
СОДЕРЖАНИЕ

Номер 3, 2021

ПЕРСОНАЛИИ

- К 100-летию академика Александра Аркадьевича Красовского
В. Н. Буков 3
-

ЮБИЛЕИ

- Кирилл Иванович Сыпало (к 50-летию со дня рождения) 9
-

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

- Синтез простых робастных регуляторов линейных стационарных динамических систем
В. А. Мозжечков 11
-

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

- Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов
в линейно-квадратичных задачах управления системами
с распределенными параметрами при равномерных оценках целевых множеств
Э. Я. Рапопорт 23
-

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

- Интеллектуальная система планирования групповых действий
беспилотных летательных аппаратов при наблюдении наземных
мобильных объектов на заданной территории
*В. И. Гончаренко, С. Ю. Желтов, В. А. Князь, Г. Н. Лебедев,
Д. А. Михайлин, О. Ю. Царева* 39
- Расчет оптимальной загрузки воздушных транспортных средств
с учетом приоритизации летательных аппаратов
И. П. Богданов, В. А. Нестеров, В. А. Судаков, К. И. Сыпало, Н. Б. Топоров 57
- Задачи минимизации времени перевозок в сетях с переменными интенсивностями потоков
О. А. Косоруков, В. И. Цурков 71
- Новые инструменты и задачи регулирования рынка электроэнергии
А. А. Васин, О. М. Григорьева, А. С. Шендяпин 85
- Численный анализ системы с гетерогенными серверами и мгновенной обратной связью
С. Г. Алиева, А. З. Меликов, М. О. Шахмалыев 98
-

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

- Оперативный способ решения задач многокритериального выбора альтернативы
в базах знаний бортовых оперативно советующих экспертных систем
Б. Е. Федун, Н. Д. Юневич 111
-

РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ И ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ

- Методы и алгоритмы построения сверхразрешения
для последовательности изображений в условиях аппликативных помех
А. Ю. Иванков, С. В. Саввин, А. А. Сирота 129
-

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

Анализ траекторий возвращения от Луны

А. С. Самотохин, Ю. Г. Сихарулидзе

142

Подготовка и выполнение полета квадрокоптера в городе

Н. М. Гревцов, Г. А. Лазурин, Р. М. Мурзагалин

154

РОБОТОТЕХНИКА

Моделирование и управление движением манипулятора
с замкнутой кинематической цепью и линейным приводом

М. Алхаддад

168

УДК 929

К 100-ЛЕТИЮ АКАДЕМИКА АЛЕКСАНДРА АРКАДЬЕВИЧА КРАСОВСКОГО

© 2021 г. В. Н. Буков

АО Бортвые аэронавигационные системы, Москва, Россия

e-mail: v_bukov@mail.ru

Поступила в редакцию 02.04.2020 г.

После доработки 06.01.2021 г.

Принята к публикации 25.01.2021 г.

Герою Социалистического Труда, лауреату двух Государственных премий, доктору технических наук, профессору, академику А.А. Красовскому 10 апреля 2021 г. исполнилось бы 100 лет. Всю свою трудовую деятельность он посвятил научно-педагогической деятельности в стенах Военно-воздушной инженерной академии им. проф. Н.Е. Жуковского, руководил созданной им кафедрой, получившей широкую известность среди отечественных и зарубежных специалистов в области авиационной автоматики. А.А. Красовским были подготовлены 11 докторов и 105 кандидатов технических наук, написаны выдающиеся учебники и широко известные монографии, получившие популярность в научных и инженерных кругах соответствующего профиля. Его жизнь целиком была отдана развитию авиации и укреплению отечественного оборонного потенциала.

DOI: 10.31857/S0002338821030045



Введение. Научная деятельность Александра Аркадьевича Красовского началась с первой статьи “О вязкости электронного газа”, написанной на третьем курсе физико-математического факультета Уральского государственного университета им. М. Горького и опубликованной во все-союзном журнале “Экспериментальная и техническая физика”. В начале Великой Отечественной войны А.А. Красовский в числе сильных студентов был приглашен для обучения в эвакуированную к тому времени в г. Свердловск Военно-воздушную инженерную академию

им. проф. Н.Е. Жуковского. Вся последующая полная творчества жизнь А.А. Красовского была связана именно с этой академией [1].

После успешной защиты в 1952 г. докторской диссертации в области принципов построения, теории проектирования одноканальных систем измерения и управления во вращающейся системе координат А.А. Красовскому предложили возглавить вновь созданную кафедру “Основы автоматизации и телемеханики”. Заместителем был назначен Г.С. Поспелов. Позже они поменялись подчиненностью, когда Гермоген Сергеевич стал начальником факультета, но главное, что эти два необыкновенно талантливых человека оставались друзьями и соратниками всю жизнь.

Среди 29 научных школ академии на сайте¹ Ассоциации выпускников и сотрудников ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского указаны:

Теория и системы управления, навигации и наведения летательных аппаратов (ЛА), основатель А.А. Красовский,

Автоматизированные информационные и управляющие системы, основатели А.А. Красовский и Г.С. Поспелов.

При более внимательном анализе проделанной работы и достигнутых результатов кафедры (№ 36 с 1953 по 1966 гг. и № 37 с 1966 по 2012 гг.), созданной Александром Аркадьевичем, долгие годы руководимой им и продолжающей его дело, можно выделить следующие укрупненные научные направления.

1. Одноканальные системы измерения и управления (с 1952 г.). Основа нового направления систем вооружения с абсолютным приоритетом А.А. Красовского сформулирована в его докторской диссертации. Суть одноканального управления сводится к тому, что у вращающейся вокруг продольной оси ракеты (или головки самонаведения) амплитуда и фаза квазигармонических колебаний одноканального исполнительного устройства создают двумерный вектор управляющего момента в экваториальной плоскости объекта. Применительно к системам наведения беспилотных ЛА использование нового принципа управления означает переход от классической схемы трех каналов (рыскание, тангаж, крен) к одноканальной системе, что позволяет в лучшую сторону изменить основные характеристики ЛА [2].

Для расширения научно-прикладных исследований этого направления было создано в 1965 г. первое в академии межведомственное (Коломенское КБ Машиностроения и Раменское приборостроительное КБ) подразделение – Проблемная лаборатория со штатом 16 единиц, преобразованная в 1975 г. в научно-исследовательскую лабораторию спец-систем автоматического управления ЛА со штатом 30 единиц.

В 1976 г. за создание прикладной теории одноканальных систем управления и измерения А.А. Красовский и его ученики Ю.А. Вавилов, А.И. Сучков и Е.А. Румянцев были удостоены Государственной премии СССР в области науки.

2. Автоматика управляемых снарядов (с 1953 г.). На кафедре были развернуты научные разработки по управлению боевыми частями баллистических ракет [3], однако в 1970-е годы они вместе с соответствующими учебными дисциплинами были переданы в ВИА им. Ф.Э. Дзержинского для проведения конкретных проработок и практических приложений.

По результатам исследований защитили 3 кандидатские диссертации.

3. Управление в человеко-машинных системах (с 1953 г.). Исследования проводились под руководством и при непосредственном участии будущего академика Г.С. Поспелова и были связаны с автоматизацией пилотирования самолетов. Вместе с другими сотрудниками кафедры были сформулированы принципы и отработаны основные технические решения так называемого директорного управления, в значительной степени упрощающего управление самолетом в сложной обстановке.

Позже это направление возродилось на кафедре в другом составе исполнителей. Основное внимание уделялось концепции комплексной оптимизации человеко-машинных систем [4]. Среди решенных частных задач можно отметить использование аппарата нейронных сетей для решения задач поддержки принятия решения и оптимального распределения функций на этапе боевой навигации одноместного вертолета.

4. Автоматизация траекторного управления (с 1954 г.). Под руководством Г.С. Поспелова на базе авиационного полка академии (да, существовал такой!) осуществлялась практическая отработка созданных на кафедре систем управления захода самолета на посадку и собственно посад-

¹ <https://nasledie-vvia.ru/nc/nauchnye-shkoly/>

ки (вплоть до приземления). Было положено начало автоматизации процесса захода на посадку всех типов отечественных самолетов Военно-воздушных сил и гражданской авиации.

Примечательная цитата Гермогена Сергеевича: “Я обратил внимание на слишком медленное сближение с глиссадой планирования. И здесь хотел бы отметить интуицию моего начальника кафедры А.А. Красовского. Он мне сказал: “А возьмите еще интеграл отклонения от глиссады”. Мы это сделали, и все стало на свои места” [1].

5. Общая теория систем (с 1954 г.). Во второй половине 1950-х годов А.А. Красовский, Г.С. Поспелов и докторант К.К. Беля вели исследования в области методов, как сейчас принято называть, теории систем. В частности, были разработаны новые методы интегральных оценок, линеаризации динамических систем и интегрирования линейных дифференциальных уравнений без решения характеристических уравнений на основе степенных рядов. Предложены инварианты фундаментальной матрицы, позволяющие решать ряд задач теории матриц. Исследованы вопросы задач теории инвариантности, в частности, инвариантность динамических процессов автоматических систем относительно переменных параметров объекта и нелинейных характеристик.

Материалы исследований вошли сначала в учебник [5], а затем и в широко известную монографию [6].

6. Автоматизация управления воздушным движением (с 1957 г.). Во второй половине 1950-х годов сотрудниками кафедры под руководством Г.С. Поспелова был выполнен большой объем исследований в области автоматизации управления воздушным движением [7]. Результаты этих исследований легли в основу дальнейших разработок специальных организаций в этой предметной области.

7. Авиационная пассивная теплорадиометрия (с 1957 г.). В июне 1957 г. А.А. Красовский опубликовал в специальном журнале статью с теоретическим обоснованием возможности получения изображения земной поверхности с помощью сверхвысокочастотного радиометра 3-сантиметрового диапазона волн, установленного на самолете. В 1965 и 1966 гг. к экспериментам по теплорадиометрии (ТРМ) присоединились НИИ-20 и Всесоюзный НИИ гидрогеологии и инженерной геологии (ВСЕГИНГЕО) Министерства геологии. Были получены результаты по картографированию пластов вечной мерзлоты и замерзших водоемов.

В конце 1970-х—начале 1980-х годов в некоторых конструкторских бюро с участием сотрудников кафедры стали разворачиваться работы по созданию конкретных пассивных теплорадиометрических координаторов целей [8].

8. Системы автоматического управления пилотируемых ЛА (с 1958 г.). С этим направлением был связан широкий круг исследований, конкретная тематика которых изменялась в соответствии с актуальными требованиями авиационной промышленности и войсковых частей. По инициативе Г.С. Поспелова был приобретен мощный динамический стенд М-4 для полунатурного моделирования динамики полета самолета с использованием реальных пилотажно-навигационных приборов. Работы проводились с использованием передовой аналоговой, а затем цифровой вычислительной техники. На основе получаемых результатов ставились учебные курсы, издавались учебники и монографии [9, 10].

Позже кафедра присоединилась к проводимым в академии исследованиям по аэроавтоупругости ЛА. Была обоснована концепция активного парирования аэроупругих колебаний различных элементов конструкции транспортного самолета на основе сочетания методов параметрической идентификации линейных динамических моделей и аналитического конструирования оптимальных регуляторов.

9. Корреляционно-экстремальные навигационные системы (с 1961 г.). Вторым² неоспоримым приоритетом А.А. Красовского явился предложенный им принцип так называемой корреляционно-экстремальной навигации по геофизическим полям Земли. Сотрудники кафедры создавали теорию [11], изготавливали макеты и участвовали в летных экспериментах (аэродром Летно-испытательного института). Ученики шефа, как его называли за глаза сотрудники кафедры, успешно защищали докторские и кандидатские диссертации.

В 1993 г. группа сотрудников в составе А.А. Красовского, И.Н. Белоглазова, Г.П. Чигина и Г.И. Джанджавы была удостоена Государственной премии РФ.

10. Адаптивное оптимальное управление динамическими системами (с 1959 г.). Основные принципы высказывались в работах А.А. Красовского [12, 13] и сотрудника кафедры В.Н. Варыгина в

² См. разд. 1.

начале 1960-х годов (в то время преобладал термин “самонастраивающиеся системы”), однако широкие систематические исследования в этом направлении начались позже с публикаций А.А. Красовского и В.Н. Букова [14–16].

11. Оптимальное управление динамическими системами (с 1968 г.). А.А. Красовский предложил при постановке задачи оптимального управления динамическим объектом осуществлять компромисс между формализацией требований к управляемому процессу и трудоемкостью получения решения. Соответствующий функционал вначале получил название критерия обобщенной работы [17], а в более поздних трудах А.А. Красовского и его учеников стал именоваться функционалом обобщенной работы (ФОР) [18]. Но наиболее плодотворной для решения задач оптимального управления явилась идея использования так называемой “прогнозирующей модели” для решения задачи синтеза оптимального управления по методу аналитического конструирования (по ФОР).

Большое внимание уделялось решению практических задач, спектр которых включает управление движением маневренного самолета на типовых и на критических режимах, управление отдельными агрегатами и системами самолета, управление различными технологическими процессами и энергетическими системами.

12. Авиационные тренажеры и компьютерные технологии обучения (с 1979 г.). А.А. Красовский организовал проведение исследований в области авиационного тренажеростроения сразу по нескольким направлениям [19]:

создание унифицированных алгоритмических, программных и аппаратных модулей обеспечивающих информационных систем с высокой степенью совместимости;

создание всего комплекса технических средств обучения (ТСО) как единой гаммы технических средств, систем, сценариев и программ на базе унифицированных модулей;

переход на распределенную архитектуру вычислительных систем на базе микроэлектронных вычислительных машин (микро-ЭВМ) и центральных мини-ЭВМ в ТСО старшего уровня;

разработка программных модулей для ТСО и специализированных тренажеров одновременно с созданием каждого нового изделия или системы, выполняемая разработчиком этого изделия или системы.

Для проведения масштабных исследований по данному направлению и направлению разд. 3 в 1993 г. к кафедре был прикомандирован сектор от ФГУП “НИИАО” со штатом 10 единиц.

13. Интегрированные комплексы бортового оборудования (с 1987 г.). Стержнем интеграции бортовых систем и комплексов явились высказанные А.А. Красовским идеи по комплексной оптимизации сбора и обработки информации о полете ЛА, а также оптимизации управления как на отдельных этапах и режимах, так и для всего полета в целом [20]. Проводимые в этих рамках исследования охватывали проблемы предварительной подготовки полетного задания, разработки архитектур вычислительной среды, взаимодействия экипажа с техническими средствами управления полетом и представления информации, формирования и реализации концепции интеллектуальной поддержки экипажа [21, 22].

С целью расширения взаимодействия в 1980 г. к кафедре были прикомандированы сектор перспективных исследований ФГУП “ГосНИИАС” со штатом 9 единиц и лаборатория ПАО “МИЭА” со штатом 9 единиц. Научное руководство этих, как и других аналогичных подразделений при кафедре, осуществлял А.А. Красовский лично и через свое ближайшее окружение.

Начатые на кафедре исследования по бортовой цифровой картографии в интегрированных комплексах бортового оборудования были продолжены сотрудниками и выпускниками кафедры:

создание комплексов подготовки бортовых картографических данных,

разработка технологии бортового единого геоинформационного ресурса,

создание математического обеспечения вертолетной и самолетной систем предупреждения о близости земли,

разработка международных стандартов по системам предупреждения о близости земли в RTCA и по системам предупреждения о прогнозируемом выкатывании за пределы взлетно-посадочной полосы в EUROCAE.

14. Алгебраические методы в теории многосвязных систем. В 1989 г. по предложению А.А. Красовского началось углубленное изучение проблемы интеграции бортовых комплексов. Много-

гранные исследования и построение прикладной теории были сконцентрированы вокруг двух фундаментальных вопросов, ответы на которые не имеют мировых аналогов [23]:

1) какие и каким образом основные свойства интегрированной технической системы могут быть связаны с фундаментальными результатами алгебры,

2) что из себя представляет аналитический подход к интегрированию различных по назначению и принципам функционирования подсистем в единый комплекс с достижением общей для комплекса цели?

Направление продолжает развиваться и сегодня как “управление избыточностью технических систем”, в том числе и сотрудниками ВУНЦ ВВС “ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина” в г. Воронеж.

Заключение. Кафедра А.А. Красовского все неполные 60 лет своего существования отвечала высоким требованиям своего основателя и руководителя, воплощая в научные разработки и практические реализации его идеи и концепции, в том числе и после его безвременной кончины.

На кафедре подготовлены 32 доктора и 213 кандидата технических наук, получено около 500 авторских свидетельств (патентов), 10 сотрудников и выпускников кафедры удостоены Государственных премий СССР и РФ (двое дважды), сотрудниками кафедры получено девять высших Государственных наград.

Фундаментальные результаты всех основных научных направлений школы А.А. Красовского широко публиковались в зарубежных, общесоюзных, всероссийских, отраслевых издательствах и журналах, включались в учебники и использовались в учебном процессе подготовки специалистов различных уровней. Участие представителей научной школы в международных, всероссийских, региональных, межведомственных и ведомственных форумах специалистов по управлению и навигации, по теории систем в различных аспектах, включая руководство организацией и участие в работе оргкомитетов, было одной из устойчивых традиций соответствующей области отечественной науки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бегичев Ю.И., Бронников А.М., Буков В.Н. и др.* 100 лет со дня основания Академии. Кафедра основ автоматики и телемеханики: сб. очерков / Под общ. ред. В.Н. Букова, А.И. Наумова и Д.Е. Таранцева. М.: ИД Академии Жуковского, 2020.
2. *Вавилов Ю.А., Красовский А.А., Румянцев Е.А., Сучков А.И.* Вопросы теории одноканальных систем управления вращающихся ракет. М.: Изд. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1961.
3. *Поспелов Г.С., Доброленский Ю.П.* Автоматика управляемых снарядов: учебник для вузов. М.: Изд. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1963.
4. *Эргатические интегрированные комплексы летательных аппаратов* / Под ред. М.М. Сильвестрова. М.: Филиал Воениздата, 2007.
5. *Красовский А.А., Поспелов Г.С.* Основы автоматики и технической кибернетики. М.: Изд. ВВИА им. проф. проф. Н.Е. Жуковского, 1961.
6. *Красовский А.А., Поспелов Г.С.* Основы автоматики и технической кибернетики. М.: Госэнергоиздат, 1962.
7. *Поспелов Г.С.* Автоматизация взлета, ближней навигации и посадки истребителей: учебное пособие. М.: Изд. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1958.
8. *Федин В.Т.* Авиационная теплорадиометрия (неизлучающая теплорадиолокация). М.: Изд. ВУНЦ ВВС ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, 2009.
9. *Вавилов Ю.А., Кашин Г.Н., Козлов М.С.* Системы автоматического управления самолетами и ракетными комплексами. М.: Изд. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1969.
10. *Красовский А.А., Вавилов Ю.А., Сучков А.И.* Системы автоматического управления летательных аппаратов. М.: Изд. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1986.
11. *Белоглазов И.Н., Джанджгава Г.И., Чигин Г.П.* Основы навигации по геофизическим полям Земли. М.: Наука, 1985.
12. *Красовский А.А.* Основы автоматики. Ч. 2. Самонастраивающиеся системы: лекции. М.: Изд. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1959.
13. *Красовский А.А.* Динамика непрерывных самонастраивающихся систем. М.: Наука, 1963.
14. *Красовский А.А.* Оптимальные алгоритмы в задаче идентификации с адаптивной моделью // *АиТ.* 1976. № 12. С. 75–82.
15. *Буков В.Н.* Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М.: Наука, 1987.

16. *Красовский А.А.* Неклассическая оптимизация и адаптивное оптимальное управление // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1992. № 6. С. 3–17.
17. *Красовский А.А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973.
18. *Красовский А.А., Буков В.Н., Шендрик В.С.* Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. М.: Наука, 1977.
19. *Красовский А.А.* Пилотажно-навигационные и комплексные тренажеры: материалы лекций. М.: Изд. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1981.
20. *Красовский А.А.* Боевое применение и эффективность ПНК: материалы лекций. М.: Изд. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1983.
21. *Буков В.Н., Горюнов С.В., Косьянчук В.В., Кулабухов В.С., Наумов А.И., Рябченко В.Н.* Основы интеграции систем авиационного оборудования: учебное пособие. М.: Изд. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 2007.
22. *Сельвесюк Н.И., Бронников А.М., Косьянчук В.В., Меркулов В.А., Наумов А.И.* Пилотажно-навигационные комплексы летательных аппаратов. Ч. 1. М.: Изд. ВУНЦ ВВС ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, 2011.
23. *Буков В.Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд-во Н.Ф. Бочкаревой, 2006.

ЮБИЛЕИ

КИРИЛЛ ИВАНОВИЧ СЫПАЛО (К 50-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)



18 декабря 2020 г. Кириллу Ивановичу Сыпало, генеральному директору ФГУП “ЦАГИ”, члену-корреспонденту РАН, доктору технических наук, профессору, члену Редколлегии нашего журнала исполнилось 50 лет!

Кирилл Иванович яркий представитель нового поколения ученых-специалистов в области авиационной и космической техники, сложившегося уже в современной России. Именно это поколение ответственно за последние достижения в указанных областях науки и техники РФ.

К.И. Сыпало окончил Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) в 1993 г., прошел путь от ассистента до профессора и первого проректора университета.

Кирилл Иванович известный специалист в области навигации и управления летательных аппаратов различных классов и назначений, функционирующих в условиях влияния разнородных по своей природе неконтролируемых факторов, автор более 60 научных печатных трудов, включая статьи в источниках, индексируемых в международных системах цитирования, четырех монографий, в том числе одной, опубликованной за рубежом, член Экспертного совета по методическому и организационному обеспечению научно-технического сопровождения реализации государственной программы “Развитие авиационной промышленности на 2013–2025 годы”, член Экспертного совета ФГБУ “НИЦ “Институт им. Н.Е. Жуковского”, член Совета по науке и технике при Комитете государственной Думы по науке и наукоемким технологиям, член Общественного совета при Министерстве науки и высшего образования РФ.

Кирилл Иванович Сыпало известен как автор многих инновационных научно-технических решений, в том числе:

- эффективных процедур оптимального планирования навигационных средств наземного комплекса управления современных и перспективных космических систем,

- теоретических основ программно-математического обеспечения бортовой индивидуально-адаптированной информационно-экспертной системы поддержки действий летчика при выполнении типовых полетных режимов,

- системного подхода к формированию облика бортовой интегрированной системы управления и навигации высокоскоростного аэробаллистического летательного аппарата (ЛА),
- алгоритмов высокоточного терминального наведения и идентификации аэродинамических характеристик аэробаллистического ЛА,
- алгоритмов глубоко интегрированной инерциально-спутниковой системы навигации в условиях помех,
- концепции и облика перспективного многоцветного авиационно-космического комплекса.

Редколлегия и редакция журнала “Известия РАН. Теория и системы управления” сердечно поздравляют Кирилла Ивановича Сыпало с Юбилеем, желают ему здоровья, счастья и дальнейших творческих успехов!

**УПРАВЛЕНИЕ
В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ**

УДК 62-50+519.8

**СИНТЕЗ ПРОСТЫХ РОБАСТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ЛИНЕЙНЫХ
СТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

© 2021 г. В. А. Мозжечков

ЗАО “Инженерно-технический центр “Привод”, Тульский государственный ун-т, Тула, Россия

e-mail: itc@tulaprivod.ru

Поступила в редакцию 14.04.2020 г.

После доработки 24.09.2020 г.

Принята к публикации 30.11.2020 г.

Рассматривается задача синтеза динамических регуляторов с простой структурой в составе линейной стационарной динамической системы со скалярным управлением и векторной обратной связью при наличии возмущающего воздействия. Простым регулятором назван регулятор, структуру которого невозможно упростить, поскольку упрощение, состоящее в исключении из нее любого элемента, приводит к невозможности выполнить все требования, предъявляемые к синтезируемой системе. Учитывается условие обеспечения робастности синтезируемой системы с использованием оригинального показателя грубости регулятора. Предложенный показатель позволяет выделить среди множества простых регуляторов такой, который придает системе максимальную робастность. Предложен метод решения рассматриваемой задачи, приведен пример его реализации.

DOI: 10.31857/S0002338821030136

Введение. В теории управления значительное внимание уделяется получению не только эффективных, но и простых решений. Одной из первых работ, посвященных проблеме минимизации сложности системы управления при ее математическом синтезе, стала публикация [1]. В ней сложность регулятора оценивалась порядками числителя и знаменателя передаточной функции регулятора. Затем в [2–5] идея учета сложности при синтезе систем управления была представлена в форме принципа, названного авторами принципом сложности. В [6] была поставлена и решена задача упрощения структуры линейной системы, синтезированной методом аналитического конструирования оптимальных регуляторов, путем замены точного решения приближенным, предполагающим исключение несущественных обратных связей. При этом сложность системы оценивалась взвешенной суммой ненулевых элементов матрицы обратных связей. В [7, 8] был предложен метод синтеза регуляторов минимального порядка, основанный на использовании методов нелинейного программирования для приближенного решения задачи размещения полюсов синтезируемой системы. Решению задачи определения оптимального набора обратных связей с целью минимизации сложности системы, оцениваемой порядком регулятора, посвящена работа [9]. В [10–15] описана проблема существования и построения стабилизаторов низкого порядка для линейных систем. Методы синтеза стабилизирующих регуляторов с использованием линейных матричных неравенств, учитывающие требование ограничения сложности регулятора, были рассмотрены в [16–18]. Ограничение сложности системы с помощью простейших регуляторов с заданной структурой реализовано в методах, представленных в [12, 19–23]. Задачи упрощения регуляторов, синтезированных классическими методами теории управления, решены в [6, 10, 15, 17, 20, 22, 24–30].

В работах [31, 32] простым регулятором предложено называть регулятор, структуру которого невозможно упростить, поскольку упрощение, состоящее в исключении из нее любого элемента, приводит к невозможности выполнить все требования, предъявляемые к синтезируемой системе.

В структуре простого регулятора отсутствуют избыточные элементы: каждый элемент необходим, а их совокупность достаточна для обеспечения желаемых характеристик системы. Выявление множества простых регуляторов, соответствующих указанному определению, предполагает использование следующего правила сравнения сложности структур регуляторов: рассматривае-

мая структура сложнее, чем некоторая другая, если в ней содержатся все элементы другой структуры и некоторые дополнительные элементы. Указанное правило сравнения сложности выгодно отличается от сравнения сложности по порядку регуляторов, поскольку более полно учитывает информацию, заключенную в описании регулятора.

В результате применения предложенного правила сравнения сложности выявляется в общем случае не единственный вариант, а множество вариантов простых регуляторов, обеспечивающих придание системе желаемых характеристик. Найденные простые регуляторы обеспечивают разную степень чувствительности характеристик системы к изменениям параметров объекта управления, т.е. обеспечивают различную робастность системы. Рациональным основанием выбора единственного варианта из найденного множества простых регуляторов является максимизация робастности системы.

Проблема проектирования робастных систем в значительной мере ассоциирована с проблемой синтеза регуляторов низкой сложности. Это обусловлено тем, что именно при синтезе робастных систем с особой остротой проявилась проблема хрупкости [33] (низкой робастности) регуляторов высокого порядка. Обнаружилось, что робастность системы не удается обеспечить только назначением соответствующих характеристик замкнутой системы (например, больших запасов устойчивости, узкой полосы пропускания, H^∞ -оптимизации и т.д.). Структура регулятора оказалась существенным фактором, от которого зависит робастность системы. Причем снижение порядка регулятора, как правило, позволяло ее повысить. В этой связи были предложены методы синтеза робастных систем, основанные на назначении соответствующих требований к характеристикам замкнутой системы в сочетании с использованием регулятора низкого порядка с заданной структурой [19–23]. Однако при этом оставалась недостаточно исследованной зависимость робастности системы от структуры регулятора.

В данной работе предложен показатель грубости регулятора, математически описывающий связь структуры регулятора и робастности системы, позволяющий выделить из множества простых структур регуляторов структуру, оптимальную по критерию робастности. Разработан формализованный метод синтеза динамических регуляторов с простой структурой в составе линейной системы со скалярным управлением и векторной обратной связью при наличии возмущающего воздействия, позволяющий находить простую структуру регулятора, оптимальную по критерию робастности.

1. Предварительное обсуждение задачи. Далее будет показано, что искомые коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ полиномов операторного уравнения, описывающего регулятор, определяются линейным векторным уравнением

$$G_1\alpha_1 + G_2\alpha_2 + \dots + G_n\alpha_n = h, \quad (1.1)$$

где G_1, G_2, \dots, G_n, h – векторы-столбцы, их элементы – числа. Значения векторов G_1, G_2, \dots, G_n определяются параметрами объекта управления. Вектор h составлен из коэффициентов полиномов передаточных функций синтезируемой системы по управляющему и возмущающему воздействиям.

Регулятор с набором коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ можно упростить, если некоторые коэффициенты обнулить и рассматривать их как константы, равные нулю, а требование (1.1) обеспечить настройкой остальных (настраиваемых) коэффициентов, значения которых можно свободно выбирать. Например, регулятор, описываемый передаточной функцией $(\alpha_1 p^2 + \alpha_2 p + \alpha_3)/(\alpha_4 p^2 + \alpha_5 p + \alpha_6)$, где p – комплексная переменная преобразования Лапласа, можно упростить и получить PID-регулятор, если принять $\alpha_4 = \alpha_6 \equiv 0$, или PI-регулятор, если принять $\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_6 \equiv 0$. Регулятор первого порядка с передаточной функцией $(\alpha_2 p + \alpha_3)/(\alpha_5 p + \alpha_6)$ получается, если принять $\alpha_1 = \alpha_4 \equiv 0$. В данном примере рассмотрен динамический регулятор со скалярной обратной связью по выходу системы. Очевидно, аналогичные упрощения могут производиться и по отношению к операторным уравнениям, описывающим регуляторы с векторной обратной связью, в которой кроме выхода системы (управляемой переменной) используется произвольный набор переменных состояния и возмущающего воздействия.

Сокращение набора настраиваемых коэффициентов и, таким образом, упрощение регулятора ограничивается необходимостью выполнения условия (1.1). Набор настраиваемых коэффициентов $\{\alpha_{ij}\}$, $i \in S \subseteq \{1, n\}$ должен быть таким, чтобы обеспечивалась возможность выполнить условие (1.1) выбором значений этих коэффициентов при условии равенства нулю остальных коэффициентов, т.е. при условии $\alpha_i \equiv 0, \forall i \notin S$.

Набор S взаимно однозначно определяет структуру регулятора, поэтому далее будем отождествлять набор S и структуру регулятора. В некотором наборе S могут присутствовать избыточные элементы, т.е. такие, которые можно исключить из S , сохранив возможность выполнения условия (1.1). Исключение компонент из S эквивалентно обнулению соответствующих коэффициентов α_i в (1.1). Если исключить из некоторого набора S все избыточные компоненты, получим набор, в котором исключение любой компоненты приводит к невозможности выполнить все требования, предъявляемые к синтезируемой системе.

О п р е д е л е н и е 1. Набор S , обеспечивающий выполнение всех требований к синтезируемой системе, в котором исключение любой компоненты приводит к невозможности выполнить все требования к синтезируемой системе, будем называть простым набором, определяющим простую структуру регулятора. Соответствующий регулятор с простым набором настраиваемых коэффициентов $\{\alpha_i\}$, $i \in S \subseteq \overline{1, n}$, является простым регулятором (регулятором несокращаемой сложности).

Регулятор с набором настраиваемых коэффициентов $\{\alpha_i\}$, $i \in S \subseteq \overline{1, n}$, позволяет реализовать равенство (1.1), т.е. придать системе желаемые характеристики, если пространство векторов G_i , $i \in S$ (векторов G_S) содержит вектор h или, что эквивалентно, если вектор h принадлежит линейной оболочке [34] векторов G_S .

Набор векторов G_S является простым, если составляющие его векторы линейно независимы, а их оболочка содержит вектор h . В таком случае исключение любого вектора из набора G_S приводит к выходу вектора h из их оболочки. Иными словами, простой набор G_S является базисом в пространстве векторов $\{G_S, h\}$.

Простой регулятор может быть не единственным, т.е. может быть несколько простых регуляторов, обеспечивающих решение задачи синтеза, особенно в случае, когда допускается приближенное выполнение условия (1.1). Простые регуляторы в силу использования различных наборов S различаются перечнем обратных связей, передаточными функциями, а также робастностью системы, использующей данный регулятор. Выбор предпочтительного варианта регулятора основывается на учете указанных различий. Для каждого простого набора векторов G_S уравнение (1.1) однозначно определяет значения настраиваемых коэффициентов регулятора $\{\alpha_i\}$, $i \in S$.

Таким образом, свобода выбора при синтезе простых регуляторов имеется лишь в части выбора структуры регулятора S .

В данной работе в качестве оценочного показателя при выборе структуры простого регулятора будем рассматривать степень робастности системы, обеспечиваемой регулятором. Считаем, что значения компонент вектора h назначены при определении желаемых передаточных функций замкнутой системы по управляющему и возмущающему воздействиям с учетом требований робастности. В таком случае малые изменения вектора h не приводят к потере устойчивости и значительному ухудшению характеристик системы.

Робастность системы можно обеспечить, если исключить возможность больших изменений вектора h в результате малых изменений параметров объекта управления. Для этого необходимо, чтобы структура S регулятора обеспечивала малую чувствительность вектора h к вариациям параметров объекта управления.

Вариации параметров объекта вызывают отклонения векторов G_k , $k \in S$, от их номинальных значений на величины ΔG_k , что, согласно (1.1), приводит к изменению вектора h . Отклонение Δh_k вектора h от номинала, обусловленное отклонением ΔG_k , определяется, согласно (1.1), равенством $\Delta h_k = \alpha_k \Delta G_k$. Следовательно, $\|\Delta h_k\| = \alpha_k \|\Delta G_k\|$, где $\|\cdot\|$ — норма вектора, откуда получаем

$$\|\Delta h_k\| / \|\Delta G_k\| = \alpha_k. \tag{1.2}$$

Коэффициент чувствительности γ_k вектора параметров h системы к вариациям параметров объекта, проявляющимся через вектор G_k , определим как отношение относительного приращения $\|\Delta h_k\| / \|h\|$ нормы вектора h к относительному приращению $\|\Delta G_k\| / \|G_k\|$ нормы вектора G_k . Тогда с учетом (1.2) получаем

$$\gamma_k = \alpha_k \|G_k\| / \|h\|. \tag{1.3}$$

Для простого набора S , согласно правилу Крамера [34], $\alpha_k = \det(h, G_{S \setminus k}) / \det G_S$, где $\det G_S$ — детерминант (определитель) матрицы G_S , а $\det(h, G_{S \setminus k})$ — определитель матрицы, получаемой из

матрицы G_S заменой столбца G_k , $k \in S$ на столбец h . Следовательно, равенство (1.3) можно записать в виде

$$\gamma_k = \frac{\|G_k\| \det(h, G_{S \setminus k})}{\|h\| \det G_S}. \quad (1.4)$$

В общем случае, включающем приближенное выполнение равенства (1.1), значения $\{\alpha_i\}$, $i \in S$, будем определять методом наименьших квадратов. Тогда $\alpha_k = \det(G_S^T h, \Gamma_{S \setminus k}) / \det \Gamma_S$, где $\det \Gamma_S$ – определитель матрицы Грама системы векторов G_S , т.е. определитель матрицы $\Gamma_S = G_S^T G_S$; при этом $\det(G_S^T h, \Gamma_{S \setminus k})$ – определитель матрицы, получаемой из матрицы Γ_S заменой в ней столбца, соответствующего G_k , $k \in S$, на столбец $G_S^T h$. Следовательно,

$$\gamma_k = \frac{\|G_k\| \det(G_S^T h, \Gamma_{S \setminus k})}{\|h\| \det \Gamma_S}. \quad (1.5)$$

Из полученных выражений (1.3)–(1.5) следует, что чувствительность γ_k возрастает: 1) с ростом длины вектора G_k , отнесенной к длине вектора h ; 2) при приближении к нулю определителя $\det \Gamma_S$, т.е. при слабой степени линейной независимости векторов G_S , 3) при возрастании определителя $\det(G_S^T h, \Gamma_{S \setminus k})$, т.е. при приближении вектора h к вектору нормали гиперплоскости, в которой лежат векторы G_i , $i \in S \setminus k$ (векторы $G_{S \setminus k}$).

Перечисленные факторы, вызывающие возрастание коэффициентов γ_k , являются фундаментальными причинами высокой чувствительности системы к параметрическим возмущениям.

Гиперчувствительность системы к вариациям параметров объекта имеет место, как следует из сказанного выше, если: 1) в наборе векторов G_S есть вектор G_k с длиной существенно больше длины вектора h ; 2) векторы G_S почти линейно зависимы, т.е. лежат почти целиком в некоторой гиперплоскости \mathfrak{S} их полного пространства; 3) вектор h почти ортогонален линейной оболочке векторов $G_{S \setminus k}$. В таком случае вектор G_k расположен под малым углом к гиперплоскости \mathfrak{S} и малое его отклонение может привести его в \mathfrak{S} , т.е. в оболочку векторов $G_{S \setminus k}$. В результате вектор h , согласно (1.1), совершит поворот, переместившись из исходного положения в гиперплоскость \mathfrak{S} . Поскольку вектор h в исходном положении почти ортогонален \mathfrak{S} , то угол его поворота окажется большой, его новое положение окажется квазиортогонально номинальному положению. Дальнейший поворот вектора G_k с пересечением гиперплоскости \mathfrak{S} может развернуть вектор h на угол, близкий 180° . В таком случае малое отклонение вектора G_k вызовет большое отклонение вектора h и соответствующее изменение пропорций коэффициентов полиномов передаточных функций замкнутой системы вплоть до смены их знаков, что влечет за собой изменение характеристик системы вплоть до потери устойчивости.

В качестве показателя, оценивающего чувствительность системы к вариациям параметров объекта, при использовании регулятора со структурой, определяемой набором S , будем применять норму вектора $\gamma = (\gamma_k)$, $k \in S$, т.е. величину

$$\gamma(S) = \|\gamma\|. \quad (1.6)$$

В частности, могут использоваться нормы, описываемые формулой

$$\|\gamma\|_p = \left(\sum_k |\gamma_k|^p \right)^{1/p},$$

в которой p – натуральное число. Например:

$$\begin{aligned} \|\gamma\|_1 &= \sum_k |\gamma_k|, \\ \|\gamma\|_2 &= \left(\sum_k |\gamma_k|^2 \right)^{1/2}, \\ \|\gamma\|_\infty &= \max_k |\gamma_k|. \end{aligned}$$

Чувствительность $\gamma(S)$ при использовании нормы $\|\gamma\|_\infty$ возрастает или, как минимум, остается неизменной при усложнении регулятора, т.е. при смене значения S на значение $S' \supset S$ имеем $\gamma(S') \geq \gamma(S)$. Этим объясняется феномен снижения грубости регуляторов с ростом их порядка, отмечаемый многими авторами [19–23, 33].

О п р е д е л е н и е 2. Робастность системы, в которой используется регулятор со структурой S , будем оценивать показателем

$$\rho(S) = 1/\gamma(S). \quad (1.7)$$

Высокой робастности и низкой чувствительности системы к вариациям параметров объекта соответствуют большие значения $\rho(S)$ и наоборот.

Показатель робастности $\rho(S)$ является функцией набора $S \subseteq \overline{\{1, n\}}$. Следовательно, рациональный выбор конкретного набора S и, таким образом, выбор структуры регулятора позволяет оптимизировать робастность системы.

В данной статье предложен метод поиска простого набора S^* и соответствующего ему регулятора, доставляющего максимум показателю робастности (1.7). Далее сформулируем рассматриваемую задачу более детально.

2. Математическая постановка задачи. Будем считать, что объект управления описывается системой уравнений:

$$\dot{x} = Ax + B_u u + B_f f, \quad (2.1)$$

$$y = Cx, \quad (2.2)$$

где x – вектор состояния, $\dot{x} = dx/dt$, t – время, u, f – скалярное управляющее и возмущающее воздействия, y – вектор выходов, доступных для использования в качестве сигналов обратной связи в регуляторе, его первая компонента y_1 является выходом синтезируемой системы, A, C и B_u, B_f – заданные постоянные матрицы и векторы соответствующих размерностей, их элементы – действительные числа.

Из уравнений (2.1), (2.2) следует уравнение, отражающее зависимость вектора выходов y от воздействий u, f :

$$a(p)y = b_u(p)u + b_f(p)f, \quad (2.3)$$

где $a(p)$ – характеристический полином объекта управления, $b_u(p), b_f(p)$ – векторы, компоненты которых – полиномы числителей передаточных функций объекта управления соответственно по управляющему и возмущающему воздействиям, p – комплексная переменная преобразования Лапласа.

Регулятор опишем уравнением

$$r(p)u = q_g(p)g - \ell(p)y + q_f(p)f, \quad (2.4)$$

где g – скалярное задающее воздействие (вход синтезируемой системы), $r(p), q_g(p), q_f(p)$ – полиномы, $\ell(p)$ – полиномиальный вектор-строка, $r(p)$ – характеристический полином регулятора, $q_g(p), \ell(p), q_f(p)$ – числители передаточных функций регулятора соответственно по задающему воздействию, по каналам обратных связей и по возмущающему воздействию.

Из уравнений (2.3), (2.4) следует уравнение, отражающее зависимость выхода синтезируемой системы y_1 от воздействий g, f :

$$h_s(p)y_1 = h_g(p)g + h_f(p)f, \quad (2.5)$$

в нем

$$h_s(p) = a(p)r(p) + \ell(p)b_u(p), \quad (2.6)$$

$$h_g(p) = b_{u1}(p)q_g(p), \quad (2.7)$$

$$h_f(p) = b_{u1}(p)q_f(p) + b_{f1}(p)r(p) + \ell(p)c(p), \quad (2.8)$$

где $h_s(p)$ – характеристический полином синтезируемой системы, $h_g(p), h_f(p)$ – полиномы числителей передаточных функций синтезируемой системы соответственно по задающему и возмущающему воздействиям, $c(p)$ – вектор, i -я компонента которого определяется выражением $c_i(p) = [b_{ui}(p)b_{fi}(p) - b_{fi}(p)b_{ui}(p)]/a(p)$, причем $c_i(p)$ – полином. Объект управления является управляемым по выходу y_1 относительно управляющего воздействия u , поэтому $b_{u1}(p) \neq 0$.

Считаем заданными желаемые значения коэффициентов полиномов $h_s(p)$, $h_g(p)$, $h_f(p)$, обеспечивающие соответствие характеристик системы назначенным требованиям.

Уравнения (2.6)–(2.8) линейны относительно искомым полиномов регулятора и сводятся в результате приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях оператора p к системе уравнений (1.1), которая в матричной форме записи имеет вид

$$G\alpha = h, \quad (2.9)$$

где вектор неизвестных α составлен из коэффициентов искомым полиномов регулятора $q_g(p)$, $q_f(p)$, $\ell(p)$, $r(p)$, а вектор h – из коэффициентов полиномов синтезируемой системы $h_s(p)$, $h_g(p)$, $h_f(p)$. Матрица $G = (G_k)$, $k \in \{1, n\}$, составлена из столбцов G_k , элементы которых определяются параметрами объекта управления, согласно уравнениям (2.6)–(2.8).

Набор S номеров координат вектора α , свободно выбираемых при решении уравнения (2.9), определяет структуру регулятора с учетом уравнения (2.4) и тождеств $\alpha_i \equiv 0$, $\forall i \notin S$.

Необходимым условием допустимости структуры регулятора S является возможность выбора значений настраиваемых параметров, указанных в S , выполнить требование (2.9) с приемлемой точностью. Это условие описывается формулой

$$\exists \alpha : |G\alpha - h| \leq \Delta, \quad \alpha_i \equiv 0, \quad \forall i \in S, \quad (2.10)$$

где Δ – заданная допустимая невязка приближенного решения уравнения (2.9).

Кроме условия (2.10) при проверке допустимости структуры S будем учитывать список ψ заведомо недопустимых (запрещенных) структур S . В список ψ можно включить наборы S , требующие либо исключающие тождество нулю в (2.10) тех или иных компонент вектора α . В обязательном порядке в запрещающий список ψ включим наборы S , которые предполагают тождество нулю одновременно всех α_i , обозначающих коэффициенты полинома $r(p)$, тем самым запретим тождество $r(p) \equiv 0$. При необходимости в ψ можно включить наборы, запрещающие присутствие в них некоторых сочетаний свободных и тождественных нулю компонент вектора α . Например, можно учесть требование согласования порядков полиномов регулятора: $\text{degr}(p) \geq \max(\text{degr} l_i(p), \text{degr} q_g(p), \text{degr} q_f(p))$, $i \in I$, где I – множество номеров компонент вектора u . Для этого в запрещающий список ψ добавляются все наборы S , для которых условие согласования порядков заведомо не выполняется.

Множество допустимых структур регуляторов и соответствующих им допустимых наборов S обозначим как ζ . Допустимость набора S определяется формулой

$$S \in \zeta \Leftrightarrow (S \notin \psi) \& (\exists \alpha : |G\alpha - h| \leq \Delta, \alpha_i \equiv 0, \forall i \notin S). \quad (2.11)$$

О п р е д е л е н и е 3. Структура регулятора, определяемая допустимым набором S , является простой, если не существует допустимый набор S' , являющийся подмножеством набора S , т.е.

$$S \in \Omega \Leftrightarrow (S \in \zeta) \& (\nexists S' \in \zeta : S' \subset S), \quad (2.12)$$

где Ω – множество простых наборов S .

Настраиваемые параметры $\alpha_S = \{\alpha_i\}$, $i \in S$, регулятора с простой структурой, определяемой набором $S \in \Omega$, вычисляются методом наименьших квадратов из условия минимизации невязки решения уравнения (2.9), дополненного тождествами $\alpha_i \equiv 0$, $\forall i \notin S$. Таким образом

$$\alpha_S = A^+ h, \quad (2.13)$$

где A^+ – матрица, псевдообратная для G_S , т.е. $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$, где $A = G_S$.

Решаемая задача состоит в поиске простого набора S^* , доставляющего максимум показателю робастности (1.7), т.е. требуется найти:

$$S^* \in \Omega : \rho(S^*) = \max_{S \in \Omega} \rho(S). \quad (2.14)$$

Набор S^* определяет искомую структуру регулятора, оптимального по показателю робастности (1.7).

3. Метод решения. Сформулированная выше задача является задачей конечномерной оптимизации. В ней заданы матрица G , вектор h , множество ψ , величина Δ . Требуется с учетом ограничений (2.11), (2.12) определить структуру S^* и соответствующие ей, согласно (2.13), значения

настраиваемых параметров регулятора, обеспечив, согласно (2.14), максимум целевой функции $\rho(S)$, вычисляемой по формулам (1.5)–(1.7). В рассматриваемой задаче целевая функция $\rho(S)$ является нелинейной действительной функцией дискретного аргумента $S \subset \overline{\{1, n\}}$. Ограничения, стесняющие выбор значений S , описываются нелинейными функциями и логическими условиями. Такое сочетание целевой функции, области определения ее аргумента и ограничений выходит за рамки канонических задач, решаемых известными методами оптимизации. Поэтому разработан представленный ниже метод, существенно учитывающий специфику рассматриваемой задачи.

3.1. Описание метода. Предлагаемый метод сводится к следующим действиям.

Шаг 1. Проверяем условие (2.10) для $S = \overline{\{1, n\}}$. Если оно не выполняется, то задача неразрешима, допустимых наборов S не существует; иначе переходим к шагу 2.

Шаг 2. Анализируем наборы S с числом элементов (кардинальным числом) равным рангу матрицы G , т.е. наборы, для которых $\text{card}(S) = \text{rank}(G)$, где $\text{card}(\cdot)$, $\text{rank}(\cdot)$ – функции определения кардинального числа множества и ранга матрицы. Если очередной анализируемый набор S не запрещен (не указан в списке Ψ) и столбцы G_S линейно независимы, тогда вычисляем α_S по формуле (2.13). Если в α_S отсутствуют нулевые компоненты, набор S является простым, иначе простым будет набор $S \setminus S'$, где S' – множество номеров нулевых компонент вектора α_S . Проверяем соответствие характеристик системы заданным требованиям при использовании регулятора с найденной простой структурой. В случае успешного прохождения проверки для найденного простого набора и соответствующих ему параметров регулятора все его надмножества включаем в Ψ , вычисляем значение показателя робастности (1.7) и, если оно лучше рекордного, это значение запоминаем как новый рекорд, а соответствующий ему набор $S^\#$ – как наилучший. Запоминаем значение $\alpha_{S^\#}$ вектора настраиваемых параметров регулятора со структурой $S^\#$. Если анализируемый набор S не запрещен, но столбцы G_S линейно зависимы, тогда рекурсивно выполняем шаги 1 и 2, присвоив матрице G значение G_S . Если проанализированы все наборы S , для которых $\text{card}(S) = \text{rank}(G)$, поиск завершен.

Шаг 3. Присваиваем искомому набору S^* , определяющему оптимальную структуру регулятора, значение $S^\#$, искомым значениям параметров α_{S^*} – значение $\alpha_{S^\#}$.

3.2. Обоснование метода. На шаге 1 проверяется требование (2.10) для полного набора $S = \overline{\{1, n\}}$, поэтому невозможность его выполнения исключает наличие допустимых наборов $S \subset \overline{\{1, n\}}$. На шаге 2 исключены наборы, для которых $\text{card}(S) > \text{rank}(G)$, поскольку такие наборы избыточны: любой линейно независимый набор S с $\text{card}(S) = \text{rank}(G)$ определяет всю линейную оболочку столбцов матрицы G , поэтому расширение набора S не расширяет возможностей выполнения условия (2.10). Набор S на шаге 2 признается простым при выполнении условий, эквивалентных условиям (2.12). Действительно: проверяется условие $S \in \zeta$, а проверка условия $\exists S' \in \zeta: S' \subset S$ сведена к эквивалентной проверке линейной независимости столбцов G_S в сочетании с контролем отсутствия нулей в α_S . Если набор S допустимый, но G_S линейно зависимы, можно сократить этот набор и искать простые наборы среди его подмножеств предлагаемым методом, поэтому в указанном случае выполняется рекурсивное выполнение шагов 1 и 2 после присвоения матрице G значения G_S .

3.3. Вычислительные аспекты метода. Проверку требования (2.10) для $S = \overline{\{1, n\}}$ целесообразно осуществить путем вычисления нормального псевдорешения [34, 35] системы (2.9) \tilde{x} с использованием псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза [35]. Вектор псевдорешения \tilde{x} является ортогональной проекцией вектора h на линейную оболочку столбцов матрицы G и значение $|G\alpha - h|$ минимально, когда $\alpha = \tilde{\alpha}$. В результате условие (2.10) для $S = \overline{\{1, n\}}$ сводится к условию $|G\tilde{\alpha} - h| \leq \Delta$. Перед поиском псевдорешения \tilde{x} целесообразно нормализовать уравнения (2.9), поделив каждое уравнение на значение его правой части, если это значение различно от нуля. В результате погрешности выполнения уравнений (2.9) не будут существенно отличаться. Ранг матрицы при реализации рассматриваемого метода можно вычислять как количество отличных от нуля сингулярных чисел. При проверке отличия чисел от нуля целесообразно использовать известные рекомендации [35] по учету ограниченной точности представления чисел в машинной арифметике.

4. Пример. Рассмотрим задачу синтеза регулятора системы управления электроприводом с учетом конечной жесткости механической передачи движения от двигателя к нагрузке. Объект

управления, включающий в себя двигатель постоянного тока, редуктор и нагрузку, описывается [36] системой уравнений (2.1), (2.2), в которой в рассматриваемом примере матрица C – единичная матрица,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -c/J_l & -(\chi + h_l)/J_l & c/J_l & \chi/J_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c/J & \chi/J & -c/J & -(\chi + hk^2)/J & C_m k/J \\ 0 & 0 & 0 & -kC_e/L & -R/L \end{bmatrix}; \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix}; \quad B_f = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/J_l \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где R, L – сопротивление и индуктивность обмотки двигателя; C_e, C_m – коэффициент противо-ЭДС и коэффициент момента двигателя; k – коэффициент передачи редуктора; J_n, J_d – моменты инерции нагрузки и ротора двигателя; $J = J_d k^2$; h, h_l – коэффициенты вязкого трения в редукторе и в нагрузке; c, χ – коэффициенты жесткости и вязкости механической передачи. В системе СИ: $R = 0.475$; $L = 5.7 \times 10^{-4}$; $C_e = C_m = 6.83 \times 10^{-2}$; $J = 1.88$; $h = 7.325 \times 10^{-4}$; $h_l = 7.64$; $J_l = 220$; $c = 6 \times 10^5$; $\chi = 2300$; $k = 200$. Вектор выходов тождественен вектору состояния: $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \equiv (\varphi_n, \omega_n, \varphi, \omega, I_a)$, где φ_n – угловое положение нагрузки (выход синтезируемой системы), ω, ω_n – угловая скорость вращения вала двигателя и нагрузки, φ/k – угловое положение вала двигателя, I_a – ток в якорной обмотке двигателя. Управляющим воздействием u является напряжение на якорной обмотке двигателя, возмущающим воздействием f – момент сопротивления движению нагрузки. Для измерения и использования в регуляторе доступны все переменные состояния и задающее воздействие g , определяющее требуемое положение выходного вала привода. Воздействие f считаем недоступным для измерения.

Полиномы $h_g^*(p), h_s^*(p)$ желаемой передаточной функции замкнутой системы по задающему воздействию $\varphi_n(p)/g(p) = W_g^*(p) = h_g^*(p)/h_s^*(p)$ имеют следующие значения:

$$h_g^*(p) = 3.51 \times 10^{-2} p^2 + 2.52 \times 10^{-1} p + 1,$$

$$h_s^*(p) = 1.803 \times 10^{-6} p^5 + 5.985 \times 10^{-5} p^4 + 2.915 \times 10^{-3} p^3 + 4.261 \times 10^{-2} p^2 + 2.66 \times 10^{-1} p + 1.$$

С целью обнуления статической ошибки слежения, вносимой возмущающим воздействием, потребуем равенство нулю младшего коэффициента полинома $h_f^*(p)$ желаемой передаточной функции системы по возмущающему воздействию $\varphi_n(p)/f(p) = W_f^*(p) = h_f^*(p)/h_s^*(p)$. Значения остальных коэффициентов полинома $h_f^*(p)$ не назначаем.

Зададим максимально допустимый порядок регулятора равным двум. Считаем, что в передаточных функциях регулятора порядок знаменателя должен быть не меньше, чем порядок числителя, т.е. порядок полиномов $q_g(p), q_f(p), \ell(p)$ не должен превышать порядка полинома $r(p)$. Кроме того, в наборе обратных связей, реализуемых регулятором, обязательно присутствие обратной связи по выходной переменной. Учитывая недоступность для использования в регуляторе значений возмущающего воздействия f , считаем $q_f(p) \equiv 0$. Из коэффициентов полиномов регулятора $q_g(p), l_1(p), l_2(p), l_3(p), l_4(p), l_5(p), r(p)$, остающихся неизвестными, составляем вектор-столбец искомого параметров регулятора:

$$\alpha = [q_g \mid l_{\varphi_n} \mid l_{\omega_n} \mid l_{\varphi} \mid l_{\omega} \mid l_{I_a} \mid r]^T,$$

где $q_g, l_{\varphi_n}, l_{\omega_n}, l_{\varphi}, l_{\omega}, l_{I_a}, r$ – векторы коэффициентов полиномов $q_g, l_{\varphi_n}(p) \equiv l_1(p), l_{\omega_n}(p) \equiv l_2(p), l_{\varphi}(p) \equiv l_3(p), l_{\omega}(p) \equiv l_4(p), l_{I_a}(p) \equiv l_5(p), r(p)$ соответственно. С учетом тождеств $\omega_n \equiv p\varphi_n, \omega \equiv p\varphi, p\omega_n \equiv p^2\varphi_n, p\omega \equiv p^2\varphi$ назначаем порядок полиномов $l_{\varphi_n}(p), l_{\varphi}(p)$ равным нулю, а полиномов $l_{\omega_n}(p), l_{\omega}(p), q_g(p)$ – равным двум. Число компонент n вектора α с учетом принятых предельных порядков полиномов регулятора равно 17.

В список ψ запрещенных наборов включим наборы S , предполагающие тождество нулю одновременно всех коэффициентов полинома $r(p)$, тем самым запретим тождество $r(p) \equiv 0$. Кроме того, в ψ включаем наборы S , для которых заведомо не выполняется вышеуказанное условие согласования порядков полиномов регулятора, а также наборы S , не содержащие компоненту вектора α , которая соответствует обратной связи по выходной переменной.

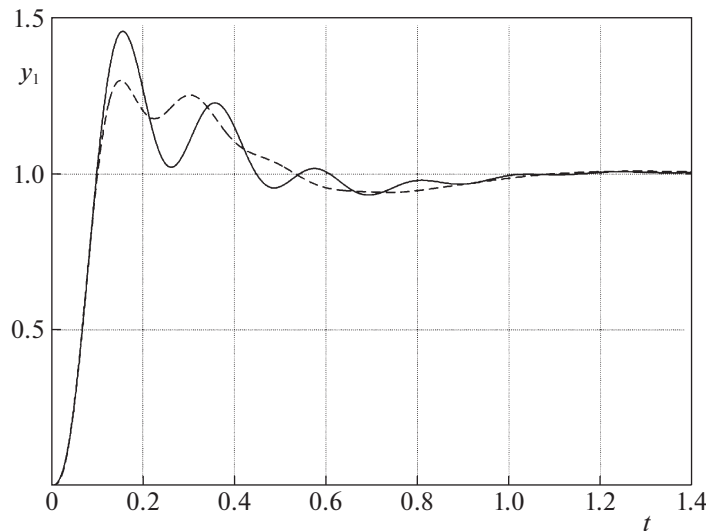


Рис. 1. График возмущенной (сплошная линия) и номинальной (пунктирная линия) переходной функции системы с оптимальным робастным регулятором ($\rho(S) = 1.47$)

Из (2.6)–(2.8), следуя известным правилам перехода от полиномиальных уравнений к алгебраическим [34], получаем систему уравнений вида (2.9), определяющих связь назначенных значений коэффициентов полиномов $h_g(p)$, $h_s(p)$, $h_f(p)$ с параметрами объекта управления и вектором искомых коэффициентов регулятора α . Задаем допустимую невязку приближенного решения уравнения (2.9): $\Delta = \|h\|/100$.

В соответствии с предложенным методом, убедившись в выполнении условия (2.10) для $S = \overline{\{1, n\}}$, переходим к анализу наборов S , составленных из компонент вектора α с числом элементов $\text{card}(S) = \text{rank}(G) = 10$. Следуя предложенному методу, находим простые структуры и среди них – структуру S^* , доставляющую максимум целевой функции $\rho(S)$, вычисляемой по формулам (1.5)–(1.7). Параметры α_s^* определяются формулой (2.13).

В результате поиска найдено 306 простых структур регуляторов, соответствующих условиям (2.11), (2.12) и, следовательно, обеспечивающих выполнение всех требований, предъявляемых к синтезируемой системе. Все они при номинальных значениях параметров объекта управления в равной мере обеспечивают реализацию назначенной желаемой передаточной функции замкнутой системы. Однако они существенно различаются по робастности: соответствующие им значения показателя чувствительности синтезируемой системы $\|y\|_\infty$, вычисленные, согласно (1.5), (1.6), лежат в диапазоне от 0.68 до 2.85×10^5 , что, согласно (1.7), соответствует значениям показателя робастности $\rho(S)$ в диапазоне от 3.5×10^{-6} до 1.47. Проверка показывает, что параметрическое возмущение приводит к потере устойчивости системы, использующей регулятор с низким значением $\rho(S)$. Например, возмущение, состоящее в отклонении на 15% от номиналов параметров c , χ в меньшую сторону и параметра J_l в большую сторону, приводит систему к потере устойчивости, если в ней применен регулятор со значением $\rho(S)$ менее 0.15×10^{-3} . Таким образом, оказалось, что из 306 найденных простых структур только 110 способны сохранить устойчивость системы при указанном возмущении. Причем подавляющее большинство (107 из 110) структур, сохраняющих устойчивость, имеют значение $\rho(S)$ более 6.5×10^{-3} . Среди них положительно выделяются структуры с $\rho(S) > 0.1$. Все они демонстрируют малые отклонения переходной функции (реакции на единичное ступенчатое управляющее воздействие) системы от номинальной при вышеуказанном параметрическом возмущении.

Структуре S^* , оптимальной по показателю робастности $\rho(S)$, соответствует значение $\rho(S^*) = 1.47$. Регулятор с этой структурой описывается операторным уравнением

$$(r_1 p + r_2 p^2)u = (q_{g0} + q_{g1} p + q_{g2} p^2)g - l_{10} y_1 - l_{21} p y_2 - (l_{40} + l_{42} p^2) y_4.$$

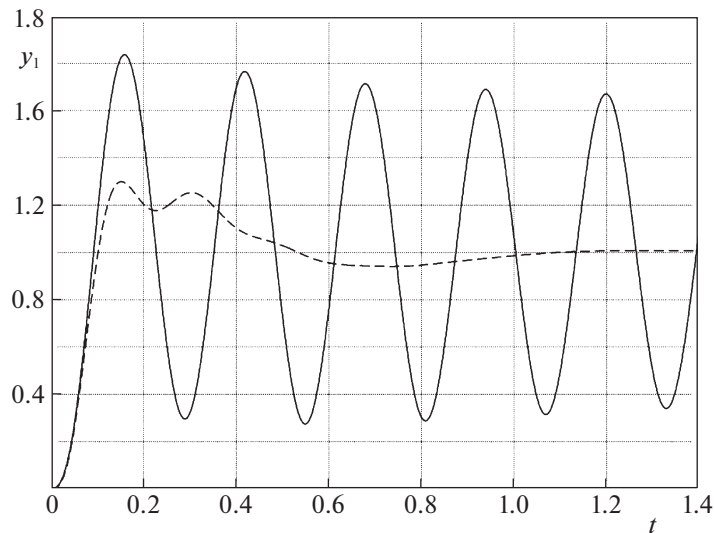


Рис. 2. График возмущенной (сплошная линия) и номинальной (пунктирная линия) переходной функции системы с регулятором низкой робастности ($\rho(S) = 0.0084$)

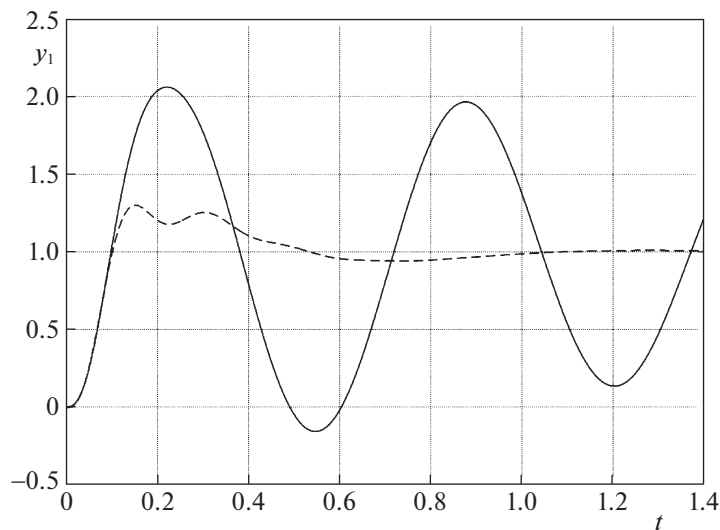


Рис. 3. График возмущенной (сплошная линия) и номинальной (пунктирная линия) переходной функции системы с регулятором низкой робастности ($\rho(S) = 0.0066$)

Он реализует обратную связь по переменным $y_1 \equiv \varphi_n$, $y_2 \equiv \omega_n$ и $y_4 \equiv \omega$ с коэффициентами передачи $l_1(p) = l_{10}$; $l_2(p) = l_{21}p$; $l_4(p) = l_{40} + l_{42}p^2$. Его характеристический полином $r(p) = r_1p + r_2p^2$, а коэффициент передачи в цепи задающего воздействия $q_g(p) = q_{g0} + q_{g1}p + q_{g2}p^2$.

На рис. 1 представлен график переходной функции системы с регулятором, имеющим оптимальную структуру S^* , при наличии параметрического возмущения (сплошная линия) в сравнении с графиком (пунктирная линия) номинальной переходной функции синтезируемой системы. Сопоставление графиков демонстрирует малое отклонение возмущенной переходной функции (сплошная линия) системы с регулятором S^* от номинальной переходной функции (пунктирная линия).

Структуры, характеризующиеся низким значением показателя робастности $\rho(S)$, демонстрируют большое отклонение возмущенной переходной функции системы от номинальной и ее высокую колебательность, что свидетельствует о существенном снижении запасов устойчивости системы.

На рис. 2 и 3 представлены графики переходных функций системы с регулятором, характеризующимся низким значением показателя робастности $\rho(S)$.

Простой регулятор с минимальным показателем робастности ($\rho(S^*) = 3.5 \times 10^{-6}$) описывается уравнением

$$(r_0 + r_2 p^2)u = (q_{g0} + q_{g1}p + q_{g2}p^2)g - l_{10}y_1 - l_{20}y_2 - l_{30}y_3 - (l_{40} + l_{41}p)y_4.$$

Он реализует обратную связь по переменным $y_1 \equiv \varphi_H$, $y_2 \equiv \omega_H$, $y_3 \equiv \varphi$ и $y_4 \equiv \omega$ с коэффициентами передачи $l_1(p) = l_{10}$; $l_2(p) = l_{20}$; $l_3(p) = l_{30}$; $l_4(p) = l_{40} + l_{41}p$. При вышеуказанном параметрическом возмущении система с таким регулятором оказывается неустойчивой.

Таким образом, рассмотренный пример демонстрирует эффективность применения предложенного метода синтеза простых робастных регуляторов с использованием показателя робастности $\rho(S)$, вычисляемого, согласно (1.5)–(1.7).

Заключение. Предложен формализованный метод решения задачи синтеза регулятора с простой структурой в составе линейной системы со скалярным управлением и векторной обратной связью при наличии возмущающего воздействия. Синтезируемый регулятор придает замкнутой системе заданные характеристики и максимальную робастность, оцениваемую с использованием оригинального показателя грубости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Солодовников В.В. Синтез корректирующих устройств следящих систем при типовых воздействиях // *АиТ*. 1951. Т. 12. Вып. 5. С. 352–388.
2. Солодовников В.В., Ленский В.Л. Синтез систем управления минимальной сложности // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*. 1966. № 2. С. 56–68.
3. Солодовников В.В., Бирюков В.Ф., Тумаркин В.И. Принцип сложности в теории управления. М.: Наука, 1977. 344 с.
4. Solodovnikov V. Poorly Defined Problems of Stochastic Optimization and Their Solution with the Aid of the Principle of Complexity // *IFAC Proceedings Volumes*. 1977. V. 10. № 6. P. 649–651.
5. Солодовников В.В., Тумаркин В.И. Теория сложности и проектирование систем управления. М.: Наука, 1990. 168 с.
6. Параев Ю.И., Смагина В.И. Задачи упрощения структуры оптимальных регуляторов // *АиТ*. 1975. № 6. С. 180–183.
7. Balestrino A., Celentano G. CAD of Minimal Order Controllers // *IFAC Proceedings Volumes*. 1979. V. 12. № 7. P. 1–8.
8. Balestrino A., Celentano G. Dynamic Controllers in Linear Multivariable Systems // *Automatica*. 1981. V. 17. № 4. P. 631–636.
9. Гайдук А.П. Выбор обратных связей в системе управления минимальной сложности // *АиТ*. 1990. № 5. С. 29–37.
10. Kell L.H., Bhattacharyya S.P. State-space Design of Low-order Stabilizers // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1990. V. 35. № 2. P. 182–186.
11. Gu D.W., Choi B.W., Postlethwaite I. Low-order Stabilizing Controllers // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1993. V. 38. № 11. P. 1713–1717.
12. Wang Q.G., Lee T.H., He J.B. Low-order Stabilizers for Linear Systems // *Automatica*. 1997. V. 33. № 4. P. 651–654.
13. Fan J.C., Kobayashi T. A Simple Adaptive PI Controller for Linear Systems with Constant Disturbances // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1998. V. 43. № 5. P. 733–736.
14. Grieder P., Kvasnica M., Baotić M., Morari M. Stabilizing Low Complexity Feedback Control of Constrained Piecewise Affine Systems // *Automatica*. 2005. V. 41. № 10. P. 1683–1694.
15. Sano H. Low Order Stabilizing Controllers for a Class of Distributed Parameter Systems. *Automatica*. 2018. V. 92. P. 49–55.
16. Bu J., Sznaier M. A Linear Matrix Inequality Approach to Synthesizing Low-Order Suboptimal Mixed ℓ_1/H_p Controllers // *Automatica*. 2000. V. 36. № 7. P. 957–963.
17. Grigoriadis K.M., Skelton R.E. Low-order Control Design for LMI Problems Using Alternating Projection Methods // *Automatica*. 1996. V. 32. № 8. P. 1117–1125.
18. Wang S., Chow J.H. Low-order Controller Design for SISO Systems Using Coprime Factors and LMI // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2000. V. 45. № 6. P. 1166–1169.
19. Bhattacharyya S.P., Shapellat H., Keel L. Robust Control: the Parametric Approach. Upper Saddle River. N.J.: Prentice Hall, 1995. 672 p.
20. Киселев О.Н., Поляк Б.Т. Синтез регуляторов низкого порядка по критерию H^∞ и по критерию максимальной робастности // *АиТ*. 1999. № 3. С. 119–130.

21. Гончаров В.И., Лиепиньш А.В., Рудницкий В.А. Синтез робастных регуляторов низкого порядка // Изв. РАН. ТиСУ. 2001. № 4. С. 36–43.
22. Грязина Е.Н., Поляк Б.Т., Тремба А.А. Синтез регуляторов низкого порядка по критерию H_∞ : параметрический подход // АиТ. 2007. № 3. С. 94–105.
23. Козлов О.С., Скворцов Л.М. Синтез простых робастных регуляторов // АиТ. 2015. № 9. С. 102–114.
24. Anderson B.D.O., Liu Y. Controller Reduction: Concepts and Approaches // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. V. 34. P. 802–812.
25. Mustafa D., Glover K. Controller Reduction by H_∞ -balanced Truncation // IEEE Transactions on Automatic Control. 1991. V. 36. № 6. P. 668–683.
26. Домбровский В.В. Понижение порядка линейных многомерных систем при H^∞ ограничениях // АиТ. 1994. № 4. С. 123–132.
27. Домбровский В.В. Синтез динамических регуляторов пониженного порядка при H^∞ ограничениях // АиТ. 1996. № 11. С. 10–17.
28. Аполонский В.В., Тарарыкин С.В. Методы синтеза редуцированных регуляторов состояния линейных динамических систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 6. С. 25–33.
29. Аполонский В.В., Копылова Л.Г., Тарарыкин С.В. Редуцирование регуляторов линейных динамических систем на основе анализа физических особенностей объекта // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 5. С. 5–21.
30. Зотов М.Г. Алгоритм конструирования оптимальных регуляторов заданной сложности // Изв. РАН. ТиСУ. 2017. № 3. С. 3–11.
31. Мозжечков В.А. Синтез линейных регуляторов с простой структурой // АиТ. 2003. № 1. С. 27–41.
32. Мозжечков В.А. Простые структуры в теории управления. Тула: ТулГУ, 2000. 216 с.
33. Bhattacharyya S.P. Robust Control Under Parametric Uncertainty: An Overview and Recent Results // Annual Reviews in Control. 2017. V. 44. P. 45–77.
34. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980. 400 с.
35. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980. 280 с.
36. Крутько П.Д. Управление исполнительными системами роботов. М.: Наука, 1991. 336 с.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ В ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ РАВНОМЕРНЫХ ОЦЕНКАХ ЦЕЛЕВЫХ МНОЖЕСТВ

©2021 г. Э. Я. Рапопорт

Самарский государственный технический ун-т, Самара, Россия

e-mail: edgar.rapoport@mail.ru

Поступила в редакцию 16.06.2020 г.

После доработки 12.09.2020 г.

Принята к публикации 30.11.2020 г.

Предлагается конструктивный метод синтеза оптимального управления детерминированными и не полностью определенными системами с распределенными параметрами параболического типа в условиях заданной точности равномерного приближения конечного состояния объекта к требуемому пространственному распределению управляемой величины. Развиваемый подход базируется на разработанном ранее альтернативном методе построения оптимальных алгоритмов программного управления, который распространяет на широкий круг параметризуемых задач оптимального управления результаты теории нелинейных чебышевских приближений и существенно использует фундаментальные закономерности предметной области. Показывается, что искомые уравнения оптимальных регуляторов сводятся к линейным с нестационарными коэффициентами законам обратной связи по управляемому выходу объекта, которые реализуются непосредственно по результатам неполного измерения состояния системы с погрешностью, уменьшающейся с ростом числа учитываемых модальных составляющих управляемой величины.

DOI: 10.31857/S0002338821030148

Введение. Начиная с основополагающих работ А.М. Летова [1, 2] классическая задача синтеза оптимальных регуляторов в линейных системах с квадратичными критериями оптимальности до настоящего времени остается одной из центральных в теории и технике автоматического управления [3–8]. Большинство работ в этом направлении относится к системам с сосредоточенными параметрами (ССП), для которых известные результаты получены методами вариационного исчисления, принципа максимума Понтрягина, динамического программирования для детерминированных моделей объекта [1–5] и с привлечением аппарата функций Ляпунова и линейных матричных неравенств в условиях ограниченной неопределенности модельных представлений [6–8].

Проблема аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) в линейно-квадратичных задачах оптимизации обладает принципиальной спецификой в системах управления динамическими объектами с распределенными параметрами (СРП), в рамках моделей которых описывается широкий круг управляемых процессов самой различной физической природы [9]. Возникающие здесь особенности связаны прежде всего с необходимостью решения задачи АКОР в условиях бесконечной размерности пространственно распределенной управляемой величины [10–13].

Задачи синтеза СРП в указанной постановке рассматривались путем распространения на системы с распределенными параметрами метода динамического программирования в идеализированных и реализуемых условиях соответственно полного и неполного измерения управляемых функций состояния объекта [10–13]. Основные результаты решения проблемы АКОР в ССП и СРП получены применительно к задачам со свободным или подвижным правым концом траек-

тории движения объекта с использованием классических условий трансверсальности на гладкой границе области допустимых конечных состояний управляемой системы.

Однако в целом ряде типичных для приложений и представляющих самостоятельный интерес ситуаций требования к конечному состоянию СРП предъявляются в чебышевской метрике в форме допустимой величины ошибки равномерного приближения управляемой величины к заданному распределению в пространственной области ее определения [13–15]. Известные условия трансверсальности неприменимы на негладкой границе соответствующего целевого множества в бесконечномерном фазовом пространстве СРП, что существенно усложняет решение краевой задачи оптимального управления. В целях опознания конечной точки оптимального процесса здесь могут быть использованы ее специальные альтернативные свойства, определяемые по схеме конструктивного альтернативного метода, который является распространением на задачи оптимизации теории нелинейных чебышевских приближений [13–15].

В настоящей работе предлагается метод решения задачи АКОР для линейных моделей СРП параболического типа в условиях равномерных оценок целевых множеств применительно к детерминированному варианту и в условиях воздействия множественных возмущений. Развиваемый подход существенно опирается на результаты решения задачи оптимального программного управления с помощью альтернативных свойств искоемых экстремалей [13–15].

1. Постановка задачи. Пусть управляемая величина $Q(x, t)$ объекта с распределенными параметрами описывается в зависимости от пространственной координаты $x \in [x_0, x_1]$ и времени $t \in [0, t^*]$ одномерным линейным уравнением второго порядка в частных производных параболического типа с самосопряженным дифференциальным оператором в его правой части:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = b(x) \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} + c(x) \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} + c_1(x) Q(x, t) + f_v(x) u_v(t) + f_\eta(x) \eta_1(t) \quad (1.1)$$

с начальными

$$Q(x, 0) = Q_0(x) = Q_0 = \text{const} < 0 \quad (1.2)$$

и граничными условиями

$$\alpha_0 Q(x_0, t) + \beta_0 \frac{\partial Q(x_0, t)}{\partial x} = 0; \quad \alpha_1 Q(x_1, t) + \beta_1 \frac{\partial Q(x_1, t)}{\partial x} = u_s(t) + \eta_2(t); \quad 0 \leq t \leq t^* \quad (1.3)$$

при сосредоточенном внутреннем $u_v(t)$ или граничном $u_s(t)$ кусочно-непрерывных управляющих воздействиях; заданных достаточно гладких функциях $f_v(x)$, $f_\eta(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $c_1(x)$; постоянных коэффициентах $\alpha_0, \alpha_1 \geq 0$, $\beta_0, \beta_1 > 0$ и кусочно-непрерывных внешних возмущениях $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$, учитываемых далее только по каналу управляющего воздействия. Управляющие и возмущающие воздействия не стесняются никакими дополнительными ограничениями.

Всюду далее исключается для простоты случай одновременного использования $u_v(t)$ и $u_s(t)$, полагая

$$u(t) = u_v(t) \quad \text{или} \quad u(t) = u_s(t); \quad (1.4)$$

$$\eta(t) = \eta_1(t) \quad \text{или} \quad \eta(t) = \eta_2(t). \quad (1.5)$$

Пусть необходимо обеспечить за фиксируемое априори конечное время t^* заданную точность ε равномерного приближения конечного пространственного распределения управляемой величины $Q(x, t^*)$ к требуемому $Q^{**}(x) = Q^{**} = 0$, согласно соотношению

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, t^*)| \leq \varepsilon, \quad (1.6)$$

определяющему оцениваемое в равномерной метрике целевое множество конечных состояний СРП [13–15].

Пусть далее эффективность процесса управления объектом (1.1)–(1.6) оценивается квадратичным функционалом качества, определяемым для простоты и наглядности без потери общности основных результатов в следующей типичной для приложений частной форме:

$$I(u, \eta) = \int_0^{t^*} \int_{x_0}^{x_1} \rho_Q Q^2(x, t) dx dt + \int_0^{t^*} (u^2(t, \eta(t)) - \rho_\eta \eta^2(t)) dt \rightarrow \min_u \quad (1.7)$$

с постоянными положительными весовыми коэффициентами ρ_Q и ρ_η .

Применение к уравнениям объекта (1.1)–(1.3) конечного интегрального преобразования по пространственному аргументу с ядром, равным его собственным функциям $\varphi_n(\mu_n, x)$, $n = 1, 2, \dots$, где μ_n^2 – собственные числа, приводит к представлению СРП бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для временных мод $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$ разложения $Q(x, t)$ в сходящийся в среднем ряд по $\varphi_n(\mu_n, x)$ [16]:

$$\frac{d\bar{Q}_n(\mu_n, t)}{dt} = -\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n, t) + k_{vn}u_v(t) + k_{1n}\eta_1(t) + k_{sn}u_s(t) + k_{2n}\eta_2(t); \tag{1.8}$$

$$\bar{Q}_n(\mu_n, 0) = \bar{Q}^{(0)}(\mu_n), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(\mu_n, t)\varphi_n(\mu_n, x). \tag{1.9}$$

Здесь $k_{vn}, k_{1n}, \bar{Q}^{(0)}(\mu_n)$ – моды конечных интегральных преобразований функций $f_v(x)$, $f_\eta(x)$ и $Q_0(x)$ соответственно, k_{sn}, k_{2n} – известные постоянные коэффициенты [16].

Можно показать [17, 18], что в малостеснительных условиях выполнения усиленных [17, 18] условий Коши–Липшица система уравнений (1.8) имеет единственное решение при заданных воздействиях $u(t)$, $\eta(t)$, которое с любой требуемой точностью при необходимости аппроксимируется решением “укороченной” системы, образуемой достаточно большим конечным числом N первых уравнений (1.8) при $\bar{Q}_n(\mu_n, t) = 0 \quad \forall n > N$, т.е. оказывается допустимой конечномерная аппроксимация модели (1.8) при $n = \overline{1, N}$, $N < \infty$. Всюду далее на этом основании учитываются N_1 мод $\bar{Q}_n, n = \overline{1, N_1}$ в (1.8), где $N_1 = \infty$ или $N_1 = N < \infty$ в зависимости от используемой схемы анализа и возможностей практической реализации исследуемых алгоритмов управления. Конкретный выбор числа N_1 должен производиться при проектировании системы управления, исходя из практически требуемой точности описания модели объекта N_1 уравнениями (1.8).

Переход к описанию СРП в (1.8), (1.9) в терминах модальных переменных приводит в силу ортонормированности семейства собственных функций [16] к представлению критерия (1.7) в следующем виде:

$$I_1(u, \eta) = \int_0^{t^*} \left[\rho_Q \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n^2(\mu_n, t) + u^2(t, \eta(t)) - \rho_\eta \eta^2(t) \right] dt \rightarrow \min_u, \tag{1.10}$$

а требования (1.6) к конечному состоянию объекта представляются условием

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} \left| \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n(\mu_n, t^*)\varphi_n(\mu_n, x) \right| \leq \varepsilon. \tag{1.11}$$

Рассматриваемая задача АКОР сводится к определению алгоритма обратной связи $u(Q, t, \eta)$, обеспечивающего перевод не полностью определенного в условиях воздействия внешних возмущений бесконечномерного объекта (1.8), (1.9) в требуемое конечное состояние (1.11) при минимально возможном значении критерия оптимальности (1.10).

В типичных частных случаях внешнее возмущение $\eta(t)$ в (1.5) определяется заданной кусочно-непрерывной функцией времени [3, 4].

2. Программное оптимальное управление при детерминированном возмущении. Структура оптимального управления. На сформулированную бесконечномерную задачу оптимизации распространяется принцип максимума Понтрягина [13, 19]. Базовое условие

$$H(\bar{Q}^*(t), u^*(t), \psi^*(t), \eta(t)) = \max_u H(\bar{Q}^*(t), u(t), \psi^*(t), \eta(t)), \quad t \in (0, t^*) \tag{2.1}$$

достижения на соответствующих оптимальному процессу величинах $\bar{Q}^*(t)$, $u^*(t)$, $\psi^*(t)$ максимума функции Понтрягина H по переменной u для рассматриваемой задачи оптимизации (1.8)–(1.11)

$$H(\bar{Q}(t), u(t), \psi(t), \eta(t)) = -\rho_Q \sum_{n=1}^{N_1} \bar{Q}_n^2(\mu_n, t) - u^2(t, \eta(t)) + \rho_\eta \eta^2(t) + \sum_{n=1}^{N_1} \psi_n(t) (-\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n, t) + k_{vn} u_v(t) + k_{1n} \eta_1(t) + k_{sn} u_s(t) + k_{2n} \eta_2(t)), \quad (2.2)$$

где $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_n(\mu_n, t))$, $n = \overline{1, N_1}$, и вектор сопряженных переменных $\psi(t) = (\psi_n(t))$, $n = \overline{1, N_1}$, описывается системой уравнений

$$\frac{d\psi_p}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{Q}_p} = 2\rho_Q \bar{Q}_p(\mu_p, t) + \mu_p^2 \psi_p(t), \quad p = \overline{1, N_1}, \quad (2.3)$$

определяет в открытой области изменения управляющих воздействий программное оптимальное управление $u^*(t)$ в форме явной функции от $\psi^*(t)$:

$$u^*(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} k_n \psi_n^*(t). \quad (2.4)$$

Здесь

$$k_n = k_{vn}, \quad \text{если } u(t) = u_v(t), \quad \text{или } k_n = k_{sn}, \quad \text{если } u(t) = u_s(t). \quad (2.5)$$

Краевая задача принципа максимума. Уравнения (1.8) с подстановкой управляющего воздействия в виде (2.4) образуют совместно с (2.3) линейную программно-управляемую систему, замыкаемую относительно неизвестных $\bar{Q}(t)$ и $\psi(t)$ требованиями (1.11) к конечному состоянию объекта:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_p}{dt} &= 2\rho_Q \bar{Q}_p + \mu_p^2 \psi_p, \quad p = \overline{1, N_1}; \\ \frac{d\bar{Q}_n}{dt} &= -\mu_n^2 \bar{Q}_n + \frac{1}{2} k_n \sum_{i=1}^{N_1} k_i \psi_i + \tilde{k}_n \eta(t), \quad \bar{Q}_n(0) = \bar{Q}^{(0)}(\mu_n), \quad n = \overline{1, N_1}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где по-прежнему k_n определяется, согласно (2.5), и $\tilde{k}_n = k_{1n}$, $\eta(t) = \eta_1(t)$, если $u(t) = u_v(t)$, $\tilde{k}_n = k_{2n}$, $\eta(t) = \eta_2(t)$, если $u(t) = u_s(t)$.

