



Российская Академия Наук

А Т АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год



ноябрь

Москва

2022

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Поляк Б.Т., Попков Ю.С.,
Рутковский В.Ю., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М.,
Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф.,
Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П.,
Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,
Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М.,
Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А.,
Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталеv М.М., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: (495) 334-87-70

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ООО «Тематическая редакция»

© 2022 г. Г.А. КУРИНА, д-р физ.-мат. наук (kurina@math.vsu.ru)
(Воронежский государственный университет;
Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление”
Российской академии наук, Москва),
М.А. КАЛАШНИКОВА, канд. физ.-мат. наук
(margarita.kalashnikova@mail.ru)
(Атос АйТи Солюшенс энд Сервисез, Воронеж)

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ЗАДАЧИ С РАЗНОТЕМПОВЫМИ БЫСТРЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ¹

*Посвящается светлой памяти
А.Б. Васильевой (1926–2018), В.Ф. Бутузова (1939–2021),
А.М. Ильина (1932–2013)*

Статья содержит обзор публикаций, в которых исследуются задачи, характеризующиеся наличием быстрых переменных с различными скоростями изменения. Рассматривается предельный переход решения возмущенной задачи к решению вырожденной, асимптотические решения начальных и краевых задач, устойчивость и управляемость, асимптотические решения задач оптимального управления, задачи со “скрытыми” разнотемповыми быстрыми переменными. Кроме этого, представлены задачи с ограничением на управление, игровые задачи и стохастические системы. В последнем разделе статьи приводятся практические задачи с многотемповыми быстрыми движениями.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, разнотемповые быстрые переменные, асимптотические разложения, задачи управления.

DOI: 10.31857/S0005231022110010, **EDN:** KDWMLX

1. Введение

Параметры, входящие в систему, могут влиять на ее динамику различным образом. Если при малых значениях параметров это влияние существенно, то такие системы получили название сингулярно возмущенных. В противном случае они называются регулярно возмущенными. Если в системе присутствуют переменные с различными порядками скоростей изменения, то системы называют разнотемповыми или многотемповыми.

¹ Работа первого автора поддержана Российским научным фондом (проект № 21-11-00202).

Необходимость использования асимптотических методов теории сингулярных возмущений для изучения практических задач возникает как при исследовании задач, имеющих разнотемповые движения, так и при исследовании задач, в процессе изучения которых возникают уравнения с разнотемповыми переменными, например, задач с “дешевыми” управлениями. Наиболее популярными при этом являются методы пограничных функций [1] и интегральных многообразий [2], которые приводят к понижению размерности исходной разнотемповой системы и ее сведению к задачам более простой структуры.

При решении сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений стандартными численными методами исследователь сталкивается со значительными трудностями, связанными с увеличением времени счета и, как следствие, с накоплением вычислительных ошибок. Для решения таких уравнений разрабатываются специальные численные методы (см., например, [3]), учитывающие асимптотическую структуру решения. При использовании итерационных методов асимптотический анализ решения помогает найти начальное приближение, обеспечивающее быструю сходимость метода [4]. При построении асимптотики решения используются численные методы для решения задач, из которых находятся члены разложения. Таким образом, численные и асимптотические методы решения сингулярно возмущенных задач взаимно дополняют друг друга.

подавляющее большинство работ в теории сингулярных возмущений, включая задачи управления, имеет дело с задачами, характеризующимися наличием переменных со скоростями изменения двух порядков (медленных и быстрых). Такие работы указаны, например, в [5–11]. Но математические модели многих практических задач содержат разнотемповые быстрые переменные. В конце этой статьи приведены соответствующие примеры.

Если в системе дифференциальных уравнений с малыми параметрами при производных, обеспечивающих разнотемповый характер переменных, положить эти параметры равными нулю, то получим не разрешенную относительно производных систему, которая называется вырожденной (неявной, сингулярной, дескрипторной) системой или дифференциально-алгебраическим (алгебро-дифференциальным) уравнением. Изучению таких систем посвящена обширная литература (например, монографии [12–16]). Обзор публикаций, касающихся сингулярных возмущений задач управления с уравнением состояния, не разрешенным относительно производной, приведен в [17].

Дискретизация систем со многими параметрами при производных рассматривается в [18].

Иногда малые параметры вводятся в задачу искусственным образом. Например, при регуляризации вырожденных задач оптимального управления, а именно, если в линейно-квадратичной задаче в критерии качества отсутствует управление, то прибавляют к подынтегральной функции квадратичные формы от компонент управления с малыми параметрами перед ними. В результате получают задачу с “дешевыми” управлениями. В [19] для реше-

ния систем нелинейных уравнений с плохо обусловленной матрицей Якоби предложен метод дифференцирования по параметру, использующий систему обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных. Дополнительные быстрые переменные рассматриваются в [20, 21] при изучении стабилизации.

Выделение групп разнотемповых переменных при моделировании обсуждается в [22].

Данная статья представляет собой обзор публикаций, связанных с асимптотическими методами исследования задач, в постановке или в процессе решения которых присутствуют несколько быстрых переменных со скоростями изменения различных порядков. Отметим, что в п. 8.1 из [23] имеется краткий обзор публикаций 1976–1983 гг. на эту тему. Поводом к написанию этого обзора послужило знакомство авторов с обзорной статьей [24], посвященной детерминированным и стохастическим сингулярно возмущенным системам с несколькими малыми параметрами, в которой, к сожалению, не упомянуты первые основополагающие работы на эту тему.

Во втором разделе настоящей статьи обсуждаются работы, касающиеся предельного перехода при стремлении малых параметров к нулю решения исходной задачи с разнотемповыми переменными к решению вырожденной, получающейся из исходной при нулевых значениях малых параметров. Асимптотические решения начальных и краевых задач рассмотрены в третьем разделе. Следующий раздел имеет дело с проблемами устойчивости и управляемости. Пятый раздел посвящен задачам оптимального управления. Задачи со “скрытыми” разнотемповыми быстрыми переменными, в том числе задачи управления, в критерии качества которых имеется сумма квадратичных форм относительно управления с разными степенями малого параметра, т.е. некоторые компоненты управления являются “дешевыми”, рассматриваются в шестом разделе. Многотемповые задачи с ограничением на управление в форме замкнутых неравенств приводятся в седьмом разделе. Следующие два раздела имеют дело соответственно с игровыми задачами и стохастическими системами. Последний раздел посвящен практическим задачам, в которых имеются быстрые переменные со скоростями изменения различных порядков.

Всюду в этой статье уравнения рассматриваются в конечномерном вещественном пространстве; штрих означает транспонирование; I_n — единичная матрица порядка n ; ε , ε_j — неотрицательные малые параметры; положительно определенная матрица A обозначается через $A > 0$, а неотрицательно определенная $A \geq 0$. Через $\text{diag}(A_1, \dots, A_n)$ обозначается матрица, у которой на главной диагонали стоят матрицы A_1, \dots, A_n , а остальные элементы нулевые. Коэффициент при ε^j в разложении функции $w(\varepsilon)$ в ряд по целым неотрицательным степеням ε обозначается как w_j . Если не оговорено противное, все функции, входящие в постановки задач, предполагаются достаточно гладкими по своим аргументам.

2. Предельный переход

Построение приближенного решения сингулярно возмущенной задачи обычно начинается с решения вырожденной задачи, которая имеет более низкий порядок по отношению к исходной. В связи с этим возникает необходимость исследования предельного перехода решения исходной возмущенной задачи к решению вырожденной. Краткий обзор публикаций, касающихся этой темы, содержится в [25].

Приведем некоторые сведения для систем с разнотемповыми быстрыми переменными.

Предельный переход при стремлении малых параметров к нулю для решения задачи вида

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, z_1, \dots, z_m, t), \\ \varepsilon_j \frac{dz_j}{dt} &= F_j(x, z_1, \dots, z_m, t), \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned}$$

$$(2) \quad x(t_0) = x^0, \quad z_j(t_0) = z_j^0$$

при $t \in [t_0, T]$ изучался А.Н. Тихоновым и И.С. Градштейном в [26–30]. При этом предполагалось, что $\varepsilon_{j+1}/\varepsilon_j \rightarrow 0$. Статьи [26, 28], а также другие работы А.Н. Тихонова, касающиеся уравнений вида (1), приведены в [30]. Поведение производных решения по параметрам при стремлении этих параметров к нулю исследовалось в [25].

Заметим, что систему (1) можно привести к виду $\varepsilon dy/dt = F(y, t, \varepsilon)$ путем умножения уравнений системы на некоторые малые множители. Однако при этом уничтожатся свойства системы, которые важны в теории сингулярных возмущений, так как члены, которые оказывают решающее влияние на асимптотическое решение системы при стремлении малых параметров к нулю, могут стать малыми при умножении их на некоторые малые параметры.

Условия, обеспечивающие стремление решения исходной возмущенной задачи (1), (2) к некоторому решению вырожденной задачи при стремлении малых параметров к нулю, сформулированы в [26, 28] с помощью присоединенных систем разных порядков. Приведем здесь определение таких систем.

Под присоединенной системой первого порядка понимается система

$$(3) \quad \frac{dz_m}{d\tau} = F_m(x, z_1, \dots, z_m, t),$$

в которой $x, z_1, \dots, z_{m-1}, t$ являются параметрами. Предполагая, что система $F_m(x, z_1, \dots, z_m, t) = 0$ имеет единственный изолированный корень $z_m = \varphi_m(x, z_1, \dots, z_{m-1}, t)$ и подставляя его в предыдущие уравнения системы, из уравнения для z_{m-1} можно записать присоединенную систему второго порядка. Аналогичным образом получаем присоединенные системы j -го порядка для $j = \overline{3, m}$. Областью влияния устойчивого корня z_m при

заданных значениях $x^0, z_j^0, j = \overline{1, m-1}, t_0$ называется совокупность таких точек $\{z_m^0\}$, что траектории присоединенной системы (3) при $x = x^0, z_j = z_j^0, j = \overline{1, m-1}, t = t_0$ и начальном условии $z_m(t_0) = z_m^0$ стремятся к $z_m = \varphi_m(x^0, z_1^0, \dots, z_{m-1}^0, t_0)$ при $\tau \rightarrow +\infty$. Подобным способом определяются области влияния для изолированных устойчивых корней $z_j = \varphi_j, j = \overline{1, m-1}$ уравнений $F_j = 0$, при помощи которых определяется вырожденная система.

В [28] (см. также [26, 31]) изучался предельный переход решения задачи (1), (2) при $t \in (t_0, T]$ к решению вырожденной системы для медленной переменной с начальным значением x^0 при стремлении к нулю малых параметров при условии, что корни $z_j = \varphi_j$ являются устойчивыми корнями присоединенных систем j -го порядка, $j = \overline{1, m}$, а начальные значения z_j^0 входят в область влияния корня z_j при заданных значениях $x^0, z_1^0, \dots, z_{j-1}^0, t_0$.

Другой подход к исследованию систем дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных, связанный с применением теории устойчивости А.М. Ляпунова, рассматривался в [27, 29].

Сходимость на полупрямой при стремлении малых параметров к нулю решения возмущенной задачи (1), (2) к решению вырожденной задачи изучалась в [32] (см. также замечание о трехтемповых системах в [33]).

Предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению вырожденной задачи решения двухточечной краевой задачи для линейной системы с множителями $1, \varepsilon^{k_2}, \dots, \varepsilon^{k_p}$ при производных, где k_i — целые числа такие, что $0 < k_2 < \dots < k_p$, исследовался в [34].

В [35] установлены оценки близости решения нелинейной краевой задачи с двухтемповыми быстрыми переменными в условно устойчивом случае для системы вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, z, t),$$

$$\varepsilon_1 \frac{dy}{dt} = g(x, y, z, t),$$

$$\varepsilon_2 \frac{dz}{dt} = h(x, y, z, t),$$

где $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \rightarrow 0$, к решению вырожденной задачи. Термин условная устойчивость в данном случае означает, что матрицы \bar{h}_z и $\bar{g}_y - \bar{g}_z(\bar{h}_z)^{-1}\bar{h}_y$ имеют собственные значения как с отрицательными, так и с положительными действительными частями. Чертой сверху здесь обозначено значение функции на решении вырожденной задачи.

Для частного случая нелинейной управляемой системы с произведениями малых параметров при части производных и измеримыми управлениями со значениями из компактного множества в [36] приведен алгоритм последовательного понижения порядка системы. В итоге получается управляемая система для медленных переменных состояния.

Существование решения и предельный переход при стремлении к нулю малого параметра для системы

$$\varepsilon^6 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = f(u, v, t, \varepsilon),$$

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} \right) = g(u, v, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in (a, b) \times (0, +\infty),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, t, \varepsilon) = \frac{\partial u}{\partial x}(b, t, \varepsilon) = \frac{\partial v}{\partial x}(a, t, \varepsilon) = \frac{\partial v}{\partial x}(b, t, \varepsilon) = 0, \quad t \in (0, +\infty),$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = u^0(x), \quad v(x, 0, \varepsilon) = v^0(x), \quad x \in [a, b]$$

изучались в [37].

При некоторых условиях предельный переход решения начальной задачи для одного класса систем дифференциальных уравнений с частными производными, содержащих два стремящихся к нулю малых параметра, обеспечивающих три временных масштаба, рассматривался в [38].

Для решения начальной задачи для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве с малыми параметрами при первой и второй производных в [39] изучался предельный переход при стремлении малых параметров к нулю.

3. Решение начальных и краевых задач

3.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Первые работы, посвященные построению асимптотики решения сингулярно возмущенных начальных задач с несколькими малыми параметрами при производных, принадлежат А.Б. Васильевой (см., например, [40–43]). Для частного случая таких задач вида

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y, z, t), \\ \varepsilon_1 \frac{dy}{dt} &= g(x, y, z, t), \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{dz}{dt} &= h(x, y, z, t), \end{aligned}$$

$$x(t_0) = x^0, \quad y(t_0) = y^0, \quad z(t_0) = z^0, \quad t \in [t_0, T]$$

асимптотическое разложение решения по степеням $\varepsilon_1^i \varepsilon_2^k$, построенное в [43], содержит пограничные функции от аргументов $\tau_1 = (t - t_0)/\varepsilon_1$ и $\tau_2 = (t - t_0)/\varepsilon_1 \varepsilon_2$, т.е.

$$w = (x', y', z')' = \sum_{i,k=0}^{\infty} \varepsilon_1^i \varepsilon_2^k \left(\bar{w}_{ik}(t - t_0) + \overset{(1)}{\Pi}_{ik} w(\tau_1) + \overset{(2)}{\Pi}_{ik} w(\tau_2) \right).$$

Уравнения, определяющие коэффициенты разложения, получаются в результате подстановки постулируемого разложения в условие задачи (4) и приравнивания членов с одинаковыми степенями ε_1 и ε_2 , отдельно зависящих от t , τ_1 , τ_2 .

В случае правых частей и начальных условий в (4), зависящих от малых параметров, асимптотика решения построена в [44]. Асимптотическое решение начальной задачи с трехтепловыми переменными рассматривалось также в [45].

Как указано в [43, 44], используемые в этих статьях алгоритмы могут быть применены для построения асимптотики решения начальной задачи для сингулярно возмущенной системы со многими малыми параметрами при производных.

В [46] изложено применение метода пограничных функций для асимптотического решения различных сингулярно возмущенных задач для систем с разными степенями малого параметра при производных. Асимптотика периодического решения для таких систем с периодической правой частью построена в [47, стр. 352–381; 48].

Для краевой задачи вида

$$(5) \quad \varepsilon_1 a(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + \varepsilon_2 b(t) \frac{dy}{dt} + c(t)y = f(t), \quad t \in (0, 1),$$

$$(6) \quad y(0) = y^0, \quad y(1) = y^1$$

при некоторых условиях в [49] построена асимптотика решения в двух случаях, когда $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, $\varepsilon_1^{-1} \varepsilon_2^2 \rightarrow 0$ и $\varepsilon_1 \varepsilon_2^{-2} \rightarrow 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$.

В трех случаях зависимого стремления к нулю двух малых параметров в [50] построена асимптотика решения двухточечной краевой задачи на отрезке $[0, 1]$ для уравнения вида

$$\varepsilon_1 M y + \varepsilon_2 N y + L y = 0,$$

где M , N и L — линейные обыкновенные дифференциальные операторы порядков m_2 , m_1 и m_0 соответственно, причем $m_2 > m_1 > m_0 \geq 0$, а краевые условия задаются в концах отрезка $[0, 1]$. Исследование двухпараметрических сингулярно возмущенных задач, в том числе нелинейных, приведено также в [51, стр. 66–75, 94–102].

Асимптотическое разложение решений систем уравнений, содержащих малые параметры при производных, строится в основном, как в цитированных выше работах, в случае, когда малые параметры при производных стремятся к нулю зависимым образом. Представляет интерес асимптотическое разложение и в том случае, когда параметры при производных независимо друг от друга стремятся к нулю.

В [52] представлено асимптотическое разложение решения задачи вида (5), (6) при независимом стремлении ε_1 и ε_2 к нулю. Для этого сначала строится асимптотика решения, которая не является равномерно относительно ε_2

близкой к решению возмущенной задачи. Затем при условии $b(t) > 0$ (либо $b(t) < 0$), $t \in [0, 1]$, строится равномерная относительно ε_2 асимптотика.

Для решения начальной задачи с двумя независимыми малыми параметрами вида

$$(7) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 \frac{dx}{dt} &= a(t)x + b(t)y + f(t), \\ \varepsilon_2 \frac{dy}{dt} &= c(t)x + d(t)y + g(t), \\ x(0) &= x^0, \quad y(0) = y^0, \end{aligned}$$

$$(8) \quad a(t) < 0, \quad d(t) < 0, \quad b(t)c(t) - a(t)d(t) < 0, \quad b(t)c(t) \geq 0,$$

в [53] приведен алгоритм построения асимптотического разложения решения, включающего пограничные функции, аргумент которых зависит от произведения малых параметров, т.е.

$$(9) \quad z(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \bar{z}(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) + \Pi z(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}, \quad z = (x, y).$$

Здесь

$$\bar{z}(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_1^m \varepsilon_2^n z_{m,n}(t), \quad \Pi z(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon_1^m \varepsilon_2^n \Pi_{m,n} z(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

— пограничные функции в окрестности $t = 0$.

Обоснование асимптотики (9), равномерной по $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, приведено в [54]. При этом доказывается, что

$$\|\Pi_{m,n} z(\tau, \varepsilon_1, \varepsilon_2)\| \leq \frac{c}{\rho^i} \exp(-\sigma \rho \tau), \quad \tau \geq 0, \quad i = \min(m, n),$$

где $\rho = \rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 / (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, c и σ — положительные постоянные, не зависящие от $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \tau$.

Асимптотическое решение начальной задачи (7) в случае, когда последнее неравенство в (8) заменяется на $b(t)c(t) < 0$, $t \in [0, T]$, построено в [55].

Асимптотика решения начальной задачи для системы двух обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с двумя малыми параметрами при производных, независимо друг от друга стремящихся к нулю, приведена в [56].

Алгоритм построения асимптотики интегральных многообразий для систем с несколькими малыми параметрами при производных вида

$$(10) \quad \prod_{k=0}^i \varepsilon_k \frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x^{(n)}, x_n, \varepsilon, \varepsilon_n), \quad i = \overline{0, n},$$

где $\varepsilon_0 = 1$, $x_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $x^{(n)} = (x_0, \dots, x_{n-1})$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$, приведен в [2, стр. 116–127].

В [2, стр. 127–134] для системы (10) также рассматривается расщепление начальных и краевых задач. Изложенная в [2] схема расщепления наиболее просто реализуется для систем линейных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при производных. При этом расщепляющее преобразование является линейным, а результирующая система — блочно-диагональной. Приведение матрицы коэффициентов линейной системы с малыми параметрами при производных к виду, обеспечивающему расщепление на задачи с меньшим числом переменных, используется также в [47, стр. 339–352; 57–63].

Для решения краевой задачи для системы двух уравнений второго порядка

$$\begin{aligned}\varepsilon^4 \frac{d^2 u}{dt^2} &= f(u, v, t, \varepsilon), \\ \varepsilon^2 \frac{d^2 v}{dt^2} &= g(u, v, t, \varepsilon), \quad t \in (0, 1), \\ \frac{du}{dt}(0) = \frac{du}{dt}(1) &= 0, \quad \frac{dv}{dt}(0) = \frac{dv}{dt}(1) = 0\end{aligned}$$

в [64] строится асимптотика решения с переходным слоем в окрестности некоторой внутренней точки t^* отрезка $[0, 1]$. Наряду с функциями от аргумента t эта асимптотика содержит функции переходного слоя в окрестности точки t^* от аргументов $(t - t^*)/\varepsilon$ и $(t - t^*)/\varepsilon^2$ и функции пограничных слоев в окрестностях граничных точек $t = 0$ и $t = 1$ от аргументов t/ε^j , $(1 - t)/\varepsilon^j$, $j = 1, 2$.

Краевая задача для системы двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми малыми параметрами при высших производных рассматривается в [65].

Асимптотическое разложение матричной экспоненты $\exp((A + B/\varepsilon + C/\varepsilon^r)t)$, $r > 1$ построено в [66].

В [67] предложен алгоритм выбора формы асимптотического представления решений линейных дифференциальных уравнений n -го порядка ($n > 1$) с переменными коэффициентами и малым параметром при старшей производной.

Для системы вида

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= \varepsilon(\mu - f_1 y), \\ \frac{dy}{ds} &= z - x, \\ \varepsilon \frac{dz}{ds} &= -y + f_2 z^2 + f_3 z^3,\end{aligned}$$

где $s = \varepsilon t$ — медленное время, в [68] при некоторых условиях изучается феномен возникновения так называемых “уток”. Приводятся асимптотические формулы.

3.2. Уравнения с частными производными

Для системы двух уравнений с частными производными первого порядка и малым параметром в различных степенях перед производными

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon b_1(x) \frac{\partial u}{\partial x} &= a_{11}(x, t)u + a_{12}(x, t)v + f_1(x, t, \varepsilon), \\ \varepsilon \frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon^2 b_2(x) \frac{\partial v}{\partial x} &= a_{21}(x, t)u + a_{22}(x, t)v + f_2(x, t, \varepsilon), \\ (x, t) &\in G = (0, X] \times (0, T],\end{aligned}$$

с краевыми условиями

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} = v|_{t=0} = v|_{x=0} = 0$$

в [69] при некоторых условиях построено непрерывное асимптотическое решение четвертого порядка, содержащее четыре типа обыкновенных пограничных функций и три типа угловых пограничных функций вида

$$\begin{aligned}w = (u, v)' &= \sum_{i=0}^4 \varepsilon^i \left(\bar{w}_i(x, t) + \Pi_i w(x, \tau_1) + \Omega_i w(x, \tau_2) + Q_i w(\xi_1, t) + \right. \\ &\quad \left. + R_i w(\xi_2, t) + P_i w(\xi_1, \tau_1) + S_i w(\xi_1, \tau_2) + T_i w(\xi_2, \tau_1) \right) + O(\varepsilon^5),\end{aligned}$$

где \bar{w}_i — члены регулярной части асимптотики, $\Pi_i w$, $\Omega_i w$ — пограничные функции, описывающие погранслои вблизи стороны $t = 0$ прямоугольника \bar{G} , $Q_i w$, $R_i w$ — пограничные функции, описывающие погранслои вблизи стороны $x = 0$ прямоугольника \bar{G} , $P_i w$, $S_i w$, $T_i w$ — угловые пограничные функции, $\tau_j = t/\varepsilon^j$, $\xi_j = x/\varepsilon^j$, $j = 1, 2$.

Асимптотическое решение краевой задачи для системы трех уравнений с частными производными первого порядка и разными степенями малого параметра при производных построено в [70].

Для уравнений эллиптического типа

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - A(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} - k^2(x, y)u &= f(x, y, \varepsilon), \\ \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \varepsilon_1 A(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} - k^2(x, y)u &= f(x, y, \varepsilon_1, \varepsilon_2)\end{aligned}$$

соответственно в [71, 72] (параметры ε_1 и ε_2 считаются независимыми) при некоторых условиях построены асимптотические разложения решений краевых задач, содержащие разного типа пограничные функции от аргументов различных порядков. Для системы двух эллиптических уравнений с различными степенями малого параметра при производных в [73] доказано существование решения с внутренним переходным слоем в окрестности некоторой

замкнутой кривой и построена асимптотика этого решения по малому параметру с произвольной точностью.

Асимптотика сингулярно возмущенных параболических уравнений, содержащая разнотемповые пограничные функции, построена в [74].

3.3. Дискретные уравнения

Асимптотическое решение двухточечной краевой задачи для дискретной трехтемповой системы вида

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \\ \varepsilon z(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \varepsilon A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & \varepsilon A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & \varepsilon A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \\ z(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} u(k), \quad k = \overline{0, N-1},$$

$$x(0) = x^0 \quad \text{или} \quad x(N) = x^N, \quad y(0) = y^0, \quad z(N) = z^N$$

при предположении, что матрица A_{33} невырожденная, представлено в [75, стр. 120–126; 76, стр. 142–148].

В [77] рассмотрены три типа краевых задач для сингулярно возмущенных дискретных систем с двумя различными малыми параметрами. Для каждого из этих трех типов задач построены асимптотические решения, содержащие регулярные и пограничные функции. Соответствующие результаты для начальных задач получены в [78]. Асимптотика начальных и краевых задач для дискретных трехтемповых систем обсуждается также в [79, 80].

Метод пограничных функций асимптотического решения начальных и краевых задач для линейных сингулярно возмущенных дискретных систем со многими малыми параметрами использовался в [81].

3.4. Численное решение задач с двумя параметрами

Для численного решения сингулярно возмущенных задач с двумя малыми параметрами предложены различные методы. Укажем здесь некоторые публикации на эту тему.

Статьи [82–84] посвящены численным методам решения задач типа (5), (6). Для краевых задач этого вида в [85] предлагается метод решения, основанный на сплайнах. Случай разрывной правой части изучался в [86]. Для нелинейных уравнений численные методы использовались в [87, 88]. Начально-краевые задачи для параболического уравнения с двумя малыми параметрами при производных первого и второго порядков по пространственной переменной рассматривались в [89, 90], а начальная задача для уравнений такого типа — в [91]. Сеточная аппроксимация решения задачи Дирихле для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения конвекции-диффузии исследовалась в [92]. При этом тип пограничных слоев в окрестностях различных участков границы области зависит от соотношения между двумя параметрами. Случай неограниченных областей рассматривался в [93]. Статьи [94–96]

имеют дело с запаздывающим аргументом, [97, 98] — с негладкими данными, [99] — с уравнением четвертого порядка, а [100] — с системой двух уравнений второго порядка. Для решения краевой задачи для системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малыми множителями при вторых производных в [101] используется метод конечных элементов.

4. Качественные характеристики систем

Связь теории дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных с устойчивостью, по-видимому, впервые обсуждалась в работах И.С. Градштейна и А.Н. Тихонова (см., например, [26, 29]).

Один раздел в обзоре [24] посвящен асимптотической устойчивости линейных и нелинейных систем с малыми параметрами при производных. Полученные результаты основаны на асимптотической устойчивости системы меньшего порядка для медленных переменных и подсистем для быстрых переменных. Отметим, что ссылок на работы А.Б. Васильевой, И.С. Градштейна и А.Н. Тихонова в этом обзоре нет.

В [102] приводятся условия, обеспечивающие асимптотическую устойчивость многотемповой линейной системы с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_0 x + \sum_{j=1}^N A_{0j} z_j, \quad x(0) = x^0, \\ \varepsilon_i \frac{dz_i}{dt} &= A_{i0} x + \sum_{j=1}^N A_{ij} z_j, \quad z_i(0) = z_i^0, \quad z_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

для малых параметров одинакового порядка, т.е. предполагается, что отношения величин $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$ ограничены некоторыми положительными постоянными m_{ij}, M_{ij} :

$$(11) \quad m_{ij} \leq \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j} \leq M_{ij}.$$

Случай переменных коэффициентов и $m_{ij} = m, M_{ij} = M$ изучается в [103].

Как указано в [6], иногда сингулярно возмущенные задачи с малыми параметрами одинакового порядка сводятся к задаче с одним малым параметром μ посредством замены $\varepsilon_i = \beta_i \mu$. Недостаток такого подхода, состоящий в том, что коэффициенты β_i часто неизвестны, отмечен в [102, 103].

Система погранслоя в [102] записывается в виде

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tau} = D(\varepsilon) A_f \tilde{z}, \quad \tilde{z}(0) = z_0 - \bar{z}(0),$$

где

$$\begin{aligned} \tau &= t/\mu, \quad \mu = \mu(\varepsilon) = (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N)^{1/N}, \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)', \\ D(\varepsilon) &= \text{diag}(\mu/\varepsilon_1 I_{n_1}, \dots, \mu/\varepsilon_N I_{n_N}), \end{aligned}$$

$\bar{z}(t)$ — решение вырожденной системы, получающейся из исходной при $\varepsilon = 0$, а матрица A_f сформирована из коэффициентов исходной системы. В силу (11) все элементы матрицы $D(\varepsilon)$ ограничены. Используется понятие блочной D -устойчивости: матрица A_f называется блочной D -устойчивой, если

$$\operatorname{Re}\lambda(DA_f) < 0$$

для всех $D = \operatorname{diag}(\alpha_1 I_{n_1}, \dots, \alpha_N I_{n_N})$ с произвольными положительными постоянными α_i .

В [104] рассматривается многотемповая линейная система с переменными коэффициентами

$$(12) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_0(t)x + \sum_{k=1}^r B_{0k}(t)y_k + \sum_{k=1}^s C_{0k}(t)z_k, \\ \varepsilon_i \frac{dy_i}{dt} &= A_{i0}^\varepsilon(t)x + \sum_{k=1}^r B_{ik}^\varepsilon(t)y_k + \sum_{k=1}^s C_{ik}^\varepsilon(t)z_k, \quad i = \overline{1, r}, \\ \mu_j \frac{dz_j}{dt} &= A_{j0}^\mu(t)x + \sum_{k=1}^r B_{jk}^\mu(t)y_k + \sum_{k=1}^s C_{jk}^\mu(t)z_k, \quad j = \overline{1, s}, \end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{R}^{n_0}$, $y_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $z_j \in \mathbb{R}^{l_j}$, а для положительных малых параметров ε_i, μ_j справедливы неравенства

$$\underline{\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k} \leq \bar{\varepsilon}, \quad \underline{\mu} \leq \frac{\mu_j}{\mu_k} \leq \bar{\mu},$$

$\underline{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}, \underline{\mu}, \bar{\mu}$ — некоторые положительные числа. Введем обозначения $\varepsilon = (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_r)^{1/r}$, $\mu = (\mu_1 \dots \mu_s)^{1/s}$, $y = (y'_1, \dots, y'_r)'$, $z = (z'_1, \dots, z'_s)'$. Предполагая, что $\mu/\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, исходную систему можно записать в виде системы для переменных со скоростями изменения трех порядков

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_0(t)x + A_{01}(t)y + A_{02}(t)z, \\ \varepsilon \frac{dy}{dt} &= D_1 A_{10}(t)x + D_1 A_{11}(t)y + D_1 A_{12}(t)z, \\ \mu \frac{dz}{dt} &= D_2 A_{20}(t)x + D_2 A_{21}(t)y + D_2 A_{22}(t)z, \end{aligned}$$

где

$$D_1 = \operatorname{diag}(\varepsilon/\varepsilon_1 I_{m_1}, \dots, \varepsilon/\varepsilon_r I_{m_r}), \quad D_2 = \operatorname{diag}(\mu/\mu_1 I_{l_1}, \dots, \mu/\mu_s I_{l_s}).$$

При некоторых условиях в [104] доказывается глобальная экспоненциальная устойчивость положения равновесия системы (12) (см. также [58]).

Используя теорию сингулярных возмущений и метод Ляпунова, в [105] (см. также [106]) изучается асимптотическая устойчивость для нелинейной нестационарной системы вида (1), где $\varepsilon_j = \varepsilon_1/\pi_j$, $j = \overline{1, m}$, $\pi_1 = 1$, значения $\pi_j \in [\pi_{jm}, 1]$, $j = \overline{2, m}$, не известны, но нижние границы этих значений $\pi_{jm} \in (0, 1]$ заданы. При этом находится верхняя граница параметров, при которых исходная возмущенная система асимптотически устойчива.

Приближенное решение уравнения Ляпунова для трехтемповых переменных путем решения трех систем меньшего порядка обсуждается в [107].

Условия асимптотической устойчивости нелинейных по медленной переменной и линейных по быстрым переменным систем получены в [108] в случае различных малых параметров одинакового порядка при производных.

Устойчивость интегрального многообразия медленных движений для системы вида (10) обсуждается в [2, стр. 129; 109, стр. 220–221].

Граница D -устойчивости дискретных многотемповых сингулярно возмущенных систем изучается в [110].

Достаточные условия асимптотической устойчивости для линейных систем с параметрами при производных и постоянным запаздыванием представлены в [111].

Различные вопросы, связанные с устойчивостью линейных и нелинейных систем с многотемповыми переменными, рассматривались также в [18, 112–119]. В [120] изучалась асимптотическая устойчивость для систем с малыми и большими параметрами при производных.

Стабилизация для достаточно малых значений параметров линейных стационарных сингулярно возмущенных систем с неизвестными малыми параметрами ε_i при производных в уравнениях для быстрых переменных, удовлетворяющих (11), где m_{ij} , M_{ij} известны, изучалась в [121]. Для нелинейных по медленной переменной и линейных по n быстрым переменным систем, для которых в [108, 122] исследовалась устойчивость, в [123] для такого класса систем при $n = 2$ изучается стабилизация. При этом используется алгебраическое матричное уравнение Риккати с коэффициентами, зависящими от медленной переменной.

Вопросы устойчивости адаптивных систем стабилизации с разнотемповыми процессами исследовались в [124]. В частности, рассматривался случай, когда процессы в фильтре являются быстрыми, процессы в адаптере — средними по скорости, а процессы, описываемые вырожденной системой, — медленными.

Для управляемой линейной сингулярно возмущенной системы с разными параметрами при производных и заданными ограничениями на значения управляющей функции и медленной переменной в [125] изучалось поведение множества достижимости возмущенной системы при стремлении к нулю малых параметров.

В [126–128] при формулировке условий управляемости для системы

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= A_{11}x + A_{12}y + B_1u, \\ E(\varepsilon)\frac{dy}{dt} &= A_{21}x + A_{22}y + B_2u,\end{aligned}$$

где $E(\varepsilon) = \text{diag}(\varepsilon_1 I_{n_1}, \dots, \varepsilon_N I_{n_N})$, $\det A_{22} \neq 0$, для подсистемы быстрых движений используется понятие D -управляемости. Приведем соответствующее определение. Пара (A, B) называется D -управляемой, если для любой диагональной матрицы D с положительными элементами на диагонали пара (DA, DB) управляема.

