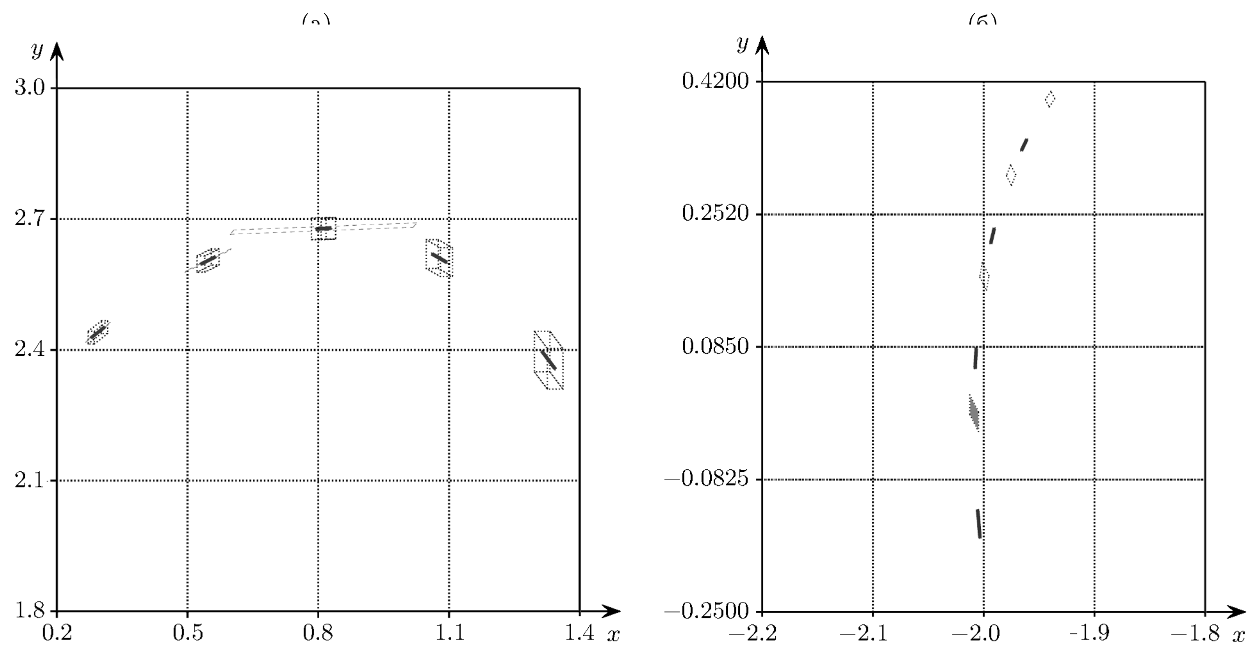

Рис. 3. Множества решений задачи (8), полученные с помощью различных алгоритмов (увеличение, обозначения совпадают с обозначениями на рис. 2): область разрастания оценок для алгоритма Макино–Берца (а); попадание начальной ТМ в себя за период цикла при использовании предложенного в настоящей статье варианта стягивающего обрамления (б): первый период – пунктирная линия, второй – сплошная, начальный параллелограмм залит серым цветом.

Заключение. В работе представлен новый вариант алгоритма стягивающего обрамления и проведено его сравнение с исходным алгоритмом Макино–Берца в применении к задаче о доказательстве существования периодического решения в системе ОДУ. Оба алгоритма и доказательства их свойств изложены в терминологии ТМ, введённой в наших предыдущих работах [8, 9]. Рассмотренный пример позволяет сделать вывод о том, что исходный алгоритм в задаче о циклах не даёт существенных преимуществ относительно "наивного" алгоритма ТМ-интегрирования. Это, однако, не означает, что исходный алгоритм будет проигрывать предложенному в любых задачах построения оценок решений в системах ОДУ, но подобное сравнение выходит за рамки нашего исследования. К недостаткам предложенного метода можно отнести использование только линейной части при переходе к "эталонной" системе координат. В качестве одного из возможных вариантов продолжения настоящей работы можно предложить использование нелинейных членов ТМ. Однако сложность алгоритма стягивающего обрамления в этом случае будет выше. Другое направление, развивающее данную работу, связано с формализацией в рамках используемых нами определений т.н. алгоритмов предобуславливания и с их применением к задаче о доказательстве периодических решений. Как указано в [20], данные алгоритмы также решают проблему разрастания остатков ТМ при интегрировании ОДУ.