Решение этой системы может быть представлено в векторно-матричной форме [3, 4]:

$$\begin{bmatrix} \psi(t) \\ \bar{Q}(t) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} \psi(0) \\ \bar{Q}(0) \end{bmatrix} + \int_0^t e^{A(t-\tau)} C \eta(\tau) d\tau. \quad (2.7)$$

Здесь

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ k_\eta \end{bmatrix}, \quad k_\eta = (\tilde{k}_n), \quad n = \overline{1, N_1},$$

вектор-столбец коэффициентов \tilde{k}_n ; A – матрица коэффициентов системы (2.6); e^{At} – определяемая известными способами [3, 4, 20, 21] нормированная фундаментальная матрица размерностью $2N_1 \times 2N_1$ (матричная экспонента), столбцами которой являются линейно-независимые решения однородной системы (2.6) при $\eta_1 = \eta_2 = 0$.

Матричная экспонента представляется в блочном виде

$$e^{At} = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

где блоки $A_{ij}(t)$; $i, j = 1, 2$, – известные матрицы размерности $N_1 \times N_1$ в соответствии со структурой системы уравнений (2.6) [3, 4, 20].

Параметризация управляющих воздействий. Согласно (2.7), $\psi(t)$, а, следовательно, и программное управление (2.4) определяются для каждой известной величины $\bar{Q}(0)$ с точностью до вектора $\psi(0)$ начальных значений сопряженных функций, выступающих, таким образом, в роли параметрического представления $u^*(t)$ [22, 23]. Однако для СРП такой подход оказывается неконструктивным, прежде всего, в силу бесконечной размерности этого вектора в (2.6) при $N_1 = \infty$. В работе [15] применительно к требованиям (1.11), предъявляемым к $\bar{Q}^*(t^*)$, предложен конструктивный способ последовательной конечномерной параметризации управляющих воздействий (“ ψ -параметризация”) на множестве M -мерных векторов $\psi^{(M)} = (\tilde{\psi}_i)$, $i = \overline{1, M}$; $\tilde{\psi}_i = \psi_i(t^*)$, $M < N_1$, конечных значений $\tilde{\psi}_i$ первых M сопряженных функций в (2.6) при равных нулю всех остальных значениях $\psi_i(t^*)$:

$$\psi^{(M)} = (\psi_i(t^*)) = (\tilde{\psi}_i), \quad i = \overline{1, M}; \quad \psi_i(t^*) = 0, \quad \text{если } i > M. \quad (2.9)$$

С возрастанием M обеспечивается попадание под действием параметризуемых на множестве параметров (2.9) управляющих воздействий вида (2.4) в сужающееся к началу координат в пространстве (\bar{Q}_n) целевое множество, гарантируя выполнение условий (1.11) для достижимых значений ε при некотором конечном значении $M \geq 1$ [15].

С целью определения в явной форме ψ -параметризованного управления найдем вектор $[\psi^T(0) \bar{Q}^T(0)]^T$ из (2.7) при $t = t^*$ и, подставляя результат опять в (2.7), получим решение системы (2.6) в форме его зависимости от конечного состояния $[\psi^T(t^*) \bar{Q}^T(t^*)]^T$:

$$\begin{bmatrix} \psi(t) \\ \bar{Q}(t) \end{bmatrix} = e^{-A(t^*-t)} \begin{bmatrix} \psi(t^*) \\ \bar{Q}(t^*) \end{bmatrix} - \int_t^{t^*} e^{-A(\tau-t)} C \eta(\tau) d\tau. \quad (2.10)$$

С учетом блочного представления (2.8) матричной экспоненты равенство (2.10) определяет векторы $\psi(t)$ и $\bar{Q}(t)$ в следующей форме:

$$\psi(t) = \hat{A}_{11}(t^* - t)\psi(t^*) + \hat{A}_{12}(t^* - t)\bar{Q}(t^*) + \tilde{D}_{\psi\eta}; \quad (2.11)$$

$$\bar{Q}(t) = \hat{A}_{21}(t^* - t)\psi(t^*) + \hat{A}_{22}(t^* - t)\bar{Q}(t^*) + \tilde{D}_{Q\eta}; \quad (2.12)$$

где

$$\tilde{D}_{\psi\eta} = -\int_t^{t^*} \hat{A}_{12}(\tau - t) k_\eta \eta(\tau) d\tau; \quad \tilde{D}_{Q\eta} = -\int_t^{t^*} \hat{A}_{22}(\tau - t) k_\eta \eta(\tau) d\tau \quad (2.13)$$

и \hat{A}_{ij} ; $i, j = 1, 2$, – подобные (2.8) блоки обратной матрицы e^{-At} .

После подстановки (2.8) в (2.7) будем иметь, согласно (2.7), при $t = t^*$:

$$\psi(t^*) = A_{11}(t^*)\psi(0) + A_{12}(t^*)\bar{Q}(0) + D_{\psi\eta}; \quad (2.14)$$

$$\bar{Q}(t^*) = A_{21}(t^*)\psi(0) + A_{22}(t^*)\bar{Q}(0) + D_{Q\eta}, \quad (2.15)$$

где

$$D_{\psi\eta} = \int_0^{t^*} A_{12}(t^* - \tau) k_\eta \eta(\tau) d\tau; \quad (2.16)$$

$$D_{Q\eta} = \int_0^{t^*} A_{22}(t^* - \tau) k_\eta \eta(\tau) d\tau.$$

Определяя $\psi(0)$ из (2.14) и подставляя результат в (2.15), получим следующее выражение для $\bar{Q}(t^*)$ в форме линейной функции начального состояния объекта $\bar{Q}(0)$ и априори неизвестных конечных значений $\psi(t^*)$ сопряженных переменных:

$$\bar{Q}(t^*) = B(t^*)\psi(t^*) + B_1(t^*)\bar{Q}(0) + D_\eta(t^*), \quad (2.17)$$

где

$$\begin{aligned} B(t^*) &= A_{21}(t^*)A_{11}^{-1}(t^*); \\ B_1(t^*) &= A_{22}(t^*) - A_{21}(t^*)A_{11}^{-1}(t^*)A_{12}(t^*); \\ D_\eta(t^*) &= D_{Q\eta} - A_{21}(t^*)A_{11}^{-1}(t^*)D_{\psi\eta}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

При описании $\bar{Q}(t^*)$ в (2.11), (2.12) соотношением (2.17) получим, согласно (2.11), следующее выражение для вектора $\psi^*(t)$ в оптимальном процессе в зависимости от его параметризуемой конечной величины $\psi^*(t^*)$ в (2.9) и начального состояния объекта $\bar{Q}(0)$:

$$\psi^*(t) = [\hat{A}_{11}(t^* - t) + \hat{A}_{12}(t^* - t)B(t^*)]\psi^*(t^*) + \hat{A}_{12}(t^* - t)B_1(t^*)\bar{Q}(0) + \hat{A}_{12}(t^* - t)D_\eta(t^*) + \tilde{D}_{\psi\eta}. \quad (2.19)$$

Искомое программное управление (2.4)

$$u^*(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} k_n \psi_n^*(t) = \frac{1}{2} K \psi^*(t); \quad K = (k_n), \quad \psi^*(t) = (\psi_n^*(t)), \quad (2.20)$$

где K – матрица – строка, $\psi^*(t)$ – матрица-столбец, определяется в ψ -параметризованной форме в виде линейной зависимости от $\psi^{(M)}$ в (2.9) после подстановки (2.19) в (2.20).

Редукция к задаче полубесконечной оптимизации. Интегрирование уравнений системы (2.6) с ψ -параметризованным управляющим воздействием вида (2.9), (2.19), (2.20) позволяет получить при заданном детерминированном воздействии $\eta(t)$ зависимости $Q(x, \psi^{(M)})$ управляемой величины в конце процесса управления и критерия оптимальности $I_1(\psi^{(M)})$ в (1.9), (1.10) для каждого значения $\bar{Q}(0)$ в форме явных функций только своих аргументов [15].

В результате осуществляется точная редукция исходной задачи оптимального управления к задаче полубесконечной оптимизации (ЗПО) [13–15]:

$$I_1(\psi^{(M)}) \rightarrow \min_{\psi^{(M)}}; \quad \max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \psi^{(M)})| \leq \varepsilon \quad (2.21)$$

на экстремум функции $I_1(\psi^{(M)})$ конечного числа M переменных $\tilde{\psi}_i$, $i = \overline{1, M}$, с бесконечным числом ограничений, порождаемых требованием выполнения условия (1.11) для всех $x \in [x_0, x_1]$.

Как показано в [15], для заданной величины ε в (1.11) размерность M вектора $\psi^{(M)}$ однозначно определяется соотношением

$$M = \nu \forall \varepsilon: \varepsilon_{\min}^{(\nu)} \leq \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(\nu-1)}, \quad (2.22)$$

где

$$\varepsilon_{\min}^{(\nu)} = \min_{\psi^{(\nu)}} \{ \max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \psi^{(\nu)})| \}. \quad (2.23)$$

Значения $\varepsilon_{\min}^{(\nu)}$ образуют, как правило, убывающую цепочку неравенств с возрастанием ν , и задача (2.21) оказывается разрешимой, если $\varepsilon \geq \varepsilon_{\inf}$. Здесь точная нижняя грань ε_{\inf} достижимых значений ε оказывается равной минимуму $\varepsilon_{\min}^{(\rho)}$, где $\rho = \infty$ при $\varepsilon_{\inf} = 0$ и $\rho < \infty$ при $\varepsilon_{\inf} > 0$ соответственно для управляемых и неуправляемых относительно $Q^{**}(x) \equiv 0$ объектов [13].

Решение задачи полубесконечной оптимизации. Решение ЗПО (2.21)–(2.23) относительно вектора параметров $\psi^{(M)}$, а также априори неизвестной величины минимакса $\varepsilon_{\min}^{(M)}$ в (2.22) в случае, когда $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M)}$, может быть получено в условиях малостеснительных ограничений альтернансным методом [13, 14]. Метод базируется на специальных альтернансных свойствах искомого значения $\psi_*^{(M)} = (\tilde{\psi}_i^*)$, $i = \overline{1, M}$, являющихся аналогом условий экстремума в теории нелинейных чебышевских приближений, и дополнительной информации о форме кривой пространственного распределения результирующего состояния $Q(x, \psi_*^{(M)})$ управляемой величины, диктуемой закономерностями предметной области. Согласно альтернансным свойствам, равные допустимой величи-

не ε одинаковые значения максимальных отклонений $\max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \psi_*^{(M)})|$ достигаются в некоторых точках $x_j^0, j = \overline{1, R}$, на отрезке $[x_0, x_1]$. Общее число R этих точек, где $R = M$ при заданном $\varepsilon: \varepsilon_{\min}^{(M)} < \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(M-1)}$ и $R = M + 1$, если $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M)}$, равно числу искомым неизвестных в ЗПО (2.21)–(2.23), порождая тем самым замкнутую относительно этих неизвестных систему соотношений

$$|Q(x_j^0, \psi_*^{(M)})| = \varepsilon, \quad j = \overline{1, R}. \tag{2.24}$$

При наличии дополнительной информации из предметной области о форме кривой $Q(x, \psi_*^{(M)})$ на отрезке $[x_0, x_1] \ni x$, позволяющей при известной функции $\eta(t)$ идентифицировать координаты x_j^0 и знаки $Q(x_j^0, \psi_*^{(M)})$, равенства (2.24), дополненные условиями существования экстремума функции $Q(x, \psi_*^{(M)})$ в точках $x_{j_g}^0 \in \text{int}[x_0, x_1], g = \overline{1, R_1}$, где $R_1 \leq R$ и $x_{j_g}^0 \in \{x_j^0\}$, переводятся в систему уравнений

$$\begin{aligned} Q(x_j^0, \psi_*^{(M)}) &= \pm \varepsilon, & j &= \overline{1, R}; \\ \frac{\partial}{\partial x} Q(x_{j_g}^0, \psi_*^{(M)}) &= 0, & g &= \overline{1, R_1}, \end{aligned} \tag{2.25}$$

с однозначно определяемым знаком ε в каждой точке x_j^0 , которая разрешается относительно $\tilde{\psi}_i^*, i = \overline{1, M}$; значений $x_{j_g}^0, g = \overline{1, R_1}$, а также $\varepsilon_{\min}^{(v)}$, если в (2.22) $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(v)}$.

Пространственное распределение управляемой величины $Q(x, \psi_*^{(M)})$ в конце оптимального процесса описывается рядом (1.9) с вектором модальных переменных $\bar{Q}^*(t^*)$, и, следовательно, система равенств (2.25) приводится к следующему виду:

$$\Phi \bar{Q}^*(t^*) = \bar{\varepsilon}, \quad \Phi = [\varphi_n(\mu_n, x_j^0)], \tag{2.26}$$

$$\Phi_1 \bar{Q}^*(t^*) = 0; \quad \Phi_1 = \left[\frac{d}{dx} \varphi_n(\mu_n, x_{j_g}^0) \right], \tag{2.27}$$

где $n = \overline{1, N_1}; j = \overline{1, R}; \bar{\varepsilon} = (\varepsilon_i), i = \overline{1, R}; \varepsilon_i = \pm \varepsilon, g = \overline{1, R_1}$.

Подстановка (2.17) в (2.26) при $\psi(t^*) = \psi^*(t^*)$ приводит к линейной системе R уравнений

$$\Phi [B(t^*)\psi^*(t^*) + B_1(t^*)\bar{Q}(0) + D_\eta(t^*)] = \bar{\varepsilon} \tag{2.28}$$

относительно вектора $\psi^*(t^*)$, представляемого в форме (2.9) с M неизвестными компонентами $\tilde{\psi}_i^*, i = \overline{1, M}$, и $\varepsilon_{\min}^{(M)}$ в случае $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(M)}$ в (2.25). При $\varepsilon: \varepsilon_{\min}^{(M)} < \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(M-1)}$ решение системы $R = M$ уравнений (2.28) относительно $\psi^*(t^*)$ при априори фиксируемом значении $\bar{\varepsilon}$ принимает следующий вид для каждой заданной величины $\bar{Q}(0)$:

$$\psi^*(t^*) = [\Phi B(t^*)]^{-1} (\bar{\varepsilon} - \Phi B_1(t^*)\bar{Q}(0) - \Phi D_\eta(t^*)). \tag{2.29}$$

Здесь значения x_j^0 в элементах матрицы Φ должны быть определены дополнением (2.29) системой уравнений (2.27) с подстановкой $\bar{Q}^*(t^*)$ в форме (2.17). В итоге выражения (2.19), (2.20) и (2.29) полностью определяют искомый алгоритм оптимального программного управления.

Об учете ограничений на управляющие воздействия. Предлагаемый способ расчета программного оптимального управления соответствует традиционному методу исследования задачи АКОР в открытой области изменения $u(t)$, позволяющему, во-первых, определить минимально достижимые значения квадратичного функционала качества и, во-вторых, установить по полученным результатам предельные значения $u(t)$, необходимые для реализации максимального эффекта по величине I_1 в (1.10). Тем не менее существенный интерес представляют задачи АКОР с учетом априори заданных ограничений

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max} \tag{2.30}$$

с известными граничными значениями $u_{\min}, u_{\max} = \text{const}$, если эти ограничения нарушаются на протяжении оптимального процесса с линейным управлением вида (2.4). Равенства

$$u(t) = u_{\max}, \quad u(t) = u_{\min} \quad (2.31)$$

могут достигаться в различные моменты времени на протяжении оптимального процесса, образуя в общем случае многочисленные возможные варианты компоновки управляющих воздействий $\tilde{u}^*(t)$ из различных участков в соответствии с (2.4), (2.31).

В типичном частном случае ограничения на $\tilde{u}^*(t)$ достигаются только на начальной стадии процесса управления, на протяжении которой $\tilde{u}^*(t) = u_{\max}$, $t \in [0, t_1]$, $t_1 < t^*$, где момент t_1 определяется по найденному линейному алгоритму $u^*(t)$ как корень уравнения $u^*(t_1) = u_{\max}$. В такой ситуации состояние объекта $\bar{Q}(t_1)$, найденное интегрированием уравнений модели (1.8) с управлением $u(t) = u_{\max}$, $t \in [0, t_1]$, можно рассматривать в роли начального $\bar{Q}(0)$ на последующем временном интервале $[t_1, t^*]$, где программное управление вида (2.4) определяется по описанной выше схеме.

Аналогичным образом может быть найдено программное управление и при других вариантах его построения с учетом ограничений в (2.30).

3. Синтез оптимальной системы управления. Рассмотрим далее задачу синтеза в условиях линейного алгоритма (2.4) оптимального программного управления. Решение этой задачи построения оптимального регулятора $u^*(Q, t)$ существенно зависит от характера информации о внешнем возмущении $\eta(t)$ в уравнениях моделей объекта (1.1)–(1.3).

3.1. Синтез оптимального регулятора при заданном внешнем возмущении. Пусть $\eta(t)$ в (1.5), (1.8) – известная функция времени. Определим конечное состояние модели (2.6) из уравнения (2.10):

$$\begin{bmatrix} \psi(t^*) \\ \bar{Q}(t^*) \end{bmatrix} = e^{A(t^*-t)} \begin{bmatrix} \psi(t) \\ \bar{Q}(t) \end{bmatrix} + \int_t^{t^*} e^{A(t^*-\tau)} C \eta(\tau) d\tau, \quad (3.1)$$

откуда получим, используя представление матричной экспоненты в блочной форме (2.8):

$$\psi(t^*) = A_{11}(t^* - t)\psi(t) + A_{12}(t^* - t)\bar{Q}(t) + \tilde{D}_{\psi\eta}; \quad (3.2)$$

$$\bar{Q}(t^*) = A_{21}(t^* - t)\psi(t) + A_{22}(t^* - t)\bar{Q}(t) + \tilde{D}_{Q\eta}, \quad (3.3)$$

где подобно (2.16)

$$\tilde{D}_{\psi\eta} = \int_t^{t^*} A_{12}(t^* - \tau)k_{\eta}\eta(\tau)d\tau; \quad \tilde{D}_{Q\eta} = \int_t^{t^*} A_{22}(t^* - \tau)k_{\eta}\eta(\tau)d\tau. \quad (3.4)$$

В оптимальном процессе $(\bar{Q}^*(t), \psi^*(t))$ соотношения (3.2), (3.3) принимают следующий вид:

$$\psi^*(t^*) = A_{11}(t^* - t)\psi^*(t) + A_{12}(t^* - t)\bar{Q}^*(t) + \tilde{D}_{\psi\eta}; \quad (3.5)$$

$$\bar{Q}^*(t^*) = A_{21}(t^* - t)\psi^*(t) + A_{22}(t^* - t)\bar{Q}^*(t) + \tilde{D}_{Q\eta}, \quad (3.6)$$

где значения $\bar{Q}^*(t^*)$ и $\psi^*(t^*)$ фиксируются расчетом программного управления, согласно (2.17), (2.29).

После умножения слева равенств (3.5) и (3.6) соответственно на известные в соответствии с (2.17), (2.29) $N_1 \times N_1$ -матрицы $\text{diag}[\bar{Q}_j^*(t^*)]$, $\bar{Q}^*(t^*) = (\bar{Q}_j^*(t^*))$, $j = \overline{1, N_1}$ и $\text{diag}[\psi_j^*(t^*)]$, $\psi^*(t^*) = (\psi_j^*(t^*))$, $j = \overline{1, N_1}$, левые части соотношений (3.5) и (3.6) становятся одинаковыми. Последующее вычитание этих уравнений приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \psi^*(t, \psi^*(t^*), \bar{Q}(0), \bar{Q}(t)) &= T_1(t, t^*, \psi^*(t^*), \bar{Q}^*(t^*), \bar{Q}(0))T_2(t, t^*, \psi^*(t^*), \bar{Q}^*(t^*), \bar{Q}(0))\bar{Q}(t) + \\ &+ T_1(t, t^*, \psi^*(t^*), \bar{Q}^*(t^*), \bar{Q}(0))D_{\Sigma}(t, t^*, \psi^*(t^*), \bar{Q}^*(t^*), \bar{Q}(0), \eta); \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$T_1 = [W_1 A_{11}(t^* - t) - W_2 A_{21}(t^* - t)]^{-1}; \quad (3.8)$$

$$T_2 = [W_2 A_{22}(t^* - t) - W_1 A_{12}(t^* - t)]; \quad (3.9)$$

$$D_\Sigma = W_2 \tilde{D}_{Q\eta} - W_1 \tilde{D}_{\psi\eta}; \quad (3.10)$$

$$W_1 = \text{diag}[\bar{Q}_j^*(t^*)]; \quad W_2 = \text{diag}[\psi_j^*(t^*)]; \quad \bar{Q}_j^*(t^*) = (B(t^*)\psi^*(t^*) + B_1(t^*)\bar{Q}(0))_j, \quad j = \overline{1, N_1}, \quad (3.11)$$

однозначным образом определяющему зависимость $\psi^*(t, \psi^*(t^*), \bar{Q}(0), \bar{Q}(t))$ от своих аргументов при заданном кусочно-непрерывном воздействии $\eta(t)$ по предварительно вычисляемым решениям системы уравнений (2.26), (2.27) в условиях (2.17).

Подстановка (3.7) в выражение (2.20) для программного управления приводит к линейному закону синтеза оптимального регулятора с нестационарными коэффициентами обратных связей в детерминированной системе управления с полным измерением состояния $\bar{Q}(t)$:

$$u^*(\bar{Q}, t) = \frac{1}{2} K(T_1 T_2 \bar{Q}(t) + T_1 D_\Sigma). \quad (3.12)$$

Здесь матрицы T_1 и T_2 представляются, согласно (3.8)–(3.11), известными функциями времени с фиксируемыми на протяжении процесса управления значениями $\bar{Q}(0)$, которые определяются по результатам наблюдения $\bar{Q}(t)$ в момент $t = 0$.

Переход в (3.12) от $\bar{Q}(t)$ к измеряемому выходу объекта $Q_u(x_u, t) = (Q(x_{ij}, t))$ в r точках $x_{ij} \in [x_0, x_1]$, $j = \overline{1, r}$, определяется, согласно (1.9), векторно-матричным уравнением наблюдения

$$Q(x_u, t) = \Phi_u \bar{Q}(t), \quad \Phi_u = [\varphi_n(\mu_n, x_{uj})], \quad n = \overline{1, N_1}; \quad j = \overline{1, r}. \quad (3.13)$$

В условиях $r < N_1$ неполного измерения состояния для восстановления вектора $\bar{Q}(t)$ по значениям $Q(x_u, t)$ требуется построение наблюдателя полного или пониженного порядка [21]. Если по условиям требуемой точности моделирования объекта (1.8) можно ограничиться учетом только M первых составляющих $\bar{Q}(t)$ с минимальным их числом M , требуемым для решения системы уравнений (2.28) относительно представляемого в форме (2.9) вектора $\psi^*(t^*)$, то $\bar{Q}(t)$ непосредственно определяется решением системы уравнений (3.13) при $r = M$, $N_1 = N = M$:

$$\bar{Q}(t) = \Phi_u^{-1} Q_u(x_u, t). \quad (3.14)$$

Подстановка (3.14) в (3.12) приводит к линейному алгоритму детерминированного синтеза с обратными связями по измеряемому выходу объекта:

$$u^*(Q_u, t) = \frac{1}{2} K T_1 T_2 \Phi_u^{-1} Q_u(x_u, t) + K T_1 D_\Sigma. \quad (3.15)$$

Аналитическое решение задачи синтеза с учетом ограничений на управляющие воздействия становится невозможным в силу нелинейности в таком случае П-системы принципа максимума. Широко распространенный способ определения $\tilde{u}^*(Q_u, t)$ в первом приближении заключается в дополнении алгоритма $u^*(Q_u, t)$ в (3.15) характеристикой усилительного звена с насыщением [1, 2, 4]:

$$\tilde{u}^*(Q_u, t) = \begin{cases} u_{\max}, & u^*(Q_u, t) > u_{\max}; \\ u^*(Q_u, t), & u_{\min} < u^*(Q_u, t) < u_{\max}; \\ u_{\min}, & u^*(Q_u, t) < u_{\min}. \end{cases}$$

Однако такой результат может не обеспечить требуемую точность ϵ приближения к заданному конечному состоянию объекта. Более точный результат может быть получен для известного варианта структуры программного управления $\tilde{u}^*(t)$ при законе регулирования $\tilde{u}^*(Q_u, t)$, компонентом из участков (2.31) выхода $\tilde{u}^*(t)$ на ограничения и линейных алгоритмов обратной связи в форме (3.15) на остальных интервалах изменения $\tilde{u}^*(t)$ вида (2.4).

3.2. Синтез оптимального регулятора в условиях неопределенности множественных внешних возмущений. *Антагонистические алгоритмы программного управления.* Сложная задача синтеза в условиях воздействия множественных возмущений может быть рассмотрена в игровой постановке с антагонистическими программными управлениями $u(t)$ и $\eta(t)$ в форме линейной дифференциальной игры с объектом управления (1.8) и критерием оптимальности I_1 в (1.10) [7, 24–26]. При этом оптимальное управление $u^{**}(t)$ и наиболее “неблагоприятное” возмущение $\eta^{**}(t)$ находятся, согласно стратегии получения наилучшего гарантированного результата:

$$u^{**}(t) = \arg \min_u [\max_{\eta} I_1(u, \eta)]; \quad \eta^{**}(t) = \arg \max_{\eta} [\min_u I_1(u, \eta)], \quad (3.16)$$

в задаче со свободным конечным состоянием $Q(x, t^*)$ с целью определения “наихудшей” величины $\eta^{**}(t)$.

При аддитивном характере зависимости подынтегральной функции критерия (1.10) от антагонистических управлений $u(t)$ и $\eta(t)$ их оптимальные значения $u^{**}(t)$ и $\eta^{**}(t)$ в (3.16) могут быть найдены из условия существования седловой точки игры [24–26]:

$$I_1(u^{**}(t), \eta^{**}(t)) = \min_u [\max_{\eta} I_1(u(t), \eta(t))] = \max_{\eta} [\min_u I_1(u(t), \eta(t))] \quad (3.17)$$

путем распространения на рассматриваемую задачу принципа максимума Понтрягина, согласно которому в каждой точке непрерывности функций $u^{**}(t)$ и $\eta^{**}(t)$ выполняется базовое соотношение [24–26]

$$\max_u \min_{\eta} H(\bar{Q}(t), u(t), \psi(t), \eta(t)) = H(\bar{Q}(t), u^{**}(t), \psi(t), \eta^{**}(t)) = \min_{\eta} \max_u H(\bar{Q}(t), u(t), \psi(t), \eta(t)). \quad (3.18)$$

Здесь функция $H(\bar{Q}(t), u(t), \psi(t), \eta(t))$ и вектор $\psi(t)$ сопряженных переменных опять определяются, согласно (2.2), (2.3).

В таком случае $u^{**}(t)$ по-прежнему находится в виде (2.4), а $\eta^{**}(t)$ представляется аналогично (2.4) в форме линейной зависимости от $\psi^*(t)$:

$$\eta^{**}(t) = -\frac{1}{2\rho_{\eta}} \sum_{n=1}^{N_1} \tilde{k}_n \psi_n^*(t). \quad (3.19)$$

Подстановка $u(t)$ и $\eta(t)$ в виде (2.4) и (3.19) в уравнения (1.8), (2.3) приводит аналогично (2.6) к программно-управляемой системе, замыкаемой относительно неизвестных $\bar{Q}(t)$ и $\psi(t)$ условиями трансверсальности:

$$\psi^*(t^*) = 0 \quad (3.20)$$

в задаче со свободным правым концом траектории $\bar{Q}(t^*)$ [4, 13]:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_p}{dt} &= 2\rho_Q \bar{Q}_p + \mu_p^2 \psi_p; \quad \psi_p(t^*) = 0, \quad p = \overline{1, N_1}; \\ \frac{d\bar{Q}_n}{dt} &= -\mu_n^2 \bar{Q}_n + \frac{1}{2} k_n \sum_{i=1}^{N_1} k_i \psi_i - \frac{1}{2\rho_{\eta}} \tilde{k}_n \sum_{j=1}^{N_1} \tilde{k}_j \psi_j; \quad \bar{Q}_n(0) = \bar{Q}^{(0)}(\mu_n), \quad n = \overline{1, N_1}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Решение однородной системы уравнений (3.21) представляется подобно (2.8), (2.10) в векторно-матричной форме

$$\begin{bmatrix} \psi(t) \\ \bar{Q}(t) \end{bmatrix} = e^{-\tilde{A}(t^*-t)} \begin{bmatrix} \psi(t^*) \\ \bar{Q}(t^*) \end{bmatrix}; \quad e^{-\tilde{A}(t)} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}(t) & \tilde{A}_{12}(t) \\ \tilde{A}_{21}(t) & \tilde{A}_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

где \tilde{A} – матрица коэффициентов в (3.21) и \tilde{A}_{ij} в (3.22) – блоки обратной матрицы $e^{-\tilde{A}(t)}$.

Отсюда аналогично (2.19) в условиях $\psi^*(t^*) = 0$ получаем следующее выражение для $\psi^*(t)$:

$$\psi^*(t) = \tilde{A}_{12}(t^* - t) \tilde{B}_1(t^*) \bar{Q}(0), \quad (3.23)$$

где $\tilde{B}_1(t^*)$ определяется аналогично (2.18) при замене матрицы A на \tilde{A} .

Подстановка (3.23) в (3.19) позволяет найти $\eta^{**}(t)$ в виде явной зависимости от t :

$$\eta^{**}(t) = -\frac{1}{2\rho_\eta} \tilde{K}\tilde{A}_{12}(t^* - t)\tilde{B}_1(t^*)\bar{Q}(0). \tag{3.24}$$

Редукция к задаче синтеза с заданным детерминированным возмущением. Задача синтеза при множественных возмущениях может быть сведена к рассмотренной в разд. 3.1 задаче конструирования оптимального регулятора при заданном детерминированном внешнем воздействии $\eta(t) = \eta^{**}(t)$ в (3.24). Действительно, при любом реализуемом возмущении $\eta^0(t)$ будем иметь в соответствии с (3.16)–(3.18) в условиях существования седловой точки рассматриваемой дифференциальной игры

$$\min_{u \in \Omega} I_1(u, \eta^0) = I_1(u^*(\eta^0), \eta^0) \leq \min_{u \in \Omega} (\max_{\eta} I_1(u, \eta)) = \max_{\eta} (\min_{u \in \Omega} I_1(u, \eta)) = I_1(u^{**}, \eta^{**}). \tag{3.25}$$

Здесь

$$\Omega = \{u: \max_{\eta} \max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \psi_*^{(M)}(\eta^{**}), \eta)| \leq \varepsilon_0\}, \tag{3.26}$$

согласно требованиям (1.6), где $|Q(x, \psi_*^{(M)}(\eta^{**}), \eta)|$ – конечное состояние объекта при оптимальном $\psi^{(M)}$ -параметризованном управлении $u^*(t)$, найденном при $\eta(t) = \eta^{**}(t)$ путем решения задачи (1.8)–(1.11) с заданной величиной ε , а ε_0 непосредственно находится вычислением максимума по η в (3.26).

Как следует из (3.25), синтез оптимального управления $u^*(\bar{Q}, t)$ при заданном детерминированном возмущении $\eta^0(t) = \eta^{**}(t)$ в условиях (3.26) отвечает верхней оценке достижимых значений минимизируемого критерия I_1 на множестве допустимых возмущений в соответствии с требованиями стратегии управления по принципу наилучшего гарантированного результата.

4. Синтез оптимального регулятора для управления нестационарным процессом теплопроводности. В качестве примера, представляющего самостоятельный интерес, рассмотрим задачу аналитического конструирования оптимального регулятора для управления процессом нагрева неограниченной пластины.

Пусть температурное поле $Q(x, t)$ пластины описывается линейным однородным уравнением теплопроводности вида (1.1)–(1.3) в относительных единицах [16, 27]:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t \in [0, t^*] \tag{4.1}$$

с заданными начальными

$$Q(x, 0) = Q_0(x) = Q_0 = \text{const} < 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{4.2}$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial Q(0, t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial Q(1, t)}{\partial x} = u_s(t) + \eta_2(t) \tag{4.3}$$

при граничном управляющем воздействии $u_s(t)$ в характерных условиях воздействия на него заданного детерминированного возмущения

$$\eta_2(t) = k_0 u_s(t), \quad k_0 = \text{const}, \quad |k_0| < 1. \tag{4.4}$$

Модальное описание объекта (4.1)–(4.3) сводится к бесконечной системе дифференциальных уравнений вида (1.8)–(1.9):

$$\frac{d\bar{Q}_n}{dt} = -\mu_n^2 \bar{Q}_n + k_{sn}(1 + k_0)u_s(t), \quad \bar{Q}_n(0) = \bar{Q}^{(0)}(\mu_n), \quad n = 1, 2, \dots, \tag{4.5}$$

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(\mu_n, t)\varphi_n(\mu_n, x), \tag{4.6}$$

где [16]

$$\mu_n = \pi(n-1); \quad \varphi_n(\mu_n, x) = \frac{1}{V_n} \cos(\pi(n-1)x); \quad V_n^2 = \begin{cases} 1, & n=1 \\ \frac{1}{2}, & n>1 \end{cases}; \quad k_{sn} = \frac{(-1)^{n-1}}{V_n}. \quad (4.7)$$

Задача сводится к определению алгоритма обратной связи $u_s(Q, t)$, обеспечивающего перевод объекта (4.5), (4.6) за заданное время t^* в требуемое конечное состояние $Q^{**}(x) = Q^{**} = 0$ с заданной точностью равномерного приближения $\varepsilon > 0$, согласно (1.11), при минимальном значении квадратичного критерия качества (1.10), где выберем $\rho_Q = 1$.

Оптимальное программное управление $(1+k_0)u_s^*(t)$ находится в форме (2.4) при $k_n = k_{sn}$, а П-система принципа максимума представляется в виде однородной системы уравнений (2.6), где в рассматриваемом примере следует принять

$$\eta(t) = \eta_2(t) = \frac{1}{2} k_0 \sum_{i=1}^{N_1} k_i \psi_i(t), \quad \tilde{k}_n = k_n.$$

Вычисление матричной экспоненты. Примем далее для большей простоты и наглядности получаемых результатов $N_1 = N = 2$, ограничиваясь учетом только двух модальных переменных в сумме (4.6). В таком случае матричная экспонента в (2.7) является нормированной фундаментальной 4×4 -матрицей системы (2.6) следующего вида [3, 20, 21]:

$$e^{At} = Z(t)Z^{-1}(0).$$

Здесь $Z(t)$ – матрица линейно-независимых решений однородной системы уравнений (2.6) [3, 20, 21]:

$$Z(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1^{(1)} e^{p_1 t} & \dots & \gamma_1^{(4)} e^{p_4 t} \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_4^{(1)} e^{p_1 t} & \dots & \gamma_4^{(4)} e^{p_4 t} \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

где $p_i, i = \overline{1, 4}$, – различающиеся корни характеристического уравнения

$$\det[A - pE] = 0; \quad (4.9)$$

$\gamma^{(i)} = (\gamma_j^{(i)}), j = \overline{1, 4}$, – корни уравнения

$$(A - p_i E) \gamma^{(i)} = 0, i = \overline{1, 4}, \quad (4.10)$$

и E – единичная матрица.

Матричная экспонента e^{At} представляется в блочной форме (2.8), где

$$\begin{aligned} A_{11}(t) &= \begin{bmatrix} \Psi_{11}(t) & \Psi_{12}(t) \\ \Psi_{21}(t) & \Psi_{22}(t) \end{bmatrix}; & A_{12}(t) &= \begin{bmatrix} \Psi_{13}(t) & \Psi_{14}(t) \\ \Psi_{23}(t) & \Psi_{24}(t) \end{bmatrix}; \\ A_{21}(t) &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}(t) & \bar{Q}_{12}(t) \\ \bar{Q}_{21}(t) & \bar{Q}_{22}(t) \end{bmatrix}; & A_{22}(t) &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{13}(t) & \bar{Q}_{14}(t) \\ \bar{Q}_{23}(t) & \bar{Q}_{24}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Здесь

$$\Psi_{ks}(t) = \sum_{i=1}^4 \gamma_k^{(i)} G_i^{(s)} e^{p_i t}; \quad \bar{Q}_{ks}(t) = \sum_{i=1}^4 \gamma_{k+2}^{(i)} G_i^{(s)} e^{p_i t}; \quad k = 1, 2; \quad s = \overline{1, 4}, \quad (4.12)$$

$$G_i^{(s)} = \frac{G_{is}}{G}; \quad G = \det Z(0) \quad (4.13)$$

и G_{is} – алгебраическое дополнение s -го элемента i -го столбца G .

Характеристическое уравнение (4.9) приводится к равенству

$$\det \begin{bmatrix} \mu_1^2 - p & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \mu_2^2 - p & 0 & 2 \\ \frac{k_1^2}{2} & \frac{k_1 k_2}{2} & -(\mu_1^2 + p) & 0 \\ \frac{k_1 k_2}{2} & \frac{k_2^2}{2} & 0 & -(\mu_2^2 + p) \end{bmatrix} = 0, \quad (4.14)$$

из которого после простых преобразований получим с учетом (4.7) при $\mu_1 = 0$ следующие действительные значения для четырех корней p_i в (4.8), (4.12):

$$p_1 = \sqrt{S_1 - S_2}; \quad p_2 = \sqrt{S_1 + S_2}; \quad p_3 = -\sqrt{S_1 - S_2}; \quad p_4 = -\sqrt{S_1 + S_2};$$

$$S_1 = \frac{1}{2}(\mu_2^4 + k_1^2 + k_2^2); \quad S_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(\mu_2^4 + k_1^2 + k_2^2)^2 - 4k_1^2\mu_2^4}. \quad (4.15)$$

Решение уравнения (4.10) приводит к значениям коэффициентов $\gamma_j^{(i)}$ в (4.12):

$$\gamma_1^{(i)} = \frac{2k_1(\mu_2^2 + p_i)}{k_2 p_i^2}; \quad \gamma_2^{(i)} = \frac{2}{p_i - \mu_2^2}; \quad \gamma_3^{(i)} = \frac{k_1(\mu_2^2 + p_i)}{k_2 p_i}; \quad \gamma_4^{(i)} = 1. \quad (4.16)$$

Выражения (4.8)–(4.16) полностью определяют матричную экспоненту в (2.7), (2.8) применительно к рассматриваемому примеру.

Расчетная система уравнений альтернансного метода. Предлагаемый способ $\psi^{(N)}$ -параметризации управляющего воздействия приводит к представлению $\psi^*(t^*)$ в форме (2.9).

Для типичного в приложениях случая $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ в (2.21) здесь следует принять $M = 2$, согласно (2.22), и тогда в соответствии с (2.9) $\psi^*(t^*) = (\tilde{\psi}_i^*)$, $i = 1, 2$; $\psi_i^*(t^*) = 0$, $i > 2$, в системе уравнений (2.28). При подстановке $B(t^*)$ и $B_1(t^*)$ в форме (2.18), (4.13) система (2.28) после элементарных вычислений приводится к следующему виду:

$$\Phi[F^{(1)}(t^*)\psi_*^{(M)} + F^{(2)}(t^*)\bar{Q}(0)] = \bar{\varepsilon}, \quad (4.17)$$

где

$$F^{(1)}(t^*) = \begin{bmatrix} F_{11}^{(1)}(t^*) & F_{12}^{(1)}(t^*) \\ F_{21}^{(1)}(t^*) & F_{22}^{(1)}(t^*) \end{bmatrix}; \quad F^{(2)}(t^*) = \begin{bmatrix} F_{11}^{(2)}(t^*) & F_{12}^{(2)}(t^*) \\ F_{21}^{(2)}(t^*) & F_{22}^{(2)}(t^*) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

и все элементы 2×2 -матриц $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ становятся известными функциями $\psi_{ks}(t^*)$, $\bar{Q}_{ks}(t^*)$; $k = \overline{1, 2}$; $s = \overline{1, 4}$ в (4.11).

При $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ в (2.21) следует принять $R = M + 1 = 3$ в (2.24). Тогда будем иметь матрицу Φ размерностью 3×2 в (2.26), подстановка которой в (4.17) позволяет получить, согласно (2.24), на основании (4.6) систему трех равенств:

$$\begin{aligned} |Q(x_j^0, \psi_*^{(2)})| &= |(F_{11}^{(1)}(t^*)\varphi_1(\mu_1, x_j^0) + F_{21}^{(1)}(t^*)\varphi_2(\mu_2, x_j^0))\tilde{\psi}_1^* + \\ &+ (F_{12}^{(1)}(t^*)\varphi_1(\mu_1, x_j^0) + F_{22}^{(1)}(t^*)\varphi_2(\mu_2, x_j^0))\tilde{\psi}_2^* + \\ &+ (F_{11}^{(2)}(t^*)\bar{Q}_1(0) + F_{12}^{(2)}(t^*)\bar{Q}_2(0))\varphi_1(\mu_1, x_j^0) + \\ &+ (F_{21}^{(2)}(t^*)\bar{Q}_1(0) + F_{22}^{(2)}(t^*)\bar{Q}_2(0))\varphi_2(\mu_2, x_j^0)| = \varepsilon_{\min}^{(2)}, \quad j = \overline{1, 3}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

которая замыкается относительно всех неизвестных $\tilde{\psi}_1^*$, $\tilde{\psi}_2^*$, $\varepsilon_{\min}^{(2)}$, $x_{j_g}^0$, $g = \overline{1, R_1}$, $R_1 \leq R$, условиями (2.25) существования экстремума $Q(x, \psi_*^{(2)})$ в точках $x_j^0 \in \text{int}[0, 1]$, записываемыми в аналогичной (4.19) форме.

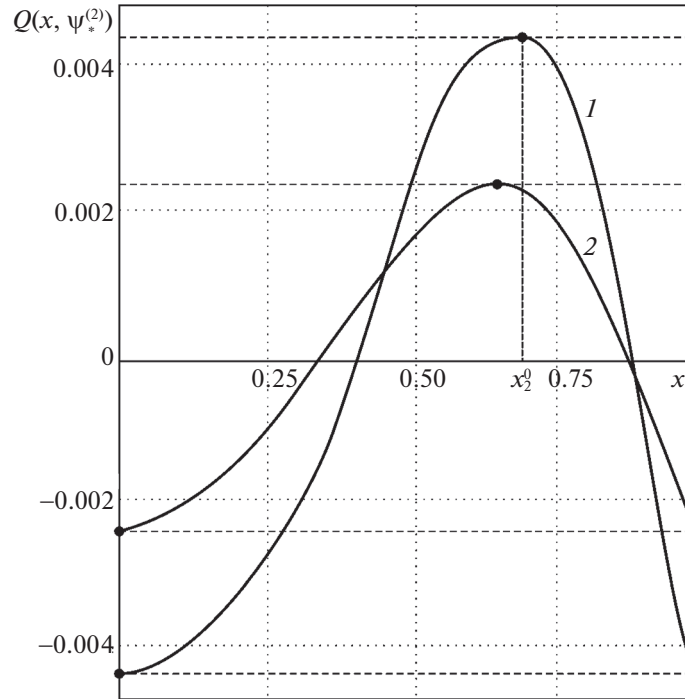


Рис. 1. Температурное распределение в конце оптимального процесса управления

Физические закономерности поведения нестационарных температурных полей в оптимальном процессе нагрева пластины и альтернансные свойства $Q(x, \psi_*^{(2)})$ определяют в рассматриваемом примере, подобно [13, 14], при $M = 2$, $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$, $Q_0 = \text{const}$ в (4.2) форму кривой $Q(x, \psi_*^{(2)})$ результирующего распределения температуры по пространственной координате (рис. 1), что позволяет заведомо идентифицировать в (4.19) координаты точек $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = x_{j_g}^0 = x_{j_l}^0 \in (0, 1)$, $x_3^0 = 1$ и знаки $Q(x_j^0, \psi_*^{(2)})$. В результате равенства (4.19), дополняемые условиями существования экстремума (2.27) в одной точке x_2^0 , редуцируются аналогично [13, 14] к замкнутой системе линейных по $\tilde{\psi}_1^*$, $\tilde{\psi}_2^*$ уравнений вида (2.25):

$$Q(0, \psi_*^{(2)}) = -\varepsilon_{\min}^{(2)}; \quad Q(x_2^0, \psi_*^{(2)}) = \varepsilon_{\min}^{(2)}; \quad Q(1, \psi_*^{(2)}) = -\varepsilon_{\min}^{(2)}; \quad \frac{\partial Q(x_2^0, \psi_*^{(2)})}{\partial x} = 0, \quad (4.20)$$

разрешаемой относительно всех искомых величин стандартными численными методами.

Аналитическое конструирование оптимального регулятора. Согласно (3.12), получаем линейный с нестационарными коэффициентами алгоритм оптимального управления с обратными связями по состоянию $\bar{Q}(t) = (\bar{Q}_i(t))$, $i = 1, 2$:

$$(1 + k_0)u_s^*(\bar{Q}, t) = \frac{1}{2}KT_1(t)T_2(t)\bar{Q}(t), \quad (4.21)$$

где матрицы T_1 , T_2 вычисляются, согласно, (3.8), (3.9), (3.11), при $\psi^*(t^*) = (\tilde{\psi}_i^*, i = 1, 2; \psi_i^*(t^*) = 0, i > 2)$, найденном в результате решения системы уравнений (4.20). Произведение T_1T_2 оказывается в результате 2×2 -матрицей, все элементы которой становятся известными функциями $\psi_{ks}(t)$, $\bar{Q}_{ks}(t)$ в (4.12), однозначно определяющими закон (4.21) синтеза оптимального регулятора.

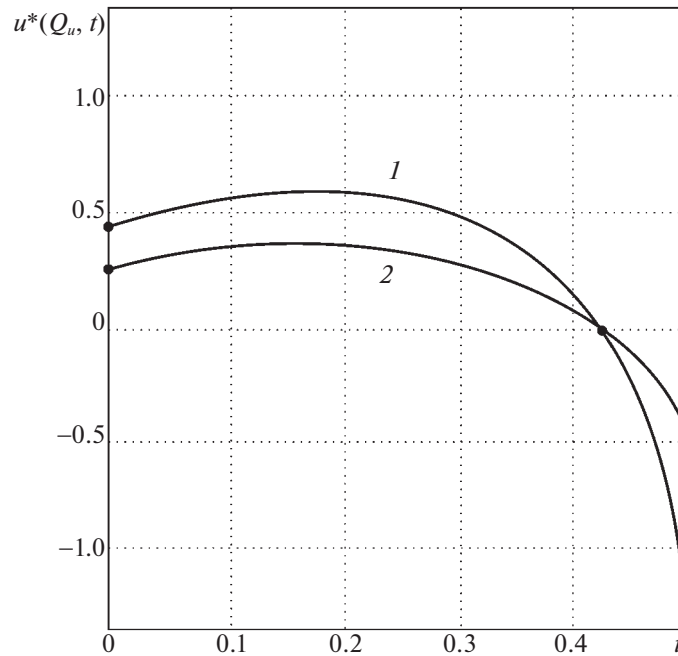


Рис. 2. Зависимости управляющих воздействий от изменяющихся во времени сигналов обратной связи

При наличии двух измерителей выхода объекта в точках $x_{u1}, x_{u2} \in [0, 1]$ получаем систему двух линейных уравнений в (3.13):

$$\begin{aligned} Q_u(x_{u1}, t) &= \bar{Q}_1(t)\varphi_1(\mu_1, x_{u1}) + \bar{Q}_2(t)\varphi_2(\mu_2, x_{u1}); \\ Q_u(x_{u2}, t) &= \bar{Q}_1(t)\varphi_1(\mu_1, x_{u2}) + \bar{Q}_2(t)\varphi_2(\mu_2, x_{u2}), \end{aligned} \tag{4.22}$$

разрешаемую относительно $\bar{Q}_1(t), \bar{Q}_2(t)$.

Подстановка этого решения в (4.21) определяет алгоритм синтеза оптимальной обратной связи по выходу объекта в форме (3.15):

$$(1 + k_0)u_s^*(Q_u, t) = \frac{1}{2}KT_1(t)T_2(t)\Phi_u^{-1}Q_u(x_u, t), \tag{4.23}$$

где $\Phi_u = [\varphi_n(\mu_n, x_{uj}); n, j = 1, 2]$.

На рис. 1, 2 представлены некоторые расчетные результаты, полученные при $Q^{**} = 0, t^* = 0.5, k_0 = 0.1$ для двух различных значений Q_0 (кривые 1 – $Q_0 = -0.25; \tilde{\psi}_1^* = 0.648; \tilde{\psi}_2^* = -1.161; \epsilon_{\min}^{(2)} = 0.0043$; кривые 2 – $Q_0 = -0.1; \tilde{\psi}_1^* = 0.260; \tilde{\psi}_2^* = -0.464; \epsilon_{\min}^{(2)} = 0.0023$) при выборе двух измерителей выхода объекта в точках $x_{u1} = 0; x_{u2} = 1$. На рис. 1 показаны распределения температуры по толщине пластины в конце оптимального процесса нагрева. Рисунок 2 иллюстрирует поведение в процессе нагрева оптимальных управляющих воздействий, изменяющихся во времени по алгоритму (4.23) в зависимости от текущих значений измеряемых сигналов обратной связи с нестационарными коэффициентами передачи. Как следует из приведенных данных, алгоритм (4.23) оптимального управления обеспечивает при различных начальных условиях заданную точность приближения к требуемому конечному состоянию объекта.

Заключение. Предлагаемый метод аналитического конструирования оптимальных регуляторов в линейно-квадратичной задаче управления системами с распределенными параметрами параболического типа разработан применительно к характерным для приложений оценкам целевых множеств конечных состояний объекта в равномерной метрике. Полученные уравнения регуляторов сводятся к линейным алгоритмам обратной связи с фиксируемыми предварительным расчетом нестационарными коэффициентами. Погрешности реализации предлагаемых алгоритмов обратной связи непосредственно по неполному измерению состояния системы определяются требованиями к точности описания модели объекта укороченной системой уравнений для модальных составляющих управляемой величины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Летов А.М.* Математическая теория процессов управления. М.: Наука, 1981.
2. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969.
3. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: Физматлит, 2007.
4. Теория автоматического управления / Под. ред. В.Б. Яковлева. М.: Высш. шк., 2003.
5. *Рей У.* Методы управления технологическими процессами. М.: Мир, 1983.
6. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.
7. *Афанасьев В.Н.* Управление неопределенными динамическими объектами. М.: Физматлит, 2008.
8. *Поляк Б.Е., Щербakov П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
9. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.
10. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977.
11. *Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К.* Синтез оптимального управления в системах с распределенными параметрами при неполном измерении состояния (обзор) // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 123–136.
12. *Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К.* Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. М.: Машиностроение, 1986.
13. *Рапопорт Э.Я.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2009.
14. *Рапопорт Э.Я.* Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации. М.: Наука, 2000.
15. *Плешивцева Ю.Э., Рапопорт Э.Я.* Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 3. С. 22–33.
16. *Рапопорт Э.Я.* Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. М.: Высш. шк., 2003.
17. *Валеев Г.К., Жаутыков О.А.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Алма-Ата: Наука Казахской ССР, 1974.
18. *Коваль В.А.* Спектральный метод анализа и синтеза распределенных управляемых систем. Саратов: Саратовский гос. техн. ун-т, 1997.
19. *Егоров Ю.В.* Необходимые условия оптимальности в банаховом пространстве // Мат. сборник (новая серия). 1964. Т. 64 (106). № 1. С. 79–101.
20. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986.
21. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
22. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
23. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
24. *Гаврилов В.М.* Оптимальные процессы в конфликтных ситуациях. М.: Сов. радио, 1969.
25. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
26. *Пантелеев А.В., Бортакoвский А.С.* Теория управления в примерах и задачах. М.: Высш. шк., 2003.
27. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. шк., 2001.

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

УДК 519.712.7

**ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНАЯ СИСТЕМА ПЛАНИРОВАНИЯ ГРУППОВЫХ
ДЕЙСТВИЙ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ
ПРИ НАБЛЮДЕНИИ НАЗЕМНЫХ МОБИЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ
НА ЗАДАННОЙ ТЕРРИТОРИИ¹**

© 2021 г. В. И. Гончаренко^{a,b,*}, С. Ю. Желтов^c, В. А. Князь^{c,d},
Г. Н. Лебедев^a, Д. А. Михайлин^a, О. Ю. Царева^c

^a МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

^b ИПУ РАН, Москва, Россия

^c ФНЦ ФГУП “ГосНИИАС”, Москва, Россия

^d МФТИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

*e-mail: vladimirgonch@mail.ru

Поступила в редакцию 14.04.2020 г.

После доработки 29.10.2020 г.

Принята к публикации 30.11.2020 г.

Рассматривается многокритериальная задача предполетного и оперативного планирования групповых действий беспилотных летательных аппаратов с учетом требуемого графика обслуживания. Предложен минимаксный критерий оперативного планирования групповых действий при изменении динамической обстановки. Сформирован облик экспертной системы управления длительностью наблюдения при поиске и обнаружении наземных объектов. Полученные результаты оценки качества решения подзадачи нейросетевого распознавания мобильных объектов на основе глубокого обучения подтвердили эффективность предложенного подхода при мониторинге контролируемой территории.

DOI: 10.31857/S0002338821030057

Введение. Стремительный прогресс в технических характеристиках беспилотных летательных аппаратов (БЛА) позволяет применять их в широком спектре приложений от видеонаблюдения и аэрофотосъемки до автономной доставки грузов в труднодоступные районы. Рост числа приложений, где используются БЛА, во многом основан на достижениях в области интеллектуальной обработки информации как в части планирования миссий, так и в части методов анализа сенсорной информации от датчиков БЛА, позволяющих анализировать оперативную обстановку и, при необходимости, оперативно изменять план миссии.

Важной задачей, решение которой без использования БЛА представляется весьма сложной и ресурсоемкой, является задача наблюдения (мониторинга) мобильных объектов в заданном районе. К такого рода задачам относятся мониторинг транспортных средств при их движении по заданному маршруту, контрольно-спасательный мониторинг спортивно-туристических групп в труднодоступных и опасных районах, мониторинг спортивных соревнований на обширной территории и др. При этом с ростом числа наблюдаемых объектов и увеличением контролируемой территории возрастает необходимость организации мониторинга группой БЛА, взаимодействующих между собой с целью обеспечения оптимального решения задачи.

Для эффективного мониторинга мобильных объектов необходимо решить три взаимосвязанных и взаимообусловленных подзадачи.

1. Предполетное планирование миссии с учетом имеющейся информации о параметрах движения контролируемых мобильных объектов.

2. Вывод БЛА в заданные точки контроля объектов и подтверждение/неподтверждение наличия заданного объекта в заданной области, в том числе и с помощью средств технического зрения.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 17-29-03185; № 20-08-00652).

3. Оперативное изменение плана миссии в соответствии с результатами выполнения подзадачи 2.

Сложность планирования названных наблюдений обусловлена, с одной стороны, многокритериальностью задачи выбора для каждого БЛА очередного наземного объекта с учетом условий их видимости и, с другой стороны, необходимостью координации групповых действий БЛА при многомерной маршрутизации и распределении между ними объектов наблюдения. Особую трудность представляет выполнение требования своевременного наблюдения изменяющих свое состояние динамических объектов (в первую очередь мобильных) “в нужном месте и в нужное время”, согласно указанному графику. Кроме того, в связи с неопределенностью динамической обстановки при существенном изменении важности объектов и их состава при получении новой видеоинформации требуется оперативное перепланирование групповых действий, которое занимает центральное место по сравнению с выполнением предполетного задания.

Анализ состояния последних исследований по данному направлению показывает, что вопросам маршрутизации групповых действий уделяется повышенное внимание [1–17]. Однако к числу известных эвристических методов относятся “жадный” алгоритм и алгоритм Дейкстры, пригодный только для одномерной маршрутизации, а методы направленного поиска (например, метод ветвей и границ) обладают большой трудоемкостью вычислений [1–5]. Кроме того, фактор несвоевременности мониторинга выбранных пунктов наблюдения не учитывается, в том числе в задачах целераспределения [4–6, 13, 14]. Также не уделяется должное внимание совместному нахождению маршрутов и расписания с учетом переменной важности объектов [13, 14, 18]. Таким образом, в известных подходах к планированию миссий не учтен главный фактор – время выполнения каждой операции перелета и самого наблюдения, что особенно важно в динамической обстановке.

Для указанных условий установлено, что ни один отдельно взятый подход к решению многокритериальной задачи не способен обеспечить общее решение. Поэтому предлагается поэтапное решение задачи, основанное на сочетании методов оптимального управления и элементов искусственного интеллекта на этапах предполетного и оперативного планирования групповых действий БЛА.

В данной работе предлагаются методы и алгоритмы комплексного решения трех названных выше подзадач мониторинга мобильных объектов:

- генетический алгоритм многомерной маршрутизации при формировании полетного задания;
- нейросетевые методы обнаружения и распознавания наземных объектов с помощью средств технического зрения;
- алгоритм оперативного планирования при распределении объектов наблюдения между БЛА по минимаксному критерию;
- метод нечеткой логики для оценки допустимой длительности поиска наземных объектов при их наблюдении;
- единый подход к решению задач многомерной маршрутизации и оперативного планирования.

1. Постановка задачи и предлагаемый подход к ее решению. Ставится задача формирования автоматизированной интеллектуальной системы управления групповыми действиями БЛА при наблюдении наземных объектов различного класса. Структура этой системы показана на рис. 1.

Названная система соответствует организации мониторинга не только при выполнении полетного задания, но и при обслуживании потока заявок, поступающих в самом полете на вход замкнутой системы управления, имеющей обратную связь для коррекции полетных заданий при получении новой видеоинформации.

При решении задачи приняты следующие допущения.

1. Рассматриваются три класса обслуживаемых объектов – неподвижные пункты, координаты местоположения которых и переменные важности V_j которых заданы ($j = \overline{1, n}$), динамические объекты (ДО) наблюдения с заданным графиком их наблюдения и мобильные объекты (МО), график обслуживания которых не задан, но требуется его определить путем прогнозирования движения МО при их известных курсах и ожидаемых скоростях ($j = \overline{1, M}$).

2. Задание на обслуживание может поступать как до, так и во время полета БЛА.

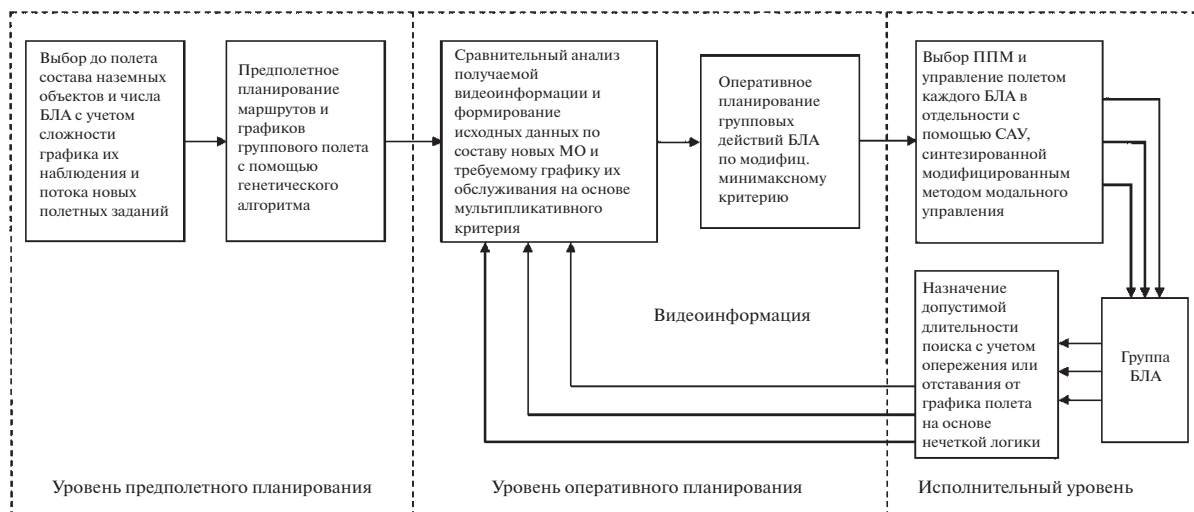


Рис. 1. Структурная схема автоматизированной системы управления групповыми действиями БЛА при наблюдении мобильных объектов

3. Задано число N однотипных БЛА ($N < n + M$), а для каждого БЛА – текущие координаты $X_i, Y_i, Z_i, i = \overline{1, N}$, при полете с заданной скоростью V и возможным многократном наблюдении объектов.

4. Обслуживание каждого наземного объекта планируется до полета одним БЛА и только один раз при требуемом качестве наблюдения. При снижении этого качества и других изменениях динамической обстановки необходимо оперативное планирование новых заданий во время самого полета.

5. Общим критерием эффективности планирования является максимум отношения суммарной важности B_j обслуживаемых наблюдаемых объектов к сумме C_j эксплуатационных затрат, зависящих от суммарной длины $S_j(i)$ пройденного каждым БЛА пути группового полета:

$$J = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n+M} B_j(i, T)}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n+M} S_j(i, T)}, \tag{1.1}$$

где T – заданное время группового полета.

Критерий (1.1) есть величина, обратная известному понятию минимума “цены разведки” или затрат на единицу взвешенной по важности и своевременности “добытой” видеоинформации. Предметом выбора являются состав объектов наблюдения для каждого БЛА и маршруты их полета с учетом переменных параметров динамической обстановки, входящих в числитель и знаменатель критерия (1.1).

Известные попытки решения многомерных задач планирования сводятся к максимизации числителя при фиксированном знаменателе либо к минимизации знаменателя при ограничении числителя, однако в ряде случаев это неэффективно. В данной работе предлагается решение названных выше подзадач целераспределения и маршрутизации при одновременном учете нужного состава динамических переменных как в числителе, так и в знаменателе при возможном использовании не одного, а нескольких частных критериев.

В результате решения задачи требуется:

- определить состав основных динамических переменных, влияющих на “доходную” и “затратную” части критерия (1.1) эффективности системы, и с их учетом разработать алгоритмы многомерной маршрутизации и целераспределения объектов наблюдения между группой БЛА;

– сформировать предполетный план и оперативные планы групповых действий БЛА с учетом своевременности соблюдения графика наблюдения динамических и мобильных объектов и ограниченной длительности самого наблюдения;

– обеспечить “в нужное время и в нужном месте” наблюдение мобильных и других объектов в заданные интервалы времени для их обнаружения и распознавания на изображениях, поступающих от оптико-электронной системы БЛА. В этом и состоит главная особенность постановки решаемой задачи;

– по результатам обнаружения и распознавания скорректировать полетное задание.

2. Назначение динамических приоритетов наблюдаемых объектов с помощью мультипликативно-го критерия. В рассматриваемой задаче значимость каждого j -го наземного объекта должна учитывать ряд параметров, имеющих разную физическую размерность – априорную постоянную важность d_j , максимальную для ДО и МО, их переменную значимость b_j , растущую при увеличении времени τ_j их ненаблюдения, их меняющуюся в полете удаленность R_j от группы БЛА и ожидаемое в текущий момент время Δt_j несоблюдения графика их обслуживания. Для количественной оценки этой значимости решена частная задача динамического программирования [19, 20], когда критерием оптимальности наблюдения является минимум интегрального функционала I , оценивающего потери информации при несвоевременном наблюдении объектов во время перелетов БЛА:

$$I = \min_{j(t)} \int_0^{T_{n+M}} \sum_{j=1}^{n+M} d_j b_j \tau_j dt. \quad (2.1)$$

Смысл представленного критерия (2.1) состоит в следующем. Произведение первых двух сомножителей d_j и b_j определяет общую динамическую важность B_j выбранного объекта и характеризует его ожидаемую “доходную” часть. С другой стороны, чем больше время τ_j его ненаблюдения, тем выше риск негативных потерь, особенно у МО и ДО, из-за несвоевременности контроля. Поэтому на каждом шаге перелетов нужно выбирать первоочередными такие объекты, чтобы общие потери информации при наблюдении заданной территории были минимальны с учетом динамики изменений переменных $b_j(t)$ и $\tau_j(t)$.

В данной работе принято, что динамика нарастания времени ненаблюдения τ_j проста – она совпадает с динамикой изменения текущего времени, а динамика нарастания нормированной переменной b_j описывается системой дифференциальных уравнений второго порядка в отличие от ранее известной экспоненциальной модели [20]:

$$\frac{dx_{1i}}{dt} = \begin{cases} x_{2j} & \text{при } i \neq j, \\ -\frac{x_{1j}}{\Delta t} & \text{при } i = j, \end{cases} \quad \frac{dx_{2i}}{dt} = \begin{cases} a_i & \text{при } i \neq j, \\ -\frac{x_{2j}}{\Delta t} & \text{при } i = j, \end{cases} \quad \frac{d\tau_i}{dt} = \begin{cases} 1 & \text{при } i \neq j, \\ -\frac{\tau_j}{\Delta t} & \text{при } i = j, \end{cases} \quad (2.2)$$

где i – номер любого объекта, j – номер выбранного объекта, τ_j – время ненаблюдения, $x_{1i} = b_i$ – переменная значимость; x_{2i} – скорость нарастания значимости при ненаблюдении; Δt – заданное время наблюдения одного объекта; a_i – заданная постоянная величина ускорения постепенного возрастания скорости увеличения значимости x_{1i} в интервале $[0, 1]$. Использование системы (2.2) обеспечивает малую скорость возрастания значимости в начале ненаблюдения, что более правдоподобно, чем у системы первого порядка, а обнуление переменных τ_j , x_{1j} , x_{2j} в процессе успешного наблюдения выбранного j -го объекта соответствует временному исчезновению к нему интереса.

Тогда с учетом (2.1) и (2.2) можно получить уравнение Беллмана в частных производных:

$$-\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \min_j \left\{ \sum_{i=1}^n d_i x_{1i} \tau_i + \sum_{i \neq j}^n \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial x_{1i}} x_{2i} + \frac{\partial \epsilon}{\partial x_{2i}} a_i + \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau_i} \right) - \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial x_{1j}} \frac{x_{1j}}{\Delta t} + \frac{\partial \epsilon}{\partial x_{2j}} \frac{x_{2j}}{\Delta t} + \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau_j} \frac{\tau_j}{\Delta t} \right) \right\}, \quad (2.3)$$

где $\epsilon(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\tau})$ – искомая функция Беллмана от текущего состояния трех векторов ранее названных переменных x_1 , x_2 , τ при оптимальном поведении системы. Последнее слагаемое в фигурных скобках есть приоритет P_j , а первое слагаемое в правой части уравнения (2.3) – подынтегральное выражение функционала I (2.1).

Тогда функцию Беллмана ε с учетом парных произведений b_j, r_j в функционале I можно приближенно представить в виде степенного полинома второго порядка с девятью искомыми коэффициентами $\beta_i, \psi_{ij}, \gamma_{ij}$:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n \left[\left(\beta_{1i} x_{1i} + \gamma_{1i} \frac{x_{1i}^2}{2} \right) + \left(\beta_{2i} x_{2i} + \gamma_{2i} \frac{x_{2i}^2}{2} \right) + \left(\beta_{3i} \tau_i + \gamma_{3i} \frac{\tau_i^2}{2} \right) + (\psi_{12i} x_{1i} x_{2i} + \psi_{13i} x_{1i} \tau_i + \psi_{23i} x_{2i} \tau_i) \right]. \quad (2.4)$$

Нахождение этих коэффициентов возможно с помощью метода рабочей точки [21], согласно которого в окрестности этой точки вычисляются ординаты C_i минимального риска, которые необходимо приравнять друг к другу. Поэтому, задавшись 10 ординатами риска, можно получить систему необходимых линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 4\Delta x_1 \psi_{12j} + \beta_{2j} + 3\Delta x_2 \gamma_{2j} + 2\Delta \tau \psi_{23j} &= 0; \\ \beta_{1j} + \gamma_{1j} 3\Delta x_1 + 4\Delta \tau \psi_{13j} + 2\Delta x_2 \psi_{12j} &= 2d_j \Delta \tau \Delta t; \\ \beta_{3j} + 3\Delta \tau \gamma_{3j} + 4\Delta x_2 \psi_{23j} + 2\Delta x_1 \psi_{13j} &= d_j \Delta x_1 \Delta \tau; \\ [\beta_{1j} + 3\Delta x_1 \gamma_{1j} + 2\Delta \tau \psi_{13j}] \Delta x_1 - [\beta_{2j} + 3\Delta x_2 \gamma_{2j} + 2\Delta \tau \psi_{23j}] \Delta x_2 &= d_j \Delta x_1 \Delta \tau; \\ [\beta_{1j} + 3\Delta x_1 \gamma_{1j} + 2\psi_{12j} \Delta x_2] \Delta x_1 - [\beta_{3j} + 3\Delta \tau \gamma_{3j} + 2\Delta x_2 \psi_{23j}] \Delta \tau &= 0; \\ \beta_{1j} + 3\Delta x_1 \Delta x_2 \gamma_{1j} + 2\psi_{12j} \Delta x_2 + 2\psi_{13j} \Delta \tau &= d_j \Delta x_1 \Delta \tau; \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{1j} \left(\Delta x_2 - \frac{\Delta x_1}{(n-1)\Delta t} \right) + \psi_{12j} \left(a_i - \frac{\Delta x_2}{(n-1)\Delta t} \right) + \psi_{13j} \left(1 - \frac{\Delta \tau}{(n-1)\Delta t} \right) &= -d_j \Delta \tau; \\ \psi_{12j} \left(\Delta x_2 - \frac{\Delta x_1}{(n-1)\Delta t} \right) + \gamma_{2j} \left(a_i - \frac{\Delta x_2}{(n-1)\Delta t} \right) + \psi_{23j} \left(1 - \frac{\Delta \tau}{(n-1)\Delta t} \right) &= -d_j \Delta \tau \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}; \\ \psi_{13j} \left(\Delta x_2 - \frac{\Delta x_1}{(n-1)\Delta t} \right) + \psi_{23j} \left(a_i - \frac{\Delta x_2}{(n-1)\Delta t} \right) + \gamma_{3j} \left(a_i - \frac{\Delta \tau}{(n-1)\Delta t} \right) &= -d_j \Delta x_1. \end{aligned}$$

На основании полученного решения установлено, что назначение динамических приоритетов Π_j , зависящих от искомым коэффициентов $\beta_i, \psi_{ij}, \gamma_{ij}$ функции Беллмана, имеет следующую мультипликативную форму, которая выгодно отличается от известной аддитивной за счет исключения “узких мест” в оценке каждого объекта, когда один из сомножителей явно мал:

$$\Pi_j \approx d_j (x_{1j} + \Delta t x_{2j}) (\tau_j + 3\Delta t). \quad (2.6)$$

Учитывая преимущество найденной формы (2.6) при обслуживании неподвижных пунктов и повышенную важность своевременного обслуживания мобильных и динамических объектов, в данной работе предложено ее обобщение для других динамических переменных в следующем эвристическом виде:

$$\Pi_1 = \max_j (X_{1j} + m_1)(X_{2j} + m_2)(X_{3j} + m_3), \quad (2.7)$$

где X_{nj} – безразмерные максимизируемые показатели, полученные путем деления значений b_j, r_0 и Δt_0 на их максимальные значения:

$$X_{1j} = \frac{b_j}{b_{\max}}; \quad X_{2j} = \frac{r_0}{r_0 + R_j}; \quad X_{3j} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_0 + \Delta t_j} /, \quad (2.8)$$

а $b_{\max}, r_0, \Delta t_0$ заданы.

Соответственно в формулах (2.8) значение

$$R_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_{ij}$$

характеризует среднюю текущую удаленность j -го объекта от совершающей полет группы БЛА, а $\Delta t_j = \left| v_j - t - \min_i (r_{ij}/V) \right|$ – время несоблюдения заданного графика, где v_j – требуемый, соглас-

но графику, момент наблюдения, t – текущее время, $\min(r_{ij}/V)$ – требуемое минимальное время для перелета БЛА к нужному j -му объекту. Согласно формулам (2.7) и (2.8), знаменатель в выражении для X_3 падает с течением времени из-за уменьшения интервала Δt_j и приоритет такого объекта растет, что требует его первоочередного обслуживания.

Сомножителями мультипликативной формы одновременно являются показатели числителя и знаменателя общего критерия (1.1), в отличие от “жадного” алгоритма, учитывающего только связанные с длиной пути затраты топлива. В свою очередь m_j – весовые коэффициенты, назначаемые заранее и устанавливающие неодинаковую значимость показателей. Уменьшение каждого из них приведет к повышению значимости соответствующего сомножителя в свертке (2.7) при соблюдении условия:

$$\sum_{i=1}^3 m_i = 1. \quad (2.9)$$

При условии (2.9) мультипликативные произведения в формуле (2.7) приобретают значимость на порядок выше аддитивных слагаемых. Полученная форма свертки (2.7) требует при технической реализации минимального числа операций умножения и сложения и ниже используется как при предполетном, так и оперативном планировании [22, 23].

3. Алгоритм предполетного планирования маршрутов группового полета. В данной работе предложен высокоэффективный *генетический алгоритм*, гарантирующий достижение глобального экстремума при особом способе формирования “элиты” и “потомков” на каждом шаге эволюции [24]. Генетический алгоритм отличается тем, что планируемые маршруты группового полета разбиваются на три участка – начала, середины и конца полета, границами которых являются динамические или мобильные объекты с требуемым графиком обслуживания, а внутри этих участков в план попадают менее важные неподвижные пункты, чтобы затем с помощью одного из трех двухпараметрических критериев сформировать первоначальную “элиту” лучших частных одномерных маршрутов.

Для этого используются три следующих частных двухпараметрических критерия:

– формирование первого маршрута полета при выборе очередного объекта по критерию минимальной длины пути, и включающего наиболее важные объекты без учета соблюдения графика полета:

$$J_1 = \min_j \frac{R_j}{B_j + B_{\max}}, \quad (3.1)$$

где R_j характеризует среднюю текущую удаленность j -го объекта от совершающей полет группы БЛА;

– формирование второго маршрута с учетом лишь важности и соблюдения графика очередного объекта с помощью другого критерия:

$$J_2 = \max_j [(B_j + B_{\max}) \Delta t_j], \quad (3.2)$$

где Δt_j характеризует несвоевременность обслуживания объекта наблюдения;

– формирование третьего маршрута без учета важности очередного объекта, но с учетом остальных двух параметров:

$$J_3 = \min_j \frac{R_j}{\Delta t_j + \Delta t_0}. \quad (3.3)$$

Таким образом, каждый из трех “предков” формируется с учетом двух факторов из трех возможных, которые образуют “элиты” одномерных маршрутов. Затем осуществляется “скрещивание” участков сформированной элиты, а потом “мутация” путем перестановки соседних пунктов на границах участков, чтобы получить улучшенный результат за малое число шагов эволюции. Операция отбора лучшего варианта маршрута полета проводится по критерию (1.1) максимума отношения суммарной важности объектов наблюдения к длине маршрута. *Удачное сочетание отдельных участков маршрута друг с другом, каждый из которых сформирован с помощью “своего” частного двухпараметрического критерия*, обеспечивает повышение эффективности планирования в отличие от использования полного трехпараметрического критерия.

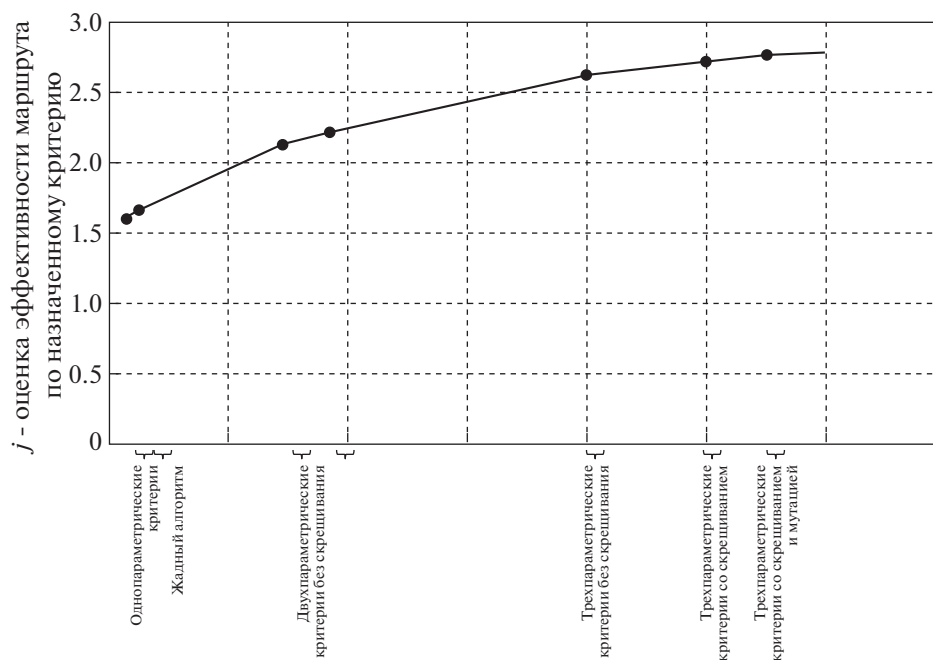


Рис. 2. График зависимости эффективности планирования от выбранного метода решения задачи

Далее при формировании многомерных маршрутов из назначенного генетическим алгоритмом множества объектов в данном разделе работы представлено решение задачи целераспределения пока что с помощью известного жадного алгоритма с правом первого выбора для любого БЛА при разрешении конфликтных ситуаций.

Иллюстрация улучшения качества планирования приведена на рис. 2.

Из рис. 2 видно, что эффективность маршрутизации генетическим алгоритмом возрастает на 15–20%. При этом, как показало компьютерное моделирование, время предполетного планирования не превышает 10 с за счет малого числа шагов эволюции.

Следует дополнительно отметить, что время ν_j наблюдения МО, используемое в формулах (2.8), (3.2), (3.3), заранее не задано и его нужно при планировании доопределить. Для этого, зная расчетное текущее время t и место пребывания в этот момент ближайшего к нему БЛА, необходимо спрогнозировать прямолинейное движение МО при его известном курсе и скорости, при сближении с БЛА, чтобы вычислить искомый момент ν_j пролета БЛА над целью. Также с помощью дополнительно планируемых пунктов маршрута самого БЛА в конце сближения с целью необходимо обеспечить его движение вдоль трассы, чтобы добиться наибольшей вероятности обнаружения МО.

Однако значимость наблюдаемых обслуживаемых наземных объектов при получении новой видеоинформации может непредсказуемо меняться и должна быть уточнена с учетом возрастания или падения интереса к ним. Поэтому в различных задачах обслуживания новых полетных заданий необходимо оперативное перепланирование групповых действий БЛА [25].

4. Алгоритм оперативного планирования групповых действий БЛА. Главная особенность оперативного планирования состоит в том, что на каждом шаге планирования от обслуживания освобождается один БЛА, а остальные заняты. Разработанный алгоритм планирования содержит следующие четыре операции.

В первой операции осуществляется выбор первоочередных необслуженных целей (число n которых соизмеримо с числом N БЛА) по мультипликативному критерию (2.7).

Во второй операции сформированный список ранжируется по другому критерию, учитывающему важность и суммарную удаленность каждого наземного объекта от группировки БЛА:

$$P_2 = \max_{j=1, N} \left(b_j \sum_{i=1}^N r_{ij} \right). \quad (4.1)$$

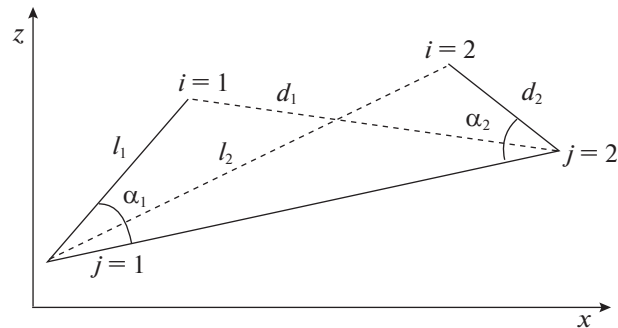


Рис. 3. Схема расположения БЛА относительно обслуживаемых целей в декартовой системе координат (x, z)

Необходимость выполнения этой процедуры ранжирования вызвана последующим стремлением уменьшить в первую очередь время обслуживания наиболее удаленных объектов, расположенных в начале проранжированного списка.

В третьей операции распределения БЛА выбирается j -я цель с максимальным рангом, и для нее решается задача назначения “своего” БЛА по третьему критерию максимальной близости:

$$P_{3j} = \min_{i=1, N}(r_{ij}). \quad (4.2)$$

Таким образом, основными являются вторая и третья операции, реализующие модифицированный *минимаксный критерий* назначения ближайшего БЛА для цели с максимальным временем обслуживания и минимизирующее *время выполнения части полетного задания на одном шаге оперативного планирования*. При этом, как показано ниже, этот критерий попутно минимизирует суммарную длину пути группы БЛА и исключает пересечение их маршрутов.

Для этого в четвертой операции осуществляется проверка условий непересекаемости маршрутов группового полета, показанных на рис. 3 непрерывными линиями длиной l_1 и d_2 для двух БЛА ($i = 1$ и 2).

Пусть дано условие максимальной удаленности по критерию J_1 в виде неравенства

$$d_1 + d_2 > l_1 + l_2. \quad (4.3)$$

Пусть также по критерию J_2 для наиболее удаленного объекта с номером $j = 1$ выбран ближайший незанятый БЛА с номером $i = 1$, так как

$$l_1 < l_2. \quad (4.4)$$

Но для выпуклого четырехгранника условию (4.4) практически соответствует соблюдение другого неравенства:

$$d_2 < d_1. \quad (4.5)$$

Тогда, складывая неравенства (4.4) и (4.5) друг с другом, получим следующий ответ:

$$l_1 + d_2 < l_2 + d_1, \quad (4.6)$$

т.е. сумма двух сторон четырехгранника меньше суммы его диагоналей, что требовалось доказать — необходимое условие непересекаемости этих сторон соблюдается и общая длина пути минимизируется. В противном случае необходимо поменять объекты наблюдения местами.

На рис. 3 видно, что объект с $j = 1$ наиболее удален от двух БЛА с $i = 1$ и 2 , так как $l_1 + l_2 > d_1 + d_2$. Это соответствует критерию P_{2j} по формуле (4.1), если важности обоих объектов одинаковы, т.е. $B_1 = B_2$. Тогда $r_1 = 0.5(l_1 + l_2)$, а $r_2 = 0.5(d_1 + d_2)$. Также видно, что для объекта с $j = 1$ ближайшим будет БЛА с $i = 1$, что соответствует другому критерию P_3 и обеспечивает удачное целераспределение — участки перелета не пересекаются и имеют минимальную длину суммарного пути.

Можно привести другой пример при $N = 3$, показанный ниже на рис. 4, из которого видно, что наиболее удаленным от группы БЛА является объект с номером $j = 3$.

Тогда если начать целераспределение с него и пользоваться предложенным подходом для остальных целей, обведенные контурами участки перелета будут иметь минимальную

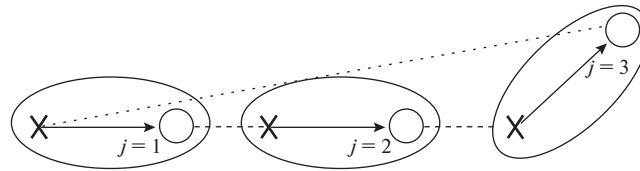


Рис. 4. Результаты сравнения известного и предложенного минимаксного подхода для $N = 3$

суммарную длину. И эти участки не пересекаются. При всех остальных способах это пересечение возникает. Более того, общая длина показанных пунктиром участков возрастает в 1.5 раза.