Условия управляемости линейной многотемповой системы

$$(13) \quad \varepsilon^{k_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n A_{ij}(\varepsilon) x_j + B_i(\varepsilon) u(t), \quad i = \overline{1, n},$$

где k_i — целые числа такие, что $k_1 > k_2 > \dots > k_n \geq 0$, $x_i = x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$ и матрицы $\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1j} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{j1} & \dots & A_{jj} \end{pmatrix}$, $j = \overline{1, n-1}$, при $\varepsilon = 0$ обратимы, установлены в [129] на основе свойств управляемости систем меньшей размерности, к которым сводится исходная система при помощи замены переменных. При этом для достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ используется алгоритм сведения путем линейной замены переменных системы

$$\begin{aligned}\varepsilon^k \frac{dx}{dt} &= (C_{11} + O(\varepsilon))x + (C_{12} + O(\varepsilon))y + (D_1 + O(\varepsilon))u(t), \\ \varepsilon^m \frac{dy}{dt} &= C_{21}(\varepsilon)x + C_{22}(\varepsilon)y + D_2(\varepsilon)u(t),\end{aligned}$$

где k, m — целые числа такие, что $k > m \geq 0$, а C_{11} — обратимая матрица, к двум уравнениям вида

$$\begin{aligned}\varepsilon^k \frac{d\xi}{dt} &= (C_{11} + O(\varepsilon))\xi + (D_1 + O(\varepsilon))u(t), \\ \varepsilon^m \frac{d\eta}{dt} &= (C_{22}(\varepsilon) - H(C_{12} + O(\varepsilon)))\eta + (D_2(\varepsilon) - H(D_1 + O(\varepsilon)))u(t),\end{aligned}$$

где матрица H определяется в виде разложения по степеням ε . Применив этот алгоритм к системе (13) $n-1$ раз, получим n уравнений

$$\varepsilon^{k_i} \frac{d\xi_i}{dt} = (E_i + O(\varepsilon))\xi_i + (G_i + O(\varepsilon))u(t), \quad \xi_i = \xi_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

При условии $\text{rank}(G_i, E_i G_i, \dots, E_i^{n_i-1} G_i) = n_i$ доказано, что система (13) полностью управляема при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$.

Для частного случая системы (13) ($n = 3$) в [130] получены условия полной управляемости в терминах решения рекуррентных матричных алгебраических уравнений, называемых определяющими уравнениями системы, которые, по-видимому, впервые были использованы для исследования относительной управляемости линейных динамических систем с запаздыванием в [131]. Метод определяющих уравнений используется также в [132] для изучения полной и относительной управляемости трехтемповых систем с множителями при производных $1, \varepsilon^k, \varepsilon^m$, где k, m — целые положительные числа.

Наряду с обсуждением управляемости линейных трехтемповых систем в [2, стр. 170–172] приводится утверждение для нелинейных трехтемповых систем, касающееся локальной управляемости вблизи начала координат. Управляемости и наблюдаемости вблизи начала координат многотемповых нелинейных систем, линейных по быстрым переменным и управлению, посвящена статья [133].

5. Асимптотический анализ задач оптимального управления без ограничений на управление

При построении асимптотических решений задач оптимального управления используются два подхода. Более распространенный состоит в построении асимптотического решения задачи, вытекающей из условий оптимальности управления. Другой подход, называемый прямой схемой (см., например, [9, 134]), заключается в непосредственной подстановке постулируемого асимптотического разложения решения в условие задачи и построении серии задач для нахождения членов асимптотики. Этот подход позволяет использовать пакеты программ решения задач оптимального управления для нахождения членов асимптотического разложения решения и устанавливать невозрастание значений минимизируемого функционала при использовании членов разложения оптимального управления высших порядков.

В обзоре [24] имеется раздел, посвященный линейно-квадратичным регуляторам на бесконечном промежутке времени. Там же приводятся алгоритмы различных методов решения алгебраических матричных уравнений Риккати с несколькими малыми параметрами. В частности, в [135] для алгебраического уравнения Риккати со знаконеопределенным квадратичным членом, возникающего в теории H_∞ , изучается асимптотическая структура решения и предлагается итерационный метод его нахождения.

Задачи оптимального управления на бесконечном промежутке в случае малых параметров одинакового порядка (см. (11)), стоящих перед производными в уравнении состояния, исследовались в [102, 136–141].

В [102] асимптотическое поведение решения задачи минимизации квадратичного функционала

$$(14) \quad J = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (y'y + u'Ru) dt, \quad R > 0, \quad y = C_0x + \sum_{j=1}^N C_j z_j,$$

на траекториях линейной системы

$$(15) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_0x + \sum_{j=1}^N A_{0j}z_j + B_0u, \quad x(0) = x^0, \\ \varepsilon_i \frac{dz_i}{dt} &= A_{i0}x + \sum_{j=1}^N A_{ij}z_j + B_iu, \quad z_i(0) = z_i^0, \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

в случае малых параметров при производных одинакового порядка изучалось при некоторых условиях на основе асимптотики решения алгебраического матричного уравнения Риккати, имеющего следующую структуру:

$$\begin{pmatrix} K_1(\varepsilon) & \mu(\varepsilon)K_2(\varepsilon) \\ \mu(\varepsilon)K_2(\varepsilon)' & \mu(\varepsilon)K_3(\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad \mu(\varepsilon) = (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N)^{1/N}.$$

Подобная (14), (15) задача для уравнения состояния с одним малым и одним большим параметрами при производных рассматривалась в [142].

Отметим здесь статью [136], где, в отличие от [102], для задачи (14), (15) изучался критический (нестандартный) случай, когда быстрая переменная состояния не может быть однозначно выражена из ее уравнения при нулевом значении малого параметра.

На практике часто малые параметры ε_i в (15) не известны. Поэтому представляет интерес построение регуляторов, не зависящих от малых параметров. Значение критерия качества для построенных в [102, 136] регуляторов отличается от оптимального на $O(\|\varepsilon\|)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$.

Для критического случая со специальным видом уравнений для быстрых переменных, связанных между собой посредством медленных переменных, в [139] предложен алгоритм построения регулятора, не зависящего от неизвестных малых параметров, значение критерия качества для которого отличается от оптимального на $O(\|\varepsilon\|^2)$. Для одного класса линейно-квадратичных задач на бесконечном промежутке с трехтепловыми переменными состояниями в [137, стр. 117–132] подробно описан алгоритм сведения решения к решению трех независимых алгебраических матричных уравнений Риккати, которые предлагается решать итерационным методом Ньютона (см. также [138]).

В [140] для задачи минимизации функционала

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} z(t)'z(t) dt, \quad z(t) = Cx(t) + Du(t), \\ x(t) &= (x_0(t)', x_1(t)', x_2(t)')', \quad u(t) = (u_1(t)', u_2(t)')', \end{aligned}$$

на траекториях системы со слабосвязанными быстрыми переменными

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = A_{00}x_0(t) + A_{01}x_1(t) + A_{02}x_2(t) + B_{01}u_1(t) + B_{02}u_2(t), \quad x_0(0) = x_0^0,$$

$$\varepsilon_1 \frac{dx_1(t)}{dt} = A_{10}x_0(t) + A_{11}x_1(t) + \varepsilon_3 A_{12}x_2(t) + B_{11}u_1(t), \quad x_1(0) = x_1^0,$$

$$\varepsilon_2 \frac{dx_2(t)}{dt} = A_{20}x_0(t) + \varepsilon_4 A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_{22}u_2(t), \quad x_2(0) = x_2^0$$

построен регулятор, не зависящий от неизвестных значений малых параметров, значение критерия качества для которого отличается от оптимального на $O(\varepsilon_1 \varepsilon_2)$.

Для последней задачи при помощи итерационного метода в [141] построен регулятор, обеспечивающий лучшее приближение значения критерия качества к оптимальному, а именно, значение критерия качества для построенного регулятора отличается от оптимального на $O(\|\varepsilon\|^{2^{i+1}})$, где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)'$, i — номер итерации.

Для системы вида (15) при некоторых условиях в [143] построено субоптимальное стабилизирующее управление в форме обратной связи для задачи минимизации квадратичного функционала на бесконечном промежутке.

Декомпозиция на N однотемповых подсистем системы уравнений с множителями $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$ при производных ($0 < \varepsilon_N \ll \varepsilon_{N-1} \ll \dots \ll \varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$) для переменных состояния и сопряженных переменных, полученной из условия оптимальности управления для задачи минимизации квадратичного функционала на бесконечном промежутке, описана в [144]. В этой статье также приводится декомпозиция соответствующего алгебраического матричного уравнения Риккати на системы низшего порядка.

Задача об оптимальном линейном регуляторе, минимизирующем квадратичный функционал

$$J = \frac{1}{2}y(1)'Fy(1) + \frac{1}{2} \int_0^1 (y(t)'Q(t)y(t) + u(t)'R(t)u(t)) dt$$

на траекториях трехтемповой линейной системы

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + A_{13}y_3 + B_1u, \\ (16) \quad \varepsilon_1 \frac{dy_2}{dt} &= A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + A_{23}y_3 + B_2u, \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{dy_3}{dt} &= A_{31}y_1 + A_{32}y_2 + A_{33}y_3 + B_3u \end{aligned}$$

с закрепленным левым концом, где $y_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $u \in \mathbb{R}^r$, $A_{ij} = A_{ij}(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $B_i = B_i(t, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, рассматривается в [109, стр. 262–273] (см., также [2, стр. 195–200]).

Оптимальное управление для этой задачи имеет вид $u = -R^{-1}B'Ky$, где K — положительно определенное решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\frac{dK}{dt} = -KA - A'K + KSK - Q, \quad S = BR^{-1}B',$$

с конечным условием

$$K(1, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = F.$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21}/\varepsilon_1 & A_{22}/\varepsilon_1 & A_{23}/\varepsilon_1 \\ A_{31}/\varepsilon_1\varepsilon_2 & A_{32}/\varepsilon_1\varepsilon_2 & A_{33}/\varepsilon_1\varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2/\varepsilon_1 \\ B_3/\varepsilon_1\varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & \varepsilon_1 F_{12} & \varepsilon_1\varepsilon_2 F_{13} \\ \varepsilon_1 F'_{12} & \varepsilon_1 F_{22} & \varepsilon_1\varepsilon_2 F_{23} \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 F'_{13} & \varepsilon_1\varepsilon_2 F'_{23} & \varepsilon_1\varepsilon_2 F_{33} \end{pmatrix}.$$

Учитывая вид F , матрица K ищется в аналогичном виде. Ее блоки K_{ij} , $j = \overline{1, 3}$, $i = \overline{1, j}$, должны удовлетворять трехтемповой сингулярно возмущенной системе. При некоторых условиях для построения асимптотического решения этой системы производится асимптотическое расщепление уравнений и конечных условий с помощью метода интегральных многообразий, изложенного, например, в [109, п. 9].

Алгоритм приведения к блочно-диагональной форме линейной нестационарной управляемой системы с множителями при производных вида (16) описан в [109, стр. 246–248] (см. также [2, стр. 146–148]). При этом расщепляющие преобразования ищутся в виде асимптотических разложений. Для большего числа параметров частный случай обсуждается в [145, п. 9].

Приведем алгоритм метода прямой схемы из [146] для асимптотического решения нелинейной задачи оптимального управления с трехтемповыми переменными состояниями вида

$$J_\varepsilon(u) = \int_0^T F(x, y, z, u, t, \varepsilon) dt \rightarrow \min_u,$$

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y, z, u, t, \varepsilon), & x(0) &= x^0, \\ \varepsilon \frac{dy}{dt} &= g(x, y, z, u, t, \varepsilon), & y(0) &= y^0, \\ \varepsilon^2 \frac{dz}{dt} &= h(x, y, z, u, t, \varepsilon), & z(0) &= z^0. \end{aligned}$$

Используя идеи метода пограничных функций из [1, стр. 114–123; 43], решение задачи (17) ищется в виде разложения

$$(18) \quad v(t, \varepsilon) = \bar{v}(t, \varepsilon) + \sum_{i=0}^1 (\Pi_i v(\tau_i, \varepsilon) + Q_i v(\sigma_i, \varepsilon)), \quad v = (x', y', z', u)'$$

где

$$\bar{v}(t, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j \bar{v}_j(t), \quad t \in [0, T], \quad \tau_i = t/\varepsilon^{i+1} \geq 0, \quad \sigma_i = (t - T)/\varepsilon^{i+1} \leq 0,$$

$$\Pi_i v(\tau_i, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j \Pi_{ij} v(\tau_i), \quad Q_i v(\sigma_i, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j Q_{ij} v(\sigma_i), \quad i = 0, 1,$$

$\bar{v}_j(t)$ — регулярные функции от аргумента t , $\Pi_{ij} v(\tau_i)$ — пограничные функции экспоненциального типа в окрестности $t = 0$ от аргумента τ_i , $Q_{ij} v(\sigma_i)$ — пограничные функции экспоненциального типа в окрестности $t = T$ от аргумента σ_i , т.е. справедливы неравенства

$$\| \Pi_{ij} v(\tau_i) \| \leq c \exp(-\varkappa \tau_i), \quad \tau_i \geq 0, \quad \| Q_{ij} v(\sigma_i) \| \leq c \exp(\varkappa \sigma_i), \quad \sigma_i \leq 0,$$

где $c > 0$ и $\varkappa > 0$ означают постоянные, не зависящие от аргументов рассматриваемых функций.

Подставим разложение (18) в уравнения системы (17) и правую часть представим в виде асимптотической суммы слагаемых, зависящих от t , τ_i , σ_i , $i = 0, 1$ (соответствующие формулы для такого представления см., например, в [147]). Затем, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , отдельно зависящие от t , τ_i , σ_i , $i = 0, 1$, получаем соотношения для нахождения регулярных и пограничных членов асимптотики. Подставим (18) в функционал $J_\varepsilon(u)$ и представим подынтегральную функцию в виде асимптотической суммы слагаемых, зависящих от t , τ_i , σ_i , $i = 0, 1$. Далее произведем разложение по степеням малого параметра, при этом в интегралах от выражений, зависящих от τ_i и σ_i , $i = 0, 1$, перейдем к интегрированию соответственно по промежуткам $[0, +\infty)$ и $(-\infty, 0]$. В итоге получим разложение функционала по степеням ε

$$J_\varepsilon(u) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j J_j.$$

Анализируя коэффициенты J_j , находим более простые, чем исходная, задачи оптимального управления для определения членов ряда (18). В [146] объясняется получение явного вида задач для нахождения асимптотического решения нулевого порядка, а также приводятся оценки близости построенного асимптотического решения к точному решению для управления, траектории состояния и критерия качества.

Для линейно-квадратичного случая задачи (17) при помощи метода прямой схемы в [148] построено асимптотическое приближение решения нулевого

порядка, а в [149] — произвольного порядка. При этом доказано, что соотношения для членов асимптотического решения двухточечной краевой задачи, вытекающей из условия оптимальности управления для исходной возмущенной задачи, соответствуют краевым задачам, полученным из условий оптимальности управления построенных задач для отыскания членов асимптотики при помощи метода прямой схемы.

Для нечеткой сингулярно возмущенной модели, определяемой дифференциальными уравнениями с разными малыми параметрами при производных, в [150] рассматривается многоцелевое управление.

В [151, 152] на основе асимптотики решения двухточечной краевой задачи, вытекающей из условия оптимальности управления, построена асимптотика решения задачи минимизации квадратичного функционала

$$J(u) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (w(k)'Qw(k) + u(k)'Ru(k)),$$

где $w(k) = (x(k)', \varepsilon_1 y(k)', \varepsilon_1 \varepsilon_2 z(k)')'$, на траекториях трехтемповой системы

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ y(k+1) \\ z(k+1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(k) \\ \varepsilon_1 y(k) \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 z(k) \end{pmatrix} + Bu(k)$$

с заданными начальными условиями

$$x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0, \quad z(0) = z^0.$$

Обобщение этой задачи на случай многих малых параметров рассматривается в [153] (см. также [154]).

6. “Скрытые” разнотемповые быстрые переменные

Иногда разнотемповые быстрые переменные могут быть “скрытыми”, т.е. их наличие не видно из постановки задачи, а уравнения для них появляются в результате дополнительных преобразований (например, задачи с “дешевыми” управлениями, цены которых имеют разный порядок, сингулярно возмущенные уравнения в специальном критическом случае и в случае кратных корней вырожденного уравнения).

Особенность задач с дешевым управлением заключается в том, что при нулевом значении малого параметра и отсутствии ограничений на управление получаются задачи с особым управлением, т.е. из принципа максимума Понтрягина [155] нельзя выразить управление через сопряженную переменную и переменную состояния. Большинство работ в этом направлении посвящено линейно-квадратичным задачам, в критерии качества которых перед управлениями стоит один малый параметр, т.е. управления имеют одинаковый порядок “дешевизны”. Такие работы приведены, например, в [8, 9, 17, 147].

В качестве мотивации изучения задач с дешевыми управлениями разных порядков в [156] указана необходимость обеспечения “бесконечных” собственных значений различных порядков в задаче распределения полюсов. Задачи такого типа возникают также при исследовании моделей многосекторной экономики, когда управляющие функции имеют разный уровень “дешевизны”. Если использовать известный метод линейной свертки критериев для многокритериальных задач, где “цена” некоторых управлений мала по сравнению с другими, то получаются задачи с дешевыми управлениями.

Приведем работы, посвященные дешевым управлениям, при изучении которых возникают разнотемповые быстрые переменные.

На основе асимптотики решения алгебраического уравнения Риккати в [156] исследуется асимптотическая структура оптимального управления в форме обратной связи и оптимальной траектории для задачи

$$\int_0^{+\infty} \left(x' W x + \sum_{j=1}^N \varepsilon_j^2 u_j' u_j \right) dt \rightarrow \min,$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \sum_{j=1}^N B_j u_j, \quad x(0) = x^0,$$

где ε_j — возрастающая функция малого параметра ε такая, что $\varepsilon_j = \varepsilon_j(\varepsilon) > 0$ и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon_{j+1}(\varepsilon)/\varepsilon_j(\varepsilon) = 0$, $\varepsilon_0(\varepsilon) = 1$. Обзор работ в этом направлении, включая критический случай, приведен в [24].

Асимптотическое решение произвольного порядка, содержащее пограничные функции четырех типов, при помощи метода прямой схемы построено в [157] для линейно-квадратичной задачи с дешевыми управлениями двух различных порядков малости вида

$$\frac{1}{2} \int_0^T \left(z' W(t, \varepsilon) z + \sum_{k=1}^2 \varepsilon^{2k} (v^{(k)})' R(t, \varepsilon) v^{(k)} \right) dt \rightarrow \min,$$

$$\frac{dz}{dt} = A(t, \varepsilon) z + C(t, \varepsilon) v, \quad t \in [0, T], \quad z(0, \varepsilon) = z^0,$$

где

$$v^{(k)}(t, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{n_k}, \quad v(t, \varepsilon) = \left(v^{(1)}(t, \varepsilon)', v^{(2)}(t, \varepsilon)' \right)', \quad z(t, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n, \quad n = n_1 + n_2,$$

при всех $t \in [0, T]$ матрицы $W(t, \varepsilon)$ и $R(t, \varepsilon)$ симметричны, $W(t, 0) > 0$, $R(t, 0) > 0$, $k = 1, 2$, а матрица $C(t, 0)$ обратима. Путем замены переменных рассматриваемая задача преобразуется к задаче оптимального управления с

трехтемповыми переменными состояниями в критическом случае, когда вырожденное уравнение состояния не разрешимо однозначно относительно быстрой переменной. Оценки близости построенного асимптотического решения к точному и факт невозрастания значений минимизируемого функционала при использовании следующего приближения оптимального управления доказаны в [158]. Подробное изложение алгоритма построения асимптотики для конкретного примера приведено в [159].

В [160] (см. также [161]) при некоторых условиях построено асимптотическое решение начальной задачи для слабонелинейного уравнения вида

$$(19) \quad \varepsilon^2 \frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon f(x, t, \varepsilon), \quad t \in [0, T],$$

в критическом случае (матрица $A(t)$ вырождена). При этом асимптотика содержит пограничные функции двух типов от аргументов $\tau_1 = t/\varepsilon$ и $\tau_2 = t/\varepsilon^2$:

$$(20) \quad x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t, \varepsilon) + \Pi_1 x(\tau_1, \varepsilon) + \Pi_2 x(\tau_2, \varepsilon).$$

Для понимания алгоритма построения асимптотического решения начальной задачи для уравнения (19) полезен предложенный в [162] проекторный подход, использующий ортогональные проекторы на $\text{Ker}A(t)$ и $\text{Ker}A(t)'$.

В [160] рассматривался также дискретный аналог начальной задачи для уравнения (19)

$$x(t + \varepsilon^2) = B(t)x(t) + \varepsilon f(x(t), t, \varepsilon), \quad x(0) = x^0,$$

где $t = 0, \varepsilon^2, 2\varepsilon^2, \dots$ ($t \leq T$), а матрица $B(t)$ имеет собственное значение $\lambda(t) \equiv 1$. Асимптотика решения этой задачи строится в виде (20).

Асимптотика решения двухточечной краевой задачи для линейной системы с множителями 1 и ε при производных в критическом случае, содержащая пограничные функции от аргументов

$$(21) \quad \frac{t}{\varepsilon^i}, \quad \frac{t-T}{\varepsilon^i}, \quad i = 1, 2,$$

построена в [163].

Асимптотическое решение нулевого порядка получено при помощи метода прямой схемы в [164] для линейно-квадратичной задачи управления слабоуправляемой системой вида

$$\frac{1}{2} \int_0^T (x'W(t, \varepsilon)x + 2x'g(t, \varepsilon) + \varepsilon^2 u'R(t, \varepsilon)u) dt \rightarrow \min,$$

$$\varepsilon^2 \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x + \varepsilon^2 B(t, \varepsilon)u + \varepsilon f(t, \varepsilon), \quad x(0, \varepsilon) = x^0$$

в критическом случае (матрица $A(t, 0)$ вырождена). Асимптотика решения содержит пограничные функции четырех типов от аргументов (21).

Построению и обоснованию асимптотики решения краевой задачи

$$\varepsilon^4 \frac{d^2 x}{dt^2} = \varepsilon \frac{dx}{dt} A \left(\varepsilon^3 \frac{dx}{dt}, x, t \right) + B \left(\varepsilon^3 \frac{dx}{dt}, x, t \right), \quad t \in (0, 1),$$

$$x(0, \varepsilon) = x^0, \quad x(1, \varepsilon) = x^1$$

посвящена статья [165]. При этом левая пограничная функция зависит от аргумента t/ε^3 , а правая — от $(t-1)/\varepsilon$. Такая асимптотика для более простого уравнения рассмотрена в [166].

Параболическая задача с двумя малыми параметрами (ε^2 при u_{xx} , μ при u_x) и разрывными данными, асимптотика решения которой при $\varepsilon \ll \mu$ содержит быстрые переменные относительно t и x со скоростями изменения различных порядков, изучалась в [167].

Параболическому уравнению с разными степенями малого параметра при производных и условием периодичности по временному аргументу, асимптотическое решение которого имеет внутренний и пограничные слои, зависящие от растянутых переменных разного порядка, посвящена статья [168].

В.Ф. Бутузовым и его учениками проводилось активное исследование сингулярно возмущенных задач с кратным корнем вырожденного уравнения, которые, по-видимому, впервые изучались А.Б. Васильевой [169]. Оказалось, что во многих таких задачах поведение решения в пограничном (внутреннем) слое качественно отличается от поведения в случае простого корня вырожденного уравнения. Пограничный (внутренний) слой становится многозонным с различным поведением решения в разных зонах. В частности, в случае двукратного корня вырожденного уравнения $f(x, t, 0) = 0$ в [170] построено асимптотическое решение краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 x}{dt^2} = f(x, t, \varepsilon), \quad t \in (0, 1),$$

$$x(0, \varepsilon) = x^0, \quad x(1, \varepsilon) = x^1.$$

Последнее уравнение с краевыми условиями

$$x(0, \varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon^\alpha p, \quad x(1, \varepsilon) = \varphi(1) + \varepsilon^\alpha q,$$

где $\varphi(t)$ — двукратный корень вырожденного уравнения, рассматривалось в [171]. Доказано, что при $0 < \alpha < 1/2$, $p > 0$, $q > 0$ пограничные слои являются трехзонными, как и при $\alpha = 0$ в [170], но масштабы погранслоевых переменных зависят от α ; при $\alpha = 1/2$ пограничные слои становятся однозонными и остаются таковыми для $\alpha > 1/2$, причем масштабы погранслоевых переменных уже не зависят от α .

Асимптотическое решение краевой задачи для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с множителями ε^2 и ε при вторых производных построено в [172] в случае, когда вырожденное уравнение для первой неизвестной переменной имеет двукратный корень относительно этой переменной. При этом для первой неизвестной переменной рассматриваются краевые условия Дирихле, а для второй — краевые условия Неймана. Асимптотика подобной задачи в случае краевых условий Неймана для обеих переменных приведена в [173], а в случае краевых условий Неймана для первой неизвестной и условий Дирихле для второй неизвестной — в [174].

Асимптотика начально-краевой задачи для параболического уравнения

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) &= f(u, x, t, \varepsilon), \\ u(x, 0, \varepsilon) &= u^0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t, \varepsilon) &= \frac{\partial u}{\partial x}(1, t, \varepsilon) = 0,\end{aligned}$$

где

$$(x, t) \in (0, 1) \times (0, T], \quad f(u, x, t, \varepsilon) = -h(x, t)(u - \varphi(x, t))^3 + \varepsilon f_1(u, x, t, \varepsilon),$$

т.е. корень вырожденного уравнения является трехкратным, при некоторых условиях построена в [175]. Погранслойные переменные имеют вид $\tau_1 = t/\varepsilon^2$, $\tau_2 = t/\varepsilon^{4/3}$, $\zeta_1 = x/\varepsilon^{2/3}$, $\zeta_2 = (1-x)/\varepsilon^{2/3}$, регулярная и погранслойные части представляют собой ряды по целым степеням $\varepsilon^{1/3}$, а пограничный слой в окрестности начального момента времени имеет три зоны. Еще одной особенностью случая трехкратного корня вырожденного уравнения является то, что теперь важную роль в построении асимптотики играют члены порядка ε , входящие в правую часть уравнения. Периодические по t решения для параболического уравнения изучаются в [176–178] при различных предположениях на кратный корень вырожденного уравнения.

Построение и обоснование асимптотики по малому параметру решения краевой задачи для сингулярно возмущенной стационарной частично диссипативной системы уравнений в случае, когда одно из уравнений вырожденной системы имеет двукратный корень, рассматривается в [179]. Кратность корня является причиной того, что пограничный слой оказывается многозонным, а стандартный алгоритм построения асимптотики погранслойного решения становится недостаточным и требует существенной модификации.

Отметим здесь цикл работ, выполненных А.М. Ильиным вместе со своими учениками (см. [180]), посвященных классу задач с малым параметром, характеризующихся тем, что при построении асимптотики их решения по степеням малого параметра в коэффициентах рядов обнаруживаются разного типа сингулярности. Такого рода задачи названы, по-видимому, впервые

в [181] бисингулярными. В [182] (последней работе из этого цикла в [180]) изучалась начальная задача вида

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{dx_1}{dt} &= -x_1^2 + x_2^3 + t, \\ \varepsilon \frac{dx_2}{dt} &= x_1^3 - x_2^2 + t^3, \\ x_1(0) &= x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad t \in [0, T].\end{aligned}$$

Построенное асимптотическое решение имеет вид различных рядов на четырех промежутках из отрезка $[0, T]$, коэффициенты которых зависят от аргументов t/ε , $t/\varepsilon^{2/3}$, $t/\varepsilon^{4/7}$ и t соответственно.

Обзор результатов, связанных с дополнительными асимптотическими слоями в асимптотике решений сингулярно возмущенных систем нелинейных дифференциальных уравнений типа А.Н. Тихонова в случае нарушения условия устойчивости, которое предполагалось в [1], приведен в [183, п. 5].

Быстрые переменные со скоростями изменения различных порядков рассматриваются и при применении метода согласования асимптотических разложений для задачи Дирихле в прямоугольнике для уравнения

$$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - a(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y),$$

где $a(x, y) > 0$ (см. [184]).

Процесс согласования асимптотических разложений используется также в [185, стр. 142–154] при построении асимптотики решения бисингулярных краевых задач вида

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 \frac{d^2 u}{dx^2} - xp(x) \frac{du}{dx} - q(x)u &= f(x), \quad x \in [0, 1], \quad p(x) > 0, \quad q(x) > 0, \\ u(0, \varepsilon) &= 0, \quad u(1, \varepsilon) = 0.\end{aligned}$$

Асимптотика решения бисингулярной начально-краевой задачи для одной системы линейных параболических уравнений построена в [186] без использования процедуры согласования.

Многочисленные сингулярно возмущенные начальные и краевые дискретные задачи для уравнения вида $\sum_{i=n}^0 a_i x(k+i) = au(k)$, где коэффициенты a_i представляют собой постоянные числа, умноженные на произведение некоторых степеней малых параметров, изучались в [187]. Асимптотическое разложение решений таких задач содержит регулярную функцию и различные пограничные функции, число которых равно числу исчезающих при вырождении дополнительных условий.

7. Задачи с ограничением на управление

Использование асимптотических методов встречает значительные трудности при решении сингулярно возмущенных задач с ограничением на управление в форме замкнутых неравенств, поскольку возникают негладкие решения. Эффективным методом асимптотического решения задач такого типа является построение асимптотики точек переключения управления (см., например, [188]). Этот подход реализован в [189] для следующей задачи оптимального быстрогодействия для линейной стационарной системы

$$(22) \quad \frac{dw}{dt} = A(\varepsilon)w + b(\varepsilon)u, \quad w(0) = w^0, \quad w = (x', y', z')',$$

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2/\varepsilon & B_2/\varepsilon & C_2/\varepsilon \\ A_3/\varepsilon^2 & B_3/\varepsilon^2 & C_3/\varepsilon^2 \end{pmatrix}, \quad b(\varepsilon) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2/\varepsilon \\ b_3/\varepsilon^2 \end{pmatrix},$$

$$u(t) \in \mathbb{R}, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, T],$$

$$w(T) = 0, \quad J(u) = T \rightarrow \min.$$

Здесь x, y, z — векторы произвольной размерности и предполагается выполненным условие

I: матрицы C_3 и $B_2 - C_2 C_3^{-1} B_3$ устойчивые.

Как следует из принципа максимума Понтрягина, оптимальное управление в этой задаче является релейным. Опираясь на метод пограничных функций, в [189] предложен алгоритм, позволяющий строить асимптотические приближения к решению рассматриваемой задачи произвольного порядка точности. Суть алгоритма состоит в построении асимптотики точек переключения оптимального управления и момента оптимального быстрогодействия в виде разложений по неотрицательным целым степеням малого параметра. При применении алгоритма происходит своеобразная декомпозиция исходной задачи на три задачи меньшей размерности, одной из которых является вырожденная задача.

В [190] исследуется линейная стационарная терминальная задача оптимального управления с уравнением состояния (22) и ограничением типа равенства на правый конец траектории, т.е.

$$Hw(T) = g, \quad H = \text{diag}(H_1, H_2, H_3), \quad g = (g'_1, g'_2, g'_3)',$$

$$c(\varepsilon)'w(T) \rightarrow \max, \quad c(\varepsilon) = (c'_1, \varepsilon c'_2, \varepsilon^2 c'_3)'$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, $z \in \mathbb{R}^{n_3}$, $g_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $i = \overline{1, 3}$, $m_1 < n_1$, $m_2 \leq n_2$, $m_3 \leq n_3$. Считается выполненным условие I.

Предложенный в [190] алгоритм решения рассматриваемой задачи в идейном плане близок алгоритму из [189]. Он основан на построении асимптотических приближений к точкам переключения оптимального управления.

Одни из этих точек близки к соответствующим точкам переключения оптимального управления в вырожденной задаче, а остальные группируются вблизи конечного момента T и отстоят от него на величины порядка ε и ε^2 . Реализация алгоритма предполагает решение трех невозмущенных задач оптимального управления, в которых переменные состояния размерности n_1, n_2, n_3 соответственно, причем первой из них является вырожденная задача.

Разработанный в [190] алгоритм может быть применен (см. [191]) для асимптотического решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с большой длительностью процесса

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= A_1 y + A_2 z + b_1 v, & y(0) &= y^0, \\ \varepsilon \frac{dz}{dt} &= A_3 y + A_4 z + b_2 v, & z(0) &= z^0, \\ v(t) \in \mathbb{R}, & |v(t)| \leq 1, & t \in [0, T/\varepsilon], & H_1 y(T/\varepsilon) = g_1, & H_2 z(T/\varepsilon) = g_2, \\ J(v) &= \int_0^{T/\varepsilon} (c'_1 y(t) + c'_2 z(t) + h v(t)) dt \rightarrow \max, \end{aligned}$$

где $y \in \mathbb{R}^{n_1}, z \in \mathbb{R}^{n_2}, g_i \in \mathbb{R}^{m_i}, i = 1, 2$, и $m_1 \leq n_1, m_2 \leq n_2$. Переходя к медленному времени $s = \varepsilon t$ и полагая $u(s) = v(s/\varepsilon)$, последнюю задачу можно записать в виде эквивалентной задачи терминального управления

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= c'_1 y + c'_2 z + h u, & x(0) &= 0, \\ \varepsilon \frac{dy}{ds} &= A_1 y + A_2 z + b_1 u, & y(0) &= y^0, \\ \varepsilon^2 \frac{dz}{ds} &= A_3 y + A_4 z + b_2 u, & z(0) &= z^0, \\ |u(s)| &\leq 1, & s \in [0, T], & H_1 y(T) = g_1, & H_2 z(T) = g_2, \\ J_0(u) &= x(T) \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Эта задача является частным случаем задачи из [190] и, следовательно, может быть решена с помощью предложенного в этой статье алгоритма, если выполнено условие I, которое в данном случае заключается в требовании устойчивости матриц A_4 и $A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3$.

Опираясь на алгоритм построения программных асимптотически оптимальных управлений из [190], в [192] предложен алгоритм построения асимптотически оптимального регулятора типа обратной связи в задаче терминального управления линейной стационарной сингулярно возмущенной системой со скалярными управлениями, значения которых принадлежат замкнутому интервалу, и с множителями при производных $1, \varepsilon$ и ε^2 .

В [193] для нелинейной трехтемповой системы управления с компактным множеством значений управления используется метод усреднения для построения предельной системы в форме дифференциального включения для траектории медленного движения. Приводятся достаточные условия равномерной сходимости медленных траекторий при стремлении к нулю малых параметров, стоящих при производных в уравнении состояния. Эти результаты распространяются при помощи другой техники на случай систем управления с многотемповыми переменными в [194].

8. Игровые задачи

В [195] для системы

$$(23) \quad E_\varepsilon \frac{dx}{dt} = Ax + B_1 u_1 + B_2 u_2, \quad x(0) = x^0,$$

где

$$x = (x'_0, x'_1, x'_2)', \quad x_j \in \mathbb{R}^{n_j}, \quad j = 0, 1, 2, \quad u_i \in \mathbb{R}^{m_i}, \quad i = 1, 2,$$

$$E_\varepsilon = \text{diag}(I_{n_0}, \varepsilon_1 I_{n_1}, \varepsilon_2 I_{n_2}), \quad A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \\ A_{10} & A_{11} & 0 \\ A_{20} & 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} B_{01} \\ B_{11} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} B_{02} \\ 0 \\ B_{22} \end{pmatrix},$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — одинакового порядка малые параметры, для которых существует $\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \varepsilon_1/\varepsilon_2$, ищется оптимальная по Парето ситуация u , представляющая собой пару стратегий $u = (u'_1, u'_2)'$, минимизирующая линейную свертку функций выигрыша $J = \gamma_1 J_1 + \gamma_2 J_2$, $\gamma_j \in (0, 1)$, $j = 1, 2$, $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, где J_j задается формулой

$$(24) \quad J_j = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (y_j(t)' y_j(t) + u_j(t)' R_j u_j(t)) dt, \quad R_j > 0,$$

$$y_j = C_{j0} x_0 + C_{jj} x_j, \quad j = 1, 2.$$

Заметим, что в (23) матрицы A_{jj} могут быть вырожденными. Решение этой задачи в форме обратной связи задается формулой

$$u_j^*(t) = -\frac{1}{\gamma_j} R_j^{-1} B'_{j\varepsilon} P_\varepsilon x(t), \quad j = 1, 2,$$

где P_ε удовлетворяет матричному алгебраическому уравнению Риккати

$$(25) \quad A'_\varepsilon P_\varepsilon + P_\varepsilon A_\varepsilon - P_\varepsilon S_\varepsilon P_\varepsilon + Q = 0.$$

Здесь

$$A_\varepsilon = E_\varepsilon^{-1}A, \quad S_\varepsilon = 1/\gamma_1 S_{1\varepsilon} + 1/\gamma_2 S_{2\varepsilon}, \quad S_{j\varepsilon} = B_{j\varepsilon} R_j^{-1} B'_{j\varepsilon}, \quad j = 1, 2,$$

$$B_{1\varepsilon} = \begin{pmatrix} B_{01} \\ \varepsilon_1^{-1} B_{11} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_{2\varepsilon} = \begin{pmatrix} B_{02} \\ 0 \\ \varepsilon_2^{-1} B_{22} \end{pmatrix}, \quad Q = \gamma_1 Q_1 + \gamma_2 Q_2,$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} C'_{10} C_{10} & C'_{10} C_{11} & 0 \\ C'_{11} C_{10} & C'_{11} C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} C'_{20} C_{20} & 0 & C'_{20} C_{22} \\ 0 & 0 & 0 \\ C'_{22} C_{20} & 0 & C'_{22} C_{22} \end{pmatrix}.$$

При некоторых условиях изучается асимптотическая структура решения уравнения (25) — матрицы P_ε вида $\begin{pmatrix} P_{00} & \varepsilon_1 P'_{10} & \varepsilon_2 P'_{20} \\ \varepsilon_1 P_{10} & \varepsilon_2 P_{11} & \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} P'_{21} \\ \varepsilon_2 P_{20} & \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} P_{21} & \varepsilon_2 P_{22} \end{pmatrix}$, где

$P_{00} = P'_{00}$, $P_{11} = P'_{11}$, $P_{22} = P'_{22}$. Далее, используя решения уравнений низшего порядка, находятся стратегии, значения функции выигрыша для которых отличаются от оптимальных значений на величину порядка $O(\|\varepsilon\|)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)'$.

