

СОДЕРЖАНИЕ

Том 501, 2021

МАТЕМАТИКА

Об устойчивых случайных величинах с комплексным индексом устойчивости

И. А. Алексеев 5

Единственность вероятностного решения уравнения Колмогорова с матрицей диффузии, удовлетворяющей условию Дини

В. И. Богачев, С. В. Шапошников 11

О спектре несамосопряженного квазипериодического оператора

Д. И. Борисов, А. А. Федотов 16

Локальный закон Марченко–Пастура для прореженных прямоугольных случайных матриц

Ф. Гётце, Д. А. Тимушев, А. Н. Тихомиров 22

О максимальном разрезе в случайном гиперграфе

П. А. Захаров, Д. А. Шабанов 26

Свойства агрегированной квазигазодинамической системы уравнений гомогенной газовой смеси

А. А. Злотник, А. С. Федченко 31

Об одном семействе комплексных стохастических процессов

И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев 38

Доказательство устойчивости в задаче Брауэра–Пауля

А. П. Иванов 42

Зависимость динамики модели связанных осцилляторов от числа осцилляторов

А. А. Кащенко 46

Построение семейств уравнений для описания нерегулярных решений в задаче Ферми–Паста–Улама

С. А. Кащенко 52

Математические структуры, связанные с описанием квантовых состояний

В. В. Козлов, О. Г. Смолянов 57

Применение схемы SABARET для расчета разрывных решений гиперболической системы законов сохранения

В. В. Остапенко, В. А. Колотилов 62

Гибридные сеточно-характеристические схемы для задач арктической сейсморазведки <i>И. Б. Петров, В. И. Голубев, Е. К. Гусева</i>	67
Математическое моделирование роста материала нео-Гука <i>П. И. Плотников</i>	74
Бесфазовая задача об определении анизотропной проводимости в уравнениях электродинамики <i>В. Г. Романов</i>	79
Факторы поверхностей Севери–Брауэра <i>А. С. Трепалин</i>	84
Тензорные инварианты геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении двумерного многообразия <i>М. В. Шамолин</i>	89
<hr/>	
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ	
Траектория наблюдателя, отслеживающего движение объекта вокруг выпуклого множества в \mathbb{R}^3 <i>В. И. Бердышев</i>	95
<hr/>	
Правила для авторов	98
<hr/> <hr/>	

CONTENTS

Volume 501, 2021

MATHEMATICS

- On Stable Random Variables with the Complex Stability Index
I. A. Alexeev 5
- Uniqueness of a Probability Solution to the Kolmogorov Equation
with a Diffusion Matrix Satisfying Dini's Condition
B. I. Bogachev and S. V. Shaposhnikov 11
- On the Spectrum of a Non-Self-Adjoint Quasiperiodic Operator
D. I. Borisov and A. A. Fedotov 16
- Local Marchenko–Pastur Law for Sparse Rectangular Random Matrices
F. Götze, A. N. Tikhomirov, and D. A. Timushev 22
- On the Maximal Cut in a Random Hypergraph
P. A. Zakharov and D. A. Shabanov 26
- Properties of an Aggregated Quasi-Gasdynamic System of Equations for a Homogeneous Gas Mixture
A. A. Zlotnik and A. S. Fedchenko 31
- On a Family of Complex-Valued Stochastic Processes
I. A. Ibragimov, N. V. Smorodina, and M. M. Faddeev 38
- Proof of Stability in a Bower–Paul Problem
A. P. Ivanov 42
- Dependence of the Dynamics of the Model of Coupled Oscillators on the Number of Oscillators
A. A. Kashchenko 46
- The Construction of the Family of Equations to Describe Irregular Solutions
in the Fermi–Pasta–Ulama Problem
S. A. Kashchenko 52
- Mathematical Structures Related to the Description of Quantum States
V. V. Kozlov and O. G. Smolyanov 57
- Application of the Cabaret Scheme for the Calculation of Discontinuous Solutions
of the Hyperbolic System of Conservation Laws
V. V. Ostapenko and V. A. Kolotilov 62
- Hybrid Grid-Characteristic Schemes for Arctic Seismic Problems
I. B. Petrov, V. I. Golubev, and E. K. Guseva 67

Mathematical Modelling of Neo-Hookean Material Growth	
<i>P. I. Plotnikov</i>	74
Phaseless Problem of Determination of the Anisotropic Conductivity in Electrodynamic Equations	
<i>V. G. Romanova</i>	79
Quotients of Severi–Brauer Surfaces	
<i>A. S. Trepalin</i>	84
Tensor Invariants Of Geodesic, Potential, and Dissipative Systems on the Tangent Bundles of Two-Dimensional Manifolds	
<i>M. V. Shamolin</i>	89
<hr/>	
CONTROL THEORY	
Trajectory of an Observer Tracking the Motion of an Object Around a Convex Set in \mathbb{R}^3	
<i>V. I. Berdyshev</i>	95
<hr/>	
For Authors	98
<hr/> <hr/>	

УДК 519.213.7

ОБ УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИНАХ С КОМПЛЕКСНЫМ ИНДЕКСОМ УСТОЙЧИВОСТИ

© 2021 г. И. А. Алексеев^{1,*}

Представлено академиком РАН И.А. Ибрагимовым 30.08.2021 г.

Поступило 31.08.2021 г.

После доработки 18.09.2021 г.

Принято к публикации 22.09.2021 г.

В работе строятся комплекснозначные случайные величины, удовлетворяющие обычному условию устойчивости, но для комплексного индекса устойчивости α , удовлетворяющего условиям $|\alpha - 1| < 1$, $|\alpha - \frac{1}{2}| \neq \frac{1}{2}$. Находится вид характеристических функций построенных случайных величин и формулируются предельные теоремы для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин.

Ключевые слова: устойчивые распределения, безгранично делимые распределения, предельные теоремы

DOI: 10.31857/S2686954321060023

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена построению аналогов α -устойчивых случайных величин, отвечающих комплексным значениям α , удовлетворяющих условиям $|\alpha - 1| < 1$, $|\alpha - \frac{1}{2}| \neq \frac{1}{2}$.

Построенные α -устойчивые случайные величины будут комплекснозначными, стандартным образом мы будем отождествлять их с двумерными случайными векторами. Данные α -устойчивые величины будут обладать обычным свойством алгебраической устойчивости по отношению к комплексному параметру α .

Напомним, что для вещественных α случайная величина ξ называется α -устойчивой, если для всех $b_1, b_2 > 0$ существуют константы $b > 0$ и $a \in \mathbb{R}$ такие, что $b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 \stackrel{d}{=} b \xi + a$ (здесь и далее символом $\stackrel{d}{=}$ будем обозначать совпадение по распределению), где ξ_1, ξ_2 — независимые копии ξ . Если $a = 0$, то распределения называются строго устойчивым. Параметры b_1, b_2, b при этом связаны соотношением

$$b_1^\alpha + b_2^\alpha = b^\alpha.$$

Классические одномерные устойчивые распределения хорошо изучены (см. например, [3, 4, 11]).

Известно, что характеристическая функция одномерного устойчивого распределения имеет следующий вид

$$\mathbb{E} e^{ip\xi} = \exp\{ipa - C|p|^\alpha(1 - i\beta \operatorname{sgn}(p)\alpha(p, \alpha))\}, \quad (1)$$
$$p \in \mathbb{R},$$

где $a \in \mathbb{R}$, $C \geq 0$, $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq 1$,

$$\operatorname{sgn}(p) = \begin{cases} \frac{p}{|p|}, & p \neq 0; \\ 0, & p = 0 \end{cases}, \quad \alpha(p, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}, & \alpha \neq 1; \\ -\frac{2}{\pi} \log|p|, & \alpha = 1. \end{cases}$$

При $\alpha \neq 1$ в случае строгой устойчивости $a = 0$.

Классические α -устойчивые распределения определены только для значений $\alpha \in (0, 2]$. Обобщение на другие значения α требует привлечения новых идей. В частности, А.М. Вершиком с соавторами и М.А. Лифшицем (см. [1, 6]) были построены α -устойчивые распределения для $\alpha = 0$. В работах [8, 13] были построены невероятные аналоги α -устойчивых распределений для случаев $\alpha \in (2, 4) \cup (4, 6)$. Затем в работе М.В. Платоновой [7] этот метод был обобщен на случай $\alpha > 2$. При помощи построенных α -устойчивых распределений были получены вероятностные представления решений задачи Коши для эволюционных уравнений с оператором Римана–Лиувилля.

¹ Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия
*E-mail: vanyalexeev@list.ru

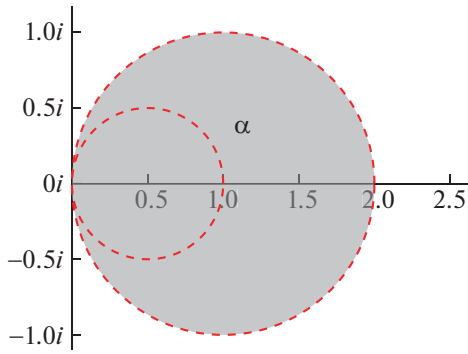


Рис. 1.

Вероятностные аналоги α -устойчивых распределений существуют только в многомерном пространстве. Так, например, в [12] устойчивыми векторами называются все случайные векторы, которые являются пределами для сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов с матричной нормировкой и векторным центрированием. В [10] такие распределения называются операторно-устойчивыми. В [9] рассматриваются случайные поля, где каждое конечномерное распределение является операторно-устойчивым.

В настоящей работе будут построены комплекснозначные α -устойчивые случайные величины, отвечающие комплексным значениям α , удовлетворяющим условиям

$$|\alpha - 1| < 1, \quad \left| \alpha - \frac{1}{2} \right| \neq \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Построенные комплексные величины, интерпретируемые как двумерные векторы, с одной стороны, будут операторно-устойчивыми, но с другой стороны, не будут являться двумерными α -устойчивыми векторами ни для каких вещественных α .

Мы ограничимся построением строго устойчивых случайных величин, не строго устойчивые случайные величины получают сдвигом на комплексную константу. Для простоты строго устойчивые случайные величины ниже будем называть просто устойчивыми.

На комплексной плоскости рассматриваемые нами значения α лежат в круге, изображенном на рис. 1.

Определим множества B_1 , B_2 как

$$B_1 = \left\{ \alpha: \left| \alpha - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \right\}, \quad B_2 = \{ \alpha: |\alpha - 1| < 1 \}.$$

Рассматриваемое нами множество значений комплексной величины α есть $B_2 \setminus \partial B_1$.

Пусть $\alpha \in B_2 \setminus \partial B_1$. Введем следующие параметры:

$$a = \operatorname{Re} \alpha^{-1}; \quad b = \operatorname{Im} \alpha^{-1}; \quad \varrho = \frac{1}{a}; \quad \gamma = \frac{b}{a}. \quad (3)$$

Параметр ϱ будем называть параметром устойчивости, параметр γ – параметром комплексности. Для вещественных α имеем

$$\varrho = \alpha, \quad \gamma = 0. \quad (4)$$

Нетрудно показать, что

$\alpha \in B_1$ тогда и только тогда, когда $\varrho \in (0, 1)$;

$\alpha \in B_2 \setminus \bar{B}_1$ тогда и только тогда, когда $\varrho \in (1, 2)$.

С учетом (4) случай $\alpha \in B_1$ обобщает вещественный случай $\alpha \in (0, 1)$, а случай $\alpha \in B_2 \setminus \bar{B}_1$ обобщает вещественный случай $\alpha \in (1, 2)$. В данной работе мы не рассматриваем обобщение распределения Коши ($\alpha \in \partial B_1$), это предмет последующих работ.

Поясним здесь основную идею построения устойчивых случайных величин, соответствующих комплексным α . Для простоты ограничимся здесь аналогами односторонних устойчивых величин для случая $\alpha \in (0, 1)$.

Хорошо известно, что устойчивые величины могут быть заданы стохастическим интегралом по пуассоновской случайной мере (см., например, [11]). Напомним, что если Y – пуассоновское случайное поле с некоторой мерой интенсивности $\mu(dy)$ (см., например, [5]), то ему отвечает пуассоновская случайная мера, задаваемая формулой $\nu(A) = \operatorname{card}(X \cap A)$. При этом,

$$\mathbb{E} \nu(A) = \mu(A).$$

Для задания односторонних устойчивых случайных величин обычно используется пуассоновское случайное поле Y и отвечающая ему пуассоновская случайная мера $\nu_1(dy)$ на $(0, \infty)$ с мерой интенсивности $\mu_1(dy) = \frac{dy}{y^{1+\alpha}}$. Известно, что α -устойчивая слу-

чайная величина с параметрами $C = \cos\left(\pi \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma(-\alpha)$, $a = 0$, и $\beta = 1$ задается следующим стохастическим интегралом (см., например, [11]):

$$\xi_1 = \int_0^{\infty} y \nu_1(dy) = \sum_{y \in Y} y. \quad (5)$$

Рассмотрим отображение $y = x^{-1/\alpha}$. По теореме об отображении (см. [5], с. 33), множество $X = \{y^{-\alpha}: y \in Y\}$ является пуассоновским полем с мерой интенсивности $\mathbb{E} \nu(dx) = \frac{1}{\alpha} dx$, где ν – отвечающая полю X пуассоновская случайная мера. Делая замену переменной, получаем

$$\int_0^{\infty} y \nu_1(dy) \stackrel{d}{=} \int_0^{\infty} x^{-1/\alpha} \nu(dx).$$

Так как устойчивые случайные величины при умножении на вещественную константу остаются устойчивыми, то одностороннюю α -устойчивую случайную величину можно задавать следующим стохастическим интегралом:

$$\xi = \int_0^\infty x^{-1/\alpha} v(dx) = \sum_{x \in X} x^{-1/\alpha}, \quad (6)$$

где X – пуассоновское поле на $(0, \infty)$ с мерой интенсивности $\mathbb{E}v(dx) = dx$. Здесь v – отвечающая полю X пуассоновская случайная мера.

Рассмотрим теперь комплексное число α , удовлетворяющее (2). В этом случае α -устойчивую случайную величину будем определять как стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере. Для определения устойчивой случайной величины формула (5) не подходит (мера интенсивности не может быть комплексной), поэтому вместо нее мы будем использовать формулу (6). При этом, с точностью до мультипликативной константы случайная величина, определенная (6), по распределению совпадает со следующим стохастическим интегралом:

$$\xi_1 = \int_0^\infty x e^{i\gamma \ln x} v(dx) = \sum_{x \in X_1} x e^{i\gamma \ln x}, \quad (7)$$

где X_1 – пуассоновское поле на $(0, \infty)$ с мерой интенсивности

$$\mu(dx) = \frac{dx}{x^{1+\varrho}}.$$

В случае $\alpha \in B_1$ представление (7) задает комплексную случайную величину, которую будем одновременно интерпретировать и как двумерный случайный вектор. Для оставшихся α , как и в вещественном случае, α -устойчивая случайная величина будет задаваться как предел в L_2 центрированных случайных величин. Такая случайная величина является комплексным аналогом односторонней случайной величины. С использованием этих соображений ниже будут определены аналоги неодносторонних устойчивых случайных величин, как и в вещественном случае, зависящих от параметров $c_- \geq 0, c_+ \geq 0, c_- + c_+ > 0$. Распределение α -устойчивых случайных величин будет двумерным безгранично делимым, с мерой Леви, сосредоточенной на объединении двух логарифмических спиралей

$$\Gamma_+ = \{x^{1+i\gamma}; x > 0\} = \{x e^{i\gamma \ln x}; x > 0\}$$

и $\Gamma_- = -\Gamma_+$.

Отметим, что Γ_+ – логарифмическая спираль, определяемая в полярных координатах следующим уравнением:

$$\gamma \ln r = \varphi.$$

Кривые Γ_+, Γ_- обладают свойством замкнутости относительно умножения на элементы Γ_+ . Кроме того, важную роль играет следующее соотношение:

$$dS = \sqrt{1 + \gamma^2} dx,$$

где dS – дифференциал дуги кривой. То есть, с точностью до мультипликативной константы, x является натуральным параметром.

В вещественном случае эти кривые вырождаются в положительную и отрицательную полуоси соответственно.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ α -УСТОЙЧИВОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Рассмотрим α , удовлетворяющие условию (2). Для $\alpha \in B_1$ дадим следующее определение.

Определение 1. Устойчивой случайной величиной с комплексным индексом устойчивости $\alpha \in B_1$ и параметрами $c_- \geq 0, c_+ \geq 0, c_- + c_+ > 0$ будем называть комплексную случайную величину $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, задаваемую как стохастический интеграл

$$\xi = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} x e^{i\gamma \ln|x|} v(dx), \quad (8)$$

по пуассоновской случайной мере v с интенсивностью вида

$$\mathbb{E}v(dx) = \mu(dx) = \begin{cases} \frac{c_- dx}{|x|^{1+\varrho}}, & x < 0; \\ \frac{c_+ dx}{x^{1+\varrho}}, & x > 0, \end{cases} \quad (9)$$

(параметры γ, ϱ определены в (3)).

Так как для $\alpha \in B_1$ выполнено $\varrho \in (0, 1)$, то интеграл (8) сходится абсолютно с вероятностью единица.

Для $\alpha \in B_2 \setminus \bar{B}_1$ (т.е. $\varrho \in (1, 2)$), как и в вещественном случае, вместо пуассоновской случайной меры v используется соответствующая центрированная мера

$$\tilde{v} = v - \mathbb{E}v.$$

Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим комплексную случайную величину

$$\xi_\varepsilon = \int_{\varepsilon < |x| < 1} x e^{i\gamma \ln|x|} \tilde{v}(dx). \quad (10)$$

Лемма 1. Пусть $\varrho \in (1, 2)$. Тогда у семейства случайных величин ξ_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ существует предел в $L_2(\Omega)$.

С учетом леммы 1, для случая $\alpha \in B_2 \setminus \bar{B}_1$ (т.е. $\varrho \in (1, 2)$) дадим следующее определение.

Определение 2. Устойчивой случайной величиной с комплексным индексом устойчивости $\alpha \in B_2 \setminus \bar{B}_1$ и параметрами $c_- \geq 0$, $c_+ \geq 0$, $c_- + c_+ > 0$ будем называть комплексную случайную величину $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, задаваемую как предел в $L_2(\Omega)$ следующих случайных величин:

$$\xi = (L_2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \xi_\varepsilon + \int_{|x|>1} x e^{i\gamma \ln|x|} \check{\nu}(dx), \quad (11)$$

где ξ_ε определена в (10).

Введенные комплексные случайные величины будем одновременно рассматривать как двумерные. Найдем характеристическую функцию соответствующего двумерного вектора.

Теорема 1. Пусть $\alpha \in B_2 \setminus \partial B_1$. Тогда справедлива формула

$$\text{Ln}H(p_1, p_2) = \text{Ln} \mathbb{E} e^{i(p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2)} = r^\alpha \Phi(\varphi + \gamma \ln r), \quad (12)$$

где $(p_1, p_2) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, Ln – логарифм, определенный по непрерывности с условием $\text{Ln}H(0, 0) = 0$, и

1. Если $\varrho \in (0, 1)$, то

$$\Phi(\theta) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (e^{i \cos(\theta - \gamma \ln|y|)y} - 1) \mu(dy), \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (13)$$

2. Если $\varrho \in (1, 2)$, то

$$\Phi(\theta) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (e^{i \cos(\theta - \gamma \ln|y|)y} - 1 - i \cos(\theta - \gamma \ln|y|)y) \mu(dy), \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $p_1 + ip_2 = d^{1/\bar{\alpha}} e^{i\theta}$. Тогда

$$\text{Ln}H(p_1, p_2) = d \cdot \Phi(\theta).$$

Лемма 2 показывает, что в некотором смысле логарифм характеристической функции является возведением в степень $\bar{\alpha}$, что соответствует вещественному случаю.

Следующее утверждение показывает, что построенный случайный вектор является безгранично делимым и дает выражение для его меры Леви.

Теорема 2. Пусть комплексный параметр $\alpha \in B_2 \setminus \partial B_1$. Пусть $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ – соответствующая α -устойчивая случайная величина. Тогда случайный вектор $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ является безгранично делимым с мерой Леви, равной

$$\check{\nu}(dy_1, dy_2) = d|\alpha| \begin{cases} \frac{c_- d S_y}{|y|^{1+\varrho}}, & y \in \Gamma_-; \\ \frac{c_+ d S_y}{|y|^{1+\varrho}}, & y \in \Gamma_+, \end{cases}$$

где S_y – длина дуги на кривых Γ_+ , Γ_- .

3. СВОЙСТВО АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Покажем, что для полученных α -устойчивых случайных величин выполнено обычное условие алгебраической устойчивости.

Теорема 3. Пусть ξ – комплексная α -устойчивая случайная величина, ξ_1, ξ_2 – независимые копии ξ . Тогда

$$d_1 e^{i\gamma \ln d_1 \xi_1} + d_2 e^{i\gamma \ln d_2 \xi_2} = d e^{i\gamma \ln d \xi} \quad (15)$$

тогда и только тогда, когда $d_1^\alpha + d_2^\alpha = d^\alpha$,

где $d_1, d_2, d > 0$.

Из теоремы 3 вытекает следующее

Следствие 1. Пусть ξ – комплексная α -устойчивая случайная величина, ξ_1, ξ_2 – независимые копии ξ и пусть комплексные числа A, B лежат на логарифмической спирали Γ_+ . Тогда существует $C \in \Gamma_+$ такое, что

$$A \xi_1 + B \xi_2 = C \xi,$$

причем

$$A^\alpha + B^\alpha = C^\alpha.$$

Посмотрим, как будет выглядеть условие устойчивости в матричных терминах.

Зафиксируем параметр комплексности $\gamma \neq 0$. Для $d > 0$ через $M_\gamma(d)$ обозначим матрицу

$$M_\gamma(d) = d \begin{pmatrix} \cos(\gamma \ln d) & -\sin(\gamma \ln d) \\ \sin(\gamma \ln d) & \cos(\gamma \ln d) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Заметим, что

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = M_\gamma(d) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{тогда и только тогда,} \quad (17)$$

когда $y_1 + iy_2 = d^{1+i\gamma}(x_1 + ix_2)$.

Из (17) немедленно следует, что для любых $d_1, d_2 > 0$

$$M_\gamma(d_1) M_\gamma(d_2) = M_\gamma(d_1 d_2). \quad (18)$$

Через \mathcal{M}_γ обозначим множество матриц 2×2

$$\mathcal{M}_\gamma = \{M_\gamma(d): d > 0\}.$$

Из (18) вытекает, что отображение $d \mapsto M_\gamma(d)$ есть гомоморфизм групп. Значит M_γ – группа по умножению, изоморфная группе положительных чисел по умножению.

Отметим, что для любого $d > 0$ матрица $M_\gamma(d)$ постоянным множителем отличается от унитарной матрицы и, значит, для нее корректно определено возведение в степень (см., например, [2]). Для унитарных матриц возведение в вещественную степень означает возведение собственных чисел в данную степень. Пользуясь этим соображением, получим, что матрица $M_\gamma^\alpha(d)$ соответствует умножению на комплексное число:

$$(d^{1+i\gamma})^\alpha = d^{\alpha(a+ib)\alpha} = d^\alpha,$$

что означает, что матрица $M_\gamma^\alpha(d)$ есть диагональная матрица вида

$$M_\gamma^\alpha(d) = \begin{pmatrix} d^\alpha & 0 \\ 0 & d^\alpha \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Следующее утверждение также вытекает из теоремы 3.

Следствие 2. Пусть ξ – α -устойчивый двумерный случайный вектор, $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$ – независимые копии ξ и пусть матрицы $M_1, M_2 \in M_\gamma$. Тогда существует $M \in M_\gamma$ такая, что

$$M_1 \xi^{(1)} + M_2 \xi^{(2)} \stackrel{d}{=} M \xi,$$

причем

$$M_1^\alpha + M_2^\alpha = M^\alpha.$$

Как и для вещественных случайных величин, можно выразить условие устойчивости в следующей форме.

Теорема 4. Для любых $\alpha \in B_2 \setminus \partial B_1$ и $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{k=1}^n \xi_k \stackrel{d}{=} \xi, \quad (20)$$

где ξ_k – независимые копии α -устойчивой случайной величины ξ .

Отметим, что теорема 4 не может быть верна для $\alpha \notin \bar{B}_2$. В этом случае гауссовская компонента обязана равняться нулевой матрице, а мера Леви должна иметь асимптотику в нуле вида

$$\nu(dx_1, dx_2) \sim \frac{C}{|x|^{1+\varrho}} dx_1 dx_2,$$

где $\varrho > 2$.

Так как $\varrho > 2$, то

$$\int_{0 < |x| < \delta} |x|^2 \nu(dx_1, dx_2) = \infty \quad \text{для всех } \delta > 0,$$

что означает, что ν не может быть мерой Леви.

4. ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ – последовательность независимых одинаково распределенных вещественных случайных величин. Через \mathcal{P} обозначим распределение случайной величины X_1 , а через $F(x)$ – соответствующую функцию распределения. Предположим, что для некоторого $\varrho \in (0, 1) \cup (1, 2)$ распределение случайной величины X_1 удовлетворяет следующим двум условиям:

$$(i) \quad F(x) = \frac{c_- + o(1)}{\varrho |x|^\varrho} h(x), \quad x < 0;$$

$$(ii) \quad 1 - F(x) = \frac{c_+ + o(1)}{\varrho x^\varrho} h(x), \quad x > 0;$$

где $h(x)$ является медленно меняющейся на бесконечности функцией, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(cx)}{h(x)} = 1 \quad \text{для всех } c > 0.$$

Выберем параметр $\gamma \in \mathbb{R}$. Для каждого натурального n определим случайную величину ζ_n , полагая

$$\zeta_n = \frac{1}{B_n} e^{-i\gamma \ln B_n} \sum_{k=1}^n X_k e^{i\gamma \ln |X_k|}, \quad (21)$$

где $B_n > 0, B_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Справедлива следующая предельная

Теорема 5. Пусть распределение (X_k) удовлетворяет условиям (i)–(ii). Тогда существует такая последовательность B_n , что случайная величина ζ_n , определенная равенством (21), слабо сходится к ξ , где ξ – α -устойчивая случайная величина с параметрами $\varrho, \gamma, c_-, c_+$.

Теорема 5 показывает, что двумерное распределение $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ является операторно-устойчивым.

При этом, экспонента вероятностной меры (см., например, [10]) равна

$$E = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность Н.В. Смородиной за внимание и поддержку в работе и рецензенту за полезные замечания и помощь в доработке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вершик А.М., Гельфанд И.М., Граев М.И. Коммутативная модель представления группы токов $SL(2, \mathbb{R})^X$, связанная с унитарной подгруппой // Функциональный анализ и его приложения. 1983. Т. 17. С. 70–72.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966.
3. Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983.
4. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.
5. Кингман Дж. Пуассоновские процессы. М.: Издательство МЦНМО, 2007.
6. Лифшиц М.А. Инвариантные меры, порождаемые случайными полями с независимыми значениями // Функциональный анализ и его приложения. 1985. Т. 19. С. 92–93.
7. Платонова М.В. Симметричные α -устойчивые распределения с нецелым $\alpha > 2$ и связанные с ними стохастические процессы // Записки научных семинаров ПОМИ. 2015. Т. 442. С. 101–117.
8. Смородина Н.В., Фаддеев М.М. Теоремы о сходимости распределений стохастических интегралов к знакопеременным мерам и локальные предельные теоремы для больших уклонений // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2009. Т. 368. С. 201–228.
9. Kremer D., Scheffler H.-P. Multi operator-stable random measures and fields // Stochastic Models. 2019. V. 35 (4). P. 429–468.
10. Meerschaert M.M., Scheffler H.-P. Limit distributions for sums of independent random vectors: heavy tails in theory and practice. N.Y.: Wiley, 2001.
11. Sato K. Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
12. Sharpe M. Operator-Stable probability distributions on vector groups // Transactions of the American Mathematical Society. 1969. V. 136. P. 51–65.
13. Smorodina N.V., Faddeev M.M. The Levy–Khinchin representation of the one class of signed stable measures and some its applications // Acta applicandae mathematicae. 2010. V. 110. P. 1289–1308.

ON STABLE RANDOM VARIABLES WITH THE COMPLEX STABILITY INDEX

I. A. Alexeev^a

^a *St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences,
Saint-Petersburg, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS I.A. Ibragimov

In this paper, we construct complex-valued random variables that satisfy the usual stability condition, but for a complex stability index α that satisfies the conditions $|\alpha - 1| < 1$, $\left| \alpha - \frac{1}{2} \right| \neq \frac{1}{2}$. The form of characteristic functions of constructed random variables is found and limit theorems for sums of independent identically distributed random variables are formulated.

Keywords: stable distributions, infinity divisible distributions, limit theorems

УДК 517.955

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВЕРОЯТНОСТНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА С МАТРИЦЕЙ ДИФФУЗИИ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕЙ УСЛОВИЮ ДИНИ

© 2021 г. В. И. Богачев^{1,2,3,4,*}, С. В. Шапошников^{1,2,4,**}

Представлено академиком РАН Д.В. Трещевым 24.06.2021 г.

Поступило 25.06.2021 г.

После доработки 25.06.2021 г.

Принято к публикации 22.07.2021 г.

В этом сообщении мы исследуем стационарное уравнение Колмогорова и доказываем, что в случае, когда матрица диффузии удовлетворяет условию Дини, а коэффициент сноса локально интегрируем в степени выше размерности, отношение двух вероятностных решений входит в класс Соболева, а при наличии функции Ляпунова или глобальной интегрируемости коэффициентов относительно решения вероятностное решение единственно.

Ключевые слова: уравнение Колмогорова, стационарное решение, единственность вероятностного решения

DOI: 10.31857/S2686954321060047

В этом сообщении мы исследуем стационарное уравнение Колмогорова

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} (a^{ij} \varrho) - \partial_{x_i} (b^i \varrho) = 0 \quad (1)$$

на \mathbb{R}^d и доказываем, что в случае, когда матрица диффузии удовлетворяет условию Дини, а коэффициент сноса локально интегрируем в степени выше размерности, отношение двух вероятностных решений входит в класс Соболева, а при наличии функции Ляпунова или глобальной интегрируемости коэффициентов относительно решения вероятностное решение единственно.

Предположим, что коэффициенты удовлетворяют следующим условиям.

(H_a) Матрица $A(x) = (a^{ij}(x))_{i,j \leq d}$ симметрична и положительно определена, причем для всякого шара $B \subset \mathbb{R}^d$ есть такая возрастающая непрерывная функция ω_B на $[0, +\infty)$, что $\omega(0) = 0$ и

$$\|A(x) - A(y)\| \leq \omega(|x - y|), \quad \int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty.$$

Кроме того, для каждого шара B есть такое число $v_B > 0$, что

$$v_B \cdot I \leq A(x) \leq v_B^{-1} \cdot I \quad \forall x \in B,$$

где I – единичный оператор.

(H_b) Для всякого шара B есть такое число $p = p(B) > d$, что $|b| \in L^p(B)$.

Матричный след обозначим через tr и положим

$$Lu = \text{tr}(A \nabla^2 u) + \langle b, \nabla u \rangle,$$

где $\nabla u = (\partial_{x_i} u)_{i \leq d}$, $\nabla^2 u = (\partial_{x_i} \partial_{x_j} u)_{i,j \leq d}$. Функция $\varrho \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ является решением уравнения (1), если

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varrho(x) L\varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Решение ϱ называется вероятностным, если $\varrho \geq 0$ и интеграл от ϱ равен 1. Через $W^{p,1}(B)$ и $W^{p,2}(B)$ обозначим классы Соболева на открытом шаре B , состоящие из функций, лежащих в $L^p(B)$ вместе с обобщенными частными производными первого и второго порядка соответственно, наделенные их стандартными соболевскими нормами. Через $W_0^{p,1}(B)$ обозначим замыкание $C_0^\infty(B)$ в $W^{p,1}(B)$.

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

² Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

³ Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, Москва, Россия

⁴ Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*E-mail: vibogach@mail.ru

**E-mail: starticle@mail.ru

Проблеме единственности вероятностного решения посвящены, в частности, работы [1–3]. В них предполагается, что функции a^{ij} входят в локальный класс Соболева $W_{loc}^{p,1}(\mathbb{R}^d)$ с некоторым $p > d$. Это условие существенно используется при обосновании единственности. Благодаря ему удается применить неравенство Харнака для решений дивергентных уравнений и получить положительность непрерывной версии вероятностного решения. Доказательство единственности в цитированных работах основано на рассмотрении функции v , равной отношению двух вероятностных решений σ и ρ , и анализе дивергентного эллиптического уравнения

$$\operatorname{div}(\rho A \nabla v - h v) = 0, \quad h^i = b^i \rho - \partial_{x_j}(a^{ij} \rho),$$

которому удовлетворяет v . Ключевым наблюдением является равенство

$$\int \rho |\sqrt{A} \nabla v|^2 f''(v) \psi dx = \int \rho f(v) L \psi dx,$$

где $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ и $f \in C^2([0, +\infty))$. Здесь существенно используется соболевость элементов матрицы A и соболевость функции v . Если матрица A удовлетворяет лишь условию Дини, то приведенные выше рассуждения невозможны. Кроме того, даже в одномерном случае функция ρ может не иметь соболевской производной. Например, так будет, если $b = 0$ и $A = 1/\rho$, причем $\rho > 0$ гёльдерова и недифференцируема. Возникают проблемы с непрерывностью и положительностью вероятностных решений. Полученные в недавних работах [4–6] результаты о регулярности решений дважды дивергентных эллиптических уравнений позволяют работать с вероятностными решениями уравнения Колмогорова, предполагая лишь выполнение условия Дини для A . В настоящей работе мы обобщаем достаточные условия единственности из [3, гл. 4]. Более того, получен интересный новый результат о принадлежности к классу Соболева $W_{loc}^{2,1}(\mathbb{R}^d)$ отношения двух положительных решений уравнения Колмогорова. Напомним, что сами эти решения при наших условиях могут не иметь соболевских производных. Тем самым перенормированные решения могут быть более регулярными, чем исходные решения, что уже отмечалось для отношения функций Грина в работе [7]. Существенную роль ниже играет анализ задачи Дирихле для дважды дивергентного эллиптического уравнения, исследованию которой посвящены работы [6, 8]. Нам потребуется несколько вспомогательных лемм.

Пусть B – открытый единичный шар в \mathbb{R}^d , \bar{B} – его замыкание и $p = p(B) > d$ – показатель интегрируемости из условия (H_b) . Следующее утвер-

ждение известно в случае ограниченных коэффициентов и в случае нулевого сноса (см. [9, 10]), для полноты изложения приведем доказательство.

Лемма 1. *Для всякой функции $f \in L^p(B)$ в $W^{p,2}(B) \cap W_0^{p,1}(B) \cap C^1(\bar{B})$ существует решение уравнения $Lu = f$.*

Доказательство. Пусть $L_A u = \operatorname{tr}(A \nabla^2 u)$. Тогда в силу [9, лемма 9.17] для всякого $u \in W^{p,2}(B) \cap W_0^{p,1}(B)$ верна оценка

$$\|u\|_{W^{p,2}(B)} \leq C_1 \|L_A u\|_{L^p(B)},$$

где C_1 не зависит от u . По теореме вложения $|\nabla u| \in L^\infty(B)$. Тогда

$$\|u\|_{W^{p,2}(B)} \leq C_1 \|Lu\|_{L^p(B)} + C_1 \|b\|_{L^p(B)} \|\nabla u\|_{L^\infty(B)}.$$

При этом верна оценка (см. [11, глава 5])

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B)} \leq C \|u\|_{W^{p,2}(B)}^{d/p} \|\nabla u\|_{L^p(B)}^{1-d/p},$$

из которой с помощью [9, теорема 7.28] выводится неравенство

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B)} \leq \varepsilon \|u\|_{W^{p,2}(B)} + C_2(\varepsilon) \|u\|_{L^\infty(B)}, \quad \varepsilon > 0.$$

По принципу максимума (см. [9, теорема 9.1]) величина $\|u\|_{L^\infty(B)}$ оценивается сверху через $C_3 \|Lu\|_{L^p(B)}$.

Значит, для всех $u \in W^{p,2}(B) \cap W_0^{p,1}(B)$ имеем

$$\|u\|_{W^{p,2}(B)} \leq C_4 \|Lu\|_{L^p(B)}.$$

В силу [9, теорема 9.15] существует единственная функция u из пространства $W^{p,2}(B) \cap W_0^{p,1}(B)$, удовлетворяющая уравнению $L_A u = f$. Теперь стандартным методом продолжения по параметру выводятся существование и единственность решения уравнения $Lu = f$. Из теоремы вложения получаем $u \in C^1(\bar{B})$.

В следующем утверждении мы доказываем единственность решения задачи Дирихле на B для дважды дивергентного уравнения

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j}(a^{ij} u) - \partial_{x_i}(b^i u) = 0, \quad u|_{\partial B} = g, \quad (2)$$

где $g \in C(\partial B)$ и под решением понимается функция $u \in C(\bar{B})$, которая на ∂B совпадает с g и для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(B)$ удовлетворяет равенству

$$\int_B u L \varphi dx = 0.$$

Отметим, что это определение решения отличается от определения в [8] и не включает в интегральное тождество граничные слагаемые.

Лемма 2. *Решение задачи Дирихле (2) единственно.*

Доказательство. Покажем, что в случае $g = 0$ задача Дирихле имеет лишь нулевое решение. Пусть $f \in C_0^\infty(B)$. По лемме 1 существует решение $v \in W^{p,2}(B) \cap W_0^{p,1}(B)$ уравнения

$$\text{tr}(A\nabla^2 v) + \langle b, \nabla v \rangle = f.$$

Положим $r_k = 1 - k^{-1}$. Рассмотрим последовательность таких функций $\zeta_k \in C_0^\infty(B)$, что $\zeta_k(x) = 1$ при $|x| < r_k$, $0 \leq \zeta_k \leq 1$, $|\nabla \zeta_k| \leq C_1 k$ и $\|\nabla^2 \zeta_k\| \leq C_1 k^2$. Имеем

$$0 = \int [u \text{tr}(A\nabla^2(v\zeta_k)) + u \langle b, \nabla(v\zeta_k) \rangle] dx,$$

где правая часть равна

$$\int u f \zeta_k dx + \int u [2 \langle A \nabla v, \nabla \zeta_k \rangle + u v \text{tr}(A \nabla^2 \zeta_k) + u v \langle b, \nabla \zeta_k \rangle] dx.$$

Так как $v \in C^1(\bar{B})$ и $v = 0$ на ∂B , то $|v(x)| \leq C_2 k^{-1}$ при $r_k < |x| < 1$. Заметим, что объем множества $\{x : r_k < |x| < 1\}$ оценивается через $C_3 k^{-1}$. Кроме того, $|\nabla \zeta_k(x)| = 0$ и $\nabla^2 \zeta_k(x) = 0$ при $|x| < r_k$. Следовательно,

$$\left| \int 2u \langle A \nabla v, \nabla \zeta_k \rangle dx \right| \leq 2C(A)C_1C_3 \|\nabla v\|_{L^\infty(B)} \sup_{r_k < |x| < 1} |u(x)|,$$

$$\left| \int u v \text{tr}(A \nabla^2 \zeta_k) dx \right| \leq C(A)C_3C_2C_1 \sup_{r_k < |x| < 1} |u(x)|,$$

$$\left| \int u v \langle b, \nabla \zeta_k \rangle dx \right| \leq C_2C_1 \|b\|_{L^1(B)} \sup_{r_k < |x| < 1} |u(x)|.$$

Таким образом,

$$\left| \int u [2 \langle A \nabla v, \nabla \zeta_k \rangle + u v \text{tr}(A \nabla^2 \zeta_k) + u v \langle b, \nabla \zeta_k \rangle] dx \right| \leq C_4 \sup_{r_k < |x| < 1} |u(x)|,$$

где константа C_4 не зависит от k . При $k \rightarrow \infty$ получаем

$$\int u f dx = 0,$$

из которого следует, что $u = 0$.

В дальнейших рассуждениях важную роль будет играть процедура приближения решения уравнения (1) последовательностью решений аналогичных уравнений, но с гладкими матрицами A . Пусть ϱ – непрерывное решение уравнения (1) на \mathbb{R}^d . Пусть $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\psi \geq 0$, $\psi(x) = 0$ при $|x| > 1$ и $\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 1$. Положим $\psi_k(x) = k^d \psi(kx)$, где $k \in \mathbb{N}$. Пусть

$$A_k = (a_k^{ij}), \quad a_k^{ij} = a^{ij} * \psi_k, \quad \varrho_k = \varrho * \psi_k.$$

Обозначим через B' шар $2B$. Для всех $x, y \in B$ имеем

$$v_{B'} \cdot I \leq A_k(x) \leq v_{B'}^{-1} \cdot I, \\ \|A_k(x) - A_k(y)\| \leq \omega_{B'}(\|x - y\|).$$

Кроме того, равномерно на \bar{B} отображения A_k сходятся к A , а функции ϱ_k сходятся к ϱ . Поскольку уравнение

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} (A_k u) - \partial_{x_i} (b^i u) = 0$$

можно переписать в виде дивергентного эллиптического уравнения, то согласно [3, следствие 1.7.6] задача Дирихле

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} (A_k u) - \partial_{x_i} (b^i u) = 0, \quad u|_{\partial B} = \varrho_k$$

имеет единственное решение $u_k \in W^{p,1}(B)$, которое в силу теоремы вложения принадлежит $C(\bar{B})$.

З а м е ч а н и е 1. Из доказательства [6, теорема 1.8] можно усмотреть, что

$$\max_B |u_k(x)| \leq M, \quad |u_k(x) - u_k(y)| \leq \tilde{\omega}(\|x - y\|),$$

где M и $\tilde{\omega}$ зависят от $d, v_{B'}, \omega_{B'}, \|b\|_{L^p(B)}$, модуля непрерывности ϱ на B' и $\sup_B |\varrho|$, но не зависят от k . Отметим, что аналогичные оценки для шара Q , замыкание которого лежит в B , получены в работах [4, 5].

Л е м м а 3. *Функции u_k равномерно на \bar{B} сходятся к ϱ .*

Доказательство. В силу [6, теорема 1.8] (см. замечание 1) функции u_k равномерно ограничены и равномерно непрерывны на \bar{B} . Следовательно, есть подпоследовательность $\{u_{k_j}\}$, которая сходится равномерно на \bar{B} к функции $u \in C(\bar{B})$. Ясно, что $u = \varrho$ на ∂B . Пусть $\varphi \in C_0^\infty(B)$. Имеем

$$\int [\text{tr}(A_{k_j} \nabla^2 \varphi) + \langle b, \nabla \varphi \rangle] u_{k_j} dx = 0.$$

Полагая $k_j \rightarrow \infty$, получаем аналогичное равенство с A и u вместо A_{k_j} и u_{k_j} . Итак, функция u является решением задачи Дирихле (2) на B с граничным условием $u|_{\partial B} = \varrho$. Другим решением этой задачи является функция ϱ . По лемме 2 имеем $u = \varrho$. Так как предел для всякой сходящейся подпоследовательности $\{u_{k_j}\}$ равен ϱ , то вся последовательность $\{u_k\}$ сходится к ϱ .

Пусть ϱ и σ – вероятностные решения уравнения (1). Согласно [4, теорема 3.1] функции ϱ и σ непрерывны на \mathbb{R}^d . Кроме того, для всякого

шара B есть такое число $C(B) > 0$, что $\varrho(x) > C(B)$ и $\sigma(x) > C(B)$ при $x \in B$. Это следует из неравенства Харнака. Если выполнено условие (H_a) , а b – локально ограниченное векторное поле, то нужное неравенство Харнака доказано в [4, следствие 3.6]. В готовящейся к публикации работе условие локальной ограниченности b заменено на (H_b) .

Положим $v = \frac{\sigma}{\varrho}$. Пусть $f \in C^2([0, +\infty))$ и $f'' \geq 0$.

Теорема 1. *Верно включение $v \in W_{loc}^{2,1}(\mathbb{R}^d)$, причем для всякой неотрицательной функции $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ выполнено неравенство*

$$\int \varrho |\sqrt{A} \nabla v|^2 f''(v) \psi dx \leq \int \varrho f(v) L \psi dx. \quad (3)$$

Доказательство. Пусть $B = B(x_0, r)$ – шар, содержащий носитель функции ψ и $B' = B(x_0, r + 1)$. Как отмечено выше, существует такое число $C(B) > 0$, что $\sigma > C(B)$ и $\varrho > C(B)$ на B . Пусть $\{u_k\}$ и $\{w_k\}$ – построенные перед леммой 3 последовательности решений уравнения

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} (A_k u) - \partial_{x_i} (b^i u) = 0,$$

которые сходятся равномерно на \bar{B} к ϱ и σ соответственно. Можно считать, что $u_k > C(B)/2$ и $w_k > C(B)/2$. Ясно, что функции $v_k = w_k/u_k$ равномерно сходятся к v . Согласно [3, лемма 4.1.4 и замечание 4.1.5] применительно к u_k и w_k для всякой неотрицательной функции $\psi \in C_0^\infty(B)$ выполнено равенство

$$\int u_k |\sqrt{A_k} \nabla v_k|^2 f''(v_k) \psi dx = \int u_k f(v_k) L \psi dx. \quad (4)$$

Пусть $f(t) = t^2$. Тогда

$$2 \int u_k |\sqrt{A_k} \nabla v_k|^2 \psi dx \leq \int |u_k| |v_k|^2 |L \psi| dx.$$

Заметим, что правая часть оценивается некоторой константой $C(\psi)$, которая не зависит от k . Пусть Q – шар, причем $\bar{Q} \subset B$ и $\psi = 1$ на Q . Тогда

$$\int_Q |\nabla v_k|^2 dx \leq C(\psi) v_B^{-1} C(B)^{-1}.$$

Следовательно, существует подпоследовательность $\{v_{k_j}\}$, слабо сходящаяся в $W^{2,1}(Q)$ к некоторой функции v . Таким образом, $v \in W^{2,1}(Q)$. Из-за равномерной сходимости вся последовательность $\{v_k\}$ сходится слабо в $W^{2,1}(Q)$ к v . Пусть теперь ψ – произвольная неотрицательная функция из $C_0^\infty(B)$. Можно считать, что Q содержит но-

ситель ψ . Функции $f''(v_k)$ равномерно на B сходятся к $f''(v)$. Так как

$$|\sqrt{A_k} \nabla v_k|^2 \geq 2 \langle A_k \nabla v_k, \nabla v \rangle - |\sqrt{A_k} \nabla v|^2,$$

то

$$\begin{aligned} & \int u_k |\sqrt{A_k} \nabla v_k|^2 f''(v_k) \psi dx \geq \\ & \geq \int 2u_k \langle A_k \nabla v_k, \nabla v \rangle f''(v_k) \psi dx - \\ & - \int u_k |\sqrt{A_k} \nabla v|^2 f''(v_k) \psi dx. \end{aligned}$$

Используя слабую сходимости v_k в $W^{2,1}(Q)$ и равномерную сходимости $A_k, u_k, v_k, f''(v_k)$ и $f(v_k)$, с учетом (4) при $k \rightarrow \infty$ получаем (3).

З а м е ч а н и е 2. Из доказательства видно, что теорема верна для произвольных положительных решений на области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, при условии, что в определяющее равенство подставляются функции ψ с носителем в Ω . Таким образом, для всяких положительных решений ϱ и σ уравнения Колмогорова на области Ω их отношение σ/ϱ лежит в $W_{loc}^{2,1}(\Omega)$, хотя сами функции ϱ и σ могут не иметь соболевских производных.

Теперь, используя неравенство (3) и дословно повторяя рассуждения из [3, теорема 4.1.6], приходим к нашему основному результату.

Теорема 2. *Пусть ϱ – вероятностное решение уравнения (1) и выполнено одно из следующих условий:*

(i) $(1 + |x|)^{-2} |a^{ij}(x)|, (1 + |x|)^{-1} |b^i(x)| \in L^1(\varrho dx),$

(ii) *найдется функция $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$ с $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = +\infty$ и $LV \leq C_1 + C_2 V$.*

Тогда ϱ – единственное вероятностное решение.

Например, это верно, если коэффициенты оцениваются через $C + C|x|$.

З а м е ч а н и е 3. Условие Дини является значительно более общим по сравнению с включением $a^{ij} \in W_{loc}^{p,1}$, $p > d$, поскольку последнее влечет гёльдеровость решения. Однако нам неизвестно, оптимально ли данное условие единственности. В частности, неизвестен ответ на следующий вопрос.

Пусть $v \cdot I \leq A(x) \leq v^{-1} \cdot I$ для всех x , a^{ij} – непрерывные функции и $b(x) = -x$. Может ли стационарное уравнение Колмогорова с такими коэффициентами иметь несколько вероятностных решений? О неединственности см. [12].

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00432, Московским центром фундаментальной и прикладной математики и Фондом Саймонса.

БЛАГОДАРНОСТИ

Второй автор является победителем конкурса “Молодая математика России” и благодарит ее жюри и спонсоров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богачёв В.И., Рёкнер М., Штаннат В.* // Матем. сб. 2002. Т. 197. № 7. С. 3–36.
2. *Bogachev V.I., Röckner M., Shaposhnikov S.V.* // J. Math. Sci. (New York). 2011. V. 176. № 6. P. 759–773.
3. *Bogachev V.I., Krylov N.V., Röckner M., Shaposhnikov S.V.* Fokker–Planck–Kolmogorov equations. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2015.
4. *Bogachev V.I., Shaposhnikov S.V.* // Annali Matem. 2017. V. 196. P. 1609–1635.
5. *Dong H., Kim S.* // Comm. Partial Differ. Equ. 2017. V. 42. P. 417–435.
6. *Dong H., Escauriaza L., Kim S.* // Math. Ann. 2018. V. 370. P. 447–489.
7. *Bauman P.* // Ark. Mat. 1984. V. 22. P. 153–173.
8. *Escauriaza L., Montaner S.* // Rend. Lincei Mat. Appl. 2017. V. 28. P. 49–63.
9. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
10. *Chiarenza F., Frasca M., Longo P.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 336. P. 841–853.
11. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.
12. *Красовицкий Т.И.* // Докл. РАН. 2019. Т. 487. № 4. С. 361–364.

UNIQUENESS OF A PROBABILITY SOLUTION TO THE KOLMOGOROV EQUATION WITH A DIFFUSION MATRIX SATISFYING DINI’S CONDITION

V. I. Bogachev^{a,b,c,d} and S. V. Shaposhnikov^{a,b,d}

^a*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

^b*National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation*

^c*St.-Tikhon’s Orthodox University, Moscow, Russian Federation*

^d*Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS D.V. Treschev

In this note we study the stationary Kolmogorov equation and prove that in the case where the diffusion matrix satisfies Dini’s condition and the drift coefficient is locally integrable to a power greater than the dimension the ratio of two probability solutions belongs to the Sobolev class, and in the case of existence of a Lyapunov function or the global integrability of the coefficients with respect to the solution a probability solution is unique.

Keywords: Kolmogorov equation, stationary solution, uniqueness of a probability solution

УДК 517.984.5

О СПЕКТРЕ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

© 2021 г. Д. И. Борисов^{1,2,3,*}, А. А. Федотов^{4,**}

Представлено академиком РАН С.В. Кисляковым 30.09.2021 г.

Поступило 30.09.2021 г.

После доработки 18.11.2021 г.

Принято к публикации 18.11.2021 г.

Исследуется оператор \mathcal{A} , действующий в $l^2(\mathbb{Z})$ по формуле $(\mathcal{A}u)_l = u_{l+1} + u_{l-1} + \lambda e^{-2\pi i(\theta + \omega l)} u_l$. Здесь l – целочисленная переменная, а $\lambda > 0$, $\theta \in [0, 1)$ и $\omega \in (0, 1)$ – параметры. При $\omega \notin \mathbb{Q}$ он является простейшим несамосопряженным квазипериодическим оператором. С помощью перенормировочного подхода описана геометрия его спектра, на спектре вычислен показатель Ляпунова, описаны условия, при которых спектр является чисто непрерывным либо дополнительно возникает точечный спектр.

Ключевые слова: квазипериодический оператор, несамосопряженный оператор, показатель Ляпунова, спектр

DOI: 10.31857/S2686954321060059

1. ВВЕДЕНИЕ

Здесь мы исследуем спектральные свойства семейства несамосопряженных разностных операторов Шредингера, действующих в $l^2(\mathbb{Z})$ по формуле

$$(\mathcal{A}_\theta u)_l = u_{l+1} + u_{l-1} + \lambda \exp(-2\pi i(\theta + \omega l)) u_l, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

где $\omega \in (0, 1)$ и $\lambda > 0$ – частота и константа связи – заданные числа, а $\theta \in [0, 1)$ – параметр, индексирующий уравнения семейства. Для краткости мы часто не указываем зависимость оператора от частоты и константы связи.

Если $\omega \notin \mathbb{Q}$, то функция $l \rightarrow e^{2\pi i(\theta + \omega l)}$ – квазипериодическая, и семейство операторов \mathcal{A}_θ – эргодическое (метрически транзитивное), см. [2]. Квазипериодические операторы возникают в различных задачах современной физики и привлекают

интерес математиков благодаря своим богатым и нетривиальным спектральным свойствам и широкому кругу математических инструментов и идей, необходимых для их изучения. Хотя на сегодняшний день накопилось много результатов о спектральных свойствах самосопряженных квазипериодических дифференциальных и разностных операторов, общая теория еще далека от завершения. Ее важной лабораторией всегда было и остается изучение нескольких конкретных моделей, и многие результаты, полученные для них, обобщаются на широкие классы операторов. Пожалуй, главные и наиболее активно изучаемые модели – оператор почти-Матье и мэрилендская модель. Они отличаются от оператора \mathcal{A}_θ заменой в (1) экспоненты на косинус и тангенс соответственно. Их спектральные свойства существенно зависят от арифметических свойств частоты, величины константы связи и значений эргодического параметра. Исследование этих операторов началось около 40 лет назад и активно ведется до сих пор. Среди исследователей – А. Avila, J. Bellissard, В. Буслаев, В. Helffer, С. Житомирская, И. Качковский, И. Красовский, Р. Krikorian, Y. Last, W. Liu, Л. Парновский, Л. Пастур, J. Puig, В. Simon, Я. Синай, J. Sjöstrand и многие другие. Имеющаяся литература очень обширна, и мы упомянем лишь две ставшие классическими книги [1, 2], пару из последних работ [3, 4] и обзор [5], которые помогут заинтересованному читателю войти в проблематику.

¹ Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук, Уфа, Россия

² Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

³ Университет Градца Кралове, Градец Кралове, Чешская Республика

⁴ Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: borisovdi@yandex.ru

**E-mail: a.fedotov@spbu.ru

Оператор \mathcal{A}_θ введен в [7]. Наш интерес к нему связан с тем, что в его случае очень эффективно работают идеи перенормировочного подхода — метода монодромизации, впервые возникшие в работах Буслаева и Федотова при попытке обобщить теорию Блоха–Флоке на периодические разностные операторы на вещественной оси, см. раздел 5.

Свойства несамосопряженных почти периодических операторов мало изучены, наш подход не зависит от самосопряженности, и нам представляется, что спектральные свойства \mathcal{A}_θ — нетривиального почти периодического несамосопряженного оператора — допускают весьма полный детальный анализ, а сам оператор может стать важной моделью.

Как для оператора почти-Матье и мэрилендской модели, свойства \mathcal{A}_θ нетривиально зависят от параметров. Значение $\lambda = 1$ оказывается критическим. Для $\omega \notin \mathbb{Q}$ спектр, вещественный при $\lambda \leq 1$, становится комплексным при $\lambda > 1$. Физики называют этот эффект \mathcal{PT} -фазовым переходом. Значение $\lambda = 1$ оказывается критическим и для природы спектра. Так, точечный спектр возникает лишь при $\lambda > 1$ для “достаточно” иррациональных ω .

В [13] для диофантовых ω спектр описан как множество и показано, что при $\lambda < 1$ он непрерывен, а при $\lambda > 1$ есть плотный точечный спектр. В [8] результат о геометрии спектра был обобщен на все $\omega \notin \mathbb{Q}$. Мы существенно полнее опишем геометрическую структуру спектра и условия на параметры, при которых возникают разные типы спектра.

Эта статья — первый шаг нашего исследования. Дальнейшие планы включают, в частности, эффективное описание (обобщенных) собственных функций.