Вернёмся к результатам другой нашей работы [17], упомянутой во введении. Как было сказано, доказательство существования периодического решения для системы ОДУ с 79-ю переменными, являющейся галёркинским приближением задачи о двумерном течении Колмогорова, с помощью "наивного" алгоритма в сочетании с топологическим подходом требует примерно одного месяца непрерывных расчётов на пяти видеокартах. При использовании алгоритма стягивающего обрамления в сочетании с техникой сечения Пуанкаре соответствующий результат может быть получен в течении 6 ч на одной видеокарте. Из этого можно сделать общий вывод, что развитие области доказательных вычислений в равной степени зависит как от использования новейших параллельных вычислительных архитектур, так и от развития и оптимизации самих алгоритмов ДВ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-29-10008мк).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Moore R.E.* Methods and Applications of Interval Analysis. SIAM, 1979.
2. *Moore R.E., Kearfott R.B., Cloud M.J.* Introduction to Interval Analysis. SIAM, 2009.
3. *Шокин Ю.И.* Интервальный анализ. Новосибирск, 1981.
4. *Добронец Б.С.* Интервальная математика. Красноярск, 2004.
5. *Шарый С.П.* Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск, 2010.
6. *Бабенко К.И.* О доказательных вычислениях и математическом эксперименте на ЭВМ // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40. Вып. 4 (244). С. 137–138.
7. *Tucker W.* A Rigorous ODE solver and Smale's 14th problem // Found. Comput. Math. 2002. № 2. P. 53–117.
8. *Евстигнеев Н.М., Рябков О.И.* К вопросу о применении интервальных моделей Тейлора к вычислительному доказательству существования периодических траекторий в системах обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 4. С. 530–543.
9. *Евстигнеев Н.М., Рябков О.И.* Об алгоритмах построения изолирующих множеств фазовых потоков и вычислительных доказательствах с применением интервальных моделей Тейлора // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 9. С. 1242–1260.
10. *Pilarczyk P.* Topological-numerical approach to the existence of periodic trajectories in ODE's. // Proc. of the Fourth Int. Conf. on Dynam. Syst. and Differential Equat. May 24–27, 2002. Wilmington, 2002. P. 701–708.
11. *Rihm R.* Interval methods for initial value problems in ODEs // Topics in Validated Computations / J. Herzberger, ed. Amsterdam, 1994. P. 173–207.
12. *Berz M., Makino K.* Verified integration of ODEs and flows using differential algebraic methods on high-order Taylor models // Reliable Computing. 1998. V. 4. P. 361–369.

13. *Berz M., Makino K.* Suppression of the wrapping effect by Taylor model-based verified integrators: long-term stabilization by shrink wrapping // Int. J. of Differential Equat. and Appl. 2005. V. 10. № 4. P. 385–403.
14. *Berz M., Makino K.* Performance of Taylor model methods for validated integration of ODEs // Lect. Notes in Comp. Scie. 2006. V. 3732. P. 65–74.
15. *Lin Y., Stadtherr M.A.* Validated solutions of initial value problems for parametric ODEs // Appl. Numer. Math. 2007. V. 57. P. 1145–1162.
16. *Berz M., Hoefkens J.* Verified high-order inversion of functional dependencies and interval Newton methods // Reliable Computing. 2001. V. 7. № 5. P. 379–398.
17. *Evstigneev N.M., Ryabkov O.I.* On the implementation of Taylor models on multiple graphics processing units for Rigorous computations // Parallel Computational Technologies. PCT 2020 / Sokolinsky L., Zymbler M. (eds). Commun. in Comp. and Inform. Scie. V. 1263. Cham, 2020. P. 85–99.
18. *Makino K., Berz M.* The method of shrink wrapping for the validated solution of ODEs // Michigan State University Report MSU HEP 020510, 2002.
19. *Neher M., Jackson K.R., Nedialkov N.S.* On Taylor model based integration of ODEs // SIAM J. Numer. Anal. 2007. V. 45. № 1. P. 236–262.
20. *Berz M., Makino K.* Suppression of the wrapping effect by Taylor model-based verified integrators: long-term stabilization by preconditioning // Int. J. of Differential Equat. and Appl. 2005. V. 10. № 4. P. 353–384.

Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва,
Институт системного анализа РАН, г. Москва,
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 30.09.2020 г.
После доработки 30.09.2020 г.
Принята к публикации 11.12.2020 г.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2021, том 57, № 3, с. 428–432

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.962.2+517.925.51

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ТЕОРЕМЫ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ В ДИСКРЕТНОМ СЛУЧАЕ

© 2021 г. А. В. Ласунский

Аналог теоремы Четаева–Малкина–Массеры об устойчивости по первому приближению для дифференциальных систем распространяется на дискретные системы, в которых линейная система первого приближения подвергается линейному и нелинейному возмущениям. Полученный результат формулируется в терминах характеристических показателей и коэффициента неправильности Ляпунова линейной системы первого приближения.

DOI: 10.31857/S0374064121030122

Рассмотрим линейную дискретную (конечно-разностную) систему

$$x(t+1)=A(t)x(t),\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{Z}_+. \tag{1}$$

Далее считаем, что $n\times n$-матрица $A(t)$ является вещественнозначной и *вполне ограниченной*; последнее означает, что $A(t)$ невырождена при всех $t\in\mathbb{Z}_+$ и вместе со своей обратной равномерно ограничена на $\mathbb{Z}_+$. Понятие вполне ограниченной матрицы $A(t)$, $t\in\mathbb{Z}_+$, введено в работе [1], в которой, в частности, показано, что любое нетривиальное решение $x(\cdot)$ системы (1) с вполне ограниченной матрицей коэффициентов имеет конечный характеристический показатель $\lambda[x]$. Обозначим характеристические показатели системы (1) через $\lambda_1(A)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n(A)$.

Отметим, что свойство конечности характеристических показателей системы (1) имеет место при более слабых, чем вполне ограниченность матрицы $A(t)$, предположениях. В работе [2] доказано, что при выполнении условий

$$\sup_{t\in\mathbb{Z}_+}\|A(t)\|<+\infty\quad\text{и}\quad \varlimsup_{\mathbb{Z}_+\ni t\to\infty} t^{-1}\ln\Bigl|\prod_{j=0}^{t-1}\det A(j)\Bigr|>-\infty \tag{2}$$

характеристические показатели системы (1) конечны. Позднее в работе [3] было показано, что свойство конечности характеристических показателей системы (1) также будет справедливо, если в (2) первое из его неравенств заменить более слабым неравенством

$$\varlimsup_{\mathbb{Z}_+\ni t\to\infty} t^{-1}\ln\prod_{j=0}^{t-1}\|A(j)\|<+\infty.$$

Для системы (1) через $\sigma_{\text{Л}}(A)$ обозначим её коэффициент неправильности Ляпунова, т.е. величину, определяемую равенством

$$\sigma_{\text{Л}}(A)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A)-\varliminf_{\mathbb{Z}_+\ni t\to\infty} t^{-1}\sum_{m=0}^{t-1}\ln|\det A(m)|,$$

а через $X(t,k)$ – её матрицу Коши (по определению $X(t,k)=X(t)X^{-1}(k)$, $t,k\in\mathbb{Z}_+$, где $X(\cdot)$ – какая-либо фундаментальная матрица системы (1)).