Парето-оптимальные стратегии изучались также в [196] для систем со слабосвязанными быстрыми переменными при условии обратимости матриц при быстрых переменных в вырожденных уравнениях для этих переменных.

Антагонистические линейно-квадратичные дифференциальные игры, динамика которых описывается системой

$$\frac{dx_1}{dt} = A_{11}(t)x_1 + A_{12}(t)x_2 + A_{13}(t)x_3 + B_1(t)u_1 + D_1(t)u_2, \quad x_1(0) = x_1^0,$$

$$\varepsilon_1 \frac{dx_2}{dt} = A_{21}(t)x_1 + A_{22}(t)x_2 + A_{23}(t)x_3 + B_2(t)u_1 + D_2(t)u_2, \quad x_2(0) = x_2^0,$$

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{dx_3}{dt} = A_{31}(t)x_1 + A_{32}(t)x_2 + A_{33}(t)x_3 + B_3(t)u_1 + D_3(t)u_2, \quad x_3(0) = x_3^0,$$

причем первый игрок старается минимизировать функцию выигрыша

$$J = x(T)' F x(T) + \int_0^T (x(t)' W(t) x(t) + u_1(t)' u_1(t) - \gamma^2 u_2(t)' u_2(t)) dt,$$

а второй — максимизировать, изучались на конечном и бесконечном промежутках в [197].

Примеры, в которых обсуждаются различные подходы к построению предельной задачи, приводящие к разным результатам, рассматриваются в [102]

для дифференциальной бескоалиционной игры двух лиц, изменение управляемой системы в которой описывается линейной системой с малыми параметрами $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$ одинакового порядка (см. (11)) при производных. Эта система может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A_0x + A_0fz + B_{01}u_1 + B_{02}u_2, \quad x(0) = x^0, \\ \mu(\varepsilon)\frac{dz}{dt} &= D(\varepsilon)(A_{f0}x + A_fz + B_{f1}u_1 + B_{f2}u_2), \quad z(0) = z^0, \end{aligned}$$

где $\mu(\varepsilon) = (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N)^{1/N}$, $D(\varepsilon) = \text{diag}(\mu/\varepsilon_1 I_{n_1}, \dots, \mu/\varepsilon_N I_{n_N})$. Здесь i -й игрок ($i = 1, 2$) выбирает свою стратегию u_i , стараясь добиться по возможности меньшего значения функции выигрыша, задаваемой функционалом

$$J_i(u_i, u_j) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}' Q_i \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} + u_i' R_{ii} u_i + u_j' R_{ij} u_j \right) dt, \quad R_{ii} > 0, \quad Q_i \geq 0, \\ i, j = 1, 2, i \neq j.$$

Равновесие по Нэшу в этой игре определяется ситуацией (u_1^*, u_2^*) такой, что $J_i(u_i^*, u_j^*) \leq J_i(u_i, u_j^*)$, $i \neq j$, $i = 1, 2$. Стратегии u_i^* ищутся в форме линейной обратной связи

$$u_i^* = -R_{ii}^{-1} B_i' K_i \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2,$$

где K_1, K_2 — решение взаимосвязанных алгебраических уравнений Риккати, удовлетворяющих некоторому условию устойчивости.

Случай слабосвязанных уравнений для двухтемповых быстрых переменных изучался в [198].

Равновесные по Нэшу стратегии рассматриваются в [199] для дифференциальной игры двух лиц, динамика которой задается уравнением (23), а функции выигрыша

$$J_i(u_i, u_j) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (y_i(t)' y_i(t) + u_i(t)' R_{ii} u_i(t) + \mu u_j(t)' R_{ij} u_j(t)) dt,$$

где $y_i = C_{i0}x_0 + C_{ii}x_i$, $R_{ii} > 0$, $R_{ij} \geq 0$, $\mu = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$. Малые положительные параметры $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ не известны, но их границы известны, а именно, $\bar{\varepsilon}_j - \sigma_j \bar{\mu}^\eta \leq \varepsilon_j \leq \bar{\varepsilon}_j + \sigma_j \bar{\mu}^\eta$, $j = 1, 2$, $\bar{\mu} = \sqrt{\bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2}$, $\bar{\varepsilon}_j, \sigma_j, \eta$ — известные величины, и существует $\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \varepsilon_1/\varepsilon_2$. Не предполагается обратимость матриц A_{ii} , $i = 1, 2$,

т.е. рассматривается и критический случай теории сингулярных возмущений. Предлагается итерационный метод нахождения с высокой точностью стратегий, выражающихся через решения взаимосвязанных алгебраических уравнений Риккати. Доказывается, что если $\eta = n + 1$, то при некоторых условиях

функции выигрыша для приближения n -го порядка отличаются от оптимальных на $O(\bar{\mu}^{n+1})$.

Итерационный метод, основанный на методе Ньютона, для решения взаимосвязанных алгебраических уравнений Риккати, возникающих при изучении ситуации равновесия по Нэшу в линейно-квадратичной дифференциальной игре с уравнением состояния (23) в критическом случае и функциями выигрыша (24) при условии существования $\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \varepsilon_1/\varepsilon_2$, излагается в [200]. При указанных в этой статье предположениях значения функций выигрыша для приближения n -го порядка построенных стратегий отличаются от оптимальных на $O(\|\varepsilon\|^{2n})$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)'$.

В [201] рассматривается оптимальная по Нэшу ситуация в игре N лиц, динамика управляемой системы в которой задается дифференциальным уравнением вида

$$E_\varepsilon \frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad E_\varepsilon = \text{diag}(I_{n_0}, \varepsilon_1 I_{n_1}, \dots, \varepsilon_N I_{n_N}),$$

где $x = (x'_0, \dots, x'_N)'$,

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & \dots & A_{0N} \\ A_{01} & A_{11} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{0N} & 0 & \dots & A_{NN} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{01} & B_{02} & \dots & B_{0N} \\ B_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_{NN} \end{pmatrix},$$

а функции выигрыша представляют собой функционалы

$$J_i(u_1, \dots, u_N) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (y'_i y_i + u'_i R_{ii} u_i) dt,$$

$$y_i = C_{i0} x_0 + C_{ii} x_i, \quad R_{ii} > 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Предполагается, что существует $\lim_{\varepsilon_i, \varepsilon_j \rightarrow 0} \varepsilon_j/\varepsilon_i$. Требуется найти ситуацию $u^* = (u_1^*, \dots, u_N^*)$ с линейной обратной связью такую, что $J_i(u_1^*, \dots, u_N^*) \leq J_i(u_1^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_N^*)$, $i = \overline{1, N}$. Искомые стратегии, образующие равновесную по Нэшу ситуацию u^* , определяются формулой $u_i^*(t) = -R_{ii}^{-1} B'_i P_i x(t)$, где P_i — решение системы взаимосвязанных алгебраических уравнений Риккати. Построены не зависящие от малых параметров стратегии, выигрыши для которых отличаются от выигрышей равновесных по Нэшу стратегий на $O(\|\varepsilon\|)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)'$.

Отметим здесь обзор [24], в котором один раздел посвящен равновесию по Нэшу в дифференциальных играх с разнотемповыми быстрыми переменными.

9. Стохастические системы

В [144] рассматривается построение оптимального фильтра Калмана для системы

$$(26) \quad \varepsilon_k \frac{dx_k(t)}{dt} = \sum_{j=1}^N A_{kj} x_j(t) + G_k w(t), \quad k = \overline{1, N},$$

с измеряемой функцией

$$(27) \quad y(t) = Cx(t) + v(t),$$

где $0 < \varepsilon_N \ll \varepsilon_{N-1} \dots \ll \varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$, а $w(t)$ и $v(t)$ — гауссовские случайные процессы белого шума. Используется метод декомпозиции соответствующих матричных алгебраических уравнений Риккати.

В этой статье также изучается задача минимизации критерия качества

$$J = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} M \left(\int_0^T (x(t)' W x(t) + u(t)' R u(t)) dt \right), \quad W \geq 0, \quad R > 0,$$

на траекториях системы

$$\varepsilon_k \frac{dx_k(t)}{dt} = \sum_{j=1}^N A_{kj} x_j(t) + B_k u(t) + G_k w(t), \quad k = \overline{1, N},$$

с выходной переменной (27).

Декомпозиция оптимального фильтра Калмана подробно описана в [137, стр. 132–139] для частного случая системы (26).

Стохастические игры Нэша с разнотемповыми быстрыми переменными изучались в [202].

В обзоре [24] имеется раздел, посвященный стохастическим системам, управляемым сингулярно возмущенными уравнениями Ито с несколькими малыми параметрами.

Линейно-квадратичная стохастическая задача для случая N -темповых быстрых переменных с неизвестными скоростями изменения одинакового порядка рассматривается в [203].

Детальное изучение зависимости стабилизирующих решений алгебраического матричного уравнения Риккати от двух малых параметров, определяющих скорость изменения быстрых переменных в задаче оптимального управления с уравнением состояния

$$(28) \quad \begin{aligned} \varepsilon_k dx_k(t) &= (A_k x(t) + B_k u(t)) dt + \varepsilon_k^\delta (C_k x(t) + D_k u(t)) dw(t), \\ x_k(0) &= x_k^0, \quad k = \overline{0, 2}, \quad x = (x'_0, x'_1, x'_2)', \end{aligned}$$

и минимизируемым критерием качества

$$(29) \quad J(u) = M \left(\int_0^{+\infty} (x(t)'Wx(t) + 2x(t)'Su(t) + u(t)'Ru(t)) dt \right)$$

приведено в [204]. Здесь $W = W'$, $R = R'$, $x_k(t) \in \mathbb{R}^{n_k}$, $k = \overline{0, 2}$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$, $\{w(t)\}_{t \geq 0}$ — одномерный стандартный винеровский процесс, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_k = \varepsilon_k(\varepsilon)$, $\varepsilon_k : [0, \varepsilon^*] \rightarrow [0, +\infty)$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon_k(\varepsilon) = 0$, $k = 1, 2$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon_2(\varepsilon)/\varepsilon_1(\varepsilon) = 0$, $\delta > 1/2$. Получено управление в форме обратной связи, близкое к оптимальному, определяемое матрицей, не зависящей от малых параметров, которые могут быть неизвестными. Установлена оценка близости значения критерия качества для найденного приближенного управления к оптимальному значению.

В [205] рассматривается задача минимизации математического ожидания квадратичного функционала вида (29) на траекториях сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений Ито (28), где все коэффициенты могут зависеть от ε , $\delta = 1/2$, а ε_k — неубывающие функции, удовлетворяющие условиям из [204], причем $\varepsilon_k(\varepsilon) = 0$ в том и только том случае, если $\varepsilon = 0$, $k = 1, 2$.

При некоторых условиях в этой статье изучается асимптотическая структура стабилизирующего решения матричного алгебраического уравнения Риккати, возникающего при отыскании оптимального управления рассматриваемой стохастической задачи в форме обратной связи. При этом, в отличие от детерминированного случая, где система предельных алгебраических уравнений Риккати получается из матричного уравнения Риккати для возмущенной задачи при нулевых значениях малых параметров, в рассматриваемом стохастическом случае система предельных уравнений Риккати не может быть получена таким образом. Она зависит от матриц, определяющих влияние винеровского процесса, которые входят в уравнения состояния для быстрых переменных с малыми параметрами. Алгоритм получения системы предельных алгебраических уравнений Риккати для изучаемой задачи подробно обсуждается.

10. Приложения

В различных областях науки и практики исследователи сталкиваются с необходимостью изучения задач, содержащих быстрые и медленные переменные. Далее перечисляются некоторые практические задачи с разнотемповыми быстрыми переменными.

Многотемповые системы возникают в теории цепных химических реакций [43], где присутствуют активные центры, константы скорости реакции для которых различны (активными центрами называются те частицы — валентные атомы, радикалы, благодаря наличию которых реакция начинается и разви-

вается). В качестве малых параметров, стоящих при производных, здесь выступают отношения константы скорости медленного активного центра к константам скоростей остальных активных центров. В [206] приведено обоснование метода квазистационарных концентраций Семенова-Боденштейна, состоящего в отбрасывании производных от концентраций быстрых активных центров и решении вырожденной задачи. Как указано в [43], системы рассмотренного в [206] типа также возникают при описании цепи превращений радиоактивных ядер, из которых некоторые являются наиболее долгоживущими.

Кинетика вспомогательного механизма реакции фермента, где появляется система нелинейных дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных, анализируется в [207].

В [208] изучается понижение размерности для появляющихся в биохимии систем, число различных скоростей изменения переменных в которых больше двух.

В монографии [145, стр. 90–96] методами теории сингулярных возмущений изучается линеаризованная модель управления с разнотемповыми быстрыми переменными для топливных элементов с протонообменной мембраной (см. также [63, 209, 210]).

Теорема Тихонова используется в [211] для анализа трехтемповых сингулярно возмущенных систем, описывающих биомолекулярные модели. Приведен пример системы, возникающей в фосфорилировании.

Быстрые переменные со скоростями изменения разных порядков появляются при исследовании моделей океанических течений (см., например, [212]).

Система с двумя малыми параметрами различного порядка малости при производных, описывающая пусковой режим электродвигателя постоянного тока при одновременном включении цепи якоря и обмотки возбуждения, обсуждается в [43].

Условия устойчивости разнотемповых систем, возникающих в различных моделях электрических цепей, рассмотрены в [102, 115]. Многотемповые системы, описывающие модель электрической цепи с туннельным диодом [108] и электромеханические процессы в демпфированной синхронной машине с изменяющимися потокоцеплениями, исследуются в [2, стр. 137–144; 109, стр. 254–262] методом интегральных многообразий. Устойчивость синхронной машины изучалась в [213].

Анализ устойчивости системы с трехтемповыми переменными, возникающей при изучении одного класса микросетей переменного тока для распределенных генераторов, проводится в [214].

Эффективность полученного в [202] алгоритма построения приближенных стратегий в стохастических играх Нэша с разнотемповыми быстрыми переменными демонстрируется в этой статье на примере многоаппаратной энергетической системы. Управление в форме обратной связи для линеаризованной модели угольной электростанции с трехтемповыми переменными построено

в [215]. Асимптотический анализ начальных и краевых задач для дискретных линейных сингулярно возмущенных систем седьмого порядка с тремя малыми параметрами, возникающих при моделировании управления частотой нагрузки двухзонной энергосистемы, приведен в [81]. Различные модели энергосистем с разнотемповыми быстрыми переменными исследуются также в [79; 80; 137, стр. 139–141; 141; 196; 203; 216–218].

Используя асимптотику решения двухточечной краевой задачи, вытекающей из условия оптимальности управления, в [152] построено асимптотическое разложение второго порядка для оптимального управления в дискретной модели энергосистемы пятого порядка. Приближение второго порядка для асимптотического решения начальной задачи для такой модели представлено в [79].

Синтез нелинейных нестационарных систем управления с разнотемповыми процессами изучается в [219]. В частности (стр. 118), рассматривается случай, когда в модели объекта управления, эталонной модели желаемого поведения выхода и в алгоритме управления присутствуют различные параметры при производных. Трехтемповые процессы используются также при синтезе систем экстремального регулирования [220].

Система для трехтемповых переменных, возникающая при использовании устройства управления двигателем Уорда Леонарда, исследовалась в [221].

В математических моделях управления и эксплуатации ядерных реакторов присутствуют переменные с разными скоростями изменения. В монографии [222] рассматриваются декомпозиция таких моделей и построение композитного (составного) управления, причем исследование в основном акцентируется на трехтемповых системах.

При некоторых значениях параметров системы с трехтемповыми переменными присутствуют в модели воспламенения в дизельном двигателе [223; 224, стр. 94–98], а также в системе уравнений Лоренца-Хакена (класс В по терминологии [225, стр. 11, 15]), описывающей одну из основных моделей динамической теории лазеров в случае твердотельных лазеров на слаболегированных кристаллах и стеклах, волоконных, полупроводниковых и некоторых молекулярных газовых лазеров низкого давления. Траектории-утки для таких систем обсуждаются в [224, стр. 139–140].

Изучаются и системы с несколькими малыми параметрами при производных, возникающие в механике. Например, задача терминального управления линейной трехтемповой системой с ограничениями на состояние в конечный момент времени в виде равенства и со значениями скалярного управления из замкнутого интервала, описывающая движение под действием управляющих сил двух материальных точек с массами различных порядков малости, соединенных между собой пружиной, решается в [190] с помощью построения асимптотики точек переключения трех базовых задач. Подобная задача в случае, когда к точке с большей массой приложена возмущающая сила, изучается в [192].

Метод интегральных многообразий применяется для анализа трехтемповой модели колебаний гироскопа в кардановом подвесе с упругим валом и неуравновешенным ротором в [2, стр. 137–136; 109, стр. 248–250].

Система с трехтепловыми переменными, описывающая процесс намотки для непрерывных прокатных станков, изучается в [226].

Системы с трехтепловыми переменными рассматриваются и при изучении стабилизации верхнего положения равновесия маятника вращением инерциального маховика [20], а также стабилизации поступательных движений вращением эксцентрикового маховика [21]. При этом в качестве малых параметров при производных выступают временные константы фильтров.

Начально-краевая задача с разнотемповыми быстрыми переменными для линейной системы дифференциальных уравнений, содержащей обыкновенное дифференциальное уравнение и два уравнения в частных производных, описывающей поворот твердого тела с жестко закрепленным в нем упругим стержнем постоянного сечения, исследуется в [227].

В [228] рассматривается модель движения двухколесного экипажа с передне-задним расположением колес, движущегося по горизонтальной шероховатой поверхности. Эта модель содержит две быстрые переменные разных порядков изменения. Конструкция экипажа считается абсолютно жесткой, переднее колесо фиксировано в плоскости продольной симметрии экипажа, боковых наклонов нет. Последнее допущение оправдано для общепринятой в литературе “велосипедной” модели автомобиля либо для велосипеда или мотоцикла в пренебрежении эффектами, связанными с наклонами корпуса. Показано, что при определенном сочетании параметров потеря сцепления колеса с дорогой приводит к заносу экипажа. Исследования на эту тему продолжены в [229] для разных режимов заноса.

Системы с быстрыми переменными двух порядков появляются также при изучении модели качения с конечными углами поворота передних колес относительно корпуса [230, стр. 84] и при исследовании вкатывания гребня колеса железнодорожного экипажа на головку рельса — одного из наиболее опасных режимов движения, чреватого сходом [231]. Для таких систем в этих работах обсуждается предельный переход решения возмущенной задачи к решению вырожденной.

В [137, стр. 141–143] для математической модели с трехтепловыми переменными движения легковой машины по неровной дороге решается задача Калмановской фильтрации при помощи фильтров Калмана меньшего порядка.

Если в модели однозвенного робота-манипулятора [232] величины моментов инерции для двигателя и звена имеют различный порядок малости, то получаем сингулярно возмущенную систему с двухтепловыми быстрыми движениями. Группы роботов, характеризующиеся разнотемповыми быстрыми движениями, рассматривались в [233].

Методами теории сингулярных возмущений в [234] изучаются многотемповые системы с неопределенностями, возникающими при моделировании автономных подводных аппаратов, являющихся важным инструментом для морских изысканий, исследования портов, обнаружения мин и прокладки подводных трубопроводов. Задачи управления и анализ устойчивости для таких аппаратов с динамикой, ограниченной горизонтальной плоскостью, представлены в [235].

Статья [236] посвящена моделированию различных переходных процессов для системы преобразования энергии ветра на основе синхронного генератора с постоянными магнитами. При этом используются сингулярно возмущенные системы с трехтемповыми переменными. Такого типа системы применяются также в [237] при изучении гибких ветряных турбин.

В [238] представлен обзор работ, связанных с приложением теории сингулярно возмущенных задач с несколькими малыми параметрами к изучению динамики летательных аппаратов, при этом рассмотрены несколько моделей самолетов и ракет. Уравнения движения с трехтемповыми переменными приведены в [239, 240]. В [241, стр. 221–290; 242, 243] на основе декомпозиции исходной системы с последующим построением составной функции Ляпунова изучается устойчивость нелинейной трехтемповой системы, возникающей при моделировании динамики вертолета. Гироскопическая стабилизация космических летательных аппаратов, движение которых описывается многотемповыми переменными, рассматривается в [117]. Используя теорию сингулярных возмущений для трехтемповой системы, описывающей движение гиперзвукового воздушного летательного аппарата, в [244] предложен эффективный метод управления, обеспечивающий возможность восстановления после сбоя. Управление нелинейными четырехтемповыми моделями самолета с неопределенностями и беспилотного летательного аппарата изучаются соответственно в [245, 246], а трехтемповая модель, описывающая регулирование вертикальным положением радиоуправляемого вертолета, — в [247].

В [248] рассматривается приближение нулевого порядка для решения задачи быстрого действия в плоской задаче перехвата, в которой используется нелинейная система дифференциальных уравнений для трехтемповых переменных.

Системы с трехтемповыми переменными появляются и при анализе одной модели дофаминергических нейронов в [249], а также в модели, состоящей из пары взаимосвязанных систем Морриса–Лекара [250].

В модели вирусной эволюции возникает начально-краевая задача с трехтемповыми переменными для сингулярно возмущенной системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, содержащей два малых параметра при производных. Асимптотическое решение такой задачи при помощи метода пограничных функций построено в [251].

В [252] рассматриваются линейно-квадратичные задачи оптимального управления на бесконечном промежутке с дешевыми управлениями двух раз-

личных порядков малости, получившиеся в результате линеаризации эпидемической модели (SIRC). С помощью решения матричного алгебраического уравнения Риккати находится оптимальное управление в форме обратной связи. Используемые в численных расчетах параметры основаны на клинических наблюдениях.

Теория сингулярных возмущений применяется в [253] при изучении динамики биологической модели Розенцвейга–Макартура для тритрофной пищевой цепи в случае хищников двух типов.

Трехтемповые переменные появляются и в модели лесного вредителя [254]. Вредитель питается старыми деревьями и растет быстро, молодые деревья — в среднем темпе, а старые — в медленном.

Описание социально-экономической модели транснациональной корпорации, представляющей собой линейную иерархическую трехуровневую систему Центр–Регионы–Предприятия, где Центр характеризуется медленным темпом, а Предприятия — сверхбыстрым, приведено в [255]. Обсуждается возможность декомпозиции исходной системы на три подсистемы. Задаче управления производственной моделью, содержащей процессы с тремя масштабами изменения скорости, посвящена статья [256].

В [257] рассматривается сеточная аппроксимация решения и его производной на конечной области, содержащей переходный слой, для сингулярно возмущенного уравнения Блэка–Шоулза с негладкими начальными данными, возникающего при математическом моделировании в финансовой математике. При этом порядок изменения скорости у пограничного и внутреннего слоев разный.

11. Заключение

Как видно из раздела “Приложения”, имеется значительный интерес к прикладным задачам с разнотемповыми быстрыми переменными. Идеи А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузова и А.М. Ильина, впервые построивших асимптотику решения для некоторых классов такого рода задач, продолжают развиваться в разных направлениях и широко использоваться на практике.

Приведенный в этой статье список публикаций не претендует на абсолютную полноту. Просим прощения у авторов, чьи работы по теме статьи не были упомянуты.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам статьи за указание полезной информации, а также А.В. Влаховой, Н.В. Воропаевой, А.Р. Данилину, М.Г. Дмитриеву, Ю.Е. Гликлиху, В.Г. Задорожному, А.И. Калинину, О.О. Коврижных, А.С. Костенко, К.Н. Кудрявцеву, Д.А. Макарову, М.Е. Семенову, Н.Т. Хоай, О.Б. Цехан и G. Marinoschi за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

2. *Воропаева Н.В., Соболев В.А.* Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. М.: Физматлит, 2009.
3. *Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У.* Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М.: Мир, 1983.
Doolan E.P., Miller J.J.H., Schilders W.H.A. Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers. Dublin: Boole Press, 1980.
4. *Дмитриев М.Г., Клишевич А.М.* Итерационные методы решения сингулярно возмущенных краевых задач условно устойчивого типа // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 12. С. 1812–1823.
Dmitriev M.G., Klishevich A.M. Iterative Methods for Solving Singularly Perturbed Boundary Value Problems of Conditionally Stable Type // USSR Comput. Math. Math. Phys. 1987. V. 27. Iss. 6. P. 137–144.
5. *Васильева А.Б.* Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных // УМН. 1963. Т. XVIII. Вып. 3(111). С. 15–86.
Vasil'eva A.B. Asymptotic Behaviour of Solutions to Certain Problems Involving Non-linear Differential Equations Containing a Small Parameter Multiplying the Highest Derivatives // Russian Math. Surveys. 1963. V. 18. No. 3. P. 13–84.
6. *Kokotovic P.V., O'Malley R.E. Jr., Sannuti P.* Singular Perturbations and Order Reduction in Control Theory — An Overview // Automatica. 1976. V. 12. P. 123–132.
7. *Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техн. Сер. Матем. анализ. 1982. Т. 20. С. 3–77.
Vasil'eva A.B., Dmitriev M.G. Singular Perturbations in Optimal Control Problems // J. Soviet Mathematics. 1986. V. 34. P. 1579–1629.
<https://doi.org/10.1007/BF01262406>
8. *Курина Г.А., Долгополова Е.Ю.* Сингулярные возмущения в задачах управления. Библиогр. указатель (1982–2002). Воронеж: ВГЛТА, 2004.
9. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // АиТ. 2006. № 1. С. 3–51.
Dmitriev M.G., Kurina G.A. Singular Perturbations in Control Problems // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 1. P. 1–43.
<https://doi.org/10.1134/S0005117906010012>
10. *Zhang Y., Naidu D.S., Cai C., Zou Y.* Singular Perturbation and Time Scales in Control Theory and Applications: an Overview 2002–2012 // Int. J. Inf. Syst. Sci. 2014. V. 9. No. 1. P. 1–36.
11. *Kurina G.A., Dmitriev M.G., Naidu D.S.* Discrete Singularly Perturbed Control Problems (A Survey) // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B: Appl. Algorithms. 2017. V. 24. P. 335–370.
[https://www.semanticscholar.org/paper/Discrete-singularly-perturbed-control-problems-\(A-Kurina-Dmitriev/f4a005e6d3045c169ff54df3ffcc56598b271233](https://www.semanticscholar.org/paper/Discrete-singularly-perturbed-control-problems-(A-Kurina-Dmitriev/f4a005e6d3045c169ff54df3ffcc56598b271233)
12. *Бояринцев Ю.Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1980.
13. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск: Наука, 2003.

14. *Kunkel P., Mehrmann V.* Differential-Algebraic Equations Analysis and Numerical Solution. Zürich: EMS Publishing House, 2006. <https://doi.org/10.4171/017>
15. *Duan G.-R.* Analysis and Design of Descriptor Linear Systems. New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, 2010. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6397-0>
16. *Lamour R., März R., Tischendorf C.* Differential-Algebraic Equations: A Projector Based Analysis. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-27555-5>
17. *Курина Г.А.* Сингулярные возмущения задач управления с уравнением состояния, не разрешенным относительно производной. Обзор // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1992. № 4. С. 20–48.
Kurina G.A. Singular Perturbations of Control Problems with Equation of State not Solved for the Derivative (a Survey) // J. Comput. Syst. Sci. Int. 1993. V. 31. No. 6. P. 17–45.
18. *Abed E.H.* On Multiparameter Singularly Perturbed Discrete-Time Systems // Proc. 26th IEEE Conf. Decision and Control. Los Angeles, California, USA, 1987. P. 2104–2105. <https://doi.org/10.1109/CDC.1987.272925>.
<https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/4049669>
19. *Вуйтович М.* Метод дифференцирования по параметру при решении нелинейных уравнений // Нелинейная динамика и управление. М.: Физматлит, 2007. Вып. 5. С. 213–218.
20. *Хорошун А.С.* О стабилизации верхнего положения равновесия маятника вращением инерциального маховика // Прикл. механика. 2016. Т. 52. № 5. С. 125–136.
Khoroshun A.S. Stabilization of the Upper Equilibrium Position of a Pendulum by Spinning an Inertial Flywheel // Int. Appl. Mech. 2016. V. 52. No. 5. P. 547–556. <https://doi.org/10.1007/s10778-016-0775-1>
21. *Хорошун А.С.* О стабилизации поступательных движений вращением эксцентрикового маховика // Прикл. механика. 2018. Т. 54. № 5. С. 123–135.
Khoroshun A.S. Stabilization of Translation by an Eccentric Flywheel // Int. Appl. Mech. 2018. V. 54. No. 5. P. 600–610. <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0914-y>
22. *Kokotovic P.V.* Subsystems, Time Scales and Multimodeling // IFAC Proceedings Volumes. 1980. V. 13. Iss. 6. P. xxvii–xxxiii. [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)64778-5](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)64778-5)
23. *Saksena V.R., O'Reilly J., Kokotovic P.V.* Singular Perturbations and Time-Scale Methods in Control Theory: Survey 1976–1983 // Automatica. 1984. V. 20. No. 3. P. 273–293. [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(84\)90044-X](https://doi.org/10.1016/0005-1098(84)90044-X)
24. *Mukaidani H., Dragan V.* Control of Deterministic and Stochastic Systems with Several Small Parameters — a Survey // Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl. 2009. V. 1. No. 1. P. 112–158.
25. *Васильева А.Б.* О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры // Матем. сб. 1952. Т. 31(73). № 3. С. 587–644.
26. *Тихонов А.Н.* О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры // Матем. сб. Новая серия. 1950. Т. 27(69). № 1. С. 147–156.
27. *Градштейн И.С.* Дифференциальные уравнения, в которых множителями при производных входят различные степени малого параметра // Докл. АН СССР. 1952. Т. LXXXII. № 1. С. 5–8.

28. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Матем. сб. 1952. Т. 31(73). № 3. С. 575–586.
29. *Градштейн И.С.* Применение теории устойчивости А.М. Ляпунова к теории дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных // Матем. сб. 1953. Т. 32(74). № 2. С. 263–286.
30. *Тихонов А.Н.* Сборник научных трудов в 10 томах; РАН. Т. 1. Математика (в 2 ч.). Часть 1. М.: Наука, 2012.
31. *Hoppensteadt F.* Stability in Systems with Parameter // J. Math. Anal. Appl. 1967. V. 18. P. 129–134. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(67\)90187-4](https://doi.org/10.1016/0022-247X(67)90187-4)
32. *Hoppensteadt F.* On Systems of Ordinary Differential Equations with Several Parameters Multiplying the Derivatives // J. Different. Equat. 1969. V. 5. P. 106–116. [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(69\)90106-5](https://doi.org/10.1016/0022-0396(69)90106-5)
33. *Градштейн И.С.* О решениях на временной полупрямой дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных // Матем. сб. 1953. Т. 32(74). № 3. С. 533–544.
34. *Harris W.A. Jr.* Singular Perturbations of Two-Point Boundary Problems for Systems of Ordinary Differential Equations // Arch. Ration. Mech. Anal. 1960. V. 5. P. 212–225. <https://doi.org/10.1007/BF00252904>
35. *Козловская Т.Д.* Краевая задача для систем условно устойчивого типа с различными малыми параметрами при старших производных // Дифференц. уравнения. 1973. Т. IX. № 5. С. 832–845.
36. *Grammel G.* On Nonlinear Control Systems with Multiple Time Scales // J. Dyn. Control Syst. 2004. V. 10. No. 1. P. 11–28. <https://doi.org/10.1023/B:JODS.0000012015.69096.f1>
37. *Бутузов В.Ф., Неделько И.В.* О формировании решения с внутренним слоем в параболической системе с разными степенями малого параметра // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 3. С. 356–367.
Butuzov V.F., Nedelko I.V. On the Formation of a Solution with an Internal Layer in a Parabolic System with Different Powers of a Small Parameter // Different. Equat. 2004. V. 40. No. 3. P. 382–395. <https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000035776.65916.d7>
38. *Cheng B., Ju Q., Schochet S.* Three-Scale Singular Limits of Evolutionary PDEs // Arch. Ration. Mech. Anal. 2018. V. 229. P. 601–625. <https://doi.org/10.1007/s00205-018-1233-5>
39. *Perjan A., Rusu G.* Convergence Estimates for Abstract Second Order Differential Equations with Two Small Parameters and Monotone Nonlinearities // Topol. Methods Nonlinear Anal. 2019. V. 54. No. 2B. P. 1093–1110. <https://doi.org/10.12775/TMNA.2019.089>
40. *Васильева А.Б.* О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры // Автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1951.
41. *Васильева А.Б.* Асимптотические формулы для решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих при производных параметры различных порядков малости // Докл. АН СССР. 1959. Т. 128. № 6. С. 1110–1113.
42. *Васильева А.Б.* Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных // Дисс. докт. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1961.