Поэтому в четвертой операции исключения пересеканости маршрутов необходимо обеспечить минимум их суммарной длины Π_4 для выбранного k -го варианта целераспределения:

$$\Pi_{4k} = \min_{k=1, N!} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N r_{ij}(k) \tag{4.7}$$

при условии, что сумма D индексов i и j при N слагаемых r_{ij} должна быть равна $N(N + 1)$:

$$D = \sum_{k=1}^N (i_k + j_k) = N(N + 1). \tag{4.8}$$

Например, если при $N = 3$ сумма $\Pi_{4k} = r_{11}(k) + r_{22}(k) + r_{33}(k)$, то $D_k = (1 + 1) + (2 + 2) + (3 + 3) = 3 \cdot 4 = 12$.

Проверка суммарной длины пути на минимум позволяет избежать трудоемкого анализа существования общих точек пересечения траекторий группового полета.

5. Единый подход к решению задач назначения приоритетного множества объектов наблюдения и их целераспределения между БЛА при предполетном и оперативном планировании. Указанные преимущества предложенного минимаксного подхода открывают возможность его применения также и в предполетном планировании. Такое объединение позволяет свести все операции планирования к единообразному выполнению двух главных действий – выбор приоритетного множества целей на каждом шаге многомерной маршрутизации с помощью мультипликативной формы критерия (2.7) и их целераспределение между БЛА по минимаксному критерию. Это означает, что при многомерной маршрутизации первая операция заменит известный “жадный” алгоритм при решении подзадачи назначения приоритетного множества объектов, а остальные три операции потребуются для выполнения второго действия при целераспределении. При этом отличие предполетного планирования будет лишь в том, что назначение на одном шаге при неоднократном выборе множества объектов произойдет для всех БЛА, а при оперативном планировании при однократном выборе объектов – только для одного БЛА, освободившегося в текущий момент от обслуживания. Но это отличие не изменит координированного характера групповых действий и их последствий, учитывающих главный фактор своевременности мониторинга объектов наблюдения.

Ниже приводится пример планирования групповых действий трех БЛА с учетом заданного графика экологического мониторинга городов Московской области. В данном примере решалась задача наблюдения 15 городов на северо-востоке Московской области при вылете из Егорьевска трех БЛА. При этом в четырех городах назначен график своевременного контроля экологической обстановки (пункты 10 (Клин), 21 (Сергиев Посад), 24 (Киржач), и 28 (Электросталь) обслуживаются по расписанию). Результат планирования шести разомкнутых маршрутов для двух случаев при известном подходе с помощью “жадного” алгоритма и при предложенном минимаксном подходе представлен на рис. 5.

На рисунке пунктиром обозначены маршруты наблюдения, полученные с помощью “жадного” алгоритма. Видно, что они дважды пересекаются. Представленный непрерывными линиями график показывает, что при предложенном подходе маршруты не пересекаются и близость к оптимальному критерию минимума общей длины маршрута подтверждается пониженной “изрезанностью” более или менее прямолинейных траекторий полета.

В целом, если использование представленных выше мультипликативного критерия выбора приоритетных объектов и генетического алгоритма повышает эффективность планирования за

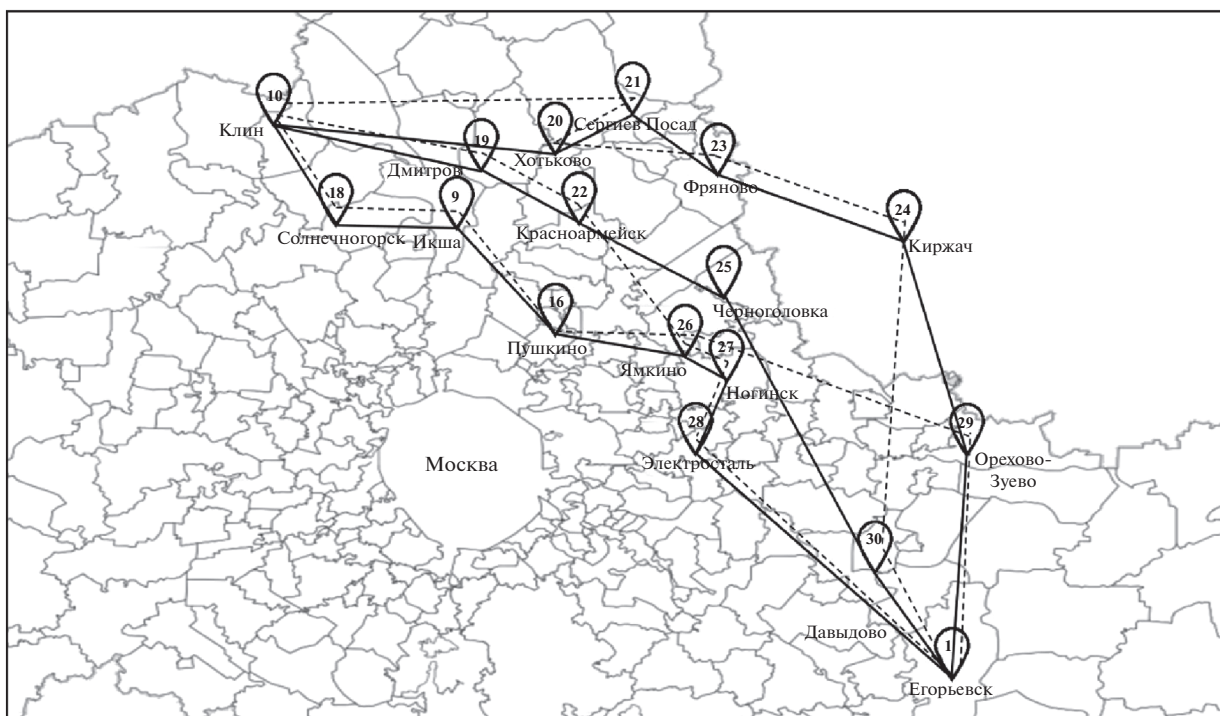


Рис. 5. Результат моделирования работы алгоритмов многомерной маршрутизации группового полета при наблюдении городов Московской области

счет увеличения числителя в общем критерии (1.1), то минимаксный критерий дополнительно уменьшает на 10–15% его знаменатель за счет сокращения суммарной длины группового полета.

К преимуществам минимаксного алгоритма относятся:

- повышение безопасности группового полета за счет обеспечения непересекаемости маршрутов БЛА, летящих на одной высоте;
- доказано обеспечение минимума длины суммарного пути на перелеты, а значит, снижение затрат топлива;
- снижение трудоемкости вычислений при планировании не менее чем на порядок при $N > 5$ по сравнению с полным перебором вариантов целераспределения;
- минимум времени полного выполнения локального задания, возникающего в полете при числе объектов наблюдения, соизмеримом с числом БЛА;
- повышение эффективности групповых действий по критерию (1.1) как за счет увеличения его числителя при приоритетном выборе более важных объектов, так и при уменьшении знаменателя из-за снижения длины суммарного пути непересекающихся маршрутов группового полета.

6. Оценка допустимой длительности наблюдения очередного наземного объекта с помощью экспертной системы нечеткой логики. Назначение допустимой длительности поиска наземной цели с помощью бортовых средств технического зрения происходит в условиях априорной неопределенности, когда заранее неизвестно, насколько велико опережение или отставание от общего графика выполнения всего полета и каковы запасы оставшегося топлива. Кроме того, нужно учитывать динамическую важность V_j обнаруживаемой цели по сравнению с ожидаемой конечной важностью $V_{\text{кон}}$ других необслуженных целей. Поэтому для решения задачи в указанных условиях предлагается использовать экспертную систему нечеткой логики. На ее входе кроме динамической важности V_j очередного объекта обслуживания учитываются:

$(t - \tau)$ – несвоевременность обслуживания очередного объекта;

ΔV_j – оставшийся запас топлива по сравнению с запланированным $\Delta V_{\text{кон}}$.

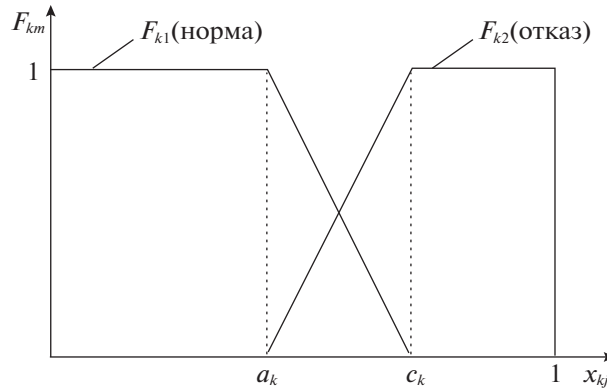


Рис. 6. Функции принадлежности продолжения обнаружения понятиям “норма”, “отказ”

Согласно общепринятому подходу, вначале производится нормирование входных параметров

$$X_{1j} = 1 - V_j/B_{\text{кон}}, \quad X_{2j} = 1 - t/\tau_j, \quad X_{3j} = 1 - \Delta V_j/\Delta V_{\text{кон}}, \quad k = 1, \dots, 3. \quad (6.1)$$

Затем производится фазификация с помощью функций принадлежности F_{k1} и F_{k2} , показанных на рис. 6.

На рисунке по оси абсцисс приводятся значения нормированных разнородных факторов, по оси ординат – функции принадлежности одному из понятий уверенности в продолжении обнаружения. Граничные значения нормированных параметров a_k и c_k назначаются заранее или в зависимости от условий полета. Для принятия согласованного решения в нечеткой логике используется база правил, число которых равно m^k , где m – число терм или качественных оценок (в данной работе $m = 2$, что соответствует двум оценкам “норма” или “отказ” и лингвистическим переменным Z или PL), а k – число учитываемых факторов ($k = 3$). Поэтому база нечетких правил имеет вид табл. 1.

В табл. 1 введены следующие обозначения: $l = 1, \dots, 8$ – номер нечеткого правила; $j = 1$ – принятие решения о продолжении наблюдения, $j = 2$ – решение о его прекращении. Видно, что при числе негативных оценок PL в каждом правиле, больше 1, принимается решение прекратить наблюдение. В остальных более благоприятных ситуациях используется дополнительная *количественная оценка* коэффициента уверенности K продолжения наблюдения. Для этого вначале для каждого фактора в отдельности вычисляется “свой” коэффициент уверенности в виде результата преобразования текущего значения переменной X_{kj} с помощью кусочно-линейной функции F_{k1} , показанной на рис. 6. Затем в машине логического вывода полученные коэффициенты перемножаются по формуле

$$K = [F_{11}(X_1) + F_{12}(X_1)][F_{21}(X_2) + F_{22}(X_2)][F_{31}(X_3) + F_{32}(X_3)]. \quad (6.2)$$

Тогда при ухудшении неблагоприятных факторов значения X_{kj} растут, и поэтому общий коэффициент уверенности K в продолжении поиска цели падает, как показано на рис. 7.

Таблица 1. База нечетких правил при оценке допустимой продолжительности очередного наблюдения

l	1	2	3	4	5	6	7	8
X_1	Z	Z	Z	PL	Z	PL	PL	PL
X_2	Z	Z	PL	Z	PL	Z	PL	PL
X_3	Z	PL	Z	Z		PL	Z	PL
j	1	1	1	1	2	2	2	2

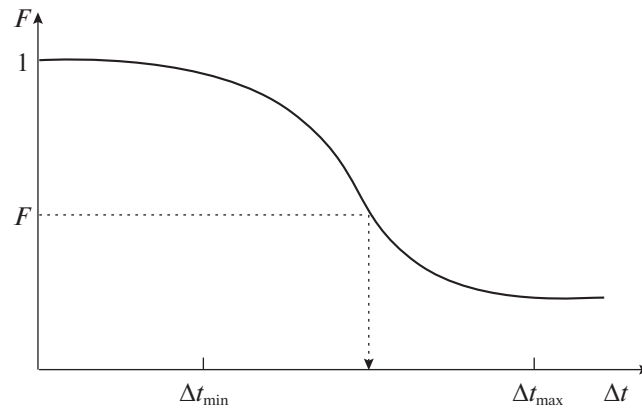


Рис. 7. График падения коэффициента уверенности в ходе поиска цели при ухудшении негативных факторов в зависимости от продолжительности наблюдения Δt_j

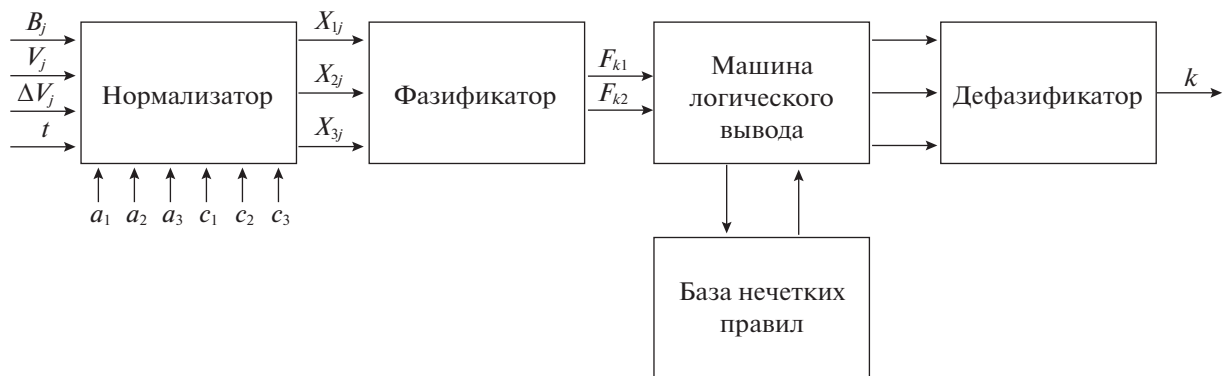


Рис. 8. Функциональная схема экспертной системы нечеткой логики

Чтобы этот коэффициент определить, используется экспертная система нечеткой логики, приведенная на рис. 8.

Получаемый на выходе экспертной системы коэффициент K уверенности в продолжении обслуживания вычисляется по формуле (6.2). При достижении этого коэффициента заданного порога F процесс поиска прекращается. Это позволяет в целом сэкономить общее время выполнения всего полета.

7. Нейросетевые алгоритмы обнаружения и распознавания наземных целей с помощью технического зрения. Растущие технические возможности получения, накопления и обработки сенсорной информации обусловили существенный прогресс в нейросетевых методах решения задач анализа данных, в том числе и в задачах обнаружения и распознавания объектов на изображениях. Лучшие модели сверточных нейронных сетей, обученные на представительных наборах данных большого объема, показывают результаты, которые превосходят способность человека распознавать объекты в сложных условиях.

Необходимым условием эффективной работы нейросетевых алгоритмов является их обучение на представительной выборке данных, содержащих, насколько возможно полное и разнообразное множество предполагаемого вида заданного объекта на изображении. Другим требованием к обучающей выборке является соответствие набора данных требуемым условиям применения системы технического зрения. Для рассматриваемой задачи мониторинга мобильных объектов группой БЛА обучающая выборка должна содержать изображения контролируемых объектов в возможных условиях выполнения мониторинга. В настоящее время отсутствует информация о наличии публично доступных аннотированных выборок, соответствующих по составу требованиям задачи. Поэтому для оценки возможностей нейросетевых алгоритмов по

Таблица 2. Основные технические характеристики FLIR ONE Pro

Наименование характеристики	Значение характеристики
Рабочий диапазон температур	0–35°
Размер	68 × 34 × 14 мм
Разрешение (видимый диапазон)	1440 × 1080
Инфракрасный сенсор	
Размер элемента матрицы (<i>IR</i>)	12 мкм
Спектральный диапазон	8–14 мкм
Разрешение (тепловой диапазон)	160 × 120
<i>HFOV/VFOV</i>	55/43°
Частота кадров	8.7 Гц
Глубина резкости	150 мм – ∞
Динамический диапазон	–20–400°
Точность	±3°
Чувствительность (<i>MRTD</i>)	150 мК

решению задачи распознавания мобильных объектов в рамках их мониторинга БЛА использовались специально созданные выборки изображений, соответствующие условиям задачи.

Для исследований использовался специальный мультимодальный набор данных LAERT, созданный в ходе предшествующих исследований [26, 27]. Набор данных LAERT содержит инфракрасные длинноволновые (LWIR) и цветные (RGB) изображения различных сцен (как городских, так и внегородских), полученные съемкой с БЛА. В качестве объектов мониторинга в данной выборке представлены автомобили двух классов (легковые и грузовые) и люди, в том числе аннотированы объекты малого размера на изображениях [28].

7.1. Формирование набора данных для обучения. Изображения для формирования обучающих и тестовых наборов данных были получены комплексной оптико-электронной системой FLIR ONE Pro. Данная система включает два геометрически выровненных сенсора (инфракрасный диапазона 8–14 мкм и цветной), работающих в синхронном режиме. Основные ее технические характеристики приведены в табл. 2.

Комплексная оптико-электронная система FLIR ONE Pro имеет в своем составе микротермическую камеру с тепловым разрешением 160 × 120 пикселей и может измерять температуру до 400°. Камера видимого диапазона разрешением 144 × 1080 пикселей позволяет синхронно получать цветные изображения, выровненные с тепловой камерой, что необходимо для формирования многомодального набора данных для обучения и тестирования разрабатываемых алгоритмов.

Для получения изображений для наборов данных был выполнен ряд полетов квадрокоптера DJI-F450, оснащенного камерой FLIR ONE Pro. Для управления этой камерой использовался

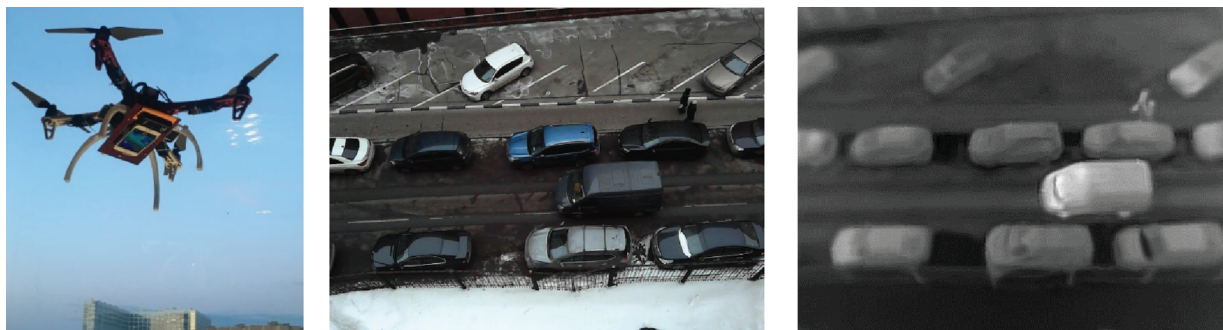


Рис. 9. Квадрокоптер DJI-F450 и снимки с камеры FLIR ONE Pro

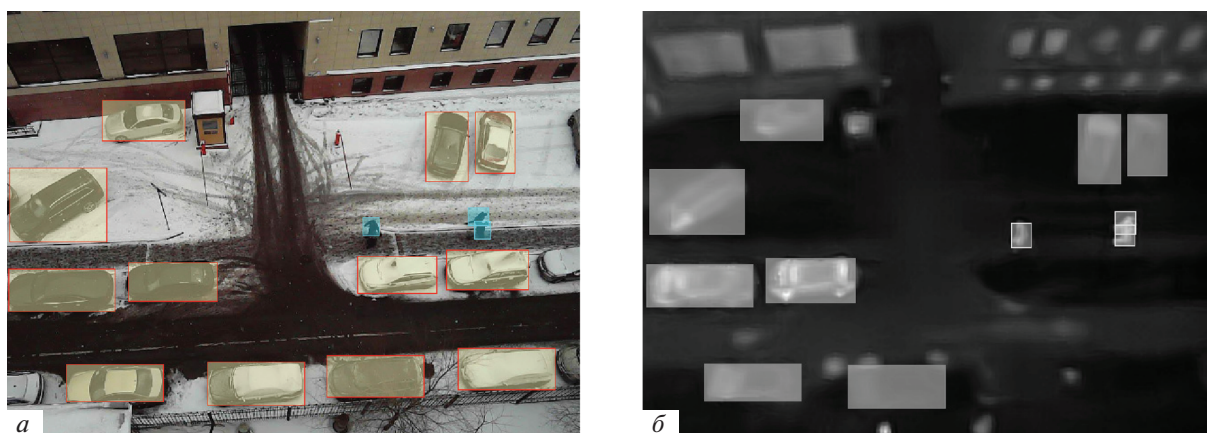


Рис. 10. Пример распознавания объектов для видимых (а) и инфракрасных (б) изображений

смартфон iPhone 5s. Такой квадрокоптер с установленной съемочной системой показан на рис. 9.

Собранный набор данных включает 1680 синхронизированных и выровненных изображений видимого и инфракрасного (8–14 мкм) диапазона светового излучения.

С целью повышения представительности обучающей выборки данные съемки с БЛА были дополнены синтезированными модельными изображениями, сделанными по данным наземной съемки [29] с использованием нейросетевых методов формирования реалистичных тепловых текстур объектов [30].

7.2. Распознавание заданных объектов. В рамках данного исследования выполнены оценки возможностей обнаружения и распознавания объектов заданных классов на основе нейросетевых подходов как одного из этапов решения задачи мониторинга мобильных объектов БЛА. Исследовались возможности распознавания объектов по изображениям, полученным в видимом или тепловом диапазоне, а также потенциал улучшения качества распознавания при комбинировании данных двух типов.

Глубокие сверточные нейронные сети для распознавания объектов можно разделить на два основных класса: одноэтапные и двухэтапные сети распознавания объектов. Для двухэтапного распознавания объекта сначала в области изображения формируются области интереса (возможно, содержащие искомый объект) с последующей классификацией и проверкой обнаруженных кандидатов. Глубокие сверточные нейронные сети R-CNN [31] и их модификация [32, 33] построены на основе данной стратегии.

Одноэтапные нейронные сети пытаются приписать особенности непосредственно рассматриваемым областям изображения и выполнить классификацию в единой модели ГНС. Сеть YOLO [34] (“Вы смотрите только один раз”) – это сверточная модель нейронной сети, работающая как объединенный детектор и классификатор.

Сеть YOLO регрессирует ограничивающие прямоугольники непосредственно из модели CNN. Сеть SSD [35] (однократный многоканальный детектор) может работать с объектами с различного размера на изображении. Сеть SSD пытается предсказать ограничивающие рамки различного масштаба путем регрессии карт характеристик с множественным разрешением.

Двухступенчатые детекторы объектов (Faster R-CNN и аналогичные) обычно показывают более высокую точность обнаружения по сравнению с одноступенчатыми. Предложение области интересов с последующим подходом к уточнению лучше с точки зрения качества распознавания, но требует более трудоемкого и сложного обучения [36].

При оценке качества распознавания заданных объектов как базовая модель использовался предварительно обученный детектор SSD с исходными настройками [35] с дальнейшим дообучением на данных обучающей выборки LAERT.

7.3. Результаты тестирования. В качестве меры правильности распознавания j -го объекта на изображении рассматривался коэффициент Жаккара (или Intersection over Union, IoU, отношение пересечения множеств к их объединению). Он рассчитывался как площадь

Таблица 3. Результаты оценки качества распознавания

Диапазон волн	Обозначение и значение показателя			
	P_{car}	R_{car}	P_h	R_h
Видимый диапазон	0.93	0.91	0.92	0.88
Инфракрасный диапазон	0.92	0.89	0.91	0.93

пересечения S_i , отнесенная к площади объединения S_o ограничивающих прямоугольников для эталонной разметки $B_{этал}$ и результатов распознавания $B_{расп}$:

$$IoU^j = \frac{S_i^j}{S_o^j}, \quad S_i^j = B_{этал} \cap B_{расп}, \quad S_o^j = B_{этал} \cup B_{расп}, \quad (7.1)$$

где $B_{этал}$ – набор пикселей изображения, охватываемых ограничивающей рамкой эталонной разметки, $B_{расп}$ – набор пикселей изображения, покрываемых ограничивающей рамкой распознанного объекта. Верное распознавание $N_{в.расп}$ объекта соответствует значению **IoU** выше заданного порога $t = 0.5$.

Для оценки качества распознавания рассматриваются следующие критерии:

точность (precision) распознавания объекта заданного класса:

$$P^k = \frac{N_{в.расп}^k}{N_{расп}^k}, \quad (7.2)$$

вероятность (recall) распознавания объекта заданного класса:

$$R^k = \frac{N_{в.расп}^k}{N^k}, \quad (7.3)$$

где $N_{в.расп}^k$ – истинное положительное число (количество верно распознанных объектов) для класса k , $k = \overline{1, K}$; K – количество классов в наборе данных; $N_{расп}^k$ – число всех (истинных положительных + ложноположительных) объектов, распознаваемых как объект класса k ; N^k – общее число (истинных положительных + ложноотрицательных) объектов класса k в наборе данных. Рисунок 10 иллюстрирует пример распознавания объектов для видимых изображений (а) и инфракрасных изображений (б).

Результаты, представленные в табл. 3, показывают, что распознавание заданных объектов методами глубокого машинного обучения на собранном мультиспектральном наборе данных обеспечивает высокое качество распознавания для реальных изображений из тестовой выборки.

Заключение. Предложен единый подход к предполетному и оперативному планированию группового полета БЛА, основанный на следующем выполнении двух главных действий – назначение на каждом шаге многомерной маршрутизации приоритетного множества наземных объектов с помощью специальной мультипликативной формы критерия и их целераспределение по минимаксному критерию с помощью ряда простых операций.

Показано, что в сложных полетных ситуациях для повышения эффективности планирования целесообразно использовать элементы искусственного интеллекта:

– при предполетном планировании в генетическом алгоритме в подзадаче назначения формируется не одно, а “элита” множеств объектов с помощью частных двухпараметрических критериев, чтобы затем путем скрещивания и мутации получить близкий к оптимальному маршрут за малое число шагов эволюции, в котором каждый его участок соответствует “своему” частному критерию;

– при подлете БЛА к цели оценка допустимой длительности ее обнаружения с помощью нечеткой логики позволяет сэкономить время полета в условиях несоблюдения его графика и ограниченного запаса топлива;

– при нейросетевом распознавании мобильных и других объектов заданного класса высокое качество мониторинга наблюдений обеспечивается на основе методов глубокого машинного обучения.

При оперативном планировании группового полета обосновано решение задачи целераспределения с помощью не одной, а трех простых операций минимаксного критерия. Вначале выбирается наиболее удаленный от группы БЛА объект, затем ему назначается ближайший БЛА, далее проверяется условие непересекаемости маршрутов по критерию минимума из суммарной длины. Совместное использование этих операций с первым действием подзадачи назначения позволяет быстрее найти экстремум на каждом шаге оптимизации по сравнению с однокритериальным решением задачи при полном переборе вариантов целераспределения. Это определяет главный научный результат работы.

При планировании наблюдения МО с незадачным графиком показано, что путем прогнозирования времени и места его встречи с БЛА обеспечивается возможность автоматизированного управления их сближением наравне с обслуживанием других наземных объектов.

В целом предложенный подход позволяет при предполетном планировании повысить его эффективность в среднем на 25–30% по сравнению с “жадным” алгоритмом и сократить время полного выполнения полетного задания на 30–40% при оперативном планировании. Это открывает путь к единой организации наблюдений не по принципу выполнения предполетного задания, а при обслуживании потока заявок как до, так и во время полета, что особенно важно при мониторинге наблюдения МО.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левитин А.В.* Алгоритмы. Введение в разработку и анализ. М.: Вильямс, 2006. 576 с.
2. *Андреев М.А., Миллер А.Б., Миллер Б.М., Степанян К.В.* Планирование траектории беспилотного летательного аппарата в сложных условиях при наличии угроз // Изв. РАН. ТиСУ, 2012. № 2. С. 166–176.
3. *Kamrani, Farzad & Lozano, Marianela Garcia & Ayani, Rassul.* Path Planning for UAVs Using Symbiotic Simulation // Proc. 20th annual Europe. Simulation and Modelling Conf., ESM'2006. Toulouse, France, 2006. P. 215–238.
4. *Себряков Г.Г., Красильщиков М.Н., Евдокименков В.Н.* Алгоритмическое и программно-математическое обеспечение предполетного планирования групповых действий беспилотных летательных аппаратов // Фундаментальные проблемы группового взаимодействия роботов: материалы отчетного мероприятия РФФИ по конкурсу “офи-м” (тема 604) в рамках международной научно-практической конференции. Волгоград, 2018. С. 30–32.
5. *Rong Zhu, Dong Sun, Zhaoying Zhou.* Cooperation Strategy of Unmanned Air Vehicles for Multitarget Interception // J. Guidance. 2005, V. 28. № 5. P. 1068–1076. <https://doi.org/10.2514/1.14412>
6. *Evdokimenkov V.N., Krasilshchikov M.N., Kozorez D.A.* Development of Pre-flight Planning Algorithms for the Functional-program Prototype of a Distributed Intellectual Control System of Unmanned Flying Vehicle Groups // INCAS Bulletin, 2019. V. 11. № 1. P. 75–88. <https://doi.org/10.13111/2066-8201.2019.11.S.8>
7. *Лебедев Г.Н., Румакина А.В.* Нейросетевое планирование маршрута разновысотного полета беспилотного летательного аппарата // Авиакосмическое приборостроение. 2014. № 5. С. 3–8.
8. *Lebedev G., Goncharenko V., Mikhaylin D., Rumakina A.* Aircraft Group Coordinated Flight Route Optimization Using Branch-and-Bound Procedure in Resolving the Problem of Environmental Monitoring // ITM Web of Conferences. Les Ulis. France. 2017. V. 10. P. 1003. <https://doi.org/10.1051/itmconf/20171001003>
9. *Goncharenko V.I., Lebedev G.N., Mikhaylin D.A., Khahulin G.F.* Continuous Flight Safety Management Information System for a Group of Converging Aircraft // Russian Aeronautics, 2018. V. 61. Iss. 2. P. 271–278.
10. *Гончаренко В.И., Лебедев Г.Н., Михайлин Д.А.* Задача оперативной двумерной маршрутизации группового полета беспилотных летательных аппаратов // РАН. ТиСУ. 2019. № 1. С. 153–166.
11. *Лебедев Г.Н., Мирзоян Л.А.* Маршрутизация полета БЛА с учетом его динамики при наблюдении неподвижных наземных объектов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 12. С. 24–28.
12. *Лебедев Г.Н., Ефимов А.В.* Применение динамического программирования для маршрутизации облета подвижных объектов в контролируемом регионе // Тр. СГАУ. 2012. № 1. С. 63–70.

13. Меркулов В.И., Пляшечник А.С. Ранжирование опасных целей по анализу возможности наведения в наимыгоднейшую точку встречи // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2018. Т. 16. № 5. С. 3–9.
14. Меркулов В.И., Пляшечник А.С. Задача упрощенного целераспределения при групповом противоборстве летательных аппаратов // АиТ. 2017. № 3. С. 123–137.
15. Лебедев Г.Н., Мирзоян Л.А. Нейросетевое планирование действий по облету наземных объектов группой летательных аппаратов // Авиакосмическое приборостроение. 2005. № 12. С. 34–40.
16. Лебедев Г.Н., Мирзоян Л.А., Ефимов А.В. Нейросетевое планирование групповых действий ЛА при наблюдении заданной группы подвижных объектов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 11. С. 60–65.
17. Михайлин Д.А., Аллилуева Н.В., Руденко Э.М. Сравнительный анализ эффективности генетических алгоритмов маршрутизации полета с учетом их различной вычислительной трудоемкости и многокритериальности решаемых задач // Тр. МАИ. 2018. № 98. 22 с.
18. Ивашова Н.Д., Михайлин Д.А., Чернякова М.Е., Шаныгин С.В. Нейросетевое решение задачи оперативного планирования маршрутного полета беспилотных летательных аппаратов и назначение времени наблюдения наземных объектов с помощью нечеткой логики при отображении этих результатов на экране компьютера до вылета // Тр. МАИ. 2019. № 104. 17 с.
19. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 400 с.
20. Лебедев Г.Н., Ле Суан Ху. Отображение приоритетной информации на экране при проведении прочностных испытаний // Авиакосмическое приборостроение. 2005. № 5. С. 14–23.
21. Лебедев Г.Н., Ефимов А.В. Применение динамического программирования для маршрутизации облета мобильных объектов в контролируемом регионе // Вестн. СГАУ. 2011. № 6 (30). С. 222–229.
22. Гончаренко В.И., Лебедев Г.Н., Михайлин Д.А., Царева О.Ю. Выбор множества приоритетных наземных объектов наблюдения с помощью беспилотных летательных аппаратов и маршрутизация их полета // Вестн. компьютерных и информационных технологий. 2019. № 2. С. 3–12.
23. Гончаренко В.И., Лебедев Г.Н., Михайлин Д.А. Планирование полета группы беспилотных летательных аппаратов для обнаружения отделяемых частей ракет-носителей // Вестн. ТГТУ. 2019. Т. 25. № 3. С. 381–394.
24. Лебедев Г.Н., Малыгин В.Б., Михайлин Д.А. Постановка и решение задачи оперативной коррекции потоков прилета и вылета воздушных судов в районе аэродрома с помощью генетического алгоритма // Научный вестник МГТУ ГА. 2017. Т. 20. № 4. С. 8–17.
25. Knyaz V., Zheltov S., Lebedev G., Mikhailin D., Goncharenko V. Intelligent Mobile Object Monitoring by Unmanned Aerial Vehicles // IEEE EUROCON 2019 – 18th International Conf. on Smart Technologies. Novi Sad, Serbia. 2019. P. 1–6.
<https://doi.org/10.1109/EUROCON.2019.8861575>.
26. Knyaz V., Zheltov S. Deep Learning Object Recognition in Multi-Spectral UAV Imagery // Proc. SPIE. Optics, Photonics, and Digital Technologies for Imaging Applications. WA, USA. 2018. V. 10679. P. 1067920.
<https://doi.org/10.1117/12.2307661>.
27. Knyaz V. Multimodal Data Fusion for Object Recognition // Proc. SPIE. Multimodal Sensing: Technologies and Applications / Ed. S. Ettore. International Society for Optics and Photonics. WA, USA. 2019. V. 11059. P. 198–209.
<https://doi.org/10.1117/12.2526067>.
28. Knyaz V. Recognition of Low-Resolution Objects in Remote Sensing Images // Proc. SPIE. Image and Signal Proc. for Remote Sensing XXV / Eds. L. Bruzzone, F. Bovolo. International Society for Optics and Photonics. WA, USA. 2019. V. 11155. P. 594–603.
<https://doi.org/10.1117/12.2533315>.
29. Kniiaz, V.V., Mizginov V.A. Thermal Texture Generation And 3d Model Reconstruction Using Sfm And Gan // ISPRS – International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences. WA, USA. 2018. V. XLII-2. P. 519–524.
<https://doi.org/10.5194/isprs-archives-XLII-2-519-2018>
30. Kniiaz V.V., Knyaz V.A. ThermalGAN: Multimodal Color-to-Thermal Image Translation for Person Re-identification in Multispectral Dataset // Computer Vision – ECCV 2018 Workshops / Eds L. Leal-Taixe, S. Roth. Cham: Springer International Publishing, WA, USA. 2019. P. 606–624.
31. Girshick R., Donahue J., Darrell T., Malik J. Rich Feature Hierarchies for Accurate Object Detection and Semantic Segmentation // 2014 IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. Columbus, OH, USA, 2014. P. 580–587.

32. *Girshick R.* Fast R-CNN // Proc. of the 2015 IEEE Intern. Conf. on Computer Vision (ICCV). ICCV '15. Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, 2015. P. 1440–1448. <https://doi.org/10.1109/ICCV.2015>.
33. *Ren S., He K., Girshick R., Sun J.* Faster R-CNN: Towards Real-time Object Detection with Region Proposal Networks // Proc. 28th Intern. Conf. on Neural Information Processing Systems. V. 1. NIPS'15. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 2015. P. 91–99. Access mode: <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=2969239.2969250>.
34. *Redmon J., Divvala S., Girshick R., Farhadi A.* You Only Look Once: Unified, Real-Time Object Detection // 2016 IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Las Vegas, Nevada, US. 2016. P. 779–788.
35. *Liu W., Anguelov D., Erhan D.* SSD: Single Shot MultiBox Detector // Computer Vision – ECCV 2016 / Eds B. Leibe, J. Matas, N. Sebe, M. Welling. Cham: Springer International Publishing, Amsterdam, 2016. P. 21–37.
36. *Huang J., Rathod V., Sun C.* Speed/Accuracy Trade-Offs for Modern Convolutional Object Detectors // IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). Honolulu, Hawaii, US. 2017. P. 3296–3297.

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 519.854

РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНОЙ ЗАГРУЗКИ ВОЗДУШНЫХ
ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ С УЧЕТОМ ПРИОРИТИЗАЦИИ
ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

© 2021 г. И. П. Богданов^а, В. А. Нестеров^{б,*}, В. А. Судаков^{а,**},
К. И. Сыпало^{с,***}, Н. Б. Топоров^{д,****}

^а ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

^б МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

^с Центральный аэрогидродинамический ин-т им. проф. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия

^д Национальный исследовательский центр “Институт им. Н.Е. Жуковского”, Москва, Россия

*e-mail: nesterov_46@inbox.ru

**e-mail: sudakov@ws-dss.com

***e-mail: ksypalo@tsagi.ru

****e-mail: toporov@nrczh.ru

Поступила в редакцию 01.02.2019 г.

После доработки 07.10.2020 г.

Принята к публикации 30.11.2020 г.

Исследуется задача оптимального размещения неоднородного набора грузов на бортах заданного множества авиатранспортных средств. Рассматриваемая задача формализована как задача смешанного целочисленного линейного программирования, в которой оптимизируется количество предметов на бортах наиболее приоритетных авиатранспортных средств, а также суммарная масса загруженных объектов. При этом приоритеты летательных аппаратов рассчитываются с помощью комбинированных методов многокритериального анализа альтернатив. Предложена технология поиска ее точного решения, реализованная в форме открытого веб-сервиса.

DOI: 10.31857/S0002338821030033

Введение. Планирование доставки значительных объемов грузов с учетом совокупности ограничений представляет собой актуальную задачу, стоящую перед многими коммерческими и государственными корпорациями, предприятиями и организациями. Данная деятельность подразумевает регулярную необходимость выбора наилучшего способа размещения значительного количества различных предметов внутри трехмерных контейнеров (грузовых отсеков летательных аппаратов, контейнеров, трюмов кораблей, складов и др.). Рациональный способ размещения должен соответствовать варианту укладки, при котором [1]:

- используется минимальное число контейнеров;
- выбираются средства транспортировки, обладающие наилучшими значениями заданных критериев оценки (например, стоимостных и инерционных характеристик, доли привлекаемой отечественной техники и др.);
- загружается множество предметов с максимальной суммарной массой.

В случае нерационального расположения объектов увеличиваются финансовые затраты (на аренду помещений, фрахт судов, горюче-смазочные материалы и др.), продолжительность и сложность погрузочно-разгрузочных работ, а также вероятность повреждения предметов при транспортировке. В случае нарушения ограничений на центровку существенно возрастает риск катастроф.

Рассматриваемая задача относится к классу задач условной оптимизации, называемых в литературе задачами оптимальной упаковки, загрузки либо укладки контейнеров. В данном исследовании рассмотрена задача оптимального размещения грузов на бортах заданного упорядоченного множества летательных аппаратов (ЛА). ЛА упорядочены в соответствии с возрастанием приоритета их использования в логистике. Требуется максимизировать число предметов на бор-

тах наиболее приоритетных ЛА, а также суммарную массу всех загруженных предметов. При этом грузы не должны выходить за пределы ЛА, а также пересекаться друг с другом. Не должны нарушаться требования по центровке ЛА.

В статье разработано аналитическое описание пространства решений рассмотренной задачи оптимизации загрузки воздушного транспорта (ОЗВТ). Данное аналитическое описание позволило формализовать введенные условия в виде линейных уравнений и неравенств, а саму задачу – в виде задачи смешанного целочисленного линейного программирования (СЦЛП). Реализовано программное обеспечение открытого веб-сервиса поиска точного решения задачи ОЗВТ, доступного в сети Интернет ученым, исследователям, разработчикам прикладных систем логистики.

Разработанная технология позволяет вычислять точное решение задачи ОЗВТ для случая небольшого числа контейнеров и грузов и, таким образом, может быть применена для проверки качества решения, получаемого с помощью эвристических методов. Для случая большей размерности точное решение оценивается методами, использующими построенное аналитическое описание задачи.

Внедрение указанных систем позволит повысить эффективность применения авиационной техники и инфраструктуры за счет рационального выбора ЛА (с помощью средств многокритериального анализа) и оптимизации размещения грузов на борту выбранных ЛА. Кроме того, уменьшение числа полетов окажет положительное влияние на окружающую среду вследствие сокращения эмиссии вредных веществ и снижения уровня шума. В перспективе полученные результаты могут стать основой для разработки отдельных функциональных модулей систем поддержки принятия решений в сфере организации авиационных грузовых перевозок.

1. Обзор основных направлений исследований. В литературе рассматривается существенное количество типов задач упаковки (загрузки, укладки) контейнеров, различающихся [2]:

- оптимизируемыми целевыми функциями;
- количеством контейнеров: укладка может осуществляться в единственный контейнер либо в совокупность нескольких контейнеров;
- характеристиками совокупности контейнеров: множество контейнеров может либо состоять из контейнеров одинаковой формы и размеров, либо быть слабо неоднородным (т.е. состоять из контейнеров, относящихся к одному из немногочисленных типов, при том что количество контейнеров каждого типа достаточно велико), либо быть сильно неоднородным (в случае, если среди контейнеров мало или нет одинаковых);
- характеристиками совокупности грузов: множество грузов может либо состоять из предметов одинаковых форм и размеров, либо быть слабо неоднородным, либо быть сильно неоднородным;
- формой контейнеров и/или грузов: как правило, считается, что контейнеры и грузы имеют форму прямоугольных параллелепипедов (кубоидов), примеры исключений можно найти в работе [3], посвященной упаковке предметов мебели, и в статье [4], где предполагается, что контейнеры могут иметь форму усеченных кубоидов;
- набором учитываемых практических ограничений [1] и т.д.

Классификация различных постановок задач упаковки контейнеров, а также обширный обзор методов их решения (163 научно-технических источника) приведены в [2].

Задачи оптимальной загрузки относятся к классу NP-трудных задач [5], и для нахождения их точного решения в общем случае требуется полный перебор возможных вариантов распределения предметов по контейнерам. В связи с этим в настоящее время активно развиваются эвристические подходы, позволяющие относительно быстро строить приближенные решения. Пример эвристического метода упаковки единственного контейнера, основанного на алгоритмах комбинирования предметов в блоки-кубоиды и сведения задачи трехмерной укладки к задаче двумерной укладки, приведен в [6]. В случае загрузки нескольких контейнеров широко применяются следующие стратегии размещения грузов [7]:

- упаковка контейнеров осуществляется последовательно (упаковка очередного контейнера начинается после заполнения предыдущего), например, см. [8], где данная стратегия используется совместно с механизмами динамической приоритизации грузов;
- происходит предварительное распределение наборов грузов по контейнерам (например, в [9] для этой цели применяется поиск с запретами), после чего применяются алгоритмы укладки

ки предметов в каждый отдельный контейнер и алгоритмы перераспределения грузов между контейнерами;

– одновременно упаковываются несколько контейнеров.

В [7, 10] задача упаковки нескольких контейнеров сформулирована как задача целочисленного линейного программирования, при этом для каждого рассматриваемого типа контейнера полагаются известными так называемые “паттерны” – способы размещения в них грузов имеющих типов. Так как при значительном количестве типов контейнеров и грузов число всех возможных способов размещения будет очень велико, применяются эвристические алгоритмы построения некоторого достаточно представительного набора “паттернов” (таким образом, данный подход не гарантирует нахождения точного решения).

Наряду с эвристическими подходами разрабатываются методы, позволяющие строить точное решение для случая небольшого количества контейнеров и грузов. Как правило, предлагается аналитическая модель размещения предметов, позволяющая записать задачу загрузки в форме задачи СЦЛП, точное решение которой может быть найдено, например, методом ветвей и границ.

В [11–13] рассматривается модель размещения, в которой переменные, определяющие расположение объекта (данные переменные соответствуют координатам одного из углов либо центра масс объекта), являются непрерывными. Для формализации условий отсутствия пересечения грузов для каждой пары предметов вводятся переменные-индикаторы того, что один из грузов находится левее/правее, выше/ниже, сзади/спереди другого груза. В [4] используются аналогичные переменные-индикаторы отсутствия пересечений, но переменные, определяющие расположение объекта, полагаются целочисленными.

В [14] представлен подход, основанный на дискретизации пространства (т.е. введении конечной сетки) внутри контейнера. Размещение предметов, определяемое размещением их левых нижних передних углов, возможно только в узлах введенной сетки. В целях формализации условий отсутствия пересечения объектов для каждого типа груза и каждой упорядоченной пары точек конечной сетки априори вычисляется отображение-индикатор того, что область пространства, занимаемая размещенным в первой точке грузом указанного типа (за исключением его правой, верхней и задней граней), содержит вторую точку.

2. Постановка задачи. Рассмотрим следующий вариант задачи упаковки сильно неоднородной совокупности предметов в сильно неоднородное множество контейнеров. Имеется набор грузов, предназначенных для отправки с помощью самолетов либо вертолетов, а также совокупность контейнеров (соответствующих грузовым отсекам ЛА), в которых предполагается осуществлять доставку указанных грузов (в настоящем исследовании будем считать, что в каждом ЛА есть единственный грузовой отсек). Предполагается, что контейнеры и грузы имеют форму прямоугольных параллелепипедов (произвольных размеров), при этом загрузка отдельных предметов в ЛА происходит таким образом, чтобы боковые грани кубоидов-грузов были параллельны/перпендикулярны стенкам контейнеров. Для простоты будем считать, что грузы нельзя поворачивать. Предметы, помещенные в контейнеры, не должны выходить за границы контейнеров, а также не должны пересекаться друг с другом.

Для каждого груза задана его масса и габариты (длина, ширина и высота). Для каждого контейнера заданы его грузоподъемность, габариты, а также диапазон, в котором должен находиться центр масс совокупности всех грузов, размещенных в данном контейнере (для простоты в дальнейшем будем предполагать, что центры масс отдельных предметов совпадают с их геометрическими центрами). Кроме того, предполагается, что контейнерам присвоены приоритеты, рассчитанные с помощью комбинированного метода [15, 16].

Содержательно задача ОЗВТ состоит в том, чтобы, с одной стороны, разместить как можно больше предметов в более приоритетных контейнерах, а с другой – в том, чтобы упаковать в контейнеры грузы, характеризующиеся наибольшей суммарной массой.

Построим аналитическую модель размещения грузов в контейнерах, которая позволит формализовать рассматриваемую задачу как задачу СЦЛП. Так как для случая сильно неоднородных контейнеров и грузов дискретизация пространства (аналогично [14]) может привести к задаче неприемлемо большой размерности, то целесообразно строить формализацию, схожую с предложенными в [11–13].

Введем прямоугольную систему координат в трехмерном пространстве. По оси x будем откладывать длину контейнеров и грузов, по оси y – ширину контейнеров и грузов, а по оси z – высоту контейнеров и грузов. Добавим в имеющееся множество контейнеров дополнительный

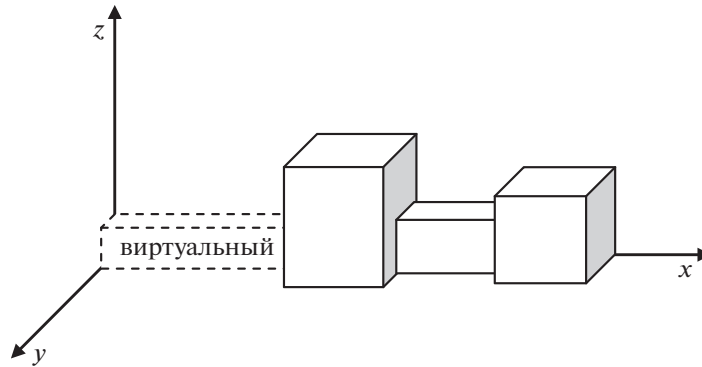


Рис. 1. Схема расположения контейнеров

воображаемый контейнер с наименьшим приоритетом. Длина указанного контейнера (в дальнейшем будем его называть виртуальным, а остальные контейнеры – реальными) равна сумме длин всех грузов, ширина – ширине самого широкого груза, а высота – высоте самого высокого груза. Грузоподъемность виртуального контейнера равна сумме масс всех грузов. Центр масс совокупности предметов, загруженных в данный контейнер, может находиться в любой его точке. В виртуальном контейнере окажутся все грузы, которые не получится разместить в реальных контейнерах. Расположим все контейнеры один за другим слева направо вдоль оси x в порядке увеличения приоритета таким образом, чтобы грани контейнеров были параллельны координатным плоскостям, а левый нижний задний угол каждого контейнера располагался бы на оси x . При данном размещении самое правое положение будет занимать самый приоритетный реальный контейнер, а самое левое – виртуальный контейнер, левый нижний задний угол которого будет находиться в начале координат. Графическая схема расположения контейнеров приведена на рис. 1.

Пронумеруем все контейнеры в соответствии с возрастанием приоритета (номер 1 получит виртуальный контейнер). Введем следующие обозначения: g – количество контейнеров, n – количество грузов, m_i , $i = \overline{1, n}$, – масса i -го груза, M_j , $j = \overline{1, g}$, – грузоподъемность j -го контейнера, l_i , w_i , h_i , $i = \overline{1, n}$, – длина, ширина и высота i -го груза, L_j , W_j , H_j , $j = \overline{1, g}$, – длина, ширина и высота j -го контейнера, тогда для виртуального контейнера:

$$L_1 = \sum_{i=1}^n l_i, \quad W_1 = \max_{i=1, n} w_i, \quad H_1 = \max_{i=1, n} h_i,$$

$X_j^{\min}, X_j^{\max}, Y_j^{\min}, Y_j^{\max}, Z_j^{\min}, Z_j^{\max}$, $j = \overline{1, g}$, – границы диапазона допустимого положения центра масс грузов, размещенных в j -м контейнере (рассчитанные относительно левого нижнего заднего угла контейнера), x_i, y_i, z_i , $i = \overline{1, n}$, – координаты размещения левого нижнего заднего угла i -го груза, r_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, g}$, – индикатор размещения i -го груза в j -м контейнере: $r_{ij} = 1$, если i -й груз размещен в j -м контейнере, иначе $r_{ij} = 0$.

Формализуем ограничения задачи в форме линейных уравнений и неравенств. Каждый из грузов размещен в одном и только одном контейнере:

$$\forall i = \overline{1, n}: \sum_{j=1}^g r_{ij} = 1. \quad (2.1)$$

Грузы не должны пересекаться, т.е. занимать один и тот же объем. Сначала запишем условие пересечения для любых двух различных номеров грузов $i_1 = \overline{1, n-1}$ и $i_2(i_1) = i_1 + 1, n$ (для простоты в дальнейшем вместо $i_2(i_1)$ будем писать i_2). Грузы пересекаются, если у них пересекаются проекции по всем осям (см. рис. 2):

$$(x_{i_2} < x_{i_1} + l_{i_1}) \& (x_{i_1} < x_{i_2} + l_{i_2}) \& (y_{i_2} < y_{i_1} + w_{i_1}) \& (y_{i_1} < y_{i_2} + w_{i_2}) \& \\ \& (z_{i_2} < z_{i_1} + h_{i_1}) \& (z_{i_1} < z_{i_2} + h_{i_2}). \quad (2.2)$$

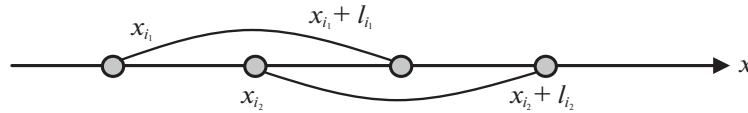


Рис. 2. Пересечение грузов по оси x

Отрицание предиката (2.2) дает условие отсутствия пересечений:

$$(x_{i_2} \geq x_{i_1} + l_{i_1}) \vee (x_{i_1} \geq x_{i_2} + l_{i_2}) \vee (y_{i_2} \geq y_{i_1} + w_{i_1}) \vee (y_{i_1} \geq y_{i_2} + w_{i_2}) \vee (z_{i_2} \geq z_{i_1} + h_{i_1}) \vee (z_{i_1} \geq z_{i_2} + h_{i_2}). \quad (2.3)$$

Условия “ИЛИ” можно заменить условиями “И” путем ввода дополнительных булевых переменных $a_{i_1, i_2}, b_{i_1, i_2}, c_{i_1, i_2}$:

$$x_{i_1} - x_{i_2} - Ma_{i_1, i_2} - Mb_{i_1, i_2} - Mc_{i_1, i_2} \leq -l_{i_1}, \quad (2.4)$$

где M – константа, заведомо большая любых координат:

$$M = 10 \cdot \max \left\{ \sum_{j=1}^g L_j, \sum_{j=1}^g W_j, \sum_{j=1}^g H_j \right\}.$$

Если $a_{i_1, i_2} = 0, b_{i_1, i_2} = 0, c_{i_1, i_2} = 0$, то ограничение (2.4) является существенным, иначе – ограничение (2.4) всегда выполняется.

Остальные ограничения формируются аналогично. Каждое из указанных ограничений становится существенным при соответствующей комбинации $a_{i_1, i_2}, b_{i_1, i_2}, c_{i_1, i_2}$, указанной в скобках:

$$\begin{cases} x_{i_2} - x_{i_1} - M(1 - a_{i_1, i_2}) - Mb_{i_1, i_2} - Mc_{i_1, i_2} \leq -l_{i_2}, & (a_{i_1, i_2} = 1, b_{i_1, i_2} = 0, c_{i_1, i_2} = 0), \\ y_{i_1} - y_{i_2} - Ma_{i_1, i_2} - M(1 - b_{i_1, i_2}) - Mc_{i_1, i_2} \leq -w_{i_1}, & (a_{i_1, i_2} = 0, b_{i_1, i_2} = 1, c_{i_1, i_2} = 0), \\ y_{i_2} - y_{i_1} - M(1 - a_{i_1, i_2}) - M(1 - b_{i_1, i_2}) - Mc_{i_1, i_2} \leq -w_{i_2}, & (a_{i_1, i_2} = 1, b_{i_1, i_2} = 1, c_{i_1, i_2} = 0), \\ z_{i_1} - z_{i_2} - Ma_{i_1, i_2} - Mb_{i_1, i_2} - M(1 - c_{i_1, i_2}) \leq -h_{i_1}, & (a_{i_1, i_2} = 0, b_{i_1, i_2} = 0, c_{i_1, i_2} = 1), \\ z_{i_2} - z_{i_1} - M(1 - a_{i_1, i_2}) - Mb_{i_1, i_2} - M(1 - c_{i_1, i_2}) \leq -h_{i_2}, & (a_{i_1, i_2} = 1, b_{i_1, i_2} = 0, c_{i_1, i_2} = 1). \end{cases} \quad (2.5)$$

Для того, чтобы исключить недопустимые комбинации $a_{i_1, i_2}, b_{i_1, i_2}, c_{i_1, i_2}$, введем ограничение:

$$a_{i_1, i_2} + 2b_{i_1, i_2} + 4c_{i_1, i_2} \leq 5. \quad (2.6)$$

Следующий блок ограничений соответствует условиям строгого попадания груза в назначенный контейнер. В нелинейном виде данные ограничения имеют следующую форму. Для любых $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, g}$: если $r_{ij} = 1$, то

$$\begin{cases} x_i \geq L_j^*, & x_i + l_i \leq L_j^* + L_j, \\ y_i \geq 0, & y_i + w_i \leq W_j, \\ z_i \geq 0, & z_i + h_i \leq H_j, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$L_1^* = 0, \quad L_j^* = \sum_{u=1}^{j-1} L_u, \quad j = \overline{2, g}.$$

Условие “если $r_{ij} = 1$ ” вносится в ограничения (2.7) следующим образом:

$$\begin{cases} x_i + M(1 - r_{ij}) \geq L_j^*, & x_i + l_i - M(1 - r_{ij}) \leq L_j^* + L_j, \\ y_i \geq 0, & y_i + w_i - M(1 - r_{ij}) \leq W_j, \\ z_i \geq 0, & z_i + h_i - M(1 - r_{ij}) \leq H_j. \end{cases} \quad (2.8)$$

Неравенство (2.9) задает ограничения на грузоподъемность каждого контейнера:

$$\forall j = \overline{1, g}: \sum_{i=1}^n m_i r_{ij} \leq M_j. \quad (2.9)$$

Ограничения на допустимое положение центра масс для любого контейнера $j = \overline{1, g}$ имеют вид, задаваемый неравенствами:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_j^{\min} + L_j^* \leq \frac{\sum_{i=1}^n m_i r_{ij} (x_i + l_i/2)}{\sum_{v=1}^n m_v r_{vj}} \leq X_j^{\max} + L_j^*, \\ Y_j^{\min} \leq \frac{\sum_{i=1}^n m_i r_{ij} (y_i + w_i/2)}{\sum_{v=1}^n m_v r_{vj}} \leq Y_j^{\max}, \\ Z_j^{\min} \leq \frac{\sum_{i=1}^n m_i r_{ij} (z_i + h_i/2)}{\sum_{v=1}^n m_v r_{vj}} \leq Z_j^{\max}. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

В ограничения (2.10) входят произведения булевых и непрерывных переменных, которые требуется привести к линейному виду. Для этого введем дополнительные переменные: $r_{ij} x_i$ заменяются на $p_{ij}^1 = r_{ij} x_i$ путем ввода ограничений:

$$p_{ij}^1 \leq M r_{ij}, \quad p_{ij}^1 \leq x_i, \quad p_{ij}^1 \geq x_i - M(1 - r_{ij}), \quad p_{ij}^1 \geq 0. \quad (2.11)$$

Аналогично осуществляются замены $p_{ij}^2 = r_{ij} y_i$ и $p_{ij}^3 = r_{ij} z_i$:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{ij}^2 \leq M r_{ij}, \quad p_{ij}^2 \leq y_i, \quad p_{ij}^2 \geq y_i - M(1 - r_{ij}), \quad p_{ij}^2 \geq 0, \\ p_{ij}^3 \leq M r_{ij}, \quad p_{ij}^3 \leq z_i, \quad p_{ij}^3 \geq z_i - M(1 - r_{ij}), \quad p_{ij}^3 \geq 0. \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Воспользовавшись (2.11) и (2.12), можно переписать (2.10) в следующей форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} (X_j^{\min} + L_j^*) \sum_{v=1}^n m_v r_{vj} \leq \sum_{i=1}^n m_i (p_{ij}^1 + r_{ij} l_i/2) \leq (X_j^{\max} + L_j^*) \sum_{v=1}^n m_v r_{vj}, \\ Y_j^{\min} \sum_{v=1}^n m_v r_{vj} \leq \sum_{i=1}^n m_i (p_{ij}^2 + r_{ij} w_i/2) \leq Y_j^{\max} \sum_{v=1}^n m_v r_{vj}, \\ Z_j^{\min} \sum_{v=1}^n m_v r_{vj} \leq \sum_{i=1}^n m_i (p_{ij}^3 + r_{ij} h_i/2) \leq Z_j^{\max} \sum_{v=1}^n m_v r_{vj}. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Ограничения на суммарный объем грузов для каждого контейнера имеют вид

$$\forall j = \overline{1, g}: \sum_{i=1}^n l_i w_i h_i r_{ij} \leq L_j W_j H_j. \quad (2.14)$$

Качество варианта загрузки определяется координатами расположения грузов по оси x (чем правее расположен груз, тем лучше), а также суммарной массой грузов, размещенных в реальных контейнерах. Тогда целевую функцию задачи ОЗВТ можно записать в виде суммы величин x_i и $m_i r_{ij}$, взятых с весовыми коэффициентами α и β :

$$\alpha \sum_{i=1}^n x_i + \beta \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^g m_i r_{ij}. \quad (2.15)$$

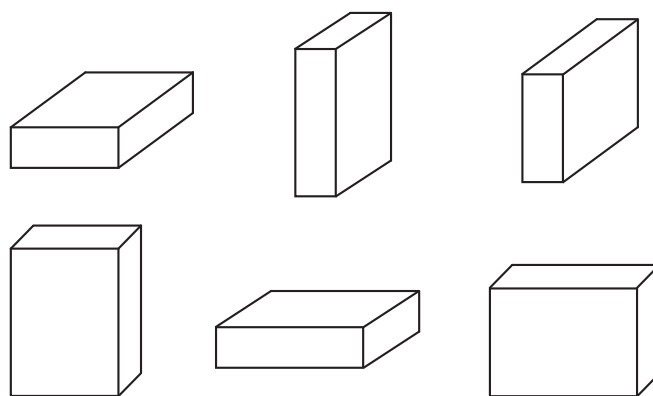


Рис. 3. Возможные варианты пространственной ориентации груза-кубоида

Таким образом, задача ОЗВТ представляет собой задачу поиска максимума функции (2.15) по непрерывным переменным x_i, y_i, z_i, p_{ij}^d , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, g}$, $d = \overline{1, 3}$, и бинарным переменным r_{ij} , $a_{i_1, i_2}, b_{i_1, i_2}, c_{i_1, i_2}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, g}$, $i_1 = \overline{1, n-1}$, $i_2 = \overline{i_1 + 1, n}$, при ограничениях (2.1), (2.4)–(2.6), (2.8), (2.9), (2.11)–(2.14). Заметим, что допустимое множество указанной задачи не является пустым, так как допустимому решению соответствует, в частности, размещение всех грузов друг за другом в виртуальном контейнере.

В настоящем исследовании для простоты предполагается, что грузы нельзя поворачивать. Тем не менее возможность поворотов может быть учтена, и при этом множество ограничений задачи останется линейным.

Один из возможных способов заключается в следующем. Существует шесть различных вариантов пространственной ориентации размещаемого груза, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда (при котором его грани параллельны стенкам контейнера) (рис. 3). Можно рассматривать все эти шесть вариантов ориентации одного груза как альтернативные грузы. Таким образом исходный вариант для каждого груза i нужно дополнить еще пятью. Если какие-то варианты поворотов грузов запрещены, то вариантов будет не шесть, а меньше. Для корректного решения оптимизационной задачи следует заменить ограничение (2.1) по таким грузам на новое ограничение, которое говорит, что из всех вариантов размещения следует выбрать только один. Если I – это множество номеров допустимых вариантов, то новое ограничение примет вид

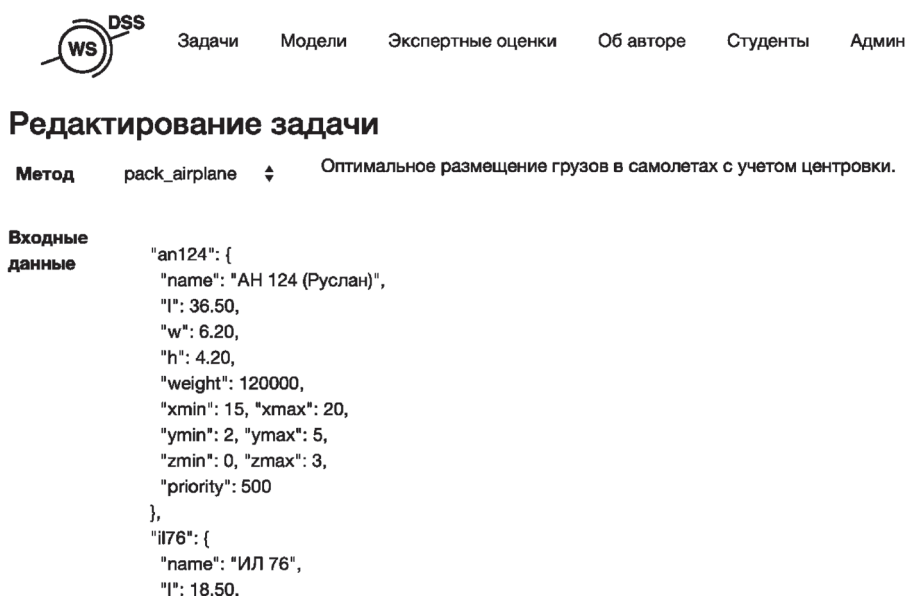
$$\sum_{i \in I} \sum_{j=1}^g r_{ij} = 1. \quad (2.16)$$

3. Технологии точного решения задач СЦЛП. Предлагаемый подход. Построенная формализация задачи ОЗВТ относится к классу задач СЦЛП, для которых существуют точные алгоритмы, гарантирующие нахождение глобального решения (хотя поиск оптимума может требовать значительного времени и ресурсов). На практике наиболее широко используются алгоритмы метод ветвлений и отсечений, основанные на комбинированном применении метода ветвей и границ [17] и метода отсекающих плоскостей [18].

Используемый метод реализован в представленных в настоящий момент на рынке коммерческих системах (например, IBM ILOG CPLEX [19], Gurobi [20], FICO Xpress [21] и др.), а также в ряде некоммерческих комплексов (например, SCIP [22], MINTO [23], GLPK [24], COIN-OR branch and cut [25] и другие публикации, например [26]). Однако использование данных пакетов возможно только, когда целевая функция и ограничения записаны в стандартизированной форме, без этого решение поставленной задачи невозможно.

В рамках настоящего исследования была сформирована технология решения задачи ОЗВТ, основанная на использовании системы WS-DSS, созданной одним из авторов данной статьи [27], и комплекса SCIP, разработка ученых из Германии [22].

Портал веб-сервисов поддержки принятия решений WS-DSS, находящийся в открытом доступе, позволяет публиковать в сети Интернет произвольные консольные программные реализации математических моделей на Ruby, а также обеспечивает возможность подключения других



WS DSS Задачи Модели Экспертные оценки Об авторе Студенты Админ

Редактирование задачи

Метод pack_airplane ⇅ Оптимальное размещение грузов в самолетах с учетом центровки.

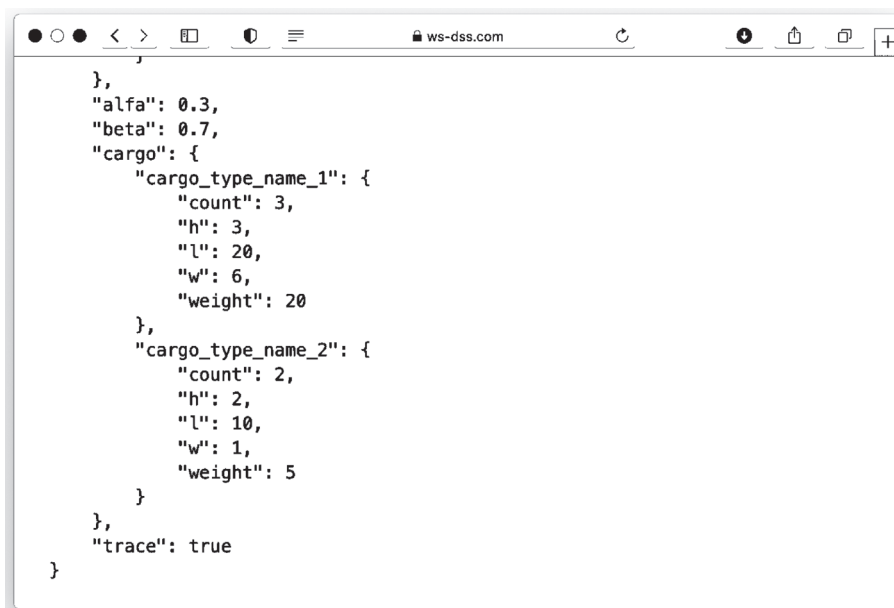
Входные данные

```

"an124": {
  "name": "АН 124 (Руслан)",
  "l": 36.50,
  "w": 6.20,
  "h": 4.20,
  "weight": 120000,
  "xmin": 15, "xmax": 20,
  "ymin": 2, "ymax": 5,
  "zmin": 0, "zmax": 3,
  "priority": 500
},
"il76": {
  "name": "ИЛ 76",
  "l": 18.50,

```

Рис. 4. Формат входных данных. Пример задания параметров контейнеров



```

},
"alpha": 0.3,
"beta": 0.7,
"cargo": {
  "cargo_type_name_1": {
    "count": 3,
    "h": 3,
    "l": 20,
    "w": 6,
    "weight": 20
  },
  "cargo_type_name_2": {
    "count": 2,
    "h": 2,
    "l": 10,
    "w": 1,
    "weight": 5
  }
},
"trace": true
}

```

Рис. 5. Формат входных данных. Пример задания параметров грузов

веб-сервисов и организации “цепочки” вызовов математических моделей с передачей входных/выходных параметров между ними. Обработка моделей, реализованная диспетчером очередей Sidekiq, масштабируется потоками обработчиками (workers) на произвольном количестве узлов вычислительного кластера.

В качестве оптимизатора использовался SCIP, являющийся в настоящее время одним из наиболее быстрых некоммерческих решателей для СЦЛП и смешанного целочисленного нелинейного программирования. Для нахождения оптимума данный комплекс применяет алгоритм ветвей и отсечений, метод генерации столбцов, а также ряд эвристических способов поиска допустимых решений, позволяющих сократить пространство перебора [28].

На рис. 4 и 5 приведены примеры представления исходных данных задачи (параметров типов контейнеров и типов грузов соответственно) в системе WS-DSS.


```

objective = 202.025
r[0] = [false, true, false, false]
r[1] = [false, false, true, false]
r[2] = [true, false, false, false]
r[3] = [false, false, true, false]
r[4] = [false, false, true, false]
x[0] = [[90.0, 110.0], [0.2, 6.2], [0.0, 3.0]]
x[1] = [[120.75, 140.75], [0.0, 6.0], [0.0, 3.0]]
x[2] = [[60.0, 80.0], [0.0, 6.0], [0.0, 3.0]]
x[3] = [[143.0, 153.0], [0.0, 1.0], [0.0, 2.0]]
x[4] = [[143.0, 153.0], [0.0, 1.0], [2.0, 4.0]]
{
  "solution": [
    {
      "airplane_type": "an124",
      "airplane_index": 1,
      "cargo_type": "cargo_type_name_1",
      "cargo_index": 0,
      "x": [
        90.0,
        0.2,
        0.0
      ]
    }
  ]
}

```

Рис. 6. Фрагмент представления выходных данных

На рис. 6 рассмотрен фрагмент представления выходных данных, сформированных в результате работы программы.

В целях верификации разработанного программного обеспечения были проведены тестовые испытания расчетной системы на примерах, содержащих до 10 грузов и до 5 контейнеров (включая виртуальный). Сопоставление результатов численного моделирования с осуществленным вручную перебором продемонстрировало общую адекватность результатов работы предложенной технологии. Ниже представлены результаты численного моделирования для задачи размещения шести грузов в четырех реальных контейнерах. Предполагается, что контейнеры упорядочены и пронумерованы в соответствии с возрастанием приоритета (виртуальный контейнер получает номер 1, а наиболее приоритетный реальный контейнер – номер 5). Значения параметров реальных контейнеров – грузоподъемности (в килограммах) и габаритов (в метрах) – приведены в табл. 1. Параметры виртуального контейнера автоматически рассчитываются в соответствии с правилами, описанными в разд. 2. Значения параметров грузов – массы (в килограммах) и габаритов (в метрах) – представлены в табл. 2. Весовые коэффициенты целевой функции полагаются равными 0.5: $\alpha = \beta = 0.5$.

В начале предположим, что границы диапазонов допустимого положения центров масс загруженных предметов совпадают с границами контейнеров. По итогам расчета, проведенного с помощью разработанной технологии, грузы 1–6 были размещены в контейнерах 2 и 5. Распределение предметов по указанным контейнерам схематично показано на рис. 7 (крупные цифры соответствуют номерам грузов).

В соответствии с правилами построения целевой функции оптимизатор стремится разместить как можно больше грузов как можно ближе к правой стенке контейнера 5, а также

Таблица 1. Параметры контейнеров

Номер контейнера	Грузоподъемность, кг	Длина	Ширина	Высота
		м		
2	1200	7	7	7
3	1200	3	3	3
4	64.1	5	5	5
5	1200	10	10	10

Таблица 2. Параметры грузов

Номер груза	Масса, кг	Длина	Ширина	Высота
		м		
1	500	10	10	5
2	250	10	5	5
3	125	5	5	5
4	125	5	5	5
5	64	4	4	4
6	1	1	1	1

упаковать все имеющиеся грузы в реальные контейнеры. Грузы 1 и 2 могут поместиться только в контейнер 5. Кроме данных грузов, в контейнер 5 можно упаковать либо грузы 3 и 4, либо грузы 5, 6, а также один из грузов 3 или 4. В результате расчета был выбран вариант с упаковкой трех грузов, обеспечивающий большее значение первого слагаемого целевой функции. Груз 3, не попавший в контейнер 5, не может разместиться в контейнере 4 из-за ограничений на грузоподъемность, не может разместиться в контейнере 3 из-за размеров и располагается в контейнере 2 вплотную к его правой стенке.

В целях верификации функционала, связанного с обеспечением центровки, пересчитаем рассмотренный пример при дополнительном требовании размещения центров масс совокупностей упакованных грузов в геометрических центрах реальных контейнеров. Добавление данного ограничения привело к тому, что контейнер 5 оказался полностью заполненным (в нем разместились грузы 1–4), в центрах контейнеров 4 и 3 разместилось по одному грузу (грузы 5 и 6 соответственно), а контейнер 2 остался незадействованным. Распределение предметов по реальным контейнерам схематично показано на рис. 8. В точности выдерживания ограничений на положения центров масс грузов можно убедиться непосредственной проверкой. В частности, координаты центра масс совокупности предметов, размещенных в контейнере 5, совпадают с координатами геометрического центра данного контейнера:

$$\frac{1}{1000} \cdot \left[\left(50 + \frac{1}{2} \cdot 10 \right) \cdot 500 + \left(50 + \frac{1}{2} \cdot 10 \right) \cdot 250 + \left(50 + \frac{1}{2} \cdot 5 \right) \cdot 125 + \left(55 + \frac{1}{2} \cdot 5 \right) \cdot 125 \right] = 55,$$

$$\frac{1}{1000} \cdot \left[\left(0 + \frac{1}{2} \cdot 10 \right) \cdot 500 + \left(0 + \frac{1}{2} \cdot 5 \right) \cdot 250 + \left(5 + \frac{1}{2} \cdot 5 \right) \cdot 125 + \left(5 + \frac{1}{2} \cdot 5 \right) \cdot 125 \right] = 5,$$

$$\frac{1}{1000} \cdot \left[\left(0 + \frac{1}{2} \cdot 5 \right) \cdot 500 + \left(5 + \frac{1}{2} \cdot 5 \right) \cdot 250 + \left(5 + \frac{1}{2} \cdot 5 \right) \cdot 125 + \left(5 + \frac{1}{2} \cdot 5 \right) \cdot 125 \right] = 5.$$

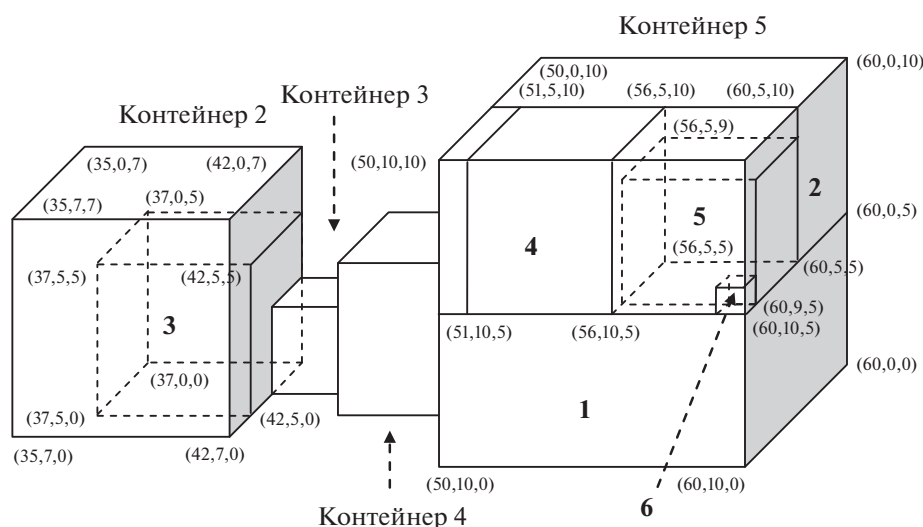


Рис. 7. Распределение грузов по контейнерам (без учета ограничений на положение центров масс)

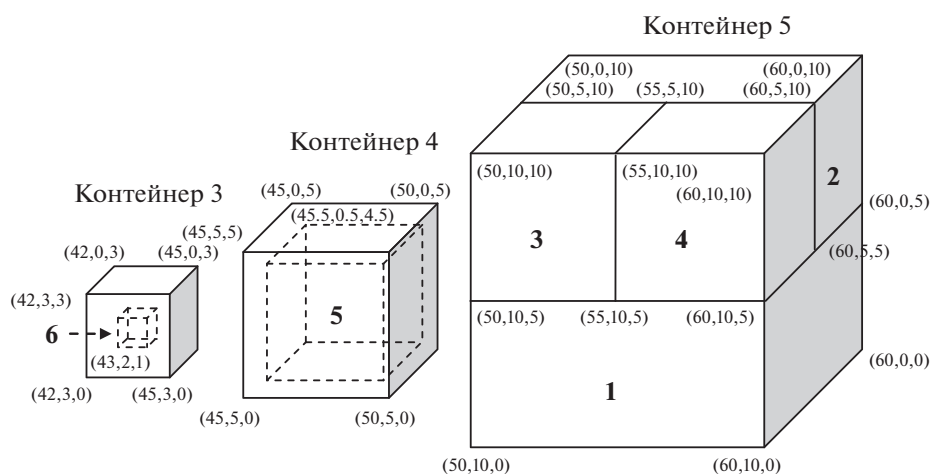


Рис. 8. Распределение грузов по контейнерам (с учетом ограничений на положение центров масс)

Численное моделирование проводилось на сервере AWS t2.small (1 vCPU, 2 Gb RAM, 20 Gb SSD). Результаты экспериментов продемонстрировали, что время поиска решения существенно зависит не только от количества контейнеров и грузов, но и от соотношения их габаритов. В качестве иллюстрации в табл. 3 приведено время расчета оптимального распределения 10 одинаковых грузов размером $1 \times 1 \times 1$ (здесь и далее размеры указаны в метрах) по четырем реальным контейнерам при различных значениях длины наиболее вместительного реального контейнера. Разработанный метод позволяет рассчитать решение за приемлемое с точки зрения практики время не более чем для 10–15 грузов (например, время решения задачи размещения 15 одинаковых грузов размером $1 \times 1 \times 1$ в одном реальном контейнере размером $14.2 \times 1.2 \times 1.2$ составило около 11 ч). Вычислить оптимальное распределение большего количества грузов за разумное время удалось только в специальных случаях – в частности, для решения задачи размещения 30 грузов размером $1 \times 1 \times 1$ в 29 реальных контейнерах размером $1.2 \times 1.2 \times 1.2$ потребовалось около 20 мин, а для решения задачи размещения 100 грузов размером $1 \times 1 \times 1$ в 1 реальном контейнере размера $10 \times 10 \times 10$ – около 5 мин. Возможные подходы к построению оценок точного решения исследуемой задачи в случае высокой размерности рассматриваются в разд. 4.

4. Обсуждение предложенного подхода. Практическая значимость. К явным достоинствам разработанной математической модели решаемой задачи ОЗВТ стоит отнести возможность применения стандартных методов решения задач СЦЛП для поиска ее экстремума. Построенная модель схожа с предложенными в [11–13], но вследствие использования единого координатного пространства для всех контейнеров требует вдвое меньше бинарных переменных для формализации линейных условий отсутствия пересечения грузов. Если в указанных работах число переменных-индикаторов того, что один из грузов находится левее/правее, выше/ниже, сзади/спереди другого груза, равно $6n(n - 1)/2 = 3n(n - 1)$, то в предложенной модели общее количество переменных $a_{i_1, i_2}, b_{i_1, i_2}, c_{i_1, i_2}, i_1 = 1, n - 1, i_2 = i_1 + 1, n$, равно $3n(n - 1)/2$. Также единое координатное пространство позволяет избежать необходимости формировать блоки ограничений, записываемых для каждой пары грузов и каждого контейнера (например, см. состоящий из $O(n^2g)$

Таблица 3. Время расчета для тестовых примеров

Габариты грузов	Габариты реальных контейнеров	Время расчета
$1 \times 1 \times 1$ (10 шт.)	$10.2 \times 1.2 \times 1.2, 2.2 \times 1.2 \times 1.2, 2.2 \times 1.2 \times 1.2, 1.2 \times 1.2 \times 1.2$	<0.5 с
$1 \times 1 \times 1$ (10 шт.)	$9.2 \times 1.2 \times 1.2, 2.2 \times 1.2 \times 1.2, 2.2 \times 1.2 \times 1.2, 1.2 \times 1.2 \times 1.2$	≈1 ч
$1 \times 1 \times 1$ (10 шт.)	$4.2 \times 1.2 \times 1.2, 2.2 \times 1.2 \times 1.2, 2.2 \times 1.2 \times 1.2, 1.2 \times 1.2 \times 1.2$	≈2.5 ч

неравенств блок (7) в [11]). Кроме того, замена произведений пар непрерывной/бинарной и бинарной переменных на одну непрерывную переменную (по аналогии с [4]) позволяет записать в линейной форме условия на положения центров масс для всех контейнеров.

К явным недостаткам разработанной технологии, учитывая NP-трудность задачи ОЗВТ, необходимо отнести значительное время и мощные вычислительные ресурсы, которые могут потребоваться для решения (при достаточно большом количестве контейнеров и грузов время, необходимое для поиска оптимума, будет неприемлемым с практической точки зрения). Тем не менее стоит заметить, что предложенную технологию целесообразно применять для верификации и калибровки разрабатываемых приближенных эвристических подходов к решению задачи ОЗВТ на тестовых примерах. Кроме того, на основе предложенной аналитической модели могут быть разработаны методы аппроксимации точного решения задачи ОЗВТ. Например, нижние оценки рассчитываются с помощью эвристических алгоритмов поиска допустимых точек построенной задачи СЦЛП [28], а верхние, в частности, — путем решения линейных релаксационных задач, полученных удалением ряда ограничений из задачи ОЗВТ. Альтернативным способом аппроксимации решения для случая задач высокой размерности представляется применение подходов, основанных на последовательном многократном применении разработанного метода для заполнения контейнеров по частям. В этом случае последовательно многократно решаются оптимизационные задачи СЦЛП, каждая из которых задана формулами (2.1), (2.4)–(2.6), (2.8), (2.9), (2.11)–(2.15) для отдельных подмножеств грузов. К ограничениям на оптимизируемые грузы добавляются ограничения на грузы, которые уже размещены на предыдущем шаге декомпозиции.

В построенной формализации нет ограничений, связанных с тем, что незакрепленные дополнительными техническими средствами грузы должны надежно опираться на другой груз либо на пол контейнера. В результате расчета может оказаться, что предметы частично или полностью висят в воздухе. В частных случаях данная проблема может быть решена с помощью постобработки результатов моделирования (по итогам которой координаты грузов будут скорректированы в ручном режиме, если это позволят ограничения на положение центров масс). Перспективным альтернативным подходом представляется добавление в целевую функцию слагаемого, представляющего собой взвешенную сумму координат грузов по оси z , взятую со знаком “минус”.

С точки зрения демонстрации и популяризации результатов проведенных работ предложенную технологию выгодно отличает реализация в форме открытого сервиса, доступного в сети Интернет. Кроме того, научной новизной настоящего исследования является возможность использования оригинальных комбинированных методов многокритериального анализа альтернатив для выбора предпочтительных ЛА.

Направления дальнейших исследований включают в себя модификацию формализации задачи с целью учета пределов допустимого давления на грузы, необходимость обеспечения устойчивости предметов, требований группировки заданных наборов грузов, более сложных форм контейнеров, а также других ограничений, возникающих на практике. Кроме того, возрастающая сложность рассматриваемых задач (вследствие добавления новых ограничений и увеличения количества контейнеров и грузов) потребует разработки дополнительных эвристических подходов, которые бы позволили строить на основе сформированной модели достаточно эффективные варианты загрузки (не обязательно являющиеся глобально оптимальными).

