
СОДЕРЖАНИЕ

Том 68, номер 6, 2022

ФИЗИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

- Биологический датчик на основе акустической щелевой моды с использованием микробных клеток для определения ампициллина
И. А. Бородина, Б. Д. Зайцев, А. К. М. Алсовэиди, О. А. Караваева, О. И. Гулий 583
- Акустические поля и радиационные силы, создаваемые стоячей поверхностной волной в слоистых вязких средах
В. А. Гусев, Д. А. Жарков 589
- Влияние электропроводности пленки на характеристики акустического резонатора с радиальным возбуждающим электрическим полем
А. А. Теплых, Б. Д. Зайцев, А. П. Семёнов, И. А. Бородина 605
- Синтез полосовых фильтров на объемных акустических волнах с учетом материальных параметров многослойной структуры резонаторов
П. А. Туральчук, И. Б. Вендик 611
-

АКУСТИКА ОКЕАНА. ГИДРОАКУСТИКА

- Возмущения модальных коэффициентов затухания и групповых скоростей, вызванные вариациями глубины вдоль акустической трассы в мелком море
А. Д. Захаренко, П. С. Петров 618
- Влияние межмодовых корреляций на эффективность пространственной обработки акустических сигналов в океаническом волноводе со взволнованной поверхностью
М. А. Раевский, В. Г. Бурдуковская 625
-

АТМОСФЕРНАЯ И АЭРОАКУСТИКА

- Корреляционный метод идентификации акустических источников с помощью многомикрофонных измерений
М. А. Демьянов 638
- Анализ вторичного звукового излучения в акустической аналогии с оператором распространения, содержащим вихревые моды
В. Ф. Копьев, С. А. Чернышев 647
- Модели и методы скалярной волновой фильтрации полей пристеночных турбулентных пульсаций давления
Е. Б. Кудашев, Л. Р. Яблоник 670
-

АКУСТИКА СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ ТВЕРДЫХ СРЕД. ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

- Влияние трещиноватости полевых шпатов на спектральную мощность обратнорассеянных широкополосных импульсов продольных ультразвуковых волн
Н. Б. Подымова, А. А. Карбутов 679
-

**ОБРАБОТКА АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ.
КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Локализация источника в переменном по трассе волноводе в условиях неполной информации о пространственной изменчивости среды распространения

А. Г. Сазонтов

689

УДК 534.231.3

БИОЛОГИЧЕСКИЙ ДАТЧИК НА ОСНОВЕ АКУСТИЧЕСКОЙ ЩЕЛЕВОЙ МОДЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МИКРОБНЫХ КЛЕТОК ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ АМПИЦИЛЛИНА

© 2022 г. И. А. Бородина^а*, Б. Д. Зайцев^а, А. К. М. Алсовэиди^б,
О. А. Караваева^с, О. И. Гулий^с

^аФедеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова Российской академии наук, Саратовский филиал, ул. Зеленая 48, Саратов, 410019 Россия

^бФедеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского”, ул. Астраханская 83, Саратов, 410012 Россия

^сИнститут биохимии и физиологии растений и микроорганизмов, ФИЦ “Саратовский научный центр РАН” (ИБФРМ РАН), пр. Энтузиастов 13, Саратов, 410049 Россия

*e-mail: borodinaia@yandex.ru

Поступила в редакцию 21.04.2022 г.

После доработки 24.06.2022 г.

Принята к публикации 05.07.2022 г.

Представлен биологический датчик для определения ампициллина в проводящих растворах. Датчик создан на основе акустической щелевой моды в структуре, состоящей из двух пьезопластин ниобата лития различных срезов, разделенных воздушным зазором. Одна из пьезопластин служила дном жидкостного контейнера, в который вносилась суспензия микробных клеток, чувствительных к изучаемому антибиотику. Измерялась глубина резонансных пиков на частотной характеристике полных потерь датчика. После этого в контейнер добавлялся исследуемый антибиотик, и измерения повторялись. Аналитическим сигналом, свидетельствующим о появлении антибиотика в суспензии клеток, служило изменение глубины резонансных пиков после его добавления в контейнер.

Ключевые слова: датчик на основе акустической щелевой моды, резонансные пики поглощения на частотной зависимости полных потерь датчика, ампициллин, бактериальные клетки, чувствительные к антибиотику

DOI: 10.31857/S0320791922060028

ВВЕДЕНИЕ

Интенсивное использование антибактериальных препаратов в медицине и в ветеринарии приводит к сильному загрязнению антибиотиками окружающей среды и, особенно, водных ресурсов. Антимикробные препараты попадают в водную среду со сбросами сточных вод очистных сооружений или ливневыми стоками с сельскохозяйственных угодий в результате применения антибиотиков в аквакультуре [1]. Растущий уровень применения антибиотиков может привести к глобальной экологической проблеме, поэтому существует большая потребность в постоянном мониторинге и определении антимикробных препаратов в объектах окружающей среды.

Для обнаружения противомикробных препаратов широко используются биосенсоры, которые позволяют проводить не только качествен-

ный, но и количественный анализ антибиотиков. Биосенсоры, как аналитические системы, состоят из двух компонентов: чувствительного биологического элемента и системы обнаружения. Для определения антибиотиков существуют биодатчики с различной конструкцией и механизмом действия, такие как, электрохимические [2], датчики на основе поверхностного плазмонного резонанса [3, 4] и оптические [5]. Кроме того, акустические устройства, которые широко используются для исследования различных явлений на границе “твердое тело–вязкая/проводящая жидкость” [6–9], вызывают большой интерес исследователей в плане зондирования различных биологических и химических аналитов. Эти датчики работают путем связывания изучаемого аналита с изменением параметров распространяющейся акустической волны. Указанные датчики исполь-

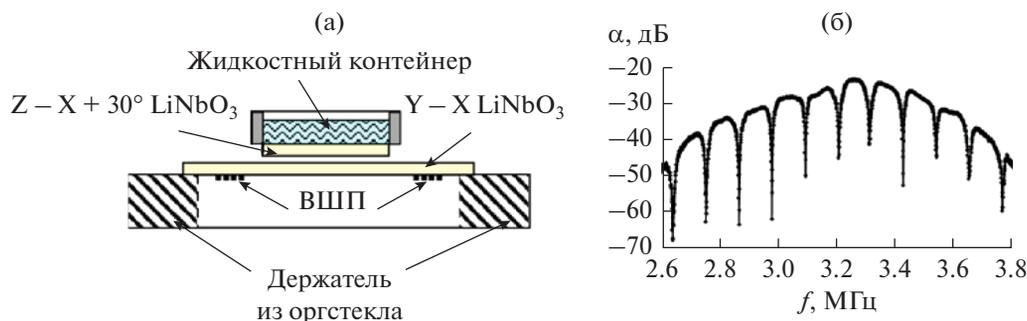


Рис. 1. (а) – Схема датчика, (б) – частотные зависимости полных потерь датчика с пустым контейнером.

зуют объемные и поверхностные акустические волны, а также волны в пьезоэлектрических пластинах [10–14]. Эти устройства могут быть миниатюризированы, масштабируемы и снабжены дополнительными функциями, включая интеграцию с микрофлюидикой и электроникой.

Одним из основных моментов при конструировании биосенсоров является подбор чувствительного (сенсорного) элемента датчика. Микроорганизмы, проявляющие чувствительность к определяемому антибиотику, в комплексе с электрофизическим датчиком представляют простые, чувствительные и быстродействующие сенсорные системы. Существует несколько разновидностей биосенсоров для обнаружения антибиотиков, основанных на оценке ингибирования ферментативной активности бактерий [15–17], а также использовании микробных клеток в качестве чувствительного элемента датчика [18, 19]. Особый интерес представляют датчики, позволяющие проводить исследование без иммобилизации специфичных микроорганизмов на поверхности датчика. Такие датчики значительно ускоряют процесс анализа по сравнению с методами, использующими иммобилизацию микроорганизмов. Ранее мы использовали датчик на основе щелевой моды в акустической линии задержки для определения чувствительности бактерий к раствору ампициллина в дистиллированной воде [20]. Однако важным моментом является возможность количественного определения антибиотика, присутствующего в проводящей жидкости.

Цель работы – экспериментальное исследование возможности определения ампициллина в проводящей жидкости с помощью датчика на основе акустической щелевой моды с использованием микробных клеток в качестве сенсорного элемента.

ОПИСАНИЕ ДАТЧИКА И МЕТОДИКИ ЭКСПЕРИМЕНТА

Акустическая сенсорная система была разработана на основе линии задержки из пластины нио-

бата лития (LiNbO_3) $Y-X$ среза толщиной 200 мкм (рис. 1а). На нижней стороне пластины были нанесены два встречно-штыревых преобразователя (ВШП) для возбуждения и приема акустической волны с поперечно-горизонтальной поляризацией в диапазоне частот 2–4 МГц. Контейнер для суспензии бактериальных клеток объемом 3 мл располагался с зазором 8 мкм над верхней стороной линии задержки. Дно жидкостного контейнера было изготовлено из пластины $Z-X+30^\circ$ ниобата лития толщиной 500 мкм [21]. Такая конструкция датчика приводила к появлению ярко выраженных резонансных пиков на частотной зависимости полных потерь, связанных с возбуждением щелевой моды [22] (рис. 1б).

Для проведения экспериментов датчик подключался к измерителю S-параметров E5071C (“Agilent”, США) и измерялись частотные зависимости полных потерь выходного сигнала устройства. Контейнер заполняли суспензией исследуемых клеток и проводили измерения глубины и частоты резонансных пиков на частотной зависимости полных потерь датчика. Затем добавляли антибиотик с определенной концентрацией и вновь измеряли параметры датчика. Аналитическим сигналом служило изменение глубины и частоты резонансных пиков на частотной зависимости полных потерь датчика после добавления ампициллина в суспензию микробных клеток. Эксперименты проводились с бактериальными клетками в буферных растворах (рН 7.0) с проводимостью 5–20 мкСм/см. Проводимость буферных растворов контролировалась с помощью кондуктометра HANNA HI 8733 (Hanna Instruments inc., США). При проведении измерений температура составляла 25–26°C.

В работе анализировался антибиотик ампициллин (Sigma, США); используемые концентрации антибиотика составляли 2, 5, 8, 12, 15 и 18 мкг/мл. В качестве сенсорного элемента датчика использовали микробные клетки *Escherichia coli* штамма K-12, поскольку ранее было показано, что они являются чувствительными к ампициллину [20]. В качестве контроля использовали бактерии, устой-

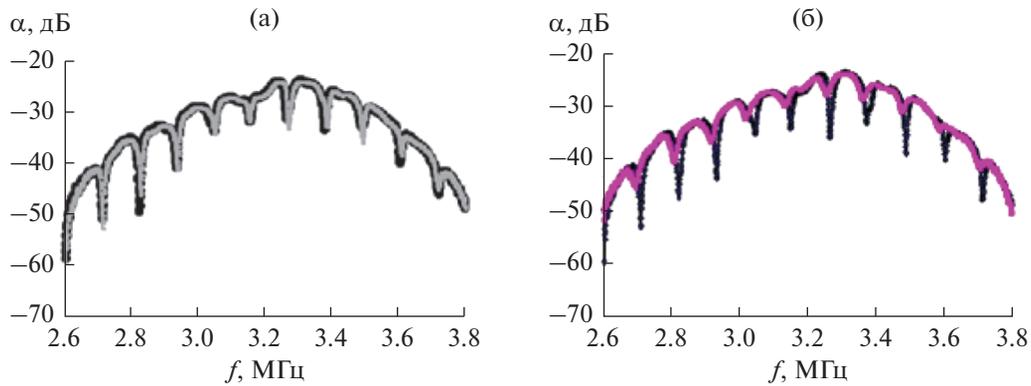


Рис. 2. (а) – Частотные зависимости полных потерь датчика (α) с контейнером, нагруженным буферным раствором с проводимостью 10 $\mu\text{См}/\text{см}$ (черная кривая) и с *E. coli* К-12 (серая кривая). (б) – Частотные зависимости полных потерь датчика (α) с контейнером, нагруженным *E. coli* К-12 до (черная кривая) и после (розовая кривая) добавления ампициллина (2 $\mu\text{кг}/\text{мл}$).

чивые к ампициллину *E. coli* К-12 (pUC-18) [23]. Бактерии *E. coli* К-12 и *E. coli* К-12 (pUC-18) были получены из коллекции ризосферных микроорганизмов ИБФРМ РАН (Саратов) (<http://collection.ibppm.ru>).

Микроорганизмы хранили при температуре $+4^\circ\text{C}$ и пересевали каждые 2 недели. Для культивирования бактерий использовали жидкую питательную среду LB следующего состава (г/л): NaCl (ЗАО “ЛенРеактив”, Россия) – 5.0; пептон (Wettop, Dickinson & Co., США) – 10.0; дрожжевой экстракт (DIFCO, США) – 5.0. Твердая среда LB содержала 3% агар-агара.

Для каждой серии экспериментов выполняли не менее пяти независимых повторов. Концентрационная зависимость для каждой исходной точки измерялась не менее трех раз. Данные анализировали с помощью программного обеспечения Excel 2016 (Microsoft Corp., США).

ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Вначале в контейнер датчика вносили буферный раствор с заданной проводимостью (1 мл) и измеряли частотные зависимости полных потерь датчика для этого случая. После этого контейнер очищали, просушивали и добавляли в него буферный раствор с микробными клетками *E. coli* штамма К-12 в количестве 1 мл. Концентрация клеток в контейнере для всех экспериментов составляла 10^6 кл/мл. Было установлено, что добавление к буферному раствору микробных клеток практически не влияло на частотные характеристики устройства. На рис. 2а в качестве примера представлены частотные зависимости полных потерь датчика для контейнера, нагруженного буферным раствором с проводимостью 10 $\mu\text{См}/\text{см}$ и клетками штамма К-12. Далее в контейнер с клеточной суспензией добавляли 10 $\mu\text{л}$ ампициллина с различной концентрацией от 2 до

18 $\mu\text{кг}/\text{мл}$. Было установлено, что для всех используемых концентраций антибиотика наблюдалось уменьшение глубины и частоты резонансных пиков на частотной зависимости полных потерь. На рис. 2б в качестве примера представлены частотные зависимости полных потерь датчика (α) с суспензией клеток штамма К-12 до (черная кривая) и после (розовая кривая) добавления ампициллина с концентрацией 2 $\mu\text{кг}/\text{мл}$ при проводимости буферного раствора 10 $\mu\text{См}/\text{см}$. В результате проведенных экспериментов были найдены зависимости изменения глубины пиков резонансного поглощения от концентрации ампициллина при различной начальной проводимости буферного раствора. На рис. 3 представлены зависимости изменения глубины резонансного пика ($\Delta\alpha$) вблизи частоты 2.82 МГц от концентрации ампициллина после его добавления к суспензии клеток при начальной проводимости буферного раствора 5 (рис. 3а), 10 (рис. 3б), 15 (рис. 3в) и 20 (рис. 3г) $\mu\text{См}/\text{см}$. Видно, что для всех исследуемых проводимостей буферного раствора максимальное изменение глубины выбранного резонансного пика наблюдается для концентрации ампициллина 2 $\mu\text{кг}/\text{мл}$. При увеличении концентрации ампициллина изменение глубины резонансных пиков немного уменьшается. Наименьшее изменение глубины резонансного пика наблюдается для концентраций ампициллина 15 и 18 $\mu\text{кг}/\text{мл}$. Что касается частоты пиков резонансного поглощения, то во всех случаях наблюдался сдвиг резонансной частоты на 10–20 кГц.

Было также показано, что с увеличением начальной проводимости буферного раствора изменение глубины резонансных пиков уменьшается. На рис. 4 в качестве примера приведены зависимости изменения глубины пиков резонансного поглощения ($\Delta\alpha$) от начальной проводимости буферного раствора (σ) при добавлении к *E. coli* К-12

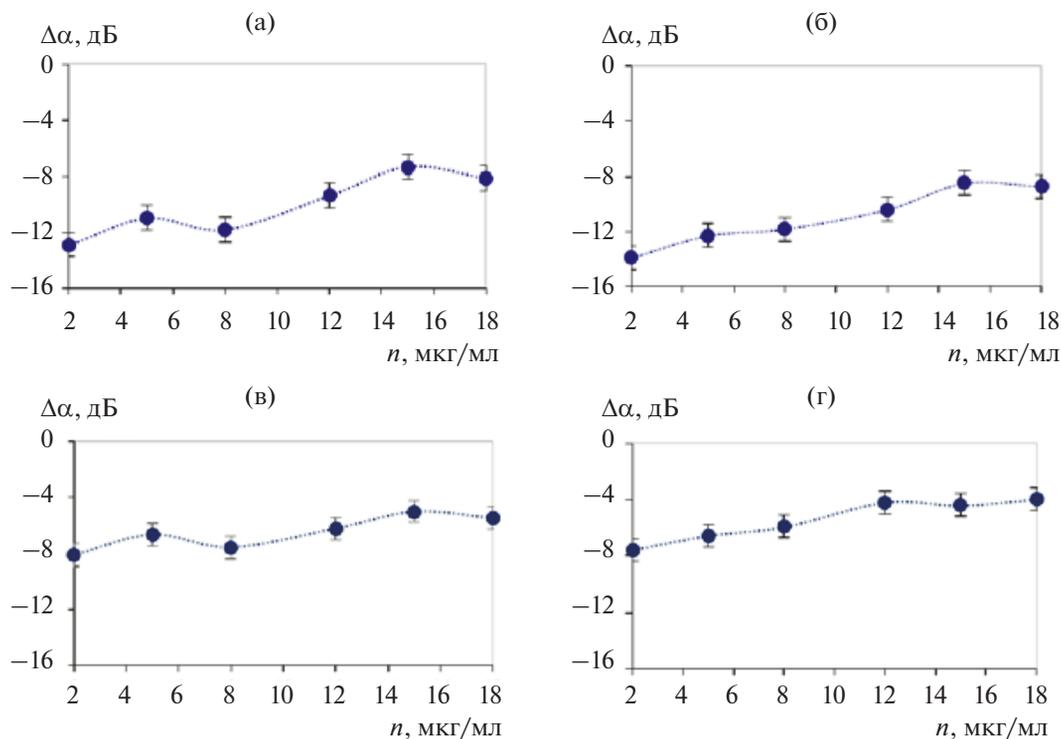


Рис. 3. Зависимости изменения глубины резонансного пика ($\Delta\alpha$) для *E. coli* К-12 вблизи частоты 2.82 МГц от концентрации ампициллина в буферных растворах с начальной проводимостью (мкСм/см): (а) – 5, (б) – 10, (в) – 15 и (г) – 20.

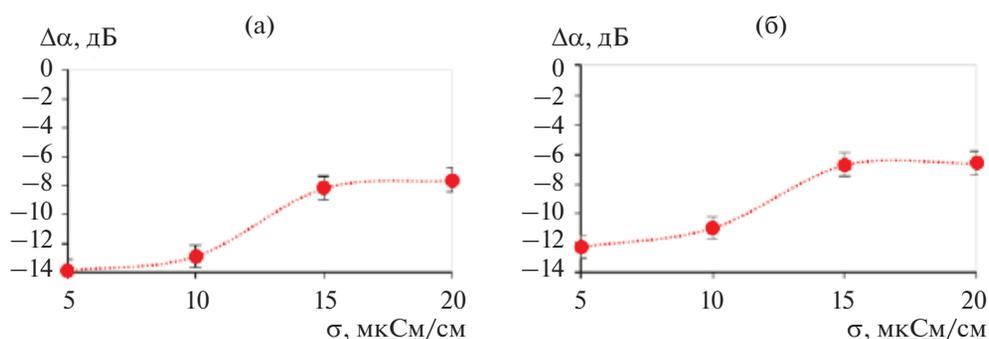


Рис. 4. Зависимости изменения глубины пиков резонансного поглощения ($\Delta\alpha$) для *E. coli* К-12 от начальной проводимости буферного раствора (σ) при добавлении ампициллина до конечной концентрации (мкг/мл): (а) – 2 и (б) – 5.

ампициллина с концентрацией: 2 мкг/мл (рис. 4а) и 5 мкг/мл (рис. 4б).

Активность ампициллина определяется его способностью взаимодействовать с клеточной поверхностью бактерий и изменять барьерные свойства цитоплазматической мембраны [18]. Можно предположить, что зафиксированное датчиком изменение сигнала при увеличении концентрации ампициллина вызвано деформацией клеточной стенки бактерий, изменением ее проницаемости как для внутриклеточных, так и внеклеточных компонентов и выходом из клетки макромолекул цитоплазмы, приводящем к росту

проводимости суспензии. Этот процесс фиксируется датчиком как уменьшение глубины и частоты резонансных пиков на частотной зависимости полных потерь датчика.

Для подтверждения того, что зафиксированные изменения аналитического сигнала датчика связаны с чувствительностью бактерий к ампициллину, были поставлены эксперименты по анализу аналитического сигнала датчика для бактериальных клеток, устойчивых к ампициллину. Этот штамм обладал плазмидой pUC-18, отвечающей за устойчивость к ампициллину. Условия проведения измерений были такими же, как и для

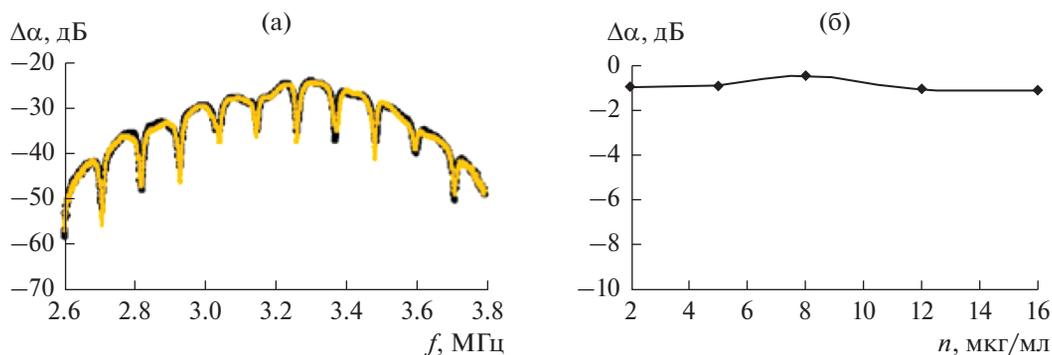


Рис. 5. (а) – Частотная зависимость полных потерь датчика, нагруженного *E. coli* К-12 (pUC-18) до (черная кривая) и после (оранжевая кривая) добавления ампициллина (5 мкг/мл). (б) – Зависимость изменения глубины резонансного пика для *E. coli* К-12 (pUC-18) вблизи частоты 2.82 МГц от концентрации ампициллина.

штамма К-12. Было показано, что добавление ампициллина к клеткам К-12 (pUC-18) не приводит к изменению глубины и частоты резонансных пиков на частотной зависимости полных потерь выходного сигнала датчика при концентрации ампициллина в пределах 2–16 мкг/мл. На рис. 5а в качестве примера представлена частотная зависимость полных потерь датчика, нагруженного клеточной суспензии *E. coli* К-12 (pUC-18), до (черная кривая) и после (оранжевая кривая) добавления ампициллина с концентрацией 5 мкг/мл при начальной проводимости суспензии клеток 20 мкСм/см. На основе полученных частотных зависимостей была построена зависимость изменения глубины резонансного пика вблизи частоты 2.8 МГц от концентрации ампициллина (рис. 5б). Видно, что изменение глубины резонансного пика для указанных концентраций ампициллина не превышало 1 дБ. Частота в этом случае практически не изменялась.

Таким образом, представленный биологический акустический датчик с использованием микробных клеток в качестве сенсорного элемента является перспективным для определения ампициллина в водных средах с нижним пределом детекции 2 мкг/мл при проводимости суспензии клеток 5–20 мкСм/см.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные исследования показали возможность применения датчика на основе акустической щелевой моды с использованием микробных клеток в качестве сенсорного элемента для определения ампициллина в проводящей жидкости. Представленная сенсорная система для обнаружения ампициллина представляет уникальную альтернативу традиционным диагностическим тестам и может быть адаптирована для других групп антибактериальных препаратов. Преимуществами данного подхода являются воз-

можность проведения анализа непосредственно в жидкости и многократность использования датчика без снижения чувствительности сенсорной системы. В целом, полученные результаты показывают перспективность использования биологического акустического датчика для определения антибиотиков в условиях повышенной проводимости среды измерения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 22-29-00587, <https://rscf.ru/project/22-29-00587/>.

Настоящая работа не содержит описания каких-либо исследований с использованием людей и животных в качестве объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ierapetritou M., Muzzio F., Reklaitis G.* Perspectives on the continuous manufacturing of powder-based pharmaceutical processes // *AIChE J.* 2016. V. 62. P. 1846–1862. <https://doi.org/10.1002/aic.15210>
2. *Wong A., Scontri M., Materon E.M., Lanza M.R.V., Sotomayor M.D.P.T.* Development and application of an electrochemical sensor modified with multi-walled carbon nanotubes and graphene oxide for the sensitive and selective detection of tetracycline // *J. Electroanal. Chem.* 2015. V. 757. P. 250–257. <https://doi.org/10.1016/j.jelechem.2015.10.001>
3. *Mungroo N.A., Neethirajan S.* Biosensors for the detection of antibiotics in poultry industry – a review // *Biosensors.* 2014. V. 4. P. 472–493. <https://doi.org/10.3390/bios4040472>
4. *Luo Q., Yu N., Shi C., Wang X., Wu J.* Surface plasmon resonance sensor for antibiotics detection based on photo-initiated polymerization molecularly imprinted array // *Talanta.* 2016. V. 161. P. 797–803. <https://doi.org/10.1016/j.talanta.2016.09.049>
5. *Guliy O.I., Evstigneeva S.S., Bunin V.D.* Bacteria-based electro-optical platform for ampicillin detection in aquatic solutions // *Talanta.* 2021. V. 225. P. 122007. <https://doi.org/10.1016/j.talanta.2020.122007>

6. Анисимкин В.И., Воронова Н.В. Особенности генерации нормальных акустических волн высших порядков в тонких пьезоэлектрических пластинах // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 1. С. 3–7.
7. Минаков А.В., Пряжников М.И., Дамдинов Б.Б., Немцев И.В. Исследование объемной вязкости наносупензий методом акустической спектроскопии // Акуст. журн. 2022. Т. 69. № 2. С. 182–189.
8. Кравчук Д.А., Старченко И.Б., Орда-Жигулина Д.В., Воронина К.А. Исследование оптоакустических сигналов на моделях эритроцитов в жидкости с контрастными наноагентами // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 3. С. 345–348.
9. Подымова Н.Б., Карабутов А.А. Преобразование термооптически возбуждаемых широкополосных импульсов продольных акустических волн в импульсы сдвиговых волн в изотропной твердотельной пластине в жидкости // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 5. С. 482–492.
10. Gruhl F.J., Länge K. Surface acoustic wave (SAW) biosensor for rapid and label-free detection of penicillin G in milk // Food Anal. Methods. 2014. V. 7. P. 430–437. <https://doi.org/10.1007/s12161-013-9642-4>
11. Gaudin V., Fontaine J., Maris P. Screening of penicillin residues in milk by a surface plasmon resonance-based biosensor assay: comparison of chemical and enzymatic sample pre-treatment // Anal. Chim. Acta. 2001. V. 436. № 2. P. 191–198. [https://doi.org/10.1016/S0003-2670\(01\)00948-5](https://doi.org/10.1016/S0003-2670(01)00948-5)
12. Nair M.P., Teo A.J.T., Li K.H.H. Acoustic biosensors and microfluidic devices in the decennium: principles and applications // Micromachines 2022. V. 13. P. 24. <https://doi.org/10.3390/mi13010024>
13. Fogel R., Limson J., Seshia A.A. Acoustic biosensors // Essays Biochem. 2016. V. 60. № 1. P. 101–110. <https://doi.org/10.1042/EBC20150011>
14. Анисимкин В.И., Покусаев Б.Г., Складнев Д.А., Сорочкин В.В., Тюпа Д.В. Применение акустоэлектронной методики для исследования упорядоченных микроструктурированных дисперсных систем с биологическими объектами, включенными в гидрогель // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 6. С. 738–743.
15. Ferrini A.M., Mannoni V., Carpico G., Pellegrini G.E. Detection and identification of β -lactam residues in milk using a hybrid biosensor // J. Agric. Food Chem. 2008. V. 56. P. 784–788. <https://doi.org/10.1021/jf071479i>
16. Das S., Kumar N., Vishweswaraiah R.H., Haldar L., Gaare M., Singh V.K., Puniya A.K. Microbial based assay for specific detection of β -lactam group of antibiotics in milk // J. Food Sci. Technol. 2014. V. 51. P. 1161–1166. <https://doi.org/10.1007/s13197-011-0609-4>
17. Babington R., Matas S., Marco M.P., Galve R. Current bioanalytical methods for detection of penicillins // Anal. Bioanal. Chem. 2012. V. 403. P. 1549–1556. <https://doi.org/10.1007/s00216-012-5960-4>
18. Lu M.-Y., Kao W.-C., Belkin S., Cheng J.-Y. A smart-phone-based whole-cell array sensor for detection of antibiotics in milk // Sensors. 2019. V. 19. P. 3882. <https://doi.org/10.3390/s19183882>
19. Guliy O.I., Zaitsev B.D., Smirnov A.V., Karavaeva O.A., Borodina I.A. Sensor for ampicillin based on a microwave electrodynamic resonator // Biosens. Bioelectron. 2019. V. 130. P. 95–102. <https://doi.org/10.1016/j.bios.2019.01.030>
20. Guliy O.I., Zaitsev B.D., Borodina I.A. New approach for determination of antimicrobial susceptibility to antibiotics by an acoustic sensor // Appl. Microbiol. Biotechnol. 2020. V. 104. P. 1283–1290. <https://doi.org/10.1007/s00253-019-10295-2>
21. Borodina I.A., Zaitsev B.D., Burygin G.L., Guliy O.I. Sensor based on the slot acoustic wave for the non-contact analysis of the bacterial cells – antibody binding in the conducting suspensions // Sensors and Actuators B. 2018. V. 268. P. 217–222. <https://doi.org/10.1016/j.snb.2018.04.063>
22. Borodina I.A., Zaitsev B.D., Kuznetsova I.E., Teplykh A.A. Acoustic waves in a structure containing two piezoelectric plates separated by an air (vacuum) gap // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 2013. V. 60. № 12. P. 2677–2281.
23. Antibiotic Resistance Protocols: Second Edition / Eds. Gillespie S.H., McHugh T.D. Methods in Molecular Biology. 2010. V. 642. Springer Science+Business Media, LLC.

УДК 534.222

АКУСТИЧЕСКИЕ ПОЛЯ И РАДИАЦИОННЫЕ СИЛЫ, СОЗДАВАЕМЫЕ СТОЯЧЕЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНОЙ В СЛОИСТЫХ ВЯЗКИХ СРЕДАХ

© 2022 г. В. А. Гусев^{a, b, *}, Д. А. Жарков^{a, b, **}^aМосковский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет,
ГСП-1, Ленинские горы 1, стр. 2, Москва, 119991 Россия^bИнститут физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН,
ул. Большая Грузинская 10, стр. 1, Москва, 123995 Россия

*e-mail: vgusev@bk.ru

**e-mail: denis.Zharkov2014@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.06.2022 г.

После доработки 17.07.2022 г.

Принята к публикации 27.07.2022 г.

Рассчитаны поля, амплитудные и дисперсионные характеристики поверхностной акустической волны в системах: “вязкое жидкое полупространство—твердое полупространство” и “слой вязкой жидкости—упругое полупространство” с учетом сдвиговых компонент в жидкости. Рассчитано результирующее радиационное давление, возникающее в слое вязкой жидкости со стороны стоячей поверхностной волны и действующее на элемент ее объема за счет нелинейности уравнений движения в одномодовом и двухмодовом режимах. Показано, что наличие вязкости приводит к нарушению строгой периодичности и симметричности полей радиационных сил и акустических течений. Сдвиговые компоненты вызывают локализованные в узкой приграничной области, но значительные по величине силы радиационного давления. Возбуждение в системе нескольких волновых мод создает предпосылки для создания сложных пространственных распределений полей радиационных сил. Управляя частотой волны и толщиной слоя, можно добиться либо преобладания поля одной моды, либо сопоставимого вклада нескольких мод. В окрестности волнового резонанса преобладает основная мода.

Ключевые слова: поверхностные волны, вязкая жидкость, сдвиговые компоненты, радиационное давление, акустические течения

DOI: 10.31857/S0320791922060041

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время активно развиваются методы управления перемещением различных объектов при помощи акустического поля. Отметим, например, работы, связанные с созданием “акустических ловушек” [1] и управлением ансамблями взвешенных в жидкости частиц [2, 3] и их левитацией [4, 5]. Возможность такого перемещения связана с формированием усредненной ненулевой силы радиационного давления акустического поля [6, 7].

Управление движением взвешенных частиц может применяться для создания искусственных материалов и сред с заранее заданными характеристиками. Среди подобных сред можно выделить метаматериалы, обладающие необычными свойствами, в частности, фотонные и фононные кристаллы. В этом случае требуется формирование упорядоченной пространственной структуры

с заранее определенными параметрами. Эффективной методикой создания таких структур является осаждение наночастиц, взвешенных в коллоидном растворе, в процессе диссипативной самосборки [2, 3]. Важным достоинством этой методики является возможность ее расширения за счет приложения внешних полей, например, акустического или электромагнитного. Это позволяет управлять процессом формирования структуры непосредственно при его проведении и гибко менять параметры формируемой структуры. Проведенные ранее экспериментальные [8, 9] и теоретические [10, 11] исследования показали возможность и эффективность методики, основанной на создании стоячей поверхностной акустической волны (ПАВ) в жидком слое на упругой подложке.

Расчет поля ПАВ и радиационных сил, проведенный в [10], основывался на модели идеальной

жидкости. Учет такого важного для растворов и взвесей [12, 13] фактора как вязкость был проведен только в приближенной постановке, что не позволило записать точное дисперсионное уравнение и учесть все возникающие эффекты, наиболее существенным среди которых является возникновение сдвиговых компонент поля в вязкой жидкости. В работе [11] получено выражение для дисперсионного уравнения и рассчитаны амплитуды радиационных сил, возникающих в слое вязкой жидкости. Было показано, что учет сдвиговых компонент акустического поля в вязкой жидкости существенно изменяет получаемую пространственную структуру радиационных сил. Кроме того, все расчеты были проведены только в одномодовом режиме. Однако уже при достаточно небольшой толщине слоя могут генерироваться высшие моды. В данной работе представлены расширенные результаты исследования характеристик ПАВ на границе вязкого слоя и упругого полупространства, в частности, анализируются многомодовый режим и особенности формирования акустических течений в данной системе при учете вязкости.

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Вывод уравнений для компонент акустического поля ПАВ в целом стандартен [14] и отличается, главным образом, учетом сдвиговых компонент в вязкой жидкости. Тем не менее, с методической точки зрения целесообразно кратко привести этот вывод.

Акустическое поле в слое вязкой жидкости будем описывать линеаризованной системой уравнений Навье–Стокса, непрерывности и состояния:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -\nabla p' + \eta \Delta \mathbf{u} + \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad div} \mathbf{u}, \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div} \mathbf{u} &= 0, \quad p' = \rho' c_0^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь \mathbf{u} – колебательная скорость частиц жидкости, p' – акустическое давление, ρ_0 и ρ' – равновесная плотность жидкости и ее акустическое приращение, c_0 – скорость звука в жидкости, ξ и η – коэффициенты объемной и сдвиговой вязкости соответственно, t – время, Δ – лапласиан.

Для расчета поля ПАВ достаточно рассматриваемого линейного приближения. Это связано с тем, что радиационное давление является квадратичной величиной по акустическому полю. Следовательно, учет нелинейных поправок к полю волны даст для радиационного давления члены, уже кубичные по полю. Их учет, вообще говоря, выходит за рамки точности используемой модели. Тем не менее, некоторые выводы,

касающиеся нелинейных эффектов, будут приведены ниже.

Введем теперь скалярный φ и векторный \mathbf{A} потенциалы колебательной скорости в соответствии с представлением $\mathbf{u} = \nabla \varphi + \text{rot} \mathbf{A}$. Подставляя это выражение в систему (1) и применяя поочередно операции дивергенции и ротора, получим уравнения для потенциалов:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \varphi = \frac{b}{\rho_0} \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad b = \xi + \frac{4}{3} \eta, \quad (2)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \eta \Delta \mathbf{A}. \quad (3)$$

Уравнение (2) для потенциальной компоненты имеет вид волнового уравнения с затуханием, а для сдвиговой компоненты (3) – уравнения диффузии.

Далее будем рассматривать слоистую структуру, состоящую из упругого полупространства при $z \geq 0$ и слоя вязкой жидкости при $-h < z < 0$ (рис. 1). При этом ось z направлена вертикально вниз, а все границы раздела строго горизонтальны и параллельны оси x . Считаем, что при $-\infty < z < -h$ находится вакуум. В этой системе в горизонтальном направлении могут распространяться ПАВ, локализованные вблизи границы раздела вязкого слоя и упругого полупространства при $z = 0$. Ограничимся далее рассмотрением двумерной задачи.

С точки зрения практических приложений (формирование упорядоченных структур [2, 3, 8–11]) наибольший интерес представляют периодические поля, создаваемые стоячими ПАВ. Для их расчета удобно сначала найти поле одной бегущей, например, вправо ПАВ. Затем, формируя две бегущие навстречу друг другу ПАВ, можно образовать стоячую ПАВ с периодической пространственной структурой. Необходимо отметить, что при теоретическом анализе бегущие волны рассматриваются на всем бесконечном интервале $-\infty < x < \infty$. При этом затухающие волны формально будут обладать бесконечной амплитудой в точке возникновения. При физической реализации это означает, что волны создаются двумя излучателями, находящимися на некотором расстоянии справа и слева от центра симметрии.

Решение уравнений (2)–(3) будем искать в виде гармонической бегущей вдоль оси x ПАВ с частотой ω и волновым числом $k = \omega/c$, где c – искомая скорость поверхностной волны. Подставляя в (2) решение вида $\varphi = B(z) e^{-i(\omega t - kx)}$, для

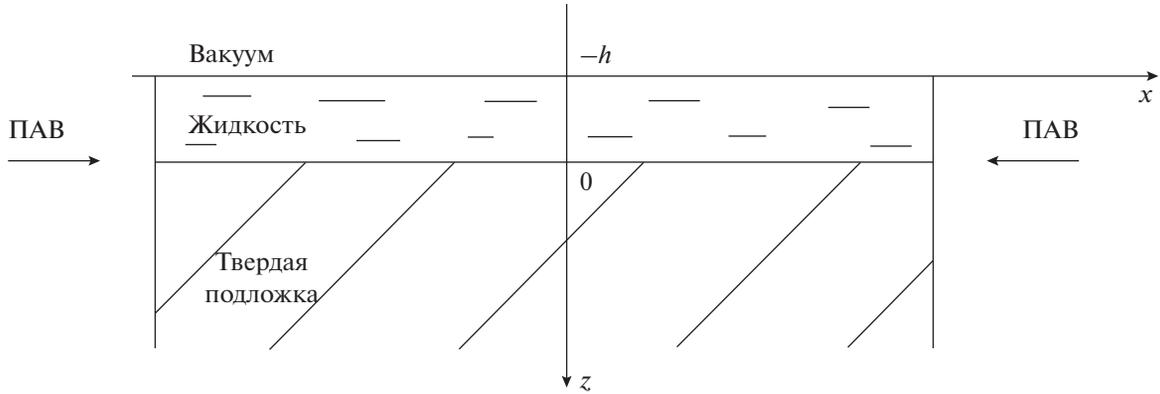


Рис. 1. Геометрия задачи.

функции $B(z)$, описывающей вертикальную структуру поля в жидком слое, получим:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + r^2 B = 0, \quad r^2 = \frac{k_0^2 - k^2 + \frac{i\omega b}{\rho_0 c_0^2} k^2}{1 - \frac{i\omega b}{\rho_0 c_0^2}}. \quad (4)$$

Здесь $k_0 = \omega/c_0$ – волновое число в жидкости. Знак в уравнении (4) выбран так, чтобы получить решения для ограниченного слоя в виде бегущих волн. Для вязкого полупространства надо знак “+” в уравнении (4) заменить на “–” для получения экспоненциально затухающего на бесконечности решения. Это эквивалентно замене $r \rightarrow r^* = ir$.

Векторное уравнение (3) для потенциала \mathbf{A} в рассматриваемом двумерном случае упрощается и становится скалярным, поскольку при $u_y = 0$ и отсутствии зависимости от координаты y единственной отличной от нуля компонентой векторного потенциала будет $A_y \equiv A$, т.е. $\mathbf{A} = \{0, A, 0\}$. Отыскивая решение уравнения (3) вида $A = C(z)e^{-i(\omega t - kx)}$, для функции $C(z)$ получим:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + \kappa^2 C = 0, \quad \kappa^2 = \frac{i\omega\rho_0}{\eta} - k^2. \quad (5)$$

В уравнении (5), как и в уравнении (4), знак “+” выбран так, чтобы в слое получить решения в виде бегущих волн. В случае вязкого полупространства необходимо заменить в уравнении (5) “+” на “–” и κ на $\kappa^* = i\kappa$.

В упругом полупространстве поле смещений

$$\mathbf{U} = (U, V = 0, W) = \nabla\Phi + \text{rot}\Psi,$$

$$U = \frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial z}, \quad W = \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial x}$$

также описывается скалярным Φ и векторным Ψ потенциалами, подчиняющимися волновым

уравнениям [11]. Ограниченные на бесконечности решения этих уравнений имеют вид:

$$\Phi = \Phi_0 e^{-qz} e^{-i(\omega t - kx)}, \quad \Psi = \Psi_0 e^{-sz} e^{-i(\omega t - kx)}, \quad (6)$$

$$q = \sqrt{k^2 - k_l^2}, \quad s = \sqrt{k^2 - k_t^2}.$$

Здесь введены волновые числа $k_l = \frac{\omega}{c_l}$ – для продольных и $k_t = \frac{\omega}{c_t}$ – для поперечных волн.

На границах раздела сред необходимо добавить условия сопряжения акустических полей. На границе вязкий слой–упругое полупространство при $z = 0$ ставятся четыре условия:

– равенство вертикальных смещений:

$$W|_{z=0} = -\frac{u_z}{i\omega}|_{z=0}; \quad (7)$$

– равенство касательных смещений:

$$U|_{z=0} = -\frac{u_x}{i\omega}|_{z=0}; \quad (8)$$

– равенство нормальных напряжений:

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = -p'|_{z=0} + \sigma'_{zz}|_{z=0}; \quad (9)$$

– равенство касательных напряжений:

$$\sigma_{xz}|_{z=0} = \sigma'_{xz}|_{z=0}. \quad (10)$$

На свободной границе вязкого слоя $z = -h$ ставятся два условия:

– равенство нулю нормального напряжения:

$$-p'|_{z=-h} + \sigma'_{zz}|_{z=-h} = 0; \quad (11)$$

– равенство нулю касательного напряжения:

$$\sigma'_{xz}|_{z=-h} = 0. \quad (12)$$

Здесь σ и σ' – тензор напряжений в упругом полупространстве и тензор вязких напряжений в жидкости соответственно [15].

ПАВ НА ГРАНИЦЕ ВЯЗКОГО ЖИДКОГО И УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВ

Для того чтобы наглядно разобраться, какой вклад в полное поле вносит учет вязкости, рассмотрим вначале более простую задачу – ПАВ на границе вязкого жидкого и упругого полупространств. Пусть вязкая жидкость заполняет полупространство $z \leq 0$. Тогда локализованные около границы раздела сред решения уравнений (4) и (5) для скалярного и векторного потенциалов соответственно имеют вид:

$$\varphi = B_1 e^{r^* z} e^{-i(\omega t - kx)}, \quad A = C_1 e^{k^* z} e^{-i(\omega t - kx)}. \quad (13)$$

Подставляя выражения (13) в граничные условия (7)–(10), получаем дисперсионное уравнение, из которого находится скорость c :

$$\begin{vmatrix} -\frac{ir}{\omega} & \frac{k}{\omega} & -q & ik \\ \frac{k}{\omega} & \frac{ik}{\omega} & ik & s \\ \eta(\kappa^2 - k^2) & -2i\eta k \kappa & -\mu(s^2 + k^2) & 2i\mu ks \\ 2i\eta kr & -\eta(\kappa^2 + k^2) & 2i\mu kq & \mu(s^2 + k^2) \end{vmatrix} = 0. \quad (14)$$

В случае вязкой жидкости дисперсионное уравнение приобретает комплексные коэффициенты. Это означает, что и его решение становится комплексным, т.е. $c = c_r + ic_i$, где мнимая часть интерпретируется как затухание волны. Следует отметить, что истинные значения скорости c' и коэффициента затухания γ находятся как реальная и мнимая части волнового числа

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c_r + ic_i} = \frac{\omega}{c'} + i\gamma$$

и равны соответственно

$$c' = c_r + \frac{c_i^2}{c_r}, \quad \gamma = -\frac{c_i}{c_r + c_i^2}.$$

Видно, что при $|c_i| \ll c_r$ истинная скорость ПАВ близка к c_r , а коэффициент затухания пропорционален c_i . Учитывая это, а так же то, что во все дальнейшие выражения входят величины c_r и c_i , будем использовать именно их.

Интересно разобраться, как происходит в дисперсионном уравнении предельный переход от вязкой жидкости к идеальной при $\eta \rightarrow 0$. С физической точки зрения этот переход интересен тем, что меняются граничные условия, в частности, необходимо отбросить условие равенства касательных смещений.

В пределе $\eta \rightarrow 0$ не все слагаемые, содержащие η , стремятся к нулю; например, волновое число k (5), наоборот, стремится к бесконечности. Тогда определитель (14) содержит слагаемые разного порядка относительно волнового числа k . Обратим внимание, что в определителе (14) второй столбец соответствует сдвиговой компоненте в жидкости. При этом вторая строка соответствует условию равенства касательных смещений, которое отсутствует в случае идеальной жидкости. Распишем определитель (14) по минорам второго столбца:

$$\begin{aligned} & \frac{k}{\omega} \begin{vmatrix} \frac{k}{\omega} & ik & s \\ \eta(\kappa^2 - k^2) & -\mu(s^2 + k^2) & 2i\mu ks \\ 2i\eta kr & 2i\mu kq & \mu(s^2 + k^2) \end{vmatrix} + \\ & + \frac{ik}{\omega} \begin{vmatrix} -\frac{ir}{\omega} & -q & ik \\ \eta(\kappa^2 - k^2) & -\mu(s^2 + k^2) & 2i\mu ks \\ 2i\eta kr & 2i\mu kq & \mu(s^2 + k^2) \end{vmatrix} \\ & - 2i\eta k \kappa \begin{vmatrix} -\frac{ir}{\omega} & -q & ik \\ \frac{k}{\omega} & ik & s \\ 2i\eta kr & 2i\mu kq & 2i\mu kq \end{vmatrix} - \\ & - \eta(\kappa^2 + k^2) \begin{vmatrix} -\frac{ir}{\omega} & -q & ik \\ \frac{k}{\omega} & ik & s \\ \eta(\kappa^2 - k^2) & -\mu(s^2 + k^2) & 2i\mu ks \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Легко видеть, что самым старшим членом при $\eta \rightarrow 0$ является второе слагаемое со множителем ik/ω , причем содержащийся здесь минор как раз является дисперсионным уравнением для случая полупространства идеальной жидкости. Остальные слагаемые в (15) имеют меньший порядок и в пределе $\eta \rightarrow 0$ выпадают. Таким образом, основной вклад при $\eta \rightarrow 0$ вносит элемент определителя, стоящий на пересечении второго столбца и второй строки, которые должны исчезнуть при переходе к идеальной жидкости. Это позволяет получить приближенное выражение для скорости ПАВ при малой вязкости. Для этого представим решение дисперсионного уравнения (14) в виде $c = c_{00} + c_1$, где c_{00} – решение в отсутствие вязкости при $\eta = 0$, $c_1 \sim \eta$ – малая поправка. Для нахождения поправки c_1 умножим уравнение (14) на величину $a = \sqrt{\eta}$ и соберем слагаемые с одинако-

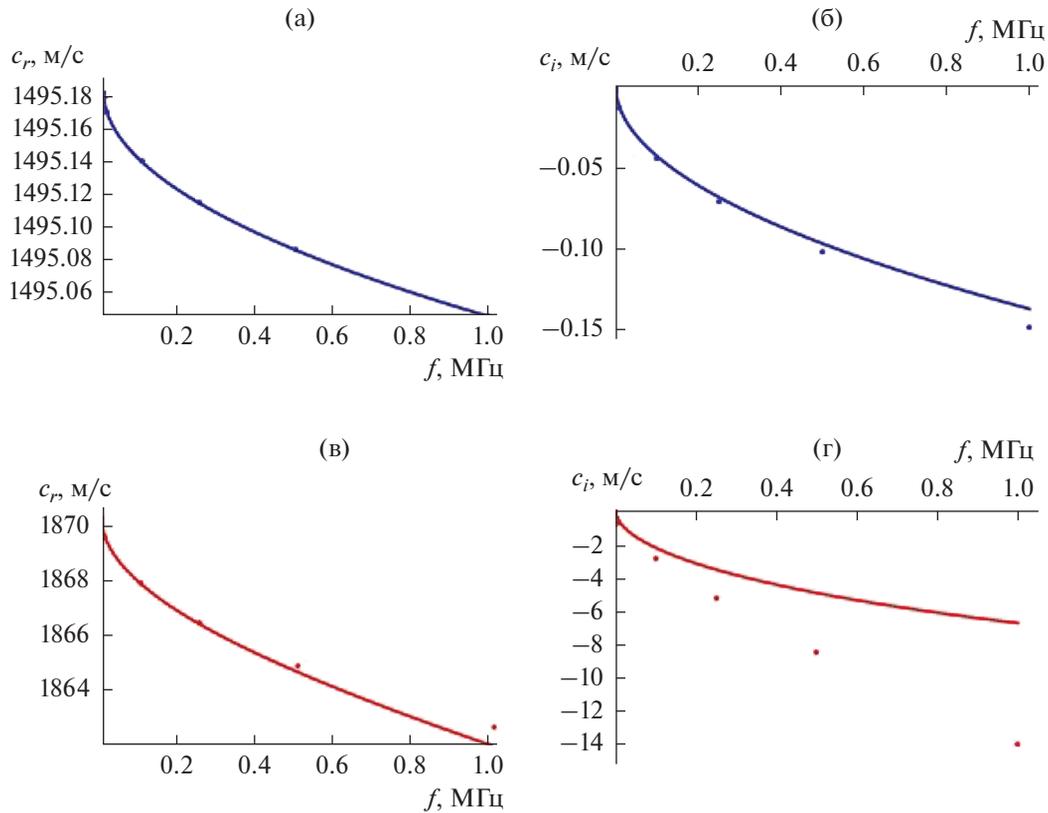


Рис. 2. Зависимости (а, в) – реальной c_r и (б, г) – мнимой c_i частей скорости c от частоты; (а, б) – вода, (в, г) – глицерин. Точки – численное решение уравнения (14), сплошная линия – приближенное решение (16).

выми степенями a : $a^0 \det_0 + a^1 \det_1 = 0$, где $\det_{0,1}$ – слагаемые определителя, пропорциональные a^0 и a^1 соответственно. Более высокими порядками a пренебрежем. Тогда в представлении (15) третьим слагаемым можно пренебречь. Далее, раскладывая оставшиеся слагаемые в ряд Тейлора вблизи c_{00} и оставляя слагаемые порядка a^1 , получим:

$$a^0 \left[\det_0(c_{00}) + \det'_0(c_{00})c_1 \right] \det_0 + a^1 \det_1(c_{00}) = 0.$$

Так как $\det_0(c_{00}) = 0$ по определению, то поправка к скорости определяется выражением

$$c_1 = -\frac{a^1 \det_1(c_{00})}{\det'_0(c_{00})}. \quad (16)$$

На рис. 2 представлено сравнение зависимостей c_r и c_i от частоты, полученных численно на основе точного уравнения (14) и на основе приближенного аналитического выражения (16). Расчеты проводились для двух жидкостей – слабвязкой воды и сильновязкого глицерина. Для воды задавались следующие значения: плотность $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, скорость звука $c_0 = 1500 \text{ м/с}$, коэффициенты вязкости $\eta = 0.0011 \text{ Па с}$, $\xi = 0.003 \text{ Па с}$,

$b = 0.0045 \text{ Па с}$; для глицерина: $\rho_0 = 1260 \text{ кг/м}^3$, $c_0 = 1900 \text{ м/с}$, $\eta = 1.1 \text{ Па с}$, $\xi = 3 \text{ Па с}$, $b = 4.5 \text{ Па с}$. В качестве твердого тела рассматривался материал, близкий к граниту, с параметрами: $\rho = 2210 \text{ кг/м}^3$, $c_l = 5570 \text{ м/с}$, $c_t = 3515 \text{ м/с}$. Во всех случаях задавалась частота волны 1 кГц. Видно, что приближенное выражение (16) хорошо описывает изменение комплексной скорости, особенно ее реальной части c_r . Для мнимой части c_i есть хорошее совпадение в области низких частот, однако на высоких частотах начинается расхождение, вызванное усилением роли вязкости.

Согласно выражениям (13) акустические поля в жидкости экспоненциально убывают при удалении от границы сред, причем характерный размер области локализации вдоль оси z определяется выражениями $1/\text{Re}(r^*)$ и $1/\text{Re}(k^*)$ для скалярного и векторного потенциалов соответственно. На рис. 3 представлены зависимости размера области локализации сдвиговых компонент от частоты в логарифмическом масштабе для воды (синяя кривая) и глицерина (красная кривая). На низких частотах область локализации сдвиговой компоненты увеличивается, причем у глицерина она в несколько раз больше, чем у воды. При частоте

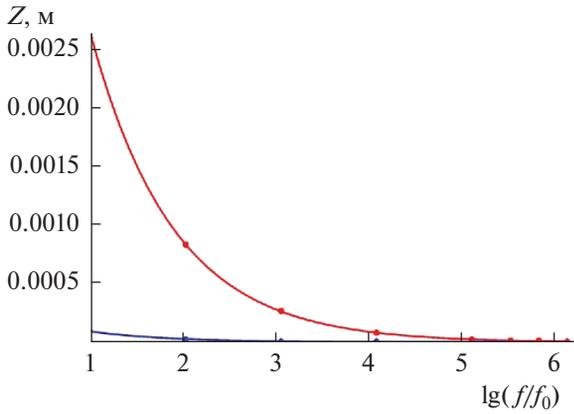


Рис. 3. Зависимость глубины локализации сдвиговой компоненты от частоты для воды (синяя линия) и глицерина (красная линия) в логарифмическом масштабе; размерный множитель $f_0 = 1$ Гц. Точки – численное решение уравнения (14), сплошная линия – приближенное решение (16).

1 кГц волновая толщина fZ/c_0 области локализации векторного потенциала для воды составляет 10^{-4} , для глицерина – 0.002, а скалярного потенциала для воды – 12.43, для глицерина – 4.96.

Как видно из рис. 3, даже для очень вязкой жидкости – глицерина – глубина локализации сдвиговой компоненты оказывается порядка миллиметра. Таким образом, можно ожидать, что вдали от границы раздела роль сдвиговых компонент будет несущественна. Однако в приграничном слое, особенно в случае растворов и взвесей с большой эффективной вязкостью, необходимо учитывать поле сдвиговых компонент.

Сравним теперь амплитуды различных составляющих акустического поля. На рис. 4 представлена зависимость амплитуды векторного потенциала от частоты по отношению к амплитуде сдвиговой компоненты в твердом теле для воды. Она монотонно возрастает с увеличением частоты. Интересно отметить, что на высоких частотах значения амплитуды векторного потенциала в вязкой жидкости превосходят значения амплитуд сдвиговой компоненты в твердом теле на несколько порядков. Согласно проведенным расчетам амплитуда скалярного потенциала еще на порядок больше, чем амплитуда векторного потенциала и также монотонно возрастает с частотой. Интересно также отметить, что амплитуда скалярного потенциала больше для воды, т.е. убывает с ростом вязкости. Амплитуда векторного потенциала, наоборот, больше для глицерина, т.е. возрастает с ростом вязкости. Таким образом, при увеличении вязкости жидкости амплитуда и, соответственно, энергия сдвиговых компонент возрастает.

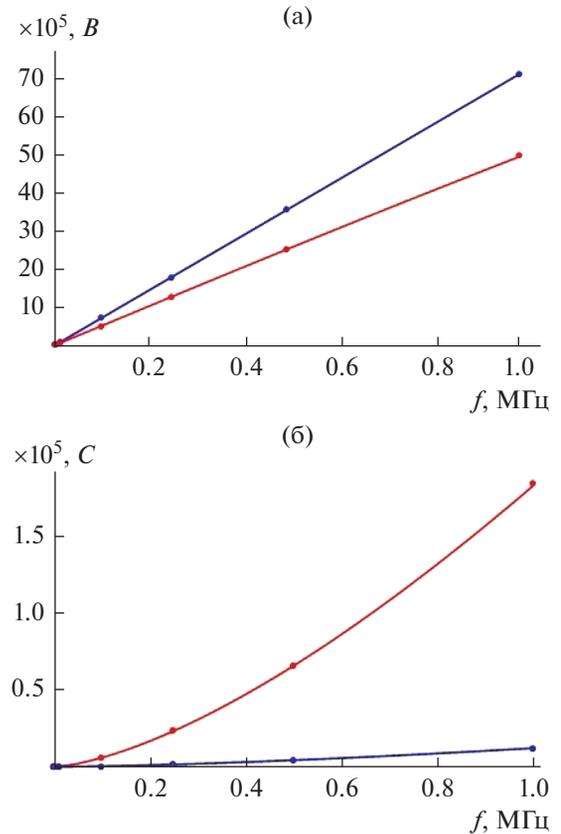


Рис. 4. Зависимость от частоты (а) – амплитуды скалярного потенциала $B = B_1/\Psi_0$ и (б) – векторного потенциала $C = C_1/\Psi_0$ относительно амплитуды векторного потенциала в твердом теле Ψ_0 для воды (синяя линия) и глицерина (красная линия). Точки – амплитуды, рассчитанные с использованием численного решения уравнения (14), сплошная линия – приближенного решения (16).

ПАВ НА ГРАНИЦЕ СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В случае ограниченного по вертикали слоя вязкой жидкости решение уравнений (5) и (6) для бегущей ПАВ задается в виде суммы двух волн:

$$\begin{aligned} \varphi &= (B_1 e^{-irz} + B_2 e^{irz}) e^{-i(\omega t - kx)}, \\ A &= (C_1 e^{-irz} + C_2 e^{irz}) e^{-i(\omega t - kx)}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $B_{1,2}$, $C_{1,2}$ – амплитуды соответствующих потенциалов.

Дисперсионное уравнение и соотношения между амплитудами компонент поля определяются после подстановки решений (17) в граничные условия (7)–(12). Дисперсионное уравнение приводится к виду $\det \Delta(k) = 0$, матрица $\Delta(k)$ которого имеет вид [16]:

$$\Delta(k) = \begin{pmatrix} \eta(\kappa^2 - k^2)e^{irh} & \eta(\kappa^2 - k^2)e^{-irh} & 2\eta\kappa ke^{ikh} & -2\eta\kappa ke^{-ikh} & 0 & 0 \\ 2\eta r\kappa e^{irh} & -2\eta r\kappa e^{-irh} & \eta(\kappa^2 - k^2)e^{ikh} & \eta(\kappa^2 - k^2)e^{-ikh} & 0 & 0 \\ \frac{r}{\omega} & -\frac{r}{\omega} & -\frac{k}{\omega} & -\frac{k}{\omega} & q & -ik \\ \frac{k}{\omega} & \frac{k}{\omega} & \frac{\kappa}{\omega} & -\frac{\kappa}{\omega} & -ik & s \\ \eta(\kappa^2 - k^2) & \eta(\kappa^2 - k^2) & 2\eta\kappa k & -2\eta\kappa k & -\mu(k^2 + s^2) & 2i\mu ks \\ 2\eta\kappa k & -2\eta\kappa k & \eta(\kappa^2 - k^2) & \eta(\kappa^2 - k^2) & 2i\mu\kappa q & \mu(k^2 + s^2) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Как и в предыдущем случае, решение дисперсионного уравнения с матрицей (18) является комплексным, $c = c_r + ic_i$. На рис. 5 представлены дисперсионные кривые зависимости величины c_R от волновой толщины слоя $H = fh/c_0$, где $c_0/f = \lambda_0$ — длина волны в безграничной жидкости. При расчетах использовались те же параметры, что и на рис. 2–4. На рис. 5 сплошными линиями изображены дисперсионные кривые в отсутствие вязкости, точками — расчеты при учете вязкости. Сопоставление этих зависимостей показывает, что в масштабе рисунка различие практически незаметно. Таким образом, в случае слоя значительное изменение скорости ПАВ происходит при изменении толщины слоя; при этом изменение скорости, обусловленное вязкостью, оказывается малозаметным. В то же время основная часть затухания, как показано в работах [16, 17], связана именно с диссипацией сдвиговых компонент.

Из рис. 5 видно, что существует фундаментальная мода 1, скорость которой при малой толщине стремится к скорости рэлеевской волны на границе упругого полупространства и вакуума, а при большой толщине — к скорости волны Стоунли на границе упругого и жидкого полупространств. Высшие моды 2, 3 и т.д. существуют только в случае жидкого слоя конечной толщины. В частности, в случае воды при толщине слоя $H = 0.07$ ($h = 0.1$ м) существует одна мода ПАВ со скоростью $c = 3128$ м/с. Для $H = 0.3$ ($h = 0.5$ м) существуют две моды со скоростями $c_1 = 1994.68$ м/с и $c_2 = 3454.13$ м/с соответственно. Данные расчетов для воды (толщина слоя $H = 0.3$ ($h = 0.5$ м)) и глицерина (толщина слоя $H = 0.4$ ($h = 0.75$ м)) приведены в табл. 1.

Далее, используя формулы Крамера, для двухмодового режима были рассчитаны амплитуды скалярного и векторного потенциалов по отношению к амплитуде векторного потенциала Ψ_0 в упругом полупространстве. Данные представлены в табл. 1. Из таблицы видно, что на частоте 1 кГц амплитуда векторного потенциала мала по сравнению с амплитудой скалярного потенциала.

Сравнение данных для воды и глицерина показывает, что при увеличении вязкости роль сдвиговой компоненты закономерно растет. Кроме того, при увеличении частоты отношение амплитуд векторного и скалярного потенциалов также заметно возрастает аналогично зависимостям на рис. 4.

Для двухмодового режима оказалось, что амплитуды первой и второй моды сопоставимы друг с другом. Таким образом, в общем случае необходимо учитывать обе моды, а значит, структура поля будет более сложная. Из-за взаимодействия мод строгая периодическая структура нарушится. ПАВ, соответствующие различным модам, имеют разные длины волн. Оказывается, что большую длину волны имеет вторая мода. Это означает, что за крупномасштабную структуру поля отвечает преимущественно вторая мода, тогда как первая мода связана с более мелкомасштабной структурой. Таким образом, можно ожидать, что в многомодовом режиме будет формироваться многомасштабная пространственная структура, причем

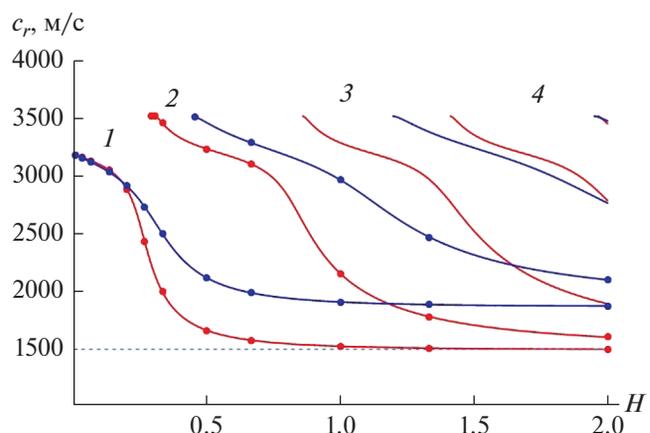


Рис. 5. Зависимость скорости c_r ПАВ в слое от частоты для воды (красные линии) и глицерина (синие линии). Точки — решение с учетом вязкости, сплошная линия — без учета вязкости. Цифры 1–4 обозначают номера мод. Штриховой линией отмечена скорость звука в воде.

Таблица 1. Параметры ПАВ в двухмодовом режиме для слоя воды с волновой толщиной $H = 0.3$ и слоя глицерина с волновой толщиной $H = 0.4$. Частота 1 кГц

	Вода, $H = 0.3$		Глицерин, $H = 0.4$	
	первая мода	вторая мода	первая мода	вторая мода
Скорость c_r , м/с	1994.68	3454.13	2116.70	3457.81
Длина волны, м	2	3.45	2.2	3.46
Затухание (мнимая часть скорости c_i , м/с)	0.000018	0.000008	0.0062	0.0034
Амплитуда скалярного потенциала, отн. Ψ_0	3051.70	2354.39	2531.26	1819.97
Амплитуда векторного потенциала, отн. Ψ_0	0.23	0.13	3.10	3.18

на крупных масштабах она определяется высшими модами, амплитуды которых могут быть сопоставимы с амплитудой фундаментальной моды.

Проанализируем характер изменения амплитуды ПАВ в зависимости от толщины слоя. На рис. 6 приведена зависимость относительной амплитуды скалярного потенциала от волновой толщины слоя для первой (1) и второй (2) мод. Видно, что при волновой толщине $H \approx 2$, что примерно равно 2.9 м при заданных параметрах задачи, возникает резкий пик амплитуды первой моды. Это связано с тем, что в этой области ско-

рость ПАВ сравнивается со скоростью звука в жидкости, т.е. со значением 1500 м/с, и возникает так называемый волновой резонанс. В этом случае ПАВ и волна в жидкости бегут с близкими скоростями и эффективно обмениваются энергией. В отсутствие вязкости (мода 1, сплошная линия) амплитуда при точном резонансе неограниченно возрастает. При учете вязкости поведение первой моды (мода 1, точки) качественно похоже, но амплитуда при $c = c_0$ достигает конечного максимума, а не стремится к бесконечности. При этом амплитуда второй моды 2 не испытывает такого значительного роста.

На рис. 6 можно выделить несколько характерных участков: $H = 0 \dots 0.3$ – присутствует только первая мода, $H = 0.5 \dots 1$ – амплитуда первой моды остается практически постоянной, а амплитуда второй моды достигает минимума, $H = 1 \dots 1.5$ – амплитуды мод сопоставимы друг с другом, $H = 1.5 \dots 2.5$ – волновой резонанс первой моды, ее амплитуда гораздо больше амплитуды второй моды, от $H = 2.5$ и при большей толщине слоя амплитуда первой моды продолжает преобладать. Подчеркнем, что толщина слоя и частота волны входят в безразмерную волновую толщину слоя в виде сомножителей. Таким образом, регулируя в зависимости от задачи либо толщину слоя, либо частоту волны, можно влиять на пространственный масштаб акустического поля и преобладающую волновую моду. При этом необходимо иметь в виду, что частота фигурирует в дисперсионном уравнении также в качестве независимого параметра в слагаемых, содержащих коэффициент вязкости, так что зависимости скорости от толщины и частоты, вообще говоря, различны.

Рассмотрим теперь пространственную структуру поля стоячей ПАВ, образованной встречны-

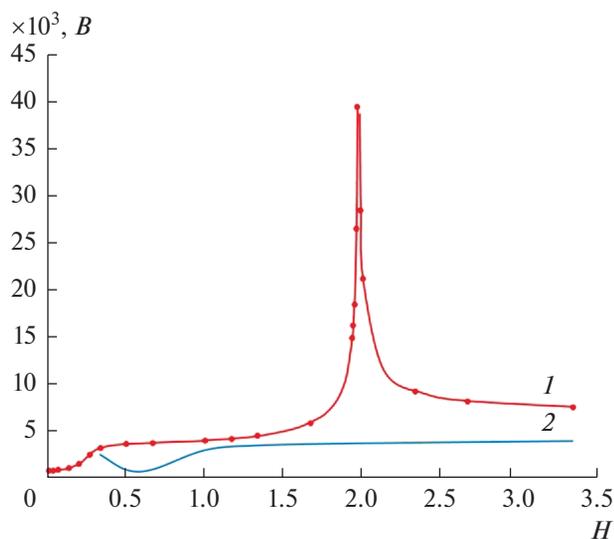


Рис. 6. Зависимость относительной амплитуды скалярного потенциала первых двух мод от толщины слоя (1 – первая мода: точки – с учетом вязкости, сплошная линия – без учета вязкости; 2 – вторая мода с учетом вязкости).