Мы также обсудим разностный оператор Шрёдингера, действующий в $L_2(\mathbb{R})$ по формуле

$$(\mathcal{B}u)(x) := u(x + \omega) + u(x - \omega) + \lambda e^{-2\pi i x} u(x). \quad (2)$$

Легко видеть, что \mathcal{B} может быть разложен прямым интегралом по θ со слоями \mathcal{A}_θ .

Операторы \mathcal{A}_θ и \mathcal{B} — ограниченные несамосопряженные операторы. Спектр $\sigma(\cdot)$ таких операторов вводится как дополнение в комплексной плоскости к резольвентному множеству. Точечный спектр $\sigma_p(\cdot)$ определяется как множество всех собственных значений, а непрерывный спектр $\sigma_c(\cdot)$ — в терминах характеристических последовательностей (последовательностей Вейля). Для остаточного спектра $\sigma_r(\cdot)$ — оставшейся части спектра — справедлива общая формула [9, Гл. 1, § 1]:

$$\sigma_r(\mathcal{H}) = \overline{\sigma_p(\mathcal{H}^*)} \setminus \sigma_p(\mathcal{H}), \quad (3)$$

где \mathcal{H} — оператор, а черта над множеством означает взятие комплексного сопряжения для всех его элементов.

2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ

Здесь мы обсудим свойства операторов \mathcal{A}_θ и \mathcal{B} , которые нам помогут прокомментировать спектральные результаты. Из свойств прямого интеграла вытекает

$$\text{Л е м м а 1. } \sigma(\mathcal{B}) = \bigcup_{\theta \in (0,1)} \sigma(\mathcal{A}_\theta).$$

Эта лемма связывает спектры как множества.

На пространстве $l^2(\mathbb{Z})$ зададим линейную и антилинейную инволюции \mathcal{P} и \mathcal{T} по правилам:

$$(\mathcal{P}u)_k = u_{-k}, \quad (\mathcal{T}u)_k = \overline{u_k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Теми же символами, но уже на пространстве $L_2(\mathbb{R})$, обозначим операторы, определенные формулами:

$$(\mathcal{P}u)(x) = u(-x), \quad (\mathcal{T}u)(x) = \overline{u(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Л е м м а 2. *Справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\mathcal{B}^* &= \mathcal{B}\mathcal{P}, & \mathcal{T}\mathcal{B}^* &= \mathcal{B}\mathcal{T}, \\ \mathcal{P}\mathcal{A}_\theta^* &= \mathcal{A}_{-\theta}\mathcal{P}, & \mathcal{T}\mathcal{A}_\theta^* &= \mathcal{A}_\theta\mathcal{T}. \end{aligned}$$

С помощью этой леммы легко устанавливаются

С л е д с т в и е 1. $\sigma_r(\mathcal{A}_\theta) = \sigma_r(\mathcal{B}) = \emptyset$ для всех $\theta \in [0,1)$.

С л е д с т в и е 2. *Операторы \mathcal{A}_θ и \mathcal{B} являются \mathcal{PT} -симметричными, т.е.*

$$\mathcal{PT}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{PT}, \quad \mathcal{PT}\mathcal{A}_\theta = \mathcal{A}_\theta\mathcal{PT}. \quad (4)$$

3. ГЕОМЕТРИЯ СПЕКТРА

3.1. Случай иррационального ω

С помощью перенормировочного подхода, сразу для всех $\omega \notin \mathbb{Q}$ и очень естественно доказывается (см. раздел 5)

Т е о р е м а 1. *Пусть $\omega \notin \mathbb{Q}$. Тогда спектр (как множество) оператора \mathcal{A}_θ не зависит от θ . Если при этом $0 < \lambda \leq 1$, то спектр — отрезок вещественной оси,*

$$\sigma(\mathcal{A}_\theta) = \sigma(\mathcal{B}) = [-2, 2], \quad (5)$$

а если $\lambda > 1$, то спектр — эллипс,

$$\sigma(\mathcal{A}_\theta) = \left\{ E \in \mathbb{C} : \frac{(\operatorname{Re} E)^2}{\operatorname{ch}^2 \xi} + \frac{(\operatorname{Im} E)^2}{\operatorname{sh}^2 \xi} = 4 \right\}, \quad (6)$$

$$\xi = \ln \lambda.$$

Заметим, что совпадение спектров \mathcal{A}_θ и \mathcal{B} следует из леммы 1 и из того, что спектр \mathcal{A}_θ не зависит от θ .

То, что спектры либо вещественны, либо симметричны относительно вещественной оси, вытекает из леммы 2.

В условиях теоремы спектр непрерывно зависит от λ . При $\lambda \rightarrow 1 + 0$ эллипс (6) стягивается к отрезку (5).

Наконец, согласно следствию 2, операторы \mathcal{A}_0 и \mathcal{B} являются \mathcal{PT} -симметричными. Понятие \mathcal{PT} -симметрии было введено физиками, см., напр., краткий обзор [10]. Если такой оператор зависит от параметра и при его изменении спектр оператора из вещественного превращается в комплексный, то говорят, что происходит \mathcal{PT} -фазовый переход. Мы наблюдаем это явление при $\lambda = 1$.

3.2. Случай рационального ω

Ниже через Arccos мы будем обозначать ветвь арккосинуса, определенную на комплексной плоскости с разрезами вдоль лучей $(-\infty, -1]$ и $[1, \infty)$ и на их верхних берегах и $[1, \infty)$, аналитическую на разрезанной полуплоскости, отображающую ее на полосу $S = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Re } z < 0\}$ и непрерывную вплоть до берегов разрезов.

В этом разделе мы будем иногда указывать зависимость оператора \mathcal{A}_θ от частоты. Справедлива

Теорема 2. Пусть $\omega = \frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathbb{N}$ – взаимно простые числа. Спектр $\mathcal{A}_\theta(p/q)$ описывается формулами

$$\sigma(\mathcal{A}_\theta(p/q)) = \left\{ 2 \cos \left(s_\theta + \frac{2\pi l}{q} \right), l = 0, 1, \dots, q-1 \right\},$$

$$s_\theta = \frac{1}{q} \text{Arccos} \frac{\lambda^q e^{-2i\pi q \theta} + I}{2}, \quad I = [-2, 2].$$

Пусть $\omega \notin \mathbb{Q}$, а $p, q \in \mathbb{N}$ – взаимно простые числа. Для того чтобы величина $|\omega - p/q|$ была достаточно мала, q должно быть достаточно велико. Теорема 2 позволяет детально асимптотически описать $\sigma(\mathcal{A}_\theta(p/q))$ при $q \rightarrow \infty$, но мы ограничимся несколькими замечаниями.

Спектр $\mathcal{A}_\theta(p/q)$ концентрируется около спектра этого оператора с тем же λ и иррациональной частотой (по теореме 1 при $\omega \notin \mathbb{Q}$ спектр $\mathcal{A}_\theta(\omega)$ от ω и θ не зависит). Пусть $u_\theta = \bigcup_{l=0}^{q-1} \left(s_\theta + \frac{2\pi l}{q} \right)$.

Если $\lambda \leq 1$, то множество u_θ оказывается расположенным в $O(\lambda^{q/2}/q)$ -окрестности отрезка

$[-\pi, 0]$, который отображение $k \mapsto 2 \cos(k)$ переводит в отрезок $[-2, 2]$ – отрезок из (5). При $\theta \notin \{0, 1/2\}$, множество u_θ состоит из гладких кривых, расположенных в полосах $\frac{1}{q}S + \frac{2\pi l}{q}, l = 0, 1, \dots, q-1$, по одной в полосе. При $\theta \in \{0, 1/2\}$ эти кривые становятся частью границ полос.

Если $\lambda > 1$, то множество u_θ расположено в $O(\lambda^{-q}/q)$ -окрестностях точек $2\pi\theta + i \ln \lambda + \frac{2\pi l}{q}, l = 0, 1, \dots, q-1$. В каждой из них u_θ состоит из одного отрезка гладкой кривой. Отображение $k \mapsto 2 \cos(k)$ переводит прямую $\text{Im } k = \ln \lambda$ в эллипс из (6).

При изменении θ от нуля до $1/q$ каждая из упомянутых кривых замечает область, симметричную относительно вещественной оси. Отображение $k \mapsto 2 \cos(k)$ переводит объединение этих областей в область, замыкание которой согласно лемме 1 и является спектром оператора $\mathcal{B}(p/q)$. Спектр является одно-, дву- или $(q+1)$ -связным в зависимости от величины λ^q . Для рациональных и иррациональных ω спектры оператора \mathcal{B} качественно отличаются: если для $\omega \notin \mathbb{Q}$ спектр – либо отрезок прямой, либо эллипс, то для $\omega \in \mathbb{Q}$ он является множеством положительной меры на плоскости. Вид этого множества не зависит от числителя дроби $\omega = p/q$.

На рис. 1 мы последовательно (слева направо сверху вниз) изобразили спектры оператора $\mathcal{B}(p/q)$ с $q = 7$ для $\lambda = 0.1, 0.5, 1.0, 1.2, 1.3$ и 3.0 . Отметим, каждый из рисунков масштабирован соответствующим образом вдоль вертикальной оси, чтобы продемонстрировать форму спектра.

4. ПРИРОДА СПЕКТРА

Здесь мы сначала обсудим спектр оператора \mathcal{A}_θ , а затем поговорим о спектре \mathcal{B} . Для формулировки и обсуждения результатов нам потребуется информация о показателе Ляпунова, играющем важную роль в спектральной теории самосопряженных эргодических операторов.

4.1. Показатель Ляпунова

Сначала, следуя [1, 2], напомним определение и важное свойство показателя Ляпунова. Рассмотрим уравнение

$$u_{l+1} + u_{l-1} + v(\theta + \omega l)u_l = Eu_l, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

где v – ограниченная измеримая 1-периодическая функция. Хотя книги [1, 2] посвящены самосопряженным операторам, определение показателя

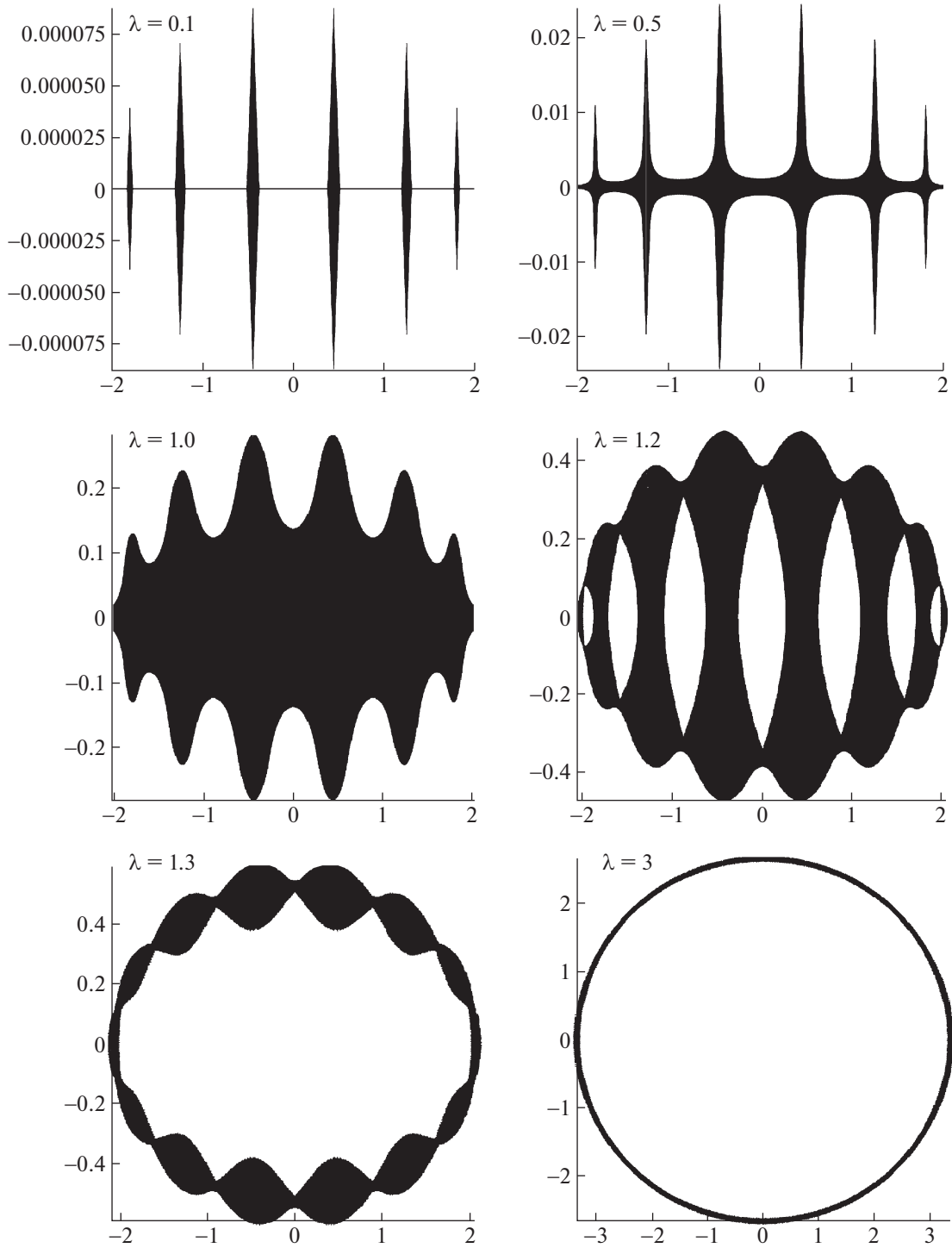


Рис. 1. Спектры оператора \mathfrak{B} .

теля Ляпунова корректно и для комплекснозначных v .

Перепишем (7) в виде

$$U_{l+1} = M(\theta + \omega l)U_l, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (8)$$

где

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} E - v(\theta) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_l = \begin{pmatrix} u_l \\ u_{l-1} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Для каждого $\omega \notin \mathbb{Q}$ для почти всех θ предел

$$\gamma = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \ln \|M(\theta + \omega l) \dots M(\theta + \omega) M(\theta)\| \quad (10)$$

существует и принимает значение, не зависящее от θ . Оно называется значением в точке E показателя Ляпунова для эргодического семейства операторов \mathcal{H}_θ , определенных в $l^2(\mathbb{Z})$ левой частью (7). Показатель Ляпунова меряет скорость роста на бесконечности решений (7).

Из теории Флоке следует, что предел в (10) существует для рациональных ω , но в этом случае он может зависеть от θ . Мы по-прежнему будем называть этот предел показателем Ляпунова.

Вернемся к оператору \mathcal{A}_θ . Нами доказана

Теорема 3. Для $\omega \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$ показатель Ляпунова γ оператора \mathcal{A}_θ на спектре описывается формулой

$$\gamma(E, \omega, \lambda) = \max\{\log \lambda, 0\}. \quad (11)$$

При $\omega \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ показатель Ляпунова на спектре равен нулю. Вне спектра $\gamma > 0$ для всех $\omega \in (0,1)$.

Отметим, что формула (11) совпадает с хорошо известной для оператора почти-Матье [5, Теорема 9.1].

4.2. Непрерывный спектр \mathcal{A}_θ при $0 < \lambda \leq 1$

Теорема 4. При $0 < \lambda \leq 1$ для всех $\omega \in (0,1)$ и $\theta \in [0,1)$ спектр оператора \mathcal{A}_θ непрерывен,

$$\sigma(\mathcal{A}_\theta) = \sigma_c(\mathcal{A}_\theta), \quad \sigma_p(\mathcal{A}_\theta) = \sigma_r(\mathcal{A}_\theta) = \emptyset.$$

Удивительно, но для оператора почти-Матье имеются почти такие же результаты, см. [5, Теоремы 9.1 и 9.5].

Из теорем 3–4 вытекает, что для $\omega \notin \mathbb{Q}$ множество нулей показателя Ляпунова состоит только из непрерывного спектра несамосопряженного оператора \mathcal{A}_θ .

4.3. Точечный спектр \mathcal{A}_θ при $\lambda > 1$

Пусть $\omega \notin \mathbb{Q}$, а $\frac{p_k}{q_k}$, $k \in \mathbb{N}$, – подходящие дроби цепной дроби, изображающей ω , см. [11]. Положим $\beta(\omega) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n}$. Чем меньше $\beta(\omega)$, тем хуже число ω приближается рациональными числами. Ниже γ – показатель Ляпунова на спектре \mathcal{A}_θ .

Теорема 5. Пусть $\lambda > 1$. Если $\omega \in \mathbb{Q}$ или $\beta(\omega) > \gamma$, то спектр оператора \mathcal{A}_θ чисто непрерывен. Если $\beta(\omega) < \gamma$, то есть и точечный спектр.

Похожие результаты хорошо известны для оператора почти-Матье и мэрилендской модели [5].

Фактически, случай, когда возникает точечный спектр, изучен нами лучше. Для описания

результатов, считая, что $\omega \notin \mathbb{Q}$, определим последовательность чисел:

$$\omega_{n+1} = \left\{ \frac{1}{\omega_n} \right\}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \omega_0 = \omega \quad (12)$$

Теорема 6. Пусть $\lambda > 1$, $\omega \notin \mathbb{Q}$, и выполнено условие

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\omega_{n+1}} \exp\left(-\frac{\xi}{\omega_0 \omega_1 \dots \omega_n}\right) < \infty, \quad \xi = \ln \lambda. \quad (13)$$

Тогда для всех $\theta \in [0,1)$ мы имеем $\sigma_c(\mathcal{A}_\theta) = \sigma(\mathcal{A}_\theta)$ и

$$\sigma_p(\mathcal{A}_\theta) = \{E_n = 2 \cos(\theta + i\xi + n\omega), n \in \mathbb{Z}\}.$$

Собственные значения можно описать и формулой

$$E_n = 2(\cos(\theta + n\omega) \operatorname{ch} \xi - i \sin(\theta + n\omega) \xi), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому все E_n принадлежат эллипсу (6).

Обсудим условие (13). Прежде всего отметим, что $\omega_0 \omega_1 \dots \omega_{2m-1} \leq 2^{-m}$ для всех $m \in \mathbb{N}$.

Далее, можно показать, что условие (13) гораздо слабее условия $\beta(\omega) < \gamma(\lambda)$ из теоремы 5. Точнее, при выполнении последнего, ряд в (13) сходится сверхэкспоненциально быстро. С другой стороны, обозначим n -ый член этого ряда через f_n . Если $\omega_0 \omega_1 \dots \omega_n \ln |f_{n+1}| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $\beta(\omega) = \gamma(\lambda)$.

При выполнении условия (13) собственные функции оператора \mathcal{A}_θ можно построить в терминах бесконечного произведения матриц, скорость сходимости которого оказывается не меньше, чем скорость сходимости ряда в (13). Такая конструкция собственных функций для квазипериодических операторов является новой. Мы посвятим ей отдельную работу.

4.4. Спектр оператора \mathcal{B}

Теорема 7. Для всех $\lambda > 0$ и $\omega \in (0,1)$ выполнены равенства: $\sigma_c(\mathcal{B}) = \sigma(\mathcal{B})$ и $\sigma_p(\mathcal{B}) = \sigma_r(\mathcal{B}) = \emptyset$.

Аналогичный результат верен и в самосопряженном случае. При этом для $\omega \notin \mathbb{Q}$ его доказательство использует разложение исследуемого оператора прямым интегралом и непрерывность плотности состояний для операторов-слоев. Но последняя – объект самосопряженной теории.

5. КОРОТКО О МЕТОДАХ

Основной метод работы – метод монодромизации – перенормировочный подход, упомянутый во введении. В рамках него возникает бесконечная цепочка квазипериодических разностных уравнений. По решениям любого из них можно построить решения исходного уравнения. Удиви-

тельное и нетривиальное свойство уравнения Шрёдингера, соответствующего оператору \mathcal{A}_θ , состоит в том, что все уравнения такой цепочки отличаются от исходного лишь значениями параметров [12]. В частности, для n -го уравнения частота равна ω_n из (12), а константа связи равна $\frac{1}{\lambda^{\omega_0 \omega_1 \dots \omega_{n-1}}}$. Это и позволяет эффективно описать геометрию спектра, вычислить показатель Ляпунова на спектре и исследовать точечный спектр. Доказательство теоремы 4 использует оригинальный метод. Доказательство второго утверждения теоремы 5 основано на идеях Гордона, Саймона и Житомирской, см., например, [13, 14]. Доказательство теоремы 7 основано на аккуратном анализе пространства решений разностных уравнений на оси с периодическими коэффициентами.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны Международному математическому институту им. Л. Эйлера и его сотрудникам за гостеприимство и заботу.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Наше исследование было выполнено, когда Д. И. Борисов работал в Международном математическом институте им. Л. Эйлера в рамках программы, поддержанной соглашением 075-15-2019-1620 между Санкт-Петербургским отделением Математического института им. В. А. Стеклова РАН и Министерством образования и науки. Работа А. А. Федотова была под-

держана грантом Российского научного фонда (проект № 17-11-01069).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cycon H.L., Froese R.G., Kirsch W., Simon B. Schrödinger operators with applications to quantum mechanics and global geometry., Berlin: Springer-Verlag, 1987. 329 p.
2. Pastur L., Figotin A. Spectra of random and almost-periodic operators. Berlin: Springer-Verlag, 1992. 587 p.
3. Jitomirskaya S., Yang F. // Ergodic Theory Dynam. Systems, in press (2020).
4. Jitomirskaya S., Konstantinov L., Krasovsky I. // Preprint: arXiv:2007.01005 (2007).
5. Marx C.A., Jitomirskaya S. // Ergod. Theor. Dynam. Syst. 2017. V. 37. № 8. P. 2353–2393.
6. Fedotov A. // St. Petersburg Math. J. 2014. V. 25. № 2. P. 303–325.
7. Sarnak P. // Comm. Math. Phys. 1982. V. 84. No 3. P. 377–401.
8. Boca F.P. // Duke Math. 2000. J. V. 101. № 3. P. 515–528.
9. Глазман И.М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: ГИФМЛ, 1963. 339 с.
10. Bender C.V. // Europhys. News. 2016. V. 47. № 2. P. 17–20.
11. Хинчин А.Я. Цепные дроби. М.: ГИФМЛ, 1978. 112 с.
12. Fedotov A. // J. Math. Sci. 2019. V. 238. № 5. 750–761.
13. Simon B. // Ann. Phys. 1985. V. 159. № 1. P. 157–183.
14. Jitomirskaya S., Liu W. // Comm. Pure Appl. Math. 2017. V. 70. № 6. P. 1025–1051.

ON THE SPECTRUM OF A NON-SELF-ADJOINT QUASIPERIODIC OPERATOR

D. I. Borisov^{a,b,c} and A. A. Fedotov^d

^a Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Center, Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation

^b Bashkir State University, Ufa, Russian Federation

^c Univerzita Hradec Králové, Hradec Králové, Czech Republic

^d St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS S. V. Kislyakov

We study the operator \mathcal{A} acting in $l^2(\mathbb{Z})$ by the formula $(\mathcal{A}u)_l = u_{l+1} + u_{l-1} + \lambda e^{-2\pi i(\theta + \omega l)} u_l$. Here l is an integer variable, while $\lambda > 0$, $\theta \in [0, 1)$ and $\omega \in (0, 1)$ are parameters. For $\omega \notin \mathbb{Q}$, this is the simplest non-self-adjoint quasiperiodic operator. By means of a renormalization approach, we describe the geometry of the spectrum of this operator, compute the Lyapunov exponent on the spectrum and describe the conditions under which either the spectrum is pure continuous or a point spectrum appears additionally.

Keywords: quasiperiodic operator, non-self-adjoint operator, Lyapunov exponent, spectrum

УДК 519.2

ЛОКАЛЬНЫЙ ЗАКОН МАРЧЕНКО–ПАСТУРА ДЛЯ ПРОРЕЖЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ

© 2021 г. Ф. Гётце^{1,*}, Д. А. Тимушев^{2,**}, А.Н. Тихомиров^{2,***}

Представлено академиком РАН И.А. Ибрагимовым 11.08.2021 г.

Поступило 09.09.2021 г.

После доработки 09.09.2021 г.

Принято к публикации 27.10.2021 г.

Рассматриваются прореженные выборочные ковариационные матрицы с вероятностью прореживания $p_n \geq C_0 \log^{\frac{2}{\kappa}} n/n$, для некоторого $\kappa > 0$. В предположении, что распределение элементов матриц имеет конечный абсолютный момент порядка $4 + \delta$, $\delta > 0$, показано, что расстояние между преобразованиями Стилтеса эмпирической спектральной функции распределения и закона Марченко–Пастура имеет порядок $\log n(1/(nv) + 1/(np_n))$, где v – расстояние до действительной оси в комплексной плоскости.

Ключевые слова: распределение Марченко–Пастура, локальный режим, прореженные случайные матрицы, спектр случайной матрицы, преобразование Стилтеса

DOI: 10.31857/S2686954321060060

Рассмотрим серию случайных матриц $\mathbf{X}_{n,m} = \{X_{jk}^{(n,m)}\}$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq m$, элементы которых – независимые одинаково распределенные вещественные случайные величины, определенные на одном и том же вероятностном пространстве. Будем полагать, что $\mathbb{E}X_{jk}^{(n,m)} = 0$ и $\mathbb{E}|X_{jk}^{(n,m)}|^2 = 1$. Назовем выборочной ковариационной матрицей матрицу вида

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{m} \mathbf{X}_{n,m} \mathbf{X}_{n,m}^*$$

Впервые выборочные ковариационные матрицы были рассмотрены в работе Вишарта [1]. В контексте задач многомерного статистического анализа строки матрицы $\mathbf{X}_{n,m}$ представляют собой выборку объема n , состоящую из m -мерных векторов наблюдений. При росте размеров матрицы $\mathbf{X}_{n,m}$ к бесконечности таким образом, что отношение n/m сходится к некоторой константе, эмпирическая спектральная функция распределения матрицы \mathbf{Z} (функция равномерного распределе-

ния на множестве сингулярных чисел) сходится к некоторой неслучайной функции распределения, плотность которой была явно найдена в работе Марченко и Пастура [2]. Факт такой сходимости принято называть законом Марченко–Пастура, а само предельное распределение – распределением Марченко–Пастура.

Важным частным случаем выборочных ковариационных матриц являются так называемые прореженные выборочные ковариационные матрицы (sparse sample covariance matrices). Пусть $\xi_{jk}^{(n,m)}$ – семейство независимых бернуллиевских случайных величин, независимых от $X_{jk}^{(n,m)}$, с $\mathbb{E}\xi_{ij}^{(n,m)} = p_n$. Везде далее мы будем опускать верхний индекс $^{(n,m)}$. Для прореженной матрицы $\mathbf{W} = \{X_{jk} \xi_{jk}\}$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq m$, рассмотрим прореженную выборочную ковариационную матрицу

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{mp_n} \mathbf{W} \mathbf{W}^*$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только параметр n , а про параметр m будем предполагать, что он меняется так, что

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \frac{n}{m} =: y \in (0,1).$$

Особый интерес в моделях с прореженными выборочными ковариационными матрицами представляет случай, когда вероятность прореживания

¹ Билефельдский университет, Билефельд, Германия

² Коми научный центр Уральского отделения Российской академии наук, Сыктывкар, Россия

*E-mail: goetze@math.uni-bielefeld.de

**E-mail: timushev@ipm.komisc.ru

***E-mail: tikhomirov@ipm.komisc.ru

p_n стремится к нулю, с ростом n . В частности, если p_n убывает так, что $np_n \rightarrow \infty$, то для прореженной выборочной ковариационной матрицы остается справедливым упомянутый выше закон Марченко–Пастура.

Прореженные выборочные ковариационные матрицы возникают во многих прикладных задачах, например, при исследовании свойств двудольного случайного графа – графа, вершины которого можно разделить на две группы, в каждой из которых вершины не соединены друг с другом, а наличие ребер – случайно, с некоторой вероятностью p_n .

Прореженные случайные матрицы изучались разными авторами (см. [3–8] и литературу к ним). Поведение сингулярных чисел и собственных векторов прореженных случайных матриц значительно зависит от вероятности прореживания, и это не позволяет простым образом распространить на них результаты, полученные ранее для непрореженного ($p_n = 1$) случая. В частности, непростой задачей является изучение поведения минимального сингулярного числа. Прогресс в решении этой проблемы для случая вигнеровских матриц был достигнут в работе [9].

Обозначим через $s_1^2 \geq s_2^2 \geq \dots \geq s_n^2$ собственные числа матрицы \mathbf{Z} (соответственно, s_1, \dots, s_n – сингулярные числа матрицы $\frac{1}{\sqrt{mp_n}} \mathbf{W}$).

Назовем “симметризацией” некоторой положительной случайной величины η^2 случайную величину $\varepsilon|\eta|$, где ε – независимая от η случайная величина, равновероятно принимающая значения 1 и -1 . Симметризованная эмпирическая спектральная функция распределения матрицы \mathbf{Z} имеет вид

$$F_n(x) = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n (\mathbb{1}\{s_j < x\} + \mathbb{1}\{-s_j < x\})$$

и является спектральной функцией распределения эрмитовой матрицы

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \frac{1}{\sqrt{mp_n}} \mathbf{W} \\ \frac{1}{\sqrt{mp_n}} \mathbf{W}^* & \mathbf{O} \end{bmatrix},$$

где \mathbf{O} – матрица с нулевыми элементами.

Для произвольного $\delta > 0$ определим величину $\kappa = \kappa(\delta) := \frac{\delta}{2(4 + \delta)}$. Мы будем предполагать, что вероятность прореживания p_n и моменты элементов матрицы X_{ij} удовлетворяют ряду условий:

- условие (C0): для некоторого $c_0 > 0$ и всех $n \geq 1$,

$$np_n \geq c_0 \log_{\kappa} n;$$

- условие (C1): для некоторого $\delta > 0$,

$$\mu_{4+\delta} := \mathbb{E}|X_{11}|^{4+\delta} < \infty;$$

- условие (C2): существует такая константа $c_1 > 0$, что для всех $1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m$ выполнено

$$|X_{jk}| \leq c_1 (np_n)^{\frac{1-\kappa}{2}}.$$

Важной задачей в изучении свойств случайной матрицы является оценивание ее наименьшего положительного и наибольшего сингулярных чисел. Подобные задачи решались в ряде работ, посвященных прореженным матрицам. Так, в [6], в предположении $np_n \geq n^\delta$, для сколь угодно малого $\delta > 0$, и $\mathbb{E}|X_{jk}|^q \leq (C_1 q)^{C_2 q}$, для всех $q \geq 3$, показано, что найдутся такие положительные константы $K = K(\delta, C_1, C_2)$, $Q = Q(\delta, C_1, C_2)$ и $C_3 = C_3(\delta, C_1, C_2)$, что выполнено неравенство $\Pr\{s_1 \geq K\} \leq C_3 n^{-Q}$. В работе [7], в предположении субгауссовости элементов матрицы и $np_n \geq C_1 \log n$, получена оценка $\Pr\{s_n \leq n^{-C_2}\} \leq C_3 n^{-Q}$, для некоторых положительных констант $Q = Q(C_1)$, $C_2 = C_2(C_1)$ и $C_3 = C_3(C_1)$. В нашей работе доказаны следующие результаты.

Теорема 1. *Предположим, что условия (C0)–(C2) выполнены. Тогда для любого $Q \geq 1$ найдутся такие положительные константы*

$$K_1 = K_1(Q, \delta, \mu_{4+\delta}, c_0, c_1), K_2 = K_2(Q, \delta, \mu_{4+\delta}, c_0, c_1) \\ \text{и } C_0 = C_0(Q, \delta, \mu_{4+\delta}, c_0, c_1),$$

что

$$\Pr\{s_1 \geq K_1\} \leq C_0 n^{-Q}, \quad \Pr\{s_n \leq K_2\} \leq C_0 n^{-Q}.$$

Рассмотрим преобразование Стилтеса симметризованной эмпирической функции распределения $F_n(x)$:

$$s_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{z}{z^2 - s_j^2}.$$

Преобразование Стилтеса симметризованного распределения Марченко–Пастура имеет вид

$$S_y(z) = \frac{-z + \frac{1-y}{z} + \sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}}{2y},$$

где $a = 1 - \sqrt{y}$, $b = 1 + \sqrt{y}$.

Следуя работам Х.-Ц. Яу, мы будем называть локальным законом Марченко–Пастура равномерную по $z = u + iv$ сходимость

$$|s_n(z) - S_y(z)| \rightarrow 0$$

в области $v \geq n^{-1}\alpha_n$, $u_- \leq |u| \leq u_+$, где α_n “медленно” растёт к бесконечности с ростом n ($\alpha_n \sim \log^\beta n$ или $\alpha_n \ll n^\gamma$, с некоторыми $\beta, \gamma > 0$), а u_- и u_+ – некоторые положительные числа.

Введем обозначения $\Lambda_n(z) := s_n(z) - S_y(z)$, $b(z) = z - \frac{1-y}{z} + 2yS_y(z)$, $x \wedge y = \min\{x, y\}$.

Теорема 2. *Предположим, что условия (C0)–(C2) выполнены. Тогда для любого $Q \geq 1$ существуют такие константы $C_0 = C_0(Q, \delta, \mu_{4+\delta}, c_0, c_1)$, $C_1 = C_1(Q, \delta, \mu_{4+\delta}, c_0, c_1)$, $K = K(Q, \delta, \mu_{4+\delta}, c_0, c_1)$, что для всех $z = u + iv$ из области $(a-v)_+ \leq |u| \leq b+v$ и $v \geq C_1 n^{-1} \log^4 n$ выполнено*

$$\Pr \left\{ |\Lambda_n| \geq K \left(\frac{\text{Im}b(z)}{nv|b(z)|} + \frac{1}{np_n|b(z)|} \right) \right\} \leq C_0 n^{-Q}.$$

Следующий результат относится к $\text{Im}\Lambda_n(z)$.

Теорема 3. *Предположим, что условия (C0)–(C2) выполнены. Тогда для любого $Q \geq 1$ существуют такие константы $C_0 = C_0(Q, \delta, \mu_{4+\delta}, c_0, c_1)$, $C_1 = C_1(Q, \delta, \mu_{4+\delta}, c_0, c_1)$, $C_2 = C_2(Q, \delta, \mu_{4+\delta}, c_0, c_1)$, $K = K(Q, \delta, \mu_{4+\delta}, c_0, c_1)$, что для всех $\alpha, u_0 > 0$ и $z = u + iv$ из области $0 < \alpha \leq |u| \leq u_0$, $v \geq C_1 n^{-1} \log^4 n$ и $|b(z)| \geq C_2/(nv)$ выполнено*

$$\Pr \left\{ |\text{Im}\Lambda_n| \geq K \left(\frac{\text{Im}b(z)}{nv|b(z)|} + \frac{1}{np_n|b(z)|} \right) \right\} \leq C_0 n^{-Q}.$$

Следствие 1. *Обозначим через \mathbf{u}_j собственный вектор матрицы \mathbf{Z} , отвечающий собственному значению s_j^2 . Тогда, в предположениях (C0)–(C2), для любого $Q \geq 1$ найдутся такие константы $C_0 = C_0(Q, \delta, \mu_{4+\delta}, c_0, c_1)$, $C_1 = C_1(Q, \delta, \mu_{4+\delta}, c_0, c_1)$, что*

$$\Pr \left\{ \max_{1 \leq j, k \leq n} |u_{jk}| \leq C_1 \log^2 n / \sqrt{n} \right\} \leq C_0 n^{-Q}.$$

Теорема 5. *Предположим, что выполнены только условия (C0) и (C1). Тогда для любого $0 < \gamma < \frac{b-a}{2}$ существуют такие константы $C_0 = C_0(Q, \delta, \mu_{4+\delta}, c_0, \gamma)$, $C_1 = C_1(Q, \delta, \mu_{4+\delta}, c_0, \gamma)$, $C_2 = C_2(Q, \delta, \mu_{4+\delta}, c_0, \gamma)$, что*

$$\Pr \left\{ |\Lambda_n| \leq C_1 \log n \left(\frac{1}{nv} + \frac{1}{np_n} \right) \right\} \geq 1 - \frac{C_0 \log n}{np_n},$$

для всех $z = u + iv$ из области $v \geq C_2 n^{-1} \log^4 n$, $a + \gamma \leq |u| \leq b - \gamma$.

Замечание 1. В работе [6], в предположении, что моменты элементов матрицы удовлетво-

ряют условию $\mathbb{E}|X_{jk}|^q \leq (C_1 q)^{C_2 q}$, для всех $q \geq 3$, в области $\{z = u + iv: a^2/2 \leq u \leq b^2 + 1, 0 < v < 3\}$ показано, что для несимметризованных преобразований Стильтеса, для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ и произвольного $D > 0$ найдется такая положительная константа $C_3 = C_3(\varepsilon, D, C_1, C_2)$, что для достаточно больших n выполнено неравенство

$$\Pr \left\{ |\Lambda_n| > n^\varepsilon \left(\frac{1}{nv} + \frac{1}{np_n} \right) \right\} \leq C_3 n^{-D}.$$

Следствие 2. *В условиях теоремы 4 найдутся такие константы $C_0 = C_0(Q, \delta, \mu_{4+\delta}, c_0, \gamma)$, $C_1 = C_1(Q, \delta, \mu_{4+\delta}, c_0, \gamma)$, что*

$$\Pr \left\{ \sup_x |F_n(x) - G_y(x)| \leq \frac{C_1 \log n}{np_n} \right\} \geq 1 - \frac{C_0 \log n}{np_n}.$$

Следствие 3. *Предположим, что выполнены условия (C1), (C2) и $np_n \geq c'_0 n^{2/3}$, $c'_0 > 0$. Пусть γ_j , $j = 1, \dots, n$, – квантили порядка $(1 - j/n)$ распределения $G_y(x)$. Тогда для некоторого малого $\alpha > 0$ и $b - \alpha \leq \gamma_j \leq b$, для любого $Q \geq 1$ найдутся такие константы $C_0 = C_0(Q, \delta, \mu_{4+\delta}, c'_0, c_1, \alpha)$, $C_1 = C_1(Q, \delta, \mu_{4+\delta}, c'_0, c_1, \alpha)$, что*

$$\Pr \left\{ |s_j - \gamma_j| \geq C_1 \log n \left(\frac{1}{(j \wedge (n-j))^{1/3} n^{2/3}} + \frac{1}{np_n} \right) \right\} \leq C_0 n^{-Q}.$$

Замечание 2. В работе [6], в предположении, что моменты элементов матрицы удовлетворяют условию $\mathbb{E}|X_{jk}|^q \leq (C_1 q)^{C_2 q}$, для всех $q \geq 3$, при $np_n \geq C_3 n^{2/3}$ показано, что для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ и произвольного $D > 0$ найдется такая положительная константа $C_4 = C_4(\varepsilon, D, C_1, C_2, C_3)$, что для достаточно больших n , при $b - \alpha \leq \gamma_j \leq b$, выполнено неравенство

$$\Pr \left\{ |s_j - \gamma_j| > n^\varepsilon (j^{-1/3} n^{-2/3} + (np_n)^{-1}) \right\} \leq C_4 n^{-D}.$$

Схема доказательства. Для оценки спектральной нормы матрицы $\frac{1}{\sqrt{mp_n}} \mathbf{W}$ используется результат Сегинера [10].

В оценке наименьшего сингулярного числа мы следуем методу Рудельсона и Вершинина (см. [11]), разработанному для прямоугольных матриц, дополняя его рекуррентной процедурой (см. [12]), которая позволяет получить необходимую оценку.

Для доказательства неравенства делокализации используется представление

$$\operatorname{Im} R_{jj} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{v}{|z - s_j|^2} |u_{jk}|^2 = \int \operatorname{Im} \frac{1}{z - x} dF_{nj}(x),$$

где $F_{nj}(x) = \sum_{k=1}^n |u_{jk}|^2 \mathbb{1}\{s_j \leq x\}$. Отсюда, для произвольного $v > 0$, имеем

$$\max_k \{|u_{jk}|^2\} \leq 2v \sup_u \operatorname{Im} R_{jj}(u + iv).$$

Для исследования преобразования Стилтеса прореженной матрицы используется стандартное представление диагональных элементов резольвентной матрицы $\mathbf{R}(z) = (\mathbf{Z} - z\mathbf{I})^{-1}$:

$$R_{jj}(z) = S_y(z)(1 - \varepsilon_j R_{jj}(z) + y\Lambda_n R_{jj}(z)),$$

$$R_{l+n,l+n}(z) = \left(yS_y(z) - \frac{1-y}{z} \right) (1 - \varepsilon_{l+n} R_{l+n,l+n}(z) + y\Lambda_n(z) R_{l+n,l+n}(z)),$$

с некоторыми (см. [13]) поправочными членами ε_j , $j = 1, \dots, n$, и ε_{l+n} , $l = 1, \dots, m$. На первом этапе получаем оценку $\mathbb{E}|R_{jk}|^q \leq C^q$, для некоторого $C > 0$, при $q \sim \log n$. Для этого используется так называемый “метод мультипликативного спуска”, основанный на неравенстве

$$|R_{jj}(u + iv)| \leq s |R_{jj}(u + isv)|, \quad s \geq 1.$$

Для оценки величины Λ_n используется представление $\Lambda_n(z) = T_n(z)/b_n(z)$, где

$$T_n(z) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varepsilon_j R_{jj},$$

$$b_n(z) := z - \frac{1-y}{z} + 2yS_y(z) + y\Lambda_n(z).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wishart J.* The generalised product moment distribution in samples from a normal multivariate population // *Biometrika*. 1928. V. 20A. № 1–2. P. 32–52.
2. *Марченко В.А., Пастур Л.А.* Распределение собственных значений в некоторых ансамблях случайных матриц // *Матем. сб.* 1967. Т. 72. № 4. С. 507–536.
3. *Erdős L., Knowles A., Yau H.-T., Yin J.* Spectral statistics of Erdős–Rényi graphs I: Local semicircle law // *Ann. Probab.* 2013. V. 41. № 3B. P. 2279–2375.
4. *Erdős L., Knowles A., Yau H.-T., Yin J.* Spectral statistics of Erdős–Rényi graphs II: Eigenvalue spacing and the extreme eigenvalues // *Comm. Math. Phys.* 2012. V. 314. № 3. P. 587–640.
5. *Lee J.O., Schnelli K.* Tracy–Widom distribution for the largest eigenvalue of real sample covariance matrices with general population // *Ann. Appl. Probab.* 2016. V. 26. № 6. P. 3786–3839.
6. *Hwang J.Y., Lee J.O., Schnelli K.* Local law and Tracy–Widom limit for sparse sample covariance matrices // *Ann. Appl. Probab.* 2019. V. 29. № 5. P. 3006–3036.
7. *Hwang J.Y., Lee J.O., Yang W.* Local law and Tracy–Widom limit for sparse stochastic block models // *Bernoulli*. 2020. V. 26. № 3. P. 2400–2435.
8. *Lee J.O., Schnelli K.* Local law and Tracy–Widom limit for sparse random matrices // *Probab. Theory Relat. Fields*. 2018. V. 171. P. 543–616.
9. *Tikhomirov K., Youssef P.* Outliers in spectrum of sparse Wigner matrices // *Random Structures and Algorithms*. 2020. V. 58. № 3. P. 517–605.
10. *Seginer Y.* The expected norm of random matrices // *Combinatorics, Probability and Computing*. 2000. V. 9. № 2. P. 149–166.
11. *Rudelson M., Vershynin R.* Smallest singular value of a random rectangular matrix // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 2009. V. 62. № 12. P. 1707–1739.
12. *Götze F., Tikhomirov A.N.* The circular law for random matrices // *Ann. Probab.* 2010. V. 38. № 4. P. 1444–1491.
13. *Götze F., Tikhomirov A.N.* Rate of Convergence of the Expected Spectral Distribution Function to the Marchenko–Pastur Law // *Preprint*. 2014. <https://arxiv.org/abs/1412.6284>.

LOCAL MARCHENKO–PASTUR LAW FOR SPARSE RECTANGULAR RANDOM MATRICES

F. Götze^a, A. N. Tikhomirov^b, and D. A. Timushev^b

^a *Bielefeld University, Bielefeld, Germany*

^b *Komi Science Center of Ural Division of Russian Academy of Sciences, Syktyvkar, Russia*

We consider sparse sample covariance matrices with sparse probability $p_n \geq c_0 \log^\kappa n/n$, with $\kappa > 0$. Assuming that the distribution of matrix elements has a finite absolute moment of order $4 + \delta$, $\delta > 0$, it is shown that the distance between the Stieltjes transforms of the empirical spectral distribution function and the Marchenko–Pastur law is of order $\log n(1/(nv) + 1/(np_n))$, where v is the distance to the real axis in the complex plane.

Keywords: random matrices, sparse matrices, local Marchenko–Pastur law, Stieltjes transform

УДК 519.174519.179.1, 519.179.4

О МАКСИМАЛЬНОМ РАЗРЕЗЕ В СЛУЧАЙНОМ ГИПЕРГРАФЕ

© 2021 г. П. А. Захаров^{1,*}, Д. А. Шабанов^{1,2,3,**}

Представлено академиком РАН А.Н.Ширяевым 11.08.2021 г.

Поступило 11.08.2021 г.

После доработки 17.08.2021 г.

Принято к публикации 08.09.2021 г.

Исследуется задача о нахождении максимального разреза в случайных гиперграфах. Рассматривается классическая биномиальная модель случайного k -однородного гиперграфа $H(n, k, p)$ на n вершинах и вероятностью $p = p(n)$. Основные результаты обобщают ранее известные результаты для случая графов и показывают, что в разреженном случае (когда $p = cn/\binom{n}{k}$ при $c = c(k) > 0$, не зависящем от n) существует такая $\gamma(c, k, q) > 0$, что отношение величины максимального разреза $H(n, k, p)$ к числу вершин сходится к ней по вероятности. Кроме того, получены некоторые оценки величины $\gamma(c, k, q)$.

Ключевые слова: гиперграфы, случайные гиперграфы, разрез гиперграфа, метод интерполяции, задачи оптимизации

DOI: 10.31857/S2686954321060187

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена исследованию задачи о поиске максимального разреза в случайных гиперграфах. Начнем с основных определений.

Гиперграфом H в дискретной математике называется пара (V, E) , где $V = V(H)$ — это некоторое конечное множество, элементы которого мы будем называть вершинами гиперграфа, а $E = E(H)$ — это семейство подмножеств V , которые мы будем называть ребрами гиперграфа. Гиперграф $H = (V, E)$ называется k -однородным, если для любого $e \in E(H)$ выполнено $|e| = k$, т.е. все ребра гиперграфа имеют одну и ту же мощность k . С точки зрения теории графов получается, что граф — это 2-однородный гиперграф без петель и кратных ребер.

Если $q \geq 2$ — это натуральное число, то q -разрезом гиперграфа H называется разбиение

множества вершин $V(H)$ на q непересекающихся подмножеств: $V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_q = V(H)$. Величиной разреза (V_1, \dots, V_q) называется величина $|\{e \mid e \in E(H), \forall t : e \not\subseteq V_t\}|$, другими словами — это количество ребер, которые не содержатся ни в одном из элементов разреза целиком. Максимальным q -разрезом в H называется максимальная величина q -разреза по всем разбиениям множества вершин, для нее будем использовать обозначение $\mu_q(H)$.

Несложно понять, что задачу о поиске максимального разреза можно сформулировать и в терминах раскрасок. Ясно, что q -разрез — это просто раскраска вершин гиперграфа в q цветов, а его величина — это количество ребер, которые покрашены неоднородно в такой раскраске. Тем самым, максимальный разрез равен максимально возможному количеству ребер, которые можно правильно (т.е. неоднородно) раскрасить в одной и той же раскраске вершин гиперграфа в q цветов.

В работе мы исследуем максимальный разрез случайных гиперграфов в биномиальной модели. Напомним, что классической биномиальной моделью случайного k -однородного гиперграфа, $H(n, k, p)$, называется схема Бернулли на k -подмножествах некоторого n -элементного множества V вершины: каждое из них включается в качестве ребра в $H(n, k, p)$ с вероятностью $p = p(n)$

¹Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

²Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия

³Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: pazakharov@hse.ru

**E-mail: dmitry.shabanov@phystech.edu

независимо от прочих. Несложно заметить, что вероятность получить конкретный k -однородный гиперграф $H' = (V, E')$ равна

$$\Pr(H(n, k, p) = H'(V, E')) = p^{|E'|} \cdot (1 - p)^{\binom{n}{k} - |E'|}.$$

При $k = 2$ данная модель — это знаменитая модель Эрдеша–Реньи, обозначаемая $G(n, p)$. В настоящей работе мы исследуем величину $\mu_q(H(n, k, p))$ при фиксированных q и k , растущем $n \rightarrow +\infty$ и $p = p(n)$.

2. ИЗВЕСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Задача об асимптотической оценке максимального q -разреза в случайном графе $G(n, p)$ наиболее интересна в разреженном случае, т.е. когда $p = cn/\binom{n}{2}$ и $c > 0$, не зависящем от n . Если $np \rightarrow +\infty$, то легко заметить, что

$$\mu_q(G(n, p)) \stackrel{\Pr}{\sim} \left(1 - \frac{1}{q}\right) p \binom{n}{2}.$$

Если же $np \rightarrow 0$, то с большой вероятностью можно разрезать все ребра случайного графа,

$$\Pr(\mu_q(G(n, p)) = |E(G(n, p))|) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Тем самым, ситуация наиболее нетривиальна при фиксированном значении np . Здесь фундаментальным результатом является теорема М. Байати, Д. Гамарника и П. Тетали [1]. В ней было установлено существование предела для следующей сходимости по вероятности:

$$\frac{\mu_q\left(G\left(n, cn/\binom{n}{2}\right)\right)}{n} \stackrel{\Pr}{\rightarrow} \gamma(c, q) \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Но авторами было лишь установлено существование предела, а не его точное значение. Значительные исследования были посвящены поиску асимптотических оценок величины $\gamma(c, q)$ при c достаточно большом по отношению к q (о предельном распределении максимального разреза при малом c см. [2]). Исследователями было показано, что имеет место представление следующего вида:

$$\gamma(c, q) = (1 - q^{-1}) \cdot c + B_q \cdot \sqrt{c} + o(\sqrt{c}),$$

в котором предпринимались попытки найти значение параметра B_q . В 1997 г. для случая $q = 2$

А. Бертони и др. [3] доказали, что $B_2 \leq \sqrt{\frac{\ln 2}{2}}$. В дальнейшем Д. Копперсмит с соавторами [4] показал, что $B_2 \in [0.37613, 0.58870]$. Д. Гамарник и К. Ли [5] улучшили эти оценки, показав, что

$B_2 \in [0.47523, 0.55909]$. Наконец, А. Дембо, А. Монтанари и С. Сен [6] вычислили точное значение величины B_2 , которое может быть представлено в виде решения некоторого дифференциального уравнения.

Случай $q > 2$ на сегодняшний день изучен не столь детально. А. Койя-Оглан, К. Мур и В. Санвалани [7] получили следующие оценки параметра B_q для достаточно больших значений q :

$$\frac{4}{3} \sqrt{\frac{\ln q}{q}} \left(1 - O\left(\frac{\ln \ln q}{\ln q}\right)\right) \leq B_q \leq \sqrt{\frac{2 \ln q}{q}} \sqrt{1 - \frac{1}{q}}.$$

Целью нашей работы является обобщение вышеупомянутых результатов для случайных гиперграфов.

Авторы также хотели бы обратить внимание читателя на ряд свежих близких работ по раскраскам случайных гиперграфов в разреженном случае [8–14].

3. НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Наш первый результат устанавливает существование предела для нормированного максимального q -разреза случайного k -однородного гиперграфа в разреженном случае, т.е. при $p = cn/\binom{n}{k}$ и некотором $c > 0$, не зависящем от n .

Теорема 1. Для любых фиксированных $k \geq 3$, $q \geq 2$, $c > 0$ и $p = cn/\binom{n}{k}$ существует такая величина $\gamma(c, k, q)$, что

$$\frac{\mu_q(H(n, k, p))}{n} \stackrel{\Pr}{\rightarrow} \gamma(c, k, q), \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Данная теорема является обобщением результата из [1] и лишь устанавливает существование предела, но не дает представления о значении величины $\gamma(c, k, q)$. Следующая теорема дает некоторые оценки $\gamma(c, k, q)$ в предположении, что c достаточно велико по сравнению с k и q .

Теорема 2. Для любого достаточно большого $c > c_0(k, q)$ выполнены неравенства

$$\gamma(c, k, q) \leq c \cdot (1 - q^{1-k}) + \sqrt{c} \cdot A_{k,q} + o(\sqrt{c}),$$

$$\gamma(c, k, q) \geq c \cdot (1 - q^{1-k}) + \sqrt{c} \cdot C_{k,q} + o(\sqrt{c}),$$

где

$$A_{k,q} = \frac{1}{q^{k-1}} \cdot \sqrt{2 \ln q \cdot (q^{k-1} - 1)},$$

$$C_{k,q} = \frac{\sqrt{8 \ln q}}{k+1} \cdot \sqrt{\frac{k}{q^{k-1}}} \cdot \left(1 - O\left(\frac{\ln \ln q}{\ln q}\right)\right).$$

Данная теорема обобщает результаты из [3] и [7]. Можно заметить, что для достаточно большого q мы получаем зазор порядка \sqrt{k} между имеющимися границами.

Далее мы приведем основные идеи доказательства.

4. ИДЕИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1

Доказательство теоремы 1 основано на применении техники из работы [1] и использует метод интерполяции. Заметим, что нам достаточно доказать существование предела для нормированного математического ожидания величины максимального разреза:

$$\gamma(c, k, q) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E\mu_q \left(H \left(n, k, cn / \binom{n}{k} \right) \right)}{n}.$$

Данный факт следует из того, что величина максимального q -разреза случайного гиперграфа $\mu_q \left(H \left(n, k, cn / \binom{n}{k} \right) \right)$ сильно сконцентрирована вокруг своего среднего значения, что может быть установлено с помощью неравенства Талагранна (см. [15, с. 41–42]).

Дальнейшая идея состоит в проверке того, что последовательность

$$a(n) = E\mu_q \left(H \left(n, k, cn / \binom{n}{k} \right) \right)$$

является почти супераддитивной, т.е. что

$$a(n) \geq a(n_1) + a(n_2) - O(n^{1/2})$$

для любых n, n_1, n_2 , таких что $n_1 + n_2 = n$. Базовые факты из анализа показывают, что в таком случае существует предел последовательности $a(n)/n$.

Далее, зафиксируем n, n_1, n_2 с условием, что $n_1 + n_2 = n$, и применим метод интерполяции. Обозначим через V множество из n вершин, $|V| = n$. Зафиксируем произвольным образом его разбиение на две непересекающиеся части V_1 и V_2 , $|V_i| = n_i, i = 1, 2$. Образует следующую последовательность случайных гиперграфов с множеством вершин V : $H^{(t)}(n, k, m), t = 0, \dots, m$, где $m = \lfloor cn \rfloor$.

Гиперграф $H^{(t)}(n, k, m)$ состоит из так называемых t зеленых ребер и $m - t$ красных ребер, все ребра случайны и выбираются независимо.

Зеленое ребро выбирается равновероятно из V^k (другими словами, мы выбираем k вершин с повторениями).

Красное ребро выбирается из $V_i^k, i = 1, 2$, с вероятностью n_i/n (другими словами, мы сначала

выбираем пропорционально одну из частей, а затем в ней выбираем k вершин с повторениями).

Заметим, что $H^{(t)}(n, k, m)$ может содержать как кратные, так и неполные (менее k различных вершин) ребра. Тем не менее, $H^{(m)}(n, k, m)$ выглядит как классическая равномерная модель с m ребрами, а $H^{(0)}(n, k, m)$ выглядит как объединение двух непересекающихся меньших гиперграфов $H^{(m_i)}(n, k, m_i), m_i = \lfloor cn_i \rfloor, i = 1, 2$. Следующая лемма является ключевой для установления искомого предела и показывает суть метода интерполяции.