43. *Васильева А.Б.* Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1963. Т. 3. № 4. С. 611–642.
Vasil'eva A.B. Asymptotic Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations with Small Parameters Multiplying the Highest Derivatives // Comput. Math. Math. Phys. 1963. V. 3. Iss. 4. P. 823–863.
44. *O'Malley R.E. Jr.* On Initial Value Problems for Nonlinear Systems of Differential Equations with Two Small Parameters // Arch. Ration. Mech. Anal. 1971. V. 40. P. 209–222. <https://doi.org/10.1007/BF00281482>
45. *Huang Wei-zhang, Chen Yu-sen.* Initial Layer Phenomena for a Class of Singular Perturbed Nonlinear System with Slow Variables // Appl. Math. Mech. 2004. V. 25. No. 7. P. 836–844. <https://doi.org/10.1007/bf02437577>
46. *Кузьмина Р.П.* Асимптотические методы для обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2003.
Kuzmina R.P. Asymptotic Methods for Ordinary Differential Equations. Dordrecht: Springer, 2000.
47. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.
Wasow W. Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations. New York, London, Sydney: A Division of Jonh Wiley & Sons. Inc., 1965.
48. *Wasow W.* Periodic Singular Perturbations of Ordinary Differential Equations // Тр. Междунар. симпозиума по нелинейным колебаниям Международного союза по теоретической и прикладной механике. Киев 12–18 сентября 1961. Аналитические методы теории нелинейных колебаний. Т. I. Киев, 1963. С. 172–180.
49. *O'Malley R.E. Jr.* Two-Parameter Singular Perturbation Problems for Second-Order Equations // J. Math. Mech. 1967. V. 16. No. 10. P. 1143–1164.
50. *O'Malley R.E. Jr.* Singular Perturbations of Boundary Value Problems for Linear Ordinary Differential Equations Involving Two Parameters // J. Math. Anal. Appl. 1967. V. 19. P. 291–308. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(67\)90124-2](https://doi.org/10.1016/0022-247X(67)90124-2)
51. *O'Malley R.E. Jr.* Introduction to Singular Perturbations. New York and London: Academic Press Inc., 1974.
52. *Шшишкин Г.И.* Первая краевая задача для уравнения второго порядка с малыми параметрами при производных // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 376–378.
53. *Ильин А.М., Коврижных О.О.* Асимптотика решения системы линейных уравнений с двумя малыми параметрами // Докл. АН. 2004. Т. 396. № 1. С. 23–24.
54. *Коврижных О.О.* Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной системы линейных уравнений // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 10. С. 1322–1331.
Kovrizhnykh O.O. Asymptotic Expansion of a Solution of a Singularly Perturbed System of Linear Equations // Different. Equat. 2005. V. 41. No. 10. P. 1392–1402. <https://doi.org/10.1007/s10625-005-0291-2>
55. *Данилин А.Р., Коврижных О.О.* Об асимптотике решения системы линейных уравнений с двумя малыми параметрами // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 6. С. 738–747.
Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. On the Asymptotics of the Solution of a System of Linear Equations with Two Small Parameters // Different. Equat. 2008. V. 44. No. 6. P. 757–767. <https://doi.org/10.1134/S0012266108060025>

56. *Коврижных О.О.* Об асимптотическом решении сингулярно возмущенной системы с двумя малыми параметрами // Тр. ИММ УрО РАН. 2007. Т. 13. № 2. С. 124–134.
Kovrizhnykh O.O. On an Asymptotic Solution of a Singularly Perturbed System with Two Small Parameters // Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl). 2007. V. 259. Suppl. 2. P. S178–S189. <https://doi.org/10.1134/S0081543807060120>
57. *O'Malley R.E. Jr.* Boundary Value Problems for Linear Systems of Ordinary Differential Equations Involving Many Small Parameters // J. Math. Mech. 1969. V. 18. No. 9. P. 835–855.
58. *Ladde G.S., Rajalakshmi S.G.* Diagonalization and Stability of Multi-Time-Scale Singularly Perturbed Linear Systems // Appl. Math. Comput. 1985. V. 16. P. 115–140. [https://doi.org/10.1016/0096-3003\(85\)90003-7](https://doi.org/10.1016/0096-3003(85)90003-7)
59. *Ladde G.S., Rajalakshmi S.G.* Singular Perturbations of Linear Systems with Multiparameters and Multiple Time Scales // J. Math. Anal. Appl. 1988. V. 129. P. 457–481.
60. *Kathirkamanayagan M., Ladde G.S.* Singularly Perturbed Linear Boundary Value Problems // J. Math. Anal. Appl. 1992. V. 168. P. 430–459.
[https://doi.org/10.1016/0022-247X\(92\)90171-9](https://doi.org/10.1016/0022-247X(92)90171-9)
61. *Prljaca N., Gajic Z.* General Transformation for Block Diagonalization of Multi Time-scale Singularly Perturbed Linear Systems // Proc. 2007 American Control Conf. New York, 2007. P. 1670–1675.
62. *Cherevko I., Osypova O.* Asymptotic Decomposition of Linear Singularly Perturbed Multiscale Systems // Miskolc Math. Notes. 2015. V. 16. No. 2. P. 729–745.
<https://doi.org/10.18514/MMN.2015.1627>
63. *Kodra K., Zhong N.* Singularly Perturbed Modeling and LQR Controller Design for a Fuel Cell System // Energies. 2020. 13. 2735. <https://doi.org/10.3390/en13112735>
64. *Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т., Мельникова А.А.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 11. С. 1983–2003.
Butuzov V.F., Levashova N.T., Mel'nikova A.A. Steplike Contrast Structure in a Singularly Perturbed System of Equations with Different Powers of Small Parameter // Comput. Math. Math. Phys. 2012. V. 52. No. 11. P. 1526–1546.
<https://doi.org/10.1134/S096554251211005X>
65. *Roos H.-G.* Special Features of Strongly Coupled Systems of Convection-Diffusion Equations with Two Small Parameters // Appl. Math. Lett. 2012. V. 25. Iss. 8. P. 1127–1130. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2012.02.018>
66. *Campbell S.L., Rose N.J.* Singular Perturbation of Autonomous Linear Systems III // Houston J. Math. 1978. V. 4. No. 4. P. 527–539.
67. *Жукова Г.С.* Асимптотическое интегрирование обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1988.
68. *Krupa M., Popović N., Kopell N.* Mixed-Mode Oscillations in Three Time-Scale Systems: A Prototypical Example // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2008. V. 7. No. 2. P. 361–420. <https://doi.org/10.1137/070688912>
69. *Бутузов В.Ф., Деркунова Е.А.* О сингулярно возмущенной системе уравнений в частных производных первого порядка с разными степенями малого параметра // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 6. С. 775–789.

- Butuzov V.F., Derkunova E.A.* On a Singularly Perturbed System of First-Order Partial Differential Equations with Various Degrees of a Small Parameter // *Different. Equat.* 2006. V. 42. No. 6. P. 826–841.
<https://doi.org/10.1134/S0012266106060073>
70. *Деркунова Е.А.* Об одной сингулярно возмущенной системе трех уравнений в частных производных первого порядка // *Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер.: Матем. Мех. Физ.* 2012. Вып. 7. С. 153–156.
71. *Бутузов В.Ф.* Об асимптотике решений сингулярно возмущенных уравнений эллиптического типа в прямоугольной области // *Дифференц. уравнения.* 1975. Т. XI. № 6. С. 1030–1041.
72. *Бутузов В.Ф.* Сингулярно возмущенное уравнение эллиптического типа с двумя малыми параметрами // *Дифференц. уравнения.* 1976. Т. XII. № 10. С. 1793–1803.
73. *Бутузов В.Ф., Неделько И.В.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе эллиптических уравнений с разными степенями малого параметра // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2000. Т. 40. № 6. С. 877–899.
Butuzov V.F., Nedelko I.V. A Steplike Contrast Structure in a Singularly Perturbed System of Elliptic Equations with Different Power of a Small Parameter // *Comput. Math. Math. Phys.* 2000. V. 40. No. 6. P. 837–859.
74. *Бутузов В.Ф., Нестеров А.В.* Об асимптотике решения уравнения параболического типа с малыми параметрами при старших производных // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 1982. Т. 22. № 4. С. 865–870.
Butuzov V.F., Nesterov A.V. The Asymptotics of a Solution of an Equation of Parabolic Type with Small Parameters Multiplying the Highest Derivatives // *USSR Comput. Math. Math. Phys.* 1982. V. 22. No. 4. P. 100–105.
[https://doi.org/10.1016/0041-5553\(82\)90011-8](https://doi.org/10.1016/0041-5553(82)90011-8)
75. *Naidu D.S., Rao A.K.* Singular Perturbation Analysis of Discrete Control Systems. *Lecture Notes in Math.* V. 1154. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
<https://doi.org/10.1007/BFb0074760>
76. *Naidu D.S.* Singular Perturbation Methodology in Control Systems. *IEEE Control Eng. Ser.* V. 34. London: Peter Peregrinus Ltd, 1988.
77. *Krishnarayalu M.S., Naidu D.S.* Singular Perturbation Method for Boundary Value Problems in Two-Parameter Discrete Control Systems // *Int. J. Syst. Sci.* 1988. V. 19. No. 10. P. 2131–2143. <https://doi.org/10.1080/00207728808964105>
78. *Naidu D.S., Krishnarayalu M.S.* Singular Perturbation Method for Initial Value Problems in Two-Parameter Discrete Control Systems // *Int. J. Syst. Sci.* 1987. V. 18. Iss. 12. P. 2197–2208. <https://doi.org/10.1080/00207728708967181>
79. *Kishore Babu G., Krishnarayalu M.S.* An Application of Discrete Two Parameter Singular Perturbation Method // *Int. J. Eng. Res. Technol.* 2012. V. 1. Iss. 10. P. 1–10.
80. *Kishor Babu G., Krishnarayalu M.S.* Application of Singular Perturbation Method to Two Parameter Discrete Power System Model // *J. Control Instrument. Eng.* 2017. V. 3. Iss. 3. P. 1–13.
81. *Kishor Babu G., Krishnarayalu M.S.* Discrete Multi Parameter Singular Perturbation Method with Power System Application // *Int. J. Recent Techn. Eng.* 2019. V. 8. Iss. 2. P. 236–244. <https://doi.org/10.35940/ijrte.A3081.078219>

82. *O’Riordan E., Pickett M.L., Shishkin G.I.* Singularly Perturbed Problems. Modeling Reaction-Convection-Diffusion Processes // *Comput. Methods Appl. Math.* 2003. V. 3. No. 3. P. 424–442. <https://doi.org/10.2478/cmam-2003-0028>
83. *O’Riordan E., Pickett M.L.* Numerical Approximations to the Scaled First Derivatives of the Solution to a Two Parameter Singularly Perturbed Problem // *J. Comput. Appl. Math.* 2019. V. 347. P. 128–149. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.08.004>
84. *Zhang J., Lv Y.* High-Order Finite Element Method on a Bakhvalov-Type Mesh for a Singularly Perturbed Convection-Diffusion Problem with Two Parameters // *Appl. Math. Comput.* 2021. V. 397. 125953. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.125953>
85. *Khandelwal P., Khan A.* Singularly Perturbed Convection-Diffusion Boundary Value Problems with Two Small Parameters Using Nonpolynomial Spline Technique // *Math. Sci.* 2017. V. 11. No. 2. P. 119–126. <https://doi.org/10.1007/s40096-017-0215-3>
86. *Chandru M., Prabha T., Shanthi V.* A Parameter Robust Higher Order Numerical Method for Singularly Perturbed Two Parameter Problems with Non-Smooth Data // *J. Comput. Appl. Math.* 2017. V. 309. P. 11–27. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.06.009>
87. *Tikhovskaya S.V., Korbut M.F.* Two-Grid Algorithm for the Solution of Singularly Perturbed Two-Parameter Problem on Shishkin Mesh // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2019. V. 1210. 012142. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1210/1/012142>
88. *Rao S.C.S., Chawla S.* Parameter-Uniform Convergence of a Numerical Method for a Coupled System of Singularly Perturbed Semilinear Reaction-Diffusion Equations with Boundary and Interior Layers // *J. Comput. Appl. Math.* 2019. V. 352. P. 223–239. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.11.021>
89. *O’Riordan E., Pickett M.L., Shishkin G.I.* Parameter-Uniform Finite Difference Schemes for Singularly Perturbed Parabolic Diffusion-Convection-Reaction Problems // *Math. Comp.* 2006. V. 75. No. 255. P. 1135–1154. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-06-01846-1>
90. *Das P., Mehrmann V.* Numerical Solution of Singularly Perturbed Convection-Diffusion-Reaction Problems with Two Small Parameters // *BIT Numer. Math.* 2016. V. 56. Iss. 1. P. 51–76. <https://doi.org/10.1007/s10543-015-0559-8>
91. *Шшишкин Г.И.* Сеточная аппроксимация сингулярно возмущенных параболических уравнений при наличии слабых и сильных переходных слоев, порождаемых разрывной правой частью // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2006. Т. 46. № 3. С. 407–420.
Shishkin G.I. Grid Approximation of Singularly Perturbed Parabolic Equations in the Presence of Weak and Strong Transient Layers Induced by a Discontinuous Right-Hand Side // *Comput. Math. Math. Phys.* 2006. V. 46. No. 3. P. 388–401. <https://doi.org/10.1134/S0965542506030067>
92. *Шшишкин Г.И.* Сеточная аппроксимация сингулярно возмущенного эллиптического уравнения с конвективными членами при наличии различных типов пограничных слоев // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2005. Т. 45. № 1. С. 110–125.
Shishkin G.I. Grid Approximation of a Singularly Perturbed Elliptic Equation with Convective Terms in the Presence of Various Boundary Layers // *Comput. Math. Math. Phys.* 2005. V. 45. No. 1. P. 104–119.

93. *Shishkin G.* Multiscale Problems with Various Boundary Layers for PDE'S in Unbounded Domains // *Math. Model. Anal. Proc. 10th Int. Conf. MMA2005 & CMAM2.* Trakai, 2005. P. 251–257.
94. *Kalaiselvan S.S., Miller J.J.H., Sigamani V.* A Parameter Uniform Numerical Method for a Singularly Perturbed Two-Parameter Delay Differential Equation // *Appl. Numer. Math.* 2019. V. 145. P. 90–110.
<https://doi.org/10.1016/j.apnum.2019.05.028>
95. *Govindarao L., Sahu S.R., Mohapatra J.* Uniformly Convergent Numerical Method for Singularly Perturbed Time Delay Parabolic Problem with Two Small Parameters // *Iran. J. Sci. Technol. Trans. A: Sci.* 2019. V. 43. Iss. 5. P. 2373–2383.
<https://doi.org/10.1007/s40995-019-00697-2>
96. *Sumit, Kumar S., Kuldeep, Kumar M.* A Robust Numerical Method for a Two-Parameter Singularly Perturbed Time Delay Parabolic Problem // *Comput. Appl. Math.* 2020. V. 39. Article number: 209.
<https://doi.org/10.1007/s40314-020-01236-1>
97. *Chandru M., Das P., Ramos H.* Numerical Treatment of Two-Parameter Singularly Perturbed Parabolic Convection Diffusion Problems with Non-Smooth Data // *Math. Methods Appl. Sci.* 2018. V. 41. P. 5359–5387.
<https://doi.org/10.1002/mma.5067>
98. *Kumar D., Kumari P.* Uniformly Convergent Scheme for Two-Parameter Singularly Perturbed Problems with Non-Smooth Data // *Numer. Methods Partial Different. Equat.* 2020. V. 37. P. 796–817. <https://doi.org/10.1002/num.22553>
99. *Brdar M., Franz S., Roos H.-G.* Numerical Treatment of Singularly Perturbed Fourth-Order Two-Parameter Problems // *Electron. Trans. Numer. Anal.* 2019. V. 51. P. 50–62. https://doi.org/10.1553/etna_vol51s50
100. *Das P., Rana S., Vigo-Aguiar J.* Higher Order Accurate Approximations on Equidistributed Meshes for Boundary Layer Originated Mixed Type Reaction Diffusion Systems with Multiple Scale Nature // *Appl. Numer. Math.* 2020. V. 148. P. 79–97. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2019.08.028>
101. *Roos H.-G., Schopf M.* Layer Structure and the Galerkin Finite Element Method for a System of Weakly Coupled Singularly Perturbed Convection-Diffusion Equations with Multiple Scales // *ESAIM: Math. Model. Numer. Anal. M2AN.* 2015. V. 49. No. 5. P. 1525–1547. <https://doi.org/10.1051/m2an/2015027>
102. *Khalil H.K., Kokotovic P.V.* Control of Linear Systems with Multiparameter Singular Perturbations // *Automatica.* 1979. V. 15. Iss. 2. P. 197–207.
[https://doi.org/10.1016/0005-1098\(79\)90070-0](https://doi.org/10.1016/0005-1098(79)90070-0)
103. *Khalil H.K., Kokotovic P.V.* D-Stability and Multi-Parameter Singular Perturbation // *SIAM J. Control Optim.* 1979. V. 17. No. 1. P. 56–65.
<https://doi.org/10.1137/0317006>
104. *Ladde G.S., Šiljak D.D.* Multiparameter Singular Perturbations of Linear Systems with Multiple Time Scales // *Automatica.* 1983. V. 19. No. 4. P. 385–394.
[https://doi.org/10.1016/0005-1098\(83\)90052-3](https://doi.org/10.1016/0005-1098(83)90052-3)
105. *Grujić L.T.* Singular Perturbations, Large-Scale Systems and Asymptotic Stability of Invariant Sets // *Int. J. Syst. Sci.* 1979. V. 10. No. 12. P. 1323–1341.
<https://doi.org/10.1080/00207727908941662>
106. *Grujić L.T.* Singular Perturbations and Large-Scale Systems // *Int. J. Control.* 1979. V. 29. No. 1. P. 159–169. <https://doi.org/10.1080/00207177908922687>

107. *Tellili A., Abdelkrim N., Challouf A., Abdelkrim M.N.* Adaptive Fault Tolerant Control of Multi-time-scale Singularly Perturbed Systems // *Int. J. Autom. Comput.* 2018. V. 15. No. 6. P. 736–746. <https://doi.org/10.1007/s11633-016-0971-9>
108. *Khalil H.K.* Asymptotic Stability of Nonlinear Multiparameter Singularly Perturbed Systems // *Automatica.* 1981. V. 17. No. 6. P. 797–804. [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(81\)90067-4](https://doi.org/10.1016/0005-1098(81)90067-4)
109. *Воропаева Н.В., Соболев В.А.* Декомпозиция многотемповых систем. Самара: СМС, 2000.
110. *Hsiao F.-H., Pan S.-T., Teng C.-C.* D-Stability Bound Analysis for Discrete Multiparameter Singularly Perturbed Systems // *IEEE Trans. Circuits Syst.–I: Fundamental Theory and Applications.* 1997. V. 44. No. 4. P. 347–351. <https://doi.org/10.1109/81.563624>
111. *Chiou J.-S., Wang C.-J.* An Infinite ε -Bound Stability Criterion for a Class of Multiparameter Singularly Perturbed Time-Delay Systems // *Int. J. Syst. Sci.* 2005. V. 36. No. 8. P. 485–490. <https://doi.org/10.1080/00207720500156421>
112. *Abed E.H., Tits A.L.* On the Stability of Multiple Time-Scale Systems // *Int. J. Control.* 1986. V. 44. No. 1. P. 211–218. <https://doi.org/10.1080/00207178608933591>
113. *Abed E.H.* Decomposition and Stability of Multiparameter Singular Perturbation Problems // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1986. V. AC-31. No. 10. P. 925–934. <https://doi.org/10.1109/TAC.1986.1104130>
114. *Abed E.H.* New Results in Multiparameter Singular Perturbations // *Proc. 25th Conf. Decision and Control.* Athens, Greece, 1986. P. 1385–1387. <https://doi.org/10.1109/CDC.1986.267612>
115. *Desoer C.A., Shahruz S.M.* Stability of Nonlinear Systems with Three Time Scale // *Circuits Syst. Signal Proc.* 1986. V. 5. No. 4. P. 449–464. <https://doi.org/10.1007/BF01599620>
116. *Miladzhanov V.G.* Stability of Singular Large-Scale Systems in the Presence of Structural Perturbations // *Int. Appl. Mech.* 1993. V. 29. P. 480–486. <https://doi.org/10.1007/BF00846912>
117. *Martyynyuk A.A., Miladzhanov V.G.* Stability Theory of Large-Scale Dynamical Systems. bookboon.com, 2014.
118. *Cardin P.T., Teixeira M.A.* Fenichel Theory for Multiple Time Scale Singular Perturbation Problems // *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2017. V. 16. No. 3. P. 1425–1452. <https://doi.org/10.1137/16M1067202>
119. *Cardin P.T., Teixeira M.A.* A Geometric Singular Perturbation Theory Approach to Constrained Differential Equations // *Math. Nachr.* 2019. V. 292. Iss. 4. P. 892–904. <https://doi.org/10.1002/mana.201700444>
120. *Abed E.H., Silva-Madriz R.I.* Stability of Systems with Multiple Very Small and Very Large Parasitics // *IEEE Trans. Circuits Syst.* 1987. V. CAS-34. No. 9. P. 1107–1110. <https://doi.org/10.1109/TCS.1987.1086248>
121. *Khalil H.K.* Stabilization of Multiparameter Singularly Perturbed Systems // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1979. V. 24. No. 5. P. 790–791. <https://doi.org/10.1109/TAC.1979.1102145>
122. *Khalil H.K.* Asymptotic Stability of Non-linear Multiparameter Singularly Perturbed Systems // *IFAC Control Science and Technology (8th Triennial World Congress),* Kyoto, Japan. 1981. P. 137–142.

123. *Dmitriev M., Makarov D.* Stabilization of Quasilinear Systems with Multiparameter Singular Perturbations // 13th Int. Conf. Management of Large-Scale System Development (MLSD). 2020. <https://doi.org/10.1109/MLSD49919.2020.9247844>
124. *Шнилевая О.Я.* Исследование разнотемповых процессов в адаптивной системе // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 6. С. 55–61.
125. *Dontchev A.L.* Time-Scale Decomposition of the Reachable Set of Constrained Linear Systems // Math. Control Signal Syst. 1992. V. 5. P. 327–340.
126. *Abed E.H., Silva-Madriz R.I.* Controllability of Multiparameter Singularly Perturbed Systems // IFAC 10th Triennial World Congress. Munich, FRG, 1987. P. 127–130.
127. *Kekang X., Zhenquan W.* D-controllability and Strong D-controllability and Control of Multiparameter and Multiple Time-Scale Singularly Perturbed Systems / Syst. Analysis and Simulation I. Advances in Simulation. V. 1. New York: Springer. 1988. P. 255–258. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-6389-7_53
128. *Kekang X., Zhenquan W.* D-controllability and Control of Multiparameter and Multiple Time-Scale Singularly Perturbed Systems // J. Syst. Sci. Math. Sci. 1989. V. 2. No. 3. P. 243–251.
129. *Курина Г.А.* О полной управляемости разнотемповых сингулярно возмущенных систем // Матем. заметки. 1992. Т. 52. Вып. 4. С. 56–61.
Kurina G.A. Complete Controllability of Various-Speed Singularly Perturbed Systems // Math. Notes. 1992. V. 52. No. 4. P. 1029–1033.
<https://doi.org/10.1007/BF01210436>
130. *Копейкина Т.Б.* Управляемость разнотемповых сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений // Тр. БГТУ. Сер. 3: Физ.-мат. науки и информатика. 2011. № 6. С. 7–11.
131. *Кириллова Ф.М., Чуракова С.В.* Относительная управляемость линейных динамических систем с запаздыванием // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174. № 6. С. 1260–1263.
132. *Копейкина Т.Б., Грекова А.В.* Управляемость существенно разнотемповых сингулярно возмущенных динамических систем // Наука и техника. 2013. № 5. С. 75–82.
133. *Семенова М.М.* Декомпозиция многотемповых моделей управляемых и наблюдаемых систем // Изв. Самар. научного центра РАН. Информатика, вычислительная техника и управление. 2020. Т. 22. № 1. С. 93–97.
134. *Белокопытов С.В., Дмитриев М.Г.* Решение классических задач оптимального управления с погранслоем // АиТ. 1989. № 7. С. 71–82.
Belokopytov S.V., Dmitriev M.G. Solution of Classical Optimal Control Problems with a Boundary Layer // Autom. Remote Control. 1989. V. 50. No. 7. P. 907–917.
135. *Mukaidani H.* A Numerical Algorithm for Finding Solution of Sign-Indefinite Algebraic Riccati Equations for General Multiparameter Singularly Perturbed Systems // Appl. Math. Comput. 2007. V. 189. Iss. 1. P. 255–270.
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.11.088>
136. *Wang Y-Y., Frank P.M., Wu N.E.* Near-Optimal Control of Nonstandard Singularly Perturbed Systems // Automatica. 1994. V. 30. No. 2. P. 277–292.
[https://doi.org/10.1016/0005-1098\(94\)90030-2](https://doi.org/10.1016/0005-1098(94)90030-2)
137. *Gajić Z., Lim M.* Optimal Control of Singularly Perturbed Linear Systems and Applications. High-Accuracy Techniques. Control Engineering Series. Marcel Dekker, 2000.

138. *Coumarbatch C., Gajić Z.* Exact Decomposition of the Algebraic Riccati Equation of Deterministic Multimodeling Optimal Control Problems // IEEE Trans. Automat. Control. 2000. V. 45. No. 4. P. 790–794. <https://doi.org/10.1109/9.847124>
139. *Mukaidani H., Xu H., Mizukami K.* New Results for Near-Optimal Control of Linear Multiparameter Singularly Perturbed Systems // Automatica. 2003. V. 39. P. 2157–2167. [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(03\)00248-6](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(03)00248-6)
140. *Mukaidani H., Xu H., Mizukami K.* Feedback Control of Linear Multiparameter Singularly Perturbed Systems // IFAC 15th Triennial World Congress. Barcelona, Spain, 2002.
141. *Mukaidani H., Shimomura T., Xu H.* Near-Optimal Control of Linear Multiparameter Singularly Perturbed Systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2002. V. 47. No. 12. P. 2051–2057. <https://doi.org/10.1109/TAC.2002.805676>
142. *Mahmoud M.S., Hassan M.F., Singh M.G.* Approximate Feedback Design for a Class of Singularly Perturbed Systems // IEE Proceedings D (Control Theory and Applications). 1982. V. 129. No. 2. P. 49–56. <https://doi.org/10.1049/ip-d.1982.0011>
143. *Drăgan V., Halanay A.* Suboptimal Stabilization of Linear Systems with Several Time Scales // Int. J. Control. 1982. V. 36. Iss. 1. P. 109–126. <https://doi.org/10.1080/00207178208932879>
144. *Prljaca N., Gajić Z.* A Method for Optimal Control and Filtering of Multitime-Scale Linear Singularly-Perturbed Stochastic Systems // Automatica. 2008. V. 44. P. 2149–2156. <https://doi.org/10.1016/j.automat.2007.12.001>
145. *Radisavljević-Gajić V., Milanović M., Rose P.* Multi-Stage and Multi-Time Scale Feedback Control of Linear Systems with Applications to Fuel Cells. Mechanical Engineering Series. Cham, Switzerland: Springer, 2019. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-10389-7>
146. *Калашникова М.А., Курина Г.А.* Асимптотика решения трехтемповой задачи оптимального управления // Тр. XII Всерос. сов. по проблемам управления. Москва, ВСПУ 2014. М.: ИПУ РАН, 2014. С. 1560–1570.
147. *Калашникова М.А., Курина Г.А.* Асимптотическое решение линейно-квадратичных задач с дешевыми управлениями разной цены // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22. № 1. С. 124–139.
148. *Калашникова М.А.* Асимптотика приближения нулевого порядка решения трехтемповой линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Моделирование и анализ информационных систем. 2015. Т. 22. № 1. С. 85–104.
149. *Калашникова М.А., Курина Г.А.* Приближения любого порядка асимптотического решения трехтемповой линейно-квадратичной задачи оптимального управления методом прямой схемы // Вест. ВГУ. Сер.: Системный анализ и информационные технологии. 2018. № 3. С. 33–43. <https://doi.org/10.17308/sait.2018.3/1228>
150. *Yuan Y., Sun F., Hu Y.* Decentralized Multi-objective Robust Control of Interconnected Fuzzy Singular Perturbed Model with Multiple Perturbation Parameters // WCCI 2012 IEEE World Congress on Computational Intelligence. Brisbane, Australia, 2012. <https://doi.org/10.1109/FUZZ-IEEE.2012.6251367>
151. *Krishnarayalu M.S.* Singular Perturbation Method Applied to the Open-Loop Discrete Optimal Control Problem with Two Small Parameters // Int. J. Syst. Sci. 1989. V. 20. No. 5. P. 793–809. <https://doi.org/10.1080/00207728908910170>

152. *Kishore Babu G., Krishnarayalu M.S.* Suboptimal Control of Singularly Perturbed Two Parameter Discrete Control System // Int. Electr. Eng. J. 2014. V. 5. No. 11. P. 1594–1604.
153. *Kishore Babu G., Krishnarayalu M.S.* Suboptimal Control of Singularly Perturbed Multiparameter Discrete Control System // 2015 IEEE Int. Conf. on Power, Instrumentation, Control and Computing. Thrissur, India, 2015.
<https://doi.org/10.1109/PICC.2015.7455794>
154. *Kishore Babu G.* Singular Perturbation Method for Boundary Value and Optimal Problems to Power Factor Correction Converter Application // WSEAS Trans. Electronics. 2020. V. 11. P. 42–53. <https://doi.org/10.37394/232017.2020.11.6>
155. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе П.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
156. *Drăgan V.* Cheap Control with Several Scales // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 1988. V. 33. No. 8. P. 663–677.
157. *Kurina G., Kalashnikova M.* High Order Asymptotic Solution of Linear-Quadratic Optimal Control Problems under Cheap Controls with Two Different Costs // 21st Int. Conf. Syst. Theory, Control and Computing. Sinaia, 2017. P. 499–504.
<https://doi.org/10.1109/ICSTCC.2017.8107083>
158. *Калашникова М.А., Курина Г.А.* Прямая схема асимптотического решения линейно-квадратичных задач с дешевыми управлениями разной цены // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 1. С. 83–102.
Kalashnikova M.A., Kurina G.A. Direct Scheme for the Asymptotic Solution of Linear-Quadratic Problems with Cheap Controls of Different Costs // Differ. Equat. 2019. V. 55. No. 1. P. 84–104. <https://doi.org/10.1134/S0012266119010099>
159. *Kalashnikova M., Kurina G.* Estimates of Asymptotic Solution of Linear-Quadratic Optimal Control Problems with Cheap Controls of Two Different Orders of Smallness // Math. Numer. Aspects Dynam. Syst. Anal. DSTA. Lodz, 2017. P. 253–264.
160. *Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Об одной задаче теории сингулярных возмущений // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 10. С. 1736–1747.
161. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во МГУ, 1978.
Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. Singularly Perturbed Equations in the Critical Case. Madison: University of Wisconsin-Madison, 1980.
162. *Курина Г.А., Хоай Н.Т.* Проекторный подход к алгоритму Бутузова-Нефедова асимптотического решения одного класса сингулярно возмущенных задач в критическом случае // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 12. С. 2073–2084. <https://doi.org/10.31857/S0044466920120078>
Kurina G.A., Hoai N.T. Projector Approach to the Butuzov-Nefedov Algorithm for Asymptotic Solution of a Class of Singularly Perturbed Problems in a Critical Case // Comput. Math. Math. Phys. 2020. V. 60. No. 12. P. 2007–2018.
<https://doi.org/10.1134/S0965542520120076>
163. *O'Malley R.E. Jr.* A Singular Singularly-Perturbed Linear Boundary Value Problem // SIAM. J. Math. Anal. 1979. V. 10. No. 4. P. 695–708.
164. *Kurina G., Nguyen T.H.* Zero-Order Asymptotic Solution of a Class of Singularly Perturbed Linear-Quadratic Problems with Weak Controls in a Critical Case // Optim. Control Appl. Meth. 2019. V. 40. Iss. 5. P. 859–879.
<https://doi.org/10.1002/oca.2514>

165. *Букжалева Е.Е.* Сингулярно возмущенное уравнение с погранслоинным решением, растянутые переменные которого зависят от различных степеней параметра возмущения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 12. С. 1775–1785.
Bukzhalev E.E. A Singularly Perturbed Equation with a Boundary-Layer Solution whose Expanded Variables Depend on Various Powers of a Perturbation Parameter // Comput. Math. Math. Phys. 2003. V. 43. No. 12. P. 1707–1717.
166. *Васильева А.Б., Давыдова М.А.* Сингулярно возмущенное уравнение второго порядка с малыми параметрами при первой и второй производных // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т. 39. № 9. С. 1504–1512.
Vasil'eva A.B., Davydova M.A. Singularly Perturbed Second-Order Equation with Small Parameters Multiplying the First and Second Derivatives // Comput. Math. Math. Phys. 1999. V. 39. No. 9. P. 1441–1448.
167. *Капустина Т.О.* Асимптотика по малым параметрам для решения параболической задачи с разрывными данными // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 1. С. 124–125.
Kapustina T.O. Asymptotics with Respect to Small Parameters of the Solution of a Parabolic Problem with Discontinuous Data // Different. Equat. 2001. V. 37. No. 1. P. 138–140. <https://doi.org/10.1023/A:1019236818987>
168. *Букжалева Е.Е., Васильева А.Б.* Решения сингулярно возмущенного параболического уравнения с внутренними и пограничными слоями, зависящими от растянутых переменных разного порядка // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 3. С. 424–437.
Bukzhalev E.E., Vasil'eva A.B. Solutions to a Singularly Perturbed Parabolic Equation with Internal and Boundary Layers Depending on Stretched Variables of Different Orders // Comput. Math. Math. Phys. 2007. V. 47. No. 3. P. 407–419.
169. *Васильева А.Б.* Об особенностях решений сингулярно возмущенных краевых задач при слиянии корней вырожденного уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 4. С. 554–561.
Vasil'eva A.B. On Singularities of Solutions of Singularly Perturbed Boundary Value Problems when the Roots of a Degenerate Equation Merge // Comput. Math. Math. Phys. 2003. V. 43. No. 4. P. 529–536.
170. *Бутузов В.Ф.* Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущенных задачах с кратным корнем вырожденного уравнения // Матем. заметки. 2013. Т. 94. № 1. С. 68–80. <https://doi.org/10.4213/mzm10106>
Butuzov V.F. On the Special Properties of the Boundary Layer in Singularly Perturbed Problems with Multiple Root of the Degenerate Equation // Math. Notes. 2013. V. 94. P. 60–70. <https://doi.org/10.1134/S0001434613070067>
171. *Бутузов В.Ф.* О зависимости структуры пограничного слоя от краевых условий в сингулярно возмущенной краевой задаче с кратным корнем вырожденного уравнения // Матем. заметки. 2016. Т. 99. Вып. 2. С. 201–214. <https://doi.org/10.4213/mzm10832>
Butuzov V.F. On the Dependence of the Structure of Boundary Layers on the Boundary Conditions in a Singularly Perturbed Boundary-Value Problem with Multiple Root of the Related Degenerate Equation // Math. Notes. 2016. V. 99. No. 2. P. 210–221. <https://doi.org/10.1134/S0001434616010247>
172. *Бутузов В.Ф.* Об одной сингулярно возмущенной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с кратным корнем вырожденного уравнения //

- Нелінійні коливання. 2018. Т. 21. № 1. С. 6–28.
- Butuzov V.F.* On One Singularly Perturbed System of Ordinary Differential Equations with Multiple Root of the Degenerate Equation // *J. Math. Sci.* 2019. V. 240. No. 3. P. 224–248. <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04350-6>
173. *Бутузов В.Ф.* Асимптотика решения системы сингулярно возмущенных уравнений в случае кратного корня вырожденного уравнения // *Дифференц. уравнения*. 2014. Т. 50. № 2. С. 175–186.
- Butuzov V.F.* Asymptotics of the Solution of a System of Singularly Perturbed Equations in the Case of a Multiple Root of the Degenerate Equation // *Different. Equat.* 2014. V. 50. No. 2. P. 177–188. <https://doi.org/10.1134/S0012266114020050>
174. *Бутузов В.Ф.* О сингулярно возмущенных системах ОДУ с кратным корнем вырожденного уравнения // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2020. Т. 84. № 2. С. 60–89. <https://doi.org/10.4213/im8829>
- Butuzov V.F.* On Singularly Perturbed Systems of ODE with a Multiple Root of the Degenerate Equation // *Izv. Math.* 2020. V. 84. No. 2. P. 262–290. <https://doi.org/10.1070/IM8829>
175. *Бутузов В.Ф., Бычков А.И.* Асимптотика решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного параболического уравнения в случае трехкратного корня вырожденного уравнения // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2016. Т. 56. № 4. С. 605–624. <https://doi.org/10.7868/S0044466916040074>
- Butuzov V.F., Bychkov A.I.* Asymptotics of the Solution to an Initial Boundary Value Problem for a Singularly Perturbed Parabolic Equation in the Case of a Triple Root of the Degenerate Equation // *Comput. Math. Math. Phys.* 2016. V. 56. No. 4. P. 593–611. <https://doi.org/10.1134/S0965542516040060>
176. *Бутузов В.Ф.* О периодических решениях сингулярно возмущенных параболических задач в случае кратных корней вырожденного уравнения // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2011. Т. 51. № 1. С. 44–55.
- Butuzov V.F.* On Periodic Solutions to Singularly Perturbed Parabolic Problems in the Case of Multiple Roots of the Degenerate Equation // *Comput. Math. Math. Phys.* 2011. V. 51. No. 1. P. 40–50. <https://doi.org/10.1134/S0965542511010064>
177. *Бутузов В.Ф.* Об асимптотике решения сингулярно возмущенной параболической задачи с многозонным внутренним переходным слоем // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2018. Т. 58. № 6. С. 961–987. <https://doi.org/10.7868/S0044466918060108>
- Butuzov V.F.* On Asymptotics for the Solution of a Singularly Perturbed Parabolic Problem with a Multizone Internal Transition Layer // *Comput. Math. Math. Phys.* 2018. V. 58. No. 6. P. 925–949. <https://doi.org/10.1134/S0965542518060040>
178. *Butuzov V.F., Nefedov N.N., Recke L., Schneider K.R.* Existence, Asymptotics, Stability and Region of Attraction of a Periodic Boundary Layer Solution in Case of a Double Root of the Degenerate Equation // *Comput. Math. Math. Phys.* 2018. V. 58. No. 12. P. 1989–2001. <https://doi.org/10.1134/S0965542518120072>
179. *Бутузов В.Ф.* Асимптотика решения частично диссипативной системы уравнений с многозонным пограничным слоем // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2019. Т. 59. № 10. С. 1731–1751. <https://doi.org/10.1134/S0044466919100053>
- Butuzov V.F.* Asymptotic Expansion of the Solution to a Partially Dissipative System of Equations with a Multizone Boundary Layer // *Comput. Math. Math. Phys.* 2019. V. 59. No. 10. P. 1672–1692. <https://doi.org/10.1134/S0965542519100051>
180. *Ильин А.М.* Избранные научные труды. Математика. Челябинск: Изд-во Челябин. гос. ун-та, 2018.