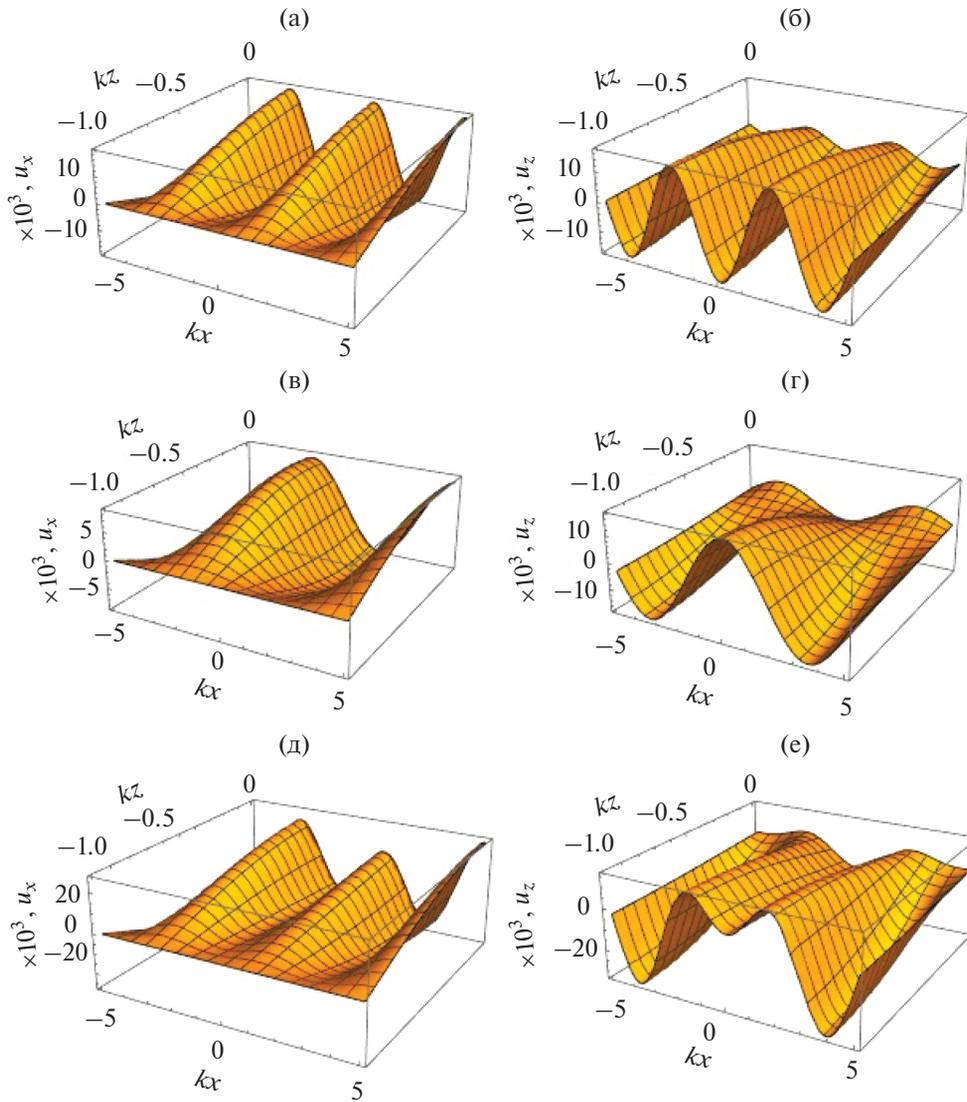


Рис. 7. Пространственное распределение (а, в, д) – горизонтальной и (б, г, е) – вертикальной компонент колебательной скорости (относительно амплитуды сдвиговой компоненты колебательной скорости) для (а, б) – первой моды, (в, г) – второй моды и (д, е) – суммы мод.

ми бегущими ПАВ вида (17). Аналитические выражения для амплитуд компонент акустического поля, которые могут быть получены на основе матрицы (18), оказываются слишком громоздкими для воспроизведения и качественного анализа. Возможно только их численное исследование. В то же время согласно рис. 5 изменение скорости волны при учете вязкости оказывается относительно небольшим и для воды составляет доли процента. Поэтому для качественного представления о формирующейся структуре приведем аналитические выражения для колебательной скорости и давления в поле стоячей ПАВ в слое идеальной жидкости [10]:

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{k}{r_0} U_0 \sin r_0(z+h) \sin kx \sin \omega t, \\
 u_z &= -U_0 \cos r_0(z+h) \cos kx \sin \omega t, \\
 p' &= -\frac{\rho_0 \omega}{r_0} U_0 \sin r_0(z+h) \cos kx \cos \omega t.
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Здесь U_0 – произвольный амплитудный множитель, с точностью до которого решается задача о распространении ПАВ. В случае решения задачи излучения волны этот множитель связан с амплитудой источника. Формулы (19) показывают, что вдоль осей x и z образуются периодические структуры с пространственными частотами kx и r_0z , соответственно.

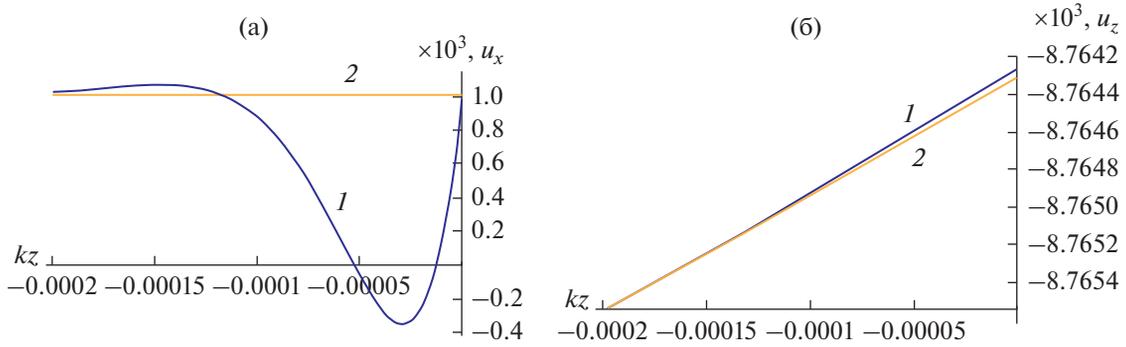


Рис. 8. Сечения пространственного распределения колебательной скорости для первой моды ($h = 0.1$ м) при $kx = 0.5$: (а) – x -компонента, (б) – z -компонента; синяя линия 1 – с учетом вязкости, оранжевая линия 2 – без учета вязкости.

При учете вязкости пространственное распределение вертикальной и горизонтальной компонент колебательной скорости (в относительных единицах) для первой и второй моды, а также для суммы мод представлено на рис. 7. Расчет проводился для слоя воды толщиной $H = 0.3$. Видно, что графики качественно соответствуют формулам (19). Отдельно для первой и второй мод действительно наблюдаются строгие периодические структуры, но при учете двух мод распределение становится более сложным. На рис. 8 представлено изменение амплитуды колебательной скорости вдоль сечения $kx = 0.5$. Видно, что учет сдвиговых компонент привел к существенному изменению x -компоненты колебательной скорости вблизи границы раздела; изменение амплитуды z -компоненты скорости при этом незначительно.

Уже говорилось, что роль нелинейных эффектов несущественна в рамках выбранной точности, тем не менее, полезно вкратце их рассмотреть. Кратко остановимся на нелинейных эффектах. Нелинейность, помимо появления высших гармоник, приводит к взаимодействию волн различного типа; в данном случае представляет интерес взаимодействие потенциальной и сдвиговой компонент. В [18] показано, что систему уравнений гидродинамики с учетом квадратичной нелинейности можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta p - b \frac{\partial}{\partial t} \Delta p = \nabla \left(p \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}^2 \right) + \left(\frac{\partial}{\partial t} - b \Delta \right) \left(-\nabla (p \mathbf{u}) + \frac{\gamma - 1}{\rho c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right), \quad (20)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho} \Delta \Omega = -\text{rot} \left(p \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u}^2 \right), \quad \Omega = \text{rot} \mathbf{u}. \quad (21)$$

Подставляя представление $\mathbf{u} = \nabla \phi + \text{rot} \mathbf{A}$ в правую часть (21), можно показать, что главным

членом будет “перекрестное” слагаемое вида $\eta \text{rot} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \text{rot} \Omega \right)$, пропорциональное произведению потенциальной и сдвиговой компонент. Порядок малости этого слагаемого ηM^2 , где M – число Маха. Таким образом, для слабовязких жидкостей и при малых интенсивностях правая часть (21) является величиной третьего порядка малости. Раскрывая подобным образом правую часть (20), получим, что она содержит члены, содержащие квадрат давления, квадрат полной скорости и перекрестные члены. При этом члены, содержащие квадрат давления и квадрат потенциальной компоненты скорости, оказываются в волновом синхронизме с левой частью волнового уравнения (20) и будут эффективно приводить к появлению высших гармоник. В то же время члены, содержащие квадрат сдвиговой компоненты скорости, и перекрестные слагаемые будут распространяться со скоростью, отличной от скорости c_0 в (20) и не будут попадать в условия волнового синхронизма. Тем самым, волны, вызванные этими членами в правой части не будут обладать большой амплитудой.

Таким образом, взаимодействие волн различных типов оказывается не очень эффективным и требует достаточно больших амплитуд и вязкости. При малой вязкости эффективными оказываются только нелинейные искажения, связанные с потенциальной частью акустического поля. Точное решение этой нелинейной задачи затруднительно, поскольку требует нахождения скорости волны из дисперсионного уравнения. Поэтому для приближенного описания можно использовать метод последовательных приближений, а можно применить модель модульной нелинейности [19], согласно которой слагаемое с квадратичной нелинейностью заменяется на слагаемое с модульной нелинейностью. Проведенное ранее исследование подобной задачи [20] позволяет за-

ключить, что происходит формирование ПАВ с несимметричным волновым профилем для интервалов положительной и отрицательной полярности. При этом образуются области неоднозначности, в которых необходимо провести разрыв (ударный фронт), и увеличивающиеся области с плавным профилем малой амплитуды. Таким образом, нелинейность приводит к уменьшению пиковой амплитуды за счет нелинейного затухания, уменьшению интервалов с большой амплитудой и увеличению интервалов с малой амплитудой.

СИЛЫ РАДИАЦИОННОГО ДАВЛЕНИЯ

Существует несколько механизмов возникновения радиационного давления, характерных для различных ситуаций. Наиболее известным, по-видимому, является механизм, связанный с разностью импульсов, действующих с разных сторон на взвешенный в жидкости объект [21, 22]. Однако, в работе [10] показано, что этот механизм оказывается неэффективным в качестве причины возникновения акустических течений в жидкости и движения взвешенных в ней наночастиц. Поэтому в данной работе рассматривается механизм, связанный с нелинейностью уравнений гидродинамики и действующий непосредственно на элемент объема жидкости [7, 23, 24]. Наличие нелинейных слагаемых приводит при усреднении по периоду акустической волны к появлению ненулевой силы – радиационного давления. Силы радиационного давления, в свою очередь, вызывают в жидкости акустические течения, которые могут увлекать и наночастицы при их наличии. Собственное движение наночастиц относительно жидкости быстро затухает и они перемещаются вместе с жидкостью [10].

Тензор радиационных напряжений в случае вязкой жидкости имеет вид [24]:

$$\begin{aligned} \Pi_{ik}^{\text{RAD}} = & \frac{\varepsilon}{\rho_0 c_0^2} p'^2 \delta_{ik} + \rho_0 u_i u_k + \\ & + \frac{\eta}{\rho_0 c_0^2} \frac{\partial}{\partial x_k} p' u_i + \frac{\xi + \eta/3}{\rho_0 c_0^2} \delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x_l} p' u_l. \end{aligned} \quad (22)$$

Сила радиационного давления \mathbf{F} , действующая на элемент объема жидкости, выражается через тензор Π_{ik}^{RAD} :

$$F_i = - \frac{\partial}{\partial x_k} \Pi_{ik}^{\text{RAD}}. \quad (23)$$

В выражении (22) угловые скобки означают усреднение по периоду акустической волны, ε – параметр нелинейности жидкости. Формально (22) отличается от аналогичного выражения для идеальной жидкости наличием двух последних слагаемых, пропорциональных коэффициентам

вязкости. Но даже простая оценка показывает, что в выражении (22) отношение последних двух слагаемых, например, к первому слагаемому имеет порядок $(\eta/\rho c^2)f$, что для воды составляет $\sim 10^{-12}f$. Таким образом, даже на гигагерцовых частотах два последних слагаемых составляют доли процента в общем выражении. Только для такой вязкой жидкости как глицерин на высоких частотах все слагаемые сближаются по порядку величины. В то же время существенно, что наличие вязкости приводит к появлению сдвиговых компонент акустического поля, которые вносят вклад в первые два слагаемых в выражении (22) и, тем самым, значительно влияют на пространственную структуру радиационных сил.

На рис. 9 представлены горизонтальная и вертикальная компоненты радиационной силы (в относительных единицах) с учетом одной (при толщине $H = 0.07$, рис. 9а, 9б) и двух мод ПАВ (при толщине $H = 0.3$, рис. 9в, 9г) в случае идеальной жидкости. Видно, что в одномодовом режиме вдоль оси x образуется периодическое распределение радиационной силы. При возбуждении двух мод строгая периодичность нарушается именно из-за взаимодействия мод. Вертикальная структура радиационной силы также существенно изменяется. В одномодовом режиме силы менялись вдоль вертикали преимущественно монотонно, возрастая по направлению к границе раздела, и примерно сохраняли положения экстремумов структуры вдоль горизонтальной оси. В двухмодовом режиме структура вдоль вертикали изменяется более резко и теряет монотонный характер, появляются дополнительные экстремумы пространственной структуры. Положения экстремумов силы вдоль горизонтальной оси оказываются различными на разной глубине. Все это приводит к более сложной структуре возникающих акустических течений.

В работе [11] показано, что в одномодовом режиме сдвиговые компоненты приводят к большим значениям x -компоненты радиационной силы, локализованной вблизи границы. В двухмодовом режиме пространственная структура радиационных сил с учетом вязкости представлена на рис. 10. Видно, что в этом случае вблизи границы x -компонента также достигает больших значений. Таким образом, локальные изменения амплитуды колебательной скорости, отмеченные на рис. 8, приводят к радикальному изменению структуры радиационных сил. При этом для z -компоненты эти эффекты выражены гораздо слабее. Можно заметить, что из-за затухания поля ПАВ радиационные силы увеличиваются при удалении от центра структуры, т.е. появляется сила, направленная к середине рассматриваемой системы. Таким образом, можно ожидать, что

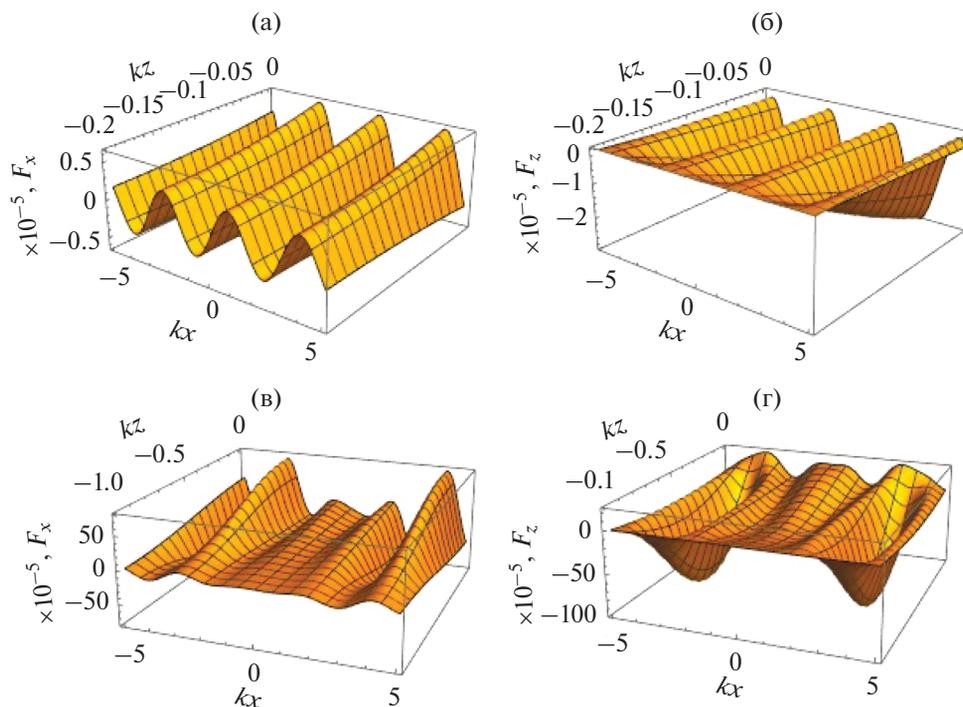


Рис. 9. Пространственное распределение радиационной силы (в относительных единицах) без учета вязкости для частоты 1 кГц: (а, б) – одномодовый режим, $h = 0.1$ м, (в, г) – двухмодовый режим, $h = 0.5$ м; (а, в) – x -компонента, (б, г) – z -компонента.

структура сил и течений в средней части системы будет обладать большей стабильностью и меньшим контрастом по сравнению с периферийными областями. Наличие второй моды еще больше усложняет картину. С одной стороны, вторая мода может помочь формировать поля с более сложным пространственным распределением, а с другой стороны, затрудняет создание строгих периодических структур, например, “простого” синусоидального типа.

При учете нелинейных искажений акустического поля согласно модели модульной нелинейности можно сделать следующие качественные выводы. Нелинейные искажения профиля волны приведут к изменению и, скорее всего, уменьшению действующей радиационной силы, а ее пространственное распределение будет характеризоваться увеличением областей с малыми значениями радиационной силы, где возможно почти равновесное поведение жидкости. С другой стороны, вблизи разрывов во временном профиле радиационные силы будут возрастать, обеспечивая быстрое течение жидкости в этих областях.

АКУСТИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ

Наличие ненулевой усредненной радиационной силы приводит к формированию в жидком

слое акустических течений. Их структура при малых гидродинамических числах Рейнольдса рассчитывается на основе системы уравнений в приближении несжимаемой жидкости [18]:

$$-\eta \Delta \mathbf{U}_T = -\nabla P + \mathbf{F}, \quad \text{div} \mathbf{U}_T = 0. \quad (24)$$

Здесь \mathbf{U}_T – скорость акустического течения, P – давление потока. Применяя к этому уравнению операцию rot , получим следующее уравнение для функции тока ψ :

$$\Delta(\eta \Delta \psi + V) = 0, \quad U_{mx} = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad U_{tz} = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (25)$$

Здесь V – единственная отличная от нуля компонента векторного потенциала \mathbf{V} радиационной силы ($\mathbf{F} = \text{rot} \mathbf{V} + \nabla S$). В случае идеальной жидкости сила радиационного давления \mathbf{F} оказывалась потенциальной, что значительно упрощало расчеты. В частности, при $V = 0$ уравнение (25) оказывалось бигармоническим, что позволяло построить его аналитическое решение. При этом акустические течения возникали за счет неоднородных условий на границах жидкого слоя. При учете вязкости радиационная сила содержит как потенциальную, так и вихревую компоненты. В этом случае уравнение (25) решалось путем его разбиения на систему уравнений Пуассона, при этом появлялась дополнительная гармоническая функция $\tilde{\psi}$:

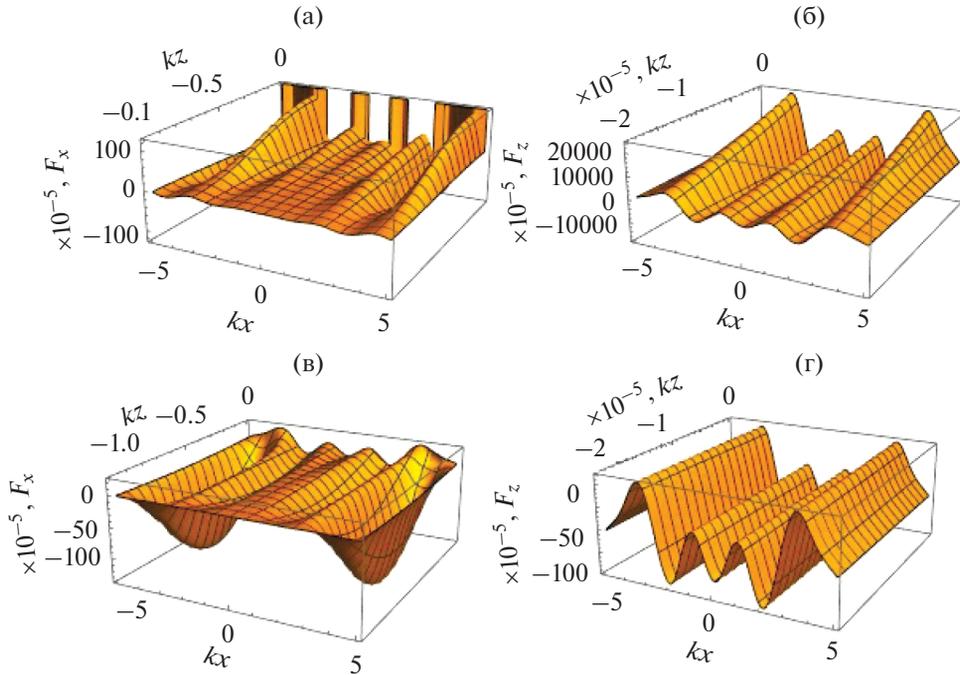


Рис. 10. Пространственное распределение радиационной силы (в относительных единицах) в двухмодовом режиме с учетом вязкости для частоты 1 кГц: (а) – x -компонента, $-1 \leq kz \leq 0$, (б) – x -компонента, $-0.00002 \leq kz \leq 0$, (в) – z -компонента, $-1 \leq kz \leq 0$, (г) – z -компонента, $-0.00002 \leq kz \leq 0$.

$$\eta \Delta \psi = -V + \tilde{\psi}, \quad \Delta \tilde{\psi} = 0, \quad \Delta V = -\text{rot } F. \quad (26)$$

Уравнения (26) должны быть дополнены граничными условиями – условиями отсутствия вертикального потока на границах жидкого слоя и горизонтального потока на границе раздела сред, равенства нулю давления потока на свободной поверхности. Для проведения численных расчетов в ограниченной по горизонтальной оси области добавлялись условия периодичности, обусловленные симметрией задачи. Для замыкания набора граничных условий использовались также результаты решенной задачи для случая отсутствия вязкости [10], применимые при малой вязкости. В частности, при отсутствии вязкости функция тока в геометрии рис. 1 равна нулю в точках с координатами $2kx = \pi n$, где n – целое число. Наличие малой вязкости не должно изменить период пространственного распределения. Это позволяет сформулировать граничные условия при некоторых x , выбрав конечное число целых периодов поля. Для получения граничных условий для функции проинтегрируем первое уравнение (26) по z и используем z -проекцию первого уравнения (24). В итоге получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + F_x + \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (27)$$

Теперь воспользуемся тем фактом, что в отсутствие вязкости [10] $P = 0$ и $\partial P / \partial x = 0$ при $z = -h$. Тогда первое слагаемое в правой части (27) можно считать равным нулю и при наличии вязкости, поскольку распределение давления не связано с вихревыми движениями. Величина $F_x + \frac{\partial V}{\partial z}$ в (27) представляет собой фактически потенциальную часть радиационной силы при наличии вязкости. Для качественного анализа при малой вязкости эту величину можно приближенно считать равной ее значению в отсутствие вязкости. В итоге получаем следующий набор граничных условий:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{z=-h} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{z=0} = 0, & \psi \Big|_{x=2\pi/k} &= \psi \Big|_{x=-2\pi/k} = 0, \\ \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} \Big|_{z=-h} &= 0, \tilde{\psi} \Big|_{z=-h} &= 0, & \tilde{\psi} \Big|_{x=2\pi/k} &= \tilde{\psi} \Big|_{x=-2\pi/k} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=-h} &= \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0} &= -F_x + \frac{\partial S}{\partial x}, \\ \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=\frac{2\pi}{k}} &= \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=-\frac{2\pi}{k}} &= F_z + \frac{\partial S}{\partial z}. \end{aligned}$$

На рис. 11 приведены линии тока для акустического течения в слое воды в одномодовом режиме без учета вязкости (рис. 11а) и с учетом вязкости (рис. 11б). На рис. 11в приведены линии тока

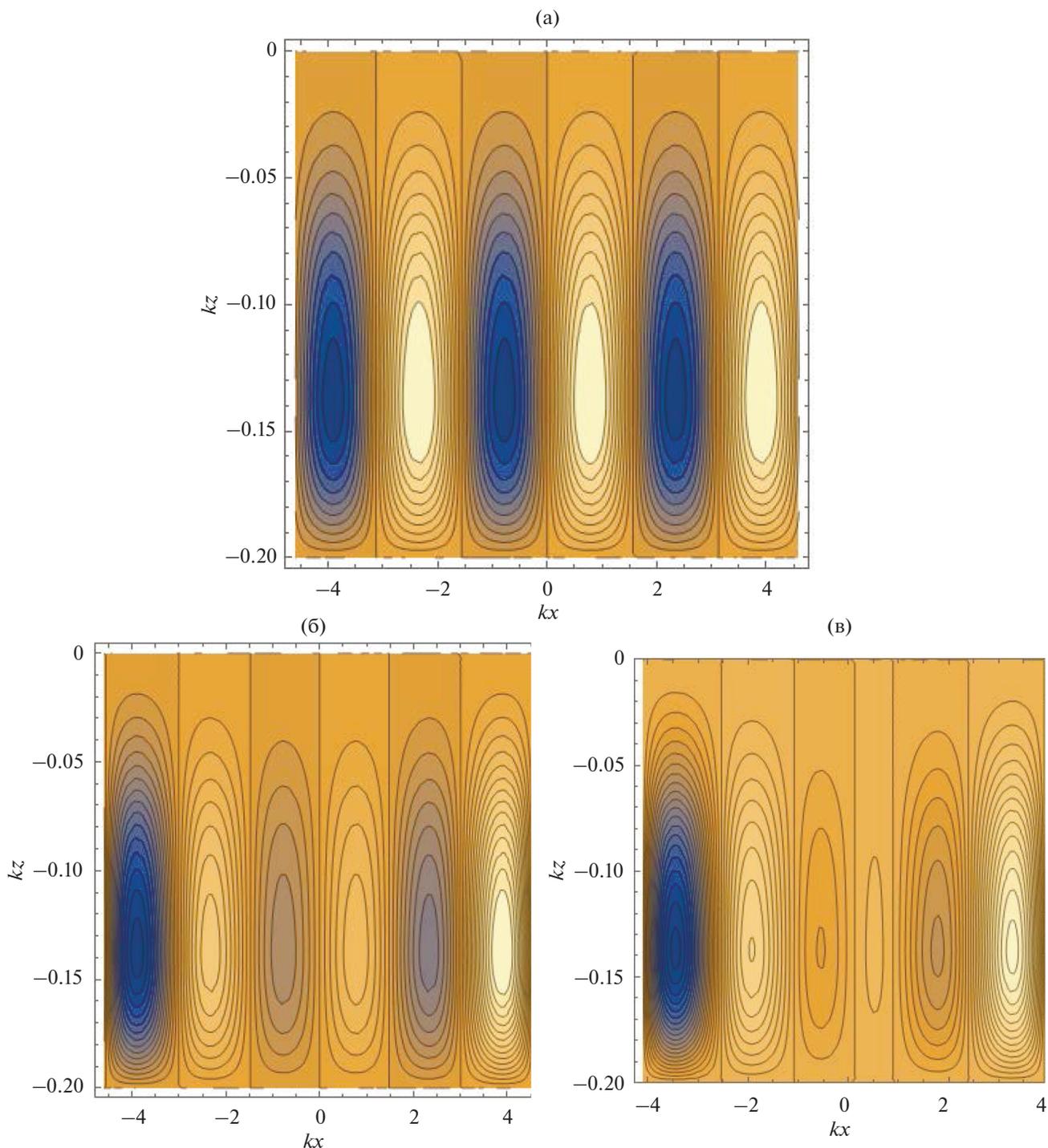


Рис. 11. Линии тока акустического течения для частоты 1 кГц: (а) – без учета вязкости для воды, (б) – с учетом вязкости для воды, (в) – с учетом вязкости для глицерина при $\gamma = 0.05 \text{ м}^{-1}$.

для глицерина, коэффициент вязкости которого взят для наглядности в 100 раз больше, чем у воды. При построении рис. 11б и 11в заданное значение $\gamma = 0.05 \text{ м}^{-1}$ намеренно увеличено относительно расчетного значения для рассматриваемых

сред для демонстрации роли затухания; толщина слоя $H = 0.07$. Видно, что линии тока гуще расположены в окрестностях линий $2kx = \pi l$. При этом из-за наличия затухания при приближении к точке $x = 0$ площадь контуров уменьшается

ется. Как показано выше, при учете вязкости x -компонента радиационной силы сильно возрастает вблизи границы раздела сред. Это приводит к заметной деформации контуров и изменению густоты линий тока. С увеличением вязкости из-за возрастания роли сдвиговых компонент структура течений теряет симметричность. Таким образом, вязкость жидкости приводит к нарушению строгой периодичности акустических течений в слое.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассчитаны с учетом вязкости дисперсионные и амплитудные характеристики поверхностной волны в двух системах: вязкое жидкое полупространство и слой вязкой жидкости, граничащие с твердым полупространством. В последнем случае была учтена вторая волновая мода. Для слоя также были рассчитаны радиационные силы, действующие на элемент объема жидкости и создаваемые ими акустические течения. Показано, что вязкость и вторая мода приводят к значимым изменениям пространственной структуры радиационных сил акустических течений. Как и в одномодовом режиме, дополнительная радиационная сила, обусловленная сдвиговыми компонентами акустического поля в жидкости, сосредоточена в узком слое вблизи границы раздела сред, а вторая мода нарушает строгое периодическое распределение силы.

Применительно к задачам формирования упорядоченных структур при самосборке взвешенных ансамблей наночастиц результаты данной работы позволяют сделать следующие выводы. Для слабвязких сред наподобие воды дисперсионные зависимости скорости волн от частоты и толщины слоя очень близки к зависимостям для идеальной среды. Тем самым, длина волны и период радиационных сил практически не изменяются. Однако в приграничном слое даже для слабвязких жидкостей возникают значительные силы радиационного давления, связанные со сдвиговыми компонентами поля в жидкости. Поскольку именно в этой области происходит формирование упорядоченных структур, учет сдвиговых компонент оказывается необходимым для корректного расчета параметров получаемой структуры. Кроме того, вязкость приводит к нарушению строгой периодичности полей, характерной для случая идеальной жидкости. Генерация высших мод в толстом слое жидкости также приводит к формированию сложного распределения поля радиационных сил. Хотя эти эффекты препятствуют формированию строго периодических структур, тем не менее, они расширяют возможности управления акустическим полем и могут

способствовать созданию структур с более сложным рельефом и новыми свойствами. Необходимо также подчеркнуть, что в случае взвесей и растворов с большой концентрацией и, соответственно, большой эффективной вязкостью роль этих эффектов значительно возрастает. Таким образом, именно в задачах формирования упорядоченных структур из ансамблей взвешенных наночастиц вязкость и сдвиговые компоненты поля в жидкости должны быть учтены.

Качественный анализ эффектов нелинейного искажения временных профилей ПАВ показывает, что при увеличении амплитуды должны увеличиваться области с малыми значениями радиационной силы, но в областях разрывов во временном фронте радиационные силы будут значительно возрастать. Таким образом, области сборки наночастиц могут увеличиваться, но при этом эти области будут разделены сильноконтрастными областями, из которых наночастицы будут выносятся радиационными силами.

Работа поддержана грантом РФФИ № 20-02-00493.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крохмаль А.А., Крохмаль Н.Е., Сапожников О.А. Расчет акустической ловушки для упругого сферического рассеивателя большого волнового размера // Известия Росс. Акад. наук. Сер. физ. 2022. Т. 86. № 2. С. 257–262.
2. Wixforth A. Acoustically driven planar microfluidics // Superlattices and Microstructures. 2003. V. 33. P. 389–396.
3. Лебедев-Степанов П.В., Руденко О.В. О затухании звука в жидкости, содержащей взвешенные частицы микро- и нанометровых размеров // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 6. С. 706–711.
4. Суханов Д.Я., Росляков С.Н., Емельянов Ф.С. Левитация и управление упорядоченной группой частиц и прямолинейных структур в ультразвуковом поле // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 2. С. 154–162.
5. Li J., Liu C.J., Zhang W.J. Pressure potential and stability analysis in an acoustical noncontact transportation // Acoust. Phys. 2017. V. 63. № 1. P. 125–131.
6. Sarvazyan A.P., Rudenko O.V., Fatemi M. Acoustic radiation force: A review of four mechanisms for biomedical applications // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control. 2021. V. 68. № 11. P. 3261–3269. <https://doi.org/10.1109/TUFFC.2021.3112505>
7. Жвания И.А., Конопацкая И.И., Миронов М.А., Пятаков П.А. Акустическое течение, возбуждаемое фокусированным ультразвуком // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 3. С. 244–249.
8. Rudenko O.V., Lebedev-Stepanov P.V., Gusev V.A., Korobov A.I., Korshak B.A., Odina N.I., Izosimova M.Yu., Molchanov S.P., Alfimov M.V. Control of the self-assembly processes in a droplet of a colloidal solution by an acoustic field // Acoust. Phys. 2010. V. 56. № 6. P. 935–941.

9. Макалкин Д.И., Коршаков Б.А., Брысев А.П. Экспериментальное наблюдение структурирования эритроцитов крови в поле стоячих поверхностных акустических волн // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 5. С. 553–559.
10. Гусев В.А., Руденко О.В. Поля радиационных сил и акустические течения в жидком слое на твердом полупространстве // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 2. С. 166–181.
11. Гусев В.А., Жарков Д.А. Поля радиационных сил в слое вязкой жидкости // Изв. Росс. Акад. наук. Сер. физ. 2021. Т. 85. № 6. С. 804–810.
12. Бадмаев Б.Б., Дамдинов Б.Б., Дембелова Т.С. Вязкоупругая релаксация в жидкостях // Известия Росс. Акад. наук. Сер. физ. 2015. Т. 79. № 10. С. 1461–1466.
13. Макарова Д.Н., Дембелова Т.С., Бадмаев Б.Б. Низкочастотная сдвиговая упругость коллоидной суспензии наночастиц // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 6. С. 610.
14. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 288 с.
15. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 403 с.
16. Gusev V.A., Simonova P.A. Effect of shear components of the acoustic field in the viscous liquid on the structure of the Stonley wave at the interface between the liquid and elastic half-spaces // Physics of Wave Phenomena. 2015. V. 23. № 4. P. 268–272.
17. Волькенштейн М.М., Левин В.М. Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 4. С. 608–615.
18. Руденко О.В., Солюян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
19. Васильева О.А., Руденко О.В. Модульные “солитоны”: взаимное поглощение и аннигиляция в диссипативных средах // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 3. С. 258–264.
20. Гусев В.А. Трансформация акустических волн в слоистых средах с модульной нелинейностью // Труды Всероссийской акустической конференции. СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2020. С. 101–105.
21. Горьков Л.П. О силах, действующих на малую частицу в акустическом поле в идеальной жидкости // Докл. Акад. наук СССР. 1961. Т. 140. В. 1. С. 88.
22. Гольдберг З.А. Давление звука. В книге: Мощные ультразвуковые поля. Т. 2. Под ред. Розенберга Л.Д. М.: Наука, 1968. С. 49.
23. Гусев В.Э., Руденко О.В. Нестационарные квазиодномерные акустические течения в неограниченных объемах с учетом гидродинамической нелинейности // Акуст. журн. 1979. Т. 25. № 6. С. 875–881.
24. Руденко О.В. Радиационные силы и акустические течения // В кн. Нелинейные проблемы теории колебаний и теории управления. Вибрационная механика. СПб.: Наука, 2009. С. 402–422.

ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ПЛЕНКИ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ АКУСТИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА С РАДИАЛЬНЫМ ВОЗБУЖДАЮЩИМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

© 2022 г. А. А. Теплых^а, *, Б. Д. Зайцев^а, А. П. Семёнов^а, И. А. Бородина^а

^аСаратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
ул. Зеленая 38, Саратов, 410019 Россия

*e-mail: teplykhaa@mail.ru

Поступила в редакцию 19.04.2022 г.

После доработки 01.07.2022 г.

Принята к публикации 05.07.2022 г.

Приведены результаты исследования влияния электрической проводимости тонкой пленки, нанесенной на торец резонатора с радиальным возбуждающим электрическим полем или находящейся в непосредственной близости от него, на характеристики резонатора. Рассмотрено три ситуации: проводящая пленка отсутствует, пленка нанесена непосредственно на торец резонатора и пленка находится на небольшом расстоянии от свободного торца резонатора. Во всех трех случаях рассчитан и измерен электрический импеданс резонатора в широком частотном диапазоне 1–1500 кГц. Впервые проведено уточнение материальных констант пьезокерамики для свободного и закороченного резонатора и показано, что эти константы совпадают между собой с хорошей точностью. Показано, что уменьшение толщины резонатора и увеличение зазора между электродами увеличивает его чувствительность к присутствию проводящей пленки на небольшом расстоянии от торца резонатора.

Ключевые слова: акустический резонатор, радиальное возбуждающее поле, проводимость пленок, электрический импеданс, широкополосная акустическая спектроскопия

DOI: 10.31857/S0320791922060132

ВВЕДЕНИЕ

Ранее исследователи рассматривали различные резонаторы с кольцевыми электродами [1–3], цилиндрические пьезокерамические резонаторы [4], а также кольцевой волноводный резонатор на поверхностных акустических волнах (ПАВ) [5]. Недавно в наших работах [6–8] был представлен новый тип пьезокерамического акустического резонатора: круглый резонатор с радиальным возбуждающим электрическим полем. Важным преимуществом резонаторов этого типа является их чувствительность к электрическим граничным условиям на свободном торце пьезорезонатора. Это позволяет создать разнообразные датчики, работа которых основана на изменении электрических характеристик пленки под воздействием некоторого фактора. Изменение этих характеристик (например, электрической проводимости) приводит к изменению резонансных частот резонатора. Возможно и решение обратной задачи: определение электропроводности пленки по изменению резонансных частот резонатора методом широкополосной акустической спектроскопии [7]. Измерения для этого проводятся в два

этапа. На первом этапе измеряется электрический импеданс свободного акустического резонатора без пленки (рис. 1а) в достаточно широком частотном диапазоне. Это позволяет уточнить акустические свойства самого резонатора. На втором этапе исследуемая пленка наносится на поверхность резонатора (рис. 1б), и измерение электрического импеданса повторяется в том же самом частотном диапазоне. По изменению измеренных значений резонансных частот и величины резонансных пиков можно судить об электрических свойствах нанесенной пленки. Однако сформировать проводящую пленку непосредственно на поверхности пьезокерамики не всегда возможно. Например, напыление пленки диоксида олова на поверхность образца сопровождается его сильным нагревом, при этом наведенный пьезоэффект в пьезокерамике ослабевает и резонатор теряет свои свойства. Такую пленку можно нанести на плоскую стеклянную подложку, а затем расположить ее в непосредственной близости от резонатора (рис. 1в).

Поэтому целью данной работы была проверка влияния тонкой пленки с конечной электриче-

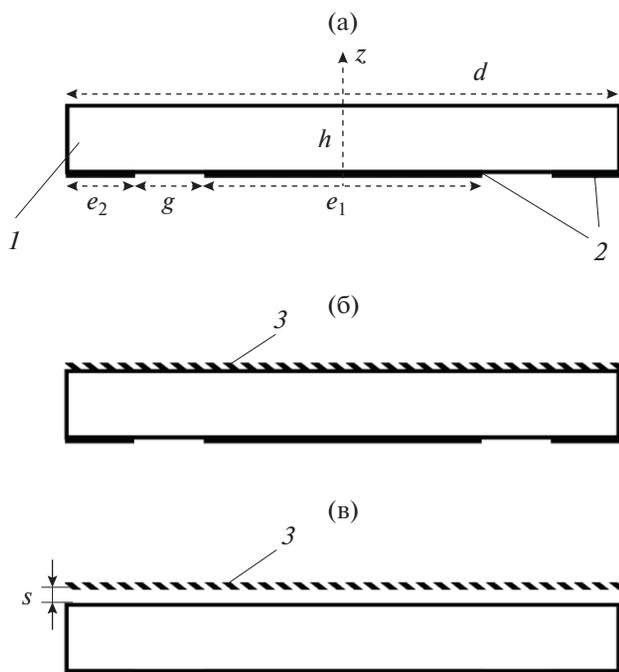


Рис. 1. Геометрия задачи. (а) – Свободный резонатор (вид сбоку), (б) – резонатор с проводящей пленкой на поверхности, (в) – резонатор с проводящей пленкой вблизи поверхности. 1 – пьезокерамика, 2 – электроды, 3 – проводящая пленка.

ской проводимостью, расположенной непосредственно на торце резонатора и на некотором небольшом расстоянии от нее, на характеристики резонатора. Для этого была создана математическая модель резонатора с радиальным возбуждающим полем и проведены расчеты его электрического импеданса при отсутствии и наличии проводящей пленки на его поверхности и вблизи от нее. Выводы теории были проверены экспериментально.

МОДЕЛЬ ДИСКОВОГО ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА С РАДИАЛЬНЫМ ВОЗБУЖДАЮЩИМ ПОЛЕМ

Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях круглого пьезокерамического диска, возбуждаемого парой концентрических электродов, расположенных на одной стороне диска. Диск диаметром d и толщиной h изготовлен из пьезокерамики, принадлежащей к кристаллографическому классу 6mm. Ось поляризации керамики параллельна оси диска z . Металлические электроды шириной e_1 и e_2 располагаются на нижней стороне диска, зазор между электродами составляет g . Исследуемая проводящая пленка может располагаться непосредственно на верхней стороне диска или на расстоянии s от его по-

верхности. Предполагается, что пленка имеет нулевую толщину, не создает массовую нагрузку на резонатор и обладает определенной поверхностной проводимостью σ . Необходимо найти распределение акустического поля внутри диска, а также распределение электрического поля внутри диска и в зазоре между диском и проводящей пленкой. В такой постановке задача является осесимметричной и двумерной (в координатах r и z). Искомое решение может быть записано в виде:

$$\left. \begin{aligned} u_r &= u_r(r, z) \exp(I\omega t) \\ u_z &= u_z(r, z) \exp(I\omega t) \\ \varphi &= \varphi(r, z) \exp(I\omega t) \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где u_r , u_z – радиальная и аксиальная компоненты механического смещения, φ – электрический потенциал, I – мнимая единица, ω – круговая частота, t – время. Таким образом, в задаче необходимо учитывать только четыре компоненты деформации S и две компоненты электрического поля E .

В рассматриваемом двумерном осесимметричном случае из тензоров материальных констант могут быть удалены некоторые строки и столбцы, и соответствующие тензоры могут быть записаны в виде [9, 10]:

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix}, \quad [e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}.$$

Материал резонатора полностью характеризуется пятью модулями упругости c_{11} , c_{12} , c_{13} , c_{33} , c_{44} , тремя пьезоэлектрическими модулями e_{15} , e_{31} , e_{33} , двумя модулями диэлектрической проницаемости ε_{11} , ε_{33} , и плотностью ρ .

На оси диска задано механическое граничное условие:

$$u_r = 0 \Big|_{r=0}. \quad (3)$$

На нижней стороне диска на электродах явно задано значение электрического потенциала:

$$\varphi = +V \Big|_{e_1}, \quad \varphi = -V \Big|_{e_2}. \quad (4)$$

Остальная поверхность диска, за исключением верхней стороны, механически и электрически свободна.

Для верхней стороны диска рассмотрены три случая. В первом случае верхняя сторона диска также механически и электрически свободна, на ней действуют такие же граничные условия, как на остальной свободной части поверхности. Во втором случае на верхней стороне диска находят-

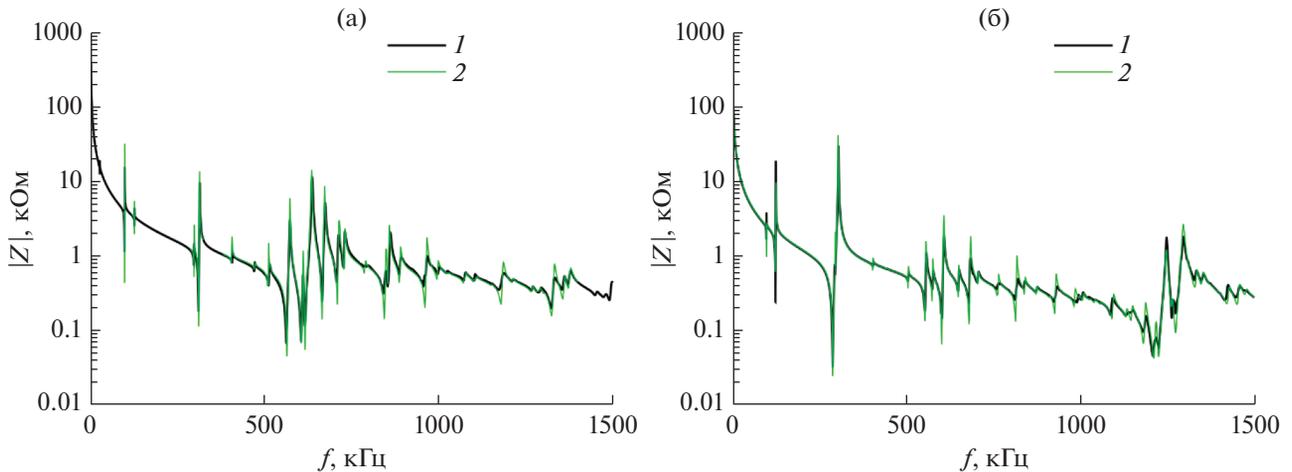


Рис. 2. Частотные зависимости модуля электрического импеданса для “резонатора 1”: (а) – свободный резонатор, (б) – закороченный резонатор. Кривая 1 – эксперимент, 2 – расчет.

ся пленка с конечной поверхностной проводимостью σ , которая описывается электрическим граничным условием [11]:

$$D_z = -\frac{\sigma}{I\omega} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \Big|_{z=h/2}, \quad (5)$$

где D_z – аксиальная компонента электрической индукции. В третьем случае эта проводящая пленка отделена от верхней стороны диска слоем вакуума с диэлектрической проницаемостью ϵ_0 и шириной s .

Решение данных задач методом конечных элементов позволяет вычислить электрический импеданс свободного или закороченного резонатора для заданной частоты с учетом известных материальных констант пьезокерамики резонатора. Решение обратной задачи позволяет уточнить материальные константы пьезокерамики, из которой изготовлен диск резонатора и другие параметры модели: ширину зазора s и проводимость пленки σ .

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ИЗМЕРЕНИЙ ДЛЯ ДИСКОВОГО РЕЗОНАТОРА С РАДИАЛЬНЫМ ВОЗБУЖДАЮЩИМ ПОЛЕМ ИЗ ПЬЕЗОКЕРАМИКИ ЦТБС-3

В работе проводились эксперименты над круглым резонатором из пьезокерамики типа ЦТБС-3 диаметром $d = 22$ мм, толщиной $h = 2$ мм. На нижней стороне резонатора были нанесены возбуждающие электроды из алюминия, диаметр внутреннего электрода $e_1 = 8$ мм, зазор между электродами $g = 1$ мм. Резонатор с такими размерами и конфигурацией электродов был назван “резонатор 1”. Для данного резонатора были экспериментально исследованы три ситуации, показанные на рис. 1. В первом эксперименте верхний торец

диска был свободен. При помощи анализатора импеданса Keysight E4990a измерялись зависимости реальной и мнимой частей электрического импеданса данного резонатора от частоты f в диапазоне 1–1500 кГц (рис. 2а). Затем на верхний торец диска был нанесен сплошной алюминиевый электрод, покрывающий всю поверхность диска, и измерения были повторены (рис. 2б). Характер резонансной кривой при закорачивании верхнего торца сильно изменился. Материальные константы образца пьезокерамики ЦТБС-3, определенные по частотной зависимости электрического импеданса для свободного и закороченного резонатора путем решения обратной задачи при помощи метода, описанного в [6–8], оказались близки. Их значения показаны в табл. 1. Плотность образца пьезокерамики была измерена непосредственно: $\rho = 7285$ кг/м³. Исходные значения остальных материальных констант были взяты из [12].

В ходе третьего эксперимента сплошной электрод был удален с верхней стороны диска и нанесен на стеклянную подложку толщиной 1 мм. Подложка была расположена непосредственно на верхней стороне диска, пленкой вниз, т.е. проводящая алюминиевая пленка прилегала к верхнему торцу резонатора. Несмотря на это, частотные зависимости практически не отличались от результатов первого эксперимента со свободным резонатором. Это объясняется тем, что диэлектрическая проницаемость используемой керамики на 3 порядка больше диэлектрической проницаемости воздуха, поэтому изменение электрического поля вне резонатора очень слабо влияет на поле внутри резонатора. Таким образом, показано, что использованная конфигурация резонатора (толщина $h = \sim 2$ мм, зазор между электродами $g = \sim 1$ мм) практически не чувствительна к при-

Таблица 1. Результат уточнения материальных констант для свободного и закороченного резонатора из пьезокерамики ЦТБС-3

Материальная константа	Исходное значение	Свободный резонатор	Закороченный резонатор
$c_{11}, \times 10^{10}$ Па	15.1	15.20	15.35
$c_{12}, \times 10^{10}$ Па	7.9	8.42	8.58
$c_{13}, \times 10^{10}$ Па	8.0	8.56	8.68
$c_{33}, \times 10^{10}$ Па	13.6	13.51	13.59
$c_{44}, \times 10^{10}$ Па	2.9	2.79	2.81
e_{15} , Кл/м ²	15.4	15.22	14.78
e_{31} , Кл/м ²	-7.9	-5.86	-5.88
e_{33} , Кл/м ²	17.7	19.55	18.92
ϵ_{11}/ϵ_0	1610	1561	1428
ϵ_{33}/ϵ_0	1280	1263	1225

сутствию проводящего слоя вблизи его поверхности. Изменение характеристической резонансной частоты при появлении проводящей плоскости на расстоянии $s = 10$ мкм от свободного торца не превышает 3 кГц. Это объясняется тем, что при большой толщине резонатора и малом зазоре практически все электрическое поле сконцентрировано вблизи зазора внутри пьезорезонатора.

Однако, при уменьшении толщины резонатора h и увеличении зазора g между электродами его чувствительность к присутствию проводящей пленки вблизи торца резонатора увеличивается. Чтобы показать это, был проведен ряд расчетов по влиянию пленки с конечной проводимостью, находящейся на некотором расстоянии от торца резонатора, на его характеристики. Поверхностная проводимость пленки σ менялась от 0 до 10^3 См. От-

дельно был рассмотрен случай “идеально проводящего” слоя (т.е. $\sigma = \infty$), который был смоделирован через условие плавающего электрического потенциала на слое. Зазор s между слоем и торцом резонатора менялся от 1 до 100 мкм. Акустического контакта между слоем и материалом резонатора не было, т.е. механические свойства слоя не учитывались. Зависимость резонансных частот для наиболее чувствительной к наличию проводящей плоскости моды резонатора от толщины резонатора показана на рис. 3. Как видно, уменьшение толщины резонатора в 2 раза вызывает увеличение изменения резонансной частоты более чем в 10 раз. Расчеты проведены для случая $s = 10$ мкм, $\sigma = \infty$.

Исходя из технологических ограничений была выбрана конфигурация $h = 900$ мкм, $e_1 = 3$ мм, $g = 8$ мм, которая обеспечивает изменение характеристической резонансной частоты 80 кГц при зазоре $s = 10$ мкм между торцом и проводящей плоскостью. Данная конфигурация была названа “резонатор 2” и проверена экспериментально. Был создан новый пьезорезонатор из образца ЦТБС-3. Путем механического шлифования торцов его толщина была уменьшена до $h = \sim 880$ мкм, при помощи новой маски были сформированы электроды с $e_1 = 3$ мм, $e_2 = 19$ мм. Затем было проведено два измерения электрического импеданса резонатора: стеклянная подложка свободно лежала на торце резонатора алюминиевой пленкой вверх (т.е. расстояние между пьезокерамикой и алюминием составляло 1 мм, рис. 4а) и алюминиевой пленкой вниз (расстояние между пьезокерамикой и алюминием минимально, рис. 4б). Первый эксперимент показал, что массовая нагрузка от стеклянной подложки незначительна (изменение резонансных частот не превысило 1 кГц), второй эксперимент позволил оценить зазор s между

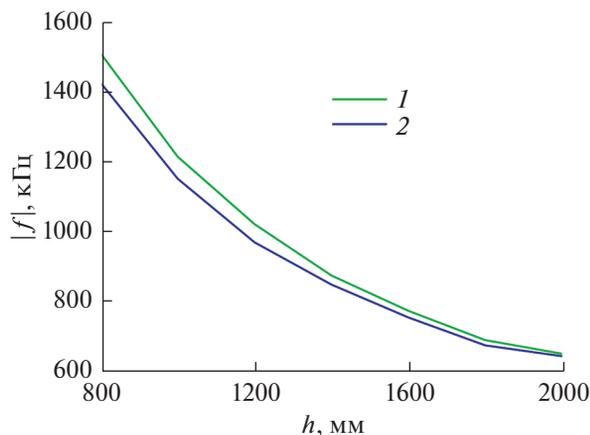


Рис. 3. Зависимость резонансной частоты для одной из мод резонатора от толщины резонатора. Кривая 1 – свободный резонатор, 2 – закороченный резонатор.

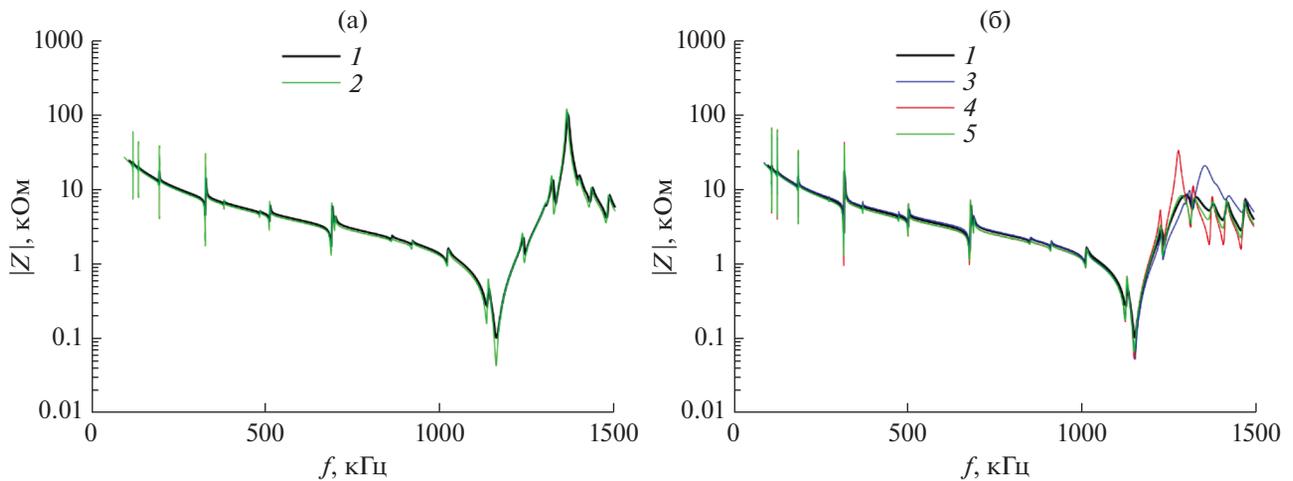


Рис. 4. Частотные зависимости модуля электрического импеданса для “резонатора 2”, накрытого стеклянной подложкой: (а) – резонатор с подложкой пленкой вверх, (б) – резонатор с подложкой пленкой вниз. Кривая 1 – эксперимент, 2 – расчет для $\sigma = 10^{-9}$ См, 3 – расчет для $\sigma = 10^{-5}$ См, 4 – расчет для $\sigma = 10^{-3}$ См, 5 – расчет для $\sigma = 10^{-4}$ См.

алюминиевой пленкой и резонатором. Значение $s = 10$ мкм дало наилучшее согласие между теорией и экспериментом. Затем на новую стеклянную подложку была напылена пленка диоксида олова при различных концентрациях кислорода. Поверхностная проводимость одного образца оказалась слишком мала ($\sigma < 10^{-6}$ См), проводимость четырех других образцов оказалась порядка $\sigma = 10^{-4}$ См, что позволило определить эту проводимость методом резонансной акустической спектроскопии (рис. 4б, кривая 5) путем сравнения эксперимента и расчетов для различных значений σ .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовано влияние тонкой пленки с конечной проводимостью на характеристики резонатора с радиальным возбуждающим полем из пьезокерамики ЦТБС-3. Теоретически и экспериментально показано, что нанесение хорошо проводящей пленки непосредственно на верхний торец резонатора или его закорачивание вызывает сильное изменение частотных зависимостей электрического импеданса резонатора, в то время как при существовании минимального зазора между свободным торцом и проводящей поверхностью изменение частотных зависимостей значительно слабее. При этом показано, что уменьшение толщины резонатора и увеличение зазора между электродами приводит к существенному увеличению чувствительности резонатора к присутствию проводящей поверхности вблизи свободного торца резонатора. Проведено уточнение материальных констант образца пьезокерамики ЦТБС-3 для электрически свободного и закороченного резонатора. Показано, что массовая на-

грузка, создаваемая стеклянной подложкой толщиной 1 мм, не оказывает заметного влияния на характеристики резонатора. Дана оценка проводимости пленки диоксида олова, нанесенной на стеклянную подложку, по изменению частотных зависимостей электрического импеданса резонатора при приближении пленки к свободной поверхности резонатора.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках государственного задания № 1021032425796-4-1.3.7; 1.3.2 и РФФИ (грант № 20-07-00602 а)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zhu F., Li P., Dai X., Qian Zh., Kuznetsova I., Kolesov V., Ma T.* A Theoretical model for analyzing the thickness-shear vibration of a circular quartz crystal plate with multiple concentric ring electrodes // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.* 2021. V. 68. № 5. P. 1808–1818.
2. *Zhu F., Wang B., Dai X.-Y., Qian Zh., Kuznetsova I., Kolesov V., Huang B.* Vibration optimization of an infinite circular AT-cut quartz resonator with ring electrodes // *Applied Mathematical Modelling.* 2019. V. 72. P. 217–229.
3. *Liu J., Du J., Wang J., Yang J.* Thin film bulk acoustic wave piezoelectric resonators with circular ring driving electrodes for mass sensing // *Integrated Ferroelectrics.* 2018. V. 192. № 1. P. 57–66.
4. *Козабаранов Р.В., Борисенко В.А., Диденкулов И.Н., Буркацкий А.С., Егоров А.С., Литвинов Д.А., Чернов В.В.* Пьезокерамический резонатор для исследования сонолюминесценции // *Акуст. журн.* 2020. Т. 66. № 3. С. 278–283.

5. *Biryukov S.V., Martin G., Weihnacht M.* Ring waveguide resonator on surface acoustic waves // *Appl. Phys. Lett.* 2007. V. 90. № 17. P. 173503.
6. *Теплых А., Зайцев В., Семенов А., Бородин И.* The radial electric field excited circular disk piezoceramic acoustic resonator and its properties // *Sensors.* 2021. V. 21. P. 608.
7. *Теплых А.А., Зайцев Б.Д., Семенов А.П., Бородин И.А.* Акустический резонатор с радиальным возбуждающим электрическим полем // *Известия РАН. Серия физическая.* 2021. Т. 85. № 6. С. 869–874.
8. *Теплых А.А., Зайцев Б.Д., Шихабудинов А.М., Бородин И.А.* Уточнение материальных констант пьезокерамики ЦТС-19 при помощи акустического резонатора в виде диска // *Ученые записки физического факультета МГУ.* 2017. Т. 5. Art. № 1751312.
9. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
10. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
11. *Auld В.А.* Acoustic fields and waves in solids. V. 2. Wiley: New York, 1973.
12. *Пугачев С.И.* Пьезокерамические преобразователи. Методы измерения и расчет параметров. Справочник. Ленинград: Судостроение, 1984. 256 с.

УДК 548:53,534.22

СИНТЕЗ ПОЛОСОВЫХ ФИЛЬТРОВ НА ОБЪЕМНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ С УЧЕТОМ МАТЕРИАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ МНОГОСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЫ РЕЗОНАТОРОВ

© 2022 г. П. А. Туральчук^а, *, И. Б. Вендик^а^аСанкт-Петербургский государственный электротехнический университет “ЛЭТИ”,
ул. Профессора Попова 5, Санкт-Петербург, 197376 Россия

*e-mail: paturalchuk@etu.ru

Поступила в редакцию 09.11.2021 г.

После доработки 28.04.2022 г.

Принята к публикации 26.05.2022 г.

Предложена методика синтеза полоснопропускающих фильтров (ППФ) с Чебышевской характеристикой на основе резонаторов на объемных акустических волнах с учетом влияния электромеханических параметров всех слоев многослойной структуры резонаторов. Классический синтез фильтра-прототипа, расширенный введением дополнительных реактивных элементов, позволяет сформировать требования к частотным свойствам резонаторов в составе ППФ с тем, чтобы получить равномерный уровень пульсаций в полосе пропускания. Методика дополнена использованием аналитической модели входного импеданса резонаторов на объемных акустических волнах, которая учитывает электроакустические параметры структуры, извлекаемые из результатов экспериментального исследования тестовых резонаторов. В работе представлены результаты синтеза полоснопропускающего фильтра третьего порядка на объемных акустических резонаторах, реализованных по типу многослойной структуры с акустической изоляцией от подложки.

Ключевые слова: акустоэлектроника, тонкопленочные СВЧ-резонаторы, СВЧ-фильтры, нитрид алюминия, объемные акустические волны

DOI: 10.31857/S0320791922050124

ВВЕДЕНИЕ

Ключевым элементом современных систем телекоммуникаций являются пассивные СВЧ-фильтры и дуплексеры, в задачи которых входит частотное разделение каналов с минимальным уровнем потерь в полосе пропускания и высоким уровнем запираания в полосе запираания [1, 2]. Интерес к устройствам на объемных акустических волнах обусловлен такими преимуществами, как высокая добротность, миниатюрные размеры, низкая себестоимость и высокая степень интеграции в составе устройств, выполненных с использованием существующих интегральных технологий [3, 4]. Кроме традиционно используемых в составе тонкопленочных резонаторов пьезоэлектрических пленок на основе оксида цинка ZnO или нитрида алюминия AlN исследуются перспективные материалы и структуры на их основе [5, 6].

Частотные характеристики модуля коэффициента передачи полоснопропускающих фильтров (ППФ) на основе резонаторов на объемных акустических волнах (ОАР) имеют симметричные нули относительно полосы пропускания, которые обусловлены частотными свойствами аку-

стических резонаторов. Частотная зависимость входного электрического импеданса ОАР характеризуется наличием двух резонансов: резонанса и антирезонанса. В случае, если потерями в резонаторе можно пренебречь, резонанс и антирезонанс соответствуют полюсу и нулю входного электрического импеданса. Синтез ППФ на ОАР заключается в нахождении положения нулей и полюсов характеристики передачи с тем, чтобы получить наименьший уровень пульсаций коэффициента отражения в полосе пропускания и наибольшее ослабление в полосе запираания. В лестничной структуре ППФ, содержащей каскадное включение последовательных и параллельных звеньев ОАР, резонансные отклики параллельных ОАР сдвинуты по частоте относительно последовательно включенных ОАР (рис. 1). Сдвиг между частотами антирезонанса параллельных ОАР и резонанса последовательных ОАР вблизи центральной частоты полосы пропускания фильтра выбирается таким образом, чтобы обеспечить характеристику передачи и отражения с равномерным уровнем пульсаций в полосе пропускания ППФ, при этом нули характеристик

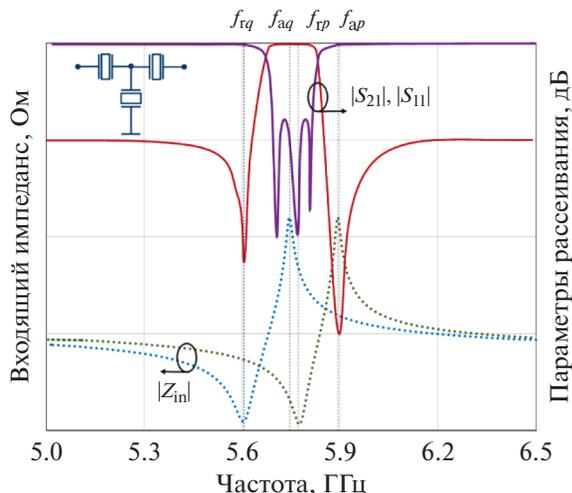


Рис. 1. Резонансные характеристики ОАР в составе ППФ, положение резонансных частот которых обеспечивает формирование равнопульсирующей характеристики передачи в полосе пропускания с симметричными нулями.

передачи формируются за счет резонанса параллельных ОАР и антирезонанса последовательных ОАР.

Как правило, для получения равнопульсирующей характеристики используются эквивалентные схемы замещения ОАР, параметры которых извлекаются из экспериментальных данных [7, 8], или оптимизационные процедуры как для определения относительного положения частот [9], так и геометрии резонаторов [10]. В данной работе рассматривается аналитический подход к синтезу ППФ с Чебышевской характеристикой с учетом влияния электромеханических параметров всех слоев ОАР, включая пьезоэлектрическую пленку, электроды и слои акустического зеркала. Для учета положения нулей характеристики передачи классический синтез Чебышевского прототипа расширен введением дополнительных реактивных элементов, что позволяет сформировать требования к частотным характеристикам ОАР в составе фильтра. В то же время аналитическая модель входного импеданса ОАР позволяет учесть электроакустические параметры всех слоев структуры ОАР. При этом извлечение электроакустических параметров материалов и структуры ОАР осуществляется на основе результатов экспериментальных исследований частотных характеристик входного импеданса тестовых образцов резонаторов. Использование аналитической модели ОАР является более гибким инструментом по сравнению с прямым извлечением из экспериментальных данных параметров эквивалентной схемы. Основная сложность обратной задачи — это преобразование параметров эквивалентного представления ОАР в

параметры, связанные со структурой резонаторов. Применение аналитической модели позволяет однозначно связать параметры структуры и формы резонаторов с их частотным откликом.

СИНТЕЗ ППФ С СИММЕТРИЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Методика синтеза ППФ на ОАР основана на классическом синтезе полоснопропускающего фильтра-прототипа с Чебышевской характеристикой [11] с последующим введением дополнительных нулей характеристики передачи [2]. Исходными параметрами в процедуре синтеза ППФ являются частотные параметры ОАР, которые характеризуются двумя резонансами (на частотах f_r и f_a) на передаточной характеристике, зависящими от материальных акустических параметров материалов [12]:

$$f_r = \frac{v_{ac}}{\lambda_{ac}} = \frac{v_{ac}}{2t}, \quad f_a = \frac{v_{ac}}{2t} \left(1 - \frac{4}{\pi^2} K_{eff}^2 \right), \quad (1)$$

где v_{ac} — скорость звука, распространяющегося по направлению толщины пьезоэлектрической пленки, λ_{ac} — длина акустической волны, t — толщина пьезоэлектрической пленки.

Передаточная характеристика, имеющая равный уровень пульсаций, как в полосе пропускания, так и в полосе запирающего, является оптимальной с точки зрения эффективности использования порядка фильтра [13]. С этой целью контуры в составе фильтра должны быть настроены на соответствующие резонансные частоты. Соотношение частот резонанса и антирезонанса определяется электромеханическим коэффициентом связи пьезоэлектрической пленки K_{eff}^2 :

$$f_r/f_a = 1 - \left(\frac{2}{\pi} K_{eff} \right)^2. \quad (2)$$

Сдвиг между резонансными частотами последовательного и параллельного ОАР определяется следующим образом:

$$\alpha = f_{aq} - f_{rp} = \frac{1}{\pi} \frac{\Delta f^2}{(\delta f_p + \delta f_q)} \frac{f_r}{f_a}, \quad (3)$$

где $\delta f_q = f_{aq} - f_{rq}$ и $\delta f_p = f_{ap} - f_{rp}$ — сдвиг между частотами резонанса и антирезонанса в параллельном и последовательном резонаторе, соответственно; индексы p и q принимают значения $p = 1, 3, \dots, N$; $q = 2, \dots, N-1$, где N — порядок ППФ; Δf — абсолютная ширина полосы пропускания ППФ $\Delta f = f_1 - f_2$; здесь f_1, f_2 — граничные частоты полосы пропускания ППФ, которые выбираются исходя из заданной частотной маски. Следует учитывать, что ППФ на ОАР являются узкополосными и, как правило, относительная ширина

полосы пропускания соответствует относительному сдвигу между частотой резонанса и антирезонанса резонатора в составе ППФ и в соответствии с (2) зависит от коэффициента электромеханической связи пьезоэлектрической пленки

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{f_1 - f_2}{f_0} = \frac{f_a - f_r}{f_r}$$

Полоса пропускания фильтра может быть расширена при использовании дополнительных реактивных элементов [14]. Примем частоту резонанса последовательного резонатора f_{rp} равной центральной частоте полосы пропускания f_0 :

$$f_{rp} = f_0 = \sqrt{f_1 f_2} \quad (4)$$

Значения элементов классического ППФ с Чебышевской характеристикой рассчитываются с использованием g -параметров для заданного порядка фильтра и необходимого уровня пульсаций в полосе пропускания [11]. Так, для ППФ 3-го порядка, представленного на рис. 2а, параметры элементов рассчитываются с использованием следующих выражений:

$$L_p = \frac{g_p R_L}{2\pi \Delta f} \quad (5)$$

$$C_p = \frac{1}{(2\pi f_{rp})^2 L_p} \quad (6)$$

$$C_q = \frac{g_q}{2\pi \Delta f R_L} \quad (7)$$

$$L_q = \frac{1}{(2\pi (f_{aq} - \alpha))^2 C_q} \quad (8)$$

где $R_L = 50 \text{ Ом}$ – сопротивление нагрузки.