Л е м м а 1. Для любого $t = 1, \dots, m$

$$E\mu_q(H^{(t)}(n, k, \lfloor cn \rfloor)) \geq E\mu_q(H^{(t-1)}(n, k, \lfloor cn \rfloor)).$$

После доказательства леммы остается, применяя технику каплинга, аппроксимировать модели и показать, что

$$\left| E\mu_q(H^{(m)}(n, k, m)) - E\mu_q \left(H \left(n, k, cn / \binom{n}{k} \right) \right) \right| = O(n^{1/2}).$$

5. НИЖНЯЯ ОЦЕНКА В ТЕОРЕМЕ 2

При доказательстве нижней оценки мы воспользуемся идеями из работ [4–7] и будем применять жадный алгоритм набора разреза. Будем красить вершины по очереди следующим образом: присвоим вершине такой цвет i , который добавит в разрез максимальное количество ребер. На шаге t обозначим через $z(t)$ число ребер, добавленных в разрез, а через $m(t)$ – число новых образованных одноцветных ребер. Следующая лемма позволяет оценить среднее значение величины $z(t)$.

Л е м м а 2.

$$Ez(t) \geq \frac{cn}{\binom{n}{k}} \cdot \binom{t}{k-1} - \left(\frac{c \cdot (t/n)^{k-1} \cdot k}{q^{k-1}} + r_q \cdot \sqrt{\frac{c \cdot (t/n)^{k-1} \cdot k}{q^{k-1}}} \right) \times \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) + o(\sqrt{c}),$$

где $r_q = \min\{\xi_1, \dots, \xi_q\}$, ξ_i суть независимые стандартные нормальные случайные величины.

В ходе доказательства мы сначала оцениваем среднее величины $m(t)$. Так как наихудший случай есть равномерная раскраска в q цветов, то

$$Em(t) \leq E \min\{u_1, \dots, u_q\},$$

где u_q, \dots, u_q — это независимые случайные величины с распределением $\text{Bin}\left(\binom{t/q}{k-1}, p\right)$. Далее мы используем ряд предельных теорем, получая аппроксимацию нормальным распределением. На заключительном шаге мы оцениваем сумму $\sum_{t=1}^{n-1} Em(t)$, используя выражение из леммы 2. В результате аккуратного анализа получаем искомое.

6. ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА В ТЕОРЕМЕ 2

Здесь мы следуем идеям из [3]. Для упрощения анализа переходим к равномерной модели $H(n, m, k)$, где мы равновероятно выбираем $m = \lfloor cn \rfloor$ k -элементных подмножеств без повторов. Чтобы показать, что некоторая величина x является верхней оценкой максимального q -разреза, мы оцениваем число k -однородных гиперграфов на n вершинах с m ребрами и максимальным разрезом, большим чем x .

Для гиперграфа $H = (V, E)$ рассмотрим некоторое разбиение вершин $V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_q$. Обозначим через E_i множество ребер, целиком содержащихся в V_i , а через E_0 — все оставшиеся ребра.

Обозначим $T = (V_1, \dots, V_q, E_0, \dots, E_q)$ и рассмотрим множество всех подобных наборов для всевозможных k -однородных гиперграфов с множеством вершин V , m ребрами и $|E_0| \geq x$:

$$t(n, m, k, q, x) = |\{T : |E_0| \geq x\}| = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_q \\ m_1, \dots, m_q}} |\{T : |V_i| = n_i, |E_i| = m_i, |E_0| \geq x\}|.$$

Обозначим через $h(n, m, k, q, x)$ максимальное слабое в вышеописанной сумме. Следующая лемма характеризует предельное поведение этой величины.

Лемма 3.

$$h(n, m, k, q, x) \sim \frac{n!}{((n/q)!)^q} \cdot \left(\frac{\binom{n/q}{k}}{m-x}\right)^q \cdot \binom{\binom{n}{k} - q \cdot \binom{n/q}{k}}{x}.$$

Доказательство основано на решении соответствующей оптимизационной задачи. Лемма 3 помогает оценить вероятность того, что максимальный разрез случайного гиперграфа $H(n, m, k)$ превосходит x . А именно, эта вероятность меньше, чем

$$\frac{h(n, m, k, q, x) \cdot n^{q-1} \cdot (n^k)^q}{\binom{n}{k}^m}.$$

Остается показать, что эта величина стремится к нулю при

$$x = n \cdot (c \cdot (1 - q^{1-k}) + \sqrt{c} \cdot A_{k,q} + o(\sqrt{c})).$$

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ.

Работа выполнена в рамках исследований по гранту РФФИ и INSF (проект №20-51-56017), а также в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bayati M., Gamarnik D., Tetali P.* Combinatorial approach to the interpolation method and scaling limits in sparse random graphs // *The Annals of Probability*. 2013. V. 41. P. 4080–4115. <https://doi.org/10.1214/12-AOP816>
2. *Daudé H., Martinez C., Rasendrasahina V., Ravelomanana V.* The max-cut of sparse random graphs // *Proceedings of the Twenty-Third Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. SIAM. 2012. P. 265–271. <https://doi.org/10.1137/1.9781611973099.24>
3. *Bertoni A., Campadelli P., Posenato R.* An Upper Bound for the Maximum Cut Mean Value // *Lecture Notes in Computer Science*. 1997. V. 1335. P. 78–84. <https://doi.org/10.1007/BFb0024489>
4. *Coppersmith D., Gamarnik D., Hajiaghayi M., Sorkin G.* Random maxsat, random maxcut, and their phase transitions // *Random Structures and Algorithms*. 2004. V. 24. P. 502–545. <https://doi.org/10.1002/rsa.20015>
5. *Gamarnik D., Li Q.* On the max-cut over sparse random graph // *Random Structures and Algorithms*. 2018. V. 52. P. 219–262. <https://doi.org/10.1002/rsa.20738>
6. *Dembo A., Montanari A., Sen S.* Extremal cuts of sparse random graphs // *The Annals of Probability*. 2017. V. 45. P. 1190–1217. <https://doi.org/10.1214/15-AOP1084>
7. *Coja-Oghlan A., Moore C., Sanwalani V.* Max k-cut and approximating the chromatic number of random graphs // *Random Structures and Algorithms*. 2006. V. 28. P. 289–322. <https://doi.org/10.1002/rsa.20096>
8. *Kravtsov D.A., Krokhmal N.E., Shabanov D.A.* Panchromatic 3-colorings of random hypergraphs // *European Journal of Combinatorics*. 2019. V. 78. P. 28–43. <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2019.01.006>
9. *Ayre P., Coja-Oghlan A., Greenhill C.* Hypergraph coloring up to condensation // *Random Structures and Algorithms*. 2019. V. 54. № 4. P. 615–652. <https://doi.org/10.1002/rsa.20824>

10. *Ayre P., Greenhill C.* Rigid colorings of hypergraphs and contiguity. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*. 2019. V. 33. P. 1575–1606.
11. *Семенов А.С.* Двухцветные раскраски случайного гиперграфа // Теория вероятностей и ее применения. 2019. Т. 64. № 1. С. 75–97.
<https://doi.org/10.4213/typ5165>
12. *Semenov A., Shabanov D.* On the weak chromatic number of random hypergraphs // *Discrete Applied Mathematics*. 2020. V. 276. P. 134–154.
<https://doi.org/10.1016/j.dam.2019.03.025>
13. *Shabanov D.A.* Estimating the r -colorability threshold for a random hypergraph // *Discrete Applied Mathematics*. 2020. V. 282. P. 168–183.
<https://doi.org/10.1016/j.dam.2019.10.031>
14. *Balobanov A. E., Shabanov D. A.* On the strong chromatic number of a random 3-uniform hypergraph // *Discrete Mathematics*. 2021. V. 344. № 3. P. 1–16.
<https://doi.org/10.1016/j.disc.2020.112231>
15. *Janson S., Łuczak T., Ruciński A.* *Random Graphs*. New York: Wiley, 2000. 335 pp.

ON THE MAXIMAL CUT IN A RANDOM HYPERGRAPH

P. A. Zakharov^a and D. A. Shabanov^{a,b,c}

^a*National Research University “Higher School of Economics”, Moscow, Russian Federation*

^b*Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudnyi, Moscow Region, Russian Federation*

^c*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.N. Shiryaev

The paper deals with the problem of finding the max-cut for random hypergraphs. We consider the classical binomial model $H(n, k, p)$ of a random k -uniform hypergraph on n vertices and probability $p = p(n)$. The main results generalize previously known facts for the graph case and show that in the sparse case (when $p = cn / \binom{n}{k}$ for some fixed $c = c(k) > 0$ not depending on n) there exists $\gamma(c, k, q) > 0$ such that the ratio of the maximal cut of $H(n, k, p)$ to the number of vertices converges in probability to $\gamma(c, k, q) > 0$. Moreover, we obtain some bounds for the value of $\gamma(c, k, q)$.

Keywords: hypergraphs, random hypergraphs, cut of a hypergraph, interpolation method, optimization problem

УДК 517.958:531.332

СВОЙСТВА АГРЕГИРОВАННОЙ КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГОМОГЕННОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ

© 2021 г. А. А. Злотник^{1,2,*}, А. С. Федченко^{1,**}

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным 21.05.2021 г.

Поступило 27.05.2021 г.

После доработки 28.09.2021 г.

Принято к публикации 29.09.2021 г.

Для агрегированной квазигазодинамической системы уравнений гомогенной газовой смеси получено уравнение баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии при наличии потоков диффузии, выведены существование, единственность и L^2 -диссипативность слабых решений начально-краевой задачи для системы, линеаризованной на постоянном решении, и параболичность по Петровскому и локальная по времени классическая однозначная разрешимость задачи Коши для самой квазигазодинамической системы.

Ключевые слова: квазигазодинамическая система уравнений, гомогенная газовая смесь, уравнение баланса энтропии, параболичность по Петровскому, L^2 -диссипативность

DOI: 10.31857/S2686954321060199

Уравнения движения смесей вязкого сжимаемого газа даны, в частности, в [1–3]. Регуляризованные, или квазигазодинамические (КГД), системы уравнений однокомпонентного газа представлены в [4–6]. Их математические свойства, близкие рассматриваемым ниже, выведены в [6–8]. КГД системы уравнений бинарных смесей газов, в том числе гомогенных (с общей скоростью и температурой компонент), рассмотрены в [5, 9, 10].

В этом сообщении изучается агрегированная КГД система уравнений гомогенной многокомпонентной газовой смеси в отсутствие химических реакций. Для нее приводится уравнение баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии при наличии потоков диффузии между компонентами. Устанавливаются также существование, единственность и L^2 -диссипативность слабых решений начально-краевой задачи для системы, линеаризованной на постоянном решении, и параболичность по Петровскому (на компактных множествах значений искомых функций) и локальная по времени классическая однозначная разрешимость задачи Коши для самой КГД системы.

Указанная КГД система уравнений состоит из следующих уравнений баланса массы компонент, суммарного импульса и суммарной полной энергии:

$$\partial_t \rho_\alpha + \operatorname{div}[\rho_\alpha(\mathbf{u} - \mathbf{w}_\alpha) + \mathbf{d}_\alpha] = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, K, \quad (1)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \otimes \mathbf{u}] + \nabla p = \operatorname{div} \Pi + [\rho - \tau \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})] \mathbf{f}, \quad (2)$$

$$\partial_t E + \operatorname{div} \left[\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 (\mathbf{u} - \mathbf{w}) + \langle \rho_\alpha h_\alpha (\mathbf{u} - \mathbf{w}_\alpha) \rangle \right] = \operatorname{div}(-\mathbf{q} + \Pi \mathbf{u}) + \rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{f} + Q. \quad (3)$$

В ней основные искомые функции $\rho_1 > 0, \dots, \rho_K > 0$ – плотности компонент смеси, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\theta > 0$ – общие скорость и абсолютная температура смеси, зависящие от $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $t \geq 0$, где $K \geq 2$ и $n = 1, 2, 3$. Операторы div и $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$ берутся по x , а $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Символы \otimes и \cdot обозначают тензорное и скалярное произведения векторов, а div от тензора берется по его первому индексу.

Компоненты смеси – совершенные политропные газы с уравнениями состояния

$$p_\alpha = (\gamma_\alpha - 1) \rho_\alpha \varepsilon_\alpha = R_\alpha \rho_\alpha \theta, \quad \varepsilon_\alpha = c_{V\alpha} \theta, \quad \alpha = 1, \dots, K,$$

¹Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

²Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: azlotnik@hse.ru

**E-mail: asfedchenko@yandex.ru

где p_α и ε_α – давление и удельная внутренняя энергия компоненты α , с постоянными $\gamma_\alpha > 1$, $R_\alpha > 0$ и $c_{V\alpha} > 0$. Кроме того, $h_\alpha = \varepsilon_\alpha + \frac{p_\alpha}{\rho_\alpha} = c_{p\alpha}\theta - \frac{p_\alpha}{\rho_\alpha}$ – удельная энтальпия компоненты α , а $c_{V\alpha}$ и $c_{p\alpha} = c_{V\alpha} + R_\alpha$ – ее удельные теплоемкости.

Суммарные плотность, давление, удельная внутренняя энергия и полная энергия смеси задаются формулами

$$\rho = \langle \rho_\alpha \rangle := \rho_1 + \dots + \rho_K, \quad p = \langle p_\alpha \rangle = R\rho\theta,$$

$$\varepsilon = \langle c_\alpha \varepsilon_\alpha \rangle = c_V\theta, \quad E = \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + \rho\varepsilon,$$

с функциями $R := \langle c_\alpha R_\alpha \rangle$, $c_V := \langle c_\alpha c_{V\alpha} \rangle$ (а не постоянными как в однокомпонентном случае) и $c_\alpha := \frac{\rho_\alpha}{\rho}$ – массовыми концентрациями компонент смеси.

Используются регуляризующие скорости компоненты α и суммарные скорости вида

$$\mathbf{w}_\alpha = \frac{\tau}{\rho_\alpha} [\operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{f}], \quad (4)$$

$$\hat{\mathbf{w}}_\alpha = \tau \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_\alpha} \nabla p_\alpha - \mathbf{f} \right],$$

$$\mathbf{w} := \langle c_\alpha \mathbf{w}_\alpha \rangle = \frac{\tau}{\rho} [\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \rho \mathbf{f}], \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{w}} = \langle c_\alpha \hat{\mathbf{w}}_\alpha \rangle = \tau \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{f} \right],$$

где $\tau = \tau(\rho, \mathbf{u}, \theta) > 0$ – параметр регуляризации, а $\rho := (\rho_1, \dots, \rho_K)$.

Тензор вязкости имеет вид $\Pi = \Pi^{NS} + \Pi^\tau$, а поток тепла – вид $\mathbf{q} = \mathbf{q}^F + \mathbf{q}^d + \mathbf{q}^\tau$. Здесь тензор вязкости Навье–Стокса и поток тепла Фурье задаются стандартными формулами

$$\Pi^{NS} = \mu \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T - \frac{2}{3} (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbb{1} \right] + \lambda (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbb{1},$$

$$-\mathbf{q}^F = \kappa \nabla \theta,$$

где $\mu > 0$, $\lambda \geq 0$ и $\kappa > 0$ – суммарные коэффициенты динамической и объемной вязкости и теплопроводности (они могут зависеть от $(\rho, \mathbf{u}, \theta)$), $\nabla \mathbf{u} = \{\partial_i u_j\}_{i,j=1}^n$, $\mathbb{1}$ – единичный тензор порядка n . Регуляризующие тензор вязкости и поток тепла задаются формулами

$$\Pi^\tau = \rho \mathbf{u} \otimes \hat{\mathbf{w}} + \tau \{ \mathbf{u} \cdot \nabla p + \langle \gamma_\alpha p_\alpha \rangle \operatorname{div} \mathbf{u} - \langle (\gamma_\alpha - 1) Q_\alpha \rangle \} \mathbb{1}, \quad (6)$$

$$-\mathbf{q}^\tau = \tau \{ [c_{V\alpha} \rho \nabla \theta - \theta \nabla (R\rho)] \cdot \mathbf{u} - \langle Q_\alpha \rangle \} \mathbf{u}. \quad (7)$$

Плотность массовой силы $\mathbf{f}(x, t)$ и мощности тепловых источников $Q_\alpha(x, t) \geq 0$ заданы.

Указанная модель является регуляризованной системой уравнений Навье–Стокса гомогенной смеси вязких теплопроводных сжимаемых газов и переходит в нее при $\tau = 0$. Случай регуляризованных уравнений Эйлера, когда физические коэффициенты вязкости и теплопроводности равны 0, охватывается посредством использования искусственных коэффициентов μ , λ , κ , пропорциональных τ , см. [4–6]; ниже их конкретный вид несуществен. Для бинарной смеси ($K = 2$) при $\mathbf{d}_\alpha = 0$ и $\mathbf{q}^d = 0$ эти уравнения были выведены в [10] агрегированием по α КГД уравнений негомогенных смесей из [9].

Потоки диффузии и дополнительный поток тепла введем формулами

$$-\mathbf{d}_\alpha := d_0 \left[\sum_{\beta: \beta \neq \alpha} \nabla (G_\alpha - G_\beta) + b_\alpha \nabla \theta \right] =$$

$$= d_0 (K \nabla \bar{G}_\alpha + b_\alpha \nabla \theta), \quad (8)$$

$$\alpha = 1, \dots, K,$$

$$\mathbf{q}^d = \langle (G_\alpha + K^{-1} b_\alpha \theta) \mathbf{d}_\alpha \rangle, \quad (9)$$

где $G_\alpha = \varepsilon_\alpha - s_\alpha \theta + \frac{p_\alpha}{\rho_\alpha} = (c_{p\alpha} - s_\alpha) \theta$ – потенциал Гиббса и $s_\alpha = s_{\alpha 0} - R_\alpha \ln \rho_\alpha + c_{V\alpha} \ln \theta$ – удельная энтропия компоненты α , с $s_{\alpha 0} = \text{const}$. Величины $d_0 \geq 0$ и b_α здесь не конкретизируются; существенно, что они могут зависеть от искомым функций и предполагается, что $\langle b_\alpha \rangle = 0$. Здесь и ниже $\bar{\varphi}_\alpha := \varphi_\alpha - K^{-1} \langle \varphi_\alpha \rangle$; ясно, что $\langle \bar{\varphi}_\alpha \rangle = 0$. Важное свойство $\langle \mathbf{d}_\alpha \rangle = 0$ непосредственно следует из (8) и $\langle b_\alpha \rangle = 0$.

Замена $\tilde{b}_\alpha := b_\alpha - K \bar{s}_\alpha$ позволяет переписать потоки (8) и (9) без явного использования s_α :

$$-\mathbf{d}_\alpha = d_0 \left[\theta K R_\alpha \frac{1}{\rho_\alpha} \nabla \rho_\alpha + (K \bar{R}_\alpha + \tilde{b}_\alpha) \nabla \theta \right], \quad (10)$$

$$\mathbf{q}^d = \langle (c_{p\alpha} + K^{-1} \tilde{b}_\alpha) \theta \mathbf{d}_\alpha \rangle,$$

поскольку $\langle \mathbf{d}_\alpha \rangle = 0$. Кроме того, так как $\rho_\alpha = \frac{c_\alpha p}{R\theta}$ и $R = \langle R_\alpha c_\alpha \rangle$, то верна также формула

$$-\mathbf{d}_\alpha = d_0 \left\{ \theta \left[K R_\alpha \frac{1}{c_\alpha} \nabla c_\alpha - K \bar{R}_\alpha \frac{1}{R} \langle R_\alpha \nabla c_\alpha \rangle \right] + \right.$$

$$\left. + K \bar{R}_\alpha \frac{1}{R\rho} \nabla p + \tilde{b}_\alpha \nabla \theta \right\}. \quad (11)$$

При $K = 2$ формулы (8), (9) принимают вид, эквивалентный указанному в [1, гл. VI]

$$-\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 = d_0 [\nabla (G_1 - G_2) + b_1 \nabla \theta],$$

$$\mathbf{q}^d = (G_1 - G_2 + b_1 \theta) \mathbf{d}_1,$$

а формулы (11), (10) преобразуются к более стандартному для бинарных смесей виду

$$-\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 = d_0 \left[\frac{R_1 R_2 \theta}{R c_1 (1 - c_1)} \nabla c_1 - \frac{R_1 - R_2}{R \rho} \nabla p + \tilde{b}_1 \nabla \theta \right],$$

$$\mathbf{q}^d = (c_{p1} - c_{p2} + \tilde{b}_1) \theta \mathbf{d}_1.$$

В частном случае $\tilde{b}_1 = 0$ (т.е. в отсутствие термодиффузии) их вид упрощается.

Из уравнений (1)–(3) следует важное уравнение баланса суммарной массы

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u} - \mathbf{w})] = 0.$$

Ниже важны также эквивалентные (2), (3) (с учетом (1)) уравнения баланса скорости

$$\begin{aligned} & \partial_t \mathbf{u} + [(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla] \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \\ & = \frac{1}{\rho} \{ \operatorname{div} \Pi^{NS} + (\operatorname{div} \mathbf{u})(\rho \hat{\mathbf{w}} + \nabla \langle \tau \gamma_\alpha p_\alpha \rangle) + \\ & + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\rho \hat{\mathbf{w}}) + \tau \langle \gamma_\alpha p_\alpha \rangle \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \\ & + \nabla [\tau \mathbf{u} \cdot \nabla p - \tau \langle (\gamma_\alpha - 1) Q_\alpha \rangle] \} + \\ & + \left[1 - \frac{1}{\rho} \tau \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right] \mathbf{f} \end{aligned} \quad (12)$$

и температуры

$$\begin{aligned} & \partial_t \theta + \left(\mathbf{u} - \frac{\langle c_{v\alpha} \rho_\alpha \mathbf{w}_\alpha \rangle}{c_v \rho} \right) \cdot \nabla \theta + \frac{R}{c_v} \theta \operatorname{div} \mathbf{u} = \\ & = \frac{1}{c_v \rho} [\langle c_{v\alpha} \operatorname{div} \mathbf{d}_\alpha \rangle \theta + \\ & + \operatorname{div}(-\mathbf{q} + \langle p_\alpha \mathbf{w}_\alpha \rangle) + \Pi : \nabla \mathbf{u} - \rho \hat{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{f} + \langle Q_\alpha \rangle], \end{aligned} \quad (13)$$

где символ $:$ обозначает скалярное произведение тензоров.

Введем суммарную удельную энтропию $S := \langle c_\alpha s_\alpha \rangle$.

Теорема 1. Пусть $d_0 > 0$. Верно следующее регуляризованное уравнение баланса энтропии гомогенной многокомпонентной смеси при наличии потоков диффузии:

$$\begin{aligned} & \partial_t (\rho S) + \\ & + \operatorname{div} \left[\langle \rho_\alpha s_\alpha (\mathbf{u} - \mathbf{w}_\alpha) \rangle + \frac{1}{K} \langle b_\alpha \mathbf{d}_\alpha \rangle + \frac{1}{\theta} (\mathbf{q}^F + \mathbf{q}^\tau) \right] = \\ & = \mathcal{P}^{NS} + \langle \mathcal{P}_\alpha^\tau \rangle \end{aligned} \quad (14)$$

с производством энтропии $\mathcal{P}^{NS} + \langle \mathcal{P}_\alpha^\tau \rangle$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{NS} & = \frac{1}{\theta} \left[\frac{\mu}{2} |\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T|^2 + \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 \right] + \\ & + \frac{1}{\theta^2} \kappa |\nabla \theta|^2 + \frac{1}{K d_0 \theta} \langle \mathbf{d}_\alpha \rangle^2 \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\alpha^\tau & = \frac{\rho_\alpha}{\tau \theta} |\hat{\mathbf{w}}_\alpha|^2 + \tau \frac{R_\alpha}{\rho_\alpha} [\operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u})]^2 + \\ & + \tau c_{v\alpha} \rho_\alpha \left[\mathbf{u} \cdot \nabla \ln \theta + (\gamma_\alpha - 1) \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{(\gamma_\alpha - 1) Q_\alpha}{2 p_\alpha} \right]^2 + \\ & + \frac{Q_\alpha}{\theta} \left(1 - \frac{\tau (\gamma_\alpha - 1) Q_\alpha}{4 p_\alpha} \right), \end{aligned}$$

причем $\mathcal{P}_\alpha^\tau \geq 0$ при условии $\tau (\gamma_\alpha - 1) Q_\alpha \leq 4 p_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, K$.

Уравнение баланса энтропии (14) сохраняет силу при $\mathbf{d}_\alpha = 0$, $\alpha = 1, \dots, K$ (при $K = 2$ см. также [10]) и/или $\tau = 0$. В этих существенно более простых случаях следует отбросить слагаемые соответственно с \mathbf{d}_α и \mathbf{w}_α , \mathbf{q}^τ , \mathcal{P}_α^τ в его левой и правой частях.

Ниже полагаем, что $\mathbf{d}_\alpha = 0$ и (за исключением теоремы 3) $\mathbf{f} = 0$, $Q_\alpha = 0$, $\alpha = 1, \dots, K$. Введем вектор искомым функций $\mathbf{z} = (\rho, \mathbf{u}, \theta)$ и выполним вспомогательную редукцию уравнений (1), (12) и (13) с точностью $O(|\nabla \mathbf{z}|^2)$:

$$\begin{aligned} & \partial_t \rho_\alpha + \nabla \rho_\alpha \cdot \mathbf{u} + \rho_\alpha \operatorname{div} \mathbf{u} = \\ & = \tau \langle R_\alpha \theta \Delta \rho_\alpha + [\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla] \rho_\alpha + \\ & + 2 \rho_\alpha (\mathbf{u} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{u} + R_\alpha \rho_\alpha \Delta \theta \rangle + O(|\nabla \mathbf{z}|^2), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\alpha = 1, \dots, K,$$

$$\begin{aligned} & \partial_t \mathbf{u} + \frac{\theta}{\rho} \langle R_\alpha \nabla \rho_\alpha \rangle + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + R \nabla \theta = \\ & = 2 \tau \frac{\theta}{\rho} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \langle R_\alpha \nabla \rho_\alpha \rangle + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u} + \frac{\chi}{\rho} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \tau \frac{\langle \gamma_\alpha p_\alpha \rangle}{\rho} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \\ & + \tau \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \mathbf{u} + 2 \tau R (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \theta + O(|\nabla \mathbf{z}|^2), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t \theta + \frac{R}{c_v} \theta \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \tau \frac{\theta^2}{c_v \rho} \langle R_\alpha^2 \Delta \rho_\alpha \rangle + \\ & + 2 \tau \frac{R \theta}{c_v} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{u} + \tau \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \theta + \\ & + \frac{\kappa}{c_v \rho} \Delta \theta + \tau \frac{\langle R_\alpha p_\alpha \rangle}{c_v \rho} \Delta \theta + O(|\nabla \mathbf{z}|^2), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\Delta = \operatorname{div} \nabla$ — оператор Лапласа, $\chi := \frac{1}{3} \mu + \lambda$.

Эта система уравнений удобна ниже как для линеаризации исходной КГД системы, так и при анализе ее параболичности.

При $\mathbf{f} = 0$, $Q_1 = \dots = Q_K = 0$ КГД система уравнений (1)–(3) имеет постоянные решения $(\rho, \mathbf{u}, \theta)(x, t) \equiv \mathbf{z}_0 = (\rho_{10}, \dots, \rho_{K0}, \mathbf{u}_0, \theta_0)$ с $\rho_{10} > 0, \dots, \rho_{K0} > 0, \theta_0 > 0$. Положим $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + D_* \tilde{\mathbf{z}}$, где

$D_* := \text{diag}\{\rho_{1*}, \dots, \rho_{K*}, u_*, \dots, u_*, \theta_*\}$ – диагональная матрица порядка $K + n + 1$ положительных безразмеривающих параметров, выбираемых ниже, а $\tilde{\mathbf{z}} := (\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\theta})$ – вектор безразмерных возмущений, с $\tilde{\rho} := (\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_K)$ и $\tilde{\mathbf{u}} := (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$.

Линеаризуем КГД систему на таком фоновом решении \mathbf{z}_0 . Введем фоновые нормированное решение $(\hat{\rho}_{10}, \dots, \hat{\rho}_{K0}, \hat{\mathbf{u}}_0, \hat{\theta}_0) := D_*^{-1} \mathbf{z}_0$ с $\hat{\mathbf{u}}_0 = (\hat{u}_{10}, \dots, \hat{u}_{n0})$ и значения ρ , c_α , R и c_V , а также фоновые средние значения $R_\alpha \gamma_\alpha$ и R_α^2 :

$$\begin{aligned} \rho_0 &:= \langle \rho_{\alpha 0} \rangle, & c_{\alpha 0} &:= \frac{\rho_{\alpha 0}}{\rho_0}, & R_0 &:= \langle c_{\alpha 0} R_\alpha \rangle, \\ c_{V0} &:= \langle c_{\alpha 0} c_{V\alpha} \rangle, & (R\gamma)_0 &= \langle c_{\alpha 0} R_\alpha \gamma_\alpha \rangle, \\ (R^2)_0 &= \langle c_{\alpha 0} R_\alpha^2 \rangle. \end{aligned}$$

Подставим решение в форме $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + D_* \tilde{\mathbf{z}}$ в редуцированную систему (15)–(17) и после отбрасывания членов 2-го порядка малости относительно вектор-функции $\tilde{\mathbf{z}}$ и ее производных 1-го и 2-го порядка легко получим линеаризованную систему уравнений

$$\begin{aligned} & \partial_t \tilde{\rho}_\alpha + u_* (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \tilde{\rho}_\alpha + \hat{\rho}_{\alpha 0} \text{div} \tilde{\mathbf{u}}) = \\ & = \tau_0 u_*^2 \left[\frac{R_\alpha \theta_0}{u_*^2} \Delta \tilde{\rho}_\alpha + (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)^2 \tilde{\rho}_\alpha + \right. \\ & \left. + 2\hat{\rho}_{\alpha 0} (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \text{div} \tilde{\mathbf{u}} + \frac{R_\alpha \hat{\rho}_{\alpha 0} \theta_*}{u_*^2} \Delta \tilde{\theta} \right], \\ & \alpha = 1, \dots, K, \\ & \partial_t \tilde{\mathbf{u}} + u_* \left(\frac{\theta_0}{\rho_0 u_*^2} \langle R_\alpha \rho_{\alpha*} \nabla \tilde{\rho}_\alpha \rangle + (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} + \frac{R_0 \theta_*}{u_*^2} \nabla \tilde{\theta} \right) = \\ & = u_*^2 \left[2\tau_0 \frac{\theta_0}{\rho_0 u_*^2} (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \langle R_\alpha \rho_{\alpha*} \nabla \tilde{\rho}_\alpha \rangle + \right. \\ & \left. + \frac{\mu_0}{\rho_0 u_*^2} \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \left(\frac{\chi_0}{\rho_0 u_*^2} + \tau_0 \frac{(R\gamma)_0 \theta_0}{u_*^2} \right) \nabla \text{div} \tilde{\mathbf{u}} + \right. \\ & \left. + \tau_0 (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)^2 \tilde{\mathbf{u}} + 2\tau_0 \frac{R_0 \theta_*}{u_*^2} (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \nabla \tilde{\theta} \right], \\ & \partial_t \tilde{\theta} + u_* \left(\frac{R_0 \hat{\theta}_0}{c_{V0}} \text{div} \tilde{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \tilde{\theta} \right) = \\ & = u_*^2 \left[\tau_0 \frac{\hat{\theta}_0 \theta_*}{c_{V0} \rho_0 u_*^2} \langle R_\alpha^2 \rho_{\alpha*} \Delta \tilde{\rho}_\alpha \rangle + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + 2\tau_0 \frac{R_0 \hat{\theta}_0}{c_{V0}} (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \text{div} \tilde{\mathbf{u}} + \tau_0 (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)^2 \tilde{\theta} + \\ & \left. + \left(\tau_0 \frac{(R^2)_0 \theta_0}{c_{V0} u_*^2} + \frac{\kappa_0}{c_{V0} \rho_0 u_*^2} \right) \Delta \tilde{\theta} \right]. \end{aligned}$$

Здесь $\tau_0, \mu_0, \chi_0, \kappa_0$ – значения τ, μ, χ, κ на фоновом решении. Возник оператор $(\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)^2 = (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)(\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) = \hat{u}_{0i} \hat{u}_{0j} \partial_i \partial_j$, где по индексам i, j предполагается суммирование от 1 до n .

В последней системе уравнений возможна одновременная симметризация как конвективных слагаемых (с производными ∂_i), так и диссипативных слагаемых (с производными $\partial_i \partial_j$), реализуемая при выполнении условий

$$\frac{u_*^2}{\rho_{\alpha*}} = \frac{R_\alpha \theta_0}{\rho_{\alpha 0} \rho_0}, \quad \alpha = 1, \dots, K, \quad \frac{\theta_*^2}{u_*^2} = \frac{\theta_0}{c_{V0}},$$

которые ниже предполагаем выполненными (в них остается один свободный параметр). Это позволяет существенно упростить вид коэффициентов системы:

$$\begin{aligned} & \partial_t \tilde{\rho}_\alpha + u_* (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \tilde{\rho}_\alpha + \hat{\rho}_{\alpha 0} \text{div} \tilde{\mathbf{u}}) = \\ & = \tau_0 u_*^2 [a_\alpha \hat{\theta}_0 \Delta \tilde{\rho}_\alpha + (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)^2 \tilde{\rho}_\alpha + \\ & + 2\hat{\rho}_{\alpha 0} (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \text{div} \tilde{\mathbf{u}} + a_\alpha \hat{\rho}_{\alpha 0} \Delta \tilde{\theta}], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t \tilde{\mathbf{u}} + u_* (\langle \hat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \tilde{\rho}_\alpha \rangle + (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} + a_0 \nabla \tilde{\theta}) = \\ & = u_*^2 [2\tau_0 (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \langle \hat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \tilde{\rho}_\alpha \rangle + \\ & + \bar{\mu}_0 \Delta \tilde{\mathbf{u}} + (\bar{\chi}_0 + \tau_0 \hat{\theta}_0 (a\gamma)_0) \nabla \text{div} \tilde{\mathbf{u}} + \\ & + \tau_0 (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)^2 \tilde{\mathbf{u}} + 2\tau_0 a_0 (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \nabla \tilde{\theta}], \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t \tilde{\theta} + u_* (a_0 \text{div} \tilde{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \tilde{\theta}) = \\ & = u_*^2 [\tau_0 \langle a_\alpha \hat{\rho}_{\alpha 0} \Delta \tilde{\rho}_\alpha \rangle + 2\tau_0 a_0 (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \text{div} \tilde{\mathbf{u}} + \\ & + \tau_0 (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)^2 \tilde{\theta} + (\tau_0 (a^2)_0 + \bar{\kappa}_0) \Delta \tilde{\theta}], \end{aligned} \quad (20)$$

где для удобства записи введены постоянные

$$\begin{aligned} a_\alpha &:= \frac{R_\alpha \theta_*}{u_*^2}, & a_0 &:= \langle c_{\alpha 0} a_\alpha \rangle = \frac{R_0 \theta_*}{u_*^2}, \\ (a\gamma)_0 &= \langle c_{\alpha 0} a_\alpha \gamma_\alpha \rangle, & (a^2)_0 &:= \langle c_{\alpha 0} a_\alpha^2 \rangle, \\ \bar{\mu}_0 &:= \frac{\mu_0}{\rho_0 u_*^2}, & \bar{\chi}_0 &:= \frac{\chi_0}{\rho_0 u_*^2}, & \bar{\kappa}_0 &:= \frac{\kappa_0}{c_{V0} \rho_0 u_*^2}. \end{aligned}$$

Пусть Ω – область в \mathbb{R}^n . Введем скалярные произведения и нормы $(\cdot, \cdot)_\Omega = (\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$, $\|\cdot\|_\Omega = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ и $(\cdot, \cdot)_\Omega = (\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$, $\|\cdot\|_\Omega = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ в пространствах Лебега функций и вектор-функций соответственно.

Пусть $\mathbf{H}^1(\Omega)$ – пространство Соболева вектор-функций, а $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ – замыкание в нем пространства гладких финитных в Ω вектор-функций.

Рассмотрим симметризованную линеаризованную систему уравнений (18)–(20) в цилиндре $Q := \Omega \times (0, \infty)$ при краевых и начальных условиях $\tilde{\mathbf{z}}|_{\partial\Omega \times (0, \infty)} = 0$ и $\tilde{\mathbf{z}}|_{t=0} = \tilde{\mathbf{z}}^{(0)}(x)$. Уравнениям (18)–(20) при $\partial_t \tilde{\mathbf{z}}(\cdot, t), \nabla \tilde{\mathbf{z}}(\cdot, t) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ отвечает интегральное тождество

$$(\partial_t \tilde{\mathbf{z}}(\cdot, t), \mathbf{z})_\Omega + u_* \mathcal{B}_\Omega(\tilde{\mathbf{z}}(\cdot, t), \mathbf{z}) + u_*^2 \mathcal{A}_\Omega(\tilde{\mathbf{z}}(\cdot, t), \mathbf{z}) = 0 \quad (21)$$

$$\forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

В нем $t > 0$, $\mathbf{z} = (\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}, \theta)(x)$ – вектор-функция (ее не следует путать с решением КГД системы (1)–(3)) и стоят билинейные формы

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\Omega(\tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) := & \langle (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \tilde{\rho}_\alpha + \hat{\rho}_{\alpha 0} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}, \rho_\alpha)_\Omega \rangle + \\ & + \langle (\hat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \tilde{\rho}_\alpha \rangle + (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} + a_0 \nabla \tilde{\theta}, \mathbf{u})_\Omega \rangle + \\ & + (a_0 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \tilde{\theta}, \theta)_\Omega \end{aligned}$$

и (после выноса вперед слагаемых без множителя τ_0)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\Omega(\tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) := & \bar{\mu}_0 (\nabla \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \mathbf{u})_\Omega + \\ & + \bar{\chi}_0 (\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}, \operatorname{div} \mathbf{u})_\Omega + \bar{\kappa}_0 (\nabla \tilde{\theta}, \nabla \theta)_\Omega + \\ & + \tau_0 [\langle (a_\alpha \hat{\theta}_0 \nabla \tilde{\rho}_\alpha, \nabla \rho_\alpha)_\Omega \rangle + \langle (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \tilde{\rho}_\alpha, (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \rho_\alpha)_\Omega \rangle + \\ & + 2 \langle (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}, (\hat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \rho_\alpha)_\Omega \rangle + \\ & + (\nabla \tilde{\theta}, \langle a_\alpha \hat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \rho_\alpha \rangle)_\Omega + 2 \langle (\hat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \tilde{\rho}_\alpha, (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u})_\Omega \rangle + \\ & + (\hat{\theta}_0 (a\gamma)_0 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}, \operatorname{div} \mathbf{u})_\Omega + \\ & + ((\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}, (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u})_\Omega + 2(a_0 \nabla \tilde{\theta}, (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u})_\Omega + \\ & + \langle (a_\alpha \hat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \tilde{\rho}_\alpha, \nabla \theta)_\Omega \rangle + 2 \langle ((\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}, a_0 \nabla \theta)_\Omega \rangle + \\ & + (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \tilde{\theta}, \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \theta)_\Omega + ((a^2)_0 \nabla \tilde{\theta}, \nabla \theta)_\Omega], \end{aligned}$$

где тензоры $\nabla \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \mathbf{u}$ берутся как векторы длины n^2 . Нетрудно видеть, что верны свойства

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\Omega(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ \mathcal{A}_\Omega(\tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) = \mathcal{A}_\Omega(\mathbf{z}, \tilde{\mathbf{z}}) \quad \forall \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (22)$$

Соответствующая $\mathcal{A}_\Omega(\tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z})$ квадратичная форма для любой $\mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ такова:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\Omega(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = & \bar{\mu}_0 \|\nabla \mathbf{u}\|_\Omega^2 + \bar{\chi}_0 \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_\Omega^2 + \bar{\kappa}_0 \|\nabla \theta\|_\Omega^2 + \\ & + \tau_0 [\hat{\theta}_0 \langle a_\alpha \|\nabla \rho_\alpha\|_\Omega^2 \rangle + \langle \|\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \rho_\alpha\|_\Omega^2 \rangle + \\ & + \hat{\theta}_0 (a\gamma)_0 \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_\Omega^2 + \langle \|\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}\|_\Omega^2 \rangle + \\ & + \|\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \theta\|_\Omega^2 + (a^2)_0 \|\nabla \theta\|_\Omega^2 + 4 \langle (\hat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \rho_\alpha) \rangle + \\ & + a_0 \nabla \theta, (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u})_\Omega + 2 \langle (a_\alpha \hat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \rho_\alpha, \nabla \theta)_\Omega \rangle]. \end{aligned}$$

Для обоснования ее положительной определенности важна следующая

Л е м м а 1. *Справедлива поточечная формула*

$$\begin{aligned} & \hat{\theta}_0 \langle a_\alpha \|\nabla \rho_\alpha\|_\Omega^2 \rangle + \langle (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \rho_\alpha)^2 \rangle + \hat{\theta}_0 (a\gamma)_0 (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + \\ & + \langle \|\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}\|_\Omega^2 \rangle + \langle (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \theta)^2 \rangle + (a^2)_0 \|\nabla \theta\|_\Omega^2 + \\ & + 2 \langle \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot ((\hat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \rho_\alpha) + a_0 \nabla \theta) \operatorname{div} \mathbf{u} + 2 \langle (\hat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \rho_\alpha) \rangle + \\ & + a_0 \nabla \theta, (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u} \rangle + 2 \langle (a_\alpha \hat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \rho_\alpha, \nabla \theta) \rangle \\ & = \langle (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \rho_\alpha + \hat{\rho}_{\alpha 0} \operatorname{div} \mathbf{u})^2 \rangle + \langle (\hat{\theta}_0 a_\alpha)^{1/2} \nabla \rho_\alpha + \\ & + \sqrt{c_{\alpha 0}} (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u} + \sqrt{c_{\alpha 0}} a_\alpha \nabla \theta \rangle^2 + \\ & + (a_0 \operatorname{div} \mathbf{u} + \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \theta)^2 + g_0 (\operatorname{div} \mathbf{u})^2, \end{aligned}$$

где $g_0 := \langle \hat{\rho}_{\alpha 0}^2 \rangle + a_0^2 - \hat{\theta}_0 (a\gamma)_0 = \frac{\theta_0}{u_*^2} \langle c_{\alpha 0} c_{V\alpha} (\gamma_\alpha - \tilde{\gamma}_0)^2 \rangle \geq 0$,

$$\tilde{\gamma}_0 := \frac{R_0}{c_{V0}} - 1, \quad \hat{\theta}_0 a_\alpha = \frac{\hat{\rho}_{\alpha 0}}{c_{\alpha 0}}.$$

Форма $\mathcal{A}_\Omega(\mathbf{z}, \mathbf{z})$ приводима к сумме квадратов и положительно определена на $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

Л е м м а 2. *Пусть $\mathbf{z} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, причем $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Справедливы формула и неравенство*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\Omega(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = & \bar{\mu}_0 \|\nabla \mathbf{u}\|_\Omega^2 + \bar{\chi}_0 \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_\Omega^2 + \\ & + \bar{\kappa}_0 \|\nabla \theta\|_\Omega^2 + \tau_0 [\langle \|\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \rho_\alpha + \hat{\rho}_{\alpha 0} \operatorname{div} \mathbf{u}\|_\Omega^2 \rangle + \\ & + \langle (\hat{\theta}_0 a_\alpha)^{1/2} \nabla \rho_\alpha + \sqrt{c_{\alpha 0}} (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u} + \sqrt{c_{\alpha 0}} a_\alpha \nabla \theta \rangle_\Omega^2 + \\ & + \|a_0 \operatorname{div} \mathbf{u} + \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \theta\|_\Omega^2 + g_0 \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_\Omega^2] \geq \\ & \geq \max\{\delta_1 \tau_0 \|\nabla \rho_\alpha\|_\Omega^2, \bar{\mu}_0 \|\nabla \mathbf{u}\|_\Omega^2 + \bar{\chi}_0 \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_\Omega^2 + \bar{\kappa}_0 \|\nabla \theta\|_\Omega^2\}, \end{aligned}$$

где $\delta_1 := \frac{1}{2} (1 + \max\{2\delta_0 - 1, 0\})^{-1} \hat{\theta}_0 \min_{\alpha=\overline{1, K}} a_\alpha$,

$$\delta_0 := \tau_0 \max \left\{ \frac{\|\hat{\mathbf{u}}_0\|_\Omega^2}{\bar{\mu}_0}, \frac{(a^2)_0}{\bar{\chi}_0} \right\}.$$

Введем пространство $\mathbf{V}(Q_T) := \{\tilde{\mathbf{z}} \in L^2((0, T); \mathbf{H}_0^1(\Omega)); \partial_t \tilde{\mathbf{z}} \in L^2((0, T); \mathbf{H}^{-1}(\Omega))\}$, где $Q_T = \Omega \times (0, T)$, область Ω ограничена и $\mathbf{H}^{-1}(\Omega) = (\mathbf{H}_0^1(\Omega))^*$, и напомним, что $\mathbf{V}(Q_T) \subset C([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega))$, см., например, [11]. Для начально-краевой задачи для системы уравнений (18)–(20) в Q с условиями $\tilde{\mathbf{z}}|_{\partial\Omega \times (0, \infty)} = 0$, $\tilde{\mathbf{z}}|_{t=0} = \tilde{\mathbf{z}}^{(0)} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ введем слабое решение $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathbf{V}(Q_T)$ для всех $T > 0$, удовлетворяющее интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle \partial_t \tilde{\mathbf{z}}(\cdot, t), \mathbf{z}(\cdot, t) \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)} dt + \\ & + u_* \mathcal{B}_{Q_T}(\tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) + u_*^2 \mathcal{A}_{Q_T}(\tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) = 0 \\ & \forall \mathbf{z} \in \mathbf{L}^2((0, T); \mathbf{H}_0^1(\Omega)) \end{aligned}$$

для всех $T > 0$. Формально это тождество получается из (21) при $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\cdot, t)$ интегрированием по $(0, T)$. Здесь в билинейных формах \mathcal{B}_{Q_T} и \mathcal{A}_{Q_T} скалярные произведения берутся по Q_T , а не Ω как выше.

Теорема 2.1. Слабое решение $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathbf{V}(Q_T)$ с любым $T > 0$ начально-краевой задачи для системы уравнений (18)–(20) существует и единственно и для него верно энергетическое равенство

$$\frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{z}}(\cdot, T)\|_{\Omega}^2 + u_*^2 \mathcal{A}_{Q_T}(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{z}}^{(0)}\|_{\Omega}^2 \quad \forall T > 0.$$

2. Существует производная $\partial_t(\|\tilde{\mathbf{z}}\|_{\Omega}^2) \in L^1(0, \infty)$, верно свойство $L^2(\Omega)$ -диссипативности $\partial_t(\|\tilde{\mathbf{z}}(\cdot, t)\|_{\Omega}^2) \leq 0$ п.в. на $(0, \infty)$ (и поэтому $\max_{t \geq 0} \|\tilde{\mathbf{z}}(\cdot, t)\|_{\Omega} = \|\tilde{\mathbf{z}}^{(0)}\|_{\Omega}$) и оценка

$$2u_*^2 \max\{\delta_1 \tau_0 \langle \|\nabla \tilde{\rho}_{\alpha}\|_{L^2(Q)}^2 \rangle, \bar{\mu}_0 \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(Q)}^2 + \bar{\chi}_0 \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^2(Q)}^2 + \bar{\kappa}_0 \|\nabla \theta\|_{L^2(Q)}^2\} \leq \|\tilde{\mathbf{z}}^{(0)}\|_{\Omega}^2.$$

Пункт 1 вытекает из свойств (22), леммы 2 и [11], а п. 2 следует из п. 1 и леммы 2.

Для анализа параболичности системы (1)–(3) в уравнениях редуцированной системы (15)–(17) отбросим конвективные слагаемые слева и остаточные члены $O(|\nabla \mathbf{z}|^2)$ справа. В полученной однородной системе уравнений, содержащей только производные ∂_t и $\partial_i \partial_j$, следует “заморозить” зависящие от решения \mathbf{z} коэффициенты перед $\partial_i \partial_j$ в некоторой (любой) точке $\mathbf{z}_0 = (\rho_{10}, \dots, \rho_{K0}, \mathbf{u}_0, \theta_0)$, уже брав-

шейся как фоновое решение. Применив к результату интегральное преобразование Фурье $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{x \rightarrow \zeta}$ по x , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\partial_t \mathcal{F} \mathbf{z}(\zeta, t) + u_*^2 |\zeta|^2 A(\mathbf{z}_0, \xi) \mathcal{F} \mathbf{z}(\zeta, t) = 0, \quad t > 0, \quad (23)$$

с параметром $\zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и вещественной матрицей $A(\mathbf{z}_0, \xi)$ порядка $K + n + 1$ с вектором-столбцом $\xi = \frac{\zeta}{|\zeta|}$. Пусть $\lambda[A(\mathbf{z}_0, \xi)]$ — собственные значения введенной матрицы.

Выполним замену $\mathbf{z} = D_* \tilde{\mathbf{z}}$ с введенной выше матрицей $D_* = D_*(\mathbf{z}_0)$. Тогда $\mathcal{F} \mathbf{z} = D_* \mathcal{F} \tilde{\mathbf{z}}$ и после умножения системы (23) слева на D_*^{-1} получим эквивалентную систему

$$\partial_t \mathcal{F} \tilde{\mathbf{z}}(\zeta, t) + u_*^2 |\zeta|^2 \hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi) \mathcal{F} \tilde{\mathbf{z}}(\zeta, t) = 0, \quad t > 0,$$

с матрицей $\hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi) = D_*^{-1} A(\mathbf{z}_0, \xi) D_*$, подобной матрице $A(\mathbf{z}_0, \xi)$. Нетрудно видеть, что матрица $-\hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi)$ непосредственно возникает и в результате применения \mathcal{F} к правым частям уравнений (18)–(20). Поэтому $\hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi) = [\hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi)]^T$ и $\lambda[\hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi)] = \lambda[A(\mathbf{z}_0, \xi)] \in \mathbb{R}$.

Пусть $\Lambda = \operatorname{diag}\{a_1, \dots, a_K\}$, I_k — единичная матрица порядка k , $\hat{\rho}_0 := (\hat{\rho}_{10}, \dots, \hat{\rho}_{K0})^T$, $s = s(\xi) := \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \xi$. Явный (3×3) -блочный вид матрицы $\hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi)$ таков:

$$\hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi) = \begin{pmatrix} \tau_0(\hat{\theta}_0 \Lambda + s^2 I_K) & 2\tau_0 s \hat{\rho}_0 \otimes \xi & \tau_0 \Lambda \hat{\rho}_0 \\ 2\tau_0 s \xi \otimes \hat{\rho}_0 & (\bar{\mu}_0 + \tau_0 s^2) I_n + [\bar{\chi}_0 + \tau_0 \hat{\theta}_0 (a\gamma)_0] \xi \xi^T & 2\tau_0 a_0 s \xi \\ \tau_0 \hat{\rho}_0^T \Lambda & 2\tau_0 a_0 s \xi^T & \bar{\kappa}_0 + \tau_0 [s^2 + (a^2)_0] \end{pmatrix}.$$

Квадратичная форма с матрицей $\hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi) \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} &= \bar{\mu}_0 |\mathbf{v}|^2 + \bar{\chi}_0 (\xi \cdot \mathbf{v})^2 + \bar{\kappa}_0 q^2 + \\ &+ \tau_0 \{\hat{\theta}_0 \langle a_{\alpha} r_{\alpha}^2 \rangle + s^2 |\mathbf{r}|^2 + 4s(\hat{\rho}_0 \cdot \mathbf{r}) \xi \cdot \mathbf{v} + \\ &+ 2\langle a_{\alpha} \hat{\rho}_{\alpha 0} r_{\alpha} \rangle q + s^2 |\mathbf{v}|^2 + \hat{\theta}_0 (a\gamma)_0 (\xi \cdot \mathbf{v})^2 + \\ &+ 4a_0 s (\xi \cdot \mathbf{v}) q + [s^2 + (a^2)_0] q^2 \} \end{aligned}$$

для любого блочного вектора $\mathbf{b} := (\mathbf{r}^T, \mathbf{v}, q)^T$ с $\mathbf{r}^T = (r_1, \dots, r_K) \in \mathbb{R}^K$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $q \in \mathbb{R}$.

Эта квадратичная форма положительно определена. Пусть $\delta_2 = \frac{1}{2} \min\{\delta_1 \tau_0, \bar{\mu}_0, \bar{\kappa}_0\} > 0$.

Л е м м а 3. Для любого блочного вектора $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{K+n+1}$ верны формула и неравенства

$$\begin{aligned} \hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi) \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} &= \bar{\mu}_0 |\mathbf{v}|^2 + \bar{\chi}_0 (\xi \cdot \mathbf{v})^2 + \bar{\kappa}_0 q^2 + \\ &+ \tau_0 \{ |\mathbf{s}\mathbf{r} + (\xi \cdot \mathbf{v}) \hat{\rho}_0|^2 + \\ &+ \langle (\hat{\theta}_0 a_{\alpha})^{1/2} r_{\alpha} \xi + \sqrt{c_{\alpha 0}} s \mathbf{v} + \sqrt{c_{\alpha 0}} a_{\alpha} q \xi \rangle^2 + \\ &+ [a_0 (\xi \cdot \mathbf{v}) + s q]^2 + g_0 (\xi \cdot \mathbf{v})^2 \} \geq \\ &\geq \max\{\delta_1 \tau_0 |\mathbf{r}|^2, \bar{\mu}_0 |\mathbf{v}|^2 + \bar{\chi}_0 (\xi \cdot \mathbf{v})^2 + \bar{\kappa}_0 q^2\} \geq \delta_2 |\mathbf{b}|^2. \end{aligned}$$

Можно показать, что лемма 2 для $\Omega = \mathbb{R}^n$ и лемма 3 эквивалентны.

Сформулируем теорему о локальной по времени однозначной разрешимости задачи Коши для

КГД системы уравнений (1)–(3), рассматриваемой в слое $\Pi_T := \mathbb{R}^n \times (0, T)$, при начальных условиях $\rho|_{t=0} = \rho^{(0)}(x)$, $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}^{(0)}(x)$, $\theta|_{t=0} = \theta^{(0)}(x)$ для $x \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $\mathcal{D} := (\underline{\rho}_1, \bar{\rho}_1) \times \dots \times (\underline{\rho}_K, \bar{\rho}_K) \times (-\bar{u}_1, \bar{u}_1) \times \dots \times (-\bar{u}_n, \bar{u}_n) \times (\underline{\theta}, \bar{\theta})$ лежит в $(0, \infty)^K \times \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. При $\tau, \mu, \lambda, \kappa \in C(\bar{\mathcal{D}})$ по лемме 3 имеем $\inf_{|\xi|=1} \lambda[A(z_0, \xi)] \geq \min_{z_0 \in \mathcal{D}} \delta_2 > 0$, и в итоге эквивалентная квазилинейная КГД система из уравнений (1), (12) и (13) удовлетворяет в \mathcal{D} условию равномерной параболичности по Петровскому [12, 13].

Теорема 3. Пусть $\tau, \mu, \lambda, \kappa \in C^2(\mathcal{D})$ и $0 < \beta < 1$ – параметр. Пусть начальные данные $\rho^{(0)}$, $\mathbf{u}^{(0)}$, $\theta^{(0)} \in C^{(2, \beta)}(\mathbb{R}^n)$, причем их значения $(\rho^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)}, \theta^{(0)})(x)$ принадлежат какому-либо компактному в \mathcal{D} , а $f, Q_\alpha \in C^{(1, \beta, 0)}(\bar{\Pi}_T)$, $\alpha = 1, \dots, K$.

Тогда при достаточно малом $T > 0$ задача Коши для КГД системы уравнений (1)–(3) в слое Π_T имеет единственное классическое решение $\rho, \mathbf{u}, \theta \in C^{(2, \beta, \beta/2)}(\bar{\Pi}_T)$ с $\partial_t \rho, \partial_t \mathbf{u}, \partial_t \theta \in C^{(0, \beta, 0)}(\bar{\Pi}_T)$, и его значения $(\rho, \mathbf{u}, \theta)(x, t)$ принадлежат \mathcal{D} .

Здесь $C^{(m, \beta, \beta)}(\bar{\Pi}_T)$ с $m = 0, 1, 2$, $0 \leq \beta_t < 1$ – пространства функций, имеющих непрерывные и ограниченные в $\bar{\Pi}_T$ производные порядка $k = 0, \dots, m$ по x , удовлетворяющие условию Гёльдера порядка β по x и β_t по t (при $0 < \beta_t < 1$) равномерно в $\bar{\Pi}_T$, а $C^{(2, \beta)}(\mathbb{R}^n)$ – стандартные пространства Гёльдера. Указанная теорема следует из общего результата о локальной по времени однозначной разрешимости задачи Коши для квазилинейных параболических по Петровскому си-

стем, см. [13 теорема 6.3 и замечание 1 к ней в гл. 3, § 4].