181. *Ильин А.М.* Пограничный слой // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем. Фундам. направления. 1988. Т. 34. С. 175–213.
182. *Ильин А.М., Хачай О.Ю.* Структура пограничных слоев в сингулярных задачах // Докл. АН. 2012. Т. 445. № 3. С. 256–258.
Il'in A.M., Khachai O.Yu. Structure of Boundary Layers in Singular Problems // Dokl. Math. 2012. V. 86. No. 1. P. 497–499.
<https://doi.org/10.1134/S1064562412040187>
183. *Данилин А.Р., Захаров С.В., Коврижных О.О., Леликова Е.Ф., Першин И.В., Хачай О.Ю.* Екатеринбургское наследие Арлена Михайловича Ильина // Тр. ИММ Уро РАН. 2017. Т. 23. № 2. С. 42–66.
<https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-2-42-66>
184. *Ильин А.М., Леликова Е.Ф.* Метод сращивания асимптотических разложений для уравнения $\varepsilon \Delta u - a(x, y)u_y = f(x, y)$ в прямоугольнике // Матем. сб. 1975. Т. 96(138). № 4. С. 568–583.
185. *Ильин А.М., Данилин А.Р.* Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009.
186. *Бутузова М.В.* Асимптотика решения бисингулярной задачи для системы линейных параболических уравнений. I // Моделирование и анализ информационных систем. 2013. Т. 20. № 1. С. 5–17.
<https://doi.org/10.18255/1818-1015-2013-1-5-17>
187. *Krishnarayalu M.S.* Singular Perturbation Methods for a Class of Initial and Boundary Value Problems in Multi-Parameter Classical Digital Control Systems // ANZIAM J. 2004. V. 46. P. 67–77. <https://doi.org/10.1017/S1446181100013675>
188. *Калинин А.И.* Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем. Минск: УП “Экоперспектива”, 2000.
189. *Грибковская И.В., Калинин А.И.* Асимптотика решения задачи быстрогодействия для линейной сингулярно возмущенной системы, содержащей при производных параметры различных порядков малости // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 8. С. 1275–1284.
Gribkovskaya I.V., Kalinin A.I. Asymptotic Behavior of the Solution of the Time Optimality Problem for a Linear Singularly Perturbed System that Contains Parameters of Variable Orders of Smallness at the Derivatives // Differ. Equat. 1995. V. 31. No. 8. P. 1219–1228.
190. *Грибковская И.В., Калинин А.И.* Асимптотическая оптимизация линейной сингулярно возмущенной системы, содержащей при производных параметры различных порядков малости // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. № 9. С. 1299–1312.
Gribkovskaya I.V., Kalinin A.I. Asymptotic Optimization of a Linear Singularly Perturbed System Containing Parameters of Different Orders of Smallness in the Derivatives // Comput. Math. Math. Phys. 1995. V. 35. No. 9. P. 1041–1051.
191. *Калинин А.И., Грибковская И.В.* Асимптотическая оптимизация линейных динамических систем, содержащих при производных параметры различных порядков малости // Вест. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Матем. Информат. 1996. № 3. С. 52–55.
192. *Грибковская И.В., Калинин А.И.* Асимптотически оптимальный регулятор для линейной динамической системы, содержащей при производных параметры различных порядков малости // Изв. АН. Теория и системы управления. 1997. № 4. С. 78–82.

193. *Gaitsgory V., Nguyen M.-T.* Averaging of Three Time Scale Singularly Perturbed Control Systems // *Syst. Control Lett.* 2001. V. 42. P. 395–403.
[https://doi.org/10.1016/S0167-6911\(00\)00111-0](https://doi.org/10.1016/S0167-6911(00)00111-0)
194. *Gaitsgory V., Nguyen M.-T.* Multiscale Singularly Perturbed Control Systems: Limit Occupational Measures Sets and Averaging // *SIAM J. Control Optim.* 2002. V. 41. No. 3. P. 954–974. <https://doi.org/10.1137/S0363012901393055>
195. *Mukaidani H.* Pareto Near-Optimal Strategy of Multimodeling Systems // *IECON'01. 27th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society.* 2001. V. 1. P. 500–505. <https://doi.org/10.1109/IECON.2001.976533>
196. *Khalil H.K., Kokotović P.V.* Control Strategies for Decision Makers Using Different Models of the Same System // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1978. V. 23. No. 2. P. 289–298. <https://doi.org/10.1109/TAC.1978.1101712>
197. *Pan Z., Başar T.* Multi-Time Scale Zero-Sum Differential Games with Perfect State Measurements // *Dynam. Control.* 1995. V. 5. P. 7–29.
<https://doi.org/10.1109/CDC.1993.325835>
198. *Khalil H.K.* Multimodel Design of a Nash Strategy // *J. Optim. Theory Appl.* 1980. V. 31. No. 4. P. 553–564. <https://doi.org/10.1007/BF00934477>
199. *Mukaidani H., Xu H.* Near-Optimal Nash Strategy for Multiparameter Singularly Perturbed Systems // *43rd IEEE Conf. on Decision and Control.* Atlantis, Paradise Island, Bahamas, 2004. P. 4868–4873. <https://doi.org/10.1109/CDC.2004.1429568>
200. *Mukaidani H.* A New Design Approach for Solving Linear Quadratic Nash Games of Multiparameter Singularly Perturbed Systems // *IEEE Trans. Circuits Syst.–I. Regular Papers.* 2005. V. 52. No. 5. P. 960–974.
<https://doi.org/10.1109/TCSI.2005.846668>
201. *Mukaidani H.* Local Uniqueness for Nash Solutions of Multiparameter Singularly Perturbed Systems // *IEEE Trans. Circuits Syst. II: Express Briefs.* 2006. V. 53. No. 10. P. 1103–1107. <https://doi.org/10.1109/TCSII.2006.882211>
202. *Mukaidani H., Xu H., Dragan V.* Soft-Constrained Stochastic Nash Games for Multimodeling Systems via Static Output Feedback Strategy // *Joint 48th IEEE Conf. Decision and Control and 28th Chinese Control Conf.* Shanghai, P.R. China, 2009. P. 5786–5791. <https://doi.org/10.1109/CDC.2009.5400302>
203. *Sagara M., Mukaidani H., Dragan V.* Near-Optimal Control for Multiparameter Singularly Perturbed Stochastic Systems // *Optim. Control Appl. Methods.* 2011. V. 32. Iss. 1. P. 113–125. <https://doi.org/10.1002/oca.934>
204. *Dragan V.* Near Optimal Linear Quadratic Regulator for Controlled Systems Described by Itô Differential Equations with Two Fast Time Scales // *Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl.* 2017. V. 9. No. 1. P. 89–109.
205. *Drăgan V.* On the Linear Quadratic Optimal Control for Systems Described by Singularly Perturbed Itô Differential Equations with Two Fast Time Scales // *Axioms.* 2019. 8. 30. <https://doi.org/10.3390/axioms8010030>
206. *Саясов Ю.С., Васильева А.Б.* Обоснование и условия применимости метода квазистационарных концентраций Семенова-Боденштейна // *Журн. физ. химии.* 1955. Т. 29. № 5. С. 802–808.
207. *Eilertsen J., Stroberg W., Schnell S.* Characteristic, Completion or Matching Timescales? An Analysis of Temporary Boundaries in Enzyme Kinetics // *J. Theoret. Biol.* 2019. V. 481. P. 28–43. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2019.01.005>

208. *Kruff N., Walcher S.* Coordinate-Independent Singular Perturbation Reduction for Systems with Three Time Scales // *Math. Biosci. Eng.* 2019. V.16. Iss. 5. P. 5062–5091. <https://doi.org/10.3934/mbe.2019255>
209. *Kodra K., Zhong N., Gajić Z.* Multi-time-scale Systems Control via Use of Combined Controllers // 2016 Eur. Control Conf. Aalborg, Denmark, 2016. P. 2638–2643. <https://doi.org/10.1109/ECC.2016.7810688>
210. *Milanovic M., Radisavljevic-Gajic V.* Multi-Timescale-Based Partial Optimal Control of a Proton-Exchange Membrane Fuel Cell // *Energies*. 2020. V. 13. Iss. 1. 166. <https://doi.org/10.3390/en13010166>
211. *Jayanthi S., Del Vecchio D.* Retroactivity Attenuation in Bio-Molecular Systems Based on Timescale Separation // *IEEE Trans. Automat. Control*. 2011. V. 56. No. 4. P. 748–761. <https://doi.org/10.1109/TAC.2010.2069631>
212. *Ильин А.М., Каменкович В.М.* О структуре пограничного слоя в двумерной теории океанических течений // *Океанология*. 1964. Т. 4. Вып. 5. С. 756–769.
213. *Drăgan V., Halanay A.* Stability Problems for Synchronous Machines by Singular Perturbation Methods // *Rev. Roum. Sci. Techn.-Electrotechn. Energ.* 1982. V. 27. No. 2. P. 199–209.
214. *Meng X., Wang Q., Zhou N., Xiao S., Chi Y.* Multi-Time Scale Model Order Reduction and Stability Consistency Certification of Inverter-Interfaced DG System in AC Microgrid // *Energies*. 2018. V. 11. Iss. 1. 254. <https://doi.org/10.3390/en11010254>
215. *Munje R., Lin S., Zhang G., Zhang W.* Observer-Based Output Feedback Integral Control for Coal-Fired Power Plant: A Three-Time-Scale Perspective // *IEEE Trans. Control Syst. Tech.* 2020. V. 28. Iss. 2. P. 601–608. <https://doi.org/10.1109/TCST.2018.2879045>
216. *Семенова М.М.* Декомпозиция задач устойчивости линейных многотемповых систем // *Матем. моделирование и краевые задачи. Тр. Всерос. науч. конф.* 2004. Часть 3. С. 192–194.
217. *Chen Y., Liu Y.* Summary of Singular Perturbation Modeling of Multi-time Scale Power Systems // 2005 IEEE/PES Transmission and Distribution Conference & Exhibition: Asia and Pacific. Dalian, China, 2005. P. 1–4. <https://doi.org/10.1109/TDC.2005.1546882>. <https://ieeexplore.ieee.org/document/1546882>
218. *Shen F., Ju P., Shahidehpour M., Li Z., Wang C., Shi X.* Singular Perturbation for the Dynamic Modeling of Integrated Energy Systems // *IEEE Trans. on Power Systems*. 2020. V. 35. Iss. 3. P. 1718–1728. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2019.2953672>
219. *Юркевич В.Д.* Синтез нелинейных нестационарных систем управления с разнотемповыми процессами. СПб.: Наука, 2000.
220. *Французова Г.А.* Синтез систем экстремального регулирования // *Научный вестник НГТУ*. 2011. № 2(43). С. 47–58.
221. *González G.A., Barrera N.G., Ayala G., Padilla J.A., Alvarado D.Z.* Quasi-Steady-State Models of Three Timescale Systems: A Bond Graph Approach // *Math. Probl. Eng.* 2019. Article ID 9783740. <https://doi.org/10.1155/2019/9783740>
222. *Shimjith S.R., Tiwari A.P., Bandyopadhyay B.* Lecture Notes in Control and Information Sciences. Modeling and Control of a Large Nuclear Reactor. A Three-Time-Scale Approach. Berlin, Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer-Verlag, 2013. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-30589-4>

223. *Sazhin S.S., Feng G., Heikal M.R., Goldfarb I., Gol'dstein V., Kuzmenko G.* Thermal Ignition Analysis of a Monodisperse Spray with Radiation // *Combustion and Flame*. 2001. V. 124. Iss. 4. P. 684–701.
[https://doi.org/10.1016/S0010-2180\(00\)00237-6](https://doi.org/10.1016/S0010-2180(00)00237-6)
224. *Соболев В.А., Щепаккина Е.А.* Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. М.: Физматлит, 2010.
225. *Ханин Я.И.* Основы динамики лазеров. М.: Наука, Физматлит, 1999.
226. *Jamshidi M.* Three-Stage Near-Optimum Design of Nonlinear-Control Processes // *Proc. Inst. Elect. Engin.* 1974. V. 121. No. 8. P. 886–892.
<https://doi.org/10.1049/piee.1974.0205>
227. *Кубышкин Е.П., Хребтюгова О.А.* Обобщенное решение одной начально-краевой задачи, возникающей в механике дискретно-континуальных систем // *Моделирование и анализ информационных систем*. 2012. Т. 19. № 1. С. 84–96.
<https://doi.org/10.18255/1818-1015-2012-1-84-96>
228. *Влахова А.В., Новозhilов И.В.* О заносе колесного экипажа при “блокировке” и “пробуксовке” одного из колес // *Фундамент. и прикл. матем.* 2005. Т. 11. № 7. С. 11–20.
Vlakhova A.V., Novozhilov I.V. On Skidding of a Wheeled Vehicle when One of the Wheels Locks or Slips // *J. Math. Sci.* 2007. V. 146. P. 5803–5810.
<https://doi.org/10.1007/s10958-007-0396-7>
229. *Влахова А.В., Новодерова А.П.* Моделирование заноса аппарата с повернутыми передними колесами // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2019. № 1. С. 23–49.
<https://doi.org/10.1134/S0572329919010112>
Vlakhova A.V., Novoderova A.P. The Skidding Modeling of an Apparatus with Turned Front Wheels // *Mech. Solids*. 2019. V. 54. P. 19–38.
<https://doi.org/10.3103/S0025654419010023>
230. *Влахова А.В.* Математические модели движения колесных аппаратов. Москва-Ижевск: АНО “Ижев. ин-т компьют. исслед.”, 2014.
231. *Влахова А.В.* К оценке опасности схода железнодорожного экипажа при вкатывании гребня колеса на рельс // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2015. № 1. С. 25–41.
Vlakhova A.V. Risk Assessment of Flange Climb Derailment of a Rail Vehicle // *Mech. Solids*. 2015. V. 50. No. 1. P. 19–32.
<https://doi.org/10.3103/S0025654415010033>
232. *Ghadami S.M., Amjadifard R., Khaloozadeh H.* Designing SDRE-Based Controller for a Class of Nonlinear Singularly Perturbed Systems // *Int. J. Robot. Autom.* 2013. V. 4. Iss. 1. P. 1–18.
<https://www.cscjournals.org/library/manuscriptinfo.php?mc=IJRA-85>
233. *Sarkar S., Kar I.N.* Formation of Multiple Groups of Mobile Robots: Multi-Timescale Convergence Perspective // *Nonlinear Dynam.* 2016. V. 85. P. 2611–2627.
<https://doi.org/10.1007/s11071-016-2848-4>
234. *Xia G., Zhang Y., Zhang W., Chen X., Yang H.* Multi-Time-Scale 3-D Coordinated Formation Control for Multi-Underactuated AUV with Uncertainties: Design and Stability Analysis Using Singular Perturbation Methods // *Ocean Engineering*. 2021. V. 230. 109053. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2021.109053>
235. *Lei M., Li Y.* Model-Based Control and Stability Analysis of Underactuated Autonomous Underwater Vehicles Via Singular Perturbations // *J. Comput. Nonlinear*

Dynam. 2020. V. 15. Iss. 6. 061006. Paper. No. CND-19-1446.
<https://doi.org/10.1115/1.4046880>

236. *Ye H., Yue B., Li X., Strunz K.* Modeling and Simulation of Multi-Scale Transients for PMSG-based Wind Power Systems // *Wind Energ.* 2017. V. 20. P. 1349–1364.
<https://doi.org/10.1002/we.2097>
237. *Oulad Ben Zarouala R., Acosta J.Á.* Timescale Separation Via Rayleigh Quotient in Flexible Wind Turbines: a Singularly Perturbed Approach // *Nonlinear Dynam.* 2019. V. 97. P. 2723–2738. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05158-4>
238. *Naidu D.S., Calise A.J.* Singular Perturbations and Time Scales in Guidance and Control of Aerospace Systems: A Survey // *J. Guid. Control Dyn.* 2001. V. 24. No. 6. P. 1057–1078. <https://doi.org/10.2514/2.4830>
239. *Calise A.J.* Singular Perturbation Methods for Variational Problems in Aircraft Flight // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1976. V. AC-21. No. 3. P. 345–353.
<https://doi.org/10.1109/TAC.1976.1101221>
240. *Hao Yang, Hailong Pei.* Two Time-Scale Assignment with State Extension for an Autonomous Helicopter // *Asian J. Control.* 2020. V. 23. Iss. 4. P. 1707–1719.
<https://doi.org/10.1002/asjc.2324>
241. *Roncero S.E.* Three-Time-Scale Nonlinear Control of an Autonomous Helicopter on a Platform. PhD Thesis. Sevilla: Universidad de Sevilla, 2011.
<https://doi.org/10.13140/RG.2.1.4530.8881>.
https://www.researchgate.net/publication/265013409_Three-Time-Scale_Nonlinear_Control_of_an_Autonomous_Helicopter_on_a_Platform
242. *Esteban S., Vazquez R., Gordillo F., Aracil J.* Singular Perturbation Stability Analysis for a Three-Time-Scale Autonomous Helicopter // *Proc. 2nd Int. Conf. Advances in Control and Optimization of Dynamic Systems.* Bangalore, India, 2012.
243. *Esteban S., Gordillo F., Aracil J.* Three-Time Scale Singular Perturbation Control and Stability Analysis for an Autonomous Helicopter on a Platform // *Int. J. Robust Nonlinear Control.* 2013. V. 23. Iss. 12. P. 1360–1392.
<https://doi.org/10.1002/rnc.2823>
244. *Ren W., Jiang B., Yang H.* Singular Perturbation-Based Fault-Tolerant Control of the Air-Breathing Hypersonic Vehicle // *IEEE/ASME Trans. on Mechatronics.* 2019. V. 24. Iss. 6. P. 2562–2571. <https://doi.org/10.1109/TMECH.2019.2946645>
245. *Saha D., Valasek J., Leshikar C., Reza M.M.* Multiple-Timescale Nonlinear Control of Aircraft with Model Uncertainties // *J. Guidance, Control, Dynam.* 2020. V. 43. No. 3. P. 1–17. <https://doi.org/10.2514/1.G004303>
246. *Garcia-Baquero L., Esteban S., Raffo G.V.* Singular Perturbation Control for the Longitudinal and Lateral-Directional Flight Dynamics of a UAV // *IFAC-PapersOnLine.* 2018. V. 51. Iss. 12. P. 124–129.
<https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.07.099>
247. *Esteban S., Aracil J., Gordillo F.* Three-Time Scale Singular Perturbation Control for a Radio-Control Helicopter on a Platform // *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit.* San Francisco, California, 2005. 6236.
<https://doi.org/10.2514/6.2005-6236>
248. *Hepner S.A.R.* Analysis of the Planar Intercept and Tracking Problem by Application of Optimal Control and Singular Perturbation Theory. Doctoral Thesis. Diss. ETH. No. 8170. Zurich: ETH, 1986. <https://doi.org/10.3929/ethz-a-000409856>

249. *Krupa M., Popović N., Kopell N., Rotstein H.G.* Mixed-Mode Oscillations in a Three Time-Scale Model for the Dopaminergic Neuron // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2008. V. 18. Iss. 1. 015106.
<https://doi.org/10.1063/1.2779859>
250. *Nan P., Wang Y., Kirk V., Rubin J.E.* Understanding and Distinguishing Three-Time-Scale Oscillations: Case Study in a Coupled Morris-Lecar System // *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2015. V. 14. No. 3. P. 1518–1557.
<https://doi.org/10.1137/140985494>
251. *Арчибасов А.А., Коробейников А., Соболев В.А.* Асимптотические разложения решений в сингулярно возмущенной модели вирусной эволюции // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2015. Т. 55. № 2. С. 242–252.
<https://doi.org/10.7868/S0044466915020039>
Archibasov A.A., Korobeinikov A., Sobolev V.A. Asymptotic Expansions of Solutions in a Singularly Perturbed Model of Virus Evolution // *Comput. Math. Math. Phys.* 2015. V. 55. No. 2. P. 240–250. <https://doi.org/10.1134/S0965542515020037>
252. *Di Giamberardino P., Iacoviello D.* A Linear Quadratic Regulator for Nonlinear SIRC Epidemic Model // 23rd Int. Conf. System Theory, Control and Computing. Sinaia, Romania, 2019. P. 733–738. <https://doi.org/10.1109/ICSTCC.2019.8885727>
253. *Cardin P.T., da Silva P.R., Teixeira M.A.* Three Time Scale Singular Perturbation Problems and Nonsmooth Dynamical Systems // *Quart. Appl. Math.* 2014. V. 72. No. 4. P. 673–687. <https://doi.org/10.1090/S0033-569X-2014-01360-X>
254. *Brøns M., Desroches M., Krupa M.* Mixed-Mode Oscillations Due to a Singular Hopf Bifurcation in a Forest Pest Model // *Math. Popul. Stud. An Int. J. of Mathematical Demography*. 2015. V. 22. Iss. 2. P. 71–79.
<https://doi.org/10.1080/08898480.2014.925344>
255. *Грибковская И.В., Дмитриев М.Г.* Управляемость в больших социально-экономических системах с позиции разделения движений // *Теория активных систем. Тр. междунар. научно-практической конф. “Управление большими системами – 2011”*. Том II. ИПУ РАН Москва, Россия, 2011. P. 93–96.
256. *Jiang J., Lou S.X.C.* Production Control of Manufacturing Systems: A Multiple Time Scale Approach // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1994. V. 39. No. 11. P. 2292–2297. <https://doi.org/10.1109/9.333779>
257. *Li S., Shishkin G.I., Shishkina L.P.* Approximation of the Solution and Its Derivative for the Singularly Perturbed Black-Scholes Equation with Nonsmooth Initial Data // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2007. Т. 47. № 3. С. 460–480.
Li S., Shishkin G.I., Shishkina L.P. Approximation of the Solution and Its Derivative for the Singularly Perturbed Black-Scholes Equation with Nonsmooth Initial Data // *Comput. Math. Math. Phys.* 2007. V. 47. No. 3. P. 442–462.
<https://doi.org/10.1134/S0965542507030098>

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.В. Кузнецовым.

Поступила в редакцию 12.12.2021

После доработки 25.05.2022

Принята к публикации 28.07.2022

© 2022 г. Б.Т. ПОЛЯК, д-р техн. наук (boris@ipu.ru),
М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;
Национальный исследовательский университет
“Московский физико-технический институт”, Москва)

НОВЫЕ КРИТЕРИИ НАСТРОЙКИ ПИД-РЕГУЛЯТОРОВ¹

Предлагается новый подход к задаче настройки и оптимизации параметров ПИД-регулятора, основанный на сведении проблемы к задаче оптимизации. При этом качество регулятора оценивается по квадратичному критерию от выхода системы: ПИД-регулятор настраивается против неопределенности в начальных условиях так, чтобы выход системы был равномерно малым; при этом дополнительно гарантируется заданная степень устойчивости замкнутой системы. Выписан градиентный метод для отыскания параметров ПИД-регулятора.

Как показывают многочисленные примеры, предлагаемая рекуррентная процедура является весьма эффективной и приводящей к вполне удовлетворительным по инженерным критериям качества ПИД-регуляторам. Статья продолжает серию работ авторов, посвященную синтезу обратной связи в задачах управления с позиций оптимизации.

Ключевые слова: линейная система, ПИД-регулятор, оптимизация, уравнение Ляпунова, градиентный метод, сходимость.

DOI: 10.31857/S0005231022110022, EDN: KDYNHU

1. Введение

Теория ПИД-регуляторов имеет 80-летнюю историю, восходя к работе [1] Циглера и Николса 1942 г. С тех пор появилось множество работ, посвященных теории и практике их настройки, были предложены различные принципы их настройки (см., например, [2]). Здесь можно упомянуть монографии [3–6] и многие другие. Однако до настоящего времени есть не так много работ, где формулируются явные критерии оптимальности ПИД-регуляторов, например такие, как H_∞ -оптимальность [7, 8].

В целом регуляторы низкого порядка настраивают по самым разным критериям, используя при этом, как правило, подбор, прямой поиск, перебор по сетке и т.п., см., например, [9, 10]. В настоящей работе предлагается новый подход к настройке ПИД-регуляторов, а именно предлагается как новая

¹ Исследование выполнено при частичной поддержке Российского научного фонда (проект № 21-71-30005).

постановка задачи, решение которой определяет ПИД-регулятор, так и алгоритм ее решения, явным образом выписывая градиент для квадратичного функционала и применяя градиентный метод.

В отличие от упомянутых выше критериев, будем рассматривать в некотором смысле близкую к LQR постановку. А именно, неопределенность содержится не во входах системы, а в начальных условиях, при этом критерий качества близок по своей структуре к LQR-задаче: качество оценивается по квадратичному критерию от выхода системы. Таким образом, искомый ПИД-регулятор настраивается против неопределенности в начальных условиях так, чтобы выход системы был равномерно малым (в квадратичном смысле).

В связи с этим напомним о новых подходах для классической проблемы линейно-квадратичного регулирования. Ее можно рассматривать как задачу оптимизации, где переменной является матрица обратной связи, а минимизируется интегральный квадратичный показатель качества переходного процесса. Градиент такой функции (для управления по состоянию) выписан еще в основополагающей работе Калмана [11], а для обратной связи по выходу — в статье Левина и Атанса [12]. С тех пор неоднократно применялись итеративные методы оптимизации градиентного типа (см., например, обзор [13]), однако обоснование подобных методов появилось лишь недавно в [14–18].

Помимо малости выхода, естественно стремиться к тому, чтобы синтезированный ПИД-регулятор удовлетворял и инженерным критериям качества. Так, если замкнутая система окажется близкой к границе устойчивости, это приведет к ее неудовлетворительной реакции на внешнее возмущение. Поэтому вполне естественно требовать, чтобы ПИД-регулятор дополнительно гарантировал замкнутой системе некоторую (заданную) степень устойчивости.

Настоящая статья продолжает серию работ [18–20], посвященную синтезу обратной связи в задачах управления с позиций оптимизации. Предложенный в ней подход позволяет, с одной стороны, конструктивно решать задачи настройки и оптимизации параметров регулятора, а с другой, он предоставляет “хорошие” по обычным инженерным показателям регуляторы. Как показывают многочисленные примеры, предлагаемая рекуррентная процедура является весьма эффективной и приводящей к вполне удовлетворительным ПИД-регуляторам. Вычислительным аспектам предлагаемого подхода посвящена публикация [22].

Статья организована следующим образом. Раздел 2 содержит постановку задачи; в разделе 3 обсуждается подход к ее решению; в разделе 4 представлен алгоритм решения оптимизационной задачи, а раздел 5 посвящен разнообразным примерам. Раздел 6 содержит обсуждение и возможные обобщения полученных результатов.

Всюду далее $|\cdot|$ — евклидова норма вектора, T — символ транспонирования, tr — след матрицы, I — единичная матрица соответствующей размерности, а $\lambda_i(A)$ — собственные значения матрицы A .

2. Постановка задачи

Рассмотрим SISO-систему управления

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu, & x(0) &= x_0, \\ y &= c^T x, \end{aligned}$$

с состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, выходом $y(t) \in \mathbb{R}$ и управлением $u(t) \in \mathbb{R}$ в виде ПИД-регулятора

$$(2) \quad u(t) = -k_P y(t) - k_I \int_0^t y(\tau) d\tau - k_D \dot{y}(t)$$

с некоторыми числовыми параметрами k_P , k_I и k_D .

Целью является определение параметров $K = (k_P \ k_I \ k_D)$ стабилизирующей обратной связи (2), которая

- а) доставляет замкнутой системе степень устойчивости $\sigma > 0$ и
- б) минимизирует квадратичный функционал

$$(3) \quad J(K) = \mathbb{E}_{x(0)} \int_0^{\infty} y^2(t) dt + \rho |K|^2, \quad \rho > 0.$$

Вторая компонента в (3) представляет собой штраф за величину управления (при этом коэффициент $\rho > 0$ регулирует его важность). Ее наличие позволяет избежать появления больших значений коэффициентов ПИД-регулятора.

Далее будем предполагать, что начальные условия $x(0)$ распределены с нулевым средним и ковариационной матрицей Σ .

3. Сведение к параметрической LQR-задаче

Введем в рассмотрение вспомогательную скалярную переменную z следующим образом:

$$\dot{z} = y, \quad z(0) = 0.$$

Тогда, вводя расширенный вектор состояния

$$g = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

системе (1) можно придать эквивалентный вид

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{g} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ c^T & 0 \end{pmatrix} g + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} u, & g(0) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ y &= (c^T \ 0) g. \end{aligned}$$

При этом согласно (1), (2) имеем:

$$\begin{aligned} u &= -k_P y(t) - k_I \int_0^t y(\tau) d\tau - k_D \dot{y}(t) = \\ &= -k_P c^T x - k_I z - k_D c^T \dot{x} = -k_P c^T x - k_I z - k_D c^T (Ax + bu) = \\ &= -k_P (c^T \ 0) g - k_I (0 \ 1) g - k_D (c^T A \ 0) g - k_D c^T b u, \end{aligned}$$

откуда

$$(1 + k_D c^T b) u = -k_P (c^T \ 0) g - k_I (0 \ 1) g - k_D (c^T A \ 0) g$$

или

$$(5) \quad u = -\frac{k_P}{1 + k_D c^T b} (c^T \ 0) g - \frac{k_I}{1 + k_D c^T b} (0 \ 1) g - \frac{k_D}{1 + k_D c^T b} (c^T A \ 0) g.$$

Если ввести новые переменные

$$k_1 = \frac{k_P}{1 + k_D c^T b}, \quad k_2 = \frac{k_I}{1 + k_D c^T b}, \quad k_3 = \frac{k_D}{1 + k_D c^T b},$$

то (5) примет вид

$$(6) \quad u = -(k_1 c^T + k_3 c^T A \ k_2) g.$$

Замыкая систему (4) обратной связью (6), приходим к замкнутой системе

$$(7) \quad \dot{g} = \begin{pmatrix} A - k_1 b c^T - k_3 b c^T A & -k_2 b \\ c^T & 0 \end{pmatrix} g, \quad g(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которой можно придать вид

$$(8) \quad \dot{g} = (A_0 + k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3) g, \quad g(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ c^T & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -b c^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -b c^T A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом исходные параметры ПИД-регулятора восстанавливаются единственным образом:

$$k_P = \frac{k_1}{1 - k_3 c^T b}, \quad k_I = \frac{k_2}{1 - k_3 c^T b}, \quad k_D = \frac{k_3}{1 - k_3 c^T b}.$$

Замечание 1. Обратим внимание, что если векторы b и c ортогональны, то

$$k_1 = k_P, \quad k_2 = k_I, \quad k_3 = k_D.$$

Как показывают многочисленные примеры, это вполне типичная ситуация, так что — для упрощения записи — все дальнейшие выкладки относятся именно к этому случаю.

Для удобства введем обозначение:

$$\{A, K\} = k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3.$$

Для того, чтобы гарантировать желаемую степень устойчивости $\sigma > 0$ замкнутой системы, введем в ее матрицу компоненту σI :

$$(9) \quad \dot{g} = (A_0 + \{A, K\} + \sigma I)g.$$

В самом деле, для стабилизирующего систему (9) регулятора K матрица $A_0 + \{A, K\} + \sigma I$ является гурвицевой. Отсюда непосредственно вытекает, что

$$\max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A_0 + \{A, K\} + \sigma I) = \max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A_0 + \{A, K\}) + \sigma < 0,$$

т.е. степень устойчивости исходной системы не меньше σ :

$$\max_i \operatorname{Re} \lambda_i(A_0 + \{A, K\}) < -\sigma.$$

Продолжим и перейдем к преобразованию функционала (3). Поскольку

$$x = \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} g,$$

то начальные условия $g(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ будут распределены с нулевым средним и ковариационной матрицей

$$\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По лемме Беллмана для системы (7) имеем:

$$\begin{aligned} J(K) &= \mathbb{E}_{x(0)} \int_0^{\infty} y^2(t) dt + \rho |K|^2 = \\ &= \mathbb{E}_{g(0)} \int_0^{\infty} g^T(t) \begin{pmatrix} cc^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} g(t) dt + \rho |K|^2 = \\ &= \mathbb{E}_{g(0)} g^T(0) Q g(0) + \rho |K|^2 = \operatorname{tr} Q \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \rho |K|^2. \end{aligned}$$

Здесь $Q \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ — решение уравнения Ляпунова

$$(10) \quad A_K^T Q + Q A_K = - \begin{pmatrix} cc^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$A_K = A_0 + \{A, K\} + \sigma I.$$

Сделаем следующее

Предположение. Пусть известен регулятор $K_0 = (k_1^0 \ k_2^0 \ k_3^0)$, стабилизирующий систему с заданным запасом устойчивости σ , т.е. такой, что матрица $A_{K_0} = A_0 + \{A, K_0\} + \sigma I$ гурвицева.

Перейдем к описанию свойств функции $J(K)$.

Лемма 1. Функция $J(K)$ определена и положительна на множестве \mathcal{S} стабилизирующих регуляторов.

Действительно, если матрица A_K гурвицева, то решение $Q \succcurlyeq 0$ уравнения Ляпунова (10) существует; тем самым, определена функция $J(K) > 0$. Множество ее определения \mathcal{S} может быть невыпуклым и несвязным, причем его границы могут быть негладкими.

Перейдем к вычислению градиента функции $J(K)$.

Лемма 2. Функция $J(K)$ определена на множестве стабилизирующих обратных связей K . На этом допустимом множестве она дифференцируема, причем градиент дается выражениями

$$(11) \quad \frac{\partial J(K)}{\partial k_i} = \nabla_i J(K) = 2 \operatorname{tr} Y Q A_i + 2 \rho k_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где матрица Y является решением уравнения Ляпунова

$$(12) \quad A_K Y + Y A_K^T + \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Доказательство этого утверждения приведено в Приложении.