ППФ на основе ОАР имеет нули характеристики передачи, которые соответствуют частотам резонанса параллельного ОАР и антирезонанса последовательного ОАР. Модификация полосно-пропускающего фильтра с Чебышевской характеристикой основана на введении дополнительных реактивных элементов, которые обеспечивают нули характеристики передачи на заданных частотах [2]. В качестве элементарного звена ППФ с симметричными нулями характеристики выступают трехэлементные реактивные контура с двумя резонансами, также соответствующие нулю и полюсу передаточной характеристики. Различие последовательных и реактивных контуров заключается в том, что дополнительный реактивный элемент C_{0q} , отвечающий за внесение дополнительных нулей в характеристику передачи, добавлен к параллельному контуру последовательно, в то время как в последовательных контурах дополнительный элемент C_{0p} включен параллельно основному контуру (рис. 2б). Таким образом, емкости

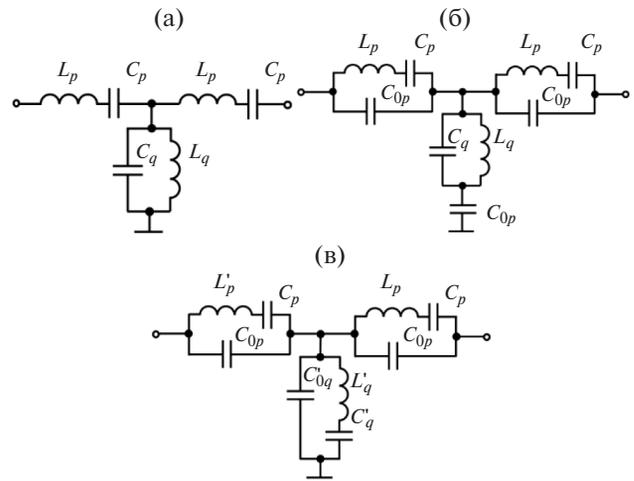


Рис. 2. (а) – Преобразование ППФ на ОАР: классический фильтр-прототип с Чебышевской характеристикой; (б) – ППФ с введением дополнительных нулей характеристики передачи и (в) – представление всех звеньев ППФ в виде общепринятой эквивалентной схемы ОАР без учета потерь.

C_{0p} и C_{0q} определяются из заданного положения нулей передачи, частотой резонанса параллельного резонатора f_{rp} и частотой антирезонанса последовательного резонатора f_{sp} , соответственно:

$$C_{0p} = \frac{C_p}{((2\pi f_{sp})^2 C_p L_p) - 1} \quad (9)$$

$$C_{0q} = \frac{1}{(2\pi (f_{rp}))^2 L_q} - C_q \quad (10)$$

Внесение нескольких нулей передачи в случае использования ППФ более высокого порядка, чем третий, делает возможным формирование полосы записания требуемой ширины [15].

Стоит заметить, что последовательные звенья ППФ являются эквивалентным представлением ОАР, называемым моделью Баттерворта–Ван Дейка [16]. Приведем параллельное звено ППФ к дуальному четырехполюснику, как показано на рис. 2в. Для перехода от одной схемы трехэлементного реактивного контура к дуальной воспользуемся следующими выражениями [17]:

$$L'_q = L_q \left(\frac{C_q + C_{0q}}{C_{0q}} \right)^2 \quad (11)$$

$$C'_q = \frac{C_{0q}}{1 + \frac{C_q}{C_{0q}}} \quad (12)$$

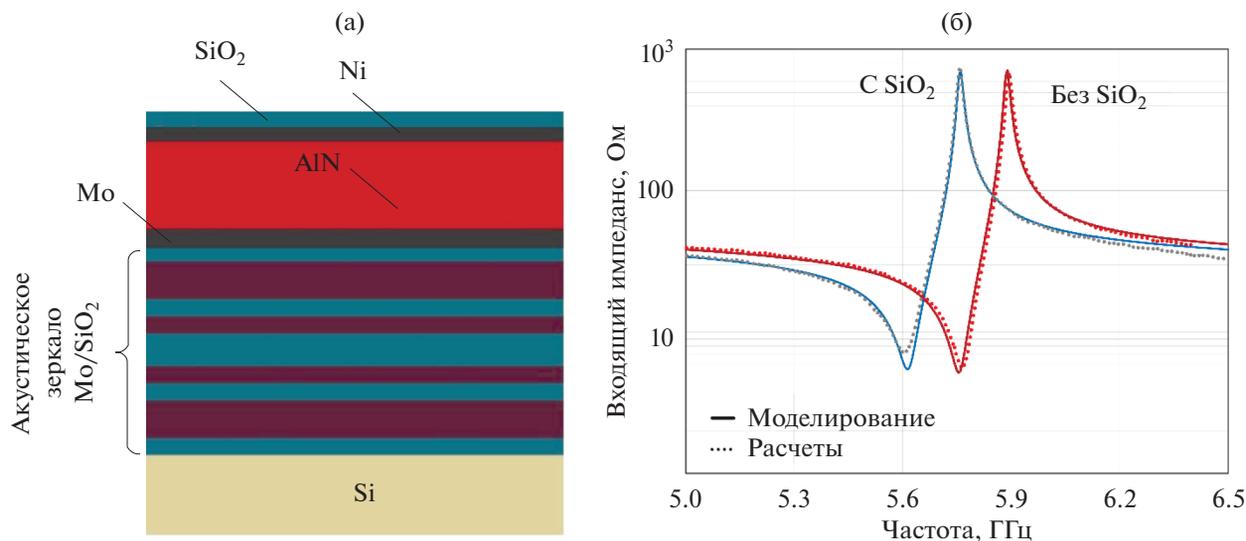


Рис. 3. Многослойная структура ОАР с акустическим зеркалом, (а) – результаты моделирования входного импеданса ОАР без дополнительного слоя SiO_2 и (б) – с дополнительным слоем SiO_2 в сравнении с результатами экспериментального исследования тестовых структур.

$$C'_{0q} = \frac{C_{0q}}{1 + \frac{C_{0q}}{C_q}}. \quad (13)$$

Частотные зависимости модулей коэффициента передачи и коэффициента отражения, полученные в результате синтеза ППФ 3-го порядка, представлены на рис. 3. В результате преобразований каждый элементарный трехэлементный контур в составе ППФ (рис. 2в) соответствует эквивалентному представлению ОАР, учитывающему частотные свойства ОАР. В то же время, соотношение частот резонанса и антирезонанса ОАР определяется как электромеханическим коэффициентом связи пьезоэлектрической пленки, так и электромеханическими параметрами всех слоев многослойной структуры резонатора (электродов, акустического зеркала и т.д.), которые в общем случае могут быть извлечены из экспериментальных результатов. Относительный сдвиг резонансных частот в последовательных и параллельных ОАР обеспечивается изменением акустической длины волны при использовании резонаторов с различной толщиной пленки или с применением дополнительной акустической нагрузки верхнего электрода [3]. В то же время, влияние электромеханических параметров всех слоев многослойного ОАР может быть учтено с использованием модели входного импеданса ОАР, параметры которой уточняются с помощью экспериментального исследования образцов.

В результате процедуры синтеза ППФ определяются параметры контуров эквивалентного представления ОАР в составе ППФ, которые позволяют получить равномерный уровень пульсаций в полосе пропускания.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОАР НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ВХОДНОГО ИМПЕДАНСА

Аналитический расчет входного импеданса ОАР основан на электромеханических уравнениях, которые определяют соотношения между диэлектрическими и механическими свойствами пьезоэлектрической пленки [12, 18]. В общем случае пьезоэлектрическая пленка закреплена между электродами. При этом для акустической изоляции ОАР от подложки применяется многослойное акустическое зеркало (брэгговское зеркало), которое состоит из чередующихся тонкопленочных четвертьволновых слоев с высоким контрастом акустических импедансов [19, 20]. Структура ОАР с акустической изоляцией от подложки, используемая в расчете, показана на рис. 3а. Для упрощения задачи считаем пьезоэлектрическую пленку изотропной. Электрический входной импеданс с учетом акустического импеданса электродов и акустического зеркала имеет следующий вид [3, 21]:

$$Z_{in} = R_s + \frac{1}{j\omega C_0} \left[1 - K_t^2 \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_{ac}}{2}}{\frac{\varphi_{ac}}{2}} \frac{(Z_{top} + Z_{bot}) \cos^2 \varphi_{ac} + j \sin 2\varphi_{ac}}{(Z_{top} + Z_{bot}) \cos 2\varphi_{ac} + j(Z_{top} Z_{bot} + 1) \sin 2\varphi_{ac}} \right], \quad (14)$$

где Z_{top}, Z_{bot} – акустический импеданс электродов, находящихся в контакте с пленкой пьезоэлектрика, $\varphi_{ac} = \gamma_{ac} l$ – длина акустической волны, γ_{ac} – комплексная постоянная распространения акустической волны $\gamma_{ac} = \alpha_{ac} + jk_{ac}$, $k_{ac} = \frac{\omega}{v_{ac}}$ – волновое число, ω – частота СВЧ поля в плоскопараллельном конденсаторе, v_{ac} – скорость акустической волны в пьезоэлектрическом материале, $\alpha_{ac} = \frac{k_{ac}}{2Q_{ac}}$ – постоянная затухания, Q_{ac} – акустическая добротность, C_0 – емкость между электродами ОАР. По сравнению с [3], во входном импедансе учтены омические потери электродов ОАР (R_s). Емкость между электродами с учетом диэлектрических потерь:

$$C_0 = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S_0}{t} (1 - j \operatorname{tg} \delta), \quad (15)$$

где S_0 – площадь электродов, ϵ_r – относительная диэлектрическая проницаемость пленки, ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума, $\operatorname{tg} \delta$ – тангенс угла диэлектрических потерь в пьезоэлектрической пленке.

В выражении (14) коэффициент электромеханической связи K_t^2 определяется материальными параметрами пьезоэлектрической пленки:

$$K_t^2 = \frac{e_{33}^2}{\epsilon_{33} c_{33}}, \quad (16)$$

где $e_{33}, \epsilon_{33}, c_{33}$ – компоненты тензоров пьезоэлектрического модуля, диэлектрической проницаемости и упругой жесткости для волны по толщине пленки, соответственно.

Для учета акустического импеданса электродов и акустического зеркала используется трансформация импеданса подложки к границе с пьезоэлектрической пленкой [11]:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \operatorname{th}(\gamma_{ac} t_i)}{Z_0 + Z_L \operatorname{th}(\gamma_{ac} t_i)}, \quad (17)$$

где t_i – толщина каждого слоя в составе структуры ОАР, γ_{ac_i} – комплексная постоянная распространения акустической волны в каждом слое. Каждый слой ОАР представляется в виде отрезка линии передачи со своими волновыми параметрами (акустическим импедансом и постоянной рас-

пространения). При этом Z_0 – акустический импеданс слоя в составе акустического зеркала, через которое трансформируется нагрузка с акустическим импедансом Z_L . Данная трансформация осуществляется к обеим границам пьезоэлектрической пленки.

Извлечение электроакустических параметров модели ОАР осуществляется из экспериментальных частотных характеристик тестовых образцов. Рассматриваются два типа высокочастотных объемных акустических резонаторов, различающихся наличием или отсутствием дополнительного слоя над верхним электродом в виде пленки оксида кремния (SiO_2), которая задает дополнительный частотный сдвиг, сохраняя при этом толщину пьезоэлектрических пленок единой для всех ОАР в составе фильтра. Обобщенная структура поперечного сечения ОАР на основе пленки нитрида алюминия с акустической изоляцией от подложки показана на рис. 3а. В представленной структуре в качестве акустического зеркала используются три пары четвертьволновых чередующихся слоев с высоким и низким акустическим импедансом на основе пленок Mo и SiO_2 [20].

ПОРЯДОК РАСЧЕТА ППФ НА ОСНОВЕ ОАР

Процедура расчета фильтра на основе ОАР состоит из нескольких этапов. На начальном этапе выполняется расчет входного импеданса в соответствии с аналитической моделью ОАР (14)–(17), при этом извлечение параметров модели осуществляется из экспериментальных результатов исследования тестовых образцов. Кроме того, модель ОАР учитывает нагрузки пьезоэлектрического слоя в виде электродов и акустического зеркала. Многослойная структура акустического резонатора с акустическим зеркалом (см. рис. 3а) была изготовлена и экспериментально исследована для двух типов резонаторов: с наличием и без дополнительного слоя SiO_2 над верхним электродом. На рис. 3б представлены результаты моделирования входного импеданса ОАР двух типов в сравнении с экспериментальными результатами. Согласование результатов моделирования и эксперимента позволяет сделать вывод о корректности заданных параметров ОАР, используемых в аналитической модели. Наиболее критичные параметры ОАР (параметры пьезоэлектрической пленки и электродов структуры), используемые при расчете входного импеданса резонатора, представлены в табл. 1. Далее площади электро-

Таблица 1. Параметры пьезоэлектрической пленки и электродов структуры ОАР, извлеченные из экспериментальных результатов (рис. 3б)

t_{AlN} , нм	t_{SiO_2} , мкм	v_{AlN} , м/с	Z_{AlN} , кг/м ² с	ϵ_{AlN}	Q_{ac}	R_s , Ом	S_0 , мкм ²	K_f	e_{33} , Кл/м ²	ϵ_{33} , Н/м ²
520	0.038	11 600	34×10^6	12	1000	3.5	3100	0.24	1.55	3.89×10^{11}

Таблица 2. Параметры электродов структуры ОАР, используемые в расчете ППФ

t_{AlN} , нм	Последовательные ОАР		Параллельные ОАР	
	t_{SiO_2} , нм	S_p , мкм ²	t_{SiO_2} , нм	S_q , мкм ²
530	—	1580	45	7750

дов, толщина пьезоэлектрической пленки, толщина слоя SiO₂ над верхним электродом уточняются с учетом частотных характеристик ОАР в составе ППФ, получаемых в результате синтеза параметров схемы фильтра.

На этапе синтеза ППФ задается порядок фильтра или определяется требуемый порядок по заданному значению минимально допустимого ослабления в полосе загириания. Определяется положение нулей характеристики передачи в полосе загириания и нулей характеристики передачи/отражения в полосе пропускания, необходимое для обеспечения равномерного уровня пульсаций частотных характеристик в пределах полосы пропускания. Далее определяются значения элементов трехэлементных контуров для заданных резонансных частот, в соответствии с выражениями (9)–(13). Сдвиг резонансных частот задается исходя из результатов исследования те-

стовых образцов и в соответствии с моделью (14)–(17).

На заключительном этапе аналитическая модель используется для определения параметров структуры ОАР. На основе аналитической модели корректируются такие параметры модели, как толщина пленки AlN, толщина слоя SiO₂ над верхним электродом, площади электродов. При этом остальные параметры модели (электроакустические параметры и толщины слоев), извлеченные из экспериментальных результатов, остаются неизменными. Параметры электродов структуры ОАР, используемые в расчете ППФ, приведены в табл. 2.

В качестве примера использования предложенной методики было выполнено моделирование 3-разрядного ППФ на ОАР, частотные характеристики которого представлены на рис. 4. Результаты моделирования ППФ на ОАР, полученные с учетом электроакустических параметров всех слоев многослойной структуры, сравниваются с результатами расчета на основе эквивалентной схемы (рис. 2в).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, предложенный подход, который объединяет модель входного импеданса ОАР с процедурой синтеза параметров ППФ с учетом материальных параметров, позволяет определить параметры структуры ОАР в составе ППФ с целью получения характеристик с наименьшим уровнем пульсаций в полосе пропускания и загириания. Результаты моделирования и экспериментального исследования ОАР полностью согласуются, что позволяет сделать вывод о корректности заданных параметров ОАР, используемых в аналитической модели.

На основе предложенной методики продемонстрирован расчет параметров рассеяния ППФ 3-го порядка с Чебышевской характеристикой с учетом электроакустических характе-

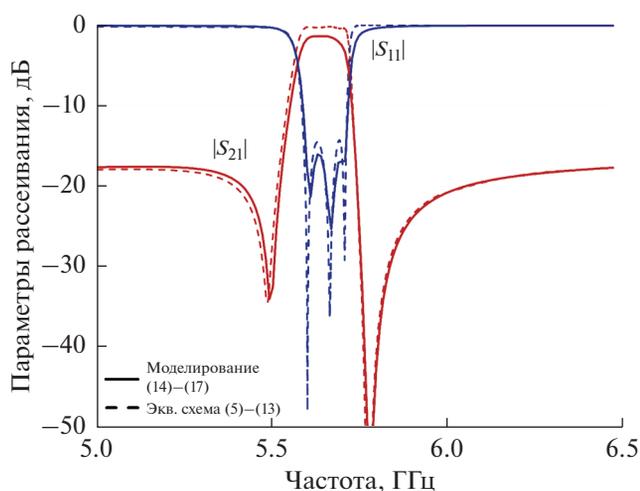


Рис. 4. Частотные характеристики ППФ 3-го порядка, полученные с учетом использования модели ОАР в сравнении с результатами расчета схемы ППФ, представленной на рис. 2в.

ристик всех слоев структуры ОАР. В соответствии с результатами моделирования уровень вносимых потерь в полосе пропускания 0.12 ГГц ($f_0 = 5.66$ ГГц, $\Delta f = 2.1\%$) не превышает 1.5 дБ, модуль коэффициента отражения не хуже -15 дБ, запыление в полосе заграждения -18 дБ.

Авторы благодарят Н.И. Кацавеца и ЗАО “Светлана-Рост” за предоставление экспериментальных результатов, использованных в статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Туральчук П.А., Колмаков Я.А., Симин А.В., Холодняк Д.В., Вендик И.Б. Многослойные интегральные схемы миниатюрных СВЧ-устройств для систем телекоммуникаций и связи // Изв. ВУЗов России. Сер. Радиоэлектроника. 2005. № 1. С. 65–71.
2. Холодняк Д.В., Симин А.В., Лапшин А.В., Вендик И.Б. Синтез фильтров с несимметричными частотными характеристиками для антенных разделителей, реализуемых по технологии многослойных интегральных схем СВЧ // Известия СПбГЭТУ “ЛЭТИ”. Сер. Радиоэлектроника и телекоммуникации. 2004. № 1. С. 47–55.
3. Lakin K.M., Kline G.R., McCarron K.T. High-Q microwave acoustic resonators and filters // IEEE Trans. on MTT. 1993. V. 41. № 12. P. 2139–2146.
4. Двошерстов М.Ю., Чередник В.И. Полосовые СВЧ-фильтры на основе тонкопленочных акустических резонаторов. Теория и эксперимент // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 6. С. 692–700.
5. Iwazaki Y., Yokoyama T., Nishihara T., Ueda M. Highly enhanced piezoelectric property of co-doped AlN // Applied Physics Express. 2015. V. 8. № 6. P. 061501.
6. Сорокин Б.П., Новоселов А.С., Квашинин Г.М., Лупарев Н.В., Асафьев Н.О., Шупилов А.Б., Аксёненко В.В. Разработка и исследование композитных акустических резонаторов со структурой “Al/(Al,Sc)N/МО/Алмаз” с высокой добротностью на СВЧ // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 3. С. 325–321.
7. Shirakawa A.A., Pham J.-M., Jarry P., Kerherve E. Bulk acoustic wave coupled resonator filters synthesis methodology // Proc. of IEEE European Microwave Conference. 2005. V. 1. P. 1–4.
8. Catherinot L., Giraud S., Chatras M., Bila S., Cros D., Baron T., Ballandras S., Estagerie L., Monfraix P. A general procedure for the design of bulk acoustic wave filters // Int. J. RF and Microwave Computer-Aided Engineering. 2011. V. 21. № 5. P. 458–465.
9. Tseng S.-Y., Wu R.-B. Synthesis of Chebyshev/elliptic filters using minimum acoustic wave resonators // IEEE Access. 2019. V. 7. P. 103456–103462.
10. Guerrero E., Silveira P., Verdú J., Yang Y., Gong S., De Paco P. A synthesis approach to acoustic wave ladder filters and duplexers starting with shunt resonator // IEEE Trans. on MTT. 2020. V. 69. P. 629–638.
11. Маттей Д.Л., Янг Л., Джонс Е.М.Т. Фильтры СВЧ, согласующие цепи и цепи связи. М.: Связь, 1971. 440 с.
12. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Физическая акустика. Под ред. Мэзона У. Т. 1. Часть А. Методы и приборы ультразвуковых исследований. М.: Мир, 1966. С. 204–326.
13. Lim J.-S., Park D.S. A modified Chebyshev bandpass filter with attenuation poles in the stopband // IEEE Trans. on MTT. 1997. V. 45. № 6. P. 898–904.
14. Yang Q., Pang W., Zhang D., Zhang H. A modified lattice configuration design for compact wideband bulk acoustic wave filter applications // J. Micromachines. 2016. V. 7. № 8. P. 133.
15. Gimenez A., Verdu J., Sanchez P.D.P. General synthesis methodology for the design of acoustic wave ladder filters and duplexers // IEEE Access. 2018. V. 6. P. 47969–47979.
16. Larson J.D., Bradley P.D., Wartenberg S., Ruby R.C. Modified Butterworth-Van Dyke circuit for FBAR Resonators and Automated Measurement System // IEEE Ultrasonics Symposium. 2000. V. 1. P. 863–868.
17. Hong J.-S.G., Lancaster M.J. Microstrip filters for RF/microwave applications // Wiley & Sons, 2004. V. 167.
18. Turalchuk P., Vendik I., Vendik O., Berge J. Modelling of tuneable acoustic resonators based on BSTO films with induced piezoelectric effect // Proc. of the 37th European Microwave Conference (EuMC). 2007. P. 282–285.
19. Гуляев Ю.В., Мансфельд Г.Д. Резонаторы и фильтры сверхвысоких частот на объемных акустических волнах – современное состояние и тенденции развития // Радиотехника. 2003. № 8. С. 42–54.
20. Двошерстов М.Ю., Чередник В.И., Босов С.И., Орлов И.Я., Руденко О.В. Численный и экспериментальный анализ параметров акустоэлектронного тонкопленочного СВЧ-резонатора // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 5. С. 569–577.
21. Vendik I.B., Turalchuk P.A., Vendik O.G., Berge J. Modeling tunable bulk acoustic resonators based on induced piezoelectric effect in BaTiO₃ and Ba_{0.25}Sr_{0.75}TiO₃ films // J. Appl. Phys. 2008. V. 103. № 1. P. 014107.
22. Сорокин Б.П., Теличко А.В., Квашинин Г.М., Бормашов В.С., Бланк В.Д. Исследование СВЧ акустического затухания в многочастотном резонаторе на объемных акустических волнах на основе синтетического монокристалла алмаза // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 6. С. 705–717.

УДК 534.222

ВОЗМУЩЕНИЯ МОДАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЗАТУХАНИЯ И ГРУППОВЫХ СКОРОСТЕЙ, ВЫЗВАННЫЕ ВАРИАЦИЯМИ ГЛУБИНЫ ВДОЛЬ АКУСТИЧЕСКОЙ ТРАССЫ В МЕЛКОМ МОРЕ

© 2022 г. А. Д. Захаренко^а, *, П. С. Петров^а, **

^аФедеральное государственное бюджетное учреждение науки Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН,
ул. Балтийская 43, Владивосток, 690041 Россия

*e-mail: zakharenko@poi.dvo.ru

**e-mail: petrov@poi.dvo.ru

Поступила в редакцию 20.06.2022 г.

После доработки 06.07.2022 г.

Принята к публикации 27.07.2022 г.

Рассмотрено возмущение коэффициентов затухания и групповых скоростей акустических мод в волноводе мелкого моря с неоднородным рельефом дна. Построены явные формулы для расчета первых и вторых производных указанных величин по глубине моря, основанные на теории возмущений, разработанной в предыдущих работах авторов. Применение полученных формул проиллюстрировано в модельном примере. Показано, что они позволяют с высокой точностью аппроксимировать зависимость групповых скоростей и модальных коэффициентов затухания от глубины моря. Предложенные формулы могут использоваться для получения простых аналитических оценок потерь при распространении звука в нерегулярных волноводах, а также для учета неоднородностей рельефа дна при выполнении геоакустической инверсии по данным о волноводной дисперсии сигнала.

Ключевые слова: акустика мелкого моря, метод нормальных волн, групповые скорости, модальные коэффициенты затухания, нерегулярный волновод

DOI: 10.31857/S0320791922060144

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что неоднородности рельефа дна являются одним из наиболее важных факторов, определяющих характер распространения звука в мелком море [1, 2]. Они существенным образом изменяют не только интерференционную картину акустического поля, но также и скорость убывания его энергетических характеристик по мере удаления от источника. В случае импульсных сигналов вариации глубины могут также оказывать существенное влияние на их дисперсию при распространении в геоакустических волноводах на шельфе [3–5].

Правильный учет указанных зависимостей необходим при решении многих практических задач акустики океана, в том числе в задачах геоакустической инверсии, мониторинга антропогенных акустических шумов, а также при организации систем акустической навигации и дальнометрии [4–9]. С другой стороны, расчет акустических полей и различных их характеристик в нерегулярных волноводах мелкого моря представляет собой сложную математическую задачу [10–12], полное решение которой сопряжено с большими

вычислительными затратами, которые не всегда приемлемы на практике.

В предшествующих работах [13, 14] была показана возможность существенного сокращения вычислительных затрат при расчете звуковых полей в волноводах переменной глубины в рамках модовой теории. Вместо многократного решения спектральной задачи предлагалось решить ее в одной или нескольких опорных точках трассы, а в остальных точках аппроксимировать горизонтальные волновые числа и собственные функции мод рядами Тейлора, коэффициенты которых были вычислены в указанных работах. В настоящем исследовании мы проводим дальнейшее развитие этого подхода и предлагаем методику аппроксимации групповых скоростей мод и модальных коэффициентов затухания [1, 2] (мнимых частей горизонтальных волновых чисел).

Пусть $k_j(r)$ и $\phi_j(z, r)$ — суть решения следующей задачи Штурма–Лиувилля, возникающей при вычислении мод в поперечном сечении геоакустического волновода мелкого моря при данном значении r [2]:

$$\begin{cases} \frac{d^2\phi_j}{dz^2} + \frac{\omega^2}{(c(z))^2} \phi_j = k_j^2 \phi_j, & z \in (0, h) \cup (h, H], \\ \phi_j|_{z=0} = 0, \\ \phi_j|_{z=H} = 0, \\ \phi_j|_{z=h^-} = \phi_j|_{z=h^+}, \\ \left. \frac{1}{\rho} \frac{d\phi_j}{dz} \right|_{z=h^-} = \left. \frac{1}{\rho} \frac{d\phi_j}{dz} \right|_{z=h^+}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\omega = 2\pi f$ – частота звука, $z = h(r)$ – зависящая от удаления от источника r глубина моря, $c = c(z)$ – профиль скорости звука в водном слое (который в масштабах задачи разумно считать не зависящим от r), $\rho(z)$ – плотность, имеющая разрыв первого рода на границе раздела вода–дно, а $z = H$ – нижняя граница расчетной области. Мы ограничиваем область снизу, чтобы не иметь дела с непрерывным спектром. В рамках данной работы мы для простоты будем считать дно однородным слоем переменной толщины $H - h(r)$.

Предположим, что нерегулярность волновода связана исключительно с перепадами $\Delta h(r)$ глубины моря $h = h_0 + \Delta h(r)$ вдоль акустической трассы, в то время как зависимость скорости звука $c(z)$ от глубины одинакова во всей рассматриваемой области. Тогда k_j , ϕ_j , которые параметрически зависят от r , можно считать функциями от h . Считая эти функции гладкими, мы будем рассматривать их разложения в ряд Тейлора

$$k_j(r) \sim k_{j,0} + k'_{j,0} \Delta h(r) + \frac{1}{2} k''_{j,0} (\Delta h(r))^2 + \dots, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \phi_j(z, r) \sim & \phi_{j,0}(z) + \phi'_{j,0}(z) \Delta h(r) + \\ & + \frac{1}{2} \phi''_{j,0}(z) (\Delta h(r))^2 + \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

где $h = h_0 + \Delta h(r)$, штрих обозначает производную по h , а $k_{j,0}$, $\phi_{j,0}$ – суть решения спектральной задачи (1) при $h = h_0$.

В работах [6, 10] с применением стандартной теории возмущений найдены производные волнового числа по глубине $k'_{j,0} = \frac{1}{h_0} k_{j,1}$, $k''_{j,0} = \frac{1}{h_0^2} k_{j,2}$, $k'''_{j,0} = \frac{1}{h_0^3} k_{j,3}$, а также соответствующие производные модовых функций

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\phi_j}{dh} \right|_{h=h_0} &= \frac{1}{h_0} \left(-\frac{\phi_{j,0}}{2} - z \frac{\partial \phi_{j,0}}{\partial z} + \phi_{j,1} \right) \Bigg|_{h=h_0}, \\ \left. \frac{d^2\phi_j}{dh^2} \right|_{h=h_0} &= \frac{1}{h_0^2} \left(\frac{3\phi_{j,0}}{4} + 3z \frac{\partial \phi_{j,0}}{\partial z} - \phi_{j,1} + \right. \\ & \left. + z^2 \frac{d^2\phi_{j,0}}{dz^2} - 2z \frac{\partial \phi_{j,1}}{\partial z} + \phi_{j,2} \right) \Bigg|_{h=h_0}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\phi_{j,1}, \phi_{j,2}$ представляются в виде рядов по собственным функциям невозмущенной задачи Штурма–Лиувилля (1) при $h = h_0$.

Мы не приводим здесь выражения для $k_{j,1}, k_{j,2}, k_{j,3}$ и для $\phi_{j,1}, \phi_{j,2}$, ввиду их громоздкости, отсылая читателя к работам [13, 14] (отметим, однако, что формула для $k_{j,1}$ приведена ниже при обсуждении производных групповых скоростей мод).

Отметим, что, как это обычно бывает в теории возмущений, выражения $\phi_{j,1}, \phi_{j,2}$, входящие в формулу (4), содержат ряды по собственным функциям $\phi_{j,0}$ невозмущенной спектральной задачи. Для того чтобы формулы (2) и (3) обеспечивали высокую точность аппроксимации, при суммировании этих рядов недостаточно одних лишь водных мод, и необходимо учесть “донные” моды. Этим мод в нашем случае счетное число, что обеспечивается искусственным ограничением расчетной области при $z = H$. Как было отмечено в [14], указанные ряды сходятся достаточно быстро, и учет лишь небольшого числа донных мод (аппроксимирующих вклад непрерывного спектра, который возникает при устремлении H к бесконечности) оказывается достаточным для решения практических задач (требуется 10–20 донных мод на частотах порядка 100–300 Гц).

ВОЗМУЩЕНИЕ МОДАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЗАТУХАНИЯ, ВЫЗВАННОЕ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ РЕЛЬЕФА ДНА

Если математическая модель предусматривает поглощение среды (в вычислительном отношении задачу (1) выгоднее оставить самосопряженной, а мнимую часть горизонтальных волновых чисел рассчитывать методом возмущений), то при построении акустического поля необходимо учитывать мнимые части волновых чисел, которые могут быть найдены по формуле [1, 2]

$$\alpha_j = \frac{\omega^2}{k_j} \int_0^H \frac{\beta(z) \phi_j^2(z)}{\rho(z) c^2(z)} dz, \quad (5)$$

где $\beta(z)$ – зависимость коэффициента поглощения звука в среде от глубины (обычно исчисляемая в дБ на длину волны).

Нашей целью является вычисление первой и второй производных $\alpha'_{j,0}, \alpha''_{j,0}$ для дальнейшей аппроксимации $\alpha_j(r)$ рядом Тейлора, подобным (2). Для простоты будем полагать $\beta(z)$ равным нулю в водном слое и некоторой положительной константе β в верхнем слое дна (скорость звука и плотность в этом слое обозначим c_b и ρ_b). Мы также ограничимся рассмотрением коэффициентов затухания водных мод, экспоненциально затухающих в дне.

Для нахождения производных $d\alpha_j/dh$ продифференцируем (5) по h :

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_j}{dh} = & -\frac{dk_j}{dh} \frac{1}{k_j} \alpha_j + \\ & + \frac{2}{k_j} \int_h^H \beta Q \frac{\phi_j(z)}{\rho(z)} \frac{d\phi_j(z)}{dh} dz - \frac{1}{k_j} \beta Q \frac{\phi_j^2(h)}{\rho_b}, \end{aligned} \quad (6)$$

где использовано обозначение $Q = \omega^2/c_b^2$.

Подставляя выражения для dk_j/dh , $d\phi_j/dh$, интегрируя по частям и переходя к пределу $h \rightarrow h_0$, получаем

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\alpha_j}{dh} \right|_{h=h_0} = & \\ = \frac{1}{h_0} \left(-\frac{k_{j,1}}{k_{j,0}} \alpha_{j,0} + \frac{2}{k_j} \int_{h_0}^H \beta Q \frac{\phi_{j,0}(z)\phi_{j,1}(z)}{\rho(z)} dz \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Далее, дифференцируя (6), находим

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha_j}{dh^2} = & -\frac{1}{k_j} \frac{d^2k_j}{dh^2} \alpha_j - \frac{2}{k_j} \frac{dk_j}{dh} \frac{d\alpha_j}{dh} + \\ & + \frac{2}{k_j} \int_h^H \beta Q \frac{\phi_j(z)}{\rho(z)} \frac{d^2\phi_j(z)}{dh^2} dz - \\ & - \frac{1}{k_j} \beta Q \frac{d}{dh} \left(\frac{\phi_j^2(h)}{\rho_b} \right) + \frac{2}{k_j} \int_h^H \beta Q \left(\frac{d\phi_j(z)}{dh} \right)^2 dz - \\ & - \frac{2}{k_j} \beta Q \frac{\phi_j(h)}{\rho_b} \frac{d\phi_j}{dh}(h). \end{aligned} \quad (8)$$

Переходя в последнем выражении к пределу $h \rightarrow h_0$, с использованием интегрирования по частям, получаем окончательную формулу

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2\alpha_j}{dh^2} \right|_{h=h_0} = & \frac{1}{h_0^2} \left(-\frac{k_{j,2}}{k_{j,0}} \alpha_{j,0} - 2 \frac{k_{j,1}}{k_j} \frac{d\alpha_j}{dh} \right)_{h=h_0} + \\ & + \frac{2}{k_j} \int_{h_0}^H \beta Q \frac{\phi_{j,0}(z)\phi_{j,2}(z)}{\rho} dz + \\ & + \frac{2}{k_j} \int_{h_0}^H \beta Q \frac{\phi_{j,1}^2(z)}{\rho} dz. \end{aligned} \quad (9)$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ α_j

На основании полученных формул можно исследовать поведение функций $\alpha_j(h)$, определив знаки производных в (7) и (9). Далее мы предполагаем, что $k_{j,1} > 0$ и $k_{j,2} < 0$. Эти неравенства обычно удовлетворяются для водных мод в волноводах, близких к волноводу Пекериса. Действительно, если мы не находимся вблизи глубины отсечки, то зависимости $k_j(h)$ схожи с зависимостями, имеющими место в волноводе с идеально

отражающими стенками, где $k_j(h) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 j^2}{h^2}}$.

Дифференцируя данное выражение, легко убедиться, что указанные неравенства справедливы. Разумеется, для сложных зависимостей $c(z)$ они могут нарушаться в отдельных точках, однако в наиболее типичных ситуациях они выполняются.

Так как мы рассматриваем только моды, распространяющиеся в водном слое, то при $z > h$ функции $\phi_{j,0}(z)$ будут иметь вид

$$\phi_{j,0}^b(z) = C_j(h) \exp(\sqrt{\lambda_j}(h-z)), \quad (10)$$

где $\lambda_j = k_j^2 - Q$ и $C_j(h)$ – некоторая константа (положительная или отрицательная), зависящая от номера моды и от h . Таким образом, при $z > h$ функции $\phi_{j,0}^b(z)$ для водных мод являются либо положительными убывающими, либо отрицательными возрастающими.

Функции $\phi_{j,1}^b(z)$ и $\phi_{j,2}^b(z)$, по построению являющиеся рядами из функций $\phi_{j,0}^b(z)$, по-видимому, ведут себя схожим образом, однако ответ на вопрос о том, какой знак имеет произведение $\phi_{j,0}^b(z)\phi_{j,n}^b(z)$, $n = 1, 2$, неочевиден.

Тем не менее, поскольку скорость звука c_b в донном слое предполагается постоянной, мы можем проинтегрировать соответствующие уравнения и найти явный вид решений. Уравнение для $\phi_{j,1}^b(z)$ имеет вид [14]

$$\frac{d^2\phi_{j,1}^b}{dz^2} + (Q - k_{j,0}^2)\phi_{j,1}^b = 2((k_{j,0}^2 - Q) + k_{j,0}k_{j,1})\phi_{j,0}^b. \quad (11)$$

Обозначим $A = 2((k_{j,0}^2 - Q) + k_{j,0}k_{j,1})$. Очевидно, что $A > 0$, и правая часть (11) имеет вид $AC_j(h) \exp(\sqrt{\lambda_j}(h-z))$, тогда решением (11) будет

$$\phi_{j,1}^b = -\frac{AC(h)}{4\lambda}(1 + 2\sqrt{\lambda z})e^{\sqrt{\lambda_j}(h-z)}. \quad (12)$$

Таким образом, $\phi_{j,1}^b(z)$ также представляет собой показательную функцию со знаком, противоположным знаку $\phi_{j,0}^b(z)$. Таким же образом можно показать, что знак функции $\phi_{j,2}^b(z)$ совпадает со знаком $\phi_{j,0}^b(z)$. Отсюда можно сделать вывод, что $\phi_{j,0}^b(z)\phi_{j,1}^b(z) < 0$ и $\frac{d\alpha_j}{dh} < 0$, а значит, для второй производной модального коэффициента затухания (9), как правило (при выполнении неравенств, приведенных в начале раздела), выполняется соотношение $\frac{d^2\alpha_j}{dh^2} > 0$.

Отметим, что в этом разделе мы пользуемся формулой (10), которая верна только при $H \rightarrow \infty$ (см. задачу (1)). В практических расчетах однако H выбирается настолько большим, что модовые функции при $z > h$ фактически не отличаются от убывающих экспонент (коэффициент при экспоненте, возрастающей с глубиной, на несколько порядков меньше $C_j(h)$), и приведенные здесь рассуждения сохраняют свою истинность, хотя и исключительно на физическом уровне строгости.

ПРОИЗВОДНЫЕ ГРУППОВЫХ СКОРОСТЕЙ ПО ГЛУБИНЕ МОРЯ

В этом разделе мы покажем, каким образом поправки к решению спектральной задачи можно использовать для оценки времен распространения звука вдоль трассы, а также для расчета дисперсионных кривых, которые, например, могут быть использованы при решении задач геоакустической инверсии [3, 15].

Известно, что общее время распространения звука вдоль трассы длиной R определяется формулой

$$\tau_j = \int_0^R W_j(r) dr, \quad (13)$$

где $W_j(r)$ – величина, обратная модовой групповой скорости V_j , которая может быть найдена по формуле

$$W_j = \frac{1}{V_j} = \frac{\omega}{k_j} \int_0^H \frac{\phi_j^2(z)}{\rho(z)c^2(z)} dz. \quad (14)$$

При решении задач геоакустической инверсии возникает необходимость расчета дисперсионных кривых, т.е. зависимостей $\tau_j = \tau_j(f)$ (f – частота звука) для обширного интервала значений f . С учетом необходимости делать это многократно при наличии вариации глубины вдоль трассы, представляется весьма привлекательной возможностью аппроксимировать $W(r)$ рядом Тейлора

$$W_j(r) = W_{j,0} + W_{j,0}'\Delta h(r) + \frac{1}{2}W_{j,0}''(\Delta h(r))^2. \quad (15)$$

Если при этом h_0 выбрано таким (наиболее естественным) образом, что $\int_0^R \Delta h(r) dr = 0$, то общее время распространения вдоль трассы длиной R сводится к выражению

$$\tau_j = W_{j,0}R + \frac{1}{2}W_{j,0}'' \int_0^R (\Delta h(r))^2 dr. \quad (16)$$

Из формулы ясно, что важное значение имеет именно вторая производная W_j по глубине. В зависимости от знака этой величины модальные компоненты акустического сигнала будут распространяться быстрее или, наоборот, медленнее, чем в волноводе сравнения с усредненной глубиной моря h_0 .

Покажем, что производные $W_{j,0}', W_{j,0}''$ могут быть найдены непосредственно из поправок к волновым числам $k_{j,1}, k_{j,2}, k_{j,3}$. В случае, когда задан некоторый профиль скорости звука в воде $c_w = c(z)$, имеем для $k_{j,1}$ [14]

$$k_{j,1} = -\frac{k_{j,0}}{h} + \frac{1}{hk_{j,0}} \int_0^H Q(z) \frac{(\phi_{j,0}(z))^2}{\rho(z)} dz + \frac{1}{2k_{j,0}} \int_0^H zQ'(z) \frac{(\phi_{j,0}(z))^2}{\rho(z)} dz, \quad (17)$$

где $Q'(z)$ – производная Q по z . Отсюда получаем, что

$$W_{j,0}' = \frac{1}{\omega}(h\tilde{k}_{j,1} + k_{j,0}), \quad (18)$$

где

$$\tilde{k}_{j,1} = \frac{k_{j,0}}{h} + \frac{1}{hk_{j,0}} \int_0^H Q(z) \frac{(\phi_{j,0}(z))^2}{\rho(z)} dz.$$

Дифференцируя это выражение по h , получаем

$$\begin{aligned} W_{j,0}' &= \frac{1}{\omega}(\tilde{k}_{j,1} + h\tilde{k}_{j,2} + k_{j,1}), \\ W_{j,0}'' &= \frac{1}{\omega}(2\tilde{k}_{j,2} + h\tilde{k}_{j,3} + k_{j,2}), \end{aligned} \quad (19)$$

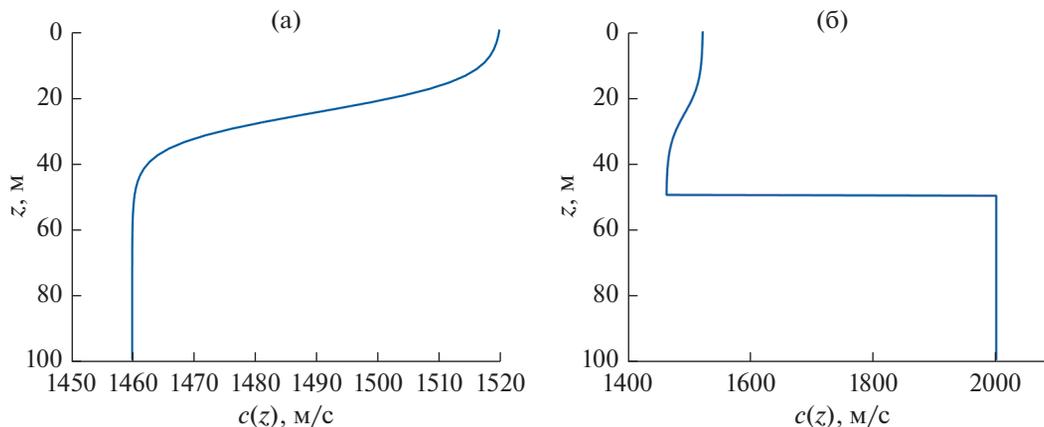


Рис. 1. (а) – Зависимость скорости звука от глубины в водном слое, а также (б) – с учетом верхнего слоя дна.

где

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{j,2} &= 3k_{j,0} - \frac{\tilde{k}_{j,1}^2}{k_{j,0}} + \frac{2}{k_j^{(0)}} \int_0^H Q \frac{\phi_{j,1}\phi_{j,0}}{\rho} dz - \\ &\quad - \frac{3}{k_{j,0}} \int_0^H Q \frac{\phi_{j,0}^2}{\rho} dz, \\ \tilde{k}_{j,3} &= -6 \left(k_{j,1} + k_{j,2} + \frac{k_{j,1}^2}{k_{j,0}} + \frac{k_{j,1}k_{j,2}}{2k_{j,0}} \right) + \\ &\quad + \frac{3}{k_{j,0}} \int_0^H Q \frac{(\phi_{j,2} + \phi_{j,1})\phi_{j,0}}{\rho} dz. \end{aligned} \quad (20)$$

В заключение этого раздела отметим еще, что, в отличие от модальных коэффициентов затухания, относительно зависимостей групповых скоростей от глубины ни в каких разумных предположениях нельзя доказать общих утверждений о характере их выпуклости (см. пример в следующем разделе). По-видимому, величины W_j положительны для волноводов, сходных по параметрам с волноводом Пекериса. Это же утверждение выполняется и для водных мод больших номеров в волноводах с типичными профилями скорости звука.

ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

В качестве модельного примера рассмотрим двуслойный волновод общей глубиной $H = 200$ м при частоте звука $f = 100$ Гц. Пусть глубина моря h варьируется в интервале от 40 до 60 м (это характерные глубины, например, для сахалинского шельфа, а также для залива Петра Великого в Японском море). Профиль скорости звука в водном слое (рис. 1) будем описывать выражением

$$c_w(z) = c_0 - d \operatorname{th} \left(\frac{z - z_0}{\sigma} \right),$$

где $c_0 = 1490$ м/с, $z_0 = 25$ м, $d = 30$ м/с, $\sigma = 10$ м. Скорость звука в донном слое примем равной $c_b = 2000$ м/с, а плотность в воде и дне, соответственно, равны $\rho_w = 1$, $\rho_b = 2$ г/см³. Коэффициент поглощения звука в дне β равен 0.5 дБ/λ. Отметим, что рассматриваемый профиль хорошо параметризует типичные зависимости скорости звука от глубины на шельфе Японского моря в теплый сезон и характеризуется выраженным сезонным термоклином, наличие которого, как видно из предыдущих разделов, некоторым образом усложняет формулы теории возмущения.

Для построения эталонных решений спектральная задача (1) была решена 20 раз для всех значений глубины моря от 40 до 60 м с использованием разработанной в ТОИ ДВО РАН библиотеки `ac_modes` [16]. Формулы теории возмущений, полученные в данной работе, использовались для $h_0 = 50$ м. Отметим, что в рассматриваемом волноводе для разных значений h возбуждается 3–4 водных моды, причем глубина отсечки четвертой моды составляет 42 м.

На рис. 2 представлены аппроксимации модальных коэффициентов затухания по формулам теории возмущения первого и второго порядка для первой, второй и четвертой водных мод. Видно, что, во-первых, функции являются выпуклыми вниз (как и предсказано в разделе, посвященном исследованию функций α_j). Кроме того, формулы второго порядка обеспечивают очень хорошее приближение эталонных кривых во всех случаях, кроме случая четвертой моды вблизи глубины ее отсечки.

На рис. 3 представлены аппроксимации групповых скоростей, полученные с использованием формул (15) для первой, второй и четвертой мод рассматриваемого волновода. Вновь можно кон-

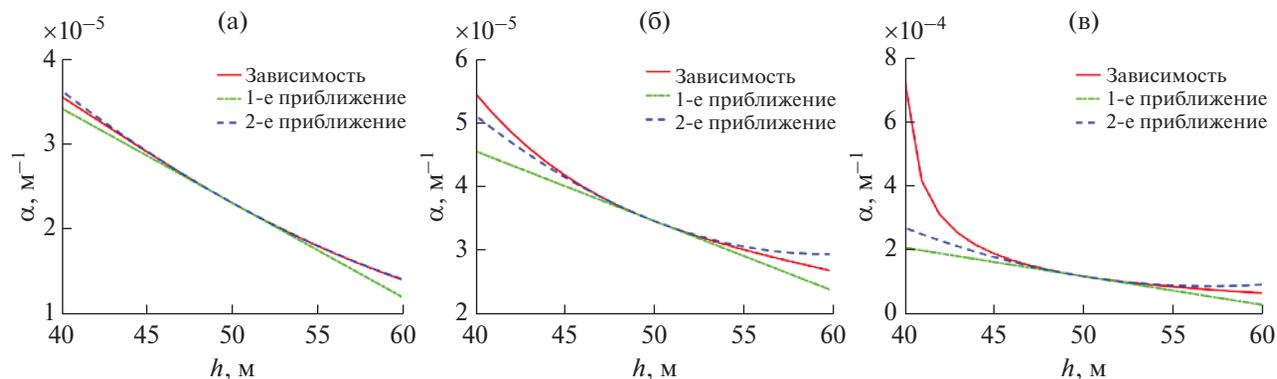


Рис. 2. Зависимость модальных коэффициентов затухания от глубины моря для (а) – первой, (б) – второй и (в) – четвертой мод.

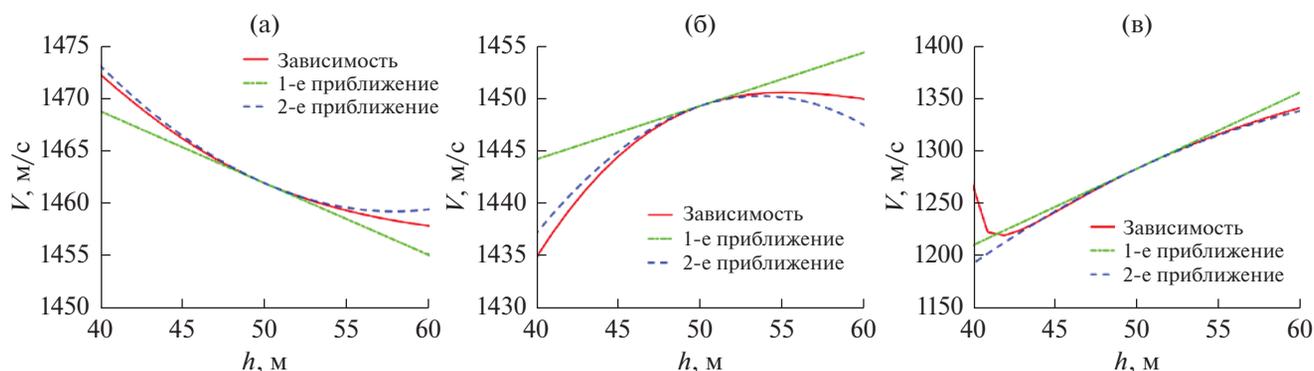


Рис. 3. Зависимости групповых скоростей (а) – первой, (б) – второй и (в) – четвертой мод от глубины моря, а также их аппроксимации первого и второго порядков по формуле (15).

статировать, что полученные формулы обеспечивают достаточно точное для практического применения приближение эталонных кривых, и исключение вновь составляет лишь четвертая мода в окрестности глубины ее отсечки. Как это обычно бывает при использовании асимптотических методов, точную оценку ошибки аппроксимации привести затруднительно, так как на практике она зависит от множества различных параметров волновода.

Важно отметить, что график первой моды является выпуклым вниз, в то время как графики мод 2–4 оказываются вогнутыми (выпуклыми вверх). Физически этот факт означает, что первая мода в реальном волноводе с перепадами глубин от 40 до 60 м (при средней глубине 50 м) будет распространяться несколько быстрее, чем в волноводе сравнения с постоянной глубиной 50 м, в то время как 2–4 моды в волноводе с неоднородностями рельефа дна, наоборот, будут распространяться медленнее.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе вычислены производные модальных коэффициентов затухания и групповых скоростей мод по глубине моря. Помимо академического интереса, который представляет исследование указанных зависимостей, полученные формулы позволяют приближать их с помощью полиномов Тейлора первого и второго порядков. Такого рода приближения могут быть полезны при решении различных практических задач акустики мелкого моря, где требуется многократное решение акустической спектральной задачи в волноводе с меняющейся вдоль трассы глубиной. В частности, формулы (15) позволяют выполнять геоакустическую инверсию параметров дна волновода с учетом вариаций глубины моря между точками приема и излучения без дополнительных вычислительных затрат по сравнению с аналогичной инверсионной процедурой, выполняемой в предположении о постоянстве глубины. Поскольку задачи геоакустической инверсии и так очень трудоемки в вычислительном

отношении, то дополнительное кратное увеличение вычислительной стоимости, необходимое для учета вариаций глубины “обычным” способом, представляется нежелательным. Заметим, что с несколько иной точки зрения вопрос о влиянии неоднородностей батиметрии на точность решения задач геоакустической инверсии рассмотрен в недавней работе [3].

Отметим также непосредственные и интересные с нашей точки зрения физические следствия, которые можно извлечь из построенной здесь теории. Во-первых, анализ характера выпуклости зависимостей модальных коэффициентов затухания от глубины показывает, что потери при распространении звука в волноводе с вариациями глубин относительного среднего значения будут всегда выше, чем в волноводе сравнения с постоянной средней глубиной.

Во-вторых, хотя аналогичного простого утверждения нельзя сделать относительно групповых скоростей мод, ясно, что неоднородности рельефа дна существенным образом меняют дисперсию импульсных акустических сигналов по сравнению с волноводом с постоянной усредненной глубиной моря. Формула (16), в частности, показывает, что в волноводе с неоднородным рельефом дна фактически имеет место два типа межмодовой дисперсии: первый связан с различием групповых скоростей мод для усредненной глубины h_0 , в то время как второй обусловлен тем, что групповые скорости разных мод неодинаковым образом реагируют на вариации глубины моря. Задержки, обусловленные дисперсией второго типа, при этом пропорциональны дисперсии флуктуаций рельефа дна вокруг среднего значения $\sigma_{\Delta h}^2$. Насколько нам известно, данный факт до сих пор не был отмечен в акустической литературе, хотя ряд результатов из работы [3], очевидно, имеет связь с данным утверждением.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00171, <https://rscf.ru/project/22-11-00171/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров П.С., Голов А.А., Безответных В.В., Буренин А.В., Козицкий С.Б., Сорокин М.А., Моргунов Ю.Н. Экспериментальное и теоретическое исследование времен прихода и эффективных скоростей при дальнем распространении импульсных акустических сигналов вдоль кромки шельфа в мелком море // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 1. С. 20–33.
2. Рутенко А.Н., Боровой Д.И., Гриценко В.А., Петров П.С., Ущиповский В.Г. Акустический мониторинг и результаты исследований распространения сейсморазведочных импульсов в прибрежную зону // Акуст. журн. 2012. Т. 57. № 3. С. 356–369.
3. Моргунов Ю.Н., Голов А.А., Буренин А.В., Петров П.С. Исследование пространственно-временной структуры акустического поля, формируемого в глубоком море источником широкополосных импульсных сигналов, расположенным на шельфе Японского моря // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 5. С. 641–649.
4. Моргунов Ю.Н., Голов А.А., Каменев С.И., Матвиенко Ю.В. Средства и методы гидролого-акустического обеспечения высокоточного позиционирования подводных объектов на больших дальностях // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 6. С. 793–798.
5. Wu M., Barmin M., Andrew R., Weichman P., White A., Lavelly E., Dzieciuch M., Mercer J., Worcester P., Ritzwoller M. Deep water acoustic range estimation based on an ocean general circulation model: Application to PhilSea10 data // J. Acoust. Soc. Am. 2019. V. 146. P. 4754–4773.
6. Manul'chev D., Tyshchenko A., Fershalov M., Petrov P. Estimating sound exposure levels due to a broadband source over large areas of shallow sea // J. Marine Science and Engineering. 2022. V. 10. Art. No. 82.
7. Гулин О.Э. К расчетам низкочастотных акустических полей в нерегулярных волноводах при наличии сильного обратного рассеяния // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 4. С. 575–586.
8. Луньков А.А., Шерменева М.А. Спадание средней интенсивности звукового поля в мелководных волноводах с наклонным дном // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 5. С. 630–640.
9. Рутенко А.Н., Козицкий С.Б., Манульчев Д.С. Влияние наклонного дна на распространение звука // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 1. С. 76–89.
10. Zakharenko A.D., Trofimov M.Yu., Petrov P.S. Improving the performance of mode-based sound propagation models by using perturbation formulae for eigenvalues and eigenfunctions // J. Marine Science and Engineering. 2021. V. 9. № 9. Art. No. 934.
11. Zakharenko A.D., Trofimov M.Yu., Petrov P.S. Modal perturbation theory for the case of bathymetry variations in shallow-water acoustics // Rus. J. Math. Phys. 2021. V. 28. № 2. P. 257–262.
12. Bonnel J., Thode A., Wright D., Chapman R. Nonlinear time-warping made simple: A step-by-step tutorial on underwater acoustic modal separation with a single hydrophone // J. Acoust. Soc. Am. 2020. V. 147. № 3. P. 1897–1926.
13. Программный комплекс ac_modes. URL: https://github.com/kaustikos/ac_modes (дата обращения: 23.06.2022).

УДК 551.463

ВЛИЯНИЕ МЕЖМОДОВЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБРАБОТКИ АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ В ОКЕАНИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ СО ВЗВОЛНОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

© 2022 г. М. А. Раевский^а, В. Г. Бурдуковская^{а, *}^аИнститут прикладной физики РАН,
ул. Ульянова 46, Нижний Новгород, 603950, БОКС-120 Россия

*e-mail: bvg@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 21.04.2022 г.

После доработки 15.06.2022 г.

Принята к публикации 05.07.2022 г.

Исследуется влияние межмодовых корреляций на эффективность пространственной обработки сигнала в океанических волноводах со взволнованной поверхностью. Предложен алгоритм расчета корреляционной матрицы сигнала на апертуре горизонтальной антенной решетке (АР), учитывающий интерференционную структуру акустического поля в звуковом канале. Коэффициент усиления антенны анализируется для трех методов пространственной обработки: стандартного метода ФАР, метода оптимальной линейной обработки и метода оптимальной квадратичной обработки. Приведены результаты численного моделирования для гидрологических условий Баренцева моря в зимний период. Основное внимание уделяется интерференционным осцилляциям коэффициента усиления АР и зависимости от параметров задачи его значений, “сглаженных” на масштабе интерференционной структуры акустического поля в волноводе.

Ключевые слова: акустический волновод, ветровое волнение, многократное рассеяние, межмодовые корреляции, антенна, алгоритмы обработки

DOI: 10.31857/S0320791922060107

ВВЕДЕНИЕ

Одним из актуальных направлений теоретических исследований в акустике мелкого моря является изучение эффективности методов пространственной обработки сигналов удаленных источников с использованием протяженных антенных решеток (АР) [1–6]. Для исследования эффективности обнаружения (либо оценки параметров) акустических сигналов на фоне помех необходимо разработать теоретические или эмпирические модели, позволяющие рассчитывать корреляционные матрицы сигнала и помехи на апертуре АР. В частности, модель сигнала должна учитывать не только волноводный характер акустического поля в звуковом канале, но и его флуктуации, обусловленные ветровым волнением, случайными внутренними волнами и т.д. В типичных условиях мелкого моря сезонный профиль скорости звука зачастую полностью или частично открыт к свободной поверхности. В этом случае определяющее значение в формировании статистических характеристик сигнала приобретают эффекты многократного рассеяния акустического сигнала на взволнованной морской поверхности [7, 8].

Поскольку сами алгоритмы обработки частично когерентных сигналов хорошо известны [9–12], то исследование их эффективности, по сути, требует лишь конкретизации корреляционных матриц сигнала и помехи на апертуре АР.

В дальнейшем мы ограничимся простейшей моделью шума, некоррелированного на приемных элементах антенны, и уделим основное внимание статистической модели сигнала в волноводе со взволнованной свободной поверхностью. Имея в виду частотный диапазон $f \leq 500$ Гц, где затухание звука в волноводе относительно мало, для акустического поля будем использовать модовое разложение, а при вычислении корреляционной матрицы сигнала на апертуре АР – уравнения для моментов амплитуд нормальных мод в волноводе с нерегулярной границей. Именно такой метод использовался в предыдущих работах [4–6], где исследовалось влияние ветрового волнения на эффективность пространственной обработки сигнала с применением горизонтальной АР. При этом вычислялись корреляционные функции сигнала, усредненные по интерференционной структуре акустического поля в волно-

воде и, соответственно, анализировались коэффициенты усиления антенны (при различных способах обработки сигнала), “сглаженные” на пространственном интервале, превышающем периоды интерференционных осцилляций поля. Такой упрощенный подход, предложенный в работах [13, 14], позволил, не анализируя межмодовые корреляции, ограничиться расчетом на основании уравнения переноса лишь автокорреляционных функций модовых амплитуд, и в итоге плавной зависимостью “антенного выигрыша” от расстояния между источником и АР. При этом неисследованными остались следующие важные вопросы:

1. метод анализа локальной (т.е. при конкретном значении расстояния от АР до источника) эффективности пространственной обработки сигнала;
2. отличие таких локальных характеристик АР (например, коэффициента усиления) от “сглаженных” по интерференционной структуре характеристик;
3. влияние межмодовых корреляций на коэффициент усиления АР и зависимость этого эффекта от уровня ветрового волнения и длины акустической трассы.

Кроме того, сама идея использования усредненной по интерференционной структуре корреляционной матрицы сигнала для вычисления “сглаженных” характеристик обнаружения сигнала хотя и представляется разумной, но, строго говоря, не обоснована. Вычисление коэффициента усиления антенны при различных способах обработки сигнала, является, вообще говоря, нелинейной операцией и не коммутирует с операцией пространственного усреднения локальных характеристик. Для его обоснования необходимо сравнить результаты такого подхода и более строгой процедуры усреднения на максимальном масштабе интерференции мод непосредственно локальных значений коэффициента усиления АР. Все эти вопросы рассматриваются (разумеется, не в полном объеме) в данной работе.

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим акустическое поле, создаваемое тональным точечным источником в океаническом волноводе со взволнованной свободной поверхностью. Волновод предполагается горизонтально однородным с произвольным профилем скорости звука и также произвольной плоскостистой структурой дна. Для прикладных задач акустики мелкого моря наиболее интересен низкочастотный диапазон $f \leq 500$ Гц, где затухание в донном грунте относительно мало и возможно распространение звука на десятки и сотни километров. В этом случае удобно использовать модовое разложение акустического поля. Представим [15] поле точечного источника в дальней зоне в

виде разложения по ортонормированным собственным функциям $\Phi_p(z)$ невозмущенного волновода:

$$p(r, z, t) = \sum_p \frac{a_p \Phi_p(z)}{\sqrt{k_p r}} \exp[i(k_p r - \omega_0 t - \pi/4)], \quad (1)$$

где a_p – амплитуды мод, k_p – волновые числа, ω_0 – частота излучения, r – расстояние от источника до точки наблюдения. При учете затухания в среде распространения волновые числа являются комплексными, в этом случае k_p будет обозначать реальную часть волнового числа, а его мнимая часть будет выделяться отдельно. В отсутствие ветрового волнения амплитуды разложения a_p определяются глубиной источника z_n , т.е. (с точностью до коэффициента, зависящего от уровня излучения) $a_p = \Phi_p(z_n)$. При наличии ветрового волнения свободная поверхность волновода является случайной функцией горизонтальных координат x, y и времени t и описывается уравнением $z = \zeta(x, y, t)$. Соответственно, и амплитуды a_p являются случайными функциями переменных x, y, t . Для их описания обычно используются два первых момента $\langle a_p(\mathbf{r}, t) \rangle$ и $\langle a_p(\mathbf{r}_1, t) a_q^*(\mathbf{r}_2, t) \rangle$, где $\langle \dots \rangle$ означает операцию статистического усреднения по ансамблю реализаций случайной функции $\zeta(\mathbf{r}, t)$. Для пространственной обработки сигнала на апертуре горизонтальной АР необходимо вычислить функцию когерентности поля давления:

$$\begin{aligned} & \langle p(\mathbf{r}_1, z, t) p^*(\mathbf{r}_2, z, t) \rangle = \\ & = \sum_{p,q} \langle a_p(\mathbf{r}_1, t) a_q^*(\mathbf{r}_2, t) \rangle \frac{\Phi_p(z) \Phi_q^*(z)}{\sqrt{k_p k_q r_1 r_2}} \times \\ & \quad \times \exp[i(k_p r_1 - k_q r_2)], \end{aligned} \quad (2)$$

где z – глубина АР. Эта функция является квазислучайной, т.е. меняется нерегулярным образом при изменении расстояния от источника до антенны. Именно поэтому в работах [13, 14] было предложено вычислять функции когерентности, усредненные по интерференционным осцилляциям поля. Там же было показано, что для описания таких “сглаженных” по интерференционной структуре функций когерентности достаточно анализировать автокорреляционные функции мод:

$$N_p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle a_p(\mathbf{r}_1, t) a_p^*(\mathbf{r}_2, t) \rangle \quad (3)$$

(в случае стационарного ветрового волнения и тонального сигнала N_p не зависит от времени). Соответственно,

$$\begin{aligned} & \langle p(\mathbf{r}_1, z, t) p^*(\mathbf{r}_2, z, t) \rangle = \\ & = \sum_p N_p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \frac{\Phi_p^2(z)}{k_p \sqrt{r_1 r_2}} \exp[ik_p(r_1 - r_2)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Именно такое описание пространственных корреляций акустических мод использовалось ранее во всех работах [3–6], где исследовалось влияние ветрового волнения на эффективность пространственной обработки сигналов на апертуре горизонтальной АР. Тем самым, как предполагалось в этих работах, анализировались характеристики АР (в основном, ее коэффициент усиления), усредненные по интерференционной структуре акустического поля в волноводе, т.е. на масштабе $L = 2\pi \max[(k_p - k_q)^{-1}]$.

Здесь мы откажемся от этого приближения и будем анализировать эффективность пространственной обработки сигнала на произвольном удалении АР от источника. Для этого нам потребуется вычисление межмодовой корреляционной функции $\langle a_p(\mathbf{r}_1, t) a_q^*(\mathbf{r}_2, t) \rangle$. В многомодовом волноводе с нерегулярной свободной поверхностью для нее было получено уравнение переноса [14], которое является все же весьма сложным для непосредственного решения его аналитическими и численными методами. В то же время качественный анализ этого уравнения показал [14, 16], что для прогнозирования межмодовых корреляций в мелком море при типичных скоростях ветра можно использовать приближенное соотношение

$$\langle a_p(\mathbf{r}_1, t) a_q^*(\mathbf{r}_2, t) \rangle \approx \langle a_p(\mathbf{r}_1, t) \rangle \langle a_q^*(\mathbf{r}_2, t) \rangle,$$

т.е. при $q \neq p$ корреляционная функция равна произведению когерентных компонент модовых амплитуд, что существенно упрощает вычисление локальных функций пространственной когерентности поля давления на апертуре АР. Применимость этого приближения для условий распространения в мелком море обсуждается в [16]. Таким образом, для локальной корреляционной функции поля давления получаем выражение:

$$\begin{aligned} & \langle p(\mathbf{r}_1, z, t) p^*(\mathbf{r}_2, z, t) \rangle = \\ & = \sum_p \sum_{q \neq p} \langle a_p(\mathbf{r}_1, t) \rangle \langle a_q^*(\mathbf{r}_2, t) \rangle \frac{\Phi_p(z) \Phi_q(z)}{\sqrt{k_p k_q r_1 r_2}} \times \\ & \quad \times \exp[i(k_p r_1 - k_q r_2)] + \\ & + \sum_p N_p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \frac{\Phi_p^2(z)}{k_p \sqrt{r_1 r_2}} \exp[ik_p(r_1 - r_2)]. \end{aligned} \quad (5)$$

При этом следует учитывать, что средние значения модовых амплитуд затухают с расстоянием r по закону [14]:

$$\langle a_p(\mathbf{r}, t) \rangle = \Phi_p(z_n) \exp[-(\gamma_p + |\text{Im } k_p|)r], \quad (6)$$

где γ_p – декремент затухания когерентной компоненты модовой амплитуды a_p , в котором учтено рассеяние энергии данной моды как в другие моды дискретного спектра, так и в моды сплошного

спектра, $\text{Im } k_p$ – мнимая часть волнового числа, обусловленная потерями в донном грунте и водной среде. Автокорреляционная функция $N_p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ рассчитывается на основании уравнения переноса.