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 19-11-00169.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. Изд. 3-е. М.: Наука, 1986.
2. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987.
3. Giovangigli V. Multicomponent flow modeling. Boston, Birkhäuser, 1999.
4. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
5. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
6. Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009.
7. Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. // ЖВМиМФ. 2008. Т. 48. № 3. С. 445–472.
8. Злотник А.А. // ДАН. 2010. Т. 431. № 5. С. 605–609.
9. Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. // ДАН. 2014. Т. 459. № 4. С. 395–399.
10. Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Шильников Е.В. // ЖВМиМФ. 2019. Т. 59. № 11. С. 1899–1914.
11. Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
12. Петровский И.Г. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. М.: Наука, 1986.
13. Эйдельман С.Д. Параболические системы. М.: Наука, 1964.

PROPERTIES OF AN AGGREGATED QUASI-GASDYNAMIC SYSTEM OF EQUATIONS FOR A HOMOGENEOUS GAS MIXTURE

A. A. Zlotnik^{a,b} and A. S. Fedchenko^a

^aHigher School of Economics University, Moscow, Russian Federation

^bKeldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

For an aggregated quasi-gasdynamic system of equations for a homogeneous gas mixture, we give the entropy balance equation with a nonnegative entropy production in the presence of diffusion fluxes. We also derive the existence, uniqueness and L^2 -dissipativity of weak solutions to an initial-boundary value problem for a system linearized at a constant solution as well as the Petrovskii parabolicity and local in time classical unique solvability of the Cauchy problem for the quasi-gasdynamic system itself.

Keywords: quasi-gasdynamic system of equations, homogeneous gas mixture, the entropy balance law, the Petrovskii parabolicity, L^2 -dissipativity

УДК 519.2

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ КОМПЛЕКСНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

© 2021 г. Академик РАН И. А. Ибрагимов^{1,2,*}, Н. В. Смородина^{1,2,**}, М. М. Фаддеев^{2,*}

Поступило 14.08.2021 г.
После доработки 14.08.2021 г.
Принято к публикации 08.09.2021 г.

В работе вводится семейство $r_\lambda, \lambda \in \mathbb{C}$ комплексных стохастических процессов, дающих возможность строить вероятностное представление резольвенты оператора $-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}$. При $\lambda = 0$ процесс r_λ является вещественным и совпадает с процессом броуновского локального времени.

Ключевые слова: случайные процессы, локальное время

DOI: 10.31857/S2686954321060072

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $w(t), t \geq 0$ – стандартный винеровский процесс. Хорошо известно, что с помощью винеровского процесса $w(t)$ строится вероятностное представление классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности. Именно, для каждой непрерывной ограниченной функции f функция

$$u(t, x) = \mathbf{E}f(x - w(t)) \quad (1)$$

удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2)$$

и начальному условию $u(0, x) = \lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = f(x)$.

Если мы хотим строить вероятностное представление не только классического, но и обобщенного (см. [1, гл. III]) решения задачи Коши для уравнения (2), то для начальной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ вместо (1) можно использовать следующее выражение:

$$u(t, x) = (L_2) \lim_{M \rightarrow \infty} \mathbf{E}f_M(x - w(t)), \quad (3)$$

где функция f_M определяется через преобразование Фурье \hat{f} функции f как

$$f_M(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M e^{-ipx} \hat{f}(p) dp.$$

В этом случае удобнее говорить не в терминах уравнений, а в терминах функций от операторов.

Далее через $W_2^k(\mathbb{R})$ мы будем обозначать пространство Соболева функций (подробнее см. [2, гл. 1]), определенных на \mathbb{R} . В пространстве $W_2^k(\mathbb{R})$ мы выберем норму

$$\|\psi\|_{W_2^k(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} (1 + |p|^{2k}) |\hat{\psi}(p)|^2 dp,$$

где через $\hat{\psi}$ обозначено прямое преобразование Фурье функции ψ , которое в данной работе определяется как $\hat{\psi}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{ipx} \psi(x) dx$.

Рассмотрим самосопряженный оператор

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}, \quad (4)$$

заданный на области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = W_2^2(\mathbb{R})$. Хорошо известно (см., например, [3, гл. 7]), что спектр $\sigma(\mathcal{A})$ оператора \mathcal{A} является абсолютно непрерывным и совпадает с полупрямой $[0, \infty)$. Преобразование Фурье осуществляет унитарную эквивалентность оператора \mathcal{A} и оператора умножения на $p^2/2$. В силу спектральной теоремы оператор

¹ Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской Академии наук, Санкт-Петербург, Россия

² Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

*E-mail: ibr32@pdmi.ras.ru

**E-mail: smородина@pdmi.ras.ru

***E-mail: m.faddeev@spbu.ru

$e^{-t\mathcal{A}}$ при всех положительных t определен уже на всем $L_2(\mathbb{R})$, а из (3) вытекает, что для любого $f \in L_2(\mathbb{R})$ справедливо

$$\begin{aligned} e^{-t\mathcal{A}} f(x) &= (L_2) \lim_{M \rightarrow \infty} \mathbf{E} f_M(x - w(t)) = \\ &= \frac{1}{2\pi} (L_2) \lim_{M \rightarrow \infty} \mathbf{E} \int_{-M}^M e^{-ipx} e^{ipw(t)} \widehat{f}(p) dp. \end{aligned}$$

Другими словами, с помощью винеровского процесса строится вероятностное представление оператора $e^{-t\mathcal{A}}$.

В настоящей работе мы построим случайные процессы, дающие аналогичное представление, но не для экспоненты, а для резольвенты оператора \mathcal{A} . Именно, мы построим семейство $r_\lambda(t, x)$, $t > 0$ комплекснозначных случайных процессов, параметризованных спектральным параметром $\lambda \in \mathbb{C}$, таких, что при каждом $t > 0$ и $\alpha \in [0, 1/2)$ с вероятностью единица выполнено

$$r_\lambda(t, \cdot) \in W_2^\alpha(\mathbb{R}),$$

и при каждом $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ и $f \in L_2(\mathbb{R})$ выполнено

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} f * r_\lambda = (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} f. \quad (5)$$

В случае, когда $\lambda \in [0, \infty)$ (т.е., когда $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$) равенство (5) выполнено для всех

$$f \in \mathcal{D}((\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}).$$

Построенный класс процессов мы будем называть резольвентными процессами. При $\lambda = 0$ резольвентный процесс $r_\lambda(t, x)$ совпадает с процессом броуновского локального времени (про броуновское локальное время см., например, [4]). Таким образом, указанный подход дает еще один взгляд на броуновское локальное время, как на одного представителя целого семейства процессов. Для построения резольвентных процессов мы использовали метод, предложенный в [5, 6].

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА РЕЗОЛЬВЕНТНОГО ПРОЦЕССА

Пусть, как и выше, $w(t), t \geq 0$ – стандартный винеровский процесс. Для каждого фиксированного $\lambda \in \mathbb{C}$ мы определим случайную функцию $r_\lambda(t, x)$ переменных $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$, причем так, что при каждом $t > 0, \alpha \in [0, \frac{1}{2})$ с вероятностью единица было выполнено

$$r_\lambda(t, \cdot) \in W_2^\alpha(\mathbb{R}).$$

Для этого определим сначала процесс $\widehat{r}_\lambda(t, p)$, который будет являться преобразованием Фурье (по переменной x) искомого процесса $r_\lambda(t, x)$.

Итак, пусть

$$\lambda = a + bi.$$

При $a = \operatorname{Re} \lambda \leq 0$ для всех $p \in \mathbb{R}$ положим

$$\widehat{r}_\lambda(t, p) = \int_0^t e^{\lambda\tau} e^{ipw(\tau)} d\tau. \quad (6)$$

Далее, пусть $a = \operatorname{Re} \lambda > 0$. Тогда при $|p| > \sqrt{2a}$ или при $|p| = \sqrt{2a}$ и $b = \operatorname{Im} \lambda = 0$, как и выше, определим $\widehat{r}_\lambda(t, p)$ формулой (6).

При $|p| < \sqrt{2a}$ положим

$$\widehat{r}_\lambda(t, p) = -\int_0^t e^{-\lambda\tau} e^{pw(\tau)} d\tau. \quad (7)$$

При $|p| = \sqrt{2a}$ и $b = \operatorname{Im} \lambda > 0$ положим

$$\widehat{r}_\lambda(t, p) = i \int_0^t e^{i\lambda\tau} e^{ipe^{i\pi/4} w(\tau)} d\tau. \quad (8)$$

Наконец, при $|p| = \sqrt{2a}$ и $b = \operatorname{Im} \lambda < 0$ положим

$$\widehat{r}_\lambda(t, p) = -i \int_0^t e^{-i\lambda\tau} e^{ipe^{-i\pi/4} w(\tau)} d\tau. \quad (9)$$

Введем обозначение. Через $h_\lambda(t, p)$ обозначим функцию, заданную следующим образом ($a = \operatorname{Re} \lambda, b = \operatorname{Im} \lambda$):

$$h_\lambda(t, p) = \begin{cases} e^{\lambda t} e^{ipw(t)}, & \text{при } a \leq 0, \\ \text{или при } a > 0 \text{ и } |p| > \sqrt{2a}, \\ \text{или при } a > 0, |p| = \sqrt{2a} \text{ и } b = 0, \\ e^{-\lambda t} e^{pw(t)}, & \text{при } a > 0 \text{ и } |p| < \sqrt{2a}, \\ ie^{i\lambda t} e^{ipe^{i\pi/4} w(t)}, & \text{при } a > 0, \\ |p| = \sqrt{2a} \text{ и } b > 0, \\ -ie^{-i\lambda t} e^{ipe^{-i\pi/4} w(t)}, & \text{при } a > 0, \\ |p| = \sqrt{2a} \text{ и } b < 0. \end{cases} \quad (10)$$

В этих обозначениях

$$\widehat{r}_\lambda(t, p) = \int_0^t h_\lambda(\tau, p) d\tau.$$

Покажем теперь, что для любых фиксированных λ, t с вероятностью единица выполнено $r_\lambda(t, \cdot) \in W_2^\alpha(\mathbb{R})$, где $r_\lambda(t, \cdot)$ – обратное преобразование Фурье функции $\widehat{r}_\lambda(t, \cdot)$.

Для этого введем пространство W_2^α измеримых случайных функций $g(x)$ с нормой

$$\|g\|_\alpha^2 = \mathbf{E} \int_{\mathbb{R}} (1 + p^{2\alpha}) |\widehat{g}(p)|^2 dp, \quad (11)$$

где \hat{g} есть преобразование Фурье функции g по переменной x .

Справедлива следующая

Теорема 1.1. *Для любого $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ при фиксированных $t > 0, \lambda \in \mathbb{C}$ существует предел*

$$r_\lambda(t, \cdot) = ({}^cW_2^\alpha) \lim_{M \rightarrow \infty} r_\lambda(t, \cdot, M),$$

где функция $r_\lambda(t, \cdot, M)$ задается своим преобразованием Фурье

$$\widehat{r}_\lambda(t, p, M) = \mathbf{1}_{[-M, M]}(p) \cdot \int_0^t h_\lambda(\tau, p) d\tau.$$

2. Если $\text{Re} \lambda < 0$, то для любого $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ существует предел

$$r_\lambda^\infty(\cdot) = ({}^cW_2^\alpha) \lim_{t \rightarrow \infty} r_\lambda(t, \cdot). \quad (12)$$

Из теоремы 1 немедленно следует, что с вероятностью единица

$$r_\lambda(t, \cdot) \in W_2^\alpha(\mathbb{R}),$$

а при $\text{Re} \lambda < 0$

$$r_\lambda^\infty(\cdot) \in W_2^\alpha(\mathbb{R}).$$

Заметим, что процессы $r_\lambda(t, \cdot)$ у нас пока заданы только своим преобразованием Фурье $\widehat{r}_\lambda(t, \cdot)$. Найдем теперь явное выражение для функций $r_\lambda(t, \cdot)$ как функционалов от траекторий винеровского процесса.

Пусть сначала $a = \text{Re} \lambda \leq 0$. Тогда

$$\widehat{r}_\lambda(t, p) = \int_0^t e^{\lambda\tau} e^{ipw(\tau)} d\tau,$$

и, значит,

$$\begin{aligned} r_\lambda(t, x) &= \frac{1}{2\pi} (L_2) \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M e^{-ipx} \int_0^t e^{\lambda\tau} e^{ipw(\tau)} d\tau dp = \\ &= \frac{1}{2\pi} (L_2) \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^t e^{\lambda\tau} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-M, M]}(p) e^{-ip(x-w(\tau))} d\tau dp = \\ &= (L_2) \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^t e^{\lambda\tau} D_M(x - w(\tau)) d\tau, \end{aligned}$$

где D_M — ядро Дирихле

$$D_M(x) = \frac{\sin Mx}{\pi x}.$$

Таким образом, при $a = \text{Re} \lambda \leq 0$ мы имеем

$$r_\lambda(t, x) = (L_2) \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^t e^{\lambda\tau} D_M(x - w(\tau)) d\tau. \quad (13)$$

Пользуясь тем, что в смысле обобщенных функций

$$\lim_{M \rightarrow \infty} D_M = \delta,$$

где δ — дельта-функция Дирака, здесь и ниже будем для сокращения записи использовать удобную формулу

$$r_\lambda(t, x) = \int_0^t e^{\lambda\tau} \delta(x - w(\tau)) d\tau, \quad (14)$$

понимая ее так, что правая часть (13) есть определение правой части (14).

В случае $a < 0$ в этом же смысле мы имеем

$$r_\lambda^\infty(x) = \int_0^\infty e^{\lambda\tau} \delta(x - w(\tau)) d\tau.$$

Пусть теперь $a = \text{Re} \lambda > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \widehat{r}_\lambda(t, p) &= \int_0^t e^{\lambda\tau} e^{ipw(\tau)} d\tau \cdot \mathbf{1}_{(\sqrt{2a}, \infty)}(|p|) - \\ &- \int_0^t e^{-\lambda\tau} e^{pw(\tau)} d\tau \cdot \mathbf{1}_{(0, \sqrt{2a})}(|p|), \end{aligned}$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned} r_\lambda(t, x) &= \frac{1}{2\pi} (L_2) \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{[-M, M] \setminus [-\sqrt{2a}, \sqrt{2a}]} e^{-ipx} \int_0^t e^{\lambda\tau} e^{ipw(\tau)} d\tau dp - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-\sqrt{2a}}^{\sqrt{2a}} e^{-ipx} \int_0^t e^{-\lambda\tau} e^{pw(\tau)} d\tau dp = \\ &= (L_2) \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^t e^{\lambda\tau} (D_M(x - w(\tau)) - D_{\sqrt{2a}}(x - w(\tau))) d\tau = \\ &= - \int_0^t e^{-\lambda\tau} D_{\sqrt{2a}}(x + iw(\tau)) = \\ &= \int_0^t e^{\lambda\tau} \left(\delta(x - w(\tau)) - \frac{\sin(\sqrt{2a}(x - w(\tau)))}{\pi x} \right) d\tau - \\ &- \int_0^t e^{-\lambda\tau} \frac{\sin(\sqrt{2a}(x + iw(\tau)))}{\pi x} d\tau. \end{aligned}$$

Заметим еще, что в случае $\lambda = 0$ процесс $r_\lambda(t, x)$ совпадает с броуновским локальным временем (см. [4, гл. 1, § 4]).

3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ

Для каждого $\lambda \in \mathbb{C}$ определим случайный ограниченный оператор

$$\mathcal{R}_\lambda^t: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}),$$

полагая для $f \in L_2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{R}_\lambda^t f(x) = (r_\lambda * f)(t, x). \quad (15)$$

В случае $a = \operatorname{Re} \lambda < 0$ определим еще случайный оператор \mathcal{R}_λ , полагая

$$\mathcal{R}_\lambda f(x) = (r_\lambda^\infty * f)(x). \quad (16)$$

Преобразования Фурье операторов $\mathcal{R}_\lambda^t, \mathcal{R}_\lambda$ действуют следующим образом:

$$\widehat{\mathcal{R}_\lambda^t f}(p) = \widehat{r}_\lambda(t, p) \cdot \widehat{f}(p), \quad (17)$$

$$\widehat{\mathcal{R}_\lambda f}(p) = \widehat{r}_\lambda^\infty(p) \cdot \widehat{f}(p). \quad (18)$$

Далее, для $f \in L_2(\mathbb{R})$ определим функцию $u(t, x)$, полагая

$$u(t, x) = \mathbf{E} \mathcal{R}_\lambda^t f(x) = \mathbf{E}(r_\lambda * f)(t, x).$$

Теорема 2. Пусть $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$. Тогда функция $u(t, x)$ является обобщенным решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u + f(x),$$

удовлетворяющим условию $u(0, x) = 0$.

Пусть, как и выше, \mathcal{A} – самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R})$, заданный на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = W_2^2(\mathbb{R}) = \{f \in L_2(\mathbb{R}) : p^2 \widehat{f}(p) \in L_2(\mathbb{R})\}$$

и действующий на этой области определения по правилу

$$\mathcal{A}f = -\frac{1}{2} f''.$$

Как уже было отмечено, $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_{ac}(\mathcal{A}) = [0, \infty)$, причем для $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ область определения оператора $(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}$ имеет вид

$$\mathcal{D}(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} = \left\{ f \in L_2(\mathbb{R}) : \frac{\widehat{f}(p)}{\frac{p^2}{2} - \lambda} \in L_2(\mathbb{R}) \right\}.$$

Теорема 3. 1. Пусть $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Тогда для любого $f \in L_2(\mathbb{R})$ справедливо

$$\mathbf{E}f * r_\lambda^\infty(x) = (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} f(x).$$

2. Пусть $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ и $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A})$. Тогда для любого $f \in L_2(\mathbb{R})$ справедливо

$$(L_2) \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}f * r_\lambda(t, x) = (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} f(x). \quad (19)$$

3. Пусть $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$. Тогда для любого $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}$ справедливо (19).

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа М.М. Фаддеева выполнена при поддержке РФФИ (грант № 19-01-00657).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
2. Агранович М.С. Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. М.: МЦНМО, 2013. 378 с.
3. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Лань, Санкт-Петербург, Москва, Краснодар, 2010.
4. Бородин А.Н., Ибрагимов И.А. Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий // Тр. МИАН СССР. 1994. Т. 195. С. 3–286.
5. Berman S. Gaussian processes with stationary increments: local times and sample function properties // Ann. Math. Stat. 1970. V. 41. № 4. P. 1260–1272.
6. Berman S. Local times and sample function properties of stationary Gaussian process // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 137. P. 277–299.

ON A FAMILY OF COMPLEX-VALUED STOCHASTIC PROCESSES

Academician of the RAS I. A. Ibragimov^{a,b}, N. V. Smorodina^{a,b}, and M. M. Faddeev^b

^aSt. Petersburg Department of V.A. Steklov Institute of Mathematics of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russian Federation

^bSt. Petersburg State University, St. Petersburg, Russian Federation

We introduce a family $r_\lambda, \lambda \in \mathbb{C}$ of complex-valued stochastic processes giving a possibility to construct a probabilistic representation for a resolvent of operator $-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}$. For $\lambda = 0$ the process r_λ is real-valued and coincides with the Brownian local time process.

Keywords: random processes, local time

УДК 517.93

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧЕ БРАУЭРА–ПАУЛЯ

© 2021 г. А. П. Иванов^{1,2,*}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 15.09.2021 г.

Поступило 16.09.2021 г.

После доработки 16.11.2021 г.

Принято к публикации 17.11.2021 г.

Задача об устойчивости равновесия тяжелой частицы в стационарной точке вращающейся поверхности впервые была рассмотрена известным голландским математиком Брауэром в 1918 г. Им было показано, что в случае гладкой поверхности седловая точка, неустойчивая в отсутствие вращения, может быть стабилизирована в некотором диапазоне угловых скоростей. Эта система была рассмотрена Боттема с позиций теории бифуркаций. Физический аналог этой задачи – ионная ловушка Нобелевского лауреата Пауля: здесь вращающаяся твердая опора заменяется квадруполем с периодически меняющимся напряжением, а сила тяжести – электростатическим полем. Условия устойчивости были получены в линейном приближении, а их достаточность до сих пор не доказана. В данной работе такое доказательство проводится методами гамильтоновой механики.

Ключевые слова: шар на вращающемся седле, устойчивость, теория КАМ

DOI: 10.31857/S2686954321060084

1. ВЫВОД ГАМИЛЬТониАНА

Будем считать массу частицы единичной, поверхность вращается как твердое тело вокруг фиксированной вертикали OZ с постоянной угловой скоростью $\omega \neq 0$. Свяжем с поверхностью систему координат $OXYZ$ с началом в критической точке. Положение частицы – x, y . Пусть $z = f(x, y)$ – уравнение поверхности, тогда для функции Лагранжа имеем выражение

$$\begin{aligned} L &= T - gf(x, y), \\ T &= \frac{1}{2}((\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2 + u^2), \\ u &= f_x \dot{x} + f_y \dot{y}, \end{aligned} \quad (1)$$

где g – ускорение свободного падения. Выберем единицы измерения длины и времени так, чтобы $\omega = 1$, $g = 1$. Первый дифференциал функции f в начале координат обращается в нуль, а второй дифференциал считаем невырожденным. Не ограничивая общности, направим оси OX и OY вдоль главных направлений, тогда

$$d^2 f = \frac{1}{2}(\alpha dx^2 + \beta dy^2), \quad \alpha\beta \neq 0. \quad (2)$$

Обобщенные импульсы определены формулами

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - y + uf_x, \quad p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + x + uf_y. \quad (3)$$

Функцию Гамильтона строим как преобразование Лежандра лагранжиана (1):

$$\begin{aligned} H &= p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - L = f(x, y) + \\ &+ p_x(p_x + y - \hat{u}f_x) + p_y(p_y - x - \hat{u}f_y) - \\ &- \frac{1}{2}((p_x - \hat{u}f_x)^2 + (p_y - \hat{u}f_y)^2 + \hat{u}^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь символом \hat{u} обозначена величина u , выраженная через канонические переменные.

Для решения вопроса об устойчивости тривиального равновесия системы разложим функцию (4) по формуле Тейлора (величина \hat{u} имеет второй порядок малости):

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots,$$

$$H_2 = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2) + \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + p_x y - p_y x, \quad (5)$$

$$H_3 = d^3 f,$$

$$H_4 = d^4 f - \frac{1}{2}(\alpha x(p_x + y) + \beta y(p_y - x))^2.$$

¹ Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия

² Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва, Россия

*E-mail: a-p-ivanov@inbox.ru

2. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Первый этап – определение необходимых условий устойчивости из анализа формы H_2 . Для матрицы ли- неаризованной системы $\dot{\xi} = A\xi$, $\xi = (x, y, p_x, p_y)^T$ име- ем такое выражение:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\beta & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^4 + (\alpha + \beta + 2)\lambda^2 + (1 - \alpha)(1 - \beta) = 0. \quad (7)$$

Корни уравнения (7) чисто мнимы при выполне- нии системы неравенств

$$\alpha + \beta + 2 > 0, \quad (\alpha - 1)(\beta - 1) > 0, \quad (8)$$

$$D = (\alpha - \beta)^2 + 8(\alpha + \beta) > 0.$$

3. СЛУЧАЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА

Допустим, что поверхность имеет второй по- рядок:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2), \quad \alpha < 0, \quad \beta > 0. \quad (9)$$

Неравенства (8) выполнены для значений $\beta \in (-2 - \alpha, 1)$. Данный интервал непуст, если $\alpha > -3$, что и предполагается ниже. Согласно тео- рии гамильтоновых систем, существует веще- ственное линейное каноническое преобразова- ние [1–4]:

$$L: (x, y, p_x, p_y) \rightarrow (q_1, q_2, p_1, p_2),$$

приводящее H_2 к нормальной форме

$$H_2^* = \frac{1}{2}\omega_1(q_1^2 + p_1^2) - \frac{1}{2}\omega_2(q_2^2 + p_2^2), \quad (10)$$

где ω_1, ω_2 – мнимые части корней уравнения (7). Различие знаков при слагаемых в формуле (10) обу- словлено тем, что при сделанных предположениях форма H_2 в формулах (5) знакопеременна.

Важное свойство разложения (5) в рассматри- ваемом случае: $H_3 \equiv 0, H_4 \leq 0$. Это позволяет до- казать следующее

Предложение 1. При выполнении условий (8), (9) положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Перейдем от перемен- ных (q_1, q_2, p_1, p_2) к каноническим полярным коор- динатам (r_j, φ_j) по формулам

$$q_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j, \quad p_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j, \quad j = 1, 2.$$

В новых переменных

$$H_2^* = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2, \quad H_3^* = 0, \quad H_4^* = -\hat{u}^2, \quad (11)$$

$$\hat{u} = \alpha x(p_x + y) + \beta y(p_y - x),$$

причем старые переменные выражены через но- вые. Разложим H_4^* :

$$H_4^* = Q(r_1, r_2) + F(r_j, \varphi_j), \quad \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} F d\varphi_2 = 0. \quad (12)$$

Функция (12) неположительна при выполнении одного из двух условий: либо $Q(r_1, r_2) < 0$, либо $Q(r_1, r_2) \leq 0, F \equiv 0$. В первом случае вывод об устойчивости следует из теоремы Арнольда–Мо- зера [4], так как Q представляет собой нормаль- ную форму в случае отсутствия резонансов до чет- вертого порядка включительно. Наличие резо- нанса третьего порядка не влияет на вид этой формы, так как $H_3 \equiv 0$. Если же имеет место резо- нанс четвертого порядка, то устойчивость следует из результатов Маркеева [5].

Во втором случае

$$\frac{\partial H_4^*}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial H_4^*}{\partial \varphi_2} \equiv 0,$$

откуда ввиду (11) получаем, что функция \hat{u} не за- висит от угловых переменных. Допустим, что условие теоремы Арнольда–Мозера о несовмест- ности системы $H_2^* = 0, Q = 0$ не выполнено. Это означало бы, что \hat{u} пропорционально H_2^* с неко- торым числовым множителем. Такое свойство должно было бы сохраняться и в исходных пере- менных. Сравнивая выражения для этих функций, заметим, что $\hat{u} = 0$ при $x = y = 0$ и любых \dot{x}, \dot{y} , а ве- личина H_2^* при этом положительна. Полученное противоречие завершает доказательство.

4. ВЛИЯНИЕ НЕСОВЕРШЕНСТВА ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

На практике, построить поверхность, идеаль- но имеющую форму (9), нереально. При этом да- же незаметные отклонения в самой функции $f(x, y)$ и ее первом и втором дифференциале мо- гут привести к значительному изменению произ- водных третьего и четвертого порядков. В этом случае источником неустойчивости являются це- лочисленные соотношения вида

$$k_1 \omega_1 - k_2 \omega_2 = 0, \quad k_1 + k_2 \leq 4, \quad k_{1,2} \in N. \quad (13)$$

Разрешая биквадратное уравнение (7), находим

$$\lambda^4 + (\alpha + \beta + 2)\lambda^2 + (1 - \alpha)(1 - \beta) = 0,$$

$$\lambda_{1,2}^2 = -1 - \frac{\alpha + \beta}{2} \pm \sqrt{D},$$

$$D = (\alpha - \beta)^2 + 8(\alpha + \beta).$$

Следовательно,

$$\omega_1^2 = 1 + \frac{\alpha + \beta}{2} + \sqrt{D}, \quad \omega_2^2 = 1 + \frac{\alpha + \beta}{2} - \sqrt{D}, \quad (14)$$

а) резонанс третьего порядка: $\omega_1^2 = 4\omega_2^2$. Согласно формулам (14), этот случай реализуется при условии

$$10\sqrt{D} = 6 + 3(\alpha + \beta). \quad (15)$$

Предложение 2. Если $d^3 f(x, y) \neq 0$, то для почти всех значений производных третьего порядка функции $f(x, y)$ в нуле и значений параметров, удовлетворяющих равенству (15), положение равновесия неустойчиво.

Данный результат следует из теоремы Маркеева [5].

б) резонанс четвертого порядка: $\omega_1^2 = 9\omega_2^2$. Этот случай реализуется при условии

$$5\sqrt{D} = 4 + 2(\alpha + \beta). \quad (16)$$

Предложение 3. Если $d^4 f(x, y) \neq 0$, то в пространстве значений производных четвертого порядка функции $f(x, y)$ в нуле и значений параметров, удовлетворяющих равенству (16), области устойчивости и неустойчивости имеют ненулевую меру.

Уместность вероятностной формулировки обусловлена наличием погрешностей в форме поверхности $f(x, y)$, не поддающихся строгому учету. Устойчивость имеет место при выполнении некоторого неравенства, связывающего коэффициенты нормальной формы [4], иначе равновесие неустойчиво. Сформулированное утверждение означает, что нет оснований считать один из знаков этого неравенства более вероятным, чем другой.

Геометрическая иллюстрация предложений 1–3 приведена на рис. 1. Область (8) – криволинейный треугольник, ограниченный нижней кривой. Выше границы располагаются линии резонансов третьего и четвертого порядков (перечислены снизу вверх).

Предложение 4. Если в области устойчивости в первом приближении (8) не выполнено ни одно из равенств (15) или (16), то в пространстве значений производных третьего и четвертого порядка функции $f(x, y)$ в нуле область неустойчивости имеет нулевую меру.

Данный вывод следует из вышеупомянутой теоремы Арнольда–Мозера.

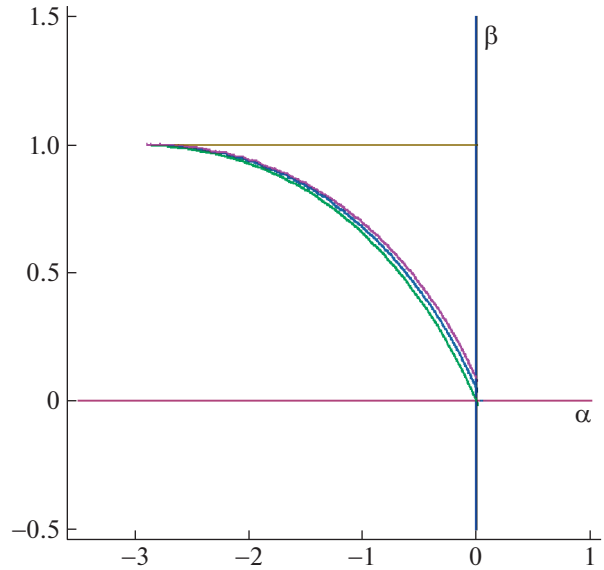


Рис. 1. Область устойчивости частицы.

5. СЛУЧАЙ ШАРИКА НЕНУЛЕВОГО РАДИУСА

Заменим в постановке задачи частицу шариком малого радиуса $\rho > 0$. В отсутствие трения реакция не создает момента относительно центра тела, поэтому его угловая скорость не изменяется со временем. Для решения вопроса об устойчивости можно воспользоваться полученными выше результатами, но с существенной поправкой: если точка контакта лежит на поверхности $z = f(x, y)$, то его центр движется по эквидистанте. Для построения последней необходимо в каждой точке исходной поверхности построить нормаль γ (с ориентацией вверх) и отложить вдоль нее отрезок, равный радиусу ρ . Для координат центра шара (x', y', z') имеем выражение

$$(x', y', z') = (x, y, z) + \rho \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}. \quad (17)$$

Формула (17) неявно задает уравнение эквидистанты $z' = g(x', y')$. Задача о движении шарика динамически эквивалентна задаче о движении частицы той же массы по этой поверхности. Будем считать, что опора является параболомидом (9) и найдем первые члены разложения функции g .

Поскольку

$$\begin{aligned} (x', y', z') &= (x, y, z) + \rho \frac{(-\alpha x, -\beta y, 1)}{\sqrt{1 + \delta}} = \\ &= (x, y, z) + \rho(-\alpha x, -\beta y, 1) \left(1 - \frac{1}{2} \delta + \frac{3}{8} \delta^2 - \dots \right), \\ \delta &= (\alpha x)^2 + (\beta y)^2, \end{aligned}$$

то имеем

$$\begin{aligned} x' &= (1 - \alpha\rho)x + \frac{1}{2}\alpha\delta\rho x + \dots, \\ y' &= (1 - \beta\rho)y + \frac{1}{2}\beta\delta\rho y + \dots, \\ z' &= \rho + z + \rho\left(-\frac{1}{2}\delta + \frac{3}{8}\delta^2 - \dots\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Следовательно, эквидистанта не имеет особых точек при условии $\beta\rho < 1$, которое ограничивает радиус шарика в данном анализе (напомним, что в рассматриваемом случае $\alpha < 0$). Разрешая соотношения (18) относительно x, y , получим уравнение для поверхности, по которой движется центр, в виде

$$\begin{aligned} x &= \frac{x'}{(1 - \alpha\rho)}\left(1 - \frac{\alpha'\rho\delta'}{2}\right) + \dots, \\ y &= \frac{y'}{(1 - \beta\rho)}\left(1 - \frac{\beta'\rho\delta'}{2}\right) + \dots, \\ g_2 &= \frac{1}{2}(\alpha'x'^2 + \beta'y'^2), \quad g_4 = \frac{1}{8}\rho(\delta')^2, \\ \delta' &= (\alpha'x')^2 + (\beta'y')^2, \\ \alpha' &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\rho}, \quad \beta' = \frac{\beta}{1 - \beta\rho}. \end{aligned} \quad (19)$$

При сделанных оговорках начало координат является седловой точкой для эквидистанты, но, в отличие от случая точечной массы, в ее степенном разложении имеются члены четвертого порядка. Поэтому в разложении (5) функция H_4 знакопеременна. Необ-

ходимые условия устойчивости выражаются неравенствами (8), где вместо α, β нужно подставить α', β' по формулам (19). Геометрически область устойчивости подвергается дробно-линейному преобразованию: если считать, что на фигуре она изображена в переменных α', β' , то для перехода к исходным переменным, описывающим форму опорного параболоида, ее следует растянуть по оси абсцисс и сжать по оси ординат.

Для вывода об устойчивости используется предложение 4.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-71-30012)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brouwer L.E.J.* The motion of a particle on the bottom of a rotating vessel under the influence of the gravitational force / in: H. Freudenthal (ed.). *Collected Works*. II. North-Holland, Amsterdam, 1975. P. 665–686.
2. *Bottema O.* Stability of equilibrium of a heavy particle on a rotating surface // *ZAMP Z. angew. Math. Phys.* 1976. V. 27. P. 663–669.
3. *Пауль В.* Электромагнитные ловушки для заряженных и нейтральных частиц // *УФН*. 1990. Т. 160. Вып. 12.
4. *Arnol'd V.I.* *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, 1978.
5. *Markeev A.P.* Stability of a canonical system with two degrees of freedom in the presence of resonance // *Appl. Math. Mech.* 1969. V. 32. P. 766–772.

PROOF OF STABILITY IN THE BROWER-PAUL PROBLEM

A. P. Ivanov^{a,b}

^a *Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^b *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

We study stability of equilibrium in the problem known as “a ball on a rotating saddle”, which was first considered by the famous Dutch mathematician Brauer in 1918. He showed that in the case of a smooth surface, the saddle point, unstable in the absence of rotation, can be stabilized in a certain range of angular velocities. Later, this system was considered by Bottema from the standpoint of the theory of bifurcations. The physical analogue of this problem is the Nobel Laureate Paul’s ion trap: here a rotating solid support is replaced by a quadrupole with a periodically changing voltage, and gravity is replaced by an electrostatic field. The stability conditions were obtained in a linear approximation, and their sufficiency has not yet been proven. In this paper, such a proof is carried out by methods of Hamiltonian mechanics.

Keywords: ball on a rotating saddle, stability, KAM theory

УДК 517.9

ЗАВИСИМОСТЬ ДИНАМИКИ МОДЕЛИ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ОТ ЧИСЛА ОСЦИЛЛЯТОРОВ

© 2021 г. А. А. Кащенко^{1,*}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 15.07.2021 г.

Поступило 19.09.2021 г.

После доработки 10.11.2021 г.

Принято к публикации 11.11.2021 г.

Изучается нелокальная динамика модели, описывающей N связанных осцилляторов с запаздыванием. Изучение асимптотики решений исходной системы сводится к изучению более простого отображения. Показано, что при положительных значениях параметра связи в рассматриваемой модели осцилляторы синхронизируются. При отрицательных значениях параметра связи асимптотика решений системы существенно зависит от четности числа N : при четных N наблюдается двухкластерная синхронизация, а при нечетных N динамика модели более сложная.

Ключевые слова: нелокальная динамика, запаздывание, асимптотика

DOI: 10.31857/S2686954321060096

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальное уравнение с запаздыванием и финитной нелинейностью

$$\dot{u} = -\nu u + \lambda F(u(t-T)) \quad (1)$$

является математической моделью генератора с нелинейной запаздывающей обратной связью с RC-фильтром нижних частот первого порядка [1] и описывает многие биологические процессы, в которых переменная состояния u распадается со скоростью, пропорциональной u в настоящее время, и создается со скоростью, зависящей от значения u некоторое время в прошлом [2]. Кроме того, модели с финитной нелинейностью представляют общенаучный интерес [3–7].

В работах [8–10] изучалась асимптотика решений двух связанных генераторов вида (1)

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 + u_1 &= \lambda F(u_1(t-T)) + \gamma(u_2 - u_1), \\ \dot{u}_2 + u_2 &= \lambda F(u_2(t-T)) + \gamma(u_1 - u_2) \end{aligned}$$

в предположении $\lambda \gg 1$ при различных величинах связи между осцилляторами γ . В них показано, что при $\gamma > 0$, начиная с некоторого момента времени, осцилляторы синхронизируются, при асимптотически малых по λ значениях γ сосуществуют различные устойчивые неоднородные ре-

лаксационные циклы, а при $-\frac{1}{2} < \gamma < 0$ найдены синхронные неоднородные режимы.

Мы рассмотрим систему, описывающую N ($N \geq 4$) связанных осцилляторов вида (1):

$$\begin{aligned} \dot{u}_j + u_j &= \lambda F(u_j(t-T)) + \gamma(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}), \\ j &= 1, 2, \dots, N, \\ u_0 &\equiv u_N, \quad u_{N+1} \equiv u_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь u_j ($j = 1, 2, \dots, N$) – скалярные переменные, параметры λ и T положительные, γ отлична от нуля и такова, что $\gamma > -\frac{1}{4}$ (это условие необходимо для диссипативности системы (2)), а ограниченная нелинейная кусочно-гладкая функция F вне отрезка $[-p, p]$ (где p – некоторая положительная константа) тождественно равна нулю. Кроме того, от функции $F(u)$ на отрезке $u \in [-p, p]$ мы требуем выполнения условий

$$\begin{aligned} F(u) &\neq 0 \text{ за исключением конечного} \\ &\text{числа точек,} \\ \text{если } F(u_*) &= 0, \text{ то существует } n \in \mathbb{N} \text{ такое,} \\ \text{что } F^{(n)}(u_*) &\neq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Также предполагаем, что параметр λ является достаточно большим: $\lambda \gg 1$.

В этой работе мы будем строить асимптотику релаксационных решений модели (2) при условиях (3), $\lambda \gg 1$ для ненулевых значений параметра γ

¹ Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

*E-mail: a.kashchenko@uniyar.ac.ru

для всех начальных условий из некоторого множества S .

Изучение нелокальной динамики модели (2) при условии $\lambda \gg 1$ будет проводиться методом большого параметра [11]. Вначале будет выбрано множество начальных условий S . Для всех начальных условий из этого множества будет построена асимптотика решений при $\lambda \rightarrow +\infty$, далее будет построен оператор сдвига по траекториям, переводящий множество начальных условий в множество такого же типа, и найдены главные части этого оператора при положительных и отрицательных значениях параметра γ (они будут иметь вид конечномерных отображений). По динамике этих отображений будет сделан вывод о динамике исходной модели.

1. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ

Запишем систему (2) в векторном виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dots \\ \dot{u}_N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} F(u_1(t-T)) \\ \dots \\ F(u_N(t-T)) \end{pmatrix} + \mathbb{A} \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_N \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -2\gamma-1 & \gamma & 0 & \dots & \dots & 0 & \gamma \\ \gamma & -2\gamma-1 & \gamma & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \gamma & -2\gamma-1 & \gamma & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \gamma & -2\gamma-1 & \gamma \\ \gamma & 0 & \dots & \dots & 0 & \gamma & -2\gamma-1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Рассмотрим линейную часть системы (4) – систему

$$\dot{u} = \mathbb{A}u, \quad (6)$$

где $u = (u_1, \dots, u_N)^T$.

Ее решение имеет вид

$$u(t) = e^{\mathbb{A}(t-\tau)}u(\tau). \quad (7)$$

Рассмотрим отрезок $[t_1 - T, t_1]$ и введем на нем множество начальных условий для системы (4). Обозначим это множество через $S(x_1, \dots, x_N)$. В $S(x_1, \dots, x_N)$ содержатся вектора $(u_1(s), \dots, u_N(s))$ непрерывных на отрезке $s \in [t_1 - T, t_1]$ функций таких, что:

$$|u_j(s)| \geq p \quad \text{при} \quad s \in [t_1 - T, t_1], \quad (8)$$

$$j = 1, \dots, N,$$

$$u_j(t_1) = x_j p, \quad |x_j| \geq 1 \quad (j = 1, \dots, N), \quad (9)$$

$$\exists i \in \{1, \dots, N\} : |x_i| = 1,$$

при этом существует такая положительная константа δ , что при $t \in (t_1, t_1 + \delta)$ выполняется неравенство $|u_i(t)| < p$. Заметим, что это множество непусто и невыпукло.

Построим асимптотику всех решений системы (4) с начальными условиями из множества $S(x_1, \dots, x_N)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. Будем интегрировать систему (4) методом шагов.

Пусть $t \in [t_1, t_1 + T]$. На рассматриваемом отрезке система (4) принимает вид (6), и ее решение имеет вид (7), где $\tau = t_1, u(t_1) = (x_1 p, \dots, x_N p)^T$.

Пусть $t \in [t_1 + T, t_1 + 2T]$, тогда функции $F(u_j(t-T))$ ($j = 1, \dots, N$) известны с прошлого шага, поэтому на рассматриваемом временном отрезке будем считать их неоднородностью в системе (4). Тогда получаем, что решение системы (4) на отрезке $t \in [t_1 + T, t_1 + 2T]$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ \dots \\ u_N(t) \end{pmatrix} = e^{\mathbb{A}(t-t_1)} \begin{pmatrix} x_1 p \\ \dots \\ x_N p \end{pmatrix} + \lambda \mathbb{G}(t_1 + T, t), \quad (10)$$

где

$$\mathbb{G}(t_{\min}, t) = \begin{pmatrix} g_1(t_{\min}, t, x_1, \dots, x_N) \\ \dots \\ g_N(t_{\min}, t, x_1, \dots, x_N) \end{pmatrix} = \int_{t_{\min}}^t e^{\mathbb{A}(t-s)} \begin{pmatrix} F(u_1(s-T)) \\ \dots \\ F(u_N(s-T)) \end{pmatrix} ds.$$

Пусть выполняется следующее утверждение.

Предположение 1. Для каждого r ($r = 1, \dots, N$) верно $g_r(t_1 + T, t_1 + 2T, x_1, \dots, x_N) \neq 0$, и количество точек $t^* \in [t_1 + T, t_1 + 2T]$, при которых $g_r(t_1 + T, t^*, x_1, \dots, x_N) = 0$, конечно. Для каждой точки t^* такой, что $g_r(t_1 + T, t^*, x_1, \dots, x_N) = 0$, существует $j \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\left. \frac{\partial^j g_r(t_1 + T, t, x_1, \dots, x_N)}{\partial t^j} \right|_{t=t^*} \neq 0.$$

Тогда в предположении 1 при достаточно больших $\lambda > 0$ в точке $t = t_1 + 2T$ верно равенство

$$u(t_1 + 2T) = \lambda(\mathbb{G}(t_1 + T, t_1 + 2T) + o(1)). \quad (11)$$

Для решений системы (4) на отрезке $t \in [t_1 + 2T, t_1 + 3T]$ верен следующий результат.

Лемма 1. При выполнении предположения 1 на отрезке $t \in [t_1 + 2T, t_1 + 3T]$ асимптотика решения системы (4) при достаточно больших $\lambda > 0$ будет иметь вид

$$u(t) = \lambda(e^{\mathbb{A}(t-t_1-2T)} + o(1))\mathbb{G}(t_1 + T, t_1 + 2T). \quad (12)$$

Формула (12) верна потому, что при условии выполнения предположения 1 главную часть асимптотики решения модели (4) задает решение линейной задачи (6) с начальными условиями (11), а нелинейность дает вклад, имеющий порядок $o(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$.

Обозначим собственные значения матрицы \mathbb{A} как σ_k , а соответствующие им собственные вектора как a_k . Приведем явный вид σ_k и a_k :

$$\sigma_k = -1 - 4\gamma \sin^2 \frac{\pi k}{N}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (13)$$

$$a_k = \begin{cases} \left(\cos\left(\frac{1 \cdot 2\pi k}{N}\right), \cos\left(\frac{2 \cdot 2\pi k}{N}\right), \dots, \cos\left(\frac{N \cdot 2\pi k}{N}\right) \right), & 1 \leq k \leq \left[\frac{N}{2}\right], \\ \left(\cos\left(\frac{0 \cdot 2\pi k}{N}\right), \cos\left(\frac{1 \cdot 2\pi k}{N}\right), \dots, \cos\left(\frac{(N-1) \cdot 2\pi k}{N}\right) \right), & \left[\frac{N}{2}\right] + 1 \leq k \leq N, \end{cases} \quad (14)$$

где $[\cdot]$ обозначает взятие целой части числа.

Заметим, что для всех N выполняются равенства $\sigma_N = -1$, $a_N = (1, 1, \dots, 1)$. При четных $N = 2m$ верно $\sigma_k = \sigma_{N-k}$ при $k = 1, \dots, m-1$, значение σ_m равняется $-1 - 4\gamma$, а соответствующий ему собственный вектор имеет вид $a_m = (-1, 1, \dots, -1, 1)$. При нечетных $N = 2m - 1$ равенство $\sigma_k = \sigma_{N-k}$ также выполняется при $k = 1, \dots, m-1$.

Выпишем решение системы (4) на отрезке $t \in [t_1 + 2T, t_1 + 3T]$ в другом виде:

$$u(t) = \lambda \left(\sum_{k=1}^N (z_k^1 a_k + o(1)) e^{\sigma_k(t-t_1-2T)} \right). \quad (15)$$

Здесь $z_k^1 = (\mathbb{G}(t_1 + T, t_1 + 2T), b_k)$, где $\mathbb{A}^* b_k = \sigma_k b_k$, $(a_k, b_k) = 1$, $(a_k, b_{n-k}) = 0$ (если $k \neq n - k$).

Пусть выполняются условия невырожденности:

$$\begin{aligned} z_N^1 &\neq 0, & \text{если } \gamma > 0, \\ z_m^1 &\neq 0, & \text{если } -\frac{1}{4} < \gamma < 0, \quad N = 2m, \quad (16) \\ \prod_{i=1}^N (z_{m-1}^1 a_{m-1}^i + z_m^1 a_m^i) &\neq 0, \\ \text{если } -\frac{1}{4} < \gamma < 0, \quad N = 2m - 1, \end{aligned}$$

где a_{m-1}^i и a_m^i — i -е координаты векторов a_{m-1} и a_m . Тогда из формулы (15) следует, что при $t > t_1 + 3T$ решение системы (4) будет иметь вид (12) до тех пор, пока одна (или несколько) функций u_i не попадет впервые внутрь полосы $|u_i| \leq p$ в точке $t = t_2 > t_1 + 3T$ такой, что $|\dot{u}_i| = O(1)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$.

Для t_2 выполняются следующие соотношения:

$$t_2 - t_1 = \begin{cases} (1 + o(1)) \ln \lambda, & \gamma > 0, \\ ((1 + 4\gamma)^{-1} + o(1)) \ln \lambda, \\ -\frac{1}{4} < \gamma < 0, & N = 2m, \\ \left(\left((1 + 4\gamma \sin^2 \frac{\pi m}{2m-1})^{-1} + o(1) \right) \ln \lambda, \right. \\ \left. -\frac{1}{4} < \gamma < 0, & N = 2m - 1, \end{cases} \quad (17)$$

$$|u_j(s + t_2)| > p \quad (j = 1, \dots, N), \quad s \in [-T, 0), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} |u_j(t_2)| &= \bar{x}_j p, \quad |\bar{x}_j| \geq 1 \quad (j = 1, \dots, N), \\ \exists i : |\bar{x}_i| &= 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Из формул (8), (9) и (18), (19), легко видеть, что в точке t_2 мы вернулись к исходной ситуации, поскольку решение снова принадлежит множеству S (но с другими значениями параметров). Следовательно, существует оператор последования, переводящий множество начальных условий $S(x_1, \dots, x_N)$ в множество $S(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)$. Если, начиная с точки $t = t_2$, проделать все построения, описанные выше, и при этом выполняются условия предположения 1 с заменой t_1 на t_2 и при новых значениях параметров x_i , то мы получим асимптотику решения системы (4) на отрезке $[t_2, t_3]$, потом на отрезке $[t_3, t_4]$ и так далее. Таким образом с помощью оператора последования можно получить отображение на параметры x_1^n, \dots, x_N^n , где $n = 2, 3, \dots$. По динамике этого отображения мы можем судить о динамике исходной задачи, поскольку параметры x_i^n ($i = 1, \dots, N$) определяют решение системы (4).

2. ПОСТРОЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ДИНАМИКА ИСХОДНОЙ СИСТЕМЫ

В этом разделе мы построим отображения на параметры (x_1^n, \dots, x_N^n) для положительных и отрицательных значений параметра связи γ и на основе их динамики сделаем вывод о динамике исходной системы.

Рассмотрим сначала случай $\gamma > 0$. Будем действовать, как описано в разделе 1. Пусть на отрезках $[t_i, t_{i+1}]$ при $i = 1, 2, \dots, n$ выполнялось предположение 1 для значений $x_1^i, x_2^i, \dots, x_N^i$ и t_i , а также неравенства

$$z_N^i \neq 0, \tag{20}$$

где значение z_N^i получаем из z_N^1 заменой t_1 на t_i : $z_N^i = (\mathbb{G}(t_i + T, t_i + 2T), b_N)$.

При выполнении этих предположений при положительной связи между осцилляторами для значений $u_j(t_{n+1})$ выполняются соотношения

$$u_j(t_{n+1}) = \lambda(z_N^n + o(1))e^{-(t_{n+1}-2T-t_n)}, \\ j = 1, \dots, N.$$

Следовательно, при $\gamma > 0$ для значений t_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) имеем

$$t_{n+1} - t_n = (1 + o(1)) \ln \lambda \tag{21}$$

при $\lambda \rightarrow +\infty$. Из асимптотики решения мы получаем главную часть значений параметров x_i^{n+1} :

$$x_i^{n+1} = \text{sign}(z_N^n) + o(1). \tag{22}$$

Заметим, что, согласно определению множества начальных условий, модуль хотя бы одной из величин x_i^{n+1} в точности равен единице, а остальные модули больше или равны единице. Кроме того, из формулы (22) следует, что при всех $n \geq 2$ верно $x_i^n = x_i^{n+1} + o(1)$ ($i = 2, \dots, N$).

Введем в рассмотрение функцию

$$d(\tilde{t}, k) = \int_T^{\tilde{t}} e^{s-\tilde{t}} F(kpe^{T-s}) ds,$$

где параметр k принимает одно из двух значений: 1 или -1 .

Приведем формулировку утверждения, гарантирующего выполнение предположения 1 и неравенства (20) при положительных значениях параметра γ при всех $n \geq 2$.

Предположение 2. Верно неравенство $d(2T, k) \neq 0$, и количество точек $\tilde{t}^* \in [T, 2T)$, при которых $d(\tilde{t}^*, k) = 0$, конечно. Для каждой точки \tilde{t}^* такой, что $d(\tilde{t}^*, k) = 0$, существует $j \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\frac{\partial^j d(\tilde{t}, k)}{\partial \tilde{t}^j} \Big|_{\tilde{t}=\tilde{t}^*} \neq 0.$$

Из построений, приведенных выше, вытекает следующая

Теорема 1. Пусть $\gamma > 0$ и для начальных значений x_1^1, \dots, x_N^1 выполнено предположение 1 и нера-

венство (16). Пусть выполнено предположение 2. Тогда для каждого достаточно большого λ существует такое положительное значение t_2 , зависящее от $(x_1^1, \dots, x_N^1)^T$, что при $t > t_2$ все компоненты решения уравнения (4) будут иметь одинаковую главную часть асимптотики.

Таким образом, с некоторого момента времени все решения синхронизируются.

Теперь перейдем к рассмотрению случая отрицательных значений параметра γ . Заметим, что в силу строения спектра матрицы A в случае отрицательных значений параметра связи γ выделяются два принципиально различных случая: количество осцилляторов N четно ($N = 2m$) и количество осцилляторов N нечетно ($N = 2m - 1$).

Пусть N четно ($N = 2m$). Тогда при условии выполнения на отрезках $[t_i, t_{i+1}]$ при $i = 1, 2, \dots, n$ предположения 1 для значений $x_1^i, x_2^i, \dots, x_N^i$ и t_i , а также неравенства

$$z_m^i \neq 0, \tag{23}$$

где $z_m^i = (\mathbb{G}(t_i + T, t_i + 2T), b_m)$, для значений $u_j(t_{n+1})$ выполняются соотношения

$$u_j(t_{n+1}) = \lambda((-1)^j z_m^n + o(1))e^{(-1-4\gamma)(t_{n+1}-2T-t_n)}, \\ j = 1, \dots, N.$$

Отсюда следует, что при $n \geq 1$ выполняются равенства

$$t_{n+1} - t_n = ((1 + 4\gamma)^{-1} + o(1)) \ln \lambda \tag{24}$$

при $\lambda \rightarrow +\infty$,

$$x_j^{n+1} = (-1)^j \text{sign}(z_m^n) + o(1). \tag{25}$$

Из равенства (25) следует, что при $n \geq 1$ все x_j^{n+1} с четными индексами j и x_j^{n+1} с нечетными индексами j асимптотически близки между собой.

Из построений, приведенных выше, и симметричности исходной системы уравнений вытекает следующая.

Теорема 2. Пусть $-\frac{1}{4} < \gamma < 0$ и N четно ($N = 2m$). Пусть для $i = 1, 2, \dots, q$ выполнено предположение 1 и неравенство (23). Тогда для каждого достаточно большого λ на отрезке $t \in [t_2, t_q]$ все компоненты решения уравнения (4) с четными номерами будут иметь одинаковую главную часть асимптотики, и все компоненты решения с нечетными номерами тоже будут иметь одинаковую (другую) главную часть асимптотики.

Из теоремы следует, что наблюдается двухклатерная синхронизация.

Теперь рассмотрим случай нечетного числа N осцилляторов ($N = 2m - 1$).

В этом случае при условии выполнения на отрезках $[t_i, t_{i+1}]$ при $i = 1, 2, \dots, n$ предположения 1 для значений $x_1^i, x_2^i, \dots, x_N^i$ и t_i , а также неравенства

$$\prod_{j=1}^N (z_{m-1}^i a_{m-1}^j + z_m^i a_m^j) \neq 0, \quad (26)$$

где $z_l^i = (\mathbb{G}(t_i + T, t_i + 2T), b_l)$, компоненты решения u_j ($j = 1, \dots, N$) в точке t_{n+1} принимают вид

$$u_j(t_{n+1}) = \lambda (z_{m-1}^n a_{m-1}^j + z_m^n a_m^j + o(1)) \times e^{\left(-1-4\gamma \sin^2 \frac{\pi m}{2m-1}\right)(t_{n+1}-2T-t_n)}.$$

Отсюда получаем

$$t_{n+1} - t_n = \left(\left(1 + 4\gamma \sin^2 \frac{\pi m}{2m-1}\right)^{-1} + o(1) \right) \ln \lambda \quad (27)$$

и

$$x_j^{n+1} = \frac{1}{w_n} (z_{m-1}^n a_{m-1}^j + z_m^n a_m^j + o(1)), \quad (28)$$

где

$$w_n = \min_{j \in \{1, \dots, N\}} |z_{m-1}^n a_{m-1}^j + z_m^n a_m^j|. \quad (29)$$

На следующем отрезке $t \in [t_{n+1}, t_{n+2}]$ мы по значениям x_j^{n+1} найдем новые значения z_{m-1}^{n+1} и z_m^{n+1} , которые, согласно формуле (28), будут выражаться как линейная комбинация величин z_{m-1}^n и z_m^n . Таким образом, мы получим значения величин x_j^{i+1} ($j = 1, 2, \dots, N$) в виде линейной комбинации величин $z_{m-1}^i, z_m^i, i = 1, 2, \dots$, и двумерное отображение, связывающее величины z_{m-1}^{i+1}, z_m^{i+1} с величинами z_{m-1}^i, z_m^i .