Через $B^n(\rho)$ обозначим открытый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса ρ с центром в нуле. Для каждого фиксированного числа $p>1$ введём важный в дальнейшем класс $\mathcal{F}_p^n$, состоящий из вектор-функций $f\colon\mathbb{Z}_+\times D_f\to\mathbb{R}^n$, где D_f – окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$ (зависящая от выбора f), для которых выполняется неравенство

$$\|f(t,y)\|\leqslant\psi_f(t)\|y\|^p,\quad (t,y)\in\mathbb{Z}_+\times B^n(\rho_f), \tag{3}$$

где число $\rho_f > 0$ и функция $\psi_f\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$ (свои для каждой f) таковы, что $B^n(\rho_f) \subset D_f$ и характеристический показатель функции ψ_f равен нулю. Через $\mathcal{F}_p^n(\mathrm{c})$ обозначим подкласс класса $\mathcal{F}_p^n$, состоящий из вектор-функций, для которых в неравенстве (3) функцию ψ_f можно взять тождественно постоянной.

Наряду с системой (1) рассмотрим действительную нелинейную дискретную систему

$$y(t+1) = A(t)y(t) + f(t, y(t)), \quad t \in \mathbb{Z}_+, \tag{4}$$

где $f \in \mathcal{F}_p^n$ для некоторого $p > 1$.

Дискретные аналоги теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению устанавливались многими авторами.

В случае правильной системы первого приближения (1) с вполне ограниченной матрицей $A(t)$ и нелинейностью f, принадлежащей классу $\bigcup_{p>1} \mathcal{F}_p^n$, в работе [1] получен достаточный признак асимптотической устойчивости нулевого решения системы (4), аналогичный критерию Ляпунова для дифференциальных уравнений [4, с. 136–137; 5, с. 238]. Заметим, что из условия (3) очевидно следует, что система (4) имеет нулевое решение $y(t) \equiv 0$, $t \in \mathbb{Z}_+$.

В случае $f \in \mathcal{F}_p^n(\mathrm{c})$ и выполнении более слабых, чем вполне ограниченность, требований (см. выше) к матрице $A(t)$ правильной системы первого приближения аналогичный результат получен в работе [3]. Дискретный аналог теоремы Четаева–Малкина–Массеры для неправильной системы первого приближения установлен в этой же работе.

Доказательства теорем подобного рода, как и в непрерывном случае, опираются на оценку матрицы Коши системы (1). Такую оценку можно получить с помощью старшего показателя $\lambda_n(A)$ и коэффициента неправильности $\sigma_{\text{Л}}(A)$ системы (1) [6, с. 9].

Наряду с исходной системой (1), старший показатель Ляпунова $\lambda_n(A)$ которой отрицателен, а матрица коэффициентов $A(t)$ вполне ограничена, рассмотрим возмущённую систему

$$y(t+1) = A(t)y(t) + Q(t)y(t) + f(t, y(t)), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{Z}_+, \tag{5}$$

где $f \in \mathcal{F}_p^n$ при некоторой фиксированной постоянной $p > 1$, а вещественнозначная $n \times n$-матрица $Q(t)$ убывает на бесконечности к нулю экспоненциально.

В работе решается следующая задача: получить достаточные условия, которым должны удовлетворять система (1) и матрица $Q(t)$, чтобы нулевое решение системы (5) было асимптотически устойчивым при любом возмущении $f \in \mathcal{F}_p^n$.

Постановка задачи почти традиционна, однако в отличие о классической постановки, во-первых, добавлено линейное возмущение $Q(t)y(t)$ (ср. системы (4) и (5)), а во-вторых, нелинейное возмущение f предполагается принадлежащим более широкому классу $\mathcal{F}_p^n$. Если же $Q(t) \equiv 0$ и $f \in \mathcal{F}_p^n(\mathrm{c})$, то имеем классическую постановку задачи Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

В дальнейшем нам понадобится дискретный аналог [1] неравенства Бихари. Приведём формулировку этого утверждения.

Теорема 1. *Пусть неотрицательная числовая последовательность* $(y_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ *удовлетворяет условиям:* $y_0 \leqslant C = \mathrm{const} > 0$ *и*

$$y_m \leqslant C + \sum_{k=0}^{m-1} a_k \varphi(y_k), \quad m \in \mathbb{N},$$

где $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ *– неотрицательная числовая последовательность, а* $\varphi(y)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *– непрерывная монотонно возрастающая функция. Пусть, кроме того, выполнено неравенство*

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_k < \Phi(\infty), \quad m \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

где $\Phi(z) = \int_C^z dz_1/\varphi(z_1)$. *Тогда справедлива следующая оценка:*

$$y_m \leqslant \Phi^{-1}\biggl(\sum_{k=0}^{m-1} a_k\biggr), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Замечание 1. Если $\Phi(\infty) = \infty,$ то условие (6) излишне.