В перспективе разработанная технология может стать основой для составной части комплекса, функционал которого будет нацелен на решение более сложных задач, например, подразумевающих формирование расписаний авиаперевозок при ограничениях на количество, характеристики и доступность ЛА, ограничений на летные условия и на сроки доставки и т.д. [29, 30].

Заключение. Формализована задача оптимизации загрузки ЛА с учетом центровки при ряде допущений относительно параметров грузов и принципов их размещения в отсеках. Данная задача относится к классу задач СЦЛП. Для ее решения адаптирован точный алгоритм решения по методу ветвей и отсечений.

Предложенная технология апробирована на множестве примеров. Разработано программное обеспечение открытого веб-сервиса, реализующего возможности рационального размещения грузов на борту ЛА с учетом центровки. Направления дальнейшего развития разработанного

программного комплекса, нацелены на расширение множества задач, которые можно будет решать с его помощью.

Созданная технология допускает интеграцию с комбинированными методами многокритериального анализа альтернатив с целью определения приоритетов загружаемых ЛА. Практическое применение представленной технологии в перспективе позволит снизить общие финансовые затраты на воздушную транспортировку грузов, сократит время погрузочно-разгрузочных работ, а также поспособствует повышению безопасности грузоперевозок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bischoff E.E., Ratcliff M.S.W.* Issues in the Development of Approaches to Container Loading // *Omega, The Intern. J. Management Science*. 1995. V. 23. № 4. P. 377–390.
2. *Bortfeldt A., Wäscher G.* Constraints in Container Loading – A State-of-the-art Review // *Europ. J. Operational Research*. 2013. V. 229. Iss. 1. P. 1–20.
3. *Egeblad J., Garavelli C., Lisi S., Pisinger D.* Heuristics for Container Loading of Furniture // *Europ. J. Operational Research*. 2010. V. 200. Iss. 3. P. 881–892.
4. *Paquay C., Schyns M., Limbourg S.* A Mixed Integer Programming Formulation for the Three-Dimensional Bin Packing Problem Deriving from an air Cargo Application // *Intern. Transactions in Operational Research*. 2016. V. 23. Iss. 1–2. P. 187–213.
5. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
6. *Псиола В.В.* О приближенном решении 3-мерной задачи об упаковке на основе эвристик // *Интеллектуальные системы*. 2007. Т. 11. Вып. 1–4. С. 83–100. URL: [http://intsys.msu.ru/magazine/archive/v11\(1-4\)/psiola-083-100.pdf](http://intsys.msu.ru/magazine/archive/v11(1-4)/psiola-083-100.pdf) (дата обращения: 14.01.2019).
7. *Eley M.* A Bottleneck Assignment Approach to the Multiple Container Loading Problem // *OR Spectrum*. 2003. V. 25. Iss. 1. P. 45–60.
8. *Lim A., Ma H., Xu J., Zhang X.* An Iterated Construction Approach with Dynamic Prioritization for Solving the Container Loading Problems // *Expert Systems with Applications*. 2012. V. 39. Iss. 4. P. 4292–4305.
9. *Jin Z., Ito T., Ohno K.* The Three-Dimensional Bin Packing Problem and Its Practical Algorithm // *JSME Intern. J.J. Series C*. 2003. V. 46. Iss. 1. P. 60–66.
10. *Che C.H., Huang W., Lim A., Zhu W.* The Multiple Container Loading Cost Minimization Problem // *Europ. J. Operational Research*. 2011. V. 214. Iss. 3. P. 501–511.
11. *Chen C.S., Lee S.M., Shen Q.S.* An Analytical Model for the Container Loading Problem // *Europ. J. Operational Research*. 1995. V. 80. Iss. 1. P. 68–76.
12. *Padberg M.* Packing Small Boxes Into a Big Box // *Mathematical Methods of Operations Research*. 2000. V. 52. Iss. 1. P. 1–21.
13. *Hong Ha H.T., Nananukul N.* Air Cargo Loading Management System for Logistics Forwarders // *Proceedings of 2016 Intern. Conf. on Urban Planning, Transport and Construction Engineering (ICUPTCE'16)*. Pattaya, 2016. P. 51–58.
14. *Junqueira L., Morabito R., Yamashita D.S.* Three-Dimensional Container Loading Models with Cargo Stability and Load Bearing Constraints // *Computers & Operations Research*. 2012. V. 39. Iss. 1. P. 74–85.
15. *Осипов В.П., Судаков В.А.* Комбинированный метод поддержки принятия многокритериальных решений // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2015. № 30. 21 с. URL: <http://www.keldysh.ru/papers/2015/preprint.asp?id=2015-30> (дата обращения: 14.01.2019).
16. *Dutov A.V., Nesterov V.A., Sudakov V.A., Sytalo K.I.* Fuzzy Preference Domains and Their Use for Selecting an Electronic Flight Bag for Flight Crews // *J. of Computer and Systems Sciences International*. 2018. V. 57. № 2. P. 230–238.
17. *Korte B., Vygen J.* *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. 597 p.
18. *Ху Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1974. 519 с.
19. IBM ILOG CPLEX. URL: <https://www.ibm.com/analytics/cplex-optimizer> (дата обращения: 14.01.2019).
20. Gurobi. URL: <http://www.gurobi.com/> (дата обращения: 14.01.2019).
21. FICO Xpress. URL: <https://www.fico.com/en/products/fico-xpress-optimization> (дата обращения: 14.01.2019).
22. SCIP. URL: <https://scip.zib.de/> (дата обращения: 14.01.2019).
23. MINTO. URL: <http://coral.ie.lehigh.edu/~minto/> (дата обращения: 14.01.2019).
24. GLPK. URL: <https://www.gnu.org/software/glpk/> (дата обращения: 14.01.2019).

25. COIN-OR branch and cut. URL: <https://projects.coin-or.org/Cbc> (дата обращения: 14.01.2019).
26. *Linderoth J.T., Ralphs T.K.* Noncommercial Software for Mixed-Integer Linear Programming // *Integer Programming: Theory and Practice*. CRC Press Operations Research Series, 2005. P. 253–303.
27. Портал веб-сервисов поддержки принятия решений WS-DSS. URL: <http://ws-dss.com> (дата обращения: 14.01.2019).
28. *Achterberg T.* SCIP: Solving Constraint Integer Programs // *Mathematical Programming Computation*. 2009. V. 1. № 1. P. 1–41.
29. *Pollaris H., Braekers K., Caris A., Janssens G.K., Limbourg S.* Vehicle Routing Problems with Loading Constraints: State-Of-The-Art and Future Directions // *OR Spectrum*. 2015. V. 37. Iss. 2. P. 297–330.
30. *Бахтин В.А., Богданов И.П., Осипов В.П., Рыков Ю.Г., Смирнов А.А., Судаков В.А.* Оптимизация перевозок однородной продукции между оптовыми складами // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*. 2018. № 65. 26 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2018-65>. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-65> (дата обращения: 14.01.2019).

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 519.853, 517.977.5

ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ВРЕМЕНИ ПЕРЕВОЗОК В СЕТЯХ
С ПЕРЕМЕННЫМИ ИНТЕНСИВНОСТЯМИ ПОТОКОВ

© 2021 г. О. А. Косоруков^{a,*}, В. И. Цурков^{b,**}

^a МГУ им. М.В. Ломоносова, Национальный исследовательский ун-т ВШЭ, Москва, Россия

^b Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН, Москва, Россия

*e-mail: kosorukova@mail.ru

**e-mail: v.tsurkov@mail.ru

Поступила в редакцию 21.09.2020 г.

После доработки 10.10.2020 г.

Принята к публикации 30.11.2020 г.

Рассматриваются постановки задач анализа и синтеза в многополюсных коммуникационных сетях с переменными интенсивностями потоков на дугах сети. В отличие от традиционных постановок вводятся понятия плотности потока, скорости потока, интенсивности потока и анализируются временные характеристики перемещения заданных объемов по сети. Подобные задачи возникают в различных сферах человеческой деятельности, например, при исследовании транспортных потоков в моделях эвакуации крупных городов или в задачах планирования и управления перевозками в задачах городской логистики. Представлены математические постановки и алгоритмы решения задач о перевозках в многополюсной сети с переменными интенсивностями потоков, которые при определенных условиях позволяют избежать решения сложных нелинейных задач математического программирования большой размерности.

DOI: 10.31857/S0002338821030094

0. Введение. В классических задачах анализа или оптимального синтеза коммуникационных сетей пропускные способности отдельных дуг (коммуникаций) являются либо фиксированной величиной, либо функцией от способа распределения ресурсов, либо величиной или функцией, зависящей от значения некоторого неопределенного фактора, либо случайной величиной [1–8]. Ограничения классических задач такого рода, как правило, есть балансы интенсивностей в узлах коммуникационной сети. Отличительными особенностями задач данного типа в классических постановках выступают:

- 1) отсутствие временных параметров перемещения каких-либо заданных объемов;
- 2) отсутствие абсолютных значений объемов перемещения в сети (рассматриваются лишь значения пропускных способностей дуг, т.е. перемещаемые по ним объемы в единицу времени), например, задача о максимальном потоке в двухполюсной сети;
- 3) отсутствие рассмотрения скоростей потоков по дугам сети;
- 4) пропускные способности дуг не зависят от величины плотности потоков.

В данной работе интенсивности потоков на дугах коммуникационной сети, в отличие от классических постановок задач транспортного типа, например, задачи о максимальном потоке, зависят от плотности потоков и определяются выражениями вида

$$y_j = V_j(p_j)p_j, \quad j \in \Gamma, \quad (0.1)$$

где y_j — интенсивность потока на дуге j , p_j — плотность потока на дуге j , $V_j(p_j)$ — скорость потока на дуге j при заданной плотности потока, Γ — множество дуг коммуникационной сети.

Под скоростью потока понимается скорость, например, транспортных единиц потока, км/ч, которая предполагается равной у всех транспортных единиц потока на конкретной дуге коммуникационной сети, но может различаться для различных коммуникаций. Под плотностью потока подразумевается количество транспортных единиц на единицу длины транспортной коммуникации, един/км, которая также предполагается неизменной на всех участках конкретной дуги коммуникационной сети, но может различаться для различных коммуникаций. Под интенсив-

ностью потока понимается количество транспортных единиц, проходящих через фиксированное сечение транспортной коммуникации в единицу времени, един/ч. Каждая коммуникация имеет единственную числовую характеристику интенсивности вследствие сделанных выше предположений о неизменности плотности потока и скорости потока на отдельных транспортных коммуникациях, что исключает ситуации какой-либо неоднородности, как то накопления или разрыва транспортного потока на всем протяжении коммуникации.

Далее формализуем задачи рассматриваемого типа на примере конкретной предметной области, а именно планирования эвакуации населения крупных городов.

1. Задача формирования эвакуационных планов населения. В качестве предметной области, приводящей к постановкам задач, которые не обладают в отличие от классических особенностей 1)–4), описанными ранее, являются задачи формирования эвакуационных планов крупных городов. Коротко содержательный сюжет таких задач может быть описан следующим образом.

Имеется сеть городских улиц, а также дорог и магистралей, выводящих в загородную зону. В общем случае рассматриваются как автомобильные, так и железнодорожные магистрали, ветки метрополитена, участки речного транспорта. Однако в целях упрощения представляемой модели рассмотрим сеть только автотранспортных коммуникаций. В данной модели сеть представляется ориентированным графом, т.е. набором вершин и направленных дуг. Улицам с двусторонним движением в сети соответствует пара дуг противоположного направления. Вершины сети предполагаются трех типов. Тип 1 – пункты вывоза или площадки посадки (ПП), т.е. места формирования, загрузки и отправления транспортных колонн. В пунктах данного типа прибывающие транспортные единицы, после некоторой временной задержки, вызванной вышеописанными процедурами, продолжают движение по предписанным им маршрутам в коммуникационной сети. Тип 2 – промежуточные вершины транспортной сети, т.е. места ответвления или пересечения улиц и магистралей. В вершинах данного типа происходит слияние и расщепление транспортных потоков. Тип 3 – пункты ввоза, места высадки эвакуируемых в безопасной зоне или приемные эвакуационные пункты (ПЭП). В пунктах данного типа прибывающие транспортные единицы, после некоторой временной задержки, вызванной процедурами высадки и, возможно, какими-либо техническими регламентными процедурами, продолжают движение по предписанным им маршрутам в коммуникационной сети.

Каждая дуга характеризуется длиной и набором некоторых свойств (количество полос, качество покрытия и т.д.). Для удобства реализации рассматриваемые свойства (кроме количества полос) агрегируют в понятие “категория дороги”. Данные свойства определяют среднюю скорость транспортных средств на данной дуге в зависимости от плотности загрузки дуги (количество автотранспортных средств на единицу длины). Данная зависимость предполагается известной. Построение данной зависимости является отдельной подзадачей, которая рассматривалась, например, в [9]. Типичным видом зависимостей $V(p)$ являются функции S-образной формы (рис. 1). В этом случае тип зависимости интенсивности потока от плотности потока также представлен на рис. 1.

Для каждой вершины типа 1 известно количество эвакуируемых из данной вершины. Вершины типа 2 являются транзитными, т.е. разность входящего и исходящего потоков эвакуируемых в них равна 0. Для каждой вершины типа 3 известно предельно допустимое количество эвакуируемых, которые могут быть доставлены на данную площадку (емкость площадки). В задаче необходимо указать некоторую систему маршрутов (синтез маршрутов) и распределение транспортных средств по данным маршрутам (распределение ресурсов) таким образом, чтобы время эвакуации было минимальным. Более точный состав характеристик эвакуационного плана, являющийся результатом решения оптимизационной модели, будет приведен далее. Под временем эвакуации понимается время, необходимое для вывоза всех эвакуируемых с площадок посадки на приемные эвакуационные пункты.

На основе описанной выше модели процесса эвакуации рассматриваются задачи двух типов.

1. Задачи синтеза оптимального эвакуационного плана, включающие в себя полностью или частично: формирование системы ПП (местоположение и количество эвакуируемых), формирование системы ПЭП (местоположение и количество эвакуируемых), формирование системы маршрутов колонн, распределение транспортных средств по маршрутам, распределение численностей эвакуируемых по маршрутам. Данный тип задач может рассматриваться как в детерминированном случае, так и в условиях риска или при наличии внешних неопределенных факторов.

2. Задачи анализа имеющегося эвакуационного плана с точки зрения оценки времени его реализации. Данный тип задач аналогично может рассматриваться как в детерминированном случае, так и в условиях риска или при наличии внешних неопределенных факторов.

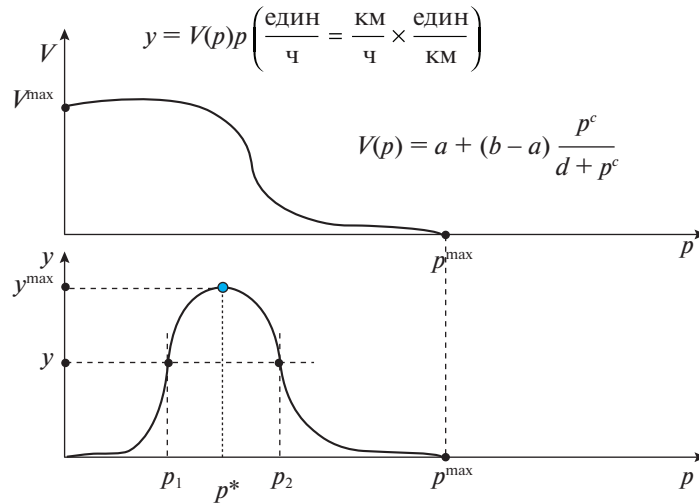


Рис. 1. Плотность, скорость и интенсивность потока

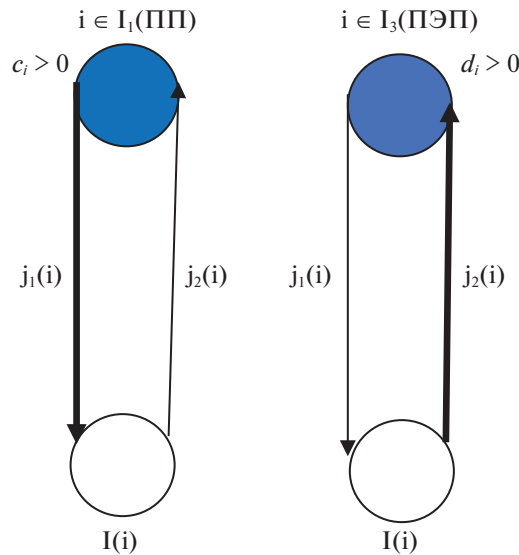


Рис. 2. Схема коммуникаций ПП и ПЭП

В статье представлена формализация задачи определения оптимальных интенсивностей потоков и интегральных объемов перевозок на дугах многополюсной коммуникационной сети с критерием на минимум времени проведения эвакуации в детерминированном случае. Предположим, что маршруты эвакуации, проходящие через пункты вывоза (ПП), осуществляют вывозы из данных пунктов и не являются транзитными для этих пунктов вывоза. Аналогичное предположение действует для маршрутов, проходящих через пункты ввоза (ПЭП). Возможность данных предположений обоснована тем, что ПП и ПЭП не являются транзитными площадками и не располагаются непосредственно на магистралях коммуникационной сети, а связаны с ними дополнительными коммуникациями. Схематично коммуникации ПП и ПЭП представлены на рис. 2. Для каждого из этих пунктов вводятся по две дополнительные дуги, соединяющие их с основной транспортной коммуникационной сетью. При этом предполагается, что для пунктов ПП ($I \in I_1$) по дуге $j_2(i)$ прибывает только пустой транспорт, а по дуге $j_1(i)$ выезжает только нагруженный. Аналогичное предположение для пунктов ПЭП ($i \in I_3$) – по дуге $j_1(i)$ выезжает только пустой транспорт, а по дуге $j_2(i)$ прибывает только нагруженный. Однако допускается, что как

пункты ПП, так и пункты ПЭП могут обслуживаться несколькими различными маршрутами. Множество дуг типа $j_1(i)$ и $j_2(i)$, где $i \in I_1 \cup I_3$, обозначим как J .

Задача анализа и синтеза эвакуационных планов крупных городов рассматривалась автором в [10]. Однако в отличие от данной работы в ней не был представлен аналитический подход для решения оптимизационной задачи, а предлагалась имитационная модель для оценки временных параметров эвакуационных планов. Вопросы формализации и алгоритмизации задач транспортного типа с переменными интенсивностями потоков рассматривались автором также в [11], однако в отличие от нее в данной статье не накладывается ограничений на структуру циклических маршрутов, рассмотрены две группы алгоритмов, а именно для предопределенной системы маршрутов и формируемой системы маршрутов, а также рассмотрены задачи минимизации объемов транспортных средств.

Для формирования математической постановки данной задачи предварительно необходимо решить серию задач безусловной оптимизации, а именно вида $\max V_j(p_j)p_j$, $j \in \Gamma$, для нахождения значений y_j^{\max} – максимально возможных интенсивностей дуг коммуникаций сети. Существование конечных максимумов у приведенных функций очевидно из рис. 1. Предполагаем также, что $y_j^{\max} > 0$, так как иначе перемещение потока по дуге j невозможно и ее следует исключить из рассмотрения. Для дуг, введенных дополнительно для вершин ПП и ПЭП и обозначенных ранее, как множество J , также определяются величины максимально возможных интенсивностей этих дуг y_j^{\max} . Однако они определяются не как максимальные значения функций $V_j(p_j)p_j$, а экспертно, исходя из пропускных возможностей конкретных ПП и ПЭП. Эти величины соответствуют максимально возможным интенсивностям потоков, которые данная площадка сможет обслуживать без образования накапливающихся очередей. Далее приведем математическую постановку задачи минимизации времени перевозок в многополюсной коммуникационной сети с переменными интенсивностями потоков. В качестве потока рассматривается поток однотипных транспортных средств, осуществляющих перемещение людей в процессе эвакуации.

Введем некоторые дополнительные обозначения. Пусть p_j^{\max} – максимально возможная плотность потока на дуге j , т. е. такая плотность, при которой скорость потока становится равной нулю (рис. 1), p_j^* – плотность потока, при которой достигается максимальное значение интенсивности потока на дуге j (рис. 1), $C(k)$, $D(k)$ – множества индексов дуг, входящих в вершину k и исходящих из нее соответственно, n – количество вершин в ориентированном графе, представляющем рассматриваемую коммуникационную сеть, т. е. $|I_1 \cup I_2 \cup I_3| = n$, m – количество дуг данного ориентированного графа, т. е. $|\Gamma \cup J| = m$, I_1 – множество вершин, соответствующих пунктам ПП, I_2 – множество транзитных вершин, I_3 – множество вершин, соответствующих пунктам ПЭП, y_j – интенсивность потока по дуге j , как было определено ранее, z_j – общее количество эвакуируемых, перевезенных по дуге j , V – вместимость одного транспортного средства (предполагаются однотипными), t – время перевозки, c_k – необходимый объем вывоза (количество людей) в k -м пункте вывоза, d_k – ограничение на объем ввоза (количество людей) в k -м пункте ввоза.

Фактически в данной задаче рассматриваются два потока в сети. Первый поток – это поток автотранспортных средств, который характеризуется интенсивностями, определяемыми для каждой дуги, которые в свою очередь ограничены своими максимально допустимыми значениями y_j^{\max} . Поток соответствует задаче о перевозке с нулевыми значениями запасов и потребностей для всех вершин, т. е. является циклическим. В потоке могут присутствовать как загруженные транспортные средства, так и незагруженные. Второй поток – это поток эвакуируемых, перевозимых из пунктов ПП в пункты ПЭП. Он соответствует задаче о перевозке с заданными объемами вывоза c_k в пунктах ПП и заданными объемами ввоза d_k в пунктах ПЭП. Задача состоит в скоординированном определении обоих потоков с целью минимизации общего времени перевозки.

Формализованная постановка задачи имеет следующий вид:

$$\min_{t, z, y} t, \quad (1.1)$$

$$\sum_{j \in C(k)} y_j - \sum_{j \in D(k)} y_j = 0, \quad k \in \overline{1, n}, \quad (1.2)$$

$$\sum_{j \in D(k)} z_j - \sum_{j \in C(k)} z_j = c_k, \quad k \in I_1, \tag{1.3}$$

$$\sum_{j \in C(k)} z_j - \sum_{j \in D(k)} z_j = 0, \quad k \in I_2, \tag{1.4}$$

$$\sum_{j \in C(k)} z_j - \sum_{j \in D(k)} z_j = d_k, \quad k \in I_3, \tag{1.5}$$

$$\frac{z_j}{Vy_j} \leq t, \quad j = \overline{1, m}, \tag{1.6}$$

$$0 \leq y_j \leq y_j^{\max}, \quad j = \overline{1, m}, \tag{1.7}$$

$$z_1, \dots, z_m \geq 0.$$

Ограничение (1.2) определяет цикличность потока интенсивностей, т.е. для всех вершин сети сумма интенсивностей входящих потоков равна сумме интенсивностей исходящих. Ограничения (1.3)–(1.5) определяют балансы потока эвакуируемых соответственно в вершинах ПП, транзитных вершинах и вершинах ПЭП. Ограничения (1.6) соответствуют тому, что общее время на реализацию перевозок не может быть меньше, чем время перевозки на каждой из дуг сети. Ограничения (1.7) определяют допустимые интенсивности на дугах сети.

Следует отметить, что в данной постановке оптимальное время, найденное в задаче (1.1), отличается от реального минимального времени эвакуации, поскольку в задаче рассматривается только стационарный поток с постоянными плотностями потоков на дугах сети. Фактически мы не учитываем периоды нестационарности в начале процесса эвакуации и при его завершении. Однако будем предполагать эти периоды малыми относительно общего времени проведения эвакуации.

Задача (1.1) является задачей условной нелинейной (ограничения (1.6)) оптимизации. В постановке задачи (1.1) в отличие от классической задачи о перевозках присутствуют интенсивности потоков, а также рассматриваются временные параметры перемещения. Отметим также, что задача (1.1) не всегда имеет решение. Предполагаем, что выполнено условие сбалансированности задачи, а именно

$$\sum_{i \in I_1} c_i = \sum_{i \in I_3} d_i.$$

В силу замкнутости и ограниченности множества допустимых решений задачи (1.1), отсутствие решения может быть вызвано только недостаточностью коммуникационных дуг в структуре ориентированного графа транспортной сети. Необходимое и достаточное решение задачи (1.1) определяется теоремой Гейла [12]. Далее предполагаем разрешимость задачи (1.1).

Выше при описании содержательной постановки задачи были сформулированы следующие предположения: для пунктов ПП ($i \in I_1$) по дуге $j_2(i)$ прибывает только пустой транспорт, а по дуге $j_1(i)$ выезжает только нагруженный и аналогичное предположение для пунктов ПЭП ($i \in I_2$) – по дуге $j_1(i)$ выезжает только пустой транспорт, а по дуге $j_2(i)$ прибывает только нагруженный. Однако в математической постановке (1.1) данной задачи эти предположения не отражены. Далее покажем, что задача (1.1) в случае ее разрешимости имеет решение, удовлетворяющее этим предположениям.

Пусть вектор (t^*, z^*, y^*) есть решение задачи (1.1). Построим некоторый новый вектор решений (t^*, \tilde{z}, y^*) , следуя соотношениям:

$$\tilde{z}_{j_2(i)} = 0, \quad \tilde{z}_{j_1(i)} = z_{j_1(i)}^* - z_{j_2(i)}^* = c_i, \quad i \in I_1, \tag{1.8}$$

$$\tilde{z}_{j_1(i)} = 0, \quad \tilde{z}_{j_2(i)} = z_{j_2(i)}^* - z_{j_1(i)}^* = d_i, \quad i \in I_3, \quad \tilde{z}_j = z_j, \text{ для остальных дуг.}$$

Покажем, что построенный вектор (t^*, \tilde{z}, y^*) есть допустимый вектор задачи (1.1). Для этого необходимо убедиться, что для него выполнены ограничения (1.3) – (1.6).

Проверим ограничения (1.3):

$$\sum_{j \in D(k)} \tilde{z}_j - \sum_{j \in C(k)} \tilde{z}_j = c_k, \quad k \in I_1,$$

$$\Rightarrow z_{j_1(k)} - z_{j_2(k)} = c_k \Rightarrow \tilde{z}_{j_1(k)} - \tilde{z}_{j_2(k)} = z_{j_1(i)}^* - z_{j_2(i)}^* = c_k.$$

Проверим ограничения (1.4). Очевидно, что необходимо проверить их только для тех вершин, которые соединены с вершинами из множеств I_1 и I_3 , они имеют обозначения $I(i)$ (рис. 2).

Проверим ограничения (1.4) для вершин из множества I_2 , которые соединены с вершинами из множества I_1 :

$$\sum_{j \in C(I(i))} z_j - \sum_{j \in D(I(i))} z_j = 0,$$

$\Rightarrow 0 = z_{j_1(i)}^* - z_{j_2(i)}^* + S \Rightarrow \tilde{z}_{j_1(k)} - \tilde{z}_{j_2(k)} + S = (z_{j_1(i)}^* - z_{j_2(i)}^*) + S = 0$, где S – сумма перевозок по всем остальным входящим и исходящим дугам в вершину $I(i)$, для которых $\tilde{z}_j = z_j$.

Проверим ограничения (1.4) для вершин из множества I_2 , которые соединены с вершинами из множества I_3 :

$$\sum_{j \in C(I(i))} z_j - \sum_{j \in D(I(i))} z_j = 0,$$

$\Rightarrow 0 = z_{j_1(i)}^* - z_{j_2(i)}^* + S \Rightarrow \tilde{z}_{j_1(i)} - \tilde{z}_{j_2(i)} + S = 0 - (z_{j_2(i)}^* - z_{j_1(i)}^*) - 0 + S = 0$, где S – сумма перевозок по всем остальным входящим и исходящим дугам в вершину $I(i)$, для которых $\tilde{z}_j = z_j$.

Проверим ограничения (1.5):

$$\sum_{j \in D(k)} z_j - \sum_{j \in C(k)} z_j = d_k, \quad k \in I_3,$$

$\Rightarrow z_{j_1(k)} - z_{j_2(k)} = d_k \Rightarrow \tilde{z}_{j_1(k)} - \tilde{z}_{j_2(k)} = 0 - (z_{j_2(i)}^* - z_{j_1(i)}^*) = d_k$.

Проверим ограничения (1.6). Его необходимо проверить для дуг типа $j_1(i)$ и $j_2(i)$, где $i \in I_1 \cup I_3$.

Проверим ограничение (1.6) для дуг типа $j_1(i)$, $i \in I_1$:

$$\frac{\tilde{z}_{j_1(k)}}{Vy_j} = \frac{z_{j_1(i)}^* - z_{j_2(i)}^*}{Vy_j} \leq \frac{z_{j_1(i)}^*}{Vy_j} \leq t.$$

Проверим ограничение (1.6) для дуг типа $j_2(i)$, $i \in I_1$:

$$\frac{\tilde{z}_{j_2(k)}}{Vy_j} = 0 \leq t.$$

Проверим ограничение (1.6) для дуг типа $j_1(i)$, $i \in I_3$:

$$\frac{\tilde{z}_{j_1(k)}}{Vy_j} = 0 \leq t.$$

Проверим ограничение (1.6) для дуг типа $j_2(i)$, $i \in I_3$:

$$\frac{\tilde{z}_{j_2(k)}}{Vy_j} = \frac{z_{j_2(i)}^* - z_{j_1(i)}^*}{Vy_j} \leq \frac{z_{j_2(i)}^*}{Vy_j} \leq t.$$

Таким образом, показано, что построенный вектор (t^*, \tilde{z}, y^*) , есть допустимый вектор задачи (1.1). Поскольку ему соответствует оптимальное значение функционала t^* , то он является и оптимальным решением.

Как было отмечено выше, задача (1.1) – задача нелинейной условной оптимизации, однако использование замены переменных $w_j = ty_j, j = \overline{1, m}$, и обоснованное выше преобразование приводят задачу (1.1) к следующей задаче (1.9) линейного программирования:

$$\min_{t, z, y} t, \tag{1.9}$$

$$\sum_{j \in C(i)} z_j - \sum_{j \in D(i)} z_j = 0, \quad i \in I_2, \quad \sum_{j \in C(i)} w_j - \sum_{j \in D(i)} w_j = 0, \quad i \in I_1 \cup I_2 \cup I_3,$$

$$z_{j_1(i)} = c_i, \quad i \in I_1, \quad z_{j_2(i)} = 0, \quad i \in I_1, \quad z_{j_1(i)} = 0, \quad i \in I_3, \quad z_{j_2(i)} = d_i, \quad i \in I_3,$$

$$z_j \leq Vw_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad 0 \leq w_j \leq ty_j^{\max}, \quad j = \overline{1, m}, \quad z_1, \dots, z_m \geq 0.$$

Оптимальные значения переменных z^* и t^* из решения задачи (1.9) сохраняют свои значения и для решения задачи (1.1), а оптимальные значения переменных y^* задачи (1.1) восстанавливаются исходя из следующих соотношений:

$$y_j^* = \frac{w_j^*}{t^*}, \quad j = \overline{1, m}. \tag{1.10}$$

Содержательно возникает задача, напоминающая задачу о перевозках с некоторым мультипликативным параметром t . В терминах этой классической сетевой задачи задача (1.9) сводится к вопросу: на сколько минимально можно умножить величины максимально возможных интенсивностей потоков на дугах так, чтобы задача о перевозках осталась разрешимой в рамках заданных объемов спроса и предложения в сети?

Строго говоря, утверждать, что задача (1.1) определяет именно минимальное время проведения эвакуации без дополнительных исследований, было бы преждевременно. Действительно, в задаче (1.1) определяются оптимальные значения интенсивностей на дугах коммуникационной сети, при которых достигается минимальное время эвакуации. Однако вопрос о том, насколько достижимы эти интенсивности в рамках принятой модели осуществления эвакуации с использованием циклических транспортных маршрутов, остается открытым. Если автотранспортный парк ограничен, то возникает также вопрос, достаточен ли он для достижения оптимальных значений интенсивностей и соответственно полученного минимального времени осуществления перевозки. В силу этого на данном этапе результат задачи (1.1) более корректно трактовать как оценку снизу для минимального времени проведения эвакуации.

Как было отмечено выше, рассматриваемая модель эвакуации предполагает движение потока транспортных средств по некоторым циклическим маршрутам с забором эвакуируемого населения в ПП и выгрузкой в ПЭП. Далее приведем алгоритмы решения задач 1 и 2 соответственно, которые были определены выше.

Задача 1. Система маршрутов не известна. Положения и емкости ПП (c_k) и ПЭП (d_k) известны. Результатом задачи минимизации времени проведения эвакуации является определение оптимальной системы маршрутов, а также оптимального количества эвакуируемых, перевозимых по каждому из маршрутов, и оптимальное распределение имеющегося количества однотипных транспортных средств по сформированной системе маршрутов. Какие-либо неопределенные внешние факторы отсутствуют.

Задача 2. Система маршрутов известна. Положения и емкости ПП (c_k) и ПЭП (d_k) также известны. Результатом задачи минимизации времени проведения эвакуации является оптимальное распределение имеющегося количества однотипных транспортных средств по заданной системе маршрутов, а также оптимальное количество эвакуируемых, перевозимых по каждому из маршрутов. Какие-либо неопределенные внешние факторы отсутствуют.

2. Алгоритм решения задачи 1. Приведем далее алгоритм решения задачи минимизации времени эвакуации для задачи типа 1.

Шаг 1. *Определение значений y_j^{\max} .* Для каждой из дуг коммуникационной сети из множества Γ решается задача безусловной оптимизации максимизации функции одной переменной $V_j(p_j)p_j$, $j \in \Gamma$, для нахождения максимально возможного значения плотности соответствующего потока y_j^{\max} . Для множества дополнительно введенных дуг J значения y_j^{\max} , как было отмечено ранее, определяются экспертно.

Шаг 2. *Нахождение минимального времени выполнения перевозок.* Решаем задачу (1.1) путем сведения ее к задаче (1.9). Рассматриваем полный набор коммуникаций сети. Заметим, что задача (1.1) разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача (1.9). Оптимальный набор интенсивностей по дугам получаем, используя соотношения (1.10).

Шаг 3. *Определение минимально необходимого объема транспортных средств.* При решении (1.1) критерием задачи была минимизация времени реализации перевозки. При этом получаемые значения объемов перевозок, интенсивностей потоков, плотностей потоков и объемов

транспортных средств позволяют реализовать время перевозки t^* , но иным критериям, вообще говоря, не удовлетворяют. Поэтому для определения минимального количества транспортных средств, необходимых для реализации перевозки за время t^* , решается новая задача:

$$\min_{x,y,z} \sum_{j \in \Gamma} x_j, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j \in C(i)} z_j - \sum_{j \in D(i)} z_j = 0, \quad i \in I_2, \quad \sum_{j \in C(i)} y_j - \sum_{j \in D(i)} y_j = 0, \quad i \in I_1 \cup I_2 \cup I_3, \\ z_{j_1(i)} = c_i, \quad i \in I_1, \quad z_{j_2(i)} = 0, \quad i \in I_1, \quad z_{j_1(i)} = 0, \quad i \in I_3, \quad z_{j_2(i)} = d_i, \quad i \in I_3, \\ y_j = V_j \left(\frac{x_j}{l_j} \right) \frac{x_j}{l_j}, \quad j \in \Gamma, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$z_j \leq V_j^* y_j, \quad \overline{1, m}, \quad 0 \leq w_j \leq t y_j^{\max}, \quad j = \overline{1, m}, \quad z_1, \dots, z_m \geq 0,$$

где x_j – количество транспортных средств на дуге j , а l_j – протяженность коммуникации j . Величины x_j полагаем неизменными в силу нашего предположения о стационарности рассматриваемого потока. Соответственно определенные ранее плотности потоков, находятся из соотношений $p_j = x_j/l_j$.

Оптимальное решение задачи (2.1) по функционалу обозначим как R_{\min}^* . Следует отметить, что задача (2.1) является нелинейной задачей условной оптимизации в силу ограничений (2.2). Предложим далее способ получения некоторой оценки сверху R_{\min}^+ для величины R_{\min}^* , т.е. $R_{\min}^* \leq R_{\min}^+$. Оценку R_{\min}^+ можно найти через решение следующей линейной оптимизационной задачи:

$$\min_{x,y,z} \sum_{j \in \Gamma} y_j, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j \in C(i)} z_j - \sum_{j \in D(i)} z_j = 0, \quad i \in I_2, \quad \sum_{j \in C(i)} y_j - \sum_{j \in D(i)} y_j = 0, \quad i \in I_1 \cup I_2 \cup I_3, \\ z_{j_1(i)} = c_i, \quad i \in I_1, \quad z_{j_2(i)} = 0, \quad i \in I_1, \quad z_{j_1(i)} = 0, \quad i \in I_3, \quad z_{j_2(i)} = d_i, \quad i \in I_3, \\ z_j \leq V_j^* y_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad 0 \leq y_j \leq y_j^{\max}, \quad j = \overline{1, m}, \quad z_1, \dots, z_m \geq 0. \end{aligned}$$

Пусть y^* есть решение задачи (2.3), а R_{\min}^+ – ее оптимальное значение по функционалу. Найдем оптимальные значения плотностей потока на дугах путем последовательного решения нелинейных уравнений вида $y_j^* = V_j(p_j)p_j$, $j \in \Gamma$, при найденных в ходе решения задачи (2.3) значениях вектора y^* . Поскольку возможны несколько решений для p_j , то будем рассматривать минимальное из них, т.е. $p_j \in [0; p_j^*]$ (рис. 1). Отметим также, что для задачи (2.1) соответствующие значения p_j получаются непосредственно из решения $p_j = x_j/l_j$. Далее на основе найденных значений p_j проведем расчет объема транспортных средств, задействованных на каждой из дуг сети, как $x_j = p_j l_j$, $j \in \Gamma$. Тогда вектор (t^*, x, y^*) есть допустимое решение задачи (2.3), а следовательно, получена некоторая оценка сверху R_{\min}^+ для величины R_{\min}^* , т.е. $R_{\min}^* \leq R_{\min}^+$. Основанием полагать, что данная оценка будет иметь определенную близость к значению R_{\min}^* , является факт монотонной зависимости величины y_j от p_j на отрезке $[0; p_j^*]$ (рис. 1). Поскольку, как отмечено ранее, рассматривается только минимальное из решений p_j , следовательно, имеет место монотонная зависимость и от x_j , согласно соотношениям (2.2).

Шаг 4. Проверка достаточности количества транспортных средств. Проверяется выполнение условия $R_{\min}^+ \leq R$, где R – общее количество имеющихся транспортных средств. Если оно верно, то переходим к шагу 5 для распределения транспортных ресурсов по системе маршрутов, используя полученный в ходе решения задачи (2.3) вектор интенсивностей y . В противном случае решается задача (2.1) и проверяется условие $R_{\min}^* \leq R$. Если оно выполнено, то также переходим к шагу 5, используя найденный в ходе решения задачи (2.1) вектор интенсивностей y . Иначе переходим к шагу 7. Заметим, что невязка в неравенстве $R_{\min}^* \leq R$ в случае его невыполнения со-

ответствует дополнительному количеству транспортного ресурса, которое обеспечило бы достижимость минимально возможного времени эвакуации при заданных объемах перевозок и параметрах транспортных коммуникаций.

Шаг 5. Формирование системы циклических маршрутов. Как отмечалось выше, в задачах (1.1), (2.1) и (2.3) присутствуют два потока – эвакуируемых и транспортных средств. Поскольку оба потока являются потоками задачи о перевозках, они, следуя Форду и Фалкерсону [12], могут быть заданы в виде “дуги-цепи”, т.е. в виде отображение h множества направленных “квазипутей” (из множества вершин пунктов вывоза I_1 в множество вершин пунктов ввоза I_3) в множество неотрицательных чисел таким образом, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$y_j = \sum_{i \in P: j \in N_i} h(N_i), \quad j \in \Gamma, \tag{2.4}$$

где P – множество направленных “квазипутей”, N_i – множество дуг, входящих в i -й “квазипуть”, $h(N_i)$ – интенсивность потока по i -у “квазипути”. В работе [13] вводится определение “квазипути” и дается конструктивное доказательство существования представления в виде совокупности направленных “квазипутей” любого допустимого потока. Заметим, что такое представление, вообще говоря, не единственно.

Решение задачи (1.9) по переменным w , а следовательно, и по переменным u исходной задачи (1.1) есть допустимый план перевозок для задачи о перевозках, в которой все вершины являются транзитными. Аналогичное утверждение справедливо и для потоков интенсивностей у задач (2.1) и (2.3). Поэтому для потоков интенсивностей u этих задач можно обосновать более сильный результат, чем разложение “дуги-цепи”, а именно возможное разложение “дуги-цикла”. Другими словами, задать отображение h множества P направленных “квазициклов” [13, 14], соединяющих представителей из множества вершин пунктов вывоза I_1 с представителями множества вершин пунктов ввоза I_3 , в множество неотрицательных чисел таким образом, чтобы выполнялись соотношения (2.4).

Поскольку, как и в случае разложения “дуги-цепи”, разложение “дуги-цикла”, вообще говоря, не единственно, то выберем одно из возможных разложений в виде “дуги-цикла” оптимального потока u , полученного через решение задачи (2.1) или (2.3). Именно это разложение и примем за искомую систему циклических маршрутов.

Шаг 6. Распределения транспортных ресурсов по системе маршрутов. Распределения транспортных ресурсов по системе маршрутов произведем на основе следующих соотношений:

$$p_j^i = \frac{h(N_i)}{V_j(p_j)} = \frac{x_j^i}{l_j}, \quad x_j^i = \frac{h(N_i)l_j}{V_j(p_j)}, \tag{2.5}$$

где $j \in \Gamma$, $i \in P$, p_j^i – есть частичная плотность потока на дуге j , создаваемая потоком по i -му циклическому маршруту, x_j^i – количество транспортных средств i -го маршрута, дислоцирующихся на дуге j , p_j – плотности потоков на дугах, полученные на шаге 3 либо из решения задачи (2.1), либо (2.3). Плотность потока на дуге есть сумма частичных плотностей, создаваемых потоками по маршрутам, которые проходят, через данную дугу. Аналогично интенсивность потока на дуге есть сумма интенсивностей по маршрутам, проходящим через данную дугу.

Проверим, что использование соотношений (2.5) не нарушает оптимальных количеств транспортных ресурсов на дугах, вычисленных на шаге 3 при решении задачи (2.1). Действительно, при $j \in \Gamma$, $i \in P$

$$\sum_{i: j \in N_i} x_j^i = \frac{l_j}{V_j(p_j)} \sum_{i: j \in N_i} h(N_i) = \frac{l_j y_j}{V_j(p_j)} = l_j p_j = x_j,$$

что в точности соответствует соотношениям (2.2).

Вычисление количества задействованных транспортных средств на отдельном маршруте происходит по формулам

$$X_i = \sum_{j \in N_i} x_j^i,$$

где X_i – транспортный ресурс, выделенный на маршрут i . Алгоритм формирования оптимальной системы циклических маршрутов и оптимального распределения транспортного ресурса по маршрутам завершен.

Шаг 7. *Случай недостаточности количества транспортных средств (нахождение минимального времени перевозок).* В случае, если проверка достаточности транспортных средств на шаге 4 не дает положительного результата, решение задачи (1.1) в ее первоначальном варианте, как уже отмечалось, не дает оптимального времени проведения эвакуации, а лишь его оценку снизу. Тогда произведем решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} & \min_{t, z, y} t, \tag{2.6} \\ & \sum_{j \in C(k)} y_j - \sum_{j \in D(k)} y_j = 0, \quad k \in 1, \dots, n, \quad \sum_{j \in D(k)} z_j - \sum_{j \in C(k)} z_j = c_k, \quad k \in I_1, \\ & \sum_{j \in C(k)} z_j - \sum_{j \in D(k)} z_j = 0, \quad k \in I_2, \quad \sum_{j \in C(k)} z_j - \sum_{j \in D(k)} z_j = d_k, \quad k \in I_3, \\ & \frac{z_j}{Vy_j} \leq t, \quad j = \overline{1, m}, \quad 0 \leq y_j \leq y_j^{\max}, \quad j = \overline{1, m}, \quad y_j = V_j \left(\frac{x_j}{l_j} \right) \frac{x_j}{l_j}, \quad j \in \Gamma, \\ & \sum_{j \in \Gamma} x_j \leq R, \quad z_1, \dots, z_m \geq 0. \end{aligned}$$

Задача (2.6) является нелинейной задачей условной оптимизации, которую, по-видимому, не удастся свести к линейной. В задаче (2.6) в отличие от задачи (1.1) появляются переменные x количества транспортных единиц и выраженные через них плотности транспортных потоков на дугах сети. Пусть значение t^* есть минимальное время выполнения перевозки, полученное как решение задачи (2.6).

Шаг 8. *Случай недостаточности количества транспортных средств (формирование системы маршрутов и распределение транспортных средств).* Далее реализуем действия, предусмотренные шагами 5 и 6 данного раздела. Это и завершает алгоритм формирования оптимальной системы циклических маршрутов и оптимального распределения транспортного ресурса по маршрутам.

3. Алгоритм решения задачи 2. Приведем далее алгоритм решения задачи минимизации времени эвакуации для задачи 2. Основная сложность данной задачи по сравнению с рассмотренной в разд. 2 заключается в том, что даже в том случае, если в качестве множества дуг Γ рассмотреть его подмножество Γ^* , $\Gamma^* \subset \Gamma$, состоящее только из дуг, входящих в заданную систему маршрутов, и далее следовать вышеописанному алгоритму, может возникнуть проблема на шаге 5. Среди допустимых представлений циклического потока в виде “дуги-циклы” может не оказаться заданной системы маршрутов. Поэтому привязка к заданной системе маршрутов должна изначально присутствовать в формализованной постановке задачи. Обозначим множество индексов заданных маршрутов, как и ранее, как P , а множество индексов дуг маршрута i – как N_i .

Шаг 1. *Определение значений y_j^{\max} .* Для каждой из дуг коммуникационной сети из множества Γ^* решается задача безусловной оптимизации максимизации функции одной переменной $V_j(p_j)p_j$, $j \in \Gamma^*$, для нахождения максимально возможного значения плотности соответствующего потока y_j^{\max} . Для множества дополнительно введенных дуг J значения y_j^{\max} определяются экспертно.

Шаг 2. *Нахождение минимального времени выполнения перевозок.* Решаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} & \min_{t, z, y, h} t, \tag{3.1} \\ & \sum_{j \in C(k)} y_j - \sum_{j \in D(k)} y_j = 0, \quad k \in I_1 \cup I_2 \cup I_3, \quad \sum_{j \in D(k)} z_j - \sum_{j \in C(k)} z_j = c_k, \quad k \in I_1, \\ & \sum_{j \in C(k)} z_j - \sum_{j \in D(k)} z_j = 0, \quad k \in I_2, \quad \sum_{j \in C(k)} z_j - \sum_{j \in D(k)} z_j = d_k, \quad k \in I_3, \\ & \frac{z_j}{Vy_j} \leq t, \quad j \in \{\Gamma^* \cup J\}, \\ & y_j = \sum_{i \in P: j \in N_i} h_i, \quad j \in \{\Gamma^* \cup J\}, \tag{3.2} \end{aligned}$$

$$0 \leq y_j \leq y_j^{\max}, \quad j = j \in \{\Gamma^* \cup J\}, \quad z_j \geq 0, \quad j \in \{\Gamma^* \cup J\}, \quad h_i \geq 0, \quad i \in P.$$

Задача (3.1) содержательно аналогична задаче (1.1) рассмотренной выше. Отличие состоит в сужении множества рассматриваемых дуг, присутствии в задаче новых переменных h , обозначающих интенсивности потоков заданной системы маршрутов, и новых ограничениях (3.2), которые определяют разложение интенсивностей потоков на дугах по интенсивностям заданной системы маршрутов.

Как и (1.1), задача (3.1) является задачей нелинейной условной оптимизации, однако, так же как и в случае задачи (1.1), использование замены переменных $w_j = ty_j$, $j \in \{\Gamma^* \cup J\}$, и обоснованное выше для задачи (1.1) допустимое преобразование вектора z приводят задачу (3.1) к следующей задаче линейного программирования:

$$\begin{aligned} & \min_{t, z, y} t, & (3.3) \\ & \sum_{j \in C(i)} z_j - \sum_{j \in D(i)} z_j = 0, \quad i \in I_2, \\ & z_{j_1(i)} = c_i, \quad i \in I_1, \quad z_{j_2(i)} = 0, \quad i \in I_1, \quad z_{j_3(i)} = 0, \quad i \in I_3, \quad z_{j_4(i)} = d_i, \quad i \in I_3, \\ & \sum_{j \in C(i)} w_j - \sum_{j \in D(i)} w_j = 0, \quad i \in I_1 \cup I_2 \cup I_3, \quad z_j \leq Vw_j, \quad j \in \{\Gamma^* \cup J\}, \\ & y_j = \sum_{i \in P: j \in N_i} h_i, \quad j \in \{\Gamma^* \cup J\}, \quad 0 \leq z_j \leq ty_j^{\max}, \quad j \in \{\Gamma^* \cup J\}, \\ & h_i \geq 0, \quad i \in P, \quad z_j \geq 0, \quad j \in \{\Gamma^* \cup J\}. \end{aligned}$$

Оптимальные значения переменных z^* и t^* из решения задачи (3.3) сохраняют свои значения и для решения задачи (3.1), а оптимальные значения переменных y^* задачи (3.1) восстанавливаются:

$$y_j^* = \frac{w_j^*}{t^*}, \quad j \in \{\Gamma^* \cup J\}, \quad (3.4)$$

Шаг 3. Определение минимально необходимого объема транспортных средств. При решении задачи (3.1) критерием задачи было время реализации перевозки. При этом получаемые значения объемов перевозок, интенсивностей потоков, плотностей потоков и объемов транспортных средств позволяют реализовать полученное время перевозки t^* , но иным критериям, вообще говоря, не удовлетворяют. Поэтому для определения минимального количества транспортных средств, необходимых для реализации перевозки за время t^* , решается новая задача:

$$\begin{aligned} & \min_{x, y, z, h} \sum_{j \in \Gamma} x_j, \\ & \sum_{j \in C(i)} z_j - \sum_{j \in D(i)} z_j = 0, \quad i \in I_2, \quad \sum_{j \in C(i)} y_j - \sum_{j \in D(i)} y_j = 0, \quad i \in I_1 \cup I_2 \cup I_3, \\ & z_{j_1(i)} = c_i, \quad i \in I_1, \quad z_{j_2(i)} = 0, \quad i \in I_1, \quad z_{j_3(i)} = 0, \quad i \in I_3, \quad z_{j_4(i)} = d_i, \quad i \in I_3, \\ & y_j = \sum_{i \in P: j \in N_i} h_i, \quad j \in \{\Gamma^* \cup J\}, & (3.5) \end{aligned}$$

$$y_j = V_j \left(\frac{x_j}{l_j} \right) \frac{x_j}{l_j}, \quad j \in \{\Gamma^* \cup J\}, \quad z_j \leq Vt^* y_j, \quad j \in \{\Gamma^* \cup J\},$$

$$0 \leq z_j \leq ty_j^{\max}, \quad j \in \{\Gamma^* \cup J\}, \quad h_i \geq 0, \quad i \in P, \quad z_j \geq 0, \quad j \in \{\Gamma^* \cup J\}.$$

Оптимальное решение задачи (3.5) по функционалу обозначим как R_{\min}^* . Следует отметить, что задача (3.5) является нелинейной задачей условной оптимизации. Как и в алгоритме преды-

лучшего раздела, предложим способ получения некоторой оценки сверху R_{\min}^+ для величины R_{\min}^* , т.е. $R_{\min}^* \leq R_{\min}^+$. Оценку R_{\min}^+ можно найти через решение линейной оптимизационной задачи:

$$\begin{aligned} & \min_{x,y,z,h} \sum_{j \in \Gamma} y_j, \\ & \sum_{j \in C(i)} z_j - \sum_{j \in D(i)} z_j = 0, \quad i \in I_2, \quad \sum_{j \in C(i)} y_j - \sum_{j \in D(i)} y_j = 0, \quad i \in I_1 \cup I_2 \cup I_3, \\ & z_{j(i)} = c_i, \quad i \in I_1, \quad z_{j_2(i)} = 0, \quad i \in I_1, \quad z_{j(i)} = 0, \quad i \in I_3, \quad z_{j_2(i)} = d_i, \quad i \in I_3, \\ & y_j = \sum_{i \in P: j \in N_i} h_i, \quad j \in \{\Gamma^* \cup J\}, \\ & z_j \leq V_i^* y_j, \quad j \in \{\Gamma^* \cup J\}, \quad 0 \leq y_j \leq y_j^{\max}, \quad j \in \{\Gamma^* \cup J\}, \\ & h_i \geq 0, \quad i \in P, \quad z_j \geq 0, \quad j \in \{\Gamma^* \cup J\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Пусть y^* – решение задачи (3.6), а ее оптимальное значение по функционалу есть R_{\min}^+ . Найдем оптимальные значения плотностей потока на дугах путем последовательного решения нелинейных уравнений вида $y_j^* = V_j(p_j)p_j$, $j \in \Gamma^*$, при найденных в ходе решения задачи (3.6) значениях вектора y^* . Поскольку возможны несколько решений для p_j , то будем рассматривать минимальное из них, т.е. $p_j \in [0; p^*]$ (рис. 1). На основе найденных значений p_j проведем расчет объема транспортных средств, задействованных на каждой из дуг сети, как $x_j = p_j l_j$, $j \in \Gamma^*$.

Тогда вектор (t^*, x, y^*) есть допустимое решение задачи (3.6), а следовательно, получена некоторая оценка сверху R_{\min}^+ для величины R_{\min}^* , т.е. $R_{\min}^* \leq R_{\min}^+$. Основанием полагать, что данная оценка будет иметь определенную близость к значению R_{\min}^* , является факт монотонной зависимости величины y_j от p_j на отрезке $[0; p^*]$ (рис. 1), поскольку, как отмечено ранее, рассматривается только минимальное из решений p_j , следовательно, имеет место монотонная зависимость и от x_j .

Шаг 4. Проверка достаточности количества транспортных средств. Проверяется выполнение условия $R_{\min}^+ \leq R$, где R – общее количество имеющихся транспортных ресурсов. Если оно верно, то переходим к шагу 5 для распределения транспортных ресурсов по системе маршрутов, используя полученный в ходе решения задачи (3.6) вектор интенсивностей y . В противном случае решается задача (3.5) и проверяется условие $R_{\min}^* \leq R$. Если оно выполнено, то также переходим к шагу 5, используя полученный в ходе решения задачи (3.5) вектор интенсивностей y . Иначе переходим к шагу 6. Заметим, что невязка в неравенстве $R_{\min}^* \leq R$, в случае его невыполнения, соответствует дополнительному количеству транспортного ресурса, которое обеспечило бы достижимость минимально возможного времени эвакуации при заданных объемах перевозок и параметрах транспортных коммуникаций.

Шаг 5. Распределения транспортных ресурсов по системе маршрутов. Распределения транспортных ресурсов по системе маршрутов произведем на основе следующих соотношений:

$$p_j^i = \frac{h_i}{V_j(p_j)} = \frac{x_j^i}{l_j}, \quad x_j^i = \frac{h_i l_j}{V_j(p_j)}, \quad (3.7)$$

где $j \in \Gamma^*$, $i \in P$, p_j^i – частичная плотность на дуге j , создаваемая потоком по i -му циклическому маршруту, x_j^i – количество транспортных средств i -го маршрута, дислоцирующихся на дуге j , p_j – плотности потоков на дугах, полученные на шаге 3 либо из решения задачи (3.5), либо (3.6). Плотность потока на дуге есть сумма частичных плотностей, создаваемых потоками по маршрутам, которые проходят через данную дугу. Аналогично интенсивность потока на дуге есть сумма интенсивностей по маршрутам, проходящим через данную дугу.

Вычисление количества задействованных транспортных средств на отдельном маршруте происходит по формулам

$$X_i = \sum_{j \in N_i} x_j^i,$$

где X_i – транспортный ресурс, выделенный на маршрут i . Алгоритм формирования оптимальной системы циклических маршрутов и оптимального распределения транспортного ресурса по маршрутам завершен.

Шаг 6. Случай недостаточности количества транспортных средств (нахождение минимального времени перевозок). В случае, если проверка достаточности транспортных средств на шаге 4 не дает положительного результата, решение задачи (3.3), как уже отмечалось, не дает оптимального времени проведения эвакуации, а лишь его оценку снизу. Тогда произведем решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} & \min_{t, z, y, h} t, \\ & \sum_{j \in C(k)} y_j - \sum_{j \in D(k)} y_j = 0, \quad k \in 1, \dots, n, \quad \sum_{j \in D(k)} z_j - \sum_{j \in C(k)} z_j = c_k, \quad k \in I_1, \\ & \sum_{j \in C(k)} z_j - \sum_{j \in D(k)} z_j = 0, \quad k \in I_2, \quad \sum_{j \in C(k)} z_j - \sum_{j \in D(k)} z_j = d_k, \quad k \in I_3, \\ & \frac{z_j}{Vy_j} \leq t, \quad j \in \{\Gamma^* \cup J\}, \quad 0 \leq y_j \leq y_j^{\max}, \quad j \in \{\Gamma^* \cup J\}, \\ & y_j = \sum_{i \in P: j \in N_i} h_i, \quad j \in \{\Gamma^* \cup J\}, \quad \sum_{j \in \Gamma} x_j \leq R, \quad h_i \geq 0, \quad i \in P, \\ & y_j = V_j \left(\frac{x_j}{l_j} \right) \frac{x_j}{l_j}, \quad j \in \Gamma^*, \quad z_j \geq 0, \quad j \in \{\Gamma^* \cup J\}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Задача (3.8) является нелинейной задачей условной оптимизации, которую, по-видимому, не удастся свести к линейной. Пусть значение t^* есть минимальное время выполнения перевозки, полученное как решение задачи (3.8).

Шаг 7. Случай недостаточности количества транспортных средств (распределение транспортных средств). Далее реализуем действия, предусмотренные шагом 5 данного раздела. Это и завершает алгоритм формирования оптимальной системы циклических маршрутов и оптимального распределения транспортного ресурса по маршрутам.

4. Минимизация объема транспортных ресурсов при заданном директивном времени перевозки. В задачах разд. 2 и 3 ставился вопрос о минимизации количества задействованных в перевозке транспортных средств. Однако этот критерий рассматривался как критерий второй приоритетности после критерия минимизации времени перевозки. Фактически был применен метод лексикографического целевого программирования [15]. В настоящем разделе приведем задачу минимизации количества необходимых транспортных средств при условии заданного директивного времени перевозки, в которое необходимо уложиться. Как и в случае минимизации времени перевозки, задача рассматривается в двух постановках: с набором маршрутов, формируемых в ходе решения задачи и с изначально заданным набором маршрутов.

Математическая постановка данной задачи в случае системы маршрутов, формируемых в ходе решения задачи, имеет вид задачи (2.1), в которой в качестве входного параметра t^* рассматривается заданное директивное время выполнения перевозки.

Математическая постановка данной задачи в случае изначально заданной системы маршрутов, имеет вид задачи (3.5), в которой в качестве входного параметра t^* рассматривается заданное директивное время выполнения перевозки.

Заключение. В статье представлены постановки задач минимизации времени перевозок в многополюсной сети, в которой скорости и, как следствие, интенсивности потоков на коммуникациях сети зависят от плотности потоков на этих коммуникациях. Рассмотрены также постановки задач минимизации необходимого объема транспортных ресурсов. Задачи приводятся, как в случае множества маршрутов, формируемого в ходе решения задачи и с изначально заданным набором маршрутов. Полезность представленных в статье алгоритмов решения задач о пе-

ревозках в многополюсной сети с переменными интенсивностями потоков состоит в том, что в ряде случаев при достаточном количестве транспортных средств они позволяют избежать решения сложных нелинейных задач математического программирования большой размерности. Алгоритмы дают также возможность определить минимальное количество транспортных средств, обеспечивающее достижимость минимально возможного времени эвакуации при заданных объемах перевозок и параметрах транспортных коммуникаций.

В рассматриваемых задачах предполагается, что трафик коммуникационной сети формируется полностью из транспортных средств, осуществляющих заданную перевозку. Однако на практике вероятно случается, когда в коммуникационной сети присутствует фоновый внешний трафик, который также должен учитываться при оценке допустимых интенсивностей потоков на коммуникациях сети. Приведенные в статье математические постановки и алгоритмические результаты в этом случае остаются верными с точностью до замены зависимостей интенсивностей потоков на дугах от плотности транспортного потока перевозки, а именно их необходимо рассматривать в виде $y_j = V_j(a_j + p_j)p_j$, где a_j – фоновые интенсивности потоков на коммуникации j , оцененные, например, как среднеожидаемые. Существенного усложнения алгоритмов численного решения рассматриваемых задач эта замена, по-видимому, не повлечет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Давыдов Э.Г. Игры, графы, ресурсы. М.: Радио и связь, 1981.
2. Миронов А.А., Цурков В.И. Сетевые модели с фиксированными параметрами на узлах связи. I // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. № 4.
3. Миронов А.А., Цурков В.И. Сетевые модели с фиксированными параметрами на узлах связи. II // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. № 6.
4. Миронов А.А., Цурков В.И. Транспортные задачи с минимаксным критерием // ДАН. 1996. Т. 346. № 2. С. 168–171.
5. Миронов А.А., Цурков В.И. Наследственно-минимаксные матрицы в моделях транспортного типа // Изв. РАН. ТиСУ. 1998. № 6. С. 104–121.
6. Миронов А.А., Цурков В.И. Минимакс при нелинейных транспортных ограничениях // ДАН. 2001. Т. 381. № 3.
7. Миронов А.А., Цурков В.И. Открытые транспортные модели с минимаксным критерием // ДАН. 2001. Т. 381. № 4.
8. Миронов А.А., Федорчук В.В., Цурков В.И. Минимакс в моделях транспортного типа с интегральными ограничениями. II // Изв. РАН. ТиСУ. 2005. № 5.
9. Хейт Ф. Математическая теория транспортных потоков. М.: Мир, 1966.
10. Косоруков О.А. Сети. Риски. Ресурсы. Казань: Казанский гос. ун-т, 2006.
11. Косоруков О.А. Задачи оптимизации перевозок на коммуникационных сетях с переменными пропускными способностями // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 6. С. 140–146.
12. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях. М.: Мир, 1966.
13. Фрэнк Г., Фриш И. Сети, связь и потоки. М.: Связь, 1978.
14. Йенсен П., Барнес Д. Потокоевое программирование. М.: Радио и связь, 1984.
15. Таха Хемди А. Введение в исследование операций. 6-е изд. Пер. с англ. М.: Вильямс, 2001.

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

УДК 51-77

**НОВЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ И ЗАДАЧИ РЕГУЛИРОВАНИЯ
РЫНКА ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ¹**

© 2021 г. А. А. Васин^a, О. М. Григорьева^{a,*}, А. С. Шендяпин^a

^a МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*e-mail: olesyagrigez@gmail.com

Поступила в редакцию 17.11.2020 г.

После доработки 01.12.2020 г.

Принята к публикации 25.01.2021 г.

Формулируются и исследуются задачи, связанные с оптимальным регулированием оптовых рынков электроэнергии в современных условиях. В моделях учитываются возможности, связанные с новыми техническими и экономическими инструментами: возобновляемыми источниками и накопителями энергии и регулированием потребления с помощью многоставочных тарифов. Анализ оптимизационных задач с помощью теоремы Лагранжа позволяет определить оптимальные стратегии регулирования как при наличии полной информации о случайных факторах, так и при наличии вероятностной неопределенности. Обсуждаются экономические механизмы и условия, позволяющие реализовать оптимальное функционирование рынка с точки зрения общественного благосостояния.

DOI: 10.31857/S0002338821030161

Введение. Электроэнергетическая отрасль представляет собой сложную систему, включающую разные типы генераторов и потребителей, связывающую их сеть и экономические механизмы их взаимодействия. Управление в таких системах осложняется существенным влиянием случайных факторов на функционирование отрасли. Соответствующие задачи оптимизации представляют интерес с точки зрения развития теории и приложений системного анализа и исследования операций.

Развитие электроэнергетики является важной задачей с точки зрения ускорения темпов роста российской экономики. Ее решение связано с использованием новых экономических и технических инструментов для оптимизации производства и потребления электроэнергии. Среди таких инструментов отметим: возобновляемые источники энергии и накопители электрической мощности; тарифное регулирование потребления, направленное на его сдвиг с пиковой зоны графика на другое время суток. Возобновляемые источники энергии могут применяться для замещения более дорогих генераторов. Но поставляемый ими объем мощности является случайной величиной, зависящей от погодных условий. В ситуации, когда необходимо гарантировать поставку энергии всем потребителям по заключенным договорам, при неблагоприятных условиях он должен замещаться резервными мощностями с обычными технологиями. Полезную роль в энергосистемах могут сыграть накопители электроэнергии, в частности литий-ионные батареи. Со стороны производителей хранение энергии позволяет уменьшить затраты на ее производство, сокращая время использования наиболее дорогих генераторов. Со стороны потребителей системы хранения помогают решить проблему сглаживания нагрузок, создавая возможность переноса части потребления с пиковых интервалов времени на другое время суток. Решению этой же проблемы способствуют дифференцированные по времени тарифы для потребителей. Выравнивание кривых суточной нагрузки потребителей снижает спрос на дорогие генерирующие мощности, затраты на передачу и распределение. Это изменение, однако, может снизить полезность потребления.

Базовые модели рынка электроэнергии получили развитие в ряде научных работ с учетом упомянутых новых факторов [1]. В [2] рассматривается задача формирования оптимального графика генерации с использованием различных цен на электроэнергию для потребителей на рынке

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00533 А).

на сутки вперед, а также системы хранения энергии. Целью является достижение оптимальных объемов производства и потребления с точки зрения минимизации затрат и выбросов. Отмечается также, что наличие большого количества доступных блоков с низкой генерирующей мощностью предпочтительнее, чем наличие одного блока с большой выходной мощностью. Хотя минимизация стоимости и минимизация выбросов являются противоречивыми целями, предлагается ответ, который оптимизирует векторный критерий. В [3] описывается аналогичная проблема минимизации затрат и выбросов в рамках стохастической модели и используется вероятностная концепция доверительного интервала для оценки неопределенности прогнозирования. В [4] рассматривается неэластичный спрос со стороны потребителей, который включает почасовые компоненты необходимого объема, а также сдвигаемую нагрузку, которую можно перераспределять в течение суток. При этом учитываются также затраты на перенос с наиболее выгодного времени на менее удобное. С помощью теории контрактов исследуется задача оптимизации работы энергосистемы за счет введения тарифов, побуждающих потребителей переносить сдвигаемую нагрузку на непиковое время. Отдельные задачи оптимизации энергетических систем различных масштабов с учетом данных инструментов рассматривались также в работах [5–8].

В настоящей статье разрабатывается математическая модель оптимального функционирования оптового рынка электроэнергии с точки зрения роста общественного благосостояния и рассматриваются соответствующие задачи оптимизации для различных частных случаев этой модели. Эта статья является развитием нашего исследования, представленного на конференции ОРТИМА 2020 [9]. В ней приводятся и обобщаются результаты, а также излагаются новые утверждения относительно регулирования рынка с накопителем энергии.

В разд. 1 описывается модель со сдвигаемыми нагрузками, тарифами и случайными факторами, влияющими на производство и потребление. В разд. 2 исследуется задача оптимизации благосостояния при наличии полной информации о значениях случайных факторов. В разд. 3 обсуждаются экономические механизмы, которые могут обеспечить оптимальное функционирование рынка, и решается задача об оптимальных тарифах с учетом вероятностной неопределенности. В разд. 4 результаты для детерминированной модели обобщаются для энергосистемы с накопителем электроэнергии. В разд. 5 решается задача об оптимальном управлении накопителем и расчете оптимальных тарифов с учетом случайных факторов. В заключение обсуждаются основные результаты и некоторые задачи на будущее.

1. Модель рынка и постановка задачи оптимизации. Поскольку потребности в электроэнергии существенно меняются в течение суток, рассматривается функционирование системы в зависимости от времени $t \in \overline{1, T}$, где t – период времени с примерно постоянными потребностями. В частности, в качестве t может выступать час суток. В рамках подобной модели можно учесть также зависимость потребления от сезона. В этом случае T отражает и время суток, и время года.

Опишем основные группы агентов (производителей и потребителей), действующих на рынке. Обозначим через A_1 множество производителей электроэнергии с традиционными технологическими возможностями. Каждый из них характеризуется функцией затрат $c_a(v)$ на обеспечение поставляемой мощности v . Функция предложения

$$S_a(p) = \underset{v \geq 0}{\text{Arg max}}(vp - c_a(v))$$

определяет оптимальный объем производства для данного периода в зависимости от цены p . При рассмотрении большого интервала планирования цена на сырье (газ, мазут и т.д.) может зависеть от t , в этом случае будет меняться соответственно и функция предложения S'_a .

Обозначим через A_2 множество производителей, использующих возобновляемые источники энергии. Для каждого из них поставляемый им объем мощности является случайной величиной, зависящей от погодных условий и времени. Он задается функцией $v'_a(\psi')$, где ψ' – случайный фактор. В ситуации, когда необходимо гарантировать поставку энергии всем потребителям по заключенным договорам, мощности этих производителей могут применяться для замещения более дорогих источников энергии, но при неблагоприятных условиях должны замещаться резервными мощностями с обычными технологиями. Переменные затраты для солнечных батарей и ветряных двигателей близки к нулю и не учитываются далее.

Перейдем к описанию потребления электроэнергии. Обозначим через B_1 множество потребителей, представляющих население, B_2 – множество промышленных потребителей. У каждого

потребителя $b \in B_1$ есть потребности, связанные с конкретным временем t (например, обогрев помещения и освещение), а также несколько видов потребностей $l = \overline{1, L}$, реализация которых может осуществляться в различное время (приготовление пищи, стирка и т.д.). В общем случае можно описать функции полезности потребителей следующим образом. Потребление для данного индивидуума $b \in B_1$ характеризуется вектором $\vec{v}_b = (v_{bl}^t, t = \overline{1, T}, l = \overline{0, L})$, где объем v_{b0}^t – это потребление, связанное с потребностями для данного часа. Функции $u_{b0}^t(v_{b0}^t, \Psi_b^t)$, $t = \overline{1, T}$, показывают полезность такого потребления в зависимости от случайного фактора Ψ_b^t , характеризующего погодные условия и другие случайные события, которые влияют на потребность в электроэнергии. Случайность в объемах потребления связана также с тем, что некоторые потребители имеют собственные источники генерации (например, солнечные батареи), а объемы выработки на них являются случайными. Объем $v_{bl}^t \geq 0$ определяет расход энергии, связанный с целью l в период t . Для каждого вида l полезность потребления зависит от суммарного объема V_{bl} , выделяемого на соответствующую цель l , с учетом затрат e_{bl}^t на перенос на менее удобное время. Таким образом, суммарная полезность потребителя принимает вид

$$U_b(\vec{v}_b, \Psi_b) = \sum_{t=1}^T u_{b0}^t(v_{b0}^t, \Psi_b^t) + \sum_{l=1}^L \left(u_{bl} \left(\sum_{t=1}^T v_{bl}^t \right) - \sum_{t=1}^T v_{bl}^t e_{bl}^t \right).$$

Всюду далее предполагается, что функции затрат и полезности соответствуют стандартным предположениям для микроэкономических моделей [10]: они монотонно возрастают, функции затрат выпуклые, функции полезности вогнутые.

Функция спроса $\bar{D}_b(\vec{p}, \Psi_b)$, где $\bar{D}_b = (D_{bl}^t, t = \overline{1, T}, l = \overline{0, L})$, показывает, какой объем потребитель b выбирает в каждый период времени t в зависимости от вектора цен $\vec{p} = (p^t, t = \overline{1, T})$ и значения случайного фактора. Вектор \bar{D}_b является решением следующей оптимизационной задачи:

$$\bar{D}_b(\vec{p}, \Psi_b) = \underset{\vec{v}_b}{\text{Arg max}} [U_b(\vec{v}_b, \Psi_b) - \sum_{t=1}^T p^t \sum_{l=0}^L v_{bl}^t]. \quad (1.1)$$

Для гладких функций полезности условия первого порядка для задачи (1.1) принимают вид

$$\frac{\partial u_{b0}^t}{\partial v_{b0}^t}(v_{b0}^t, \Psi_b^t) = p^t, \quad v_{bl}^t > 0 \Rightarrow \bar{t} \rightarrow \min_t (p^t + e_{bl}^t) = u'_{bl}(V_{bl}), \quad l = \overline{1, L}.$$

Рассмотрим поведение промышленных потребителей $b \in B_2$. Предприятие b выпускает товар с ценой p_b и характеризуется постоянными затратами электроэнергии D_{b0}^t (связанными с охраной, отоплением и т.д.) и производственной функцией $F_b^t(v_b^t, w_b^t)$, которая показывает, каков объем выпуска в данный часовой интервал в зависимости от объема потребляемой энергии v_b^t и труда w_b^t . В качестве примера рассмотрим предприятие с заданным набором производственных мощностей M_b . Каждая мощность $m \in M_b$ характеризуется максимальным объемом выпуска v_b^m товара и удельными затратами энергии v_b^m и труда ω_b^m на единицу выпускаемой продукции. (Для промышленных потребителей параметры обычно не зависят от t , а для сельскохозяйственного производства зависимость от t существенна.) Оптимальная загрузка производственных мощностей в период t в этом случае легко определяется по следующему алгоритму. Имеющиеся мощности упорядочиваются и подключаются в порядке возрастания суммарных удельных затрат $v_b^m p_e^t + \omega_b^m p_\omega^t$, где p_e^t , p_ω^t – цены на электроэнергию и на трудовые ресурсы в час t (цены существенно меняются в течение суток), пока цена на выпускаемый товар превышает удельные затраты: $p_b \geq v_b^m p_e^t + \omega_b^m p_\omega^t$. Таким образом, функция спроса для предприятия b в период t имеет вид

$$D_b^t(p_e^t, p_\omega^t) = \sum_{m: v_b^m p_e^t + \omega_b^m p_\omega^t \leq p_b} v_b^m v_b^m + D_{b0}^t. \quad (1.2)$$

Задача максимизации общего благосостояния для описанного рынка может быть сформулирована как оптимальный сбалансированный выбор объемов генерации и потребления мощно-

сти в течение интервала планирования $t = \overline{1, T}$. Оптимизируемый критерий – суммарная полезность потребителей мощности за вычетом затрат на генерацию. Множество допустимых стратегий характеризуется вектором объемов вырабатываемой мощности $\{v_a^t(\psi^t), a \in A_1 \cup A_2, t = \overline{1, T}\}$ и векторами объемов потребления для населения $\{v_b^t(\psi_b^t), b \in B_1, t = \overline{1, T}\}$ и для промышленных потребителей $\{v_b^t, b \in B_2, t = \overline{1, T}\}$, удовлетворяющих условиям баланса:

$$\forall t, \psi_t \in \Psi_t, (\psi_b^t \in \Psi_b^t; b \in B_1), \quad \sum_{a \in A_1 \cup A_2} v_a^t(\psi^t) = \sum_{b \in B_1} \left(v_{b0}^t(\psi_b^t) + \sum_{l=1}^L v_{bl}^t \right) + \sum_{b \in B_2} v_b^t.$$

Оптимизируемая функция общественного благосостояния имеет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{b \in B_1} \left(\sum_{t=1}^T u_{b0}^t(v_{b0}^t, \psi_b^t) + \sum_{l=1}^L \left(u_{bl} \left(\sum_{t=1}^T v_{bl}^t \right) - \sum_{t=1}^T v_{bl}^t e_{bl}^t \right) \right) + \\ & + \sum_{b \in B_2} \sum_{t=1}^T (F_b^t(v_b^t, w_b^t) p_b^t - p_w^t w_b^t) - \sum_{a \in A_1} \sum_{t=1}^T c_a(v_a^t(\psi^t)). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Переменные затраты для возобновляемых источников энергии не учитываются, так как они близки к нулю.

При постановке оптимизационной задачи необходимо учесть следующее. Во-первых, поставки потребителям обычно планируются заранее, до того, как станет известно значение случайного фактора $\psi(t)$. Аналогичным образом планируются объемы производства на генераторах из множества $a \in A_1 \setminus A_0$, кроме резервных генераторов $a \in A_0$. На практике эти величины определяются на рынке на сутки вперед. Для резервных генераторов объемы нагрузки задаются на балансирующем рынке.

Как оптимальным образом распределить генераторы между балансирующим рынком и рынком на сутки вперед? Для минимизации ожидаемых затрат на рынок на сутки вперед отбираются генераторы с минимальными издержками, а на балансирующий рынок оставляют генераторы с высокими издержками и используют их с учетом реализации случайного фактора. Технические характеристики реальных генераторов обычно позволяют осуществить такое распределение.

Далее рассмотрим несколько частных постановок задачи оптимизации благосостояния с тем, чтобы подробнее исследовать отдельные вопросы расчета оптимальных стратегий.

Из определения функций предложения $S_a, a \in A$, в случае, когда они однозначны, вытекает следующий результат.

Лемма 1. Пусть общий объем потребления V_B надо распределить между потребителями $b \in B$ с функциями полезности $u_b(v_b)$ так, чтобы максимизировать суммарную полезность. Тогда оптимальное распределение

$$\vec{v}_B^* \rightarrow \max_{\vec{v}} \sum_{b \in B} u_b(v_b)$$

при условии

$$\sum_{b \in B} v_b = V_B$$

вычисляется как $v_b^* = D_b(p(V_B))$, $b \in B$, где значение $p(V_B)$ определяется из условия

$$\sum_{b \in B} D_b(p(V_B)) = V_B$$

и функции спроса связаны с функциями полезности соотношениями

$$u_b(v_b) = \int_0^{v_b} D_b^{-1}(v) dv.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию Лагранжа для задачи максимизации суммарной полезности потребления:

$$L = \sum_{b \in B} u_b(v_b) + p \left(\sum_{b \in B} v_b - V_B \right).$$

Здесь p – множитель Лагранжа для ограничения. Выписывая необходимое условие первого порядка, получаем с учетом определения функции спроса, что для любого b выполнено: $v_b^* = D_b(p(V_B))$. Наконец, найдем $p(V_B)$ из ограничения для суммарного потребления.

Определим, исходя из леммы 1, агрегированные функции полезности текущего потребления населения:

$$u_{B_1}^t(v, \bar{\Psi}^t) = \sum_{b \in B_1} u_{b_0}^t(D_b^t(\bar{p}^t(v, \bar{\Psi}^t), \Psi_b^t), \Psi_b^t),$$

где

$$\forall t, b \int_0^{\bar{v}} (D_b^t)^{-1}(v, \Psi_b^t) dv = u_{b_0}^t(v, \Psi_b^t),$$

и промышленного потребления

$$u_{B_2}^t(v) = \sum_{b \in B_2} F_b^t(D_b^t(p^t(v), p_\omega^t)),$$

где функции спроса $D_b^t, b \in B$, заданы соотношением (1.2). Далее опустим зависимость от p_ω^t , считая эти цены заданными.

Лемма 2. Пусть задан требуемый общий объем генерации V_A для $a \in A$ в данный период. Тогда его оптимальное распределение

$$\bar{v}_A^* \rightarrow \min_{\bar{v}} \sum_{a \in A} c_a(v_a)$$

при условии

$$\sum_{a \in A} v_a = V_A$$

вычисляется как $v_a^* = S_a(p(V_A))$, $a \in A$, где значение $p(V_A)$ определяется из условия

$$\sum_{a \in A} S_a(p(V_A)) = V_A.$$

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1.

Определим, исходя из леммы 2, функцию затрат для множества предприятий A_1 :

$$c(v) = \sum_{a \in A_1} c_a(S_a(p(v))).$$

Аналогично установим связь между агрегированной функцией полезности потребления и функциями спроса.

Наконец, найдем общую функцию полезности текущего потребления

$$u_0^t(v, \bar{\Psi}^t) = u_{B_1}^t(D_{B_1}^t(p^t(v, \bar{\Psi}^t), \bar{\Psi}^t) + u_{B_2}^t(D_{B_2}^t(p^t(v, \bar{\Psi}^t))),$$

где цена $p^t(v, \bar{\Psi}^t)$ определяется из условия баланса:

$$D_{B_1}^t(p^t(v, \bar{\Psi}^t), \bar{\Psi}^t) + D_{B_2}^t(p^t(v, \bar{\Psi}^t)) = v.$$

Здесь

$$D_{B_1}^t(p^t(v, \bar{\Psi}^t), \bar{\Psi}^t) = \sum_{b \in B_1} D_b^t(p^t, \Psi_b^t), D_{B_2}^t(p^t(v, \bar{\Psi}^t)) = \sum_{b \in B_2} D_b^t(p^t).$$

2. Задача оптимизации при наличии полной информации. Начнем с наиболее простой постановки, когда предложение и спрос детерминированы. Заданы значения выпуска $v_{A_2}^t$, $t = \overline{1, T}$. Каждую пару $\bar{b} = (b, l)$ будем рассматривать как отдельного потребителя с функцией полезности

$$\bar{u}_{\bar{b}}(\bar{v}_{\bar{b}}) = u_{\bar{b}}\left(\sum_{t=1}^T v_{\bar{b}}^t\right) - \sum_{t=1}^T e_{\bar{b}}^t v_{\bar{b}}^t, \quad \bar{b} \in BL.$$

Задачу оптимизации функции благосостояния (1.3) перепишем как

$$\sum_{t=1}^T u_0^t(v_0^t) + \sum_{\bar{b} \in BL} \left[u_{\bar{b}}\left(\sum_{t=1}^T v_{\bar{b}}^t\right) - \sum_{t=1}^T e_{\bar{b}}^t v_{\bar{b}}^t \right] - \sum_{t=1}^T c\left(\sum_{\bar{b} \in BL \cup \{0\}} v_{\bar{b}}^t - v_{A_2}^t\right) \rightarrow \max_{\bar{v}=(\bar{v}_0, \bar{v}_{\bar{b}}, \bar{b} \in BL) \geq 0}. \quad (2.1)$$

Данной оптимизационной задаче можно сопоставить конкурентный рынок с множеством товаров $\Theta = \overline{1, T}$, где товар t соответствует энергии, потребляемой в период t . Каждый товар производится независимо от других, функция затрат имеет вид $c^t(v^t) = c(v^t - v_{A_2}^t)$, где $c()$ – указанная выше функция минимальных затрат для множества предприятий A_1 . Множество потребителей $\bar{B} = BO \cup BL$, где

$$BO = \bigcup_{t=1}^T BO_t,$$

множество BO_t характеризуется функцией спроса $D_0^t(p^t) = D_{B_1}^t(p^t) + D_{B_2}^t(p^t)$, соответствующей функции полезности u_0^t . Для этих потребителей полезность представляет только товар t . Для каждого потребителя $\bar{b} \in BL$ с функцией спроса $D_{\bar{b}}(\bar{p})$, удовлетворяющей следующим соотношениям:

$$(v_{\bar{b}}^t > 0) \Rightarrow p^t + e_{\bar{b}}^t = \operatorname{argmin}_{\tau \in \Theta} (p^\tau + e_{\bar{b}}^\tau) = u_{\bar{b}}^t\left(\sum_{\tau \in \Theta} v_{\bar{b}}^\tau\right) \quad \forall t \in \Theta, \quad \bar{b} \in BL, \quad \bar{v}_{\bar{b}} \in D_{\bar{b}}(\bar{p}), \quad (2.2)$$

т.е. каждый потребитель \bar{b} выбирает вектор потребления, максимизирующий его полезность с учетом затрат на покупку энергии.

Конкурентным равновесием данного рынка называется совокупность $(\bar{p}, \bar{v}_0, \bar{v}_{\bar{b}}, \bar{b} \in BL)$, включающая вектор равновесных цен $\bar{p} = (\bar{p}^t, t = \overline{1, T})$, векторы объемов потребления $\bar{v}_0 = (\bar{v}_0^t, t = \overline{1, T})$ для потребителей из BO и $\bar{v}_{\bar{b}} = (\bar{v}_{\bar{b}}^t, t = \overline{1, T})$ для каждого $\bar{b} \in BL$.