Из построений, приведенных выше, получается следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $-\frac{1}{4} < \gamma < 0$ и N нечетно ($N = 2m - 1$). Пусть для $i = 1, 2, \dots, q$ выполнено предположение 1 и неравенство (26). Тогда при всех достаточно больших λ параметры x_j^{n+1} ($j = 1, 2, \dots, N, n = 1, 2, \dots, q$) находятся асимптотически близко к двумерному подпространству, являющемуся линейной оболочкой векторов a_{m-1} и a_m , а точные их значения определяются по формуле (28).

ВЫВОДЫ

В работе исследована динамика модели, описывающей N связанных осцилляторов с запазды-

ванием. Построены асимптотика решений с начальными условиями из множества S и конечномерные отображения, помогающие уточнить значения параметров, фигурирующих в формулах для асимптотики решения. Доказано, что при положительных значениях параметра γ , начиная с некоторого момента времени, все осцилляторы синхронизируются. В случае отрицательной связи между осцилляторами $-\frac{1}{4} < \gamma < 0$ и четного числа осцилляторов показано, что синхронизируются все осцилляторы с четными номерами и все осцилляторы с нечетными номерами; а в случае нечетного числа осцилляторов показано, что при каждом $n = 1, 2, \dots, q$ все N параметров x_j^{n+1} ($j = 1, 2, \dots, N$) находятся вблизи одного и того же двумерного подпространства исходного N -мерного пространства.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 21-71-30011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kilias T., Kelber K., Mogel A., Schwarz W.* Electronic chaos generators – design and applications // International journal of electronics. 1995. V. 79. № 6. P. 737–753.
2. *an der Heiden U., Mackey M.C.* The dynamics of production and destruction: analytic insight into complex behavior // Journal of Mathematical Biology. 1982. V. 16. № 1. P. 75–101.
3. *Erneux T.* Applied delay differential equations. Springer Science & Business Media, 2009.
4. *Lakshmanan M., Senthilkumar D.V.* Dynamics of nonlinear time-delay systems. Springer Science & Business Media, 2011.
5. *Krisztin T., Walther H.O.* Unique periodic orbits for delayed positive feedback and the global attractor // Journal of Dynamics and Differential Equations. 2001. V. 13. № 1. P. 1–57.
6. *Stoffer D.* Delay equations with rapidly oscillating stable periodic solutions // Journal of Dynamics and Differential Equations. 2008. V. 20. № 1. P. 201–238.
7. *Krisztin T., Vas G.* Large-amplitude periodic solutions for differential equations with delayed monotone positive feedback // Journal of dynamics and differential equations. 2011. V. 23. № 4. P. 727–790.
8. *Кащенко А.А.* Релаксационные циклы в модели двух слабо связанных осцилляторов со знакопеременной запаздывающей обратной связью // Теоретическая и математическая физика. 2020. Т. 202. № 3. С. 437–446.
9. *Kashchenko A.A.* Dependence of Dynamics of a System of Two Coupled Generators with Delayed Feedback on

- the Sign of Coupling // Mathematics. 2020. V. 8. № 10. P. 1790.
10. *Kashchenko A.A.* Relaxation modes of a system of diffusion coupled oscillators with delay // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2021. V. 93. P. 105488.
11. *Кащенко С.А., Майоров В.В.* Модели волновой памяти. М.: Кн. дом "Либроком", 2009.

DEPENDENCE OF THE DYNAMICS OF THE MODEL OF COUPLED OSCILLATORS ON THE NUMBER OF OSCILLATORS

A. A. Kashchenko^a

^a *Centre of Integrable Systems, P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

In this paper we study the nonlocal dynamics of a model describing N coupled oscillators with delay. Studying the asymptotics of solutions of the original system is reduced to studying the dynamics of a simpler mapping. It is shown that for positive values of the coupling parameter in the considered model, the oscillators are synchronized. For negative values of the coupling parameter, the asymptotics of the solutions of the system essentially depends on the parity of the number N : for even N , two-cluster synchronization is observed, and for odd N the dynamics of the model is more complicated.

Keywords: nonlocal dynamics, delay, asymptotics

УДК 517.956.6

ПОСТРОЕНИЕ СЕМЕЙСТВ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕРЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ФЕРМИ–ПАСТА–УЛАМА

© 2021 г. С. А. Кащенко^{1,*}

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 12.07.2021 г.

Поступило 15.09.2021 г.

После доработки 15.09.2021 г.

Принято к публикации 08.10.2021 г.

Рассматривается вопрос об асимптотике решений пространственно-распределенной цепочки в задаче Ферми–Паста–Улама. Построены зависящие от параметров континуальные семейства нерегулярных решений. Показано, что они описываются специальными системами шрёдингеровского типа. Изучен вопрос о влиянии на асимптотику решений изменений количества элементов в рассматриваемой цепочке.

Ключевые слова: задача Ферми–Паста–Улама, квазинормальные формы, асимптотика, пространственно-распределенные цепочки

DOI: 10.31857/S2686954321060102

ВВЕДЕНИЕ

Система уравнений

$$M \frac{d^2 u_j}{dt^2} = F_{j,j+1} - F_{j-1,j}, \quad (1)$$

где

$$F_{j-1,j} = k(\Delta l) + \alpha(\Delta l)^2 + \beta(\Delta l)^3, \\ \Delta l = u_j - u_{j-1} \quad (k > 0),$$

носит имя Ферми–Паста–Улама. Она была предложена в [1]. Здесь $M > 0$, индекс j меняется от 1 до N и выполнены условия “периодичности”: $u_0 \equiv u_N, u_{N+1} \equiv u_1$. Значения $u_j(t)$ можно ассоциировать со значениями функции двух переменных $u(t, x_j)$ в равномерно распределенных на некоторой окружности точках с угловой координатой x_j . Основное предположение настоящей работы состоит в том, что значение N достаточно велико, т.е. величина $\varepsilon = 2\pi N^{-1}$ является достаточно малой:

$$\varepsilon = 2\pi N^{-1} \ll 1. \quad (2)$$

Это условие позволяет естественным образом перейти от использования дискретной перемен-

ной x_j к непрерывной переменной $x \in [0, 2\pi]$. Кроме этого нас будет интересовать влияние изменения величины N на асимптотику решений. Пусть количество элементов в (1) равно $N + c$, где c – произвольно фиксированное целое значение. Положим $\mu = 2\pi(N + c)^{-1}$ и произведем нормировку времени $t \rightarrow M^{1/2} \varepsilon^{-1} t$. Тогда система (1) принимает вид

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = y(t, x + \mu) - 2y(t, x) + y(t, x - \mu) + \\ + \alpha[y^2(t, x + \mu) - 2y(t, x)y(t, x + \mu) + \\ + 2y(t, x)y(t, x - \mu) - y^2(t, x - \mu)] + \\ + \beta[(y(t, x + \mu) - y(t, x))^3 - (y(t, x) - y(t, x - \mu))^3] \quad (3)$$

и выполнено условие периодичности

$$y(t, x + 2\pi) \equiv y(t, x). \quad (4)$$

Уравнение (3) исследовалось многими авторами (см., например, [1–8]), причем основное внимание уделялось изучению так называемых регулярных решений. Напомним, что регулярные решения выделялись условием “хорошей” зависимости от параметра ε . Это такие решения, для которых справедливо асимптотическое представление

$$u(t, x + \varepsilon) = u(t, x) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) + \dots$$

Для исследования регулярных решений с определенной степенью точности по параметру ε от

¹ Региональный научно-образовательный математический центр при Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

*E-mail: kasch@uniyar.ac.ru

уравнения (3) осуществлялся переход к специальному нелинейному уравнению с частными производными. Основные результаты касались, в основном, вопросов о нахождении точных решений и о выявлении свойств интегрируемости полученных уравнений с частными производными.

Отметим еще, что в работе [8] получены интересные результаты о взаимодействии волн в таких уравнениях.

Для параметра μ имеем асимптотическую формулу

$$\mu = \varepsilon(1 + \varepsilon c(2\pi)^{-1})^{-1} = \varepsilon \left(1 - \frac{c\varepsilon}{2\pi} + \frac{c^2\varepsilon^2}{4\pi^2} + \dots \right).$$

Через $E_{\pm}(t, x, \varepsilon)$ обозначим функции

$$E_{\pm}(t, x, \varepsilon) = (\delta + \varepsilon\Theta)x \pm \left(2 \sin \frac{\delta}{2} + \varepsilon \left(\Theta - \frac{\delta c}{\pi} \cos \frac{\delta}{2} \right) \right) t.$$

В настоящей работе изучаются нерегулярные решения краевой задачи (3), (4). Структура таких решений будет состоять из суперпозиции функций, гладко (регулярно) зависящих от параметра ε , и функций, гладко зависящих от параметра ε^{-1} . Остановимся на этом подробнее.

Прежде всего отметим, что любая тождественно постоянная функция $u_0(t, x) \equiv \text{const}$ является состоянием равновесия краевой задачи (3), (4). Будем исследовать локальное поведение решений в окрестности каждого такого состояния равновесия. Тем самым исследуются решения с достаточно малыми (и не зависящими от ε) отклонениями их 2π -периодических и непрерывных по x начальных условий. При исследовании локального поведения решений важную роль играет линейаризованное на состояниях равновесия краевая задача

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u(t, x + \mu) - 2u(t, x) + u(t, x - \mu), \quad (5)$$

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x).$$

В свою очередь структура решений (5) определяется расположением корней характеристического уравнения

$$\varepsilon^2 \lambda^2 = -4 \sin^2 \left(\frac{1}{2} \varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon c}{2\pi} + \frac{\varepsilon^2 c^2}{4\pi^2} + \dots \right) k \right), \quad (6)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Рассмотрим асимптотику корней (6) для достаточно больших – порядка ε^{-1} значений величин k .

Сначала фиксируем произвольно величину $\delta > 0$ и будем предполагать, что

$$\delta \neq 2\pi n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Ниже через $\Theta = \Theta(\delta, \varepsilon) \in [0, 1)$ будем обозначать величину, которая дополняет до целого выражения $\delta\varepsilon^{-1}$.

Пусть K_{ε} – совокупность таких целых чисел, которые заданы формальным соотношением

$$K_{\varepsilon} = \{ \delta\varepsilon^{-1} + \Theta + 2\pi n\varepsilon^{-1} + m; m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \}.$$

Обратим внимание, что в силу равенства $\varepsilon = 2\pi N^{-1}$ величина $2\pi n\varepsilon^{-1}$ является целым числом.

Будет рассмотрен вопрос о таких решениях краевой задачи (3), (4), в основе формирования которых присутствуют моды с номерами из K_{ε} . Для нахождения главных частей таких решений будут получены специальные системы уравнений в частных производных, представляющие собой системы из двух связанных нелинейных уравнений Шрёдингера.

Каждому элементу множества K_{ε} соответствует значение корня $\lambda_{m,n}^{\pm}(\varepsilon)$ характеристического уравнения (6), а каждому корню $\lambda_{m,n}^{\pm}(\varepsilon)$ отвечает решение линейной краевой задачи (5)

$$u_{m,n}^{\pm}(t, x, \varepsilon) = \exp[i\varepsilon^{-1}(\delta + \varepsilon(\Theta + m) + 2\pi n)x + \lambda_{m,n}^{\pm}(\varepsilon)t],$$

а значит эта же краевая задача имеет совокупность решений

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \xi_{m,n\pm} u_{m,n}^{\pm}(t, x, \varepsilon). \quad (8)$$

Выражение (8) можно существенно упростить. Для этого введем обозначения. Положим

$$x_{\pm} = x \pm t \cos \frac{\delta}{2}, \quad (9)$$

$$y = 2\pi\varepsilon^{-1}x, \quad y_{\pm} = y \mp ct \cos \frac{\delta}{2}.$$

Тогда (8) преобразуется к виду

$$u(t, x, \varepsilon) = u^+(t, x, \varepsilon) + u^-(t, x, \varepsilon)$$

и

$$u^{\pm}(t, x, \varepsilon) = \exp(i\varepsilon^{-1}E_{\pm}(t, x, \varepsilon)) \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \xi_{m,n\pm} \times$$

$$\times \exp \left(i \left(mx_{\pm} + ny_{\pm} \pm \frac{i\varepsilon}{2} \left(\left(\frac{\delta c^2}{2\pi^2} - \frac{(\Theta + m)c}{\pi} + \frac{nc^2}{\pi} \right) \cos \frac{\delta}{2} + \left(\frac{\delta c}{\pi} - (\Theta + m) + cn \right)^2 \sin \frac{\delta}{2} \right) + O(\varepsilon) \right) t \right) =$$

$$= \xi_+(\tau, x_+, y_+) \exp(i\varepsilon^{-1}E_+(t, x, \varepsilon)) +$$

$$+ \xi_-(\tau, x_-, y_-) \exp(i\varepsilon^{-1}E_-(t, x, \varepsilon)),$$

где $\tau = \varepsilon t$,

$$\begin{aligned} \xi_{\pm}(\tau, x_{\pm}, y_{\pm}) &= \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \xi_{m,n\pm}(\tau) \exp(imx_{\pm} + iny_{\pm}), \\ \xi_{m,n\pm}(\tau) &= \\ &= \xi_{m,n\pm} \exp \left(\pm \frac{i}{2} \left(\left(\frac{\delta c^2}{2\pi^2} - \frac{(\Theta + m)c}{\pi} + \frac{nc^2}{\pi} \right) \cos \frac{\delta}{2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{\delta c}{\pi} - (\Theta + m) + cn \right)^2 \sin \frac{\delta}{2} + O(\varepsilon) \right) \tau \right). \end{aligned}$$

В следующем разделе сформулируем основной результат. Из него будет следовать, что нелинейная краевая задача (3), (4) имеет совокупность таких нерегулярных решений, главные члены асимптотики которых определяет выражение

$$\begin{aligned} u(t, x, \varepsilon) &= \varepsilon(\xi_+(\tau, x_+, y_+) \exp(i\varepsilon^{-1}E_+(t, x, \varepsilon)) + \overline{cc} + \\ &\quad + \xi_-(\tau, x_-, y_-) \exp(i\varepsilon^{-1}E_-(t, x, \varepsilon)) + \overline{cc} + O(\varepsilon^2)). \end{aligned}$$

Для нахождения неизвестных амплитуд $\xi_{\pm}(\tau, x_{\pm}, y_{\pm})$ приведем специальную систему связанных нелинейных уравнений Шрёдингера. Через \overline{cc} здесь и ниже обозначаются выражения, комплексно сопряженные к предыдущему слагаемому.

В разделе 2 отдельно рассмотрен случай, когда для некоторого целого k_0 выполнено равенство

$$\delta = 2\pi k_0. \tag{10}$$

Сразу отметим, что этот случай существенно отличается от случая (7).

В методическом плане обоснование приводимых ниже результатов опирается на работы [9–11].

1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Сначала введем несколько обозначений. Через D, J и J_0 обозначим операторы, определенные на непрерывно дифференцируемых функциях $v(x, y)$ двух переменных x и y и действующих по правилам

$$\begin{aligned} Dv(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial x} - c \frac{\partial v}{\partial y}, \\ Jv(x, y) &= \int_0^x v(s, cx + y - cs) ds, \\ J_0v(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(s, cx + y - cs) ds. \end{aligned}$$

Ниже потребуются следующие соотношения, которые вытекают из этих определений:

$$\begin{aligned} Dv(cx + y) &= 0, \\ D(J - J_0)v(x, y) &= DJv(x, y) = v(x, y). \end{aligned} \tag{11}$$

Через $W_2(\tau, t, x_{\pm}, y_{\pm}, \varepsilon^{-1}(\delta + \varepsilon\Theta)x)$ обозначим функцию

$$\begin{aligned} &w_{21}(\xi_+(\tau, x_+, y_+))^2 \exp(2i\varepsilon^{-1}E_+) + \overline{cc} + \\ &+ w_{21}(\xi_-(\tau, x_-, y_-))^2 \exp(2\varepsilon^{-1}E_-) + \overline{cc} + \\ &+ w_{23}\xi_+(\tau, x_+, y_+)\xi_-(\tau, x_-, y_-) \exp(i\varepsilon^{-1}E_+ + E_-) + \overline{cc} + \\ &+ w_{24}\xi_+(\tau, x_+, y_+)\overline{\xi}_-(\tau, x_-, y_-) \exp(i\varepsilon^{-1}E_+ - E_-) + \overline{cc} + \\ &\quad + \xi_+(\tau, x_+, y_+)f_+(\tau, t, x, y) \exp(i\varepsilon E_+) + \\ &\quad + \overline{cc} + \xi_-(\tau, x_-, y_-)f_-(\tau, t, x, y) \exp(i\varepsilon E_-) + \overline{cc}, \end{aligned}$$

где

$$w_{21} = i\alpha \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}, \quad w_{23} = 2i \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}, \quad w_{24} = i \sin \delta, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} f_+(\tau, t, x, y) &= i\sigma_1(4 \sin \delta)^{-1}(J - J_0)|\xi_-(\tau, x, y)|^2, \\ f_-(\tau, t, x, y) &= -i\sigma_1(4 \sin \delta)^{-1}(J - J_0)|\xi_+(\tau, x, y)|^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Сформулируем основной результат. Рассмотрим две краевые задачи

$$\begin{aligned} \pm 2i \frac{\partial \eta_{\pm}}{\partial \tau} &= \sin \left(\frac{\delta}{2} \right) D^2 \eta_{\pm} - 2i\Theta \sin \left(\frac{\delta}{2} \right) D \eta_{\pm} + \\ &\quad + 16\sigma_0 \sin \left(\frac{\delta}{2} \right) \eta_{\pm} |\eta_{\pm}|^2, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\eta(\tau, x + 2\pi, y) \equiv \eta(\tau, x, y + 2\pi) \equiv \eta(\tau, x, y),$$

в которых

$$\sigma_0 = \alpha^2 \cos \left(\frac{\delta}{2} \right) + 6\beta \sin \left(\frac{\delta}{2} \right),$$

$$\sigma_1 = -\sin \left(\frac{\delta}{2} \right) 2 \left[\left(1 + 2 \sin^2 \frac{\delta}{2} \right) \alpha^2 + 6\beta \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right) \right].$$

Ниже через $\varepsilon_k(\Theta_0)$ ($k = k_0, k_0 + 1, \dots$) обозначим такую последовательность, что $\varepsilon_k(\Theta_0) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и на которой величина Θ не меняется: $\Theta(\varepsilon_k(\Theta_0)) = \Theta_0$.

Положим

$$\begin{aligned} \xi_{\pm}(\tau, x, y) &= \eta_{\pm}(\tau, x, y) \times \\ &\times \exp \left[\mp i\sigma_1 \delta \sin \left(\frac{\delta}{2} \right) \int_0^{\tau} J_0 |\eta_{\mp}(s, x, y)|^2 ds \pm \frac{i}{2} \Theta^2 \sin \left(\frac{\delta}{2} \right) \tau \right]. \end{aligned}$$

Теорема 1. *Фиксируем произвольно положительное значение $\delta \neq \pi k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) и $\Theta_0 \in [0, 1)$. Пусть $(\xi_+(\tau, x, y), \xi_-(\tau, x, y))$ – ограниченное при $\tau \rightarrow \infty, x \in [0, 2\pi], y \in [0, 2\pi]$ вместе с производной по τ и первой и второй производным по x и y – решение краевых задач (14) при $\Theta = \Theta_0$. Тогда функция*

$$\begin{aligned} u(t, x, \varepsilon_k) &= \varepsilon_k(\Theta_0)(\xi_+(\tau, x_+, y_+) \exp(i\varepsilon^{-1}E_+) + \\ &\quad + \overline{cc} + \xi_-(\tau, x_-, y_-) \exp(i\varepsilon^{-1}E_-) + \overline{cc}) + \\ &\quad + \varepsilon_k^2(\Theta_0)W_2(\tau, t, x_{\pm}, y_{\pm}, \varepsilon^{-1}(\delta + \varepsilon\Theta)x) \end{aligned} \tag{15}$$

при $\tau = \varepsilon_k(\Theta_0)t$, $x_{\pm} = x \pm t \cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$, $y_{\pm} = y \mp ct \cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$,
 $y = 2\pi\varepsilon_k^{-1}(\Theta_0)x$ удовлетворяет краевой задаче (3),
 (4) с точностью до $O(\varepsilon_k^3(\Theta_0))$.

В плане обсуждения этого результата отметим, что в обоих уравнениях (13) и (14) фигурируют одни и те же значения аргументов τ, x, y , а в формуле (15) аргументы функций $\xi_{\pm}(\tau, x_{\pm}, y_{\pm})$ различные. Свести (13) и (14) к одинаковым аргументам удалось из-за того, что нелинейные выражения $(J|\xi_{\pm}|^2 - J_0|\xi_{\pm}|^2)$ зависят от аргумента $cx + y$. Это, в свою очередь, следует из равенств (9) и (11): $cx + y = cx_+ + y_+ = cx_- + y_-$.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ СЛУЧАЯ $\delta = 2\pi n_0$

Множество целых чисел K_{ε} в этом случае имеет вид

$$K_{\varepsilon} = \left\{ m + 2\pi n \varepsilon^{-1}; m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}.$$

Для корней $\lambda_{m,n}^{\pm}(\varepsilon)$ характеристического уравнения (6) выполнены асимптотические равенства

$$\lambda_{m,n}^{\pm}(\varepsilon) = \pm i \left[\varepsilon \left(1 - \frac{\varepsilon c}{2\pi} \right) (m - nc) - \frac{1}{6} \varepsilon^3 (m - nc)^3 \right] + \dots$$

Опираясь на структуру решений линеаризованной краевой задачи (5) с модами из K_{ε} , решения нелинейной краевой задачи (3), (4) ищем в виде

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon (\xi_+(\tau, x_+, y_+) + \xi_-(\tau, x_-, y_-)) + \varepsilon^2 (W_{2+}(\tau, x_+, y_+) + W_2(\tau, x_-, y_-) + W_{20}(\tau, x_{\pm}, y_{\pm})) + \dots, \quad (16)$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, $x_{\pm} = x \pm t$, $y_{\pm} = y \pm ct$.

Подставим (16) в (3) и будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε . При ε^1 получаем верное равенство. На следующем шаге приходим к уравнению относительно W_{20} , $W_{2\pm}$. Из него находим, что

$$W_{20} = -\frac{1}{2} \alpha D(\xi_+ \xi_-),$$

а из условия разрешимости уравнений относительно $W_{2\pm}$ приходим к соотношениям для $\xi_{\pm}(\tau, x, y)$:

$$\pm 2 \frac{\partial}{\partial \tau} D \xi_{\pm} = D^4 \xi_{\pm} - 2\alpha D \xi_{\pm} D^2 \xi_{\pm}, \quad (17)$$

$$\xi_{\pm}(\tau, x + 2\pi, y) \equiv \xi_{\pm}(\tau, x, y + 2\pi) \equiv \xi_{\pm}(\tau, x, y). \quad (18)$$

Отсюда следует итоговое утверждение.

Теорема 2. Пусть краевая задача (17), (18) имеет ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$, $x \in [0, 2\pi]$, $y \in [0, 2\pi]$ непрерывно дифференцируемое по τ и четырежды

непрерывно дифференцируемое по x и y решение $\xi_{\pm}(\tau, x, y)$. Тогда функция

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon (\xi_+(\tau, x_+, y_+) + \xi_-(\tau, x_-, y_-)) - \varepsilon^2 \frac{1}{2} \alpha D(\xi_+(\tau, x_+, y_+) \xi_-(\tau, x_-, y_-))$$

удовлетворяет краевой задаче (3), (4) с точностью до $O(\varepsilon^3)$.

Отметим, что уравнения (17) можно упростить. Для этого положим

$$\eta_{\pm}(\tau, x_{\pm}, y_{\pm}) = D \xi_{\pm}(\tau, x_{\pm}, y_{\pm}).$$

В результате получим краевую задачу

$$\pm 2 \frac{\partial \eta_{\pm}}{\partial \tau} = D^3 \eta_{\pm} - 2\alpha \eta_{\pm} D \eta_{\pm}, \eta(\tau, x + 2\pi, y) = \eta(\tau, x, y + 2\pi) \equiv \eta(\tau, x, y).$$

Эту краевую задачу естественно назвать уравнением Кортевега–де-Фриза в двумерной пространственной области.

Функции ξ_{\pm} можно выразить через η_{\pm} :

$$\xi_{\pm}(\tau, x, y) = (J - J_0) \eta_{\pm}(\tau, x, y).$$

ВЫВОДЫ

Предложенный подход позволяет при построении асимптотики решений учитывать и более высокие по порядку ε слагаемые. Кроме этого могут быть рассмотрены задачи с несколькими параметрами $\delta_1, \dots, \delta_j$; и, в том числе, при наличии среди них резонансных соотношений.

Обратим внимание, что в краевой задаче (14) присутствует “внутренний” параметр Θ , который бесконечно много раз изменяется от 0 до 1 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это говорит о том, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ может происходить неограниченный процесс прямых и обратных перестроек фазовых портретов. Некоторые иллюстрации этого явления приведены в работе [12].

Показано, что для описания главных приближений решений в различных областях фазового пространства краевой задачи (3) возникают различные уравнения в частных производных.

При $\delta \neq 2\pi l$ и $\delta = 2\pi l_0$ построены специальные нелинейные краевые задачи для нахождения медленно меняющихся амплитуд $\xi_{\pm}(\tau, x_{\pm}, y_{\pm})$. Для каждого из этих двух случаев эти краевые задачи различны. В первом из них получены системы двух уравнений Шрёдингера, во втором – система двух уравнений Кортевега–де-Фриза. Асимптотические представления изученных выше нерегулярных решений содержат суперпозиции функций, зависящих от “медленного” времени $\tau = \varepsilon t$ (или $\tau = \varepsilon^2 t$), от “среднего” времени t и от “быстрого” време-

ни $\varepsilon^{-1}t$. Кроме того, они содержат 2π -периодичные компоненты по пространственным переменным x , $y = 2\pi\varepsilon^{-1}x$ и быстро осциллирующие по переменной $\varepsilon^{-1}x$.

Из приведенных выше формул следует, что при условии $\delta \neq 2\pi l$ влияние функций ξ_+ и ξ_- друг на друга приводит только к изменению их фазовых составляющих. Если же $\delta = 2\pi l_0$, то это влияние проявляется существенно слабее [8] при учете слагаемых более высокого порядка малости в соответствующих краевых задачах. В этом можно проследить некоторые аналогии с выводами из [13, 14].

При $\delta \neq 2\pi l$ коэффициенты σ_0 и σ_1 в (14) зависят и от параметра α и от параметра β , а при $\delta = 2\pi l_0$ в (17), (18) фигурирует только параметр α . Разными оказались и “порядки” “медленного” времени τ . В первом случае $\tau = \varepsilon t$, а во втором — $\tau = \varepsilon^2 t$, т.е. при $\delta = 2\pi l_0$ процессы протекают существенно медленнее. Отметим еще, что в обоих случаях амплитуда главных слагаемых решений имеет порядок ε .

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект № 21-71-30011.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Russel Scott J.* Report of waves // Report of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science (York, Sept. 1844). 1845. P. 311–390.
2. *Fermi E., Pasta J.R., Ulam S.* Studies of Nonlinear Problems. I // Los Alamos Report LA-1940, Los Alamos Scientific Laboratory. 1955.
3. *Dauxois T., Peyrard M., Ruffo S.* The Fermi-Pasta-Ulam “numerical experiment”: history and pedagogical perspectives. arXiv: nlin/0501053v2, 22 Mar 2005.
4. *Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* Method for Solving the Korteweg-deVries Equation // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1095–1097.
5. *Ablowitz M.J., Clarkson P.A.* Solitons Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge university press, 1991.
6. *Kudryashov N.A.* Refinement of the Korteweg–de Vries equation from the FermiPasta-Ulam model // Phys. Lett. A. 2015. V. 279. P. 2610–2614.
7. *Kudryashov N.A.* From the Fermi–Pasta–Ulam Model to Higher-Order Nonlinear Evolution Equations // Reports on mathematical Physics. 2016. V. 77. 1. P. 57–67.
8. *Kashchenko S.A.* The interaction of waves in the Fermi–Pasta–Ulam model // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2020. V. 91. P. 105436. ISSN 1007-5704.
9. *Kashchenko S.A.* Normalization in the systems with small diffusion // Int. J. of Bifurcations and chaos. 1996. V. 6. 7. P. 1093–1109.
10. *Kashchenko I.S., Kashchenko S.A.* Quasi-Normal Forms of Two-Component Singularly Perturbed Systems // Doklady Mathematics. 2012. V. 86. № 3. p. 865.
11. *Kashchenko S.A.* Asymptotic Behavior of Rapidly Oscillating Solutions of the Modified Camassa–Holm Equation // Theoretical and Mathematical Physics. 2020. V. 203. № 1. pp. 469–482.
12. *Kashchenko I.S., Kashchenko S.A.* Infinite Process of Forward and Backward Bifurcations in the Logistic Equation with Two Delays // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2019. V. 22. № 4. pp. 407–412.
13. *Ablowitz M.J., Segur H.* Solitons and the Inverse Scattering Transform. Philadelphia. PA.: SIAM, 1981.
14. *Zabusky N.J., Kruskal M.D.* Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys Rev. Lett. 1965. V. 15. P. 240–243.

THE CONSTRUCTION OF THE FAMILY OF EQUATIONS TO DESCRIBE IRREGULAR SOLUTIONS IN THE FERMI–PASTA–ULAMA PROBLEM

S. A. Kashchenko

Regional Scientific and Educational Mathematical Center of the P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The question about the asymptotics of the solutions of the spatial distributed chain in the Fermi Pasta Ulam problem is considered. Continual families of irregular solutions depending on the parameters have been constructed. It has been shown that they are described by special systems of Schrödinger type.

Keywords: Fermi–Pasta–Ulam problem, quasinormal forms, asymptotics, special distributed chains

УДК 517.71

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ, СВЯЗАННЫЕ С ОПИСАНИЕМ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ

© 2021 г. Академик РАН В. В. Козлов^{1,*}, О. Г. Смолянов^{2,**}

Поступило 08.11.2021 г.

После доработки 08.11.2021 г.

Принято к публикации 18.11.2021 г.

Обсуждаются различные представления состояний квантовых систем и доказываются их эквивалентность. В частности, восходящий к Л.Д. Ландау подход, в котором оператор плотности рассматривается как редукция чистого состояния квантовой системы, описываемой тензорным произведением подходящих гильбертовых пространств. При этом исследуется изменение состояний подсистем квантовой системы в результате экспериментов.

Ключевые слова: чистое состояние, оператор плотности, тензорное произведение, редукция состояний, вектор Белла

DOI: 10.31857/S2686954321060114

Рассматривается применение вероятностных методов к описанию квантовой динамики. При этом результаты квантовых измерений могут влиять на параметры вероятностного пространства. Обсуждается связь между следующими описаниями квантовых состояний: 1) с помощью ненулевых векторов гильбертова пространства (содержащие их одномерные подпространства отождествляются с состояниями, называемыми чистыми); 2) с помощью вероятностных распределений на этом гильбертовом пространстве; 3) с помощью ядерных операторов (операторов плотности) в том же гильбертовом пространстве и, наконец, 4) с помощью векторов расширенного гильбертова пространства, представляющего собой тензорное произведение исходного и вспомогательного гильбертова пространства, размерность которого не меньше размерности исходного пространства; оператор плотности получается как редукция оператора проектирования на подходящее одномерное подпространство этого тензорного произведения (такие одномерные подпространства можно задавать с помощью векторов Белла). Необходимые определения приводятся ниже. Отметим, что последнее определение оператора плотности принадлежит Л.Д. Ландау, который считал

его одним из десяти самых значительных своих достижений. Кроме того, обсуждается проводимое на произвольном расстоянии от исследуемой квантовой системы изменения ее состояний, задаваемых векторами Белла расширенных квантовых систем; такие изменения связаны с так называемым парадоксом Эйнштейна—Подольского—Розина.

Между прочим, статья Л.Д. Ландау появилась значительно раньше парадокса Эйнштейна—Подольского—Розина и векторов Белла (см. [1]).

1. МЕРЫ НА ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ОПЕРАТОРЫ ПЛОТНОСТИ

В аксиоматике квантовой механики, восходящей к Макс Борну, каждой квантовой системе сопоставляется комплексное сепарабельное гильбертово пространство (которое далее обозначается символом H); при этом каждое состояние квантовой системы, не являющееся вероятностной смесью отличных от него состояний (именно такие состояния называются чистыми), задается ненулевым вектором $h \in H$. Если каждый ненулевой вектор пространства H задает состояние квантовой системы, то говорят, что в ней нет правил суперотбора. Считается, что множество физических величин, которые можно экспериментально измерить (они называются наблюдаемыми), находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $\mathcal{L}^s(H)$ самосопряженных операторов в H , которые по этой причине в физической

¹Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия

²Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: kozlov@pran.ru

**E-mail: smolyanov@yandex.ru

литературе также называются наблюдаемыми. Предполагается, что если $A \in \mathcal{L}^s(H)$ и $h \in H$, $h \neq 0$, то среднее значение \bar{A} результатов измерений наблюдаемой A , проводимых над одинаковыми копиями квантовой системы, состояние каждой из которых задается вектором h , определяется равенством $\bar{A} = \frac{1}{\|h\|^2} (Ah, h)$. Отсюда следует, что если ν – вероятностная мера на $H \setminus \{0\}$, то среднее значение \bar{A}_ν результатов измерений наблюдаемой A , проводимых над элементами ансамбля, состоящего из квантовых систем с гильбертовым пространством H , распределение состояний которых описывается мерой ν , определяется равен-

$$\bar{A}_\nu = \int_{H \setminus \{0\}} \frac{(Ah, h)}{\|h\|^2} \nu(dh).$$

Отметим, что векторы h_1 и h_2 задают одно и то же состояние квантовой системы тогда и только тогда, когда они пропорциональны. Поэтому всегда можно предполагать, что $\|h\| = 1$; конечно, даже это предположение не позволяет определить вектор h однозначно, так как его можно умножить на комплексное число, модуль которого равен 1.

Предложение 1. В гильбертовом пространстве H существует такой (единственный) неотрицательный ядерный оператор T_ν с единичным следом, для которого равенство

$$\bar{A}_\nu = \int_{H \setminus \{0\}} \frac{(Ah, h)}{\|h\|^2} \nu(dh) = \text{tr}(AT_\nu)$$

справедливо, какова бы ни была наблюдаемая $A \in \mathcal{L}^s(H)$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{L}^s(H)$; тогда значения функции $\{h \mapsto |(h, Ah)| \|h\|^{-2}\}$ не превышают $\|A\|$ одновременно для всех $h \neq 0$, так что интеграл из формулировки предложения корректно определен. При этом можно проверить, что все предположения теоремы Глиссона (см. [2, 8]) выполнены. Поэтому в пространстве H существует неотрицательный ядерный оператор T_ν для которого равенство $\int_{H \setminus \{0\}} \frac{(Ah, h)}{\|h\|^2} \nu(dh) = \text{tr}(AT_\nu)$ справедливо. Предложение 1 доказано.

Предложение 2. Каков бы ни был неотрицательно определенный ядерный оператор T в гильбертовом пространстве H , обладающий единичным следом, на пространстве H существует вероятностная (борелевская) мера ν_T такая, что для

каждой наблюдаемой $A \in \mathcal{L}^s(H)$ справедливо равенство

$$\int_H (h, Ah) \|h\|^{-2} \nu_T(dh) = \text{tr}AT.$$

Доказательство. Пусть μ – (счетно аддитивная) гауссовская мера на H с нулевым математическим ожиданием и корреляционным оператором T . Тогда мера ν_T , определяемая равенством $\nu_T = (h, h)\mu$ – это та мера, существование которой утверждается в предложении 2. Предложение 2 доказано.

Замечание 1. В то время как оператор T из предложения 1 определяется по мере ν_T единственным образом, мера ν_T не определяется однозначно по оператору T .

Предложения 1 и 2 делают естественным следующее определение квантового состояния.

Определение 1. Состоянием квантовой системы с (комплексным сепарабельным гильбертовым) пространством H называется неотрицательный ядерный оператор в H , обладающий единичным следом.

Предложение 3. Для каждой ограниченной наблюдаемой A (т.е. для каждого ограниченного самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве H) среднее значение результатов измерений этой наблюдаемой, проводимых над находящимися в состоянии T идентичными копиями квантовой системы, определяется равенством

$$\bar{A} = \text{tr}AT (= \text{tr}TA).$$

Это предложение вытекает из двух предыдущих.

Замечание 2. В [3, с. 29] сказано, что определение оператора плотности (в этой книге он назван статистическим оператором) было впервые введено в квантовую механику фон Нейманом; однако фон Нейман ввел только определение 1; другое определение оператора плотности, введенное Л.Д. Ландау, (см. [4]) ему не было известно. Отметим еще раз, что в определении Ландау фактически впервые встречаются функции, играющие роль векторов Белла; они используются также при описании парадокса Эйнштейна–Подольского–Розина (см. [1] и имеющиеся там ссылки).

2. ОПЕРАТОРЫ ПЛОТНОСТИ КАК РЕДУКЦИИ СОСТОЯНИЙ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Как известно (см. [6]), если квантовая система состоит из двух подсистем с гильбертовыми пространствами H_1 и H_2 , то гильбертово простран-

ство объединенной системы можно отождествить с гильбертовым тензорным произведением пространств H_1 и H_2 (определение гильбертова тензорного произведения можно найти в книге [6]) или с его подпространствами (типичные примеры: замыкание подпространства симметричных тензоров и замыкание подпространства антисимметричных тензоров).

Определение 2 (см. [6, с. 607, аксиома 5]. H_2 -редукцией оператора плотности T , действующего в пространстве $H_1 \otimes H_2$, называется такой оператор плотности T_1 в пространстве H_1 , что какова бы не была ограниченная наблюдаемая A в пространстве H_1 , справедливо равенство $\text{tr}_{H_1}(AT_1) = \text{tr}_H(A \otimes I_2, T)$, где символ tr_{H_1} обозначает след оператора в пространстве H_1 , а символ tr_H обозначает след оператора в пространстве H . Далее вместо термина H_2 -редукция используется термин редукция.

Замечание 3. Квантовые системы с гильбертовыми пространствами H_1 и H_2 , рассматриваемые как подсистемы их объединений, называются открытыми. Отметим еще, что термин редукция имеет два значения. Во-первых, то, о котором говорится в определении 2, и, во-вторых, редукцией квантового состояния называется его изменение после проведенного измерения.

Предложение 4. Пусть T — оператор плотности в гильбертовом пространстве H , равном $H_1 \otimes H_2$ (т.е. T — это неотрицательный ядерный оператор в H со следом, равным 1). Тогда в H_1 существует такой оператор плотности T_1 , что для каждой ограниченной наблюдаемой A в H_1 справедливо равенство $\text{tr}_{H_1}(AT_1) = \text{tr}_H(A \otimes I_2, T)$.

Доказательство. Если $Ax = (x, a)b$, где $a, b \in H_1$, то равенство из предложения 4 проверяется непосредственно. Из выполнения этого равенства для таких A вытекает его выполнение для произвольных ограниченных наблюдаемых. Предложение 4 доказано.

Предложение 5. Каждый неотрицательный ядерный оператор со следом 1 в пространстве H_1 является редукцией чистого состояния пространства $H_1 \otimes H_2$, где H_2 — гильбертово пространство, размерность которого не меньше размерности гильбертова пространства H_1 .

Доказательство. Пусть T — неотрицательный ядерный оператор со следом 1 в пространстве H_1 , $\{e_j\}$ — ортонормированный базис пространства H_1 , состоящий из собственных векторов оператора T , λ_j — соответствующие собственные значения. Пусть H_2 — гильбертово пространство, обладающее ортонормированным ба-

зисом $\{h_k\}$, имеющим ту же мощность, что и базис $\{e_j\}$, и пусть вектор φ пространства $H_1 \otimes H_2$ определяется равенством $\varphi = \sum_k \lambda_k e_k \otimes h_k$ (сумма справа называется вектором Белла). Тогда можно непосредственно проверить, что оператор T является редукцией чистого состояния, заданного вектором φ . Предложение 5 доказано.

Из приведенных предложений вытекает следующая

Теорема 1. Следующие определения состояний квантовой системы равносильны:

- (1) Состоянием квантовой системы называется ядерный неотрицательно определенный оператор со следом 1 в H (называемый оператором плотности);
- (2) Состоянием квантовой системы называется вероятностная мера на пространстве H ;
- (3) Состоянием квантовой системы с гильбертовым пространством H_1 называется редукция состояния T квантовой системы с гильбертовым пространством $H_1 \otimes H_2$, где размерность пространства H_2 не меньше размерности пространства H_1 (при этом состояние T можно считать чистым).

3. АКСИОМЫ КОЛМОГОРОВА И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

В этом разделе обсуждается изменение состояний квантовых систем под влиянием экспериментов; при этом система, состояние которой меняется, может быть на любом расстоянии от системы, с которой производится эксперимент. Предполагается, что квантовая система с гильбертовым пространством H состоит из двух подсистем с гильбертовыми пространствами H_1 и H_2 , так что $H = H_1 \otimes H_2$; расстояние в физическом пространстве между первой и второй квантовыми системами может быть сколь угодно большим, и тем не менее эксперимент, произведенный над одной из систем, мгновенно меняет состояние другой. Отметим, что изменение состояния каждой системы зависит от результата эксперимента над другой системой, который заранее экспериментатору не известен, именно поэтому противоречия со специальной теорией относительности не возникает.

В аксиомах Колмогорова речь идет о вероятностных мерах на измеримых пространствах. Элементы этих пространств называются элементарными событиями; в квантовой теории вместо термина элементарные события используется термин скрытые параметры. Измеримые пространства, вероятностные меры на них и элементарные события (скрытые параметры) в аксиомах Колмогорова считаются не зависящими от результатов проводимых экспериментов.

Сейчас будет описана ситуация, о которой только что шла речь: когда после эксперимента над одной из систем одновременно меняется состояние обеих систем. Таким образом, можно сказать, что результат эксперимента над одной из систем мгновенно воздействует на вторую систему; однако этот результат, как только что было сказано, заранее не известен экспериментатору, так что экспериментатор заранее не знает, какая именно информация будет передана второй системе; это становится известно экспериментатору только после проведения эксперимента.

Описанная ситуация возникает в следующем эксперименте, предложенном Д. Бомом.

Пусть $H_1 = \mathbb{C}^2$, $H_2 = \mathbb{C}^2$, так что $H_1 \otimes H_2 = \mathbb{C}^4$. Пусть $\{e_1, e_2\}$ и $\{d_1, d_2\}$ – ортонормированные базисы в H_1 и в H_2 , $h = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \otimes d_1 + e_2 \otimes d_2)$ (h называется вектором Белла). Состояние квантовой системы, задаваемое вектором $h \in H$, порождает смешанные состояния подсистем с гильбертовыми пространствами H_1 и H_2 , задаваемые операторами плотности S_1 и S_2 , определяемыми равенствами

$$S_1 x = \frac{(x, e_1)e_1 + (x, e_2)e_2}{2},$$

$$S_2 z = \frac{(z, d_1)d_1 + (z, d_2)d_2}{2}, \quad x \in H_1, \quad z \in H_2.$$

Пусть $A_{\alpha\beta}^1$ – оператор в H_1 проектирования на подпространство, порожденное вектором $\alpha e_1 + \beta e_2$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ и $A_{\alpha\beta}^2$ – оператор в H_2 проектирования на подпространство, порожденное вектором $\alpha d_1 + \beta d_2$. Так как состояние квантовой системы с гильбертовым пространством H задается вектором h , то измерение наблюдаемой $A_{\alpha\beta}^1$ в подсистеме с гильбертовым пространством H_1 – это то же самое, что измерение наблюдаемой $A_{\alpha\beta}^1 \otimes I_2$, где I_2 – тождественный оператор в H_2 ; аналогично измерение наблюдаемой $A_{\alpha\beta}^2$ – то же самое, что измерение наблюдаемой $I_1 \otimes A_{\alpha\beta}^2$, где I_1 – тождественный оператор в H_1 .

Предположим, что при измерении наблюдаемой получилось число 1; тогда согласно постулату Людерса фон Неймана, состояние системы с гильбертовым пространством H сразу после измерения задается вектором, являющимся проекцией $\text{pr}_E h$ вектора h на двумерное собственное подпространство E оператора, относящееся к собственному значению 1. Оно представляет собой тензорное произведение одномерного под-

пространства, порожденного вектором $\alpha e_1 + \beta e_2$, и пространства H_2 . Это означает, что

$$\begin{aligned} \text{pr}_E h &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(e_1 \otimes d_1 + e_2 \otimes d_2, (\alpha e_1 + \beta e_2) \otimes d_1) \times \\ &\quad \times ((\alpha e_1 + \beta e_2) \otimes d_1) + \\ &\quad + (e_1 \otimes d_1 + e_2 \otimes d_2, (\alpha e_1 + \beta e_2) \otimes d_2) \times \\ &\quad \times ((\alpha e_1 + \beta e_2) \otimes d_2)] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha((\alpha e_1 + \beta e_2) \otimes d_1) + \beta((\alpha e_1 + \beta e_2) \otimes d_2)] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha e_1 + \beta e_2) \otimes (\alpha d_1 + \beta d_2). \end{aligned}$$

Из этой формулы следует, что если результатом измерения наблюдаемой $A_{\alpha\beta}^1$ стало число 1 (вероятность этого равна $\frac{1}{2}$), то состояние системы с пространством H сразу после измерения задается вектором $(\alpha e_1 + \beta e_2) \otimes (\alpha d_1 + \beta d_2)$. Это означает, что после измерения наблюдаемой $A_{\alpha\beta}^1$ смешанное состояние первой системы становится чистым и описывается вектором $\alpha e_1 + \beta e_2$, и одновременно смешанное состояние второй системы также становится чистым и описывается вектором, координаты которого в базисе $\{d_1, d_2\}$ совпадают с координатами в базисе $\{e_1, e_2\}$ вектора, задающего состояние первой системы.

Поэтому можно считать, что измерение наблюдаемой $A_{\alpha\beta}^1$, одновременно является измерением наблюдаемой $A_{\alpha\beta}^2$. При этом, как уже отмечалось, расстояние в физическом пространстве между первой и второй системами может быть произвольным, и несмотря на это результат эксперимента над одной из систем мгновенно определяет состояние, в которое переходит вторая система сразу после этого эксперимента. Сравнительно недавно французский физик А. Аспре (A. Aspect) осуществил эксперимент, подтвердивший справедливость только что сказанного.

Существует тесная связь (см. [6]) между так называемым неравенством Белла, получаемым в рамках аксиоматики Колмогорова, и экспериментами над квантовыми системами, состоящими из двух подсистем.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят Илью Александровича Надъярных, студента шестого курса механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова, за большую и квалифицированную помощь при подготовке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пуанкаре А., Эренфест П., Эренфест Т., фон Нейман Дж. Работы по статистической механике. С доп. и под ред. В.В. Козлова и О.Г. Смолянова. ИКИ. Библиотека журнала рациональная и хаотическая динамика. М. – Ижевск, 2011.
2. Gleason A.M. Measures on the closed subspaces of a Hilbert space // J. Math. Mech, 1957. № 6. P. 885–893.
3. Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.). Введение в квантовую статистическую механику. М.: Наука, 1984.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика и нерелятивистская теория. Гос. Изд. физ.-мат. литры, М., 1963.
5. Смолянов О.Г., Трумен А. Вероятностные модели квантовых систем и неравенства типа Белла // ДАН. 2002. Т. 387. 1. С. 31–36.
6. Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ. Институт компьютерных исследований. Библиотека журнала рациональная и хаотическая динамика, Москва–Ижевск, 2020.
7. Bell J.S. Speakable and Uspeakable in Quantum Mechanics. Cambridge University Press, 1987.
8. Parthasarathy K.R. An Introduction to Quantum Stochastic Calculus. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, 1992.

MATHEMATICAL STRUCTURES RELATED TO THE DESCRIPTION OF QUANTUM STATES

Academician of the RAS V. V. Kozlov^a and O. G. Smolyanov^b

^a*V.A. Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^b*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

One discussed some representations of the states of quantum systems and their equivalence is proved. In particular, the approach going back to L.D. Landau, in which the density operator is constructed using the reduction of the pure state of a quantum system described by a tensor product of suitable Hilbert spaces is given. Under the just formulated assumptions, the change of the states of subsystems of a quantum system as a result of experiments is investigated.

Keywords: pure state, density operator, tensor product, reduction of states, Bell vector

УДК 519.63

ПРИМЕНЕНИЕ СХЕМЫ SABARET ДЛЯ РАСЧЕТА РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

© 2021 г. В. В. Остапенко^{1,2,*}, В. А. Колотилов^{2,3,**}

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным 17.02.2021 г.

Поступило 17.02.2021 г.

После доработки 06.09.2021 г.

Принято к публикации 05.11.2021 г.

Предлагается метод квазиинвариантов при построении схемы SABARET, аппроксимирующей гиперболическую систему законов сохранения, не допускающую запись в форме инвариантов. Применение этого метода вместе с дополнительной коррекцией потоков обеспечивает монотонизацию разностного решения при расчете разрывных решений с ударными волнами и контактными разрывами. В качестве примера рассмотрена система уравнений неизоэнтропической газовой динамики с уравнением состояния политропного газа. Тестовые расчеты начально-краевой задачи Blast Wave показали, что предлагаемая схема подавляет нефизические осцилляции, приводящие к неустойчивости разностного решения при расчете по схеме SABARET, в которой дополнительная коррекция потоков отсутствует.

Ключевые слова: метод квазиинвариантов, схема SABARET, уравнения газовой динамики, задача Blast Wave

DOI: 10.31857/S2686954321060126

1. Для численного решения гиперболических систем законов сохранения [1] широко применяется схема SABARET [2], монотонность которой изучалась в [3–6]. Одно из преимуществ этой схемы заключается в том, что она локализует ударные волны точнее [7], чем схемы формально более высокого порядка, например, схема WENO5 [8]. Стандартный алгоритм схемы SABARET [2], аппроксимирующей гиперболическую систему дифференциальных уравнений, предполагает, что эта система допускает запись в форме инвариантов [1]. Для построения схемы SABARET, аппроксимирующей систему уравнений неизоэнтропической газовой динамики [1], не допускающей записи в форме инвариантов, используются квазиинварианты [2], определяемые неоднозначно.

В настоящей работе предлагается общий метод квазиинвариантов при построении схемы SABARET, аппроксимирующей гиперболическую систему законов сохранения, не допускающую запись в форме инвариантов. Применение этого метода вместе с дополнительной коррекцией потоков обеспечивает монотонизацию разностного решения при расчете разрывных решений с ударными волнами и контактными разрывами. В качестве примера рассмотрена система законов сохранения неизоэнтропической газовой динамики с политропным уравнением состояния [1]. Тестовые расчеты классической задачи Blast Wave [9] показали, что предлагаемая схема эффективно подавляет нефизические осцилляции, приводящие к неустойчивости разностного решения при расчете по другим вариантам схемы SABARET, в которых дополнительная коррекция потоков отсутствует.

2. Рассмотрим строго гиперболическую систему законов сохранения

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{u}(x, t)$ — искомая, а $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ — заданная вектор-функция, содержащая m компонент. Строгая гиперболическость системы ((1)) означает, что все собственные значения $\lambda_i(\mathbf{u})$ матрицы Якоби $A(\mathbf{u}) = \mathbf{f}'_u(\mathbf{u})$ действительны и различны, в силу чего соответству-

¹Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

²Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, Новосибирск, Россия

³Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича Сибирского отделения Российской академии наук, Новосибирск, Россия

*E-mail: ostigil@mail.ru

**E-mail: kolotilov1992@gmail.com

ющие им левые собственные вектора $\mathbf{l}^i(\mathbf{u})$ образуют базис в пространстве \mathbb{R}^m .

Известно [1], что при $m \geq 3$ дифференциальные формы $\mathbf{l}^i(\mathbf{u})d\mathbf{u}$ могут быть неинтегрируемы и система ((1)) в этом случае не допускает полного набора инвариантов. Если некоторая дифференциальная форма $\mathbf{l}^i(\mathbf{u})d\mathbf{u}$ интегрируема, то система (1) имеет инвариант $w_i(\mathbf{u})$, сохраняющийся вдоль характеристик i -го семейства. Если дифференциальная форма $\mathbf{l}^i(\mathbf{u})d\mathbf{u}$ неинтегрируема, то будем предполагать существование вектора $\bar{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}] = (\bar{u}_1^i, \dots, \bar{u}_s^i)$, где $s < m$, (состоящего из некоторых компонент вектора \mathbf{u}) такого, что интегрируемой является дифференциальная форма $\mathbf{l}^i(\bar{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}_c], \tilde{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}])d\mathbf{u}$, где \mathbf{u}_c – произвольный постоянный вектор, а $\tilde{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}] = (\tilde{u}_1^i, \dots, \tilde{u}_{m-s}^i)$ – вектор, состоящий из тех компонент вектора \mathbf{u} , которые не вошли в вектор $\bar{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}]$. Функцию $w_i(\bar{\mathbf{u}}_i[\mathbf{u}_c], \mathbf{u})$, получаемую в результате такого интегрирования, будем называть квазиинвариантом системы (1). Инварианты системы (1) будем рассматривать как частный случай ее квазиинвариантов. В результате формируется вектор квазиинвариантов $\mathbf{w} = \mathbf{W}(\mathbf{u})$, относительно которого будем предполагать, что преобразование $\mathbf{W}(\mathbf{u})$ является невырожденным.

3. Схему САВАРЕТ, аппроксимирующую систему (1), будем строить на прямоугольной разностной сетке

$$\{x_j, t_n\}; x_j = jh, \quad t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad t_0 = 0, \quad (2)$$

в которой h – шаг сетки по пространству, а τ_n – шаг сетки по времени, определяемый из условия устойчивости

$$\tau_n = \frac{zh}{\max_{i,j} |\lambda_i(\mathbf{v}_{j+1/2}^n)|}, \quad z \in (0,1). \quad (3)$$

В этой схеме используются потоковые $\mathbf{v}_j^n = \mathbf{v}(x_j, t_n)$ и консервативные $\mathbf{v}_{j+1/2}^n = \mathbf{v}(x_{j+1/2}, t_n)$ переменные, заданные в целых x_j и полужелых $x_{j+1/2} = x_j + h/2$ узлах разностной сетки.

Пусть $\mathbf{v}_j^n, \mathbf{v}_{j+1/2}^n$ – известное численное решение на n -м временном слое t_n . Разностное решение $\mathbf{v}_j^{n+1}, \mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1}$ получается по схеме САВАРЕТ в четыре этапа. На первом этапе вычисляются величины

$$\mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1/2} = \mathbf{v}(x_{j+1/2}, t_{n+1/2}) = \mathbf{v}_{j+1/2}^n - r_n(\mathbf{f}(\mathbf{v}_{j+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{v}_j^n)), \quad (4)$$

где $t_{n+1/2} = t_n + \tau_n/2$ и $r_n = \tau_n/(2h)$. На втором этапе находятся предварительные значения $\tilde{\mathbf{v}}_j^{n+1}$, которые используются на третьем этапе

$$\mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1} = \mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1/2} - r_n(\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{v}}_{j+1}^{n+1}) - \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{v}}_j^{n+1})). \quad (5)$$

На четвертом этапе определяются окончательные значения \mathbf{v}_j^{n+1} . Алгоритм схемы на втором и четвертом этапах приводится ниже.