Введем декартову систему координат в горизонтальной плоскости, где начало координат совпадает с горизонтальными координатами источника и ось x проходит через центр АР. Абсциссу центра антенны обозначим R . В дальнейшем будем рассматривать функцию автокорреляции мод с поперечным разнесением точек наблюдения

$$N_p(\rho, x) = \left\langle a_p\left(-\frac{\rho}{2}, x\right) a_p^*\left(\frac{\rho}{2}, x\right) \right\rangle.$$

Уравнение переноса [13] для $N_p(\rho, x)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N_p(\rho, x)}{\partial x} = \\ & = \sum_{p_2} W_{pp_2}(\rho, x) N_{p_2}(\rho, x) - 2(\gamma_p + |\text{Im } k_p|) N_p(\rho, x), \end{aligned} \quad (7)$$

где W_{pp_2} – вероятность перехода между модами, описывающая эффекты взаимного рассеяния мод, локализованных в волноводе. Явный вид функций γ_p и W_{pp_2} приведен в работе [14] и в случае изотропного ветрового волнения выражается через его частотный спектр.

В дальнейшем нас будет интересовать коэффициент усиления АР при ее расположении в дальней зоне по отношению к источнику. В этом случае в формуле (5) для всех медленноменяющихся функций от r можно пренебречь отличием расстояния от источника до элементов антенны и учесть его только в фазовых множителях. Кроме того, путем добавления в двойной сумме по p и q слагаемого с $p = q$ перейдем в формуле (5) к независимому двойному суммированию по номерам мод. В дальнейшем нам потребуется корреляционная матрица сигнала на апертуре АР. Будем считать, что АР состоит из M элементов с межэлементным расстоянием d и ориентирована под углом φ_A в направлении на источник (угол отсчитывается от нормали к ее апертуре). Выражение для элементов корреляционной матрицы следует из (5) и может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} & N_{mn} = C_m C_n^* + \sum_p (k_p R)^{-1} \Phi_p^2(z) \times \\ & \quad \times [N_p(\rho = d|m - n| \cos \varphi_A, R) \times \\ & \quad \times \exp[ik_p d(m - n) \sin \varphi_A] - \\ & - \Phi_p^2(z_n) \exp\{-2(\gamma_p + |\text{Im } k_p|)R\}], \quad (8) \\ & C_m = \sum_p (k_p R)^{-\frac{1}{2}} \Phi_p(z_n) \Phi_p(z) \times \\ & \quad \times \exp[ik_p R + ik_p d \sin \varphi_A m - (\gamma_p + |\text{Im } k_p|)R]. \end{aligned}$$

Усреднение этого выражения по R на масштабе интерференционной структуры L приводит к формуле:

$$N_{mn} = \sum_p (k_p R)^{-1} \varphi_p^2(z) \times \quad (9)$$

$$\times N_p(\rho = d|m-n|\cos\varphi_A, R) \exp[ik_p d(m-n)\sin\varphi_A],$$

которая использовалась в предыдущих работах при расчете корреляционной матрицы сигнала. Отметим, что при получении (8), (9) пренебрегается кривизной фазовых фронтов акустических мод, что справедливо для расстояния $R \gg kL^2/8\pi$. При пространственной обработке сигнала на апертуре АР удобно использовать нормированную корреляционную матрицу с матричными элементами

$$\tilde{N}_{mn}(R) = \frac{N_{mn}(R)}{\sqrt{N_{mm}(R)}\sqrt{N_{nn}(R)}}, \quad (10)$$

т.е. межэлементными коэффициентами корреляции сигнала на апертуре АР.

Для количественной оценки эффективности пространственной обработки мы выберем коэффициент усиления антенны G , который стандартно определяется как величина выходного отношения сигнал/шум (ОСШ), отнесенная к величине ОСШ на отдельном элементе. Естественно, величина G зависит не только от вида корреляционной матрицы $\|N_{mn}\|$, но и метода пространственной обработки. Для сравнения мы выберем три метода пространственной обработки: стандартный метод формирования диаграммы направленности (ФАР), компенсированной в направлении на источник сигнала (величину G такой обработки обозначим G_0), метод оптимальной линейной обработки (коэффициент усиления обозначим G_1) и метод оптимальной квадратичной обработки (коэффициент усиления обозначим G_2). Поскольку нас интересует эффект, обусловленный статистической моделью сигнала, то в качестве помехи рассмотрим простейший вариант шума, некоррелированного на элементах АР. В этом случае, учитывая нормировку матрицы сигнала $\|N_{mn}\|$ и некоррелированность шума на всех элементах АР, для коэффициентов G_i имеем следующие выражения:

$$G_0(R) = \frac{1}{M} \times \quad (11)$$

$$\times \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M N_{mn}(R) \exp[-ik_A d(m-n)\sin\varphi_A],$$

$$G_1(R) = \lambda_1(R), \quad G_2(R) = \left[\sum_i \lambda_i^2(R) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

где $k_A = \omega/c(z_A)$, $\lambda_i(R)$ – собственные значения корреляционной матрицы $\|N_{mn}\|$, $\lambda_1(R)$ – макси-

мальное собственное значение. Аналогичные формулы приведены в работах [4, 5], но несколько в ином виде. Учитывая, что для нормированной матрицы сигнала $\sum_i \lambda_i(R) = \sum_n N_{nn}(R) = M$, нетрудно убедиться в тождественности соответствующих выражений. Что касается способа обработки, то метод ФАР не требует пояснений. Оптимальная линейная обработка состоит в скалярном умножении вектора сигнала на собственный вектор матрицы $\|N_{mn}\|$, соответствующий максимальному собственному значению $\lambda_1(R)$. Оптимальная квадратичная обработка сигнала является многоканальной и учитывает вклад всех собственных векторов корреляционной матрицы сигнала. При этом организуется несколько каналов обработки (число их равно рангу корреляционной матрицы), в каждом канале входной сигнал умножается на один из собственных векторов, после чего квадраты полученных для всех каналов скалярных произведений с весами, равными соответствующим собственным значениям $\lambda_i(R)$, поступают на сумматор и выход антенны. Очевидно, что значительного увеличения коэффициента усиления G_2 в сравнении с G_1 можно ожидать, если в результате декорреляции сигнала у матрицы $\|N_{mn}\|$ появятся несколько собственных значений, сопоставимых с $\lambda_1(R)$ (напомним, что для полностью когерентного сигнала матрица $\|N_{mn}\|$ имеет лишь одно ненулевое собственное значение).

Для получения конкретных результатов требуется также уточнить вид спектра ветрового волнения. В дальнейшем для частотного спектра изотропного волнения будем использовать общепринятую модель JONSWAP [17].

Прежде чем обсуждать результаты численного моделирования коэффициентов усиления G_i на основе приведенных выше формул, приведем некоторые качественные соображения о соотношении двух способов вычисления коэффициентов усиления G_1 и G_2 : на основании формулы (8), либо формулы (9). Полученное в данной работе выражение для локальной корреляционной матрицы $\|N_{mn}\|$ является не только более общим, но и физически наглядным, поскольку в явном виде разделяет вклад когерентной компоненты поля (диагональная матрица $\|C_m C_n^*\|$) и вклад его рассеянной компоненты. Соответственно, более наглядно и описание коэффициентов усиления G_1 и G_2 при оптимальной обработке сигнала. На малом удалении АР от источника рассеянная компонента пренебрежимо мала. В этом случае сигнал можно считать когерентным и матрица $\|N_{mn}\| = \|C_m C_n^*\|$. Как известно, диагональная матрица имеет лишь одно ненулевое значение, которое с учетом нормиров-

ки (10) равно M . С увеличением дистанции R эффекты многократного рассеяния накапливаются, вследствие этого относительный вклад рассеянной компоненты поля монотонно растёт и появляются другие ненулевые значения λ_i . Поскольку $\sum_i \lambda_i = M$, отсюда следует, что λ_1 , а значит и коэффициент усиления G_1 уменьшается с дистанцией, а выигрыш квадратичной обработки, т.е. G_2/G_1 монотонно растёт.

Описание коэффициентов усиления G_1 и G_2 с помощью усредненной по интерференционной структуре матрицы (9) не столь наглядно. Более того, если на значительном удалении оно удовлетворительно описывает “сглаженные” по дистанции результаты (см. следующий раздел), то на малом удалении АР от источника может приводить к неточным результатам. Действительно, для ориентированной под углом к источнику антенны даже на малых расстояниях, когда рассеянная компонента поля пренебрежимо мала и сигнал когерентен, матрица (9) не является диадной, т.е. обладает не одним, а несколькими ненулевыми собственными значениями. В этом случае $G_1 = \lambda_1 < M$ и $G_2 > G_1$. Таким образом, возникает ложный эффект декорреляции сигнала, который обусловлен не физическим механизмом рассеяния на ветровом волнении, а процедурой пространственного усреднения корреляционной матрицы. Для перпендикулярно ориентированной антенны ($\varphi_A = 0$) этот эффект отсутствует, поскольку когерентные моды на апертуре АН синфазны и все матричные элементы $\tilde{N}_{mn} = 1$. Для такой матрицы имеется лишь одно ненулевое собственное значение $\lambda_1 = M$, а значит $G_2 = G_1 = M$. Конкретная величина обсуждаемой ложной декорреляции может быть оценена лишь путем численного моделирования, но, очевидно, что она монотонно растёт с увеличением угла φ_A .

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Ввиду сложности задачи конкретные результаты были получены путем численных расчетов. При проведении численного моделирования наряду с приведенными выше уравнениями и аналитическими выражениями использовалась стандартная модовая программа. При этом очевидно, что интересующие нас эффекты наиболее значимы для условий распространения звука в мелком море. Рассмотрим результаты численных расчетов коэффициентов усиления G_i для мелководного звукового канала со слабым положительным градиентом скорости звука, что, например, типично для Баренцева моря в зимний период. Предполагая профиль скорости звука линейным, выберем следующие параметры: $c(0) = 1490$ м/с, $c(H) = 1500$ м/с, глубина дна $H = 200$ м. Тип и параметры донного грунта в мелком море отличаются большим разнообразием [18], но все же можно считать, что для верхнего (толщиной не-

сколько десятков метров) слоя донного грунта типичны неконсолидированные либо полуконсолидированные осадки. В качестве модели дна будем использовать жидкое полупространство. Эта модель широко применяется при численном моделировании не только для неконсолидированных осадков, где модуль сдвига практически равен нулю, но и для полуконсолидированных осадков, где модуль сдвига существенно меньше модуля сжатия и, соответственно, роль сдвиговых волн сравнительно невелика. Мы приведем результаты расчетов для двух моделей дна: неконсолидированные осадки с типичными параметрами $\rho_0 = 2$ г/см³, $c_l = 1800$ м/с, коэффициента затухания $\delta = 0.2$ дБ/км Гц и полуконсолидированные осадки с параметрами $\rho_0 = 2$ г/см³, $c_l = 2500$ м/с, $\delta = 0.1$ дБ/км Гц. Предполагаем, что источник с частотой излучения $f = 250$ Гц расположен на глубине $z_{\text{и}} = 100$ м. Горизонтальная АР с числом элементов $M = 51$ и межэлементным расстоянием $d = 3$ м расположена вблизи дна $z_A = 197$ м и ориентирована либо перпендикулярно к направлению на источник ($\varphi_A = 0$), либо под углом ($\varphi_A = 30^\circ$). Расчеты проводились для скорости ветра $V = 10$ и $V = 15$ м/с, т.е. умеренного и сильного ветрового волнения. На рис. 1 приведены результаты численного моделирования локальных коэффициентов усиления G_i в диапазоне расстояний $5 \leq R \leq 300$ км для антенны, ориентированной перпендикулярно к источнику. Анализируя эти результаты, отметим, прежде всего, что интерференционная изменчивость коэффициентов усиления порядка нескольких децибел, что существенно меньше интерференционных вариаций интенсивности самого поля в волноводе. При скорости ветра $V = 10$ м/с осцилляции значений G_0, G_1 не превышают 4–5 дБ. Коэффициент усиления G_2 , соответствующий оптимальной квадратичной обработке сигнала, имеет еще меньшие интерференционные осцилляции. На малых удалениях АР от источника ($R \leq 100$ км) они имеют значения порядка 2–2.5 дБ, а на значительных удалениях R порядка 200–300 км эти осцилляции не превышают 0.5–1 дБ. При скорости ветра $V = 15$ м/с максимальные интерференционные изменения всех коэффициентов усиления G_i не превышают одного децибела на малых удалениях АР от источника ($R \leq 50$ км) и практически отсутствуют при $R \geq 100$ км, что объясняется быстрым затуханием межмодовых корреляций при сильном ветровом волнении.

Для сравнения приведем результаты расчетов при $V = 10$ м/с интерференционной структуры интенсивности когерентной компоненты самого акустического поля, нормированной на значение, полученное при некогерентном суммировании мод:

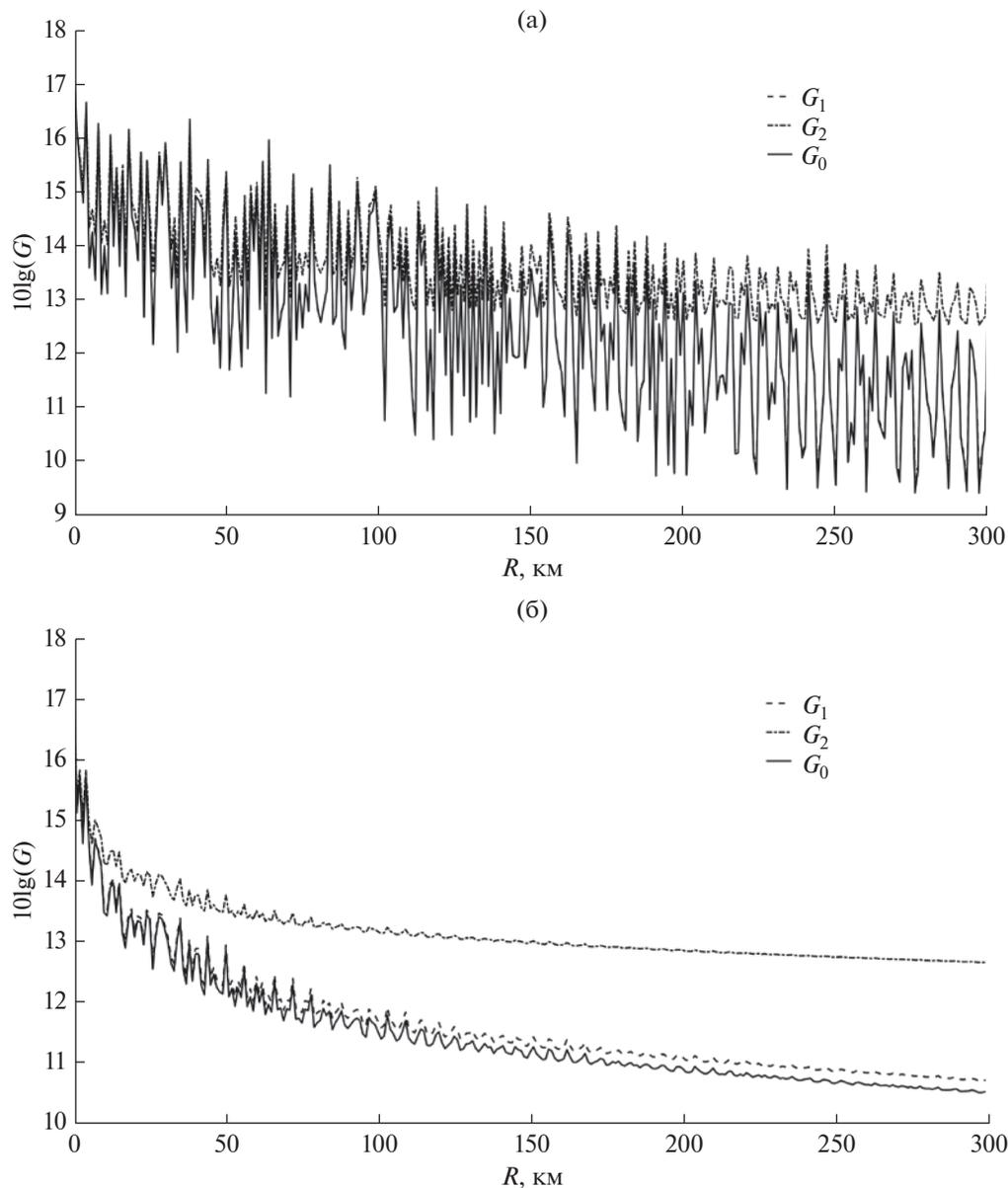


Рис. 1. Локальные коэффициенты усиления G_i для антенны, ориентированной перпендикулярно к источнику, при скорости ветра (а) – $V = 10 \text{ м/с}$ и (б) – $V = 15 \text{ м/с}$ (неконсолидированные донные осадки).

$$I(R) = \frac{\left| \sum_P (k_p R)^{\frac{1}{2}} \varphi_p(z_u) \varphi_p(z) \exp[ik_k R - (\gamma_p + |\text{Im } k_p|) R] \right|^2}{\sum_P (k_p R)^{-1} \varphi_p^2(z_u) \varphi_p^2(z) \exp\{-2(\gamma_p + |\text{Im } k_p|) R\}}. \quad (13)$$

Результаты расчетов $I(R)$ при скорости ветра $V = 10 \text{ м/с}$ и на глубине z_A приведены на рис. 2. Видно, что интерференционные осцилляции интенсивности акустического поля в волноводе весьма значительны и имеют характерные значения порядка 25–30 дБ. Таким образом, интерференционная изменчивость коэффициентов уси-

ления G_i существенно меньше, чем интерференционные вариации самого акустического поля.

Наряду с локальными значениями коэффициентов усиления АР при различных способах пространственной обработки представляют интерес и их значения, “сглаженные” на некотором интервале Δr , полученные путем усреднения локаль-

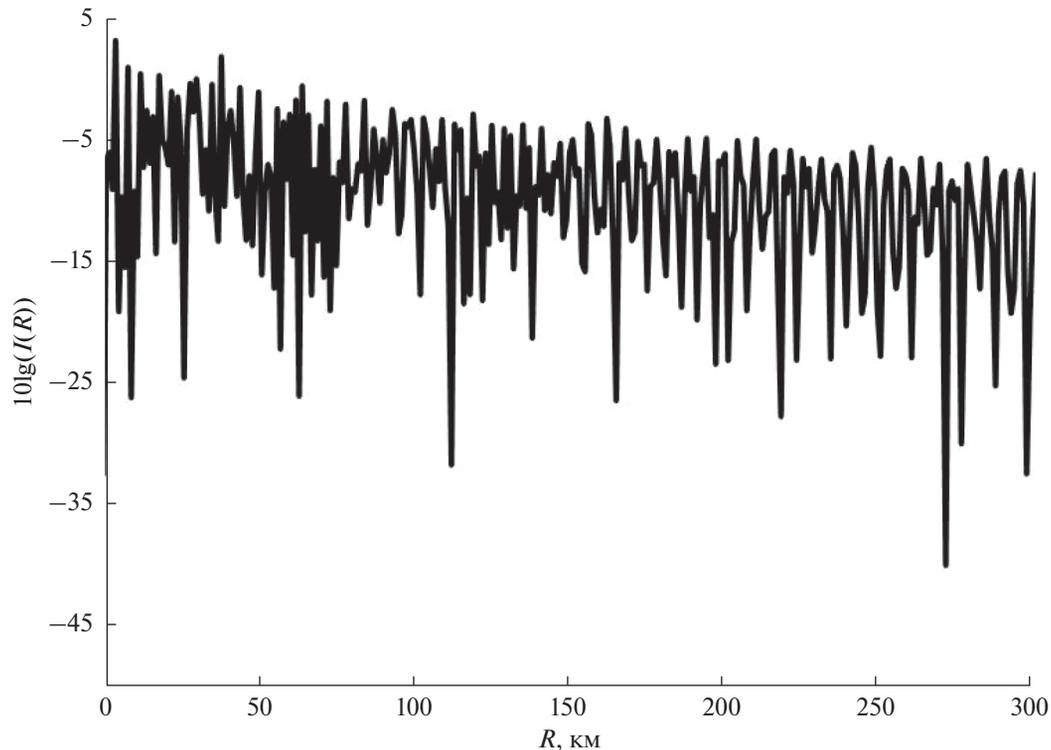


Рис. 2. Нормированная интенсивность когерентной компоненты акустического поля при скорости ветра $V = 10$ м/с.

ных значений скользящим окном. Результаты этой процедуры, обозначенные \bar{G}_i , при $\Delta r = 10$ км приведены на рис. 3–4. Там же для сравнения показаны расчетные кривые коэффициентов усиления, полученные аналогично тому, как это делалось в работах [4–6], т.е. с использованием усредненных по интерференционной структуре корреляционных функций сигнала, не учитывающих межмодовые корреляции. Сравнение этих результатов показывает, что при скорости ветра $V = 15$ м/с соответствующие значения коэффициентов усиления \bar{G}_i практически совпадают. При скорости ветра $V = 10$ м/с имеется некоторое отличие “сглаженных” на интервале Δr коэффициентов усиления G_i и аналогичных значений, полученных на основе усредненной по интерференционной структуре корреляционной функции сигнала, но это отличие невелико (менее децибела). Впрочем, и это малое отличие, по-видимому, может быть устранено путем уточнения процедуры пространственного “сглаживания” коэффициентов усиления на интервале Δr . Что касается изменения с дистанцией “сглаженных” по интерференционной структуре коэффициентов усиления, то результаты линейной обработки (G_1) и метода ДН (G_0) практически совпадают и монотонно спадают от значения 17 дБ, соответствующего когерентному сигналу, до 10.5–11 дБ на расстоянии $R = 300$ км. Выигрыш квадратичной обработки (отношение G_2/G_1) растет с расстоянием по мере увеличения

степени декорреляции сигнала и достигает 2 дБ при $R = 300$ км.

Зависимость локальных значений коэффициентов усиления G_i от расстояния до источника при ориентации антенны под углом $\varphi_A = 30^\circ$ приведена на рис. 5. Нетрудно видеть, что интерференционные осцилляции локальных коэффициентов G_i аналогичны случаю перпендикулярно ориентированной антенны. Для коэффициентов G_1 и G_0 они имеют характерные значения порядка 4–5 дБ при $V = 10$ м/с, а при $V = 15$ м/с не превышают одного децибела на малых расстояниях $R \leq 50$ км и практически отсутствуют на более значительном удалении АР от источника. Интерференционные осцилляции коэффициента G_2 , соответствующего оптимальной квадратичной обработке, при $V = 10$ м/с порядка 2–3 дБ на расстоянии $R \leq 100$ км и не превышают 1–2 дБ на удалении $R = 200$ –300 км. При скорости ветра $V = 15$ м/с интерференционные осцилляции G_2 менее децибела при $R \leq 100$ км и практически отсутствуют при дальнейшем удалении АР от источника. Следует также отметить, что на малых расстояниях G_0 существенно меньше G_1 , т.е. для АР, ориентированной под углом к источнику, метод ДН проигрывает оптимальной линейной обработке, поскольку не предполагает фазовой компенсации для каждой из акустических мод на апертуре АР [4]. При увеличении R модовый

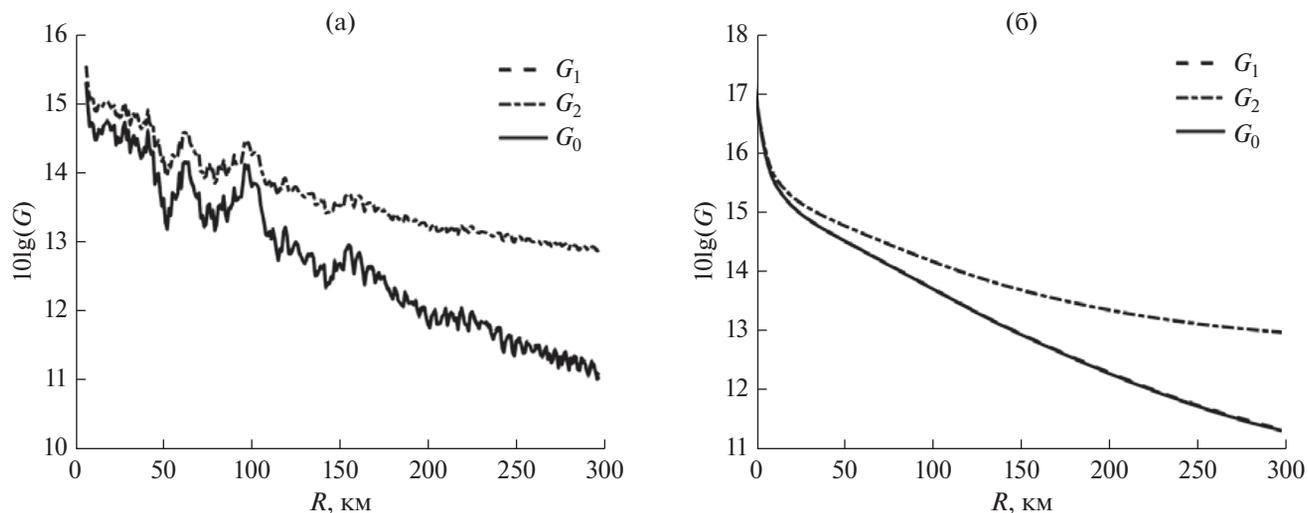


Рис. 3. Результаты численного моделирования при $\varphi_A = 0$, $V = 10$ м/с локальных коэффициентов усиления G_i : (а) – “сглаженных” на масштабе $\Delta r = 10$ км и (б) – коэффициентов усиления, полученных без учета межмодовых корреляций.

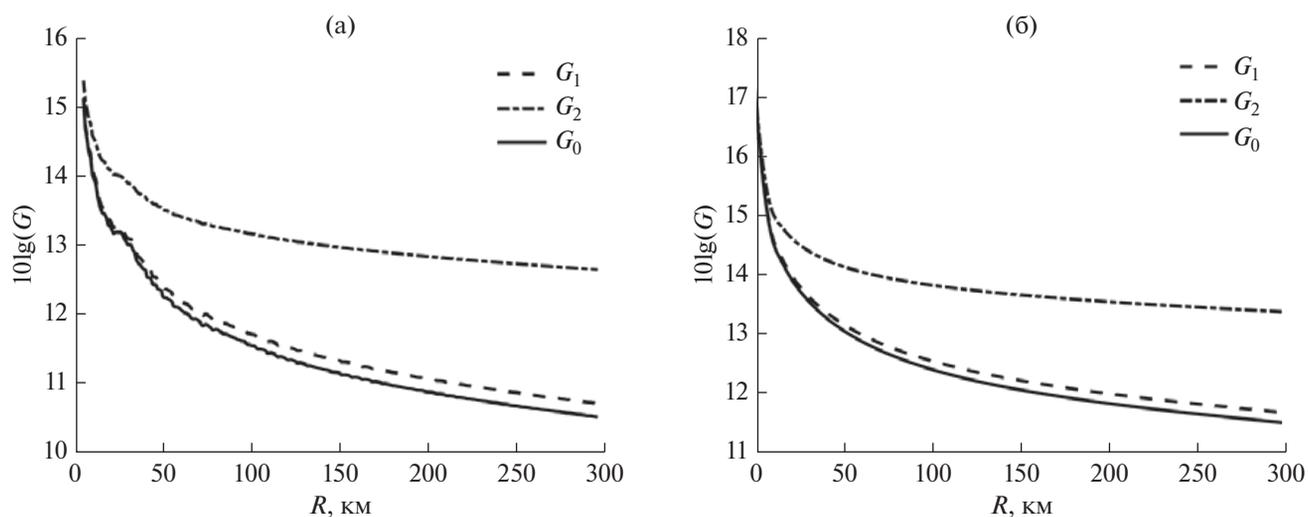


Рис. 4. То же, что на рис. 3, но для скорости ветра $V = 15$ м/с.

спектр сигнала сужается из-за затухания (вследствие рассеяния и потерь) энергии высших акустических мод, и значения G_0 и G_1 практически совпадают, отличие порядка 0.3–0.5 дБ. На рис. 6–7 приведены результаты расчета “сглаженных” на интервале $\Delta r = 10$ км значений G_i и, для сравнения, аналогичные результаты расчетов коэффициентов усиления с использованием корреляционной матрицы сигнала, усредненной по интерференционной структуре (т.е. не учитывающей межмодовые корреляции). Сравнение соответствующих значений коэффициентов усиления указывает на их малые отличия (в пределах 0.5 дБ) на расстояниях $R = 10$ –300 км. Обсуждавшийся выше эффект ложной декорреляции проявляется

на малом удалении антенны от источника $R < 10$ км, однако влияние его относительно невелико. Как видно на рис. 6б, 7б, при $R = 5$ км значение $G_1 = 16$ дБ, т.е. на 1 дБ меньше значения $10\lg(M) = 17$ дБ, соответствующего когерентному сигналу, а G_2/G_1 не превышает 0.3 дБ. Что касается величины монотонного уменьшения с расстоянием “сглаженных” значений коэффициентов усиления для G_0 и G_1 , то она равна 6 дБ на удалении $R = 300$ км и, соответственно, 4 дБ для коэффициента усиления G_2 . Таким образом, выигрыш квадратичной обработки достигает и в этом случае двух децибел.

Аналогичные расчеты, проделанные при различной глубине источника и АР, показывают, что

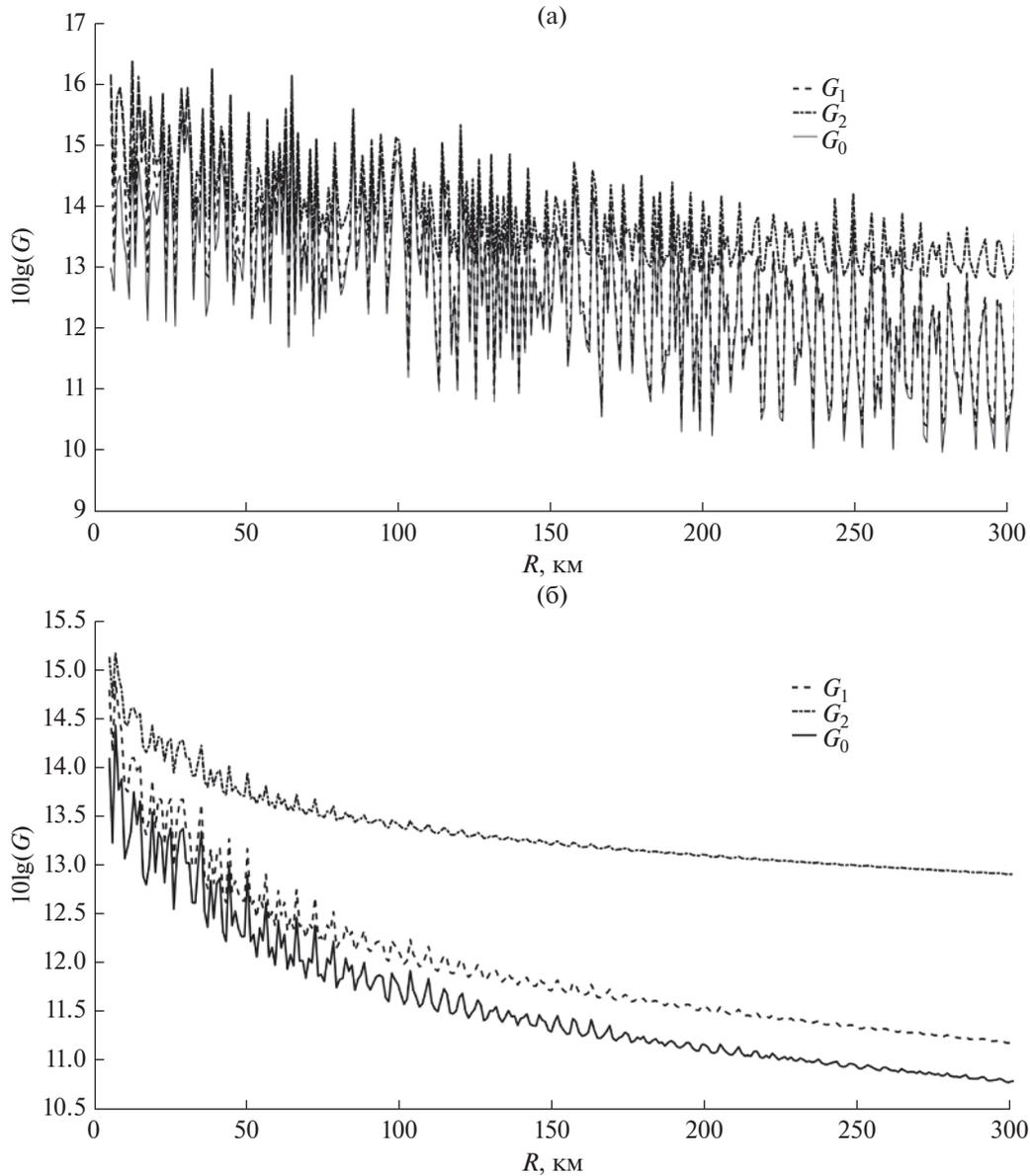


Рис. 5. Локальные коэффициенты усиления G_i для антенны, ориентированной под углом $\varphi_A = 30^\circ$, при скорости ветра (а) – $V = 10$ м/с и (б) – $V = 15$ м/с (неконсолидированные донные осадки).

и величина интерференционных осцилляций коэффициентов усиления G_i и скорость их монотонного спада при увеличении R зависят также от глубины источника и антенны. Например, при $z_{и} = z_A = 197$ м величины интерференционных осцилляций превышают значения, приведенные на рис. 1, и достигают на начальном участке трассы ($R \leq 50$ км) 5–6 дБ при $V = 10$ м/с и 2 дБ при $V = 15$ м/с.

Чтобы продемонстрировать зависимость рассматриваемых эффектов от характеристик донного грунта, приведем результаты численного моделирования для полупространства с параметрами, соответствующими полуконсолидированным осадкам ($c_i = 2500$ м/с, $\delta = 0.1$ дБ/км Гц) при попереч-

ной ориентации антенны, расположенной на глубине $z_A = 197$ м ($z_{и} = 100$ м). На рис. 8 приведены значения локальных коэффициентов усиления G_i при умеренном и сильном ветровом волнении. Нетрудно видеть, что качественный характер изменения с расстоянием коэффициентов усиления не изменился. Результаты метода ФАР практически совпадают с результатами оптимальной линейной обработки. При скорости ветра $V = 10$ м/с интерференционные осцилляций коэффициентов усиления G_0 и G_1 достигают 4 дБ и несколько уменьшаются (до 2 дБ) на максимальных удалениях антенны. Осцилляции результатов оптимальной квадратичной обработки и в этом случае

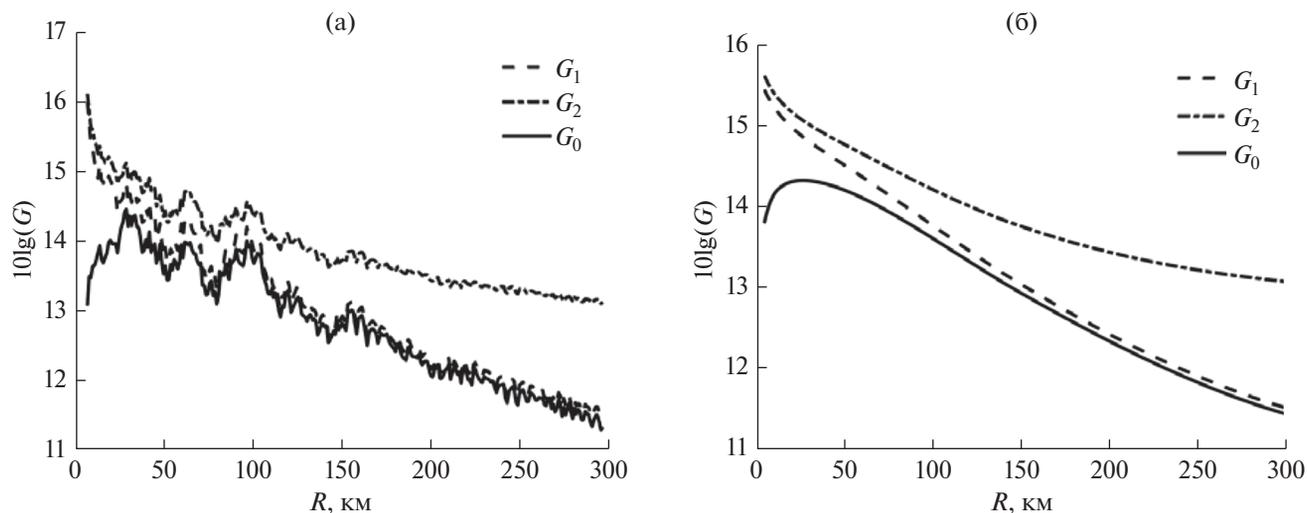


Рис. 6. Результаты численного моделирования при $\varphi_A = 30^\circ$, $V = 10$ м/с локальных коэффициентов усиления G_i : (а) – “сглаженных” на масштабе $\Delta r = 10$ км и (б) – коэффициентов усиления, полученных без учета межмодовых корреляций.

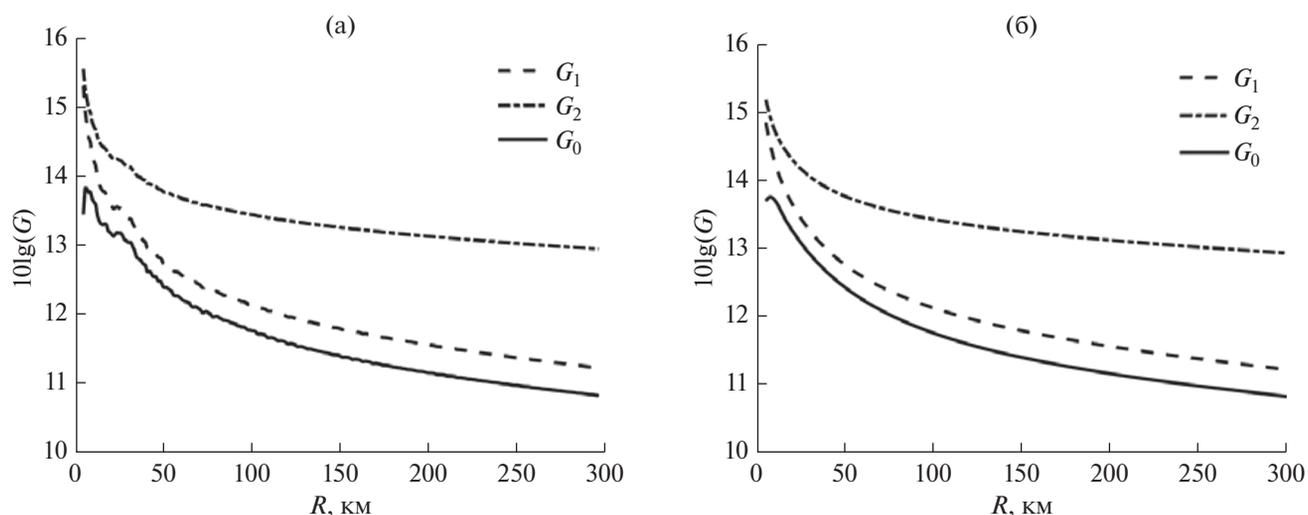


Рис. 7. То же, что на рис. 6, но для скорости ветра $V = 15$ м/с.

существенно меньше и имеют значения порядка 2 дБ, а на максимальном удалении не превышают 0.5 дБ. При скорости ветра $V = 15$ м/с осцилляции коэффициентов усиления G_0 и G_1 не превышают 2 дБ на малых удалениях АР от источника и практически отсутствуют при $R \geq 100$ км. Осцилляции коэффициента усиления G_2 вообще незначительны и не превышают децибелла на малых расстояниях R . “Сглаженные” на интервале $\Delta r = 10$ км значения коэффициентов усиления при скорости ветра $V = 15$ м/с практически совпадают с результатами расчетов с использованием усредненной по интерференционной структуре корреляцион-

ной матрицы сигнала (см. рис. 10). Аналогичное сопоставление результатов при $V = 10$ м/с (рис. 9) указывает на некоторые отличия, не превышающие децибелла, что, по-видимому, также может быть устранено путем уточнения процедуры усреднения локальных значений коэффициентов G_i . Основное отличие этих результатов от предыдущих расчетов для неконсолидированных донных осадков заключается в более заметном спадании коэффициентов усиления с увеличением дистанции R . При скорости ветра $V = 10$ м/с G_0 и G_1 уменьшаются вследствие декорреляции сигнала на 8 дБ, а коэффициент G_2 – на 5.5 дБ, т.е. выиг-

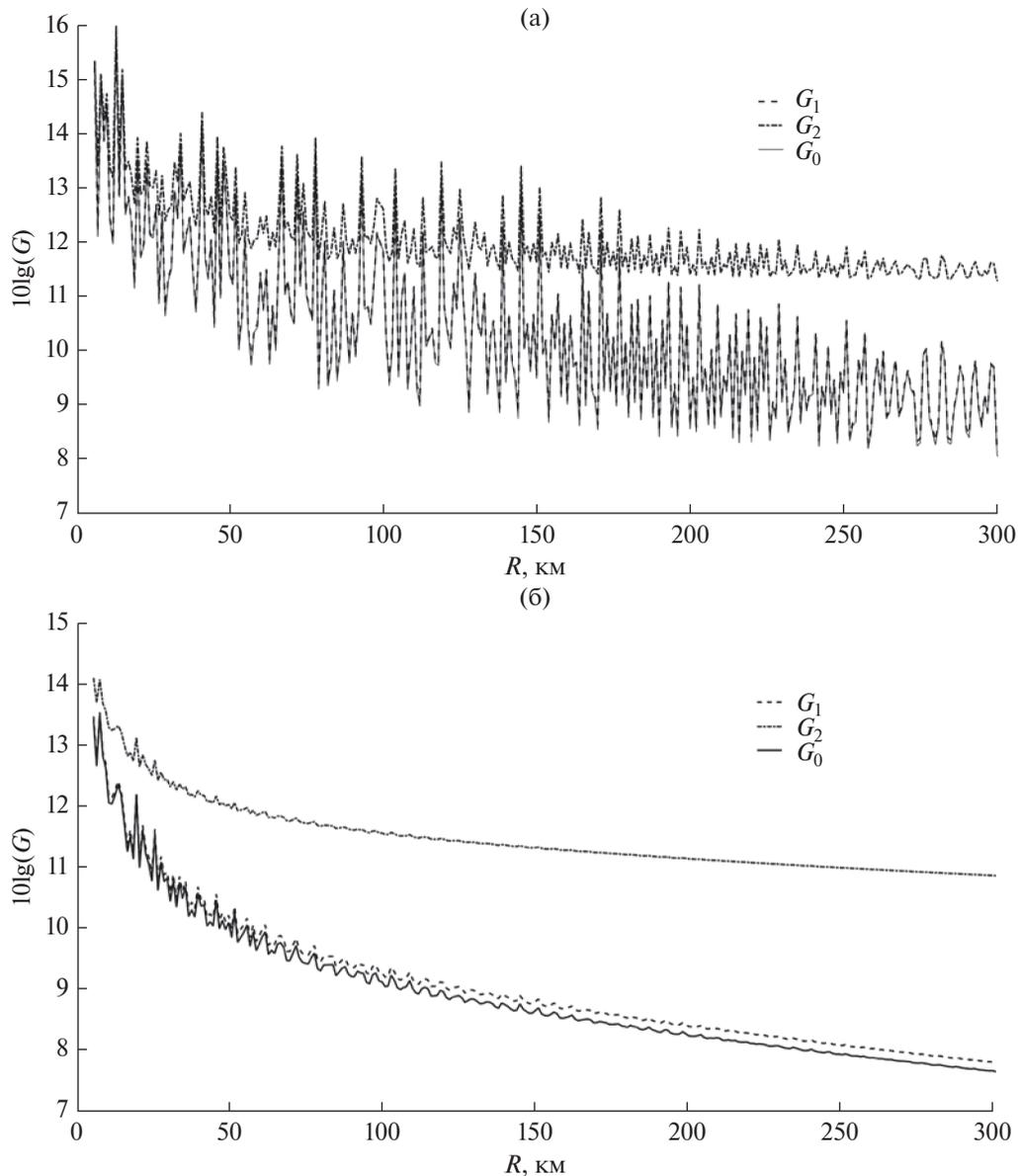


Рис. 8. Локальные коэффициенты усиления G_i для антенны, ориентированной перпендикулярно к источнику, при скорости ветра (а) – $V = 10$ м/с и (б) – $V = 15$ м/с (полуконсолидированные донные осадки).

рыш квадратичной обработки достигает 2.5 дБ. При сильном ветровом волнении ($V = 15$ м/с) спадание коэффициентов G_0 и G_1 равно 9 дБ при $R = 300$ км, а G_2 – соответственно 6 дБ, при этом выигрыш оптимальной квадратичной обработки сигнала в сравнении с оптимальной линейной достигает 3 дБ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследуется влияние ветрового волнения на эффективность пространственной обработки низкочастотных акустических сигналов в мелком море с использованием горизонтальной

антенной решетки. Основное внимание уделяется влиянию межмодовых корреляций на интерференционные осцилляции коэффициента усиления антенны и сравнению локальных (т.е. вычисленных при конкретном расположении АР относительно источника) и пространственно “сглаженных” значений коэффициента усиления. Анализируются три метода пространственной обработки сигнала: ФАР, оптимальная линейная обработка и оптимальная квадратичная обработка, для которых рассчитаны соответствующие коэффициенты усиления G_0 , G_1 и G_2 . Конкретные результаты получены путем численного моделирования для зимней гидрологии Баренцева моря. Чтобы продемонстрировать зависимость

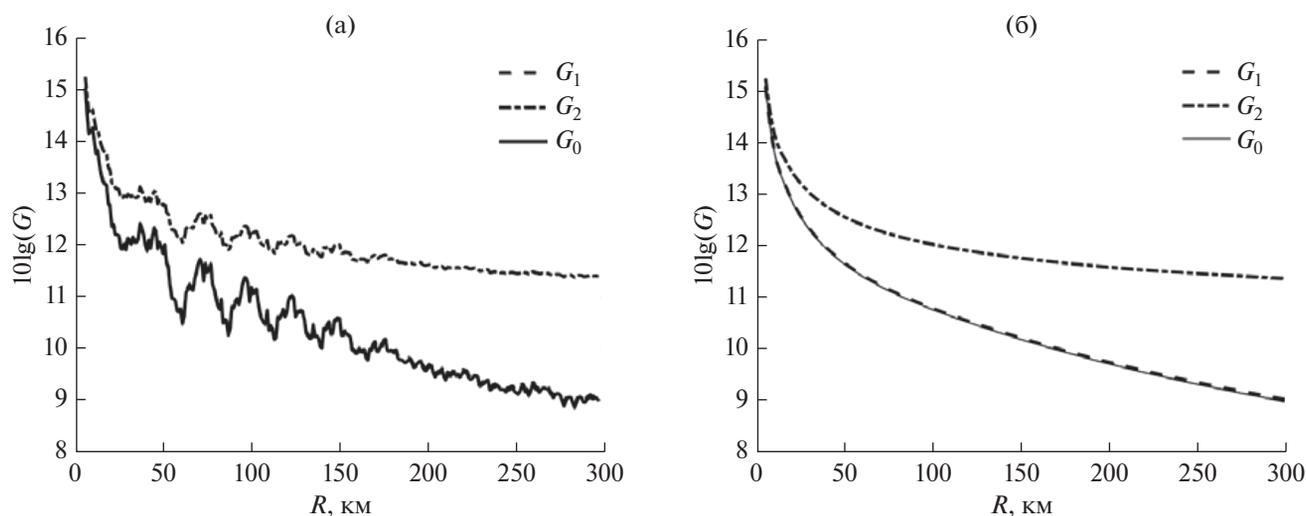


Рис. 9. Результаты численного моделирования ($\varphi_A = 0$, $V = 10$ м/с, полуконсолидированные донные осадки) локальных коэффициентов усиления G_i : (а) — “сглаженных” на масштабе $\Delta r = 10$ км и (б) — коэффициентов усиления, полученных без учета межмодовых корреляций.

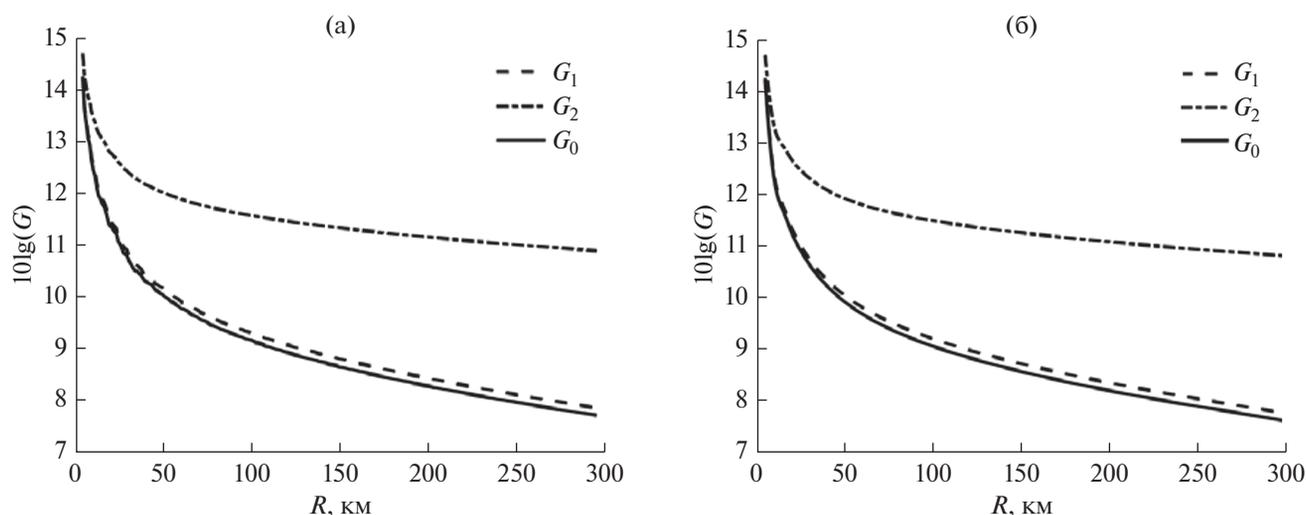


Рис. 10. То же, что на рис. 9, но для скорости ветра $V = 15$ м/с.

эффектов от характера донного грунта, расчеты проводились для неконсолидированных донных осадков с параметрами: продольная скорость звука $c_l = 1800$ м/с, плотность $\rho = 2$ г/см³, коэффициент затухания $\delta = 0.2$ дБ/км Гц, и полуконсолидированных с параметрами: $c_l = 2500$ м/с, $\rho = 2$ г/см³, $\delta = 0.1$ дБ/км Гц. На основании проведенных расчетов можно сделать следующие выводы. Для перпендикулярно ориентированной (по отношению к источнику) антенны коэффициенты G_0 и G_1 практически совпадают. Для антенны, ориентированной под углом 30° , метод ФАР существенно проигрывает методу оптимальной линейной обработки на малых удалениях АР от источника, поскольку при фазовой компенсации не учитывает

модовый спектр акустического поля. Интерференционные осцилляции G_0 и G_1 имеют характерные значения порядка 4–6 дБ (в зависимости от глубины источника) при умеренной скорости ветра $V = 10$ м/с. Интерференционные осцилляции коэффициента усиления G_2 существенно меньше: порядка 2 дБ на малых удалениях от источника $R \leq 100$ км и порядка 0.5–1 дБ на значительном удалении $R \approx 200$ –300 км. При сильном ветровом волнении ($V = 15$ м/с) осцилляции коэффициентов усиления G_i : порядка одного децибела на удалении антенны от источника $R \leq 100$ км и практически отсутствуют на значительном удалении $R \sim 200$ –300 км. Этот эффект объясняется

быстрым затуханием с расстоянием межмодовых корреляций при сильном ветровом волнении.

Наряду с локальными значениями коэффициентов усиления G_i , вычисляются их значения, усредненные на пространственном интервале $\Delta r = 10$ км, и проведено их сравнение с аналогичными расчетами на основании “сглаженной” по интерференционной структуре корреляционной матрицы сигнала. Показано удовлетворительное совпадение результатов, что является, в некоторой степени, обоснованием подхода, который использовался в предыдущих публикациях [4–6].

На основании приведенных выше физических соображений и численного моделирования можно сделать вывод, что качественные результаты о поведении интерференционных вариаций и сглаженных значений коэффициента усиления АР, полученные в работе, имеют достаточно общий характер. В то же время результаты конкретных расчетов чувствительны к изменениям профиля волновода, акустических параметров дна, глубины расположения источника и АР. Кроме того, существенное влияние на эти результаты может оказать и анизотропный характер частотно-углового спектра волнения [5].

Данная работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 20-19-00383.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Katsnelson B., Petnikov V., Lynch J.* Fundamentals of shallow water acoustics. New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer; 2012.
2. *Jensen F.V., Kuperman W.A., Porter M.B., Schmidt H.* Computational ocean acoustics. New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer. 2011.
3. *Городецкая Е.Ю., Малеханов А.И., Сазонтов А.Г., Фарфель В.А.* Влияние эффектов дальнего распространения звука в случайно-неоднородном океане на потери усиления горизонтальной антенной решетки // Акуст. журн. 1996. Т. 42. № 5. С. 615–622.
4. *Завольский Н.А., Малеханов А.И., Раевский М.А.* Сравнительный анализ методов пространственной обработки сигналов, принимаемых горизонтальной антенной решеткой в канале мелкого моря со взволнованной поверхностью // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 5. С. 608–618.
5. *Бурдуковская В.Г., Малеханов А.И., Раевский М.А.* Влияние анизотропного ветрового волнения на эффективность пространственной обработки акустических сигналов в мелком море // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 6. С. 617–625.
6. *Раевский М.А., Бурдуковская В.Г.* Пространственная обработка акустических сигналов в океанических волноводах на фоне шумов ветрового происхождения // Акуст. журн. 2023. Т. 69. № 1. (в печати).
7. *Раевский М.А., Хилько А.И.* О пространственно-временной когерентности низкочастотных акустических волн в мелком море с флуктуирующими параметрами // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 3. С. 369–376.
8. *Раевский М.А., Бурдуковская В.Г.* Эффекты многократного рассеяния акустических мод на анизотропном ветровом волнении в мелком море // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 1. С. 65–71.
9. *Монзинго Р.А., Миллер Т.У.* Адаптивные антенные решетки: Введение в теорию. Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1986. 448 с.
10. *Baker C.R.* Optimum quadratic detection of a random vector in Gaussian noise // IEEE Trans. Commun. Tech. 1966. V. 14. № 6. P. 802–805.
11. *Morgan D.R., Smith T.M.* Coherence effects on the detection performance of quadratic array processors, with applications to large-array matched-field // J. Acoust. Soc. Am. 1990. V. 87. № 2. P. 737–747.
12. *Малеханов А.И., Таланов В.И.* Об оптимальном приеме сигналов в многомодовых волноводах // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 5. С. 891–897.
13. *Артельный В.В., Раевский М.А.* О статистических характеристиках нормальных волн в волноводе с объемными неоднородностями // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1984. Т. 27. № 9. С. 1142–1150.
14. *Горская Н.С., Раевский М.А.* О многократном рассеянии низкочастотных акустических волн на поверхностном волнении // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 2. С. 165–171.
15. *Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. М.: Наука, 2007. 370с.
16. *Нечаев А.Г.* Затухание интерференционной структуры акустического поля в океане со случайными неоднородностями // Акуст. журн. 1987. Т. 33. № 3. С. 535–538.
17. *Давидан И.Н., Лопатухин Л.И., Рожков В.А.* Ветровое волнение в Мировом океане. Л.: Гидрометеопиздат, 1985. 256 с.
18. *Кацнельсон Б.Г., Петников В.Г.* Акустика мелкого моря. М.: Наука, 1997. 193 с.

УДК 534.21, 534.874, 534.23, 534.6.08

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ АКУСТИЧЕСКИХ ИСТОЧНИКОВ С ПОМОЩЬЮ МНОГОМИКРОФОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

© 2022 г. М. А. Демьянов^{a, b, *}^aФАУ ЦАГИ, Научно-исследовательский Московский комплекс ЦАГИ,
ул. Радио 17, Москва, 105005 Россия^bМосковский физико-технический институт,
пер. Институтский 9, Долгопрудный, Московская обл., 141700 Россия

*e-mail: demyanov@phystech.edu

Поступила в редакцию 16.05.2022 г.

После доработки 01.07.2022 г.

Принята к публикации 05.07.2022 г.

Разработан метод определения поля источников по данным многомикروفонных измерений, основанный на корреляционном анализе акустических полей. В предположении дельта-коррелированности поля источников, данный подход позволяет принципиально изменить математическую постановку обратной задачи таким образом, что задача становится корректно поставленной. В частности, данный метод дает возможность одновременно распознать монопольную и дипольную компоненты поля источников с помощью измерений плоской микрофонной решеткой. Метод верифицирован численно на различных тестовых примерах одновременного распознавания монопольной и дипольной составляющих поля источников.

Ключевые слова: микрофонные решетки, фазированная антенна, бимформинг источников сложной структуры, некоррелированные источники

DOI: 10.31857/S032079192206003X

ВВЕДЕНИЕ

Для идентификации источников звука в акустике используются методики, основанные на синхронных многомикروفонных измерениях [1]. Отдельно стоит выделить алгоритмы типа “бимформинг”, получившие широкое развитие применительно именно к задачам аэроакустики [2]. В классическом алгоритме Conventional Beamforming (CB) в качестве модели источников используются монополи. Такой выбор типа источников для обратной задачи нахождения амплитуд является целесообразным, если характеристики исследуемого звукового поля заранее не известны, а определить необходимо области генерации наиболее интенсивного излучения по отношению к позиции расположения микрофонной решетки. В ходе дальнейшего развития данного направления появились постановки задач, в рамках которых целесообразно разделять типы источников и рассматривать акустические источники сложной структуры [3–7]. В силу математической некорректности обратной задачи нахождения поля источников по индуцируемому звуковому полю [8], до сих пор не было адекватной естественной математической постановки, в рамках кото-

рой можно было бы рассмотреть объединенную модель источников, составленную из источников различного типа. Существующие алгоритмы имеют строгие ограничения применимости и обычно используют набор источников, ограниченных одним мультипольным типом [6, 7, 9]. В данной работе предложен новый теоретический подход для задачи определения поля амплитуд акустических источников. Основным достоинством предлагаемого метода является корректность обратной задачи. В частности, метод позволяет учитывать источники различного типа в единой модели источников. Особенностью данного метода является переход к рассмотрению корреляционных характеристик измеряемых акустических полей и индуцирующих их источников. При наложении на систему источников условия дельта-коррелированности, задача математически приобретает совершенно иные свойства, не присущие процессу, описываемому исходным волновым уравнением. Таким образом, оператор, фигурирующий в формулировке обратной задачи идентификации источников, перестает быть вырожденным. Данный подход позволил выделить в рамках задачи одновременного распознавания различные типы ис-

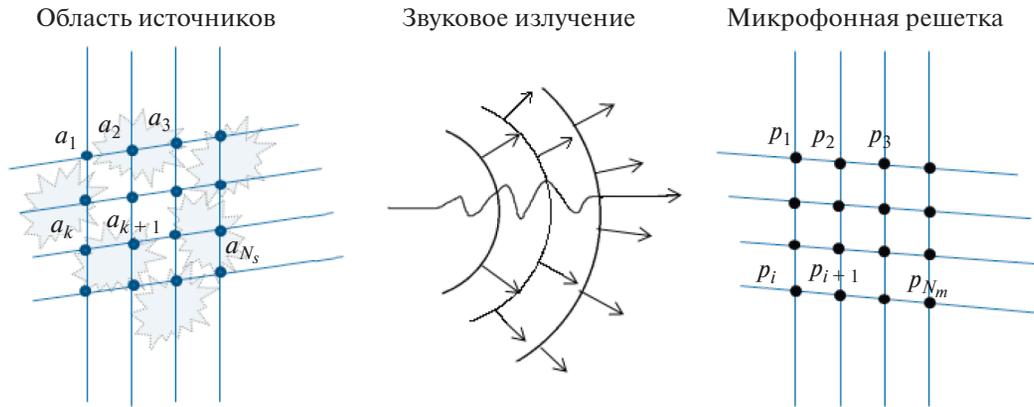


Рис. 1. Схема многомикрофонных синхронных измерений.

точников. Метод проверен на примере определения монопольной и дипольной компонент поля акустических источников и позволяет выделить обе компоненты с корректными значениями пространственного распределения амплитуд.

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ АКУСТИЧЕСКИХ ИСТОЧНИКОВ

Рассмотрим схему микрофонных измерений звукового поля, распространяющегося из области генерации, где расположены предполагаемые источники звука (рис. 1).

Область, из которой исходит акустическое излучение, разбивается на дискретную сетку, каждому узлу которой сопоставляется источник с заранее неизвестной амплитудой a_k . Тогда Фурье-образ давления, индуцируемого на i -ом микрофоне решетки, представляется в виде:

$$p_i = \sum_{k=1}^{N_s} G_{ik} a_k, \tag{1}$$

где G_{ik} — сигнал, индуцируемый единичным источником, расположенным в k -ом узле сетки источников, на i -ом микрофоне (столбцы матрицы $G_{ik} = (q_1 | q_2 | \dots | q_{N_s})$ называются направляющими векторами, представляющими собой давления, индуцируемые соответствующими единичными звуковыми источниками, расположенными в узлах сетки источников, на микрофонах решетки).

Искать непосредственно численное решение системы (1) в прикладных задачах зачастую не является возможным. Подробный численный анализ условий на поле источников и геометрию микрофонной решетки, при которых система уравнений (1) является хорошо обусловленной, представлен в работе [10].

Рассмотрим спектральную матрицу $p_i p_j^*$, здесь $\overline{\quad}$ означает осреднение по реализациям:

$$\overline{p_i p_j^*} = \sum_{k=1, p=1}^{N_s} \overline{G_{ik} a_k a_p^* G_{jp}^*}. \tag{2}$$

Данное выражение в матричной форме принимает вид:

$$C = G A G^H, \tag{3}$$

где $\overline{C_{ij}} = \overline{p_i p_j^*}$, $\overline{A_{kp}} = \overline{a_k a_p^*}$.

Для нахождения положений источников в пространстве и корреляционных соотношений

между ними (в частности, их амплитуд) необходимо решить матричное уравнение (3). Для этого удобно воспользоваться техникой кронекеровского произведения матриц [11]. В таком случае система примет вид:

$$\tilde{C} = (G \otimes G^*) \tilde{A}, \tag{4}$$

где

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} \overline{|p_1|^2} \\ p_1 p_2^* \\ \vdots \\ \overline{p_1 p_{N_m}^*} \\ p_2 p_1^* \\ \overline{|p_2|^2} \\ \vdots \\ p_2 p_{N_m}^* \\ \vdots \\ p_{N_m} p_1^* \\ \vdots \\ \overline{|p_{N_m}|^2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \overline{|a_1|^2} \\ a_1 a_2^* \\ \vdots \\ \overline{a_1 a_{N_s}^*} \\ a_2 a_1^* \\ \overline{|a_2|^2} \\ \vdots \\ \overline{a_2 a_{N_s}^*} \\ \vdots \\ a_{N_s} a_1^* \\ \vdots \\ \overline{|a_{N_s}|^2} \end{pmatrix},$$

$$G \otimes G^* = \begin{pmatrix} G_{11} G_{11}^* & G_{11} G_{12}^* & \cdots & G_{11} G_{1N_s}^* & G_{12} G_{11}^* & G_{12} G_{12}^* & \cdots & G_{12} G_{1N_s}^* & \cdots & G_{1N_s} G_{11}^* & \cdots & G_{1N_s} G_{1N_s}^* \\ G_{11} G_{21}^* & G_{11} G_{22}^* & \cdots & G_{11} G_{2N_s}^* & G_{12} G_{21}^* & G_{12} G_{22}^* & \cdots & G_{12} G_{2N_s}^* & \cdots & G_{1N_s} G_{21}^* & \cdots & G_{1N_s} G_{2N_s}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{11} G_{N_m 1}^* & G_{11} G_{N_m 2}^* & \cdots & G_{11} G_{N_m N_s}^* & G_{12} G_{N_m 1}^* & G_{12} G_{N_m 2}^* & \cdots & G_{12} G_{N_m N_s}^* & \cdots & G_{1N_s} G_{N_m 1}^* & \cdots & G_{1N_s} G_{N_m N_s}^* \\ G_{21} G_{11}^* & G_{21} G_{12}^* & \cdots & G_{21} G_{1N_s}^* & G_{22} G_{11}^* & G_{22} G_{12}^* & \cdots & G_{22} G_{1N_s}^* & \cdots & G_{2N_s} G_{11}^* & \cdots & G_{2N_s} G_{1N_s}^* \\ G_{21} G_{21}^* & G_{21} G_{22}^* & \cdots & G_{21} G_{2N_s}^* & G_{22} G_{21}^* & G_{22} G_{22}^* & \cdots & G_{22} G_{2N_s}^* & \cdots & G_{2N_s} G_{21}^* & \cdots & G_{2N_s} G_{2N_s}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{21} G_{N_m 1}^* & G_{21} G_{N_m 2}^* & \cdots & G_{21} G_{N_m N_s}^* & G_{22} G_{N_m 1}^* & G_{22} G_{N_m 2}^* & \cdots & G_{22} G_{N_m N_s}^* & \cdots & G_{2N_s} G_{N_m 1}^* & \cdots & G_{2N_s} G_{N_m N_s}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N_m 1} G_{11}^* & G_{N_m 1} G_{12}^* & \cdots & G_{N_m 1} G_{1N_s}^* & G_{N_m 2} G_{11}^* & G_{N_m 2} G_{12}^* & \cdots & G_{N_m 2} G_{1N_s}^* & \cdots & G_{N_m N_s} G_{11}^* & \cdots & G_{N_m N_s} G_{1N_s}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N_m 1} G_{N_m 1}^* & G_{N_m 1} G_{N_m 2}^* & \cdots & G_{N_m 1} G_{N_m N_s}^* & G_{N_m 2} G_{N_m 1}^* & G_{N_m 2} G_{N_m 2}^* & \cdots & G_{N_m 2} G_{N_m N_s}^* & \cdots & G_{N_m N_s} G_{N_m 1}^* & \cdots & G_{N_m N_s} G_{N_m N_s}^* \end{pmatrix}.$$

Проблема некорректности обратной задачи определения поля источников по индуцируемому звуковому излучению остается и в данной постановке. Покажем, что при переходе к рассмотрению акустических полей, индуцируемых дельта-коррелированными полями источников, проблема некорректности исчезает.

Предполагая дельта-коррелированность источников (матрица амплитуд примет диагональный вид $A_{kp} = a_k a_p^* = \overline{a_k^2} \delta_{kp}$), соотношение (4) можно упростить, убрав большую часть соотношений, выражающих корреляции между различными источниками:

$$\tilde{C}_{\text{reduce}} = (G \otimes G^*)_{\text{reduce}} \tilde{A}_{\text{uncorrelated}} \tag{5}$$

где

$$\tilde{C}_{\text{reduce}} = \begin{pmatrix} \overline{|p_1|^2} \\ p_1 p_2^* \\ \vdots \\ p_1 p_{N_m}^* \\ \overline{|p_2|^2} \\ \vdots \\ p_2 p_{N_m}^* \\ \vdots \\ \overline{|p_{N_m}|^2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{\text{uncorrelated}} = \begin{pmatrix} \overline{a_1^2} \\ \overline{a_2^2} \\ \vdots \\ \overline{a_{N_s}^2} \end{pmatrix},$$

$$(G \otimes G^*)_{\text{reduce}} = \begin{pmatrix} G_{11} G_{11}^* & G_{12} G_{12}^* & \cdots & G_{1N_s} G_{1N_s}^* \\ G_{11} G_{21}^* & G_{12} G_{22}^* & \cdots & G_{1N_s} G_{2N_s}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{11} G_{N_m 1}^* & G_{12} G_{N_m 2}^* & \cdots & G_{1N_s} G_{N_m N_s}^* \\ G_{21} G_{21}^* & G_{22} G_{22}^* & \cdots & G_{2N_s} G_{2N_s}^* \\ G_{21} G_{31}^* & G_{22} G_{32}^* & \cdots & G_{2N_s} G_{3N_s}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{21} G_{N_m 1}^* & G_{22} G_{N_m 2}^* & \cdots & G_{2N_s} G_{N_m N_s}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N_m 1} G_{N_m 1}^* & G_{N_m 2} G_{N_m 2}^* & \cdots & G_{N_m N_s} G_{N_m N_s}^* \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в силу того, что спектральная матрица $p_i p_j^*$ эрмитова, в редуцированной матрице $(G \otimes G^*)_{\text{reduce}}$ помимо столбцов, соответствующих корреляции различных источников, также выброшена часть строк, отличающихся только комплексным сопряжением и не вносящих новой информации.