Лемма. *Пусть для неотрицательных числовых последовательностей* $(u_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ и $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ и чисел $C > 0,$ $a \geqslant 0,$ $p > 1$ *при всех* $m \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство*

$$u_m \leqslant C + \sum_{k=0}^{m-1} v_k(u_k + au_k^p). \tag{7}$$

Тогда, если справедливо неравенство

$$(C^{1-p} + a)\exp\biggl((1-p)\sum_{k=0}^{m-1} v_k\biggr) - a > 0, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

имеет место оценка

$$u_m \leqslant \biggl((C^{1-p} + a)\exp\biggl((1-p)\sum_{k=0}^{m-1} v_k\biggr) - a\biggr)^{1/(1-p)}. \tag{9}$$

Замечание 2. При $a = 0$ имеем дискретный аналог леммы Гроноулла–Беллмана.

Замечание 3. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится, то неравенство (8) выполняется при любом достаточно малом $C.$ Если же этот ряд расходится, то неравенство (8) может выполняться при всех $m \in \mathbb{N}$ только при $a = 0.$

Убедимся, что утверждение этой леммы вытекает из теоремы 1.

Рассмотрим на промежутке $\mathbb{R}_+$ непрерывную монотонно возрастающую положительную функцию $\varphi(y) = y + ay^p,$ $p > 1.$ Так как $1/\varphi(y) = 1/y - ay^{p-2}/(1 + ay^{p-1}),$ то

$$\Phi(z) = \int\limits_C^z \frac{dy}{\varphi(y)} = \int\limits_C^z \frac{dy}{y + ay^p} = \ln\biggl(\frac{z}{C}\biggl(\frac{1 + aC^{p-1}}{1 + az^{p-1}}\biggr)^{1/(p-1)}\biggr).$$

Имеем

$$\Phi(\infty) = \ln\biggl(\frac{1 + aC^{p-1}}{aC^{p-1}}\biggr)^{1/(p-1)},$$

поэтому неравенство (6) теоремы 1 равносильно неравенству (8) леммы. Для обратной функции $\Phi^{-1}(t)$ имеем представление

$$\Phi^{-1}(t) = (-a + (C^{1-p} + a)e^{(1-p)t})^{1/(1-p)},$$

поэтому неравенство (9) леммы следует из основной оценки теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть в системе (5) нелинейное возмущение* f *принадлежит классу* $\mathcal{F}_p^n,$ *где* $p = \mathrm{fix} > 1,$ *и выполнены следующие два неравенства:*

$$\|Q(t)\| \leqslant C_Q \exp\{\lambda_n(A)(p-1)t\}, \quad t \in \mathbb{Z}_+, \tag{10}$$

где C_Q *– постоянная, и*

$$\lambda_n(A)(p-1) + \sigma_{\text{Л}}(A) < 0. \tag{11}$$

Тогда нулевое решение системы (5) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Согласно методу вариации произвольных постоянных имеем

$$y(m) = X(m,0)y(0) + \sum_{k=0}^{m-1} X(m,k+1)(Q(k)y(k) + f(k,y(k))). \tag{12}$$

Для матрицы Коши $X(m,k)$ системы (1) справедлива оценка [6, с. 9]

$$\|X(m,k)\| \leqslant C_\varepsilon \exp\{(\lambda_n(A) + \varepsilon)(m-k) + (\sigma_{\text{Л}}(A) + \varepsilon)k\}, \quad m \geqslant k \geqslant 0, \tag{13}$$

где число $\varepsilon > 0$ может быть взято сколь угодно малым, а C_ε – постоянная, зависящая, вообще говоря, от выбора ε. Из включения $f \in \mathcal{F}_p^n$ следует неравенство

$$\|f(m,y)\| \leqslant C_{\varepsilon_1} \exp(\varepsilon_1 m)\|y\|^p, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \tag{14}$$

где число $\varepsilon_1 > 0$ может быть взято сколь угодно малым, а C_{ε_1} – постоянная, зависящая, вообще говоря, от выбора ε_1.