4. На втором этапе вычисляются квазиинварианты системы (1) в целых узлах $(n+1)$ -го временного слоя. Опишем процедуру этого вычисления для некоторого квазиинварианта w_i (для краткости индекс i будем опускать). Сначала для каждой пространственной ячейки $[x_j, x_{j+1}]$ находятся значения

$$\begin{aligned} (w_r)_j^n &= w(\mathbf{b}, \mathbf{v}_j^n), \\ (w_l)_{j+1}^n &= w(\mathbf{b}, \mathbf{v}_{j+1}^n), \quad w_{j+1/2}^{n+1/2} = w(\mathbf{b}, \mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1/2}), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\mathbf{b} = \mathbf{b}_{j+1/2}^{n+1/2} = \bar{\mathbf{v}}[\mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1/2}]$; при этом в каждом целом узле j определены два значения квазиинварианта $(w_r)_j^n$ и $(w_l)_j^n$, вычисляемые в ячейках, расположенных справа и слева от узла j . При помощи значений (6) определяются величины

$$\begin{aligned} (\bar{w}_r)_j^{n+1} &= 2w_{j+1/2}^{n+1/2} - (w_l)_{j+1}^n, \\ (\bar{w}_l)_{j+1}^{n+1} &= 2w_{j+1/2}^{n+1/2} - (w_r)_j^n. \end{aligned} \quad (7)$$

Следуя [2], величины (7) при помощи функции

$$F(u, m, M) = \begin{cases} u, & m \leq u \leq M, \\ m, & u \leq m, \\ M, & u \geq M, \end{cases} \quad (8)$$

корректируются по формулам

$$\begin{aligned} (\tilde{w}_r)_j^{n+1} &= F((\bar{w}_r)_j^{n+1}, m_{j+1/2}^n, M_{j+1/2}^n), \\ (\tilde{w}_l)_{j+1}^{n+1} &= F((\bar{w}_l)_{j+1}^{n+1}, m_{j+1/2}^n, M_{j+1/2}^n), \end{aligned} \quad (9)$$

в которых

$$\begin{aligned} m_{j+1/2}^n &= \min((w_r)_j^n, w_{j+1/2}^n, (w_l)_{j+1}^n), \\ M_{j+1/2}^n &= \max((w_r)_j^n, w_{j+1/2}^n, (w_l)_{j+1}^n), \end{aligned} \quad (10)$$

где $w_{j+1/2}^n = w(\mathbf{b}, \mathbf{v}_{j+1/2}^n)$.

Значение квазиинварианта \tilde{w}_j^{n+1} определяется в зависимости от знаков скоростей характеристик

$$\lambda_{j-1/2}^{n+1/2} = \lambda(\mathbf{v}_{j-1/2}^{n+1/2}), \quad \lambda_{j+1/2}^{n+1/2} = \lambda(\mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1/2}) \quad (11)$$

в ячейках, примыкающих к узлу j . Если $\lambda_{j-1/2}^{n+1/2} > 0$ и $\lambda_{j+1/2}^{n+1/2} \geq 0$, то $\tilde{w}_j^{n+1} = (\tilde{w}_l)_j^{n+1}$; если $\lambda_{j-1/2}^{n+1/2} \leq 0$ и $\lambda_{j+1/2}^{n+1/2} < 0$, то $\tilde{w}_j^{n+1} = (\tilde{w}_r)_j^{n+1}$. Отдельно следует рассмотреть

случаи, когда скорости характеристик (11) разных знаков. Если $\lambda_{j-1/2}^{n+1/2} \leq 0$ и $\lambda_{j+1/2}^{n+1/2} \geq 0$, то

$$\tilde{w}_j^{n+1} = w(\mathbf{b}_j^{n+1/2}, \mathbf{v}_j^n), \quad \mathbf{b}_j^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_{j-1/2}^{n+1/2} + \mathbf{b}_{j+1/2}^{n+1/2}); \quad (12)$$

если $\lambda_{j-1/2}^{n+1/2} > 0$ и $\lambda_{j+1/2}^{n+1/2} < 0$, то выполняется экстраполяция

$$\tilde{w}_j^{n+1} = w_{j-1/2}^{n+1/2} + w_{j+1/2}^{n+1/2} - w_j^n. \quad (13)$$

В завершении второй этапа по найденным значениям вектора квазиинвариантов $\tilde{\mathbf{w}}_j^{n+1}$ вычисляется вектор $\tilde{\mathbf{v}}_j^{n+1} = \mathbf{W}^{-1}(\tilde{\mathbf{w}}_j^{n+1})$, где \mathbf{W}^{-1} – преобразование, обратное к \mathbf{W} .

5. По аналогии с [6] на четвертом этапе проводится дополнительная коррекция квазиинвариантов $\tilde{\mathbf{w}}_j^{n+1}$. При выполнении неравенств $\lambda_{j-1/2}^{n+1/2} \leq 0$ и $\lambda_{j+1/2}^{n+1/2} \geq 0$ эта коррекция проводится по формуле

$$w_j^{n+1} = \frac{1}{2}(w_{j-1/2}^{n+1} + w_{j+1/2}^{n+1}), \quad (14)$$

а в остальных случаях – по формуле

$$w_j^{n+1} = F(\tilde{w}_j^{n+1}, m_j^{n+1}, M_j^{n+1}), \quad (15)$$

в которой

$$\begin{aligned} m_j^{n+1} &= \min(w_{j-1/2}^{n+1}, w_{j+1/2}^{n+1}), \\ M_j^{n+1} &= \max(w_{j-1/2}^{n+1}, w_{j+1/2}^{n+1}), \end{aligned} \quad (16)$$

где $w_{j\pm 1/2}^{n+1} = w(\mathbf{b}_{j\pm 1/2}^{n+1/2}, \mathbf{v}_{j\pm 1/2}^{n+1})$. После вычисления вектора $\tilde{\mathbf{w}}_j^{n+1}$ определяются окончательные значения вектора $\mathbf{v}_j^{n+1} = \mathbf{W}^{-1}(\tilde{\mathbf{w}}_j^{n+1})$.

Дополнительная коррекция потоков, аналогичная (14)–(16), является необходимым условием монотонности схемы CABARET при аппроксимации линейного гиперболического уравнения [3], квазилинейного закона сохранения [4, 5] и линейной гиперболической системы дифференциальных уравнений [6]. В различных вариантах схемы CABARET, рассматриваемых в [2], такая дополнительная коррекция потоков не применяется.

6. В качестве конкретной гиперболической системы (1) выберем систему уравнений невязантропической газовой динамики [1], для которой

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho e + p) \end{pmatrix}, \quad e = \varepsilon + \frac{u^2}{2}, \quad (17)$$

с политропным уравнением состояния $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$, где ρ , u , ε и p – плотность, скорость, внутренняя энергия и давление в газе, и γ – показатель адиа-

баты. Характеристики этой системы распространяются со скоростями

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c,$$

где $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ – скорость звука в газе.

Поскольку система (1), (17) имеет инвариант

$$w_2 = \ln \frac{p}{\rho^\gamma},$$

сохраняющийся вдоль характеристик второго семейства, то на поверхностях $w_2 = \text{const}$ дифференциальные формы, соответствующие первому и третьему характеристическим уравнениям этой системы, интегрируемы [1]. Однако уравнения таких поверхностей можно получить только в результате решения системы (1), (17), в силу чего инварианты w_1 и w_3 , сохраняющиеся вдоль характеристик первого и третьего семейств этой системы, в общем случае выписать в явном виде не удается. Поэтому в настоящей работе мы применяем для схемы CABARET (4)–(16) изохорические квазиинварианты [2]:

$$w_1 = u - g, \quad w_3 = u + g, \quad g = 2\sqrt{p/(\gamma\rho c)}.$$

7. Рассмотрим для системы (1), (17) при $x \in [0, X]$ и $t \geq 0$, где $X = 1$, начально-краевую задачу Blast Wave [9] со следующими начальными

$$\begin{aligned} \rho(x, 0) &= 1, \quad u(x, 0) = 0, \\ p(x, 0) &= \begin{cases} 1000, & 0 \leq x \leq 0.1, \\ 0.01, & 0.1 < x \leq 0.9, \\ 100, & 0.9 < x \leq 1, \end{cases} \quad x \in [0, X], \end{aligned} \quad (18)$$

и граничными

$$u(0, t) = u(X, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (19)$$

условиями, в которых $X = 1$. Численные расчеты данной задаче по схеме CABARET проводились на разностной сетке (2), в которой $j = 0, 1, \dots, N$, где $N = X/h$ – количество пространственных узлов сетки. Начальные условия (18) с учетом обозначений (17) аппроксимировались по формулам

$$\mathbf{v}_j^0 = \mathbf{u}(x_j, 0), \quad \mathbf{v}_{j+1/2}^0 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_j^0 + \mathbf{v}_{j+1}^0),$$

а граничные условия непротекания ((19)) по формулам

$$u_0^n = u_N^n = 0,$$

в которых u_j^n – сеточная функция скорости газа. Поскольку в точном решении задачи (1), (17)–(19) давление газа может принимать достаточно ма-

Таблица 1

h	0.01	0.004	0.002	0.001	0.0005	0.00025
Δ	9.2133	3.9031	1.8730	1.0453	0.4773	0.1560

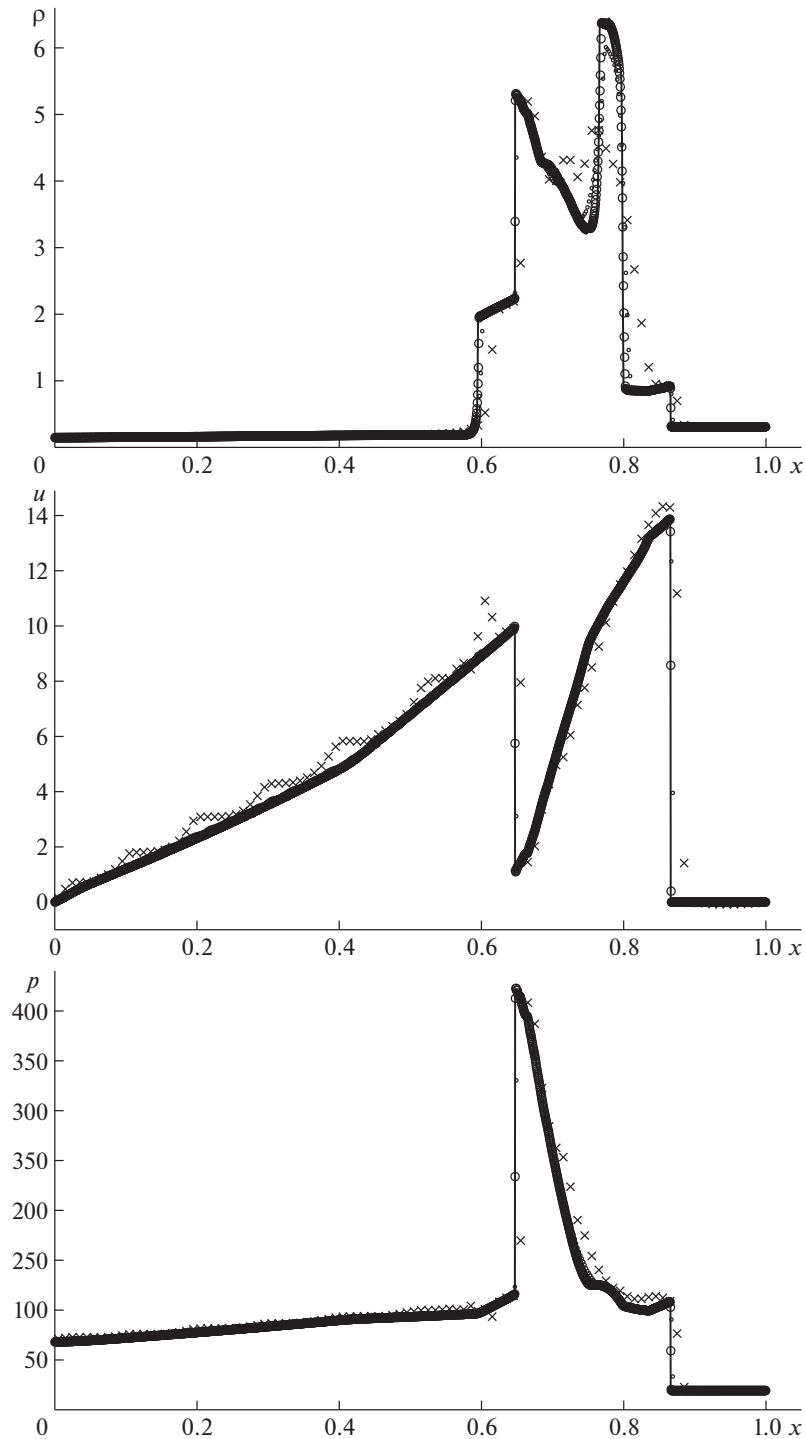


Рис. 1. Сравнение точного (сплошная линия) и численного решения задачи Blast Wave на последовательности из трех сгущающихся сеток с пространственными шагами $h_1 = 0.01$ (\times), $h_2 = 0.002$ (\circ) и $h_3 = 0.004$ (\bullet).

лые значения, то для обеспечения положительности давления в разностном решении на каждом временном слое проводится следующая дополнительная корректировка численного значения давления: если давление в некотором узле разностной сетки меньше $\epsilon = 0.0001$, то оно заменяется на значение ϵ .

Тестовые расчеты задачи Blast Wave (17)–(19) показали, что в схеме САВАРЕТ [2], при построении которой применяются линейные квазиинварианты, а также в схеме САВАРЕТ (4)–(13) без дополнительной коррекции потоков (14)–(16), в начале численного расчета в окрестности левого контактного разрыва возникают нефизические

осцилляции давления, которые с течением времени неограниченно возрастают, приводя к неустойчивости разностного решения. В схеме CABARET (4)–(16) эти нефизические осцилляции эффективно подавляются, что позволяет с достаточно высокой точностью рассчитывать задачу Blast Wave. Для иллюстрации процесса сходимости разностного решения к точному на рис. 1 и в табл. 1 в момент времени $t = 0.038$ приведены результаты расчета задачи (1), (17)–(19) по схеме CABARET (4)–(16) на последовательности сгущающихся сеток (2) с коэффициентом $z = 0.4$ в условии устойчивости (3). Точное решение, показанное на рис. 1 сплошной линией, моделируется численным расчетом по схеме PPM [9] на достаточно мелкой разностной сетке (2), (3). В табл. 1 приведены ошибки разностного решения, вычисляемые по формуле

$$\Delta[\mathbf{v}_h] = h \sum_{j=1}^{N_h} |\mathbf{v}_h(x_{j+1/2}, t_2) - \mathbf{u}(x_{j+1/2}, t_2)|,$$

где $N_h = X/h$ – количество пространственных узлов разностной сетки. Из таблицы следует, что в сеточной норме L_1 разностное решение сходится к точному решению приблизительно с первым порядком, что характерно для сильной сходимости в интегральных нормах разностных решений к точным решениям, содержащим ударные волны.

Предложенная модификация схемы CABARET обобщается на случай многомерных гиперболических систем законов сохранения, а также на случай уравнений газовой динамики с другими уравнениями состояния.

APPLICATION OF THE CABARET SCHEME FOR THE CALCULATION OF DISCONTINUOUS SOLUTIONS OF THE HYPERBOLIC SYSTEM OF CONSERVATION LAWS

V. V. Ostapenko^{a,b} and V. A. Kolotilov^{b,c}

^a Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

^b Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation

^c Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin

A method is proposed for constructing a CABARET scheme that approximates a hyperbolic system of conservation laws that cannot be written in the form of invariants. This technique is based on the method of quasi-invariants and additional flux correction, which ensures monotonicization of the difference solution when calculating discontinuous solutions. As an example, a system of conservation laws for nonisentropic gas dynamics with a polytropic state equation is considered. Test calculations of the initial-boundary value problem Blast Wave showed that the proposed scheme suppresses nonphysical oscillations leading to the instability of the difference solution when calculating using other variants of the CABARET scheme, in which there is no additional flux correction.

Keywords: quasiinvariants method, CABARET scheme, equations of gas dynamics, Blast Wave problem

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ и ГФЕН в рамках научного проекта № 21-51-53012.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карabasов С.А., Короткин И.А.* Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2013.
3. *Ковыркина О.А., Остапенко В.В.* О монотонности схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей гиперболическое уравнение со знакопеременным характеристическим полем // ЖВМиМФ 2016. Т. 56. № 5. С. 796–815.
4. *Зюзина Н.А., Остапенко В.В.* О монотонности схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей скалярный закон сохранения с выпуклым потоком // ДАН. 2016. Т. 466. № 5. С. 513–517.
5. *Остапенко В.В., Черевко А.А.* Применение схемы КАБАРЕ для расчета разрывных решений скалярного закона сохранения с невыпуклым потоком // ДАН. 2017. Т. 476. № 5. С. 518–522.
6. *Ковыркина О.А., Остапенко В.В.* О монотонности схемы КАБАРЕ, аппроксимирующей гиперболическую систему законов сохранения // ЖВМиМФ 2018. Т. 58. № 9. С. 1488–1504.
7. *Gologush T.S., Cherevko A.A., Ostapenko V.V.* Comparison of the WENO and CABARET schemes at calculation of the scalar conservation law with a nonconvex flux // AIP Conf. Proc. 2020. V. 2293. № 1. P. 370006.
8. *Jiang G.S., Shu C.W.* Efficient implementation of weighted ENO schemes // J. Comput. Phys. 1996. V. 126. P. 202–228.
9. *Woodward P., Colella P.* The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // J. Comp. Phys. 1984. V. 54. P. 115–173.

УДК 519.63

ГИБРИДНЫЕ СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СХЕМЫ ДЛЯ ЗАДАЧ АРКТИЧЕСКОЙ СЕЙСМОРАЗВЕДКИ

© 2021 г. Член-корреспондент РАН И. Б. Петров^{1,*}, В. И. Голубев^{1,**}, Е. К. Гусева¹

Поступило 29.07.2021 г.

После доработки 06.10.2021 г.

Принято к публикации 19.10.2021 г.

В настоящей работе рассматривается процесс проведения сейсмической разведки газовых месторождений с установкой источника на поверхности ледового острова. Построена модель, включающая в себя ледовое образование, акваторию, многослойный геологический массив и резервуар с метаном. Для корректного описания динамического поведения отдельных сред использованы уравнения линейной теории упругости, акустики, вязкоупругая модель Максвелла и упруговязкопластическая модель Кукуджанова. Для численного решения определяющей системы уравнений используется сеточно-характеристический метод на прямоугольных расчетных сетках. Между средами в явном виде ставятся физические контактные условия. На основе сеточно-характеристического критерия монотонности построена новая гибридная схема повышенного порядка точности. С ее помощью получено полноволновое решение сейсмической задачи в двумерной постановке.

Ключевые слова: прямая задача сейсморазведки, ледовый остров, математическое моделирование, сеточно-характеристический метод, критерий монотонности, гибридная схема

DOI: 10.31857/S2686954321060138

ВВЕДЕНИЕ

Среди актуальных задач описания природных и индустриальных процессов в Арктическом регионе одной из важнейших является задача об искусственном ледовом острове, который может использоваться в качестве морской платформы. Практическая реализация данной технологии была успешно произведена в Канаде [1, 2]. Комплекс задач, связанный с данной постановкой, был частично рассмотрен в работе [3]. Средой, представляющей наибольший интерес в Арктических задачах, является лед. Он является неоднородным материалом со сложной реологией, некоторые свойства которой изложены в [4]. На практике часто динамическое поведение льда моделируется уравнениями упругости. Например, в работах [5–7] авторами был численно решен ряд задач, включающих различные среды: ледовое поле, морская вода и грунт. Для описания их поведения использовались модели линейной упругости и акустики [8–11].

В настоящей работе рассматривается процесс распространения сейсмических волн в сложно построенной модели, включающей в себя ледовый остров, окружающее его ледовое поле, воду и неоднородный геологический массив. Для учета нелинейного поведения льда используется модель вязкоупругости Максвелла [12, 13] и модель упруговязкопластичности Кукуджанова [14].

Для численного решения определяющей системы уравнений в настоящей работе используется сеточно-характеристический метод [15, 16] на прямоугольных сетках. В задачах о распространении волн в сплошных средах могут возникать большие градиенты искоемых функций, поэтому для расчетных схем важно свойство монотонности. Однако монотонных линейных схем с порядком выше первого для гиперболических задач не существует. Для преодоления данной проблемы исследователями было предложено множество подходов, например, использование различных ограничителей потоков таких, как *minmod*, свойства которого изучались в [17], использование реконструированных значений на границах разрыва, как в ENO- и WENO-схемах [18], использование различных критериев монотонности, например монотонности по Хартену для TVD-схем в [19] и гибридизация [20]. В настоящей работе на основе сеточно-характеристического критерия монотонности [21] была построена новая схема повышенного порядка точности. С ее помощью было

¹ Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Долгопрудный, Московская обл., Россия

*E-mail: petrov@mipt.ru

**E-mail: w.golubev@mail.ru

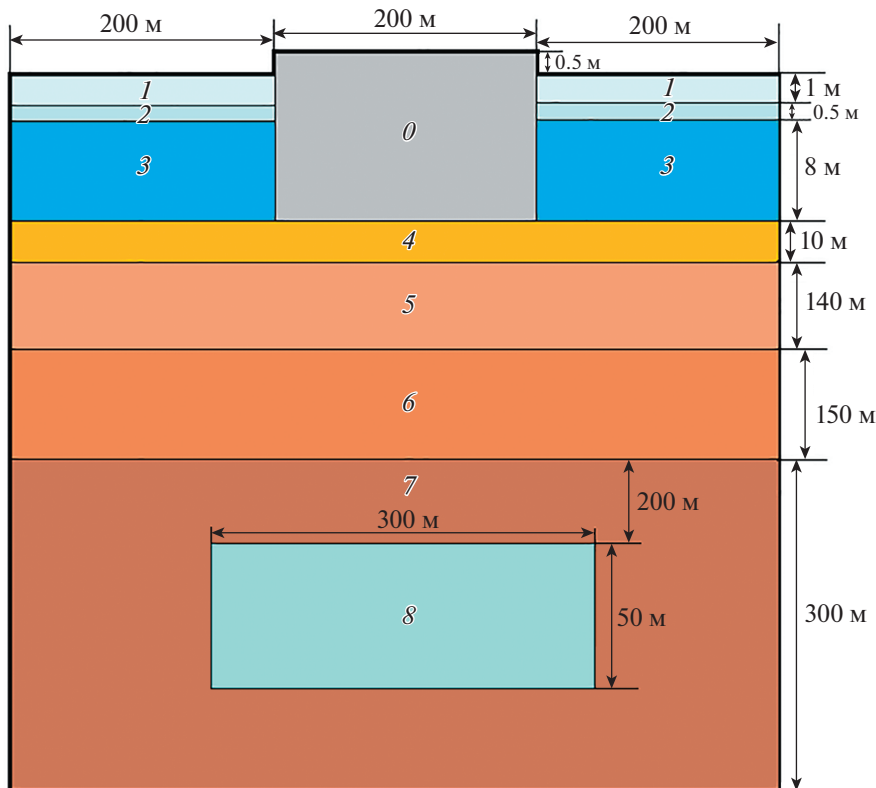


Рис. 1. Общий вид расчетной области.

получено численное решение задачи ледовой сейсморазведки – обнаружение метанового резервуара в слоистом геологическом массиве.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе рассматривается задача о распространении сейсмических волн, инициируемых на поверхности ледового острова. Общий вид расчетной области представлен на рис. 1. Компьютерная модель состоит из следующих физических объектов: 0 – ледовый остров; 1 и 2 – ледовое поле; 3 – толщина воды; 4 – осадочные породы; 5–7 – слоистый геологический массив; 8 – резервуар с метаном. Для корректного описания динамических процессов, происходящих в них, каждая из подобластей описывается соответствующей механико-математической моделью: 0 и 1 – модель Максвелла; 2 – модель Кукуджанова; 3 и 8 – уравнения акустики, 4–7 – уравнения линейной изотропной упругости. Между контактирующими средами ставится физически корректное контактное условие полного сцепления, а на верхней границе используется условие свободной границы. Использование на нижней и боковых границах условия не отражения позволяет минимизировать численные артефакты от границ расчетной области. Общие размеры модели находят-

ся в пределах 600 м по горизонтальной оси и 610 м по вертикальной оси.

В качестве источника сигнала использовалось точечное поверхностное нагружение поверхности льда (области 0) вертикально направленной силой, имеющей синусоидальную зависимость от времени. Целью проводимых расчетов являлось сопоставление волновых полей, формирующихся при наличии резервуара с метаном и в его отсутствии. В табл. 1 указаны параметры всех сред, а также используемых в численных расчетах сеток. Здесь введены обозначения: τ_0 – параметр релаксации, k – предел текучести материала, h_1 – пространственный шаг сетки по горизонтали, h_2 – по вертикали.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Рассмотрим определяющую систему уравнений линейной изотропной упругости:

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}, \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} + \mu (\nabla \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla), \quad (2)$$

где \mathbf{f} – вектор внешней силы, ρ – плотность среды, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, \mathbf{v} – вектор скорости среды, λ и μ – упругие параметры Ламе.

Таблица 1. Параметры сред

Номер слоя	c_p , м/с	c_s , м/с	ρ , кг/м ³	h_1 , м	h_2 , м	Другие параметры
0	3940	2493	917	0.5	0.1	$\tau_0 = 0.5$ с
1	3940	2493	917	1	0.04	$\tau_0 = 0.5$ с
2	3940	2493	917	1	0.02	$k = 2.2 \times 10^6$ Па, $\tau_0 = 0.5$ с
3	1500	—	1000	1	0.4	—
4	1806	316	2000	2	0.2	—
5	1900	800	2000	2	2	—
6	2050	900	2000	2	2	—
7	2250	1000	2000	2	2	—
8	430	—	0.6682	2	1	—

Она является гиперболической, поэтому может быть записана в каноническом виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 A_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = 0, \quad (3)$$

где введен вектор неизвестных $\mathbf{u} = (v_x, v_y, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})^T$.

После расщепления системы (3) по пространственным направлениям для численного решения полученных одномерных систем в работе используется сеточно-характеристический метод, основанный на переходе к инвариантам Римана

$$\mathbf{r} = U^{-1} \mathbf{u}, \quad (4)$$

где матрица U^{-1} находится путем диагонализации соответствующей матрицы A_i :

$$A = U^{-1} \Lambda U. \quad (5)$$

Поскольку матрица Λ является диагональной и состоит из собственных значений матрицы A_i , исходная система уравнений превращается в систему одномерных независимых линейных уравнений переноса:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} = 0. \quad (6)$$

Системы уравнений, описывающие поведение акустической среды, а также модели Максвелла и Кукуджанова также являются гиперболическими (с ненулевыми правыми частями) и допускают аналогичные преобразования.

Остановимся подробнее на численном решении линейного уравнения переноса:

$$u_t + \lambda u_x = 0, \quad \lambda = \text{const}. \quad (7)$$

Введем в рассмотрение шеститочечный шаблон: $(t_{n+1}, x_m), (t_n, x_{m-2}), (t_n, x_{m-1}), (t_n, x_m), (t_n, x_{m+1}), (t_n, x_{m+2})$.

Все явные разностные схемы на данном шаблоне можно записать в виде выражения с неопределенными коэффициентами $\alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$:

$$u_m^{n+1} = \alpha_{-2} u_{m-2}^n + \alpha_{-1} u_{m-1}^n + \alpha_0 u_m^n + \alpha_1 u_{m+1}^n + \alpha_2 u_{m+2}^n. \quad (8)$$

А.С. Холодовым был проведен их анализ [20, 21], при котором варьировались коэффициенты $\alpha_{-2}, \alpha_2, \alpha_0$. Его результаты представлены на рис. 2.

Поскольку не существует способа построить явную линейную монотонную схему выше первого порядка аппроксимации, нами был выбран

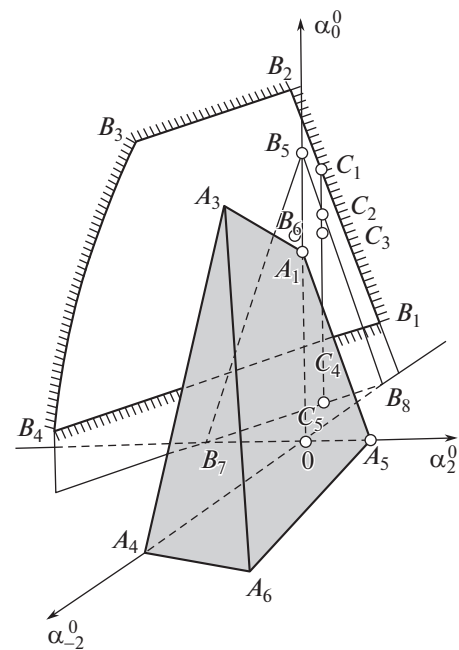


Рис. 2. Пространство неопределенных коэффициентов из работы [22]. Заштрихованная область — схемы 1-го порядка, монотонные по Фридрихсу [23], область $B_1 B_2 B_3 B_4$ — все устойчивые схемы 2-го порядка, прямая $C_1 - C_5$ — все устойчивые схемы 3-го порядка.

подход, основанный на гибридизации вычислительного алгоритма. Для построения расчетной схемы были использованы квазимоноотонные схемы [24], демонстрирующие минимальные осцилляции среди схем 2-го и 3-го порядков, т.е. наиболее близкие по метрике $\sqrt{\sum_{\mu, \nu} (\alpha_{\mu}^{\nu} - \alpha_{\mu}^{\nu})^2}$ к области моноотонных по Фридрихсу схем, схема с наименьшей аппроксимационной ошибкой среди схем 1-го порядка, а также единственная схема 4-го порядка и некоторые схемы 3-го порядка на прямой C_1-C_5 (см. рис. 2). Список всех используемых схем на данном шаблоне включает в себя следующие схемы:

1. Схема 1-го порядка Куранта–Изаксона–Риса:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{\sigma}{2}(u_{m-1}^n - u_{m+1}^n). \quad (9)$$

2. Квазимоноотонная схема 2-го порядка:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{\sigma}{2}(u_{m-1}^n - u_{m+1}^n) + \frac{\sigma^2}{2}(u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) + \frac{3\sigma(\sigma-1)}{19}(u_{m-2}^n - 4u_{m+1}^n + 6u_m^n - 4u_{m-1}^n + u_{m-2}^n). \quad (10)$$

3. Схема 3-го порядка Русанова:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{\sigma}{2}(u_{m-1}^n - u_{m+1}^n) + \frac{\sigma^2}{2}(u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) + \frac{\sigma(1-\sigma^2)}{6}(u_{m-2}^n - 3u_{m-1}^n + u_m^n - u_{m+1}^n). \quad (11)$$

4. Схема 3-го порядка (без названия):

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{\sigma}{2}(u_{m-1}^n - u_{m+1}^n) + \frac{\sigma^2}{2}(u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) + \frac{\sigma(1-\sigma^2)}{6}(u_{m-2}^n - 3u_{m-1}^n + u_m^n - u_{m+1}^n) + \frac{(3-2\sigma)(\sigma^2-1)}{24}(u_{m-2}^n - 4u_{m-1}^n + 6u_m^n - 4u_{m+1}^n + u_{m+2}^n). \quad (12)$$

5. Квазимоноотонная схема 3-го порядка:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{\sigma}{2}(u_{m-1}^n - u_{m+1}^n) + \frac{\sigma^2}{2}(u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) + \frac{\sigma(1-\sigma^2)}{6}(u_{m-2}^n - 3u_{m-1}^n + u_m^n - u_{m+1}^n) + \frac{\sigma(17-19\sigma)(\sigma-1)}{228}(u_{m-2}^n - 4u_{m-1}^n + 6u_m^n - 4u_{m+1}^n + u_{m+2}^n). \quad (13)$$

6. Схема 4-го порядка:

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{\sigma}{12}(u_{m+2}^n - 8u_{m+1}^n + 8u_{m-1}^n - u_{m-2}^n) - \frac{\sigma^2}{24}(u_{m+2}^n - 16u_{m+1}^n + 30u_m^n - 16u_{m-1}^n + u_{m-2}^n) - \frac{2\sigma^3}{24^3}(u_{m+2}^n - 2u_{m+1}^n + 2u_{m-1}^n - u_{m-2}^n) + \frac{\sigma^4}{24^4}(u_{m+2}^n - 4u_{m+1}^n + 6u_m^n - 4u_{m-1}^n + u_{m-2}^n). \quad (14)$$

В данной работе используется сеточно-характеристический критерий монотонности:

$$\min\{u_1^n, u_2^n\} \leq u_m^{n+1} \leq \max\{u_1^n, u_2^n\}, \quad (15)$$

где u_1^n, u_2^n – значения сеточной функции на слое $t = t_n$ в двух ближайших к характеристике, исходящей из рассчитываемой точки (t_{n+1}, x_m) , сеточных узлах $x = x_1, x = x_2$, лежащих по обе стороны от этой характеристики.

На основе данного критерия монотонности была построена гибридная схем по следующему алгоритму:

1) Вычисление u_m^{n+1} по схеме наивысшего порядка;

2) Проверка критерия монотонности. Если он выполняется, то используется рассчитанное значение. Если он не выполняется, то вычисляется u_m^{n+1} по схеме такого же порядка или на порядок ниже.

При этом записанные выше схемы перебираются в следующем порядке: схема 4-го порядка, схема 3-го порядка Русанова, схема 3-го порядка (без названия), квазимоноотонная схема 3-го порядка, квазимоноотонная схема 2-го порядка, схема 1-го порядка Куранта–Изаксона–Риса.

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Построенная гибридная схема была протестирована на разрывном решении одномерного линейного уравнения переноса. Параметры численного расчета: число Куранта $\sigma = 0.2$, шаг по пространству $h = 0.625$ мм, число шагов по пространству $N_x = 3200$, шаг по времени $\Delta t = 0.125$ мс, число шагов по времени $N_t = 16000$. В центре расчетной области задавался прямоугольный импульс единичной амплитуды, на границах использовались периодические граничные условия.

Результаты расчетов представлены на рис. 3. Их анализ показывает, что гибридная схема обеспечивает отсутствие нефизических осцилляций, в отличие от остальных схем с порядком аппроксимации выше 1-го. При этом она значительно превосходит схему 1-го порядка по узости размытия разрыва и близка к схемам 3-го и 4-го порядка аппроксимации.

В дальнейшем построенная схема была использована при расчете задачи об источнике сейсмического сигнала в ледовом острове. Всего в расчете использовалось порядка 180 тыс. узлов сетки, а шаг по времени, выбранный из условия Куранта, составлял 5 мкс. На рис. 4 представлены результаты проведенных расчетов для модели с резервуаром с метаном и без него. Видно образование отраженных от его покрышки и подошвы упругих волн, регистрация которых на дневной

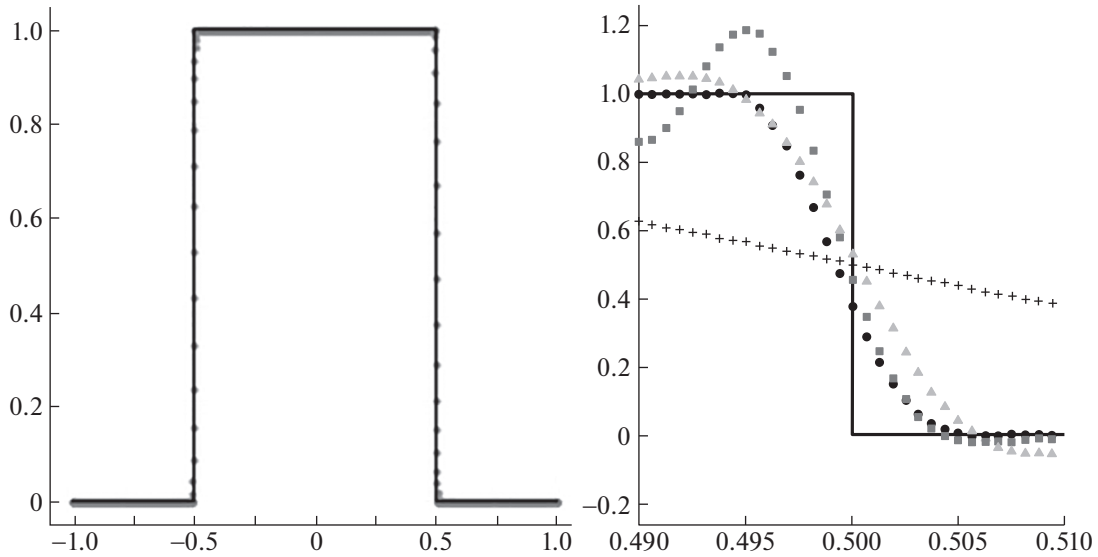


Рис. 3. Слева – численный расчет по гибридной схеме (●) и аналитическое решение (—). Справа – окрестность правой границы импульса: схема 4-го порядка (■), 3-го порядка Рунанова (▲), гибридная схема (●), 1-го порядка Куранта–Изааксона–Риса (+), аналитическое решение (—).

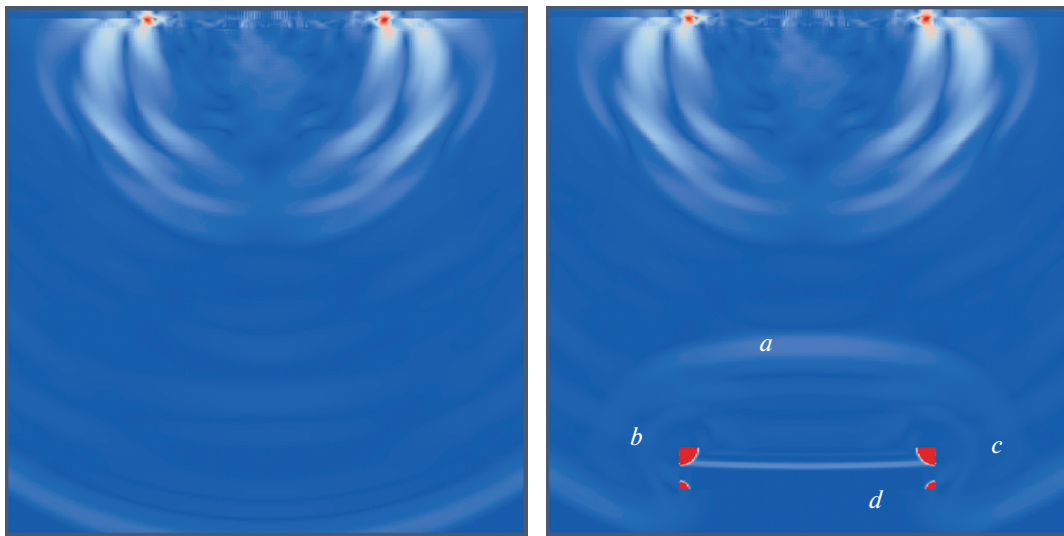


Рис. 4. Распределение модуля скорости в модели в момент времени 0.3 с после начала расчета. Слева – отсутствие резервуара, справа – его наличие. Обозначения: *a* – продольные волны, отраженные от крышки и подошвы резервуара, *b* и *c* – сферические волны от его боковых границ, *d* – зона ослабления падающей волны.

поверхности должна позволить определить характеристики резервуара. Вдоль поверхности по льду распространяется поверхностная волна Рэлея, а в остальных слоях продольные и поперечные объемные волны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе была рассмотрена задача распространения волн при проведении сейсми-

ческой разведки с ледового острова. В модель исследуемой области входили лед, водная толща и геологический массив с резервуаром, заполненным метаном. Для описания динамического поведения данных сред использовался ряд механико-математических моделей, определяющие системы уравнений которых являются гиперболическими. Для их численного решения использовался сеточно-характеристический метод на прямоугольных сетках с явным выделением контактных

границ. Он включает этап решения линейного одномерного уравнения переноса, для которого была построена новая гибридная схема повышенного порядка точности. Она продемонстрировала отсутствие нефизических осцилляций на разрывных решениях.

С ее помощью были получены волновые картины процессов, происходящих во льду, воде и толще геологического массива. При наличии в модели резервуара с метаном (см. рис. 4), происходит формирование отраженных продольных волн от его покрывки и подошвы. Они несут информацию о его мощности (разница их времен прихода), а также горизонтальной протяженности (размер горизонтальных участков синфазности сигналов). Анализ пространственной волновой картины выявляет также образование сферических волн, инициированных на краях резервуара. Дополнительно следует отметить формирование зоны тени непосредственно под резервуаром, что обусловлено отражением значительной части энергии от контрастной границы геологический массив – резервуар с метаном, и дифрагированных волн. Регистрация отраженных сигналов на дневной поверхности должна способствовать определению физических характеристик резервуара.

Развитие методов решения прямых полноволновых задач способно повысить точность решения ряда практических задач. К ним относятся, в частности, выбор оптимальной схемы расстановки источников и приемников на основе априорных знаний о геологическом строении массива, оценка применимости ледовых островов для полевых работ в Арктическом регионе и влияния различных природных факторов на получаемые результаты. Разработанный вычислительный алгоритм расчета волнового поля в заданной геологической модели может быть включен в процесс решения востребованных на практике обратных задач миграции и инверсии. Направлением дальнейших исследований представляется обобщение расчетного алгоритма на трехмерный случай и использование более реалистичной геологической модели.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00023).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Crawford A.J., Mueller D.R., Humphreys E.R., Carrieres T., Tran H. Surface ablation model evaluation on a drifting ice island in the Canadian Arctic // *Cold Regions Science and Technology*. 2015. V. 110. P. 170–182.
2. Crawford A., Crocker G., Mueller D., Desjardins L., Saper R., Carrieres T. The Canadian ice island drift, deterioration and detection (CI2D3) database // *Journal of Glaciology*. 2018. V. 64 (245). P. 517–521.
3. Muratov M.V., Biryukov V.A., Konov D.S., Petrov I.B. Mathematical modeling of temperature changes impact on artificial ice islands // *Radioelektronika, Nanosistemy, Informacionnye Tehnologii*. 2021. V. 13 (1). P. 79–86.
4. Ladanyi B. Rheology of ice/rock systems and interfaces // *Permafrost*, Phillips, Springman & Arenson (eds), 2003.
5. Golubev V.I., Shevchenko A.V., Petrov I.B. Application of the Dorovsky model for taking into account the fluid saturation of geological media // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. V. 1715 (1). № 012056.
6. Golubev V.I., Vasyukov A.V., Churyakov M. Modeling Wave Responses from Thawed Permafrost Zones // *Smart Innovation, Systems and Technologies*. 2021. V. 214. P. 137–148.
7. Petrov I.B., Muratov M.V., Sergeev F.I. Elastic Wave Propagation Modeling During Exploratory Drilling on Artificial Ice Island // *Smart Innovation, Systems and Technologies*. 2021. V. 217. P. 171–183.
8. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970.
9. Александров К.С., Продайвода Г.Т. Анизотропия упругих свойств минералов и горных пород, 2000.
10. Petrov I.B., Kholodov A.S. Numerical investigation of certain dynamical problems of the mechanics of a deformable solid body by the grid-characteristic method // *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.* 1984. V. 24 (3). P. 61–73.
11. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
12. Stankiewicz A. Fractional Maxwell model of viscoelastic biological materials // *BIO Web Conf.* 2018. V. 10. 02032.
13. Годунов С.К., Роменский Е.И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Город. 1998.
14. Кукуджанов В.Н. Численное решение неоднородных задач распространения волн напряжений в твердых телах. М., 1976. 66 с.
15. Golubev V.I., Shevchenko A.V., Khokhlov N.I., Nikitin I.S. Numerical investigation of compact grid-characteristic schemes for acoustic problems // *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, 1902 (1), № 012110.
16. Beklemysheva K.A., Golubev V.I., Petrov I.B., Vasyukov A.V. Determining effects of impact loading on residual strength of fiber-metal laminates with grid-characteristic numerical method // *Chinese Journal of Aeronautics*. 2021. V. 34 (7). P. 1–12.
17. Konyagin S., Popov B., Trifonov O. On Convergence of Minmod-Type Schemes // *SIAM J. Numerical Analysis*. 2005. 42. P. 1978–1997.
18. Shu C.-W. Essentially Non-Oscillatory and Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations*. 2006. P. 325–432.
19. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // *Comput. Phys.* 1987. V. 49 (3). P. 357–393.

20. *Petrov I.B., Kholodov A.S.* Regularization of discontinuous numerical solutions of equations of hyperbolic type // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. 1984. V. 24 (4). P. 128–138.
21. *Kholodov A.S., Kholodov Y.A.* Monotonicity criteria for difference schemes designed for hyperbolic equations // Comput. Math. and Math. Phys. 2006. V. 46. P. 1560–1588.
22. *Kholodov A. S.* The construction of difference schemes of increased order of accuracy for equations of hyperbolic type // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1980. V. 20 (6). P. 234–253.
23. *Fridrichs K.O.* Symmetric hyperbolic linear differential equations // IBID. 1954. V. 2. P. 345–392.
24. *Магомедов К.М., Холодов А.С.* Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 2018. 287 с.

HYBRID GRID-CHARACTERISTIC SCHEMES FOR ARCTIC SEISMIC PROBLEMS

Corresponding Member of the RAS **I. B. Petrov^a, V. I. Golubev^a, and E. K. Guseva^a**

^a *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

The process of conducting the seismic exploration of gas fields with the installation of a source and receivers on the surface of an ice island was considered in this paper. The model has been built that includes an ice formation, water area, multilayer geological massif and a methane reservoir. For a correct description of the dynamic behavior of individual media, the equations of the linear theory of elasticity, acoustics, Maxwell's viscoelastic and Kukudzhanov's elastoviscoplastic models were used. For the numerical solution of the governing system of equations, the grid-characteristic method was used on rectangular meshes. Physical contact conditions were explicitly set between them. Based on the grid-characteristic monotonicity criterion, a new hybrid scheme of a higher order of accuracy was constructed. It provided a full-wave solution of the seismic problem in a two-dimensional formulation.

Keywords: direct seismic survey problem, artificial ice island, mathematical simulation, grid-characteristic method, monotonicity criteria, hybrid scheme

УДК 517.95

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА МАТЕРИАЛА НЕО-ГУКА

© 2021 г. Член-корреспондент РАН П. И. Плотников^{1,*}

Поступило 15.09.2021 г.
После доработки 15.09.2021 г.
Принято к публикации 04.10.2021 г.

Дается вывод математической модели объемного роста несжимаемого материала нео-Гука. Такого рода модели используются для описания эволюции головного мозга под действием внешней нагрузки. В работе доказывается, что множество полей деформаций, соответствующих гомеостатическим состояниям, совпадает с группой Мёбиуса конформных преобразований. Дается анализ линейной краевой задачи, полученной линеаризацией уравнений нелинейной модели на гомеостатическом состоянии. Исследуется поведение решений при неограниченном росте временной переменной. Основной вывод состоит в том, что изменения в материале, вызванные временным повышением давления (гидроцефалия), являются необратимыми.

Ключевые слова: объемный рост, материал нео-Гука, уравнения Стокса, группа Мёбиуса

DOI: 10.31857/S268695432106014X

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ. МАТЕРИАЛ НЕО-ГУКА

В настоящей статье рассматривается краевая задача для системы дифференциальных уравнений, описывающей рост биологического материала под действием приложенной нагрузки. Несжимаемый материал нео-Гука является простейшей моделью нелинейного материала, которая находит широкое применение при математическом моделировании поведения биологических субстанций и, в частности, при моделировании эволюции головного мозга. На протяжении статьи мы будем предполагать, что материал занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей в пространстве расчетных (лагранжевых) координат $x = (x_1, x_2, x_3)$. Состояние материала полностью характеризуется полем деформаций $\mathbf{u}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ и распределением давления $p: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Градиент поля деформаций $\nabla \mathbf{u}$ совпадает с матрицей Якоби отображения $\mathbf{u}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$. Для краткости письма мы будем использовать обозначение $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{u}$. Мы также будем использовать обозначение $\text{cof} \mathbf{A} := \det \mathbf{A} \mathbf{A}^{-T}$ для матрицы, сопряженной к присоединенной

матрице $\text{adj} \mathbf{A}$. Далее через c обозначаются различные постоянные, зависящие только от области Ω . Напомним, что материал является несжимаемым, если в Ω выполняется равенство $\det \nabla \mathbf{u} = 1$. Состояние гиперупругого материала полностью характеризуется плотностью упругой запасенной энергии. Для несжимаемого материала нео-Гука плотность запасенной энергии имеет вид [1]

$$\Psi = \frac{1}{2} (|\nabla \mathbf{u}|^2 - 3). \quad (1)$$

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ОБЪЕМНОГО РОСТА НЕСЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА НЕО-ГУКА

Основные факты теории объемного роста гиперупругого материала можно найти в статьях [3, 6, 7]. Наш анализ опирается на подход, развитый в работах [4] и [2]. Основным постулатом теории является гипотеза о том, что $\nabla \mathbf{u} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_g$, где матричнозначная функция \mathbf{F}_g отвечает за рост материала и называется фактором роста, а \mathbf{F}_e отвечает за корректирующую упругую деформацию. Плотность запасенной энергии Ψ_g растущего материала определяется через плотность свободной энергии исходного гиперупругого материала Ψ посредством равенства, см. [4],

$$\begin{aligned} \Psi_g &= \det \mathbf{F}_g \Psi(\mathbf{F}_e) \equiv \det \mathbf{F}_g \Psi(\mathbf{F} \mathbf{F}_g^{-1}) \equiv \\ &\equiv \det \mathbf{F}_g \frac{1}{2} (|\mathbf{F} \mathbf{F}_g^{-1}|^2 - 3). \end{aligned}$$

¹Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева
Сибирского отделения Российской академии наук,
Новосибирск, Россия

*E-mail: piplochnikov@mail.ru

Тензор \mathbf{F}_e соответствует упругим деформациям исходного несжимаемого материала неогупа, что влечет равенство $\det \mathbf{F}_e = 1$. Отсюда вытекает определяющее соотношение

$$\det \mathbf{F} = \det \mathbf{F}_g, \quad \text{или эквивалентно} \quad (2)$$

$$\det \nabla \mathbf{u} = \det \mathbf{F}_g.$$

В большинстве случаев теория ограничивается изучением изотропного роста, когда матрица фактора роста имеет простой вид $\mathbf{F}_g(x, t) = w(x, t)\mathbf{I}$, $w: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^+$. Отсутствию роста или атрофии соответствует значение фактора роста $w = 1$. Значения $w > 1$ соответствуют росту, а значения $w < 1$ соответствуют атрофии материала. Напомним, что поле деформаций является положительно ориентируемым, т.е. $\det \nabla \mathbf{u} > 0$ и $w > 0$. При сделанных предположениях задача о росте гиперупругого материала сводится к определению поля деформаций и фактора роста. Для этого необходимо вывести систему управляющих дифференциальных уравнений для искомых величин. Мы получим эти уравнения как следствие неравенства Клаузиуса–Дюгема. Далее мы будем предполагать, что механическая система удовлетворяет следующим принципам.

Принцип независимости движений. Определяющие реологические соотношения должны выполняться для всех достаточно гладких полей деформаций \mathbf{u} .

Второй принцип термодинамики. Для механической системы должно выполняться неравенство Клаузиуса–Дюгема. В изотермическом случае в теории объемного роста гиперупругого материала неравенство Клаузиуса–Дюгема имеет вид [4, 2]

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Psi_g(\mathbf{F}, w)}{\partial \mathbf{F}} : \partial_t \mathbf{F} + \frac{\partial \Psi_g(\mathbf{F}, w)}{\partial w} \partial_t w - \mathbf{T} : \partial_t \mathbf{F} \right) dx \leq 0, \quad (3)$$

где \mathbf{T} – тензор напряжений,

$$\Psi_g(\mathbf{F}, w) = \frac{1}{2}(w|\mathbf{F}|^2 - 3w^3), \quad \frac{\partial \Psi_g(\mathbf{F}, w)}{\partial \mathbf{F}} = w\mathbf{F},$$

$$\frac{\partial \Psi_g(\mathbf{F}, w)}{\partial w} = \frac{1}{2}|\mathbf{F}|^2 - \frac{9}{2}w^2.$$

Эволюционный принцип. Фактор роста должен удовлетворять эволюционному уравнению. Это означает, что производная $\partial_t w$ должна полностью определяться полем деформаций \mathbf{u} .

Из эволюционного принципа и тождества $\partial_t(\det \nabla \mathbf{u}) \equiv (\text{cof } \nabla \mathbf{u}) : \partial_t \nabla \mathbf{u}$ вытекает, что при произвольно фиксированном поле деформаций величина σ , определенная соотношениями

$$\sigma = (\text{cof } \nabla \mathbf{u}) : \partial_t \nabla \mathbf{u},$$

$$\partial_t w = \frac{1}{2}(\det \nabla \mathbf{u})^{-\frac{2}{3}} \sigma = \frac{1}{3}w^{-2} \sigma,$$

также фиксирована. Отсюда и из принципа независимости движений следует, что в неравенстве Клаузиуса–Дюгема в качестве $\partial_t \nabla \mathbf{u}$ можно выбрать произвольное векторное поле с фиксированной величиной σ , которая, в свою очередь, полностью определяется полем деформаций. Легко видеть, что требуемым условиям удовлетворяет каждое поле вида

$$\partial_t \nabla \mathbf{u} = \xi + \eta, \quad (4)$$

$$\xi = (\text{cof } \nabla \mathbf{u})^{-T} \text{rot} \mathbf{A}, \quad \eta = (\text{cof } \nabla \mathbf{u})^{-T} \nabla \varphi,$$

где $\mathbf{A} \in C_0^\infty(\Omega)$ – произвольное векторное поле и φ – решение краевой задачи

$$\Delta \varphi = \sigma \text{ в } \Omega, \quad \varphi = 0 \text{ на } \partial \Omega.$$

Подстановка соотношения (4) в (3) приводит к неравенству

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Psi_g(\mathbf{F}, w)}{\partial \mathbf{F}} - \mathbf{T} \right) : \nabla \xi dx + \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial \Psi_g(\mathbf{F}, w)}{\partial \mathbf{F}} - \mathbf{T} \right) : \nabla \eta + \frac{\partial \Psi_g(\mathbf{F}, w)}{\partial w} \partial_t w \right\} dx \leq 0. \quad (5)$$

Так как поле \mathbf{A} в представлении для ξ произвольно, то первый интеграл в левой части (5) равен нулю, что приводит к равенству

$$\int_{\Omega} (\text{cof } \nabla \mathbf{u})^{-1} \text{div} \left(\frac{\partial \Psi_g(\mathbf{F}, w)}{\partial \mathbf{F}} - \mathbf{T} \right) \cdot \text{rot} \mathbf{A} dx = 0.$$

Отсюда и из теоремы Вейля вытекает соотношение

$$\text{div} \left(\frac{\partial \Psi_g(\mathbf{F}, w)}{\partial \mathbf{F}} - \mathbf{T} \right) =$$

$$= (\text{cof } \nabla \mathbf{u}) \nabla p \equiv \text{div}(p \text{cof } \nabla \mathbf{u}) \text{ в } \Omega,$$

в котором $p: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – функция давления. Отсюда вытекает следующее выражение для тензора напряжений:

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \Psi_g(\mathbf{F}, w)}{\partial \mathbf{F}} + p \text{cof } \nabla \mathbf{u}. \quad (6)$$

Подстановка \mathbf{T} и η во второй интеграл в (5) приводит к неравенству

$$\int_{\Omega} \mathbf{I}_1 w^{-1} \partial_t w dx \leq 0, \quad (7)$$

$$\mathbf{I}_1 = \frac{1}{2} w |\nabla \mathbf{u}|^2 - 3 \left(\frac{3}{2} + p \right) w^3.$$

Величина \mathbf{I}_1 равна следу материального тензора Эшелби, ср. [4, 2].