Полученная система уравнений (5) является квазилинейной, так как элементы $\tilde{A}_{\text{uncorrelated}}$ есть средние квадраты мощности источников и не могут быть отрицательными – это существенное обстоятельство, которое учитывается в процедуре нахождения неизвестных.

Система (5) имеет свойства, отличные от свойств исходной системы (4). Это позволяет корректно поставить задачу идентификации источников в конфигурациях (типы источников, область их расположения и геометрия микрофонной решетки), некорректных в рамках исходной системы для коррелированных источников. Отличие операторов, фигурирующих в задачах (4) и (5), наглядно видно на примере непрерывной мо-

дели, где не произведена дискретизация сеткой источников:

$$p(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}, \xi) a(\xi) d\xi, \quad (6)$$

$$\overline{p(\mathbf{r}_1) p^*(\mathbf{r}_2)} = \int G(\mathbf{r}_1, \xi_1) G^*(\mathbf{r}_2, \xi_2) \overline{a(\xi_1) a^*(\xi_2)} d\xi_1 d\xi_2, \quad (7)$$

$$\overline{p(\mathbf{r}_1) p^*(\mathbf{r}_2)} = \int G(\mathbf{r}_1, \xi) G^*(\mathbf{r}_2, \xi) \overline{|a(\xi)|^2} d\xi, \quad (8)$$

где $G(\mathbf{r}, \xi)$ – функция Грина, соответствующая типу источника.

Формула (6) представляет решение для волнового уравнения. Формула (7) – это уравнение для корреляций, прямое следствие волнового уравнения. Формула (8) описывает решение для дельта-коррелированного поля источников $\overline{a(\xi_1) a^*(\xi_2)} = |a(\xi_1)|^2 \delta(\xi_1 - \xi_2)$. Некоррелированные источники звука (8), в отличие от коррелированных источников (7), (8), не могут быть в совокупности не излучающими, так как энергия, переносимая акустическим полем через поверхность, охватывающую источники, равна сумме энергий излучения от каждого источника по отдельности, и может обнулится, только если источники будут отсутствовать вовсе:

$$\iint \overline{|p(\mathbf{r})|^2} dS = \iint \int |G(\mathbf{r}, \xi)|^2 \overline{|a(\xi)|^2} d\xi dS. \quad (9)$$

Если $\int \overline{|a(\xi)|^2} d\xi > 0$, то $\iint \overline{|p(\mathbf{r})|^2} dS > 0$.

Отметим также, что выражение (8) при дискретизации уравнения и введении сетки источников принимает следующий вид:

$$\overline{p_i p_j^*} = \sum_{k=1}^{N_s} G_{ik} G_{jk}^* \overline{|a_k|^2} = \sum_{k=1}^{N_s} \overline{|a_k|^2} (q_k q_k^H)_{ij}.$$

Заметим, что корреляционный метод имеет возможность масштабирования по независимым микрофонным измерениям [12]. Для этого достаточно при формировании матриц \tilde{C} и $(G \otimes G^*)$ системы блоки, соответствующие различным измерениям, выписывать друг под другом:

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}^1 \\ \tilde{C}^2 \\ \vdots \\ \tilde{C}^{N_{\text{pos}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (G \otimes G^*)^1 \\ (G \otimes G^*)^2 \\ \vdots \\ (G \otimes G^*)^{N_{\text{pos}}} \end{pmatrix} \tilde{A}.$$

Для метода с некоррелированными источниками:

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}_{\text{reduce}}^1 \\ \tilde{C}_{\text{reduce}}^2 \\ \vdots \\ \tilde{C}_{\text{reduce}}^{N_{\text{pos}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (G \otimes G^*)_{\text{reduce}}^1 \\ (G \otimes G^*)_{\text{reduce}}^2 \\ \vdots \\ (G \otimes G^*)_{\text{reduce}}^{N_{\text{pos}}} \end{pmatrix} \tilde{A}_{\text{uncorrelated}}.$$

Стоит отметить еще, что постановка задачи с некоррелированными источниками корректно описывает и случаи, когда источники являются коррелированными, но масштаб их корреляции меньше разрешающей способности микрофонной решетки – в таком случае звуковое поле неотлично от поля дельта-коррелированных источников с направленностью такой же, как у отдельной когерентной структуры. В частности, это условие выполнено для компактных (характерный масштаб меньше длины волны) звуковых источников. При малых числах Маха ($M^2 \ll 1$) характерная длина излучаемой волны много больше размера вихревой зоны и возникающие источники можно считать компактными. Таким образом, при малых числах Маха дозвуковые аэродинамические источники шума могут быть корректно описаны в рамках предложенной парадигмы.

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО НАХОЖДЕНИЯ АМПЛИТУД ИСТОЧНИКОВ

Для упрощения записи, в данном разделе введены собственные обозначения, не связанные с другими частями статьи.

Для линейных систем вида $Ax = b$ с учетом того, что правая часть предполагается заданной с погрешностями, так как измерена в эксперименте, разумно искать решение как минимум выражения:

$$\|Ax - b\|_2 \xrightarrow{x} \min. \tag{10}$$

Решение задачи минимизации (10) эквивалентно решению линейной системы:

$$A^H Ax = A^H b. \tag{11}$$

Решение системы (11) можно искать с помощью метода сопряженных градиентов [13]:

$$\frac{1}{2}(c^H x + x^H c) + \frac{1}{2}x^H Gx \xrightarrow{x} \min, \tag{12}$$

где $G = A^H A$, $c = A^H b$.

Итерационная схема решения выглядит следующим образом:

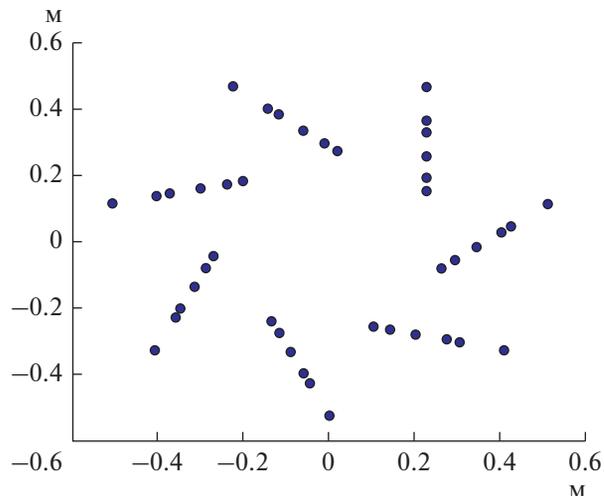


Рис. 2. Координаты микрофонов виртуальной плоской микрофонной решетки (оси представлены в метрах).

$$p_k = -g_k + \beta_k p_{k-1}, \quad \alpha_k = \frac{\|g_k\|_2^2}{p_k^H G p_k}, \tag{13}$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, \quad g_k = c + Gx_k, \quad \beta_k = \frac{\|g_k\|_2^2}{\|g_{k-1}\|_2^2}.$$

При этом для компонент x_{k+1} применяется дополнительная процедура, связанная с неотрицательностью средних квадратов амплитуд. Если в процессе итераций появлялись отрицательные компоненты x_{k+1} , то у них изменяется знак на противоположный:

$$\text{если } x_{k+1}^i < 0 \rightarrow x_{k+1}^i = -x_{k+1}^i, \quad i = \overline{1, N_s}. \tag{14}$$

В качестве стартовой точки алгоритма были выбраны значения:

$$\beta_0 = 0, \quad g_0 = c.$$

ВЕРИФИКАЦИЯ МЕТОДА

Верификация разработанного метода проводилась численно на модельных примерах идентификации взаимно некоррелированных источников, для этого в модель были одновременно заложены и монополь и диполь. Расположение источников моделировалось в плоскости, параллельной плоскости микрофонной решетки. Координаты источников, использующиеся для распознавания источников, изображены на рис. 2. Данная микрофонная решетка является виртуальным образом реальной микрофонной решетки, имеющейся в заглушенной камере АК-2 ЦАГИ.

Источники, располагающиеся в различных узлах сетки источников, предполагаются некоррелированными. При этом в каждом узле располагаются 3 типа источников, также не коррелированные

между собой, — монополь и две дипольные компоненты, ориентированные в плоскости источников:

$$\begin{aligned} G_{kl}^1 &= \frac{e^{ik|r_k^m - r_l^s|}}{|r_k^m - r_l^s|}, \\ G_{kl}^2 &= \frac{(r_k^m - r_l^s)_x e^{ik|r_k^m - r_l^s|}}{|r_k^m - r_l^s|^2} \left(ik - \frac{1}{|r_k^m - r_l^s|} \right), \\ G_{kl}^3 &= \frac{(r_k^m - r_l^s)_y e^{ik|r_k^m - r_l^s|}}{|r_k^m - r_l^s|^2} \left(ik - \frac{1}{|r_k^m - r_l^s|} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

где G_{kl}^1 — монополь, G_{kl}^2 — x -диполь, G_{kl}^3 — y -диполь (предполагается, что источники расположены в плоскости XY), r_k^m — координата k -го микрофона, r_l^s — координата l -го узла сетки источников.

При формировании спектральной матрицы

$C_{ij} = p_i p_j^*$ свойство некоррелированности источников моделировалось с помощью многократных реализаций с различными случайными фазами между всеми источниками. Конкретно в приведенных примерах было рассмотрено 150 реализаций.

Плоскость источников располагалась на расстоянии 1 м от плоскости микрофонной решетки.

Далее приводятся карты локализации источников на частоте 1000 Гц. Моделировалась пара источников — монополь и x -диполь. Монополь располагался в позиции $(-0.25, 0)$, x -диполь в позиции $(0.2, -0.2)$. Представлены 3 случая: одновременное моделирование монополя и диполя (входные данные — акустические поля от некоррелированных монополя и диполя), моделируется отдельно монополь (входные данные — акустическое поле монополя), моделируется отдельно диполь (входные данные — акустическое поле диполя).

Результаты локализации источников точно соответствуют заданным численным значениям. При этом для дипольной компоненты (как видно из рис. 3а, 3б) динамический диапазон для данной конфигурации составил ~ 6 дБ. При удалении из моделирования x -диполя соответствующий уровень интенсивности поля x -диполей уменьшился на ~ 9 дБ (рис. 3а, 3г, 3ж). При удалении монополя уровень интенсивности поля монополей уменьшился на ~ 12 дБ (рис. 3в, 3е, 3и).

Моделировалась также конфигурация источников, с тем же пространственным расположением, но с отличной амплитудой диполя — увеличенной в 3 раза (рис. 4).

Метод позволяет корректно распознать и монополь, и диполь при таком соотношении ампли-

туд. При этом, если судить по акустической карте для y -диполя, динамический диапазон составляет ~ 10 дБ относительно доминирующего дипольного источника.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДА

Для проверки возможности использования метода в реальном эксперименте было проведено исследование его устойчивости. Сначала было рассмотрено влияние неточности в задании волнового числа $k = \omega/c$. Для этого в качестве входных данных использовалось неверное значение скорости звука в среде c . Источники моделировались с $c = 330$ м/с. В реализованном алгоритме использовалось $c = 340$ м/с. Конфигурация источников использовалась та же, что на рис. 3. Сравнение результатов с корректным и неточным значениями волнового числа приведены на рис. 5.

Умеренное изменение волнового числа k не приводит к сильному искажению выводимой акустической карты. На рис. 5 видно, что локализация и значения амплитуд монопольного и дипольного источников почти не изменились. Если судить по компоненте y -диполя, который отсутствует при моделировании источников, то уровень динамического диапазона уменьшился на 1 дБ.

Исследовалось также влияние неточности задания положения плоскости источников по отношению к микрофонной решетке (рис. 6). Для этого положение плоскости локализации источников при обработке было параллельно смещено на 2 см от действительного. В этом случае рассмотрена конфигурация источников, где диполь имеет увеличенную в 3 раза амплитуду. Таким образом, амплитуда моделируемого диполя не пропала на фоне ошибок. Это связано с тем, что по структуре направленности диполя, микрофонная решетка находится в области минимума его акустического излучения и монополь доминирует по уровню индуцируемых на микрофонах сигналов.

Динамический диапазон упал с ~ 10 до ~ 4 дБ. Метод достаточно чувствителен к точности задания области расположения акустических источников при построении сетки источников, по крайней мере, в рассмотренной конфигурации микрофонной решетки, типов источников и области их локализации. Возможно, использование трехмерной микрофонной решетки [9, 12, 14] позволит улучшить качество идентификации и увеличит динамический диапазон, так как будет охватывать максимумы направленности дипольных источников звука.

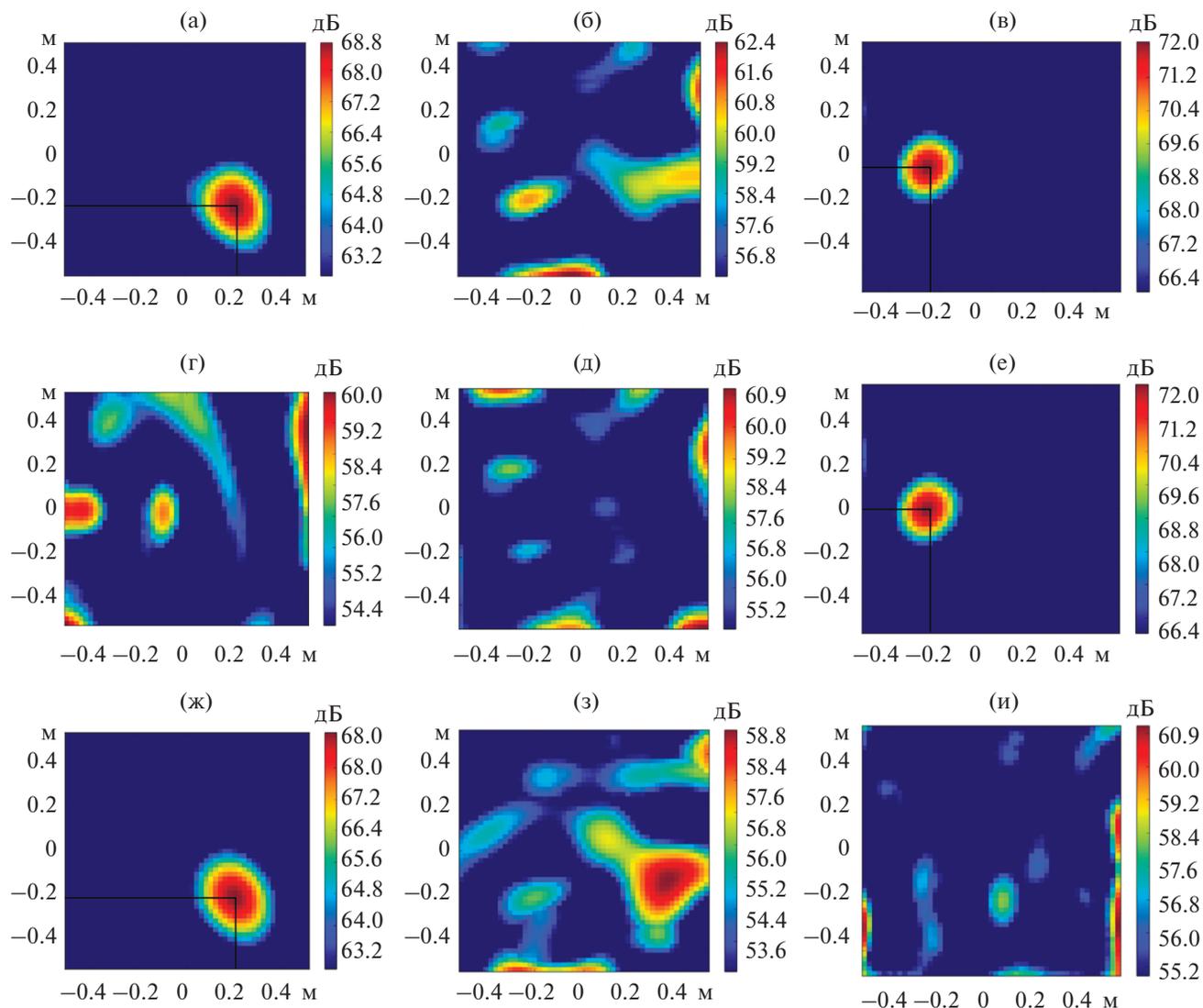


Рис. 3. Карты локализации акустических источников: (а)–(в) – одновременное моделирование монополя и x -диполя; (г)–(е) – моделирование монополя; (ж)–(и) – моделирование x -диполя; (а), (г), (ж) – вывод интенсивности x -диполя; (б), (д), (з) – вывод интенсивности y -диполя; (в), (е), (и) – вывод интенсивности монополя.

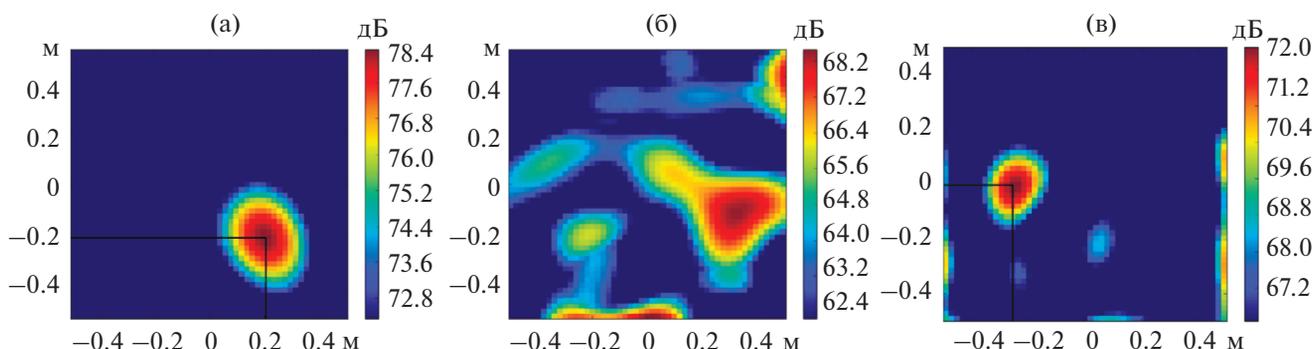


Рис. 4. Карты локализации акустических источников (амплитуда x -диполя в 3 раза больше амплитуды монополя): (а) – вывод интенсивности x -диполя; (б) – вывод интенсивности y -диполя; (в) – вывод интенсивности монополя.

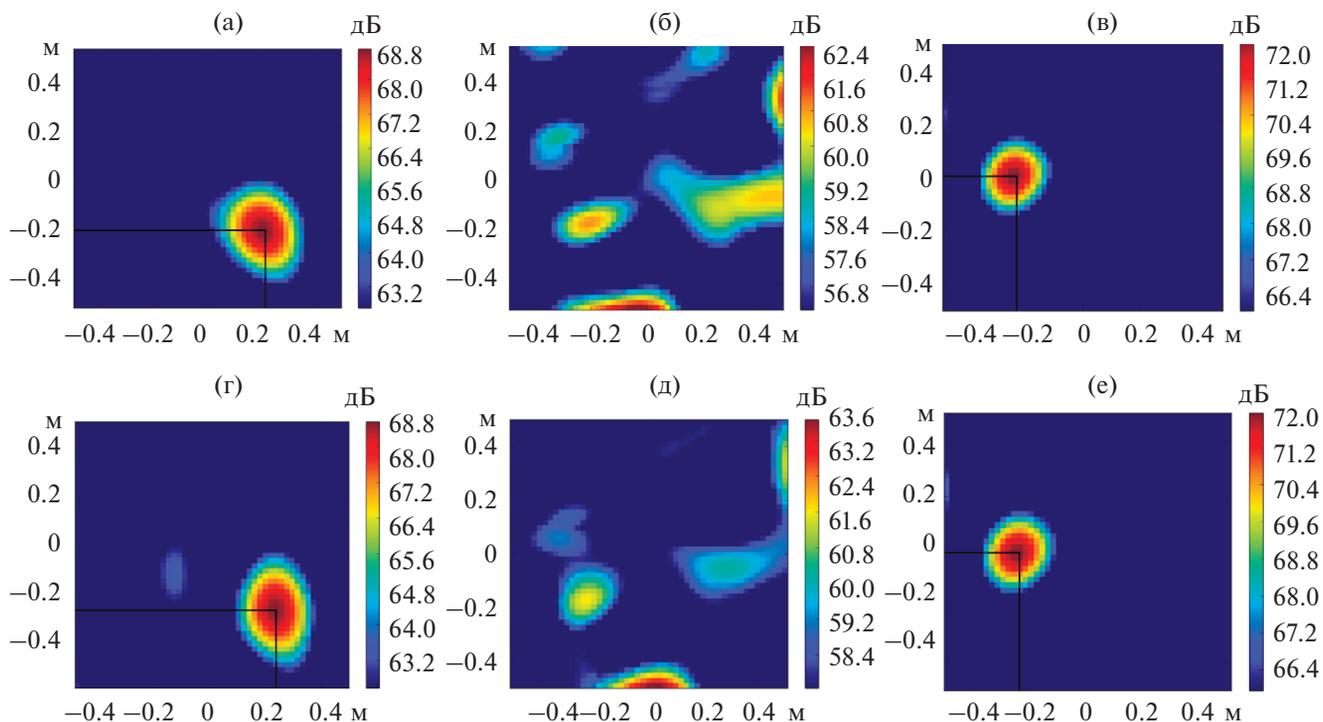


Рис. 5. Влияние неточности задания волнового числа. Одновременно моделировались монополь и x -диполь: (а)–(в) – волновое число задано корректно; (г)–(е) – волновое число задано с ошибкой, путем изменения скорости звука с 330 на 340 м/с.

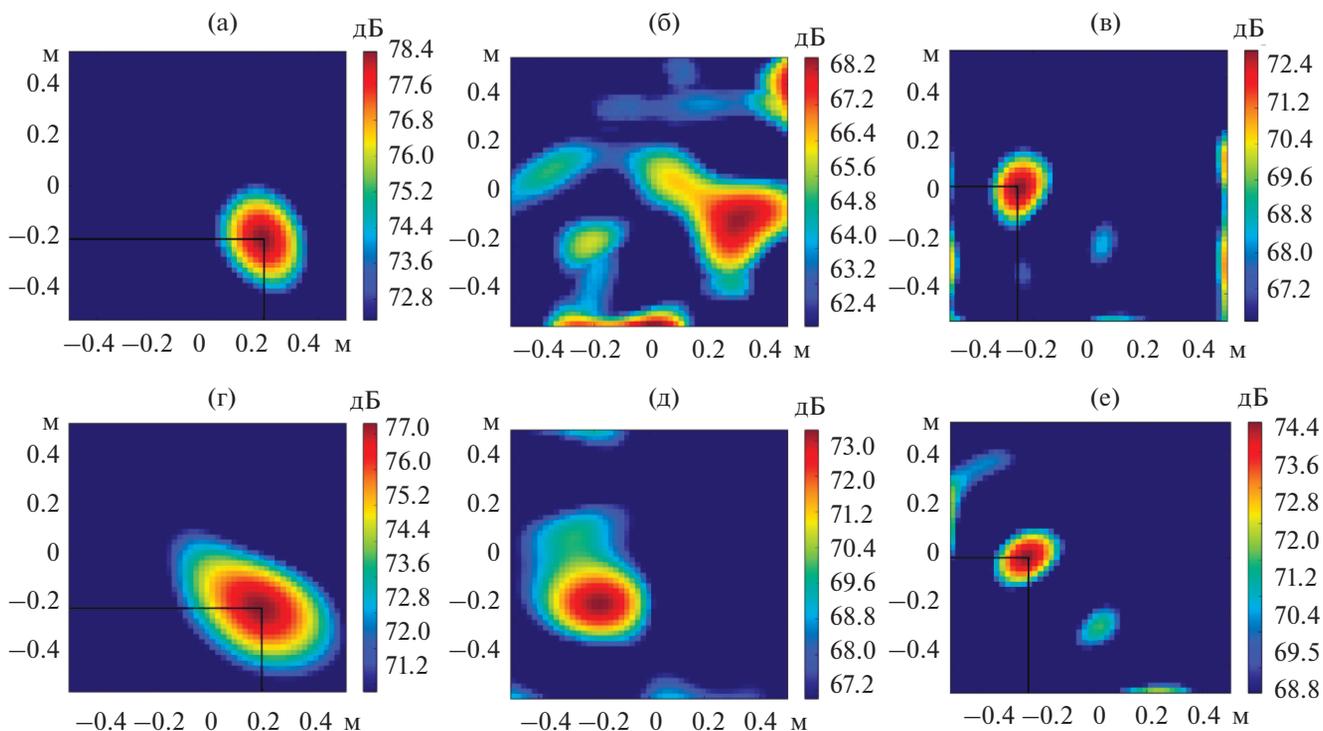


Рис. 6. Влияние неточности задания положения плоскости источников. Одновременно моделировались монополь и x -диполь с увеличенной в 3 раза амплитудой: (а)–(в) – положение сетки источников соответствует действительному положению источников; (г)–(е) – сетка источников сдвинута на 2 см от действительного положения источников в направлении от микрофонной решетки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан метод идентификации источников звука, основанный на корреляционном анализе акустических полей. В предположении некоррелированности звуковых источников, данный подход позволяет свести обратную задачу нахождения поля источников по данным многомикронных измерений к корректно поставленной задаче без привлечения дополнительных предположений о структуре источников. Отметим, что такой подход годится только в случае некоррелированных точечных источников. Результаты имеют общий характер, поэтому соответствие их авиационным приложениям и диапазон параметров, при которых такое предположение возможно, будет исследован в дальнейшем.

Разработанный метод численно верифицирован на примере определения полей источников, составленных одновременно из монополюсной и дипольных компонент. В результате численных тестов показано, что метод позволяет с помощью плоской микрофонной решетки одновременно корректно определять амплитуды монополюс и двух компонент диполей, с дипольными моментами, направленными параллельно плоскости микрофонной решетки. Исследована устойчивость метода по отношению к неточностям задания волнового числа и положению плоскости источников.

Дальнейшие исследования будут направлены на адаптацию разработанного метода применительно к шуму турбулентной струи и определению пространственного распределения интенсивности квадрупольных источников в соответствии с аналогией Лайтхилла [15].

Автор благодарит В.Ф. Копьева и Г.А. Фараносова за проявленный интерес к данной работе и плодотворные советы по представлению результатов при написании текста статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 21-71-30016).

Работа направлена на дальнейшее развитие УНУ “Заглушенная камера с потоком АК-2” ФГУП “ЦАГИ”, модернизируемой при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по соглашению № 75-11-2021-066.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Billingsley J., Kinns R.* The acoustic telescope // *J. Sound Vibr.* 1976. V. 48. P. 485–510.
2. *Michel U.* History of acoustic beamforming // 1st Berlin Beamforming Conference. 2006.
3. *Sijtsma P.* Beamforming on moving sources // NLR Technical Report. 2006. *NLR-TP-2006-733.*
4. *Sijtsma P.* Acoustic array corrections for coherence loss due to the wind tunnel shear layer // 2nd Berlin Beamforming Conference. 2008. *BeBeC-2008-15.*
5. *Dougherty R.P., Mendoza J.M.* Nacelle In-duct Beamforming using Modal Steering Vectors // AIAA paper 2008-2812, 2008.
6. *Liu Y., Quayle A., Dowling A., Sijtsma P.* Beamforming correction for dipole measurement using two-dimensional microphone arrays // *J. Acoust. Soc. Am.* 2008. V. 124. № 1. P. 182–191.
7. *Бычков О.П., Демьянов М.А., Фараносов Г.А.* Локализация дипольных источников шума плоскими микрофонными решетками // *Акуст. журн.* 2019. Т. 65. № 5. С. 675–687.
8. *Rienstra S.W., Hirschberg A.* An Introduction to Acoustics // Eindhoven University of Technology, 2004
9. *Porteous R., Prime Z., Doolan C., Moreau D., Valeau V.* Three-dimensional beamforming of dipolar aeroacoustic sources // *J. Sound Vibr.* 2015. V. 355. P. 117–134.
10. *Козубская Т.К., Плаксин Г.М., Софронов И.Л.* Постановка и метод решения задачи бимформинга для локализации акустического источника на основе данных вычислительного эксперимента // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2021. Т. 61. № 11. С. 1904–1926.
11. *Бурмистров А.Н., Демьянов М.А.* Краткий курс теории матриц: учеб. пособие. М.: МФТИ, 2017. 68 с. ISBN 978-5-7417-0628-2
12. *Демьянов М.А., Бычков О.П.* Обобщение стандартного алгоритма “бимформинг” для идентификации акустических источников с помощью несинхронных измерений микрофонной решеткой // *Акуст. журн.* 2022. Т. 68. № 2. С. 162–172.
13. *Гулл. Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985. 509 с.
14. *Padois T., Robin O., Berry A.* 3D Source localization in a closed wind-tunnel using microphone arrays // 19th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, AIAA Paper 2013-2213, 2013.
15. *Lighthill M.J.* On sound generated aerodynamically: I. General theory // *Proc. Royal Soc. A.* 1952. V. 211. № 1107. P. 564–581.

УДК 534.2

АНАЛИЗ ВТОРИЧНОГО ЗВУКОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В АКУСТИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ С ОПЕРАТОРОМ РАСПРОСТРАНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИМ ВИХРЕВЫЕ МОДЫ

© 2022 г. В. Ф. Копьев^а, *, С. А. Чернышев^а^аФАО «ЦАГИ», Научно-исследовательский Московский комплекс ЦАГИ,
ул. Радио 17, Москва, 105005 Россия

*e-mail: vkopiev@mksagi.ru

Поступила в редакцию 24.06.2022 г.

После доработки 24.06.2022 г.

Принята к публикации 05.07.2022 г.

Анализируется метод акустической аналогии применительно к звуковому излучению турбулентной дозвуковой струи. Этот метод описания процесса аэродинамической генерации звука турбулентными потоками основан на использовании линейного оператора распространения со случайным источником в правой части. Главной проблемой при таком подходе является выбор эффективного способа разделения левой части уравнения, отвечающей за распространение звуковых волн, и правой нелинейной части, отвечающей за генерацию звука, так, чтобы результат расчета шума соответствовал экспериментальным данным и физическим представлениям о процессе генерации шума турбулентностью.

Одной из нерешенных проблем описанного подхода, проявляющейся в большинстве акустических аналогий, является проблема так называемого сдвигового шума струи, связанного с возбуждением источниками вихревых возмущений сдвигового потока и дополнительным вкладом этих возмущений в звуковое излучение. До сих пор остается неясным, является ли сдвиговая компонента шума отражением реальных физических процессов или она связана с преобразованием уравнений и неточным моделированием источников в методе акустической аналогии. В настоящей работе в рамках сформулированной выше проблемы рассматривается акустическая аналогия, в которой в качестве оператора распространения используются линеаризованные уравнения Эйлера. При таком описании оператор распространения содержит вихревые моды, что приводит к появлению сдвиговой компоненты шума, которая возникает из-за накачки вихревых возмущений источниками в правой части.

При моделировании звуковых источников используются гипотезы о квадрупольном характере излучения, изотропности источников звука, а также пространственной некоррелированности процесса рождения звуковых источников. Для валидации модели используются данные измерений звукового излучения струи по методу азимутальной декомпозиции. Проведенное в работе сравнение модели и эксперимента указывает на отсутствие сдвиговой компоненты в шуме струи. Это позволяет сделать вывод о том, что используемое в рассматриваемой акустической аналогии представление о накачке линейных вихревых возмущений среднего течения нелинейными турбулентными пульсациями не соответствует реальному механизму генерации шума турбулентной струей. Анализируются возможные причины выявленного несоответствия модели звукового излучения струи данным акустических измерений в части сдвиговой компоненты шума. Рассматриваются возможные способы решения этой проблемы, позволяющие эффективно разделять левую часть уравнения, отвечающую за распространение звуковых волн, и правую нелинейную часть, отвечающую за генерацию звука.

Ключевые слова: турбулентная струя, генерация шума, акустическая аналогия, распространение звука, квадрупольные источники, сдвиговый шум

DOI: 10.31857/S0320791922060065

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема излучения шума турбулентными струями до сих пор не имеет общепринятого теоретического решения [1–3]. Причиной этого является, в первую очередь, нерешенность фундаментальной проблемы турбулентности. Кроме того, задача осложняется тем, что в турбулентной струе лишь малая часть гидродинамических пуль-

саций является эффективным источником шума, и в настоящее время нет общепринятого ответа на вопрос о том, какая составляющая турбулентных пульсаций в струе несет ответственность за генерацию шума.

Для определения звукового излучения струи в настоящее время широко применяются вихреразрешающие численные методы (LES). В этих рас-

четах удается определить многие важные характеристики турбулентных пульсаций в струе, в том числе и излучаемый ими шум [4–6]. Результаты численных расчетов имеют большое практическое значение и служат серьезной поддержкой в исследовании шума струи, но сами по себе они не дают понимания механизмов генерации звукового излучения турбулентными сдвиговыми потоками, которое необходимо для разработки методов снижения шума.

Основным направлением теоретического анализа процесса генерации шума турбулентными течениями является создание низко-порядковых моделей источников звука, в которых вместо решения полных уравнений газовой динамики делается попытка выделить основные факторы, ответственные за излучение звука турбулентностью. Разработка таких моделей опирается на те или иные гипотезы о механизмах шумообразования, корректность которых проверяется сравнением с экспериментом. В работах, связанных с моделированием источников звука, можно выделить несколько основных направлений. Одно из них основано на предположении о том, что основным источником звука являются крупномасштабные линейные возмущения среднего течения струи (волны неустойчивости Кельвина–Гельмгольца) [7–9]. При этом в качестве области течения, где происходит возбуждение волн неустойчивости, рассматриваются как кромка сопла [10], так и весь объем турбулентного потока [11, 12]. Следует отметить, что в дозвуковых струях волновые пакеты возмущений являются неэффективными излучателями звука, поскольку для таких пакетов лишь экспоненциально малая часть пространственно-временного спектра волнового пакета попадает в область сверхзвуковых фазовых скоростей, определяющую звуковое излучение. Кроме того, эти экспоненциально малые “сверхзвуковые хвосты” спектра очень чувствительны к форме волнового пакета, что делает оценку их вклада в шум струи в случае дозвуковых скоростей сильно зависящей от плохо прогнозируемых деталей самого пакета. Другое направление исследований основано на представлении о том, что основной вклад в генерацию звука дает мелкомасштабная турбулентность. Несмотря на то, что до сих пор отсутствует полная физическая модель мелкомасштабных источников звука, этот подход служит основой большого числа исследований и расчетов шума струи, например [13–19]. Отметим еще комбинированные модели, в которых предполагается, что в разных диапазонах частот и скоростей доминируют крупномасштабные или мелкомасштабные механизмы генерации шума [20–22]. Следует отметить также модели, в которых в качестве крупномасштабных возмущений, отвечающих за излучение звука, рассматриваются нелинейные крупные вихри. В частности, в работах [23, 24] рассматривается комбинированное излучение от собственных ко-

лебаний крупномасштабных вихрей и мелкомасштабных источников шума и оценивается их относительный вклад в шум для тонально возбужденной струи.

В настоящей работе проводится исследование механизма акустического излучения струи в рамках концепции мелкомасштабных источников шума. В работах этого направления стандартным подходом является метод акустических аналогий, основанный на разделении механизмов генерации и распространения звуковых возмущений. При этом исходные уравнения сплошной среды преобразуются к уравнениям, в левой части которых выделен оператор распространения, описывающий линейные возмущения системы, а остальные члены перенесены в правую часть уравнений и тракуются как источник, динамика которого может быть описана независимым образом. Метод акустической аналогии был впервые предложен Лайтхиллом [1], который использовал в качестве оператора распространения обычное волновое уравнение. Однако, при использовании аналогии Лайтхилла для описания шума струи возникают проблемы с моделированием направленности излучения. Это связано с тем, что в области малых углов к оси струи существенную роль играет эффект рефракции. В аналогии Лайтхилла члены уравнения, ответственные за рефракцию, отнесены в правую часть к источникам, для которых обычно используются упрощенные модели с эмпирической оценкой параметров. В этом случае учет эффекта рефракции оказывается затруднительным. Поэтому для моделирования излучения во всем диапазоне углов используются более сложные акустические аналогии, в которых эффект рефракции включен в оператор распространения. На этом пути был предложен ряд акустических аналогий, среди которых следует упомянуть аналогии Филиппса [25], Лилли [26], Хоу [27], Голдстейна [15] и др.

Необходимо заметить, что метод акустических аналогий содержит в себе ряд проблем теоретического характера, связанных с разделением системы на две части, одна из которых (источник) описывается как случайное поле, обеспечивающее накачку другой части системы (оператор распространения). Стохастизация процесса, т.е. описание сложной детерминированной системы методами вероятностного анализа является общим подходом при описании турбулентности ([28, 29] и др.). Но в отличие от классической однородной и изотропной турбулентности, турбулентность в сдвиговом течении характеризуется наличием неоднородного среднего течения, обладающего гидродинамическими (вихревыми) степенями свободы. Если эти гидродинамические степени свободы включены в оператор распространения, то они могут возбуждаться источниками, что приводит к некоторым вторичным эффектам, существенно влияющим на звуковое излучение.

Одной из таких проблем является то, что среди собственных решений оператора распространения могут содержаться решения, соответствующие неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. В этом случае возникает вопрос о том, какому условию должна удовлетворять функция Грина оператора распространения: условию ограниченности или причинности. Так, например, первоначальный вариант аналогии Голдстейна [15], где использовалась функция Грина, получаемая с условием ограниченности, позже был модифицирован с учетом условия причинности так, что функция Грина стала включать вклад волн неустойчивости Кельвина–Гельмгольца [11]. Однако, в дальнейшем были высказаны возражения против использования функции Грина с условием причинности при описании источников звука в струе [30]. Проблема неустойчивых мод в линейном операторе, описывающем распространение звуковых волн, возникает также при разработке численных методов, поскольку наличие таких мод приводит к неустойчивости численной схемы. Это заставляет использовать различные методы демпфирования численных схем [14] или переходить к другим аналогиям, не имеющим неустойчивых собственных решений [31].

Еще одна важная проблема метода акустических аналогий касается так называемого “сдвигового шума”. Именно эта проблема является предметом исследования настоящей работы. Необходимо отметить, что термин “сдвиговой шум” принято использовать в различных значениях в зависимости от используемой акустической аналогии [32]. Впервые этот термин появился, по-видимому, при описании источников шума в струе с помощью аналогии Лайтхилла. В этой аналогии звуковой источник включает квадратичные и линейные по возмущениям скорости члены. Вклад первых был отнесен к собственному шуму турбулентности, а вторых – к сдвиговому шуму. Анализ собственной и сдвиговой составляющих шума струи в аналогии Лайтхилла проводился, в частности, в работах [33–37]. Впоследствии термин “сдвиговой шум” стали использовать применительно к акустическим аналогиям, в которых все линейные по возмущениям члены перенесены в левую часть. Это касается, в частности уравнения Лилли. В этом случае использовалось другое определение, согласно которому к источникам сдвигового шума были отнесены члены в правой части уравнения, имеющие коэффициенты, пропорциональные средней завихренности. Сравнение двух альтернативных представлений о сдвиговом шуме в рамках аналогий Лайтхилла и Лилли проводилось в работе [32], посвященной оценке шума струи на основе уравнения Лилли.

Сдвиговой шум является существенной составляющей в суммарном шуме струи, а в некотором диапазоне параметров эта составляющая может доминировать. В частности, это касается об-

ласти низких частот, а также излучения источников, расположенных в области течения с большими градиентами скорости, например, на начальном участке струи. Это определяет важность вопроса о том, насколько модели, предсказывающие сдвиговой шум, соответствуют реальному процессу излучения звука турбулентными течениями. Однако, несмотря на это, сама постановка проблемы сдвигового шума была подвергнута критике в работах [14, 38]. Приведенные аргументы состоят в том, что хотя уравнение Лилли и содержит в правой части члены, пропорциональные средней завихренности, но оно само является результатом преобразований линеаризованных уравнений Эйлера с нелинейной правой частью, в которых нет такого рода членов. Отсюда был сделан вывод о том, что разделение источников шума на две составляющие в уравнении Лилли не отражает физической природы генерации шума, а является искусственным следствием математических преобразований. Одновременно с этим Голдстейном была предложена акустическая аналогия [15], в которой была реализована идея использования линеаризованных уравнений Эйлера в качестве оператора распространения с нелинейными членами в качестве источника. Работы Морриса [14, 38] и разработка аналогии Голдстейна, одновременно с успешным внедрением численных методов в задачах расчета шума струи, по-видимому, послужили причиной прекращения серьезных усилий в направлении решения проблемы сдвигового шума. Поэтому последующие работы, связанные с использованием акустических аналогий, были в основном связаны с численной и экспериментальной оценкой характеристик случайного поля источников в рамках аналогии Голдстейна.

Однако, в действительности, переход от уравнения Лилли к аналогии Голдстейна лишь маскирует, но не решает проблему сдвигового шума, за которой стоит физическая проблема взаимодействия звуковых источников с линейными колебаниями сдвигового течения. В этом можно убедиться на примере рассмотренной в настоящей работе (раздел 3) модельной задачи об излучении звукового поля точечным квадрупольным источником в плоскопараллельном слое смещения. В этой задаче исходные уравнения не содержат членов, пропорциональных завихренности, но такой член появляется в решении, что связано с тем, что при помещении квадрупольного источника в сдвиговое течение пространственные составляющие квадруполя оказываются в областях течения с различной средней скоростью. В результате решение имеет две составляющие, одна из которых является собственным излучением источника, а другая пропорциональна градиенту скорости в сдвиговом потоке. Вторая составляющая связана с возбуждением источником вихревых возмущений сдвигового потока и в соответствии с

этим интерпретируется как сдвиговое излучение. В таком понимании сдвиговой шум не зависит от математических преобразований, а определяется наличием гидродинамических степеней свободы в линейном операторе распространения, используемом в акустической аналогии.

Помимо проблем, связанных с оператором распространения, важным вопросом является моделирование источников в правой части акустической аналогии. При моделировании источников обычно принимается ряд предположений об их пространственной структуре и динамике, одно из которых касается порядка мультипольности звуковых источников в струе. Этот вопрос до настоящего времени вызывает споры по причине того, что распределенное поле источников может быть записано различными эквивалентными способами. Так, например, поле дипольных источников эквивалентно полю монополей, связанному с диполями оператором дивергенции. Аналогичная связь существует между квадрупольными и дипольными представлениями поля источников. Эта неоднозначность послужила причиной создания ряда моделей звукового излучения струи, в которых в качестве источников рассматривались мультиполи разного порядка: монополи [13], диполи [14] или квадрупольные [11, 16, 17]. Выбор порядка мультипольности источников, зависит, в первую очередь, от предназначения модели. В частности, для предсказания одноточечных характеристик звукового поля струи вполне достаточно наиболее простая модель монопольных источников. Однако, для предсказания корреляционных характеристик звукового поля учитывается квадрупольность звуковых источников является существенным [18]. В настоящей работе выбирается квадрупольное представление источников, что необходимо для анализа азимутальных гармоник звукового излучения струи.

При разработке и использовании моделей квадрупольных источников проблемой является необходимость задания большого количества параметров корреляции компонент тензора второго ранга, определяющего источник звука в правой части. Принятое в настоящей работе предположение об изотропности квадрупольных источников позволяет существенно уменьшить количество эмпирических параметров. Основанием для этого предположения служит то, что видимое отсутствие сферической симметрии излучения струи может быть связано не с неизотропностью источника, а с эффектами конвекции и рефракции. В то же время, сам процесс генерации звука мелкомасштабными источниками может иметь при этом изотропный характер. Предположение об изотропности источников использовалось ранее при построении моделей звуковых источников в работах [39–42]. Однако, имевшиеся тогда данные акустических измерений не могли служить надежной базой для проверки этой гипоте-

зы. Измерения азимутальных гармоник звукового излучения, используемые в настоящей работе, позволяют вернуться к этому вопросу на новом уровне. Анализ этих данных свидетельствует о том, что турбулентность, отвечающая за звуковое излучение струи, обладает свойством изотропности. Подтверждение этой гипотезы открывает новые возможности для использования результатов, полученных в классической теории турбулентности [28, 43], применительно к струйным турбулентным течениям. В настоящей работе используется также представление звукового источника в струе на основе дифференциального уравнения Ланжевена с дельта-коррелированной правой частью. Этот метод, основанный на анализе измерений пульсаций скорости в турбулентной струе [44], использовался ранее для моделирования звуковых источников в работах [17, 45]. Физическая трактовка такого представления состоит в том, что элементарные события в вихревой динамике, ответственные за излучение звука, представляют собой быстрые “вспышки” возмущений со сравнительно более медленной дальнейшей эволюцией. Именно это быстрое начало гидродинамических процессов выделяется, как источник звука, на фоне других процессов, определяющих энергию турбулентных пульсаций, но не эффективных с точки зрения генерации шума. Использование такого представления звуковых источников позволило существенно упростить оценку звукового излучения, уменьшив кратность интегрирования по объему турбулентного течения.

Важным вопросом при моделировании звукового излучения струи является постановка прямой или обратной задачи. В отличие от прямой задачи, в которой параметры источников выражаются через характеристики гидродинамических пульсаций, в обратной задаче источники определяются по излучаемому ими звуковому полю. Хотя обратная задача, вообще говоря, не имеет однозначного решения, этот метод является эффективным инструментом в тех случаях, когда затруднен доступ к прямым измерениям источников или неясным является сам механизм излучения. В турбулентных струях большая часть гидродинамических пульсаций не эффективна с точки зрения генерации звукового излучения, и только лишь малая их часть имеет отношение к генерации шума. Поэтому прямая оценка параметров источников звука по измерениям гидродинамических пульсаций в струе затруднительна, и в этом случае, по мнению авторов, более уместным является подход, основанный на постановке обратной задачи определения источников по излучаемому ими полю. В случае успеха, такой подход дает новую нетривиальную информацию о структуре турбулентности в сдвиговых потоках и, в особенности, ее излучающей части.

Решение обратной задачи должно опираться на эксперимент, по возможности достаточно нетривиальный для того, чтобы сравнение модели с

данными измерений служило серьезным основанием в пользу того или иного представления источников. В контексте этой проблемы предлагается использовать измерения шума струи, включающие направленности азимутальных мод в полосах частот [46], выполненные с помощью решетки из 6 микрофонов по методу азимутальной декомпозиции [46, 47]. Такой метод позволяет выделить в акустическом поле струи отдельные азимутальные гармоники, что по сравнению с измерениями суммарного звукового сигнала обеспечивает более жесткий отбор моделей звуковых источников.

Настоящая работа имеет следующую структуру. В разделе 2 приводятся основные уравнения, используемые в рассматриваемой акустической аналогии. В качестве оператора распространения используются линеаризованные уравнения Эйлера для изэнтропического потока, а источником является квадрупольное поле, представляющее собой нестационарную часть тензора напряжений Рейнольдса.

В разделе 3 рассматривается модельная задача об излучении звука точечным квадруполем в двумерном слое смешения, в которой проявляются основные особенности, связанные с эффектом сдвигового излучения. Анализ решения этой задачи позволяет выделить в звуковом поле две составляющие, имеющие различный механизм генерации и определяемые, как собственное и сдвиговое излучение источника. Показано, что появление сдвиговой компоненты шума, амплитуда которой пропорциональна завихренности среднего течения, связано с возбуждением источником вихревых возмущений.

В разделе 4 определяются корреляционные характеристики случайного поля источников в струе с учетом свойств квадрупольности источников и их изотропности. В разделе 5 находятся функции Грина квадрупольных источников в квазиоднородной струе круглого сечения, которые будут далее использоваться в интеграле свертки при вычислении звукового поля. В разделе 6 выводятся соотношения, определяющие спектральную мощность азимутальных гармоник звукового излучения струи. В разделе 7 описаны данные измерений шума турбулентной струи, полученные с помощью решеток микрофонов методом азимутальной декомпозиции звуковых сигналов.

В разделе 8 проводится анализ моделируемого звукового поля и его сравнение с данными эксперимента. Показано, что в звуковом поле струи так же, как и в модельной задаче, рассмотренной в разделе 3, можно выделить две компоненты, собственную и сдвиговую, которые по-разному зависят от параметров среднего течения. Сравнение модели с данными акустических измерений показывает, что модель способна описать сложную картину направленности азимутальных гармоник

при достаточно простых предположениях о структуре звукового источника, но лишь в том случае, если в модели учитывается только собственный шум струи, а сдвиговая часть отброшена. Тем самым делается важный вывод, что учет сдвиговой составляющей приводит к серьезному рассогласованию модели с данными измерений.

В разделе 9 рассмотрены возможные причины выявленного несоответствия модели звукового излучения струи данным акустических измерений в части сдвиговой компоненты шума, а также некоторые варианты решения этой проблемы. На примере модельной задачи об источнике в 2-мерном слое смешения показано, что малая модификация среднего течения, физически согласующаяся с представлением о самих звуковых источниках и об их возникновении, приводит к исчезновению сдвиговой компоненты в звуковом излучении. Таким образом, сдвиговая компонента шума оказывается чувствительной к локальной структуре поля завихренности на малых масштабах. Это означает, что несоответствие модели данным измерений может быть связано с некорректным приближением среднего поля при описании процесса излучения звука, и тогда решением проблемы мог бы быть учет локальной структуры поля завихренности в модели источников.

Рассмотрен также другой подход к решению проблемы сдвигового шума, который состоит в использовании акустических аналогий, в которых оператор распространения описывает неактивную среду, отвечающую только за распространение акустических возмущений, но не имеющую гидродинамических степеней свободы. При использовании таких акустических аналогий сдвиговой шум не возникает, и соответствие модели данным измерений достигается без искусственного исключения сдвиговой компоненты из суммарного звукового излучения.

2. АКУСТИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ

Рассматривается акустическая аналогия, в которой все линейные по возмущениям члены включены в оператор распространения, а нелинейные члены трактуются как источник. Для описания процесса звукового излучения будем использовать уравнения Эйлера с условием изэнтропичности

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.2)$$

где \mathbf{v} — поле скорости, плотность ρ и давление p связаны соотношением $d\rho = \frac{1}{c^2} dp$, c — скорость звука.

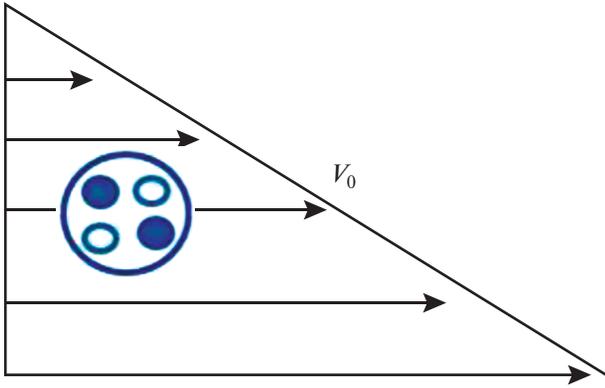


Рис. 1. Схематическое представление модельной задачи.

Представим основные переменные в виде суммы средних полей скорости, давления и плотности V_0, ρ_0, p_0 и нестационарных возмущений \mathbf{v}', ρ', p' . Используя локально-однородное приближение для возмущений, будем пренебрегать неоднородностью среднего течения струи в осевом направлении. В соответствии с этим $p_0 = \text{const}$, $\nabla V_0 = 0$. Будем также рассматривать случай изотермической струи, для которой средняя плотность постоянна, т.е. $\rho_0 = \text{const}$. В этом случае из (2.1), (2.2) получим уравнения для нестационарных возмущений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{V}_0 \nabla) \mathbf{v}' + (\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{V}_0 + \frac{1}{\rho_0} \nabla p' &= \\ &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial T^{ij}}{\partial r^j} + O(M^2), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + (\mathbf{V}_0 \nabla) \rho' + \rho_0 \nabla \mathbf{v}' = O(M^2), \quad (2.4)$$

$$\rho' = \frac{1}{c_0^2} p', \quad (2.5)$$

где c_0 — скорость звука среднего течения, $T^{ij} = \rho_0 (\overline{v'^i v'^j} - \overline{v'^i} \overline{v'^j})$ — нестационарная часть тензора напряжений Рейнольдса, M — число Маха течения струи.

Уравнения (2.3)–(2.5) будем использовать как основные уравнения рассматриваемой акустической аналогии. При этом левые части уравнений (2.3), (2.4) описывают распространение возмущений, а правые части трактуются как источник. Далее будем опускать знак штриха при обозначении возмущений. Для струи со скоростью $V = 120$ м/с, акустические измерения которой используются для сравнения с моделью, величина M^2 мала и составляет около 0.12. На основании этого будем пренебрегать членами порядка $O(M^2)$ в пра-

вой части уравнений и описывать источник как квадрупольное поле.

3. ТОЧЕЧНЫЙ КВАДРУПОЛЬ В ДВУМЕРНОМ СЛОЕ СМЕШЕНИЯ

Прежде чем переходить к моделированию шума струи, рассмотрим особенности излучения звука источниками в сдвиговом течении на простом примере точечного квадрупольного источника в двумерном слое смешения. Анализ сдвиговой компоненты излучения в этой простой задаче позволит понять проблемы, возникающие при моделировании шума струи на основе метода акустических аналогий.

Рассмотрим 2-мерный сдвиговой поток с x -компонентой средней скорости потока $V_0(y)$, где ось x направлена в направлении потока (рис. 1). Будем полагать, что слой смешения имеет постоянную завихренность Ω_0 и занимает область $-d < y < d$. Вне слоя смешения скорость потока $V_0 = 0$ при $y > d$ и $V_0 = \text{const}$ при $y < d$.

Рассматриваются линейные возмущения течения, которые возбуждаются точечным квадрупольным источником вида

$$T^{ij}(\mathbf{r}) = 2\pi \delta(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \exp(-i\omega t), \quad (3.1)$$

где $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)$ — двумерная дельта-функция.

Возмущения описываются уравнениями (2.3)–(2.5). Применяя к этим уравнениям преобразование Фурье по времени и координате x и исключая возмущения скорости и плотности, получим уравнение для возмущений давления:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\bar{\omega}^2} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \left(\bar{\omega}^2 - \alpha^2 \right) p &= \\ = i\alpha \bar{\omega}^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\bar{\omega}^2} \delta(y) \right) + i\alpha \frac{\partial}{\partial y} \delta(y), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\bar{\omega} = \omega - \alpha V_0(y)$.

Ограничимся случаем низкоскоростного течения, $M \rightarrow 0$, и тонкого слоя смешения, $\alpha d \ll 1$. В этом случае решение уравнения (3.2) с условием излучения при $y > d$ имеет вид

$$p(\alpha, y, \omega) = \left(i\alpha - i \frac{\alpha^2 \Omega_0}{\gamma \omega} \right) \exp(-\gamma y), \quad (3.3)$$

где $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$, $k = \omega/c_0$. Применяя обратное преобразование Фурье по x и взяв интеграл методом перевала, получим в дальнем поле, $kr \gg 1$,

$$\begin{aligned} p(x, y, \omega) &= k \cos \theta \left(\sin \theta - i \frac{\Omega_0}{\omega} \cos \theta \right) \times \\ &\times \sqrt{\frac{2\pi k}{r}} \exp\left(ikr + i \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arccos(x/r)$.

Полученное решение содержит в себе два слагаемых. Первое слагаемое совпадает с выражением для звукового поля квадрупольного источника в покоящейся среде и представляет собой собственное излучение источника. Второе слагаемое пропорционально завихренности сдвигового потока, в соответствии с чем определяется как сдвиговая компонента звукового излучения.

Отметим, что при уменьшении скорости потока сдвиговый член исчезает, если частота f фиксирована, но при постоянном числе Струхала

$Sh = \frac{fd}{V_0}$ сдвиговое и собственное излучение имеют

один порядок при сколь угодно малых скоростях течения. Эта особенность предельного перехода $M \rightarrow 0$ связана с различием в условиях излучения для квадрупольного источника в покоящейся среде и в сдвиговом потоке. Источник, находящийся в сдвиговом потоке, не только сам непосредственно излучает звуковые волны, как это происходит в покоящейся среде, но помимо этого возбуждает в потоке возмущения завихренности, которые, в свою очередь, являются источником вторичного звукового излучения. Для того чтобы в этом убедиться, определим вклад возмущений завихренности в интеграл квадрупольного момента, определяющий звуковое излучение при $M \rightarrow 0$. Квадрупольный момент будем вычислять в соответствии с формулой Меринга, которая в двумерном случае имеет вид [48]

$$Q^{ij} = -\frac{1}{4\partial t} \int (r^i [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}]^j + r^j [\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega}]^i) d\mathbf{r}, \quad (3.5)$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ – возмущение завихренности. Для течений с малыми числами Маха интеграл (3.5) определяется в приближении несжимаемого течения. В этом случае возмущения завихренности находятся из уравнения Гельмгольца с источником в правой части

$$-i\omega\boldsymbol{\Omega} + (\mathbf{V}_0 \nabla) \boldsymbol{\Omega} + (\mathbf{v} \nabla) \boldsymbol{\Omega}_0 = \nabla \times \mathbf{f}, \quad (3.6)$$

где $f^i = \frac{\partial T^{ij}}{\partial r^j}$, T^{ij} определяется выражением (3.1), возмущения скорости \mathbf{v} выражаются через возмущения завихренности $\boldsymbol{\Omega}$ интегралом Био-Савара.

Из (3.6) следует, что для слоя смещения с постоянной завихренностью возмущения завихренности локализованы на той линии тока, где расположен точечный источник, а также на краях слоя смещения, где среднее поле завихренности $\boldsymbol{\Omega}_0$ имеет разрыв. Вычисляя возмущения завихренности из уравнения (3.6) и подставляя их в интеграл (3.5), получим вклад в квадрупольный момент возмущений завихренности на линии расположения источника, $y = 0$,

$$Q_0^{ij} = 2\pi \left(1 + \frac{\Omega_0^2}{\omega^2} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\pi i \frac{\Omega_0}{\omega} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

а также вклад возмущений завихренности на краях слоя смещения, $y = \pm d$,

$$Q_1^{ij} = -2\pi \frac{\Omega_0^2}{\omega^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Складывая (3.7) и (3.8), получим суммарный квадрупольный момент вихревых возмущений, создаваемых точечным квадрупольным источником,

$$Q^{ij} = 2\pi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\pi i \frac{\Omega_0}{\omega} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Можно видеть, что интеграл квадрупольного момента (3.9) содержит два слагаемых, одно из которых соответствует точечному квадруполью (3.1) и определяет собственный шум источника, а другое возникает в результате взаимодействия источника со сдвиговым потоком.

Таким образом, звуковое излучение квадрупольного источника в сдвиговом потоке обладает характерной особенностью, которая состоит в появлении сдвиговой компоненты шума, амплитуда которой пропорциональна завихренности среднего течения. Причиной появления сдвиговой компоненты излучения является возбуждение источником вихревых возмущений в сдвиговом потоке. В разделе 8 мы увидим, что звуковое излучение струи, моделируемое на основе акустической аналогии, также содержит в себе сдвиговую составляющую, пропорциональную градиенту скорости в сдвиговом течении.

4. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ ИСТОЧНИКОВ

Перейдем теперь к моделированию шума турбулентной струи с использованием линеаризованных уравнений Эйлера (2.3)–(2.5) в качестве оператора распространения возмущений и с квадрупольным источником, определяемым правой частью уравнения (2.3). Метод акустических аналогий предполагает описание источников звука как случайного поля с характеристиками, определяющими пространственные и временные масштабы турбулентных возмущений, отвечающих за излучение звука, а также их конвективную скорость. Эти представления позволили в прошлом, обобщая экспериментальные данные, получать общую эффективность излучения звука турбулентной струей в широком диапазоне скоростей от $M = 0.5$ до $M = 4$ [49]. С развитием вычислительных методов возник интерес в построении замкнутой полуэмпирической теории шума струи, в которой характеристики звукового излучения определяются пространственно-временной корреляционной функцией турбулентных пульсаций. Среди работ, посвященных модели-

рованию излучения струи на языке корреляционных функций, необходимо, в первую очередь, отметить работу [13]. В этой работе для источников звука была предложена пространственно-временная корреляционная функция:

$$R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = A_0 \exp\left(-\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1 - V_0 \tau)^2}{2l_0^2}\right) \times \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_0}\right), \quad (4.1)$$

где V_0 – скорость конвекции звуковых источников, τ_0 и l_0 – временной и пространственный масштабы корреляции, x, y, z – декартовы координаты с осью z вдоль оси струи. Вид этой функции был выбран на основе имевшихся в то время измерений корреляций возмущений скорости и предположения об аналогии между характеристиками вторых и четвертых моментов поля скорости. Позднее это предположение было подтверждено непосредственными измерениями корреляционных функций для компонент тензора Рейнольдса [44]. В связи с успешностью подхода, предложенного в работе [13], корреляционные функции вида (4.1) неоднократно использовались в дальнейшем для моделирования источников шума в струе (см., например, [16, 17]).

Характерной особенностью корреляционной функции (4.1) является излом в форме “клюва” (разрыв производной) при $z_1 = z_2$. Как показано в работе [38], именно эта особенность дает возможность получить широкополосный спектр акустического излучения турбулентной струи, что не удастся сделать при использовании корреляционной функции, имеющей гладкую гауссовскую форму. Возникает вопрос о том, какая динамика источников звука может быть ответственна за эту особенность в корреляционной функции. В работе [45] было показано, что случайная переменная $\xi(\mathbf{r}, t)$ с корреляционной функцией (4.1) может быть представлена как решение уравнения Ланжевена

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \xi}{\partial z} + \tau_0^{-1} \xi = \eta, \quad (4.2)$$

где правая часть $\eta(\mathbf{r}, t)$ представляет собой случайное поле с корреляционной функцией, имеющей простую гауссовскую форму

$$R_\eta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = A_0 V_0 \frac{2}{\tau_0} \delta(z_2 - z_1) \times \exp\left(-\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{2l_0^2}\right) \exp\left(-\frac{V_0^2 \tau^2}{2l_0^2}\right). \quad (4.3)$$

Таким образом, для описания поля источников вместо плотности источников $\xi(\mathbf{r}, t)$ может быть

выбрана альтернативная случайная переменная $\eta(\mathbf{r}, t)$, что оказывается важным для анализа динамических процессов, лежащих в основе генерации аэродинамического шума. При малом пространственном масштабе l_0 поле $\eta(\mathbf{r}, t)$ представляет собой пространственно-временной белый шум. Такое представление означает, что случайное поле звуковых источников с корреляционной функцией (4.1) можно трактовать как сумму некоррелированных элементарных процессов, каждый из которых представляет собой случайный “всплеск” возмущений с их последующей конвекцией и затуханием.

Аналогичное представление плотности источников ξ через интенсивность их рождения η было использовано в работе [17], где эти переменные были связаны более общим интегральным уравнением, описывающим различную динамику источников в зависимости от ядра интеграла. В частности, если эта динамика представляет собой простое затухание, то интегральное уравнение сводится к уравнению Ланжевена (4.2). Вместе с тем, использование более общего представления позволило провести в [17] сравнение различных вариантов динамики звуковых источников. В частности, было показано, что звуковое излучение определяется, в первую очередь, быстрым процессом рождения источников и слабо зависит от последующей, сравнительно более медленной динамики.

В настоящей работе с учетом квадрупольного характера звукового поля плотность источников описывается симметричным тензором второго ранга $T^{ij}(\mathbf{r}, t)$ с нулевым следом, который в общем случае записывается в виде

$$T^{ij}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^5 \xi_{(n)}(\mathbf{r}, t) D_n^{ij}, \quad (4.4)$$

где D_n^{ij} – набор детерминированных линейно-независимых базисных квадрупольных полей, амплитуды $\xi_{(n)}(\mathbf{r}, t)$ представляют собой случайные поля, удовлетворяющие уравнению Ланжевена

$$\frac{\partial \xi_{(n)}}{\partial t} + (\mathbf{V}_0 \nabla) \xi_{(n)} + \varepsilon \xi_{(n)} = \eta_{(n)}, \quad (4.5)$$

где \mathbf{V}_0 – скорость конвекции источников, совпадающая со средней скоростью течения в точке их локализации, параметр $\varepsilon = \tau_0^{-1}$ характеризует скорость потери корреляции возмущений. Таким образом, при описании поля звуковых источников мы переходим от квадрупольного поля (4.4), характеризующего плотность источников, к полю

$$Q^{ij}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^5 \eta_{(n)}(\mathbf{r}, t) D_n^{ij}, \quad (4.6)$$

характеризующему интенсивность рождения возмущений, ответственных за излучение звука.

В настоящей работе используется условие изотропности квадрупольного поля Q^{ij} , в соответствии с которым (см. Приложение А) будем предполагать, что поля $\eta_{(n)}(\mathbf{r}, t)$ взаимно не коррелированы и имеют одинаковые характеристики, а базисные квадрупольные D_n^{ij} имеют вид (А2). Спектральную плотность полей $\eta_{(n)}(\mathbf{r}, t)$ по аналогии с (4.3) запишем в виде

$$S_{\eta}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \omega) = A(\mathbf{r}', \omega) \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}''|^2}{2l_0^2}\right). \quad (4.7)$$

Предполагая пространственный масштаб корреляции l_0 малым, перепишем выражение (4.7) в виде

$$S_{\eta}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \omega) = A(\mathbf{r}', \omega) (2\pi l_0^2)^3 \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}''), \quad (4.8)$$

где $\delta(\mathbf{r})$ – пространственная дельта-функция.

Выражения (4.4), (4.5), (4.8) определяют случайное поле квадрупольных источников в модели звукового излучения струи.

5. ФУНКЦИЯ ГРИНА

Найдем решение системы уравнений (2.3)–(2.5), правая часть которой определяется выражениями (4.4), (4.5), а интенсивность рождения источников имеет вид $\eta_{(n)} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) \exp(-i\omega t)$. Поскольку такие решения будут использоваться в интеграле свертки при вычислении звукового поля, будем их называть функциями Грина $G_{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, \omega)$ для n -ого базисного квадрупольного.

При вычислении функций Грина будем использовать локально-однородное приближение. Это означает, что при вычислении звукового поля от точечного квадрупольного источника будем пренебрегать неоднородностью течения струи в осевом направлении, принимая локальные характеристики среднего поля в том сечении, где расположен источник. Однако, при вычислении звукового поля от всей струи будем вычислять интеграл по всей области источников, взяв в каждом поперечном сечении струи функцию Грина, вычисленную именно для этого сечения.

Определим цилиндрические координаты ρ, φ, z с осью z , совпадающей с осью струи. Применяя к уравнениям (2.3)–(2.5) преобразование Фурье по φ и z и исключая из этих уравнений возмущения скорости и плотности, получим уравнение для возмущений давления

$$\frac{\bar{\omega}^2}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho}{\bar{\omega}^2} \frac{d}{d\rho} p \right) + \left(\frac{\bar{\omega}^2}{c_0^2} - \alpha^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) p = q(\rho, m, \alpha, \omega), \quad (5.1)$$

где $\bar{\omega} = \omega - \alpha V_0(\rho)$, $V_0(\rho)$ – z -компонента средней скорости. Источник в правой части уравнения (5.1) определяется из соотношений

$$q(\rho, m, \alpha, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \times \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q(\rho, \varphi, z, \omega) \exp(-i\alpha z - im\varphi) d\varphi dz, \quad (5.2)$$

где $q(\mathbf{r}, \omega) = \bar{\omega}^2 \nabla \cdot \left(\frac{1}{\bar{\omega}^2} \mathbf{f} \right)$, декартовы компоненты

$$f^i = \frac{\partial T^{ij}}{\partial r^j}.$$

Будем полагать, что $V_0(\rho) = V_{jet} = \text{const}$ при $\rho < \rho_1$, слой смешения с заданной переменной средней скоростью $V_0(\rho)$ находится в интервале $\rho_1 < \rho < \rho_2$, $V_0(\rho) = 0$ при $\rho > \rho_2$. Предполагается, что источник находится внутри слоя смешения в точке с координатой $\rho = \rho_s$. Решение задачи находится из условий конечности в нуле, непрерывности на границах слоя смешения $\rho = \rho_1$, $\rho = \rho_2$, условия излучения при $\rho \rightarrow \infty$ и условия ограниченности решения для исключения из решения волн неустойчивости.

Решение этой задачи для точечного квадрупольного источника вида $T^{ij} = D_n^{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) \exp(-i\omega t)$ приведено в Приложении Б, где звуковое поле в области вне струи $\rho > \rho_2$ представлено в виде

$$p(\rho, m, \alpha, \omega) = k^2 F_{(n)m}(\alpha, \omega) \frac{i}{2} \times H_m^{(1)}(i\gamma\rho) \exp(-i\alpha z_s - im\varphi_s), \quad (5.3)$$

где $H_m^{(1)}$ – функция Ганкеля порядка m , $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$, $k = \omega/c_0$, n – номер базисного квадрупольного, функции направленности $F_{(n)m}$ для тонкого слоя смешения определены выражениями (Б10).