Помимо соотношения (2.2), эти векторы должны удовлетворять также следующим условиям:

$$\forall t \in \Theta \bar{v}_0^t = D_0^t(p^t), \quad \text{или} \quad u_0^t(\bar{v}_0^t) = p^t. \quad (2.3)$$

Другими словами, объем текущего потребления в период t определяется из равенства предельной полезности потребления и цены на энергию;

$$\forall t \in \Theta c'\left(\sum_{\bar{b} \in B} \bar{v}_{\bar{b}}^t - v_{A_2}^t\right) = \bar{p}^t, \quad (2.4)$$

т.е. в каждый период предельные затраты на производство равны цене энергии.

В [9] доказано следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. Задача (2.1) оптимизации общественного благосостояния является задачей выпуклого программирования. Множество ее решений соответствует множеству конкурентных равновесий указанного выше рынка, заданному соотношениями (2.2)–(2.4).

3. О выборе оптимальных тарифов. Как в условиях реальной экономики обеспечить реализацию оптимального или близкого к оптимальному состоянию рынка? Согласно теореме 1, в условиях совершенной конкуренции рационально действующие производители и потребители приведут рынок в состояние конкурентного равновесия, соответствующего максимуму общественного благосостояния. Возникает два вопроса: как обеспечить условия совершенной конкуренции и как побудить производителей к максимизации прибыли, а потребителей – к максимизации сюрплуса с учетом рыночных цен? Относительно первого вопроса существует обширная литература как

общая, так и специально посвященная рынку электроэнергии (см. [11]). Наряду с общими мерами антимонопольного регулирования можно использовать общедоступную информацию о предельных затратах на крупных генераторах, исходя из нормы расхода топлива и других ресурсов. Каждый случай вывода из эксплуатации крупного генератора, повлекший существенный скачок цены, должен быть предметом специального расследования антимонопольной службы. Подобные меры регулирования должны применяться также и к крупным потребителям. Все потребители со сдвигаемыми нагрузками должны покупать электроэнергию по ценам, эквивалентным рыночным. Таким образом, нужно вводить трех- или четырехставочные тарифы для населения, соответствующие равновесным ценам, и побуждать его устанавливать соответствующие счетчики. Эти меры обеспечили бы эффективность аукциона с единой ценой на каждый период t , определяемой как цена, балансирующая спрос и предложение на двустороннем аукционе поставщиков и потребителей. Однако этот вывод справедлив лишь в рамках рассматриваемой в этом пункте упрощенной детерминированной модели. Наличие случайных факторов существенно осложняет ситуацию. Перейдем к анализу их влияния. Вернемся к общей постановке (1.3). Случайные факторы действуют как на стороне предложения, так и на стороне спроса. Выбор объема производства на многих генераторах и у некоторых потребителей происходит заранее. Если, однако, предельные затраты таких генераторов заведомо ниже равновесной цены, а предельные полезности у потребителей заведомо выше, то их можно включить в оптимальные объемы генерации и потребления на первом этапе, соответствующем рынку на сутки вперед. Объемы производства и потребления для остальных агентов определяются после реализации случайных факторов, исходя из баланса спроса и предложения. Таким образом, в теории можно реализовать максимальное общественное благосостояние в зависимости от значений случайных факторов.

В реальности главное противоречие с этой идеальной картиной состоит в поведении массовых потребителей (населения). Они не могут ежедневно планировать графики потребления, исходя из текущих цен и случайных факторов, а определяют их на основе тарифов, устанавливаемых на длительное время (порядка года), с учетом средних значений случайных факторов, влияющих на их потребление. Сформулируем соответствующую оптимизационную задачу:

$$\vec{v}_b^* \rightarrow \max \left[\sum_{t=1}^T u_{b0}^t(v_{b0}^t) + \sum_{l=1}^L \left(u_{bl} \left(\sum_{t=1}^T v_{bl}^t \right) - \sum_{t=1}^T v_{bl}^t e_{bl}^t \right) - \sum_{t=1}^T \bar{p}_b^t \left(v_{b0}^t + \sum_{l=1}^L v_{bl}^t - \mathbb{E}\Psi_b^t \right) \right]. \quad (3.1)$$

Ограничимся случаем, когда во все периоды объем закупок каждого потребителя остается положительным, т.е. случайный фактор не обнуляет его спрос. Тогда оптимальные полные объемы потребления с учетом средних значений случайных факторов определяются в зависимости от тарифов \bar{p}_b так же, как в детерминированной задаче, согласно функциям спроса $D_b(\bar{p}_b)$, удовлетворяющим соотношениям, аналогичным детерминированному случаю (2.2), (2.3).

Рассмотрим задачу оптимизации общего благосостояния без промышленных потребителей. Соответствующие объемы производства являются случайными и определяются как

$$\sum_{b \in B_1} (\bar{D}_b(\bar{p}_b) - \bar{\Psi}_b).$$

Общественное благосостояние является случайной величиной следующего вида:

$$W(\bar{p}, \bar{\Psi}_b) = \sum_{b \in B} u_b(D_b(\bar{p})) - \sum_{t=1}^T c \left(\sum_{b \in B} D_b^t(\bar{p}) - \sum_b \Psi_b^t \right).$$

Рассмотрим задачу выбора тарифов, оптимизирующую математическое ожидание общественного благосостояния:

$$\mathbb{E} \left\{ \sum_{t=1}^T u_0^t(D_{B_0}^t(\bar{p})) + \sum_{bl \in BL} u_{bl} \left(\sum_{t=1}^T D_{bl}^t(\bar{p}) - \sum_{t=1}^T D_{bl}^t(\bar{p}) e_{bl}^t \right) - \sum_{t=1}^T c \left(D_{B_0}^t(\bar{p}) + \sum_{bl \in BL} D_{bl}^t(\bar{p}) - \Psi^t \right) \right\} \rightarrow \max_{\bar{p}}. \quad (3.2)$$

Сопоставим ей задачу оптимизации математического ожидания общественного благосостояния по объемам потребления:

$$\mathbb{E} \left\{ \sum_{t=1}^T u_0^t(v_{B_0}^t) + \sum_{bl \in BL} u_{bl} \left(\sum_{t=1}^T v_{bl}^t - \sum_{t=1}^T v_{bl \in BL}^t e_{bl}^t \right) - \sum_{t=1}^T c \left(v_{B_0}^t + \sum_{bl \in BL} v_{bl}^t - \Psi^t \right) \right\} \rightarrow \max_{\vec{v}}. \quad (3.3)$$

Теорема 2. Пусть \vec{v}^* – решение задачи (3.2), тогда оптимальные тарифы для задачи (3.2) имеют вид $\bar{p}^* = \mathbb{E} \bar{c}'(\vec{v}^* - \bar{\Psi})$.

Доказательство. Решение задачи (3.3) определяется из условий первого порядка, которые запишем как

$$\begin{aligned} u_0'(v_0^t) &= \mathbb{E}c'(v^t - \psi^t), \\ u_{bl}^t(v_{bl}^t) - e_{bl}^t &= \mathbb{E}c'(v^t - \psi^t). \end{aligned}$$

Оптимальное значение задачи (3.2) не превосходит оптимального значения задачи (3.3), так как вектор объемов, соответствующий вектору тарифов, – это частный случай произвольного выбора вектора объемов.

Рассмотрим оптимальную стратегию задачи (3.3) и выберем вектор тарифов, который указан в условии теоремы 2. Тогда из условий первого порядка (2.2), (2.3) получается, что значения функций спроса дают нам вектор \bar{v}^* . Рассмотрим значение функционала для задачи (3.2) при таком выборе тарифов. Значение функционала для задачи (3.2) при этом совпадет с оптимальным значением функционала для задачи (3.3). Таким образом, указанный вектор тарифов будет решением задачи (3.2).

Если функция предельных затрат c' линейная, то оптимальные тарифы принимают вид $\bar{p}^* = \bar{c}'(\bar{v}^*) - \bar{c}'(\mathbb{E}\bar{\psi})$. Как организовать рынок, реализующий оптимальное состояние? Регулятор не знает \bar{v}^* , но может наблюдать при данных тарифах \bar{p} объемы $\bar{v}(\bar{p})$ и средние предельные затраты $\mathbb{E}\bar{c}'(\bar{v}(\bar{p}) - \bar{\psi})$. Для повышения благосостояния вектор \bar{p} надо сдвигать в направлении $\mathbb{E}\bar{c}'(\bar{v}(\bar{p}) - \bar{\psi})$. Исследование конкретных вариантов итеративной оптимизации тарифов \bar{p} является актуальной задачей на будущее.

4. Модель рынка с накопителем энергии. В модели учитывается возможность использования крупного накопителя энергии для оптимизации функционирования системы. Характеристиками работы накопителя являются емкость, скорости и коэффициенты эффективности зарядки и разрядки. Следуя работам [2, 3], опишем их следующим образом. Обозначим через E^{mi} и E^{ma} соответственно минимальный и максимальный допустимый уровень заряда накопителя, V_{ch}^{ma} и V_{dis}^{ma} – максимальные скорости его зарядки и разрядки, η_{ch} и η_{dis} – коэффициенты эффективности зарядки и разрядки соответственно. Объем энергии, на который заряжается или разряжается батарея в период t , обозначим через v_{Bat}^t , положительная величина соответствует зарядке, v_{Bat}^0 отображает начальный заряд батареи. Стратегия управления накопителем в течение периода задается вектором $\bar{v}_{Bat} = (v_{Bat}^t, t = \overline{1, T})$. Допустимые управления удовлетворяют следующим ограничениям:

$$0 \leq -v_{Bat}^t / \eta_{dis} \leq V_{dis}^{ma} \quad \text{для разрядки;} \quad (4.1)$$

$$0 \leq \eta_{ch} v_{Bat}^t \leq V_{ch}^{ma} \quad \text{для зарядки;} \quad (4.2)$$

$$E^{mi} \leq \sum_{k=0}^t v_{Bat}^k \leq E^{ma} \quad \forall t = \overline{0, T}. \quad (4.3)$$

Исследуем сперва детерминированную модель максимизации общего благосостояния (см. разд. 2). В этом случае допустимые векторы \bar{v}_{Bat} должны удовлетворять также условию баланса заряда накопителя за период:

$$\sum_{t=1}^T v_{Bat}^t = 0. \quad (4.4)$$

Постановка задачи меняется в следующих отношениях: к стратегии добавляется вектор \bar{v}_{bat} , удовлетворяющий ограничениям (4.1)–(4.4), а при расчете необходимого объема производства в каждый час учитывается объем энергии, поставляемый или потребляемый накопителем.

Введем вектор $\bar{\eta} = (\eta^t(v_{Bat}^t), t(v_{Bat}^t) = \overline{1, T})$, где

$$\eta^t(v_{Bat}^t) = \begin{cases} \eta_{ch}, & \text{если } v_{Bat}^t > 0 \text{ (батарея заряжается);} \\ \frac{1}{\eta_{dis}}, & \text{если } v_{Bat}^t < 0 \text{ (батарея разряжается);} \\ 0, & \text{если } v_{Bat}^t = 0 \text{ (обмен энергией с батареей не происходит).} \end{cases}$$

В результате функция благосостояния принимает следующий вид:

$$\sum_{t=1}^T u_0^t(v_0^t) + \sum_{b \in BL} \left[u_b \left(\sum_{t=1}^T v_b^t \right) - \sum_{t=1}^T e_b^t v_b^t \right] - \sum_{t=1}^T c \left(\sum_{\bar{b} \in BL \cup \{0\}} v_b^t + \eta^t(v_{Bat}^t) v_{Bat}^t - v_{A_2}^t \right) \rightarrow \max_{\bar{v}=(\bar{v}_0, \bar{v}_b, \bar{v}_{Bat}, \bar{b} \in BL) \geq 0}. \quad (4.5)$$

Теорема 3. Задача (4.5) оптимизации общего благосостояния является задачей выпуклого программирования.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Введем ряд обозначений:

$$W(\bar{v}_0, \bar{v}_{BL}, \bar{v}_{Bat}) = \sum_{t=1}^T u_0^t(v_0^t) + \sum_{b \in BL} \left[u_b \left(\sum_{t=1}^T (v_b^t) \right) - \sum_{t=1}^T e_b^t v_b^t \right] - \sum_{t=1}^T c \left(\sum_{\bar{b} \in BL \cup \{0\}} v_b^t + \eta^t(v_{Bat}^t) v_{Bat}^t - v_{A_2}^t \right);$$

$$g_1^t(v_{Bat}^t) = \frac{v_{Bat}^t}{\eta_{dis}^t} + V_{dis}^{ma}, \quad \forall t = \overline{1, T}; \quad g_2^t(v_{Bat}^t) = V_{ch}^{ma} - \eta_{ch}^t v_{Bat}^t, \quad \forall t = \overline{1, T};$$

$$g_3^t(\bar{v}_{Bat}) = \sum_{k=0}^t v_{Bat}^k - E^{mi}, \quad \forall t = \overline{1, T}; \quad g_4^t(\bar{v}_{Bat}) = E^{ma} - \sum_{k=0}^t v_{Bat}^k, \quad \forall t = \overline{1, T}; \quad g_5(\bar{v}_{Bat}) = \sum_{t=1}^T v_{Bat}^t.$$

Неравенства $g_k^t(\dots) \geq 0, t = \overline{1, T}, k = \overline{1, 4}$, задают ограничения (4.1)–(4.3), накладываемые на батарею, а равенство $g_5(\bar{v}_{Bat}) = 0$ – ограничение (4.4).

Рассмотрим функцию Лагранжа

$$L(\bar{v}_0, \bar{v}_{BL}, \bar{v}_{Bat}, \bar{\lambda}) = W(\bar{v}_0, \bar{v}_{BL}, \bar{v}_{Bat}) + \sum_{t=1}^T (\lambda_1^t g_1^t(v_{Bat}^t) + \lambda_2^t g_2^t(v_{Bat}^t) + \lambda_3^t g_3^t(\bar{v}_{Bat}) + \lambda_4^t g_4^t(\bar{v}_{Bat})) + \lambda_5 g_5(\bar{v}_{Bat}).$$

Пусть функции полезности $u_{b_0}^t(v), u_{b_l}^t(v), b \in B_1, l = \overline{1, L}$, и функция издержек $c(v)$ непрерывно дифференцируемы. Тогда в силу того, что функции $g_k^t(\dots)$ непрерывно дифференцируемы и их частные производные не равны одновременно нулю, существуют такие числа $\lambda_k^t \geq 0$ и $\lambda_5 \in \mathbb{R}$, что в точке $M^* = (\bar{v}_{b_0}^*, \bar{v}_{BL}^*, \bar{v}_{Bat}^*)$, принадлежащей области ограничений, выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial v_0^t}(M^*) = 0 & \forall t = \overline{1, T}; \\ \frac{\partial L}{\partial v_b^t}(M^*) = 0 & \forall \bar{b} \in BL, \quad \forall t = \overline{1, T}; \\ \frac{\partial L}{\partial v_{Bat}^t}(M^*) = 0 & \forall t = \overline{0, T}. \end{cases}$$

Запишем указанные частные производные функции Лагранжа:

$$\begin{cases} u_0^t(v_0^t) - c' \left(\sum_{\bar{b} \in BL \cup \{0\}} v_b^t + \eta^t(v_{Bat}^t) v_{Bat}^t - v_{A_2}^t \right) \Big|_{(M^*)} = 0 & \forall t = \overline{1, T}; \\ u_b^t \left(\sum_{t=1}^T v_b^t \right) - e_b^t - c' \left(\sum_{\bar{b} \in BL \cup \{0\}} v_b^t + \eta^t(v_{Bat}^t) v_{Bat}^t - v_{A_2}^t \right) \Big|_{(M^*)} = 0 & \forall \bar{b} \in BL, \quad \forall t = \overline{1, T}; \\ \eta^t(v_{Bat}^t) c' \left(\sum_{\bar{b} \in BL \cup \{0\}} v_b^t + \eta^t(v_{Bat}^t) v_{Bat}^t - v_{A_2}^t \right) + (-\lambda_1^t + \lambda_2^t) \eta^t(v_{Bat}^t) - \\ - \sum_{k=t}^T \lambda_3^k + \sum_{k=t}^T \lambda_4^k - \lambda_5 \Big|_{(M^*)} = 0 & \forall t = \overline{1, T}. \end{cases}$$

Из последней системы следует, что

$$\eta^t(v_{Bat}^t)p^t = (\lambda_1^t - \lambda_2^t)\eta^t(v_{Bat}^t) + \left(\sum_{k=t}^T \lambda_3^k - \sum_{k=t}^T \lambda_4^k + \lambda_5 \right) \quad \forall t = \overline{1, T}. \quad (4.6)$$

Запишем условия дополняющей нежесткости к задаче (4.1)–(4.5):

$$\begin{cases} \lambda_1^t \left(V_{dis}^{ma} + \frac{v_{Bat}^t}{\eta_{dis}} \right) = 0 & \forall t = \overline{1, T}; \\ \lambda_2^t (V_{ch}^{ma} - \eta_{ch} v_{Bat}^t) = 0 & \forall t = \overline{1, T}. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь задачу (4.5) при условии, что емкость накопителя является достаточно большой, т.е. не будем учитывать ограничения (4.3). Тогда производные функции Лагранжа принимают вид

$$\begin{cases} u_0^t(v_0^t) - c' \left(\sum_{\bar{b} \in BL \cup \{0\}} v_{\bar{b}}^t + \eta^t(v_{Bat}^t)v_{Bat}^t - v_{A_2}^t \right) \Big|_{(M_0)} = 0 & \forall t = \overline{1, T}; \\ u_{\bar{b}}^t \left(\sum_{t=1}^T v_{\bar{b}}^t \right) - e_{\bar{b}}^t - c' \left(\sum_{\bar{b} \in BL \cup \{0\}} v_{\bar{b}}^t + \eta^t(v_{Bat}^t)v_{Bat}^t - v_{A_2}^t \right) \Big|_{(M_0)} = 0 & \forall \bar{b} \in BL, \quad \forall t = \overline{1, T}; \\ \eta^t(v_{Bat}^t)c' \left(\sum_{\bar{b} \in BL \cup \{0\}} v_{\bar{b}}^t + \eta^t(v_{Bat}^t)v_{Bat}^t - v_{A_2}^t \right) + (-\lambda_1^t + \lambda_2^t)\eta^t(v_{Bat}^t) - \lambda_5 \Big|_{(M_0)} = 0 & \forall t = \overline{1, T}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Из данных соотношений следует, что если батарея не разряжается на максимум в период t ($v_{Bat}^t/\eta_{dis} > -V_{dis}^{ma}$), то $\lambda_1^t = 0$, поскольку выражение в скобках при этом становится строго положительным. Аналогично если батарея не заряжается на максимум в период t , то $\lambda_2^t = 0$. Другими словами, в зависимости от того, заряжается или разряжается батарея, уравнение (4.6) принимает вид $p^t = -\lambda_2^t + \lambda_5/\eta_{ch}$ в периоды максимальной зарядки, $p^t = \lambda_1^t + \lambda_5\eta_{dis}$ в периоды максимальной разрядки. В общем случае из этих соотношений вытекает следующий результат.

Т е о р е м а 4. Оптимальная стратегия v^* для задачи (4.5) удовлетворяет следующим условиям: найдется такая цена $p^* = \lambda_5$, что:

- 1) если цена p^t в период t удовлетворяет соотношению $p^t > p^*\eta_{dis}$, то батарея разряжается на максимальный объем энергии: $v_{Bat}^t = -V_{dis}^{ma}\eta_{dis}$;
- 2) если $p^t = p^*\eta_{dis}$, то батарея разряжается и объем разряда удовлетворяет соотношениям (4.1);
- 3) если $p^*/\eta_{ch} < p^t < p^*\eta_{dis}$, то батарея не заряжается и не разряжается: $v_{Bat}^t = 0$;
- 4) если $p^t = p^*/\eta_{ch}$, то батарея заряжается и объем заряда удовлетворяет соотношениям (4.2);
- 5) если $p^t < p^*/\eta_{ch}$, то батарея заряжается на максимальный объем энергии: $v_{Bat}^t = V_{ch}^{ma}/\eta_{ch}$.

Что касается оптимального регулирования оптового рынка, то последний результат означает следующее. Если цены на энергию в каждый период соответствуют предельным затратам производителей, то оптимальное управление накопителем энергии соответствует стратегии максимизации его прибыли от перепродажи энергии. Пороговое значение p^* выбирается так, чтобы выполнялся баланс покупок и продаж в плановом интервале.

Значение p^* однозначно определяет решение системы уравнений (4.7). Оптимальное решение \bar{v}^* , найденное из этой системы, должно также удовлетворять условию (4.4). Следующая теорема устанавливает связь между значением p^* и суммарным объемом энергии $\sum_{t=1}^T v_{Bat}^t$, обмениваемым с батареей, и открывает возможности для поиска численного решения оптимизационной задачи путем варьирования p^* .

Теорема 5. Суммарный объем энергии $\sum_{t=1}^T v_{Bat}^t$, определяемый из системы (4.7), монотонно зависит от p^* .

Доказательство. При заданных тарифах \bar{p} оптимальные объемы потребления задаются функциями спроса $D^b(\bar{p}, t)$. Оптимальные стратегии $\bar{v}_{Bat}^*(\bar{\Psi}, p^*)$ определяются, согласно теореме 4 следующим образом. Пусть

$$v^t := \sum_b (v_b^t - \psi^t).$$

Если $p^*/\eta_{ch} \leq c'(v^t) \leq p^*\eta_{dis}$, то $v_{Bat}^t = 0$. Если $c'(v^t) \leq p^*/\eta_{ch}$, то определим v_{Bat}^{*t} из условия $c'(v^t + \eta_{ch}v_{Bat}^t) = p^*/\eta_{ch}$, если $v_{Bat}^{*t} \leq V_{ch}^{ma}$, иначе $v_{Bat}^{*t} := V_{ch}^{ma}$.

Аналогичные соотношения можно получить и при разрядке батареи. Таким образом, в силу вогнутости функции издержек, видно, что при увеличении значения p^* объем энергии v_{Bat}^{*t} как минимум не убывает, а иногда – строго возрастает.

Полученное соотношение справедливо для любого момента времени t . А это означает, что суммарный объем энергии, закачиваемый в батарею, монотонно растет вместе с p^* и стандартные методы могут быть использованы для поиска решения, удовлетворяющего (4.4).

5. Оптимальное управление батареями с учетом случайных факторов. Рассмотрим задачу оптимизации математического ожидания функции полезности потребителя b при заданных тарифах \bar{p}_b^* , $t = \overline{1, T}$:

$$\bar{v}_b^* \rightarrow \max \left[\sum_{t=1}^T u_{b0}^t(v_{b0}^t) + \sum_{l=1}^L \left(u_{bl} \left(\sum_{t=1}^T v_{bl}^t \right) - \sum_{t=1}^T v_{bl}^t e_{bl}^t \right) - \sum_{t=1}^T \bar{p}_b^t \left(v_{b0}^t + \sum_{l=1}^L v_{bl}^t - \mathbb{E}\Psi_b^t \right) \right]. \quad (5.1)$$

Ограничимся случаем, когда во все периоды объем закупок каждого потребителя остается положительным, т.е. случайный фактор не обнуляет его спрос. Тогда оптимальные полные объемы потребления с учетом средних значений случайных факторов определяются в зависимости от тарифов \bar{p}_b так же, как в детерминированной задаче, согласно функциям спроса $D_b(\bar{p}_b)$.

В принятых условиях функция общественного благосостояния принимает вид

$$W(\bar{p}, \Psi_b^t) = \sum_{\bar{b} \in BL \cup \{0\}} u_{\bar{b}}(D_{\bar{b}}(\bar{p})) - \sum_{t=1}^T c \left(\sum_b D_b^t(\bar{p}) + \eta^t(\bar{\Psi})v_{Bat}^t(\bar{\Psi}) - \psi^t \right), \quad (5.2)$$

где $\psi^t = \sum_b \psi_b^t$, $\eta^t(\bar{\Psi}) = \eta^t(v_{Bat}^t(\bar{\Psi}))$.

Функция издержек $c()$ была определена ранее, согласно лемме 1. Рассмотрим две задачи оптимизации математического ожидания общественного благосостояния. Первая – оптимизация с помощью регулирования тарифов на электроэнергию и стратегии управления батареями:

$$\max_{\bar{p}, \bar{v}_{Bat}(\bar{\Psi})} \mathbb{E} \left\{ \sum_{t=1}^T u_{b0}^t(D_{B_0}^t(\bar{p})) + \sum_{bl} \left(u_{bl} \left(\sum_{t=1}^T D_{bl}^t(\bar{p}) \right) - \sum_{t=1}^T D_{bl}^t(\bar{p}) e_{bl}^t \right) - \sum_{t=1}^T c(D_{B_0}^t(\bar{p}) + \sum_{bl} D_{bl}^t(\bar{p}) + \eta^t(\bar{\Psi})v_{Bat}^t(\bar{\Psi}) - \psi^t) \right\}. \quad (5.3)$$

Вторая – оптимизация по объемам потребления и стратегии управления батареями:

$$\max_{\bar{v}, \bar{v}_{Bat}(\bar{\Psi})} \mathbb{E} \left\{ \sum_{t=1}^T u_{b0}^t(v_{B_0}^t) + \sum_{bl} \left(u_{bl} \left(\sum_{t=1}^T v_{bl}^t \right) - \sum_{t=1}^T v_{bl}^t e_{bl}^t \right) - \sum_{t=1}^T c \left(v_{B_0}^t + \sum_{bl} v_{bl}^t + \eta^t(\bar{\Psi})v_{Bat}^t(\bar{\Psi}) - \psi^t \right) \right\}. \quad (5.4)$$

Для задач (5.3), (5.4) справедлив аналог теоремы 2.

Теорема 6. Пусть \bar{v}^* , $\bar{v}_{Bat}^*(\bar{\Psi})$ – решение задачи (5.4), тогда оптимальные тарифы для задачи (5.3) имеют вид $\bar{p}^* = \mathbb{E} \bar{c}'(\bar{v}^* + \bar{\eta}(\bar{\Psi})\bar{v}_{Bat}^*(\bar{\Psi}) - \bar{\Psi})$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.

Рассмотрим теперь стратегию оптимального управления батареями. Предположим сначала, что нам известны будущие значения случайного фактора. Данная постановка задачи аналогична детерминированной – так же, как и в детерминированном случае, в такой постановке можно определить пороговое значение $p^*(\bar{\Psi})$, относительно которого на основании текущих цен определяется оптимальное управление батареями:

1) если цена p^t в период t удовлетворяет соотношению $p^t > p^*(\bar{\Psi})\eta_{dis}$, то батарея разряжается на максимальный объем энергии: $v_{Bat}^t = -V_{dis}^{ma}\eta_{dis}$;

2) если $p^t = p^*(\bar{\Psi})\eta_{dis}$, то батарея разряжается и объем разряда удовлетворяет соотношениям (4.1);

3) если $p^*(\bar{\Psi})/\eta_{ch} < p^t < p^*(\bar{\Psi})\eta_{dis}$, то батарея не заряжается и не разряжается: $v_{Bat}^t = 0$;

4) если $p^t = p^*(\bar{\Psi})/\eta_{ch}$, то батарея заряжается и объем заряда удовлетворяет соотношениям (4.2);

5) если $p^t < p^*(\bar{\Psi})/\eta_{ch}$, то батарея заряжается на максимальный объем энергии: $v_{Bat}^t = V_{dis}^{ma}/\eta_{ch}$.

Для этого случая также справедлив аналог теоремы 5: суммарный объем энергии $\sum_{t=1}^T v_{Bat}^t(\bar{\Psi})$, обмениваемый с батареей, монотонно зависит от p^* . Тогда пороговое значение p^* может быть определено из условия

$$\sum_{t=1}^T v_{Bat}^t(\bar{\Psi}) = 0.$$

Однако в реальности мы обычно не знаем будущих значений случайных факторов. Возможные стратегии описываются вектор-функциями $(v_{Bat}^t(\bar{\Psi}^t), t = \overline{1, T}) := \tilde{v}_{Bat}(\bar{\Psi})$, где $\bar{\Psi}^t = (\psi^1, \dots, \psi^t)$. Указанное выше оптимальное управление батареями не удастся реализовать в этом классе, поскольку для расчета $p^*(\bar{\Psi})$ необходимо знать заранее вектор $\bar{\Psi}^T$.

Предложенный метод расчета оптимальной стратегии удастся применить, если ослабить ограничение (4.4) на баланс обмена энергией с батареей, заменив его условием

$$\mathbb{E} \sum_{t=1}^T v_{Bat}^t(\bar{\Psi}^t) = 0. \quad (5.5)$$

В этом случае пороговое значение p^* не зависит от $\bar{\Psi}$, оптимальное управление батареями рассчитывается по p^* и текущим значениям случайного фактора, как описано в доказательстве теоремы 5, а (5.5) монотонно зависит от p^* , поскольку для каждого $\bar{\Psi} \sum_{t=1}^T v_{Bat}^{*t}$ монотонно зависит от p^* , согласно теореме 5.

В итоге получаем следующую теорему.

Т е о р е м а 7. Решение $(\bar{p}^*, \tilde{v}_{Bat}^*(\bar{\Psi}))$ задачи оптимизации общего благосостояния (5.3) по стратегии $(\bar{p}^*, \tilde{v}_{Bat}(\bar{\Psi}))$ при ограничениях (4.1), (4.2), (5.5) обладает следующими свойствами: оптимальные тарифы удовлетворяют уравнению $\bar{p}^* = \mathbb{E} \bar{c}'(\bar{v}^* + \bar{\eta} \tilde{v}_{Bat}^*(\bar{\Psi}) - \bar{\Psi})$, где \bar{v}^* – вектор оптимальных объемов потребления, являющийся решением задачи (5.4) при тех же ограничениях, а оптимальная стратегия управления батареями $v_{Bat}^*(v^{*t}, \psi^t, p^*)$ рассчитывается, согласно теореме 5, при этом пороговое значение цены p^* определяется из условия (5.5).

Эта теорема имеет ясную интерпретацию с точки зрения оптимального регулирования рынка: тарифы для потребителей надо приближать к средним значениям предельных затрат на производство в соответствующее время; оптимальное управление батареями осуществляется на основе оптовых цен балансирующего рынка и соответствует максимизации ее ожидаемой прибыли от перепродажи энергии (при совершенной конкуренции, т.е. без использования рыночной власти накопителя). В этих условиях конкурентное равновесие рынка обеспечит максимум общего благосостояния.

Отметим, что указанное ослабление ограничения (4.4) приводит к большим случайным изменениям суммарного заряда батареи. Для реализации указанного управления при любых возможных случайных факторах потребуется большая мощность.

Заключение. В работе описана математическая модель функционирования оптового рынка электроэнергии с учетом особенностей потребления населения и промышленных потребителей и с применением новых экономических и технических инструментов. Исследованы задачи оптимизации общественного благосостояния для локальных рынков, где используются возобновляемые источники энергии, тарифное регулирование и накопители электрической мощности. Доказана выпуклость этих задач и получены условия первого порядка для расчета их решений. Исходя из этих условий, мы также обсудили экономические механизмы, которые могут обеспечить оптимальное функционирование таких рынков.

Представляет интерес исследование задач долгосрочного развития электроэнергетики с учетом указанных новых инструментов. Модели оптимального долгосрочного развития для традиционных рынков рассматривались в [12, 13]. Их обобщение в контексте настоящей работы является важной задачей для будущих исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Давидсон М.Р., Догадушкина Ю.В., Крейнс Е.М. и др. Математическая модель конкурентного оптового рынка электроэнергии в России // Изв. РАН. ТиСУ. 2004. № 3. С. 72–83.
2. Nazari A.A., Keypour R. Participation of Responsive Electrical Consumers in Load Smoothing and Reserve Providing to Optimize the Schedule of a Typical Microgrid // Energy Systems. 2019. V. 11. P. 885–908.
3. Motevasel M., Seifi A. Expert Energy Management of a Micro-grid Considering Wind Energy Uncertainty // Energy Convers Manage. 2013. V. 83. P. 58–72.
4. Aizenberg N., Stashkevich E., Voropai N. Forming Rate Options for Various Types of Consumers in the Retail Electricity Market by Solving the Adverse Selection Problem // Intern. J. Public Administration. 2019. V. 42. P. 1349–1362.
5. Gellings C.W. The Concept of Demand-side Management for Electric Utilities // Proc. IEEE. 1985. V. 73. № 10. P. 1468–1570.
6. Conejo J., Morales J.M., Baringo L. Real Time Demand Response Model // IEEE Transactions on Smart Grid. 2010. V. 1. № 3. P. 236–242.
7. Samadi P., Mohsenian-Rad H., Schober R., Wong V.W. Advanced Demand Side Management for the Future Smart Grid Using Mechanism Design // IEEE Transactions on Smart Grid. 2012. V. 3. № 3. P. 1170–1180.
8. Yaagoubi N., Mouftan H.T. User-aware Game Theoretic Approach for Demand Management // IEEE Transactions on Smart Grid. 2015. V. 6. № 2. P. 716–725.
9. Vasin A.A., Grigoryeva O.M. On Optimizing Electricity Markets Performance // Optimization and Applications. 2020. V. 12422. P. 272–286.
10. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.
11. Dolmatova M., Kozlovskiy D., Khrustaleva O., Sultanova T., Vasin A. Market Parameters Dependent Indices for Competition Evaluation in Electricity Market // Electric Power Systems Research. 2021. V. 190. P. 1–6.
12. Vasin A.A., Grigoryeva O.M., Tsyganov N.I. Optimization of an Energy Market Transportation System // Doklady Mathematics. 2017. V. 96. № 1. P. 1–4.
13. Vasin A.A., Grigoryeva O.M., Tsyganov N.I. Energy Markets: Optimization of Transmission Networks // Intern. J. Public Administration. 2019. V. 42. P. 1311–1322.

**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ**

УДК 519.872

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ С ГЕТЕРОГЕННЫМИ
СЕРВЕРАМИ И МГНОВЕННОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ**

© 2021 г. С. Г. Алиева^а, А. З. Меликов^{а,*}, М. О. Шахмалыев^а

^а *Институт систем управления, Национальная академия наук Азербайджана, Баку, Азербайджан*

^{*}*e-mail: agassi.melikov@gmail.com*

Поступила в редакцию 10.09.2019 г.

После доработки 17.11.2020 г.

Принята к публикации 25.01.2021 г.

Изучается система с гетерогенными серверами, пуассоновским потоком с Марковской модуляцией и мгновенной обратной связью. Обслуживание первичных заявок выполняется в высокоскоростном сервере, и после завершения обслуживания каждая заявка, согласно схеме Бернулли, либо покидает систему, либо требует повторного обслуживания. Повторные заявки обслуживаются в медленном сервере, при этом эти заявки после завершения обслуживания также, согласно схеме Бернулли, либо покидают систему, либо требуют повторного обслуживания в медленном сервере. Если в момент поступления первичной заявки длина очереди таких заявок превышает некоторое пороговое значение и медленный сервер свободен, то поступившая заявка, согласно схеме Бернулли, либо направляется в медленный сервер, либо присоединяется в свою очередь. Считается, что длины очередей перед каждым сервером являются бесконечными величинами. Построена адекватная математическая модель изучаемой системы в виде трехмерной цепи Маркова с бесконечным пространством состояний. Получено условие эргодичности данной цепи, предложен приближенный алгоритм расчета стационарных вероятностей состояний и показана его высокая точность. Приводятся результаты численных экспериментов.

DOI: 10.31857/S0002338821030021

Введение. При построении математических моделей коммуникационных процессов, а также процессов, связанных с обработкой деталей в производственных системах, процессов управления запасами и т.д., возникает необходимость учета повторной обработки некоторых заявок. Так, во многих системах передачи информации ошибочно переданные данные (пакеты, кадры и т.д.) передаются повторно, так как эффективность работы таких систем зачастую оценивается достоверностью передачи данных. Если выпускаемые детали имеют определенные дефекты, то и в производственных системах в некоторых ситуациях требуется их повторная обработка.

Учет эффекта повторения обслуживания заявок приводит к необходимости использования моделей систем с обратной связью (feed back queue, (FBQ)). Такие модели впервые были введены в [1, 2]. Следует различать системы с мгновенной обратной связью (instantaneous feed back queue (IFBQ)), где повторение происходит сразу после завершения обслуживания заявки, и системы с отсроченной обратной связью (delayed feed back queue (DFBQ)), в которых повторение запроса для обслуживания происходит после определенного положительного времени.

Современное состояние проблемы исследования моделей FBQ подробно изложено в [3], поэтому здесь не будем останавливаться на изложении известных в этом направлении результатов. В указанной работе отмечается, что в подавляющем большинстве публикаций изучаются модели FBQ без буфера для ожидания заявок. Вместе с тем во многих системах организуются буфера для хранения ожидающих в очереди заявок. Поэтому для адекватного описания работы таких систем возникает необходимость изучения моделей FBQ с очередями.

Исходя из вышеизложенных фактов, в настоящей статье исследуется модель IFBQ с очередями. Отметим, что в доступной литературе мало работ, которые посвящены изучению таких моделей, например [4–13]. Простые одномерные модели IFBQ с одним сервером и нетерпеливыми заявками при использовании различных механизмов удержания их в очереди в моменты завершения допустимого времени ожидания, рассмотрены в [4–10]. Модель с двумя гетерогенными серверами и ограниченной очередью, в которых поступающие заявки с известными вероятно-

стями назначаются в сервера, приведена в [11]. Отметим, что в [4–11] не различаются исходные заявки и заявки, которые требуют повторного обслуживания. Поэтому с помощью предложенного в них подхода невозможно найти распределение числа заявок, которые требуют повторного обслуживания. Более сложная модель IFBQ с одним сервером и ограниченной очередью изучена в [12], где входящий поток является МАР-поток (Markov arrival process (МАР)) и время обслуживания заявок имеет функцию распределения фазового типа. Показано, что математической моделью системы будет некоторая четырехмерная цепь Маркова (ЦМ) и вычислены характеристики системы. В недавней публикации [13] рассмотрена модель IFBQ с одним сервером и двумя пуассоновскими потоками заявок. Считается, что для заявок каждого типа имеются отдельные буфера бесконечного размера, при этом лишь заявки высокого приоритета могут, согласно схеме Бернулли, повторять запросы для обслуживания. Предполагается, что заявки, которые требуют повторного обслуживания, направляются в очередь заявок низкого приоритета, при этом изучаются модели с относительными и абсолютными приоритетами. В [12, 13] для исследования предложенных моделей используется матрично-геометрический метод [14].

Анализ доступных работ показал, что они базируются на ряде допущений. Основными из них являются следующие: (1) первичные и повторные заявки идентичны по всем показателям; (2) заявки могут лишь один раз повторять запрос для обслуживания; (3) заявки обоих типов передаются единым сервером.

Однако во многих реальных системах эти допущения не выполняются, поэтому в целях повышения адекватности моделей в настоящей статье изучается IFBQ, в которой указанные выше допущения не выполняются. При этом считается, что сервера специализированы по типу заявок и они являются гетерогенными, т.е. имеют различные скорости обслуживания (ранее системы с гетерогенными серверами при отсутствии обратной связи были изучены во многих работах, см., например, [15] и список ее литературы). Кроме того, в отличие от стандартного допущения о том, что входящий поток является пуассоновским, здесь изучается модель с пуассоновским потоком с Марковской модуляцией (Markov modulated Poisson process, ММРР-поток) [16]. Отметим, что для изучения предложенной модели используется метод иерархического укрупнения состояний многомерных ЦМ [17]. Применение данного метода позволяет разработать эффективные численные процедуры расчета характеристик представленной системы.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 1 описана изучаемая система и дана постановка задачи. В разд. 2 приведена математическая модель системы в виде ЗДМС и определена ее производящая матрица. Получено условие эргодичности модели и разработан приближенный метод расчета стационарных вероятностей состояний и характеристик системы. В разд. 3 приводятся результаты численных экспериментов.

1. Описание системы с мгновенной обратной связью и постановка задачи. Структурная схема изучаемой системы показана на рис. 1. На вход одноканальной системы с неограниченным буфером поступает ММРР-поток с параметрами (Σ, Λ) , где $\Sigma = \|\sigma_{ij}\|$ – производящая матрица (ПМ) ЦМ с $N > 1$ возможными состояниями, которая управляет интенсивностью входящего потока, а вектор $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ задает значения интенсивностей входящего потока. Это означает, что σ_{ij} определяет интенсивность перехода из состояния i в состояние j , где

$$j \neq i; \quad \sigma_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N \sigma_{ij}.$$

Считается, что когда ЦМ находится в состоянии n , интенсивность входящего извне потока равна $\lambda_n, n = \overline{1, N}$, и с изменением состояния управляющей ЦМ мгновенно изменяется и интенсивность входящего потока.

Система содержит два сервера: высокоскоростной (F-сервер) и низкоскоростной (S-сервер), при этом p -заявки, как правило, обслуживаются в F-сервере. После завершения обслуживания p -заявка, согласно схеме Бернулли, либо с вероятностью α покидает систему, либо с вероятностью $1 - \alpha$ направляется обслуживаться в S-сервере. Заявки, которые требуют повторного обслуживания (вторичные заявки, s -заявки), могут образовывать очередь перед S-сервером. Считается, что s -заявки многократно могут потребовать повторного обслуживания, т.е. после завершения обслуживания каждая s -заявка независимо от других заявок, согласно схеме Бернулли, либо с вероятностью β окончательно покидает систему, либо с дополнительной вероятностью $1 - \beta$ мгновенно требует повторного обслуживания в S-сервере. Времена обслуживания заявок в

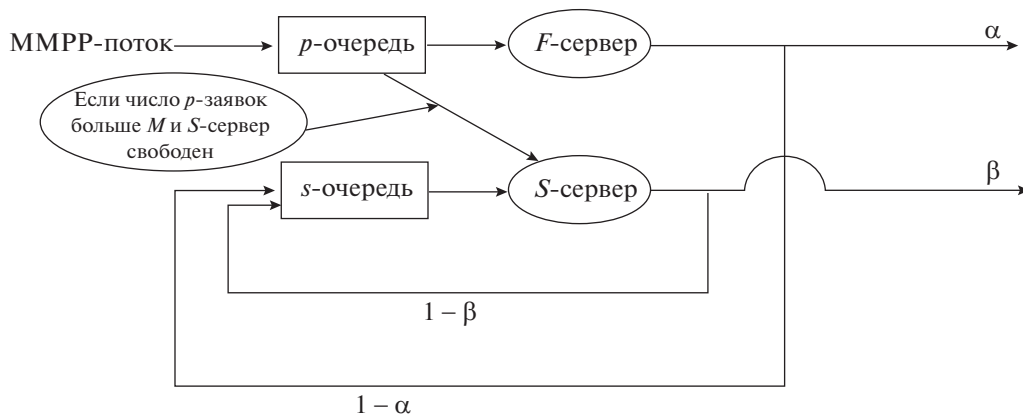


Рис. 1. Структурная схема системы

F-сервере и в S-сервере являются случайными величинами, которые имеют экспоненциальное распределение с параметрами μ_f и μ_s соответственно, при этом $\mu_s < \mu_f$.

Если в момент поступления p -заявки число заявок в очереди перед F-сервером выше определенного порогового значения $M > 0$ и при этом S-сервер не занят, то поступившая p -заявка либо с вероятностью σ направляется для обслуживания в S-сервер, либо с дополнительной вероятностью $1 - \sigma$ она присоединяется в “свою” очередь. Обслуживание разнотипных заявок и изменения состояний ЦМ, которая управляет интенсивностью входящего потока, являются независимыми друг от друга случайными процессами.

Задача состоит в нахождении совместного распределения состояний MMPP-потока и числа заявок каждого типа в системе. Решение этой задачи позволит найти характеристики системы – среднее число p -заявок (L_p) и s -заявок (L_s) в системе; интенсивность p -заявок, которые обслуживаются в S-сервере (R_{ps}).

2. Расчет стационарного распределения системы и ее характеристики. Состояние системы определяется трехмерным вектором (n, k, r) , где n – состояние управляющей интенсивностью входящего потока ЦМ, k – суммарное число заявок перед F-сервером и заявки в нем, r – суммарное число заявок перед S-сервером и заявки в нем. Тогда пространство состояний этой трехмерной ЦМ определяется как декартово произведение трех множеств:

$$E = \{\overline{1, N}\} \times \{0, 1, \dots, \} \times \{0, 1, \dots, \}. \quad (2.1)$$

Интенсивность перехода из состояния (n, k, r) в состояние (n', k', r') обозначим через $q((n, k, r), (n', k', r'))$. Эти величины вычисляются следующим образом:

- переходы $(n, k, r) \rightarrow (n', k, r)$, $n' \neq n$ осуществляются с интенсивностью $\sigma_{n, n'}$ при изменении состояния MMPP-потока;
- переходы $(n, k, r) \rightarrow (n, k + 1, r)$, $r > 0$, и $(n, k, 0) \rightarrow (n, k + 1, 0)$, $k < M$, осуществляются с интенсивностью λ_n при поступлении p -заявки;
- переходы $(n, k, 0) \rightarrow (n, k + 1, 0)$, $k \geq M$, осуществляются с интенсивностью $\lambda_n(1 - \sigma)$ при поступлении p -заявки;
- переходы $(n, k, 0) \rightarrow (n, k + 1, 1)$, $k \geq M$, осуществляются с интенсивностью $\lambda_n\sigma$ при поступлении p -заявки;
- переходы $(n, k, r) \rightarrow (n, k - 1, r)$, $k > 0$, осуществляются с интенсивностью $\mu_f\alpha$ при завершении обслуживания p -заявки в F-сервере и ухода ее из системы;
- переходы $(n, k, r) \rightarrow (n, k - 1, r + 1)$, $k > 0$, осуществляются с интенсивностью $\mu_f(1 - \alpha)$ при завершении обслуживания p -заявки в F-сервере и возвращении в S-сервер для повторного обслуживания;

– переходы $(n, 0, r) \rightarrow (n, 0, r - 1)$, $r > 0$, осуществляются с интенсивностью $\mu_s \beta$ при завершении обслуживания заявки в S-сервере.

Следовательно, положительные элементы ПМ данной трехмерной ЦМ определяются из следующих соотношений:

$$q((n, k, r), (n', k', r')) = \begin{cases} \sigma_{nn'}, & \text{если } n' \neq n, \quad k' = k, \quad r' = r, \\ \lambda_n, & \text{если } r > 0, \quad n' = n, \quad k' = k + 1, \quad r' = r \\ \text{или } k < M, \quad r = 0, \quad n' = n, \quad k' = k + 1, \quad r' = r, \\ \lambda_n \sigma, & \text{если } r = 0, \quad n' = n, \quad k' = k, \quad r' = 1, \\ \lambda_n (1 - \sigma), & \text{если } k \geq M, \quad r = 0, \quad n' = n, \quad k' = k + 1, \quad r' = r, \\ \mu_f \alpha, & \text{если } k > 0, \quad n' = n, \quad k' = k - 1, \quad r' = r, \\ \mu_f (1 - \alpha), & \text{если } k > 0, \quad n' = n, \quad k' = k - 1, \quad r' = r + 1, \\ \mu_s \beta, & \text{если } k = 0, \quad r > 0, \quad n' = n, \quad k' = 0, \quad r' = r - 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Стационарную вероятность состояния $(n, k, r) \in E$ обозначим через $p(n, k, r)$. Условие существования стационарного режима получено ниже.

Нахождения вероятностей состояний являются достаточным для вычисления характеристики изучаемой системы. Так, среднее число p -заявок (L_p) и s -заявок (L_s) в системе определяются как математическое ожидание соответствующих случайных величин:

$$L_p = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{r=0}^{\infty} p(n, k, r); \quad (2.3)$$

$$L_s = \sum_{n=1}^N \sum_{r=1}^{\infty} r \sum_{k=0}^{\infty} p(n, k, r). \quad (2.4)$$

Интенсивность p -заявок, которые обслуживаются в S-сервере (R_{ps}), определяется как

$$R_{ps} = \sigma \sum_{n=1}^N \lambda_n \sum_{k=M}^{\infty} p(n, k, 0). \quad (2.5)$$

Использование метода многомерных производящих функций для нахождения вероятностей состояний сталкивается с рядом методологических и вычислительных трудностей. Исходя из этого, ниже приводится альтернативный метод решения данной задачи, основанный на иерархическом методе фазового укрупнения состояний многомерных ЦМ [17].

Предложенный метод можно корректно применить для систем, в которых ММРР-поток является инерционным, т.е. в достаточно больших интервалах времени интенсивность входящего потока является постоянной величиной.

При выполнении указанного выше допущения рассмотрим следующее расщепление пространства состояний (2.1):

$$E = \bigcup_{n=1}^N E_n, \quad E_n \cap E_{n'} = \emptyset, \quad \text{если } n \neq n', \quad (2.6)$$

где $E_n = \{(n, k, r) \in E: k = 0, 1, \dots; r = 0, 1, \dots\}$, $n = \overline{1, N}$.

Все состояния из класса E_n объединяются в одно укрупненное состояние $\langle n \rangle$, и на основе расщепления (2.6) в пространстве состояний (2.1) определяется функция укрупнения $U_1(n, k, r) = \langle n \rangle$, $(n, k, r) \in E_n$. Множество укрупненных состояний $\langle n \rangle$ обозначим через $\Omega_1 = \{\langle n \rangle: n = \overline{1, N}\}$. Тогда приближенные значения вероятностей состояний исходной модели, обозначаемые через $\tilde{p}(n, k, r)$, определяются как (см. [17])

$$\tilde{p}(n, k, r) = \rho_n(k, r) \pi_1(\langle n \rangle), \quad (2.7)$$

где $\rho_n(k, r)$ – вероятность состояния (k, r) внутри расщепленной модели с пространством состояний E_n , $\pi_1(\langle n \rangle)$ – вероятность укрупненного состояния $\langle n \rangle \in \Omega_1$.

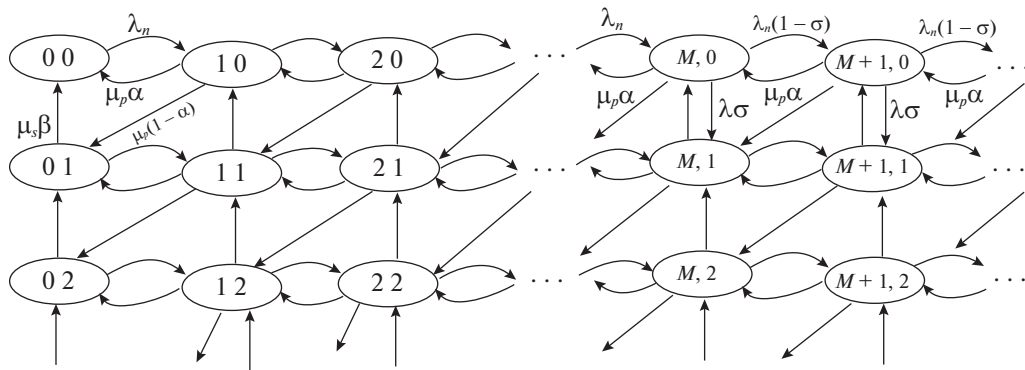


Рис. 2. Граф переходов между состояниями в расщепленной модели с пространством состояний E_n

Как было отмечено выше, переходы между состояниями управляющей интенсивностью входящего потока ЦМ не зависят от статусов F-сервера и S-сервера, поэтому вероятности состояний $\pi_1(\langle n \rangle)$, $\langle n \rangle \in \Omega_1$, определяются с помощью ее ПМ Σ .

Следовательно, для нахождения вероятности состояний исходной модели потребуется лишь определение стационарных распределений двумерных ЦМ с пространствами состояний E_n , $n = \overline{1, N}$ (см. формулу (2.7)). Для решения задачи к этим двумерным ЦМ применяется процедура укрупнения (второй уровень иерархии). Поскольку все расщепленные модели с пространствами состояний E_n идентичны, то зафиксируем значение параметра n , $n = \overline{1, N}$. Граф переходов между состояниями E_n показан на рис. 2.

В классе E_n рассмотрим следующее разбиение:

$$E_n = \bigcup_{r=0}^{\infty} E_n^r, \quad E_n^r \cap E_n^{r'} = \emptyset, \quad \text{если } r \neq r', \quad (2.8)$$

где $E_n^r = \{(k, r) \in E_n: k = 0, 1, \dots\}$, $r = 0, 1, \dots$

Все состояния из класса E_n^r объединяются в одно укрупненное состояние $\langle r \rangle$, и на основе расщепления (2.8) в пространстве состояний E_n определяется функция укрупнения $U_2(k, r) = \langle r \rangle$, $(k, r) \in E_n^r$. Множество укрупненных состояний $\langle r \rangle$ обозначим через $\Omega_2 = \{\langle r \rangle: r = 0, 1, 2, \dots\}$.

Согласно [17], имеем

$$\rho_n(k, r) = \rho_n^r(k) \pi_2^n(\langle r \rangle), \quad (2.9)$$

где $\rho_n^r(k)$ – вероятность состояния (k, r) внутри расщепленной модели с пространством состояний E_n^r , $\pi_2^n(\langle r \rangle)$ – вероятность укрупненного состояния $\langle r \rangle \in \Omega_2$.

В классе E_n^r , $r = 0, 1, \dots$, в векторе состояний вторая компонента является постоянной и равна r . Поэтому при изучении расщепленных моделей с пространством E_n^r каждое состояние (k, r) может быть задано лишь первой компонентой, т.е. далее состояние $(k, r) \in E_n^r$ обозначается как k , $k = 0, 1, \dots$

Тогда из соотношений (2.2) заключаем, что интенсивности переходов между состояниями расщепленной модели с пространством состояний E_n^r , $r = 0, 1, \dots$, зависят от параметра r , $r = 0, 1, \dots$, и определяются следующим образом (см. рис. 2).

Для случая $r = 0$:

$$q_n^0(k, k') = \begin{cases} \lambda_n, & \text{если } k < M, \quad k' = k + 1, \\ \lambda_n(1 - \sigma), & \text{если } k \geq M, \quad k' = k + 1, \\ \mu_p \alpha, & \text{если } k' = k - 1. \end{cases} \quad (2.10)$$

Для случаев $r > 0$:

$$q_n^r(k, k') = \begin{cases} \lambda_n, & \text{если } k' = k + 1, \\ \mu_f \alpha, & \text{если } k' = k - 1. \end{cases} \quad (2.11)$$

Из (2.10) получаем, что при выполнении условия $v_n < (1 - \sigma)^{-1}$, $v_n = \lambda_n / \mu_f \alpha$, вероятности состояний расщепленной модели с пространством состояний E_n^0 определяются так:

$$\rho_n^0(k) = \begin{cases} v_n^k \rho_n^0(0), & \text{если } 0 \leq k \leq M, \\ \frac{1}{(1 - \sigma)^M} (v_n (1 - \sigma))^k \rho_n^0(0), & \text{если } k > M, \end{cases} \quad (2.12)$$

где $\rho_n^0(0)$ находится из условия нормировки, т.е.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_n^0(k) = 1.$$

После стандартных преобразований получим

$$\rho_n^0(0) = \left(\frac{1 - v_n^{M+1}}{1 - v_n} + v_n^{M+1} \frac{1 - \sigma}{1 - v_n (1 - \sigma)} \right)^{-1}. \quad (2.13)$$

З а м е ч а н и е 1. Поскольку условие $v_n < (1 - \sigma)^{-1}$ верно для каждого $n, n = \overline{1, N}$, то получаем, что должно выполняться условие

$$\max_{n=1, N} \{v_n\} < (1 - \sigma)^{-1}. \quad (2.14)$$

Из (2.11) получаем, что если $v_n < 1$, то вероятности состояний расщепленных моделей с пространствами состояний E_n^r не зависят от индекса $r, r = 0, 1, \dots$, и определяются как

$$\rho_n^r(k) = (1 - v_n) v_n^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.15)$$

З а м е ч а н и е 2. Поскольку условие $v_n < 1$ должно быть верно для каждого $n, n = \overline{1, N}$, то должно выполняться условие

$$\max_{n=1, N} \{v_n\} < 1. \quad (2.16)$$

Тогда, объединяя (2.14) и (2.16), получаем первое условие эргодичности модели, т.е. должно выполняться (2.16).

Учитывая (2.2), (2.12), (2.13) и (2.15), интенсивности переходов между состояниями Ω_2 определяются следующим образом (см. рис. 2):

$$q_n(\langle r \rangle, \langle r' \rangle) = \begin{cases} \eta_n(0, 1), & \text{если } r = 0, \quad r' = 1, \\ \mu_f (1 - \alpha) v_n, & \text{если } r > 0, \quad r' = r + 1, \\ \mu_s \beta, & \text{если } r > 0, \quad r' = r - 1. \end{cases} \quad (2.17)$$

Согласно (2.12) и (2.13), величина $\eta_n(0, 1)$ в формуле (2.17) определяется как

$$\begin{aligned} \eta_n(0, 1) &= \mu_f (1 - \alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \rho_n^0(k) + \lambda_n \sigma \sum_{k=M}^{\infty} \rho_n^0(k) = \mu_f (1 - \alpha) v_n + \\ &+ \lambda_n \sigma \rho_n^0(0) \frac{1}{(1 - \sigma)^M} \sum_{k=M}^{\infty} (v_n (1 - \sigma))^k = \mu_f (1 - \alpha) v_n + \lambda_n \sigma \rho_n^0(0) \frac{v_n^M}{1 - v_n (1 - \sigma)}. \end{aligned}$$

Из (2.17) получаем, что при выполнении условия $\Psi_n < 1$, $\Psi_n = \mu_f(1-\alpha)v_n/\mu_s\beta$, вероятности состояний укрупненной модели с пространством состояний Ω_2 находятся так (см. рис. 2):

$$\pi_2^n(\langle r \rangle) = \begin{cases} \theta_n \pi_2^n(\langle 0 \rangle), & \text{если } r = 1, \\ \theta_n \Psi_n^{r-1} \pi_2^n(\langle 0 \rangle), & \text{если } r > 1, \end{cases} \quad (2.18)$$

где $\theta_n = \eta_n(0,1)/\mu_s\beta$ и $\pi_2^n(\langle 0 \rangle)$ определяется из условия нормировки, т.е.

$$\sum_{r=0}^{\infty} \pi_2^n(\langle r \rangle) = 1.$$

После стандартных преобразований получим

$$\pi_2^n(\langle 0 \rangle) = \frac{1 - \Psi_n}{1 - \Psi_n + \theta_n}. \quad (2.19)$$

З а м е ч а н и е 3. Поскольку условие $\Psi_n < 1$ верно для каждого $n, n = \overline{1, N}$, то находим второе условие эргодичности модели:

$$\max_{n=1, N} \{v_n\} < \frac{\mu_s\beta}{\mu_f(1-\alpha)}. \quad (2.20)$$

Объединяя соотношения (2.16) и (2.20), получаем следующее условие эргодичности модели:

$$\max_{n=1, N} \{v_n\} < \min \left\{ \frac{\mu_s\beta}{\mu_f(1-\alpha)}, 1 \right\}. \quad (2.21)$$

Таким образом, при выполнении условия эргодичности модели (2.21) с учетом соотношений (2.7), (2.9), (2.12), (2.13), (2.18) и (2.19) находятся приближенные значения стационарных вероятностей состояний исходной трехмерной ЦМ.

Далее с использованием стационарных вероятностей состояний могут быть рассчитаны приближенные значения характеристик (2.3)–(2.5). Действительно, из (2.7) и (2.9) заключаем, что указанные характеристики вычисляются следующим образом:

$$L_p \approx \sum_{n=1}^N \pi_1(\langle n \rangle) \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{r=0}^{\infty} \rho_n^r(k) \pi_2^n(\langle r \rangle); \quad (2.22)$$

$$L_s \approx \sum_{n=1}^N \pi_1(\langle n \rangle) \sum_{r=1}^{\infty} r \pi_2^n(\langle r \rangle); \quad (2.23)$$

$$R_{ps} \approx \sigma \sum_{n=1}^N \pi_1(\langle n \rangle) \sum_{k=M}^{\infty} \rho_n^0(k) \pi_2^n(\langle 0 \rangle). \quad (2.24)$$

Тогда после определенных математических выкладок из (2.22)–(2.24) получим

$$L_p \approx \sum_{n=1}^N \pi_1(\langle n \rangle) (\Psi_n^1 + \Psi_n^2 + \Psi_n^3), \quad (2.25)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_n^1 &= \sum_{k=1}^M k v_n^k (\rho_n^0(0) + (1 - v_n)(1 - \pi_2^n(\langle 0 \rangle))), \\ \Psi_n^2 &= \rho_n^0(0) \pi_2^n(\langle 0 \rangle) \frac{v_n^2}{(1 - \sigma)^{M-2}} \frac{M(1 - v_n(1 - \sigma)) + 1}{(1 - v_n(1 - \sigma))^2}, \\ \Psi_n^3 &= (1 - \pi_2^n(\langle 0 \rangle)) \frac{v_n^2}{1 - v_n} \frac{M(1 - v_n) + 1}{(1 - \sigma)^M}, \end{aligned}$$

$$L_s \approx \sum_{n=1}^N \pi_1(\langle n \rangle) \pi_2^n(\langle 0 \rangle) \frac{\theta_n}{(1 - \psi_n)^2}, \quad (2.26)$$

$$R_{ps} \approx \sigma \sum_{n=1}^N \frac{v_n^M}{1 - v_n(1 - \sigma)} \pi_1(\langle n \rangle) \pi_2^n(\langle 0 \rangle) \rho_n^0(0). \quad (2.27)$$

3. Численные результаты. Проводимые здесь численные эксперименты имеют две цели: 1) показать высокую точность разработанного алгоритма приближенного вычисления стационарных вероятностей состояний изучаемой системы; 2) изучить поведение характеристик системы относительно изменения порогового параметра M и решить задачу выбора его оптимального (в заданном смысле) значения.

Точность приближенного алгоритма оценивается с помощью имитационного моделирования. При этом близость результатов, полученных с применением различных подходов, оценивается с помощью нормы подобия косинуса, т.е.

$$\|N\| = \frac{(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}})}{|\mathbf{p}| |\tilde{\mathbf{p}}|}, \quad (3.1)$$

где $\mathbf{p} = (p(n, k, r) : (n, k, r) \in E)$ и $\tilde{\mathbf{p}} = (\tilde{p}(n, k, r) : (n, k, r) \in E)$ – векторы точных и приближенных значений стационарных вероятностей состояний соответственно; $(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}})$ – скалярное произведение векторов \mathbf{p} и $\tilde{\mathbf{p}}$; $|\mathbf{p}|$ и $|\tilde{\mathbf{p}}|$ – длины векторов \mathbf{p} и $\tilde{\mathbf{p}}$ соответственно.

Отметим, что, как правило, норма подобия косинуса используется для определения ориентации двух векторов, а не для сравнения их величин. Однако в нашем случае эта мера адекватно оценивает близость конечных точек векторов \mathbf{p} и $\tilde{\mathbf{p}}$, так как, согласно нормирующему условию, имеем

$$\sum_{(n,k,r) \in E} p(n, k, r) = \sum_{(n,k,r) \in E} \tilde{p}(n, k, r) = 1.$$

Иными словами, конечные точки векторов \mathbf{p} и $\tilde{\mathbf{p}}$ находятся в одной гиперплоскости.

Сначала рассмотрим случай, когда значения интенсивностей входящего потока фиксированы, а интенсивности обслуживания разнотипных серверов меняются. В этом случае в проводимых экспериментах исходные данные гипотетической модели определяются следующим образом. ПМ ЦМ, которая управляет интенсивностью входящего ММРР-потока с $N = 3$ состояниями, задается как

$$\Sigma_1 = \left\| \begin{array}{ccc} -34 & 20 & 14 \\ 18 & -32 & 14 \\ 4 & 16 & -20 \end{array} \right\|.$$

Значения интенсивностей входящего потока $\Lambda = (15, 10, 5)$. Параметры схем Бернулли выбирались так: $\alpha = 0.8$; $\beta = 0.4$; $\sigma = 0.1$.

Сравнительный анализ результатов приближенного алгоритма и метода имитационного моделирования для этой серии вычислительных экспериментов показаны в табл. 1.

Нами также выполнены вычислительные эксперименты для случаев, когда и значения интенсивностей входящего потока, и интенсивности обслуживания разнотипных серверов меняются. В проводимых трех сериях экспериментов параметры схем Бернулли оставались неизменными. В первой серии экспериментов ПМ ЦМ, которая управляет интенсивностью входящего ММРР-потока с $N = 3$ состояниями, выбиралась так же, как и ранее (т.е. она равна Σ_1), при этом значения интенсивностей входящего потока выбирались как $\Lambda_1 = (10, 5, 3)$. Во второй и третьей сериях экспериментов ПМ ЦМ, которые управляют интенсивностями входящего ММРР-потока с $N = 3$ состояниями, и соответствующие им значения интенсивностей входящего потока выбирались следующим образом:

$$\Sigma_2 = \left\| \begin{array}{ccc} -25 & 15 & 10 \\ 13 & -23 & 10 \\ 5 & 11 & -26 \end{array} \right\|, \quad \Lambda_2 = (15, 12, 7);$$

Таблица 1. Оценка точности алгоритма вычисления стационарных вероятностей состояний системы. Случай фиксированных значений интенсивностей входящего ММРР-потока

(μ_f, μ_s)	M	Значения нормы (3.1)
(60, 45)	1	0.9945
	2	0.9940
	3	0.9914
(60, 50)	1	0.9931
	2	0.9948
	3	0.9927
(60, 55)	1	0.9943
	2	0.9951
	3	0.9954
(65, 45)	1	0.9936
	2	0.9944
	3	0.9936
(65, 50)	1	0.9941
	2	0.9958
	3	0.9953
(65, 55)	1	0.9952
	2	0.9949
	3	0.9958
(70, 45)	1	0.9946
	2	0.9955
	3	0.9950
(70, 50)	1	0.9944
	2	0.9968
	3	0.9960
(70, 55)	1	0.9964
	2	0.9970
	3	0.9960

$$\Sigma_3 = \begin{vmatrix} -27 & 12 & 15 \\ 9 & -29 & 20 \\ 8 & 15 & -23 \end{vmatrix}, \quad \Lambda_3 = (20, 10, 5).$$

Результаты указанных экспериментов показаны в табл. 2. Из табл. 1 и 2 видно, что разработанный алгоритм имеет высокую точность, так как значение нормы (3.1) практически равно единице.

З а м е ч а н и е 4. Поскольку система является бесконечномерной (по второй и третьей компоненте вектора состояний), то при вычислении нормы (3.1) максимальное число заявок каждого типа в системе сверху ограничивается достаточно большими конечными величинами. Такая замена является оправданной, так как при превышении этими величинами определенных (достаточно больших) значений соответствующие вероятности состояний становятся бесконечно малыми величинами, т.е. практически равными нулю.

Разработанные приближенные формулы позволяют также изучить поведения нормы подобия (3.1) относительно изменения любых (структурных и нагрузочных) параметров системы. Из-за ограниченности объема работы и для конкретности изложения здесь приводятся лишь результаты, которые показывают поведение указанной величины относительно изменения параметра σ (рис. 3). Из графика видно, что с ростом значения этого параметра ухудшается точность

Таблица 2. Оценка точности алгоритма вычисления стационарных вероятностей состояний системы. Случай нефиксированных значений интенсивностей входящего ММРР-потока

Λ	(μ_f, μ_s)	M	Значения нормы (3.1)
(10, 5, 3)	(60, 45)	1	0.9979
		2	0.9979
		3	0.9973
	(65, 50)	1	0.9983
		2	0.9984
		3	0.9971
	(70, 55)	1	0.9986
		2	0.9986
		3	0.9986
(15, 12, 17)	(60, 45)	1	0.9924
		2	0.9934
		3	0.9914
	(65, 50)	1	0.9953
		2	0.9949
		3	0.9945
	(70, 55)	1	0.9955
		2	0.9962
		3	0.9964
(20, 10, 5)	(60, 45)	1	0.9892
		2	0.9868
		3	0.9867
	(65, 50)	1	0.9903
		2	0.9904
		3	0.9917
	(70, 55)	1	0.9933
		2	0.9938
		3	0.9936

формул вычисления приближенных значений вероятностей состояний исходной трехмерной ЦМ. Иными словами, чем меньше значения указанного параметра, тем выше точность предложенных формул. Однако даже в наихудших случаях, когда значения этого параметра близки к

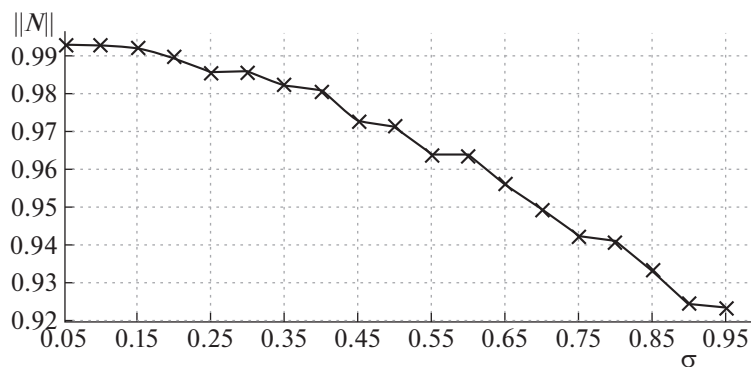


Рис. 3. Зависимость значения нормы подобия (3.1) от параметра σ

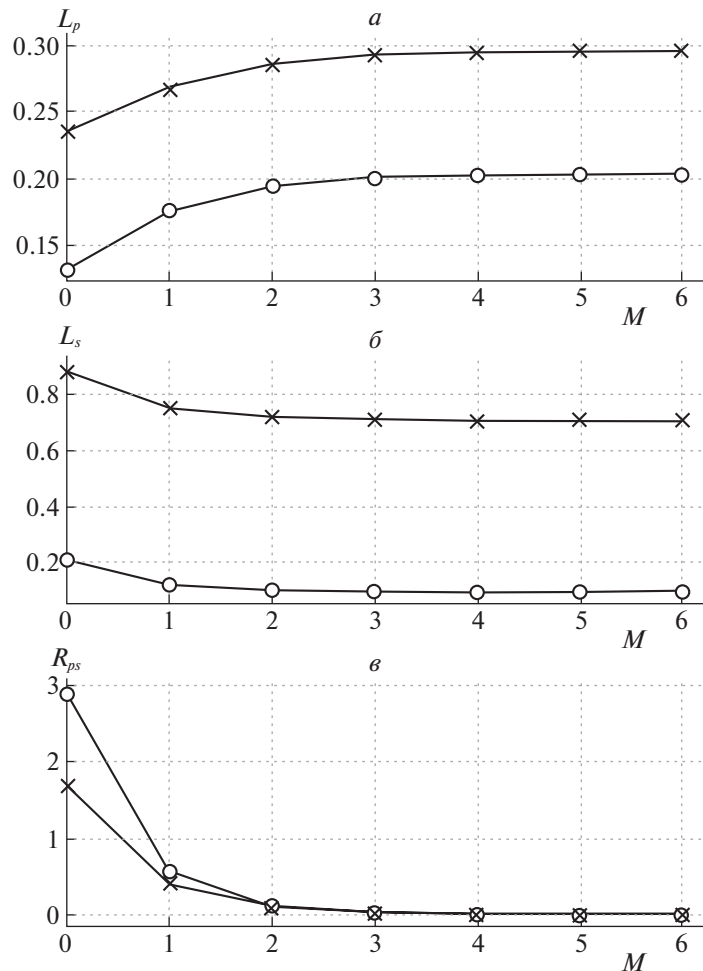


Рис. 4. Зависимость характеристик системы от порогового параметра M

единице, значения нормы (3.1) оказываются больше 0.9, т.е. разработанные приближенные формулы имеют достаточно высокую точность.

Такое поведение нормы (3.1) относительно параметра σ имеет вполне логическое объяснение. Действительно, из теории фазового укрупнения состояний ЦМ [3] известно, что чем меньше интенсивности переходов между расщепленными классами состояний, тем выше точность алгоритмов метода фазового укрупнения. Для изучаемой здесь модели при малых значениях параметра σ интенсивности переходов между расщепленными классами E_n^r , $r = 0, 1, \dots$ (см. формулы (2.8) и рис. 2), оказываются малыми величинами и с его ростом увеличивается интенсивность переходов между расщепленными классами.

Отметим, что аналогичные поведения нормы (3.1) наблюдаются относительно изменения параметров α и β , т.е. с ростом параметра α значение нормы систематически растет, а с ростом параметра β , наоборот, она систематически уменьшается (отметим, что в отличие от параметра σ , области изменения параметров α и β определяются из условия эргодичности системы (2.21)).

Поведения характеристик системы относительно изменения порогового параметра M при указанных выше параметрах ММРР-потока и при $(\mu_f, \mu_s) = (70, 55)$, $\sigma = 0.4$, показаны на рис. 4. Функция L_p является неубывающей (рис. 4, а), что и следовало ожидать, так как с увеличением параметра M растут шансы первичных заявок присоединиться к своей очереди. По той же причине функции L_s (рис. 4, б) и R_{ps} (рис. 4, в) являются невозрастающими.

Отметим, что с увеличением параметра β увеличивается нагрузка S-сервера и тем самым уменьшаются шансы первичных заявок обслуживаться в этом сервере, поэтому увеличивается

Таблица 3. Результаты решения задачи (3.2)

(μ_f, μ_s)	α	M^*	TC_{\min}
(60, 45)	0.7	6	2.927
	0.8	8	1.959
	0.9	11	1.482
(65, 45)	0.7	8	2.509
	0.8	10	1.708
	0.9	13	1.303
(65, 50)	0.7	7	2.389
	0.8	10	1.681
	0.9	13	1.295
(70, 55)	0.7	9	2.033
	0.8	12	1.475
	0.9	15	1.152

число таких заявок перед F-сервером (см. рис. 4, а). С увеличением параметра α уменьшается нагрузка S-сервера, тем самым уменьшается число таких заявок в системе (см. рис. 4, б). Значения функции R_{ps} при различных соотношениях параметров α и β почти не отличаются друг от друга (см. рис. 4, в).

Заметим, что для выбранных исходных данных при $M \geq 3$ изучаемые функции становятся почти постоянными. Это обстоятельство позволяет ставить задачу нахождения таких значений этого параметра, чтобы минимизировать суммарные штрафы (total cost, (ТС)), связанные с пребыванием разнотипных заявок в очереди и обслуживанием первичных заявок в низкоскоростном сервере. Так, пусть штрафы за пребывания одной первичной и повторной заявки в системе равны c_p и c_s , а штраф за обслуживания p -заявки в S-сервере равен c_{ps} . Тогда задача оптимизации ставится так:

$$M^* = \arg \min_M TC, \tag{3.2}$$

где $TC = c_p L_p + c_s L_s + c_{ps} R_{ps}$.

Результаты решения задачи (3.2) для следующих исходных данных показаны в табл. 3:

$$\Sigma_4 = \begin{vmatrix} -38 & 20 & 18 \\ 6 & -22 & 16 \\ 6 & 16 & -22 \end{vmatrix}; \quad \Lambda_4 = (30, 10, 5); \quad \beta = 0.4; \quad \sigma = 0.1; \quad c_p = 4, 5; \quad c_s = 1; \quad c_{ps} = 2.$$

К сожалению, не удастся решить задачу (3.2) аналитически из-за сложного вида функционала. Потому и не удастся делать какие-то общие выводы относительно решения задачи (3.2). Вместе с тем в проводимых численных экспериментах существует оптимальное решение задачи (3.2), при этом указанное в табл. 3 оптимальное значение M^* является минимальным значением этого параметра, при котором достигается минимум функционала ТС, т.е. при $M \geq M^*$ он становится постоянным.

Заключение. В работе изучается модель системы с гетерогенными серверами, ММРР-поток и мгновенной обратной связью. После завершения обслуживания в высокоскоростном сервере первичные заявки, согласно схеме Бернулли, либо покидают систему, либо мгновенно требуют повторного обслуживания. Повторные заявки обслуживаются в S-сервере, при этом после завершения обслуживания повторные заявки могут многократно повторяться. Если в момент поступления первичной заявки S-сервер свободен и число заявок в очереди перед F-сервером превышает определенное пороговое значение, то поступившая заявка, согласно схеме Бернулли, либо направляется для обслуживания в S-сервер, либо присоединяется в свою очередь. Считается, что первичные и повторные заявки могут образовать очереди бесконечной длины.

Показано, что математической моделью изучаемой системы является некоторая трехмерная ЦМ с бесконечномерным пространством состояний. Найдено условие эргодичности модели и

разработан приближенный алгоритм расчета вероятностей состояний соответствующей ЦМ. С помощью численных экспериментов показана высокая точность рассмотренного алгоритма и решена задача нахождения оптимального значения введенного порогового параметра, чтобы минимизировать суммарные штрафы, связанные с пребыванием разнотипных заявок в очереди и обслуживанием первичных заявок в S-сервере.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Takacs L.* A Single Server Queue with Feedback // *Bell System Technical J.* 1963. V. 42. P. 505–519.
2. *Takacs L.* A Queuing Model with Feedback // *Operations Research.* 1977. V. 11. P. 345–354.
3. *Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Rustamov A.M.* Methods for Analysis of Queuing Models with Instantaneous and Delayed Feedbacks // *Communications in Computer and Information sciences.* 2015. V. 564. P. 185–199.
4. *Sharma S.K., Kumar R.* A Markovian Feedback Queue with Retention of Reneged Customers // *Advanced Modeling and Optimization.* 2012. V. 14. Iss. 3. P. 673–680.
5. *Sharma S.K., Kumar R.* A Markovian Feedback Queue with Retention of Reneged Customers and Balking // *Advanced Modeling and Optimization.* 2012. V. 14. Iss. 3. P. 681–688.
6. *Sharma S.K., Kumar R.* M/M/1 Feedback Queueing Model with Retention of Reneged Customers and Balking // *American J. Operational Research.* 2013. V. 3. Iss. 3 (2A). P. 1–6.
7. *Sharma S.K., Kumar R.* A Single Server Markovian Feedback Queueing System with Discouraged Arrivals and Retention of Reneged Customers // *American J. Operational Research.* 2013. V. 4. Iss. 3. P. 35–39.
8. *Kumar R., Jain N.K., Som B.K.* Optimization of an M/M/1/N Feedback Queue with Retention of Reneged Customers // *Operations Research and Decisions.* 2014. V. 24. Iss. 3. P. 45–58.
9. *Santkumaran A., Thangaraj V.* A Single Server Queue with Impatient and Feedback Customers // *Information and Management Science.* 2000. V. 11. Iss. 3. P. 71–79.
10. *Som B.K., Seth S.* M/M/c/N Queuing System with Encouraged Arrivals, Reneging, Retention and Feedback Customers // *Yugoslav J. of Operations Research.* 2018. V. 28. Iss. 3. P. 333–344.
11. *Bouchentouf A.A., Kadi M., Rabhi A.* Analysis of Two Heterogeneous Server Queuing Model with Balking, Reneging and Feedback // *Mathematical Sciences and Applications E-notes.* 2013. V. 2. Iss. 2. P. 10–21.
12. *Dudin A.N., Kazimirsky A.V., Klimenok V.I., Breuer L., Krieger U.* The Queuing Model MAP/PH/1/N with Feedback Operating in a Markovian Random Environment // *Austrian J. Statistics.* 2005. V. 34. Iss. 2. P. 101–110.
13. *Krishnamoorthy A., Manjunath A.S.* On Queues with Priority Determined by Feedback // *Calcutta Statistical Association Bulletin.* 2018. V. 70. Iss. 1. P. 33–56.
14. *Neuts M.F.* Matrix-geometric solutions in stochastic models. An algorithmic approach. Baltimore: John Hopkins University Press, 1981. 332 p.
15. *Меликов А.З., Мехбальева Э.В.* Анализ и оптимизация систем с гетерогенными серверами и скачкообразными приоритетами // *Изв. РАН. ТИСУ.* 2018. № 5. С. 56–74.
16. *Fisher W., Meier-Hellstern K.* The Markov Modulated Poisson Process (MMPP) cookbook // *Performance Evaluation.* 1992. V. 18. P. 149–171.
17. *Melikov A. Z., Ponomarenko L.A., Rustamov A.M.* Hierarchical Space Merging Algorithm to Analysis of Open Tandem Queuing Networks // *Cybernetics and System Analysis.* 2016. V. 52. Iss. 6. P. 867–877.

ОПЕРАТИВНЫЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ВЫБОРА АЛЬТЕРНАТИВЫ В БАЗАХ ЗНАНИЙ БОРТОВЫХ ОПЕРАТИВНО СОВЕТУЮЩИХ ЭКСПЕРТНЫХ СИСТЕМ

© 2021 г. Б. Е. Федунов^{а,*}, Н. Д. Юневич^а

^а ФНЦ ФГУП «ГосНИИАС», Москва, Россия

*e-mail: boris_fed@gosniias.ru

Поступила в редакцию 14.07.2020 г.

После доработки 15.09.2020 г.

Принята к публикации 29.10.2020 г.

При работе оперативно советующих экспертных систем на борту антропоцентрических объектов (пилотируемые летательные и обитаемые подводные аппараты, пилотируемые транспортные средства) экипаж не имеет возможности оперативно участвовать в процессе решения задачи многокритериального выбора альтернативы в режиме эксперта. Предлагаемый способ позволяет экипажу всегда получать рекомендуемую альтернативу без его вмешательства в процесс решения задачи. Однако экипажу доступно при необходимости самостоятельно корректировать приоритеты критериев оценки альтернатив.

DOI: 10.31857/S0002338821020037

Введение. Бортные оперативно советующие экспертные системы (БОСЭС) всегда разрабатываются для конкретно заданной предметной области [1]. Они размещаются на борту антропоцентрических объектов (Антр/объекты: пилотируемые летательные аппараты, обитаемые подводные аппараты, пилотируемые транспортные средства), обеспечивая интеллектуальную поддержку экипажу Антр/объекта в процессе решения им оперативно возникающих проблем. Антр/объект получает задание на функционирование (задание на миссию). Выполнение Антр/объектом заданной миссии происходит в быстроменяющейся агрессивной внешней среде, в которой возникают проблемы, мешающие выполнению миссии. В базе знаний БОСЭС каждая такая проблема должна оперативно решаться с учетом сложившейся текущей внешней обстановки и с учетом целей выполняемой миссии при *неизменных алгоритмах/процедурах, реализованных в базе знаний*. На каждом такте работы БОСЭС полученное в ее базе знаний решение возникшей проблемы рекомендуется экипажу для реализации.

Некоторые проблемы могут быть решены в базе знаний БОСЭС методом многокритериального выбора альтернативы (МКВА), если этот метод будет удовлетворять следующим особенностям его использования в базах знаний БОСЭС:

- невозможно оперативно привлекать экспертов предметной области и *экипаж Антр/объекта* к процессу решения проблемы этим методом;
- состав альтернатив (альтернативных решений возникшей проблемы) должен на каждом такте работы БОСЭС соответствовать текущей внешней обстановке;
- результаты применения метода на каждом такте работы БОСЭС должны получаться с учетом текущей информации о внешней обстановке и априорной информации, поступившей из задания Антр/объекту на миссию;
- помещенный в базу знаний БОСЭС состав критериев оценки альтернатив должен быть неизменен, а их приоритеты определяются в задании на миссию и *могут* оперативно корректироваться экипажем Антр/объекта в процессе выполнения миссии, если экипаж сочтет это нужным и если сложившаяся внешняя обстановка даст возможность ему это сделать;
- БОСЭС постоянно предъявляет экипажу приоритетную альтернативу для ее реализации даже в случае отсутствия корректировки экипажем заданного вектора приоритета критериев.

При разработке задания на миссию Антр/объекту обычно определяются и включаются в задание (априорная информация для базы знаний БОСЭС): (1) не альтернативы, а только набор типов возможных альтернатив, назначаемых из числа типов, которые заложены в базу знаний БОСЭС, (2) приоритеты критериев, состав которых включен в базу знаний БОСЭС.