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ РАСТУЩЕГО МАТЕРИАЛА НЕО-ГУКА

Далее мы будем рассматривать квазистационарный процесс, пренебрегая инерционными членами в уравнениях динамики упругого континуума. Кроме того, мы будем предполагать, что на материальное тело действуют распределенная объемная сила \mathbf{f} и поверхностная сила \mathbf{g} . Тогда в каждый момент тело будет находиться в равновесии, что влечет уравнения

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T} &= \mathbf{f} & \text{в } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{T} \mathbf{n} + \mathbf{g} &= 0 & \text{на } \partial \Omega \times (0, T), \end{aligned} \quad (8)$$

где \mathbf{n} – вектор внешней нормали к границе Ω . Не существует общепринятых уравнений для определения фактора роста w . Как правило, используются различные варианты неконсервативной модели, основанной на предположении, что временная производная фактора роста является функцией фактора роста и градиента поля деформаций. Дополнительной гипотезой является предположение о том, что правая часть этого уравнения служит тензорной изотропной функцией от тензора Эшелби, см. [4, 2]. Для модели изотропного роста, основанной на неравенстве Клаузиуса–Дюгема, уравнение эволюции фактора роста определяется однозначно с точностью до одной скалярной функции следа тензора Эшелби \mathbf{I}_1 . Действительно, из неравенства (7) и принципа независимости движений вытекает, что

$$\begin{aligned} w^{-1} \partial_t w &= -\mathbf{a}(\mathbf{I}_1), \\ \text{где } \mathbf{a}(s)s &\geq 0 & \text{для всех } s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

При выбранном \mathbf{a} это соотношение дает уравнение для определения фактора роста. Комбинируя эти результаты с (2), (6) и (8), мы приходим к следующей системе уравнений и граничных условий для поля деформаций, давления и фактора роста:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(w \nabla \mathbf{u} + p \operatorname{cof} \nabla \mathbf{u}) &= \mathbf{f}, \\ \det \nabla \mathbf{u} - w^3 &= 0 & \text{в } \Omega \times (0, T), \\ w^{-1} \partial_t w + \mathbf{a}(\mathbf{I}_1) &= 0 & \text{в } \Omega \times (0, T), \\ (w \nabla \mathbf{u} + p \operatorname{cof} \nabla \mathbf{u}) \mathbf{n} &= -\mathbf{g} & \text{на } \partial \Omega \times (0, T), \\ w(x, 0) &= w_0(x) & \text{в } \Omega. \end{aligned} \quad (9)$$

ГОМЕОСТАТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ

С некоторой долей неаккуратности мы будем говорить, что система находится в гомеостатическом состоянии, если она находится в равновесии и ее энергия достигает абсолютного минимума. В нашем случае это означает, что

$$|\nabla \mathbf{u}|^2 = 3w^2, \quad \det \nabla \mathbf{u} = w^3, \quad \mathbf{I}_1 = 0.$$

Первые два равенства равносильны тому, что отображение $\mathbf{u}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ является конформным. Кроме того, из приведенных соотношений следует, что

$$w = (\det \mathbf{u})^{1/3} = 3^{-1/2} |\nabla \mathbf{u}|, \quad p = -1. \quad (10)$$

Тем самым мы приходим к следующему утверждению.

Лемма 1. Тройка (\mathbf{u}, p, w) определяет гомеостатическое состояние тогда и только тогда, когда отображение $\mathbf{u}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ является конформным, фактор роста и давление определяются равенствами (10). Каждое гомеостатическое состояние является стационарным решением краевой задачи (9).

Согласно теореме Лиувилля, каждое конформное отображение \mathbf{u} в \mathbb{R}^3 является суперпозицией преобразований сдвига, растяжения, вращения и инверсии. Физический смысл имеют только такие преобразования инверсии, у которых полюс инверсии находится вне области Ω . Совокупность всех конформных отображений в \mathbb{R}^3 образует группу Мёбиуса. Группа Мёбиуса в \mathbb{R}^3 является 10-мерным многообразием. Касательное пространство к этому многообразию в единице (инфинитезимальное пространство группы) состоит из всех отображений вида

$$\xi(x) = \mathbf{b} + \mathbf{S}x + \lambda x + (A \cdot x)x - \frac{1}{2}|x|^2 A, \quad (11)$$

где $\mathbf{b}, A \in \mathbb{R}^3$ – произвольные векторы, λ – произвольная постоянная и \mathbf{S} – произвольная антисимметрическая матрица. Инфинитезимальное пространство совпадает с пространством решений обобщенных уравнений Киллинга группы конформных преобразований \mathbb{R}^3 ,

$$\nabla \xi + \nabla \xi^T - \frac{2}{3} \operatorname{div} \xi \mathbf{I} = 0.$$

О п р е д е л е н и е 1. Через $T\mathcal{M}$ обозначим линейное пространство всех отображений ξ , допускающих представление (11). Через $T\mathcal{M}_{\operatorname{div}}$ обозначим линейное пространство дивергенций всех векторных полей, принадлежащих $T\mathcal{M}$.

ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Исследование системы (9) целесообразно начать с анализа линеаризованных уравнений. Особый интерес представляет исследование линеаризации на гомеостатических состояниях. Из групповой инвариантности множества гомеостатических состояний следует, что можно ограничиться изучением линеаризации на тривиальном равновесном состоянии $\mathbf{u} = \mathbf{id}$, $p = -1$, $w = 1$. Обозначим через \mathbf{v} , $\boldsymbol{\pi}$, φ отклонения поля дефор-

маций, давления и фактора роста от равновесного состояния, вызванные действием распределенной силы \mathbf{f} и поверхностной силы \mathbf{g} . Разложим поле деформаций \mathbf{v} и давление $\boldsymbol{\pi}$ на две составляющие

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_f + \mathbf{w}, \quad \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}_f + \boldsymbol{\mu},$$

которые соответствуют чисто упругим деформациям и деформациям, обусловленным ростом материала. В этих обозначениях линейная система уравнений для малых возмущений может быть записана в виде

$$\operatorname{div}(\nabla \mathbf{v}_f + \nabla \mathbf{v}_f^T + \boldsymbol{\pi}_f \mathbf{I}) = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_f = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ (\nabla \mathbf{v}_f + \nabla \mathbf{v}_f^T + \boldsymbol{\pi}_f \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{g} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (12)$$

$$\operatorname{div} \left(\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{w} \mathbf{I} + \boldsymbol{\mu} \mathbf{I} \right) = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{w} = 3\varphi \quad \text{в } \Omega, \quad (13)$$

$$\left(\nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{w} \mathbf{I} + \boldsymbol{\mu} \mathbf{I} \right) \mathbf{n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \\ \partial_t \varphi = \alpha \boldsymbol{\mu} + \alpha \boldsymbol{\pi}_f \quad \text{в } \Omega \times (0, T), \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \text{в } \Omega, \quad (14)$$

где $\alpha = 3\mathbf{a}'(0) > 0$, φ_0 – заданное начальное распределение фактора роста. Нашей целью является исследование корректности краевой задачи (12)–(14). Для этого рассмотрим следующую конструкцию. Разложим инфинитезимальное пространство $T\mathcal{M}_{\operatorname{div}}$ в прямую сумму подпространств

$$\mathcal{E}_{\operatorname{el}} = \{ \mathbf{c} + \mathbf{S}x : \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{S} = -\mathbf{S}^T \}, \\ \mathcal{E}_{\operatorname{gr}} = \left\{ \lambda x + (\mathbf{A} \cdot x)x - \frac{|x|^2}{2} \mathbf{A}, \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Обозначим через \mathcal{V} и \mathcal{W} подпространства $W^{1,2}(\Omega)$, а через \mathcal{H} – замкнутое подпространство $L^2(\Omega)$, определенные следующими равенствами:

$$\mathcal{V} = \left\{ \mathbf{v} \in W^{1,2}(\Omega) : \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\zeta} dx = 0 \text{ для всех } \boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{E}_{\operatorname{el}} \right\}, \\ \mathcal{W} = \left\{ \mathbf{w} \in W^{1,2}(\Omega) : \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\zeta} dx = 0 \text{ для всех } \boldsymbol{\zeta} \in T\mathcal{M} \right\}, \\ \mathcal{H} = \left\{ \varphi \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} \varphi \cdot \boldsymbol{\zeta} dx = 0 \text{ для всех } \boldsymbol{\zeta} \in T\mathcal{M}_{\operatorname{div}} \right\}.$$

Через $\Pi: L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}$ мы будем обозначать оператор ортогонального проектирования пространства $L^2(\Omega)$ на подпространство \mathcal{H} .

Подпространство $\mathcal{E}_{\operatorname{el}}$ состоит из полей деформаций, которые порождены твердотельными движениями упругого материала и не влияют на процесс роста. Поэтому целесообразно фактори-

зовать пространства решений задач (12) и (13) по подпространству $\mathcal{E}_{\operatorname{el}}$. Далее мы будем предполагать, что $\mathbf{v}_f \in \mathcal{V}$ и $\mathbf{w} \in \mathcal{E}_{\operatorname{gr}} + \mathcal{W}$. Следующие два утверждения, гарантируют корректность задач (12) и (13).

Предложение 1. Пусть пара $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in L^2(\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$, уравновешена, т.е. удовлетворяет условиям

$$\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\zeta} dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\zeta} ds = 0 \text{ для всех } \boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{E}_{\operatorname{el}}.$$

Тогда задача (12) имеет единственное слабое решение $\mathbf{v}_f \in \mathcal{V}$, $\boldsymbol{\pi}_f \in L^2(\Omega)$, допускающее оценку

$$\|\mathbf{v}_f\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|\boldsymbol{\pi}_f\|_{L^2(\Omega)} \leq c (\|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{g}\|_{L^2(\partial\Omega)}).$$

Предложение 2. Для любого $\varphi \in L^2(\Omega)$ задача (13) имеет единственное слабое решение $\mathbf{w} \in \mathcal{E}_{\operatorname{gr}} + \mathcal{W}$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{H}$, допускающее оценку

$$\|\mathbf{w}\|_{W^{1/2}(\Omega)} + \|\boldsymbol{\mu}\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Функция $\boldsymbol{\mu}$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда $\varphi \in T\mathcal{M}_{\operatorname{div}}$. Более того, справедлива оценка

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\mu} \varphi dx \leq -c^{-1} \|\Pi\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Доказательства предложений 1 и 2 аналогичны. Поэтому мы кратко прокомментируем доказательство предложения 2. Оно основано на том, что решение задачи (13) определяется с помощью явных формул по решению вариационной задачи

$$\Phi(\mathbf{w}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = \max_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{H}} \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}} \Phi(\mathbf{w}, \boldsymbol{\mu})$$

для функционала

$$\Phi(\mathbf{w}, \boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{4} \int_{\Omega} \left| \nabla \mathbf{w} + \nabla \mathbf{w}^T - \frac{2}{3} \operatorname{div} \mathbf{w} \mathbf{I} \right|^2 dx + \\ + \int_{\Omega} \boldsymbol{\mu} (\operatorname{div} \mathbf{w} - 3\varphi) dx.$$

Доказательство разрешимости этой вариационной задачи проводится с помощью прямых методов вариационного исчисления. Существенную роль в доказательстве играет обобщенное неравенство Корна для оператора Киллинга, [5]. Следствием предложения 2 является

Лемма 2. Пусть $(\mathbf{w}, \boldsymbol{\mu})$ – решение задачи (13) с произвольной функцией $\varphi \in L^2(\Omega)$. Тогда отображение $\mathbf{B}: \varphi \rightarrow \boldsymbol{\mu}$ определяет ограниченный симметричный оператор в $L^2(\Omega)$. Ортогональные подпространства $T\mathcal{M}_{\operatorname{div}}$ и \mathcal{H} являются инвариантными

подпространствами \mathbf{V} . Оператор \mathbf{V} обращается в нуль на $T\mathcal{M}_{\text{div}}$ и строго отрицателен на \mathcal{H} , т.е.

$$\mathbf{V}(\mathbf{I} - \Pi) = 0,$$

$$\langle \mathbf{V}\varphi, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} \leq -c^{-1} \|\Pi\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \text{ для всех } \varphi \in L^2(\Omega).$$

Далее, из предложения 1 вытекает, что π_f полностью определяется силами \mathbf{f} , \mathbf{g} . Поэтому уравнение (14) может быть записано в форме операторного уравнения для фактора роста φ :

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi &= \alpha \mathbf{V}\varphi + \alpha \pi_f \text{ на интервале } (0, \infty), \\ \varphi(0) &= \varphi_0. \end{aligned} \quad (15)$$

Следующее утверждение, непосредственно вытекающее из леммы 2, является главным результатом настоящей работы.

Теорема 1. Пусть заданные силы $\mathbf{f} \in L^1(0, \infty; L^2(\Omega))$, $\mathbf{g} \in L^1(0, \infty; L^2(\partial\Omega))$ уравновешены в каждый момент времени. Тогда задача (15) имеет единственное решение $\varphi \in C(0, \infty; L^2(\Omega))$, которое при неограниченном возрастании временной переменной стремится к предельному значению

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\rightarrow (\mathbf{I} - \Pi)\varphi_0 + \alpha \int_0^\infty (\mathbf{I} - \Pi)\pi_f(s) ds \\ &\text{в } L^2(\Omega) \text{ при } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

В частности, отсюда следует, что предельное состояние является гомеостатическим и в общем

случае не совпадает с начальным состоянием. Это указывает на необратимость процессов роста или атрофии.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 19-11-00069).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ciarlet P. Mathematical elasticity 1: Three-dimensional Elasticity. Basel: Elsevier Science Publishers, 1988.
2. Ciarletta P., Ambrosi D., Maugin G.A. Mass transport in morphogenetic processes: a second gradient theory for volumetric growth and material remodeling // J. Mech. Phys. Solids. 2012. V. 60. P. 432–450.
3. Cowin S.C. Tissue growth and remodeling // Annu. Rev. Biomed. Eng. 2004. V. 6. P. 77–107.
4. Epstein M., Maugin G.A. Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies // Int. J. Plasticity. 2000. V. 16. P. 951–978.
5. Решетняк Ю.Г. Оценки для некоторых дифференциальных операторов с конечномерным ядром // Сиб. матем. журн. 1970. Т. 11. № 2. С. 414–428.
6. Rodriguez E., Hoger A., McCulloch A. Stress-dependent finite growth law in soft elastic tissue // J. Biomech. 1994. V. 27. P. 455–467.
7. Skalak R., Dasgupta G., Moss M., Otten E., Dullemeijer P., Vilmann H. Analytical description of growth. // J. Theor. Biol. 1982. V. 94. P. 555–577.

MATHEMATICAL MODELLING OF NEO-HOOKEAN MATERIAL GROWTH

Corresponding Member of the RAS P. I. Plotnikov^a

^a Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

The paper is devoted to the analysis of the mathematical model of the volumetric growth of incompressible neo-Hookean material. Models of this kind are used in order to describe the evolution of the human brain under the action of an external load. In the paper, we show that the space of deformation fields in the homeostatic state coincides with the Möbius group of conformal transforms in \mathbb{R}^3 . We prove the well-posedness of the linear boundary value problem obtained by linearizing the governing equations on the homeostatic state. We study the behavior of solutions when the time variable tends to infinity. The main conclusion is that changes in the material, caused by a temporary increase in pressure (hydrocephalus) are irreversible.

Keywords: volumetric growth, neo-Hookean material, Stokes equations, Möbius group

УДК 517.968

БЕСФАЗОВАЯ ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ АНИЗОТРОПНОЙ ПРОВОДИМОСТИ В УРАВНЕНИЯХ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

© 2021 г. Член-корреспондент РАН В. Г. Романов^{1,*}

Поступило 05.07.2021 г.
После доработки 16.07.2021 г.
Принято к публикации 05.09.2021 г.

Для системы уравнений электродинамики, соответствующей периодическим по времени колебаниям, изучаются две обратные задачи об определении анизотропной проводимости по бесфазовой информации о решениях некоторых прямых задач. Предполагается, что проводимость описывается диагональной матрицей $\sigma(x) = \text{diag}(\sigma_1(x), \sigma_2(x), \sigma_3(x))$, причем $\sigma(x) = 0$ вне некоторой компактной области Ω . Рассматриваются плоские волны, падающие из бесконечности на неоднородность. Для определения искомым функций на границе области Ω задается информация о модуле некоторых компонент вектора электрической напряженности рассеянного или полного высокочастотных электромагнитных полей. Показано, что эта информация приводит исходные обратные задачи к задачам рентгеновской томографии.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, плоские волны, бесфазовая обратная задача, анизотропия, проводимость, рентгеновская томография

DOI: 10.31857/S2686954321060151

Рассмотрим систему уравнений Максвелла, которая соответствует немагнитной среде и периодическим по времени электромагнитным колебаниям с частотой ω :

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{H} &= -i\omega \epsilon \mathbf{E} + \sigma(x) \mathbf{E}, \\ \text{rot} \mathbf{E} &= i\omega \mu \mathbf{H}, \quad \text{div} \mathbf{H} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В уравнениях (1) $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$, $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$ – векторы электрической и магнитной напряженности поля, $\sigma(x) = \text{diag}(\sigma_1(x), \sigma_2(x), \sigma_3(x))$ – неотрицательно определенная диагональная матрица, $\epsilon > 0$, $\mu > 0$ – некоторые постоянные. Предположим, что вне области $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < R\}$, $R > 0$, матрица $\sigma(x) = 0$.

Обозначим через $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ – скорость распространения электромагнитных волн. Пусть $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $|\mathbf{v}| = 1$, и \mathbf{j} – единичный вектор, ортогональный \mathbf{v} , т.е. $\mathbf{j} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^0(x, \omega, \mathbf{v}, \mathbf{j}) &= \mathbf{j} e^{i\omega\psi(x, \mathbf{v})}, \\ \mathbf{H}^0(x, \omega, \mathbf{v}, \mathbf{j}) &= \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{j}}{\mu_0 c} e^{i\omega\psi(x, \mathbf{v})}, \quad \psi(x, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{c} - t_0, \end{aligned} \quad (2)$$

описывают плоскую электромагнитную волну распространяющуюся в направлении \mathbf{v} , вектор \mathbf{j} определяет ее поляризацию. Параметр t_0 выберем так, чтобы функция $\psi(x, \mathbf{v})$ была равна нулю в точках плоскости $\Sigma(\mathbf{v}) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = -R\}$, касающейся границы области Ω в точке $y_0 = -R\mathbf{v}$. Для этого положим $t_0 = -R/c$.

Определим рассеянное на неоднородности поле формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{sc}(x, \omega, \mathbf{v}, \mathbf{j}) &= \mathbf{E}(x, \omega, \mathbf{v}, \mathbf{j}) - \mathbf{E}^0(x, \omega, \mathbf{v}, \mathbf{j}), \\ \mathbf{H}^{sc}(x, \omega, \mathbf{v}, \mathbf{j}) &= \mathbf{H}(x, \omega, \mathbf{v}, \mathbf{j}) - \mathbf{H}^0(x, \omega, \mathbf{v}, \mathbf{j}). \end{aligned} \quad (3)$$

Функции $\mathbf{E}^{sc}(x, \omega, \mathbf{v}, \mathbf{j})$ и $\mathbf{H}^{sc}(x, \omega, \mathbf{v}, \mathbf{j})$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{H}^{sc} &= -i\omega \epsilon \mathbf{E}^{sc} + \sigma(x)(\mathbf{E}^{sc} + \mathbf{E}^0), \\ \text{rot} \mathbf{E}^{sc} &= i\omega \mu \mathbf{H}^{sc}, \quad \text{div} \mathbf{H}^{sc} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

и условиям излучения на бесконечности.

Ниже мы будем рассматривать функции \mathbf{E}^0 и \mathbf{H}^0 , отвечающие трем различным векторам \mathbf{j}^k , $k = 1, 2, 3$, и соответствующим им ортогональным

¹Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук,
Новосибирск, Россия

*E-mail: romanov@math.nsc.ru

векторам v^k , зависящим от углового параметра φ , а именно,

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^1 &= (1, 0, 0), & v^1(\varphi) &= (0, \cos \varphi, \sin \varphi), & \varphi &\in [0, \pi], \\ \mathbf{j}^2 &= (0, 1, 0), & v^2(\varphi) &= (\cos \varphi, 0, \sin \varphi), & \varphi &\in [0, \pi], \\ \mathbf{j}^3 &= (0, 0, 1), & v^3(\varphi) &= (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), & \varphi &\in [0, \pi]. \end{aligned}$$

Обозначим через $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = R\}$ границу области Ω и через $S^+(v) = \{x \in S \mid x \cdot v > 0\}$ — ее теневую часть по отношению к потоку света, имеющего направление v .

Сформулируем постановку задач об определении анизотропной проводимости $\sigma(x)$, которые мы будем рассматривать ниже.

Задача 1. Найти $\sigma(x)$ по заданным функциям $|E_k(x, t, v^k(\varphi), \mathbf{j}^k)|$, $k = 1, 2, 3$, известным для всех $x \in S^+(v^k(\varphi))$, $\varphi \in [0, \pi]$, и $\omega \geq \omega_0$, где $\omega_0 > 0$ — произвольное фиксированное число. Другими словами, требуется найти $\sigma(x)$ по заданным функциям

$$\begin{aligned} \Phi_k(x, \omega, \varphi) &= |E_k(x, \omega, v^k(\varphi), \mathbf{j}^k)|, & k &= 1, 2, 3, \\ x &\in S^+(v^k(\varphi)), & \varphi &\in [0, \pi], & \omega &\geq \omega_0 \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Задача 2. Найти $\sigma(x)$ по функциям

$$\begin{aligned} F_k(x, \omega, \varphi) &= |E_k^{sc}(x, \omega, v^k(\varphi), \mathbf{j}^k)|, & k &= 1, 2, 3, \\ x &\in S^+(v^k(\varphi)), & \varphi &\in [0, \pi], & \omega &\geq \omega_0 \geq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Задачи 1 и 2 относятся к бесфазовым обратным задачам. В этих задачах в качестве информации задается только модуль комплекснозначных функций. Впервые постановка бесфазовой задачи для уравнения Шрёдингера была сформулирована в книге Шадана и Сабатье [1] более 40 лет назад. Исключительную важность решения этой проблемы также отметил в своей книге Р. Ньютон [2]. Возможность найти фазу по заданному модулю поля в этой задаче была установлена в работах [3–5]. Первые конструктивные результаты по исследованию бесфазовой обратной задачи для уравнения Шрёдингера были получены в работах Р.Г. Новикова [6–8] и М.В. Клибанова, В.Г. Романова (см. обзорную работу [9] и обширную литературу в ней). Для уравнений электродинамики, отвечающих периодическим по времени электромагнитным колебаниям, бесфазовые обратные задачи об определении коэффициента диэлектрической проницаемости по модулю векторов электрической или магнитной напряженности поля, измеренному при высоких частотах, изучались в работах [10, 11]. В них установлено, что бесфазовая задача об определении коэффициента диэлектрической проницаемости приводится к решению обратной кинематической задачи. Некоторые численные методы решения бесфазо-

вых обратных задач для уравнений электродинамики представлены в работах [12, 13].

Задача 1 соответствует измерению модуля полного электромагнитного поля. Задание информации (5) позволяет свести исходную задачу к хорошо известной проблеме рентгеновской томографии. Задача 2 соответствует измерению модуля рассеянного на неоднородности среды поля. Оказывается, что задание (6) позволяет извлечь ту же информацию, что и в задаче 1, и свести задачу 2 к той же самой задаче томографии. Настоящая статья основана на работе автора [14], в которой рассмотрена обратная задача об определении анизотропной проводимости в динамической системе уравнений Максвелла.

Рассмотрим вспомогательную задачу Коши

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}} &= \varepsilon \tilde{\mathbf{E}}_t + \sigma(x) \tilde{\mathbf{E}}, & \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} &= -\mu \tilde{\mathbf{H}}_t, \\ \tilde{\mathbf{E}}|_{r < 0} &= \tilde{\mathbf{E}}^0(x, t, v, \mathbf{j}), & \tilde{\mathbf{H}}|_{r < 0} &= \tilde{\mathbf{H}}^0(x, t, v, \mathbf{j}), \end{aligned} \quad (7)$$

в которой $\tilde{\mathbf{E}}^0(x, t, v, \mathbf{j})$ и $\tilde{\mathbf{H}}^0(x, t, v, \mathbf{j})$ находятся по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}^0(x, t, v, \mathbf{j}) &= \mathbf{j} \delta(t - \psi(x, v)), \\ \tilde{\mathbf{H}}^0(x, t, v, \mathbf{j}) &= \frac{v \times \mathbf{j}}{\mu_0 c} \delta(t - \psi(x, v)). \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что плоскость $\Sigma(v) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot v = ct_0\}$

соответствует фронту плоской волны $\tilde{\mathbf{E}}^0, \tilde{\mathbf{H}}^0$ в момент времени $t = 0$, когда этот фронт касается области Ω . Основой исследования обратной задачи является изучение структуры решения задачи (7), (8). Для этой задачи справедлива следующая

Теорема 1. Пусть матрица $\sigma(x) \in C^{14}(\mathbb{R}^3)$ и равна нулю вне Ω . Тогда решение задачи (7), (8) представимо при $t \geq 0$ в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(x, t, v, \mathbf{j}) &= \alpha(x, v, \mathbf{j}) \delta(t - \psi(x, v)) + \\ &+ \hat{\mathbf{E}}(x, t, v, \mathbf{j}) \theta_0(t - |\psi(x, v)|), \\ \tilde{\mathbf{H}}(x, t, v, \mathbf{j}) &= \beta(x, v, \mathbf{j}) \delta(t - \psi(x, v)) + \\ &+ \hat{\mathbf{H}}(x, t, v, \mathbf{j}) \theta_0(t - |\psi(x, v)|), \end{aligned} \quad (9)$$

в котором $\theta_0(t)$ — функция Хевисайда: $\theta_0(t) = 1$ для $t \geq 0$ и $\theta_0(t) = 0$ для $t < 0$, функция $\alpha(x, v, \mathbf{j})$ является в \mathbb{R}^3 решением задачи:

$$\begin{aligned} \frac{2}{c} (v \cdot \nabla) \alpha + \mu \sigma(x) \alpha - \mu v ((\sigma(x) \alpha) \cdot v) &= 0, \\ \alpha|_{\psi(x, v) \leq 0} &= \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (10)$$

а функция $\beta(x, v, \mathbf{j})$ вычисляется через нее по формуле

$$\beta(x, v, \mathbf{j}) = -\frac{1}{\mu c} (\alpha(x, v, \mathbf{j}) \times v). \quad (11)$$

Функции $\alpha(x, v, \mathbf{j})$ и $\beta(x, v, \mathbf{j})$ принадлежат пространству $C^{14}(\mathbb{R}^3)$, а функции $\hat{\mathbf{E}}(x, t, v, \mathbf{j})$ и $\hat{\mathbf{H}}(x, t, v, \mathbf{j})$ явля-

ются непрерывными функциями для всех $\{(x, t) \mid |\psi(x, t)| \leq t, t \in [0, T]\}$, вместе с частными производными по x и по t , при любом $T > 0$.

Схема доказательства этой теоремы следующая. Представим функции $\tilde{\mathbf{E}}(x, t, \mathbf{v}, \mathbf{j})$ и $\tilde{\mathbf{H}}(x, t, \mathbf{v}, \mathbf{j})$ в виде

$$\tilde{\mathbf{E}}(x, t, \mathbf{v}, \mathbf{j}) = \sum_{k=-1}^r \alpha^k(x, \mathbf{v}, \mathbf{j}) \theta_k(t - \psi(x, \mathbf{v})) + \mathbf{E}^r(x, t, \mathbf{v}, \mathbf{j}), \quad (12)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(x, t, \mathbf{v}, \mathbf{j}) = \sum_{k=-1}^r \beta^k(x, \mathbf{v}, \mathbf{j}) \theta_k(t - \psi(x, \mathbf{v})) + \mathbf{H}^r(x, t, \mathbf{v}, \mathbf{j}),$$

в котором $\theta_{-1}(t) = \delta(t)$, $\theta_k(t) = \frac{t^k}{k!} \theta_0(t)$, $k = 1, 2, \dots, r$, а целое положительное число r выберем ниже. Подставляя представления (12) в уравнение (7) и приравнивания в полученном равенстве нулю коэффициенты при $\delta'(t - \psi(x, \mathbf{v}))$, $\delta(t - \psi(x, \mathbf{v}))$ и $\theta_k(t - \psi(x, \mathbf{v}))$, $k = 0, 1, \dots, r-1$, и используя начальные данные, получим для функций $\alpha^k(x, \mathbf{v}, \mathbf{j})$ и $\beta^k(x, \mathbf{v}, \mathbf{j})$ следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} (\beta^k \times \mathbf{v}) + \text{rot} \beta^{k-1} &= \varepsilon \alpha^k + \sigma(x) \alpha^{k-1}, \\ \alpha^k|_{\psi(x, \mathbf{v}) \leq 0} &= \mathbf{j} \delta_{-1, k}, \\ \frac{1}{c} (\alpha^k \times \mathbf{v}) + \text{rot} \alpha^{k-1} &= -\mu \beta^k, \\ \beta^k|_{\psi(x, \mathbf{v}) \leq 0} &= \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{j}}{\mu_0 c} \delta_{-1, k}, \\ k &= -1, 0, 1, \dots, r, \end{aligned} \quad (13)$$

в которых $\delta_{-1, k}$ – символ Кронекера: $\delta_{-1, k} = 1$, если $k = -1$, и $\delta_{-1, k} = 0$, если $k \neq -1$. В уравнениях (13) и в дальнейших формулах надо формально положить $\alpha^k = 0$ и $\beta^k = 0$ для целых отрицательных $k < -1$.

Для функций $\mathbf{E}^r(x, t, \mathbf{v}, \mathbf{j})$ и $\mathbf{H}^r(x, t, \mathbf{v}, \mathbf{j})$ возникает следующая задача Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon \mathbf{E}_t^r + \sigma(x) \mathbf{E}^r - \text{rot} \mathbf{H}^r &= (\text{rot} \beta^r \theta_r(t - \psi(x, \mathbf{v}))), \\ \mathbf{E}_t^r|_{t=0} &= 0, \\ \mu \mathbf{H}_t^r + \text{rot} \mathbf{E}^r &= -(\text{rot} \alpha^r \theta_r(t - \psi(x, \mathbf{v}))), \\ \mathbf{H}_t^r|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Для проведения вычислений, уравнения (13) удобно преобразовать, найдя из второго уравнения β^k и подставив его в первое. Тогда возникает рекуррентная система соотношений для α^k следующего вида:

$$\frac{1}{c} \left(\frac{1}{c} \alpha^k \times \mathbf{v} + \text{rot} \alpha^{k-1} \right) \times \mathbf{v} + \text{rot} \left(\frac{1}{c} \alpha^{k-1} \times \mathbf{v} + \text{rot} \alpha^{k-2} \right) +$$

$$+ \mu \varepsilon \alpha^k + \mu \sigma(x) \alpha^{k-1} = 0, \quad k = -1, 0, 1, \dots, r.$$

Так как $\frac{1}{c^2} = \mu \varepsilon$ и $\alpha^k + (\alpha^k \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = (\alpha^k \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}$, это уравнение преобразуется к следующему

$$\begin{aligned} \mu \varepsilon (\alpha^k \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} + \frac{1}{c} [\text{rot} \alpha^{k-1} \times \mathbf{v} + \text{rot} (\alpha^{k-1} \times \mathbf{v})] + \\ + \mu \sigma(x) \alpha^{k-1} + \text{rot} \text{rot} \alpha^{k-2} = 0, \\ k = -1, 0, 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Используя равенства

$$\begin{aligned} \text{rot} (\alpha^k \times \mathbf{v}) &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \alpha^k - \mathbf{v} \text{div} \alpha^k, \\ \text{rot} \alpha^k \times \mathbf{v} &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \alpha^k - \nabla (\alpha^k \cdot \mathbf{v}), \end{aligned}$$

запишем это уравнение в виде

$$\begin{aligned} \mu \varepsilon (\alpha^k \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} + \frac{1}{c} [2(\mathbf{v} \cdot \nabla) \alpha^{k-1} - \mathbf{v} \text{div} \alpha^{k-1} - \nabla (\alpha^{k-1} \cdot \mathbf{v})] + \\ + \mu \sigma(x) \alpha^{k-1} + \text{rot} \text{rot} \alpha^{k-2} = 0, \\ k = -1, 0, 1, \dots, r. \end{aligned} \quad (15)$$

Из уравнения (15) вытекает рекуррентное соотношение для определения проекции вектора α^k на единичный вектор \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} (\alpha^k \cdot \mathbf{v}) = \\ = -\frac{1}{\mu \varepsilon} \left(\frac{1}{c} [2(\mathbf{v} \cdot \nabla) \alpha^{k-1} - \mathbf{v} \text{div} \alpha^{k-1} - \nabla (\alpha^{k-1} \cdot \mathbf{v})] + \right. \\ \left. + \mu \sigma(x) \alpha^{k-1} + \text{rot} \text{rot} \alpha^{k-2} \right) \cdot \mathbf{v}. \\ k = -1, 0, 1, \dots, r. \end{aligned} \quad (16)$$

Вычитая из равенства (15) равенство (16), умноженное на $\mu \varepsilon \mathbf{v}$, и заменяя в полученном равенстве $k-1$ на k , находим рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} [2(\mathbf{v} \cdot \nabla) (\alpha^k)^\perp - \nabla^\perp (\alpha^k \cdot \mathbf{v})] + \\ + \mu \sigma(x) \alpha^k - \mu ((\sigma(x) \alpha^k) \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} + \\ + \text{rot} \text{rot} \alpha^{k-1} - (\text{rot} \text{rot} \alpha^{k-1} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} = 0, \\ k = -1, 0, 1, \dots, r-1, \end{aligned} \quad (17)$$

в котором $(\alpha^k)^\perp = \alpha^k - \mathbf{v} (\alpha^k \cdot \mathbf{v})$, $\nabla^\perp = \nabla - \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \nabla)$ и скалярное произведение $(\alpha^k \cdot \mathbf{v})$ вычисляется по формуле (16). Уравнение (17) является обыкновенным векторным линейным дифференциальным уравнением вдоль любого луча $x = x^0 + s\mathbf{v}$, $s \geq 0$, выходящего из произвольной точки $x^0 \in \sum(\mathbf{v})$. Поэтому его решение с данными Коши на $\Sigma(\mathbf{v}) = \{x \mid \psi(x, \mathbf{v}) = 0\}$ существует и единственно при любом $x \in D_+(\mathbf{v}) := \{x \mid \psi(x, \mathbf{v}) \geq 0\}$. Система уравнений (16), (17) решается последовательно, начиная со значения $k = -1$. Заметим, что у век-

тора α^r при этом однозначно находится только его проекция на ν , т.е. $\alpha^r \cdot \nu$, а проекция $(\alpha^k)^\perp$ на плоскость, ортогональную вектору ν , может быть задана произвольно. Выберем ее равной нулю. Тогда $\alpha^r = \nu(\alpha^r \cdot \nu)$. После отыскания всех векторов α^k , векторы β^k вычисляются по формуле (13). В частности, полагая $\alpha^{-1} = \alpha$, $\beta^{-1} = \beta$, получаем, что $\alpha \cdot \nu = \beta \cdot \nu = 0$ и для вектора α из (17) следует уравнение (10), а для вектора β из (13) следует равенство (11).

Гладкость векторов α^k и β^k определяется гладкостью матрицы $\sigma(x)$. Так как $\sigma \in C^{14}(\mathbb{R}^3)$, то $(\alpha^k, \beta^k) \in C^{12-2k}(D_+(\nu))$, $k = -1, 0, 1, \dots, r$. Кроме того, $\alpha^k = 0$ и $\beta^k = 0$, $k \geq 0$, на тех прямых, которые ортогональны $\sum(\nu)$ и не пересекают область Ω .

Рассмотрим теперь задачу (14). Правые части уравнений (14) являются финитными функциями в слое $D_T := \{(x, t) \mid x \in \mathbb{R}^3, t \in [0, T]\}$. Их носитель локализован внутри характеристического клина $K := \{(x, t) \mid t \geq \psi(x, \nu)\}$. Поэтому $\mathbf{E}^r = \mathbf{H}^r = 0$ вне этого клина. Правые части уравнений (14) являются функциями класса $H^\ell(D_T)$, $\ell = \min(12 - 2r, r)$. Выберем $r = 4$. Тогда $\ell = 4$ и из энергетических неравенств следует, что решение задачи (14) также принадлежит $H^4(D_T)$. В силу теорем вложения, отсюда вытекает, что решение принадлежит классу $C^1(D_T)$. Полагая для $t \geq \psi(x, \nu)$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}(x, t, \nu, \mathbf{j}) &= \\ &= \sum_{k=0}^r \alpha^k(x, \nu, \mathbf{j}) \frac{(t - \psi(x, \nu))^k}{k!} + \mathbf{E}^r(x, t, \nu, \mathbf{j}), \\ \hat{\mathbf{H}}(x, t, \nu, \mathbf{j}) &= \\ &= \sum_{k=0}^r \beta^k(x, \nu, \mathbf{j}) \frac{(t - \psi(x, \nu))^k}{k!} + \mathbf{H}^r(x, t, \nu, \mathbf{j}), \end{aligned}$$

приходим к представлению (9) с заявленными в теореме свойствами функций, входящих в это представление.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для функции $\mathbf{E}(x, \omega, \nu, \mathbf{j})$ справедлива асимптотическая формула

$$\mathbf{E}(x, \omega, \nu, \mathbf{j}) = \alpha(x, \nu, \mathbf{j})e^{i\omega\psi(x, \nu)} + O(\omega^{-1}), \quad \omega \rightarrow \infty. \tag{18}$$

Действительно, из финитности $\sigma(x)$ и результатов Б.Р. Вайнберга [15] следует, что функции $\tilde{\mathbf{E}}(x, t, \nu, \mathbf{j})$ и $\tilde{\mathbf{H}}(x, t, \nu, \mathbf{j})$, а также их частные производные по x и по t экспоненциально убывают при $t \rightarrow \infty$. Тогда для функций

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, \omega, \nu, \mathbf{j}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \tilde{\mathbf{E}}(x, t, \nu, \mathbf{j}) dt, \\ \mathbf{H}(x, \omega, \nu, \mathbf{j}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \tilde{\mathbf{H}}(x, t, \nu, \mathbf{j}) dt \end{aligned}$$

выполнены соотношения (1). Используя представление (9), находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, \omega, \nu, \mathbf{j}) &= \alpha(x, \nu, \mathbf{j})e^{i\omega\psi(x, \nu)} + \int_{|\psi(x, \nu)|}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{\mathbf{E}}(x, t, \nu, \mathbf{j}) dt = \\ &= \alpha(x, \nu, \mathbf{j})e^{i\omega\psi(x, \nu)} - \frac{e^{i\omega|\psi(x, \nu)|}}{i\omega} \hat{\mathbf{E}}(x, |\psi(x, \nu)| + 0, \nu, \mathbf{j}) - \\ &- \frac{1}{i\omega} \int_{|\psi(x, \nu)|}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{\mathbf{E}}_t(x, t, \nu, \mathbf{j}) dt = \alpha(x, \nu, \mathbf{j})e^{i\omega\psi(x, \nu)} + O(\omega^{-1}), \\ &\qquad \qquad \qquad \omega \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Для поставленных выше обратных задач имеет место следующая

Теорема 3. Пусть матрица $\sigma(x) \in C^{14}(\mathbb{R}^3)$ и равна нулю вне Ω . Тогда информация (5) или (6) однозначно определяет все элементы матрицы $\sigma(x)$ в области Ω . При этом определение компонент матрицы $\sigma(x)$ сводится к решению трех идентичных задач рентгеновской томографии.

Используя данные обратной задачи 1 и формулу (18), находим, что

$$|\alpha_k(x, \nu^k(\varphi), \mathbf{j}^k)| = g_k(x, \varphi) =: \lim_{t \rightarrow \psi(x, \nu^k(\varphi)) + 0} \Phi_k(x, t, \varphi),$$

$$x \in S^+(\nu^k(\varphi)), \quad \varphi \in [0, \pi], \quad k = 1, 2, 3.$$

Именно эти компоненты векторов $\alpha(x, \nu^k(\varphi), \mathbf{j}^k)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, вычисляются из равенств (10) в явном виде, а именно,

$$\alpha_k(x, \nu^k(\varphi), \mathbf{j}^k) = \exp\left(-\frac{\mu c}{2} \int_0^\infty \sigma_k(x - s\nu^k(\varphi)) ds\right),$$

$$k = 1, 2, 3.$$

Из этих формул следует, что известны интегралы

$$\int_0^\infty \sigma_k(x - s\nu^k(\varphi)) ds = -\frac{2}{\mu c} \ln g_k(x, \varphi), \tag{19}$$

$$k = 1, 2, 3,$$

для всех $x \in S^+(\nu^k(\varphi))$ и $\varphi \in [0, \pi]$.

Таким образом, правая часть равенства (19) известна при каждом $k = 1, 2, 3$ вдоль любой прямой, пересекающей Ω и имеющей направление $\nu^k(\varphi)$. Варьируя φ , получаем, что в каждом сечении Ω плоскостью $x_k = \text{const}$ известны интегралы по всевозможным прямым, лежащим в этой

плоскости. В результате мы приходим к задаче рентгеновской томографии для определения $\sigma_k(x)$, $k = 1, 2, 3$. Хорошо известно, что эта задача решается однозначно. Отсюда следуют теорема 3 о единственности решения обратной задачи 1 и алгоритм ее решения.

Из формул (2), (3), (18) следует, что для рассеянного на Ω поля верно асимптотическое равенство

$$\mathbf{E}^{\text{sc}}(x, \omega, \mathbf{v}, \mathbf{j}) = (\alpha(x, \mathbf{v}, \mathbf{j}) - \mathbf{j})e^{i\omega\psi(x, \mathbf{v})} + O(\omega^{-1}),$$

$$\omega \rightarrow \infty.$$

С учетом того, что значения $\alpha_k(x, \mathbf{v}^k(\varphi), \mathbf{j}^k) \in (0, 1]$, данные обратной задачи 2 приводят к формуле

$$\alpha_k(x, \mathbf{v}^k(\varphi), \mathbf{j}^k) = 1 - \lim_{t \rightarrow \psi(x, \mathbf{v}^k(\varphi)) + 0} F_k(x, t, \varphi),$$

$$x \in S^+(\mathbf{v}^k(\varphi)), \quad \varphi \in [0, \pi], \quad k = 1, 2, 3.$$

Эта формула сводит задачу 2 к рассмотренной выше.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № 0314-2019-0011).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chadan K., Sabatier P.C. Inverse Problems in Quantum Scattering Theory. N.Y.: Springer-Verlag, 1977.

2. Newton R.G. Inverse Schrödinger Scattering in Three Dimensions. N.Y.: Springer, 1989.
3. Klibanov M.V., Sacks P.E. // J. Math. Phys. 1992. V. 33. P. 3813–3821.
4. Klibanov M.V. // SIAM J. Appl. Math. 2014. V. 74. P. 392–410.
5. Klibanov M.V. // Applied Mathematics Letters. 2014. V. 37. P. 82–85.
6. Novikov R.G. // J. Geometrical Analysis. 2015. <https://doi.org/10.1007/s12220-014-9553-7>
7. Novikov R.G. // Bulletin des Sciences Mathématiques. 2015. <https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2015.04.005>
8. Novikov R.G. // Eurasian J. of Math. and Comp. Appl. 2015. V. 3. P. 64–70.
9. Романов В.Г. // ЖВММФ. 2020. Т. 60. № 6. С. 142–160.
10. Романов В.Г. // Сиб. матем. журн. 2017. Т. 58. № 4. С. 916–924.
11. Романов В.Г. // Сиб. матем. журн. 2018. Т. 59. № 3. С. 626–638.
12. Klibanov M.V., Nguyen L.H., Pan K. // Appl. Numer. Math. 2016. V. 110. P. 190–203.
13. Карчевский А.Л., Дедок В.А. // Сиб. журн. индустр. матем. 2018. Т. 12. № 3. С. 50–59.
14. Романов В.Г. // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления., 2021. Т. 496. № 1. С. 53–55.
15. Вайнберг Б.Р. // УМН. 1966. Т. 21. № 3. С. 115–194.

PHASELESS PROBLEM OF DETERMINATION OF THE ANISOTROPIC CONDUCTIVITY IN ELECTRODYNAMIC EQUATIONS

Corresponding Member of the RAS V. G. Romanov^a

^aSobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

For the system of electrodynamic equations corresponding periodic in time oscillations two inverse problems of determination of the anisotropic conductivity from a given phaseless information for solutions of some forward problems are considered. It is supposed that the conductivity is described by a diagonal matrix $\sigma(x) = \text{diag}(\sigma_1(x), \sigma_2(x), \sigma_3(x))$ and $\sigma(x) = 0$ outside of a compact domain Ω . The plain waves falling down on the inhomogeneity from infinity are considered. For determination of unknown functions an information related to the module of some components of the vector of electric intensity of the full or scattering high frequency electromagnetic fields is given on the boundary of domain Ω . It is proved that this information reduces the inverse problems to problems of X-ray tomography.

Keywords: Maxwell equations, anisotropy, plane waves, phaseless inverse problem, anisotropic conductivity, X-ray tomography

УДК 512.774.4

ФАКТОРЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ СЕВЕРИ–БРАУЭРА

© 2021 г. А. С. Трепалин^{1,2,*}

Представлено академиком РАН А.Н. Паршиным 01.08.2021 г.

Поступило 05.08.2021 г.

После доработки 26.10.2021 г.

Принято к публикации 27.10.2021 г.

Показано, что фактор нетривиальной поверхности Севери–Брауэра S над произвольным полем \mathbb{k} характеристики 0 по конечной группе автоморфизмов \mathbb{k} -рационален тогда и только тогда, когда $|G|$ делится на 3. Иначе фактор бирационально эквивалентен S .

Ключевые слова: поверхности Севери–Брауэра, проблемы рациональности, группа Брауэра, программа минимальных моделей

DOI: 10.31857/S2686954321060175

Пусть \mathbb{k} – произвольное поле характеристики ноль, а $\bar{\mathbb{k}}$ – его алгебраическое замыкание. Многообразию X размерности d называется многообразием Севери–Брауэра, если $\bar{X} = X \otimes \bar{\mathbb{k}}$ изоморфно $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{k}}}^d$. Если $d = 1$, то X является коникой, а если $d = 2$, то X называется поверхностью Севери–Брауэра.

Многообразие Севери–Брауэра называется нетривиальным, если оно не изоморфно $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{k}}}^d$. Хорошо известно, что многообразие Севери–Брауэра тривиально тогда и только тогда, когда на нем имеется \mathbb{k} -точка. Кроме того, если X нетривиальное d -мерное многообразие Севери–Брауэра и $d + 1$ – простое число, то степень каждой точки на X делится на $d + 1$ (см. [1, Theorem 53]).

Полная классификация конечных подгрупп автоморфизмов нетривиальной поверхности Севери–Брауэра получена в работах К. Шрамова и В. Вологодского [2–5]. Пусть μ_n – циклическая группа порядка n . Тогда верна следующая

Т е о р е м а 1 (ср. [Theorem 1.3(ii)]). Пусть S – нетривиальная поверхность Севери–Брауэра над полем \mathbb{k} характеристики ноль. Тогда любая конечная группа автоморфизмов изоморфна μ_n , μ_{3n} , $\mu_n \rtimes \mu_3$ или $\mu_3 \times (\mu_n \rtimes \mu_3)$, где n – натуральное число, делящееся только на простые числа, равные 1 по

модулю 3 (включая случай $n = 1$), а $\mu_n \rtimes \mu_3$ – полупрямое произведение, соответствующее внешнему автоморфизму μ_n порядка 3, нетривиально действующего на любом нетривиальном элементе μ_n .

Более того, для любой группы G , упомянутой выше, существует поле \mathbb{k} характеристики ноль и нетривиальная поверхность Севери–Брауэра S над этим полем такая, что $G \subset \text{Aut}(S)$.

Целью данной статьи является получение бирациональной классификации факторов нетривиальных поверхностей Севери–Брауэра по конечным группам автоморфизмов. В частности, мы хотим дать ответ на вопрос, для каких поверхностей Севери–Брауэра S и групп $G \subset \text{Aut}(S)$ фактор S/G является \mathbb{k} -рациональным (т.е. бирационально эквивалентным $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{k}}}^2$). Стоит отметить, что для алгебраически замкнутого поля $\bar{\mathbb{k}}$ характеристики ноль факторы $\bar{\mathbb{k}}$ -рациональных поверхностей по конечной группе автоморфизмов всегда $\bar{\mathbb{k}}$ -рациональны по критерию рациональности Кастельнуово (см. [6]). Кроме того, для произвольного поля \mathbb{k} характеристики ноль факторы $\mathbb{P}_{\bar{\mathbb{k}}}^2$ по конечным группам автоморфизмов также всегда \mathbb{k} -рациональны (см. [7, Theorem 1.3]). Некоторые другие результаты о рациональности факторов \mathbb{k} -рациональных поверхностей по конечным группам автоморфизмов можно найти в статье [8]. Основной результат этой статьи – следующая

Т е о р е м а 2. Пусть S – нетривиальная поверхность Севери–Брауэра над полем \mathbb{k} характеристики ноль, а G – конечная подгруппа в $\text{Aut}(S)$.

¹Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, Россия

²Лаборатория алгебраической геометрии, Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

*E-mail: trepalin@mccme.ru

Тогда фактор S/G является \mathbb{k} -рациональным тогда и только тогда, когда $|G|$ делится на 3. Иначе фактор S/G бирационально эквивалентен S .

Эта теорема является обобщением следующего предложения.

Предложение 1. Пусть C — коника над полем \mathbb{k} характеристики ноль, на которой нет \mathbb{k} -точек, а G — конечная подгруппа в $\text{Aut}(C)$. Тогда фактор C/G изоморфен \mathbb{P}_k^1 тогда и только тогда, когда порядок G четен.

Доказательство. Степень любой точки на C четна. Предположим, что порядок G нечетный. Тогда любая G -орбита на множестве геометрических точек C состоит из нечетного количества точек. Значит, образ такой орбиты на C/G не определен над \mathbb{k} , а на факторе C/G нет \mathbb{k} -точек. Следовательно, этот фактор не изоморфен \mathbb{P}_k^1 .

Теперь предположим, что порядок G четный. В этом случае найдется элемент $g \in G$ порядка 2. Антиканоническое отображение, заданное линейной системой $|-K_C|$, определяет вложение $C \hookrightarrow \mathbb{P}_k^2$ такое, что действие g на C продолжается до действия g на \mathbb{P}_k^2 . Можно выбрать координаты $(x : y : z)$ в \mathbb{P}_k^2 такие, что действие g будет следующим: $(x : y : z) \mapsto (x : y : -z)$. Тогда отображение факторизации $C \rightarrow C/\langle g \rangle$ является ограничением проекции $\mathbb{P}_k^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_k^1$, заданной формулой $(x : y : z) \mapsto (x : y)$, на $C \subset \mathbb{P}_k^2$.

Следовательно, некоторые $\langle g \rangle$ -орбиты определены над \mathbb{k} , а значит, некоторые G -орбиты также определены над \mathbb{k} . Таким образом, на факторе C/G есть \mathbb{k} -точки, а значит, этот фактор изоморфен \mathbb{P}_k^1 , поскольку $\mathbb{P}_k^1/G \cong \mathbb{P}_k^1$ для любой конечной группы $G \subset \text{Aut}(\mathbb{P}_k^1)$.

Доказательство теоремы 2 устроено более сложно, поэтому мы разобьем его на несколько лемм.

Лемма 1. Пусть S — нетривиальная поверхность Севери–Брауэра над полем \mathbb{k} характеристики ноль, а G — конечная подгруппа в $\text{Aut}(S)$, изоморфная μ_n . Тогда множество G -неподвижных точек на S состоит из трех изолированных геометрических точек. Если $n > 3$, то эти точки определены над расширением полей K/\mathbb{k} степени 3.

Доказательство. Рассмотрим действие G на $\bar{S} \cong \mathbb{P}_k^2$. Это действие диагоналізується в $\text{PGL}_3(\mathbb{k})$. Заметим, что множество неподвижных точек G либо состоит из изолированной неподвижной точки и прямой, либо состоит из трех изолированных точек p_1, p_2 и p_3 . В первом случае

изолированная неподвижная точка уникальна, а значит, определена над \mathbb{k} , но на S нет \mathbb{k} -точек. Следовательно, G имеет три изолированные неподвижные точки на S .

Изолированные неподвижные точки группы G транзитивно переставляются группой Галуа $\text{Gal}(\bar{\mathbb{k}}/\mathbb{k})$. Поэтому эти точки определены либо над расширением полей K/\mathbb{k} степени 3 с группой Галуа $\text{Gal}(K/\mathbb{k}) \cong \mu_3$, либо над расширением полей K/\mathbb{k} степени 6 с группой Галуа $\text{Gal}(K/\mathbb{k}) \cong \mathfrak{S}_3$, где \mathfrak{S}_3 — неабелева группа порядка 6. В частности, найдется элемент $\gamma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{k}}/\mathbb{k})$ порядка 3 такой, что $\gamma p_1 = p_2, \gamma p_2 = p_3, \gamma p_3 = p_1$.

Если $n > 3$, то найдется подгруппа $\mu_p \subset G$, где p — простое число, равное 1 по модулю 3. Действие образующей μ_p на $\bar{S} \cong \mathbb{P}_k^2$ можно записать, как $\text{diag}(\xi_p; \xi_p^a; 1)$, где ξ_p — корень из единицы p -ой степени. Образующая действует на касательных пространствах $T_{p_1}\bar{S}, T_{p_2}\bar{S}$ и $T_{p_3}\bar{S}$ как $\text{diag}(\xi_p; \xi_p^a), \text{diag}(\xi_p^{a-1}; \xi_p^{-1})$ и $\text{diag}(\xi_p^{-a}; \xi_p^{1-a})$ соответственно.

Поскольку $\gamma p_1 = p_2$, получаем $\gamma(\xi_p) = \xi_p^{a-1}$, а значит,

$$\xi_p^{-1} = \gamma(\xi_p^a) = \gamma(\xi_p)^a = \xi_p^{a(a-1)}.$$

Следовательно, $a^2 - a + 1 = 0$ по модулю p . В частности, $a \neq 1$ и $a \neq -1$ по модулю p .

Предположим, что группа Галуа $\text{Gal}(\bar{\mathbb{k}}/\mathbb{k})$ содержит элемент δ такой, что $\delta p_1 = p_1, \delta p_2 = p_3$ и $\delta p_3 = p_2$. Тогда $\delta(\xi_p) = \xi_p^a$ и $\delta(\xi_p^a) = \xi_p$. Значит, $a^2 = 1$ по модулю p . Но $a \neq \pm 1$ по модулю p . Получаем противоречие. Следовательно, если $n > 3$, то три точки p_1, p_2 и p_3 определены над расширением полей K/\mathbb{k} степени 3.

Лемма 2. Пусть S — нетривиальная поверхность Севери–Брауэра над полем \mathbb{k} характеристики ноль, а G — конечная подгруппа в $\text{Aut}(S)$, изоморфная μ_n , где n — натуральное число, делящееся только на простые числа, равные 1 по модулю 3. Тогда фактор S/G бирационально эквивалентен S .

Доказательство. Степень любой точки на нетривиальной поверхности Севери–Брауэра делится на 3. Значит, на S/G нет \mathbb{k} -точек, поскольку количество геометрических точек в G -орбитах не делится на 3.

Для $n = 1$ утверждение леммы тривиально. Поэтому предположим, что $n > 1$.

По лемме 4 множество G -неподвижных точек на S состоит из трех изолированных геометрических точек, определенных над расширением по-

лей K/\mathbb{k} степени 3. Любая циклическая группа, действующая на $\bar{S} \cong \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$, является подгруппой тора, действующего на \bar{S} . Значит, фактор S/G — это \mathbb{k} -форма торической поверхности с тремя особыми точками, являющимися образами G -неподвижных точек на S . Группа Галуа $\mu_3 \cong \text{Gal}(K/\mathbb{k})$ действует на веере соответствующей торической поверхности. Разрешим особенности S/G и воспользуемся μ_3 -эквивариантной программой минимальных моделей. В результате мы получим μ_3 -минимальную поверхность дель Пеццо или расслоение на коники S' такую, что \bar{S}' — торическая поверхность. Для любой торической поверхности дель Пеццо или расслоения на коники X выполняется неравенство $K_X^2 \geq 6$. Несложно заметить, что для таких поверхностей группа μ_3 может эффективно действовать только на веере поверхности дель Пеццо степени 9 или 6. Кроме того, поверхность дель Пеццо степени 6 не может быть μ_3 -минимальной, поскольку на ней можно μ_3 -эквивариантно стянуть тройку непересекающихся (-1) -кривых. Следовательно, S' — поверхность дель Пеццо степени 9 без \mathbb{k} -точек, т.е. нетривиальная поверхность Севери–Брауэра.

Класс поверхности S' в группе Брауэра $\text{Br}(\mathbb{k})$ лежит в циклической подгруппе, порожденной классом поверхности S , поскольку между поверхностями Севери–Брауэра S и S' есть рациональное отображение $S \dashrightarrow S'$ (см. [9, Упражнение 3.3.8(iii)]). Значит, S' либо изоморфна $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$, что невозможно, поскольку на S' нет \mathbb{k} -точек, либо изоморфна S , либо изоморфна S^{op} , где S^{op} — поверхность Севери–Брауэра, соответствующая центральной простой алгебре, противоположной центральной простой алгебре, соответствующей S . Поверхность S^{op} бирационально эквивалентна S (см. [10]). Следовательно, S/G бирационально эквивалентна S .