Из представления (12) и неравенств (13), (14) вытекает оценка

$$\|y(m)\| \leqslant C_\varepsilon \exp\{(\lambda_n(A)+\varepsilon)m\}\|y(0)\| +$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1} C_\varepsilon \exp\{(\lambda_n(A)+\varepsilon)(m-k)+(\sigma_{\text{Л}}(A)+\varepsilon)k\}(\|Q(k)\|\|y(k)\|+C_{\varepsilon_1}\exp(\varepsilon_1 k)\|y(k)\|^p),$$

откуда получаем

$$\|y(m)\| \exp\{-(\lambda_n(A)+\varepsilon)m\} \leqslant C_\varepsilon\|y(0)\| +$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1} C_\varepsilon \exp\{(\sigma_{\text{Л}}(A)-\lambda_n(A)+\varepsilon_1)k\}(\|Q(k)\|\exp(-\varepsilon_1 k)\|y(k)\|+C_{\varepsilon_1}\|y(k)\|^p).$$

Оценив величину $\exp(-\varepsilon_1 k)$ сверху единицей, будем иметь

$$\|y(m)\| \exp\{-(\lambda_n(A)+\varepsilon)m\} \leqslant C_\varepsilon\|y(0)\| + C_\varepsilon \sum_{k=0}^{m-1} \exp\{(\sigma_{\text{Л}}(A)-\lambda_n(A)+\varepsilon_1)k\} \times$$

$$\times \exp\{(\lambda_n(A)+\varepsilon)kp\}(\|Q(k)\|\exp\{-(\lambda_n(A)+\varepsilon)(p-1)k\}\|y(k)\|\exp\{-(\lambda_n(A)+\varepsilon)k\} +$$

$$+ C_{\varepsilon_1}(\|y(k)\|\exp\{-(\lambda_n(A)+\varepsilon)k\})^p). \tag{15}$$

Из условия (10) вытекает оценка

$$\|Q(k)\|\exp\{-(\lambda_n(A)+\varepsilon)(p-1)k\} \leqslant C_Q\exp\{-\varepsilon(p-1)k\} \leqslant C_Q, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

учитывая которую в неравенстве (15), будем иметь

$$\|y(m)\| \exp\{-(\lambda_n(A)+\varepsilon)m\} \leqslant C_\varepsilon\|y(0)\| + C_Q C_\varepsilon \sum_{k=0}^{m-1} \exp\{(\sigma_{\text{Л}}(A)+\lambda_n(A)(p-1)+\varepsilon_1+\varepsilon p)k\} \times$$

$$\times (\|y(k)\|\exp\{-(\lambda_n(A)+\varepsilon)k\} + C_{\varepsilon_1}C_Q^{-1}(\|y(k)\|\exp\{-(\lambda_n(A)+\varepsilon)k\})^p). \tag{16}$$

Из условия (11) следует, что при достаточно малых положительных ε_1 и ε выполняется неравенство $\sigma_{\text{Л}}(A)+\lambda_n(A)(p-1)+\varepsilon_1+\varepsilon p<0$. Зафиксируем такие ε_1 и ε и положим

$$u_m = \|y(m)\|\exp\{-(\lambda_n(A)+\varepsilon)m\}, \quad v_m = C_Q C_\varepsilon \exp\{(\sigma_{\text{Л}}(A)+\lambda_n(A)(p-1)+\varepsilon_1+\varepsilon p)m\}.$$