Для создания такого оперативного метода МКВА первоначально нужно определить, какие знания экспертов при решении задачи известными методами МКВА используются на каждом этапе ее решения. Системный анализ различных методов МКВА показал, что наиболее наглядно и полно эти знания экспертов выявляются в оперативно применяемом на практике методе МКВА, разработанном Т. Саати [2].

Метод Т. Саати предусматривает для решения задачи выбора предпочтительной альтернативы привлечение группы экспертов. Применяют метод следующим образом.

Создается группа экспертов, которые: (1) имеют глубокие знания об обстановке, в которой нужно решать возникшую проблему/задачу; (2) могут генерировать альтернативные решения проблемы, (3) могут назначать критерии оценки альтернативных решений и (4) непосредственно заинтересованы в эффективном решении проблемы.

В процессе функционирования созданной БОСЭС нет возможности привлекать такую группу экспертов. Следовательно, в базе знаний БОСЭС должны быть представлены знания экспертов и используемые ими процедуры, упомянутые в перечисленных выше пунктах (1)–(4), через процедуры базы знаний БОСЭС, которые содержали бы “глубокие знания” соответствующей предметной области. Только в этом случае в БОСЭС могли бы вырабатываться такие рекомендации, которые не отвергались бы профессиональными экипажами Антр/объектов.

Рассмотрим, какие знания экспертов и какие процедуры используют эксперты на каждом этапе решения задачи методом Т. Саати.

Э т а п 1. Формулировка задачи МКВА. Эксперты формулируют задачу, определяя допустимый состав альтернативных ее решений (альтернативы $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n$) и состав критериев $K_1, \dots, K_j, \dots, K_s$, по которым должны оцениваться эти решения (альтернативы). В процессе решения задачи эксперты в ряде случаев могут изменять состав альтернатив и состав критериев.

Для решения сформулированной задачи эксперты составляют матрицы парных сравнений альтернатив по каждому критерию и матрицу парных сравнений критериев, используя свои знания о самой задаче, альтернативах ее решения, критериях, знания об обстановке, в которой задача возникла. Все матрицы парных сравнений должны быть согласованы. Для проверки согласованности матриц экспертам предоставляется математическая поддержка, позволяющая для каждой матрицы определять ее собственный вектор, соответствующий ее максимальному собственному числу. По этому собственному числу вычисляется индекс согласованности матрицы, по которому эксперты определяют согласована ли составленная ими матрица.

При установлении экспертами факта несогласованности матрицы, возникающего из-за неполного учета/осознания экспертами внешней обстановки, эксперты составляют новый вариант этой матрицы и вновь определяют согласованность новой версии матрицы. Эта процедура составления новой версии матрицы может применяться несколько раз. В случае, когда таким образом не удастся добиться согласованности матрицы, эксперты корректируют саму постановку задачи МКВА: (1) пересматривают набор альтернатив и/или (2) пересматривают набор критериев. Добиться согласованности всех матриц нужно обязательно!

Процесс составления таких матриц экспертами весьма сложный и трудоемкий.

Э т а п 2. Определение матрицы приоритетов альтернатив по критериям. Для согласованной матрицы парных сравнений альтернатив по выбранному критерию ее собственный вектор определяет приоритеты альтернатив по этому критерию. Из полученных собственных векторов матриц парных сравнений альтернатив по критериям составляется матрица приоритетов альтернатив $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n$ по критериям $K_1, \dots, K_j, \dots, K_s$.

Для согласованной матрицы парных сравнений критериев ее собственный вектор определяет приоритеты критериев.

Э т а п 3. Определение итоговых приоритетов альтернатив. Определение вектора итоговых приоритетов альтернатив выполняется процедурой умножения матрицы приоритетов альтернатив по критериям на вектор приоритетов критериев, которые были получены на этапе 2. Альтернатива с наибольшим итоговым приоритетом рекомендуется как решение возникшей задачи.

Анализ процесса решения задачи упомянутым методом МКВА позволил установить, какие неформализованные знания экспертов используются на каждом этапе применения метода.

Прямое применение метода Т. Саати в базах знаний БОСЭС, размещаемых на Антр/объектах, затруднительно не только потому, что там нет группы экспертов. Быстро меняющаяся внешняя обстановка требует постоянной адаптации к ней набора альтернатив и оперативной корректировки приоритетов критериев. Последнее может делать только экипаж, постоянно анализирующий текущую внешнюю обстановку.

В этих условиях:

– использование знаний экспертов при составлении согласованных матриц парных сравнений альтернатив по каждому критерию становится невозможным и требуется их замена в базе знаний БОСЭС некоторыми другими процедурами, которые должны учитывать особенности применения альтернатив и особенности вычисления их приоритетов по каждому критерию другим способом, в котором отсутствующие знания экспертов будут заменяться “глубокими” моделями предметной области, оперативно настраиваемыми на сложившуюся внешнюю обстановку и на меняющийся состав активных объектов в ней;

– использование знаний экспертов при составлении согласованной матрицы парных сравнений критериев заменяется на вектор приоритета критериев, полученный из задания на миссию Антр/объекта, и на возможность оперативной корректировки экипажем приоритета критериев.

В разд. 1 формулируется постановка задачи. В разд. 2 дается общее описание предлагаемого оперативного метода МКВА, включающее состав и взаимодействие блоков базы знаний БОСЭС. В разд. 3–7 рассматриваются структуры блоков базы знаний БОСЭС, состав которых определен в разд. 2. В разд. 8 дан пример применения предложенного оперативного метода МКВА в базе знаний конкретной БОСЭС, подтверждающий его возможности эффективно решать возникшую проблему без оперативного использования знаний экипажа Антр/объекта.

1. Постановка задачи. Разработать для применения в базах знаний БОСЭС оперативный метод многокритериального выбора предпочтительной альтернативы из оперативно сгенерированного множества альтернатив $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n$ по априорно заданному вектору приоритетов критериев $K_1, \dots, K_j, \dots, K_s$, не требующий привлечения экспертов и не загружающий экипаж антропоцентрического объекта необходимыми процедурами его взаимодействия с БОСЭС. При этом на каждом такте работы БОСЭС с учетом сложившейся внешней обстановки должна быть обеспечена в ее базе знаний возможность изменения (без участия экипажа!) состава альтернатив и возможность оперативной корректировки экипажем приоритетов критериев.

2. Оперативный способ решения задач многокритериального выбора альтернативы в базах знаний БОСЭС. Сопоставим по этапам решения задачи процедуры работы экспертов, применяемые при использовании ими метода Т. Саати, и подлежащие разработке соответствующие процедуры базы знаний БОСЭС.

2.1. Этап “Формулировка задачи МКВА”. Эксперты назначают альтернативы решения возникшей задачи и критерии оценки альтернатив. При решении задачи выбора из заданного множества альтернатив $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n$ предпочтительной по критериям $K_1, \dots, K_j, \dots, K_s$ альтернативы экспертам в процессе достижения согласованности матриц парных сравнений альтернатив и достижения согласованности матрицы парных сравнений критериев приходится прибегать к корректировке постановки задачи – пересматривать состав альтернатив и состав критериев (левый столбец табл. 1). Потребность в этой корректировке возникает при необходимости тщательнее учитывать текущие возможности постановщика задачи и тщательнее интерпретировать его предпочтения.

Для замены знаний экспертов на этом этапе решения задачи в базе знаний БОСЭС должны появиться: (1) блок “Генерирования альтернатив”, в котором постоянно генерируются альтернативы по априорно заданным их типам и по текущей информации о внешней обстановке; каждая альтернатива должна содержать состав действующих в ней объектов и тип их взаимодействия; (2) блок “Оперативная корректировка вектора приоритетов критериев”.

На этом этапе решения проблемы экипажу предоставляется возможность оперативно корректировать вектор приоритетов заданных критериев, необходимость которой диктуется сложившейся внешней обстановкой (правый столбец табл. 1).

2.2. Этап “Определение матрицы приоритетов альтернатив по критериям”. В методе МКВА знания экспертов используются при составлении согласованных матриц парных сравнений альтернатив по каждому критерию. Результатом этой работы экспертов является матрица приоритетов альтернатив $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n$ по критериям $K_1, \dots, K_j, \dots, K_s$ (левый столбец табл. 2).

Таблица 1. Оперативная корректировка постановки задачи многокритериального выбора альтернативы

Работает группа экспертов в методе Т. Саати	Работают процедуры базы знаний БОСЭС	Работает экипаж с БОСЭС
Назначение и пересмотр состава альтернатив для достижения согласованности матриц парных сравнений альтернатив по каждому критерию	Блок “Генерирование альтернатив”, в котором генерируются альтернативы по априорно заданным их типам и по текущей информации о внешней обстановке	Нет
Назначение и пересмотр состава критериев для достижения согласованности матрицы парного сравнения критериев	Корректировка по требованию экипажа приоритетов априорно заданного вектора приоритетов критериев	Оперативная (по решению экипажа) корректировка приоритетов критериев
Результат: скорректированная постановка задачи МКВА		

Таблица 2. Конструирование матрицы приоритета альтернатив по критериям

Работает группа экспертов в методе Т. Саати	Работают процедуры базы знаний БОСЭС	Работает экипаж с БОСЭС
Конструирование согласованных матриц парных сравнений альтернатив A_i (из множества $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n$) по каждому критерию K_j (из множества $K_1, \dots, K_j, \dots, K_s$)	Блок “Интеллектуальные агенты”, в котором содержатся Интел/агенты, действующие в альтернативах. Блок “Сценарий использования альтернативы”, в котором проходит мат/моделирование сценария использования каждой альтернативы A_i (из множества $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n$) с расчетом для нее значений критериев K_j (из множества $K_1, \dots, K_j, \dots, K_s$.)	Нет
Использование мат/процедур расчета собственных векторов матриц парных сравнений альтернатив A_i по критериям K_j	Процедура не требуется	Нет
Конструирование матрицы приоритетов альтернатив A_i по критериям K_j	Составление по результатам мат/моделирования всех альтернатив матрицы приоритетов альтернатив A_i по критериям K_j	Нет
Результат: матрица приоритетов альтернатив $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n$ по критериям $K_1, \dots, K_j, \dots, K_s$		

Эта работа экспертов заменяется в базе знаний БОСЭС процедурами, реализованными в двух блоках базы знаний: блок “Интеллектуальные агенты” и блок “Сценарий использования альтернативы”.

Блок “Интеллектуальные агенты” содержит интеллектуальные агенты (Интел/агенты), имитирующие возможности соответствующих им реальных объектов: (а) по составу информации о текущей внешней обстановке, доступной реальному объекту через его бортовые информационные системы, (б) по функциональным возможностям реальных объектов в части выполнения ими задач миссии, в части способов решения ими возникающих задач оперативного целеполагания и задач конструирования способа достижения оперативно назначенной текущей цели функционирования; (в) по возможностям его бортовых исполнительных систем реализовать управляющие сигналы, выработанные в (б). Содержащиеся в п.(а) и (в) имитаторы реальных бортовых систем реальных объектов параметрически настраиваются на функциональные возможности систем соответствующих наблюдаемых реальных объектов.

В блоке “Сценарий использования альтернативы” производится математическое моделирование применения каждой сгенерированной альтернативы с одновременным вычислением по результатам моделирования значений критериев $K_1, \dots, K_j, \dots, K_s$ ее оценки. После последовательного моделирования всех сгенерированных альтернатив в базе знаний БОСЭС составляется мат-

Таблица 3. Расчет итоговых приоритетов альтернатив

Работает группа экспертов в методе Т. Саати	Работают процедуры базы знаний БОСЭС	Работает экипаж с БОСЭС
Конструирование согласованной матрицы парных сравнений критериев $K_1, \dots, K_j, \dots, K_s$	Используется априорно заданный вектор приоритетов критериев или вектор приоритетов критериев, скорректированный экипажем	Оперативная корректировка экипажем вектора приоритетов критериев (при необходимости)
Использование мат/процедуры расчета собственного вектора матрицы парных сравнений критериев	Процедура не требуется	Нет
Использование мат/процедуры определения итоговых приоритетов альтернатив $A_1, \dots, A_j, \dots, A_n$	Определение итоговых приоритетов альтернатив $A_1, \dots, A_j, \dots, A_n$. Сохраняется процедура, указанная в левом столбце	Нет
Результат: матрица итоговых приоритетов альтернатив $A_1, \dots, A_j, \dots, A_n$		

рица приоритетов альтернатив $A_1, \dots, A_j, \dots, A_n$ по критериям $K_1, \dots, K_j, \dots, K_s$ (средний столбец табл. 2). На этом этапе привлечение экипажа к работе БОСЭС не требуется.

2.3. Этап “Определение итоговых приоритетов альтернатив”. В методе МКВА знания экспертов используются и при нахождении итоговых приоритетов альтернатив. Экспертам следует составить матрицу парных сравнений критериев и добиться ее согласованности (левый столбец табл. 3). Процедурой перемножения матрицы приоритетов альтернатив $A_1, \dots, A_j, \dots, A_n$ по критериям $K_1, \dots, K_j, \dots, K_s$ на вектор приоритетов критериев (левый столбец табл. 3) эксперты получают вектор итоговых приоритетов альтернатив $A_1, \dots, A_j, \dots, A_n$. Альтернатива с наибольшим итоговым приоритетом является решением задачи.

Эта работа экспертов в базе знаний БОСЭС заменяется аналогичной процедурой перемножения матрицы приоритетов альтернатив $A_1, \dots, A_j, \dots, A_n$ по критериям $K_1, \dots, K_j, \dots, K_s$, полученной в результате моделирования всех альтернатив, на вектор приоритетов критериев, который (1) априорно задан или (2) оперативно скорректирован экипажем (правый столбец табл. 3).

Итак, на каждом такте своей работы БОСЭС рекомендует экипажу способ решения оперативно возникшей проблемы, полученный с помощью метода МКВА.

Экипаж знаком с базой знаний БОСЭС. Он знает, что из задания на миссию Антр/объекту в базу знаний БОСЭС:

- вводятся допустимые типы альтернатив, по которым в базе знаний в зависимости от текущей обстановки генерируется различный набор альтернатив $A_1, \dots, A_j, \dots, A_n$ заданных типов, которые экипаж не знает (наборы) и менять их состав не может;
- вводится вектор приоритета критериев $K_1, \dots, K_j, \dots, K_s$. Содержание каждого критерия экипаж знает, изменять их состав и содержание не может, но может оперативно корректировать приоритеты критериев, ориентируясь на текущую внешнюю обстановку.

Знания экспертов позволяют им в процессе решения проблемы (см. табл. 1–3): (1) корректировать постановку задачи МКВА, (2) составлять согласованные матрицы парных сравнений альтернатив по каждому критерию, (3) составлять согласованную матрицу парных сравнений критериев, (4) определять приоритеты альтернатив по каждому критерию и составлять матрицу приоритетов альтернатив по критериям, (5) находить приоритеты критериев и (6) определять итоговые приоритеты альтернатив. Знания экспертов замещаются в базе знаний БОСЭС процедурами, которые размещаются в следующих блоках базы знаний БОСЭС: “Генерирование альтернатив”, “Интеллектуальные агенты”, “Сценарий использования альтернативы”, “Расчет итоговых приоритетов альтернатив” и “Оперативная корректировка вектора приоритета критериев” (рис. 1).

Опишем взаимодействие этих блоков, которое реализуется на каждом такте работы БОСЭС.



Рис. 1. База знаний БОСЭС (решение проблемы методом МКВА): (1) – транспарант оперативного конструирования экипажем вектора приоритетов критериев, (2) – скорректированный экипажем вектор приоритета критериев

В начале каждого такта работы БОСЭС в блок “Генерирование альтернатив” поступает текущая информация о сложившейся внешней обстановке (наблюдаемые типы и количество активных объектов, их текущее взаимодействие) и априорная информация о допустимых типах альтернатив. Полученные в блоке альтернативы передаются в блок “Интеллектуальные агенты”, в котором входящие в альтернативу Интел/агенты параметрически настраиваются по текущей информации о сложившейся внешней обстановке на наблюдаемые объекты.

В блоке “Сценарий использования альтернативы”: (1) последовательно вызывается из блока “Генерирование альтернатив” очередная альтернатива; (2) выполняется моделирование сценария применения выбранной альтернативы; (3) по результатам моделирования вычисляются значения критериев $K_1, \dots, K_j, \dots, K_s$ для смоделированной альтернативы; (4) далее для моделирования вызывается следующая альтернатива и для нее также вычисляются значения критериев $K_1, \dots, K_j, \dots, K_s$; (5) в результате моделирования всех сгенерированных альтернатив конструируется матрица приоритетов альтернатив по каждому критерию. Столбцы матрицы содержат значения приоритетов альтернатив по критерию, которым помечен этот столбец. Полученная матрица передается в блок “Расчет итоговых приоритетов альтернатив”.

В блоке “Расчет итоговых приоритетов альтернатив” по этой матрице и вектору приоритетов критериев (априорно заданному или оперативно скорректированному экипажем) определяется

вектор итоговых приоритетов сгенерированных альтернатив. Альтернатива с наибольшим итоговым приоритетом рекомендуется экипажу для реализации.

Отдельно остановимся на блоке “Оперативная корректировка вектора приоритетов критериев”. По запросу экипажа БОСЭС предъявляет ему на информационно управляющем поле (ИУП) транспарант (стрелка (1) на рис. 1). Используя транспарант, экипаж не более чем двумя ручными операциями корректирует вектор приоритетов критериев. Скорректированный вектор по мнению экипажа наиболее соответствует текущей внешней обстановке. Этот вектор передается (стрелка (2) рис. 1) в блок “Расчет итоговых приоритетов альтернатив”. Из этого блока на ИУП экипажу передается рекомендуемая альтернатива.

Представим блоки базы знаний БОСЭС.

3. Блок “Генерирование альтернатив”. В этом блоке базы знаний БОСЭС имеется фиксированный набор типов возможных альтернатив. Каждый тип содержит (априорная информация): (1) набор имен возможных активных деятелей той предметной области, для которой разрабатывается БОСЭС, (2) набор типов взаимодействий пар активных деятелей, допустимых в этой предметной области.

В блоке по информации о текущей внешней обстановке, в которой установлен тип каждого наблюдаемого активного объекта и тип выполняемых взаимодействий между этими объектами, задаются (из числа допустимых) различные варианты взаимодействий (альтернативы) между наблюдаемыми активными объектами.

Таким образом, в блоке на каждом такте работы БОСЭС генерируется текущий набор альтернатив решения возникшей проблемы. В каждой альтернативе определен состав парных взаимодействий, наблюдаемых в текущий момент активных объектов в текущей внешней обстановке.

Этот состав альтернатив определен на основе априорных знаний предметной области (набор активных агентов и набор взаимодействий между ними) и поступившей в базу знаний БОСЭС текущей информации о внешней обстановке (см. этап 1, описанный во Введении, и табл. 1 из разд. 2).

Пример реализации блока “Генерирование альтернатив”, входящего в базу знаний конкретной БОСЭС, представлен в разд. 8.

4. Блок “Интеллектуальные агенты”. Каждый реальный активный объект, участвующий в выполняемом этапе миссии, в базе знаний БОСЭС представляется интеллектуальным агентом (Интел/агентом) [3, 4].

Интел/агентом описываются реальные возможности соответствующего ему реального активного объекта. Интел/агент представляется тремя компонентами.

1. Информационной компонентой, имитирующей фактические возможности бортовых информационных систем реального объекта получать информацию о сложившейся внешней обстановке.

2. Компонентой миссии, имитирующей работу бортовых алгоритмов реального объекта решения задач этапов миссии и алгоритмов решения возникающих при этом задач оперативного целеполагания и задач конструирования способа достижения оперативно назначаемых текущих целей функционирования каждого реального объекта, который будет действовать в сгенерированной альтернативе.

3. Исполнительной компонентой, имитирующей фактические возможности бортовых исполнительных систем реального объекта реализовать решения, принятые компонентой миссии.

Информационная компонента Интел/агента состоит из математических моделей (далее мат/моделей) бортовых измерительных систем реального объекта. Мат/модели имитируют состав и информационные возможности его измерительных систем. Мат/модель каждой измерительной системы описывает зону внешнего пространства, из которой эта система получает информацию, состав и содержание той информации, которую имитируемая измерительная система реального объекта может передать компоненте миссии. Мат/модели бортовых измерительных систем параметрически настраиваются на возможности бортовых измерительных систем каждого наблюдаемого реального объекта.

Компонента миссии Интел/агента состоит из моделей бортовых алгоритмов реального объекта, которые имитируют бортовые алгоритмы выполнения этапов заданной объекту миссии, и алгоритмы решения возникающих при этом тактических задач [1] (задачи оперативного целеполагания и задачи конструирования способа достижения оперативно назначенной текущей цели функционирования Антр/объекта).

Исполнительная компонента Интел/агента состоит из мат/моделей исполнительных систем реального объекта, которые реализуют решения, принятые компонентой миссии Интел/агента. Мат/модели параметрически настраиваются на исполнительные системы каждого наблюдаемого активного объекта.

Пример реализации блока “Интеллектуальные агенты”, входящего в базу знаний конкретной БОСЭС, представлен в разд. 8.

5. Блок “Сценарий использования альтернативы”. В блоке реализованы мат/модели взаимодействий Интел/агентов, состав которых и тип их взаимодействий определены альтернативой, которая моделируется.

В блок “Сценарий использования альтернативы” входят:

- Интел/агенты, параметрически настроенные на наблюдаемые активные объекты [4];
- мат/модели взаимодействия этих Интел/агентов, взаимодействие которых определено моделируемой альтернативой;
- алгоритмы расчета (по результатам моделирования) значения априорно заданных критериев $K_1, \dots, K_j, \dots, K_s$ для моделируемой альтернативы;
- процедура составления (по результатам моделирования всех сгенерированных альтернатив) матрицы приоритетов альтернатив по критериям, каждый столбец которой – вектор приоритета альтернатив по критерию, которым помечен этот столбец.

Итог работы блока “Сценарий использования альтернативы” после последовательного моделирования на нем всех альтернатив, сгенерированных в блоке “Генерирование альтернатив”, – матрицы приоритетов альтернатив по критериям.

Моделирование сгенерированного набора альтернатив в блоке “Сценарий использования альтернативы” заменяет работу группы экспертов, в результате которой эксперты получают матрицу приоритетов альтернатив по каждому критерию (см. этап 2, описанный во Введении, и табл. 2 из разд. 2).

Пример реализации блока “Сценарий использования альтернативы” в базе знаний конкретной БОСЭС представлен в разд. 8.

6. Блок “Оперативная корректировка вектора приоритета критериев”. В этом блоке по решению экипажа, принятого им на основе анализа наблюдаемой внешней обстановки, производится оперативная корректировка вектора приоритетов критериев, поступившего в базу знаний БОСЭС из задания на миссию.

Процедура корректировки экипажем вектора приоритетов критериев должна быть максимально простой и понятной экипажу, чтобы он мог быстро и безошибочно произвести требуемую корректировку.

В работе [5] показано, как для трех критериев K_1, K_2, K_3 можно такой процедурой оперативно определить вектор приоритета критериев при получении от экипажа информации только об относительности важности этих критериев (см. табл. 4 из [5]).

Реализация процедуры оперативной корректировки экипажем вектора приоритета критериев выполняется на транспаранте, предъявляемом ему БОСЭС (стрелка (1) на рис. 1) на информационной части ИУП кабины экипажа (рис. 2).

На верхней строке транспаранта экипаж должен сначала назначить тип относительной важности критериев:

- “=” – одинаковая важность всех трех критериев;
- “ $1 > 2$ ” – один критерий важнее двух других;
- “ $2 > 1$ ” – два критерия важнее одного.

На нижней строке транспаранта указаны порядковые номера критериев, под которыми они предъявляются в априорно заданном векторе критериев. Экипаж должен выбрать порядковый номер того критерия, который он предпочел на первой строке транспаранта. Так, если экипажем:

- а) выбран вариант “=”, то это значит, что все критерии одинаково важны;
- б) выбран вариант “ $1 > 2$ ”, то это значит, что один критерий важнее двух остальных. Экипаж должен выбрать на нижней строке транспаранта номер этого приоритетного критерия;
- в) выбран вариант “ $2 > 1$ ”, то это значит, что два критерия важнее одного. Экипаж должен выбрать на нижней строке транспаранта номер наименее важного критерия.

Таблица 4. Относительная важность критериев

Номер варианта	Вариант назначения важности заданных критериев	Выделение критерия из заданных критериев K_1, K_2, K_3	Количество ручных операций	Координаты вектора приоритетов заданных критериев K_1, K_2, K_3
1	Одинаковая важность критериев (на рис. 2 обозначение: =)	Выделений нет	1	0.33 все
2	Один критерий важнее двух других (на рис. 2 обозначение: $1 > 2$)	Выделить важный критерий	2	0.611 для выделенного критерия, 0.194 для двух остальных критериев
3	Два критерия важнее одного (на рис. 2 обозначение: $2 > 1$)	Выделить два важных критерия	2	0.444 для важных критериев, 0.111 для неважного критерия

Еще раз отметим, что даже при отсутствии поступления в базу знаний БОСЭС скорректированного вектора приоритетов критериев (стрелка (2) на рис. 1) рекомендуемая экипажу альтернатива, определенная по априорно заданному вектору приоритетов альтернатив, всегда будет предьявляться ему на ИУП (рис. 1).

7. Блок “Расчет итоговых приоритетов альтернатив”. В блоке с использованием матрицы приоритетов альтернатив по критериям, полученной из блока “Сценарий использования альтернативы”, и заданного или скорректированного экипажем вектора приоритетов критериев рассчитываются итоговые приоритеты заданных альтернатив [2].

Альтернатива с наибольшим итоговым приоритетом является решением проблемы. Она предьявляется экипажу антропоцентрического объекта на ИУП и рекомендуется для реализации (рис. 1).

Пример реализации блока “Расчет итоговых приоритетов альтернатив”, входящего в базу знаний конкретной БОСЭС, представлен в разд. 8.

8. Пример. Используем оперативный метод многокритериального выбора альтернативы в базе знаний БОСЭС этапа полета истребителей сопровождения (ИС) “Ввод группы истребителей сопровождения в воздушный бой с истребителями противника”.

Группа ИС получила полетное задание (задание на миссию) на сопровождение ударных самолетов (УС). На этапе выполняемой миссии “Маршрут” командир группы истребителей сопровождения К(ИС)-I обнаружил истребители противника (ИП), изготовившиеся к атаке на УС. К(ИС)-I принял решение “Атаковать ИП всей группой ИС”. Интеллектуальную поддержку ему при детализации этого решения оказывает БОСЭС этапа полета “Ввод группы в воздушный бой (ВГБ) с ИП” (далее БОСЭС(ИС)-ВГБ). Эта система среди прочих рекомендаций должна рекомендовать К(ИС)-I предпочтительный вариант распределения ИП по ИС (вариант целераспределения). В базе знаний БОСЭС(ИС)-ВГБ определение наиболее предпочтительного варианта целераспределения (предпочтительной альтернативы) выполняется описанным выше методом оперативного многокритериального выбора альтернативы.

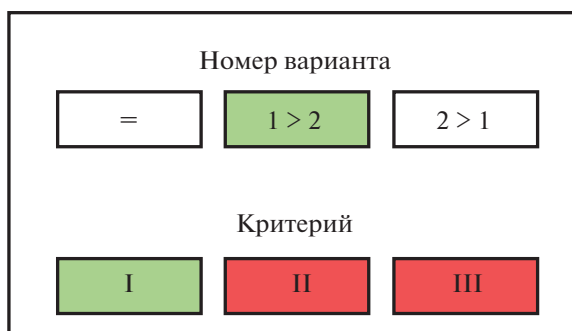


Рис. 2. Транспарант оперативной корректировки экипажем вектора приоритетов критериев

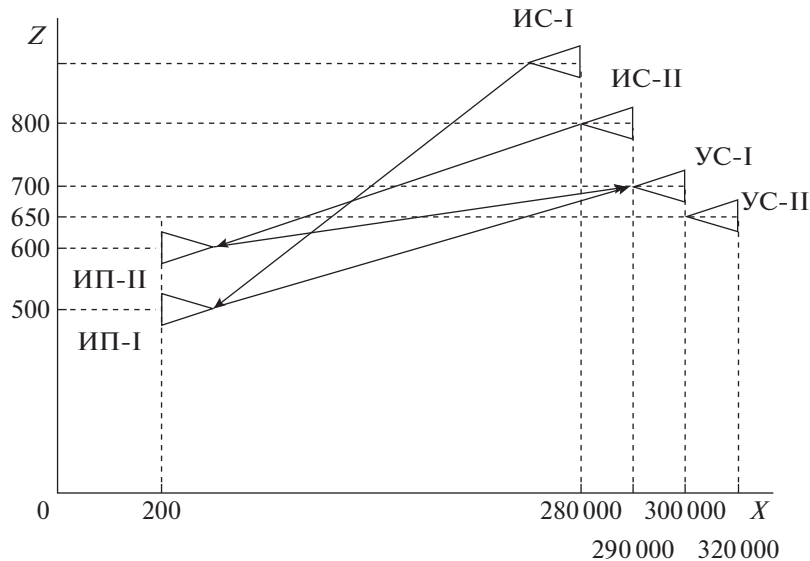


Рис. 3. Вариант целераспределения 1

Представим блоки базы знаний БОСЭС(ИС)-ВГБ (см. также рис. 1), которые реализуют представленный выше оперативный метод МКВА.

8.1. Блок “Генерирование альтернатив (вариантов целераспределения)”. Входная информация в блок поступает:

а) из задания на миссию: типы вариантов целераспределения, состав группы ИС: количество ИС, ранги в группе (командир группы К(ИС)-I, командиры подгрупп К(ИС)-II), типы ракет “воздух–воздух” на борту ИС;

б) текущая информация из бортовых измерительных систем ИС, на котором размещена БОСЭС(ИС)-ВГБ:

– обнаруженные ИП: их типы, векторы скоростей, координаты расположения, предполагаемые типы ракет “воздух–воздух” на борту ИП;

– УС: векторы скоростей, координаты расположения, траектория полета;

– ИС (по состоянию на текущий момент): количества ИС в группе, их ранги в группе (командир группы К(ИС)-I, командиры подгрупп К(ИС)-II), векторы скоростей, координаты расположения, наличные типы ракет “воздух–воздух”.

Иллюстративный пример работы блока генерирования альтернатив (вариантов целераспределения).

В примере каждые ИС, ИП и УС одного ранга и помечены их порядковыми номерами I, II.

Пусть для априорно заданного типа вариантов целераспределения “Каждому ИС назначается свой ИП” сгенерировано в блоке два варианта целераспределения (рис. 3 и 4). В вариантах указано взаимодействие объектов (кто кого атакует) следующим образом: (обозначение атакующего) – (обозначение атакуемого). Например, если ИП-I атакует УС-I, то это взаимодействие обозначается (ИП-I) – (УС-I).

Вариант целераспределения 1 (рис. 3) представим двумя следующими пересекающимися по объектам фрагментами: фрагмент 1.1: (ИП-I) – (УС-I), (ИС-I) – (ИП-I); фрагмент 1.2: (ИП-II) – (УС-I); (ИС-II) – (ИП-II).

Вариант целераспределения 2 (рис. 4) представим двумя следующими непересекающимися по объектам фрагментами: фрагмент 2.1 (ИП-I) – (УС-II), (ИС-I) – (ИП-I); фрагмент 2.2 (ИП-II) – (УС-I), (ИС-II) – (ИП-II).

8.2. Блок “Интеллектуальные агенты”. В вариантах целераспределения действуют наблюдаемые на борту К(ИС)-I объекты: ИС, УС, ИП, ракеты R (воздух–воздух). Эти объекты в базе знаний БОСЭС(ИС)-ВГБ представляются интеллектуальными агентами (Интел/агентами), которые востребованы в мат/модели блока “Сценарий использования альтернативы”.

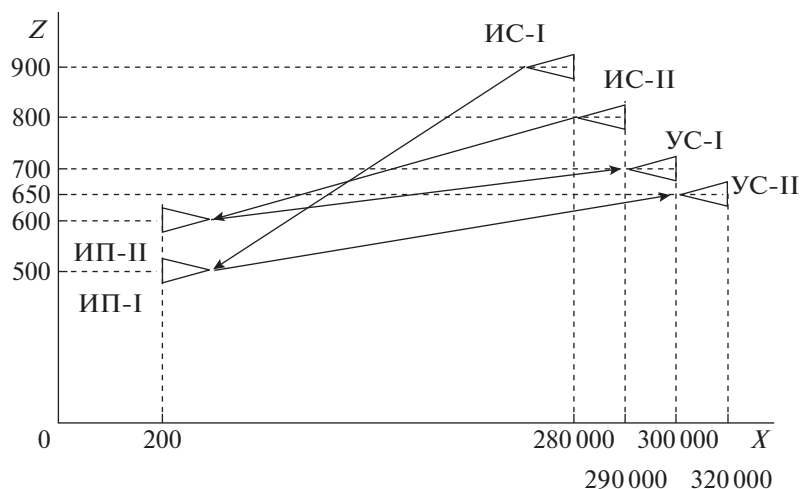


Рис. 4. Вариант целераспределения 2

Напомним, что каждый Интел/агент, представляющий функциональные возможности реального объекта, содержит три компонента: информационную компоненту, компоненту миссии, исполнительную компоненту [4]. Первая и вторая компоненты параметрически настраиваются на возможности соответствующих бортовых систем каждого наблюдаемого реального объекта.

Объект ИП в ранге командира группы К(ИП)-I представляется Интел/агентом ИП с компонентой миссии, учитывающей его ранг.

Информационная компонента Интел/агента ИП обеспечивает для ИП полную информацию о внешней обстановке (обеспечена осмотрительность и ситуационная осведомленность ИП [1]).

Компонента миссии Интел/агента ИП в ранге командира группы К(ИП)-I. Командир К(ИП)-I находится на этапе “Маршрут”, реализуемый группой ИП в соответствии с полученным заданием на миссию. Группа ИП установила информационный контакт с УС и ИС. Командир К(ИП)-I принял решение “Атаковать противника: УС и ИС всей группой ИП”. Для реализации этого решения К(ИП)-I должен выбрать вариант целераспределения, в котором назначаются цели (УС или ИС) для всех подчиненных ему К(ИП)-II, в том числе и для себя. Выбранный вариант целераспределения командир К(ИП)-I передает подчиненным ему К(ИП)-II и после этого меняет свой ранг К(ИП)-I на ранг К(ИП)-II.

Траектория полета группы ИП на этапе “Маршрут” задана в полетном задании.

В исполнительной компоненте Интел/агента ИП:

1) траекторию, заданную в полетном задании, реализует бортовая исполнительная система автоматического управления (САУ);

2) исполняет команду “Передать принятое целераспределение каждому К(ИП)-II”, реализует телекодированная система (ТКС);

3) меняет ранг К(ИП)-I на ранг К(ИП)-II исполнительная система “летчик + ИУП кабины экипажа”;

4) обеспечивают осмотрительность и ситуационную осведомленность К(ИП)-I исполнительные системы: ТКС, интеллектуальная информационная система “Ситуационная осведомленность экипажа (ИИС СОЭ)” [1].

Объект ИП в ранге командира подгруппы К(ИП)-II представляется Интел/агентом ИП с компонентой миссии, учитывающей его ранг.

Информационная компонента Интел/агента ИП обеспечивает полную информацию о внешней обстановке (реализована осмотрительность и ситуационная осведомленность К(ИП)-II [1]).

Компонента миссии Интел/агента ИП в ранге командира подгруппы К(ИП)-II. Решение для К(ИП)-II первоначальной задачи оперативного целеполагания получено от командира К(ИП)-I “Атаковать заданную цель”. При получении от К(ИП)-I цели на атаку К(ИП)-II назначает этап полета “Дальний воздушный бой с заданной целью” (далее “Атака ИП – название цели”).

Решение задач оперативного целеполагания, выполняемое самим К(ИП)-II, и алгоритмами, реализованными в компоненте миссии Интел/агента К(ИП)-II.

При выполнении К(ИП)-II назначенного этапа полета могут появиться коллизии “Выполняемый этап полета (выполняемая типовая ситуация (ТС)) – непосредственная угроза (НУГ)”. Каждая коллизия потребует: (1) решения соответствующей задачи оперативного целеполагания и (2) задачи конструирования способа достижения этой оперативно назначенной текущей цели полета.

Перечислим для К(ИП)-II возможные коллизии при выполнении им этапа полета ТС “Атака ИП-УС”.

Появление НУГ-1: ИС на траектории атаки на К(ИП)-II.

Коллизия “Этап полета “Атака ИП-УС” – НУГ-1”.

Решение К(ИП)-II: при отсутствии пуска ракеты $R(ИС-ИП)$ с ИС продолжить этап полета “Атака ИП-УС”.

Появление НУГ-2: ИС осуществил пуск ракеты $R(ИС-ИП)$.

Коллизия “Этап полета “Атака ИП-УС” – НУГ-2”.

До попадания $R(ИП-УС)$ в заданный ему ударный самолет К(ИП-II) решает продолжать наведение $R(ИП-УС)$.

В момент попадания $R(ИП-УС)$ в атакуемый УС в случае нахождения $R(ИС-ИП)$ от К(ИП)-II на дальности, большей $D_{г.о}(R(ИС))$ К(ИП)-II вырабатывает последовательно решения: (1) этап полета “Противодействовать $R(ИС-ИП)$ противоракетным маневром (обозначим “гарантированный отворот”, далее в тексте и в индексах “г.о”), и затем реализует этап полета “Атаковать атакующий ИС” (в мат. модели блока “Сценарий использования альтернативы” атака не моделируется, фиксируется только факт такой атаки).

Появление НУГ-3: ИП “свободен”.

Коллизия “ИП завершил этап полета “Атака ИП-УС” – НУГ-3”.

Решение К(ИП)-II: назначить этап полета “Полет в точку встречи ИП” (точка из задания на миссию ИП).

Появление НУГ-4: обнаружен никем не атакованный УС.

Коллизия “Этап полета “Полет в точку встречи” – НУГ-4”.

Решение К(ИП)-II: назначить этап полета “Атаковать УС”.

Исполнительная компонента Интел/агент ИП (мат/модель ИП: полет с постоянной скоростью):

1) траекторию, заданную в полетном задании, и траекторию полета в точку встречи ИП реализует САУ;

2) траектории этапа полета “Атаковать заданную цель” (мгновенный разворот ИП на траекторию параллельного сближения с заданной целью и полет по этой траектории) реализует исполнительная система САУ;

3) исполнение команды “Пуск ракеты с максимальной дальности пуска $D_{рmax}(R(ИП-УС))$ по заданной цели” реализует система “БЦВМ-алгоритм + летчик”;

4) обеспечивают осмотрительность и ситуационную осведомленность К(ИП)-II исполнительные системы ТКС и ИИС СОЭ.

Объект ИС в ранге командира группы К(ИС)-I представляется Интел/агентом ИС с компонентой миссии, учитывающей его ранг.

Информационная компонента Интел/агента ИС обеспечивает полную информацию о внешней обстановке (обеспечена осмотрительность и ситуационная осведомленность К(ИС)-I [1]).

Компонента миссии Интел/агента ИС в ранге командира группы К(ИС)-I. Командир К(ИС)-I находится на этапе полета “Маршрут”, реализуемый в соответствии с полученным им заданием на миссию. Командир принял решение “Атаковать ИП всей группой ИС”, что соответствует подготовке этапа полета “Ввод группы ИС в воздушный бой”, который будет реализовываться группой ИС после назначения каждому ИС целей на атаку (задача целераспределения). БОСЭС(ИС)-ВГБ рекомендует К(ИС)-I для реализации вариант целераспределения. В варианте назначаются цели (ИП) для всех подчиненных ему К(ИС)-II, в том числе и для себя. После этого командир К(ИС)-I меняет свой ранг К(ИС)-I на ранг К(ИС)-II.

Рекомендуемый К(ИС)-I вариант целераспределения вырабатывается в блоках базы знаний БОСЭС(ИС)-ВГБ: “Генерирование вариантов целераспределения”, “Интеллектуальные аген-

ты”, “Сценарий использования варианта целераспределения (альтернативы)” и “Расчет итоговых приоритетов вариантов целераспределения”.

В исполнительной компоненте Интел/агент ИС:

- 1) реализует траекторию, заданную в полетном задании, исполнительная система САУ;
- 2) исполняет команду “Передать принятое целераспределение по принадлежности каждому К(ИС)-II”, реализует система ТКС;
- 3) меняет ранг К(ИС)-I на ранг К(ИС)-II исполнительная система “Летчик + ИУП кабины экипажа”;
- 4) обеспечивают осмотрительность и ситуационную осведомленность К(ИС)-I исполнительные системы ТКС и ИИС СОЭ [1].

Объект ИС в ранге командира подгруппы К(ИС)-II представляется Интел/агентом ИС с компонентой миссии, учитывающей его ранг.

Информационная компонента Интел/агента ИС обеспечивает полную информацию о внешней обстановке (обеспечена осмотрительность и ситуационная осведомленность К(ИП)-II [1]).

Компонента миссии Интел/агента ИС в ранге командира подгруппы К(ИС)-II. Решение для К(ИС)-II первоначальной задачи оперативного целеполагания получено от командира К(ИС)-I. При получении от К(ИС)-I цели на атаку К(ИС)-II назначает этап полета “Дальний воздушный бой с заданной целью” (этап полета “Атака ИС–ИП, который атакует УС”).

При выполнении К(ИС)-II назначенного этапа полета могут появиться коллизии “Выполняемый этап полета – НУГ”, каждая из которых потребует от К(ИС)-II решения соответствующей задачи оперативного целеполагания и задачи конструирования способа достижения этой оперативно назначенной текущей цели полета.

Перечислим для К(ИС)-II возможные коллизии при выполнении им этапа полета “Атака ИС–ИП, атакующего УС” на стадии наведения ракеты $R(ИС-ИП)$.

Появление НУГ-1: ИП закончил атаку УС, а $R(ИС-ИП)$ находится в этот момент на таком удалении от ИП, когда ее наведение ИП может сорвать противоракетным маневром. ИП совершает этот маневр и затем атакует ИС.

Коллизия “Этап полета “ИС–ИП” – НУГ-1”.

Рекомендация БОСЭС(ИС)-ВГБ/решение К(ИС)-II: продолжить этап полета “Атака ИС–ИП”. В мат/модели блока “Сценарий использования альтернативы” фиксируется только факт такой атаки ИП, который используется для определения значения одного из критериев оценки альтернативы.

Появление НУГ-2: ИП закончил атаку УС, а $R(ИС-ИП)$ находится в этот момент на таком удалении от ИП, когда ее наведение ИП уже не может сорвать противоракетным маневром и ИП будет уничтожен.

Коллизия “Этап полета “ИС–ИП” – НУГ-2”.

Рекомендация БОСЭС (ИС)-ВГБ/решение К(ИС)-II: продолжить этап полета “Атака ИС-ИП” до уничтожения ИП.

Появление НУГ-3: ИС “свободен”. Он завершил атаку ИП.

Коллизия “Завершение атаки ИС-ИП – НУГ-3”.

Рекомендация БОСЭС(ИС)-ВГБ/решение К(ИС)-II: назначить этап полета “Возврат в строй ИС”.

Появление НУГ-4: “новый” ИП на траектории атаки на УС.

Коллизия “ТС “Возврат в строй ИС” – НУГ-4: ИП свободно (безнаказанно) атакует УС”. Рекомендация БОСЭС (ИС)-ВГБ/решение К(ИС)-II: “Атаковать УС”.

В исполнительной компоненте Интел/агент ИС:

- 1) траекторию, заданную в полетном задании, реализует САУ;
- 2) команду “Атаковать заданную цель” (мгновенный разворот ИС на траекторию параллельного сближения с заданной целью и полет по этой траектории) реализует САУ;
- 3) команду “Пуск ракеты с максимальной дальности пуска $D_{pmax}(R(ИС-ИП))$ по заданной цели” реализует система “БЦВМ-алгоритм + летчик”;
- 4) команду “Возврат в строй ИС” реализует САУ (мгновенный разворот ИС на выбранный УС, траектория параллельного сближения с УС и полет по этой траектории);

5) обеспечивают осмотрительность и ситуационную осведомленность К(ИС)-II системы ТКС и ИИС СОЭ.

Объект УС представляется Интел/агентом УС.

Информационная компонента. Не требуется.

Компонента миссии.

УС реализует полетное задание и не реагирует ни на какие коллизии.

Исполнительная компонента. САУ реализует прямолинейную траекторию из задания на миссию УС.

Объект ракета R(воздух–воздух) представляется Интел/агентом R(воздух–воздух).

Информационная компонента Интел/агента R(воздух–воздух):

а) R(воздух–воздух) на борту истребителя К(ИС)-II или К(ИП)-II:

– при получении соответственно от Интел/агента К(ИС)-II или Интел/агента К(ИП)-II координат цели и сигнала “Пуск R(ИС/ИП – заданная цель)” ракета переходит в состояние п. б);

б) R(воздух–воздух) в полете (ракета наводится на заданную цель):

– при получении от бортового измерительного устройства ракеты сигнала “Цель применила противоракетный маневр “г.о” на дальности ракеты до цели большей $D_{г.о}(R(ИС))$ ” ракета перестает наводиться на цель (цель не поражена),

– при получении от бортового измерительного устройства ракеты сигнала “Попадание в цель” ракета уничтожает цель.

Компонента миссии Интел/агента R(воздух–воздух).

До момента поступления сигнала “Пуск R(ИС/ИП – заданная цель)” ракета находится на борту К(ИС)-II или К(ИП)-II (состояние п. а). При поступлении этой команды ракета выполняет этап полета “Наведение на заданную цель” (состояние п. б).

Исполнительная компонента Интел/агент R(воздух–воздух).

1. САУ ракеты реализует траекторию параллельного сближения с заданной целью. Полет происходит с постоянной заданной средней скоростью. При отсутствии противоракетного маневра цели на дальности до цели большей $D_{г.о}(R(ИС))$ ракета уничтожает цель.

2. При реализации атакуемой целью противоракетного маневра “г.о” на интервале времени от момента старта ракеты до момента достижения ею дальности до цели $D_{г.о}(ИС–ИП)$ наведение ракеты срывается и цель остается непораженной.

8.3. Блок “Сценарий использования варианта целераспределения”.
Входная информация в блок:

– запрашиваемый вариант целераспределения, содержащий набор парных взаимодействий Интел/агентов;

– параметры для настройки мат/моделей бортовых измерительных систем и бортовых исполнительных систем наблюдаемых объектов ИС, ИП, УС, ракет R(воздух–воздух), используемых соответственно в информационных и исполнительных компонентах соответствующих Интел/агентов.

В блоке содержится мат/модель сценария использования варианта целераспределения, на которой производится моделирование взаимодействия Интел/агентов тех ИС, ИП, УС и атакующих их ракет, которые входят в поступивший вариант целераспределения. В блоке имеется процедура расчета (по результатам моделирования варианта целераспределения) значений критериев оценки вариантов целераспределения (альтернатив):

– K_1 : количество сорванных атак ИП-УС (т.е. атакованный УС остался цел),

– K_2 : количество сбитых ИП и ИП, отвлеченных на блокирование ИС (т.е. ИП реализовал противоракетный маневр “г.о”),

– K_3 : количество сохраненных УС.

Для всех критериев справедливо: “чем больше, тем лучше”.

8.4. Пример определения приоритетного варианта целераспределения в базе знаний БОСЭС (ИС) – ВГБ. Для демонстрации работы мат/ модели в блоке “Сценарий использования альтернативы” авторы статьи разработали алгоритм имитации работы Интел/агентов во фрагментах целераспределения ИС-ИП-УС. Программная реализация этого алгоритма представлена в [6].

Моделирование фрагмента в программе [6] начинается с момента получения каждым К(ИС)-II цели на атаку в соответствии с принятым от К(ИС)-I вариантом целераспределения. При моделировании ранги истребителей К(ИС)-II и К(ИП)-II не обозначаются, а соответствующие ИС, ИП обозначаются условными порядковыми номерами (например, ИС-I, ИС-II), которые в ряде случаев опускаются. Условные порядковые номера присваиваются и УС.

Блок базы знаний БОСЭС(ИС)-ВГБ. “Сценарий использования варианта целераспределения”. В земной системе координат ХОZ на плоскости на борту К(ИС)-I наблюдаются летящие на одной высоте ИП, ИС, УС.

В блок поступает текущая информация:

- координаты и векторы скоростей ИП, ИС, УС,
- варианты целераспределения ИС (рис. 3, 4).

Все объекты (УС, ИС, ИП, $R(ИС)$, $R(ИП)$) в вариантах целераспределения действуют в горизонтальной плоскости ХОZ и имеют постоянные по модулю скорости полета.

Рассмотрим вариант целераспределения, имеющий следующие независимые фрагменты:

Фрагмент варианта целераспределения типа (ИС-ИП-УС):

– атака ИП-УС (ИП мгновенно ложится на траекторию параллельного сближения с УС, который летит прямолинейно с постоянным вектором скорости). На ИП $R(ИП-УС)$ пускается с максимальной дальности пуска $D_{pmax}(R(ИП-УС))$ и сразу летит по траектории параллельного сближения с постоянной средней скоростью $V_{cp}(R(ИП))$. Фиксируется время пуска (ниже это событие отмечаем индексом “п”) ракеты $t_p(R(ИП-УС))$ и время $t_{поп}(R(ИП-УС))$ ее попадания в УС (событие “попадание” отмечено индексом “поп”).

Начальные условия для моделирования этой части фрагмента: координаты x, z для УС, ИП; модули скоростей $V(УС)$, $V(ИП)$, причем всегда $V(УС) < V(ИП)$; $D_{pmax}(R(ИП-УС))$, $V_{cp}(R(ИП))$.

Моделирование фрагмента завершается в момент времени $t_{stop} = t_{поп}(R(ИП-УС))$.

В мат/модели сценария использования варианта целераспределения реализуется:

– атака ИС-ИП (ИС мгновенно ложится на траекторию параллельного сближения с ИП); на ИС $R(ИС-ИП)$ пускается с $D_{pmax}(R(ИС-ИП))$ и сразу летит по траектории параллельного сближения с постоянной средней скоростью $V_{cp}(R(ИС))$;

– фиксация при моделировании времени $t_p(R(ИС-ИП))$ пуска $R(ИС-ИП)$, времени $t_{г.о}(R(ИС-ИП))$ достижения $R(ИС-ИП)$ дальности $D_{г.о}(R(ИС))$ до атакуемого ИП и времени $t_{поп}(R(ИС-ИП))$ попадания $R(ИС-ИП)$ в ИП.

Для определения значения критериев K_1, K_2, K_3 для этого фрагмента строится временная шкала, на которой откладываются времена пуска ракет $R(ИП-УС)$, $R(ИС-ИП)$, время $t_{поп}(R(ИП-УС))$ попадания $R(ИП-УС)$ в УС, время $t_{г.о}(R(ИС-ИП))$ достижения $R(ИС-ИП)$ дальности $D_{г.о}(R(ИС))$ до ИП, время $t_{поп}(R(ИС-ИП))$ попадания $R(ИС-ИП)$ в ИП.

В мат/модели “Сценарий использования альтернативы” результаты моделирования альтернативы обрабатываются следующим алгоритмом:

а) при $t_{поп}(R(ИП-УС)) > t_{поп}(R(ИС-ИП))$.

Итог для оценки значения критериев: K_1 – атака ИП-УС сорвана; K_2 – ИС блокирован;

K_3 – УС не сбит.

Если событие п. а) не случилось (моделирование фрагмента завершилось раньше определения $t_{поп}(R(ИС-ИП))$), то рассматриваются следующие п. б) и в):

б) при $t_{поп}(R(ИП-УС)) < t_{г.о}(R(ИС-ИП))$ и нет п. а):

– УС сбит (атака ИП-УС успешна), ИП и ИС целы (атака ИС-ИП сорвана, так как ИП довел свою ракету до УС и сорвал противоракетным маневром “г.о” наведение $R(ИС-ИП)$).

Использование ИП этого противоракетного маневра “г.о” в блоке “Сценарий использования варианта целераспределения” не моделируется. Фиксируются только факты его использования и атаки/блокировки ИС истребителем ИП.

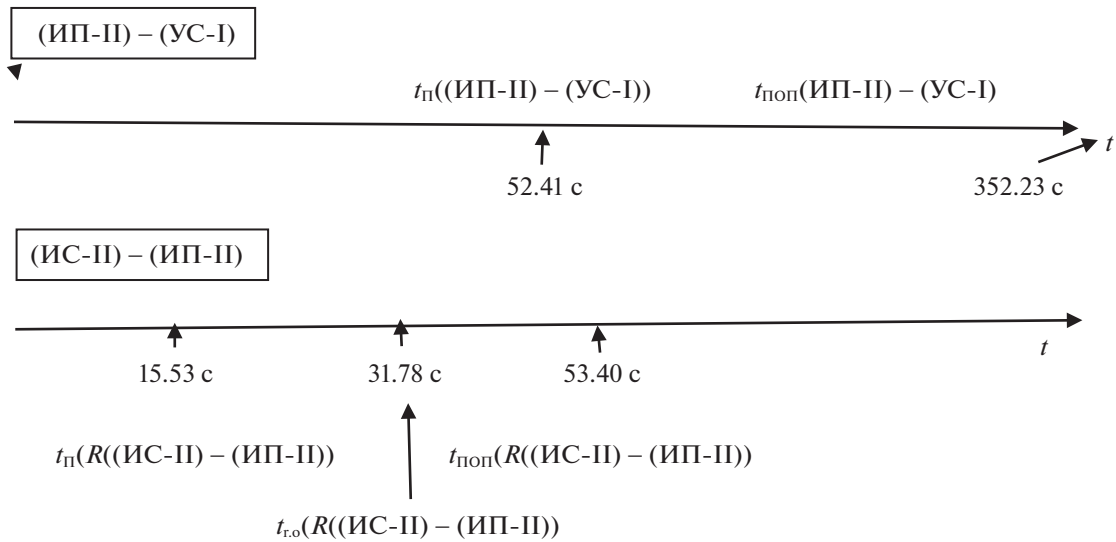


Рис. 5. Шкала абсолютного времени с результатами мат/моделирования варианта целераспределения

Итог для оценки значения критериев: K_1 – атака ИП-УС не сорвана; K_2 – ИС блокирован ИП; K_3 – УС сбит;

в) при $t_{\text{поп}}(R(\text{ИП-УС})) \geq t_{\text{r.o}}(R(\text{ИС-ИП}))$ и нет п. а):

– УС сбит (атака ИП-УС не сорвана), ИП сбит (атака ИС-ИП успешна, противоракетный маневр “г.о” в этих условиях не может сорвать наведение $R(\text{ИС-ИП})$), ИС цел.

Итог для оценки значения критериев: K_1 – атака ИП-УС не сорвана, УС сбит; K_2 – ИС цел; K_3 – ИП сбит.

Для примера работы блока “Сценарий использования варианта целераспределения (альтернативы)” приведем результаты мат/моделирования варианта целераспределения в группе двух УС (УС-I и УС-II) и двух ИС (ИС-I и ИС-II). Эту группу атакуют два ИП (ИП-I и ИП-II). Моделируется вариант целераспределения, состоящий из двух независимых фрагментов (рис. 4):

- фрагмент 1: ИП-I атакует УС-II, а ИС-I атакует этот ИП-I,
- фрагмент 2: ИП-II атакует УС-I, ИС-II атакует этот ИП-II.

Размещение объектов взято из рис. 4. Результаты моделирования фрагмента 2 показаны на рис. 5 и в табл. 5.

Таблица 5. Значения критериев варианта целераспределения, показанного на рис. 4

Фрагмент варианта	Критерии оценки вариантов целераспределения		
	K_1	K_2	K_3
Фрагмент 1: атака (ИП-I–УС-II) и атака (ИС-I–ИП-I)	0 Атака (ИП-I–УС-II) не сорвана	1 ИП-I сбит	2-1 УС-II сбит
Фрагмент 2: атака (ИП-II–УС-I) и (ИС-II–ИП-II)	0 Атака (ИП-II–УС-I) не сорвана	1 ИП-II сбит	2-1 УС-I сбит
Итог: оценка варианта целераспределения	0	2	0

Таблица 6. Итоговая матрица приоритетов вариантов целераспределения по критериям K_1, K_2, K_3

Вариант целераспределения	Приоритеты по критериям вариантов целераспределения (по результатам моделирования)		
	K_1	K_2	K_3
Вариант № 1 (это вариант, показанный на рис. 4, значения его критериев представлены в табл. 5)	0	2	0
Вариант № 2	1	1	1
Вариант № 3	2	2	2

Пусть было промоделировано в блоке “Сценарий использования варианта целераспределения (альтернативы)” три варианта целераспределения. Итоговая матрица приоритетов вариантов целераспределения по критериям K_1, K_2, K_3 показана в табл. 6.

8.5. Блок “Расчет итоговых приоритетов вариантов целераспределения (альтернатив)” в базе знаний БОСЭС (ИС) – ВГБ. Итоговая (по результатам моделирования обоих фрагментов) матрица приоритетов вариантов целераспределения по критериям K_1, K_2, K_3 (табл. 6) поступает в блок “Расчет итоговых приоритетов вариантов целераспределения (альтернатив)”. В блоке поступившая матрица преобразуется в матрицу приоритетов с нормированными на единицу столбцами – нормированную матрицу приоритетов, которая принимает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0 \\ 0.32 & 0.2 & 0.33 \\ 0.67 & 0.4 & 0.67 \end{pmatrix}.$$

Пусть К(ИС)-I принял решение на корректировку вектора критериев и назначил критерий K_1 предпочтительным двум остальным критериям. Тогда в результате оперативной корректировки экипажем приоритетов критериев, согласно табл. 4, взятой из [5], в базе знаний БОСЭС(ИС)-ВГБ появится скорректированный вектор приоритетов критериев:

$$\begin{pmatrix} 0.61 \\ 0.19 \\ 0.19 \end{pmatrix}.$$

В блоке производится расчет итоговых приоритетов смоделированных вариантов целераспределения:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0 \\ 0.32 & 0.2 & 0.32 \\ 0.67 & 0.4 & 0.67 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0.61 \\ 0.19 \\ 0.19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.08 \\ 0.41 \\ 0.61 \end{pmatrix}.$$

На ИУП кабины предъявляется К(ИС)-I рекомендуемый вариант целераспределения № 3, который имеет наибольший итоговый приоритет 0.61.

Заключение. Разработан оперативный метод многокритериального выбора альтернативы, применение которого в базах знаний БОСЭС не требует непосредственного участия экипажа. Это позволяет использовать его в базах знаний интеллектуальных систем, размещаемых как на пилотируемых, так и на беспилотных объектах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Федунов Б.Е.* Бортовые интеллектуальные системы тактического уровня для антропоцентрических объектов (примеры для пилотируемых летательных аппаратов). М.: Де Либри, 2018. 246 с.
2. *Саати Т., Керн К.* Аналитическое планирование. Теория и практика. М.: Радио и связь, 1991.
3. *Городецкий В.И.* Самоорганизация и многоакцентные системы. I. Модели агентной самоорганизации // Изв. РАН. ТиСУ. 2012. № 2. С. 92–120.
4. *Федунов Б.Е.* Интеллектуальные агенты в базах знаний бортовых оперативно советующих экспертных систем типовых ситуаций функционирования антропоцентрического объекта // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 6. С. 90–102.
5. *Пиявский С.А.* Формулы для вычисления универсальных коэффициентов при принятии многокритериальных решений // Онтология проектирования. 2019. Т. 9. № 2 (32). С. 282–298.
6. *Зуб В.П., Кордонский И.Т.* Компьютерная программа моделирования заданного фрагмента варианта целераспределения. 2020. ММОАЕС“<https://yadi.sk/d/amZLhg6kb2ZoQA>.

**РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ
И ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ**

УДК 004.932

**МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ СВЕРХРАЗРЕШЕНИЯ
ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИЗОБРАЖЕНИЙ В УСЛОВИЯХ
АППЛИКАТИВНЫХ ПОМЕХ**

© 2021 г. А. Ю. Иванков^{a,*}, С. В. Саввин^{a,**}, А. А. Сирота^{a,***}

^a Воронежский государственный ун-т, Воронеж, Россия

*e-mail: ivankov@cs.vsu.ru

**e-mail: savvin_s_v@sc.vsu.ru

***e-mail: sir@cs.vsu.ru

Поступила в редакцию 26.02.2020 г.

После доработки 12.11.2020 г.

Принята к публикации 25.01.2021 г.

Рассмотрена задача построения многокадрового сверхразрешения на основе обработки последовательности изображений низкого разрешения в условиях аппликативных помех. Последние возникают в виде распределенных участков ложных или аномальных наблюдений на изображениях низкого разрешения и рассматриваются как дополнительный фактор снижения качества исходных изображений, отличающийся нерегулярным характером расположения областей низкого или нулевого разрешения. Проанализированы существующие методы решения данной задачи с помощью моделей спиновых стекол и их разновидностей, а также моделей случайных марковских полей. Описан предлагаемый авторами метод, базирующийся на использовании рекуррентных алгоритмов оптимальной условно-линейной фильтрации последовательности изображений с низким разрешением в сочетании с проведением суперпиксельной сегментации и Expectation-Maximization-кластеризации (EM-кластеризации) для выявления участков, пораженных аппликативными помехами. Синтез алгоритмов условно-линейной фильтрации рассмотрен как в обычной, так и в адаптивной постановке с учетом возможной неопределенности относительно параметров обработки и средств регистрации. Проведено экспериментальное исследование для сравнения алгоритмов на наборах тестовых изображений. Анализ результатов экспериментов показал определенные преимущества развиваемого подхода для синтеза алгоритмов построения сверхразрешения в адаптивной постановке, заключающиеся в повышении точности и структурной схожести восстановления изображения высокого разрешения по сравнению с аналогами.

DOI: 10.31857/S0002338821030070

Введение. Разрешение цифровых изображений зависит от характеристик систем, формирующих и регистрирующих эти изображения. Кроме того, на разрешение изображений влияют ограничения, возникающие при их передаче по каналам связи. Для эффективной работы многих систем обработки информации требуются изображения с высоким разрешением (ВР), которые обеспечивают требуемый уровень детализации сцен, но не могут быть получены аппаратно, прежде всего, в силу ограниченных возможностей средств регистрации и средств передачи данных. В этом плане известен общий подход к построению алгоритмов многокадрового сверхразрешения (СР) [1–12], позволяющий восстанавливать изображения с ВР за счет накопления последовательности изображений с низким разрешением (НР). При использовании данного подхода из наблюдаемой последовательности изображений НР, отображающими одну и ту же сцену, при наличии между ними дробных пиксельных смещений (не кратных одному пикселю НР) создается изображение, обладающее высоким разрешением.

Еще одним важным фактором, выделяющим качество регистрируемых изображений, является то, что получаемые графические материалы нередко подвержены воздействию не только аддитивных, но и так называемых аппликативных помех (АП) (затенение объектов, наличие пораженных участков на изображениях и аномальных наблюдений). Воздействие последних приводит к появлению распределенных участков аномальных наблюдений на каждом исходном изображении, которые также можно рассматривать как дополнительный фактор снижения разрешения,

отличающийся *нерегулярным* характером расположения областей низкого или нулевого разрешения.

В настоящее время известны несколько различных алгоритмов построения СР [1, 2], однако только в некоторых из них содержатся попытки решить задачу компенсации потерь в условиях аппликативных искажений с одновременным повышением разрешения. При этом часть этих алгоритмов [3, 4] направлена на борьбу с воздействием аппликативных помех за счет закрашивания пораженных областей изображений НР, в то время как другие алгоритмы [5–12] основываются на накоплении и обработке последовательности изображений НР. К этим работам относятся и предшествующие публикации авторов данной статьи [8–12], базирующиеся на использовании методов и алгоритмов оптимальной фильтрации последовательности изображений калмановского типа в сочетании с алгоритмами машинного обучения, которые ориентированы на выявление и локализацию участков, пораженных аппликативными помехами.

В то же время в известных работах в недостаточной степени рассмотрены вопросы решения представленной задачи в условиях статистической неопределенности относительно параметров математической модели наблюдений, например, параметров межкадровых сдвигов [11], дисперсии размытия системы формирования изображений [12] и т.п. Постановка задачи в указанных условиях может рассматриваться как постановка задачи синтеза адаптивных относительно параметров используемых моделей алгоритмов оптимальной фильтрации последовательности изображений. Кроме того, в известных работах отсутствуют количественные данные и результаты сравнения известных подходов и алгоритмов, основанных на применении методов оптимальной фильтрации в сочетании с алгоритмами машинного обучения для комплексного решения задачи повышения разрешения изображений в условиях аппликативных помех.

Целью данной работы является исследование алгоритмов построения многокадрового сверхразрешения в условиях аппликативных помех в адаптивной постановке и их сравнение с известными алгоритмами, используемыми или потенциально применимыми для решения рассматриваемой задачи повышения результирующего разрешения последовательности изображений.

1. Анализ известных алгоритмов. 1.1. Алгоритмы, основанные на модели спиновых стекол (АМСС). Алгоритмы, представленные в работах [5, 6], базируются на модели спиновых стекол [13], при этом эта модель используется для моделирования помех, действующих на изображения, а не самих изображений. Здесь и далее изображения рассматриваются как векторы, полученные в ходе построчной разверстки двумерных пиксельных матриц. Пусть $\{\mathbf{y}^{(t)}\}$ – последовательность исходных изображений НР, полученных в моменты времени $t = \overline{1, T}$, из которых требуется воссоздать изображение ВР \mathbf{x} , а $\mathbf{z}^{(t)} \in \{-1, +1\}^M$ – скрытый вектор, определяющий пиксели $\mathbf{y}^{(t)}$, которые подвержены воздействию шума (-1 – присутствие шума, $+1$ – отсутствие шума). Приведем вероятностные модели для $\mathbf{y}^{(t)}$, \mathbf{x} и $\mathbf{z}^{(t)}$, используемые в [5, 6].

Априорное распределение скрытых переменных $\mathbf{z}^{(t)}$ описывается распределением Больцмана:

$$p(\mathbf{z}^{(t)}) = \frac{1}{Z} \exp(-E(\mathbf{z}^{(t)})). \quad (1.1)$$

Энергия $E(\mathbf{z}^{(t)})$ задается следующим образом:

$$E(\mathbf{z}^{(t)}) = -J_{\text{self}} \sum_i z_i^{(t)} - J_{\text{inner}} \sum_{i \sim j} z_i^{(t)} z_j^{(t)}, \quad (1.2)$$

где $i \sim j$ обозначает, что i -й и j -й пиксели располагаются по соседству, константы J_{self} и J_{inner} задаются исходя из свойств шума: коэффициент самосвязи J_{self} характеризует тенденцию распространения локальных областей закрытия (ЛОЗ) аппликативных помех, а коэффициент внутренних связей J_{inner} – степень корреляции между соседними пикселями ЛОЗ. Предполагается, что шум обычно занимает меньшую часть изображения, отсюда $J_{\text{self}} > 0$. Так как аппликативные помехи воздействуют на целые области изображения, а не на отдельные пиксели, то $J_{\text{inner}} > 0$. Так как элементы $\mathbf{z}^{(t)}$ принимают только два значения: ± 1 (модель Изинга), выражения (1.1) и (1.2) являются аналогами модели спиновых стекол.

Условное распределение наблюдений \mathbf{y} , описывается гауссовским законом

$$p(\mathbf{y}^{(t)} | \mathbf{x}, \mathbf{z}^{(t)}) = N(\mathbf{y}^{(t)} | \mathbf{W}^{(t)} \mathbf{x}, \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^{(t)})), \quad (1.3)$$

где $\mathbf{W}^{(t)}$ – оператор, характеризующий воздействие системы формирования наблюдаемых изображений, $\mathbf{B}(\mathbf{z}^{(t)})$ – матрица, обратная к диагональной матрице ковариации, диагональные элементы которой задаются следующим образом:

$$\beta(z_i^{(t)}) = \begin{cases} \beta_H, & z_i^{(t)} = +1, \\ \beta_L, & z_i^{(t)} = -1. \end{cases} \quad (1.4)$$

Здесь $\beta_H > \beta_L$, так как $z_i^{(t)} = +1$ означает большую достоверность, а $z_i^{(t)} = -1$ – меньшую. Априорное распределение \mathbf{x} также описывается гауссовским законом

$$p(\mathbf{x}) = N(\mathbf{x}, 0, (\rho\mathbf{A})^{-1}), \quad (1.5)$$

где ρ – коэффициент точности. В (1.5) \mathbf{A} – матрица точности, обладающая сглаживающим эффектом:

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{cases} |\mathbf{N}(i)|, & i = j, \\ -1, & i \sim j, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (1.6)$$

где $\mathbf{N}(i) = \{j | i \sim j\}$ – количество соседей i -го пикселя изображения.

Изображение ВР \mathbf{x} можно определить как математическое ожидание апостериорного распределения $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$, однако это нельзя сделать в явном аналитическом виде из-за наличия скрытых переменных. Поэтому в [13] предлагается использовать метод вариационного байесовского вывода, в котором апостериорное распределение по набору ненаблюдаемых переменных аппроксимируется другим распределением, называемым вариационным $p(\mathbf{z}|\mathbf{x}) \approx q(\mathbf{z})$ таким образом, что дивергенция Кульбака–Лейблера между двумя распределениями была бы минимальной.

При этом численным решением для \mathbf{x} является математическое ожидание $\boldsymbol{\mu}$ гауссовского распределения:

$$q^*(\mathbf{x}) = N(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\Sigma}_x), \quad \boldsymbol{\mu}_x = \boldsymbol{\Sigma}_x \sum_{t=1}^T \mathbf{W}^{(t)\top} \langle \mathbf{B}(\mathbf{z}^{(t)}) \rangle \mathbf{y}^{(t)}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_x = \left(\rho\mathbf{A} + \sum_{t=1}^T \mathbf{W}^{(t)\top} \langle \mathbf{B}(\mathbf{z}^{(t)}) \rangle \mathbf{W}^{(t)} \right)^{-1}, \quad (1.7)$$

где $\langle \dots \rangle$ – оператор математического ожидания, а диагональные элементы ожидаемой обратной матрицы ковариации $\langle \mathbf{B}(\mathbf{z}^{(t)}) \rangle$ задаются следующим образом:

$$\langle \beta(z_i^{(t)}) \rangle = q(z_i^{(t)} = 1)\beta_H + q(z_i^{(t)} = -1)\beta_L. \quad (1.8)$$

Из-за большой размерности $\boldsymbol{\Sigma}_x$ затруднительно получить эту матрицу напрямую. Однако из (1.7) следует, что

$$\mathbf{S}\boldsymbol{\mu}_x = \mathbf{b}, \quad \mathbf{S} = \boldsymbol{\Sigma}_x^{-1} = \rho\mathbf{A} + \sum_{t=1}^T \mathbf{W}^{(t)\top} \langle \mathbf{B}(\mathbf{z}^{(t)}) \rangle \mathbf{W}^{(t)}, \quad \mathbf{b} = \sum_{t=1}^T \mathbf{W}^{(t)\top} \langle \mathbf{B}(\mathbf{z}^{(t)}) \rangle \mathbf{y}^{(t)}. \quad (1.9)$$

Таким образом, для нахождения $\boldsymbol{\mu}$ достаточно решить линейное уравнение (1.9) с учетом сильной разреженности матрицы $\boldsymbol{\Sigma}_x$. Для этого предлагается использовать метод сопряженных градиентов [14].

Оптимальное вариационное распределение для значений $z_i^{(t)}$ описывается распределением Бернулли:

$$q^*(z_i^{(t)}) = \text{Ber}(z_i^{(t)} | v_{ii}) = v_{ii}^{\frac{1}{2}(1+z_i^{(t)})} (1-v_{ii})^{\frac{1}{2}(1-z_i^{(t)})}, \quad v_{ii} = \text{sig } 2\lambda_{ii} = \frac{1}{1 + \exp(-2\lambda_{ii})}, \quad (1.10)$$

$$\lambda_{ii} = J_i + \sum_{j \in \mathbf{N}(i)} J_{ij} \langle z_{ij} \rangle + \frac{1}{4} \left(\ln \frac{\beta_H}{\beta_L} - (\beta_H - \beta_L) \langle e_{ii}^2 \rangle \right),$$

где sig – сигмоида, $e_{ii} = \mathbf{y}_{ii} - [\mathbf{W}_t \mathbf{x}]_i$ – ошибка в i -м пикселе t -го наблюдения (изображения НР), ожидаемое значение которой может быть приближенно вычислено:

$$\langle e_{ii}^2 \rangle \approx (\mathbf{y}_{ii} - \mathbf{w}_{ii}^T \boldsymbol{\mu}_x)^2, \quad (1.11)$$

где \mathbf{w}_{ii} – i -я строка матрицы \mathbf{W}_t .

С учетом описанных выше соотношений алгоритм для получения изображения ВР принимает следующий вид.

1. $l \leftarrow 0$.
2. $l \leftarrow l + 1$.
3. Найти $\boldsymbol{\mu}_x^{(l)}$ ($\boldsymbol{\mu}_x$ на l -шаге), согласно (1.7)–(1.9), используя метод сопряженных градиентов.
4. Пересчитать $v_{ii}^{(l)}$ (коэффициенты v_{ii} на l -шаге), согласно (1.10).
5. Повторять 2–4 пока, не выполнится условие $\|\boldsymbol{\mu}_x^{(l)} - \boldsymbol{\mu}_x^{(l-1)}\| / \|\boldsymbol{\mu}_x^{(l-1)}\| < \varepsilon$.
6. $\tilde{\mathbf{x}} \leftarrow \boldsymbol{\mu}_x^{(l)}$.

1.2. АМСС с учетом инерционного движения АП (АМССИД). Авторы работы [6] дополняют приведенный выше подход, исходя из предположения, что области, пораженные АП, находятся не в случайных местах изображений НР, а инерционно движутся между кадрами. Для этого в модель вводится вектор $\boldsymbol{\theta}^{(t)} = [\theta_1^{(t)}, \theta_2^{(t)}]^T$, описывающий смещение АП между наблюдениями t и $t+1$ в декартовых координатах. С учетом этого функция энергии (E) определяется как

$$E(\mathbf{z}^{(t)}, \mathbf{z}^{(t+1)}, \boldsymbol{\theta}^{(t)}, \mathbf{J}) = -J_{\text{self}} \sum_i z_i^{(t+1)} - J_{\text{inner}} \sum_{i \neq j} z_i^{(t+1)} z_j^{(t+1)} - J_{\text{move}} \mathbf{z}^{(t+1)T} G(\boldsymbol{\theta}^{(t)}) \mathbf{z}^{(t)}, \quad (1.12)$$

где $G(\boldsymbol{\theta}^{(t)})$ – матрица сдвига и $G(\boldsymbol{\theta}^{(t)}) \mathbf{z}^{(t)}$ – предсказанное положение АП на кадре $t+1$, константа $J_{\text{move}} > 0$ описывает степень сходства областей АП между соседними кадрами.

Здесь априорное распределение $G(\boldsymbol{\theta}^{(t)}) \mathbf{z}^{(t)}$ задается исходя из того, что процесс смещения является марковским и ЛОЗ с большой вероятностью сохраняют направление движения:

$$p(\boldsymbol{\theta}) = p(\boldsymbol{\theta}^{(1)}) \prod_{t=1}^{T-1} N(\boldsymbol{\theta}^{(t+1)} | \boldsymbol{\theta}^{(t)}, (r\mathbf{I})^{-1}), \quad (1.13)$$

где r – коэффициент точности, \mathbf{I} – единичная матрица.

С помощью метода Лапласа плотность вариационного распределения $\boldsymbol{\theta}$ описывается как

$$q^*(\boldsymbol{\theta}) = N(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\mu}_\theta, \boldsymbol{\Sigma}_\theta), \quad (1.14)$$

где $\boldsymbol{\Sigma}_\theta = \langle \bar{\mathbf{H}} \rangle^{-1}$, $\langle \bar{\mathbf{H}} \rangle$ – гессиан $\langle \ln q^*(\boldsymbol{\mu}_\theta) \rangle_{q(\mathbf{z})}$.

С учетом вышеизложенных соображений значения λ_{ii} вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_{ii} = & J_{\text{self}} + J_{\text{inner}} \sum_{j \in N(i)} \langle z_j^{(t)} \rangle + J_{\text{move}} [\bar{G}^{(t-1)} \langle \mathbf{z}^{(t-1)} \rangle + \bar{G}^{(t)T} \langle \mathbf{z}^{(t+1)} \rangle]_i + \\ & + \frac{1}{2} J_{\text{move}} \sum_{j,l,k} [\bar{G}_{\theta_k \theta_{ij}}^{(t-1)} \langle z_j^{(t-1)} \rangle \boldsymbol{\Sigma}_{\theta kl} + \bar{G}_{\theta_k \theta_{ji}}^{(t)} \langle z_j^{(t+1)} \rangle \boldsymbol{\Sigma}_{\theta kl}] + \frac{1}{4} \left(\ln \frac{\beta_H}{\beta_L} - (\beta_H - \beta_L) \langle e_{ii}^2 \rangle \right), \end{aligned} \quad (1.15)$$

где $\bar{G}_{\theta_k}^{(t)} = \partial G(\boldsymbol{\mu}_\theta^{(t)}) / \partial \theta_k^{(t)}$ и $\bar{G}_{\theta_k \theta_{ij}}^{(t)} = \partial^2 G(\boldsymbol{\mu}_\theta^{(t)}) / \partial \theta_l^{(t)} \partial \theta_k^{(t)}$.

1.3. Алгоритмы, основанные на моделях марковских случайных полей (АМСП). Подход, представленный в [6], основывается на использовании модели случайных марковских полей [15]. Модель наблюдений описывается следующим соотношением:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{O}_t \mathbf{D} \mathbf{H}_t \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega}_t, \quad (1.16)$$

где оператор \mathbf{O}_t удаляет пораженные аппликативными помехами пиксели, оператор \mathbf{D} выполняет прореживание изображения ВР, оператор \mathbf{H}_t характеризует воздействие системы формирования наблюдаемых изображений, $\boldsymbol{\omega}_t$ – гауссовский шум. Считается, что данные операторы для

получения наблюдаемых изображений $\mathbf{H}\mathbf{P}$ либо известны, либо могут быть определены. При этом процедура оценки \mathbf{O}_t предполагает процедуру проведения независимой сегментации каждого изображения $\mathbf{H}\mathbf{P}_t$ на полезные и ложные наблюдения, которая будет рассмотрена ниже.

Изображение $\mathbf{B}\mathbf{P}$ \mathbf{x} рассматривается как неоднородное адаптивное случайное марковское случайное поле (модель DAMRF) [15], что позволяет сохранить неоднородности и детали изображения $\mathbf{B}\mathbf{P}$ \mathbf{x} . Совместная плотность распределения \mathbf{x} задается следующим образом:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\sum_{c \in C} V_c(\mathbf{x})\right), \quad (1.17)$$

где Z – нормировочная константа, C – множество всех клик, $V_c(\mathbf{x})$ – потенциальные функции, такие, что

$$\sum_{c \in C} V_c(\mathbf{x}) = \sum_{c \in C} g(d_c \mathbf{x}). \quad (1.18)$$

Выбор модели существенен, так как она отражает информацию о гладкости изображения, используя меру локальных пространственных изменений $d_c \mathbf{x}$. Модель DAMRF адаптивно оценивает уровень сходства пикселей для сохранений неоднородностей:

$$g(\eta) = -\gamma \cdot \exp\left(-\frac{\eta^2}{\gamma}\right), \quad (1.19)$$

где η – разница между значениями двух соседних пикселей.

Максимум апостериорной вероятности \mathbf{x} может быть получен на основе постепенной невыпуклой оптимизации (GNC) [15] следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \left(\|\mathbf{y}_t - \mathbf{O}_t \mathbf{D} \mathbf{H}_t \mathbf{x}\|^2 + \beta \sum_{c \in C} V_c(\mathbf{x}) \right), \quad (1.20)$$

где β – коэффициент регуляризации. В ходе оптимизации переменная γ изменяется на каждой итерации по правилу $\gamma^{(i+1)} = k\gamma^{(i)}$, $0 < k < 1$.

2. Алгоритмы, основанные на использовании методов оптимальной фильтрации (АОФ). Подход, предложенный авторами данной работы в [8–10] и развиваемый далее, базируется на применении методов оптимальной линейной фильтрации. Модель состояний, описывающая исходную последовательность изображений, задается следующим соотношением:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k, \quad (2.1)$$

где $k = \overline{1, K}$, \mathbf{x}_{k+1} , \mathbf{x}_k – L -мерные векторы изображений, $L = L_1 L_2$; \mathbf{F}_k – оператор размера $L \times L$, определяющий значения межкадровых сдвигов объектов на изображениях; \mathbf{u}_k – L -мерный центрированный гауссовский случайный вектор с матрицей ковариаций \mathbf{Q}_k .

Каждому изображению \mathbf{x}_k соответствует доступное для наблюдения изображение $\mathbf{H}\mathbf{P}$ (размера $M_1 \times M_2$), характеризующееся M -мерным вектором \mathbf{y}_k ($M = M_1 M_2 < L$). Модель системы формирования изображений, на вход которой поступает изображение \mathbf{x}_k , должна учитывать следующие факторы [8–12]:

- сдвиги и смещения, вызванные перемещением камеры (или объектов) относительно сцены;
- размытие, обусловленное функцией рассеяния фотоприемников;
- однородное прореживание для обеспечения соответствия разрешению наблюдаемых изображений.

Следует также учитывать возможность наличия областей закрытия и аппликативных помех на формируемых изображениях, которые приводят к замещению (полезной) информации о наблюдаемом объекте посторонней (ложной) информацией, не относящейся к объекту наблюде-

ния. Модель наблюдений, соответствующая рассмотренной формирующей системе, задается следующими соотношениями:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{A}_k(\mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k) + \mathbf{B}_k(\tilde{\mathbf{y}}_{k|k-1} + \mathbf{w}_k), \quad \mathbf{A}_k + \mathbf{B}_k = \mathbf{I},$$

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} a_{k1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{kM^2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_k = \begin{pmatrix} b_{k1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & b_{kM^2} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где \mathbf{y}_k – вектор размерности M^2 , соответствующий очередному кадру НР, который поступает на обработку; \mathbf{v}_k – центрированный гауссовский вектор аддитивного шума с матрицей ковариаций \mathbf{R}_k ; $\mathbf{F}_k = \mathbf{I}$, $k = \overline{1, K}$; \mathbf{H}_k – оператор, характеризующий воздействие системы формирования наблюдаемых изображений (по смыслу соответствует оператору $\mathbf{D}\mathbf{H}_l$ модели (1.16)) и учитывающий все перечисленные выше факторы (смещение, прореживание, размытие); $\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k$ – диагональные матрицы со случайными элементами, принимающими значение ноль или единица в случае получения от первичного датчика полезной ($a_{kl} = 1, b_{kl} = 0, l = \overline{1, M}$) или ложной ($a_{kl} = 0, b_{kl} = 1$) информации (\mathbf{A}_k по смыслу соответствует оператору \mathbf{O}_l модели (1.16)); $\tilde{\mathbf{y}}_{k|k-1}$ – прогноз вектора оценки наблюдаемого изображения НР, полученный на основе априорных сведений о характере изображений с учетом обработки $k - 1$ кадра; \mathbf{w}_k – вектор с нулевым средним и матрицей ковариаций \mathbf{S}_k , описывающий отклонение возникающих ложных наблюдений относительно вектора $\tilde{\mathbf{y}}_{k|k-1}$.

Вводятся диагональные матрицы, характеризующие вероятности полезности пикселей блока \mathbf{P}_{Ak} и \mathbf{P}_{Bk} , такие, что $\mathbf{P}_{Ak} + \mathbf{P}_{Bk} = \mathbf{I}$. Диагональные элементы этих матриц содержат вероятности единичных значений $p_{akl} = P(a_{kl} = 1)$, $p_{bkl} = P(b_{kl} = 1)$. Также вводятся матрицы попарных вероятностей совместного появления полезных $\mathbf{P}_{AAk} = \|p_{aklm}\|$ или ложных $\mathbf{P}_{BBk} = \|p_{bklm}\|$ наблюдений для каждой пары пикселей изображения, где $p_{aklm} = P(a_{kl} = 1, a_{km} = 1)$, $p_{bklm} = P(b_{kl} = 1, b_{km} = 1)$, $l, m = \overline{1, M}$.