4. Алгоритм решения

Авторы предлагают следующий итеративный подход к решению этой задачи; в его основе лежит применение градиентного метода по переменной K . Приведем принципиальную схему алгоритма.

Алгоритм 1 для минимизации $J(K)$:

1. Задаемся параметрами $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, $0 < \tau < 1$ и начальным стабилизирующим приближением K_0 .

2. На j -й итерации задано K_j . Вычисляем $A_{K_j} = A_0 + \{A, K_j\}$, решаем уравнения (10), (12) и находим матрицы Q и Y ; вычисляем градиент

$$H_j = \nabla J(K_j)$$

из уравнения (11). Если $\|H_j\| \leq \varepsilon$, то K_j принимаем за приближенное решение.

3. Делаем шаг градиентного метода

$$K_{j+1} = K_j - \gamma_j H_j.$$

Длину шага $\gamma_j > 0$ подбираем дроблением γ до выполнения условий:

а. K_{j+1} — стабилизирующий регулятор;

б. $J(K_{j+1}) \leq J(K_j) - \tau \gamma_j \|H_j\|^2$.

4. Переходим к п. 2.

Сделаем несколько замечаний. Прежде всего, нетривиальным моментом является выбор начального стабилизирующего регулятора K_0 . Здесь можно прибегнуть к помощи D-разбиения [21] или воспользоваться методами прямого поиска (см., например, [9]). В некоторых случаях может оказаться полезным следующий прием: для некоторой положительно-определенной матрицы Q попытаться разрешить неравенство Ляпунова $A_{K_0}^T Q + Q A_{K_0} \prec 0$ относительно K_0 . Также часто в практических задачах требуется улучшить качество уже имеющегося ПИД-регулятора путем настройки его параметров. Наконец, если исходная система управления является устойчивой (как часто и бывает на практике), вопрос выбора начального регулятора решается очевидным образом.

Еще одним важным моментом является выбор пробного шага градиентного метода. Весьма перспективным является его выбор из следующих соображений. Найдем для некоторого стабилизирующего регулятора K_j решение Q уравнения Ляпунова

$$(A_0 + \sigma I + \{A, K_j\})^T Q + Q(A_0 + \sigma I + \{A, K_j\}) = -I.$$

Рассмотрим приращение по K :

$$K_j \rightarrow K_j - \gamma H_j, \quad H_j = \nabla J(K_j),$$

и найдем, для каких γ матрица Q останется матрицей квадратичной функции Ляпунова для $A_{K_j - \gamma H_j} = A_0 + \sigma I + \{A, K_j - \gamma H_j\}$, т.е.

$$(A_0 + \sigma I + \{A, K_j - \gamma H_j\})^T Q + Q(A_0 + \sigma I + \{A, K_j - \gamma H_j\}) \prec 0.$$

С учетом исходного уравнения имеем

$$\gamma(-\{A, H_j\}^T Q - Q\{A, H_j\}) \prec I,$$

откуда

$$\gamma < \lambda_{\max}^{-1}(-\{A, H_j\}^T Q - Q\{A, H_j\}).$$

5. Примеры

Рассматриваемые далее примеры взяты из статьи [23]. Всюду в этом разделе будем полагать $\Sigma = I$.

Пример 1. Рассмотрим передаточную функцию

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+\alpha s)(1+\alpha^2 s)(1+\alpha^3 s)}, \quad \alpha = 0,5.$$

МАТЛАВ-процедура `tf2ss` доставляет матрицы системы в пространстве состояний:

$$A = \begin{pmatrix} -15 & -70 & -120 & -64 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 64 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\sigma = 0,25, \quad \rho = 10.$$

При выборе в качестве начального стабилизирующего регулятора

$$K_0 = (9,5717 \quad 4,8538 \quad 8,0028),$$

оптимизационная процедура приводит к регулятору

$$K_* = (7,6296 \quad 3,4331 \quad 3,1795), \quad |K_*| = 8,9502,$$

доставляющему интегральной части функционала $J(K)$ значение $3,5327 \cdot 10^3$.

Возьмем теперь начальное приближение

$$K'_0 = (4,3141 \quad 9,1065 \quad 1,8185);$$

в результате получим регулятор

$$K'_* = (7,6265 \quad 3,4327 \quad 3,1782), \quad |K'_*| = 8,9469,$$

и значение функционала, равное $J(K'_*) = 3,5333 \cdot 10^3$.

Как видно, значения функционала и нормы получившихся регуляторов отличаются на доли процента.

Передаточная функция ПИД-регулятора с коэффициентами K_* имеет вид

$$G_{\text{PID}}(s) = 7,6296 + \frac{3,4331}{s} + 3,1795s.$$

Система, замкнутая ПИД-регулятором K_* , является устойчивой по критерию Найквиста; ее минимальный запас устойчивости по модулю составляет 7,41 дБ, а по фазе — $27,5^\circ$, см. рис. 1.

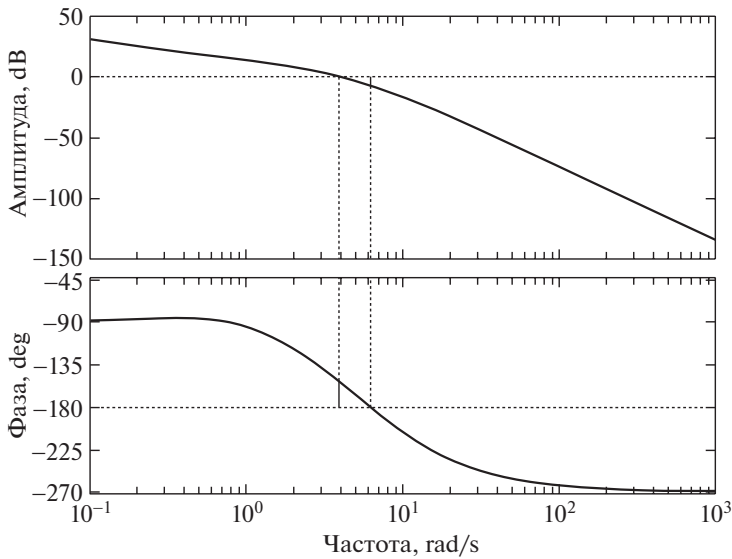


Рис. 1. ЛАФЧХ замкнутой системы из примера 1.

Сравним полученный ПИД-регулятор с регуляторами, полученными по методу Циглера–Николса (ZN) [1], гармонического поиска (Harmony Search, HS) [24], улучшенной версии алгоритма пчел (Improved Bees' Algorithm, IBA) [25] и алгоритма пчелиной колонии (Artificial Bee Colony, ABC) [26], подробнее см. [27]. Соответствующие результаты представлены в табл. 1.

На рис. 2 показана динамика выхода $y(t)$ рассматриваемой системы при некотором начальном условии

$$x_0 = \begin{pmatrix} -0,5715 \\ -0,1249 \\ 0,6635 \\ 0,4664 \end{pmatrix}$$

из единичного шара: при замыкании найденным ПИД-регулятором K_* (жирная линия) и регуляторами из табл. 1.

Таблица 1. Сравнение ПИД-регуляторов по интегральной части функционала и запасам устойчивости для примера 1

	k_P	k_I	k_D	$\mathbb{E}_{x(0)} \int_0^{\infty} y^2(t) dt$	G_m (дБ)	P_m (град)
Алгоритм 1	7,6296	3,4331	3,1795	$2,7303 \cdot 10^3$	7,41	27,5
ZN	3,9706	3,5749	1,1026	$4,3752 \cdot 10^3$	12,4	35,0
HS	2,8206	1,8022	1,4330	$3,6654 \cdot 10^3$	15,6	68,0
IBA	2,7852	1,7873	1,4157	$3,6872 \cdot 10^3$	15,7	68,5
ABC	2,8458	1,8278	1,4535	$3,6545 \cdot 10^3$	15,5	67,8

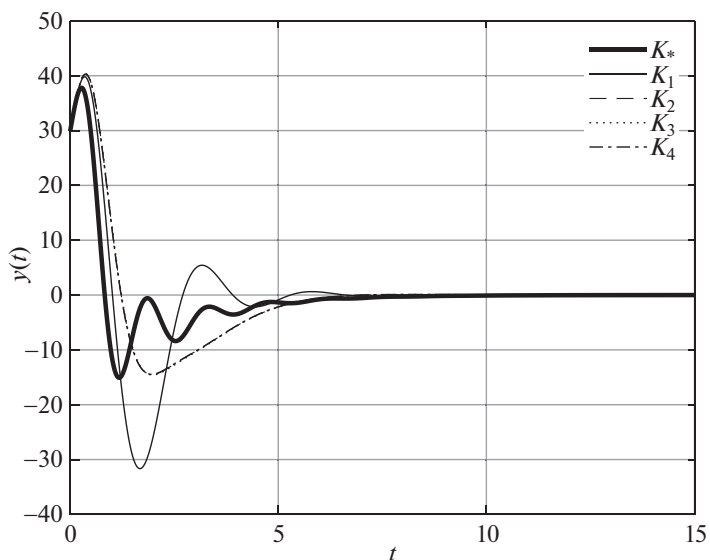


Рис. 2. Траектории выхода системы из примера 1.

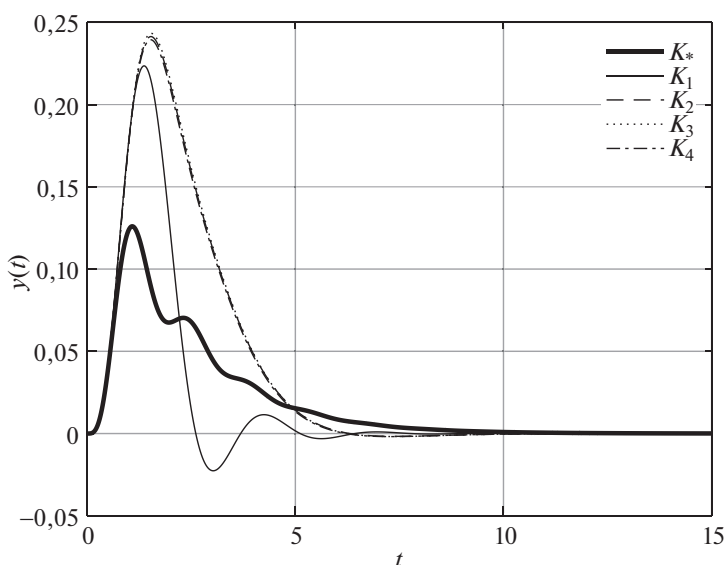


Рис. 3. Траектории выхода системы из примера 1 при единичном ступенчатом возмущении.

На рис. 3 показана динамика выхода $y(t)$ рассматриваемой системы, замкнутой найденным ПИД-регулятором K_* (жирная линия) и регуляторами из табл. 1 при единичном ступенчатом возмущении (и нулевом начальном условии).

Как видно, синтезированный ПИД-регулятор вполне удовлетворителен по своим характеристикам.

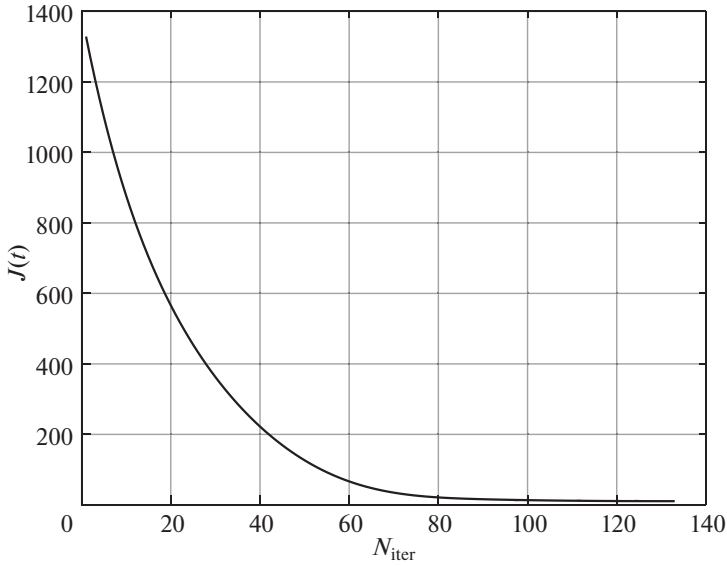


Рис. 4. Оптимизационная процедура в примере 2.

Пример 2. Рассмотрим передаточную функцию

$$G(s) = \frac{1 - \alpha s}{(s + 1)^2}, \quad \alpha = 0,1.$$

МАТЛАВ-процедура `tf2ss` доставляет матрицы системы в пространстве состояний:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Полагая $\rho = 10$, $\sigma = 0,1$ и выбрав

$$K_0 = (3,8710 \quad 6,1308 \quad 8,9234)$$

в качестве начального стабилизирующего регулятора, при завершении оптимизационной процедуры получаем регулятор

$$K_* = (0,4010 \quad 0,1870 \quad 0,0382),$$

доставляющий интегральной части функционала $J(K)$ значение 8,5440, см. рис. 4.

Передаточная функция ПИД-регулятора с коэффициентами K_* имеет вид

$$G_{\text{PID}}(s) = 0,4010 + \frac{0,1870}{s} + 0,0382s.$$

Замкнутая система с ПИД-регулятором K_* является устойчивой по критерию Найквиста; ее минимальный запас устойчивости по модулю составляет 21,1 дБ, а по фазе $78,9^\circ$, см. рис. 5.

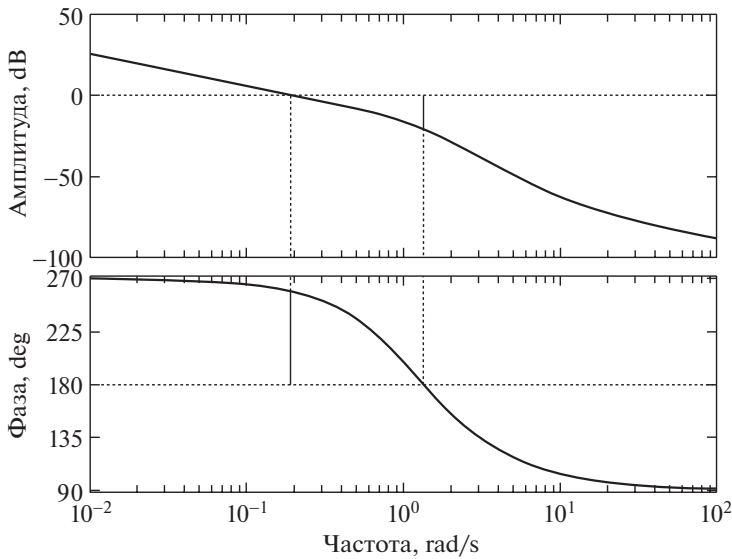


Рис. 5. ЛАФЧХ замкнутой системы из примера 2.

Пример 3. Рассмотрим передаточную функцию

$$G(s) = \frac{(s + 6)^2}{s(s + 1)^2(s + 36)}.$$

МАТЛАВ-процедура `tf2ss` доставляет матрицы системы в пространстве состояний:

$$A = \begin{pmatrix} -39 & -111 & -109 & -36 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 12 \\ 36 \end{pmatrix}.$$

При

$$\rho = 10, \quad \sigma = 0,1,$$

и выборе в качестве начального стабилизирующего регулятора

$$K_0 = (10,1955 \quad 9,8265 \quad 2,4392),$$

оптимизационная процедура приводит к регулятору

$$K_* = (6,7538 \quad 1,2114 \quad 2,2965),$$

доставляющему интегральной части минимизируемого функционала значение $1,4774 \cdot 10^3$.

Замкнутая система с ПИД-регулятором K_* является устойчивой по критерию Найквиста; ее минимальный запас устойчивости по модулю бесконечен, а по фазе равен $55,2^\circ$, см. рис. 6.

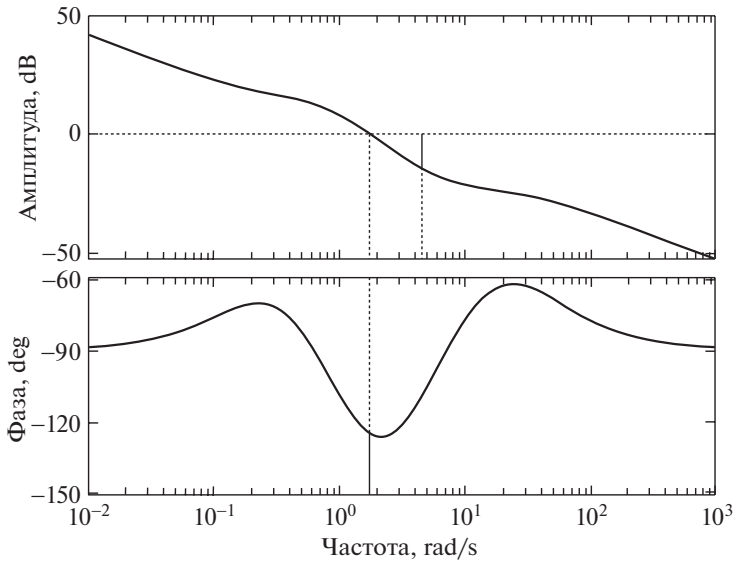


Рис. 6. ЛАФЧХ замкнутой системы из примера 3.

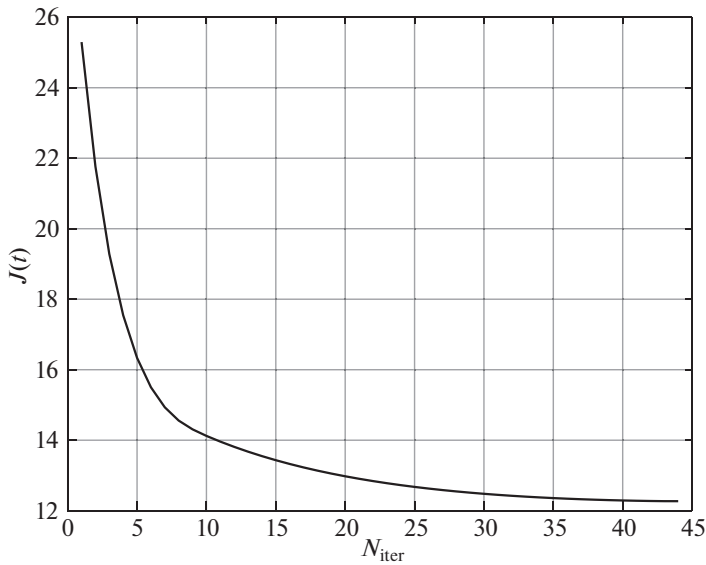


Рис. 7. Оптимизационная процедура в примере 4.

Пример 4. Вернемся к примеру 1 и положим в нем $\alpha = 1$. Оптимизационная процедура (при $\rho = 0,5$, $\sigma = 0,07$) завершается нахождением регулятора

$$G_{\text{PID}}(s) = 1,7408 + \frac{0,2849}{s} + 1,8615s,$$

см. рис. 7.

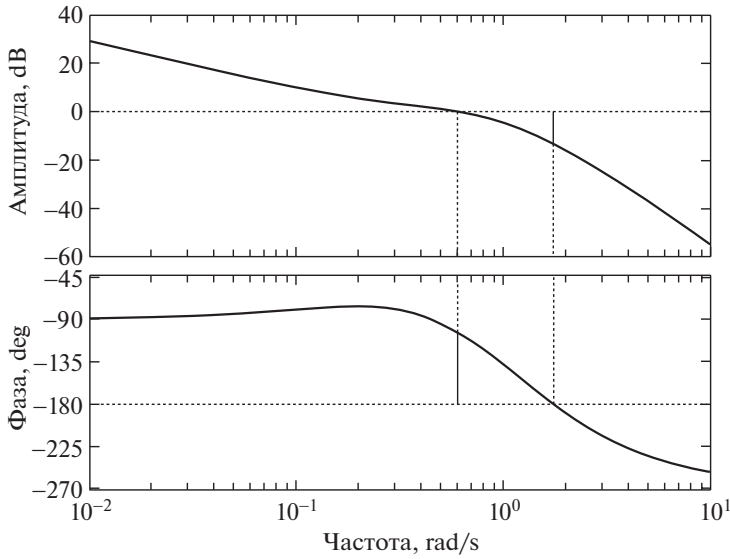


Рис. 8. ЛАФЧХ замкнутой системы из примера 4.

Он доставляет интегральной части минимизируемого функционала значение 8,9878 и обладает минимальным запасом устойчивости по модулю 13,2 дБ, а по фазе $76,2^\circ$, см. рис. 8.

Сравнение найденного регулятора с тремя ПИД/ПИ-регуляторами, предложенными для этого же примера в работах [28–30], представлено в табл. 2.

На рис. 9 показана динамика изменения выхода $y(t)$ рассматриваемой системы при некотором начальном условии

$$x_0 = \begin{pmatrix} -0,2456 \\ -0,6435 \\ -0,6921 \\ -0,2161 \end{pmatrix}$$

из единичного шара: при замыкании найденным ПИД-регулятором K_* (жирная линия) и регуляторами из табл. 2.

На рис. 10 показана динамика выхода $y(t)$ рассматриваемой системы, замкнутой найденным ПИД-регулятором K_* (жирная линия) и регуляторами

Таблица 2. Сравнение ПИД-регуляторов по интегральной части функционала и запасам устойчивости для примера 4

	k_P	k_I	k_D	$\mathbb{E}_{x(0)} \int_0^\infty y^2(t) dt$	G_m (дБ)	P_m (град)
Алгоритм 1	1,7408	0,2849	1,8615	8,9878	13,2	76,2
Из работы [28]	0,925	0,9	2,86	9,6715	14,87	43,0
Из работы [29]	0,83	0,318	0,3569	10,7752	14,34	62,5
Из работы [30]	1,031	0,3529	0	12,5559	17,25	96,2

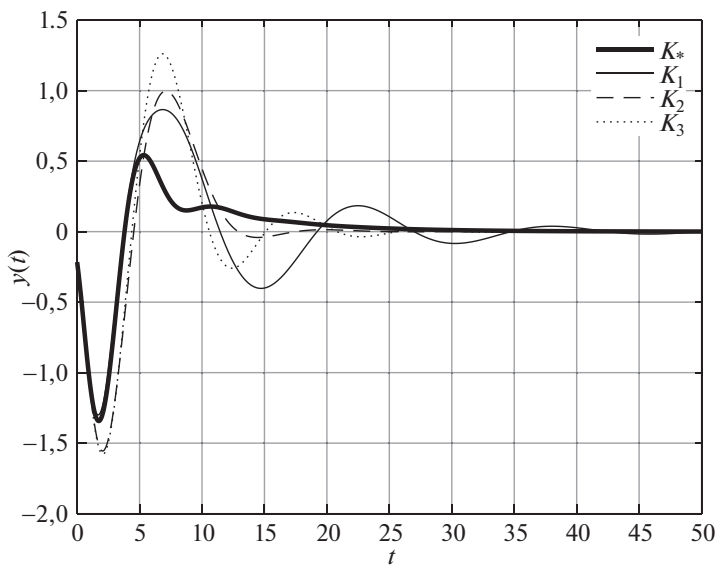


Рис. 9. Траектории выхода системы из примера 4.

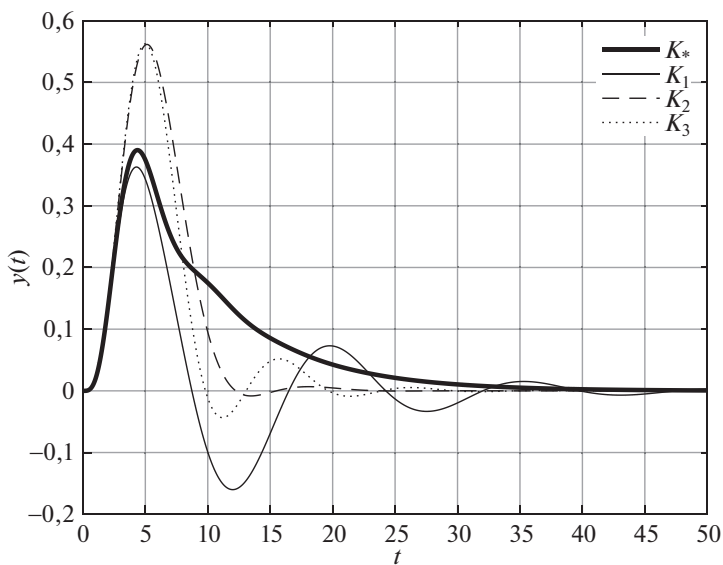


Рис. 10. Траектории выхода системы из примера 4 при единичном ступенчатом возмущении.

из табл. 2 при единичном ступенчатом возмущении (и нулевом начальном условии).

Как видно, синтезированный ПИД-регулятор обладает вполне удовлетворительными характеристиками.

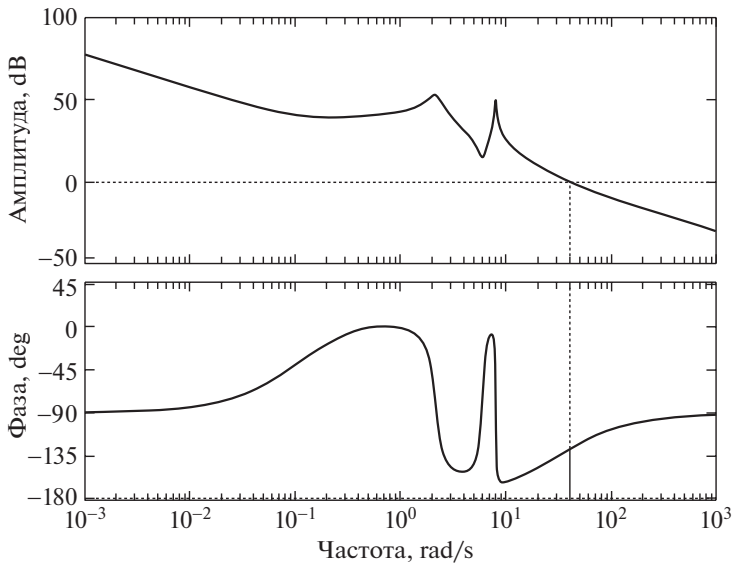


Рис. 11. ЛАФЧХ замкнутой системы из примера 5.

Пример 5. Рассмотрим передаточную функцию

$$G(s) = \frac{10s^3 + 9s^2 + 362,4s + 36,16}{2s^5 + 2,7255s^4 + 138,4292s^3 + 156,471s^2 + 637,6472s + 360,1779}$$

из статьи [7].

Предложенный алгоритм (при $\rho = 0,001$, $\sigma = 0,01$) дает ПИД-регулятор

$$G_{\text{PID}}(s) = 201,1057 + \frac{75,9364}{s} + 6,2735s,$$

доставляющий интегральной части минимизируемого функционала значение $1,0614 \cdot 10^3$ и обладающий бесконечным запасом устойчивости по модулю и запасом по фазе $52,2^\circ$, см. рис. 11.

Его сравнение с тремя ПИД-регуляторами, предложенными для рассматриваемой системы в работе [8], представлено в табл. 3.

Синтезированный ПИД-регулятор обладает весьма удовлетворительными характеристиками. На рис. 12 показана динамика изменения выхода $y(t)$ рас-

Таблица 3. Сравнение ПИД-регуляторов по интегральной части функционала и запасам устойчивости для примера 5

	k_P	k_I	k_D	$\mathbb{E}_{x(0)} \int_0^\infty y^2(t) dt$	G_m (дБ)	P_m (град)
Алгоритм 1	201,1057	75,9364	6,2735	$1,0614 \cdot 10^3$	∞	52,2
#1 из [8]	185	2986	9	$1,7338 \cdot 10^3$	-10,2	60,8
#2 из [8]	20	800	9	$1,3503 \cdot 10^4$	-7,79	87,5
#3 из [8]	19	200	9	$1,3769 \cdot 10^4$	-10	78,6

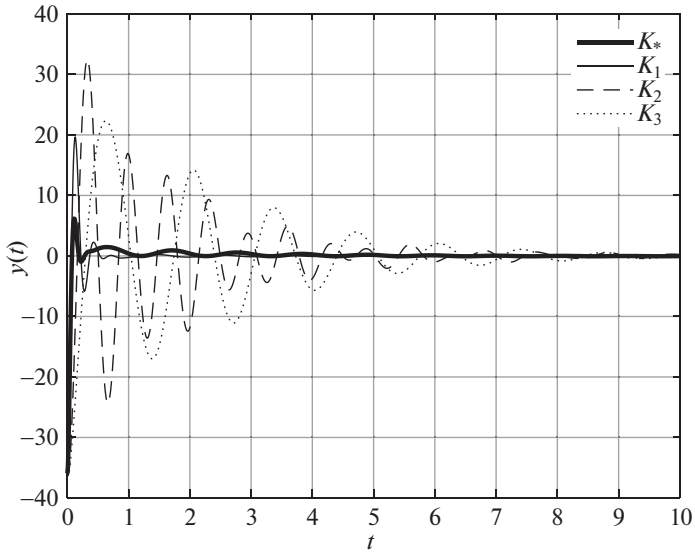


Рис. 12. Траектории выхода системы из примера 5.

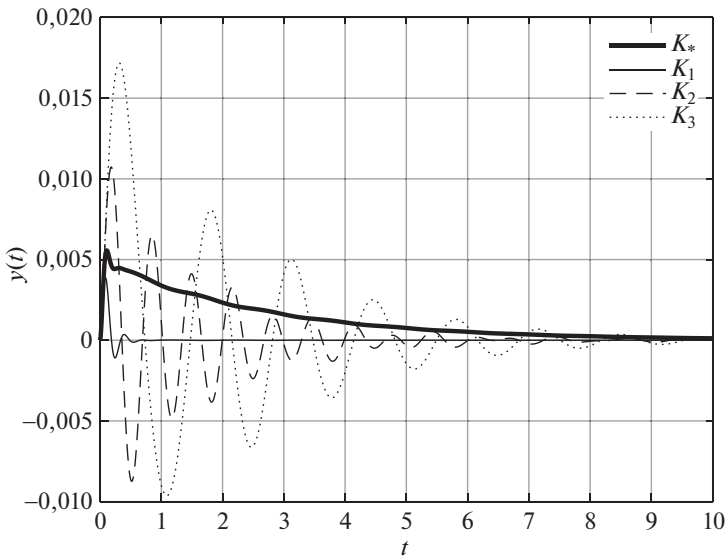


Рис. 13. Траектории выхода системы из примера 5 при единичном ступенчатом возмущении.

сма триваемой системы при некотором начальном условии

$$x_0 = \begin{pmatrix} -0,5228 \\ -0,4387 \\ -0,3609 \\ -0,1148 \\ -0,6251 \end{pmatrix}$$

из единичного шара при замыкании найденным ПИД-регулятором K_* (жирная линия) и регуляторами из работы [8].

На рис. 13 показана динамика выхода $y(t)$ рассматриваемой системы, замкнутой найденным ПИД-регулятором K_* (жирная линия) и регуляторами из табл. 3 при единичном ступенчатом возмущении (и нулевом начальном условии).

Таким образом, синтезированный ПИД-регулятор обладает вполне удовлетворительными характеристиками.

6. Заключение

В статье рассмотрены только SISO-системы, однако предлагаемый подход полностью может быть перенесен и на многомерный случай. При этом выкладки становятся несколько более громоздкими, в то время как идейная сторона меняется мало.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Лемма П.1. Пусть X и Y – решения двойственных уравнений Ляпунова с гурвицевой матрицей A :

$$A^T X + X A + W = 0 \quad \text{и} \quad A Y + Y A^T + V = 0.$$

Тогда

$$\text{tr} XV = \text{tr} YW.$$

Доказательство леммы П.1. В самом деле, прямым вычислением имеем

$$\begin{aligned} \text{tr}(XV) &= \text{tr}(X(-AY - YA^T)) = -\text{tr}(XAY) - \text{tr}(XYA^T) = \\ &= -\text{tr}(XAY)^T - \text{tr}(A^T XY)^T = \text{tr}(Y(-A^T X - XA)) = \text{tr}(YW). \end{aligned}$$

Лемма П.1 доказана.

Доказательство леммы 2. В уравнении (10) придадим величине K приращение ΔK и обозначим соответствующее приращение Q через ΔQ :

$$A_{K+\Delta K}^T(Q + \Delta Q) + (Q + \Delta Q)A_{K+\Delta K} = - \begin{pmatrix} cc^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

или

$$(A_K + \{A, \Delta K\})^T(Q + \Delta Q) + (Q + \Delta Q)(A_K + \{A, \Delta K\}) = - \begin{pmatrix} cc^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда после линеаризации имеем

$$(П.1) \quad A_K^T \Delta Q + \Delta Q A_K + Q\{A, \Delta K\} + \{A, \Delta K\}^T Q = 0.$$

Вычислим приращение функционала $f(K)$, линеаризуя соответствующие величины:

$$\begin{aligned}\Delta J(K) &= \operatorname{tr} (Q + \Delta Q) \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \rho |K + \Delta K|^2 - \operatorname{tr} Q \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \rho |K|^2 = \\ &= \operatorname{tr} \Delta Q \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\rho(K, \Delta K).\end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение Ляпунова (12), двойственное к (П.1). По лемме П.1 из уравнений (П.1) и (12) имеем

$$\Delta J(K) = \operatorname{tr} \Delta Q \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\rho(K, \Delta K) = 2 \operatorname{tr} YQ\{A, \Delta K\} + 2\rho(K, \Delta K),$$

так что

$$dJ(K) = 2 \operatorname{tr} YQ \sum_{i=1}^3 A_i dk_i + 2\rho(K, dK),$$

откуда имеем (11). Лемма 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ziegler J.B., Nichols N.B.* Optimum Settings for Automatic Controllers // *Transact. ASME.* 1942. V. 64. P. 759–768.
2. *Visioli A.* Practical PID Control. London: Springer-Verlag, 2006.
3. *Åström K.J., Häggglund T.* PID Controllers: Theory, Design, and Tuning. Research Triangle Park: Instrument Society of America, 1995.
4. *Åström K.J., Häggglund T.* Advanced PID Control. Research Triangle Park: The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 2006.
5. *Bhattacharyya S.P., Keel L.H.* Linear Multivariable Control Systems. Cambridge University Press, 2022.
6. *Wang Q.-G., Ye Z., Cai W.-J., Hang C.-C.* PID Control for Multivariable Processes. Berlin: Springer, 2008.
7. *Blanchini F., Lepschy A., Miani S., Viaro U.* Characterization of PID and Lead/Lag Compensators Satisfying Given H_∞ Specifications // *IEEE Transact. Autom. Control.* 2004. V. 49. No. 5. P. 736–740.
8. *Han S., Keel L.H., Bhattacharyya S.P.* PID Controller Design with an H^∞ Criterion // *IFAC-PapersOnLine.* 2018. V. 51. No. 4. P. 400–405.
9. *Киселев О.Н., Поляк Б.Т.* Синтез регуляторов низкого порядка по критерию H^∞ и по критерию максимальной робастности // *АиТ.* 1999. № 3. С. 119–130.
Kiselev O.N., Polyak B.T. Design of Low-Order Controllers by the H^∞ -criterion and Maximum-Robustness Performance Indices // *Autom. Remote Control.* 1999. V. 60. No. 3. P. 393–402.