З а м е ч а н и е 1. Заметим, что доказательство леммы 5 несложно обобщить на случай, когда $N \cong \mu_n$ — нормальная подгруппа в конечной группе G , изоморфной μ_{3n} , $\mu_n \rtimes \mu_3$ или $\mu_3 \times (\mu_n \rtimes \mu_3)$. В этом случае фактор S/N будет G/N -бирационально эквивалентным поверхности Севери–Брауэра S' , поскольку действие G/N на веере, соответствующем S/N , либо тривиально, либо совпадает с действием $\mu_3 \cong \text{Gal}(K/\mathbb{k})$.

Теперь предположим, что группа μ_3 действует на нетривиальной поверхности Севери–Брауэра S . Тогда по лемме 4 группа μ_3 имеет три изолированные неподвижные геометрические точки, определенные над расширением полей K/\mathbb{k} степени 3 с группой Галуа $\text{Gal}(K/\mathbb{k}) \cong \mu_3$ или над расшире-

нием полей K/\mathbb{k} степени 6 с группой Галуа $\text{Gal}(K/\mathbb{k}) \cong \mathfrak{S}_3$. Мы рассмотрим эти случаи отдельно и покажем, что в каждом из них фактор S/μ_3 является \mathbb{k} -рациональным.

Л е м м а 3. Пусть S — нетривиальная поверхность Севери–Брауэра, а G — конечная подгруппа в $\text{Aut}(S)$, изоморфная μ_3 . Предположим, что изолированные неподвижные точки группы G определены над расширением полей K/\mathbb{k} степени 3 с группой Галуа $\text{Gal}(K/\mathbb{k}) \cong \mu_3$. Тогда S/G является \mathbb{k} -рациональным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть p_1, p_2 и p_3 — изолированные неподвижные геометрические точки группы G на S . Раздуем G -эквивариантно эту тройку точек и получим поверхность дель Пеццо \tilde{S} степени 6. Заметим, что каждая из шести (-1) -кривых G -инвариантна, поэтому шесть точек пересечения этих кривых неподвижны для G . Легко проверить, что на касательном пространстве к \tilde{S} в каждой из этих точек группа G действует как $\langle \text{diag}(\omega, \omega) \rangle$, где ω — корень третьей степени из единицы.

Группа $\text{Gal}(K/\mathbb{k}) \cong \mu_3$ не сохраняет ни одну G -неподвижную точку на \tilde{S} . Поэтому можно раздуть любую тройку G -неподвижных точек, определенную над \mathbb{k} , и получить поверхность \tilde{X} . Для полученной поверхности $K_{\tilde{X}}^2 = 3$, исключительный дивизор раздутия $\tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$ — это тройка поточечно G -неподвижных (-1) -кривых E_1, E_2 и E_3 , а собственные прообразы шести (-1) -кривых на \tilde{S} являются (-2) -кривыми на \tilde{X} . Можно проверить, что \tilde{X} — слабая поверхность дель Пеццо, а антиканоническое отображение

$$\varphi_{|-K_{\tilde{X}}|} : \tilde{X} \rightarrow X$$

стягивает шесть (-2) -кривых в три особенности типа A_2 . Кроме того, X — особая кубическая поверхность, а образы E_1, E_2 и E_3 — это прямые, проходящие через пары особых точек.

Линейные системы $|-K_{\tilde{S}}|, |-K_{\tilde{X}}|$ и $|-K_X|$ являются G -инвариантными, поскольку морфизмы $\tilde{S} \rightarrow S, \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$ и $\tilde{X} \rightarrow X$ являются G -эквивариантными. Значит, действие G на X индуцирует действие G на $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^3$. Кроме того, G поточечно фиксирует плоскость в $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^3$, поскольку она фиксирует три пересекающиеся прямые. Следовательно, можно выбрать координаты $(x : y : z : t)$ в $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^3$ такие, что действие G задается отображением $(x : y : z : t) \mapsto (x : y : z : \omega t)$. Тогда отображение

факторизации $X \rightarrow X/G$ является ограничением проекции $\mathbb{P}_k^3 \rightarrow \mathbb{P}_k^2$, заданной формулой

$$(x : y : z : t) \mapsto (x : y : z)$$

(ср. с доказательством предложения 3). Значит, $X/G \cong \mathbb{P}_k^2$ и S/G является \mathbb{k} -рациональным, поскольку S/G и X/G бирационально эквивалентны.

Для оставшегося случая $\text{Gal}(K/\mathbb{k}) \cong \mathfrak{S}_3$ нам понадобится следующая

Лемма 4. Пусть S' – поверхность дель Пеццо степени 6 над произвольным полем \mathbb{k} характеристики ноль. Если на S' найдется точка степени 2 и точка степени 3, то S' является \mathbb{k} -рациональной.

Доказательство. Пусть L – расширение поля \mathbb{k} степени 2 такое, что на $S' \otimes L$ есть L -точка. Тогда $S' \otimes L$ является L -рациональной, поэтому можно найти пару геометрических точек p_1 и p_2 на S' , определенных над L и не лежащих на (-1) -кривых.

Рассмотрим раздутие $X \rightarrow S'$ точек p_1 и p_2 . Можно проверить, что X – поверхность дель Пеццо (возможно, слабая) степени 4, на которой есть точка степени 3. Антиканоническое отображение, заданное $|-K_X|$, отображает X в $X' \subset \mathbb{P}_k^4$, где X' – поверхность дель Пеццо (возможно, особая) степени 4. В доказательстве [11, Lemma 2.4] показано, что в этом случае на X' есть гладкая \mathbb{k} -точка. Для удобства читателя мы приведем другое доказательство этого факта.

Пусть q_1, q_2 и q_3 – три геометрические точки на X' такие, что эта тройка определена над \mathbb{k} . Такая тройка существует, поскольку на S' есть точка степени 3. Рассмотрим плоскость Π , определенную над \mathbb{k} и проходящую через q_1, q_2 и q_3 . Получаем $\Pi \cdot X' = 4$ и кратность пересечения одинакова в каждой из точек q_1, q_2 и q_3 . Следовательно, если $\Pi \cap X'$ имеет размерность ноль, то найдется другая гладкая \mathbb{k} -точка q на $\Pi \cap X'$.

Если $\Pi \cap X'$ одномерно, то пересечение $C = X' \cap \Pi$ – коника, поскольку X' – пересечение двух квадрик в \mathbb{P}_k^4 . Если C гладкая, то на ней бесконечно много \mathbb{k} -точек, поскольку на ней есть точка степени 3. Если C – объединение двух прямых, то точки q_1, q_2 и q_3 должны лежать на одной из них. Тогда эта прямая определена над \mathbb{k} . Если C – двойная прямая, то эта прямая определена над \mathbb{k} . В любом случае на C бесконечно много \mathbb{k} -точек, поэтому на X' есть гладкая \mathbb{k} -точка.

Образ любой \mathbb{k} -точки на X' при отображении $X' \rightarrow S'$ – это \mathbb{k} -точка на S' . Значит, S' является \mathbb{k} -рациональной по [12, параграф 4].

Лемма 5. Пусть S – нетривиальная поверхность Севери–Брауэра, а G – конечная подгруппа в $\text{Aut}(S)$, изоморфная μ_3 . Предположим, что изолированные неподвижные точки группы G определены над расширением полей K/\mathbb{k} степени 6 с группой Галуа $\text{Gal}(K/\mathbb{k}) \cong \mathfrak{S}_3$. Тогда S/G является \mathbb{k} -рациональным.

Доказательство. Группа G имеет три изолированные неподвижные точки на S , определенные над K . Значит, фактор S/G является \mathbb{k} -формой особой торической поверхности такой, что три особые точки не определены над \mathbb{k} , но определены над K . Группа Галуа $\mathfrak{S}_3 \cong \text{Gal}(K/\mathbb{k})$ действует на веере этой торической поверхности. Разрешим особенности S/G и воспользуемся \mathfrak{S}_3 -эквивариантной программой минимальных моделей. В результате мы получим \mathfrak{S}_3 -минимальную поверхность дель Пеццо или расслоение на коники S' такую, что $\overline{S'}$ – торическая поверхность. Для любой торической поверхности дель Пеццо или расслоения на коники X выполняется неравенство $K_X^2 \geq 6$. Несложно заметить, что для таких поверхностей группа \mathfrak{S}_3 может эффективно действовать только на веере поверхности дель Пеццо степени 9 или 6.

Покажем, что S' является \mathbb{k} -рациональной. Заметим, что в группе $\mathfrak{S}_3 \cong \text{Gal}(K/\mathbb{k})$ есть нормальная подгруппа μ_3 , поэтому существует расширение $L = K^{\mu_3}$ поля \mathbb{k} степени 2 такое, что изолированные неподвижные точки группы G не определены над L , но определены над расширением K/L степени 3. Значит, $S' \otimes L \cong (S \otimes L)/G$ является L -рациональной по лемме 3. Следовательно, на S' есть точка степени 2. Если S' – поверхность дель Пеццо степени 9, то S' является \mathbb{k} -рациональной, поскольку прямая, проходящая через точку степени 2 определена над \mathbb{k} .

Если S' – поверхность дель Пеццо степени 6, то на ней есть точка степени 3, поскольку образ любой точки степени 3 на S при отображении факторизации либо \mathbb{k} -точка, либо точка степени 3. Значит, S' является \mathbb{k} -рациональной по лемме 4.

Теперь докажем теорему 2.

Доказательство теоремы 2. Конечная подгруппа G в $\text{Aut}(S)$ изоморфна $\mu_n, \mu_{3n}, \mu_n \times \mu_3$ или $\mu_3 \times (\mu_n \times \mu_3)$ по теореме 1.

Если в G есть подгруппа $N \cong \mu_n$, где n – натуральное число, делящееся только на простые числа, равные 1 по модулю 3, то N нормальна в G и фактор S/N будет G/N -бирационально эквивалентным нетривиальной поверхности Севери–Брауэра S' , на которой действует группа G/N , по

лемме 2 и замечанию 1. В частности, если $G \cong \mu_n$, то S/G бирационально эквивалентен S по лемме 2.

Три других случая сводятся к случаю, когда на нетривиальной поверхности Севери–Брауэра действует группа μ_3 или μ_3^2 , поскольку S/N и $S'/(G/N)$ бирационально эквивалентны.

Фактор поверхности Севери–Брауэра по μ_3 будет \mathbb{k} -рациональным по леммам 3 и 4, а фактор S/μ_3^2 бирационально эквивалентен фактору торической поверхности S/μ_3 по циклической группе μ_3 . Этот фактор \mathbb{k} -рационален по [7, Proposition 4.5].

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит Константина Шрамова и Сергея Горчинского за множество полезных обсуждений и ценных замечаний.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование финансировалось в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kollár J.* Severi–Brauer varieties; a geometric treatment, (2016). preprint, arXiv:1606.04368
2. *Shramov C., Vologodsky V.* Boundedness for finite subgroups of linear algebraic groups, (2020). preprint, arXiv:2009.14485
3. *Шрамов К.А.* Бирациональные автоморфизмы поверхностей Севери–Брауэра // Матем. сб. 2020. Т. 211. № 3. С. 169–184.
4. *Шрамов К.А.* Неабелевы группы, действующие на поверхностях Севери–Брауэра // Матем. заметки. 2020. Т. 108. № 6. С. 952–953.
5. *Shramov C.* Finite groups acting on Severi–Brauer surfaces // Eur. J. Math. 2021. V. 7. № 2. P. 591–612.
6. *Castelnuovo G.* Sulla razionalità delle involuzioni piane // Math. Ann. 1894. № 44. P. 125–155.
7. *Trepalin A.S.* Rationality of the quotient of \mathbb{P}^2 by finite group of automorphisms over arbitrary field of characteristic zero // Cent. Eur. J. Math. 2014. V. 12. № 2. P. 229–239.
8. *Trepalin A.* Quotients of del Pezzo surfaces // Int. J. Math. 2019. V. 30. № 11. 1950068, 40 pp.
9. *Горчинский С.О., Шрамов К.А.* Неразветвленная группа Брауэра и ее приложения // МЦНМО, М., 2018. 200 с.
10. *Amitsur S.A.* Generic splitting fields of central simple algebras // Ann. Math. 1955. V. 62. № 2. P. 8–43.
11. *Shramov C.* Automorphisms of cubic surfaces without points // Int. J. Math. 2020. V. 21. № 11. 2050083. 15 p.
12. *Исковских В.А.* Факторизация бирациональных отображений рациональных поверхностей с точки зрения теории Мори // УМН. 1996. Т. 51. № 4 (310). С. 3–72.

QUOTIENTS OF SEVERI–BRAUER SURFACES

A. S. Trepalin^{a,b}

^a*Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

^b*Laboratory of Algebraic Geometry, National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.N. Parshin

We show that a quotient of a non-trivial Severi–Brauer surface S over arbitrary field \mathbb{k} of characteristic 0 by a finite group $G \subset \text{Aut}(S)$ is \mathbb{k} -rational, if and only if $|G|$ is divisible by 3. Otherwise, the quotient is birationally equivalent to S .

Keywords: Severi–Brauer surfaces, Rationality problems, Brauer group, Minimal model program

УДК 517+531.01

ТЕНЗОРНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ, ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ДВУМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2021 г. М. В. Шамолин^{1,*}

Представлено академиком РАН В. В. Козловым 13.10.2021 г.

Поступило 14.10.2021 г.

После доработки 14.10.2021 г.

Принято к публикации 22.11.2021 г.

В работе предьявлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким двумерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл, инвариантная дифференциальная форма

DOI: 10.31857/S2686954321060163

Как известно [1–3], наличие достаточного количества не только первых интегралов (скалярных инвариантов), но и других тензорных инвариантов позволяет полностью проинтегрировать систему дифференциальных уравнений. Так, например, наличие инвариантной формы фазового объема позволяет понизить порядок рассматриваемой системы. Для консервативных систем этот факт естественен. А вот для систем, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющих инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, состоять из трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций [4–6].

Так, например, задача о движении пространственного маятника на сферическом шарнире в потоке набегающей среды приводит к системе на касательном расслоении к двумерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий [7]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выра-

жающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Известны также задачи о движении точки по двумерным поверхностям вращения, плоскости Лобачевского и т.д. Полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил [5].

В работе предьявлены тензорные инварианты (дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким двумерным многообразиям. Показана связь наличия данных инвариантов и полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

1. ПРИМЕР СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Рассмотрим динамическую систему на плоскости с одной степенью свободы α следующего вида:

$$\alpha^\bullet = -\omega + b\delta(\alpha), \quad \omega^\bullet = F(\alpha), \quad (1)$$

которая эквивалентна следующему уравнению:

$$\alpha^{\bullet\bullet} - b\tilde{\delta}(\alpha)\alpha^\bullet + F(\alpha) = 0, \quad \tilde{\delta}(\alpha) = d\delta(\alpha)/d\alpha.$$

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: shamolin@imec.msu.ru

Пара гладких функций $(F(\alpha), \delta(\alpha))$ определяет силовое поле в системе: функция $F(\alpha)$ описывает консервативную составляющую поля, а функция $\delta(\alpha)$ – возможные рассеяние или подкачку энергии в системе. При $b = 0$ консервативная система (1) обладает гладким интегралом энергии, при этом ее фазовый поток сохраняет площадь на плоскости $\mathbf{R}^2\{\alpha, \omega\}$, т.е. сохраняется дифференциальная 2-форма $d\alpha \wedge d\omega$ площади с единичной плотностью. При интегрировании системы можно использовать или первый интеграл энергии, или факт сохранения фазовой площади.

Иначе обстоит дело в случае $b \neq 0$. Поскольку у системы (1) появляются, вообще говоря, притягивающие или отталкивающие (асимптотические) предельные множества, первый интеграл системы – трансцендентная (в смысле комплексного анализа) функция. Приведем ее для следующего важного случая:

$$F(\alpha) = \lambda \delta(\alpha) \tilde{\delta}(\alpha), \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

Действительно, первый интеграл имеет вид

$$\Phi_1(\alpha, \omega) = \delta(\alpha) e^{\Psi(t)} = C_1 = \text{const},$$

$$\Psi(t) = \int \frac{(t-b)dt}{t^2 - bt + \lambda}, \quad t = \frac{\omega}{\delta(\alpha)},$$

при этом асимптотические предельные множества находятся из системы равенств $\delta(\alpha) = 0$, $\omega = 0$ (см. также [8]).

Поскольку появляются асимптотические предельные множества, не существует никакой даже абсолютно непрерывной функции, являющейся плотностью меры фазовой плоскости. Но можно (наряду с первым интегралом) предъявить инвариантную дифференциальную 2-форму с коэффициентами, являющимися трансцендентными функциями.

Действительно, если μ_1 – один (для простоты действительный) из корней уравнения $\mu^2 - b\mu + \lambda = 0$, то искомая 2-форма имеет вид

$$T_1(\alpha, \omega) = \exp\left\{-\frac{1}{\mu_1} \Psi(t)\right\} d\alpha \wedge d\omega,$$

$$\Psi(t) = \int \frac{(t-b)dt}{t^2 - bt + \lambda}, \quad t = \frac{\omega}{\delta(\alpha)}.$$

2. ИНВАРИАНТЫ УРАВНЕНИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Рассмотрим двумерное риманово многообразие $M^2\{\alpha, \beta\}$ с аффинной связностью $\Gamma_{jk}^i(\alpha, \beta)$ и изучим структуру уравнений геодезических линий на касательном расслоении $TM^2\{\alpha^*, \beta^*; \alpha, \beta\}$ (ср. с [5]). Для этого изучим далее достаточно об-

щий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\alpha^* = z_2 f_2(\alpha), \quad \beta^* = z_1 f_1(\alpha), \quad (2)$$

где $f_1(\alpha), f_2(\alpha)$ – гладкие функции, не равные тождественно нулю. Такие координаты z_1, z_2 в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются уравнения геодезических [5, 7], например, с тремя ненулевыми коэффициентами связности (в частности, на поверхностях вращения, плоскости Лобачевского и т.д.):

$$\alpha^{**} + \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) \alpha^{*2} + \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta) \beta^{*2} = 0,$$

$$\beta^{**} + 2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) \alpha^* \beta^* = 0, \quad (3)$$

т.е. выполнены равенства

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\alpha\alpha}^{\beta}(\alpha, \beta) \equiv \Gamma_{\beta\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) \equiv 0.$$

В случае (2) соотношения на касательном расслоении TM^2 примут вид

$$z_1^* = -f_2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_2,$$

$$z_2^* = -f_2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2^2 - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta) z_1^2, \quad (4)$$

и уравнения (3) геодезических почти всюду эквивалентны составной системе (2), (4) на многообразии $TM^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$.

Для полного интегрирования системы (2), (4) необходимо знать, вообще говоря, три независимых тензорных инварианта [1]: или три первых интеграла, или три независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию из интегралов и форм. При этом, конечно, первые интегралы (в частности, для уравнений геодезических) можно искать и в более общем виде, чем рассмотрено далее.

В [7] рассмотрены примеры систем геодезических на двумерной сфере с различными метриками, а в [5] – примеры систем геодезических на двумерных поверхностях вращения и на плоскости Лобачевского.

Т е о р е м а 1. *Если выполнены условия*

$$\Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta) f_1^2(\alpha) + f_2^2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] \equiv 0, \quad (5)$$

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0,$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) = \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha), \quad (6)$$

то система (2), (4) обладает полным набором, состоящим из трех первых интегралов вида

$$\Phi_1(z_2, z_1) = z_1^2 + z_2^2 = C_1^2 = \text{const}, \quad (7)$$

$$\Phi_2(z_1; \alpha) = z_1 \Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const},$$

$$\Phi_0(\alpha) = f_1(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(b) db \right\}, \quad (8)$$

$$\Phi_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) =$$

$$= \beta \pm \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{C_2 f_1(b)}{f_2(b) \sqrt{C_1^2 \Phi_0^2(b) - C_2^2}} db = C_3 = \text{const}.$$

Более того, после некоторого ее приведения (замен независимой переменной $\frac{d}{dt} = f_2(\alpha) \frac{d}{d\tau}$ и фазовой

$z_1^* = \ln|z_1|$) фазовый поток системы (2), (4) сохраняет объем на касательном расслоении TM^2 , т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма.

Система равенств (5) может трактоваться как возможность преобразования квадратичной формы метрики к каноническому виду с законом сохранения энергии (7) (или см. ниже (10)) в зависимости от рассматриваемой задачи. История и текущее состояние рассмотрения данной более общей проблемы достаточно обширны (отметим лишь работы [9, 10]). Ну а поиск как интеграла (7), так и (8) опирается на наличие в системе дополнительных групп симметрий [5, 11].

3. ИНВАРИАНТЫ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Несколько модифицируем систему (2), (4), вводя в нее консервативное гладкое силовое поле в проекциях на оси z_1^* и z_2^* , соответственно:

$$\begin{pmatrix} F_1(\beta) f_1(\alpha) \\ F_2(\alpha) f_2(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$\begin{aligned} \alpha^{\bullet} &= z_2 f_2(\alpha), \\ z_2^{\bullet} &= F_2(\alpha) f_2(\alpha) - \\ &- f_2(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2^2 - \\ &- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta) z_1^2, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} z_1^{\bullet} &= F_1(\beta) f_1(\alpha) - \\ &- f_2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_2, \\ \beta^{\bullet} &= z_1 f_1(\alpha), \end{aligned}$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned} \alpha^{\bullet\bullet} - F_2(\alpha) f_2^2(\alpha) + \Gamma_{\alpha\alpha}^{\alpha}(\alpha, \beta) \alpha^{\bullet 2} + \Gamma_{\beta\beta}^{\alpha}(\alpha, \beta) \beta^{\bullet 2} &= 0, \\ \beta^{\bullet\bullet} - F_1(\beta) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma_{\alpha\beta}^{\beta}(\alpha, \beta) \alpha^{\bullet} \beta^{\bullet} &= 0, \end{aligned}$$

на касательном расслоении $TM^2\{\alpha^{\bullet}, \beta^{\bullet}; \alpha, \beta\}$.

Теорема 2. Если выполнены условия (5), (6), то система (9) обладает полным набором, состоящим из трех первых интегралов вида:

$$\begin{aligned} \Phi_1(z_2, z_1; \alpha) &= z_1^2 + z_2^2 + V(\alpha, \beta) = C_1 = \text{const}, \\ V(\alpha, \beta) &= V_2(\alpha) + V_1(\beta) = \\ &= -2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F_2(a) da - 2 \int_{\beta_0}^{\beta} F_1(b) db, \end{aligned} \quad (10)$$

а также при $F_1(\beta) \equiv 0$ – первым интегралом (8) и

$$\begin{aligned} \Phi_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) &= \\ &= \beta \pm \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{C_2 f_1(b)}{f_2(b) \sqrt{\Phi_0^2(b) [C_1 - V(b, \beta_0)] - C_2^2}} db = \\ &= C_3 = \text{const}. \end{aligned}$$

Более того, после некоторого ее приведения (замен независимой переменной $\frac{d}{dt} = f_2(\alpha) \frac{d}{d\tau}$ и фазовой

$z_1^* = \ln|z_1|$) фазовый поток системы (9) сохраняет объем на касательном расслоении TM^2 , т.е. сохраняется соответствующая дифференциальная форма.

4. ИНВАРИАНТЫ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

Далее несколько модифицируем систему (9), вводя в нее гладкое силовое поле с диссипацией. Ее наличие (вообще говоря, знакопеременной) характеризует не только коэффициент $b\delta(\alpha)$, $b > 0$, в первом уравнении системы (11) (в отличие от системы (9)), но и следующая зависимость (внешнего) силового поля в проекциях на оси z_1^* и z_2^* , соответственно:

$$\begin{pmatrix} F_1(\beta) f_1(\alpha) \\ F_2(\alpha) f_2(\alpha) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 F_1^1(\alpha) \\ z_2 F_2^1(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемая система на касательном расслоении $TM^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$\begin{aligned} \alpha^\bullet &= z_2 f_2(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ z_2^\bullet &= F_2(\alpha) f_2(\alpha) - \\ &- f_2(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2^2 - \\ &- \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \\ z_1^\bullet &= F_1(\beta) f_1(\alpha) - \\ &- f_2(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \\ \beta^\bullet &= z_1 f_1(\alpha), \end{aligned} \quad (11)$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned} \alpha^{\bullet\bullet} &- \left\{ b\tilde{\delta}(\alpha) + F_2^1(\alpha) + \right. \\ &+ b\delta(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] \left. \right\} \alpha^\bullet - \\ &- F_2(\alpha) f_2^2(\alpha) + b\delta(\alpha) F_2^1(\alpha) + \\ &+ b^2 \delta^2(\alpha) \left[\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] + \\ &+ \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha(\alpha, \beta) \alpha^{\bullet 2} + \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) \beta^{\bullet 2} = 0, \\ \beta^{\bullet\bullet} &- \left\{ F_1^1(\alpha) + b\delta(\alpha) \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] \right\} \beta^\bullet - \\ &- F_1(\beta) f_1^2(\alpha) + 2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) \alpha^\bullet \beta^\bullet = 0, \\ \tilde{\delta}(\alpha) &= d\delta(\alpha)/d\alpha, \end{aligned}$$

на касательном расслоении $TM^2\{\alpha^\bullet, \beta^\bullet; \alpha, \beta\}$.

Будем интегрировать систему четвертого порядка (11) при выполнении свойств (5), (6), а также при $F_1(\beta) \equiv 0$. При этом происходит отделение независимой подсистемы третьего порядка:

$$\begin{aligned} \alpha^\bullet &= z_2 f_2(\alpha) + b\delta(\alpha), \\ z_2^\bullet &= F_2(\alpha) f_2(\alpha) - \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha) z_1^2 + z_2 F_2^1(\alpha), \\ z_1^\bullet &= \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha) z_1 z_2 + z_1 F_1^1(\alpha), \\ \beta^\bullet &= z_1 f_1(\alpha), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\beta^\bullet = z_1 f_1(\alpha), \quad (13)$$

Будем также предполагать, что для некоторого $\kappa \in \mathbf{R}$ выполнено равенство

$$\Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha) \frac{f_1^2(\alpha)}{f_2^2(\alpha)} = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\Delta(\alpha)|, \quad \Delta(\alpha) = \frac{\delta(\alpha)}{f_2(\alpha)}, \quad (14)$$

а для некоторых $\lambda_2^0, \lambda_s^1 \in \mathbf{R}$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} F_2(\alpha) &= \lambda_2^0 \frac{d}{d\alpha} \frac{\Delta^2(\alpha)}{2}, \\ F_s^1(\alpha) &= \lambda_s^1 f_2(\alpha) \frac{d}{d\alpha} \Delta(\alpha), \quad s = 1, 2. \end{aligned} \quad (15)$$

Условие (14) назовем “геометрическим”, а условия из группы (15) — “энергетическими”.

Условие (14) названо геометрическим в том числе потому, что накладывает условие на ключевой коэффициент связности $\Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду относительно функции $\Delta(\alpha)$. Условия же группы (15) названы энергетическими в том числе потому, что силы становятся, в некотором смысле, “потенциальными” по отношению к функциям $\Delta^2(\alpha)/2$ и $\Delta(\alpha)$, приводя соответствующие коэффициенты системы к однородному виду также относительно функции $\Delta(\alpha)$.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (14) и (15). Тогда система (12), (13) обладает тремя независимыми, вообще говоря, трансцендентными [12, 13] первыми интегралами.

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко (поскольку приходится интегрировать уравнение Абеля [12]). В частности, если $\kappa = -1$, $\lambda_1^1 = \lambda_2^1$, явный вид ключевого первого интеграла таков:

$$\begin{aligned} \Theta_1(z_2, z_1; \alpha) &= G_1 \left(\frac{z_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{z_1}{\Delta(\alpha)} \right) = \\ &= \frac{f_2^2(\alpha)(z_2^2 + z_1^2) + (b - \lambda_1^1) z_2 \delta(\alpha) f_2(\alpha) - \lambda_2^0 \delta^2(\alpha)}{z_1 \delta(\alpha) f_2(\alpha)} = \\ &= C_1 = \text{const}. \end{aligned} \quad (16)$$

При этом дополнительные первые интегралы имеют следующие структуры:

$$\Theta_2(z_2, z_1; \alpha) = G_2 \left(\Delta(\alpha), \frac{z_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{z_1}{\Delta(\alpha)} \right) = C_2 = \text{const}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \Theta_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) &= G_3 \left(\Delta(\alpha), \beta, \frac{z_2}{\Delta(\alpha)}, \frac{z_1}{\Delta(\alpha)} \right) = \\ &= C_3 = \text{const}. \end{aligned} \quad (18)$$

Выражение функций (16)–(18) через конечную комбинацию элементарных функций зависит и от явного вида функции $\Delta(\alpha)$. Так, например, при $\kappa = -1$, $\lambda_1^1 = \lambda_2^1$ дополнительный первый

интеграл системы (12) найдется из дифференциального соотношения

$$d \ln |\Delta(\alpha)| = \frac{(b + u_2) du_2}{U_2(C_1, u_2)},$$

$$u_2 = \frac{z_2}{\Delta(\alpha)}, \quad u_1 = \frac{z_1}{\Delta(\alpha)},$$

$$U_1(u_2) = u_2^2 + (b - \lambda_1^1)u_2 - \lambda_2^0,$$

$$U_2(C_1, u_2) = 2U_1(u_2) - C_1 \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4U_1(u_2)} \right\} / 2, \\ C_1 \neq 0.$$

Правая часть данного соотношения выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая – в зависимости от функции $\Delta(\alpha)$.

Теорема 4. Если для систем вида (12), (13) существуют первые интегралы вида (16)–(18), то у нее также существуют функционально независимые между собой следующие три инвариантные дифференциальные формы с трансцендентными коэффициентами:

$$\rho_1(z_2, z_1; \alpha) dz_2 \wedge dz_1 \wedge d\alpha,$$

$$\rho_1(z_2, z_1; \alpha) = \exp \left\{ (b + \lambda_1^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \times \\ \times \frac{u_2^2 + u_1^2 + (b - \lambda_1^1)u_2 - \lambda_2^0}{u_1},$$

$$\rho_2(z_2, z_1; \alpha) dz_2 \wedge dz_1 \wedge d\alpha,$$

$$\rho_2(z_2, z_1; \alpha) = \Delta(\alpha) \exp \left\{ (b + \lambda_1^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ - \int \frac{(b + u_2) du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\},$$

$$\rho_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) dz_2 \wedge dz_1 \wedge d\alpha \wedge d\beta,$$

$$\rho_3(z_2, z_1; \alpha, \beta) = \exp \left\{ (b + \lambda_1^1) \int \frac{du_2}{U_2(C_1, u_2)} \right\} \times \\ \times G_3(\Delta(\alpha), \beta, u_2, u_1),$$

но зависимые с первыми интегралами (16)–(18).

Для полной интегрируемости системы (12), (13) можно использовать или три первых интеграла, или три независимых дифференциальных формы, или какую-то комбинацию (только независимых элементов) из интегралов и форм.

О строении первых интегралов для рассматриваемых систем с диссипацией см. также [5, 14]. Заметим лишь, что для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [12, 13].

В заключение можно сослаться на многочисленные приложения, касающиеся интегрирования систем с диссипацией, на касательном слое к двумерной сфере, а также более общих систем на расслоении двумерных поверхностей вращения и плоскости Лобачевского [14–16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Poincaré H. Calcul des probabilités, Gauthier-Villars. Paris, 1912. 340 p.
2. Колмогоров А.Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // ДАН СССР. 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766.
3. Козлов В.В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74. Вып. 1. С. 117–148.
4. Шамолин М.В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998. Т. 53. Вып. 3. С. 209–210.
5. Шамолин М.В. Новые случаи однородных интегрируемых систем с диссипацией на касательном слое к двумерному многообразию // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления, 2020. Т. 494. № 1. С. 105–111.
6. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем нечетного порядка с диссипацией // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления, 2020. Т. 491. № 1. С. 95–101.
7. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования // Доклады РАН, 2012. Т. 442. № 4. С. 479–481.
8. Козлов В.В. Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // Прикл. матем. и механ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
9. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. Пер. с нем. Изд. 4, испр., обновл. – М.: URSS, 2017. 352 с.
10. Вейль Г. Симметрия. М.: URSS, 2007.
11. Козлов В.В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3–67.
12. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
13. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.
14. Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. матем. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.
15. Трофимов В.В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984. № 6. С. 31–33.
16. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем // ДАН СССР. 1980. Т. 254. № 6. С. 1349–1353.

TENSOR INVARIANTS OF GEODESIC, POTENTIAL, AND DISSIPATIVE SYSTEMS ON THE TANGENT BUNDLES OF TWO-DIMENSIONAL MANIFOLDS

M. V. Shamolin^a

^a Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

Tensor invariants (differential forms) for homogeneous dynamical systems on tangent bundles to smooth two-dimensional manifolds are presented in this paper. The connection between the presence of these invariants and the full set of the first integrals necessary for the integration of geodesic, potential and dissipative systems is shown. At the same time, the introduced force fields make the considered systems dissipative with dissipation of different signs and generalize the previously considered ones.

Keywords: dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral, invariant differential form

УДК 519.62

ТРАЕКТОРИЯ НАБЛЮДАТЕЛЯ, ОТСЛЕЖИВАЮЩЕГО ДВИЖЕНИЕ ОБЪЕКТА ВОКРУГ ВЫПУКЛОГО МНОЖЕСТВА В \mathbb{R}^3

© 2021 г. Академик РАН В. И. Бердышев^{1,*}

Поступило 07.10.2021 г.
После доработки 07.10.2021 г.
Принято к публикации 21.10.2021 г.

Движущийся в \mathbb{R}^3 объект t огибает телесное выпуклое множество по кратчайшей траектории \mathcal{T} в условиях наблюдения. Задача наблюдателя f , двигающегося со скоростью объекта, — поиск наиболее близкой к \mathcal{T} траектории, удовлетворяющей условию $\delta \leq \|f - t\| \leq K \cdot \delta$ для заданного $\delta > 0$, позволяющей следить за объектом на траектории \mathcal{T} . В работе предлагается способ построения траектории наблюдателя, обеспечивающий выполнение указанного неравенства с константой K , сколь угодно близкой к единице, и возможность наблюдать за объектом на траектории \mathcal{T} , исключая сколь угодно малую ее часть.

Ключевые слова: навигация, автономный аппарат, траектория, наблюдатель

DOI: 10.31857/S2686954321060035

1. Автономный объект t и недружественный наблюдатель f движутся в пространстве \mathbb{R}^3 , содержащем телесное замкнутое выпуклое множество G , препятствующее движению и видимости. Объект, следующий из начальной точки t_* в конечную $t^*(t_*, t^* \notin G)$, обходит множество G по кратчайшей траектории $\mathcal{T} = \mathcal{T}_t$. Предполагается, что величины скоростей V_t, V_f объекта и наблюдателя одинаковы, а расстояние между позициями взаимно видимых $t = t_\tau$ и $f = f_\tau$ в каждый момент времени τ удовлетворяет неравенствам

$$0 < \delta \leq \|t_\tau - f_\tau\| \leq K \cdot \delta \quad (1)$$

при заданных δ и $K \geq 1$. Левое неравенство “обеспечивает” взаимную безопасность объекта и наблюдателя, а правое продиктовано желанием улучшить качество наблюдения.

Задача наблюдателя состоит в построении траектории \mathcal{T}_f , при движении по которой соблюдается неравенство (1) с возможно меньшим значением константы K , а наблюдатель $f_\tau \in \mathcal{T}_f$ может видеть движущийся объект t_τ на возможно большей части траектории \mathcal{T}_t .

При отсутствии ограничения на величину $|V_f|$ вектора скорости наблюдателя задача решается просто: так, двигаясь по траектории $\mathcal{T}_f = \{f_\tau\}$, где $f_\tau = t_\tau - \delta \frac{V_{t_\tau}}{|V_{t_\tau}|}$, наблюдатель f_τ отслеживает движение объекта t_τ на всей траектории \mathcal{T}_t , при этом $\|t_\tau - f_\tau\| = \delta$ и скорость наблюдателя V_{f_τ} зависит от V_{t_τ} и кривизны траектории \mathcal{T}_t . Отметим, что наблюдателю нецелесообразно двигаться непосредственно по \mathcal{T}_t вслед за объектом по участкам строгой выпуклости траектории \mathcal{T}_t и в окрестности ее угловых точек, опасаясь потерять объект t из виду. Поскольку траектория \mathcal{T}_t является кратчайшей, а траектория \mathcal{T}_f при условиях $|V_t| = |V_f|$, (1) таковой не является, то существует участок траектории \mathcal{T}_t , который преодолевается объектом вне зоны наблюдения за t_τ .

В данной работе предлагается способ построения траектории \mathcal{T}_f , обеспечивающей неравенство (1) с константой K сколь угодно близкой к единице, и сколь угодно малую длину участка траектории \mathcal{T}_t , недоступного для наблюдения.

2. Так как t_* и t^* не содержатся в множестве G , то начальная и конечная части траектории \mathcal{T} являются прямолинейными отрезками. Пусть это $[t_*, \underline{t}]$ и $[t^*, \bar{t}]$. Будем использовать обозначения:

¹Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург, Россия

*E-mail: bvi@imm.uran.ru

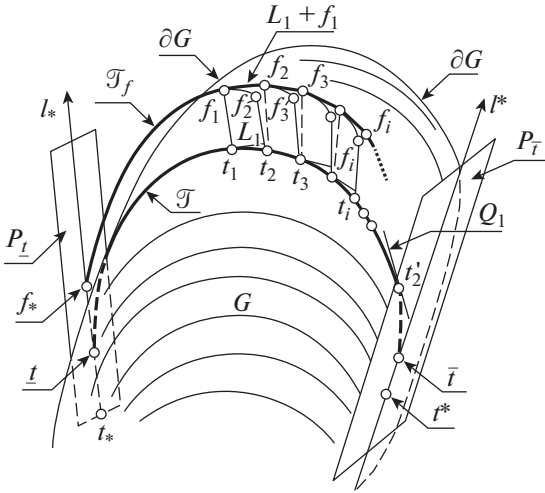


Рис. 1. Жирными линиями изображены траектории \mathcal{T} , \mathcal{T}_f объекта и наблюдателя, тонкими – множество G и опорные плоскости P_t , $P_{t'}$.

$$l_* = \{t_* + \lambda(\underline{t} - t_*): \lambda \geq 0\},$$

$$l^* = \{t^* + \lambda(\bar{t} - t^*): \lambda \geq 0\};$$

$P_t, P_{t'}$ – плоскости, опорные к множеству G в точках \underline{t}, \bar{t} соответственно. Отметим, что $l_* \subset P_t$, $l^* \subset P_{t'}$.

3. Пусть плоскости $P_t, P_{t'}$ параллельны или пересекаются, $l = P_t \cap P_{t'}$ и при этом

$$\rho(t_*, l) > \rho(\underline{t}, l), \quad \rho(t^*, l) > \rho(\bar{t}, l). \quad (2)$$

Двигаясь по траектории

$$\mathcal{T}_f = \mathcal{T} + b, \quad \text{где} \quad b = \delta \frac{\underline{t} - t_*}{\|\underline{t} - t_*\|}, \quad (3)$$

наблюдатель f_t имеет возможность видеть объект $t_t = (f_t - b) \in \mathcal{T}$, не меняя направление наблюдения b .

4. Рассмотрим случай, когда выполняются обратные к (2) неравенства (см. рис. 1). Далее $\widehat{t, t'}$ – дуга траектории \mathcal{T} , заключенная между точками t, t' , а $|\widehat{t, t'}|$ – длина этой дуги. Определим последовательность точек $t_i \in \mathcal{T}$ и по ней последовательность точек f_i . Кусочно-линейная дуга с узлами f_i будет далее включена в состав траектории \mathcal{T}_f .

Поскольку траектория \mathcal{T} является кратчайшей, то в каждой ее точке t существует (см., например, [1, 2]) пара касательных векторов. Через L_i обозначим касательный вектор V_{t_i} в точке t_i , являющийся вектором скорости объекта t . Дугу $\widehat{t_i, t_{i+1}}$ траектории \mathcal{T} будем обозначать через Δ_i .

Точка $t_1 \in \mathcal{T}$ такова, что касательный в ней к \mathcal{T} вектор ортогонален лучу l_* . Положим $f_1 = t_1 + b_1$, где $b_1 = b$ (см. (3)). В качестве начального участка траектории \mathcal{T}_f возьмем дугу $\widehat{(\underline{t}, t_1)} + b_1$. Чтобы определить $t_2 \in \widehat{t_1, \bar{t}}$, найдем точку $t'_2 \in \widehat{t_1, \bar{t}} \subset \mathcal{T}$ такую, что прямая Q_1 , содержащая t'_2 и параллельная вектору b_1 , не пересекается с G° , где G° – внутренность множества G . Точка t_2 должна лежать на дуге $\widehat{t_1, t'_2}$ на малом расстоянии от t_1 . Построим дугу $f_1, f_2' = \Delta_1 + b_1$ и на луче $L_1 + f_1$ отметим точку f_2 , для которой $\|f_1 - f_2\| = |\Delta_1|$. Непрерывное взаимнооднозначное отображение отрезка $[f_1, f_2]$ на дугу $\widehat{t_1, t_2}$ дает наблюдателю $f_t \in [f_1, f_2]$ способ слежения за движущимся объектом t_t . На этом завершается первый шаг. Легко проверить, что увеличение расстояния от t_1 до t_2 влечет рост величины $\|f_2 - t_2\|$ и константы K в неравенстве (1). На втором шаге, по аналогии с первым, найдем точку $t'_3 \in \mathcal{T}$ такую, что прямая Q_2 , содержащая точку t'_3 и параллельная вектору $b_2 = f_2 - t_2$, не пересекается с G° . Точку t_3 возьмем на дуге $\widehat{t_2, t'_3}$ на малом расстоянии от точки t_2 , и т.д. Увеличивая число шагов, строим последовательности $\{t_i\} \in \mathcal{T}$, $t_i \rightarrow \bar{t}$, и $\{f_i\}$, $\rho(f_i, P_{t'}) \rightarrow 0$ ($i \rightarrow \infty$). Траектория наблюдателя f имеет вид

$$\mathcal{T}_f = \widehat{(\underline{t}, t_1)} + b_1 \cup [f_i, f_{i+1}]. \quad (4)$$

Построенные последовательности t_i, f_i ($i = 1, 2, \dots$) удовлетворяют соотношениям

$$\|t_{i+1} - f_{i+1}\| - \|t_i - f_i\| = \|t_{i+1} - f_{i+1}\| - \|t_{i+1} - f'_{i+1}\| \leq \|f'_{i+1} - f_{i+1}\| = o(\|f'_{i+1} - f_i\|) = o(\|t_i - t_{i+1}\|), \quad (5)$$

$$\|t_{i+1} - f_{i+1}\| \leq \|t_i - f_i\| + \|f'_{i+1} - f_{i+1}\| \leq \|t_{i-1} - f_{i-1}\| + \|f'_i - f_i\| + \|f'_{i+1} - f_{i+1}\| \leq \dots \leq \delta + \sum_2^{i+1} \|f'_k - f_k\| \quad (6)$$

при этом последовательность $\|t_i - f_i\|$ возрастает. Справедлива

Теорема 1. Пусть $\{t_i\}_1^\infty \subset \widehat{t_1, \bar{t}}$ – последовательность точек, построенная по указанному выше правилу, $\widehat{t_{i+1}, \bar{t}} \subset \widehat{t_i, \bar{t}}$ ($i = 1, 2, \dots$). Наблюдатель f , двигаясь по траектории \mathcal{T}_f (4), имеет возможность следить за движением объекта $t = t(f)$ по \mathcal{T} ,

где $t(f) = f - b_1$ при $f \in (\widehat{t}, \widehat{t}_1) + b_1$, и $t(f^\lambda) \in \Delta_i$, $|\widehat{t}, t(f^\lambda)| = \lambda |\Delta_i|$ при $f^\lambda = (1 - \lambda) f_i + \lambda f_{i+1}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$).

Число звеньев в (4) можно ограничить, проецируя точку f_j , при достаточно большом i на плоскость $P_{\bar{t}}$. Обозначим эту проекцию через \bar{f} . При движении по отрезку $[t_j, \bar{t}]$ наблюдатель не контролирует объект, преодолевающий дугу $\widehat{f_j, \bar{f}}$, но, передвигаясь по плоскости $P_{\bar{t}}$ из позиции $f_{\bar{t}} = \bar{f}$, он отслеживает движение объекта по отрезку $[\bar{t}, t^*]$.

Используя неравенства (5), (6), легко установить, что имеет место

Теорема 2. Пусть для любого номера $n = 1, 2, \dots$ по указанному выше правилу построена упорядоченная сетка узлов $\{t_i^n\}_{i=1}^{k(n)} \subset \widehat{t}_1, \widehat{t}$, $t_{k(n)}^n \rightarrow \bar{t}$ при $k(n) \rightarrow \infty$, для которой

$$|\widehat{t_i^n, t_{i+1}^n}| \leq \frac{|\widehat{t_1, \bar{t}}|}{n},$$

тогда для последовательности траекторий

$$\mathcal{T}_{f^n} = (\widehat{t}, \widehat{t}_1 + b_1) \bigcup_{i=1}^{k(n)-1} [f_i^n, f_{i+1}^n] \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где $f_i^n = t_i^n + b_1$, выполняется соотношение

$$\max_i \|t_i^n - f_i^n\| \rightarrow \delta \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2021-1383).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1969. 176 с.
2. Милка А.Д. Кратчайшие линии на выпуклых поверхностях // ДАН. Т. 248. № 1. 1979. С. 34–36.

TRAJECTORY OF AN OBSERVER TRACKING THE MOTION OF AN OBJECT AROUND A CONVEX SET IN \mathbb{R}^3

Academician of the RAS V. I. Berdyshev^a

^aKrasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russian Federation

An object t moving in \mathbb{R}^3 goes around a solid convex set along the shortest path \mathcal{T} under observation. The task of an observer f (moving at the same speed as the object) is to find a trajectory closest to \mathcal{T} that satisfies the condition $\delta \leq \|f - t\| \leq K \cdot \delta$ for a given $\delta > 0$. This condition makes it possible to track the object along the entire trajectory \mathcal{T} . The paper proposes a method for constructing the observer's trajectory that ensures fulfillment of the indicated inequality with a constant K arbitrarily close to unit. Also, the method provides the ability to observe the object on the trajectory \mathcal{T}_t , excepting its possible arbitrarily small part.

Keywords: navigation, autonomous vehicle, trajectory, observer

Журнал “Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления” публикует статьи и краткие сообщения, содержащие результаты приоритетных, оригинальных, ранее неопубликованных исследований в области математики, информатики, процессов управления. Цель журнала – ознакомление широкого круга специалистов с последними достижениями в различных разделах этих наук. Высокое качество публикаций должно обеспечиваться соблюдением требований к рукописям и всесторонним экспертным рецензированием.

Журнал публикует сообщения, авторами которых являются действительные члены (академики) и члены-корреспонденты Российской академии наук. Журнал публикует также сообщения других авторов, представленные академиками РАН по соответствующей специальности. Представление должно быть получено автором до направления статьи в редакцию.

Журнал издается на русском языке один раз в 2 месяца (6 выпусков в год). Периодичность англоязычной версии “Doklady Mathematics” – 6 выпусков в год.

Подразделы журнала: Математика, Информатика, Процессы управления.

В журнале не публикуются работы полемические и узкоспециальные; содержащие решения стандартных задач; статьи обзорные и методические; статьи, излагающие обобщения и предположения; статьи серийные, разделенные на несколько последовательных публикаций; статьи о рядовых исследованиях, не представляющие общего интереса.

Решением редакционной коллегии работа может быть отклонена, если она не удовлетворяет перечисленным выше требованиям. Статьи, отклоненные редколлекцией, повторно не рассматриваются.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

DOI: 10.31857/S2686954321020090

Редакция журнала “Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления” просит авторов руководствоваться приводимыми ниже правилами и надеется, что авторы ознакомятся с ними, прежде чем отошлют сообщение в редакцию.

Работы, оформленные без соблюдения этих правил, возвращаются без рассмотрения.

1. Публикуемые статьи должны иметь представление действительного члена Российской Академии наук, если оно требуется.

2. Авторы должны определить раздел, в который они рекомендуют поместить сообщение, и индекс по Универсальной десятичной классификации (УДК).

3. Рукописи статей и сопроводительные материалы загружаются в Редакционно-издательскую систему издательства Pleiades Publishing Ltd по ссылке <https://sciencejournals.ru/journal/danmiup/> или направляются в редакцию по электронной почте doklady_mathematics@mail.ru.

Бумажный вариант представлять в редакцию не требуется.

4. На отдельной странице нужно указать полное название (на русском и английском языках) учреждения, в котором выполнено исследование; фамилии, имена и отчества всех авторов; почтовый индекс, адрес, номера телефонов и E-mail каждого соавтора. Необходимо также указать автора, с которым редакция будет вести переговоры и переписку.

5. Возвращение рукописи автору на доработку не означает, что она принята к печати. После получения доработанного текста рукопись вновь рассматривается редколлегией. Доработанный текст автор должен срочно вернуть вместе с исходным вариантом, а также с ответом на все замечания.

6. Журнал публикует статьи и краткие сообщения, занимающие не более 25000 знаков. В этот объем входят текст, таблицы, библиография (не более 25 источников). Рекомендуется включать в список литературы актуальные журнальные статьи, опубликованные за последние 2 года, в том числе в журнале “Доклады Академии наук”. Число рисунков не должно превышать восьми. Части, обозначенные как а, б и т.д., считаются различными рисунками. Повторение данных в тексте, таблицах и графиках недопустимо. Рисунки должны быть выполнены четко, в формате, обеспечивающем ясность передачи всех деталей.

7. Электронная версия должна включать (текст в формате .doc):

– название статьи; ФИО каждого автора статьи; аффилиация; аннотация; ключевые слова; текст сообщения; список литературы; рисунки (отдельными файлами в формате jpeg или tif);

– на английском языке: название статьи; ФИО каждого автора статьи; аффилиация; аннотация; ключевые слова.

8. Текст статьи должен быть тщательно отредактирован и подписан всеми авторами. При ис-

пользовании сокращений необходимо дать их расшифровку; следует ограничиваться общепринятыми сокращениями и не вводить новых без достаточных на то оснований.

9. Благодарности должны быть перечислены отдельно от источников финансирования.

10. Финансирование работы. Укажите информацию о грантах и любой другой финансовой поддержке исследований.

11. Обязательное указание конфликта интересов – любых отношений или сферы интересов, которые могли бы прямо или косвенно повлиять на вашу работу или сделать ее предвзятой (например, член редколлегии обязан указывать, что он публикуется в журнале, где он член редколлегии).

12. Авторы могут приложить свою версию перевода статьи на английский язык или дать необходимые пояснения переводчику.

13. В формулах следует избегать громоздких обозначений. Занумерованные формулы обязательно выключаются в красную строку, номер формулы ставится у правого края.

14. Ссылки в тексте на цитируемую литературу даются в квадратных скобках, например [1]. В списке все работы перечисляются в порядке цитирования. Самоцитирование допускается в объеме не более 30%.

Для книг: фамилия и инициалы автора, полное название книги, место издания, издательство, год издания, том или выпуск и общее количество страниц.

Ссылки на книги, переведенные на русский язык, должны сопровождаться ссылками на оригинальные издания с указанием выходных данных.

Для периодических изданий: фамилия и инициалы автора, название статьи, название журнала, год издания, том, номер, первая и последняя страницы статьи.

Желательно указывать индекс DOI цитируемой статьи.

Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

15. Редакция обращает внимание авторов на то, что журнал “Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления” является органом общей научной информации и в связи с этим просит авторов излагать материал в ясной и доступной форме.

16. Если материал не может быть изложен в объемах, указанных выше, или требует большого числа иллюстраций, редакция советует авторам направлять его в какой-либо специализированный журнал. Работы, нарушающие эти условия, редакция возвращает авторам для сокращения.

17. Появление краткого сообщения в “Докладах Академии наук” не препятствует впоследствии

публикации расширенного варианта в другом периодическом издании, с соблюдением всех этических норм. Одновременная отсылка рукописи в “Доклады” и в другой журнал не допускается.

18. В соответствии с новыми международными правилами будет проводиться проверка на предмет соблюдения авторами прав на заимствованные материалы, отсутствие плагиата и повторного опубликования. Проверка с использованием компьютерных программ проводится и зарубежными партнерами Издательства в отношении переводной версии статьи. Если автором нарушены права третьих лиц: не получены разрешения на использование заимствованных материалов, установлены факты плагиата, повторного опубликования и т.п., произведение будет отозвано.

19. Рукописи проходят процедуру анонимного внешнего рецензирования ведущими отечественными и зарубежными экспертами и рекомендуются к печати Редколлегией журнала на конкурсной основе.

20. Важно соблюдать правила публикационной этики и избегать следующих нарушений: 1) фабрикация и фальсификация данных, т.е. их подделки или изменения; 2) плагиата и самоплагиата – копирования без надлежащего цитирования хотя бы одного предложения из чужой или даже собственной ранее опубликованной рукописи, а также рисунков и таблиц; 3) многократной подачи рукописи в несколько журналов одновременно; 4) избыточных публикаций, основанных на одном и том же эксперименте; 5) неподобающего указания авторства, когда в авторский коллектив включены люди, не внесшие вклада в работу, или, наоборот, не включены люди, внесшие значительный вклад.

21. На любой материал, который автор заимствует из других работ, необходимо получить разрешение от правообладателя и приложить к рукописи. Правообладателем статей в журналах, как правило, является не автор, а издатель журнала, в котором опубликован материал. Подробнее о получении разрешения см. по ссылке <https://www.pleiades.online/ru/authors/permission/>

22. Все используемые в статье цитаты обязательно приводятся на оригинальном языке и сопровождаются соответствующей ссылкой.

23. Для более полного описания исследования к статье могут прилагаться дополнительные материалы (аудио- и видеофайлы, презентации, дополнительные таблицы и рисунки и пр.). Они публикуются только в электронной версии на сайте <https://link.springer.com/> (для англоязычных журналов) и <https://elibrary.ru> (для русскоязычных журналов).

ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ СООБЩЕНИЯ

Раздел (Математика, Информатика, Процессы управления)

УДК

НАЗВАНИЕ СТАТЬИ

© 2021 г. Академик РАН В. П. Иванов^{1,*}, Г. В. Сидоров^{2,**}¹Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия²Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*E-mail: ivanov@niisi.ras.ru

**E-mail: sidorov@msu.su

Поступило 23.01.2021 г.

Аннотация (объем не должен превышать 1000 знаков с учетом пробелов) может быть размещена в свободном доступе в электронных базах поиска и индексирования. Она должна быть информативной, описывать методы и главные результаты исследования и не должна содержать ссылок на другие работы и аббревиатур. Из аннотации должно быть ясно, какие вопросы поставлены для исследования и какие ответы на них получены. Должен быть сформулирован приоритетный научный результат, требующий срочной публикации.

Ключевые слова: необходимо указать от 3 до 10 ключевых слов, способствующих индексированию статьи в поисковых системах. Рекомендуется использовать общепринятые термины

Текст статьи....

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят...

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены за счет средств Российского научного фонда, проект № 00101.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов С.М., Петров В.С. Экспериментальное доказательство // ДАН. 2016. Т. 469. № 6. С. 711–716.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.

В таком же порядке метаданные должны быть представлены на английском языке:

THE TITLE OF ARTICLE

© 2021 г. Academician of the RAS V. P. Ivanov^a, G. V. Sidorov^b^aMoscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation^bLomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Summary

Keywords:

СОПРОВОДИТЕЛЬНЫЕ ДОКУМЕНТЫ

Вместе с рукописью в редакцию высылаются отсканированные копии следующих сопроводительных документов:

- Лицензионный договор для русской версии, подписанный всеми авторами

https://sciencejournals.ru/journals/danmiup/license_agreement.doc

- Авторский договор для английской версии

<https://www.pleiades.online/ru/authors/agreement/>

При использовании заимствованных материалов обязательно наличие разрешения от правообладателя.