С использованием полученных моделей может быть проведен синтез двух типов алгоритмов: оптимального в классе линейных алгоритмов фильтрации и оптимального условно-линейного алгоритма фильтрации. Оптимальный в классе линейных алгоритмов фильтрации реализует получение оценки с помощью стандартных соотношений для весовых матриц рекуррентного фильтра, не зависящих от наблюдений. Его возможности подробно рассмотрены в [9, 10]. При этом установлено, что данный тип алгоритма обладает недостаточной эффективностью для построения СР в условиях воздействия аномальных наблюдений и, в частности, аппликативных помех. Другой подход, основанный на применении оптимального условно-линейного алгоритма фильтрации, в развитие предыдущего предполагает использование апостериорной информации о ложных наблюдениях для каждого из получаемых изображений НР. Показано, что в подобных задачах условно-линейный фильтр имеет существенно большую точность восстановления изображения ВР по сравнению с оптимальной в классе линейных оценок.

Для получения оценки изображения ВР здесь используется модель гауссовского случайного поля $\mathbf{x}_1 \sim N(\mathbf{x}_1, \tilde{\mathbf{x}}_{1|0}, \mathbf{P}_{1|0})$ с заданными начальными оценками изображения ВР $\tilde{\mathbf{x}}_{1|0}$ и ее матрицы ковариаций $\mathbf{P}_{1|0}$. В случае условно-линейной фильтрации уравнения для обновления оценки изображения ВР $\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}$ при поступлении очередного кадра \mathbf{y}_k имеют следующий вид [9]:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{x}}_{k|k} = \tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{W}_k(\boldsymbol{\theta}^k)(\mathbf{y}_k - \tilde{\mathbf{y}}_{k|k-1}), \quad \tilde{\mathbf{y}}_{k|k-1} = \mathbf{H}_k \tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}, \quad \mathbf{F}_k = \mathbf{I}, \quad k = \overline{1, K},$$

$$\mathbf{V}_{k\theta} = \mathbf{P}_{k|k-1}(\boldsymbol{\theta}^{k-1})\mathbf{H}_k^T \mathbf{P}_{Ak}^T(\boldsymbol{\theta}^k), \quad \mathbf{W}_k(\boldsymbol{\theta}^k) = \mathbf{V}_{k\theta} \mathbf{U}_{k\theta}^{-1},$$

$$\mathbf{U}_{k\theta} = \mathbf{P}_{AAk\theta} \circ [\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1}(\boldsymbol{\theta}^{k-1})\mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k] + \mathbf{P}_{BBk\theta} \circ \mathbf{S}_k, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k}(\boldsymbol{\theta}^k) = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k|k}(\boldsymbol{\theta}^k) \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}(\boldsymbol{\theta}^{k-1}) - \mathbf{W}_k(\boldsymbol{\theta}^k) \mathbf{U}_{k\theta} \mathbf{W}_k^T(\boldsymbol{\theta}^k) + \mathbf{Q}_k,$$

где векторы $\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}$, $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k}$ — оценка изображения ВР и ее прогноз на следующий кадр; $\mathbf{P}_{k|k}$, $\mathbf{P}_{k+1|k}$ — матрица ковариаций оценки с экстраполяцией на следующий кадр; $\boldsymbol{\theta}^k = \{\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_k\}$ — последовательность двоичных векторов, получаемых в результате сегментации, содержащих единичные значения в позициях пикселей кадра \mathbf{y}_k , которые находятся в областях закрытия; запись вида $\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$ обозначает поэлементное перемножение операторов \mathbf{A} , \mathbf{B} .

В процессе работы условно-линейный фильтр использует дополнительную информационную составляющую $\boldsymbol{\theta}_k$, которая получается в результате сегментации каждого поступающего кадра \mathbf{y}_k и “управляет” изменениями матрицы $\mathbf{W}_k(\boldsymbol{\theta}^k)$ весовых коэффициентов фильтра от шага к шагу (2.3). С целью получения такой дополнительной информации для каждого обрабатываемого изображения НР нами предлагается использовать двухэтапную обработку, основанную на методах машинного обучения и включающую проведение суперпиксельной сегментации [16, 17] с последующей кластеризацией суперпикселей с помощью EM-алгоритма.

Каждый суперпиксель является атомарным регионом (фрагментом) изображения, причем все входящие в него пиксели рассматриваются при дальнейшей обработке как единое целое. Суперпиксельная карта изображения обладает рядом преимуществ по сравнению с обычной регулярной сеткой пикселей. Это связано с тем, что каждый суперпиксель — согласованная единица данных, так как принадлежащие ему пиксели имеют схожий цвет, яркость и текстурные свойства. Такие свойства суперпикселей обуславливают их эффективное использование при решении задач сегментации объектов как с известными, так и с неизвестными свойствами.

В результате применения EM-алгоритма по отношению к полученной карте суперпикселей все исходные пиксели изображения НР разделяются на два класса (полезное изображение и фрагменты АП). Одновременно в процессе выполнения EM-алгоритма определяются апостериорные вероятности полезности пикселей (диагональные элементы $\mathbf{P}_{Ak}(\boldsymbol{\theta}_k)$ и $\mathbf{P}_{Bk}(\boldsymbol{\theta}_k)$), а также двоичный вектор $\boldsymbol{\theta}_k$, единичные значения которого соответствуют пикселям \mathbf{y}_k , не закрытых помехой.

Численное определение элементов матриц $\mathbf{P}_{AAk\theta}$ или ложных $\mathbf{P}_{BBk\theta}$ основано на усреднении элементов $\boldsymbol{\theta}_k$, соответствующих пикселям в окрестностях каждого элемента изображения НР, для которого в $\boldsymbol{\theta}_k$ содержатся единичные и нулевые значения соответственно. Пусть матрица \mathbf{C}_{Aki} имеет значения элементов $\boldsymbol{\theta}_k$ в окрестности i -го единичного элемента $\boldsymbol{\theta}_k$, а матрица \mathbf{C}_{Bkj} — значения $1 - \boldsymbol{\theta}_k$ в окрестности j -го нулевого элемента $\boldsymbol{\theta}_k$. Строки матриц $\mathbf{P}_{AAk\theta}$ и $\mathbf{P}_{BBk\theta}$ соответствуют векторным разверткам матриц $\bar{\mathbf{C}}_{Aki}$ и $\bar{\mathbf{C}}_{Bkj}$, вычисляемых по всем матрицам \mathbf{C}_{Aki} и \mathbf{C}_{Bkj} :

$$\bar{\mathbf{C}}_{Aki} = \mathbf{M}_i\{\mathbf{C}_{Aki}\}, \bar{\mathbf{C}}_{Bkj} = \mathbf{M}_j\{\mathbf{C}_{Bkj}\}.$$

3. Синтез алгоритмов оптимальной фильтрации в адаптивной постановке (АОФА). Реализация алгоритмов СР предполагает значительные вычислительные и временные затраты. Для достижения наибольшей скорости обработки этапы сегментации (определения частей полезного изображения и областей локализации АП) и регистрации (определения параметров межкадровых сдвигов) проводятся отдельно, лишь на основе кадров НР. Однако очевидно, что наибольшая эффективность обработки может быть достигнута при проведении этих этапов совместно с процедурой повышения разрешения с учетом неопределенности относительно некоторых параметров обработки. Это позволяет подобрать параметры алгоритма СР, обеспечивающие наилучший (по заданному критерию) результат оценивания изображения ВР.

В рамках данного подхода в моделях (2.3) предлагается ввести зависимость от случайного вектора $\boldsymbol{\delta}$, компоненты которого соответствуют параметрам обработки k -го кадра. Например, вектор $\boldsymbol{\delta}$ может содержать значения параметров межкадровых сдвигов, дисперсию размытия, обусловленного функцией рассеяния фотоприемников, или параметры алгоритма сегментации k -го кадра.

В качестве примера рассмотрен вариант с подбором параметров сдвига. При этом вектор $\boldsymbol{\delta}$ содержит параметры аффинного преобразования, аппроксимирующих межкадровые сдвиги в ВР $\boldsymbol{\delta} = (\Delta x, \Delta y, \Delta \theta)^T$. Области возможных значений для $\Delta x, \Delta y, \Delta \theta$ считаются известными и дискретизируются решеткой отсчетов, содержащей N_δ узлов, для каждого из которых задается вероятность реализации $p_{\delta i}$. При поступлении очередного кадра для каждого возможного значения

вектора неизвестных параметров $\delta = \mathbf{d}_i^{(k)}$, $i = \overline{1, N_\delta}$, вычисляются условные оценки изображения ВР $\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}(\mathbf{d}_i^{(k)})$ на основе соотношений (2.1)–(2.3), где используется условный оператор $\mathbf{H}_k = \mathbf{H}_k(\mathbf{d}_i^{(k)})$, заданный на базе i -го возможного значения вектора $\mathbf{d}_i^{(k)}$.

С помощью условных оценок $\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}(\mathbf{d}_i^{(k)})$ определяются апостериорные плотности $P(\mathbf{d}_i^{(k)} | \mathbf{y}_k)$:

$$P(\mathbf{d}_i^{(k)} | \mathbf{y}_k) = \frac{P(\mathbf{y}_k | \mathbf{d}_i^{(k)}) p_{\delta i}}{\sum_{i=1}^{N_\delta} (P(\mathbf{y}_k | \mathbf{d}_i^{(k)}) p_{\delta i})},$$

$$P(\mathbf{y}_k | \mathbf{d}_i^{(k)}) = ((2\pi)^{M^2} |\mathbf{U}_k(\mathbf{d}_i^{(k)})|)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} e(\mathbf{d}_i^{(k)})\right), \quad (2.4)$$

$$e(\mathbf{d}_i^{(k)}) = (\mathbf{y}_{k|k-1} - \mathbf{H}_k(\mathbf{d}_i^{(k)}) \tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T \mathbf{U}_k^{-1}(\mathbf{d}_i^{(k)}) (\mathbf{y}_{k|k-1} - \mathbf{H}_k(\mathbf{d}_i^{(k)}) \tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}).$$

Безусловные относительно вектора δ оценки $\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}$ и соответствующие ковариационные матрицы $\mathbf{P}_{k|k}$ вычисляются как взвешенные суммы условных оценок:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \tilde{\mathbf{x}}_{k|k} = \sum_{i=1}^{N_\delta} \tilde{\mathbf{x}}_{k|k}(\mathbf{d}_i^{(k)}) P(\mathbf{d}_i^{(k)} | \mathbf{y}_k),$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \sum_{i=1}^{N_\delta} \mathbf{P}_{k|k}(\mathbf{d}_i^{(k)}) P(\mathbf{d}_i^{(k)} | \mathbf{y}_k) + \sum_{i=1}^{N_\delta} \mathbf{C}_k P(\mathbf{d}_i^{(k)} | \mathbf{y}_k), \quad \mathbf{P}_{k+1|k} = \mathbf{P}_{k|k} + \mathbf{Q}_k, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{C}_k = (\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}(\mathbf{d}_i^{(k)}) - \tilde{\mathbf{x}}_{k|k})(\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}(\mathbf{d}_i^{(k)}) - \tilde{\mathbf{x}}_{k|k})^T.$$

В выражении (2.5) функционал правдоподобия $P(\mathbf{y}_k | \mathbf{d}_i^{(k)})$ рассчитывается с учетом ошибки $e(\mathbf{d}_i^{(k)})$ между кадром \mathbf{y}_k и проекциями $\tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ на сетку НР при конкретном значении вектора параметров сдвигов $\delta = \mathbf{d}_i^{(k)}$. По мере накопления информации те апостериорные вероятности $P(\mathbf{d}_i^{(k)} | \mathbf{y}_k)$, которые близки к истинному значению неопределенного параметра δ , увеличиваются. При этом результирующая оценка с большим весом использует условные фильтры, отражающие истинное значение параметра δ .

Особенностями реализации предлагаемого процесса адаптивной обработки информации является следующее. Для повышения быстродействия и сокращения сложности вычислений, в частности для исключения необходимости обращения и выполнения других операций для матриц большого размера, предлагается реализовать обработку изображений перекрывающимися блоками небольшого размера. Изображения делятся на N_1 и N_2 блоков по вертикали и горизонтали соответственно. По завершению обработки изображение формируется из центральных (неперекрывающихся) фрагментов блоков. Размер блоков изображения ВР: $s_{HE} \times s_{HE}$, где $s_{HE} = s_H + 2\Delta s_H$, $s_H = L_1/N_1 = L_2/N_2$; блоков НР: $s_{LE} \times s_{LE}$, где $s_{LE} = s_L + 2\Delta s_L$, $s_L = M_1/N_1 = M_2/N_2$. Параметры Δs_H и Δs_L определяют размеры перекрытия блоков (ширину области, в которой значения пикселей взаимозависимы). При этом следует отметить, что суперпиксельная сегментация проводится для всего изображения целиком.

Такой подход к обработке обеспечивает возможность гибкого регулирования сложности вычислений. Во-первых, в процессе вычисления оценки условно-линейного фильтра (2.4) коррекция осуществляется только для тех блоков изображения, для которых хотя бы один элемент θ_k^{pq} ($p = \overline{1, N_1}$, $q = \overline{1, N_2}$) содержит единичное значение (хотя бы один элемент является полезным). Во-вторых, для вычисления апостериорных плотностей адаптивного фильтра $P(\mathbf{d}_i^{(k)} | \mathbf{y}_k)$ может использоваться лишь несколько ($N_b \ll N_1 N_2$) “информативных” блоков кадра – наиболее детальных блоков, не закрытых АП, которые могут быть выбраны, например, по максимуму средней магнитуды градиента пикселей блока. При этом значения ошибки $e(\mathbf{d}_i^{(k)})$ для разных блоков одного кадра полагаются независимыми [11].

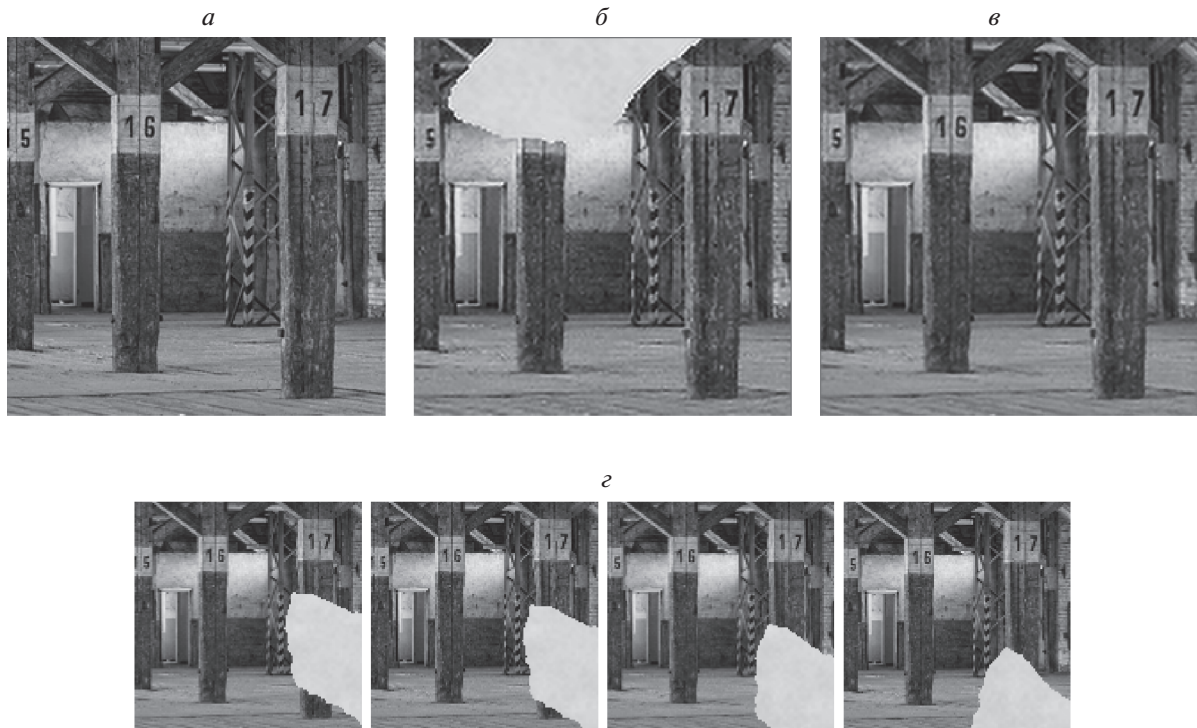


Рис. 1. Примеры оригинального изображения НР (а), начальной оценки в виде первого изображения обрабатываемой последовательности (б), усредненной начальной оценки с VDSR (в) и нескольких изображений обрабатываемой последовательности НР, подвергнутых воздействию АП (г)

Также вместо взвешенной суммы условных оценок в качестве $\tilde{\mathbf{x}}_{k|k}^{pq}$ может быть выбрана условная оценка, максимизирующая апостериорную плотность $P(\mathbf{d}_i^{(k)} | \mathbf{y}_k)$. Такая экономная схема адаптивной фильтрации немного уступает классической схеме в точности, но существенно превосходит ее по быстродействию за счет применения направленного перебора возможных значений вектора неизвестных параметров $\tilde{\mathbf{d}}$.

Выражения (2.4) и (2.5) при реализации блочной обработки и перечисленных выше приемов имеют вид

$$\begin{aligned}
 P(\mathbf{y}_k | \mathbf{d}_i^{(k)}) &= \left((2\pi)^{N_b s^2} \prod_{r=1}^{N_b} |\mathbf{U}_k^r(\mathbf{d}_i^{(k)})| \right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{e(\mathbf{d}_i^{(k)})}{2}\right), \\
 e(\mathbf{d}_i^{(k)}) &= \sum_{r=1}^{N_b} (\mathbf{y}_k^r - \mathbf{H}_k^r(\mathbf{d}_i^{(k)}) \tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}^r)^T \mathbf{U}_k^{(r)-1}(\mathbf{d}_i^{(k)}) (\mathbf{y}_k^r - \mathbf{H}_k^r(\mathbf{d}_i^{(k)}) \tilde{\mathbf{x}}_{k|k-1}^r), \\
 \tilde{\mathbf{x}}_{k|k}^{pq} &= \tilde{\mathbf{x}}_{k|k}^{pq}(\tilde{\mathbf{d}}_i^{(k)}), \quad \mathbf{P}_{k|k}^{pq} = \mathbf{P}_{k|k}^{pq}(\tilde{\mathbf{d}}_i^{(k)}), \quad \tilde{\mathbf{d}}_i^{(k)} = \arg \max_i P(\mathbf{d}_i^{(k)} | \mathbf{y}_k), \\
 r &= \overline{1, N_b}, \quad p = \overline{1, N_1}, \quad q = \overline{1, N_2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

4. Результаты экспериментальных исследований. Каждый из рассмотренных выше алгоритмов был реализован в среде Matlab R2019b с учетом возможностей блочной обработки изображений [10], обеспечивающей понижение размерности обрабатываемых и обращаемых матриц.

Для АМСС, АОФ и АОФА требуется задание начальной (исходной) оценки. В реализованных алгоритмах было рассмотрено два способа к формированию начальной оценки:

- первое изображение НР из исходной последовательности (последовательное повышение разрешения при поступлении новых наблюдений);
- усредненное изображение НР с учетом межкадровых смещений и локализованных АП.

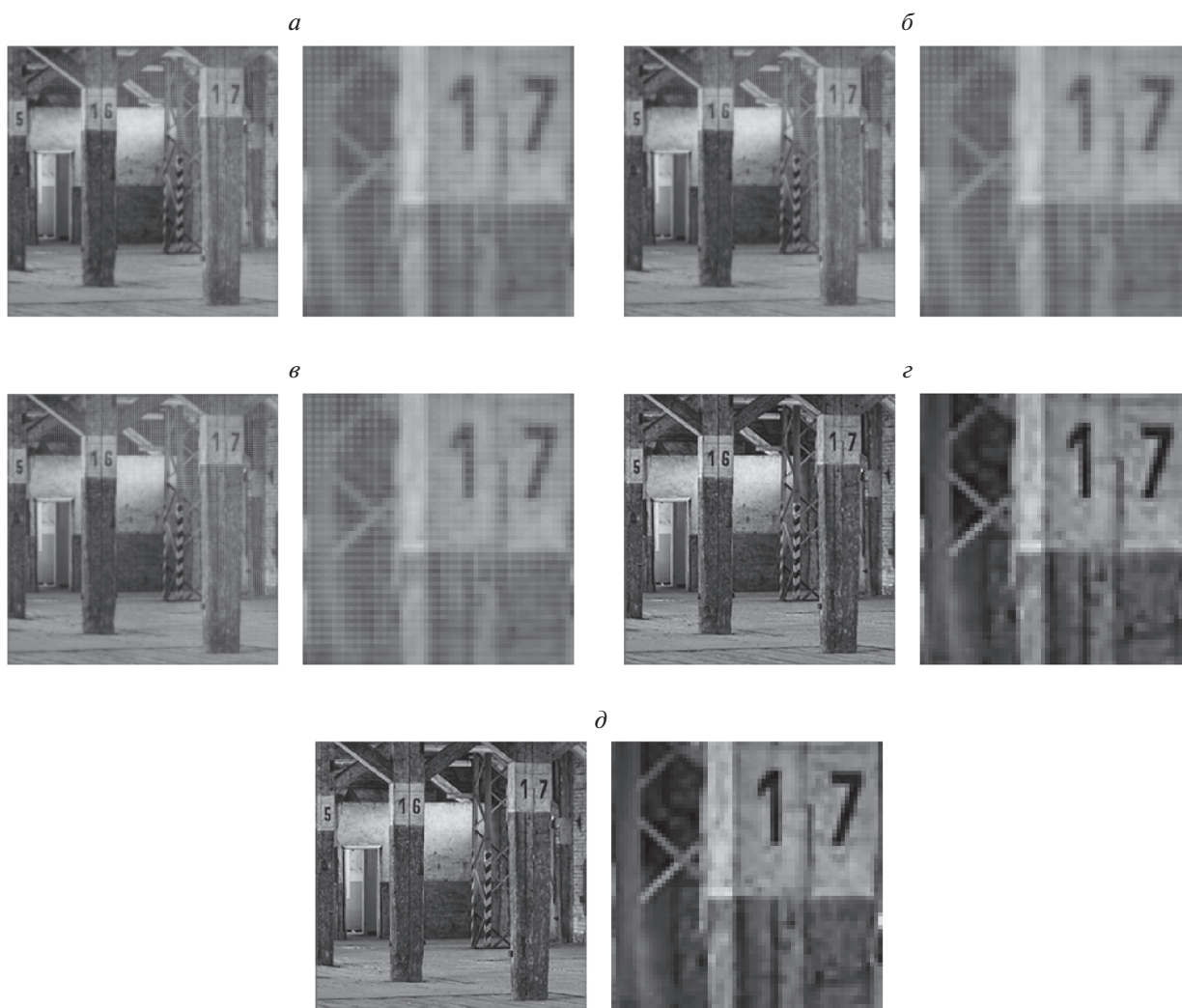


Рис. 2. Примеры изображений ВР, полученных на основе начальной оценки в виде первого изображения НР, и их увеличенные фрагменты: АМСС (а); АМССИД (б); АМСП (в); АОФ (г); АОФА (д)

В обоих случаях разрешение исходного изображения НР было повышено при помощи алгоритма однокадрового повышения разрешения VDSR [18], основанного на глубоком обучении и изначально встроенного в среду Matlab.

Для экспериментального сравнения описанных выше подходов и алгоритмов построения СР были сформированы 12 наборов цветных изображений НР размера 128×128 из 20 кадров каждый. Для создания каждого из наборов проводилась генерация локальных областей закрытия АП (пятен случайной формы) в виде формирующей бинарной маски, захватывающей изображение ВР. Далее формировались сами ложные наблюдения как реализации случайного поля с заданными параметрами и проводилось их смещение с оригинальным изображением ВР в пределах созданной бинарной маски. После этого выполнялось прореживание полученного изображения для создания первого кадра НР. При формировании каждого следующего кадра НР указанные действия повторялись, при этом моделировалось перемещение камеры со случайным сдвигом и поворотом относительно ранее полученного изображения, а также перемещение областей, пораженных АП, путем генерации смещения и поворота формирующей бинарной маски.

Примеры исходных изображений НР с различной локализацией АП и используемых начальных оценок представлены на рис. 1.

В ходе экспериментов разрешение исходных изображений было увеличено в 2 раза. На рис. 2 и 3 представлены примеры изображений ВР, полученных на выходе. Качественный анализ результатов показывает, что АМСС и АМССИД, хуже справляются с устранением аппликативных

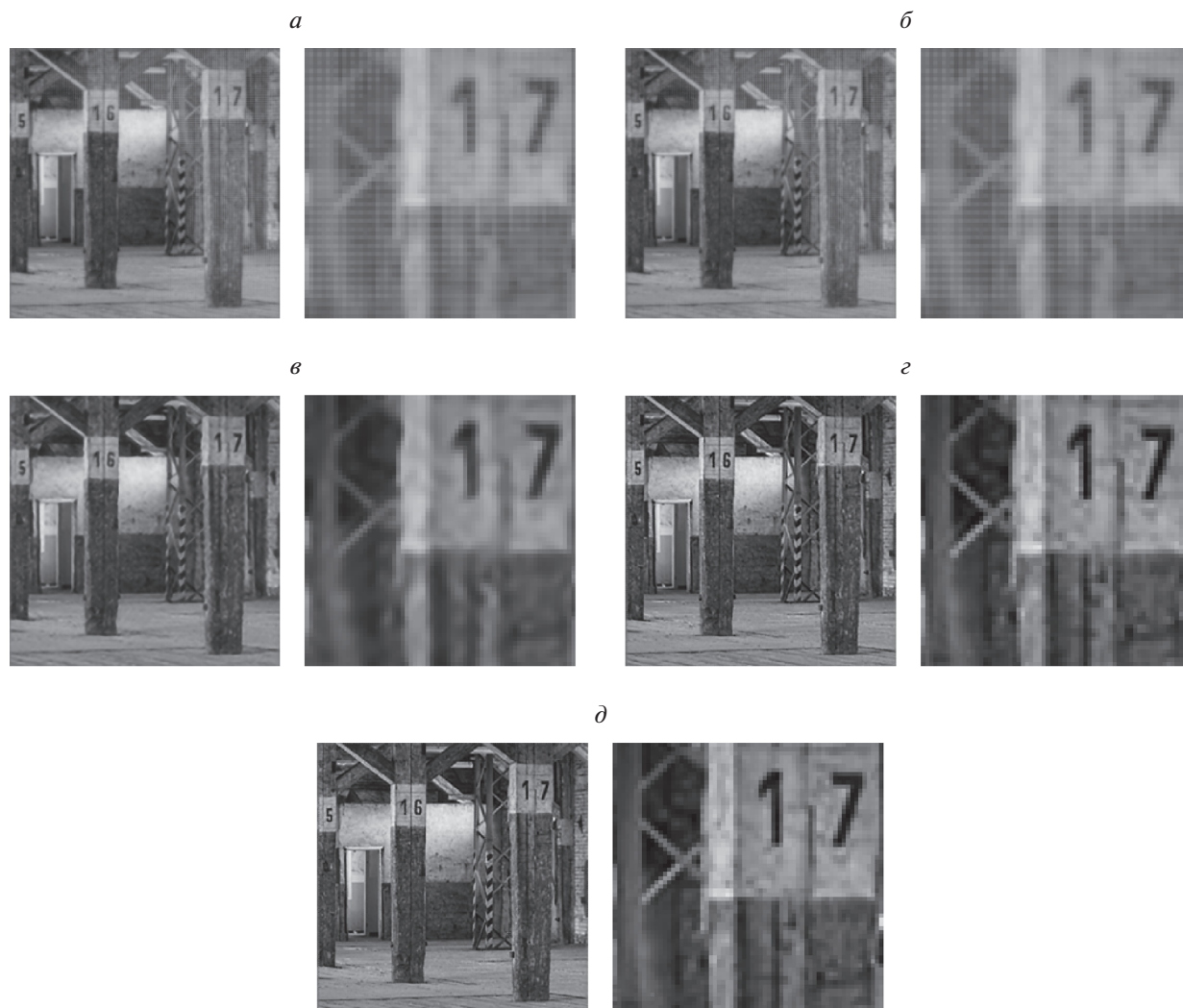


Рис. 3. Примеры изображений ВР, полученных на основе усредненной начальной оценки с VDSR, и их увеличенные фрагменты: АМСС (а); АМССИД (б); АМСП (в); АОФ (г); АОФА (д)

помех по сравнению с аналогами. АМСП выполняет эту задачу несколько лучше, однако результаты его работы зависят от начальной оценки и менее детализированы по сравнению с результатами АОФ и АОФА.

Для численного сравнения результатов с точки зрения качества получаемых изображений ВР применялись следующие показатели: пиковое отношение сигнала к шуму (PSNR чем больше, тем лучше), индекс структурного сходства (SSIM чем больше, тем лучше) [19] и индекс качества изображений (NIQE чем меньше, тем лучше) [20]. Усредненные значения этих критериев по всей группе обрабатываемых изображений приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1. Точность восстановления исходного изображения ВР в случае использования первого изображения НР как начальной оценки

Критерий	Исходная оценка	АМСС	АМССИД	АМСП	АОФ	АОФА
PSNR	16.28	19.22	19.33	19.62	26.46	27.04
SSIM	0.75	0.77	0.79	0.76	0.91	0.91
NIQE	10.13	6.83	6.59	6.53	6.11	6.12

Таблица 2. Точность восстановления исходного изображения ВР в случае использования усредненной начальной оценки

Критерий	Исходная оценка	АМСС	АМССИД	АМСП	АОФ	АОФА
PSNR	26.58	19.22	19.33	22.31	26.80	27.23
SSIM	0.75	0.77	0.79	0.77	0.91	0.91
NIQE	7.58	6.83	6.59	6.72	6.35	6.33

Полученные данные показывают, что алгоритм, основанный на использовании условно-линейной фильтрации в адаптивной обработке, имеет большую точность восстановления исходного изображения ВР по сравнению с аналогами. При этом существует незначительное превосходство практически всех алгоритмов при реализации второго способа формирования начальной оценки на основе усреднения всех кадров и применения алгоритма VDSR. Тем не менее использование начальной оценки на основе первого кадра в сочетании с применением АОФА позволяет получить практически такое же качество при сохранении возможности реализации обработки в режиме последовательного накопления информации.

Заключение. Статья посвящена проблеме построения многокадрового сверхразрешения в условиях аномальных наблюдений аппликативного характера. Рассмотрены известные алгоритмы, основанные на использовании различных подходов: моделей спиновых стекол, моделей марковских случайных полей, моделей оптимальной линейной и условно-линейной фильтрации в рамках предложенного подхода. Выполнен синтез оптимального условно-линейного фильтра последовательности изображений низкого разрешения в условиях аппликативных помех в адаптивной постановке. Проведено экспериментальное сравнение всех приведенных алгоритмов на основе синтетических и реальных наборов тестовых изображений, которое показало преимущество алгоритмов, основанных на применении условно-линейной оптимальной фильтрации последовательности изображений низкого разрешения и двухэтапной процедуры обработки каждого такого изображения, использующей суперпиксельную сегментацию изображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Park S.C., Park M.K., Kang M.G.* Super-resolution Image Reconstruction: a Technical Overview // IEEE Signal Processing Magazine. 2003. V. 20. № 3. P. 21–36.
2. *Huang D., Liu H.* A Short Survey of Image Super Resolution Algorithms // J. Computer Science Technology Updates. 2015. V. 2. № 2. P. 19–29.
3. *Sharma. M., Mukhopadhyay R., Chaudhury. S., Lall B.* An End-to-End Deep Learning Framework for Super-Resolution Based Inpainting // National Conf. on Computer Vision, Pattern Recognition, Image Processing, and Graphics. Mandi, India. 2014. V. 841. P. 198–208.
4. *Yang C., Lu X., Lin Z., Shechtman E., Wang O., Li H.* High-resolution Image Inpainting Using Multi-scale Neural Patch Synthesis // IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. Honolulu, Hawaii: IEEE, 2017.
5. *Kanemura A., Maeda S., Ishii S.* Image Superresolution Under Spatially Structured Noise // IEEE Int. Sympos. Signal Processing and Information Technology, IEEE. Cairo, Egypt. 2007. P. 275–280.
6. *Fukuda W., Kanemura A., Maeda S., Ishii S.* Superresolution from Occluded Scenes // Intern. Conf. on Neural Information Processing. Bangkok, Thailand: Springer, 2009.
7. *Negi C.S.* Super-resolution De-fencing: Simultaneous Fence Removal and High-resolution Image Recovery Using Videos // IEEE Intern. Conf. on Multimedia and Expo Workshops. Chengdu, China: IEEE, 2014.
8. *Savvin S.V., Sirota A.A., Ivankov A.Y.* Superresolution Algorithms in Applicative Noise Conditions Using Superpixel Segmentation // Intern. Conf. on Digital Image & Signal Processing. Oxford, United Kingdom: Corga-Science, 2019.
9. *Ivankov A.Y., Sirota A.A.* Image Sequence Filtering Algorithms for Resolution Improvement in Applicative Noise Conditions // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2015 V. 51. № 6. P. 622–631.
10. *Иванков А.Ю., Сирота А.А.* Блочные алгоритмы обработки изображений на основе фильтра Калмана в задаче построения сверхразрешения // Компьютерная оптика. 2014. Т. 38. № 1. С. 118–125.
11. *Иванков А.Ю., Сирота А.А.* Адаптивные алгоритмы построения сверхразрешения на основе обработки последовательности изображений // Оптический журнал. 2017. Т. 84. № 5. С. 38–45.

12. *Иванков А.Ю.* Адаптивный алгоритм оптимальной фильтрации для повышения разрешения на основе обработки последовательности цифровых изображений // Вестн. Воронежского гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. 2016. № 4. С. 142–147.
13. *Nishimori H.* Statistical Physics of Spin Glasses and Information Processing. Oxford: Oxford University Press, 2001.
14. *Golub G.H., Loan F.V.* Matrix Computations, 3rd ed. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1996.
15. *Li S. Z.* Markov Random Field Modeling in Image Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 2001.
16. *Achanta R., Shaji A., Smith K., Lucchi A., Fua P., Süsstrunk S.* SLIC Superpixels Compared to State-of-the-Art Superpixel Methods // IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2012. V. 34. № 11. P. 2247–2281.
17. *Саввин С.В., Сирота А.А.* Алгоритмы суперпиксельной сегментации изображений и их применение для анализа изображения с разнородной текстурой // Вестн. Воронежского гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информационные технологии. 2016. № 4. С. 165–173.
18. *Kim J., Lee J.K., Lee K.M.* Accurate Image Super-resolution Using Very Deep Convolutional Networks // IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. Las Vegas, USA: IEEE, 2016. P. 1646–1654.
19. *Zhou W., Bovik A.C., Sheikh H.R., Simoncelli E.P.* Image Quality Assessment: From Error Visibility to Structural Similarity // IEEE Trans. on Image Processing. 2004. V. 13. № 4. P. 600–612.
20. *Mittal A., Soundararajan R., Bovik A. C.* Making a Completely Blind Image Quality Analyzer // IEEE Signal Processing Letters. 2013. V. 22. № 3. P. 209–212.

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

УДК 629.78

АНАЛИЗ ТРАЕКТОРИЙ ВОЗВРАЩЕНИЯ ОТ ЛУНЫ

© 2021 г. А. С. Самотохин^а, Ю. Г. Сихарулидзе^{а,*}

^а ИППМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

*e-mail: sikh@kiam1.rssi.ru

Поступила в редакцию 10.07.2020 г.

После доработки 05.08.2020 г.

Принята к публикации 30.11.2020 г.

Рассматривается комплексная задача построения траекторий возвращения космического аппарата с окололунной орбиты до входа в атмосферу Земли для последующей посадки на юге территории Российской Федерации. Задача включает две составляющие: выбор условий оптимального импульсного маневра для перелета Луна–Земля и определение дальности спуска от точки входа в атмосферу Земли до заданного места посадки. Оценивается величина полезного импульса и достаточная дальность спуска для возвращения в любую дату.

DOI: 10.31857/S0002338821020128

0. Введение. Рассматриваемая задача возвращения космического аппарата (КА) с орбиты искусственного спутника Луны (ОИСЛ) в любую дату с посадкой в заданном районе на юге территории Российской Федерации требует комплексного решения, которое включает определение оптимального импульсного маневра для перелета к Земле и выбор приемлемой дальности спуска от точки входа в атмосферу до заданного места посадки.

Аналогичная задача применительно к посадке спускаемого аппарата на космодром “Восточный” рассматривалась ранее в [1]. Однако в этой работе не проводилась оптимизация импульсов перехода на траекторию перелета к Земле. Результаты, представленные в настоящей статье, получены с использованием алгоритмов условной минимизации, описанных в [2, 3].

Плоскость лунной орбиты вращается относительно плоскости земного экватора с периодом 18.6 лет. При этом угол i_M между плоскостями лунной орбиты и земного экватора меняется в диапазоне

$$18.3^\circ \leq i_M \leq 28.6^\circ. \quad (0.1)$$

Для заданной даты старта угол i_M однозначно определяется в диапазоне (0.1), согласно теории движения Луны. В первом приближении для модельной задачи (в рамках сферической тригонометрии) можно пренебречь изменением угла i_M в течение сидерического месяца, т.е. периода обращения Луны относительно Земли. Поэтому склонение Луны δ_M в течение сидерического месяца может оказаться любым в диапазоне

$$-i_M \leq \delta_M \leq +i_M \quad (0.2)$$

в зависимости от даты старта.

Необходимо обеспечить возвращение КА в любую дату, поэтому запас топлива КА на маневр возвращения (или импульс скорости ухода) будет определяться самым неблагоприятным склонением δ_M и параметрами ОИСЛ, при которых требуется максимальный импульс.

Линия апсид траектории возвращения примерно совпадает с линией, связывающей центры Луны и Земли в момент отлета КА с ОИСЛ.

С учетом ограничения по перегрузке КА с малым аэродинамическим качеством (порядка 0.3) должен возвращаться от Луны со стороны южного полушария и входить в атмосферу Земли с околопараболической скоростью. Поэтому широта точки входа в атмосферу φ_{en} должна примерно равняться склонению Луны в момент отлета, взятому с обратным знаком, за минусом углового расстояния от точки входа до условного перигея (условный перигей — это минимальная высота траектории возвращения при отсутствии атмосферы).

Долгота точки входа λ_{en} на высоте условной границы атмосферы ($h_{atm} = 100$ км) и наклонение подлетной траектории i_{orb} зависят от условий отлета с орбиты Луны и координат места посадки. В качестве примера принято место посадки (“цель”) с координатами центра: широта $\varphi_t = 51.5^\circ$, долгота $\lambda_t = 56^\circ$, высота 4.5 км.

Высота условного перигея h_p является определяющим параметром для траектории спуска в атмосфере. Для возвращения аппаратов с малым аэродинамическим качеством коридор входа по условному перигею находится примерно в диапазоне 45–60 км. В работе принята высота условного перигея $h_p = 52.5$ км, т.е. середина коридора входа.

1. Постановка задачи. Будем полагать, что КА находится на почти круговой ОИСЛ с высотой $h_0 \approx 100$ км и заданным наклонением i_0 к плоскости лунного экватора. Рассматриваются три наклонения i_0 начальной ОИСЛ ($0, 50^\circ, 90^\circ$) и склонения Луны в диапазоне от $\delta_M = -28.6^\circ$ до $\delta_M = +28.6^\circ$, причем отдельно анализируются начальные условия для восходящей и нисходящей ветвей орбиты Луны. Выбранные наклонения начальной орбиты включают весь спектр перспективных научных задач, связанных с исследованием Луны, а диапазон ее склонений позволяет учесть все возможные условия при возвращении в любую дату.

Для расчета траекторий перелета к Земле решается задача условной минимизации. В качестве исходных данных для решения поставленной задачи приняты начальные условия движения КА на окололунной орбите. Предполагается, что импульс перехода на траекторию возврата должен быть приложен в течение текущего витка лунной орбиты. Под параметрами импульса понимается время его приложения t_e и три компоненты вектора импульса $\Delta \mathbf{v}_e$, т.е. четыре параметра.

С целью упрощения решения поставленной задачи был принят следующий подход. В качестве аргумента оптимизации используются три компоненты вектора асимптотической скорости \mathbf{v}_∞ относительно Луны. Момент приложения импульса t_e при заданной асимптотической скорости \mathbf{v}_∞ выбирается таким образом, чтобы обеспечить вектор этой скорости при минимальном импульсе $|\Delta \mathbf{v}_e|$. Таким образом, минимизируется функция

$$|\Delta \mathbf{v}_e| = f(\mathbf{v}_\infty) \rightarrow \min \tag{1.1}$$

при соблюдении некоторых ограничений в конечной точке траектории

$$g_j(\mathbf{v}_\infty) \leq 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{1.2}$$

Состав ограничений (1.2) выбирается в зависимости от решаемой задачи.

При поиске оптимальной траектории накладываются ограничения по радиусу условного перигея и прохождению плоскости траектории перелета через заданную точку посадки на поверхности Земли (базовые ограничения):

$$\begin{aligned} g_0 &= |r_\pi(\mathbf{v}_\infty) - r_{\pi 0}| - \varepsilon_r \leq 0, \\ g_1 &= |b(\mathbf{v}_\infty)| - \varepsilon_b \leq 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь $r_\pi(\mathbf{v}_\infty)$ – радиус условного перигея, $r_{\pi 0}$ – его требуемое значение, $b(\mathbf{v}_\infty)$ – боковое расстояние между плоскостью траектории перелета и точкой посадки, $\varepsilon_r, \varepsilon_b$ – точности выполнения ограничений по радиусу перигея и боковой дальности.

Кроме базовых ограничений на параметры траектории возврата могут накладываться дополнительные ограничения по дальности от точки входа до полигона посадки, наклонению и/или длительности перелета. Наличие дополнительных ограничений может приводить лишь к увеличению импульса по сравнению с оптимальной траекторией.

Все расчеты параметров траекторий возврата выполнялись с использованием численного интегрирования в модели движения, учитывающей гармоника гравитационных полей Земли и Луны, торможение в верхней атмосфере Земли и световое давление.

Используемая методика расчета траекторий перелета при наличии базовых и дополнительных ограничений описана в работе [2], а используемый численный метод – в [3].

2. Восходящая и нисходящая траектории. Рассмотрим модельную задачу для сферической Земли, которая “заморожена” (т.е. не вращается) в момент входа КА в атмосферу. В этом случае долгота упрежденной точки прицеливания $\tilde{\lambda}_t$ (которая учитывает вращение Земли) совпадает с долготой цели λ_t : $\tilde{\lambda}_t = \lambda_t$. Будем называть *плоскостью прицеливания* с наклонением i_t плоскость, которая проходит через точку входа $(\varphi_{en}, \lambda_{en}, h_{en})$, упрежденную точку прицеливания $(\varphi_t, \tilde{\lambda}_t, h_t)$ и

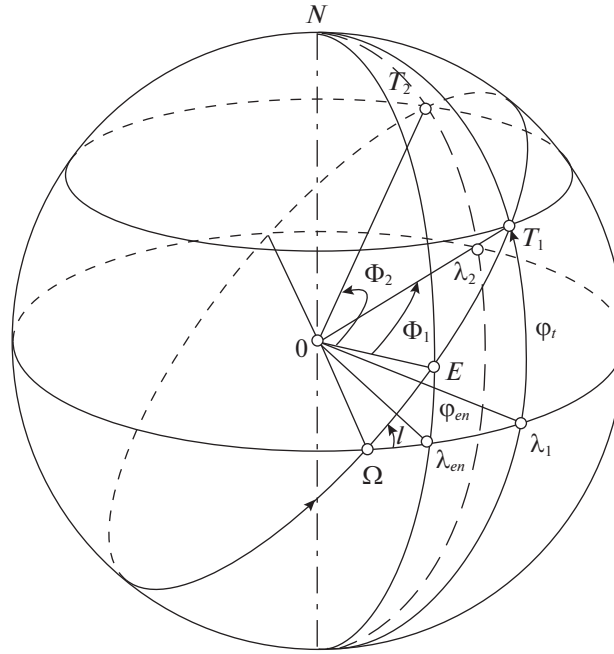


Рис. 1. Схема посадки на восходящей (T_1) и нисходящей траекториях (T_2)

центр Земли. Здесь φ_{en} , λ_{en} – широта и долгота точки входа, $h_{en} = 100$ км – высота точки входа, φ_t , h_t – широта и высота цели. Если плоскость подлетной траектории совпадает с плоскостью прицеливания, то требуется минимальный боковой маневр для приведения КА в район посадки.

Наклонение плоскости прицеливания определяется формулой [1]

$$i_i = \arccos \frac{\sin(\lambda_t - \lambda_{en}) \cos \varphi_{en} \cos \varphi_t}{\sin \Phi_\Sigma}, \quad (2.1)$$

где Φ_Σ – угловая дальность от точки входа до цели.

Если наклонение плоскости прицеливания больше широты точки цели ($i_i > \varphi_t$), то существуют две точки пересечения траектории посадочного витка с параллелью цели φ_t (рис. 1). Точка T_1 соответствует подлету на *восходящей* траектории без пересечения параллели цели, а точка T_2 – подлету на *нисходящей* траектории с пересечением параллели цели. Эти траектории при одинаковом наклонении (2.1) имеют разную угловую дальность от точки входа в атмосферу E до точек цели T_1 и T_2 , соответственно $\Phi_1 \leq \pi/2$ и $\Phi_2 = \pi - \Phi_1 \geq \pi/2$.

При заданной дальности спуска Φ_i , $i = 1, 2$, долгота точки входа определяется соотношением

$$\lambda_{eni} = \lambda_{ti} - \arccos \frac{\cos \Phi_i - \sin \varphi_{en} \sin \varphi_t}{\cos \varphi_{en} \cos \varphi_t}. \quad (2.2)$$

Формула (2.2) справедлива, если выполнено условие

$$\left| \frac{\cos \Phi_i - \sin \varphi_{en} \sin \varphi_t}{\cos \varphi_{en} \cos \varphi_t} \right| \leq 1, \quad (2.3)$$

которое накладывает ограничения на угловую дальность Φ_i при заданной широте цели φ_t и рассматриваемой широте точки входа φ_{en} . Из условия (2.3) следуют такие ограничения:

$$\Phi_i \geq \varphi_t - \varphi_{en} \quad (2.4)$$

и

$$\Phi_i \leq 180^\circ - (\varphi_t + \varphi_{en}). \quad (2.5)$$

Для широты цели $\varphi_t = 51.5^\circ$ с учетом условий (2.4) и (2.5) имеем ограничения на линейную дальность по поверхности Земли $L_i = R_E \Phi_i$ ($R_E = 6371$ км) от точки входа в атмосферу до цели:

$$L_{\min} \leq L \leq L_{\max}, \quad (2.6)$$

где границы диапазона (2.6) задаются соотношениями

$$L_{\max} = (51.5^\circ - \varphi_{en}) \times 111.11 \text{ км/град} \quad (2.7)$$

– предельная минимальная дальность спуска и

$$L_{\min} = (128.5^\circ - \varphi_{en}) \times 111.11 \text{ км/град} \quad (2.8)$$

– предельная максимальная дальность спуска.

Согласно (2.7) и (2.8), ширина диапазона возможных дальностей спуска

$$L_{\max} - L_{\min} \approx 8560 \text{ км}$$

не зависит от широты точки входа φ_{en} .

Знаки равенства в соотношениях (2.4) и (2.5) определяют угловые дальности минимальной предельной траектории:

$$\Phi_{\min} = \varphi_t - \varphi_{en} \quad (2.9)$$

и максимальной:

$$\Phi_{\max} = 180^\circ - (\varphi_t + \varphi_{en}). \quad (2.10)$$

Обе предельные траектории (2.9) и (2.10) имеют наклонение 90° , т.е. направлены по меридиану, причем траектория минимальной дальности Φ_{\min} является восходящей, а траектория максимальной дальности Φ_{\max} – нисходящей и подходит к цели через Северный полюс. При фиксированной широте цели φ_t , предельные траектории зависят от широты точки входа φ_{en} , т.е. от даты возвращения с ОИСЛ.

3. Граничная траектория. Будем называть *граничной* подлетную траекторию, наклонение которой i_{orb}^* равно широте цели φ_t , т.е.

$$i_{orb}^* = \varphi_t. \quad (3.1)$$

Наклонение граничной траектории определяет предел, при котором еще возможно приведение КА к месту посадки без существенного бокового маневра. Граничная траектория разделяет восходящие и нисходящие траектории подлета к цели, поэтому ее удобно использовать для определения типа траектории спуска, восходящей или нисходящей.

С учетом (3.1) угловая дальность граничной траектории Φ^* от точки входа до цели вычисляется по формуле

$$\Phi^* = \arccos \frac{\sin \varphi_{en}^*}{\sin \varphi_t} = \arccos \frac{\sin \varphi_{en}^*}{\sin i_{orb}^*}, \quad (3.2)$$

где φ_{en}^* – широта точки входа в атмосферу при подлете по граничной траектории. Долгота точки входа λ_{en}^* связана с долготой цели соотношением

$$\lambda_{en}^* = \lambda_t - \arccos \frac{\text{tg} \varphi_{en}}{\text{tg} \varphi_t}. \quad (3.3)$$

Условия (3.1)–(3.3) полностью определяют граничную траекторию возвращения КА при заданных координатах цели. Соотношение (3.2) позволяет вычислить линейную дальность граничной траектории L^* от точки входа в атмосферу до цели по поверхности Земли:

$$L^* = \Phi^* \times 111.11 \text{ км/град}. \quad (3.4)$$

Для определения типа траектории подлета КА к цели, восходящей или нисходящей, используется следующий простой алгоритм. Широта точки входа в атмосферу φ_{en} считается заданной с учетом положения Луны в момент отлета КА на траекторию Луна–Земля. По формуле (3.3) вычисляется долгота λ_{en}^* точки входа для граничной траектории. Пусть λ_{en} – долгота планируемой

точки входа в атмосферу, соответствующая заданной дальности спуска L_Σ . Если выполняется условие

$$\lambda_{en} > \lambda_{en}^*,$$

то КА подлетает к цели по восходящей траектории (без пересечения параллели цели). Если выполняется условие

$$\lambda_{en} < \lambda_{en}^*,$$

то КА подлетает к цели по нисходящей траектории (с пересечением параллели цели).

При рассмотрении модельной задачи движения КА после возвращения от Луны Земля предполагалась “замороженной” в момент входа в атмосферу, т.е. ее угловая скорость $\omega_E = 0$. Это позволило упростить геометрию привязки точки входа в атмосферу и точки цели для получения простых математических соотношений. Учтем теперь вращение Земли за время t_Σ движения КА от точки входа в атмосферу до цели.

Долгота упрежденной точки прицеливания $\tilde{\lambda}_t$ отличается от долготы точки цели λ_t на угол поворота Земли за время t_Σ движения КА от точки входа до упрежденной точки прицеливания:

$$\tilde{\lambda}_t = \lambda_t + \omega_E t_\Sigma,$$

где $\omega_E = 1/240$ град/с – угловая скорость вращения Земли. Широта упрежденной точки прицеливания равна широте цели:

$$\tilde{\varphi}_t = \varphi_t.$$

По результатам статистических расчетов спуска КА в атмосфере получена приближенная формула для вычисления t_Σ :

$$t_\Sigma = 900c + 0.125c/\text{км} (L - 500 \text{ км}) \quad (3.5)$$

(для дальностей $4000 \text{ км} \leq L \leq 10500 \text{ км}$).

С учетом поправки на вращение Земли $\omega_E t_\Sigma$ можно записать формулу (2.2), определяющую долготу точки входа:

$$\lambda_{eni} = \lambda_t + \omega_E t_{\Sigma i} - \arccos \frac{\cos \Phi_i - \sin \varphi_{en} \sin \varphi_t}{\cos \varphi_{en} \cos \varphi_t}, \quad (3.6)$$

где λ_t – долгота цели, время движения $t_{\Sigma i}$ вычисляется по формуле (3.5) в зависимости от дальности спуска L_i , $i = 1, 2$.

4. Условия подлета к Земле. Скорость входа КА в атмосферу Земли V_{en} близка к параболической на высоте условной границы атмосферы и может отличаться от нее в пределах от -100 м/с (эллиптическая траектория возвращения) до $+200$ м/с (гиперболическая траектория возвращения) [4]. Угол входа в атмосферу θ_{en} зависит от высоты условного перигея h_p . Координаты точки входа (широта φ_{en} и долгота λ_{en}) определяют дальность спуска до точки цели L_Σ . Указанные параметры являются определяющими для траектории спуска.

Оценим диапазон возможных широт точек входа φ_{en} при возвращении КА, который зависит от склонения Луны в момент отлета и угловой дальности от точки входа в атмосферу до условного перигея.

Угловая дальность ϑ_{en} от точки входа КА в атмосферу до условного перигея определяется высотой условного перигея h_p . Для рассматриваемого коридора входа по высоте условного перигея и параболической скорости входа имеем следующие значения угловой дальности ϑ_{en} и углов входа θ_{en} [1]:

h_p , км	45	52.5	60
ϑ_{en} , град	-10.6	-9.7	-9.0
θ_{en} , град	-5.32	-4.87	-4.53

Знак минус у ϑ_{en} означает, что точка входа в атмосферу находится до перигея. Угол входа θ_{en} однозначно связан с высотой условного перигея [5].

При склонении Луны $i_M = 28.6^\circ$ широта точки входа КА в атмосферу будет принадлежать диапазону

$$-40.6^\circ \leq \varphi_{en} \leq -19.6^\circ. \quad (4.1)$$

Левая граница соответствует траектории входа с низким перигеем, а правая — с высоким перигеем.

При склонении Луны $i_M = -28.6^\circ$ широта точки входа ВА в атмосферу будет принадлежать диапазону

$$18.0^\circ \leq \varphi_{en} \leq 19.6^\circ. \quad (4.2)$$

Левая граница также соответствует траектории входа с низким перигеем, а правая — с высоким перигеем.

Рассматривается возвращение КА от Луны в любую дату, поэтому широта точки входа в атмосферу может быть любой в диапазоне, границы которого определяются условиями (4.1) и (4.2):

$$-40.6^\circ \leq \varphi_{en} \leq 19.6^\circ. \quad (4.3)$$

Если скорость входа отличается от параболической, то границы диапазона (4.3) могут раздвигаться на $1-2^\circ$. Долгота точки входа определяется формулой (3.6) для заданной угловой дальности спуска Φ и рассматриваемой широты точки входа.

Алгоритм управления при спуске в атмосфере должен обеспечивать приведение КА к месту посадки для любых широт точек входа в атмосферу, принадлежащих диапазону (4.3) и соответствующих дальностей спуска.

5. Потребные импульсы схода с ОИСЛ и достаточные дальности спуска для возвращения от Луны в любую дату. Расчеты траекторий перелета от импульсного ухода с ОИСЛ до входа в атмосферу Земли проводились для следующих склонений Луны, град: -28.6 , -14.0 , 0 , $+14.0$, $+28.6$, причем для нулевого склонения рассматривались оба узла, восходящий и нисходящий, а для средних склонений — положение КА на нисходящей ветви и на восходящей ветви орбитального движения Луны. В восходящем узле Луна переходит из южной полусферы в северную, а в нисходящем узле — из северной полусферы в южную. Условия возвращения на нисходящей ветви существенно отличаются от условий возвращения на восходящей ветви.

Рассмотренные склонения Луны включают все возможные начальные условия, благоприятные и неблагоприятные, при возвращении КА в любую дату.

Для каждого склонения Луны исследовались три наклонения начальной ОИСЛ (к плоскости лунного экватора): $i_0 = 0$ (экваториальная орбита), $i_0 = 50^\circ$ (орбита со средним наклонением), $i_0 = 90^\circ$ (полярная орбита). Этот диапазон наклонений включает все перспективные ОИСЛ, которые представляют практический интерес.

Высота околоразумной начальной ОИСЛ выбрана порядка 100 км; она мало влияет на рассматриваемую задачу. Во всех расчетах высота условного перигея траектории возвращения одинакова: $h_p = 52.5$ км, т.е. середина коридора входа для спускаемого аппарата с малым аэродинамическим качеством (прядка 0.3).

Терминальный алгоритм управления спуском КА в атмосфере (ТАУС), основанный на принципах монографии [6], детально описан в [7] и в этой статье не рассматривается.

Применительно к выбранному в качестве примера месту посадки с координатами широта $\varphi_r = 51.5$ с.ш., долгота $\lambda_r = 56^\circ$ в.д. на рис. 2 показаны границы дальностей спуска L_{\min} (2.7), L_{\max} (2.8) и дальность граничной траектории L^* (3.4) для рассматриваемых широт точек входа в модельной задаче. Широта точки входа зависит от даты возвращения от Луны. С помощью построенных модельных зависимостей можно установить, в частности, что минимальная дальность спуска в атмосфере L_{\min} не может быть меньше 3500 км, а максимальная дальность L_{\max} не может быть больше 18700 км.

Построенные для модельной задачи пределы (L_{\min} , L_{\max}), а также дальность граничной траектории L^* в зависимости от широты точки входа в атмосферу φ_{en} (т.е. даты возвращения) адекватно отражают физическую суть задачи, что подтверждается результатами численного решения задач условной минимизации. Предельные значения дальности (L_{\min} , L_{\max}) практически совпали с модельными зависимостями. Граничная дальность L^* , как правило, соответствует оптимальному импульсному маневру (т.е. минимальному импульсу), но при численном решении дальность спуска может в отдельных точках не совпадать с модельным решением, что объясняется пологим

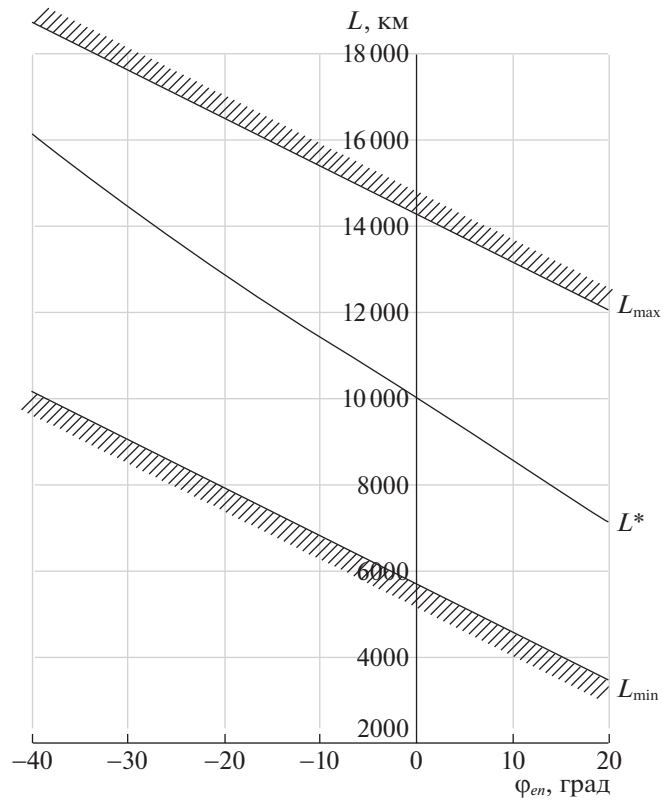


Рис. 2. Пределы дальностей спуска и дальность граничной (оптимальной) траектории при посадке на широте 51.5°

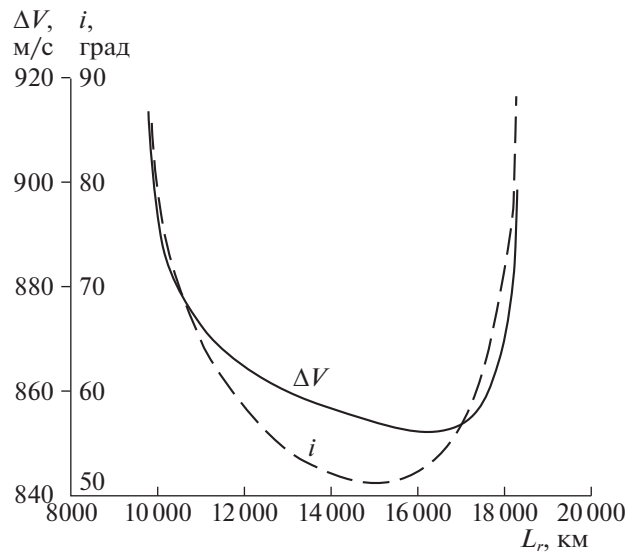


Рис. 3. Пример изменения импульса отлета с ОИСЛ и наклона подлетной траектории от дальности спуска

минимумом зависимости величины импульса от дальности спуска $\Delta V(L_r)$. Типичный пример такой зависимости показан на рис. 3 для возвращения с ОИСЛ, имеющей наклонение 50° при склонении Луны $+28.5^\circ$. Здесь i_{orb} – это наклонение плоскости подлетной траектории к Земле. Численными расчетами установлено также, что наклонение ОИСЛ в диапазоне $0-90^\circ$ практически не влияет на значения предельных (L_{min} , L_{max}) и граничной L^* дальностей.

Таблица 1. Оптимальные траектории возвращения от Луны

Параметры	Наклонение орбиты ИСЛ, град		
	0	50	90
Склонение Луны -28.6° . Дата отлета 2025/04/18			
Импульс ухода с ОИСЛ, м/с	903	832	828
Долгота восходящего узла ОИСЛ, град	—	20	30
Время перелета Луна–Земля, сут	4.11	4.20	4.13
Широта точки входа, град	20.08	19.92	20.50
Долгота точки входа, град	349.58*	314.06	339.66
Дальность спуска, км	7014	9505	7693
Склонение Луны -14° (восходящая ветвь). Дата отлета 2025/04/23			
Импульс ухода с ОИСЛ, м/с	1070	883	890
Долгота восходящего узла ОИСЛ, град	—	110	80
Время перелета Луна–Земля, сут	3.62	4.67	3.68
Широта точки входа, град	4.44	7.78	5.23
Долгота точки входа, град	341.56	341.56	338.97
Дальность спуска, км	8971	8673	9087
Склонение Луны 0 (восходящий узел). Дата отлета 2025/04/25			
Импульс ухода с ОИСЛ, м/с	1110	908	906
Долгота восходящего узла ОИСЛ, град	—	-60	130
Время перелета Луна–Земля, сут	3.65	4.62	4.65
Широта точки входа, град	-8.90	-7.33	-6.11
Долгота точки входа, град	328.74	324.9	329.34
Дальность спуска, км	11091	11227	10799
Склонение Луны $+14^\circ$ (восходящая ветвь). Дата отлета 2025/04/27			
Импульс ухода с ОИСЛ, м/с	1097	907	907
Долгота восходящего узла ОИСЛ, град	—	-30	-20
Время перелета Луна–Земля, сут	5.71	4.70	4.69
Широта точки входа, град	-18.74	-20.82	-21.11
Долгота точки входа, град	317.76	318.79	323.73
Дальность спуска, км	12749	12853	12522
Склонение Луны $+28.6^\circ$. Дата отлета 2025/05/02			
Импульс ухода с ОИСЛ, м/с	921	852	854
Долгота восходящего узла ОИСЛ, град	—	-120	-120
Время перелета Луна–Земля, сут	5.24	5.32	6.26
Широта точки входа, град	-33.96	-33.71	-32.3
Долгота точки входа, град	302.31	285.43	307.06
Дальность спуска, км	15115	16298	14646
Склонение Луны $+14^\circ$ (нисходящая ветвь). Дата отлета 2025/05/05			
Импульс ухода с ОИСЛ, м/с	828	820	835
Долгота восходящего узла ОИСЛ, град	—	80	80
Время перелета Луна–Земля, сут	4.57	4.50	4.46
Широта точки входа, град	-22.78	-24.07	-25.06
Долгота точки входа, град	313.26	342.87	0.54
Дальность спуска, км	13420	11444	10430
Склонение Луны 0 (нисходящий узел). Дата отлета 2025/04/11			
Импульс ухода с ОИСЛ, м/с	816	815	817

Таблица 1. Окончание

Параметры	Наклонение орбиты ИСЛ, град		
	0	50	90
Долгота восходящего узла ОИСЛ, град	—	110	110
Время перелета Луна–Земля, сут	4.44	4.40	4.38
Широта точки входа, град	–9.69	–10.26	–10.63
Долгота точки входа, град	322.0	328.63	333.02
Дальность спуска, км	11651	11220	10937
Склонение Луны –14° (нисходящая ветвь). Дата отлета 25/04/13			
Импульс ухода с ОИСЛ, м/с	812	830	808
Долгота восходящего узла ОИСЛ, град	—	130	150
Время перелета Луна–Земля, сут	4.92	3.90	4.91
Широта точки входа, град	5.42	2.82	4.52
Долгота точки входа, град	336.84	335.36	333.69
Дальность спуска, км	9224	9564	9534

* Круговая долгота.

Из результатов численного анализа следует, что при любой дате возвращения граничная траектория с дальностью L^* обеспечивает спуск с минимальным боковым маневром и реализуется практически с минимальным импульсом ухода ΔV .

Основные параметры оптимальных траекторий возвращения приведены в табл. 1 для разных начальных условий по склонению Луны и наклонению орбиты ИСЛ.

В случае максимального склонения Луны $+28.6^\circ$ минимальный потребный импульс для ухода с ОИСЛ находится в диапазоне 850–920 м/с для начальной орбиты с наклонением $0-90^\circ$ относительно экватора Луны. Время перелета Луна–Земля составляет 5.2–6.3 сут, дальность от точки входа КА в атмосферу до места посадки находится в диапазоне 7000–16300 км.

При минимальном склонении Луны -28.6° минимальный потребный импульс для ухода с ОИСЛ находится в диапазоне 830–900 м/с. Время перелета Луна–Земля составляет 4.1–4.2 сут, дальность от точки входа КА в атмосферу до места посадки находится в диапазоне 7000–9500 км.

Для реального (не импульсного) маневра ухода характеристическая скорость увеличивается на величину гравитационных потерь (зависят от начальной тяговооруженности КА) и потери на управление (зависят от программы тангажа).

Возвращение КА, когда Луна находится вблизи узловых точек, зависит от узла. В нисходящем узле движение Луны по орбите способствует маневру ухода, и минимальный потребный импульс не превышает 820 м/с при любом наклонении ОИСЛ. В восходящем узле орбитальное движение препятствует маневру ухода, и минимальный потребный импульс находится в диапазоне 910–1050 м/с, причем с увеличением наклонения ОИСЛ величина импульса уменьшается.

В целом, при возвращении КА со стороны южного полушария Земли (для снижения перегрузки) на нисходящей ветви орбитального движения Луны условия для маневра возвращения лучше, чем на восходящей ветви.

При отрицательных склонениях Луны ($\delta_M < 0$) дальность граничных траекторий возвращения L^* (т.е. траекторий с минимальным импульсом) находится в диапазоне 7000–10000 км (рис. 2). При положительных склонениях Луны ($\delta_M > 0$) дальность граничных траекторий существенно больше: 10000–16000 км. В случае большой дальности спуска могут возникнуть трудности с обеспечением необходимой точности приведения КА к месту посадки. Поэтому отдельно рассмотрена фиксированная дальность спуска: 10000 км. Эта дальность достаточна для возвращения от Луны в любую дату и может быть реализована со средним по величине импульсом ухода с ОИСЛ.

Результаты сравнения траекторий возвращения оптимальной и с фиксированной дальностью спуска 10000 км приведены в табл. 2. Для максимального склонения Луны длительность перелета при оптимальном маневре на 0.2 сут больше, импульс ухода на 40–80 м/с меньше, а дальность спуска находится в диапазоне 14600–16300 км. Для минимального склонения Луны

Таблица 2. Параметры оптимальных траекторий и траекторий с дальностью 10000 км

Траектория	Оптимальная			Дальность 10000 км		
Параметры	Наклонение ОИСЛ, град					
	0	50	90	0	50	90
Склонение Луны -28.6° . Дата отлета 25/04/18						
Импульс ухода с ОИСЛ, м/с	903	832	828	930	833	840
Время перелета Луна–Земля, сут	4.11	4.20	4.13	4.16	4.23	4.22
Дальность спуска, км	7014	9505	7693	10000		
Склонение Луны -14° (восходящая ветвь). Дата отлета 2025/04/23						
Импульс ухода с ОИСЛ, м/с	1070	883	890	1072	886	892
Время перелета Луна–Земля, сут	3.62	4.67	3.68	3.66	4.72	3.71
Дальность спуска, км	8971	8673	9087	10000		
Склонение Луны 0 (восходящий узел). Дата отлета 2025/04/25						
Импульс ухода с ОИСЛ, м/с	1100	910	906	1111	910	907
Время перелета Луна–Земля, сут	3.65	4.62	4.65	3.61	4.57	4.62
Дальность спуска, км	11091	11.227	10 799	10000		
Склонение Луны $+14^\circ$ (восходящая ветвь). Дата отлета 2025/04/27						
Импульс ухода с ОИСЛ, м/с	1097	907	907	1105	921	919
Время перелета Луна–Земля, сут	5.71	4.70	4.69	5.60	4.58	4.58
Дальность спуска, км	12749	12853	12522	10000		
Склонение Луны $+28.6^\circ$. Дата отлета 2025/05/02						
Импульс ухода с ОИСЛ, м/с	921	852	854	1006	895	894
Время перелета Луна–Земля, сут	5.24	5.32	6.26	4.98	5.01	6.04
Дальность спуска, км	15115	16298	14 646	10000		
Склонение Луны $+14^\circ$ (нисходящая ветвь). Дата отлета 2025/05/05						
Импульс ухода с ОИСЛ, м/с	828	820	835	861	827	835
Время перелета Луна–Земля, сут	4.57	4.50	4.46	4.42	4.44	4.43
Дальность спуска, км	13420	11444	10430	10000		
Склонение Луны 0 (нисходящий узел). Дата отлета 2025/04/11						
Импульс ухода с ОИСЛ, м/с	816	815	817	820	817	818
Время перелета Луна–Земля, сут	4.44	4.40	4.38	4.38	4.35	4.35
Дальность спуска, км	11651	11 220	10937	10000		
Склонение Луны -14° (нисходящая ветвь). Дата отлета 2025/04/13						
Импульс ухода с ОИСЛ, м/с	812	830	808	813	830	808
Время перелета Луна–Земля, сут	4.92	3.90	4.91	4.95	3.92	4.93
Дальность спуска, км	9224	9564	9534	10000		

длительности перелета практически совпадают, импульс ухода на 3–30 м/с меньше, а дальность спуска находится в диапазоне 7000–9500 км.

Вблизи узловых точек орбиты Луны величины импульсов ухода и времени перелета практически не различаются, а дальности спуска при оптимальном маневре на 800–1700 км больше.

Условие возвращения в любую дату, т.е. при любом склонении Луны, формирует расчетные случаи, т.е. максимальный потребный импульс ухода, наибольшую длительность перелета Луна–Земля и максимальную дальность спуска. В табл. 3 приведены расчетные параметры в случае оптимального ухода и для фиксированной дальности спуска 10000 км. Видно, что никакого различия по величине импульса ухода и по времени перелета практически нет, но при оптимальном уходе дальность спуска существенно больше 10000 км (до 15000–16000 км).

Таблица 3. Расчетные параметры траекторий возвращения

Параметры	Оптимальный уход			Дальность 10000 км		
	0	50	90	0	50	90
Наклонение ОИСЛ, град	0	50	90	0	50	90
Импульс ухода, м/с	1100	910	907	1100	920	920
Время перелета, сут	5.2	5.3	6.3	5.6	5.0	6.0
Дальность спуска, км	15100	16300	14600	10000		

Таблица 4. Параметры траекторий возвращения от Луны при вариации долготы восходящего узла $\lambda_{в.у}$ ОИСЛ

$\lambda_{в.у}$, град	Первый экстремум				Второй экстремум			
	ΔV , м/с	$t_{пр}$, сут	i_{orb} , град	L_r , км	ΔV , м/с	$t_{пр}$, сут	i_{orb} , град	L_r , км
110	817	4.383	51.6	10937				
111	816	4.417	51.4	11851				
112	816	4.454	52.8	12752				
113	817	4.485	55.3	13516				
114	820	4.514	58.8	14148				
115	825	4.538	62.7	14643				
116	831	4.561	67.5	15022				
117	839	4.582	72.5	15313				
118	848	4.600	77.1	15497	884	5.196	78.6	7119
119	858	4.619	82.7	15630	868	5.208	75.4	7229
120	870	4.642	89.6	15684	853	5.226	71.0	7440
121					841	5.241	67.8	7644
122					831	5.258	64.3	7930
123					822	5.280	60.5	8350
124					816	5.307	56.9	8909
125					812	5.339	53.7	9660
126					811	5.377	51.7	10609
127					811	5.418	51.4	11671
128					813	5.455	53.0	12617

Из проведенного анализа условий возвращения следует, что требования минимального импульса ухода и ограниченной дальности спуска являются противоречивыми и решение может быть только компромиссным. Таким компромиссным решением может быть дальность спуска порядка 10000 км.

Все результаты численных расчетов получены при оптимальных значениях долготы восходящего узла ОИСЛ. Эту долготу необходимо учитывать при планировании лунной миссии. Величина импульса ухода существенно зависит от долготы восходящего узла ОИСЛ, которая может способствовать уходу с минимальным импульсом или резко увеличивать импульс ухода в неблагоприятной ситуации. Зависимость импульса от долготы восходящего узла может иметь локальные минимумы, что усложняет численное определение оптимальной долготы, которая обеспечивает глобальный минимум. В табл. 4 в качестве примера показано изменение величины импульса ухода ΔV , времени перелета Луна–Земля $t_{пр}$, наклонения подлетной траектории i_{orb} и дальности спуска L_r при вариации долготы восходящего узла $\lambda_{ан}$ в диапазоне 110–128°. При $\lambda_{ан} = 110–119^\circ$ минимальный импульс ухода реализуется с временем перелета меньше 5 сут на первом экстремуме, а при $\lambda_{ан} = 120–128^\circ$ – на втором экстремуме с временем перелета больше 5 сут.

Полученные результаты в модельной задаче и численном анализе позволяют оценить качественные и количественные значения параметров с учетом других требований. Например, при

ограниченном запасе топлива КА на уход можно определить диапазон допустимых склонений Луны для возвращения с ОИСЛ (“окно” возвращения). Так, при запасе топлива КА, который обеспечивает импульс порядка 900 м/с, возвращение возможно только на нисходящей ветви орбиты Луны, т.е. в течение 14 сут. Для возвращения на восходящей ветви орбиты Луны необходимо иметь запас топлива на импульс порядка 1100 м/с.

В случае ограниченной дальности спуска можно оценить потребный импульс на уход с ОИСЛ и др. Полученные результаты могут быть использованы в задаче планирования посадки на Луну и последующего возвращения с предварительным выведением КА на ОИСЛ.

Заключение. Рассмотрена проблема возвращения КА с ОИСЛ до входа в атмосферу Земли для последующей посадки в заданном месте на юге территории Российской Федерации. Построена модельная задача, которая наглядно описывает физическую сущность проблемы. Достоверность модели подтверждается большим объемом численных расчетов траекторий возвращения. Предложено решение, обеспечивающее компромисс между величиной импульса ухода (910–1100 м/с) при длительности перелета 5–6 сут и дальностью спуска от точки входа в атмосферу до места посадки (10000 км) для обеспечения возможности возвращения в любую дату с ОИСЛ в диапазоне наклонов 0–90°. Полученные результаты могут быть использованы для решения задач, связанных с определением допустимых “окон” возвращения при ограничении импульса на уход с ОИСЛ, при ограничении дальности спуска, при фиксированном наклоне ОИСЛ и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Евдокимов С.Н., Климанов С.И., Корчагин А.Н. и др.* Обеспечение посадки спускаемого аппарата на космодром “Восточный” при возвращении от Луны // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 6. С. 136–152.
2. *Самотохин А.С., Тучин А.Г.* Оптимизация одноимпульсных траекторий возврата с орбиты искусственного спутника Луны // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 56. 24 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2016-56>
3. *Самотохин А.С.* Численный метод условной минимизации с использованием кэширования и модифицированной функции Лагранжа // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 39. 25 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2016-39>
4. *Егоров В.А.* Пространственная задача достижения Луны. М.: Наука, 1965. 224 с.
5. *Сихарулидзе Ю.Г.* Баллистика и наведение летательных аппаратов. М.: БИНОМ, 2011. 407 с.
6. *Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф., Сихарулидзе Ю.Г.* Алгоритмы управления космическим аппаратом при входе в атмосферу. М.: Наука, 1975, 400 с.
7. *Евдокимов С.Н., Климанов С.И., Корчагин А.Н. и др.* Модификация терминального алгоритма управления спуском при возвращении от Луны применительно к “усиленным” возмущениям // Космич. иссл. 2020. Т. 58. № 2. С. 149–164.

**СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ
ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ**

УДК 629.735.33.015

**ПОДГОТОВКА И ВЫПОЛНЕНИЕ ПОЛЕТА
КВАДРОКОПТЕРА В ГОРОДЕ¹**

© 2021 г. Н. М. Гревцов^{a,*}, Г. А. Лазурин^a, Р. М. Мурзагалин^a

^a ФГУП “Центральный аэрогидродинамический институт”, Москва, Россия

*e-mail: nikolay.grevtsov@tsagi.ru

Поступила в редакцию 26.12.2019 г.

После доработки 20.08.2020 г.

Принята к публикации 25.01.2021 г.

Рассматривается способ формирования управления траекторией квадрокоптера при полете из одного пункта в другой в условиях плотной городской застройки. Отработка алгоритмов траекторного управления производится на модели квадрокоптера с учетом аэродинамических сил и моментов, связанных с обтеканием аппарата, а также создаваемых винтами двигателя. Предполагается, что полет происходит на постоянной высоте по маршруту, полученному в процессе подготовки полетного задания. Маршрут задается с использованием промежуточных пунктов. Планирование маршрута выполняется в прямоугольной системе координат с помощью “цифровой карты безопасности”, которая представляет собой сетку в этой системе координат с одинаковой дискретностью по обеим осям. В каждом узле этой карты вычисляется минимальная дальность до ближайшего препятствия, и это значение присваивается узлу как мера безопасности при нахождении в нем летательного аппарата.

DOI: 10.31857/S0002338821030069

Введение. В рассматриваемых в настоящее время концепциях управление движением беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) на первом этапе относительная высота полета ограничивается несколькими сотнями, а то и десятками метров (в зависимости от минимальной разрешенной высоты полета пилотируемой авиации). Например, в ЕС активно разрабатывается концепция управления движением БПЛА класса VLL (very low level – очень малая высота), разрешенная относительная высота полета которых не превышает 150 м [1]. В пределах этой высоты препятствиями для полета БПЛА являются объекты наземной инфраструктуры. Кроме этих явных препятствий концепция предусматривает и объявление службой управления движением запрещенных для полета зон.

В настоящей статье рассматриваются методика построения возможных маршрутов полета БПЛА в условиях плотной городской застройки и вопросы формирования управления для отслеживания этих маршрутов. Для выполнения полетных операций в городских условиях подходящим является БПЛА мультироторной схемы. Это объясняется его маневренностью, возможностью вертикального взлета и посадки, способностью независимого управления направлением движения и ориентацией корпуса. Здесь формирование управления рассматривается для квадрокоптера как типичного представителя семейства БПЛА мультироторной схемы, имеющего достаточно простое математическое описание.

Построение маршрута при наличии препятствий (запрещенных для полета воздушных зон) является актуальной задачей как для пилотируемой, так и беспилотной авиации. Эта актуальность обусловлена требованиями безопасности. Решение задачи о выборе безопасного маршрута при наличии препятствий и/или ограничений рассматривается в ряде работ, например в [2–7]. Разнообразие конструктивных схем, динамических характеристик, условий применения, информационного обеспечения обуславливает и разнообразие подходов к формированию безопасных траекторий летательных аппаратов (ЛА).

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ. Уникальный идентификатор проекта – RFMEFI62818X0012.

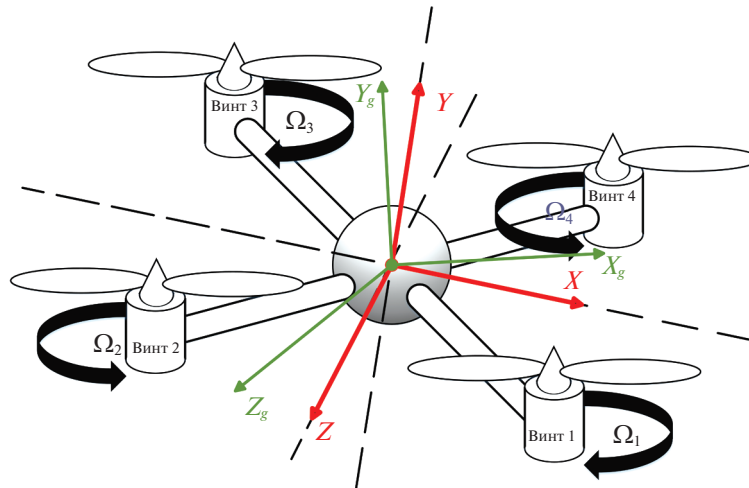


Рис. 1. Схема квадрокоптера

В [2] выбор маршрута производится из условия безопасного облета зон противовоздушной обороны противника. В [3] поиск безопасного маршрута осуществляется для полета экраноплана (полет на очень малой высоте). Построение безопасной траектории при заходе на посадку в условиях сложного рельефа местности рассматривается в [4]. В [5] описывается метод планирования траектории полета БПЛА через несколько контрольных точек, расположенных над местностью со сложным рельефом. В [6] предлагается способ выбора безопасного маршрута для автоматического управления движением наземного транспорта по аэродрому. В [7] приведен метод построения автоматического управления траекторией БПЛА при полете в производственном помещении, обеспечивающий предотвращение столкновений с препятствиями.

Представленная в настоящей статье методика может быть применена для нахождения безопасных маршрутов полета при наличии препятствий, опасных, запрещенных для полета зон независимо от их формы в плане. Разработанный, согласно методике, алгоритм занимает всего несколько секунд машинного времени для расчета всех возможных безопасных маршрутов. Выбор одного из них для полета БПЛА осуществляется по заданному критерию автоматически или оператором.

1. Формирование облика квадрокоптера. Параметры аппарата и его системы управления выбираются исходя из предположения, что основная функция аппарата – доставка корреспонденции или мелкого товара из одного пункта города в другой.

1.1. Выбор конструктивных параметров. Исходным требованием при выборе параметров квадрокоптера является его масса, которая вместе с полезной нагрузкой должна составлять 10 кг. При этом суммарная тяга двигателей, работающих в режиме 50–60% максимальной тяги, должна обеспечивать стабильный режим висения. Следовательно, максимальная тяга силовой установки должна составлять 20 кг. При этом запас тяги обеспечивает движение аппарата на углах тангажа и крена до 60° без потери высоты. Таким образом, максимальная тяга каждого двигателя должна быть равна 5 кг.

Анализ характеристик винтов и двигателей показывает, что такому требованию может удовлетворять двигатель с диаметром винта 18" (45.7 см) [8, 9]. Габаритные размеры квадрокоптера с такими двигателями не превышают 1.15 м. Для выполнения полетных операций в условиях плотной городской застройки этот параметр квадрокоптера важен так же, как и его масса и тяга силовой установки.

1.2. Кинематическая схема квадрокоптера. Схема квадрокоптера изображена на рис. 1. Показаны его основные кинематические компоненты и используемые при описании его движения системы координат (СК), а именно связанная с аппаратом СК XYZ , земная прямоугольная СК $X_g Y_g Z_g$, а также угловые скорости винтов силовой установки $\Omega_i, i = 1, 4$.

Оси X_g и Z_g земной СК лежат в горизонтальной плоскости, ось Y_g направлена по вертикали. Центр связанной СК совпадает с центром масс аппарата. Продольная ось X лежит в плоскости аппарата посередине между рычагами первого и четвертого двигателей. Нормальная ось Y совпа-

дает с осью аппарата и направлена вверх. Поперечная ось Z лежит в плоскости аппарата и дополняет связанную СК до правой тройки. Ориентация связанной СК относительно земной определяется углами Эйлера: тангажа θ , крена γ и рыскания ψ [10].