10. *Грязина Е.Н., Поляк Б.Т., Тремба А.А.* Синтез регуляторов низкого порядка по критерию H_∞ : параметрический подход // *АиТ.* 2007. № 3. С. 94–105.
Gryazina E.N., Polyak B.T., Tremba A.A. Design of the Low-Order Controllers by the H_∞ Criterion: A Parametric Approach // *Autom. Remote Control.* 2007. V. 68. No. 3. P. 456–466.
11. *Kalman R.E.* Contributions to the Theory of Optimal Control // *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana.* 1960. V. 5. No. 1. P. 102–119.
12. *Levine W., Athans M.* On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1970. V. 15. No. 1. P. 44–48.
13. *Mäkilä P.M., Toivonen H.T.* Computational Methods for Parametric LQ Problems – A Survey // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1987. V. 32. No. 8. P. 658–671.
14. *Fazel M., Ge R., Kakade S., Mesbahi M.* Global Convergence of Policy Gradient Methods for the Linear Quadratic Regulator // *Proc. 35th Int. Conf. Machine Learning.* Stockholm, Sweden, July 10–15, 2018. V. 80. P. 1467–1476.
15. *Mohammadi H., Zare A., Soltanolkotabi M., Jovanović M.R.* Global Exponential Convergence of Gradient Methods Over the Nonconvex Landscape of the Linear Quadratic Regulator // *Proc. 2019 IEEE 58th Conf. Decision Control.* Nice, France, December 11–13, 2019. P. 7474–7479.
16. *Zhang K., Hu B., Başar T.* Policy Optimization for \mathcal{H}_2 Linear Control with \mathcal{H}_∞ Robustness Guarantee: Implicit Regularization and Global Convergence // *arXiv:1910.09496*, 2020.
17. *Bu J., Mesbahi A., Fazel M., Mesbahi M.* LQR through the Lens of First Order Methods: Discrete-Time Case // *arXiv:1907.08921*, 2019.
18. *Fatkhullin I., Polyak B.* Optimizing Static Linear Feedback: Gradient Method // *SIAM J. Control Optim.* 2021. V. 59. No. 5. P. 3887–3911.
19. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Синтез статического регулятора для подавления внешних возмущений как задача оптимизации // *АиТ.* 2021. № 9. С. 86–115.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Static Controller Synthesis for Peak-to-Peak Gain Minimization as an Optimization Problem // *Autom. Remote Control.* 2021. V. 82. No. 9. P. 1530–1553.
20. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Синтез обратной связи по выходу при помощи наблюдателя как задача оптимизации // *АиТ.* 2022. № 3. С. 7–32.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Observer-Aided Output Feedback Synthesis as an Optimization Problem // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 3. P. 303–324.
21. *Грязина Е.Н., Поляк Б.Т., Тремба А.А.* Современное состояние метода D-разбиения // *АиТ.* 2008. № 12. С. 3–40.
Gryazina E.N., Polyak B.T., Tremba A.A. D-Decomposition Technique State-of-the-art // *Autom. Remote Control.* 2008. V. 69. No. 12. P. 1991–2026.
22. *Шатов Д.В.* Синтез параметров пропорционально-интегрирующих и пропорционально-интегрально-дифференцирующих регуляторов для стационарных линейных объектов с ненулевыми начальными условиями // *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2023. № 1. (в печати)
23. *Åström K.J., Häggglund T.* Benchmark Systems for PID Control // *IFAC Proceedings Volumes.* 2000. V. 33. Iss. 4. P. 165–166.

24. *Geem Z.W., Kim J.H., Loganathan G.V.* A New Heuristic Optimization Algorithm: Harmony Search // Simulation. 2002. V. 76. No. 2. P. 60–68.
25. *Pham D.T., Sholedolu M.* The Bees Algorithm with Attraction to Global Best Solutions // Proc. 5th I*PROMS International Virtual Conference on Innovative Production Machines and Systems (IPROMS 2009). Cardiff, UK, July 6–17, 2009.
26. *Karaboga D.* An Idea Based on Honey Bee Swarm for Numerical Optimization. Technical Report TR06. Erciyes University, 2005.
27. *Karaboga D., Akay B.* Proportional-Integral-Derivative Controller Design by Using Artificial Bee Colony, Harmony Search, and the Bees Algorithms // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part I: J. Syst. Control Engineer. 2010. V. 224. No. 7. P. 869–883.
28. *Panagopoulos H., Åström K.J., Hägglund T.* Design of PID Controllers Based on Constrained Optimization // Proc. 1999 American Control Conference. San Diego, USA, June 2–4, 1999. V. 6. P. 3858–3862.
29. *Li Y., Ang K.H., Chong G.C.Y.* PID Control System Analysis and Design // IEEE Control Syst. Magaz. 2006. V. 26. No. 1. P. 32–41.
30. *Leva A., Papadopoulos A.V.* Tuning of Event-Based Industrial Controllers with Simple Stability Guarantees // J. Process Control. 2013. V. 23. P. 1251–1260.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 15.05.2022

После доработки 20.07.2022

Принята к публикации 28.07.2022

© 2022 г. В.А. АЛЕКСАНДРОВ, канд. техн. наук
(va.alexandrov@yandex.ru)

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),

Е.Ю. ЗЫБИН, д-р техн. наук (zybin@mail.ru),

В.В. КОСЬЯНЧУК, д-р техн. наук (kos.vl.v@gmail.com),

Н.И. СЕЛЬВЕСЮК, д-р техн. наук (nis@gosniias.ru)

(ФАУ Государственный научно-исследовательский институт
авиационных систем, Москва),

А.А. ТРЕМБА, канд. физ.-мат. наук (atremba@ipu.ru),

М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;

Национальный исследовательский университет

“Московский физико-технический институт”, Москва)

ОПТИМИЗАЦИЯ РАСХОДА ТОПЛИВА ВОЗДУШНОГО СУДНА НА ЭТАПЕ НАБОРА ВЫСОТЫ¹

Рассматривается задача минимизации расхода топлива дозвукового турбореактивного пассажирского самолета на этапе набора высоты. Целевая функция оптимизации кроме расхода топлива включает время, затраченное на этап набора высоты, так как оптимизация набора высоты — это часть задачи оптимизации всего полета с требованием прибытия в заданную точку в заданное время. Так как в конце этапа нужно выйти на заданные значения скорости и высоты, с которых должен начинаться крейсерский полет, то в целевую функцию добавлены штрафы за недостижение этих значений. Значение целевой функции — это результат численного решения системы дифференциальных уравнений, поэтому для оптимизации предлагается безградиентный метод поиска с использованием точек-кандидатов и учетом ограничений. Рассмотрен пример оптимизации расхода топлива в сравнении со стандартным профилем набора высоты для двух вариантов возможной реализации системы управления: управление тягой и тангажом или управление только тангажом при постоянном значении управления тягой.

Ключевые слова: оптимизация, дозвуковой турбореактивный самолет, набор высоты, расход топлива, моделирование полета.

DOI: 10.31857/S0005231022110034, EDN: KEFPHO

1. Введение

В работе исследуется задача оптимизации этапа набора высоты в рамках общей задачи минимизации расхода топлива дозвукового турбореактивного

¹ Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда, проект № 21-71-30005.

среднемагистрального узкофюзеляжного пассажирского самолета при условии прибытия в заданное время в точку захода на посадку. В [1] рассматривался этап крейсерского полета. Этап набора высоты начинается от высоты, на которой заканчивается этап взлета, когда шасси и закрылки убраны, и конфигурация самолета — это конфигурация полета по маршруту. Обычно это значение принимается равным 1500 футов, но может отличаться в зависимости от воздушного судна и условий аэродрома. Для исследуемого этапа должна быть задана эта начальная высота и другие начальные условия для этой точки: скорость, угол наклона траектории, масса. В конце этапа набора высоты необходимо выйти на значения высоты и скорости, с которых будет начинаться этап крейсерского полета. В рассматриваемой задаче оптимизации этапа набора высоты предполагается, что эти значения заданы. Необходимо учитывать ограничения допустимой скорости, в том числе обусловленные ограничением шума на малой высоте, а также ускорения и скороподъемности, обусловленные не только техническими ограничениями воздушного судна, но и требованиями комфорта пассажиров. Существенной особенностью этапа набора высоты является учет доступной тяги двигателей, так как допустимые значения ускорения и угла наклона траектории могут требовать значения тяги, превышающие максимально доступное. Кроме того, доступная тяга уменьшается с ростом высоты полета. Это приводит к тому, что если пытаться поддерживать высокое значение угла наклона траектории, то скорость будет падать, а при поддержании допустимого ускорения или даже постоянной скорости угол наклона траектории должен уменьшаться по мере увеличения высоты.

Так как этап набора высоты непродолжителен, то очевидно, что выигрыш расхода топлива, полученный в результате оптимизации, в абсолютных значениях будет незначителен. В [2] такой вывод сделан при сравнении результатов оптимизации набора высоты дальнемагистрального самолета для трех различных критериев: минимизации пройденного расстояния, затраченного времени и расхода топлива. Экономия при минимизации расхода топлива по сравнению с расходом, полученным при оптимизации по другим критериям, составила менее 1%. Необходимо заметить, что в этой работе горизонтальное ускорение и угол наклона траектории принимаются постоянными в каждый момент времени, что позволяет не моделировать систему управления, пренебрегая переходными процессами.

В [3] движение воздушного судна моделируется через энергетическое состояние с использованием аппроксимирующей табличной функции, зависящей от высоты, скорости, угла атаки, угла руля высоты и управления тягой. Для определения секундного расхода топлива также используется таблица зависимости от высоты, скорости и управления тягой. Таким образом, переходные процессы тоже не учитываются, и система управления не моделируется. При поиске оптимального решения методом нелинейного программирования для угла набора высоты и управления тягой получено подтверждение применяемого на практике правила, что значение управления тягой выбирается

максимально разрешенным (положение “Climb”) на всем этапе набора высоты. Для среднемагистрального самолета получена экономия топлива до 0,9% по сравнению со стандартным профилем с постоянной приборной скоростью. При оптимизации и сравнении результатов учитывается типовое ограничение приборной скорости на высоте до 10 000 футов. Заметим, что в этой работе не учитывается ограничение на горизонтальное ускорение, что приводит к резкому росту скорости и скачкам угла набора высоты при достижении высоты полета 10 000 футов.

Многокритериальная оптимизация, учитывающая кроме расхода топлива выбросы CO_2 и NO_x , рассматривается в [4], где отмечается, что в зависимости от условий полета выбросы NO_x могут быть непропорциональны расходу топлива. Так как этап набора высоты часто происходит в густонаселенных районах, сокращение вредных выбросов является одним из основных факторов оптимизации.

Экологический критерий оптимизации как сумма расхода топлива и уровня шума рассмотрен в [5]. Здесь задача оптимизации сформулирована как задача терминального управления и предложено ее решение псевдоспектральным методом Чебышева. Рассмотрена оптимизация набора высоты дальнемагистрального самолета для четырех значений начальной массы и проведено сравнение с записями данных реальных полетов. Полученную значительную экономию топлива от 7 до 23% оптимального решения по сравнению с реальными полетами можно объяснить тем, что, во-первых, при оптимизации не учитывалось время, затраченное на набор высоты, и это время получилось примерно на 30% больше при практически том же расстоянии полета, а во-вторых, в модели не учитываются ограничения на допустимое ускорение и доступную тягу, что видно на приведенных графиках скорости. Поэтому важно находить значение критерия оптимизации по более точной модели системы.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 описана математическая модель движения центра масс воздушного судна без маневрирования по курсу. Это система с двумя степенями свободы: управление тягой и тангажом, которые формируются в соответствии с выбранными значениями скорости и угла наклона траектории. При том, что большую часть этапа набора высоты значение тяги получается равным максимально доступному, рассмотрен также вариант системы с одной степенью свободы — управление тангажом, тогда как тяга принимается равной максимально доступной. В разделе 3 приведена постановка задачи оптимизации, где вектор варьируемых переменных — это значения уставок для соответствующих регуляторов калиброванной приборной скорости и угла наклона траектории на каждом участке равной длины, на которые разбивается этап набора высоты, а целевая функция — это расход топлива на этапе со штрафами за время и недостижение заданных значений скорости и высоты в конце этапа. В разделе 4 предложен алгоритм оптимизации, основанный на покоординатном спуске с учетом ограничений и со вспомогательными точками-кандидатами. Пример

оптимизации набора высоты среднемагистрального пассажирского самолета представлен в разделе 5. Заключительные выводы приведены в разделе 6.

2. Математическая модель движения воздушного судна

Модель движения центра масс воздушного судна может быть описана следующей системой дифференциальных уравнений [1, 6, 7]:

$$(1) \quad \begin{aligned} m\dot{V} &= T \cos(\alpha + \phi) - \frac{1}{2}c_x\rho SV^2 - mg \sin \Theta + Vq_c, \\ mV\dot{\Theta} &= T \sin(\alpha + \phi) + \frac{1}{2}c_y\rho SV^2 - mg \cos \Theta, \\ \dot{h} &= V \sin \Theta, \\ \dot{L} &= V \cos \Theta + V_w, \\ \dot{m} &= -q_c, \\ \dot{T} &= -k_1T + k_2\delta_T, \\ \dot{\theta} &= -k_3\theta + k_4\delta_\theta, \end{aligned}$$

где m — масса воздушного судна (кг), V — воздушная скорость (м/с), T — суммарная тяга двигателей (Н), α — угол атаки (рад), ϕ — угол установки двигателей (рад), c_x, c_y — аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы, ρ — плотность воздуха (кг/м³), S — площадь крыла (м²), g — ускорение свободного падения (м/с²), Θ — угол наклона траектории (рад), h — высота полета (м), L — пройденное расстояние (м), V_w — скорость попутной/встречной составляющей ветра (м/с), q_c — секундный расход топлива (кг/с), θ — тангаж — угол между осью воздушного судна и горизонтом (рад), δ_T, δ_θ — значения сигналов управления, k_1, k_2, k_3, k_4 — коэффициенты упрощенных моделей первого порядка динамики тяги и тангажа. Точное моделирование тяги — это фактически моделирование работы двигателя, которая описывается намного более сложной системой уравнений с большим количеством параметров. Для целей оценки расхода топлива предлагается учитывать только доминирующую динамику.

К этим дифференциальным уравнениям нужно добавить, что угол атаки определяется как разность тангажа и угла наклона траектории, как показано на рис. 1:

$$(2) \quad \alpha = \theta - \Theta,$$

а секундный расход топлива — это произведение тяги и удельного расхода топлива η (кг/с/Н):

$$(3) \quad q_c = \eta T.$$

Переменные системы (1)–(3) можно разбить на несколько групп:

1) переменные состояния системы дифференциальных уравнений: $m, V, \Theta, h, L, T, \theta$, для которых требуется задать начальные значения;

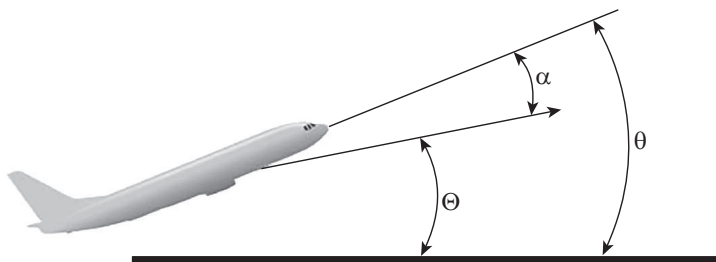


Рис. 1. Углы тангажа θ , атаки α и наклона траектории Θ . Стрелкой показано направление движения центра масс.

2) известные константы: ϕ , S , k_1, k_2, k_3, k_4 — должны быть заданы для исследуемой модели воздушного судна, g принимаем равным стандартному значению $g_0 = 9,80665$;

3) параметры атмосферы: значение ρ в зависимости от текущей высоты в этой работе определяем из стандартной атмосферы [8] или оно может быть получено из данных температуры и давления реальной атмосферы; скорость ветра в этой работе не учитываем, и значение V_w принимаем равным 0;

4) значения табличных или аппроксимирующих функций, заданных для исследуемой модели воздушного судна, в зависимости от текущих значений переменных состояния: аэродинамические коэффициенты c_x и c_y зависят от угла атаки α и числа Маха $M = V/a$, где a — скорость звука на текущей высоте полета; удельный секундный расход топлива η зависит от текущих значений высоты, числа Маха и тяги [9];

5) вычисляемые значения угла атаки α и секундного расхода топлива q_c по формулам (2) и (3) соответственно;

6) значения сигналов управления δ_T, δ_θ .

Значения δ_T, δ_θ формируются системой управления, работу которой также надо моделировать. Если точная реализация системы управления доступна и ее вычислительная сложность не велика, то можно моделировать ее полностью. При использовании упрощенной модели системы управления необходимо добиться схожих переходных процессов, в том числе для управляющих сигналов для корректной оценки расхода топлива. В настоящей статье будем моделировать систему управления вычислительно простыми алгоритмами ПИД- и ПИ-регуляторов, коэффициенты которых подобраны так, чтобы переходные процессы были близки к реальной системе.

Предполагается, что на этапе набора высоты управление тягой формируется ПИД-регулятором скорости:

$$(4) \quad \delta_T = \text{PID}(V_{SP} - V_{CAS}),$$

где V_{SP} — требуемое значение калиброванной приборной скорости (узлы), а V_{CAS} — текущее значение калиброванной приборной скорости, которое можно

вычислить по стандартной формуле [10]:

$$(5) \quad V_{CAS} = a_0 \sqrt{5 \left(\left(\frac{P}{P_0} ((1 + 0,2M^2)^{3,5} - 1) + 1 \right)^{2/7} - 1 \right)},$$

где a_0, P_0 — скорость звука и давление на уровне моря в стандартной атмосфере, P — давление на текущей высоте, M — число Маха. Таким образом, калиброванная приборная скорость определяется значениями переменных состояния V и h . Требуемое значение V_{SP} должно определяться исходя из целей оптимизации с учетом ограничений на допустимые значения. Заметим, что истинная воздушная скорость V в системе (1), соответствующая значению V_{CAS} , зависит от высоты, т.е. при постоянном значении калиброванной приборной скорости V_{CAS} значение истинной воздушной скорости V должно возрастать с ростом высоты.

Следует учитывать, что в конце этапа набора высоты нужно выйти на заданную скорость начала крейсерского полета, которая выражена числом Маха M_{SP} , и в крейсерском полете регулятор поддерживает заданное число Маха. Поэтому при достижении заданной скорости начала крейсерского полета регулятор тяги должен переключиться на заданное число Маха M_{SP} вместо калиброванной приборной скорости:

$$(6) \quad \delta_T = PID(M_{SP} - M).$$

Будем также предполагать, что управление тангажом формируется ПИ-регулятором угла наклона траектории:

$$(7) \quad \delta_\theta = PI(\Theta_{SP} - \Theta),$$

где Θ_{SP} — требуемое значение угла наклона траектории, которое при достижении заданной высоты начала крейсерского полета h_{SP} формируется регулятором высоты:

$$(8) \quad \Theta_{SP} = K_h(h_{SP} - h).$$

Таким образом, заданные значения V_{SP} и Θ_{SP} для заданных начальных условий определяют полет воздушного судна в соответствии с уравнениями (1)–(5), (7) до достижения заданных целевых значений набора высоты: числа Маха M_{SP} , когда регулятор (4) заменяется на (6), и высоты h_{SP} , когда уставка для регулятора (7) формируется регулятором (8). Численно моделируя полет на некотором участке, можно получить значение расхода топлива на этом участке, а также значения скорости и высоты, достигнутые в конце этого участка. При этом необходимо учитывать существующие ограничения:

- технические — это допустимые минимальная и максимальная калиброванные приборные скорости $V_{CAS_{min}}$, $V_{CAS_{max}}$, максимально допустимые угол атаки α , ускорение и скороподъемность, доступная тяга двигателей T ;

- диспетчерские — например, во многих аэропортах действует ограничение $V_{CAS} < 250$ узлов для высоты $h < 10\,000$ футов;

— целевые — скорость и высота в конце этапа должны отличаться от требуемых на величину не более заданной погрешности.

На рассматриваемом этапе доступная тяга двигателей — это не предельное значение, а значение, рекомендуемое для этапа набора высоты (положение “Climb” на рычаге управления двигателями). Кроме того, при неизменном значении управления тягой само значение тяги зависит от скорости и атмосферного давления — при росте скорости и высоты значение тяги снижается. При моделировании для получения значения доступной тяги T_{\max} можно использовать аппроксимирующие формулы [9]. Если принять приоритет скорости, то требуемое значение угла наклона траектории должно выбираться как $\check{\Theta}_{SP} = \min(\Theta_{SP}, \check{\Theta})$, где $\check{\Theta}$ — максимально возможный угол наклона траектории для текущих условий, определяемый из (1) для значения доступной тяги T_{\max} :

$$(9) \quad \check{\Theta} = \arcsin \left(\left(T_{\max} \cos(\alpha + \phi) - \frac{1}{2} c_x \rho S V^2 - m \dot{V} \right) / mg \right).$$

Особенность этапа набора высоты состоит в том, что большую часть времени необходимо использовать всю доступную тягу, чтобы обеспечить ускорение и набор высоты. На таких участках вместо предпоследнего уравнения системы (1), моделирующего тягу, и регулятора тяги (4) можно принять $T = T_{\max}$, а управление тангажом будет осуществляться для поддержания заданной скорости:

$$(10) \quad \delta_\theta = \text{PID}(V_{SP} - V_{CAS}).$$

Такой режим может сохраняться до того момента, когда будет достигнута заданная высота в конце этапа. После этого управление тангажом переключается на регулятор угла наклона траектории (7), где Θ_{SP} определяется разницей заданного и текущего значений высоты. При достижении заданных скорости M_{SP} и высоты h_{SP} включается управление тягой (6).

3. Постановка задачи

В работе рассматривается задача оптимизации расхода топлива воздушного судна на этапе набора высоты при предположении прямолинейного движения, т.е. без учета маневрирования по курсу. Предполагается, что заданы

— параметры воздушного судна: константы ϕ , S , таблицы и аппроксимирующие формулы для аэродинамических коэффициентов $c_x(\alpha, M)$ и $c_y(\alpha, M)$, коэффициенты k_1, k_2, k_3, k_4 для системы (1), формулы и коэффициенты регуляторов (4), (6), (7), (8), аппроксимирующие формулы для расчета удельного расхода топлива $\eta(h, M, T)$ и доступной тяги $T_{\max}(h, V_{CAS})$;

— начальные значения переменных состояния системы (1): $m, V, \Theta, h, L, T, \theta$;

— ограничения допустимых значений: скорости $V_{CAS} \in [V_{CAS_{\min}}, V_{CAS_{\max}}]$, углов наклона траектории $\Theta \leq \Theta_{\max}$ и атаки $\alpha \leq \alpha_{\max}$, ускорения $\dot{V} \leq \dot{V}_{\max}$ и скороподъемности $V \sin \Theta \leq V_{\text{vert}_{\max}}$;

— значения скорости M_{SP} и высоты h_{SP} , которые должны быть достигнуты в конце этапа набора высоты, и допустимые погрешности ε_M и ε_h ;

— горизонтальное расстояние полета R , отведенное на этап набора высоты, достаточное и с некоторым запасом, чтобы заданные значения скорости и высоты в конце этапа могли быть достигнуты.

Тогда, как следует из приведенного выше описания динамики движения воздушного судна, необходимо определить для каждого момента времени требуемые значения калиброванной приборной скорости V_{SP} и угла наклона траектории Θ_{SP} , обеспечивающие при соблюдении всех ограничений выход на заданные значения скорости и высоты в конце этапа с минимальным расходом топлива. Предлагается формировать значения V_{SP} и Θ_{SP} как кусочно-постоянные функции, разделив расстояние этапа на n участков равной длины, на каждом из которых будут использоваться постоянные значения V_{SP_i} , Θ_{SP_i} , $i = 1, \dots, n$. В конце расстояния, отведенного на этап набора высоты, нужно предусмотреть участок длиной r_{fin} , на котором управление осуществляется исходя из требуемых значений скорости и высоты в конце этапа. Тогда целевые значения скорости или высоты не будут достигнуты только в случае выбора слишком низких значений V_{SP_i} или Θ_{SP_i} , а в остальных случаях этот финальный участок может давать дополнительный расход топлива при неоптимальном выборе значений V_{SP_i} и Θ_{SP_i} . Таким образом, при заданных значениях R , r_{fin} и n длина участков равна $r = \frac{R-r_{fin}}{n}$.

Задача 1. Для этапа набора высоты для заданных параметров воздушного судна, начальных условий, расстояния, отведенного на этап набора высоты, и числа участков n определить значения вектора

$$(11) \quad x = [V_{SP_1}, \dots, V_{SP_n}, \Theta_{SP_1}, \dots, \Theta_{SP_n}]$$

такие, что при соблюдении заданных ограничений на скорость, угол наклона траектории, ускорение, скороподъемность и доступную тягу двигателей минимизируется функционал

$$(12) \quad f(x) = \int_0^{t_{cl}} q_c(t) dt + C_1 t_{cl} + C_2(M) |M_{SP} - M(t_{cl})| + C_3(h) |h_{SP} - h(t_{cl})|,$$

где t_{cl} — время, затраченное на прохождение расстояния R , а C_1, C_2, C_3 — весовые коэффициенты.

Для того, чтобы незначительные отклонения полученных в конце этапа значений скорости $M(t_{cl})$ и высоты $h(t_{cl})$ от заданных не влияли на результат оптимизации, нужно определить допустимые погрешности ε_M и ε_h и при выполнении условий $|M_{SP} - M(t_{cl})| < \varepsilon_M$ и $|h_{SP} - h(t_{cl})| < \varepsilon_h$ принимать значения $C_2(M)$ и $C_3(h)$ равными 0. При превышении допустимых погрешностей значения весовых коэффициентов $C_2(M)$ и $C_3(h)$ должны быть достаточно большими, чтобы полученное значение функционала (12) не могло быть оптимальным.

Итак, в функционале (12) первое слагаемое соответствует расходу топлива на этапе, второе учитывает время, затраченное на этап, а третье и четвертое — это штрафы за недостижение заданных скорости и высоты в конце этапа. Про второе слагаемое поясним, что хотя здесь нет задачи минимизации времени полета, но есть задача прилета в заданное время. Эта задача решается при оптимизации этапов крейсерского полета и снижения, и если уменьшение времени, отведенного на эти этапы приводит к увеличению расхода топлива, то это должно быть учтено при оптимизации набора высоты выбором весового коэффициента C_1 . Его значение должно быть равно дополнительному расходу топлива на последующих этапах при сокращении времени, оставленного на эти этапы, на 1 секунду.

4. Алгоритм оптимизации

В задаче оптимизации, соответствующей задаче 1, вектор варьируемых переменных (11) состоит из двух групп: $x = [x^1, x^2]$, где $x^1 = [V_{SP_1}, \dots, V_{SP_n}]$ — значения скорости, $x^2 = [\Theta_{SP_1}, \dots, \Theta_{SP_n}]$ — значения угла наклона траектории для каждого из участков. Таким образом, i -му участку полета соответствуют i -е элементы обеих групп. Для варьируемых переменных заданы ограничения:

$$(13) \quad V_{SP_i} \in [V_{CAS_{\min}}, V_{CAS_{\max}}], \quad \Theta_{SP_i} \in [0, \Theta_{\max}], \quad i = 1, \dots, n,$$

которые можно записать как $x_i \in [lb_i, ub_i]$, $i = 1, \dots, 2n$, где lb_i, ub_i — соответствующие нижняя и верхняя границы для i -го элемента вектора x . При этом нужно учитывать, что дополнительные ограничения, такие как ограничение скорости на высоте до 10 000 футов и ограничение угла наклона траектории, обусловленное доступной максимальной тягой, здесь не описываются, так как зависят от текущих значений переменных состояния и не могут быть привязаны к участкам, связанным только с расстоянием. Эти ограничения должны быть реализованы в процедуре численного моделирования при вычислении значения целевой функции.

Значение целевой функции (12) — это результат численного решения системы нелинейных дифференциальных и алгебраических уравнений (1)–(10), поэтому ее градиент практически недоступен. Следует отметить, что решение для любого вектора варьируемых переменных находится для одинакового расстояния R независимо от момента достижения заданных скорости и высоты в конце этапа, т.е. сравниваются расход топлива и время для расстояния, отведенного на этап набора высоты, с дополнительными штрафами при недостижении заданных целевых значений скорости и высоты.

Задачу поиска минимума целевой функции (12) для вектора варьируемых переменных (11) в границах (13) предлагается решать детерминированным методом, основанным на покоординатном спуске [11, 12], с вспомогательными точками-кандидатами. Особенности вычисления целевой функции ставят дополнительные задачи алгоритму оптимизации. Одна из них — это необ-

ходимость учитывать, что выбранное значение угла наклона траектории на i -м участке, удовлетворяющее ограничениям (13), может быть не реализовано из-за ограничения доступной тяги (9), и тогда для различных вариантов вектора варьируемых переменных (11) могут получаться одинаковые значения целевой функции. Для эффективного поиска реализован выбор x с меньшим значением угла наклона траектории при отличии значений целевой функции на величину, меньшую заданного порога ε_f .

Другая особенность — это неявные ограничения на итоговую скорость M_{SP} и высоту h_{SP} , реализованные как элементы целевой функции. Хотя для их достижения выделен отдельный участок, предыдущая «программа» набора высоты может быть такой, что эти требуемые значения скорости и/или высоты будут не достижимы. Для получения решения, удовлетворяющего основной задаче этапа набора высоты — выход на заданные значения скорости и высоты, необходим выбор соответствующих весовых коэффициентов C_2, C_3 в целевой функции (12).

Итак, для решения задачи 1 предлагается следующий алгоритм оптимизации.

Алгоритм 1.

1. Выбрать начальную точку $x^0 = [x^{1,(0)}, x^{2,(0)}] : x_i^0 \in [lb_i, ub_i]$.
2. Рассчитать рекордное значение целевой функции $f^* = f(x^0)$.
3. Инициализировать счетчики:
 $l = 0$ — общий счетчик итераций,
 $k^1 = k^2 = 1$ — внутренние счетчики для каждой группы переменных,
 $l^{bad} = 0$ — счетчик неэффективных шагов.
4. Выбрать блок переменных $j = \text{mod}(l, 2) + 1$.
5. Выбрать основную изменяемую компоненту k^j в блоке переменных x^j и увеличить ее счетчик: $k^j \leftarrow (\text{mod}(k^j + 1, n) + 1)$.
6. Сформировать набор точек-кандидатов $X = \{x^a, x^b, \dots\}$ на основе выбранной группы и изменяемой компоненты.
7. Вычислить целевую функцию во всех точках-кандидатах и выбрать среди них минимальное значение и соответствующую точку

$$x^{cand} = \arg \min_{x \in X} f(x).$$

8. Если значение функции удалось улучшить ($f(x^{cand}) < f^*$), то изменить текущую точку $x^{(l+1)} \leftarrow x^{cand}$, рекордное значение $f^* \leftarrow f(x^{cand})$, сбросить счетчик неэффективных шагов $l^{bad} \leftarrow 0$ и перейти к шагу 4.

9. Если значение целевой функции не улучшается, но близко к рекорду ($f(x^{cand}) < f^* + \varepsilon_f$), а угол подъема уменьшился, то изменить текущую точку $x^{(l+1)} \leftarrow x^{cand}$, увеличить счетчик неэффективных шагов $l^{bad} \leftarrow l^{bad} + 1$ и перейти к шагу 4.

10. В противном случае сохранить текущую точку $x^{(l+1)} \leftarrow x^{(l)}$ и рекордное значение, увеличить счетчик неэффективных шагов $l^{bad} \leftarrow l^{bad} + 1$.

11. Если счетчик неэффективных шагов равен числу переменных $l^{bad} = 2n$, то завершить алгоритм и вернуть в качестве решения текущую точку

ку $x^{(l)}$ и соответствующий расход топлива $f(x^{(l)})$. В противном случае перейти к шагу 4.

Изменение основной выбранной компоненты k характеризуется параметром алгоритма γ , играющим роль длины шага, причем его значение различно для каждой группы (скорости и угла наклона траектории). Подзадача выбора точек-кандидатов состоит в подборе нескольких «соседних» по отношению к текущей точке, также удовлетворяющих ограничениям. Первые две точки соответствуют изменению одной компоненты:

$$\begin{aligned}x_k^a &= \max\{x_k - \gamma, lb_k\}, \\x_k^b &= \min\{x_k + \gamma, ub_k\}, \\x_i^a &= x_i^b = x_i, \quad i \neq k.\end{aligned}$$

Здесь операции минимума и максимума гарантируют, что значение k -й компоненты не выйдет за имеющиеся границы. Очевидно, что если текущее значение уже находится на своей границе, то соответствующее изменение координаты не требуется, так как точка-кандидат будет совпадать с исходной точкой. Например, если $x_k = lb_k$, то $x_k^a = x_k$, и набор кандидатов состоит только из одной точки x^b .

Еще четыре точки-кандидата формируются изменением соседних компонент:

$$\begin{aligned}k &> 1 : \\ \gamma^c &= \min\{\gamma, x_k - lb_k, ub_{k-1} - x_{k-1}\}, \\ x_k^c &= x_k - \gamma^c, \\ x_{k-1}^c &= x_{k-1} + \gamma^c, \\ x_j^c &= x_j, \quad j \neq k, k-1, \\ \gamma^d &= \min\{\gamma, ub_k - x_k, x_{k-1} - lb_{k-1}\}, \\ x_k^d &= x_k + \gamma^d, \\ x_{k-1}^d &= x_{k-1} - \gamma^d, \\ x_i^d &= x_i, \quad i \neq k, k-1, \\ k &< n : \\ \gamma^e &= \min\{\gamma, x_k - lb_k, ub_{k+1} - x_{k+1}\}, \\ x_k^e &= x_k - \gamma^e, \\ x_{k+1}^e &= x_{k+1} + \gamma^e, \\ x_i^e &= x_i, \quad i \neq k, k+1, \\ \gamma^f &= \min\{\gamma, ub_k - x_k, x_{k+1} - lb_{k+1}\}, \\ x_k^f &= x_k + \gamma^f, \\ x_{k+1}^f &= x_{k+1} - \gamma^f, \\ x_i^f &= x_i, \quad i \neq k, k+1.\end{aligned}$$

Таким образом, формируется до шести точек-кандидатов.

Для вектора $x = [x^1, x^2]$ размерности $2n$, включающего компоненты обеих групп, реализовано формирование точек-кандидатов, которые одновременно изменяют переменные из двух групп, относящиеся к одному и тому же участку. Это дает четыре дополнительных точки-кандидата для выбранной основной компоненты k :

$$\begin{aligned}
 x_k^a &= \max \{x_k - \gamma_{\text{speed}}, lb_k\}, \\
 x_{n+k}^a &= \min \{x_{n+k} + \gamma_{\text{angle}}, ub_{n+k}\}, \\
 x_i^a &= x_i, \quad i \neq k, n+k, \\
 x_k^b &= \max \{x_k - \gamma_{\text{speed}}, lb_k\}, \\
 x_{n+k}^b &= \max \{x_{n+k} - \gamma_{\text{angle}}, lb_{n+k}\}, \\
 x_i^b &= x_i, \quad i \neq k, n+k, \\
 x_k^c &= \min \{x_k + \gamma_{\text{speed}}, ub_k\}, \\
 x_{n+k}^c &= \max \{x_{n+k} - \gamma_{\text{angle}}, lb_{n+k}\}, \\
 x_i^c &= x_i, \quad i \neq k, n+k, \\
 x_k^d &= \min \{x_k + \gamma_{\text{speed}}, ub_k\}, \\
 x_{n+k}^d &= \min \{x_{n+k} + \gamma_{\text{angle}}, ub_{n+k}\}, \\
 x_i^d &= x_i, \quad i \neq k, n+k.
 \end{aligned}$$

Итого, может быть сформировано до 10 точек-кандидатов для выполнения шага 4 алгоритма 1. Отметим, что каждое вычисление целевой функции требует моделирования всего этапа набора высоты, поэтому большое число кандидатов может негативно сказаться на общем времени работы алгоритма.