В этих обозначениях неравенство (16) примет вид (7), в котором $C = C_\varepsilon\|y(0)\|$ и $a = C_{\varepsilon_1}C_Q^{-1}$. Так как ряд $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ сходится, то неравенство (8) леммы выполняется, если $\|y(0)\|$ достаточна мала. Поэтому, согласно лемме работы, имеет место оценка (9), т.е. после очевидных равносильных преобразований оценка

$$\|y(m)\| \leqslant \exp\{(\lambda_n(A)+\varepsilon)m\}C_\varepsilon\|y(0)\|\biggl[(1+C_{\varepsilon_1}C_Q^{-1}(C_\varepsilon\|y(0)\|)^{p-1}) \times$$

$$\times \exp\biggl((1-p)\sum_{k=0}^{m-1} v_k\biggr) - C_{\varepsilon_1}C_Q^{-1}(C_\varepsilon\|y(0)\|)^{p-1}\biggr]^{1/(1-p)}.$$

Из последнего неравенства очевидно следует, что тривиальное решение системы (5) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

В заключение отметим непрерывный аналог теоремы 2.

Рассмотрим действительную нелинейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x + Q(t)x + f(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{17}$$

где $n \times n$-матрицы $A(t)$ и $Q(t)$ непрерывны и ограничены на $\mathbb{R}_+$, а $f(t,x)$ – непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая в некоторой окрестности точки $x = 0$ условию

$$\|f(t,x)\| \leqslant \mathrm{const}\|x\|^p, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{18}$$

где $p > 1$ – фиксированное число. Пусть $\lambda_n(A)$ – наибольший показатель Ляпунова системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{19}$$

а $\sigma_{\text{Л}}(A)$ – её коэффициент неправильности Ляпунова; он определяется равенством

$$\sigma_{\text{Л}}(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A) - \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t \mathrm{Sp}A(u)du.$$

Теорема 3. *Пусть для системы (17) выполнены условие (18), неравенства* $\lambda_n(A) < 0$, $\lambda_n(A)(p-1) + \sigma_{\text{Л}}(A) < 0$ *и при всех* $t \in \mathbb{R}_+$ *оценка* $\|Q(t)\| \leqslant C_Q \exp\{\lambda_n(A)(p-1)t\}$. *Тогда её нулевое решение асимптотически устойчиво.*

Действительно, из условий теоремы следует, что характеристический показатель $\lambda[Q]$ матрицы $Q(t)$ линейного возмущения удовлетворяет оценке $\lambda[Q] < -\sigma_{\text{Л}}(A)$. По теореме Богданова–Гробмана [8, гл. IV, § 5] показатели систем (19) и системы

$$\dot{x} = (A(t) + Q(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{20}$$

совпадают между собой. Так как $\lambda_n(A) < 0$, то $\|Q(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$, а значит, матрица $Q(t)$ имеет нулевое интегральное среднее, поэтому $\sigma_{\text{Л}}(A) = \sigma_{\text{Л}}(A+Q)$. Тогда утверждение теоремы 3 следует из теоремы Четаева–Малкина–Массеры [7, с. 63] для системы (20).

Замечание 4. Из условий $\lambda_n(A) < 0$ и $\|Q(t)\| \leqslant C_Q \exp\{\lambda_n(A)(p-1)t\}$, $t \in \mathbb{R}_+$, следует, что $\|Q(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$. Хорошо известно, что убывающие к нулю на бесконечности линейные возмущения линейной дифференциальной системы могут вызвать, как показано ещё О. Перроном [8, с. 118–119], скачкообразное изменение её характеристических показателей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демидович В.Б.* Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255.
2. *Кузнецов Н.В., Леонов Г.А.* Устойчивость по первому приближению дискретных систем // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 2003. Вып. 1. № 1. С. 28–35.
3. *Кузнецов Н.В., Леонов Г.А.* Критерии устойчивости по первому приближению нелинейных дискретных систем // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 2005. Вып. 2. С. 55–63.
4. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1950.
5. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
6. *Кузнецов Н.В.* Устойчивость дискретных систем. Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. СПб, 2004.
7. *Леонов Г.А.* Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. М.; Ижевск, 2006.
8. *Адрианова Л.Я.* Введение в теорию линейных систем дифференциальных уравнений. СПб, 1992.

Новгородский государственный университет
им. Ярослава Мудрого

Поступила в редакцию 15.01.2020 г.
После доработки 24.12.2020 г.
Принята к публикации 22.01.2021 г.