Для того чтобы перейти от решения (5.3) к функции Грина задачи, используем уравнение (4.5), связывающее плотность звуковых источников $\xi_{(n)}$ с интенсивностью их рождения $\eta_{(n)}$. Применяя к этому уравнению Фурье-преобразование по времени и координате z , получим

$$(-i\bar{\omega} + \varepsilon) \xi_{(n)} = \eta_{(n)}. \quad (5.4)$$

Из (5.4) следует, что Фурье-компоненты функции Грина связаны с (5.3) множителем $(-i\bar{\omega}_s + \varepsilon)^{-1}$, где $\bar{\omega}_s = \omega - \alpha V_0(\rho_s)$, т.е.

$$G_{(n)m}(\rho, \rho_s, \varphi_s, z_s, \alpha, \omega) = \frac{k^2 F_{(n)m}(\alpha, \omega)}{-i\bar{\omega}_s + \varepsilon} \frac{i}{2} H_m^{(1)}(i\gamma\rho) \exp(-i\alpha z_s - im\varphi_s). \quad (5.5)$$

Используем обратное преобразование Фурье по z -координате:

$$G_{(n)m}(\rho, \rho_s, \varphi_s, z, z_s, \omega) = \int \frac{k^2 F_{(n)m}(\alpha, \omega)}{-i\bar{\omega}_s + \varepsilon} \frac{i}{2} \times H_m^{(1)}(i\gamma\rho) \exp(i\alpha(z - z_s) - im\varphi_s) d\alpha. \quad (5.6)$$

В дальнейшем поле интеграл (5.6) вычисляется методом перевала:

$$G_{(n)m}(\rho, \rho_s, \varphi_s, z, z_s, \omega) = (-i)^m \times \frac{ik^2 F_{(n)m}(k \cos \theta, \omega)}{\omega(1 - M_s \cos \theta) + i\tau_0^{-1} r} \frac{1}{r} \exp(ikr) \exp(-im\varphi_s), \quad (5.7)$$

где $r = \sqrt{\rho^2 + (z - z_s)^2}$, $\theta = \arccos\left(\frac{z - z_s}{r}\right)$, $M_s = V_0(\rho_s)/c_0$, $\tau_0 = \varepsilon^{-1}$. Это выражение для функции Грина будет далее использоваться при вычислении дальнего звукового поля от квадрупольных источников в струе.

6. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ АЗИМУТАЛЬНЫХ ГАРМОНИК ЗВУКОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Звуковое поле, создаваемое гармоническим квадрупольным источником $Q^{ij}(\mathbf{r}, \omega) = \eta_{(n)}(\mathbf{r}, \omega) D_n^{ij}$, запишем через свертку плотности источников с функцией Грина

$$p(\mathbf{r}, \omega) = \int G_{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \eta_{(n)}(\mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}', \quad (6.1)$$

где $G_{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ – функция Грина для n -ого базисного квадрупольного источника, определенная выражением (5.7). Соответственно, для случайного источника с взаимным спектром (4.8) взаимная спектральная плотность звукового излучения имеет вид

$$S_{p(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \int G_{(n)}^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}', \omega) \times G_{(n)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}', \omega) \left(2\pi l_0^2\right)^{\frac{3}{2}} A(\mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}'. \quad (6.2)$$

В осесимметричной струе пульсации должны описываться полями, инвариантными относительно вращения вокруг оси струи. В соответствии с этим спектральная плотность (4.8) не зависит от азимутального угла φ , т.е. $A(\mathbf{r}', \omega) = A(\rho', z', \omega)$. Кроме того, вследствие осевой симметрии функ-

ция Грина зависит только от разницы азимутальных углов $\varphi_1 - \varphi'$, а ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$G_{(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}', \omega) = G_{(n)}(\rho_1, z_1, \varphi_1 - \varphi', \rho', z', \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_{(n)m}(\rho_1, z_1, \rho', z', \omega) \exp(im(\varphi_1 - \varphi')). \quad (6.3)$$

Подставляя (6.3) в (6.2) и интегрируя по углу φ' , получим:

$$S_{p(n)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_{p(n)m} \times (\rho_1, z_1, \rho_2, z_2, \omega) \exp(im(\varphi_2 - \varphi_1)), \quad (6.4)$$

где коэффициенты Фурье

$$S_{p(n)m}(\rho_1, z_1, \rho_2, z_2, \omega) = 2\pi \int G_{(n)m}^*(\rho_1, \rho', z_1, z', \omega) G_{(n)m}(\rho_2, \rho', z_2, z', \omega) \times \left(2\pi l_0^2\right)^{\frac{3}{2}} A(\rho', z', \omega) \rho' d\rho' dz'. \quad (6.5)$$

Выражения (6.4), (6.5) определяют взаимный спектр звукового поля для каждого базисного квадрупольного источника. С учетом взаимной некоррелированности амплитуд $\eta_{(n)}(\mathbf{r}, t)$ взаимный спектр суммарного звукового поля от источника (4.6) имеет вид

$$S_p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^5 S_{p(n)m}(\rho_1, z_1, \rho_2, z_2, \omega) \times \exp(im(\varphi_2 - \varphi_1)), \quad (6.6)$$

где индекс n в скобках обозначает номер соответствующего базисного квадрупольного источника, спектры $S_{p(n)m}$ находятся из интеграла (6.5).

В настоящей работе мы будем рассматривать автоспектры звукового поля, выражения для которых следуют из (6.5), (6.6) при $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$:

$$S_p(\mathbf{r}, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^5 S_{p(n)m}(\rho, z, \omega), \quad (6.7)$$

$$S_{p(n)m}(\rho, z, \omega) = 2\pi \int \left| G_{(n)m}(\rho, z, \rho', z', \omega) \right|^2 \times \left(2\pi l_0^2\right)^{\frac{3}{2}} A(\rho', z', \omega) \rho' d\rho' dz'. \quad (6.8)$$

Подставляя функцию Грина (5.7) в (6.8), получим спектральную плотность азимутальных гармоник дальнего звукового поля

$$S_{p_m}(\rho, z, \omega) = 2\pi \sum_{n=1}^5 \int \frac{1}{r^2 c_0^4} \times \frac{|F_{(n)m}(k \cos \theta, \omega)|^2}{(1 - M_s \cos \theta)^2 + \tau_0^{-2} \omega^{-2}} \times \omega^2 (2\pi l_0^2)^{\frac{3}{2}} A(\rho_s, z_s, \omega) \rho_s d\rho_s dz_s. \quad (6.9)$$

В настоящей работе рассматривается дальнейшее звуковое поле струи, которое имеет слабую чувствительность к пространственному распределению источников. С учетом этого сделаем некоторые упрощения модели, ограничив область локализации источников. Будем полагать, что источники расположены в конце начального участка в сечении с координатой $z_s = 6D$, где D – диаметр сопла, на окружности с координатой ρ_s , определяемой из условия $V_0(\rho_s) = 0.65V_{jet}$. В соответствии с этим для распределения мощности источников будем использовать выражение $A(\rho, z) = A_0 \Delta_\rho \Delta_z \delta(\rho - \rho_s) \delta(z - z_s)$, где Δ_ρ, Δ_z – величины реального разброса источников по радиальной и осевой координате. Тогда суммарная спектральная мощность источников в струе запишется в виде

$$S_W(\omega) = \iint S_\eta(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \omega) d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' = (2\pi l_0^2)^{\frac{3}{2}} A_0 \Delta_\rho \Delta_z 2\pi \rho_s. \quad (6.10)$$

Используя локальность распределения источников, проинтегрируем (6.9). В результате получим спектральную мощность m -ой азимутальной гармоники звукового излучения

$$S_{p_m}(r, \theta, \omega) = \frac{1}{r^2 c_0^4 (1 - M_s \cos \theta)^2 + \tau_0^{-2} \omega^{-2}} \times \omega^2 S_W(\omega) \times \sum_{n=1}^5 |F_{(n)m}(k \cos \theta, \omega)|^2, \quad (6.11)$$

где r и θ отсчитываются от конца начального участка струи. Выражение (6.11) дает направленности азимутальных гармоник звукового излучения струи и будет далее использоваться для сравнения с экспериментом.

Время потери корреляции в конце начального участка струи оценим, как $\tau_0 \sim D/V_{jet}$ [50]. Из этой оценки следует, что член $\tau_0^{-2} \omega^{-2}$ в (6.9) является существенным при низких частотах $Sh < 0.2$, в то время как для более высоких частот им можно пренебречь.

7. ДАННЫЕ ИЗМЕРЕНИЙ АЗИМУТАЛЬНЫХ ГАРМОНИК В ЗВУКОВОМ ПОЛЕ СТРУИ

Используемые в настоящей работе данные акустических измерений были получены методом

азимутальной декомпозиции ADT (Azimuthal Decomposition Technique). Этот экспериментальный метод был предложен в [47] специально для измерения азимутальных компонент звукового излучения аэродинамических источников шума. Схема эксперимента представлена на рис. 2. Метод основан на предварительном модальном разложении акустических сигналов на микрофонах до усреднения данных. Акустические сигналы на круговой решетке из 6 микрофонов представляются в виде ряда Фурье

$$p(\varphi) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi), \quad (7.1)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(\varphi) d\varphi, \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(\varphi) \cos m\varphi d\varphi, \\ b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(\varphi) \sin m\varphi d\varphi,$$

интегралы аппроксимируются суммой по 6 точкам расположения микрофонов. С использованием этих формул из результатов измерений оцениваются спектральные плотности коэффициентов ряда (7.1). Коэффициенты ряда (7.1) связаны с коэффициентами используемого в моделировании ряда Фурье $\bar{p}(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p_m \exp(im\varphi)$ соотношениями $p_0 = a_0, p_m = p_{-m}^* = \frac{1}{2}(a_m - ib_m)$ при $m \neq 0$.

Соответственно, для спектральных плотностей этих коэффициентов справедливы соотношения $S_{p_m}(\omega) = \frac{1}{2} S_{a_m}(\omega)$ при $m \neq 0, S_{p_0}(\omega) = S_{a_0}(\omega)$

В эксперименте [46] получены спектральные плотности азимутальных гармоник $m = 0, 1, 2$ для различных расстояний от решетки микрофонов до сопла. Характерные направленности гармоник для струи $V_{jet} = 120$ м/с в диапазоне частот $800 < f < 1050$ Гц (число Струхаля $Sh = 0.3$ соответствует максимуму спектра звукового излучения струи) представлены на рис. 3. Можно видеть, что направленности азимутальных гармоник имеют сложную форму, необходимость предсказания которой дает хорошую базу для отбора приемлемых моделей звукового излучения струи.

8. СРАВНЕНИЕ МОДЕЛИ С ДАННЫМИ ЭКСПЕРИМЕНТА

Сравним направленности моделируемого звукового поля с данными эксперимента, приведенными в разделе 7. В рассматриваемом диапазоне частот $800 < f < 1050$ Гц длина звуковой волны

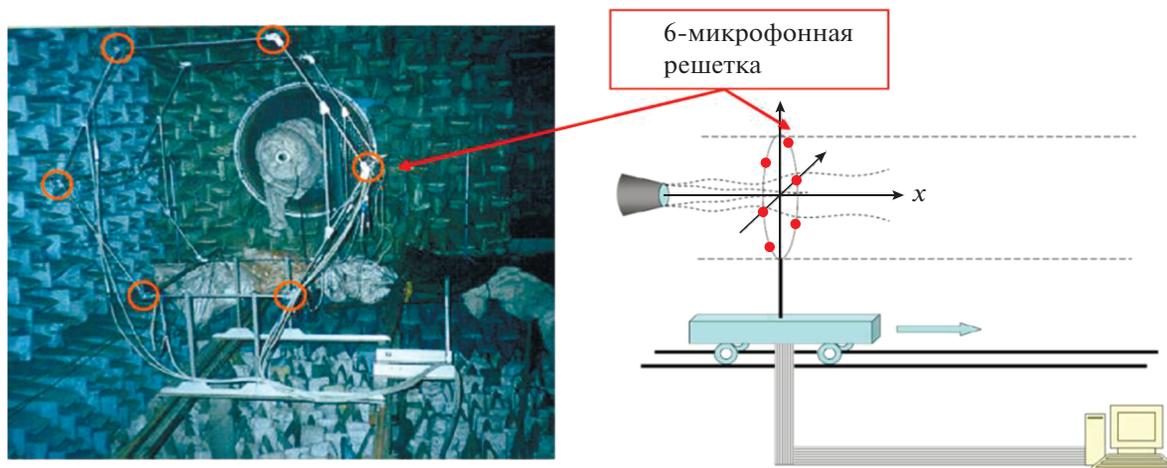


Рис. 2. Схема испытательного стенда. Расстояние от оси струи до микрофонов $R = 0.85$ м, диаметр сопла $D = 0.04$ м.

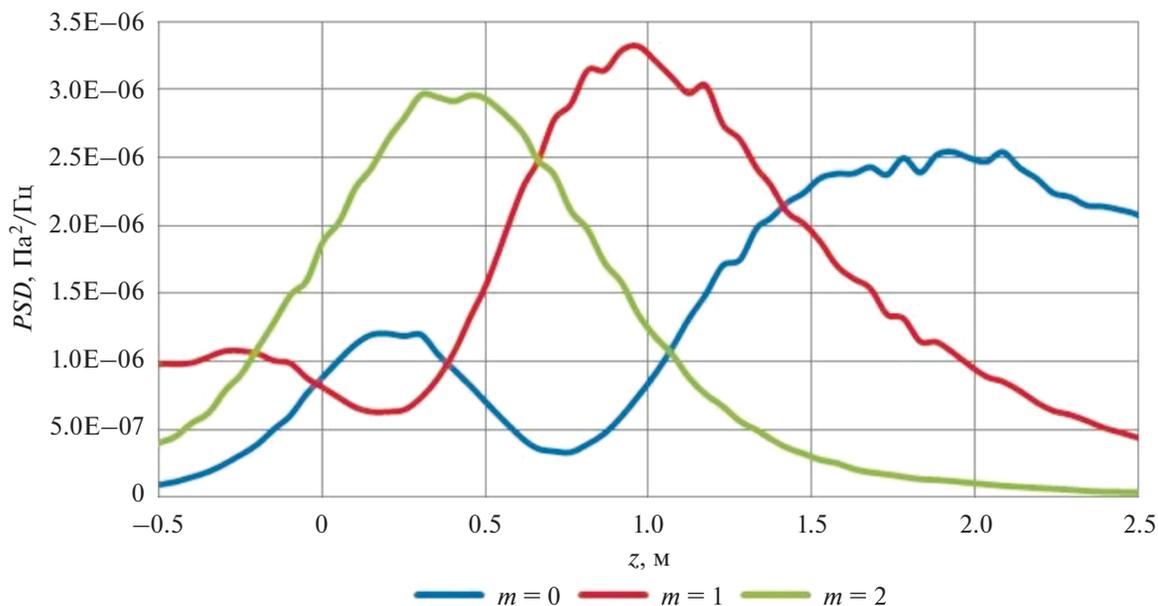


Рис. 3. Направленности азимутальных гармоник для струи $V = 120$ м/с в диапазоне частот $800 < f < 1050$ Гц.

$\lambda \approx 0.4$ м много больше области, занимаемой источниками, размер которой равен диаметру сопла $D \approx 0.04$ м. Это дает возможность ограничиться главными членами по малому параметру kr_s .

Рассмотрим, прежде всего, моделируемое звуковое поле в предельном случае $V_{\text{jet}} = 0$, т.е. без учета влияния потока. В этом случае выражение (6.11) соответствует полю точечного изотропного квадруполь в покоящейся среде, а главные члены по малому параметру kr_s в выражениях (Б10) для безразмерных направленностей имеют вид:

$$\begin{aligned}
 F_{(1)0} &= \frac{1}{16\pi} (3 \cos^2 \theta - 1), \\
 F_{(2)1} &= i \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{8\pi} \sin 2\theta, & F_{(3)1} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{8\pi} \sin 2\theta, \\
 F_{(4)2} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{8\pi} \sin^2 \theta, & F_{(5)2} &= i \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{8\pi} \sin^2 \theta.
 \end{aligned} \quad (8.1)$$

Набор направленностей $F_{(n)m}$, представленный в (8.1), показывает, что при отсутствии течения каждый базисный квадруполь в главном приближении по параметру kr_s отвечает за излучение только одной азимутальной гармоники. При этом

квадруполь $n = 1$ излучает нулевую гармонику, квадруполи $n = 2, 3$ – первую гармонику, квадруполи $n = 4, 5$ – вторую гармонику.

Подставляя (8.1) в (6.11), получим направленности азимутальных гармоник звукового излучения. Сравнение результатов моделирования с данными измерений для струи $V_{\text{jet}} = 120$ м/с, представленное на рис. 4, показывает, что даже в простейшем варианте без учета влияния потока модель качественно отражает сложные формы направленности трех основных азимутальных гармоник. Отличие модели и эксперимента проявляется, прежде всего, в том, что в данных акустических измерений можно видеть усиление звука в направлении вниз по потоку, а в модели это усиление отсутствует, поскольку не учитываются эффекты конвекции источников и рефракции звука на среднем течении.

Рассмотрим далее влияние потока на моделируемое звуковое излучение. Это влияние имеет двойкий характер. Прежде всего, эффекты рефракции и конвекции приводят к изменению направленности звукового излучения. Кроме того, появляется дополнительная составляющая, пропорциональная градиенту средней скорости в слое смещения, которую мы так же, как в разделе 2, будем называть сдвиговой компонентой шума.

Используя выражение (6.11), вычислим вклады базисных квадруполей в азимутальные гармоники звукового излучения с учетом среднего течения струи со скоростью $V_{\text{jet}} = 120$ м/с. Для того чтобы оценить влияние рефракции, рассмотрим сначала “усеченную” модель, в которой учитываются вклады в излучение только тех членов $F_{(n)m}$, которые приведены в (8.1). С учетом влияния скорости струи выражения (8.1) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} F_{(1)0} &= \frac{1}{16\pi C_0} \frac{1}{\bar{\omega}_s^2} \left(3 \cos^2 \theta - \frac{\bar{\omega}_s^2}{\omega^2} \right), \\ F_{(2)1} &= i \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{8\pi C_1} \sin 2\theta, \\ F_{(3)1} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{8\pi C_1} \frac{\bar{\omega}_{\text{in}}^2}{\bar{\omega}_s^2} \sin 2\theta, \\ F_{(4)2} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{8\pi C_1} \left(2 \frac{\bar{\omega}_{\text{in}}^2}{\bar{\omega}_s^2} - 1 \right) \sin^2 \theta, \\ F_{(5)2} &= i \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{8\pi C_1} \left(2 - \frac{\bar{\omega}_{\text{in}}^2}{\bar{\omega}_s^2} \right) \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (8.2)$$

где $\bar{\omega}_{\text{in}} = \omega(1 - M_{\text{jet}} \cos \theta)$, $\bar{\omega}_s = \omega(1 - M_s \cos \theta)$, $C_0 = \frac{\bar{\omega}_{\text{in}}^2}{\omega^2}$, $C_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\omega}_{\text{in}}^2}{\omega^2} + 1 \right)$.

Подставляя (8.2) в (6.11), определим направленности азимутальных гармоник для “усеченной” модели. Сравнение результатов вычислений с данными измерений представлено на рис. 5.

Можно видеть очень хорошее соответствие этой модели экспериментальным данным.

Однако, как отмечалось выше, влияние потока не ограничивается изменением формы направленностей $F_{(n)m}$, приведенных в (8.2). В звуковом излучении появляются также сдвиговые члены, которые нарушают соответствие базисных квадруполей азимутальным гармоникам. В частности, в азимутальную гармонику $m = 0$ вклад дает не только базисный квадруполь $n = 1$, но также и $n = 2$. Вычисляя из (Б10) соответствующую безразмерную направленность, получим

$$F_{(2)0} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{8\pi C_0} \frac{1}{\bar{\omega}_s^2} \frac{\bar{\omega}_{\text{in}}^2}{\bar{\omega}_s} \Omega_0 \cos^2 \theta. \quad (8.3)$$

Эта составляющая отсутствует для источника в покоящейся среде, но дает соизмеримый с другими составляющими вклад в области частот $\omega \sim \Omega_0$. Более того, эта составляющая может доминировать в звуковом излучении в области низких частот, а также для источников, локализованных в начальном участке струи, где слой смещения является тонким. На рис. 6 представлены вклады базисных квадруполей $n = 1$ и $n = 2$ в гармонику $m = 0$, вычисленные из выражения (6.11) с величиной завихренности, соответствующей концу начального участка. Мы видим, что даже для этой области струи, где ширина слоя смещения достигает величины порядка диаметра сопла, базисный квадруполь $n = 2$ дает вклад в звуковое излучение, который существенно превышает экспериментальные значения. Для того чтобы привести модель в соответствие с экспериментом в отношении гармоники $m = 0$, необходимо было бы уменьшить амплитуду квадруполя $n = 2$, отказавшись от предположения об изотропности источника. Однако, в этом случае также уменьшится вклад этого квадруполя в гармонику $m = 1$, где в свою очередь возникнет рассогласование модели с экспериментом.

Из выражений (Б10) можно видеть, что сдвиговые члены, пропорциональные средней завихренности, возникают также и для квадруполей $n = 4, 5$, которые с учетом этих членов дают вклады не только в гармонику $m = 2$, как в случае отсутствия потока, но также и в гармонику $m = 1$.

Таким образом, в звуковом излучении струи можно выделить две составляющие, имеющие различную зависимость от параметров струи (скорости и градиента скорости). Эти две составляющие мы будем определять как собственный и сдвиговый шумы струи. К собственному шуму струи мы отнесем ту часть звукового излучения, на которую среднее течение оказывает влияние через эффекты рефракции и конвекции, но которая не включает в себя членов, пропорциональных градиенту средней скорости. К сдвиговому шуму мы отнесем составляющую, пропорциональную градиенту средней скорости в сдвиговом

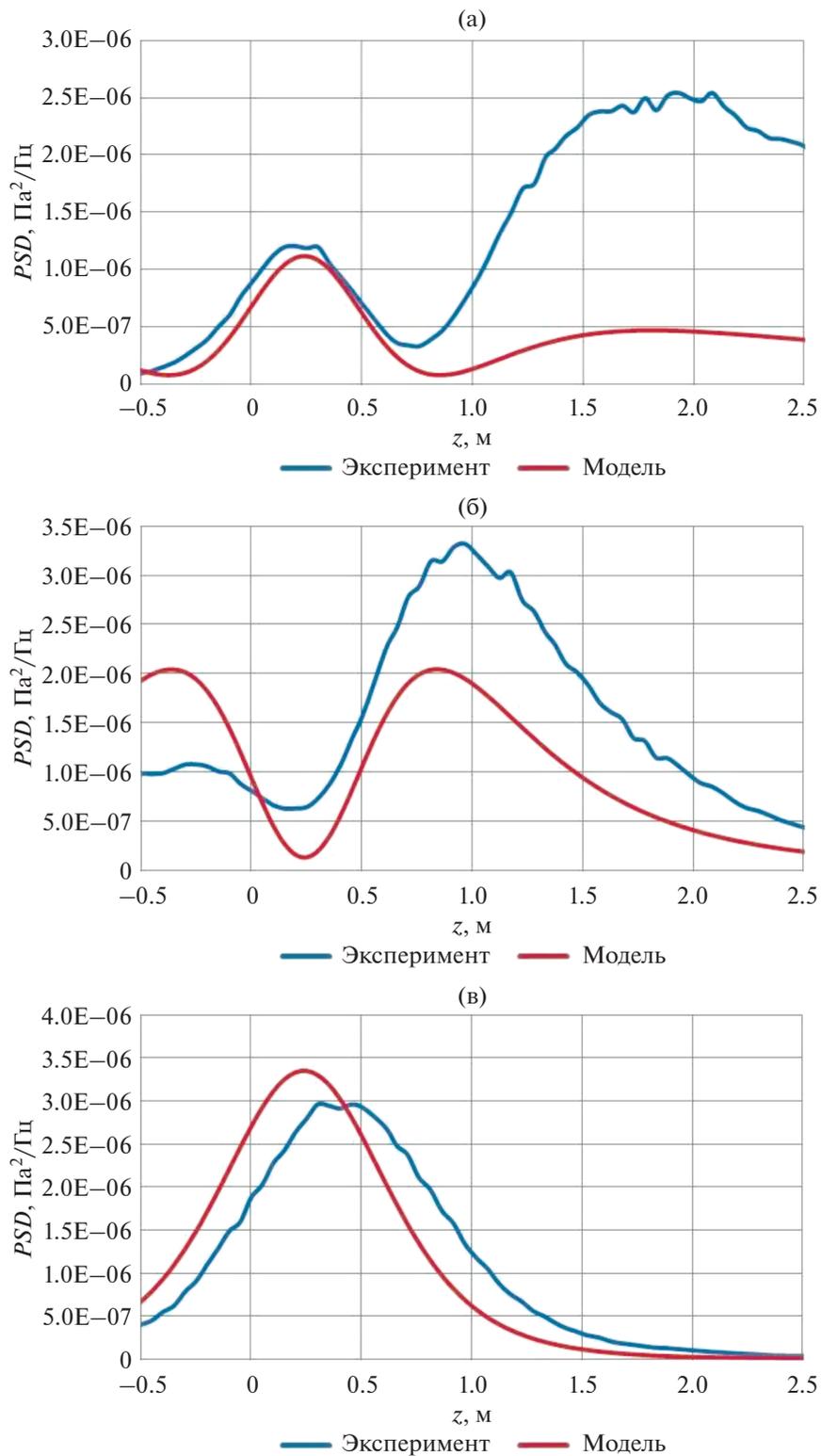


Рис. 4. Направленности азимутальных гармоник в диапазоне частот $800 < f < 1050$ Гц: (а) – $m = 0$, (б) – $m = 1$, (в) – $m = 2$, z – расстояние от решетки микрофонов до сопла. Данные измерений для струи $V = 120$ м/с, вариант модели для источника звука в покоящейся среде.

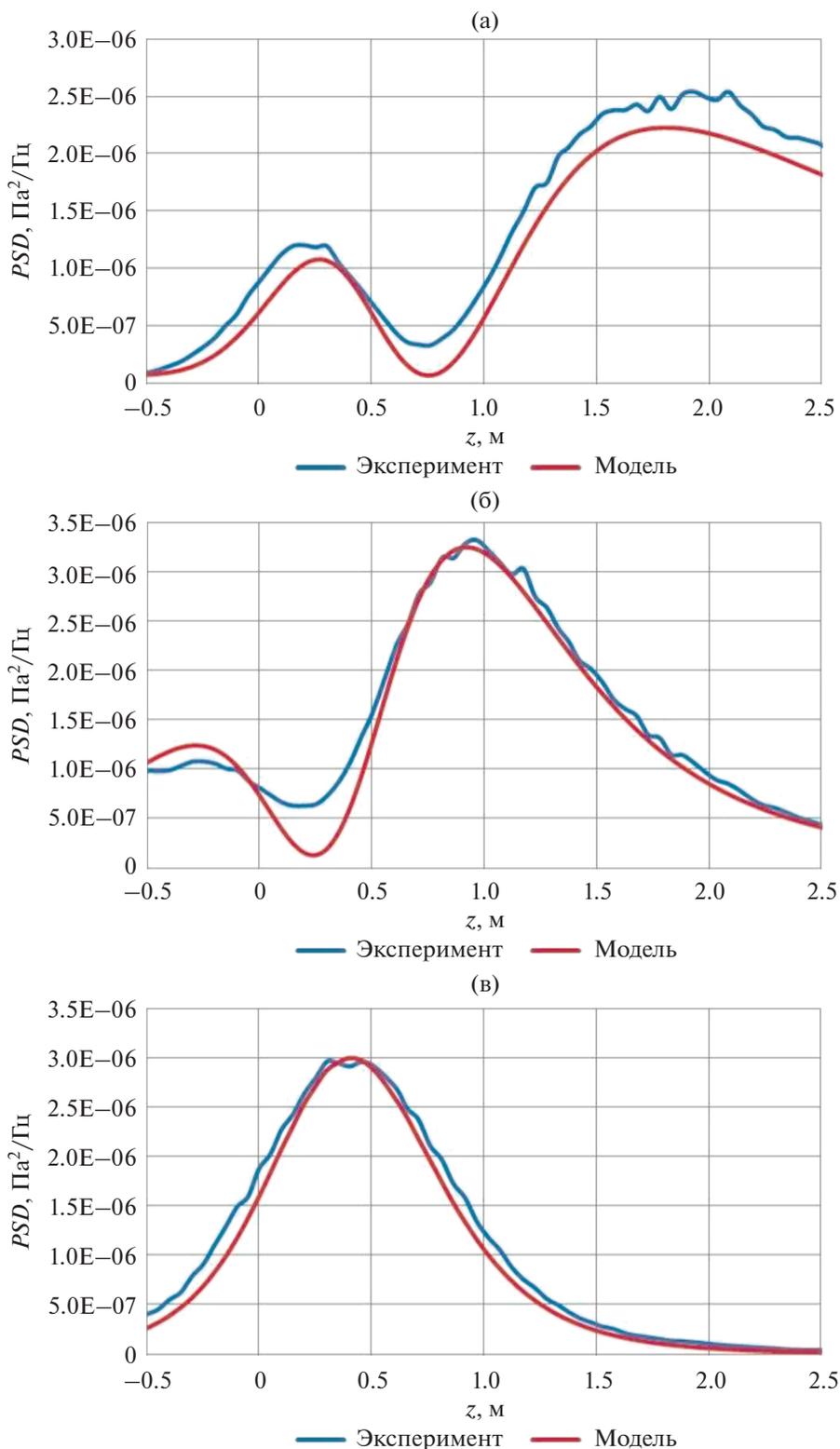


Рис. 5. Вклады базисных квадруполь в азимутальные гармоники: (а) – вклад квадруполь $n = 1$ в гармонику $m = 0$, (б) – вклад квадруполь $n = 2, 3$ в гармонику $m = 1$, (в) – вклад квадруполь $n = 4, 5$ в гармонику $m = 2$.

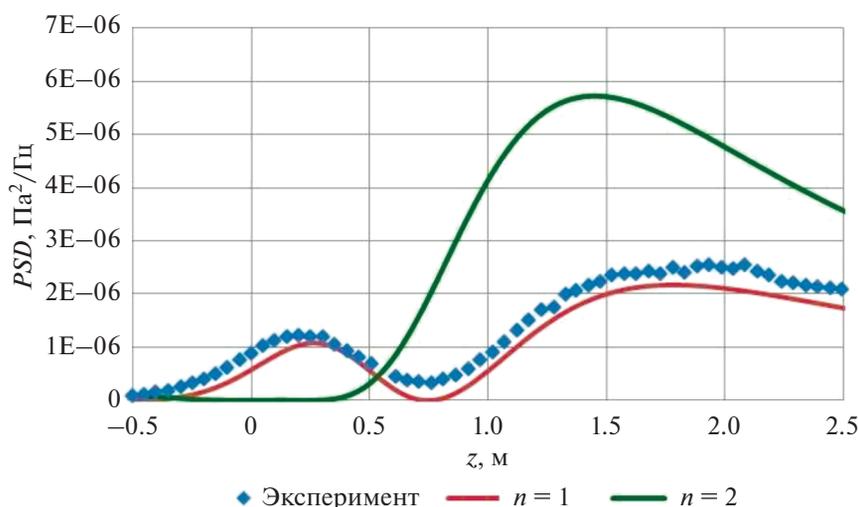


Рис. 6. Вклад базисных квадрупольных мод в направленность излучения нулевой азимутальной гармоники.

течении. Как было показано в разделе 2, появление сдвиговой компоненты шума связано с тем, что оператор распространения, описывающий линейные возмущения среднего течения, имеет не только акустическую степень свободы, отвечающую за распространение звуковых волн, но обладает также гидродинамическими (вихревыми) степенями свободы. Возбуждаемые источниками вихревые моды генерируют вторичное звуковое излучение, обладающее характеристиками сдвиговой компоненты шума.

Сравнение модели с данными акустических измерений позволяет сделать вывод о том, что модель способна описать сложную картину направленности азимутальных гармоник при простых предположениях о структуре звукового источника, но лишь в том случае, если в модели учитывается только собственный шум струи (рис. 5). При этом совпадение формы направленности трех главных гармоник служит подтверждением квадрупольного характера излучения. А совпадение по амплитудам трех азимутальных гармоник при выборе единственного амплитудного множителя подтверждает правильность гипотезы об изотропности источников. В то же время звуковое излучение, определяемое в рамках выбранной акустической аналогии, включает в себя не только собственную, но также сдвиговую компоненту, учет которой приводит к серьезному рассогласованию модели с данными измерений (рис. 6). Полученные результаты могут означать, что модель источников звука правильно учитывает основные факторы, влияющие на процесс генерации звука, но при этом ошибочно предсказывает наличие сдвиговой компоненты, которая, по-видимому, отсутствует в излучении реальной турбулентной струи.

9. ОБСУЖДЕНИЕ

Рассмотрим возможные причины выявленного несоответствия модели звукового излучения струи данным акустических измерений в части сдвиговой компоненты шума, а также некоторые варианты решения этой проблемы. Прежде всего, заметим, что модель излучения звука источниками в среднем завихренном течении является идеализацией реального процесса генерации звука в турбулентной струе. Картина среднего течения возникает только при усреднении реального турбулентного течения, в котором поле завихренности распадается на отдельные вихри так, что акустические возмущения распространяются на фоне нестационарного поля нелинейных гидродинамических пульсаций. Описание этого процесса является исключительно сложной задачей. Поэтому используется приближение среднего поля, в соответствии с которым распространение звуковых волн происходит на фоне среднего завихренного течения. Описанное приближение схематически изображено на рис. 7, где излучение звука мелкомасштабным вихрем происходит в одном случае на фоне “газа” других вихрей, а во втором случае на фоне среднего поля завихренности.

Замена поля турбулентных пульсаций средним течением является удобным приемом в задачах распространения звука. Однако активность среды, связанная с порождением первичным источником вихревых возмущений, делает эту процедуру неоднозначной. Проблема в том, что воздействие точечного источника на поле завихренности максимально в окрестности источника, так что вклад в сдвиговой шум от вихрей в малой окрестности источника имеет тот же порядок, что и вклад вихрей в остальной области течения. Поэтому сдвиговая компонента шума оказывается чувствительной к тому, как осу-

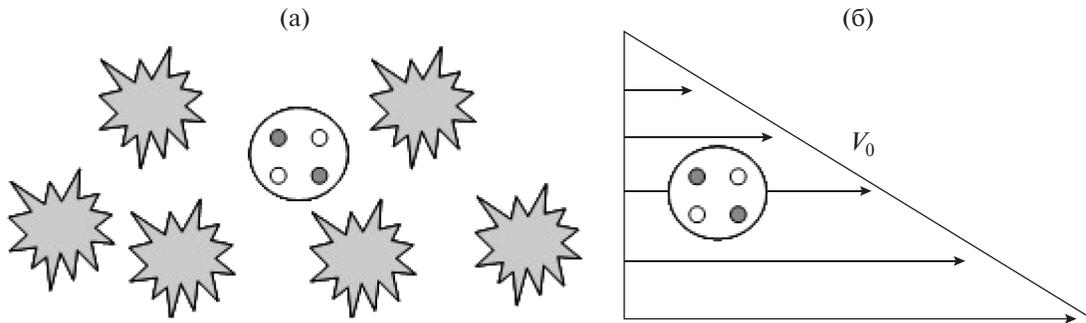


Рис. 7. Схематическое представление двух вариантов излучения звука мелкомасштабным вихрем в 2-мерном слое смешения: (а) – источник звука в “газе вихрей”, (б) – источник звука на фоне среднего течения.

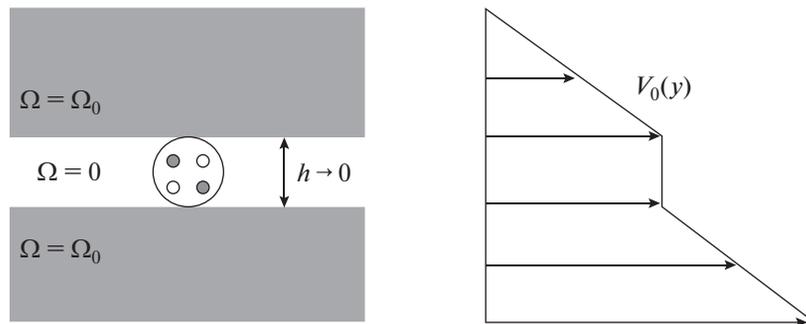


Рис. 8. Источник звука в модифицированном среднем течении.

шествуется предельный переход к среднему полю в окрестности источника.

Для того чтобы это показать, рассмотрим модификацию модельной задачи, рассмотренной в разделе 2. Сделаем поправку к среднему течению, предполагая, что в тонкой полосе $-h < y < h$ в окрестности источника завихренность $\Omega_0(y)$ равна нулю, а в оставшейся части слоя смешения завихренность постоянна. Соответственно профиль средней скорости $V_0(y)$ изменится так, что в полосе $-h < y < h$ поле скорости будет постоянным (рис. 8). Найдем решение такой задачи, а затем сделаем предельный переход $h \rightarrow 0$. Так же, как в задаче раздела 2, ограничимся случаем низкоскоростного течения и тонкого слоя смешения.

С учетом модификации среднего течения вместо (7.2) получим следующее уравнение для возмущений давления:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \bar{\omega}^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\bar{\omega}^2} \right) \frac{\partial p}{\partial y} (1 - \pi(y)) + \left(\frac{\bar{\omega}^2}{c^2} - \alpha^2 \right) p = 2i\alpha \frac{\partial}{\partial y} \delta(y), \tag{9.1}$$

где $\pi(y) = 1$ при $-h < y < h$, $\pi(y) = 0$ при $y < -h$ или $y > h$, $h \rightarrow 0$. Поправочный член $\pi(y)$, выражающий изменение поля средней скорости, об-

нуляет член уравнения с градиентом скорости в полосе $-h < y < h$.

Модификация среднего течения в малой окрестности источника оказывает существенное влияние на величины разрывов давления и производной давления в точке расположения источника, которые определяют решение. В результате получим решение уравнения (9.1) при $y > d$, которое с учетом условия излучения имеет вид

$$p(\alpha, y, \omega) = i\alpha \exp(-\gamma y), \tag{9.2}$$

где $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$, $k = \omega/c_0$. Применяя обратное преобразование Фурье по x и вычислив интеграл методом перевала, получим при $kr \gg 1$

$$p(x, y, \omega) = k \cos \theta \sin \theta \sqrt{\frac{2\pi k}{r}} \exp\left(ikr + i\frac{\pi}{4}\right), \tag{9.3}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arccos(x/r)$.

Мы видим, что решение (9.3), в отличие от (3.4), не содержит сдвиговой компоненты. Таким образом, малая модификация среднего течения приводит к полному исчезновению сдвиговой компоненты звукового излучения. Это означает, что приближение среднего поля при моделировании мелкомасштабных источников звука в рассматриваемой системе является неоднозначным и зависит от локальной структуры поля завихрен-

ности на малых масштабах вихрей, ответственных за излучение.

Этот результат показывает, что несоответствие модели звукового излучения струи данным измерений может быть связано с некорректным приближением среднего поля для этой системы. В этом случае решением проблемы мог бы быть учет локальной структуры поля завихренности в турбулентной струе, которой позволил бы правильно учитывать условия излучения звука мелкомасштабной турбулентностью.

Возможен также другой подход к решению проблемы сдвигового шума при описании звукового излучения струи. Он состоит в том, чтобы использовать другую акустическую аналогию, такую, в которой оператор распространения описывает неактивную среду, отвечающую только за распространение акустических возмущений, но не имеющую гидродинамических степеней свободы. Такой подход к моделированию звукового излучения струи был реализован в [51], где было предложено новое для метода акустической аналогии разделение акустических и гидродинамических переменных. В этой аналогии оператор распространения для акустического потенциала представляет собой конвективное волновое уравнение, а все вихревые возмущения включены в источник, который выражается через плотность вихревого импульса. В этом случае сдвиговый шум в модели не возникает, и соответствие данным измерений достигается без искусственного исключения сдвиговой компоненты из суммарного звукового излучения с помощью локальной модификации среднего течения.

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведен анализ возможности моделирования звукового излучения турбулентной струи на основе использования акустической аналогии, в которой все линейные по возмущениям члены включены в оператор распространения, а нелинейные члены трактуются как источник. Примерами таких аналогий являются уравнение Лилли [26], акустическая аналогия Голдстейна [15] и др. При таком описании оператор распространения содержит вихревые моды, что приводит к появлению сдвиговой компоненты шума, возникающей из-за накачки вихревых возмущений источниками в правой части.

Показано, что в моделируемом звуковом излучении струи можно выделить две компоненты, определяемые как собственный и сдвиговый шум струи. Собственный шум струи определяется как та часть звукового излучения, на которую среднее течение оказывает влияние через эффекты рефракции звука и конвекции источников, но которая не включает в себя членов, пропорциональных градиенту средней скорости. К сдвиговому шуму отнесена та составляющая звукового излу-

чения, которая пропорциональна градиенту средней скорости в сдвиговом течении. Появление сдвиговой компоненты шума связано с тем, что оператор распространения, описывающий линейные возмущения среднего течения, имеет не только акустическую степень свободы, отвечающую за распространение звуковых волн, но обладает также гидродинамическими (вихревыми) степенями свободы. Возбуждаемые источниками звука вихревые моды генерируют вторичное звуковое излучение, обладающее характеристиками сдвиговой компоненты шума.

Для тестирования модели используются данные измерений азимутальных гармоник звукового излучения струи. Сравнение модели с данными акустических измерений позволило сделать вывод о том, что она способна описать сложную картину направленности азимутальных гармоник при простых предположениях о структуре звукового источника, но лишь в том случае, если в модели учитывается только собственный шум струи. Это означает, что эффект сдвигового шума не отражает реальную физику процесса, а обусловлен особенностями моделирования и, в частности, разделением членов уравнений между оператором распространения и источником в рассматриваемой акустической аналогии.

Рассмотрены возможные причины несоответствия моделей, в которых появляется звуковое излучение со сдвиговой компонентой, реальному процессу генерации шума в турбулентной струе. Показано, что малая модификация среднего течения приводит к существенному изменению сдвиговой компоненты звукового излучения. Это означает, что используемое в модели приближение среднего поля, на фоне которого моделируются источники, является неоднозначным и зависит от локальной структуры поля завихренности на малых масштабах.

Рассмотрены возможные подходы к постановке задачи о звуковом излучении струи, которые позволили бы избежать появления сдвигового шума в модели. Одним из вариантов решения проблемы мог бы быть учет локальной структуры поля завихренности в турбулентной струе, который позволит правильно учитывать условия излучения звука мелкомасштабной турбулентностью. Другой вариант состоит в том, чтобы использовать акустическую аналогию, в которой оператор распространения описывает неактивную среду, т.е. отвечает только за распространение акустических возмущений, но не содержит в себе гидродинамических степеней свободы.

Полученные в работе результаты не только служат основой для моделирования шума струи, но также являются дополнительным вкладом в понимание механизмов излучающей части турбулентности в сдвиговых потоках.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 21-71-30016. Экспериментальная часть работы выполнена на базе УНУ “Заглушенная камера с потоком АК-2” ФАУ ЦАГИ, модернизируемой при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской федерации по соглашению №075-11-2021-066.

Приложение А

Покажем изотропность тензора

$$Q^{ij} = \sum_{n=1}^5 a_n D_n^{ij}, \quad (A1)$$

где амплитуды a_n представляют собой взаимно некоррелированные случайные величины с одинаковыми дисперсиями, декартовы компоненты тензора D_n^{ij} имеют вид

$$\begin{aligned} D_1^{ij} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, & D_2^{ij} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ D_3^{ij} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & D_4^{ij} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ D_5^{ij} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (A2)$$

Рассмотрим свертку $q = n^i n^j Q^{ij}$, где n^i – единичный вектор нормали с декартовыми компонентами $n^i = (\sin \hat{\theta} \cos \hat{\phi}, \sin \hat{\theta} \sin \hat{\phi}, \cos \hat{\theta})$, где $\hat{\phi}, \hat{\theta}$ – сферические углы в локальной системе координат. Дисперсия свертки

$$\langle q^2 \rangle = \sum_{n=1}^5 \langle a_n^2 \rangle D_n^{ij} D_n^{rs} n^i n^j n^k n^s. \quad (A3)$$

Для каждого из базисных квадрупольей вычислим свертку $n^i n^j D^{ij}$:

$$\begin{aligned} n^i n^j D_1^{ij} &= \frac{1}{2} (3 \cos^2 \hat{\theta} - 1), \\ n^i n^j D_2^{ij} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\hat{\theta} \cos \hat{\phi}, \\ n^i n^j D_3^{ij} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\hat{\theta} \sin \hat{\phi}, \\ n^i n^j D_4^{ij} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 \hat{\theta} \cos 2\hat{\phi}, \\ n^i n^j D_5^{ij} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin^2 \hat{\theta} \sin 2\hat{\phi}. \end{aligned} \quad (A4)$$

Подставляя (A4) в (A3), получим

$$\begin{aligned} \langle q^2 \rangle &= \langle a_n^2 \rangle \left(\frac{1}{4} (3 \cos^2 \hat{\theta} - 1)^2 + \right. \\ &\left. + \frac{3}{4} \sin^2 2\hat{\theta} + \frac{3}{4} \sin^4 \hat{\theta} \right) = \langle a_n^2 \rangle. \end{aligned} \quad (A5)$$

Таким образом, свертка тензора Q^{ij} с вектором нормали имеет дисперсию, не зависящую от направления нормали, что означает изотропность этого тензора.

Приложение Б

Найдем решение уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\omega}^2}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho}{\bar{\omega}^2} \frac{d}{d\rho} p \right) + \\ + \left(\frac{\bar{\omega}^2}{c_0^2} - \alpha^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) p = q(\rho, m, \alpha, \omega), \end{aligned} \quad (B1)$$

где $q(\mathbf{r}, \omega) = \bar{\omega}^2 \nabla \cdot \left(\frac{1}{\bar{\omega}^2} \mathbf{f} \right)$, декартовы компоненты $f^i = \frac{\partial T^{ij}}{\partial r^j}$, квадрупольный источник имеет вид $T^{ij} = D_n^{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)$.

В областях с постоянной скоростью это уравнение сводится к однородному уравнению Бесселя, решения которого с учетом граничных условий в нуле и на бесконечности имеют вид

$$\begin{aligned} p_{in}(\rho, m, \alpha, \omega) &= A J_m(i\beta\rho), \quad \rho < \rho_1, \\ p_{out}(\rho, m, \alpha, \omega) &= B H_m^{(1)}(i\gamma\rho), \quad \rho > \rho_2, \end{aligned} \quad (B2)$$

где J_m и $H_m^{(1)}$ – функции Бесселя и Ганкеля порядка m , $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$, $\beta = \sqrt{\alpha^2 - (k - M_{jet}\alpha)^2}$, $k = \omega/c_0$, $M_{jet} = V_{jet}/c_0$.

В слое смешения решение имеет разрывы давления $[p]_s$ и его производной $[\partial p]_s$ при $\rho = \rho_s$, которые определяются типом квадрупольного источника. Представим решения при $\rho_1 < \rho < \rho_2$ в виде $p = A p_1 + p_2$, где A – амплитуда внутреннего решения (B2). p_1 находится как решение уравнения (B1) с нулевой правой частью и граничными условиями при $\rho = \rho_1$:

$$p_1 = J_m(i\beta\rho_1), \quad \frac{dp_1}{d\rho} = \frac{d}{d\rho} J_m(i\beta\rho_1). \quad (B3)$$

p_2 в области $\rho_s < \rho < \rho_2$ есть решение уравнения (B1) с нулевой правой частью и граничными условиями при $\rho = \rho_s$:

$$p_2 = [p]_s, \quad \frac{dp_2}{d\rho} = [\partial p]_s, \quad (B4)$$

и $p_2 = 0$ в области $\rho_1 < \rho < \rho_s$.

Нетрудно убедиться, что функция $p = Ap_1 + p_2$ гладко переходит в решение (Б2) на внутренней границе слоя $\rho = \rho_1$, а при $\rho = \rho_s$ имеет заданные разрывы. Неизвестные константы A и B находят-ся из условия непрерывности решения и его про-изводной на внешней границе слоя $\rho = \rho_2$. Отсю-да найдем константу B , определяющую амплиту-ду звуковой волны вне струи:

$$B = \frac{p_2 \frac{dp_1}{d\rho} - p_1 \frac{dp_2}{d\rho}}{H_m^{(1)}(i\gamma\rho) \frac{dp_1}{d\rho} - p_1 \frac{d}{d\rho} H_m^{(1)}(i\gamma\rho)} \Bigg|_{\rho=\rho_2}. \quad (Б5)$$

В предельном случае тонкого слоя смешения будем использовать постоянство давления p и ра-диальной компоненты поля смещения $\eta^p = \frac{1}{\bar{\omega}^2} \frac{dp}{d\rho}$ в слое смешения за исключением точки распо-ложения источника $\rho = \rho_s$, где эти переменные име-ют разрывы. В этом случае на внешней границе слоя смешения $\rho = \rho_2$ получим

$$p_1 = J_m(i\beta\rho_1), \quad \frac{dp_1}{d\rho} = \frac{\omega^2}{\bar{\omega}_{in}^2} i\beta J'_m(i\beta\rho_1), \quad (Б6)$$

$$p_2 = [p]_s, \quad \frac{dp_2}{d\rho} = \frac{\omega^2}{\bar{\omega}_s^2} [\partial p]_s,$$

где $\bar{\omega}_{in} = \omega - \alpha V_{jet}$, $\bar{\omega}_s = \omega - \alpha V_0(\rho_s)$, штрих озна-чает дифференцирование функций по аргументу. Подставляя эти соотношения в (Б5), получим

$$B = i \frac{1}{\beta\rho_s A_m} \times \left(-\frac{\bar{\omega}_{in}^2}{\bar{\omega}_s^2} \rho_s [\partial p]_s J_m(i\beta\rho_s) + [p]_s i\beta\rho_s J'_m(i\beta\rho_s) \right), \quad (Б7)$$

где

$$A_m = \frac{\bar{\omega}_{in}^2 \gamma}{\omega^2 \beta} H_m^{(1)\prime}(i\gamma\rho_s) J_m(i\beta\rho_s) - H_m^{(1)}(i\gamma\rho_s) J'_m(i\beta\rho_s)$$

В соответствии с (Б2) запишем звуковое излу-чение вне струи для точечного квадрупольного источника, локализованного в точке $\rho = \rho_s$, $\varphi = 0$, $z = 0$,

$$p(\rho, m, \alpha, \omega) = k^2 F_{(n)m}(\alpha, \omega) \frac{i}{2} H_m^{(1)}(i\gamma\rho), \quad (Б8)$$

где безразмерные направленности излучения n -го базисного квадруполья $F_{(n)m} = -i \frac{2}{k^2} B$, величина B определяется из (Б5) в общем случае и из (Б7) в предельном случае тонкого слоя смешения. Для произвольной точки рождения $\rho = \rho_s$, $\varphi = \varphi_s$, $z = z_s$ с учетом однородности процесса по коор-

динатам φ и z в выражение (Б6) добавится множи-тель $\exp(-i\alpha z_s - im\varphi_s)$, т.е.

$$p(\rho, m, \alpha, \omega) = k^2 F_{(n)m}(\alpha, \omega) \times \frac{i}{2} H_m^{(1)}(i\gamma\rho) \exp(-i\alpha z_s - im\varphi_s). \quad (Б9)$$

Используя выражения $[p]_s$ и $[\partial p]_s$, полученные в Приложении В, для тонкого слоя смешения по-лучим:

$$F_{(1)m} = \frac{1}{4\pi^2 k^2 \beta\rho_s A_m} \frac{\bar{\omega}_{in}^2}{\bar{\omega}_s^2} \left(3\alpha^2 - \frac{\bar{\omega}_s^2}{c^2} \right) J_m(i\beta\rho_s),$$

$$F_{(2)m} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\pi^2 k^2 \beta\rho_s^3 A_m} i\alpha\rho_s \times \left(-\frac{\bar{\omega}_{in}^2}{\bar{\omega}_s^2} \alpha\rho_s \frac{\Omega_0}{\bar{\omega}_s} J_m(i\beta\rho_s) + i\beta\rho_s J'_m(i\beta\rho_s) \right),$$

$$F_{(3)m} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\pi^2 k^2 \beta\rho_s^3 A_m} m\alpha\rho_s \frac{\bar{\omega}_{in}^2}{\bar{\omega}_s^2} J_m(i\beta\rho_s),$$

$$F_{(4)m} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\pi^2 k^2 \beta\rho_s^3 A_m} \times \left(\frac{\bar{\omega}_{in}^2}{\bar{\omega}_s^2} \left(\frac{\rho_s^2}{2} \left(\frac{\bar{\omega}_s^2}{c^2} - \alpha^2 \right) - m^2 \right) \times J_m(i\beta\rho_s) + i\beta\rho_s J'_m(i\beta\rho_s) \right),$$

$$F_{(5)m} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\pi^2 k^2 \beta\rho_s^3 A_m} \times im \left(-\frac{\bar{\omega}_{in}^2}{\bar{\omega}_s^2} \left(1 + \alpha\rho_s \frac{\Omega_0}{\bar{\omega}_s} \right) \times J_m(i\beta\rho_s) + i\beta\rho_s J'_m(i\beta\rho_s) \right), \quad (Б10)$$

где Ω_0 – завихренность среднего течения в точке $\rho = \rho_s$, индекс в скобках соответствует номеру ба-зисного квадруполья.

Приложение В

Найдем разрывы давления и производной дав-ления в точке расположения источника для реше-ний уравнения

$$\bar{\omega}^2 \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho}{\bar{\omega}^2} \frac{d}{d\rho} p \right) + \left(\frac{\bar{\omega}^2}{c_0^2} - \alpha^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) p = q(\rho, m, \alpha, \omega), \quad (Б1)$$

где $q(\mathbf{r}, \omega) = \bar{\omega}^2 \nabla \left(\frac{1}{\bar{\omega}^2} \mathbf{f} \right)$, декартовы компоненты $f^i = \frac{\partial T^{ij}}{\partial r^j}$, квадрупольный источник имеет вид $T^{ij} = D^{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)$, где $\rho = \rho_s, \varphi = 0, z = 0$.

Запишем поле $q(\mathbf{r}, \omega)$ в цилиндрических координатах:

$$q(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\partial^2 T^{\rho\rho}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} T^{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \rho^2 T^{\varphi\varphi} + \frac{\partial^2 T^{zz}}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (T^{\rho\rho} - \rho^2 T^{\varphi\varphi}) + 2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \right) \rho T^{\rho\varphi} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \right) T^{z\rho} + 2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} \rho T^{\varphi z} + \bar{\omega}^2 \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\bar{\omega}^2} \right) \times \left(\frac{\partial T^{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial T^{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial T^{\rho z}}{\partial z} - \rho T^{\varphi\varphi} + \frac{1}{\rho} T^{\rho\rho} \right). \quad (B2)$$

Используем Фурье-преобразование по координатам φ и z . Преобразуем (B2) к виду, в котором все функции от ρ внесены под знак производной по ρ :

$$q(\rho, m, \alpha, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \times \left(\frac{d^2}{d\rho^2} (D^{\rho\rho} \Phi) + \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\rho} D^{\rho\rho} \Phi \right) + \frac{1}{\rho^2} D^{\rho\rho} \Phi \right) + \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{d}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \right) \left(\frac{1}{\rho} (D^{\rho\rho} - \rho^2 D^{\varphi\varphi}) \Phi \right) - \frac{1}{4\pi^2} (m^2 D^{\varphi\varphi} + \alpha^2 D^{zz}) \Phi + \frac{1}{4\pi^2} 2im \left(\frac{d}{d\rho} + \frac{2}{\rho} \right) \times (D^{\rho\varphi} \Phi) + \frac{1}{4\pi^2} 2i\alpha \left(\frac{d}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \right) (D^{\rho z} \Phi) - \frac{1}{4\pi^2} 2m\alpha D^{\varphi z} \Phi + \frac{1}{4\pi^2} \frac{d}{d\rho} \times \left(\bar{\omega}^2 \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\bar{\omega}^2} \right) D^{\rho\rho} \Phi \right) - \frac{1}{4\pi^2} \frac{d}{d\rho} \left(\bar{\omega}^2 \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\bar{\omega}^2} \right) \right) \times D^{\rho\rho} \Phi + \frac{1}{4\pi^2} \bar{\omega}^2 \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\bar{\omega}^2} \right) \times \left(im D^{\rho\varphi} \Phi + i\alpha D^{\rho z} \Phi + \frac{1}{\rho} (D^{\rho\rho} - \rho^2 D^{\varphi\varphi}) \Phi \right), \quad (B3)$$

где $\Phi(\rho) = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_s)$. Перейдем к декартовым компонентам тензора D^{ij} , которые не зависят от ρ и поэтому могут быть вынесены из-под производной. После преобразований получим:

$$q(\rho, m, \alpha, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} D^{xx} \times \left(\bar{\omega}^2 \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\bar{\omega}^2} \rho \frac{d\Phi}{d\rho} \right) - \frac{m^2}{\rho^2} \Phi - \alpha^2 \Phi \right) + \frac{1}{4\pi^2} \left((D^{xx} - D^{yy}) \frac{m^2}{\rho^2} \Phi + (D^{xx} - D^{zz}) \times \alpha^2 \Phi + 2im D^{xy} \frac{1}{\rho^2} \Phi - 2\alpha m D^{yz} \frac{1}{\rho} \Phi \right) + \frac{1}{4\pi^2} \bar{\omega}^2 \times \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho}{\bar{\omega}^2} \left(2im D^{xy} \frac{1}{\rho} \Phi + 2i\alpha D^{xz} \Phi + \frac{1}{\rho} (D^{xx} - D^{yy}) \Phi \right) \right) - \frac{1}{4\pi^2} \bar{\omega}^2 \frac{d}{d\rho} \times \left(\frac{1}{\bar{\omega}^2} \right) \left(im D^{xy} \frac{1}{\rho} \Phi + i\alpha D^{xz} \Phi \right). \quad (B4)$$

Для того чтобы избавиться от второй производной по радиальной координате в источнике, сделаем замену переменной $\hat{\rho} = \rho - D^{xx} \Phi$. При этом новая и старая переменные различаются только в слое $\rho = \rho_s$. Для новой переменной $\hat{\rho}$ по-прежнему справедливо уравнение (B1), в котором, однако, изменяется правая часть (B4), а именно, первый член заменяется членом $\frac{1}{\pi c^2} D^{xx} \Phi$. Таким образом, для новой переменной источник в правой части уравнения (B1) содержит члены, пропорциональные только дельта-функции и ее первой производной:

$$\hat{q}(\rho, m, \alpha, \omega) = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\bar{\omega}^2}{c^2} D^{xx} \Phi + \frac{1}{4\pi^2} \times \left((D^{xx} - D^{yy}) \frac{m^2}{\rho^2} \Phi + (D^{xx} - D^{zz}) \alpha^2 \Phi + 2im D^{xy} \frac{1}{\rho^2} \Phi - 2\alpha m D^{yz} \frac{1}{\rho} \Phi \right) + \frac{1}{4\pi^2} \frac{\bar{\omega}^2}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho}{\bar{\omega}^2} \left(2im D^{xy} \frac{1}{\rho} \Phi + 2i\alpha D^{xz} \Phi + \frac{1}{\rho} (D^{xx} - D^{yy}) \Phi \right) \right) - \frac{1}{4\pi^2} \bar{\omega}^2 \frac{d}{d\rho} \times \left(\frac{1}{\bar{\omega}^2} \right) \left(im D^{xy} \frac{1}{\rho} \Phi + i\alpha D^{xz} \Phi \right). \quad (B5)$$

Определим связь между разрывами решения уравнения (B1) и функциональным видом источников. Если давление имеет разрыв $[p]_s$ в точке $\rho = \rho_s$, то первая и вторая производные давления имеют слагаемые, содержащие дельта-функцию и ее производную, $\frac{dp}{d\rho} = [p]_s \delta(\rho - \rho_s)$,

$\frac{d^2 p}{d\rho^2} = [p]_s \frac{d}{d\rho} \delta(\rho - \rho_s)$. А если производная давления имеет разрыв $[\partial p]_s$, то вторая производная давления имеет слагаемое, содержащее производную дельта-функции, $\frac{d^2 p}{d\rho^2} = [\partial p]_s \delta(\rho - \rho_s)$.

Подставляя эти выражения в левую часть уравнения (В1), получим связь между членами вида дельта-функции и ее производной в источнике и разрывами давления и его производной в решении:

$$q(\rho, m, \alpha, \omega) = [p]_s \delta(\rho - \rho_s) + [\partial p]_s \frac{\bar{\omega}^2}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho}{\bar{\omega}^2} \delta(\rho - \rho_s) \right). \quad (\text{В6})$$

Сравнивая (В5) и (В6), найдем разрывы давления и производной в решении уравнения (В1) для точечного квадрупольного

$$[p]_s = \frac{1}{4\pi^2 \rho_s^2} (D^{xx} - D^{yy} + D^{xy} 2im + D^{xz} 2i\alpha \rho_s), \quad (\text{В7})$$

$$[\partial p]_s = \frac{1}{4\pi^2 \rho_s^3} \left(-D^{xx} \frac{\bar{\omega}_s^2}{c^2} \rho_s^2 + (D^{xx} - D^{yy}) m^2 + (D^{xx} - D^{zz}) \alpha^2 \rho_s^2 + D^{xy} 2im - D^{yz} 2m\alpha \rho_s \right) - \frac{1}{4\pi^2 \rho_s^2} \frac{\bar{\omega}_s^2}{c^2} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\bar{\omega}_s^2} \right) (D^{xy} im + D^{xz} i\alpha \rho_s). \quad (\text{В8})$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lighthill M.J.* On sound generated aerodynamically: I. general theory // Proc. Royal Soc. Series A. 1952. V. 211. P. 564–581.
2. *Крайтон Д.* Акустика как ветвь гидромеханики // В кн.: Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. М.: Мир, 1984. С. 359–412.
3. *Мунин А.Г., Кузнецов В.М., Леонтьев Е.А.* // Аэродинамические источники шума. Машиностроение, 1981. 248 с.
4. *Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.Kh.* Noise Prediction for Increasingly Complex Jets. Part I: Methods and Tests. Part II: Applications // Int. J. Aeroacoustics. 2005. V. 4. № 3–4. P. 213–266.
5. *Faranosov G.A., Goloviznin V.M., Karabasov S.A., Kondakov V.G., Kopyev V.F., Zaitsev M.A.* CABARET method on unstructured hexahedral grids for jet noise computation // Computers & Fluids. 2013. V. 88. P. 165–179.
6. *Brès G.A., Lele S.K.* Modelling of jet noise: a perspective from large-eddy simulations // Phil. Trans. R. Soc. A. 2019. V. 377. P. 20190081.
7. *Moore C.J.* The role of shear-layer instability waves in jet exhaust noise // J. Fluid Mech. 1977. V. 80. № 2. P. 321–367.
8. *Kopyev V.F., Ostrikov N.N., Kopyev V.A., Belyaev I.V., Faranosov G.A.* Instability Wave Control by Plasma Actuators: Problems and Prospects // AIAA Paper. 2011. 2011–973.
9. *Jordan P., Colonius T.* Wave Packets and Turbulent Jet Noise // Annual Review of Fluid Mechanics. 2013. V. 45. P. 173–195.
10. *Tam C.K., Chen K.C.* A statistical model of turbulence in two-dimensional mixing layers // J. Fluid Mech. 1979. V. 92. № 2. P. 303–326.
11. *Goldstein M.E., Leib S.J.* The Role of Instability Waves in Predicting Jet Noise // J. Fluid Mech. 2005. V. 525. P. 37–72.
12. *Towne A., Colonius T., Jordan P., Cavalieri A.V., Bres G.A.* Stochastic and nonlinear forcing of wavepackets in a Mach 0.9 jet // AIAA Paper. 2015. 2015–2217.
13. *Tam C., Auriant L.* Jet mixing noise from fine-scale turbulence // AIAA Journ. 1999. V. 37. № 2. P. 145–153.
14. *Morris P., Boluriaan S.* The prediction of jet noise from CFD Data // AIAA Paper. 2004. 2004–2977.
15. *Goldstein M.E.* A Generalized Acoustic Analogy // J. Fluid Mech. 2003. V. 488. P. 315–333.
16. *Karabasov S.A., Afsar M.Z., Hynes T.P., Dowling A.P., McMullan W.A., Pokora C.D., Page G.J., McGuirk J.J.* Jet Noise: Acoustic Analogy Informed by Large Eddy Simulation // AIAA Journ. 2010. V. 48. № 7. P. 1312–1325.
17. *Копьев В.Ф., Чернышев С.А.* Новая корреляционная модель каскада турбулентных пульсаций как источник шума в струях // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 4. С. 482–497.
18. *Kopyev V., Chernyshev S.* Simulation of azimuthal characteristics of turbulent jet noise by correlation model of quadrupole noise sources // Int. J. Aeroacoustics. 2014. V. 13. № 1–2. P. 39–60.
19. *Kopyev V., Chernyshev S.* Correlation model of quadrupole noise sources in turbulent jet: effect of refraction // AIAA Paper. 2015. 2015–3130.
20. *Tam C.K.W., Golebiowski M., Seiner J.M.* On the two components of turbulent mixing noise from supersonic jets // AIAA Paper. 1996. 96–1716.
21. *Tam C., Viswanathan K., Ahuja K., Panda J.* The sources of jet noise: experimental evidence // J. Fluid Mech. 2008. V. 615. P. 253–292.
22. *Faranosov G., Kopyev V., Belyaev I., Bychkov O., Chernyshev S.* On the azimuthal structure of installed jet noise // AIAA Paper. 2017. 2017–3527.
23. *Kopyev V., Zaitsev M., Chernyshev S., Ostrikov N.* Large vortex input in a noise of artificially excited subsonic jet // AIAA Paper. 2007. 2007–3647.
24. *Kopyev V., Zaitsev M., Chernyshev S., Ostrikov N.* Vortex ring input in subsonic jet noise // Int. J. Aeroacoustics. 2007. V. 6. № 4. P. 375–405.
25. *Phillips O.M.* On the generation of sound by supersonic turbulent shear layers // J. Fluid Mech. 1960. V. 9. № 1. P. 1–28.
26. *Lilley G.M.* On the noise from jets // AGARD CP-131. 1974. V. 13. P. 1–12.
27. *Howe M.S.* Contribution to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute // J. Fluid Mech. 1975. V. 71. № 4. 1975. P. 625–673.

28. *Фриш У.* Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова. Перевод с англ. Соболевского А.Н. под ред. Бланка М.Л. М.: ФАЗИС, 1998. 346 с.
29. *Зыбин К.П., Сирота В.А.* Модель вытягивающихся вихрей и обоснование статистических свойств турбулентности // *Успехи физ. наук.* 2015. Т. 185. № 6. С. 593–612.
30. *Goldstein M.E.* Recent developments in the application of the generalized acoustic analogy to jet noise prediction // *Int. J. Aeroacoustics.* 2011. V. 10. № 2–3. P. 89–116.
31. *Ewert R., Schroder W.* Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering // *J. Comput. Phys.* 2003. V. 188. № 2. P. 365–398.
32. *Mani R.* The influence of jet noise. Part 1. The noise of unheated jets // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 73. № 4. P. 753–778.
33. *Jones I.S.* Aerodynamic noise dependent on mean shear // *J. Fluid Mech.* 1968. V. 33. № 1. P. 65–72.
34. *Ribner H.S.* On the role of the shear term in jet noise // *J. Sound Vibr.* 1977. V. 52. № 1. P. 121–132.
35. *Freund J.B.* Turbulent jet noise: shear noise, self-noise and other contributions // *AIAA Paper.* 2002. 2002–2423.
36. *Jordan P., Gervais Y.* Modelling self- and shear-noise mechanisms in inhomogeneous, anisotropic turbulence // *J. Sound Vibr.* 2005. V. 279. P. 529–555.
37. *Ukeiley L., Tinney C.E., Mann R., Glauser M.* Spatial correlations in a transonic jet // *AIAA J.* 2007. V. 45. № 6. P. 1357–1369.
38. *Morris P.J., Farassat F.* Acoustic analogy and alternative theories for jet noise prediction // *AIAA Journ.* 2002. V. 40. № 4. P. 671–680.
39. *Lilley G.M.* On the Noise from Air Jets // *Aeronautical Research Council. Rep. ARC-20376.* 1958.
40. *Ribner H.S.* The generation of sound by turbulent jets // *Advances in Applied Mechanics.* 1964. V. 8. P. 103–182.
41. *Ribner H.S.* Quadrupole correlations governing the pattern of jet noise // *J. Fluid Mech.* 1969. V. 38. № 1. P. 1–24.
42. *Goldstein M.E., Howes W.L.* New aspects of subsonic aerodynamic noise theory // *NASA TN D-7158.* 1973.
43. *Колмогоров А.Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // *Докл. АН СССР.* 1941. Т. 30. С. 9–13.
44. *Kopiev V.F., Zaitsev M.Yu., Velichko S.A., Kotova A.N., Belyaev I.V.* Cross-correlations of far field azimuthal modes in subsonic jet noise // *AIAA Paper.* 2008. 2008–2887.
45. *Kopiev V.F., Zaitsev M.Yu., Chernyshev S.A., Kotova A.N.* The role of large-scale vortex in a turbulent jet noise // *AIAA Paper.* 1999. 99-1839
46. *Mohring W.* On vortex sound at low Mach number // *J. Fluid Mech.* V. 85. 1978. P. 685–691.
47. *Мунин А.Г., Квитка В.Е.* Авиационная акустика. М.: Машиностроение, 1973. С. 448.
48. *Morris P.J., Zaman K.B.M.Q.* Velocity measurements in jets with application to noise source modeling // *J. Sound Vibr.* 2010. V. 329. № 4. P. 394–414.
49. *Ewert R.* RPM – the fast Random Particle-Mesh method to realize unsteady turbulent sound sources and velocity fields for CAA applications // *AIAA Paper.* 2007. 2007–3506.
50. *Pokora C.D., McGuirk J.J.* Stereo-PIV measurements of spatio-temporal turbulence correlations in an axisymmetric jet // *J. Fluid Mech.* 2015. V. 778. P. 216–252.
51. *Копьев В.Ф., Чернышев С.А.* О разделении акустических и гидродинамических переменных в модели звуковых источников турбулентной струи // *Докл. РАН. Физика, технические науки.* 2022. Т. 506. № 1. С. 4–15.