В принципе принятое здесь направление связанной оси X – чисто условное. В качестве оси X можно принять одну из восьми осей симметрии квадрокоптера. Выбор может быть определен полезной нагрузкой аппарата, например видеокамерой, ось которой должна быть направлена в определенную сторону.

1.3. Расчет динамических компонентов. При описании полного движения квадрокоптера учитываются аэродинамические силы и моменты, а также силы и моменты, создаваемые винтами.

Тяга P_i и крутящий момент M_i каждого двигателя рассчитывается по приведенным в [11–13] формулам:

$$P_i = \rho n_i^2 D^4 C_T(\lambda_i),$$

$$M_i = D P_i C_M(\lambda_i), \quad i = \overline{1,4},$$

где ρ – плотность воздуха на высоте полета, n_i – обороты i -го двигателя, D – диаметр винта, $\lambda_i = V_n/n_i D$ – относительная поступь i -го винта, V_n – нормальная составляющая скорости набегающего на квадрокоптер потока, $C_T(\lambda)$, $C_M(\lambda)$ – коэффициенты тяги и крутящего момента.

Модель i -го двигателя можно описать апериодическим звеном с ограничениями по оборотам и крутящему моменту:

$$T_n \dot{n}_i + n_i = C_\delta \delta_i, \quad (1.1)$$

где $C_\delta \delta_i$ – требуемое значение оборотов двигателя, T_n – постоянная времени двигателя.

1.4. Внутренний контур управления. Квадрокоптер является статически неустойчивым во всех каналах управления, поэтому законы управления оборотами двигателей основаны только на демпфировании угловых скоростей ω_x , ω_y , ω_z :

$$\delta_\vartheta = K_{\omega_z}(\omega_{zп} - \omega_z), \quad \delta_\gamma = K_{\omega_x}(\omega_{xп} - \omega_x), \quad \delta_\psi = K_{\omega_y}(\omega_{yп} - \omega_y), \quad (1.2)$$

где $\omega_{xп}$, $\omega_{yп}$, $\omega_{zп}$ – требуемые значения угловых скоростей.

Для стабилизации высоты сформируется сигнал

$$\delta_H = K_H(H_{п} - H) - K_{Vy} V_y, \quad (1.3)$$

где $H_{п}$ – требуемое значение высоты полета; здесь она принимается постоянной.

Величины δ_ϑ , δ_γ , δ_ψ , δ_H распределяются на управляющие устройства двигателей в соответствии с сигналами δ_i , $i = \overline{1,4}$, значения которых вырабатываются согласно следующим формулам:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \delta_\vartheta - \delta_\gamma + \delta_\psi + \delta_H, & \delta_2 &= -\delta_\vartheta - \delta_\gamma - \delta_\psi + \delta_H, \\ \delta_3 &= -\delta_\vartheta + \delta_\gamma + \delta_\psi + \delta_H, & \delta_4 &= \delta_\vartheta + \delta_\gamma - \delta_\psi + \delta_H. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Величины сигналов δ_i , $i = \overline{1,4}$, подставляются в (1.1) при моделировании движения аппарата.

Для стабилизации углов крена, рыскания, тангажа квадрокоптера используются следующие линейные алгоритмы:

$$\omega_{xп} = \frac{K_\gamma}{K_{\omega_x}}(\gamma_{п} - \gamma), \quad \omega_{yп} = \frac{K_\psi}{K_{\omega_y}}(\psi_{п} - \psi), \quad \omega_{zп} = \frac{K_\vartheta}{K_{\omega_z}}(\vartheta_{п} - \vartheta) \quad (1.5)$$

где $\gamma_{п}$, $\psi_{п}$, $\vartheta_{п}$ – требуемые значения стабилизируемых углов.

1.5. Управление траекторией. При полете квадрокоптера в заданную точку на маршруте управление траекторией осуществляется за счет ориентации аппарата. Земные координаты заданной точки $(x_{п}, z_{п})$, а также текущие земные координаты (x, z) переводятся в координаты горизонтированной связанной СК аппарата. Рассогласование между боковыми заданной и текущей координатами в этой системе компенсируется соответствующим управлением по крену. Аналогичное рассогласование в продольном канале компенсируется управлением по тангажу.

Для компенсации используется PID – регулирование (proportional, integral, derivative). Соответствующие формулы для потребных значений углов крена и тангажа имеют вид:

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{п}} &= \left[K(x_{\text{п}} - x) - K_V V_x + K_I \int_0^t (x_{\text{п}} - x) dt \right] \sin \psi + \\ &+ \left[K(z_{\text{п}} - z) - K_V V_z + K_I \int_0^t (z_{\text{п}} - z) dt \right] \cos \psi, \\ \vartheta_{\text{п}} &= - \left[K(x_{\text{п}} - x) - K_V V_x + K_I \int_0^t (x_{\text{п}} - x) dt \right] \cos \psi + \\ &+ \left[K(z_{\text{п}} - z) - K_V V_z + K_I \int_0^t (z_{\text{п}} - z) dt \right] \sin \psi. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Управление по каналу рыскания определяется направлением полета на заданную точку. Соответствующий потребный угол рыскания $\psi_{\text{п}}$ находится следующим образом: если $x_{\text{п}} - x \geq 0$, то

$$\psi_{\text{п}} = -\arcsin \frac{z_{\text{п}} - z}{\sqrt{(x_{\text{п}} - x)^2 + (z_{\text{п}} - z)^2}},$$

в противном случае

$$\psi_{\text{п}} = -\pi \text{sign}(z_{\text{п}} - z) + \arcsin \frac{z_{\text{п}} - z}{\sqrt{(x_{\text{п}} - x)^2 + (z_{\text{п}} - z)^2}}.$$

Полученные значения $\gamma_{\text{п}}$, $\theta_{\text{п}}$, $\psi_{\text{п}}$ ограничиваются исходя из располагаемых динамических характеристик аппарата, учитывая условие выдерживания заданной высоты полета. Кроме того, в случае если абсолютная величина разности $\psi_{\text{п}} - \psi$ будет превосходить π , она приводится к физически подходящему значению. Для этого можно использовать формулу

$$\psi_{\text{п}} = \psi_{\text{п}} + 2\pi \text{sign}(\psi_{\text{п}} - \psi).$$

После этих операций значения $\gamma_{\text{п}}$, $\theta_{\text{п}}$, $\psi_{\text{п}}$ подставляются в формулы (1.5), в которых вычисляются потребные значения угловых скоростей $\omega_{x\text{п}}$, $\omega_{y\text{п}}$, $\omega_{z\text{п}}$. Последние подставляются в формулы (1.2), где определяются сигналы для стабилизации угловых скоростей, которые затем вместе с сигналом стабилизации высоты полета (1.3) распределяются по управляющим элементам двигателей, согласно выражениям (1.4).

1.6. Бортовая измерительная система. Необходимая для реализации рассматриваемого подхода к формированию автоматического траекторного управления информация может быть получена с помощью бортового инерциального измерительного блока (ИИБ), реализованного по технологии микроэлектромеханики. ИИБ обеспечивает измерение угловых скоростей, углов ориентации аппарата, линейных ускорений, составляющих скорости полета. Для определения местоположения может быть использована спутниковая навигационная система с дифференциальным приложением, интегрированная с ИИБ.

2. Построение безопасных маршрутов. В разрабатываемых в настоящее время концепциях управления движением БПЛА, в том числе и в U-Space (unmanned air space), не рассматриваются конкретные правила движения для них, подобные автомобильным. Однако в некоторых работах, выполняемых вне рамок этих концепций, предлагается за основу взять правило эшелонирования воздушного пространства по высоте. В этом случае каждому БПЛА будет назначаться эшелон, которого он должен придерживаться в процессе полета. В частности, в [14] предлагается ввести это правило для полетов БПЛА в городской среде. В настоящей работе предполагается, что полет БПЛА выполняется на постоянной высоте ниже высоты зданий.

Построение возможных безопасных маршрутов ЛА при наличии препятствий (опасных/запрещенных для полета зон) осуществляется в прямоугольной СК. Местоположение препятствий, в данном случае высотных зданий, считается известным. Метод предусматривает построение вокруг каждого препятствия примыкающей к его границам полосы безопасности заданной ширины. Препятствие вместе с полосой безопасности считается нелетной зоной, т.е.

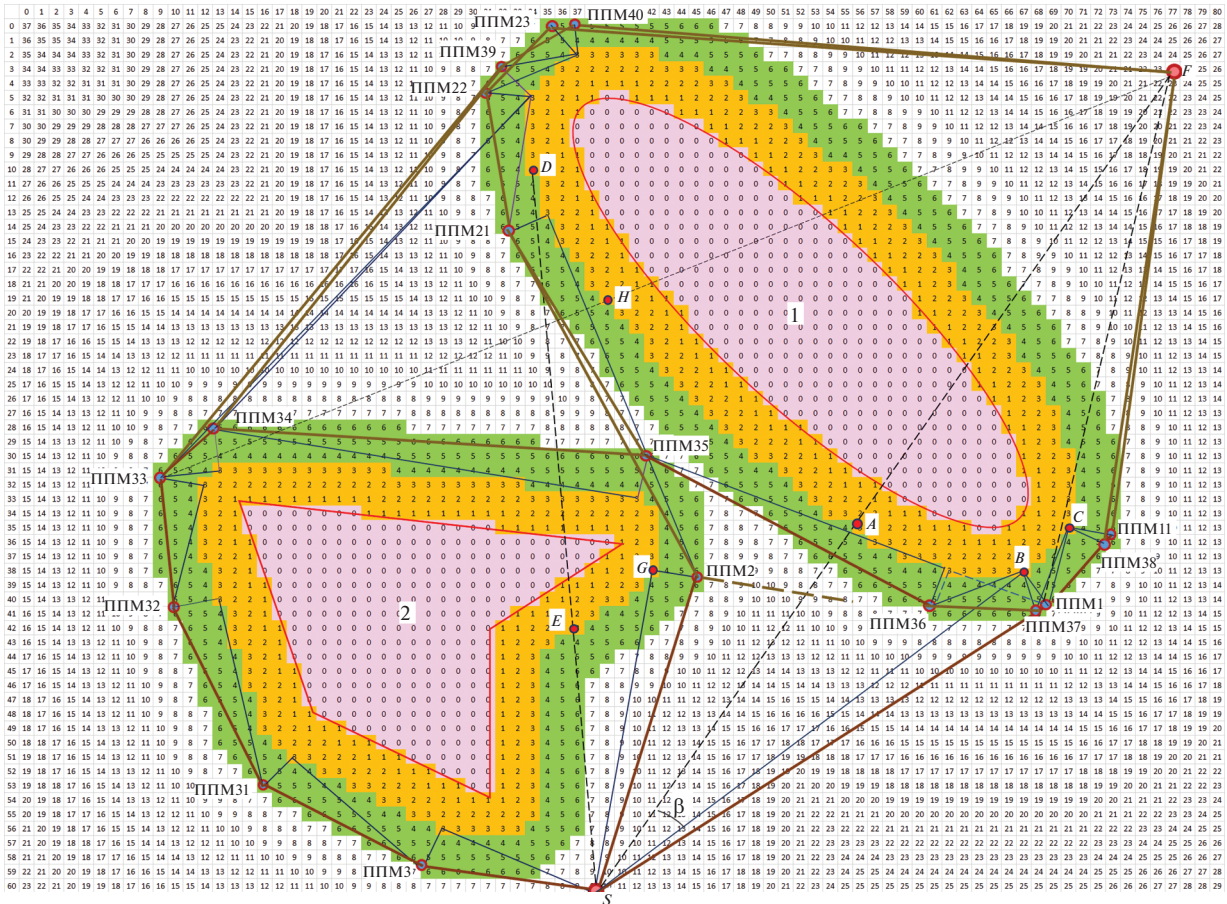


Рис. 2. Иллюстрация к методу построения безопасных маршрутов на “цифровой карте безопасности”

безопасные маршруты не должны пересекать границу этой зоны. Построение маршрутов ограничивается некоторой заданной областью. Более того, за границы этой области не должна выходить и траектория отслеживания построенных маршрутов.

2.1. “Цифровая карта безопасности”. В принятой системе координат строится сетка с одинаковой по обеим осям дискретностью Δl . Значение дискретности выбирается так, чтобы обеспечить желательную точность отображения препятствий. Узлы сетки внутри границ препятствий маркируются нулем, как показано на рис. 2, где границы препятствий изображены красными линиями, а ячейки, внутри которых находятся узлы препятствий, окрашены розовым цветом.

Каждый из остальных узлов сетки маркируется величиной дальности до ближайшего узла, находящегося внутри границ препятствий, причем эта дальность выражается в относительных единицах:

$$\bar{r}_{\min} = [r_{\min} / \Delta l], \tag{2.1}$$

где квадратные скобки означают округление находящейся в них величины до целого значения. Совокупность этих значений для всех узлов сетки можно рассматривать как “цифровую карту безопасности”. Примером “цифровой карты безопасности” является приведенная на рис. 2 карта с маркированными узлами сообразно наличию двух препятствий. Нужно иметь в виду, что в данном случае промаркированные узлы находятся в центре ячеек.

Вокруг каждого препятствия строится **полоса безопасности** заданной ширины. Внешняя граница **полос безопасности** проходит по узлам сетки со значением

$$\bar{r}_{п.б} = [r_{п.б} / \Delta l],$$

где $r_{п.б}$ — заданная ширина полос безопасности, квадратные скобки, как и выше, означают, что заключенная в них величина округляется до целого.

На рис. 2 ячейки, в которые попадают узлы сетки, принадлежащие полосам безопасности, окрашены в оранжевый цвет. Препятствия со своими полосами безопасности представляют собой **нелетные зоны**. Ниже они так и называются. Применяемая в тексте нумерация нелетных зон совпадает с нумерацией соответствующих препятствий.

Промежуточные пункты маршрутов (ППМ) для облета нелетных зон строятся в примыкающих к нелетным зонам **коридорах облета** заданной ширины $r_{обл}$. Внешняя граница этих коридоров проходит по узлам со значением

$$\bar{r}_{кор} = [(r_{п.б} + r_{обл})/\Delta l],$$

где заключенная в скобки величина, как и в формуле (2.1), округляется до целого. На рис. 2 ячейки, в которые попадают принадлежащие коридорам облета узлы, окрашены в зеленый цвет.

Ниже приводится пример, поясняющий суть рассматриваемого метода построения безопасных маршрутов полета при наличии препятствий.

2.2. Пример построения безопасных маршрутов. Пример построения иллюстрируется на карте, изображенной на рис. 2. Физические размеры карты составляют 400 м вдоль горизонтальной оси X и 300 м вдоль направленной вниз вертикальной оси Z . На ней построена “цифровая карта безопасности” с дискретностью 5 м по обоим осям с присвоенными узлам значениями “безопасности”. Верхний ряд чисел означает номер столбца, левый столбец – номер строки.

Предполагается, что ЛА перелетает из точки S в точку F . Пусть ширина полосы безопасности задается равной 15 м. Прямолинейная траектория перелета блокируется нелетной зоной, а именно препятствием 1 вместе с примыкающей к ней полосой безопасности. Внешняя граница этой полосы ограничена линией, проходящей через узлы со значениями 3 ($15\text{ м}/5\text{ м} = 3$). Напомним, что эти узлы находятся в центре соответствующих ячеек. Пусть ширина коридора для формирования маршрута облета составляет также 15 м. В этом случае ППМ не будет выходить за область, ограниченную линией, проходящей через узлы со значением 6 ($(15\text{ м} + 15\text{ м})/5\text{ м} = 6$).

В принципе облет нелетной зоны 1 возможен как справа, так и слева. Сначала рассмотрим построение маршрута облета справа, а именно процесс определения положения ППМ. Все необходимые построения показываются на рис. 2 синими линиями.

1. Построение начинается с проведения касательной из точки S к внешней границе нелетной зоны справа. Для этого определяются углы между отрезком SF и направлениями из точки S на узлы со значениями 3 последовательно против часовой стрелки, начиная из точки A , которая лежит на пересечении отрезка SF с внешней границей нелетной зоны. Тот узел, для которого этот угол максимален (угол β на рис. 2), определяет касательное направление. В данном случае – это узел B .

2. Затем строится внешняя по отношению к препятствию нормаль к этой касательной в точке касания, т.е. в точке B . Пересечение нормали и внешней границы коридора облета (в данном случае точка ППМ1) рассматривается в качестве кандидатуры первого ППМ для облета нелетной зоны 1 справа.

3. Проверяется наличие на отрезке S -ППМ1 нелетных зон.

В данном случае отрезок S -ППМ1 свободен от нелетных зон и его можно рассматривать как первый участок маршрута облета нелетной зоны 1, а точка ППМ1 – как первый ППМ на этом маршруте. Из пункта ППМ1 выполняется попытка достичь точки F по прямой. Однако расчеты показывают, что прямолинейный отрезок ППМ1- F проходит через нелетную зону 1.

Остановимся на одном правиле, которое определяет продолжение построения маршрута облета нелетной зоны из текущего ППМ. В каждом таком случае рассматриваются два варианта облета этой зоны – по и против часовой стрелки. Соответственно из текущего ППМ строятся примыкающие к нему участки для двух маршрутов. Если направление какого-либо из этих участков отличается от направления предыдущего более чем на 120° (с учетом направления движения), тогда дальнейшее построение такого маршрута считается бесперспективным и прекращается.

Рассмотрим применение этого правила на продолжении облета нелетной зоны 1. Для нахождения следующего ППМ для облета этой зоны справа (против часовой стрелки) выполняются п. 1–3 описанной выше процедуры. Нужно только заменить точку S точкой ППМ1, узел B – узлом C . В результате выполнения всей процедуры получаем второй ППМ для облета нелетной зоны против часовой стрелки – ППМ11. Аналогично строится участок для облета из ППМ1 нелетной зоны 1 по часовой стрелке. Детали этого построения показаны на рис. 2 штриховыми линиями.

ями. Угол между этим участком и участком S – ППМ1 превышает 120° , поэтому облет нелетной зоны 1 по часовой стрелке из ППМ1 отклоняется.

Отрезок ППМ11 – F не содержит узлов нелетной зоны, т.е. маршрут S – ППМ1 – ППМ11 – F является безопасным для перелета из точки S в точку F . На рис. 2 маршруты изображаются жирными коричневыми линиями.

Построение маршрута облета нелетной зоны 1 слева (по часовой стрелке) начинается с проведения касательной из точки S к внешней границе этой зоны слева. Для ее нахождения определяются углы между отрезком SF и направлениями из точки S на узлы со значениями 3 по часовой стрелке последовательно, начиная из точки A . Узел, доставляющий максимальное значение угла, определяет касательное направление. В данном случае – это узел D . Отрезок SD пересекает нелетную зону 2. Для облета нелетной зоны 1 слева прежде необходимо облететь нелетную зону 2.

Местоположения первого ППМ для облета нелетной зоны 2 справа определяется так же, как и первого ППМ для облета нелетной зоны 1 справа. Только в п. 1 следует заменить отрезок SF отрезком SD , точку A – точкой E , в п. 1, 2 узел B нужно заменить узлом G , в п. 2, 3 ППМ1 заменить на ППМ2. Так как на отрезке S -ППМ2 узлов нелетных зон нет, его можно считать первым участком маршрута облета нелетной зоны 2 справа, а точку ППМ2 – первым ППМ на этом маршруте.

Затем проверяется возможность безопасного перелета из ППМ2 в точку F . Поскольку в данном случае это невозможно в силу препятствия в виде нелетной зоны 1, выполняется облет этой зоны. Облет возможен справа и слева. На самом деле маршрут облета справа был рассчитан, но на рис. 2 не приводится по причине перегруженности фрагмента рисунка, где показывались маршруты облета нелетной зоны 1. Его начало показывается штриховой линией. Кроме того, этот маршрут будет устранен в результате процедуры коррекции маршрутов, о которой будет сказано ниже.

Для облета нелетной зоны 1 по часовой стрелке строится касательная слева от нее, затем нормаль к ней, на которой находится ППМ21. Из ППМ21 невозможно по прямой безопасно перелететь в точку F . Поэтому построение маршрута облета нелетной зоны 1 продолжается в виде определения местоположения ППМ22, ППМ23. Из ППМ23 уже можно по прямой перелететь в конечную точку. Таким образом завершается построение безопасного маршрута с облетом нелетной зоны 2 справа, а затем нелетной зоны 1 слева.

Построение маршрута с облетом нелетной зоны 2 слева также начинается с построения касательной из точки S к этой зоне слева. Для этого путем последовательного перебора по часовой стрелке узлов на границе нелетной зоны (узлов со значением 3), начиная от точки E , находится узел, направление на который из точки S составляет максимальный угол с отрезком SD . Затем проводится нормаль к касательной, точка пересечения которой с внешней границей коридора облета принимается в качестве ППМ для облета нелетной зоны 2 слева – ППМ3. Это устанавливается после проверки отсутствия нелетных зон на отрезке S – ППМ3.

Затем проверяется возможность безопасного перелета из ППМ3 в точку F по прямой. Поскольку ни то ни другое не удастся, продолжается формирование маршрута облета нелетной зоны 2 слева, т.е. определяются местоположения ППМ31, ППМ32, ППМ33. Для первых двух препятствием является именно та нелетная зона, которую они облетают. При этом используется правило “ 120° ” На отрезке ППМ33 – F отсутствуют другие препятствия кроме нелетной зоны 1, которую нужно облететь для выхода в конечную точку, причем можно сделать это как справа, так и слева.

Для построения маршрута облета справа нелетной зоны 1 из ППМ33 строится касательная к внешней границе этой зоны справа, затем нормаль к ней и далее определяется местоположение ППМ. Однако в этом случае сталкиваемся с тем, что перелету в этот ППМ из ППМ33 препятствует нелетная зона 2, т.е. необходимо продолжать ее облет. Для облета определяются местоположения для ППМ34, ППМ35. Далее уже для облета нелетной зоны 1 справа строятся ППМ36, ППМ37 и ППМ38, из которого попадаем в конечную точку F .

Для облета нелетной зоны 1 слева из ППМ33 строится касательная к этой зоне слева. Для построения касательной применяется описанный выше в п. 1 прием. Вычисляется угол между отрезком ППМ33 – F и направлением из ППМ33 на последовательно перебираемые по часовой стрелке узлы со значением 3, начиная из точки H . Касательная проводится к узлу, который доставляет углу наибольшее значение. К касательной строится нормаль, на которой предположительно может находиться очередной ППМ после ППМ33. Проверка показывает, что на участке ППМ33–ППМ39 (так он обозначается на рис. 2) нелетных зон нет, т.е. предположение оправдано. Затем определяется последний ППМ этого маршрута – ППМ40, из которого можно

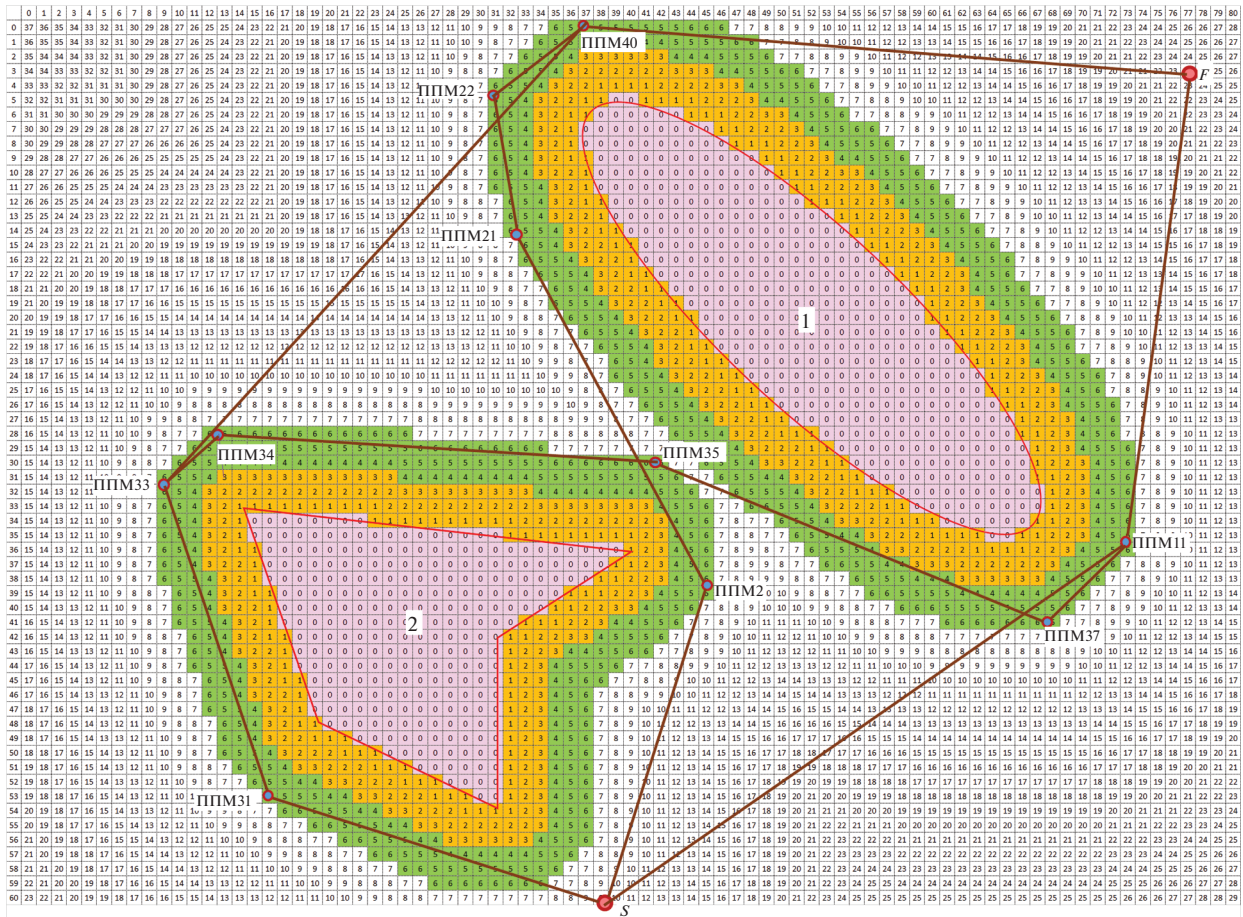


Рис. 3. Окончательные маршруты “S–F” после процедуры коррекции для иллюстративного примера

безопасно выйти в точку *F*. Разумеется, проверяется отсутствие на участке ППМ40 – *F* узлов не-летных зон.

Сделаем два замечания относительно используемого метода формирования безопасных маршрутов. Метод допускает построение ППМ и участков маршрута на границе разрешенной области полетов. На рис. 2 видно, что ППМ23 и ППМ40 расположены на границе, причем из-за нее произошло сужение коридора облета. В случае наложения коридоров, которые предназначаются для облета нелетных зон, маршруты прокладываются посередине между границами этих зон, если это возможно, т.е. если нелетные зоны не накладываются друг на друга.

2.3. К о р р е к ц и я м а р ш р у т о в. Рассматриваемый метод позволяет формировать **все возможные** маршруты для перелета из точки в точку при наличии опасных или запрещенных зон. Описанные выше процедуры определения местоположения ППМ не допускают пропуска какого-либо возможного маршрута. Издержками такого подхода являются лишние ППМ на маршрутах. В этих случаях выполняется процедура коррекции маршрутов, т.е. такие ППМ исключаются. Проверка возможности исключения проводится относительно всех построенных ранее ППМ. Проверка заключается в том, не приведет ли исключение ППМ к пересечению маршрутом нелетных зон. В данном случае процедура коррекции маршрутов позволяет исключить ППМ1, ППМ3, ППМ32, ППМ36, ППМ39. Кроме того, можно объединить ППМ, если они находятся очень близко друг к другу. Так ППМ38 объединяется с ППМ11, ППМ23 – с ППМ40.

На рис. 3 показан окончательный набор безопасных маршрутов, полученный после применения процедур коррекции. Актуальный маршрут может быть выбран автоматически в соответствии с заданным критерием или вручную оператором.

Отметим, что рассматриваемый метод формирования безопасных маршрутов эффективен для любых форм препятствий в плане. Они могут быть аппроксимированы фигурами с гладкими

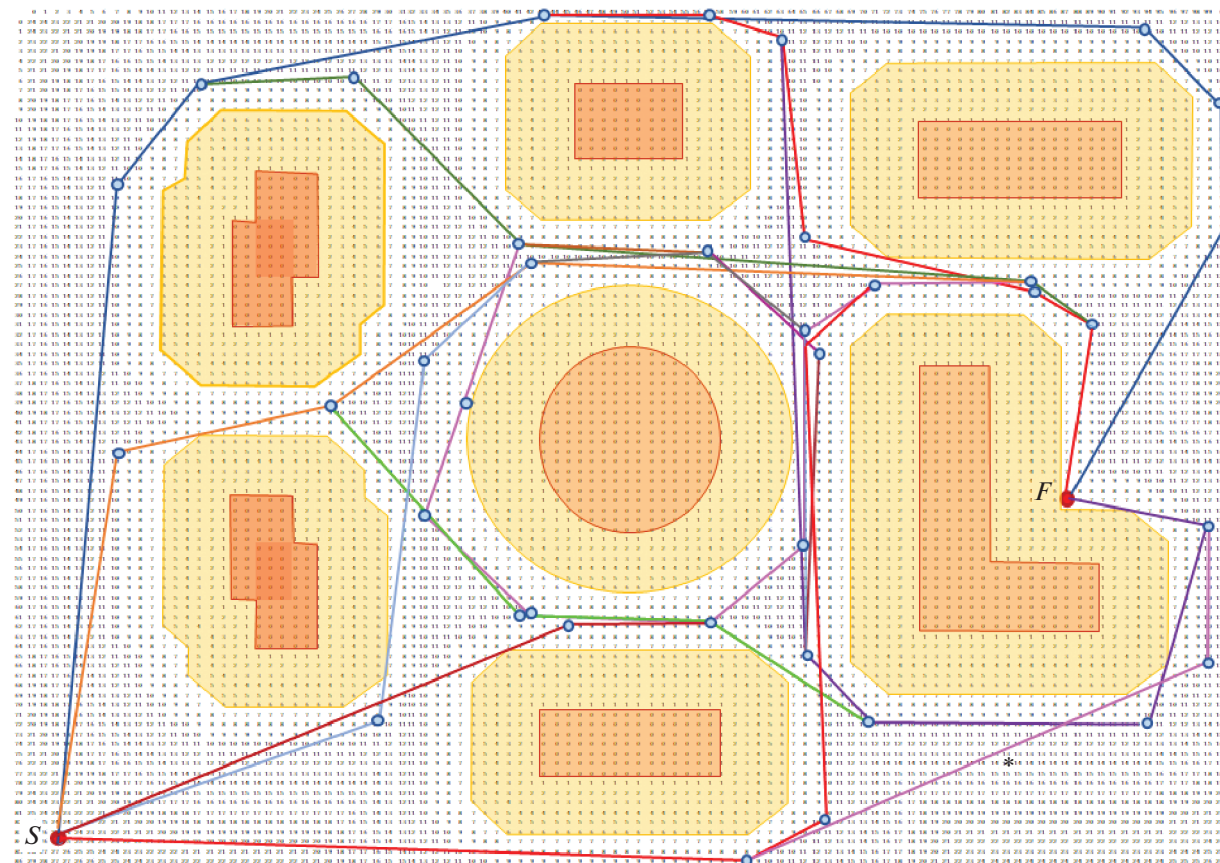


Рис. 4. Возможные безопасные маршруты “ S – F ” на “цифровой карте безопасности” городского квартала

границами или многоугольниками. Аппроксимирующие фигуры могут быть как выпуклыми, так и вогнутыми.

2.4. Построение возможных маршрутов для перелета в пределах городского квартала. Полетное задание для квадрокоптера состоит в перелете из одного пункта в другой в пределах квартала, план которого приведен на рис. 4. Квартал имеет размеры 200 м по оси X и 172 м по оси Z . Предполагается, что высота зданий превышает установленную для выполнения полетной операции высоту, которая равна 30 м. На плане квартала изображена “цифровая карта безопасности” с дискретностью 2 м по обеим осям. В первой строке плана указан номер столбца, в первом столбце – номер строки. На “карте” красным цветом указаны местоположения строений, оранжевым – примыкающие к ним полосы безопасности, вместе они составляют нелетные зоны. Ширина полос безопасности равна 12 м. Их внешняя граница проходит по углам “цифровой карты безопасности” со значениями 6 ($12/2$).

Пункт отправления квадрокоптера находится в точке S , пункт прибытия – в точке F . Очевидно, что расположение зданий препятствует полету между этими точками по прямой. При построении безопасных маршрутов ширина коридоров облета нелетных зон задается равной 8 м. Внешняя граница этих коридоров проходит по углам “цифровой карты безопасности” со значениями 10 ($8/2 + 6$). Здесь они не показаны. При построении маршрута не допускается нарушение границ установленной для выполнения полета области, в данном случае – заданного квартала. Если вблизи такой границы построение коридора облета заданной ширины невозможно, то он сужается так, что его внешняя граница проходит по границе разрешенной области. Соответствующие ППМ могут задаваться на границе последней.

На рис. 4 приведены возможные безопасные маршруты, полученные в результате расчетов, согласно изложенному выше методу. Такие расчеты могут быть проведены в процессе предполетного планирования полетного задания. Выбор предпочтительного маршрута может быть сделан автоматически в соответствии с заранее принятым критерием или оператором. Если в каче-

стве критерия принять длину маршрута, то выбор будет сделан в пользу маршрута, отмеченного на рис. 4 звездочкой. Его длина составляет 260 м.

3. Математическое моделирование полета квадрокоптера по полученным маршрутам. Для наиболее обоснованного выбора целесообразно провести математическое моделирование полета по альтернативным маршрутам с привлечением полной модели квадрокоптера желательнo с учетом возможных погодных условий, влияющих на его траекторию.

3.1. Уравнения движения квадрокоптера. Уравнения движения квадрокоптера в связанной СК в пренебрежении гироскопическим моментом ввиду его малости имеют вид [13]

$$\begin{aligned} I_{xx}\dot{\omega}_x &= \omega_z\omega_y(I_{yy} - I_{zz}) + l(-P_1 - P_2 + P_3 + P_4), \\ I_{yy}\dot{\omega}_y &= \omega_x\omega_z(I_{xx} - I_{zz}) - J_R \sum_{i=1}^4 \Omega_i^2 + DC_M(P_1 - P_2 + P_3 - P_4), \\ I_{zz}\dot{\omega}_z &= \omega_x\omega_y(I_{xx} - I_{yy}) + l(P_1 - P_2 - P_3 + P_4), \end{aligned}$$

где $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – угловые скорости, I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} – моменты инерции квадрокоптера, l – плечо двигателя относительно связанных осей X и Z аппарата, J_R – момент инерции ротора вместе с винтом, Ω_i – угловая скорость вращения i -го ротора (с учетом направления вращения).

Составляющие скорости полета V_x, V_y, V_z квадрокоптера в земной СК описываются с использованием углов Эйлера θ, γ, ψ уравнениями [10]

$$\begin{aligned} m\dot{V}_x &= (\sin\gamma\sin\psi - \cos\gamma\sin\vartheta\cos\psi) \sum_{i=1}^4 P_i - c_x q S, \\ m\dot{V}_y &= \cos\gamma\cos\vartheta \sum_{i=1}^4 P_i - mg, \\ m\dot{V}_z &= (\sin\gamma\cos\psi + \cos\gamma\sin\vartheta\sin\psi) \sum_{i=1}^4 P_i - c_z q S. \end{aligned}$$

Здесь m – масса аппарата, c_x, c_y – коэффициенты аэродинамической продольной и поперечной сил, q – скоростной напор, S – характерная площадь аппарата, g – ускорение свободного падения.

Вычисление углов Эйлера производится путем интегрирования уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \omega_y \sin \gamma + \cos \gamma, \\ \dot{\gamma} &= \omega_x - \tan \vartheta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma), \\ \dot{\psi} &= \sec \vartheta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma). \end{aligned}$$

Для определения положения центра масс квадрокоптера ($x, y = H, z$) в земной СК используются уравнения

$$\dot{x} = V_x + W_x, \quad \dot{y} = V_y, \quad \dot{z} = V_z + W_z,$$

где W_x, W_z – составляющие скорости ветра вдоль осей X, Z земной СК.

3.2. Моделирование полета по маршруту без внешних возмущений. При моделировании масса аппарата с полезной нагрузкой принималась равной 10 кг. Для расчета траектории отслеживания использовалась полная математическая модель квадрокоптера с его системой управления, описание которой приведено в разд. 1. По сценарию предполагалось, что первые 10 с после старта квадрокоптер находится в режиме висения, стабилизирует свое положение в начальной точке (пункт S), высоту (30 м) и направление связанной оси X на первый ППМ на маршруте.

Из представленных на рис. 4 маршрутов для отслеживания были выбраны семь характерных. Они приведены на рис. 5, где также показаны строения в плане и полосы безопасности. Штрихпунктирными линиями отмечены прямолинейные участки, соединяющие смежные ППМ. Видно, что в отсутствие внешних возмущений траектории отслеживания между ППМ незначительно отклоняются от прямолинейных. По этой причине длина траекторий отслеживания может незначительно превышать расчетную, полученную путем сложения длин всех прямолинейных

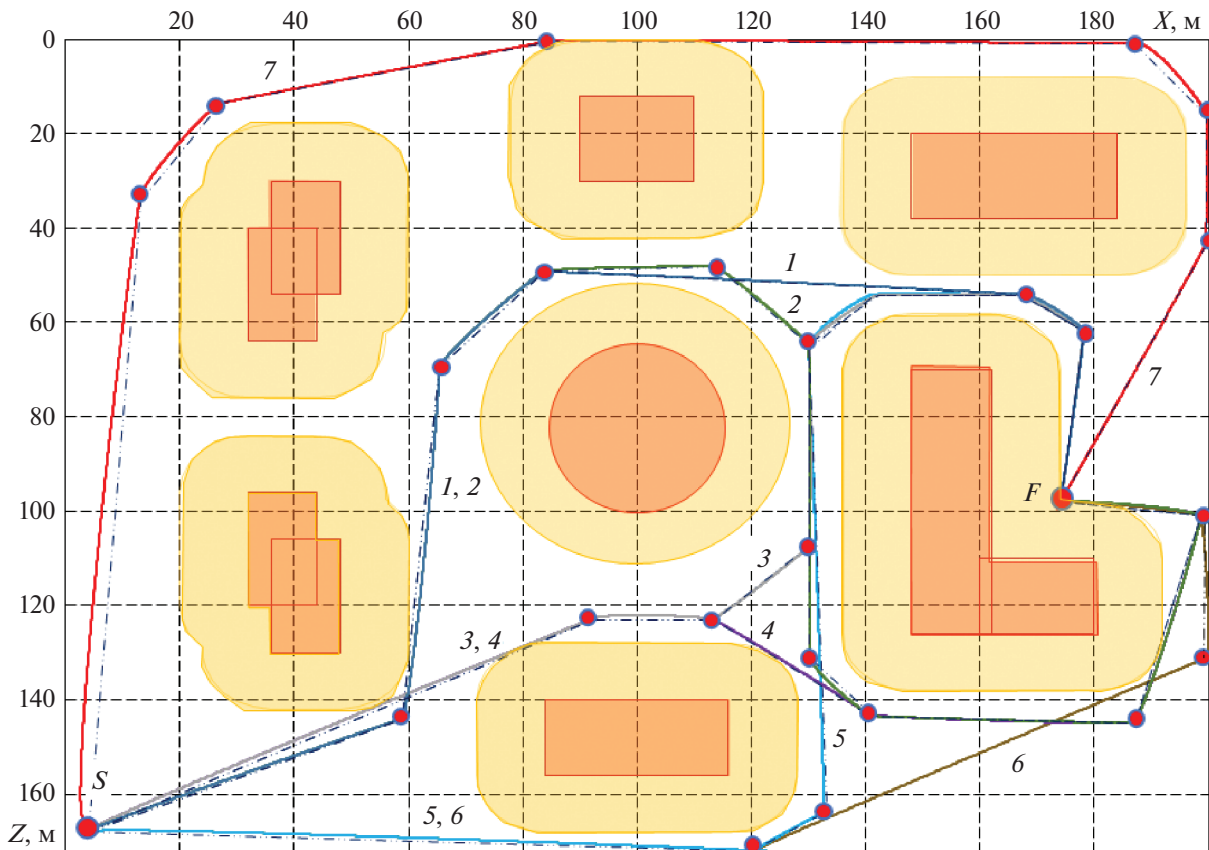


Рис. 5. Отслеживание квадрокоптером характерных маршрутов полета в отсутствие внешних возмущений

участков между ППМ. Так при отслеживании первого маршрута длина траектории отслеживания составила 298 м, что на 0.7% превышает расчетную длину 296 м.

При моделировании отслеживания предполагалось, что полет квадрокоптера происходит в автоматическом режиме, т.е. по заложенному в его бортовую вычислительную систему маршруту, но под наблюдением оператора. В случае непредвиденных обстоятельств в полете аппарата оператор может вмешаться в его управление. Информация о внешней обстановке поступает оператору с видеокamеры, установленной по оси X . Поэтому проекция оси X аппарата на горизонтальную плоскость всегда направлена на ППМ, к которому он движется. При приближении к ППМ скорость полета снижается вследствие уменьшения по абсолютной величине угла тангажа, как это следует из формулы (1.6). Достигнув окрестности ППМ (в данном случае круга с радиусом 0.5 м с центром в этом ППМ), аппарат поворачивается так, чтобы проекция связанной оси X была направлена на следующий ППМ маршрута. После поворота аппарат разгоняется.

Если при выборе маршрута для реализации в качестве критерия принять длину траектории отслеживания, то предпочтительным следует считать маршрут 6. Длина траектории его отслеживания равна 261 м (всего на 1 м превышает длину маршрута). Однако его недостатком является близость предпоследнего участка к границе допустимой области полета. На этом участке траектория отслеживания проходит даже по самой границе.

Следующим кандидатом является маршрут 4, длина траектории отслеживания которого всего на 11 м превышает соответствующее значение для маршрута 6, но не содержит его недостатков. Таким образом, в данном случае для реализации может быть выбран маршрут 4. На этом маршруте пять ППМ, перед каждым квадрокоптер тормозится, поворачивается на следующий ППМ и разгоняется. Изменение скорости полета по времени для этого маршрута приведено на рис. 6.

3.3. Моделирование полета по маршруту при наличии ветра. Ветер является серьезным возмущающим фактором, действующим на движение квадрокоптера, имея в виду малый вес аппарата. Поэтому при выборе маршрута для квадрокоптера в процессе предполетного планирования целесообразно провести расчеты по отслеживанию альтернативных

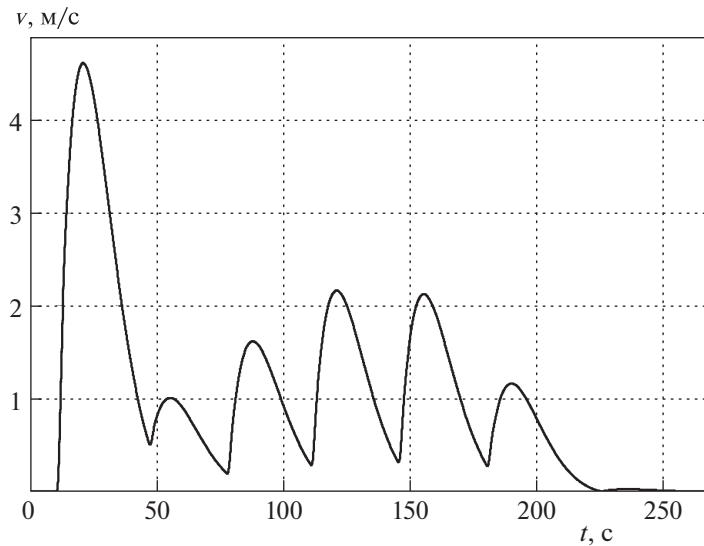


Рис. 6. Изменение скорости полета по времени на маршруте 4

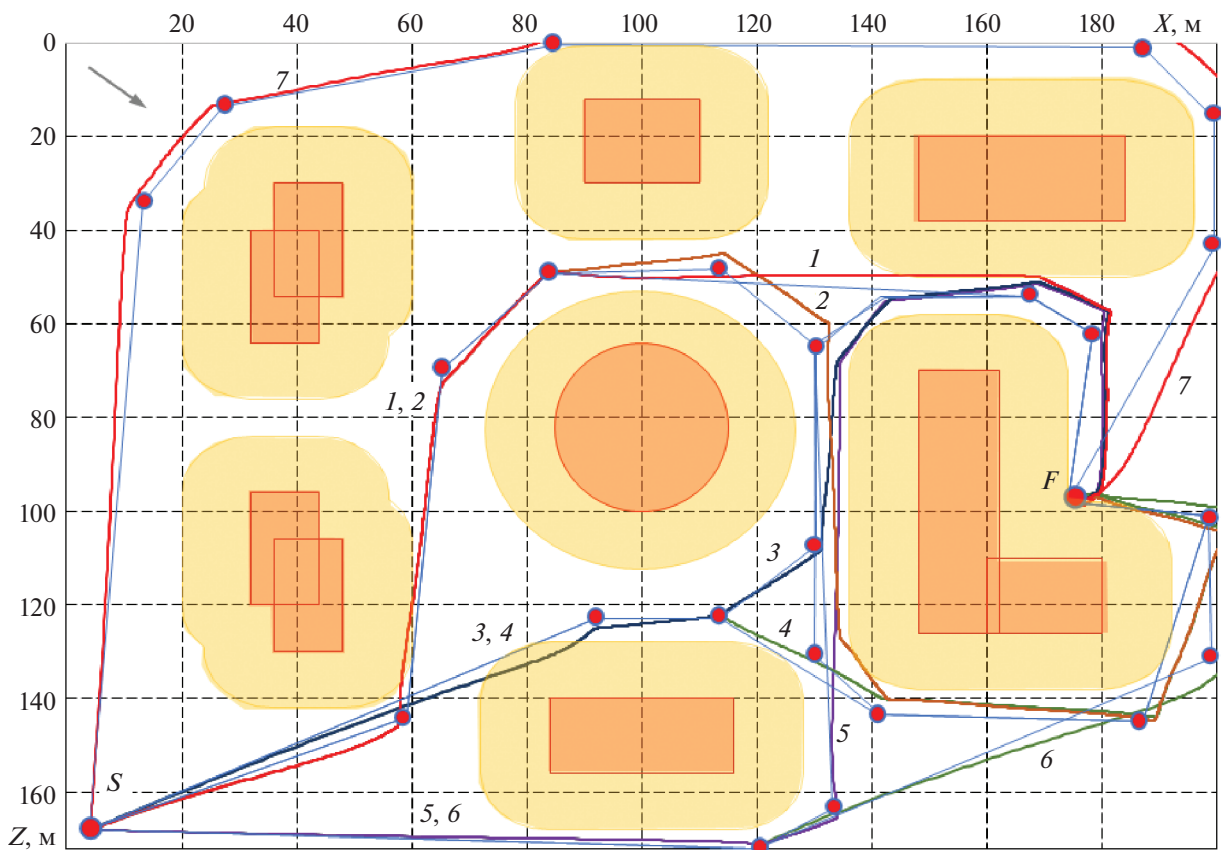


Рис. 7. Отслеживание квадрокоптером характерных маршрутов полета при ветре

маршрутов с учетом прогнозируемого ветра. Поскольку предполагается, что полет квадрокоптера происходит на малой высоте, можно рассматривать ветер только горизонтального направления.

Для корректности моделирование отслеживания маршрутов при заданном общем направлении и скорости ветра следует проводить на конкретной его реализации на каждом участке полета

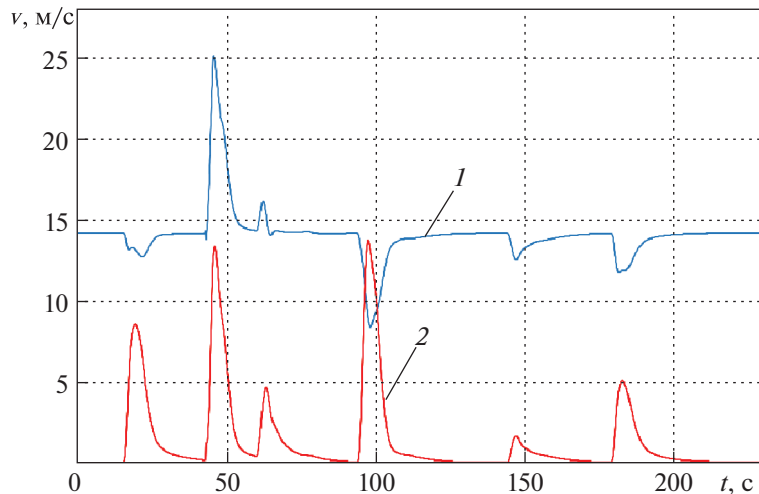


Рис. 8. Изменение скоростей полета по времени на маршруте 4 при ветре: 1 — воздушная скорость, 2 — земная скорость

с учетом аэродинамических особенностей окружающей обстановки (завихрений, аэродинамических теней). В демонстрационном примере моделирования полета в условиях ветра принято, что на каждом прямолинейном участке траектории ветер один и тот же. Его скорость равна 14 м/с и направлена под углом 45° к земной оси X .

Так же, как и в расчетах без учета возмущений, при отслеживании маршрута проекция связанной оси X аппарата направлялась на очередной ППМ до сближения с ним, затем производился поворот связанной оси X на следующий ППМ маршрута. Результаты расчета траекторий отслеживания приведены на рис. 7. Тонкими линиями показаны отрезки, соединяющие смежные ППМ.

Для квадрокоптера с массой 10 кг даже при незначительном аэродинамическом сопротивлении принятый в расчетах ветер существенно влияет на траектории отслеживания. Почти все траектории отслеживания пересекают границы нелетных зон, но, следует подчеркнуть, только в пределах полос безопасности. Траектории маршрутов 2, 4, 6, 7 выходят за границы разрешенной области полета. Эти маршруты сразу исключаются из возможных для реализации. Из остальных предпочтительным является маршрут, при отслеживании которого нарушение границ нелетных зон минимально. По этому показателю выбор может быть сделан в пользу маршрута 1. Длина траектории отслеживания при этом выборе составляет 320 м. Это на 14 м превышает длину маршрута, вычисленную как сумма расстояний между соседними ППМ. Изменение воздушной и земной скоростей полета при отслеживании этого маршрута показано на рис. 8.

Заключение. Предложен метод построения сети безопасных маршрутов полета малого БПЛА в условиях плотной городской застройки. Математическое моделирование с использованием полной динамической модели квадрокоптера показывает, что в отсутствие внешних возмущений отслеживание маршрутов выполняется без нарушения границ нелетных зон и разрешенной для полета области. При ветре, имеющем скорость 14 м/с, отслеживание некоторых маршрутов происходит с нарушением границ разрешенной области полета; отслеживание остальных из рассмотренных — с нарушением границ нелетных зон, но только в пределах полос безопасности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. EUROCONTROL Official Site. CORUS. Concept of Operations for European UTM Systems. URL: <https://www.eurocontrol.int/project/concept-operations-european-utm-systems> (дата обращения 03.12.2019).
2. Vian J.L., Moore J.R. Trajectory Optimization with Risk Minimization for Military Aircraft // J. Guidance, Control, and Dynamics. 1989. V. 12. № 3.
3. Данеев А.В., Куменко А.Е., Русанов В.А. Геометрический подход к выбору траектории экраноплана с учетом опасных препятствий на маршруте // Авиационная техника. 1995. № 3.

4. *Bazhenov S.G., Korolyov V.S., Kulida E.L., Lebedev V.G.* Simulation of On-board Model of Airliner To Evaluate Capability Of Trajectories And Flight Safety // The 29th Intern. Cong. Of Aeronautical Sciences. St. Petersburg, 2014.
5. *Sonmez A., Kocgigit E., Kugu E.* Optimal Path Planning for UAVs Using Genetic Algorithm // Intern. Conf. on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS). Denver, Colorado: IEEE, 2015.
6. *Eaton W., Chen W.H.* Image Segmentation For Automated Taxiing of Unmanned aircraft // Intern. Conf. on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS). Denver, Colorado: IEEE, 2015.
7. *Santos M.C.P., Santana L.V., Brandao A.S., Sarcinelli-Filho M.* UAV Obstacle Avoidance Using RGB-D System // Intern. Conf. on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS). Denver, Colorado: IEEE, 2015.
8. URL: <http://store-en.tmotor.com> (дата обращения 15–24.07.2019).
9. URL: <https://m-selig.ae.edu> (дата обращения 15–24.07.2019).
10. *Остославский И.В., Стражева И.В.* Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1969.
11. *Liu C., Prior S.D.* // Design and Implementation of a Mini Quadrotor Control System in GPS Denied Environments // Intern. Conf. on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS). Denver, Colorado: IEEE, 2015.
12. *Bouabdallah S.* Design and Control of Quadrotors With Application to Autonomous Flying // Ph.D. Dissertation. EPFL, 2006.
13. *Cao N., M. Lynch A.F.* Inner-outer Loop Control With Constraints for Rotary-wing UAVs // Intern. Conf. on Unmanned Aircraft System (ICUAS). Denver, Colorado: IEEE, 2015.
14. *Jang D.-J., Ippolito C., Sankararaman S., Stepanyan V.* Concepts of Airspace Structures and System Analysis for UAST Traffic Flows for Urban Areas // AIAA SciTech Forum. Grapevine, Texas, 2017.

УДК 621.86/.87

МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ МАНИПУЛЯТОРА С ЗАМКНУТОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЦЕПЬЮ И ЛИНЕЙНЫМ ПРИВОДОМ

© 2021 г. М. Алхаддад

МФТИ, Москва, Россия

e-mail: alkhaddad.m@phystech.edu

Поступила в редакцию 11.09.2020 г.

После доработки 11.10.2020 г.

Принята к публикации 30.11.2020 г.

Предлагается и исследуется способ робастного управления специализированным манипулятором, предназначенным для работы в составе робототехнического комплекса для обслуживания вертикальных поверхностей. Комплекс состоит из колесной платформы, колесного робота вертикального перемещения с вакуумным контактным устройством и манипулятора. В транспортном положении робот прикреплен к рабочему органу (схвату) манипулятора и расположен на платформе так, что его контактная плоскость почти параллельна плоскости платформы. После подъезда платформы к стене манипулятор приводит робот в рабочее положение, подводя его контактной плоскостью к поверхности стены. Затем включается вакуумный насос робота, робот присасывается к стене, отсоединяется от схвата манипулятора и в дальнейшем передвигается по стене в автономном режиме. В статье описывается работа манипулятора на этапе приведения робота в рабочее положение.

DOI: 10.31857/S0002338821020025

Введение. Данное исследование мотивировано разработкой в лаборатории робототехники и мехатроники Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук мобильного робототехнического комплекса для обслуживания сильно наклонных и вертикальных поверхностей. Комплекс состоит из колесной платформы и малогабаритного колесного робота, который удерживается на вертикальной поверхности за счет разрежения воздуха в полости, отделяющей днище робота от поверхности перемещения. На рис. 1 изображен лабораторный образец робота и показаны его основные компоненты. Робот состоит из жесткого основания 1 круглой формы, на котором крепятся два колеса 2, управляемые независимыми электроприводами 3, и центробежный вакуумный насос 4. Оси вращения колес расположены на одной прямой, проходящей через центр основания. Колеса снабжены шинами, материал которых подбирается так, чтобы обеспечить максимально высокий коэффициент трения колес о поверхность перемещения. Под днищем основания имеется полость 5, в которой создается разрежение воздуха. Благодаря этому робот избыточным внешним атмосферным давлением прижимается к поверхности перемещения с силой, которая позволяет создать трение между колесами и поверхностью, достаточное для удержания робота на поверхности при заблокированных колесах и его движения в любом направлении при включенных приводах. Предусмотрено регулирование степени разреженности воздуха в зависимости от наклона поверхности перемещения и физических условий контакта. Это позволяет экономно расходовать электроэнергию на работу вакуумного насоса. Исследованиям динамических свойств робота, определению состава сенсоров и разработке алгоритмов управления посвящены работы [1–3].

Для описанного робота планируется создать транспортно-манипуляционное устройство, которое будет доставлять робот к месту его использования и приводить в рабочее положение на обслуживаемой поверхности. Устройство состоит из четырехколесной мобильной платформы (тележки) и манипулятора. В транспортном положении робот крепится к выходному звену манипулятора днищем вверх. После подъезда платформы к стене, обслуживаемой роботом, поворотом выходного звена он приводится в положение, в котором днище и колеса обращены к стене, и в

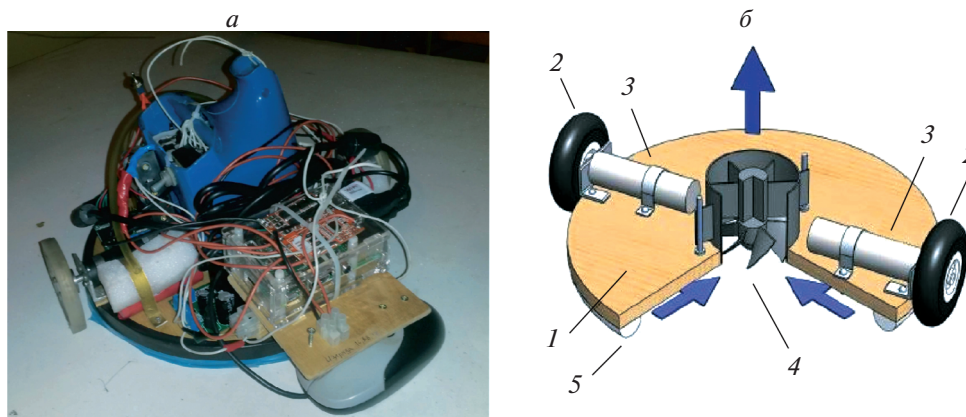


Рис. 1. Робот вертикального перемещения (а) и его основные компоненты (б)

контакт со стеной. Затем включается вакуумный насос, робот присасывается к стене, освобождается от закрепления на манипуляторе и начинает функционировать в автономном режиме.

Ниже описывается конструктивная схема манипулятора, формируется его математическая модель и предлагается алгоритм управления на этапе приведения робота в рабочее положение. Манипулятор представляет собой плоский механизм с замкнутой кинематической цепью, звенья которого соединены тремя цилиндрическими (вращательными) и одним призматическим (поступательным) шарнирами. Цилиндрические шарниры пассивны, а призматический шарнир связан с линейным приводом. Механизм имеет одну степень свободы и управляется силой, действующей между компонентами призматического шарнира. Алгоритм управления основан на линеаризации уравнения движения в окрестности положений, через которые последовательно должен пройти манипулятор, и использовании пропорционально-интегрально-дифференциального регулятора (ПИД-регулятора) со ступенчатым изменением коэффициентов обратной связи при изменении целевой точки. Настраиваемые коэффициенты не чувствительны к изменениям инерционных параметров выходного звена с расположенным на нем объектом манипулирования. Это позволяет обеспечивать достаточную точность позиционирования манипулятора независимо от нагрузки. Приводятся результаты математического моделирования, свидетельствующие о приемлемом качестве переходных процессов при управлении позиционированием манипулятора в соответствии с предложенным алгоритмом.

1. Математическая модель манипуляционного механизма. Схема манипулятора изображена на рис. 2. Манипулятор состоит из активного (приводного, входного) звена AB с изменяемой длиной и двух пассивных звеньев AC и BC , длины которых неизменны; звено AC является выходным для манипулятора, к нему прикрепляется объект манипулирования (в рассматриваемом случае – робот вертикального перемещения). Звенья соединены цилиндрическими шарнирами, оси которых параллельны друг другу и плоскости мобильной платформы, на которой укреплен манипулятор. Шарнир A жестко связан с платформой, шарнир B также располагается на платформе, но не связан с ней жестко, его ось может перемещаться относительно платформы при изменении длины приводного звена. В данной статье манипулятор моделируется плоским механизмом треугольной формы, плоскость Π которого вертикальна; вершины треугольника суть следы осей шарниров манипулятора в плоскости Π . В дальнейшем шарниры отождествляются с вершинами треугольника ABC , моделирующего механизм. Будем предполагать, что во время работы манипулятора платформа не движется.

Приводное звено будем трактовать как телескопический механизм состоящий из неподвижной прямолинейной трубки цилиндрической формы (статора) и соосного с ним подвижного цилиндра (ползуна), без зазора вставленного в статор. Звено BC , соединяющее приводное и выходное звенья, считается однородным стержнем, центр масс которого лежит на прямой BC , а выходное звено (с объектом манипулирования или без него) – абсолютно твердым телом, центр масс которого лежит в плоскости Π . Манипулятор управляется силой F , приложенной статором к ползуну. Эта сила создается приводом.

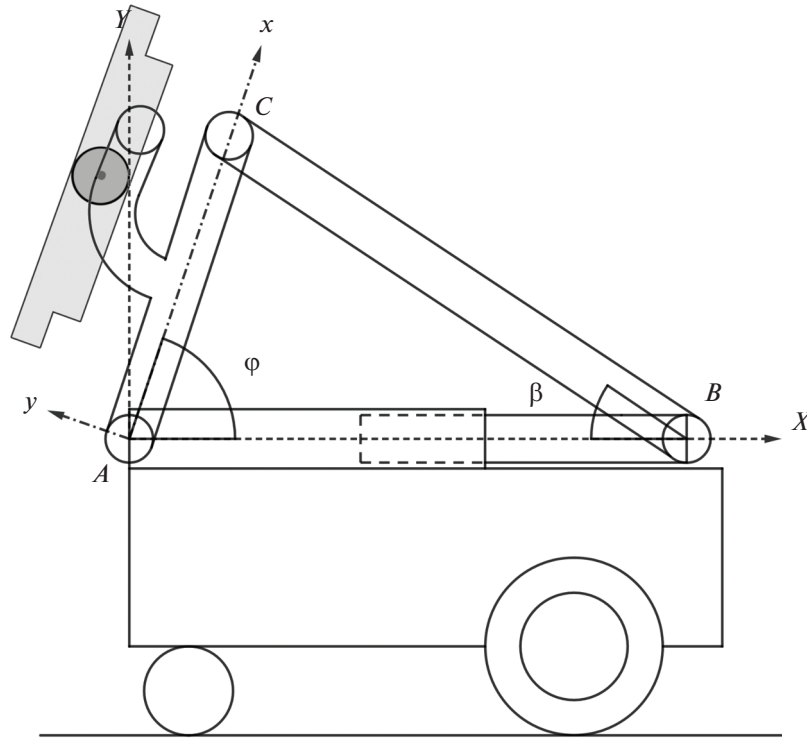


Рис. 2. Транспортно-манипуляционное устройство

Введем в плоскости Π систему координат AXY , жестко связанную с платформой, и систему координат AxY , жестко связанную с выходным звеном AC . Ось AX направим вдоль прямой AB , соединяющей соответствующие шарниры (эта прямая предполагается горизонтальной), от A к B , ось AU – вертикально вверх, ось Ax – вдоль прямой AC от A к C , ось Ay – перпендикулярно оси Ax так, что при совмещении осей Ax и AX совмещаются оси Ay и AU .

Составим уравнения Лагранжа для описанной системы, приняв в качестве обобщенной координаты угол φ между осями AX и Ax (угол поворота выходного звена относительно платформы). Для удобства присвоим приводному звену AB номер 1, промежуточному звену BC – номер 2, выходному звену AC – номер 3. Введем следующие обозначения: $r = |AC|$ – длина выходного звена; $L = |BC|$ – длина промежуточного звена; m_1 – масса ползуна, m_2 – масса звена BC ; m_3 – масса звена AC ; J_2 – момент инерции звена 2 относительно оси шарнира B ; a_2 – расстояние от шарнира B до центра масс звена 2; a_3 и b_3 – x - и y -координаты центра масс выходного звена в системе координат AxY ; J_3 – момент инерции выходного звена относительно оси шарнира A ; s – координата шарнира B на координатной оси AX ; β – угол между звеньями 1 и 2, отсчитываемый, как показано на рис. 2; g – ускорение силы тяжести. Предположим, что конструкция манипулятора такова, что $r < L$ и угол φ изменяется в интервале $[0, \pi/2]$. Тогда координата s лежит в интервале $[\sqrt{L^2 - r^2}, L + r]$, а угол β – в интервале $[0, \arcsin(r/L)]$. Это предположение оправдано назначением манипулятора. Манипулятор должен иметь возможность принимать горизонтальную конфигурацию, когда объект манипулирования (робот вертикального перемещения) находится в транспортном положении, и его выходное звено должно быть расположенным вертикально при приведении робота в рабочее состояние.

Кинетические энергии звеньев 1–3 представляются следующими выражениями:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{s}^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} (m_2 \dot{s}^2 + J_2 \dot{\beta}^2 + 2m_2 a_2 \dot{s} \dot{\beta} \sin \beta), \quad T_3 = \frac{1}{2} J_3 \dot{\varphi}^2, \quad (1.1)$$

а полная кинетическая энергия манипулятора есть сумма кинетических энергий звеньев:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (1.2)$$

Геометрия механизма налагает две связи на переменные φ , β и s :

$$\sin \beta = \frac{r}{L} \sin \varphi, \quad (1.3)$$

$$s = r \cos \varphi + L \cos \beta. \quad (1.4)$$

Уравнения (1.3) и (1.4) позволяют выразить переменные β и s через угол φ и принять этот угол за обобщенную координату манипулятора:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{r}{L} \sin \varphi\right), \quad s = r \cos \varphi + \sqrt{L^2 - r^2 \sin^2 \varphi}. \quad (1.5)$$

Дифференцирование равенств (1.5) дает

$$\dot{\beta} = \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{L^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \dot{\varphi}, \quad \dot{s} = -r \sin \varphi \left(1 + \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{L^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}\right) \dot{\varphi}. \quad (1.6)$$

Подставляя выражения (1.3) и (1.6) в (1.1) и затем вычисляя сумму (1.2), получим кинетическую энергию системы как функцию переменных φ и $\dot{\varphi}$, квадратичную по обобщенной скорости $\dot{\varphi}$:

$$T = \frac{1}{2} M(\varphi) \dot{\varphi}^2, \quad (1.7)$$

где

$$M(\varphi) = (m_1 + m_2)r^2 \sin^2 \varphi \left(1 + \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{L^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}\right)^2 - 2m_2 a_2 \frac{r^3 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{L \sqrt{L^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \left(1 + \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{L^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}\right) + J_2 \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{L^2 - r^2 \sin^2 \varphi} + J_3, \quad M(\varphi) > 0. \quad (1.8)$$

Потенциальная энергия системы в поле силы тяжести есть сумма потенциальных энергий звеньев 2 и 3 и определяется выражением

$$U = m_2 g a_2 \sin \beta + m_3 g (a_3 \sin \varphi + b_3 \cos \varphi) = g \left[\left(\frac{r}{L} m_2 a_2 + m_3 a_3\right) \sin \varphi + m_3 b_3 \cos \varphi \right]. \quad (1.9)$$

Вычислим теперь обобщенную силу Q_φ , отвечающую управляющей силе F и обобщенной координате φ . Поскольку сила F действует вдоль оси AX и приложена к ползуну, ее элементарная работа определяется выражением $\delta A = F \delta s$, где δs – вариация координаты точки приложения силы F . Подставляя вместо δs вариацию выражения (1.5) для переменной s , получим

$$\delta A = -Fr \sin \varphi \left(1 + \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{L^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}\right) \delta \varphi. \quad (1.10)$$

Следовательно,

$$Q_\varphi = -Fr \sin \varphi \left(1 + \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{L^2 - r^2 \sin^2 \varphi}}\right). \quad (1.11)$$

Уравнение Лагранжа второго рода для механической системы с кинетической энергией (1.7), потенциальной энергией (1.9) и обобщенной силой (в общем случае непотенциальной) (1.11) имеет вид

$$M \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial \varphi} \dot{\varphi}^2 - (a \cos \varphi + b \sin \varphi) = Q_\varphi, \quad a = g \left(\frac{r}{L} m_2 a_2 + m_3 a_3\right), \quad b = g m_3 b_3. \quad (1.12)$$

Будем допускать, что параметры выходного звена (масса и момент инерции) известны неточно, например из-за неточного знания параметров объекта манипулирования, который может меняться. Таким образом, коэффициенты a и b , а также функция $M = M(\varphi)$ известны неточно. Если области возможных значений геометрических и инерционных параметров системы ограниче-

ны, то и области возможных значений величин M , a и b ограничены. Оценим функцию $M(\varphi)$ сверху величиной M_{\max} :

$$0 < M(\varphi) \leq M_{\max}, \quad (1.13)$$

а параметры a и b представим выражениями

$$a = a_0 + \Delta_a, \quad b = b_0 + \Delta_b, \quad (1.14)$$

где a_0 и b_0 – известные номинальные значения параметров, а Δ_a и Δ_b – неизвестные отклонения от номинальных значений, лежащие в заданных пределах:

$$|\Delta_a| \leq A, \quad |\Delta_b| \leq B. \quad (1.15)$$

2. Цель и алгоритм управления. Предлагается способ управления манипулятором в процессе перемещения объекта манипулирования в рабочее положение. Цель управления – приведение выходного звена манипулятора в вертикальное положение с достаточной степенью точности с учетом неполной информации о параметрах системы, в частности, массы и момента инерции выходного звена (эти параметры зависят от объекта манипулирования, которым нагружен манипулятор, и от способа его крепления к манипулятору). Данная операция не требует высокого быстродействия, но требует надежности. Поэтому предлагается простой способ управления, обеспечивающий прохождение системы через фиксированную последовательность промежуточных положений со стабилизацией системы в этих положениях. Промежуточные положения располагаются достаточно близко друг к другу, чтобы можно было рассчитывать управление переходом между двумя последовательными положениями исходя из уравнения движения, линеаризованного в окрестности положения (равновесия), в которое система приводится на очередном этапе.

Пусть φ_i , $i = 0, 1, \dots, n$, – промежуточные положения выходного звена манипулятора. Опишем управление системой на этапе перехода из положения равновесия φ_{i-1} в положение равновесия φ_i .

Будем строить управление на этом этапе в виде $Q_\varphi = Q_i^0 + u_i$ так, чтобы при $u_i = 0$ положение φ_i было положением равновесия системы (1.12) при номинальных значениях параметров a и b . Отсюда следует, что

$$Q_i^0 = -(a_0 \cos \varphi_i + b_0 \sin \varphi_i). \quad (2.1)$$

Подставляя выражение $Q_\varphi = Q_i^0 + u_i$ в (1.12) и линеаризуя получившееся уравнение в окрестности точки φ_i , получим

$$\begin{aligned} M_i \ddot{e}_i + k_i e_i &= u_i + f_i, & e_i &= \varphi - \varphi_i, & M_i &= M(\varphi_i), \\ k_i &= a \sin \varphi_i - b \cos \varphi_i, & f_i &= \Delta_a \cos \varphi_i + \Delta_b \sin \varphi_i. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) описывает динамику линейной управляемой системы второго порядка с постоянными (хотя и неизвестными) коэффициентами M_i и k_i , подверженной постоянному (хотя и неизвестному) возмущению f_i . Коэффициент M_i положителен из-за положительности кинетической энергии системы при $\dot{\varphi} \neq 0$; коэффициент k_i может иметь любой знак.

Используем в этой системе ПИД-регулятор, соответствующий управлению

$$u_i = -K_i e_i - D_i \dot{e}_i - I_i \int_0^t e_i(\xi) d\xi, \quad K_i > 0, \quad D_i > 0, \quad I_i > 0. \quad (2.3)$$

Постоянные коэффициенты K_i , D_i и I_i должны быть выбраны так, чтобы любое решение $e_i(t)$ системы (2.2), (2.3) стремилось к нулю при неограниченном росте времени t . Для того, чтобы выяснить, какие ограничения надо наложить на коэффициенты обратной связи управления (2.3), подставим это управление в уравнение (2.2) и продифференцируем получившееся равенство по времени; получим линейное дифференциальное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами:

$$M_i \ddot{\ddot{e}}_i + D_i \ddot{e}_i + (k_i + K_i) \dot{e}_i + I_i e_i = 0. \quad (2.4)$$

Коэффициенты обратной связи следует выбрать так, чтобы нулевое решение этого уравнения было асимптотически устойчивым. Характеристический полином уравнения (2.4) имеет вид

$$P(\lambda) = M_i \lambda^3 + D_i \lambda^2 + (k_i + K_i) \lambda + I_i. \quad (2.5)$$

С учетом положительности коэффициентов M_i , D_i , K_i и I_i для устойчивости этого полинома необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$D_i(k_i + K_i) > M_i I_i. \quad (2.6)$$

Это неравенство следует, например, из критерия Рауса–Гурвица [4–6].

Оценим снизу множество возможных значений коэффициента k_i , определенного в (2.2). Этот коэффициент можно представить выражением

$$\begin{aligned} k_i &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\varphi_i + \psi), \\ \cos \psi &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \psi = -\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

откуда следует неравенство

$$k_i \geq -\sqrt{a^2 + b^2}. \quad (2.8)$$

С учетом выражений (1.14) и (1.15) получаем

$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{(|a_0| + A)^2 + (|b_0| + B)^2}. \quad (2.9)$$

Из (2.8) и (2.9) имеем оценку

$$k_i \geq -\sqrt{(|a_0| + A)^2 + (|b_0| + B)^2}. \quad (2.10)$$

Из (1.13), (2.6) и (2.10) следует, что устойчивость будет заведомо обеспечена, если положительные коэффициенты K_i , D_i и I_i ПИД-регулятора будут выбраны исходя из неравенства

$$D_i(K_i - \sqrt{(|a_0| + A)^2 + (|b_0| + B)^2}) > M_{\max} I_i. \quad (2.11)$$

Отметим, что коэффициенты ПИД-регулятора, вообще говоря, различны для различных этапов управления. Выбор этих коэффициентов диктуется желаемым качеством переходного процесса на соответствующем этапе. Например, их можно выбирать, максимизируя степень устойчивости соответствующей линейной системы. Степень устойчивости асимптотически устойчивой линейной системы определяется как модуль максимальной вещественной части корней ее характеристического полинома [7]. Степень устойчивости характеризует быстроту переходного процесса. Поскольку коэффициенты обратной связи меняются от этапа к этапу, предложенный алгоритм можно рассматривать как адаптивный алгоритм, который, в отличие от традиционных адаптивных алгоритмов [8], не требует идентификации параметров системы в процессе управления.

3. Численное моделирование. Для численного моделирования процесса управления манипулятором в соответствии с алгоритмом, описанным в предыдущем разделе, были выбраны следующие значения параметров.

Геометрические параметры ненагруженного манипулятора:

$$r = 0.16 \text{ м}, \quad L = 0.52 \text{ м}, \quad a_2 = 0.26 \text{ м}, \quad a_3 = 0.08 \text{ м}, \quad b_3 = 0.01 \text{ м}. \quad (3.1)$$

Геометрические параметры нагруженного выходного звена:

$$a_3 = 0.1 \text{ м}, \quad b_3 = 0.07 \text{ м}. \quad (3.2)$$

Инерционные параметры ненагруженного манипулятора:

$$\begin{aligned} m_1 &= 0.3 \text{ кг}, \quad m_2 = 1 \text{ кг}, \quad m_3 = 1 \text{ кг}, \\ J_2 &= 0.0901 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad J_3 = 0.0091 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Инерционные параметры нагруженного выходного звена:

$$m_3 = 2.2 \text{ кг}, \quad J_3 = 0.034 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \quad (3.4)$$

Таблица 1. Коэффициенты ПИД-регулятора при каждом положении равновесия

Коэффициенты ПИД-регулятора						
φ_i [rad]	без нагрузки			с нагрузкой		
	K_i	I_i	D_i	K_i	I_i	D_i
0.87	32.06	58.06	3.96	55.03	99.66	6.79
0.92	31.81	57.61	3.93	53.95	97.71	6.66
0.97	31.69	57.41	3.91	53.11	96.27	6.56
1.02	31.71	57.43	3.91	52.65	95.29	6.49
1.07	31.82	57.63	3.93	52.28	94.70	6.45
1.12	32.02	57.99	3.95	52.14	94.44	6.44
1.17	32.29	58.49	3.98	52.17	94.49	6.44
1.22	32.64	59.11	4.03	52.35	94.81	6.46
1.27	33.04	59.85	4.08	52.67	95.39	6.50
1.32	33.51	60.69	4.13	53.11	96.20	6.56
1.37	34.03	61.63	4.20	53.69	97.24	6.63
1.42	34.60	62.66	4.27	54.38	98.49	6.71
1.47	35.21	63.78	4.35	55.18	99.95	6.81
1.52	35.87	64.98	4.43	56.11	101.6	6.93
1.57	36.58	66.26	4.52	57.14	103.5	7.05

Набор промежуточных значений угла φ :

$$\varphi_i = 0.87 + 0.05n \text{ рад}, \quad n \in [0, 14]. \quad (3.5)$$

Коэффициенты ПИД-регулятора подбирались методом проб и ошибок в процессе численного моделирования так, чтобы переходные процессы при движении между промежуточными положениями манипулятора имели приемлемые характеристики. Коэффициенты, выбранные для этапов с различными φ_i , приведены в таблице 1. Отметим, что коэффициенты K_i , D_i и I_i – размерные величины, размерности которых в системе единиц СИ суть

$$[K_i] = \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2, \quad [D_i] = \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с} \quad [I_i] = \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^3. \quad (3.6)$$

В таблице значения этих коэффициентов даны в единицах СИ без указания размерностей. Поведение системы при коэффициентах ПИД-регулятора, приведенных в таблице, иллюстрируется на рис. 3 и 4. Сплошные кривые относятся к ненагруженному манипулятору, штриховые – к нагруженному. На рис. 3 показан угол φ отклонения выходного звена манипулятора от горизонтального положения как функция времени, а на рис. 4 изображена зависимость от времени управляющей силы F . Сила F рассчитывалась по известной обобщенной силе Q_φ при помощи формулы (1.11). Из этих рисунков видно, что сплошные и штриховые кривые близки одна к другой, что свидетельствует о невысокой чувствительности переходных процессов к изменениям геометрических и инерционных параметров выходного звена, связанным с его нагружением. Из рис. 3 видно, что движение системы с ПИД-регулятором происходит с небольшим перерегулированием, которое может быть нежелательно, если выходное звено приводится в вертикальное положение и тележка находится близко к стене. Нежелательных последствий перерегулирования, в частности удара робота о стену, можно избежать, приводя робот в вертикальное положение, когда тележка находится на безопасном расстоянии от стены. После затухания переходного процесса тележку следует придвинуть к стене вплотную. Точность позиционирования

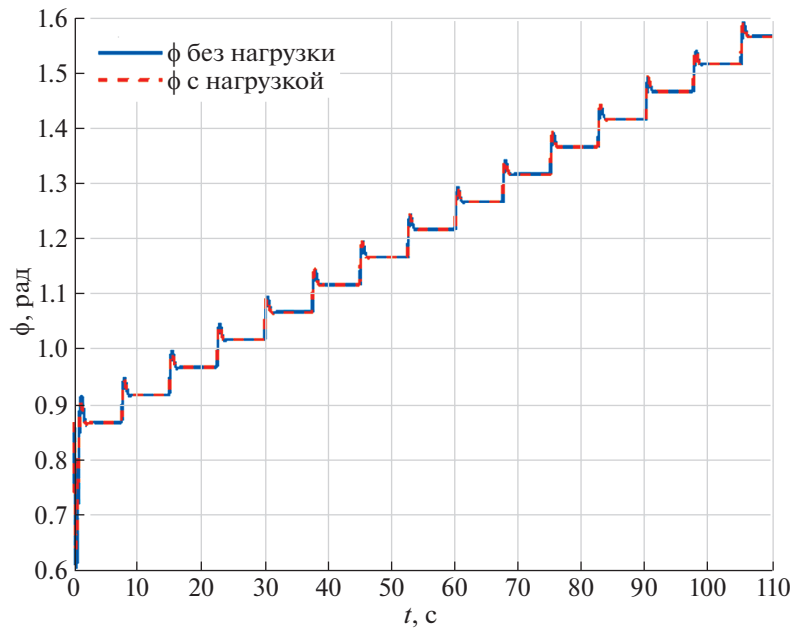


Рис. 3. Положение выходного звена как функция времени при управлении ПИД-регулятором

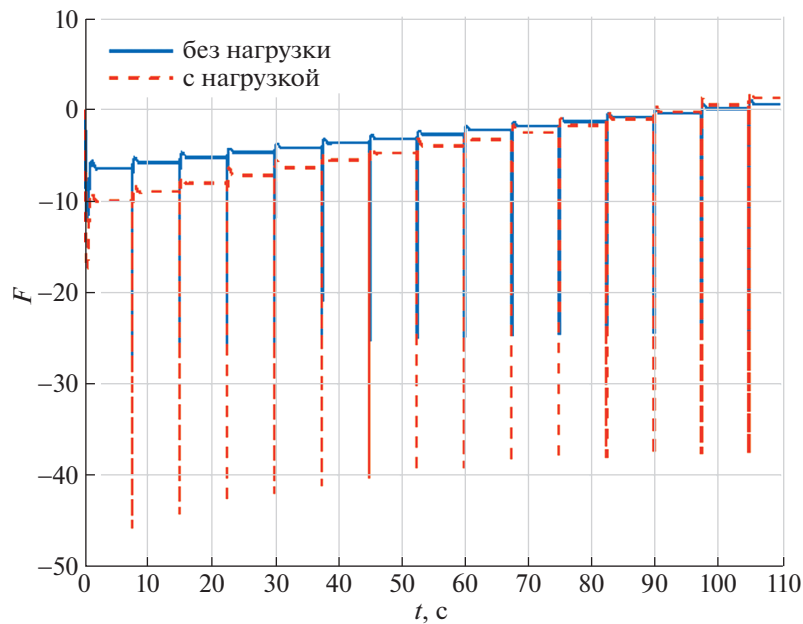


Рис. 4. Управляющая сила, генерируемая приводом, как функция времени при управлении ПИД-регулятором

манипулятора в терминальном положении при предложенном алгоритме управления практически не зависит от его нагрузки, т.е. этот алгоритм обладает свойством робастности по отношению к геометрическим и инерционным параметрам выходного звена, которые зависят от соответствующих параметров объекта манипулирования.

Заключение. Для манипулятора, приводящего робот вертикального перемещения из транспортного положения на мобильной платформе в рабочее положение, предложен алгоритм управления, в соответствии с которым система приходит в конечное положение через ряд промежуточных положений. В качестве управляющего устройства предлагается использовать классический ПИД-регулятор, коэффициенты которого рассчитываются исходя из уравнения дви-

жения манипулятора, линеаризованного в окрестности очередной целевой точки. При переходе от одной целевой точки к другой коэффициенты обратной связи ПИД-регулятора пересчитываются, так что получившийся в итоге алгоритм управления можно трактовать как ПИД-регулятор со ступенчато изменяющимися коэффициентами. Такой алгоритм обладает свойством робастности по отношению к инерционным параметрам, зависящим от объекта манипулирования. Численное моделирование процесса управления в соответствии с предложенным алгоритмом свидетельствует о качестве и времени переходных процессов, приемлемых для разрабатываемого манипуляционного устройства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нунупаров А.М., Чащухин В.Г.* Система управления робота вертикального перемещения с аэродинамическим прижатием // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 2. С. 168–176.
2. *Chashchukhin V.G.* Orientation System of the Aerodynamically Adhesive Wall Climbing Robot // Extreme Robotics. 2019. Т. 1. № 1. С. 145–148.
3. *Чащухин В.Г.* Исследование параметров движения робота со скользящи уплотнением // Вестн. Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4–2. С. 347–349.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Физматлит, 2004. 560 с.
5. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Физматлит, 2004. 262 с.
6. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. М.: Физматлит, 2003.
7. *Цыпкин Я.З., Бромберг П.В.* О степени устойчивости линейных систем // Изв. АН СССР. Сер. ОТН. 1945. № 12. С. 1163–1168.
8. *Slotine J.-J. E., Li W.* Applied Nonlinear Control. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1991.