УДК 534.522

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ СКАЛЯРНОЙ ВОЛНОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПОЛЕЙ ПРИСТЕНОЧНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ДАВЛЕНИЯ

© 2022 г. Е. Б. Кудашев^а, *, Л. Р. Яблоник^б, **^аИнститут космических исследований РАН, ул. Профсоюзная 84/32, Москва, 117997 Россия^бНаучно-производственное объединение по исследованию и проектированию энергетического оборудования им. И.И. Ползунова, ул. Атаманская 3/6, Санкт-Петербург, 191167 Россия

*e-mail: kudashhev@iki.rssi.ru

**e-mail: yablonik@gmail.com

Поступила в редакцию 16.06.2022 г.

После доработки 01.07.2022 г.

Принята к публикации 05.07.2022 г.

Введено понятие скалярного частотно-волнового спектра турбулентных пристеночных давлений и исследованы его основные особенности. Скалярный частотно-волновой спектр, представляющий суммарную энергию всех волновых компонент поля турбулентных давлений с заданным модулем волнового вектора, содержит в концентрированном виде информацию, требуемую при решении многих задач аэрогидродинамической акустики. Показано, что контурные фильтры позволяют проводить оценки частотно-волнового спектра в области малых волновых чисел. Несмотря на трудность практической реализации скалярной волновой фильтрации полей пристеночных турбулентных пульсаций давления в настоящее время построение контурных фильтров представляется перспективным направлением исследований. Предложенные методы и полученные в работе результаты показывают, что широкополосная скалярная волновая фильтрация поля турбулентных пристеночных давлений может осуществляться на базе использования конечноразмерных приближений “идеального” скалярного волнового фильтра с единичной волновой чувствительностью в заданном диапазоне волновых чисел и нулевой чувствительностью вне этого диапазона.

Ключевые слова: скалярный частотно-волновой спектр, турбулентные пристеночные пульсации давления, оценки частотно-волнового спектра в области малых волновых чисел, контурные фильтры

DOI: 10.31857/S0320791922060077

ВВЕДЕНИЕ. СКАЛЯРНЫЙ ЧАСТОТНО-ВОЛНОВОЙ СПЕКТР

Современные экспериментальные исследования частотно-волнового спектра турбулентных пристеночных давлений инициированы как вопросами моделирования турбулентных процессов и параметров пристеночной турбулентности, так и прикладными задачами, связанными с аэрогидродинамической генерацией шума и вибраций [1–4].

Модельные представления используются, в частности, при отработке собственно экспериментальных методов. Классический пример – применение модели Коркоса для оценки влияния размеров приемника, регистрирующего “точечный” частотный спектр турбулентных давлений [5, 6]. На протяжении длительного времени одной из задач моделирования остается преодоление искажений, вызванных акустическим загрязнением (“acoustic contamination”) результатов

экспериментальных исследований шумом внешних источников [7].

Прикладные исследования частотно-волнового спектра направлены главным образом на установление вклада различных волновых компонент турбулентного поля пульсаций давления в суммарную нагрузку, определяющую вибрации и звукоизлучение обтекаемых элементов структур, рассматриваемых обычно как тонкостенные конструкции.

Рассмотрение отмеченных направлений показывает, что, хотя поля турбулентных давлений в пограничном слое имеют выраженный конвективный характер, физические механизмы, определяющие соответствующие им значимые эффекты, оказываются практически зависимыми лишь от модуля волнового вектора, тогда как фактор направления волны в итоге, как правило, оказывается несущественным. К примеру, уровни вибраций и акустического излучения безграничной тонкой пластины под воздействием поля

пульсаций давления, представляемого волновым спектром $E(\omega, k_1, k_2)$, пропорциональны интегральному воздействию по всем волнам с волновым числом $k_s = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$. При этом коэффициент пропорциональности зависит лишь от отношения величины k_s к волновому числу $k_p(\omega)$ свободной изгибной волны [8] при заданной угловой частоте ω и характерных волновых числах, характеризующих распространение звуковых волн в примыкающих к пластине средах. Такая структура зависимостей распространяется и на ограниченные тонкостенные конструкции при малых и умеренно больших масштабах корреляции поля пульсаций давления [9, 10].

Значения скалярного параметра k_s определяют таким же образом основные оценки, связанные с требованиями по миниатюризации приемника при измерении частотного спектра, а также волновую зону влияния акустических источников.

Отмеченные факторы приводят к выводу, что полная информация о волновых характеристиках поля турбулентных давлений, задаваемая величинами $E(\omega, k_1, k_2)$, во многих случаях избыточна, так что целесообразно рассмотрение скалярного спектра $\Phi(\omega, k_s)$, представляющего собой интеграл от волнового спектра $E(\omega, k_1, k_2)$ по окружности радиуса k_s :

$$\Phi(\omega, k_s) = k_s \int_0^{2\pi} E(\omega, k_s \cos\varphi, k_s \sin\varphi) d\varphi. \quad (1)$$

Обсуждение основных свойств данной характеристики и методов ее экспериментального изучения является предметом данной работы.

СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО СПЕКТРА ТУРБУЛЕНТНЫХ ДАВЛЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Основные характеристики скалярного спектра рассмотрим на базе двух типовых моделей двумерного частотно-волнового спектра $E(\mathbf{k}, \omega)$ с одинаковыми зависимостями продольного $E_1(k_1, \omega)$ и поперечного $E_2(k_2, \omega)$ волновых спектров:

$$E_i(k_i, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(k_i, k_j, \omega) dk_j = P(\omega) \left(\frac{U}{\omega}\right) e_i(k_i, \omega). \quad (2)$$

Здесь $P(\omega)$ – частотный спектр пульсаций давления; $i = 1, 2$; $j = i - (-1)^i$; U – конвективная скорость, близкая к скорости обтекания. Приведенные продольный и поперечный спектры представляются выражениями:

$$e_1(k_1, \omega) = \frac{1}{\pi\alpha} \frac{1}{1 + \left(\frac{\kappa_1 - 1}{\alpha}\right)^2}, \quad (3)$$

$$e_2(k_2, \omega) = \frac{1}{\pi\beta} \frac{1}{1 + \left(\frac{\kappa_2}{\beta}\right)^2}, \quad (4)$$

в которых $\kappa = \mathbf{k}U/\omega$, а постоянные α и β в определенной мере зависят от безразмерных параметров течения, причем отношение $\beta/\alpha > 1$ уменьшается с ростом шероховатости стенки [3].

Применительно к первой, мультипликативной, модели Коркоса частотно-волновой спектр $E_m(\mathbf{k}, \omega)$ выражается в виде

$$E_m(\mathbf{k}, \omega) = P(\omega) \left(\frac{U}{\omega}\right)^2 e_1(\kappa_1, \omega) e_2(\kappa_2, \omega). \quad (5)$$

Вторая модель, с эллиптическим окном [10, 11], представляется соотношением

$$E_e(\mathbf{k}, \omega) = P(\omega) \left(\frac{U}{\omega}\right)^2 \times \frac{1}{2\pi\alpha\beta} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\kappa_1 - 1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\kappa_2}{\beta}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad (6)$$

В рамках представленных моделей полезно сравнить скалярный спектр (1) с продольным спектром (3). Последняя характеристика исследовалась экспериментально в [12] с помощью линейной антенны точечных приемников. Качественный анализ можно выполнить на базе рассмотрения кривых на рис. 1, где на плоскости волнового вектора представлены линии постоянных значений частотно-волнового спектра (числа на кривых указывают величину, равную $10 \lg(E/E_{\max})$, значения α и β приняты равными соответственно 0.11 и 0.71 [13]). Из анализа графических зависимостей можно заключить, что при $\kappa_1 > 1$ значения скалярного спектра (интеграл по окружности радиуса κ_1 с центром в начале координат) способны быть выше соответствующих величин продольного спектра (интеграл по κ_2 при заданном κ_1), поскольку в первом случае контур интегрирования пересекает конвективный гребень высоких значений частотно-волнового спектра. В случае $\kappa_1 < 1$ должно выполняться противоположное соотношение, так как здесь значительный участок контура интегрирования по окружности находится на большем удалении от конвективного гребня, чем соответствующая вертикальная прямая. Естественно предполагать, что такого рода соотношения между скалярным и продольным спектрами носят достаточно общий

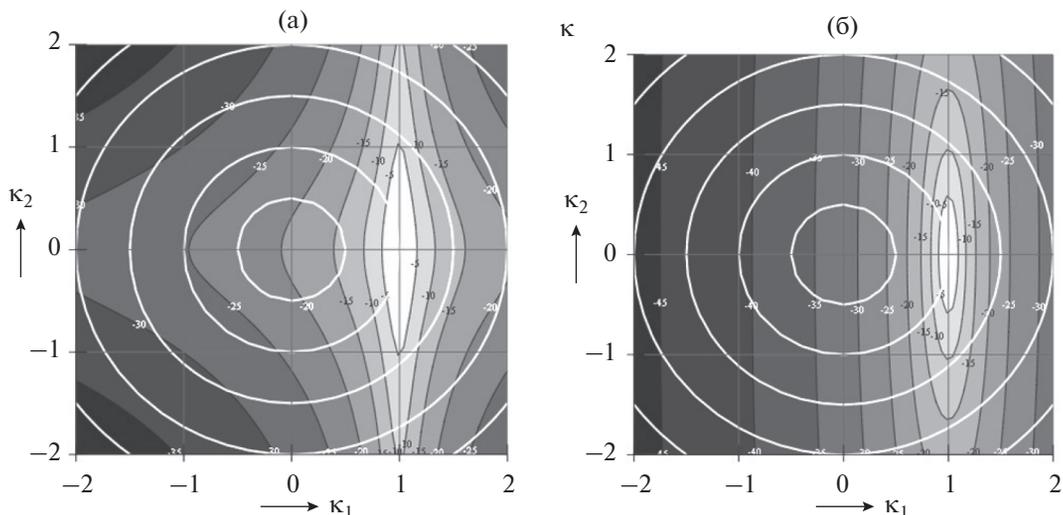


Рис. 1. Кривые равных уровней частотно-волнового спектра. (а) – Модель (4), (б) – модель (5).

характер и не зависят от конкретной модели частотно-волнового спектра, по крайней мере, в условиях турбулентного пограничного слоя.

Приведенные качественные представления иллюстрируются на рис. 2 данными прямого расчета значений безразмерного параметра $\bar{\Phi}(\kappa_s)$, равного отнесенному к величине $P(\omega)\left(\frac{U}{\omega}\right)$ скалярному спектру (1), и безразмерного продольного спектра e_1 из (3).

Результаты, приведенные на рис. 2, демонстрируют отмеченное выше изменение соотношения между продольным и скалярным спектрами при переходе значения κ , незначительно превышающего единицу. При трехкратном отклонении от единицы продольные и скалярные спектры могут отличаться на порядок. При этом, в субконвективном диапазоне степень различия существенно зависит от выбора модели спектра.

“ИДЕАЛЬНЫЙ” СКАЛЯРНЫЙ ВОЛНОВОЙ ФИЛЬТР И ЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Решение задачи экспериментального исследования скалярного волнового спектра поля пристеночных турбулентных давлений будем основывать на возможностях прямой волновой фильтрации. Для этого рассмотрим волновые свойства круглого приемника турбулентных давлений, распределение локальной чувствительности по точкам \mathbf{r} поверхности которого представляется соотношением

$$K(r, \varphi) = k(r) e^{im\varphi} \tag{7}$$

(r, φ – полярные координаты точки \mathbf{r} ; m – произвольное целое число).

Фурье-образ пространственного распределения чувствительности такого приемника,

$$\tilde{K}(\boldsymbol{\kappa}) = \int_S K(\mathbf{r}) \exp(i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \tag{8}$$

характеризующий его реакцию на волновую нагрузку, выражается в форме

$$\tilde{K}(\boldsymbol{\kappa}) = \tilde{K}(\kappa, \psi) = \int_0^\infty rk(r) \times \left[\int_{-\pi}^\pi \exp(im\varphi) \exp(ikr \cos(\varphi - \psi)) d\varphi \right] dr. \tag{9}$$

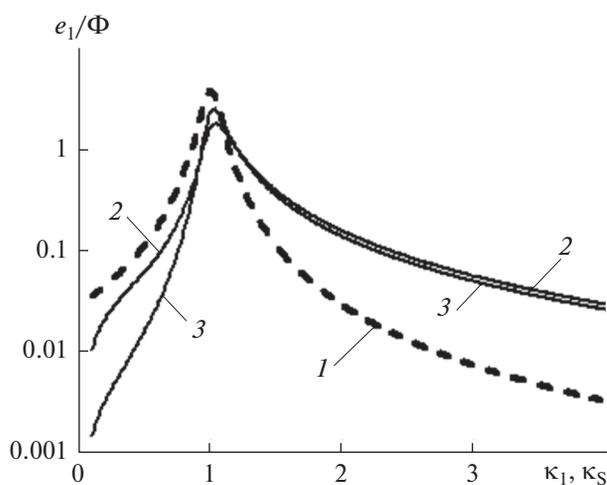


Рис. 2. Модельные зависимости для приведенных продольного и скалярного спектров. 1 – продольный спектр; 2 – скалярный спектр, мультипликативная модель; 3 – скалярный спектр, модель с эллиптическим окном.

Использование интегрального представления Бесселя [14] для бесселевых функций $J_m(x)$ с целым индексом m позволяет преобразовать последнее соотношение к достаточно компактному и удобному для анализа виду

$$\tilde{K}(\kappa, \psi) = (-1)^m 2\pi \exp\left(im\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)\right) \times \int_0^\infty r k(r) J_m(\kappa r) dr. \quad (10)$$

В рассматриваемом далее случае $m = 0$ формула (9) представляется зависимостью

$$\tilde{K}(\kappa) = \int_0^\infty r K(r) \left[\int_{-\pi}^\pi \exp(ikr \cos(\phi)) d\phi \right] dr = 2\pi \int_0^\infty r K(r) J_0(\kappa r) dr. \quad (11)$$

В качестве идеального скалярного волнового фильтра естественно принять приемник с постоянным ненулевым значением функции $\tilde{K}(\kappa)$ в некотором заданном диапазоне волновых чисел и нулевым значением вне этого диапазона. Воспользуемся, в связи с этим, известной интегральной формулой Вебера [14]

$$\int_0^\infty J_1(\kappa_0 r) J_0(\kappa r) dr = \begin{cases} \frac{1}{\kappa_0} & \text{при } \kappa < \kappa_0, \\ 0 & \text{при } \kappa > \kappa_0, \end{cases} \quad (12)$$

согласно которой интеграл от произведения бесселевых функций нулевого и первого порядка представляет собой разрывную функцию волновых чисел κ_0 и κ .

Из сравнения соотношений (11) и (12) следует, что при радиальном распределении локальной чувствительности

$$K_0(r) = \frac{\kappa_0^2 J_1(\kappa_0 r)}{2\pi \kappa_0 r} \quad (13)$$

волновая характеристика приемника представляет собой ступенчатую функцию волнового числа, которая скачкообразно изменяет значение от единицы до нуля при превышении аргументом κ величины κ_0 , т.е. приемник представляет собой идеальный фильтр низких волновых чисел.

Соответственно, радиальное распределение чувствительности

$$K_{01}(r) = \frac{1}{2\pi} \left(\kappa_1^2 \frac{J_1(\kappa_1 r)}{\kappa_1 r} - \kappa_0^2 \frac{J_1(\kappa_0 r)}{\kappa_0 r} \right) \quad (14)$$

при $\kappa_1 > \kappa_0$ формирует приемник, представляющий собой идеальный скалярный волновой полосовой фильтр с постоянным коэффициентом пе-

редачи, равным единице в диапазоне волновых чисел $[\kappa_0, \kappa_1]$.

Понятно, что распределение локальной чувствительности (14) может быть реализовано лишь приближенно в силу конечных размеров реального приемника. Поэтому в качестве следующего шага следует рассмотреть конечноразмерные приближения идеального скалярного волнового фильтра.

Простейший и, тем не менее, довольно важный пример такого приближения – ограничение размеров первыми нулями функций $\frac{J_1(\kappa_1 r)}{\kappa_1 r}$ и/или $\frac{J_1(\kappa_0 r)}{\kappa_0 r}$ (будем условно называть его приближением первого порядка). Характеристики такого приемника применительно к фильтру низких волновых чисел (13) показаны на рис. 3. Уровни локальной чувствительности нормированы таким образом, чтобы получить единичное значение волновой функции S в точке (зоне) максимума. Для сравнения приведена волновая характеристика поршневого приемника того же радиуса R (равного отношению r_{11}/κ_0 , где r_{11} – первый ненулевой корень бесселевой функции J_1 первого порядка), а также мембранного “изгибного” приемника конденсаторного микрофона [5] с распределением локальной чувствительности, представляемым функцией Бесселя нулевого порядка. Сопоставление представленных кривых отчетливо показывает преимущество бесселевых распределений, при которых значительно меньшее влияние имеют дополнительные пики в области относительно высоких волновых чисел. Данный фактор является существенным применительно к известной задаче [5, 6] повышения разрешающей способности приемника конечных размеров при измерениях одноточечных частотных спектров.

Влияние фактора ограниченности представления бесселевых функций в (14) (обусловленного конечностью размеров приемника) на характеристики полосовых скалярных волновых фильтров разной ширины продемонстрировано на рис. 4а. Ограничение каждой из компонент в (14) естественно сопровождается корректировочной нормировкой, обеспечивающей сохранение единичного отклика на синфазное воздействие. Расчетная формула для определения формы спектрального окна в этом случае приобретает вид:

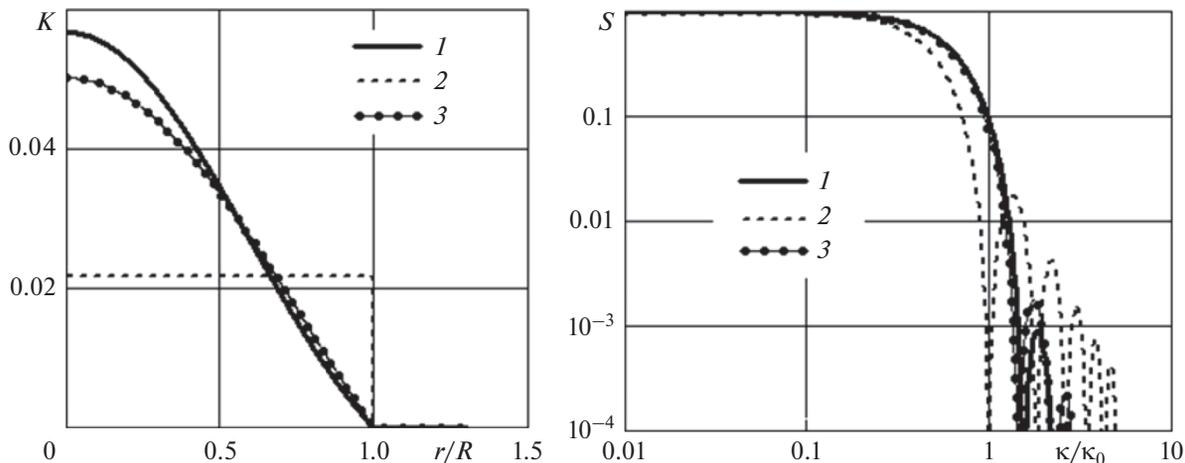


Рис. 3. Характеристики простейших приемников – фильтров низких волновых чисел. 1 – приемник с бesselевым распределением чувствительности (13) в приближении первого порядка; 2 – поршневое распределение чувствительности; 3 – “изгибающийся” приемник – мембрана.

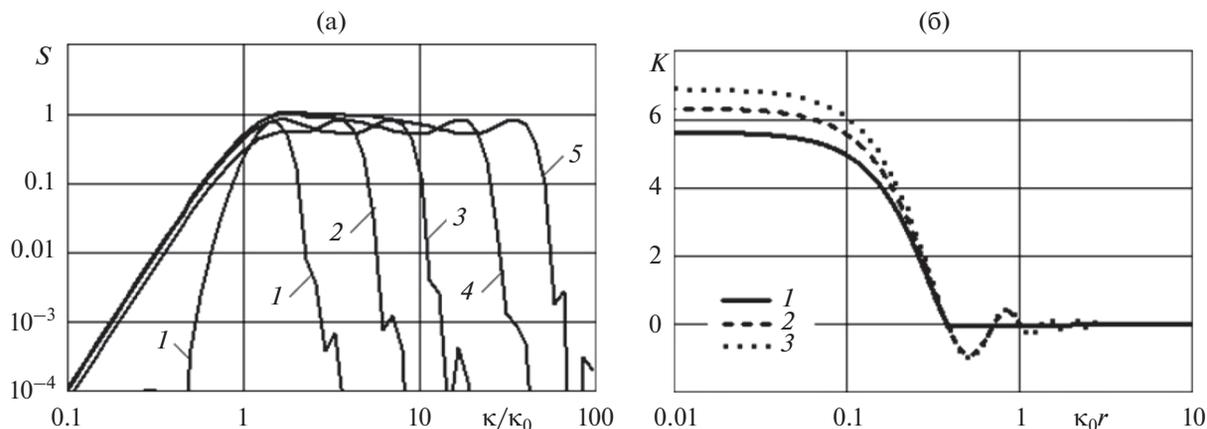


Рис. 4. Характеристики широкополосных волновых фильтров конечных размеров. (а) – Форма спектрального окна. Первый порядок приближения по длинноволновой компоненте κ_0 , третий порядок приближения по коротковолновой компоненте κ_1 . Ширина спектрального окна κ_1/κ_0 : 1 – 2; 2 – 5; 3 – 10; 4 – 25; 5 – 50. (б) – Распределения локальной чувствительности по радиусу приемной поверхности. Первый порядок приближения по длинноволновой компоненте κ_0 . Ширина спектрального окна $\kappa_1/\kappa_0 = 10$. Порядок приближения по коротковолновой компоненте κ_1 : 1 – 1; 2 – 3; 3 – 9.

$$S_{\mu\nu}(\bar{\kappa}, \bar{\kappa}_1) = \left[\frac{\int_0^\mu J_1(\varrho) J_0(\bar{\kappa}\varrho) d\varrho}{\int_0^\mu J_1(\varrho) d\varrho} - \frac{\int_0^\nu J_1(\varrho) J_0\left(\frac{\bar{\kappa}}{\bar{\kappa}_1}\varrho\right) d\varrho}{\int_0^\nu J_1(\varrho) d\varrho} \right]^2 = (15)$$

$$= \left(K_b^{(\mu)}(\bar{\kappa}, 1) - K_b^{(\nu)}(\bar{\kappa}, \bar{\kappa}_1) \right)^2,$$

где $\bar{\kappa}_1 = \kappa_1/\kappa_0$ – характеристика ширины полосы волнового фильтра, $\bar{\kappa} = \kappa/\kappa_0$.

Расчеты показывают, что изменение порядка приближения по коротковолновой компоненте κ_1 , как правило, практически не сказывается на свойствах волновой характеристики приемника в зоне κ_0 нижней границы спектрального окна. Исключение составляет случай относительно узкой полосы волнового фильтра $\kappa_1/\kappa_0 = 2$. В свою очередь, порядок приближения по длинноволновой компоненте κ_0 , определяющий фактические габариты приемника при заданном κ_0 , не оказывает сколько-нибудь заметного воздействия на свойства волнового фильтра в области средних и высоких волновых чисел.

Главный интерес в практическом плане представляют наиболее компактные приемники с ограничением бесселевой функции $J_1(\kappa_0 r)$ в (14) первым ненулевым корнем. Соответствующие расчетные распределения локальной чувствительности по радиусу приемной поверхности широкополосных волновых фильтров показаны на рис. 4б. Радиус приемника во всех представленных на рис. 4б вариантах определяется нижней границей κ_0 полосы фильтра и составляет q_1/κ_0 , где $q_1 \approx 3.83$ – первый ненулевой корень функции $J_1(x)$.

При рассмотрении компактных волновых фильтров естественным образом возникает вопрос о возможности совершенствования их характеристик в области малых волновых чисел. При рассмотрении этой задачи используем известное представление бесселевой функции нулевого порядка при малых значениях аргумента

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{64}x^4 + \dots \quad (16)$$

Подставляя разложение (16) в соотношение (15), получаем, что при малых значениях безразмерного волнового числа $\bar{\kappa}$ волновая функция S в общем случае ведет себя как $\bar{\kappa}^4$:

$$S_{\mu\nu}(\bar{\kappa}, \bar{\kappa}_1) = \left(\frac{\int_0^\mu J_1(\varrho) \varrho^2 d\varrho}{\int_0^\mu J_1(\varrho) d\varrho} - \frac{1}{\bar{\kappa}_1^2} \frac{\int_0^\nu J_1(\varrho) \varrho^2 d\varrho}{\int_0^\nu J_1(\varrho) d\varrho} \right)^2 \times \quad (17)$$

$$\times \frac{\bar{\kappa}^4}{16} + C\bar{\kappa}^8 + \dots$$

(отметим, что этот результат совпадает с полученным в [7] для поршневого приемника). Тем не менее, за счет соответствующего подбора граничных значений μ и ν можно попытаться обратить в нуль коэффициент при $\bar{\kappa}^4$, что должно привести к увеличению крутизны волновой характеристики на нижней границе фильтра.

В случае первого порядка приближения по длинноволновой компоненте κ_0 , когда значение μ в (17) совпадает с первым ненулевым корнем q_1 функции $J_1(\varrho)$, задача сводится к определению наименьшего значения ν , при котором

$$\frac{\int_0^{q_1} J_1(\varrho) \varrho^2 d\varrho}{\int_0^{q_1} J_1(\varrho) d\varrho} - \frac{1}{\bar{\kappa}_1^2} \frac{\int_0^\nu J_1(\varrho) \varrho^2 d\varrho}{\int_0^\nu J_1(\varrho) d\varrho} = 0. \quad (18)$$

Оценки показывают, что последнее уравнение имеет решение лишь при относительно невысоких величинах $\bar{\kappa}_1$, значения которых лишь ненамного могут превышать показатель $\bar{\kappa}_1 = 2$ октавного волнового фильтра. Применительно к последнему наименьшая расчетная величина $\nu = \nu_{opt}$, обеспечивающая выполнение условия (18), составляет примерно 9.464 (между вторым и третьим ненулевым корнем функции $J_1(\varrho)$).

На рис. 5а показаны сравнительные данные по волновым характеристикам двух рассматриваемых фильтров. В качестве аргумента принято текущее волновое число, отнесенное к центральному волновому числу

$$\kappa_c = \sqrt{\kappa_0 \kappa_1} \quad (19)$$

октавной полосы. Нетрудно убедиться, что в результате расчетного изменения степени приближения по коротковолновой компоненте крутизна волновой характеристики на нижней границе фильтра действительно увеличивается с показателя $\bar{\kappa}^4$ до показателя $\bar{\kappa}^8$. В зоне центрального волнового числа характеристика S достигает максимального значения, близкого к единице.

Отметим, что рассматриваемая схема оптимизации в некоторой степени (чуть более чем на 20%) увеличивает радиус приемной поверхности фильтра. Распределение локальной чувствительности приемника по радиусу для вариантов с показателями рис. 5а показано на рис. 5б.

КОНТУРНЫЕ СКАЛЯРНЫЕ ФИЛЬТРЫ

Следует признать, что фактическая реализация протяженных приемников с заданным распределением локальной чувствительности по поверхности представляет собой достаточно сложную, во многом трудноосуществимую техническую задачу. При этом развитие современных исследований пространственной структуры полей пристеночных турбулентных давлений [1] может быть охарактеризовано выраженной тенденцией к дискретному анализу, основанному на использовании массивов данных с многочисленных “точечных” приемников, распределенных по поверхности обтекания.

Имея в виду отмеченные факторы, рассмотрим далее, как первый шаг в направлении дискретизации исследуемых скалярных волновых фильтров, в качестве инструмента анализа контурные приемники, чувствительная поверхность которых формируется совокупностью относительно тонких концентрических круглых полосок (в пределе, при стремлении ширины полоски к нулю – контуров в форме концентрических окружностей). Данная схема, кроме своей технологичности, позволяет также рассмотреть и ре-

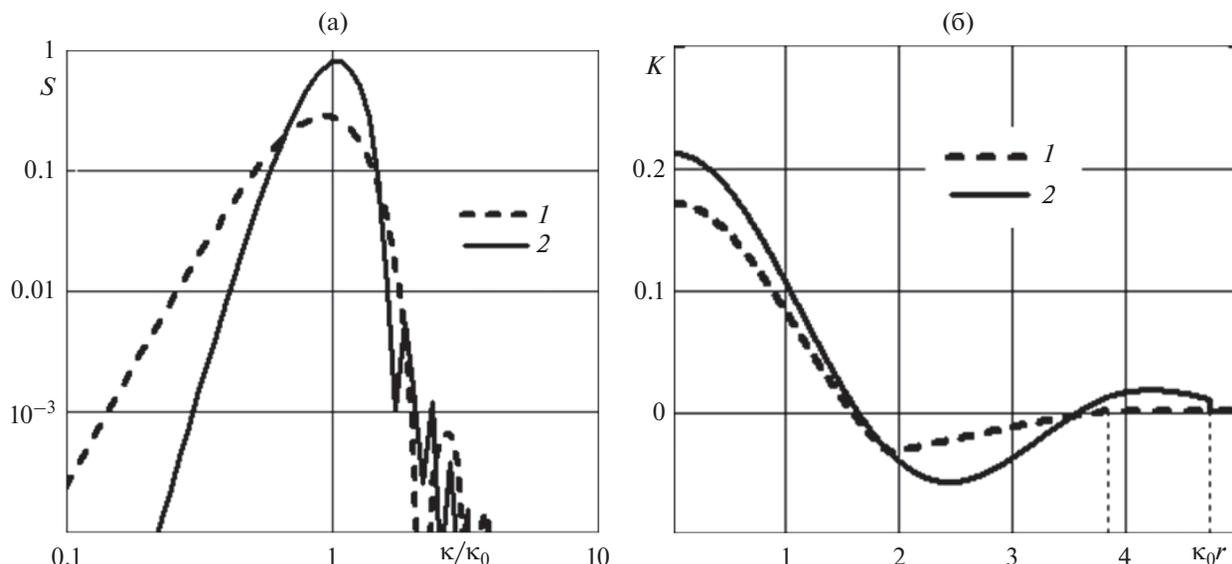


Рис. 5. Оптимизация октавного волнового фильтра. Первый порядок приближения по длинноволновой компоненте κ_0 , 1 – первый порядок приближения по коротковолновой компоненте κ_1 ; 2 – $\nu = \nu_{\text{opt}}$.

шить задачу оптимизации фильтра, связанную с использованием минимально допустимого количества контурных элементов.

Будем здесь считать, что средние радиусы контуров равномерно (с постоянным шагом) распределены в некотором диапазоне, зависящем от нижней границы формируемого волнового фильтра. При формировании выходного сигнала приемника единичные значения чувствительностей контурных модулей суммируются с коэффициентами, близкими к значениям шаговой чувствительности соответствующих им кольцевых элементов представленной ранее континуальной модели. Таким образом, непрерывные распределения (13), (14) локальной чувствительности по радиусу фактически аппроксимируются ступенчатыми функциями. Соответственно, оценка волнового спектра осуществляется простым суммированием взвешенных компонент – сигналов с контурных элементов.

На рис. 6 показан пример приемника с шестью контурными модулями, настроенными на аппроксимацию фильтра низких волновых чисел с бesselевым распределением чувствительности (13) в приближении первого порядка. Волновая функция S_c контурного приемника в данном случае оценивается из соотношения

$$S_c(\kappa, \kappa_0) = K_c(\kappa, \kappa_0)^2 = \left[\frac{r_{11}}{N \int_0^{r_{11}} J_1(\varrho) d\varrho} \sum_{n=1}^N J_1(\varrho_n) J_0\left(\frac{\kappa}{\kappa_0} \varrho_n\right) \right]^2, \quad (20)$$

в котором N – количество контурных модулей; $\varrho_n = \kappa_0 r_n$ – их безразмерные радиусы. В целом можно признать, что рассматриваемый контурный приемник обладает вполне приемлемыми для практических приложений характеристиками. Существенно, что в данную формулу не входит толщина контура.

Общий анализ показателей контурных длинноволновых фильтров приводит к выводу, что применительно к наиболее компактному первому порядку приближения в фильтрах низких волновых чисел достаточно использовать 5 контурных модулей. При повышении порядка приближения и, соответственно, увеличении диаметра приемника количество требуемых контурных модулей естественно возрастает. Отметим, что данные результаты получены применительно к равномерному распределению контуров и могут быть в дальнейшем еще улучшены как за счет оптимального расположения контуров, так и посредством приближения суммы в (20) к соответствующему интегралу на базе известных численных методов (формула трапеций и т.п.).

Оценки показывают, что применительно к широкополосным фильтрам контурные модули как правило удобны для формирования его длинноволновой компоненты, тогда как коротковолновая граница может быть обеспечена расположенным в центре составного приемника круглым чувствительным элементом относительно малого диаметра. В случае бesselева распределения на центральном коротковолновом элементе волновая характеристика такого контурного приемника в приближении первого порядка представляется в виде:

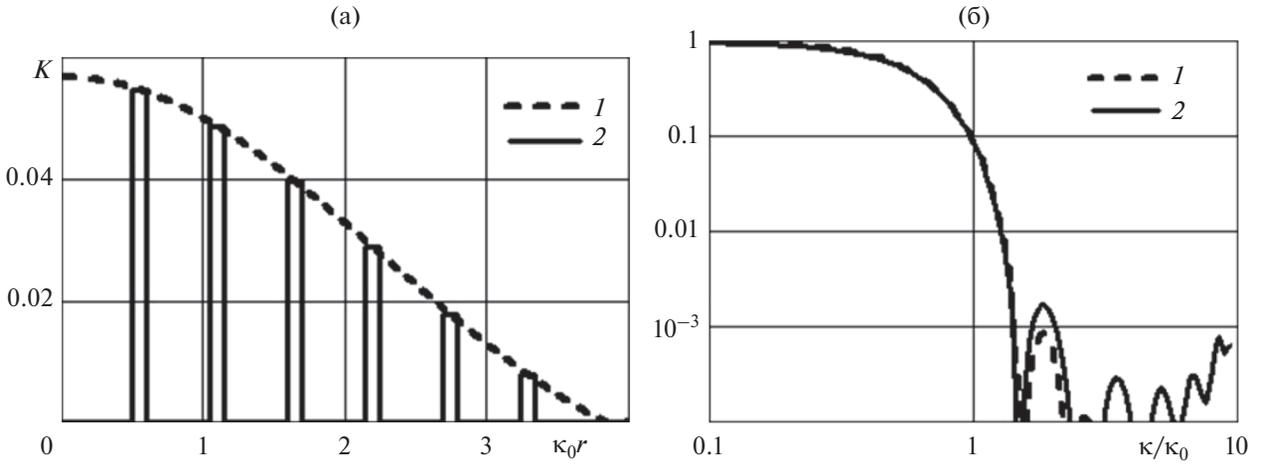


Рис. 6. Сравнительные характеристики приемников – скалярных фильтров низких волновых чисел: 1 – с непрерывным бesselевым распределением чувствительности и 2 – на основе шести контурных модулей.

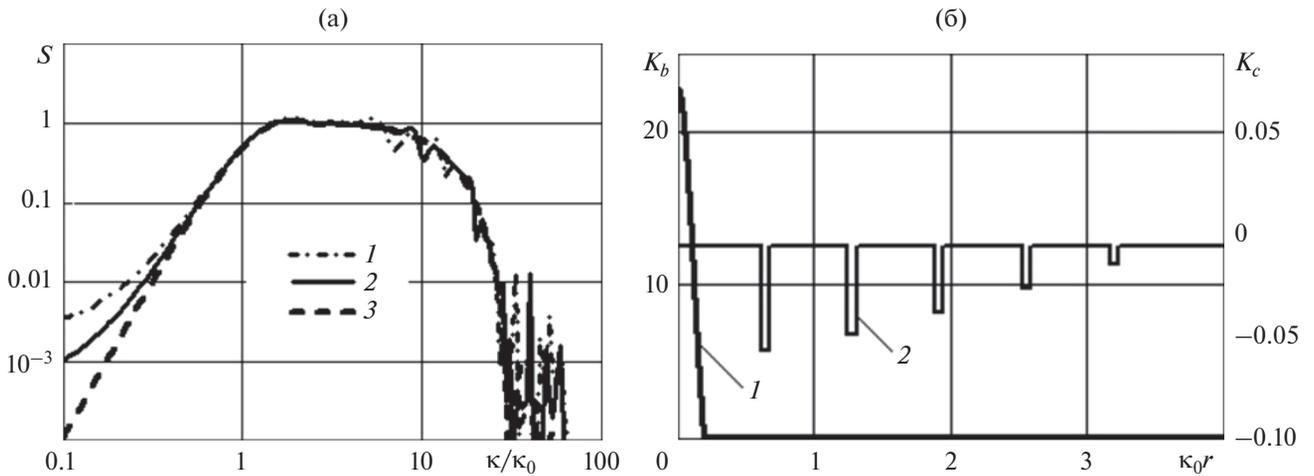


Рис. 7. Характеристики широкополосных контурных фильтров. (а) – Форма спектрального окна. Первый порядок приближения по длинноволновой и коротковолновой компонентам. Ширина спектрального окна $\kappa_1/\kappa_0 = 20$. Количество контуров приемника: 1 – 3; 2 – 5. 3 – приемник с непрерывным бesselевым распределением чувствительности по радиусу. (б) – Распределения локальной чувствительности по радиусу приемной поверхности для пяти контурных модулей. 1 – центральный элемент (K_b); 2 – контурные элементы (K_c).

$$S_{c1}(\bar{\kappa}, \bar{\kappa}_1) = \left(K_b^{(n_1)}(\bar{\kappa}, \bar{\kappa}_1) - K_c(\bar{\kappa}, 1) \right)^2 \quad (21)$$

(обозначения см. в формулах (15) и (20)). Результаты расчета этой характеристики для ширины полосы $\bar{\kappa}_1 = 20$ приведены на рис. 7а.

Из результатов следует, что контурная широкополосная волновая фильтрация также обладает достаточно высоким качеством при пяти контурных модулях, некритичным представляется использование и всего трех контуров.

Для наглядности справа на рис. 7б показано распределение чувствительности по радиусу фильтра с характеристиками рис. 7а на базе пяти контурных модулей.

Следует отметить, что контурный фильтр в сопоставлении с соответствующим ему бesselевым непрерывным прототипом имеет несколько меньшие габариты приемной поверхности. При равномерном распределении контуров разница в диаметрах реально может составить 15–25%, что в определенной мере расширяет диапазон возможного практического применения контурной схемы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Скалярный частотно-волновой спектр, представляющий суммарную энергию всех волновых компонент поля турбулентных давлений с заданным модулем волнового вектора, содержит в концентрированном виде информацию, требуемую при решении многих задач аэрогидродинамической акустики. Модельный анализ показывает, что уровни скалярного спектра турбулентных пульсаций давления в пограничном слое близки к соответствующим значениям продольного спектра в зоне волнового гребня $k \approx U/\omega$. При больших значениях волнового числа уровни скалярного спектра значительно выше уровней продольного, тогда как при меньших — заметно ниже. Широкополосная скалярная волновая фильтрация поля турбулентных пристеночных давлений может осуществляться на базе использования конечноразмерных приближений “идеального” скалярного волнового фильтра с единичной волновой чувствительностью в заданном диапазоне волновых чисел и нулевой чувствительностью вне этого диапазона. Одно из таких приближений — контурные фильтры, формируемые с помощью совокупности небольшого количества контурных приемников в форме концентрических окружностей.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-02-00181 А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кудашев Е.Б., Яблоник Л.Р.* Развитие экспериментальных исследований турбулентных пристеночных пульсаций давления. Критический анализ и обобщение накопленных опытных данных // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 6. С. 639–649.
2. *Голубев А.Ю., Кудашев Е.Б., Яблоник Л.Р.* Турбулентные пульсации давления в акустике и аэрогидродинамике. М.: Физматлит, 2019. 424 с.
3. *Blake W.K.* Mechanics of Flow-Induced Sound and Vibration. Vol. 2. Complex Flow-Structure Interactions. Second Ed. Academic Press, 2017. Elsevier Inc. 670 p.
4. Flinovia—Flow Induced Noise and Vibration Issues and Aspects-III // Ciappi E., De Rosa S., Franco F., Hambric S.A., Leung R.C.K., Clair V., Maxit L., Totaro N. (Eds.). Springer Nature Switzerland AG 2021. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-64807-7>
5. *Смоляков А.В., Ткаченко В.М.* Измерение турбулентных пульсаций. Л.: Энергия, 1980.
6. *Кудашев Е.Б., Яблоник Л.Р.* Турбулентные пристеночные пульсации давления. М.: Научный мир, 2007. 223 с.
7. *Кудашев Е.Б., Яблоник Л.Р.* Регистрация частотного спектра пристеночных турбулентных давлений на фоне акустического шума // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 6. С. 632–637.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965. 204 с.
9. *Ефимцов Б.М., Зверев А.Я.* Колебания и акустическое излучение тонкостенных конструкций при неоднородном аэроакустическом возбуждении // Ученые записки ЦАГИ. Т. 40. № 3. М., 2009. С. 60–69.
10. *Ефимцов Б.М., Зверев А.Я.* Сравнительная оценка акустического излучения тонкостенных конструкций, возбуждаемых турбулентным пограничным слоем, для различных представлений взаимного спектра // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 4. С. 459–464.
11. *Mellen R.H.* Wave-vector filter analysis of turbulent flow // J. Acoust. Soc. Am. 1994. V. 95. P. 1671.
12. *Abraham B.M., Keith W.L.* Direct measurements of turbulent boundary layer wall pressure wave-number-frequency spectra // J. Fluids Eng. Mar 1998. V. 120(1). P. 29–39.
13. *Howe M.S.* Acoustics of Fluid-Structure Interactions. Cambridge University Press, 1998. 560 p.
14. *Ватсон Дж.Н.* Теория бесселевых функций. М.: Издательство иностранной литературы, 1949. 799 с.

АКУСТИКА СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ ТВЕРДЫХ СРЕД.
ГЕОЛОГИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

УДК 534.08;534.6;534-18

ВЛИЯНИЕ ТРЕЩИНОВАТОСТИ ПОЛЕВЫХ ШПАТОВ
НА СПЕКТРАЛЬНУЮ МОЩНОСТЬ ОБРАТНОРАССЕЯННЫХ
ШИРОКОПОЛОСНЫХ ИМПУЛЬСОВ ПРОДОЛЬНЫХ
УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН© 2022 г. Н. Б. Подымова^{a, *}, А. А. Карабутов^{a, b}^a МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет,
Ленинские горы 1, стр. 2, Москва, 119991 Россия^b Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН,
ул. Вавилова 38, Москва, 119991 Россия

*e-mail: npodymova@mail.ru

Поступила в редакцию 19.05.2022 г.

После доработки 22.06.2022 г.

Принята к публикации 05.07.2022 г.

Исучено влияние микротрещин в лабораторных образцах полевых шпатов на спектральную мощность широкополосных импульсов продольных ультразвуковых волн, рассеянных назад в исследуемом образце (так называемую мощность структурного шума). Для этой цели использован оптико-акустический преобразователь, в котором совмещено лазерное возбуждение зондирующих широкополосных ультразвуковых импульсов в пленке из черного полиэтилена и пьезоэлектрическая регистрация как зондирующих, так и рассеянных в образце импульсов. Исследованы образцы ортоклаза и плагиоклаза с участками скоплений микротрещин, неравномерно распределенных по объему образцов. Такие участки выявлялись по данным оптической микроскопии поверхности образцов и по результатам измерения коэффициента затухания продольных ультразвуковых волн в спектральном диапазоне 1–15 МГц. В участках с повышенным затуханием ультразвука также наблюдалось возрастание мощности структурного шума. Обнаруженная корреляция между концентрацией микротрещин и мощностью структурного шума может служить основой для разработки методики неразрушающей оптико-акустической диагностики возникновения и эволюции локальных микротрещин в образцах горных пород и минералов под действием различных нагрузок.

Ключевые слова: лазерный оптико-акустический метод, локальная трещиноватость, полевые шпаты, обратнорассеянные ультразвуковые сигналы, мощность структурного шума

DOI: 10.31857/S0320791922060090

ВВЕДЕНИЕ

Исследование разномасштабных структурных неоднородностей горных пород и минералов является актуальным во многих прикладных задачах (сейсморазведка и поиск полезных ископаемых, мониторинг технического состояния инженерных сооружений, разработка моделей возникновения очагов разрушения в конструкциях под действием внешних нагрузок и т.п.). Известно, что прочностные свойства геоматериалов зависят не столько от свойств составляющих минералов, сколько от характера взаимодействия между ними, наличия пор, трещин, заполняющей их жидкости и т.п. [1, 2]. Исходное распределение микротрещин по объему образцов или конструкций из геоматериалов определяет как их деформационную стабильность, так и характер разрушения (см., например, [3–6]). Исходная неоднородная трещиноватость

геоматериалов может привести к неравномерному распределению внешней нагрузки и появлению участков, вероятность разрушения которых выше средней вероятности для всего образца при данной нагрузке. Поэтому разработка методов on-line диагностики возникновения и эволюции микротрещин в таких материалах под действием различных механических нагрузок необходима, прежде всего, для обеспечения безопасной работы объектов промышленной инфраструктуры (атомных станций, фундаментов плотин, подземных выработок).

В настоящее время для исследования трещиноватости образцов геоматериалов используется множество разрушающих и неразрушающих методов. Наиболее распространенными являются петрографические исследования тонких шлифов, оптическая и электронная микроскопия, рентге-

новская компьютерная томография, измерение скорости и затухания ультразвуковых волн различных типов, а также методики акустической эмиссии, позволяющие контролировать процесс возникновения и эволюции трещин в образцах в процессе нагружения.

Петрографические и микроскопические методики позволяют получать детальную картину распределения микротрещин, однако в большинстве своем требуют разрушения образцов, являются достаточно дорогими и трудоемкими. Метод рентгеновской компьютерной томографии является неразрушающим и дает полную картину распределения структурных неоднородностей в образце. Однако он также является весьма трудоемким в части обработки изображений и требует ограничения на размер образцов для получения максимального пространственного разрешения; кроме того, этот метод неприменим для натуральных испытаний и для *on-line* наблюдения возникновения трещин в образцах в процессе их нагружения.

Задача мониторинга зарождения и эволюции трещин в геоматериалах в процессе их нагружения успешно решается с использованием различных методик по регистрации сигналов акустической эмиссии в нагружаемых образцах геоматериалов [7–9]. Эти методики позволяют определять места зарождения микротрещин, а также наблюдать в реальном времени процессы распространения трещин в образцах при различных режимах механического нагружения. Многочисленные экспериментальные данные подтверждают, что метод акустической эмиссии может использоваться для исследования механизмов разрушения квазихрупких неоднородных геоматериалов при различных видах статического нагружения (см., например, [10–12]). Применение методик акустической эмиссии требует предварительной информации о распределении микротрещин в исходных образцах, получаемой обычно с использованием рентгеновской компьютерной томографии этих образцов [13].

Для более полного понимания механизма влияния морфологии и пространственного распределения микротрещин на упругие свойства геоматериалов широко используются измерения скоростей распространения акустических волн различных типов в таких материалах [14]. Результаты многочисленных работ последнего десятилетия демонстрируют высокую чувствительность методик измерения скоростей акустических волн к анизотропии упругих свойств, к возникновению очагов микротрещин и их ориентации при приложении различных нагрузок, а также к степени насыщения горных пород различными жидкостями (см., например, [15–19] и имеющиеся там ссылки). Хорошо известно, что для достижения максимальной чувствительности скорости и

затухания ультразвуковых волн к структурным неоднородностям материала, длина волны должна быть порядка характерных размеров таких неоднородностей (например, зерен или микротрещин в геоматериалах). Поскольку в лабораторных образцах геоматериалов размеры трещин варьируются, как правило, от десятков микрометров до нескольких миллиметров, для их исследований целесообразно использовать зондирующие ультразвуковые импульсы в спектральном диапазоне от сотен килогерц до десятков мегагерц. Более того, амплитуда зондирующих импульсов должна быть достаточно высока для обеспечения надежной диагностики неоднородных геоматериалов, которые сильно поглощают и рассеивают ультразвуковые волны.

Совместное требование на широкий частотный диапазон и высокую амплитуду возбуждаемых ультразвуковых импульсов выполняется при использовании лазерного термооптического механизма возбуждения ультразвука — оптико-акустического эффекта [20]. При поглощении наносекундных импульсов традиционных лазеров с модуляцией добротности в специально подобранном материале — «лазерном источнике ультразвука» — амплитуда возбуждаемых акустических импульсов может достигать десятков атмосфер при длительности импульса от единиц до сотен наносекунд (в зависимости от энергии и длительности лазерного импульса, а также коэффициента поглощения света и теплофизических характеристик данного материала). Такие уникальные характеристики лазерного ультразвука позволяют использовать его для высокоточных измерений механических и акустических свойств различных твердых тел, а также для количественной оценки разномасштабных структурных неоднородностей конструкционных материалов по анализу ультразвукового отклика (см., например, [21–26]).

В настоящей работе предложен и экспериментально реализован лазерный оптико-акустический метод оценки степени локальной трещиноватости лабораторных образцов геоматериалов на примере образцов двух типов полевых шпатов (ортоклаз и плагиоклаз). Различные полевые шпаты являются наиболее распространенными порообразующими минералами, как в континентальной, так и в океанической земной коре [27], а также являются одним из основных компонентов гранитов и других природных строительных материалов. Для полевых шпатов характерна природная локальная микротрещиноватость, при этом поверхностные трещины размерами в десятки и сотни микрометров можно достаточно легко визуализировать с помощью оптического микроскопа. Предлагаемый лазерный оптико-акустический метод основан на анализе спектральной мощности ультразвуковых сигналов, рассеянных

назад на локальных микротрещинах, распределенных по всей толщине образца в зоне прозвучивания. Ранее [26] подобные ультразвуковые сигналы, рассеянные назад на структурных неоднородностях композиционных материалов, были названы “структурным шумом”. Лазерный оптико-акустический метод измерения временных или спектральных характеристик структурного шума позволяет преодолеть существенное ограничение при измерениях скоростей распространения ультразвуковых волн, а именно, требование плоскопараллельности входной и выходной граней исследуемого образца. Целью настоящей работы является выявление корреляции между спектральной мощностью структурного шума и локальной концентрацией микротрещин в исследуемых образцах минералов. Такая корреляция может служить основой для ультразвуковых систем on-line мониторинга возникновения и развития микротрещин в структуре минералов и горных пород под действием различных внешних нагрузок.

ИССЛЕДОВАННЫЕ ОБРАЗЦЫ МИНЕРАЛОВ

В качестве исследуемых минералов были взяты три образца ортоклаза (калийный полевой шпат $K[AlSi_3O_8]$) и один образец плагиоклаза (член изоморфного ряда $NaAlSi_3O_8$ (30–50%) — $CaAl_2Si_2O_8$ (50–70%)) [27]. Образцы отполированы с двух сторон так, чтобы полированные грани были плоскопараллельны. Фотографии исследуемых образцов представлены на рис. 1, здесь же указаны их толщины H . Точность измерения всех толщин составляла 10 мкм. Полевые шпаты характеризуются слоистым строением из тонких пластинчатых кристаллов и наличием локализованных очагов скоплений трещин с характерными размерами от десятков до сотен микрометров. В исследуемых образцах миллиметровой толщины места скоплений микротрещин в объеме образцов могут быть качественно определены при их просвечивании видимым светом. В каждом образце с помощью оптического микроскопа были предварительно определены места выхода микротрещин на поверхность (рис. 1). Таким образом, были визуально определены возможные участки локализации микротрещин в объеме образцов. Номера этих участков указаны цифрами на каждом образце и оптических изображениях на рис. 1. Затем были проведены исследования внутренней структуры этих участков с помощью лазерного оптико-акустического метода, описанного ниже.

Следует отметить, что микротрещины во всех образцах были закрытыми, что позволило отполировать образцы без нарушения их целостности. Такой характер микротрещин обеспечивает нулевую проницаемость образцов для воды, использу-

емой в ультразвуковых экспериментах в качестве иммерсионной жидкости (см. ниже).

ЛАЗЕРНЫЙ ОПТИКО-АКУСТИЧЕСКИЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ И МЕТОДИКА ОБРАБОТКИ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ СИГНАЛОВ

Для возможности обнаружения локальных очагов скопления микротрещин и оценки их концентрации в образцах минералов, в которых возможно напрямую возбудить ультразвуковые сигналы лазерным излучением из-за его слабого поглощения, использовался лазерно-ультразвуковой преобразователь, подробно описанный в [28] (рис. 2). В преобразователе совмещены лазерное возбуждение широкополосных ультразвуковых импульсов в специальном оптико-акустическом (ОА) источнике (пленка из черного полиэтилена толщиной 50 мкм) и пьезоэлектрическая регистрация зондирующих ультразвуковых импульсов и импульсов, рассеянных в образце. Этот преобразователь позволяет проводить исследования при одностороннем доступе к образцу, имеющему только одну плоскую поверхность, и не требует регистрации эхо-сигналов. При поглощении лазерного излучения в приповерхностном слое полиэтилена толщиной порядка обратной величины коэффициента поглощения ($\approx 800 \text{ см}^{-1}$) на рабочей длине волны (1064 нм), происходит неоднородный нагрев этого слоя и его последующее тепловое расширение. Это приводит к возникновению двух одинаковых импульсов продольных ультразвуковых волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Амплитуда и временной профиль этих импульсов определяются коэффициентом поглощения света в черном полиэтилене, его теплофизическими свойствами, временным профилем интенсивности поглощенного лазерного импульса и соотношением акустических импедансов оргстекла (призмы-звукопровода) и полиэтилена [20]. Один импульс, обозначенный цифрой θ на рис. 2, распространяется назад в призму к пьезоприемнику и не используется в измерениях; другой импульс, обозначенный цифрой 1 , распространяется вперед в иммерсионный слой дистиллированной воды толщиной 1 мм между полиэтиленом и исследуемым образцом и далее распространяется в образце (зондирующий ультразвуковой импульс). При этом он частично отражается на границе раздела вода—образец и распространяется назад через воду, полиэтилен и призму, и также регистрируется пьезоприемником (импульс 2 на рис. 2). Зондирующий импульс 1 , распространяющийся в образце, частично рассеивается в обратном направлении на неоднородностях структуры, например, трещинах и инородных включениях. Совокупность таких рассеянных ультразвуковых импуль-

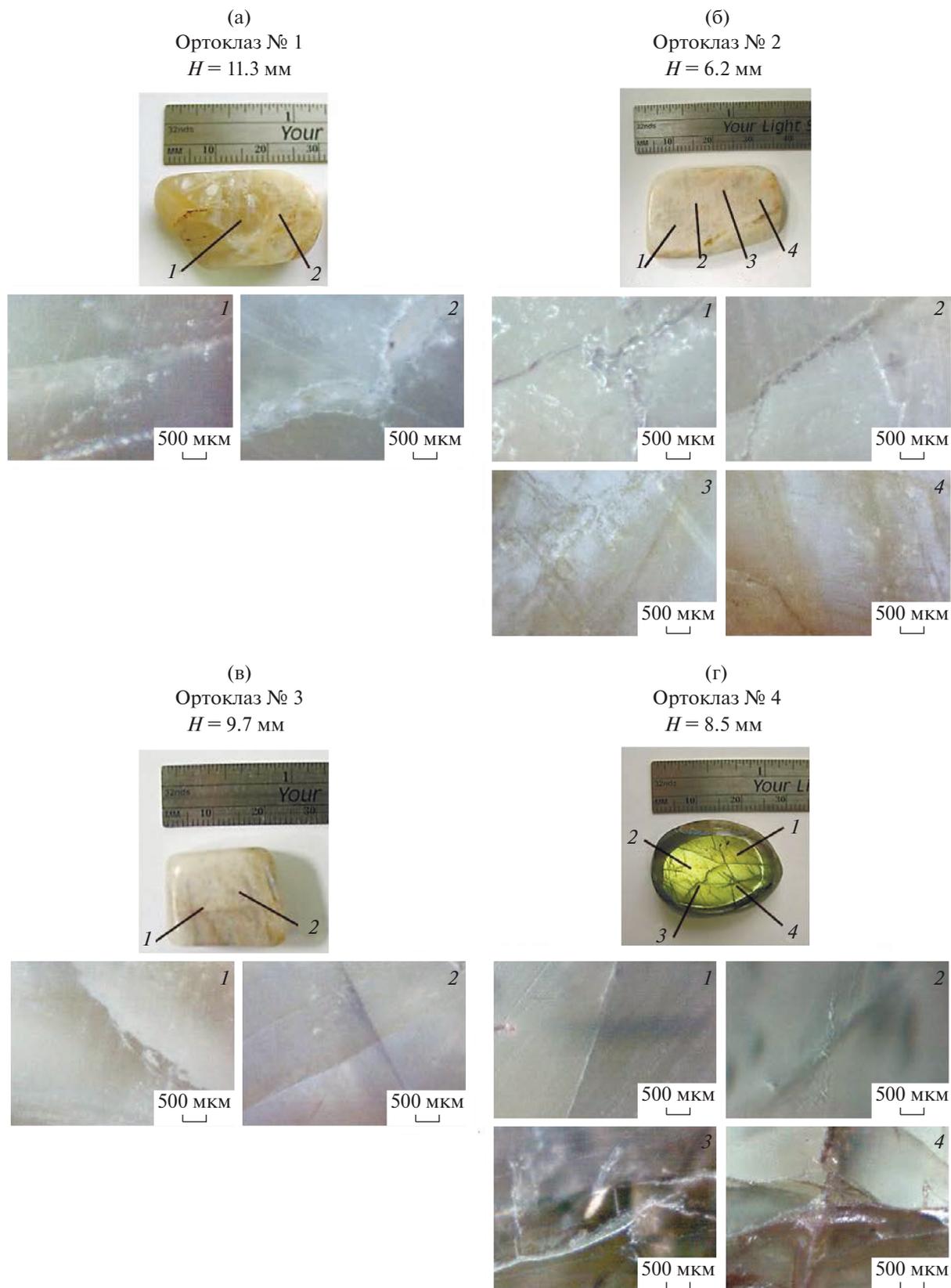


Рис. 1. Фотографии образцов полевых шпатов и оптические изображения исследованных участков в каждом образце, цифрами 1–4 обозначены исследуемые участки образцов.

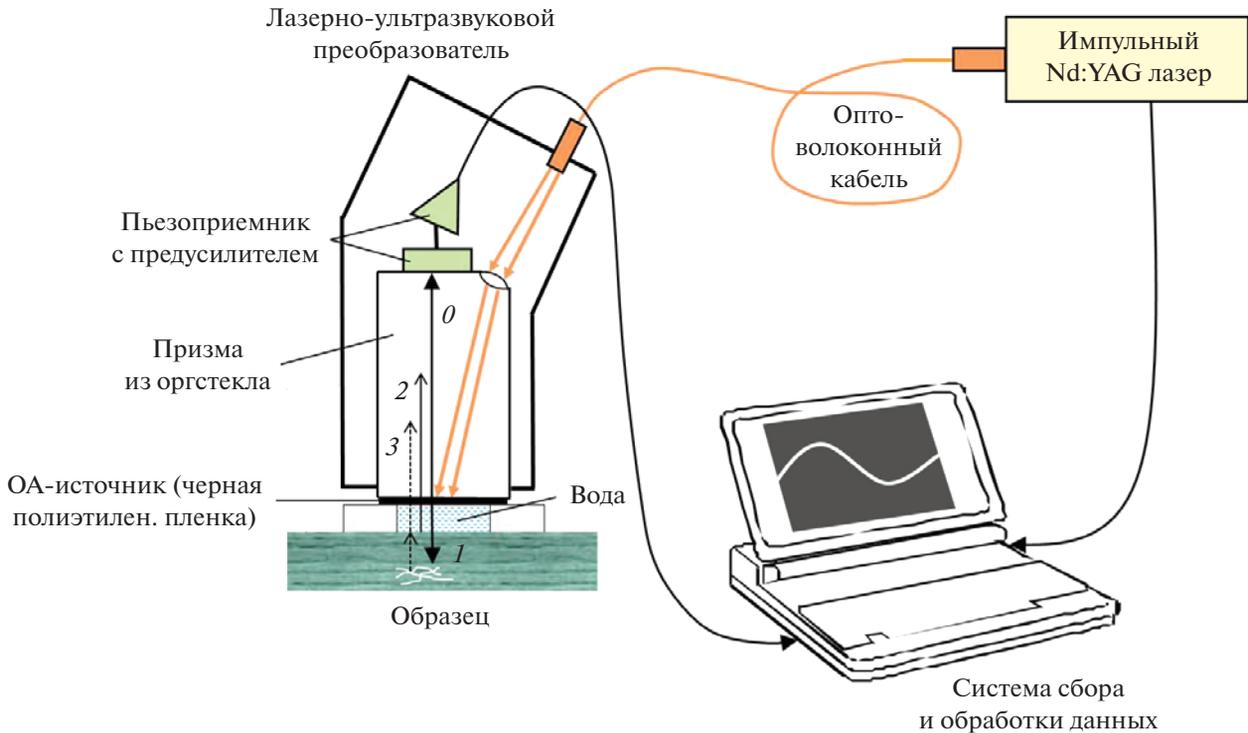


Рис. 2. Блок-схема экспериментальной установки с лазерно-ультразвуковым преобразователем для исследования локальной трещиноватости образцов минералов.

сов обозначена цифрой 3 на рис. 2 и представляет собой так называемый структурный шум. Характерный радиус ультразвукового пучка на лицевой поверхности образца практически совпадает с радиусом поглощенного лазерного пучка и составляет 2–3 мм. Практически такой же является область тестирования в поперечном направлении (по плоскости образца), что позволяет выявлять участки с повышенной трещиноватостью в сильно неоднородных по структуре геоматериалах.

Для исследования локальной концентрации микротрещин в прозвучиваемом участке образца регистрируются временной трек совокупности импульсов 2 и 3, а также аналогичный трек, зарегистрированный от однородной пластины плавленного кварца, которая ставится на место исследуемого образца. Временная форма сигнала от кварцевой пластины повторяет зондирующий импульс 1 с учетом изменения амплитуды за счет отражения на границе раздела вода–кварц (рис. 2). На рис. 3а показаны примеры временных профилей нормированных ультразвуковых сигналов для кварцевой пластины и для образцов ортоклаза № 1 (участок 2) и плагиоклаза № 4 (участок 4). В этих участках образцов визуально наблюдалось существенное скопление микротрещин (см. рис. 1а, 1г). При распространении в образце зондирующий импульс частично рассеивается на микротрещинах, расположенных на разных глубинах в про-

звученном участке образца. Обратнорассеянные сигналы регистрируются как нерегулярные пики на “хвосте” опорного импульса (врезка на рис. 3а) и образуют структурный шум. Для оценки степени локальной трещиноватости в прозвученном участке образца используется спектральный анализ сигнала во временном окне, соответствующем времени пробега зондирующего импульса до тыльной поверхности образца и обратно к границе раздела образец–вода. Такие спектры сигналов с рис. 3а показаны на рис. 3б.

Амплитудный спектр $S(f)$ ультразвукового сигнала от образца представляет собой совокупность спектра зондирующего импульса и нерегулярной (“осциллирующей”) части, определяемой структурным шумом. Спектр зондирующего импульса $S_0(f)$ соответствует спектру сигнала от кварцевой пластины, поскольку мы считаем, что в кварце структурный шум отсутствует. Информация о локальной концентрации микротрещин в прозвученном участке образца содержится именно в нерегулярной части спектра, определяемой рассеянными назад сигналами. Мы полагаем, что увеличение амплитуды этих сигналов и, соответственно, амплитуды осцилляций в спектре $S(f)$, определяется увеличением концентрации микротрещин в исследуемом участке образца. Величина

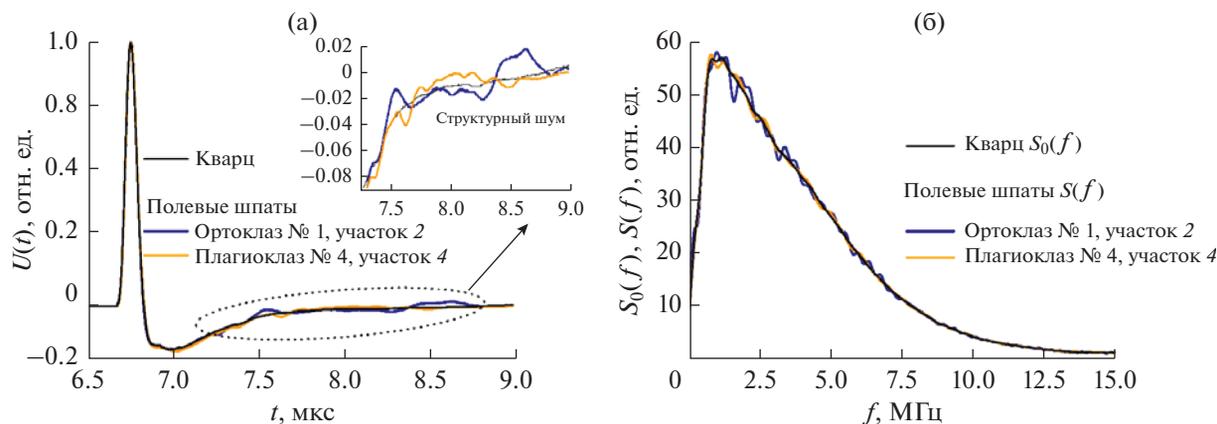


Рис. 3. Примеры ультразвуковых сигналов для кварцевой пластины и для образцов ортоклаза № 1 (участок 2) и плагиоклаза № 4 (участок 4): (а) – временные профили, (б) – соответствующие спектры.

$$W = \frac{\int_{f_{\min}}^{f_{\max}} [S(f) - S_0(f)]^2 df}{\int_{f_{\min}}^{f_{\max}} S_0^2(f) df} \quad (1)$$

является интегральной нормированной мощностью нерегулярной части спектра, названной “мощностью структурного шума”, $f_{\min} = 0.2$ МГц и $f_{\max} = 15$ МГц – нижняя и верхняя границы рабочего частотного диапазона лазерно-ультразвукового преобразователя. Величина W содержит вклады от всех сигналов, рассеянных на разном размерных микротрещинах, локализованных в прозвученном участке образца, без разделения вкладов от микротрещин конкретного размера.

Основной проблемой применения данного метода для оценки концентрации микротрещин является возможное проникновение иммерсионной жидкости (воды) в открытые трещины, выходящие на поверхность образца, и частичное их заполнение. Известно, что интенсивность рассеяния ультразвуковых волн на микротрещинах существенно зависит от их заполнения жидкостью, поскольку амплитуда рассеяния прямо пропорциональна контрасту упругих модулей твердой фазы образца и включения (в данном случае частично заполненной трещины) [29]. Поскольку, как указывалось выше, проницаемость исследуемых образцов полевых шпатов была нулевой, вода не попадала в микротрещины и, соответственно, не влияла на интенсивность рассеяния ультразвука.

Для подтверждения того, что именно микротрещины влияют на эффективность обратного рассеяния ультразвуковых сигналов (или мощность структурного шума) в различных участках исследуемых образцов, в этих же участках были

проведены измерения коэффициента затухания продольных ультразвуковых волн. Для этой цели использовался метод широкополосной акустической спектроскопии с лазерным источником ультразвука – оптическим светофильтром СЗС-22, детально описанным в [24] (коэффициент затухания рассчитывался по формуле (2) из [24]). Поскольку микротрещины являются весьма эффективными рассеивателями ультразвуковых волн и для исследуемых минералов характерно практически полное отсутствие твердых инородных включений и зерен субмиллиметровых размеров с шероховатыми нерегулярными границами, увеличение коэффициента затухания ультразвука в диапазоне частот источника СЗС-22 объяснялось повышенной концентрацией микротрещин в исследуемом участке образца. Затем была проанализирована корреляция между величиной коэффициента затухания ультразвука и мощностью структурного шума в рабочем спектральном диапазоне лазерно-ультразвукового преобразователя, используемого в настоящей работе (0.2–15 МГц).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Для расчета мощности структурного шума во всех образцах минералов в качестве спектра зондирующего импульса $S_0(f)$ был взят результат усреднения спектров четырех импульсов от произвольно выбранных участков кварцевой пластины (рис. 4). Разность между $S_0(f)$ и спектром каждого импульса определяет так называемую мощность “аппаратного” шума W_0 , которая вычислялась по формуле (1), где в качестве $S(f)$ были взяты спектры каждого импульса. Ненулевая величина W_0 определяется электрическими шумами и шумами дискретизации сигнала, а также некоторой нестабильностью временной формы лазерного импуль-

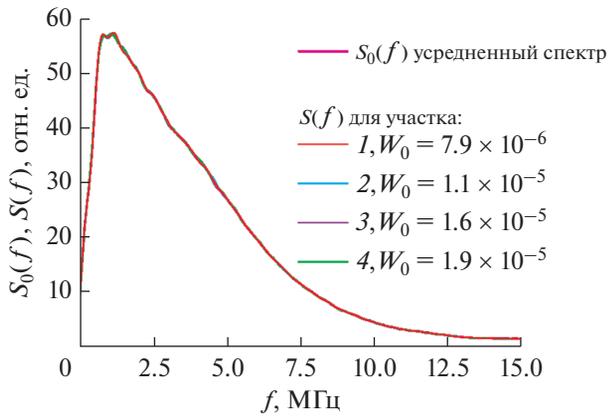


Рис. 4. Спектры $S(f)$ ультразвуковых импульсов от четырех произвольно выбранных участков кварцевой пластины и усредненный спектр $S_0(f)$.

са и соответствующего акустического импульса, возбуждаемого в полиэтилене для каждого участка кварцевой пластины. Спектры импульсов $S(f)$ для четырех участков достаточно близки, соот-

ветствующие рассчитанные значения мощности аппаратного шума W_0 указаны на рис. 4.

На рис. 5 в качестве примеров представлены спектры ультразвуковых импульсов для разных участков образцов полевых шпатов, здесь же показан спектр зондирующего импульса $S_0(f)$. Для ортоклазов № 1 и № 3 (рис. 5а, 5в) представлены спектры импульсов в обоих исследованных участках каждого образца; для ортоклаза № 2 и плагиоклаза № 4 (рис. 5б, 5г) представлены спектры импульсов для участков с минимальной и максимальной мощностью структурного шума W . Эти значения, рассчитанные по формуле (1) для соответствующих участков, также приведены на рис. 5. Результаты показывают, что величина W для всех образцов минералов на один–два порядка превышает мощность аппаратного шума W_0 . Величина последней, усредненная по четырем реализациям для кварцевой пластины ($\langle W_0 \rangle \approx 1.3 \times 10^{-5}$), может рассматриваться как погрешность определения W .

Для анализа корреляции между локальной концентрацией микротрещин в исследуемых образцах и измеренной мощностью структурного

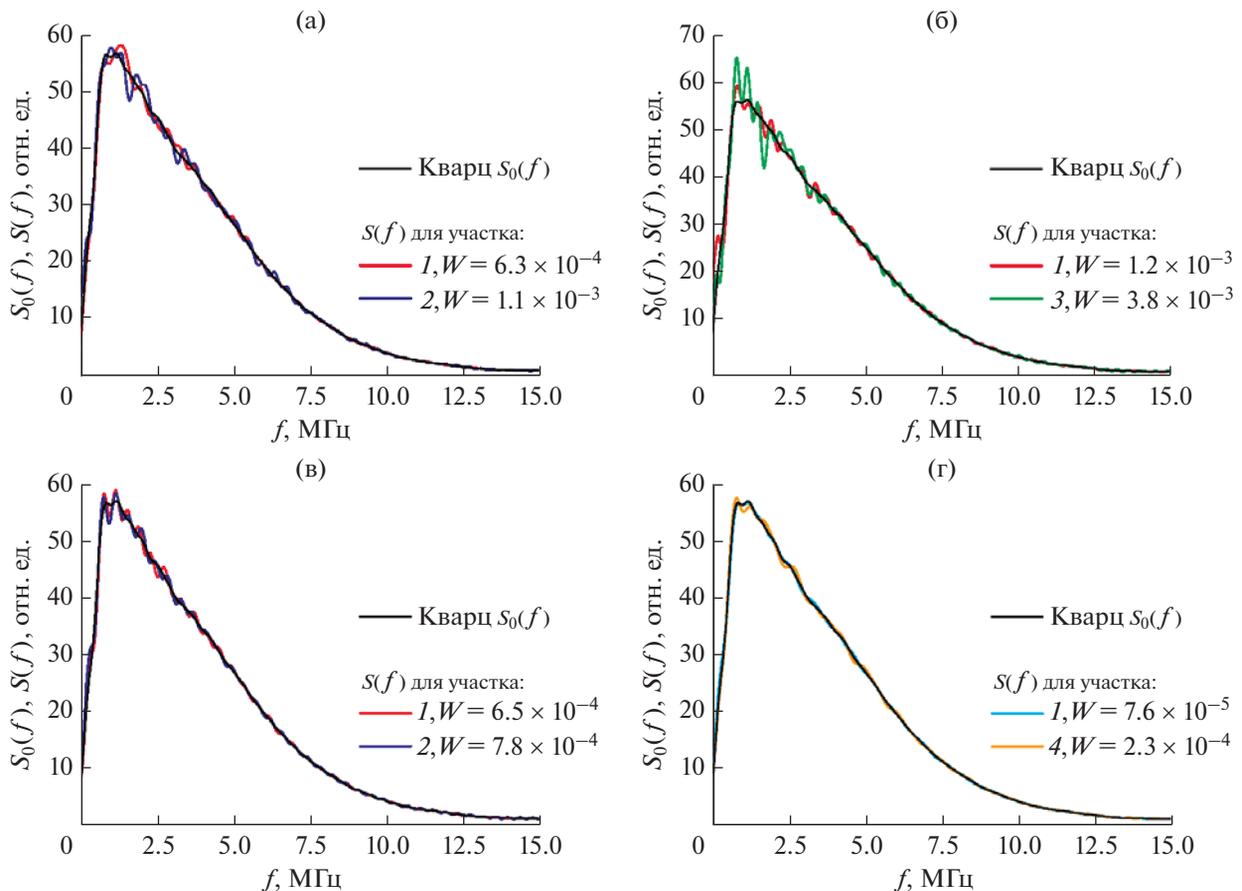


Рис. 5. Примеры спектров ультразвуковых импульсов и соответствующие значения мощности структурного шума W в различных участках образцов полевых шпатов: (а)–(в) – ортоклазы № 1–3, (г) – плагиоклаз № 4.

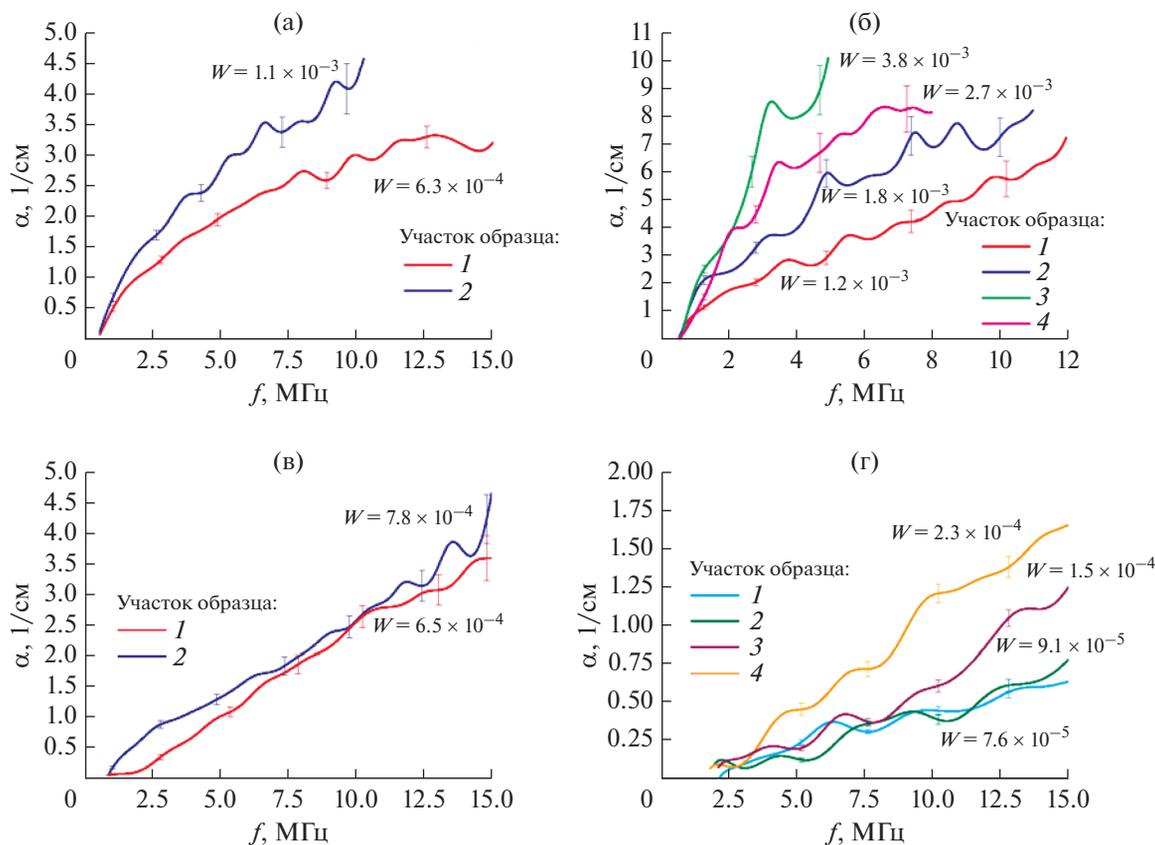


Рис. 6. Частотные зависимости коэффициента затухания продольных ультразвуковых волн и соответствующие значения мощности структурного шума W во всех исследованных участках образцов полевых шпатов: (а)–(в) – ортоклазы № 1–3, (г) – плагиоклаз № 4.

шума мы предположили, что микротрещины и их скопления размерами от сотен микрометров до единиц миллиметров (см. рис. 1) достаточно эффективно рассеивают ультразвук в мегагерцовом рабочем диапазоне используемого лазерно-ультразвукового преобразователя. Для подтверждения этого предположения были измерены частотные зависимости коэффициента затухания продольных ультразвуковых волн $\alpha(f)$ в каждом из участков, в которых предварительно были визуализированы выходы микротрещин на поверхность образца, а затем измерена мощность структурного шума W . Полученные зависимости $\alpha(f)$ для всех исследованных участков образцов представлены на рис. 6; здесь же указаны значения мощности структурного шума W в каждом участке. Для образца плагиоклаза № 4 наиболее четко видно, что локальное скопление микротрещин, выходящих на поверхность участка 4 (рис. 1г), приводит к существенному возрастанию $\alpha(f)$ в этом участке во всем рабочем частотном диапазоне (рис. 6г). Для остальных образцов наблюдалась аналогичная корреляция между визуализированными локальными скоплениями микротрещин и величиной $\alpha(f)$. Также видно, что чем выше ко-

эффициент затухания ультразвука в исследуемом участке образца, тем больше значение W в этом участке. Таким образом, можно считать, что увеличение мощности структурного шума обусловлено возрастанием локальной концентрации микротрещин в исследуемом участке образца. Следует отметить, что данный лазерно-ультразвуковой метод может применяться не только для оптически прозрачных и полупрозрачных образцов минералов, но и для непрозрачных образцов, в которых невозможно заранее визуализировать локальные скопления микротрещин.

Количественное определение локальной концентрации микротрещин в исследуемых образцах (в процентном соотношении) возможно с использованием рентгеновской компьютерной томографии. Для этого необходимо знать плотность твердой фазы каждого образца, что весьма затруднительно для геоматериалов переменного минерального состава. Кроме того, как указывалось во Введении, метод рентгеновской томографии требует существенного времени для обработки изображений, имеет ограничения на размер образцов для получения максимального пространственного разрешения, и неприменим для натуральных из-

мерений. С другой стороны, разработанный лазерно-ультразвуковой метод позволяет получать информацию о структуре образцов минералов практически в реальном времени за счет высокой частоты повторения лазерных импульсов и высокого отношения сигнал—шум, достаточного для усреднения небольшого числа реализаций сигналов. Этот метод может быть достаточно легко адаптирован для систем диагностики возникновения и развития трещин в структуре минералов в процессе их нагружения, а также для проведения исследований структуры образцов горных пород в полевых условиях. Для получения количественной информации о концентрации микротрещин в исследуемых образцах минералов или геоматериалов по значениям мощности структурного шума необходима предварительная калибровка лазерно-ультразвукового метода по данным рентгеновской компьютерной томографии, т.е. получение зависимости величины W от процентного содержания микротрещин в каждом конкретном минерале или геоматериале.

Предложенный лазерный оптико-акустический метод, по существу, аналогичен методикам количественной оценки локальной сейсмоактивности, основанной на анализе характеристик акустических сигналов (ревербераций), возникающих после сейсмических толчков и затем однократно или многократно рассеянных на структурных неоднородностях горных пород (см., например, [30–32]). Поэтому данный метод может быть полезен для экспериментальной верификации количественных моделей сейсмических источников на основе результатов исследования как исходной трещиноватости образцов горных пород, так и процесса эволюции микроповрежденности под действием динамических нагрузок и возникновения очагов макроразрушений.

В качестве еще одного практического применения предложенного метода можно указать исследования особенностей рассеяния широкополосных акустических сигналов в гранулированных и неоднородных средах с дискретными включениями различных размеров (см., например, [33, 34]). Анализ временных и спектральных характеристик акустических сигналов, обратно рассеянных на зернах и включениях, позволяет количественно оценить размеры областей изменения конфигурации упаковки зерен под действием динамических нагрузок различной природы [33], а также выявить корреляцию во взаимном расположении разноразмерных неоднородностей и получить статистические данные об их распределении по размерам [34].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведены экспериментальные исследования влияния локальной микротрещино-

ватости лабораторных образцов полевых шпатов на спектральную мощность обратнорассеянных широкополосных импульсов продольных ультразвуковых волн (так называемую мощность структурного шума). Предложенная методика позволяет проводить исследования при одностороннем доступе к объекту контроля без измерения его толщины и регистрации донных ультразвуковых эхо-сигналов. Исследованы три образца ортоклаза и один образец плагиоклаза с локальными скоплениями микротрещин, которые были выявлены по данным оптической микроскопии поверхности образцов. В участках образцов с визуально наблюдаемыми скоплениями микротрещин обнаружено возрастание коэффициента затухания продольных ультразвуковых волн в спектральном диапазоне 1–15 МГц по сравнению с неповрежденными участками. Такое возрастание объяснялось повышенной концентрацией микротрещин размерами в десятки и сотни микрометров, являющихся эффективными рассеивателями акустических волн в мегагерцовом диапазоне частот. В участках с повышенным затуханием продольных ультразвуковых волн также наблюдалось возрастание мощности структурного шума. Область тестирования в поперечном направлении (по плоскости образца) составляет 2–3 мм, что дает возможность выявлять участки с повышенной трещиноватостью в сильно неоднородных по структуре геоматериалах. Обнаруженная прямая корреляция между возрастанием уровня мощности структурного шума и увеличением локальной микротрещиноватости может служить основой для разработки методик неразрушающей оптико-акустической диагностики возникновения и эволюции микротрещин в структуре геоматериалов под действием различных внешних нагрузок. Такая диагностика необходима, в частности, для локализации очагов микро- и макроразрушений в горных породах в окрестности потенциально опасных объектов промышленной инфраструктуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wittke W.* Rock mechanics: Theory and applications with case histories. Berlin: Springer-Verlag, 1990. 1075 p.
2. The rock physics handbook. Tools for seismic analysis in porous media. New York, Melbourne: Cambridge University Press, 2009. 525 p.
3. *Nemat-Nasser S., Obata M.* A microcrack model of dilatancy in brittle materials // *J. Appl. Mech.* 1988. V. 55. № 1. P. 24–35.
4. *Sagong M., Bobet A.* Coalescence of multiple flaws in a rock model material in uniaxial compression // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* 2002. V. 39. P. 229–241.
5. *Wong L.N.Y., Einstein H.H.* Systematic evaluation of cracking behavior in specimens containing single flaws under uniaxial compression // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* 2009. V. 46. P. 239–249.

6. *Yang S.-Q., Jing H.-W.* Strength failure and crack coalescence behavior of brittle sandstone samples containing a single fissure under uniaxial compression // *Int. J. Fract.* 2010. V. 168. P. 227–250.
7. *Sobolev G.A., Ponomarev A.V., Tyurkin Yu.S.* The stages of earthquake preparation: laboratory experiment and field study. In: *Balassanian S., Cisternas A., and Melkumyan M.* (eds.) *Earthquake hazard and seismic risk reduction.* Dordrecht: Springer, 2000. P. 211–223.
8. *Лавров А.В., Шкуратник В.Л.* Акустическая эмиссия при деформировании и разрушении горных пород (обзор) // *Акуст. журн.* 2005. Т. 51. Приложение. С. 6–18.
9. *Grosse C.U., Ohtsu M.* (eds.) *Acoustic emission testing: Basics for research – applications in civil engineering.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 406 p.
10. *Кадомцев А.Г., Дамаскинская Е.Е., Куксенко В.С.* Особенности разрушения гранита при различных условиях деформирования // *ФТТ.* 2011. Т. 53. № 9. С. 1777–1782.
11. *Xu Shi-da, Li Yuan-hui, Liu Jian-po.* Detection of cracking and damage mechanisms in brittle granites by moment tensor analysis of acoustic emission signals // *Acoust. Phys.* 2017. V. 63. № 3. P. 359–367.
12. *Пантелеев И.А.* Анализ тензора сейсмического момента акустической эмиссии: микромеханизмы разрушения гранита при трехточечном изгибе // *Акуст. журн.* 2020. Т. 66. № 6. С. 654–668.
13. *Дамаскинская Е.Е., Пантелеев И.А., Гафурова Д.Р., Фролов Д.И.* Структура деформируемого гетерогенного материала по данным акустической эмиссии и рентгеновской микрофотографии // *ФТТ.* 2018. Т. 60. № 7. С. 1353–1357.
14. *Aki K., Richards P.G.* *Quantitative seismology* (2nd edition). CA: Univ. Sci. Books, 2009. 742 p.
15. *Schubnel A., Nishizawa O., Masuda K., Lei X., Xue Z., Gueguen Y.* Velocity measurements and crack density determination during wet triaxial experiments on Oshima and Toki granites // *Pure Appl. Geophys.* 2003. V. 160. № 5. P. 869–887.
16. *Никитин А.Н., Иванкина Т.И., Игнатович В.К.* Особенности распространения продольных и поперечных упругих волн в текстурированных горных породах // *Физика Земли.* 2009. № 5. С. 57–69.
17. *El Azhari H., El Hassani I.* Effect of the number and orientation of fractures on the P-wave velocity diminution: application on the building stones of the Rabat area (Марокко) // *Geomaterials.* 2013. № 3. P. 71–81.
18. *Жуков В.С., Кузьмин Ю.О.* Экспериментальные исследования влияния трещиноватости горных пород и модельных материалов на скорость распространения продольной волны // *Физика Земли.* 2020. № 4. С. 39–50.
19. *Тришина О.М., Горбацевич Ф.Ф., Ковалевский М.В.* Акустические особенности упруго-анизотропных свойств образцов горных пород по разрезу Кольской сверхглубокой скважины СГ-3 // *Акуст. журн.* 2021. Т. 67. № 2. С. 154–173.
20. *Гусев В.Э., Карабутов А.А.* *Лазерная оптоакустика.* М.: Наука, 1991. 304 с.
21. *Карабутов А.А., Подымова Н.Б.* Неразрушающий контроль усталостных изменений структуры композитов лазерным ультразвуковым методом // *Механика композитных материалов.* 1995. Т. 31. № 3. С. 405–410.
22. *Девиченский А.Ю., Ломоносов А.М., Жаринов С.Е., Михалевич В.Г., Лямшев М.Л., Иванова Т.О., Меркулова Н.С.* Диагностика остаточных напряжений в металлах с помощью широкополосных поверхностных акустических импульсов // *Акуст. журн.* 2009. Т. 55. № 1. С. 39–46.
23. *Карабутов А.А., Подымова Н.Б., Черепецкая Е.Б.* Измерение зависимости локального модуля Юнга от пористости изотропных композитных материалов импульсным акустическим методом с использованием лазерного источника ультразвука // *ПМТФ.* 2013. Т. 54. № 3. С. 181–190.
24. *Карабутов А.А., Подымова Н.Б.* Влияние пористости на дисперсию фазовой скорости продольных акустических волн в изотропных металломатричных композитах // *Акуст. журн.* 2017. Т. 63. № 3. С. 265–274.
25. *Воробьев Р.И., Сергеичев И.В., Карабутов А.А., Миронова Е.А., Саватеева Е.В., Ахатов И.Ш.* Применение оптоакустического метода для оценки влияния пустот на трещиностойкость конструкционных углепластиков // *Акуст. журн.* 2020. Т. 66. № 2. С. 148–153.
26. *Подымова Н.Б., Карабутов А.А.* Влияние пористости на статистическое распределение амплитуд обратнорассеянных ультразвуковых импульсов в металломатричных композитах, изготовленных методом реакционного литья // *Акуст. журн.* 2021. Т. 67. № 1. С. 55–64.
27. *Brown J.M., Angel R.J., Ross N.L.* Elasticity of plagioclase feldspars // *J. Geophys. Res. Solid Earth* 2016. V. 121. P. 663–675.
28. *Соколовская Ю.Г., Подымова Н.Б., Карабутов А.А.* Лазерный оптико-акустический метод количественной оценки пористости углепластиков на основе измерения их акустического импеданса // *Акуст. журн.* 2020. Т. 66. № 1. С. 86–94.
29. *Лебедев А.В., Островский Л.А., Сутин А.М.* Нелинейная акустическая спектроскопия локальных дефектов в геоматериалах // *Акуст. журн.* 2005. Т. 51. Приложение. С. 103–117.
30. *Aki K., Chouet B.* Origin of coda waves; source, attenuation and scattering effects // *J. Geophys. Res.* 1975. V. 80. № 5. P. 3322–3342.
31. *Sato H.* Energy propagation including scattering effects: single isotropic scattering approximation // *J. Phys. Earth.* 1977. V. 25. P. 27–41.
32. *Jin A., Aki K.* High-resolution maps of Coda Q in Japan and their interpretation by the brittle-ductile interaction hypothesis // *Earth Planets Space.* 2005. V. 57. P. 403–409.
33. *Jia X., Laurent J., Khidas Y., Langlois V.* Sound scattering in dense granular media // *Chin. Sci. Bull.* 2009. V. 54. P. 4327–4336.
34. *Гурбатов С.Н., Грязнова И.Ю., Иващенко Е.Н.* Исследование обратного рассеяния акустических волн дискретными неоднородностями разных размеров // *Акуст. журн.* 2016. Т. 62. № 2. С. 203–207.

**ОБРАБОТКА АКУСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ.
КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

УДК 681.7.534.91

**ЛОКАЛИЗАЦИЯ ИСТОЧНИКА В ПЕРЕМЕННОМ ПО ТРАССЕ
ВОЛНОВОДЕ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ
О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ИЗМЕНЧИВОСТИ
СРЕДЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ**© 2022 г. А. Г. Сазонтов^{a, b, *}^aИнститут прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия^bНижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

*e-mail: sazonov@ipfran.ru

Поступила в редакцию 20.06.2022 г.

После доработки 25.07.2022 г.

Принята к публикации 27.07.2022 г.

Рассмотрена задача о локализации акустического источника в переменном по трассе волноводе, в котором происходит взаимодействие нормальных волн, приводящее к связи между их амплитудами. Для рассматриваемого сценария построен адаптивный алгоритм пониженного ранга, учитывающий отличие ожидаемой реплики сигнала от истинной и не требующий знания соответствующих элементов матрицы связи. Путем статистического моделирования установлено, что реализованный способ оценивания дает значительное преимущество как в точности измерения координат, так и в достигаемой с его помощью вероятности правильной локализации по сравнению с традиционным методом MUSIC, не учитывающим эффекты взаимодействия мод.

Ключевые слова: переменный по трассе акустический волновод, локализация источника, адаптивный алгоритм пониженного ранга, статистическое моделирование

DOI: 10.31857/S0320791922060120**ВВЕДЕНИЕ**

Проблема локализации источника в подводном звуковом канале является одним из важных аспектов теории обнаружения и оценивания параметров сигналов на фоне помех с использованием адаптивных антенных решеток (АР). Однако ее решение, основанное на методе согласованного поля, сталкивается с трудностями принципиального характера [1, 2]. Причина этого состоит в том, что используемый подход чрезвычайно чувствителен к знанию параметров морской среды, поэтому существующее всегда несоответствие (рассогласование) между принятым звуковым полем и его расчетной моделью может привести к некорректному решению обратной задачи в натуральных условиях.

В ряде случаев, когда профиль скорости звука и рельеф дна существенным образом изменяются вдоль трассы распространения, происходит взаимодействие нормальных волн, приводящее к связи между их амплитудами. В условиях неполноты информации о пространственной изменчивости акустических характеристик канала соответствующая матрица связи априори неизвестна, что значительно усложняет решение обратной зада-

чи. Имеющиеся в литературе методы локализации источника в переменном по трассе волноводе опираются исключительно на адиабатическое приближение, не учитывающее такого рода взаимодействия. В этой связи особый интерес представляет построение адаптивных методов оценивания, позволяющих минимизировать эффекты рассогласования между принятой и ожидаемой репликой сигнала и не требующих знания матрицы связи амплитуд мод.

В настоящей работе построен адаптивный алгоритм пониженного ранга RARE (“rank reduction”), позволяющий оценить искомые координаты источников без знания истинных параметров неоднородного акустического волновода. Проводимое рассмотрение рассчитано на наилучший сценарий приема и предполагает ограниченность по норме вектора рассогласования между принятым звуковым полем и его расчетной моделью, при этом процедура адаптации заключается в нахождении робастного вектора отклика АР, обеспечивающего максимум выходной мощности процессора и удовлетворяющего наложенным на него ограничениям (см. [3] и цитируемую там литературу). Представлены результаты срав-

нительного анализа эффективности предложенного способа оценивания с обычным методом MUSIC, не учитывающим эффекты взаимодействия мод.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Пусть в точках с координатами $\theta_1 = (r_1, z_1)^T, \dots, \theta_J = (r_J, z_J)^T$ волноводного канала находятся J источников звука, излучающих частично-когерентные узкополосные сигналы с одинаковой несущей частотой ω_0 . (Верхний индекс T обозначает операцию транспонирования.) Прием осуществляется линейной вертикальной АР, состоящей из N элементов, расположенных на горизонтах $\{z_n\}_{n=1}^N$. (Начало координат по дальности выбрано в месте установки АР.)

В узкополосном приближении результирующее поле на входе АР характеризуется N -мерным вектором наблюдения \mathbf{x}_l :

$$\mathbf{x}_l = \sum_{j=1}^J \mathbf{g}(\theta_j) s_j(l) + \mathbf{n}_l, \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (1)$$

Здесь l – номер выборочного отсчета, $\mathbf{g}(\theta_j) = [G(0, z_1 | \theta_j), \dots, G(0, z_N | \theta_j)]^T$ – вектор отклика АР при приеме сигнала от j -го источника с комплексной огибающей $s_j(l)$, $\{G(0, z_n | \theta_j)\}_{n=1}^N$ – функции Грина, связывающие координаты соответствующего источника с координатами приемных элементов, \mathbf{n}_l – вектор аддитивного белого шума, а L – объем входной выборки. Задача состоит в построении адаптивного алгоритма обработки, позволяющего по принятой выборке $\{\mathbf{x}_l\}_{l=1}^L$ оценить искомые координаты источников без знания пространственной изменчивости акустического волновода.

При дальнейшем анализе будем считать, что число источников известно, а случайные векторы \mathbf{s}_j и \mathbf{n}_l взаимно не коррелированы и характеризуются следующими ковариационными матрицами

$$\langle \mathbf{s}_j \mathbf{s}_q^+ \rangle = \mathbf{S} \delta_{lq}, \quad \langle \mathbf{n}_l \mathbf{n}_q^+ \rangle = \sigma_n^2 \mathbf{I} \delta_{lq},$$

где $\mathbf{S} \in C^{J \times J}$ – матрица, описывающая взаимные корреляции излученных сигналов, σ_n^2 – неизвестный уровень шума, \mathbf{I} – единичная матрица размерности $N \times N$, δ_{lq} – символ Кронекера, а $(\cdot)^+$ и $\langle \cdot \rangle$ означают операции эрмитового сопряжения и статистического усреднения, соответственно.

Ниже при нахождении ожидаемой реплики сигнала мы воспользуемся волновым подходом, в

рамках которого функция Грина $G(0, z_n | \theta_j)$ может быть представлена в виде суперпозиции конечно-го числа M распространяющихся локальных нормальных мод. В адиабатическом приближении для $G(0, z_n | \theta_j)$ имеем [4]:

$$G(0, z_n | \theta_j) = \sum_{m=1}^M a_m(\theta_j) \varphi_m(0, z_n), \quad (2)$$

$$a_m(\theta_j) = \frac{\varphi_m(r_j, z_j)}{\sqrt{8\pi k_m(0) r_j}} \exp \left[i \int_0^{r_j} k_m(r) dr + i\pi/4 \right].$$

Здесь $\varphi_m(0, z_n)$ и $\varphi_m(r_j, z_j)$ – собственные функции m -ой моды в месте расположения n -го приемного элемента и j -го источника излучения, а $k_m(r)$ – соответствующее горизонтальное волновое число в сечении $r = \text{const}$. В указанном приближении вектор отклика АР записывается в виде: $\mathbf{g}(\theta_j) = \mathbf{U} \mathbf{a}(\theta_j)$, где \mathbf{U} – матрица модовой структуры размерности $N \times M$ с элементами $U_{nm} = \varphi_m(0, z_n)$, а $\mathbf{a}(\theta) \in C^{M \times 1}$ – модовый вектор с компонентами $a_m(\theta)$, определяемыми формулой (2).

Взаимодействие нормальных волн в переменном по трассе канале приводит к связи между их амплитудами, которую можно учесть путем введения матрицы связи \mathbf{C}_j размерности $M \times M$. В результате для $\mathbf{g}(\theta_j)$ следует

$$\mathbf{g}(\theta_j) = \mathbf{U} \mathbf{C}_j \mathbf{a}(\theta_j). \quad (3)$$

В общем случае матрица \mathbf{C}_j , фигурирующая в определении (3), содержит M^2 элементов и не имеет определенной структуры. Однако, учитывая, что в неоднородном по трассе волноводе взаимодействие в основном происходит между модами близких номеров (а следовательно, элементы матрицы связи, удаленные от главной диагонали, вносят пренебрежимо малый вклад в ее формирование), \mathbf{C}_j можно аппроксимировать ленточной матрицей, содержащей лишь $P \ll M^2$ ненулевых элементов. Последние удобно рассматривать как компоненты вектора

$$\mathbf{c}_j = [c_1(\theta_j), c_2(\theta_j), \dots, c_P(\theta_j)]^T \in C^{P \times 1}. \quad (4)$$

В условиях неполной информации о пространственной изменчивости канала элементы этого вектора априори неизвестны и должны определяться совместно с искомыми координатами источников.

В рамках рассматриваемой аппроксимации матрицы связи справедливо непосредственно проверяемое соотношение [5–7]:

$$\mathbf{C}_j \mathbf{a}(\theta_j) = \mathbf{T}(\theta_j) \mathbf{c}_j, \quad (5)$$

где $\mathbf{T}(\theta) = [\mathbf{E}_1 \mathbf{a}(\theta) \mathbf{E}_2 \mathbf{a}(\theta) \dots \mathbf{E}_P \mathbf{a}(\theta)] \in C^{M \times P}$, а

$$[\mathbf{E}_p]_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{если } [C_j]_{nm} = c_p(\boldsymbol{\theta}_j); \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ p = 1, \dots, P.$$

Простое доказательство формулы (5) основано на возможности представления матрицы C_j в виде

$$C_j = \sum_{p=1}^P \mathbf{E}_p c_p(\boldsymbol{\theta}_j).$$

В результате

$$C_j \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_j) = \sum_{p=1}^P \mathbf{E}_p \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_j) c_p(\boldsymbol{\theta}_j) = \\ = [\mathbf{E}_1 \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_j) \cdots \mathbf{E}_P \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_j)] \begin{bmatrix} c_1(\boldsymbol{\theta}_j) \\ \vdots \\ c_P(\boldsymbol{\theta}_j) \end{bmatrix} \equiv \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}_j) \mathbf{c}_j.$$

С учетом (4) и (5) исходный вектор наблюдения (1) может быть переписан следующим образом

$$\mathbf{x}_l = \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{s}_l + \mathbf{n}_l, \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{U}[C_1 \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_1), \dots, C_J \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_J)] \equiv \mathbf{U}[\mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}_1) \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}_J) \mathbf{c}_J] \in C^{N \times J}$ – передаточная матрица канала, зависящая от искомого вектора $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1^T, \dots, \boldsymbol{\theta}_J^T)^T$ размерности $2J \times 1$, определяющего пространственные положения источников, $\mathbf{s}_l = [s_1(l), \dots, s_J(l)]^T \in C^{J \times 1}$ – вектор комплексных огибающих излученных сигналов.

Для статистически независимых сигналов и помех ковариационная матрица вектора (6) дается соотношением:

$$\mathbf{\Gamma}_x = \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{S} \mathbf{G}^+(\boldsymbol{\theta}) + \sigma_n^2 \mathbf{I}. \quad (7)$$

В реальных ситуациях истинная матрица $\mathbf{\Gamma}_x$ неизвестна, поэтому на практике вместо нее используется оценочная матрица $\hat{\mathbf{\Gamma}}_x$ размерности $N \times N$, равная

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_x = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{x}_l \mathbf{x}_l^+.$$

Одним из наиболее распространенных способов локализации является алгоритм MUSIC [8]. Эта процедура основана на использовании информации, содержащейся в системе собственных векторов $\{\hat{\boldsymbol{\psi}}\}_{i=1}^N$ выборочной матрицы $\hat{\mathbf{\Gamma}}_x$:

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_x \hat{\boldsymbol{\psi}}_i = \lambda_i \hat{\boldsymbol{\psi}}_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ – положительные собственные числа, пронумерованные в порядке убывания, т.е. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$. Первые J старших собственных векторов формируют сигнальное подпростран-

ство $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_s = [\hat{\boldsymbol{\psi}}_1 \dots \hat{\boldsymbol{\psi}}_J] \in C^{N \times J}$, а $N - J$ оставшихся векторов – шумовое $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_n = [\hat{\boldsymbol{\psi}}_{J+1}, \dots, \hat{\boldsymbol{\psi}}_N] \in C^{N \times (N-J)}$.

Для рассматриваемого способа обработки искомые координаты источника и неизвестные элементы матрицы связи могут быть найдены из условия ортогональности ожидаемого вектора отклика (3) к векторам шумового подпространства

$$\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_j, \hat{\mathbf{c}}_j\}_{j=1}^J = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}, \mathbf{c}} \|\hat{\boldsymbol{\Psi}}_n^+ \mathbf{U}(\mathbf{c}) \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta})\|^2, \quad (8)$$

и процедура оценивания сводится к поиску J минимумов целевой функции в (8) в трехмерной области параметров. Последнее требует больших вычислительных затрат.

Принимая во внимание представление (5), переформулируем исходный критерий (8) следующим образом

$$\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_j\}_{j=1}^J = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \left\{ \min_{\mathbf{c}} \mathbf{c}^+ \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{c} \right\}, \quad (9)$$

где $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{V}^+(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\Psi}_n \hat{\boldsymbol{\Psi}}_n \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) \in C^{P \times P}$, а $\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{U} \mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}) \in C^{N \times P}$. Отметим, что поскольку $\text{rank}\{\mathbf{Q}\} = \min(N - J, M, P)$, то при выполнении условия $N - J > M$, $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta})$ будет матрицей полного ранга, если $P < M$, и следовательно, в рамках данного способа локализации число оцениваемых элементов матрицы связи не должно превышать $M - 1$.

Входящий в (9) неизвестный вектор \mathbf{c} может быть найден лишь с точностью до произвольного комплексного множителя, поэтому для однозначного определения \mathbf{c} можно наложить на него дополнительное ограничение $\|\mathbf{c}\|^2 = 1$ (исключающее тривиальное решение $\mathbf{c} = 0$). В этом случае минимум квадратичной формы $\mathbf{c}^+ \mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{c}$ реализуется при условии совпадения \mathbf{c} с собственным вектором, отвечающим наименьшему собственному значению $\lambda_{\min}\{\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta})\}$ матрицы $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta})$. В результате пространственные положения источников могут быть найдены из следующего критерия:

$$\{\hat{\boldsymbol{\theta}}_j\}_{j=1}^J = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} P_{\text{RARE}}(\boldsymbol{\theta}), \quad (10) \\ P_{\text{RARE}}(\boldsymbol{\theta}) = 1/\lambda_{\min}\{\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta})\}.$$

Метод оценивания (10) аналогичен алгоритму пониженного ранга RARE [9, 10], используемому в технике частично калиброванных AP, содержащих P подрешеток. При этом роль векторов, характеризующих амплитудно-фазовую калибровку этих подрешеток, играют векторы, определяемые соотношением (4). Важно подчеркнуть, что применение (10) позволяет решить обратную задачу без использования трудоемкой процедуры одновременного поиска как искомым координат,

так и неизвестных элементов соответствующей матрицы связи.

При практической реализации данного способа локализации в качестве матрицы $\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})$ (вследствие неполной информации о канале распространения) используется некоторая оценочная матрица $\mathbf{V}_0(\boldsymbol{\theta})$, рассчитываемая для номинальных акустических характеристик волновода. Однако в изменчивых и всегда не полностью известных условиях морской среды существующее рассогласование между $\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})$ и $\mathbf{V}_0(\boldsymbol{\theta})$ приводит к значительному ухудшению работоспособности приведенного метода. Ниже мы построим робастную версию алгоритма, позволяющую повысить устойчивость процедуры оценивания и частично скомпенсировать эффект подобного несоответствия.

ПОСТРОЕНИЕ АДАПТИВНОЙ ВЕРСИИ АЛГОРИТМА ПОНИЖЕННОГО РАНГА

При построении адаптивной процедуры RARE, основанной на наихудшем сценарии приема, будем предполагать, что истинная матрица $\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta})$ отличается от $\mathbf{V}_0(\boldsymbol{\theta})$ некоторой ошибкой, норма Фробениуса которой ограничена заданной величиной: $\|\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{V}_0(\boldsymbol{\theta})\|_F^2 \leq \varepsilon$, где ε – положительный параметр регуляризации. Адаптация к условиям рассогласования состоит в нахождении робастной матрицы $\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \varepsilon)$, удовлетворяющей указанному ограничению и обеспечивающей минимум целевой функции $\mathbf{c}^+ \mathbf{V}^+(\boldsymbol{\theta}) \hat{\Psi}_n^+ \hat{\Psi}_n^+ \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{c}$ для всех возможных значений нормированных векторов \mathbf{c} :

$$\min_{\mathbf{V}} \{ \mathbf{c}^+ \mathbf{V}^+(\boldsymbol{\theta}) \hat{\Psi}_n^+ \hat{\Psi}_n^+ \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{c} \} \quad \text{при} \quad \|\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{V}_0(\boldsymbol{\theta})\|_F^2 \leq \varepsilon. \quad (11)$$

Для исключения в (11) тривиального решения $\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ необходимо наложить дополнительное условие на допустимую норму ожидаемой матрицы $\mathbf{V}_0(\boldsymbol{\theta})$: $\|\mathbf{V}_0(\boldsymbol{\theta})\|_F^2 > \varepsilon$.

Для нахождения искомого матрицы \mathbf{V} составим функцию Лагранжа

$$L(\mathbf{V}, \nu) = \mathbf{c}^+ \mathbf{V}^+ \hat{\Psi}_n^+ \hat{\Psi}_n^+ \mathbf{V} \mathbf{c} + \nu (\|\mathbf{V} - \mathbf{V}_0\|_F^2 - \varepsilon)$$

с неопределенным вещественным множителем, удовлетворяющим условию $\nu > 0$. (Здесь аргумент $\boldsymbol{\theta}$ опущен для краткости записи.) Дифференцируя L по \mathbf{V} (при фиксированном ν) и приравнявая результат к нулю, получим

$$\hat{\Psi}_n^+ \hat{\Psi}_n^+ \mathbf{V} \mathbf{D} + \nu \mathbf{V} - \nu \mathbf{V}_0 = 0, \quad \mathbf{D} = \mathbf{c} \mathbf{c}^+. \quad (12)$$

Умножая (12) справа на матрицу \mathbf{D} и учитывая, что (в силу $\|\mathbf{c}\|^2 = 1$) $\mathbf{D}^2 = \mathbf{D}$, имеем

$$[(\hat{\Psi}_n^+ \hat{\Psi}_n^+ + \nu \mathbf{I}) \mathbf{V} - \nu \mathbf{V}_0] \mathbf{D} = 0.$$

Поскольку это равенство должно выполняться для всех рассматриваемых векторов, то приведенное уравнение будет заведомо удовлетворено, если

$$\mathbf{V} = \nu (\hat{\Psi}_n^+ \hat{\Psi}_n^+ + \nu \mathbf{I})^{-1} \mathbf{V}_0 \equiv \mathbf{V}_0 - (\mathbf{I} + \nu)^{-1} \hat{\Psi}_n^+ \hat{\Psi}_n^+ \mathbf{V}_0. \quad (13)$$

При написании (13) использовано соотношение

$$(\hat{\Psi}_n^+ \hat{\Psi}_n^+ + \nu \mathbf{I})^{-1} = \frac{1}{\nu} \left[\mathbf{I} - \frac{\hat{\Psi}_n^+ \hat{\Psi}_n^+}{\nu + 1} \right],$$

являющееся следствием известной формулы обращения матриц

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{I} + \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1},$$

в которой $\mathbf{A} = \nu \mathbf{I}$, $\mathbf{B} = \hat{\Psi}_n^+$, $\mathbf{C} = \hat{\Psi}_n^+$ (и при этом $\hat{\Psi}_n^+ \hat{\Psi}_n^+ = \mathbf{I}$).

Множитель Лагранжа ν находится из условия, вытекающего из ограничения на норму матрицы рассогласования:

$$\|\mathbf{V} - \mathbf{V}_0\|_F^2 = (\mathbf{I} + \nu)^{-2} \|\hat{\Psi}_n^+ \hat{\Psi}_n^+ \mathbf{V}_0\|_F^2 = \varepsilon,$$

откуда

$$\nu = -1 + \sqrt{\text{Tr}(\mathbf{V}_0^+ \hat{\Psi}_n^+ \hat{\Psi}_n^+ \mathbf{V}_0) / \varepsilon}.$$

В свою очередь, из неравенства $\nu > 0$ следует, что в процессе локализации параметр регуляризации ε не должен превышать определенной величины

$$\varepsilon < F_0(\boldsymbol{\theta}), \quad F_0(\boldsymbol{\theta}) = \sqrt{\text{Tr}[\mathbf{V}_0^+(\boldsymbol{\theta}) \hat{\Psi}_n^+ \hat{\Psi}_n^+ \mathbf{V}_0(\boldsymbol{\theta})]}.$$

Таким образом, знание множителя $\nu(\varepsilon)$ при $\varepsilon < F_0(\boldsymbol{\theta})$ позволяет на основании (13) найти оптимальную матрицу $\mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \varepsilon)$, рассчитать адаптивную матрицу

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\theta}, \varepsilon) = \mathbf{V}^+(\boldsymbol{\theta}, \varepsilon) \hat{\Psi}_n^+ \hat{\Psi}_n^+ \mathbf{V}(\boldsymbol{\theta}, \varepsilon) = f^2(\boldsymbol{\theta}, \varepsilon) \mathbf{Q}_0(\boldsymbol{\theta}),$$

где $f(\boldsymbol{\theta}, \varepsilon) = 1 - \sqrt{\varepsilon / F_0(\boldsymbol{\theta})}$, а $\mathbf{Q}_0(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{V}_0^+(\boldsymbol{\theta}) \hat{\Psi}_n^+ \hat{\Psi}_n^+ \mathbf{V}_0(\boldsymbol{\theta})$, и в итоге оценить искомые координаты источников путем поиска J максимумов выходной мощности адаптивного процессора

$$\{\hat{\boldsymbol{\theta}}\}_{j=1}^J = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} P_{\text{RARE}}(\boldsymbol{\theta}, \varepsilon), \quad (14)$$

$$P_{\text{RARE}}(\boldsymbol{\theta}, \varepsilon) \equiv 1 / f^2(\boldsymbol{\theta}, \varepsilon) \lambda_{\min}\{\mathbf{Q}_0(\boldsymbol{\theta})\}.$$

Отметим, что при $\varepsilon = 0$, $f(\boldsymbol{\theta}, \varepsilon) = 1$ и предложенный способ оценивания переходит в неадаптивную версию алгоритма.

РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Приведем результаты статистического моделирования, иллюстрирующие работоспособность предложенного способа оценивания (14), и срав-

ним его эффективность с традиционным алгоритмом MUSIC, не учитывающим эффекты взаимодействия мод.

Для определенности рассмотрим мелководный канал с характерной летней гидрологией (изображенной на рис. 1), в котором звуковое поле создается двумя некоррелированными источниками, расположенными на глубинах 45 и 75 м, и излучающими узкополосные сигналы с несущей частотой 250 Гц.

В рамках численного эксперимента глубина моря в месте постановки приемной АР бралась равной $H = 120$ м, дно моделировалось жидким поглощающим полупространством с плотностью $\rho_b = 1.8$ г/см³, скоростью звука $c_b = 1750$ м/с и коэффициентом поглощения в грунте $\beta = 0.13$ дБ/λ, а при расчете ожидаемого модового вектора и матрицы модовой структуры в качестве геоакустических параметров использовались значения $H = 121$ м, $\rho_b = 1.75$ г/см³, $c_b = 1725$ м/с и $\beta = 0.1$ дБ/λ. Полное число мод для рассматриваемых акустических характеристик канала и несущей частоты составляло 20. Подчеркнем, что для рассматриваемой постановки задачи заданными считались лишь номинальные параметры волновода в месте установки АР, при этом предполагалось, что акустические характеристики канала изменялись вдоль трассы распространения неизвестным образом.

При вычислениях в качестве C_j использовались тридиагональные матрицы вида

$$C_j = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_j & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_j & 1 & \alpha_j & \ddots & \vdots \\ 0 & \gamma_j & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_j \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_j & 1 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2,$$

при этом для каждого из элементов α_j и γ_j бралась одна из реализаций, генерируемых случайным образом в соответствии с формулами: $c_j = x_j + iy_j$, где x_j и y_j – равномерно распределенные случайные числа из интервала $[-0.5, 0.5]$.

Предполагалось, что прием осуществлялся линейной вертикальной антенной (с центром на глубине 60 м), состоящей из 32 элементов, расположенных через 3 м. Дистанция между источниками и антенной составляла соответственно 15 и 10 км. В процессе моделирования вектора наблюдения методом Монте-Карло комплексные огибающие излученных сигналов и компоненты шума рассматривались как статистически независимые гауссовские случайные процессы, при этом сигнальная матрица задавалась в виде $S = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2)$, где σ_1^2 и σ_2^2 – уровни излучения.

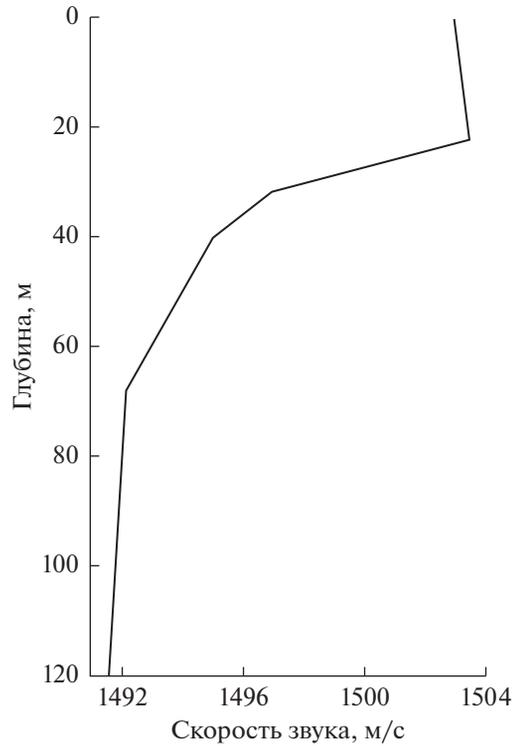


Рис. 1. Профиль скорости звука, используемый при моделировании.

Входные отношения сигнал/шум, определяемые соотношениями

$$\text{SNR}_j = \frac{\sigma_j^2 \|g(\theta_j)\|^2}{\sigma_n^2 N}, \quad j = 1, 2,$$

считались одинаковыми, т.е. $\text{SNR}_1 = \text{SNR}_2 = \text{SNR}$. Поиск источника по дальности осуществлялся в диапазоне 1–20 км с шагом 50 м, а по глубине – в интервале 1–120 м с шагом 0.5 м.

На рис. 2 показана зависимость среднеквадратических ошибок (СКО) оценивания положения источников по дальности и глубине от входного отношения сигнал/шум SNR. Соответствующие ошибки рассчитывались по формулам

$$\text{СКО}(\hat{r}) = \sqrt{(KJ)^{-1} \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J (\hat{r}_j^{(k)} - r_j)^2},$$

$$\text{СКО}(\hat{z}) = \sqrt{(KJ)^{-1} \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J (\hat{z}_j^{(k)} - z_j)^2},$$

в которых $\hat{r}_j^{(k)}$ и $\hat{z}_j^{(k)}$ – оценки координат j -го источника для k -ой реализации вектора наблюдения, $J = 2$, а общее число независимых реализаций K бралось равным 1000. Выборочная ковариационная матрица формировалась по $L = 120$ временным отсчетам.

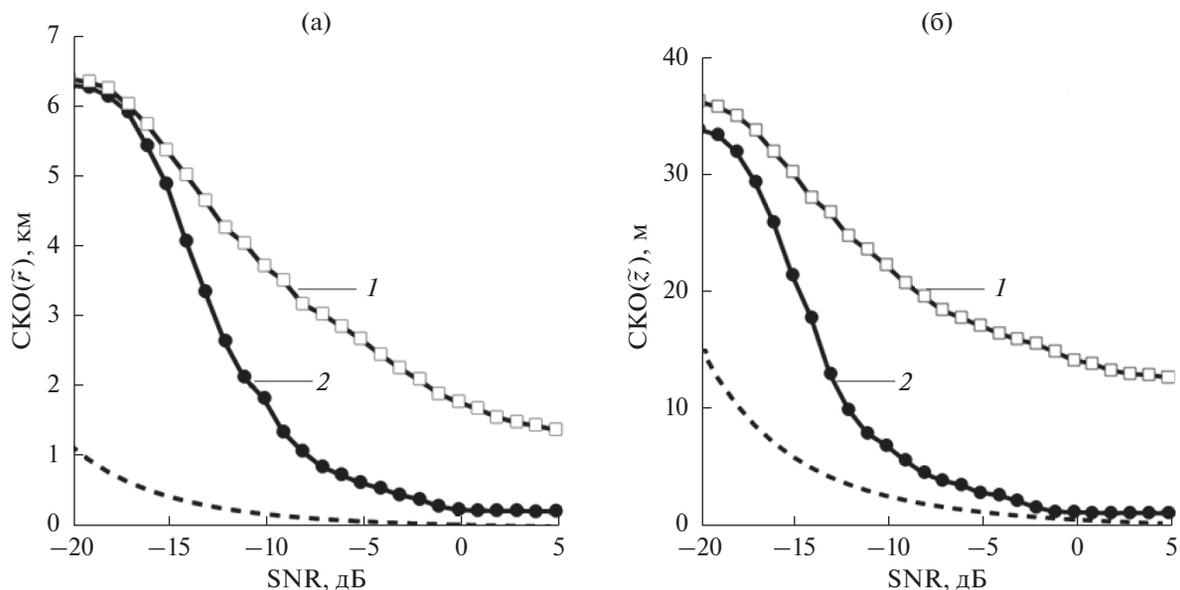


Рис. 2. Среднеквадратичные ошибки оценивания координат источника (а) — по дальности и (б) — по глубине в зависимости от входного SNR для рассматриваемых методов обработки.

Кривые 1 на рис. 2 отвечают стандартному методу MUSIC, не учитывающему связи между модами, а кривые 2 соответствуют предложенному методу (14) (при $\varepsilon = 0.2$). Пунктирной линией изображена нижняя граница Крамера–Рао (выражение для которой приведено в Приложении), показывающая потенциально достижимую точность оценки соответствующих координат. Для рассматриваемого численного эксперимента, как следует из рис. 2, применение адаптивного алго-

ритма (14) позволяет частично компенсировать эффекты взаимодействия мод и тем самым значительно повысить точность оценивания координат по сравнению с обычным алгоритмом MUSIC. Последний не в состоянии приблизиться к нижней границе Крамера–Рао даже при больших значениях SNR.

Одной из важных характеристик алгоритма является достигаемая с его помощью вероятность правильной локализации, определяемая как доля

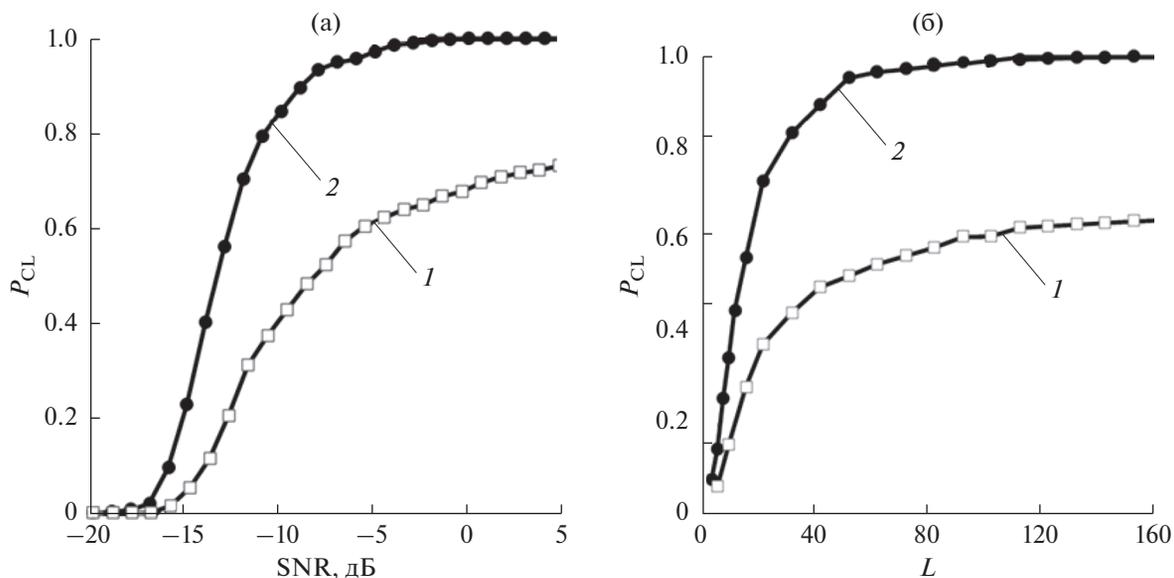


Рис. 3. Вероятность правильной локализации источника в зависимости от (а) — входного SNR и (б) — объема выборки L для рассматриваемых методов обработки.

реализаций, для которых ошибки в совместном определении положений источников по дистанции и глубине не превосходят заданных значений δr и δz . В качестве оценки соответствующей вероятности бралась величина

$$\hat{P}_{CL} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K p_k,$$

$$p_k = \begin{cases} 1, & \text{если } |\hat{r}_j^{(k)} - r_j| < \delta r \\ & \text{и } |\hat{z}_j^{(k)} - z_j| < \delta z, j = 1, 2; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для используемых методов оценивания на рис. 3а представлены результаты расчета указанной вероятности в зависимости от SNR, при этом число временных отсчетов L бралось равным 120. На рис. 3б показана зависимость \hat{P}_{CL} от числа выборок L , по которым оценивается ковариационная матрица входного процесса, при SNR = -3 дБ. При вычислениях значения δr и δz принимались соответственно равными 400 и 2 м. Видно, что соответствующая вероятность весьма чувствительна к выбору алгоритма. В частности, наихудшую эффективность демонстрирует традиционный метод MUSIC, рассчитанный на прием звукового поля, сформированного невзаимодействующими модами, который не в состоянии обеспечить гарантированной локализации источников для всех рассматриваемых значений SNR и L .

Таким образом, результаты статистического моделирования свидетельствуют, что для корректного решения обратной задачи в неоднородном по трассе волноводе (в котором происходит взаимодействие нормальных волн) необходимо применять адаптивные процедуры, позволяющие локализовать источник без знания соответствующих элементов матрицы связи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе построен адаптивный алгоритм пониженного ранга, позволяющий локализовать акустические источники с помощью вертикальной АР, работающей в условиях неполной информации о пространственной изменчивости волноводного канала. Проводимое рассмотрение основано на наихудшем сценарии приема, учитывающем эффекты рассогласования между ожидаемой репликой сигнала и ее расчетной моделью. Сформулированный критерий локализации не требует знания матрицы связи амплитуд мод и, следовательно, позволяет определить пространственные положения источников путем одномерного поиска максимумов выходной мощности адаптивного процессора.

Представлены результаты статистического моделирования предложенного метода, демонстрирующие его работоспособность в характерных летних гидрологических условиях. Установлено, что реализованный способ оценивания дает значительное преимущество как в точности измерения координат, так и в достигаемой с его помощью вероятности правильной локализации по сравнению с традиционным методом MUSIC, не учитывающим эффекты взаимодействия мод.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 20-19-00383).

ПРИЛОЖЕНИЕ

ГРАНИЦА КРАМЕРА–РАО

Для рассматриваемой постановки задачи выборочный вектор наблюдения \mathbf{x}_j является комплексным гауссовым вектором с нулевым средним значением и ковариационной матрицей $\mathbf{\Gamma}_x$, определяемой формулой (7). Передаточная матрица канала $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})$, фигурирующая в этом выражении, помимо искомого параметра $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1^T, \dots, \boldsymbol{\theta}_J^T)^T$, зависит от совокупности векторов $\{\mathbf{c}_j\}_{j=1}^J$, составленных из элементов соответствующих матриц связи. В свою очередь, как отмечалось выше, любой из векторов \mathbf{c}_j может быть найден лишь с точностью до произвольного комплексного множителя. Следовательно, без ограничения общности один из элементов каждого вектора \mathbf{c}_j (например, первый) можно считать фиксированным.

Обозначим через $\boldsymbol{\alpha}$ вектор, содержащий $2PJ$ неизвестных вещественных параметров передаточной матрицы

$$\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\theta}^T, \boldsymbol{\eta}^T]^T,$$

где $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\xi}^T, \boldsymbol{\zeta}^T)^T$, а $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_2^T \dots, \boldsymbol{\xi}_P^T)^T$ и $\boldsymbol{\zeta} = (\boldsymbol{\zeta}_2^T, \dots, \boldsymbol{\zeta}_P^T)^T$ – векторы размерности $(P-1)J \times 1$ вида:

$$\boldsymbol{\xi}_p = [\text{Re}\{c_p(\boldsymbol{\theta}_1)\}, \dots, \text{Re}\{c_p(\boldsymbol{\theta}_J)\}]^T,$$

$$\boldsymbol{\zeta}_p = [\text{Im}\{c_p(\boldsymbol{\theta}_1)\}, \dots, \text{Im}\{c_p(\boldsymbol{\theta}_J)\}]^T,$$

$$p = 2, \dots, P.$$

Ковариационная матрица ошибки измерения вектора $\boldsymbol{\alpha}$ удовлетворяет неравенству

$$\langle (\boldsymbol{\alpha} - \hat{\boldsymbol{\alpha}})(\boldsymbol{\alpha} - \hat{\boldsymbol{\alpha}})^T \rangle \geq \text{CRB}(\boldsymbol{\alpha}),$$

где $\text{CRB}(\boldsymbol{\alpha})$ – нижняя граница Крамера–Рао, определяющая потенциально достижимую точность оценки этого вектора. При приеме случайного сигнала, регистрируемого на фоне белого шума, соответствующая граница не зависит от

точности измерения уровня шума и элементов сигнальной матрицы \mathbf{S} и дается известным выражением [10,12]:

$$[\mathbf{CRB}^{-1}(\boldsymbol{\alpha})]_{pq} = \frac{2L}{\sigma_n^2} \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{Tr} \left(\mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{G}^+}{\partial \alpha_q} \mathbf{\Pi}_G^\perp \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \alpha_p} \right) \right\}, \quad (\text{П2})$$

$$p, q = 1, \dots, 2PJ,$$

где $\mathbf{W} = \mathbf{S}\mathbf{G}^+\mathbf{\Gamma}_x^{-1}\mathbf{G}\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{J \times J}$, а $\mathbf{\Pi}_G^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{G}(\mathbf{G}^+\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^+ \in \mathbb{C}^{N \times N}$. Вычисляя производные, входящие в (П2), и вводя обозначения

$$\mathbf{D}_r = \left[\mathbf{U}\mathbf{C}_1 \frac{\partial \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial r_1}, \dots, \mathbf{U}\mathbf{C}_J \frac{\partial \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_J)}{\partial r_J} \right],$$

$$\mathbf{D}_z = \left[\mathbf{U}\mathbf{C}_1 \frac{\partial \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_1)}{\partial z_1}, \dots, \mathbf{U}\mathbf{C}_J \frac{\partial \mathbf{a}(\boldsymbol{\theta}_J)}{\partial z_J} \right],$$

$\mathbf{D}_p = [\mathbf{U}\mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}_1)\mathbf{e}_p, \dots, \mathbf{U}\mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}_J)\mathbf{e}_p]$, где $p = 2, \dots, P$, а \mathbf{e}_p представляет собой p -ый столбец единичной матрицы размерности $P \times P$, для $\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\alpha})$ получим

$$\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\sigma_n^2}{2L} \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{\theta\theta} & \mathbf{J}_{\theta\eta} \\ \mathbf{J}_{\theta\eta}^T & \mathbf{J}_{\eta\eta} \end{pmatrix}^{-1}. \quad (\text{П3})$$

Здесь $\mathbf{J}_{\theta\theta} = \operatorname{Re}\{\mathbf{F}\}$, $\mathbf{J}_{\theta\eta} = [\operatorname{Re}\{\mathbf{K}\} - \operatorname{Im}\{\mathbf{K}\}]$,

$$\mathbf{J}_{\eta\eta} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\{\boldsymbol{\Sigma}\} & -\operatorname{Im}\{\boldsymbol{\Sigma}\} \\ \operatorname{Im}\{\boldsymbol{\Sigma}\} & \operatorname{Re}\{\boldsymbol{\Sigma}\} \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$\mathbf{F} = \operatorname{Re} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_r^+ \mathbf{\Pi}_G^\perp \mathbf{D}_r \circ \mathbf{W}^T & \mathbf{D}_r^+ \mathbf{\Pi}_G^\perp \mathbf{D}_z \circ \mathbf{W}^T \\ \mathbf{D}_z^+ \mathbf{\Pi}_G^\perp \mathbf{D}_r \circ \mathbf{W}^T & \mathbf{D}_z^+ \mathbf{\Pi}_G^\perp \mathbf{D}_z \circ \mathbf{W}^T \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2J \times 2J},$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_r^+ \mathbf{\Pi}_G^\perp \mathbf{D}_2 \circ \mathbf{W}^T & \dots & \mathbf{D}_r^+ \mathbf{\Pi}_G^\perp \mathbf{D}_P \circ \mathbf{W}^T \\ \mathbf{D}_z^+ \mathbf{\Pi}_G^\perp \mathbf{D}_2 \circ \mathbf{W}^T & \dots & \mathbf{D}_z^+ \mathbf{\Pi}_G^\perp \mathbf{D}_P \circ \mathbf{W}^T \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2J \times (P-1)J},$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_2^+ \mathbf{\Pi}_G^\perp \mathbf{D}_2 \circ \mathbf{W}^T & \dots & \mathbf{D}_2^+ \mathbf{\Pi}_G^\perp \mathbf{D}_P \circ \mathbf{W}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{D}_P^+ \mathbf{\Pi}_G^\perp \mathbf{D}_2 \circ \mathbf{W}^T & \dots & \mathbf{D}_P^+ \mathbf{\Pi}_G^\perp \mathbf{D}_P \circ \mathbf{W}^T \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(P-1)J \times (P-1)J},$$

а символ \circ означает произведение Адамара (или поэлементное умножение матриц $[\mathbf{A} \circ \mathbf{B}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ij}[\mathbf{B}]_{ij}$).

Ниже нас будет интересовать предел точности измерения пространственных положений источников. Соответствующая матрица ошибок размерности $2J \times 2J$ находится путем обращения левого верхнего блока в (П3):

$$\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\sigma_n^2}{2L} (\mathbf{J}_{\theta\theta} - \mathbf{J}_{\theta\eta} \mathbf{J}_{\eta\eta}^{-1} \mathbf{J}_{\theta\eta}^T)^{-1} = \frac{\sigma_n^2}{2L} \operatorname{Re}(\mathbf{F} - \mathbf{K} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{K}^+)^{-1}. \quad (\text{П4})$$

При получении (П4) использован результат работы [11], в соответствии с которым

$$[\operatorname{Re}\{\mathbf{K}\} - \operatorname{Im}\{\mathbf{K}\}] \times \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\{\boldsymbol{\Sigma}\} & -\operatorname{Im}\{\boldsymbol{\Sigma}\} \\ \operatorname{Im}\{\boldsymbol{\Sigma}\} & \operatorname{Re}\{\boldsymbol{\Sigma}\} \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \operatorname{Re}\{\mathbf{K}\}^T \\ \operatorname{Im}\{\mathbf{K}\}^T \end{bmatrix} = \operatorname{Re}(\mathbf{K} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{K}^+).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Baggeroer A.B., Kuperman W.A., Mikhalevsky P.N.* An overview of matched field methods in ocean acoustics // IEEE J. Oceanic Eng. 1993. V. 18. P. 401–423.
2. *Сазонтов А.Г., Малеханов А.И.* Согласованная пространственная обработка сигналов в подводных звуковых каналах (Обзор) // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 2. 233–253.
3. *Robust Adaptive Beamforming* / Eds. by Li J. and Stoica P. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2006. 422 p.
4. *Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. Л.: Гидрометеиздат, 1982. 264 с.
5. *Friedlander B., Weiss A.* Direction finding in the presence of mutual coupling // IEEE Trans. Antennas Propag. 1991. V. 39. № 3. P. 273–284.
6. *Elbir A.M.* Direction finding in the presence of direction-dependent mutual coupling // IEEE Antennas Wireless Propag. Lett. 2017. V. 16. P. 1541–1544.
7. *Ge Q., Zhang Y., Wang Y.* A low complexity algorithm for direction of arrival estimation with direction-dependent mutual coupling // IEEE Commun. Lett. 2020. V. 24. № 1. P. 90–94.
8. *Schmidt R.O.* Multiple emitter location and signal parameter estimation // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. 1986. V. 34. № 3. P. 276–280.
9. *Pesavento M., Gershman A.B., Wong K.M.* Direction finding in partly calibrated sensor arrays composed of multiple subarrays // IEEE Trans. on Signal Process. 2002. V. 50. № 9. P. 2103–2115.
10. *See C.M.S., Gershman A.B.* Direction-of-arrival estimation in partly calibrated subarray-based sensor arrays // IEEE Trans. on Signal Processing. 2004. V. 52. № 2. P. 329–338.
11. *Stoica P., Nehorai A.* MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound // IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing. 1989. V. 37. № 5. P. 720–741.
12. *Nehorai A., Paldi E.* Vector-sensor array processing for electromagnetic source localization. // IEEE Trans. Signal Process. 1994. V. 42. № 2. P. 376–398.