5. Пример

Предложенный в настоящей работе алгоритм оптимизации реализован в среде программирования Matlab. Для его проверки разработана процедура вычисления целевой функции (12), реализующая численное моделирование системы (1)–(10) методом Эйлера первого порядка с шагом 1 с, что обеспечивает достаточную точность моделирования при невысокой вычислительной сложности. Выбор шага соответствует постоянным времени моделируемой системы управления. В [1], где исследовалось моделирование крейсерского полета с учетом переходных процессов, в том числе и при изменении высоты полета, отмечено, что в рассматриваемой системе моделирование методом Эйлера не дает заметной ошибки по сравнению с методом Рунге–Кутты четвертого порядка.

В табл. 1 для моделируемого среднемагистрального пассажирского самолета приведены начальные значения, ограничения и требуемые значения, которые должны быть достигнуты в конце этапа. Ограничение $V_{\text{CAS}} < 250$ узлов для высоты $h < 10\,000$ футов также будет учитываться.

Таблица 1. Параметры моделирования

Наименование	Обозначение	Значение	Комментарий
Начальная масса	m_0	75 000 кг	75 т
Начальная высота	h_0	457 м	1500 футов
Требуемая конечная высота	h_{SP}	10363,2 м	FL340
Начальная скорость	V_{CAS_0}	223 узла	$V_0 = 117,2$ м/с
Требуемая конечная скорость	M_{SP}	0,8	$V = 238,3$ м/с
Моделируемое расстояние	R	250 000 м	250 км
Размер финального участка	r_{fin}	50 000 м	50 км
Минимальная скорость	$V_{CAS_{min}}$	200 узлов	
Максимальная скорость	$V_{CAS_{max}}$	300 узлов	
Максимальное ускорение		0,2 м/с ²	
Максимальная скороподъемность		20 м/с	
Максимальный наклон траектории	Θ_{max}	15 град	
Число участков	n	10	

Таблица 2. Результаты оптимизации для начальной массы $m_0 = 75$ т

Номер	Вариант оптимизации	Вариант управления	Расход топлива, кг	Время, с
1	Стандартный профиль	1	1443	1225
2	Минимальный расход	1	1419	1273
3	Минимальное время	1	1455	1218
4	Комбинированный ($C_1 = 0,4$)	1	1429	1234
5	Стандартный профиль	2	1446	1217
6	Минимальный расход	2	1431	1249
7	Минимальное время	2	1445	1218
8	Комбинированный ($C_1 = 0,4$)	2	1433	1233

Стандартный профиль набора высоты состоит из трех участков:

- 1) для $h < 10\,000$ футов требуемое значение скорости принимается равным максимально разрешенному значению для этих высот $V_{SP_1} = 250$ узлов;
- 2) для $h \geq 10\,000$ футов требуемое значение скорости принимается равным максимально разрешенному значению $V_{SP_2} = 300$ узлов;
- 3) при достижении заданного значения скорости M_{SP} переключаемся с регулятора калиброванной приборной скорости на регулятор скорости в Махах с требуемым значением M_{SP} .

Угол наклона траектории при этом выбирается максимально возможный для текущего значения доступной тяги и допустимых значений ускорения и скороподъемности.

Результаты оптимизации будем сравнивать с результатом набора высоты по этому профилю. В табл. 2 приведены значения расхода топлива и времени, затраченного на прохождение расстояния R для стандартного профиля, оптимального по расходу топлива без учета времени, когда в минимизируе-

мой функции (12) весовой коэффициент $C_1 = 0$, оптимального по времени без учета расхода ($C_1 = 1000$) и по комбинированному критерию ($C_1 = 0,4$). При оптимизации по комбинированному критерию значение весового коэффициента C_1 должно выбираться исходя из дополнительного расхода топлива на этапе крейсерского полета при сокращении времени, отведенного на этот этап. Значение $C_1 = 0,4$ получено моделированием последующего крейсерского полета на расстояние 1000 км с разницей по выделенному времени в 1 мин. Полученная разница в расходе, деленная на 60 для оценки разницы за 1 с, составила примерно 0,4 кг, и была принята как значение весового коэффициента C_1 . Остальные весовые коэффициенты функционала (12) выбраны $C_2 = 20000$ и $C_3 = 2$ при $\varepsilon_M = 0,001$ и $\varepsilon_h = 10$.

Проведены моделирование стандартного профиля и оптимизация для двух вариантов системы управления:

1) с управлением тягой (4) с переходом на регулятор (6) при достижении заданного числа Маха и управлением тангажом (7) и

2) с тягой, равной доступной тяге T_{\max} для текущих условий полета (автомат тяги выключен) и управлением тангажом (10), пока не будут достигнуты заданные число Маха и высота, после чего включается автоматическое управление тягой (6) и управление тангажом (7), поддерживающее заданную высоту.

Число участков выбрано $n = 10$. Оптимизация для $n = 20$ также проводилась, но получены практически такие же результаты. Очевидно, что для расстояния, необходимого для набора высоты, выбор числа участков больше 10 не должен давать преимущества. Выбор $n = 5$ также дает близкие результаты, поэтому при практической реализации, когда быстрдействие работы алгоритма важно, следует более тщательно исследовать выбор минимального числа участков, что сократит число варьируемых переменных. Следует также заметить, что при оптимизации системы с управлением вида 2 варьируется только скорость на каждом участке, а угол наклона траектории формируется максимально возможный. Поэтому в этом случае число варьируемых переменных равно n , а не $2n$, как при реализации управления вида 1.

По результатам оптимизации видно, что вариант управления 2, когда не задействовано автоматическое управление тягой до тех пор, пока не достигнуты заданные значения скорости и высоты в конце этапа, и при этом используется максимальная доступная тяга, не позволяет достичь такого минимального значения расхода топлива при выборе значения весового коэффициента $C_1 = 0$, какое получается при варианте управления 1. Но, с другой стороны, вариант управления 2 позволяет получить меньший расход топлива при поиске профиля с минимальным временем без учета расхода, и стандартный профиль является оптимальным в этом случае.

Вариант управления 1 при минимизации расхода с $C_1 = 0$ дает экономию топлива более 1,5% по сравнению со стандартным профилем, но при этом время полета на этапе увеличивается на 48 с. Оптимизация с выбором весового

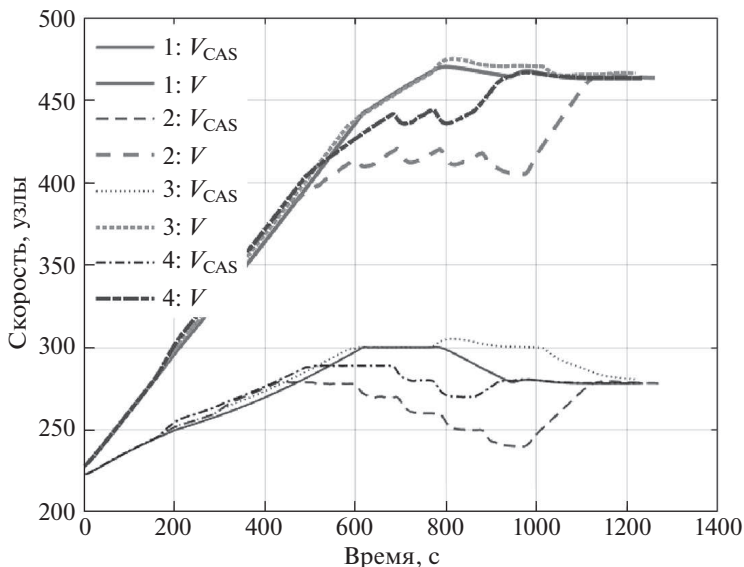


Рис. 2. Приборная V_{CAS} и истинная воздушная V скорости для стандартного профиля (1), минимизации расхода топлива (2), минимизации времени (3) и комбинированной оптимизации (4) с вариантом управления 1.

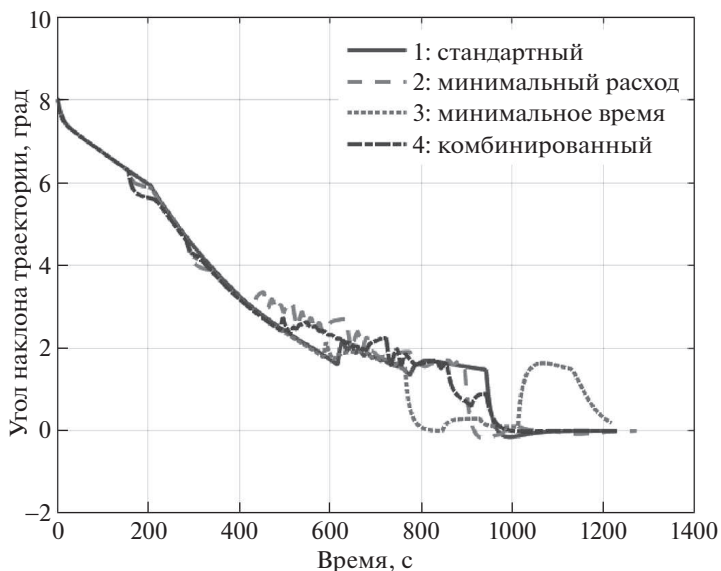


Рис. 3. Угол наклона траектории Θ для стандартного профиля (1), минимизации расхода топлива (2), минимизации времени (3) и комбинированной оптимизации (4) с вариантом управления 1.

коэффициента $C_1 = 0,4$ обеспечивает экономию топлива в размере 1% при увеличении времени всего на 9 с по сравнению со стандартным профилем.

Графики калиброванной приборной и истинной воздушной скоростей для стандартного профиля и трех вариантов оптимизации приведены на рис. 2

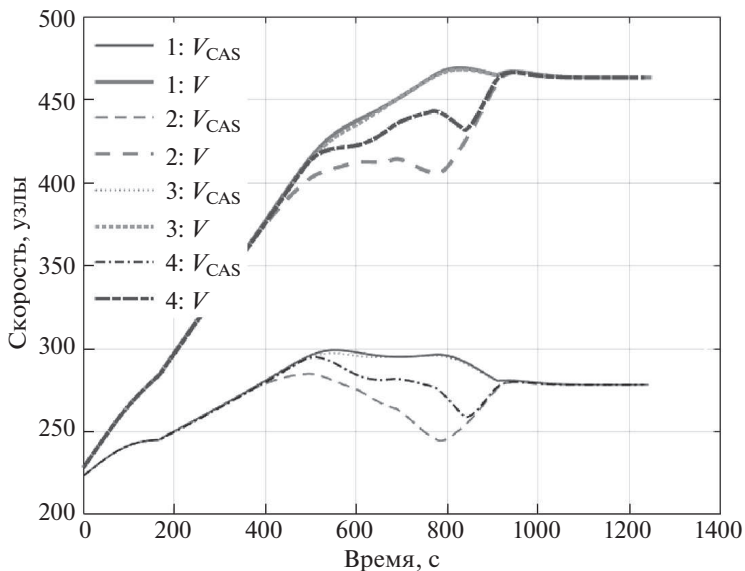


Рис. 4. Приборная V_{CAS} и истинная воздушная V скорости для стандартного профиля (1), минимизации расхода топлива (2), минимизации времени (3) и комбинированной оптимизации (4) с вариантом управления 2.

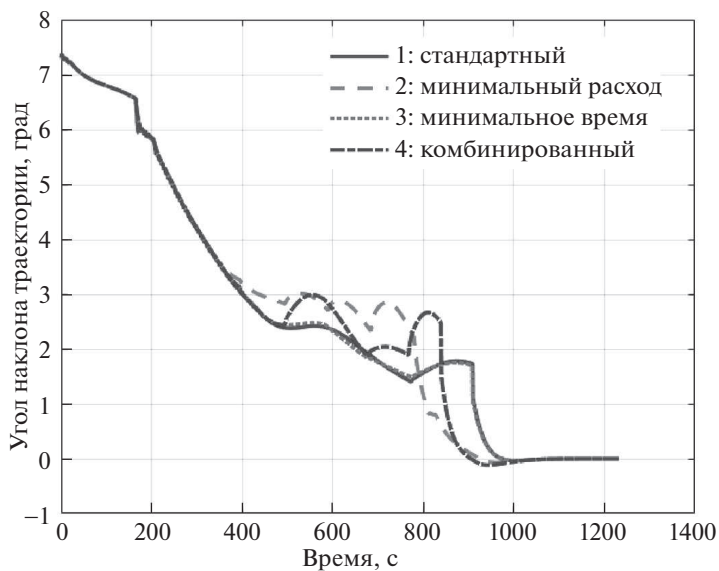


Рис. 5. Угол наклона траектории Θ для стандартного профиля (1), минимизации расхода топлива (2), минимизации времени (3) и комбинированной оптимизации (4) с вариантом управления 2.

для варианта управления 1 и на рис. 4 для варианта управления 2. Аналогично на рис. 3 и 5 приведены графики изменения угла наклона траектории. Графики полученной и максимальной доступной тяги приведены на рис. 6.

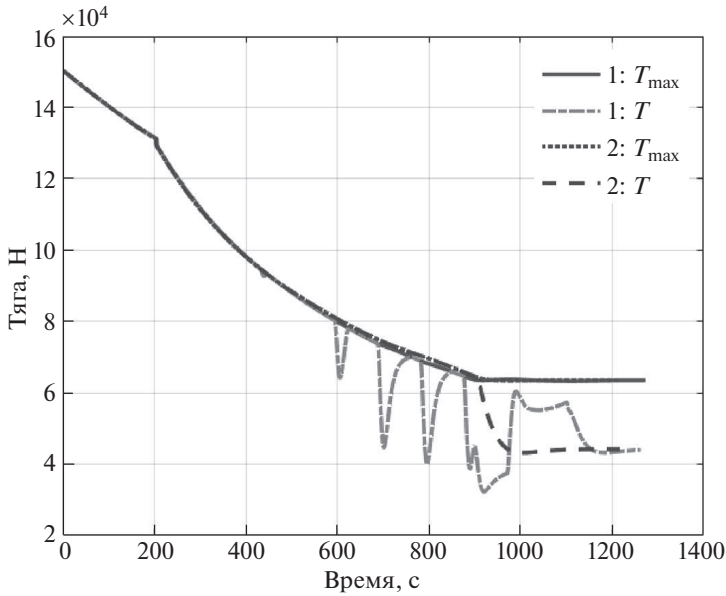


Рис. 6. Значение тяги T и доступная тяга T_{\max} при минимизации расхода топлива с вариантом управления 1 (1) и для стандартного профиля с вариантом управления 2 (2).

В табл. 3 приведены значения расхода топлива и времени, полученные для таких же вариантов оптимизации, но для примера воздушного судна с неполной загрузкой, т.е. при тех же остальных исходных данных табл. 1 начальная масса принята равной $m_0 = 55$ тонн.

В этом случае при варианте управления 2 оптимизация не дает заметного выигрыша по сравнению со стандартным профилем. При использовании управления тягой в варианте управления 1 можно получить небольшую экономию топлива. Графики калиброванной приборной и истинной воздушной скоростей для стандартного профиля и трех вариантов оптимизации для ва-

Таблица 3. Результаты оптимизации для начальной массы $m_0 = 55$ т

Номер	Вариант оптимизации	Вариант управления	Расход топлива, кг	Время, с
1	Стандартный профиль	1	1136	1211
2	Минимальный расход	1	1123	1258
3	Минимальное время	1	1139	1203
4	Комбинированный ($C_1 = 0,4$)	1	1132	1216
5	Стандартный профиль	2	1143	1202
6	Минимальный расход	2	1139	1211
7	Минимальное время	2	1142	1203
8	Комбинированный ($C_1 = 0,4$)	2	1139	1207

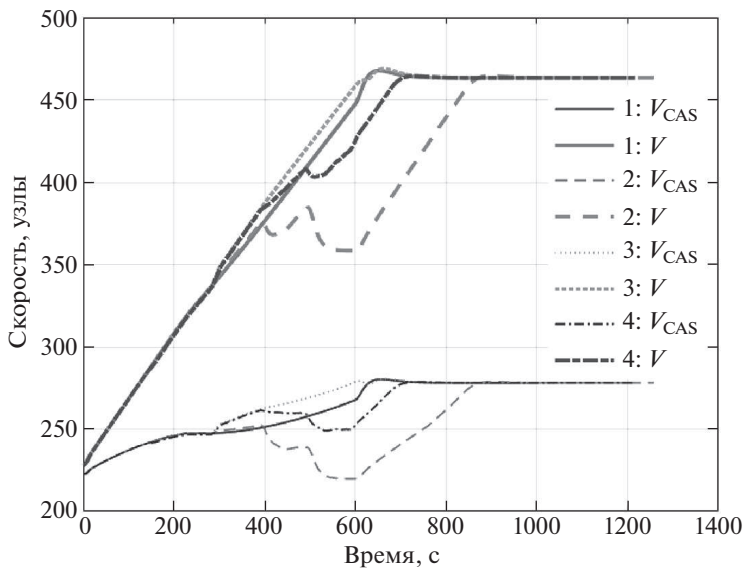


Рис. 7. Приборная V_{CAS} и истинная воздушная V скорости для стандартного профиля (1), минимизации расхода топлива (2), минимизации времени (3) и комбинированной оптимизации (4) с вариантом управления 1 при неполной загрузке.

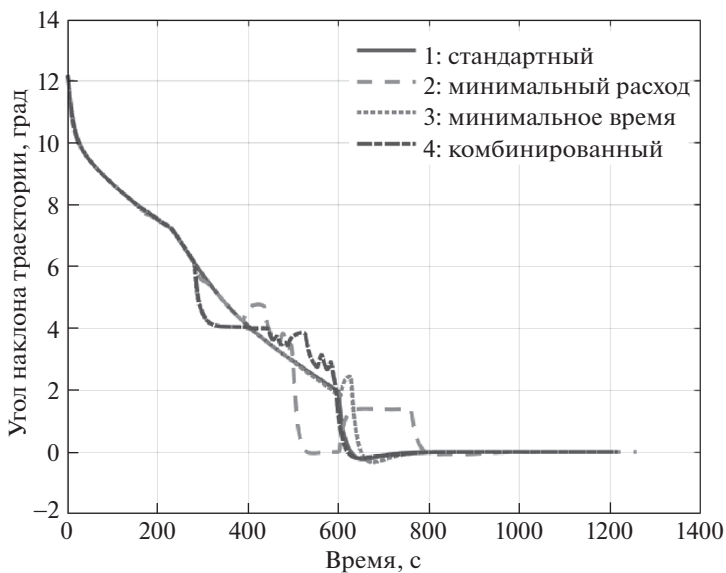


Рис. 8. Угол наклона траектории Θ для стандартного профиля (1), минимизации расхода топлива (2), минимизации времени (3) и комбинированной оптимизации (4) с вариантом управления 1 при неполной загрузке.

рианта управления 1 приведены на рис. 7, а на рис. 8 приведены графики изменения угла наклона траектории.

6. Заключение

Предложенный алгоритм оптимизации быстро сходится несмотря на сложную структуру целевой функции, что позволяет использовать его в бортовых системах управления самолетовождением. Тем не менее практическая реализация предлагаемого подхода осложнена тем, что значение целевой функции оптимизации вычисляется путем моделирования полета на этапе набора высоты. При этом используются аппроксимирующие формулы удельного секундного расхода топлива и доступной тяги, которые должны быть определены для используемых двигателей, а также формулы и параметры системы управления тягой и тангажом.

При наличии необходимых данных для моделирования применение оптимизации может обеспечить экономию расхода топлива до 1,5% на этапе набора высоты. Это снижение расхода по сравнению со стандартным профилем, также разработанным для минимизации расхода топлива, поэтому результат можно считать значимым.

Проведенное исследование для среднемагистральных самолетов подтверждает эффективность использования максимальной доступной тяги с приоритетом скорости, но при достижении высоты 6000 м может быть эффективным выбор скорости исходя из критериев минимизации расхода топлива с учетом планируемого времени полета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В.А., Зыбин Е.Ю., Косьянчук В.В., Сельвесюк Н.И., Тремба А.А., Хлебников М.В. Оптимизация высотно-скоростного профиля крейсерского полета воздушного судна при фиксированном времени прибытия // *АиТ*. 2021. № 7. С. 69–85.
Alexandrov V.A., Zybin E.Y., Kosyanchuk V.V., Selvesyuk N.I., Tremba A.A., Khlebnikov M.V. Optimization of the Altitude and Speed Profile of the Aircraft Cruise with Fixed Arrival Time // *Autom. Remote Control*. 2021. V. 82. No. 7. P. 1169–1182.
2. Губарева Е.А., Мозжорина Т.Ю. Оптимизация программы полета дозвукового пассажирского самолета на участке разгона — набора высоты // *Инженерный журн.: наука и инновации*. 2013. № 7(19).
3. Ghaemi R., Lax D.M., Westervelt E.R., Darnell M., Visser N. Optimal Variable-Speed Climb for a Fixed-Wing Aircraft // *AIAA 2019-3617*. AIAA Aviation 2019 Forum. 2019.
4. Wan J., Zhang H., Liu F., Lv W., Zhao Y. Optimization of aircraft climb trajectory considering environmental impact under RTA constraints // *J. Advanced Transport*. V. 2020. Article ID 2738517.
5. Villegas Diaz M., Gomez Comendador V.F., Garcia-Heras Carretero J., Arnaldo Valdes R.M. Environmental benefits in terms of fuel efficiency and noise when introducing continuous climb operations as part of terminal airspace operation // *Int. J. Sustainable Transport*. 2020. V. 14. I. 12. P. 903–913.

6. Григоров П.Ю., Куланов Н.В. Применение концепции обратных задач динамики в задачах вертикальной навигации // Известия РАН. Теория и системы управления. 2016. № 3. С. 130–140.
7. Hull D.G. Fundamentals of Airplane Flight Mechanics. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2007.
8. ГОСТ 4401-81. Атмосфера стандартная. Параметры. М.: Изд-во стандартов, 2004.
9. Bartel M., Young T.M. Simplified Thrust and Fuel Consumption Models for Modern Two-Shaft Turbofan Engines // J. Aircraft. 2008. No. 45(4). P. 1450–1456.
10. Nuis A. User Manual for the Base of Aircraft Data (BADA), Revision 3.8. EUROCONTROL, EEC Technical Report No. 2010-003, 2010.
11. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. 2-е издание, исправленное и дополненное. М.: ЛЕНАНД, 2014.
12. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 30.04.2022

После доработки 14.07.2022

Принята к публикации 28.07.2022

© 2022 г. В.Н. АФАНАСЬЕВ, д-р техн. наук (afanval@mail.ru)
(Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова, Москва;
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, Москва)

ЗАДАЧА СЛЕЖЕНИЯ ПРИ ДЕЙСТВИИ ОГРАНИЧЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД СИНТЕЗА¹

Рассматривается задача дифференциальной игры слежения с нулевой суммой и квадратичным функционалом качества, в которой объект управления, подвергающийся воздействию неконтролируемых возмущений, описывается нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением. Известно, что синтез оптимальных управлений приводит к необходимости решать в темпе функционирования системы скалярное дифференциальное уравнение в частных производных Беллмана–Айзекса, содержащее сведения о траектории процесса, который должен отслеживаться. Отсутствие информации об этом процессе на всем интервале управления делает синтезированные управления нереализуемыми. Для решения уравнения Беллмана–Айзекса, содержащее текущее значение отслеживаемого процесса, в работе предложен алгебраический метод. В качестве иллюстрации полученных результатов приведено моделирование поведения нелинейной системы с двумя игроками с открытым горизонтом управления.

Ключевые слова: дифференциальные игры, оптимальное управление с обратной связью, уравнение Беллмана–Айзекса, псевдообратные матрицы.

DOI: 10.31857/S0005231022110046, **EDN:** KEGMFD

1. Введение

Теория дифференциальных игр как направление математической теории управления тесно связана с математической теорией оптимальных процессов, теорией игр, вариационным исчислением и теорией дифференциальных уравнений. Становление теории дифференциальных игр связано с именами Р.П. Айзекса [1, 2], Л.С. Понтрягина [3, 4], Е.Ф. Мищенко [5], Б.Н. Пшеничного [6], Н.Н. Красовского [7] и многих других зарубежных и российских ученых. Начиная с работ А.Е. Брайсона [8] дифференциальные

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-8-00535).

игры с ненулевой суммой стали рассматриваться как задачи теории оптимального управления. В задачах дифференциальной игры с заданным интервалом управления с нулевой суммой и квадратичным функционалом качества синтез оптимальных управлений приводит при их реализации к необходимости решать в темпе функционирования объекта скалярное дифференциальное уравнение в частных производных Беллмана–Айзекса [9] с коэффициентами, зависящими от состояния объекта. Кроме этого, решение требует предварительного знания отслеживаемой траектории на всем интервале управления. Аналитическое решение такого уравнения в общем случае является проблемным. В задачах с линейными объектами можно получить реализуемые решения только для случая, когда желаемая траектория описывается соответствующим дифференциальным уравнением [10, 11]. В этом случае параметры регулятора определяются решениями двух дифференциальных уравнений (одно из которых является матричным дифференциальным уравнением типа Риккати, второе — матричным неоднородным линейным дифференциальным уравнением), краевые условия для которых задаются на правом конце.

В настоящей статье задача дифференциальной игры слежения с заданным временем окончания переходного процесса, нелинейным объектом и ограниченными возмущениями рассматривается как проблема оптимального управления, т.е. дифференциальной игры с нулевой суммой. Решение соответствующего уравнения Беллмана–Айзекса ищется с применением алгебраического метода. Построение оптимальных управлений с использованием разработанного метода иллюстрируется результатами математического моделирования для системы уравнений Лотки–Вольтерра, описывающей взаимодействие биологических объектов [12, 13]. В данном случае рассматривается система в общем виде без указания конкретного прикладного применения используемой модели и ее параметров. Будем считать, что эта система описывает классическое межпопуляционное взаимодействие хищников и жертв. В случае использования методов дифференциальных игр в задачах воздействия лекарства на зараженные вирусом клетки используется подобная система уравнений, но более высокого порядка [14].

Материал статьи представлен следующим образом. Во втором разделе осуществлена постановка задачи дифференциальной игры с квадратичным функционалом качества, производится синтез управлений, доказываются их оптимальность. Определяются условия существования решения дифференциальной игры с нулевой суммой. В первой части третьего раздела статьи доказываются Лемма 3.1 о необходимых и достаточных условиях существования алгебраического решения скалярного функционального нелинейного уравнения. Во второй части этого раздела приводятся результаты применения Леммы 3.1 для нахождения решения уравнения Беллмана–Айзекса, содержащего текущее значение отслеживаемого процесса. Доказывается оптимальность полученного решения.

В четвертой части статьи приводится пример использования полученных теоретических результатов при решении задачи дифференциальной игры, описывающей взаимодействие популяций.

2. Задача слежения при действии возмущающих сил

2.1. Постановка задачи

Пусть детерминированная управляемая нелинейная система описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(2.1) \quad \frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) + g_1(x(t))u(t) + g_2(x(t))w(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ y(t) = C(t)x(t).$$

Здесь $x(t) = \{x(\cdot) \in R^n, t \in [t_0, t_f]\}$, $x \in \Omega_x$, где Ω_x — открытое множество в R^n ; $y(t)$ — измеряемый выход системы, $y(t) \in R^p$; $u(t) = \{u(\cdot) \in R^r, t \in [t_0, t_f]\}$, $r \leq n$ — управление, $w(t) = \{w(\cdot) \in R^k, t \in [t_0, t_f]\}$, $k \leq n$ — внешнее возмущение. В силу того, что возможны случаи, когда размерности векторов $u(t)$ и $w(t)$ могут быть $r > k$ или $r < k$, условимся, что число нулевых элементов в векторе $\{g_1(x(t))u(t) + g_2(x(t))w(t)\} \in R^n$ есть $m < n$. Векторы и матрицы $f(x(t))$, $g_1(x(t))$, $g_2(x(t))$ — непрерывные функции.

Предположение 2.1. Непрерывные функции $f(x(t))$, $g_1(x(t))$, $g_2(x(t))$ такие, что при любых $(t_0, x_0) \in R^+ \times \Omega_x$ проходит одно и только одно решение уравнения (2.1) $x(t, t_0, x_0)$.

Предположения относительно ограничений на управляющее воздействие и возмущение будут сделаны ниже.

Пусть $z(t) \in \Omega_z \subset R^p$ — желаемый выход системы.

Введем в рассмотрение ошибку слежения

$$(2.2) \quad \varepsilon(t) = y(t) - z(t) = C(t)x(t) - z(t), \quad \varepsilon(t) \in \Omega_\varepsilon, \quad \text{где } \Omega_\varepsilon = \Omega_x \cup \Omega_z.$$

Предположение 2.2. Управления $u(t)$ и $w(t)$ реализуются с использованием обратной связи по состоянию объекта и желаемого выхода, т.е.

$$(2.3) \quad u(t) = u(t, \varepsilon(t)), \quad w(t) = w(t, \varepsilon(t)).$$

Рассматривая возмущение $w(t)$ как действие некоторого игрока, противодействующего успешному выполнению задачи управления, сформулируем задачу управления в ключе дифференциальной игры двух игроков G_u и G_w . В статье задача дифференциальной игры рассматривается как проблема оптимального управления, т.е. игра с нулевой суммой [8].

Предположение 2.3. Управляющее воздействие и возмущение удовлетворяют следующим ограничениям:

$$(2.4) \quad u^T(t)Ru(t) = \|u(t)\|_R^2 \leq E_u, \quad w^T(t)Pw(t) = \|w(t)\|_P^2 \leq E_w.$$

Предполагается, что существуют такие управляющие воздействия $u(t)$ и $w(t)$, отвечающие ограничениям (2.4), что каждое состояние $x_0 \in X_0 \subset \Omega_x$ в каждый момент t_0 на интервале существования решения системы (2.1) полностью управляемо [15], т.е. в рассматриваемой задаче для всех $x(t)$ система (2.1) управляема, $t \in R^+$.

Для оценки действий игроков введем функционал качества

$$(2.5) \quad \begin{aligned} & J(\varepsilon(\cdot), u(\cdot), w(\cdot)) = \\ & = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \varepsilon^T(t) Q \varepsilon(t) + u^T(t) R u(t) - w^T(t) P w(t) \right\} dt, \\ & \quad Q \succ 0, \quad R \succ 0, \quad P \succ 0. \end{aligned}$$

Предположение 2.4. Об условиях существования оптимального решения задачи (2.1)–(2.5). Для того чтобы записать условия, которым должны удовлетворять оптимальные управления $u^0(t) = u^0(t, \varepsilon(t))$ и $w^0(t) = w^0(t, \varepsilon(t))$ для игроков G_u и G_w , предположим, что такие управления существуют и $x^0(t)$ соответствующая этим управлениям траектория (здесь значком 0 отмечаются оптимальные величины). Другими словами, $x^0(t)$, $u^0(t)$ и $w^0(t)$ удовлетворяют следующему условию:

- 1) $\frac{d}{dt} x^0(t) = f(x^0(t)) + g_1(x^0(t))u^0(t) + g_2(x^0(t))w^0(t)$, $x^0(t_0) = x_0$;
- 2) если $u(t)$ и $w(t)$ — любые управления, удовлетворяющие ограничениям (2.4), такие что соответствующая им траектория $x(t)$ удовлетворяет условию

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t)) + g_1(x(t))u(t) + g_2(x(t))w(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

то $J(\varepsilon^0(\cdot), u^0(\cdot), w^0(\cdot)) \leq J(\varepsilon(\cdot), u(\cdot), w(\cdot))$.

2.2. Оптимальное решение задачи дифференциальной игры

Для синтеза оптимальных управлений в смысле поставленной в разделе 1.1 задачи введем функцию Беллмана–Айзекса [10, 11]

$$(2.6) \quad V(\varepsilon(t)) = \inf_u \sup_w J(\varepsilon(\cdot), u(\cdot), w(\cdot)),$$

где управления $u(t)$, $w(t)$, $t \in [t_0, t_f]$ удовлетворяют ограничениям (2.4), а соответствующая им траектория $\varepsilon(t)$ определена на всем интервале $[t_0, t_f]$ и удовлетворяет фазовому ограничению $\varepsilon(t) \in \Omega_\varepsilon$.

Предположение 2.5. Пусть $V(\varepsilon(t))$, $f(x(t))$, $g_1(x(t))$, $g_2(x(t))$ достаточно гладкие, непрерывно дифференцируемые функции. Тогда для функ-

ции $V(\varepsilon(t))$ запишем уравнение Беллмана–Айзекса:

$$(2.7) \quad \inf_u \sup_w \left[\frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial t} + \frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \{f(x(t)) + g_1(x)u(t) + g_2(x)w(t)\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left\{ \varepsilon^T(t)Q\varepsilon(t) + u^T(t)Ru(t) - w^T(t)Pw(t) \right\} \right] = 0, \\ \varepsilon(t) \in \Omega_\varepsilon, \quad t \in [t_0, t_f].$$

Перепишем уравнение (2.7) в виде

$$\inf_u \sup_w \left[\frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial t} + \frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} f(x(t)) + \frac{1}{2} \left\{ u^T(t)R + \frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} g_1(x) \right\} u(t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left\{ -w^T(t)P + \frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} g_2(x) \right\} w(t) - \frac{1}{2} u^T(t)Ru(t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} w^T(t)Pw(t) + \frac{1}{2} \varepsilon^T(t)Q\varepsilon(t) \right] = 0$$

и назначим управления $u(t)$ и $w(t)$ так, чтобы выражения в фигурных скобках были равны нулю. Будем иметь

$$(2.8) \quad u(t) = -R^{-1}g_1^T(x(t)) \left\{ \frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \right\}^T, \quad w(t) = P^{-1}g_2^T(x(t)) \left\{ \frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \right\}^T.$$

Выражения (2.8) предопределяют структуры уравнений, в рамках которых будут отыскиваться оптимальные управления $u^0(t)$ и $w^0(t)$. В силу (2.8) уравнение Беллмана–Айзекса (2.7) принимает вид

$$(2.9) \quad \inf_u \sup_w \left[\frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial t} + \frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} f(x(t)) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \right\} g_1(x(t)) R^{-1} g_1^T(x(t)) \left\{ \frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \right\}^T + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \right\} g_2(x(t)) P^{-1} g_2^T(x(t)) \left\{ \frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \right\}^T + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \varepsilon^T(t)Q\varepsilon(t) \right] = 0, \\ \varepsilon(t) \in \Omega_\varepsilon, \quad t \in [t_0, t_f].$$

Теорема 1. Пусть существует единственное непрерывно дифференцируемое решение $V^0(x(t))$ задачи (2.1)–(2.5) и существуют управления

$$(2.10) \quad u^0(t) = -R^{-1}g_1^T(x(t)) \left\{ \frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \right\}^T, \\ w^0(t) = P^{-1}g_2^T(x(t)) \left\{ \frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \right\}^T$$

такие, что

$$(2.11) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial t} + \frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} f(x(t)) - \frac{1}{2} (u^0(t))^T R u^0(t) + \\ & + \frac{1}{2} (w^0(t))^T P w^0(t) + \frac{1}{2} \varepsilon^T(t) Q \varepsilon(t) = 0, \\ & \varepsilon(t) \in \Omega_\varepsilon, \quad t \in [t_0, t_f]. \end{aligned}$$

Тогда управления $u^0(t)$ и $w^0(t)$ являются оптимальными, а соответствующая функция Беллмана–Айзекса есть $V^0(\varepsilon(t))$.

Доказательство теоремы 1. Перепишем уравнение (2.11) (с учетом, что в рассматриваемой задаче $\partial V^0(\varepsilon(t))/\partial t = 0$) в виде модифицированного уравнения Беллмана–Айзекса

$$(2.12) \quad \frac{dV^0(\varepsilon(t))}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \Pi(x(t)) \left\{ \frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \right\}^T + \frac{1}{2} \varepsilon^T(t) Q \varepsilon(t) = 0,$$

где

$$(2.13) \quad \Pi(x(t)) = g_1(x(t)) R^{-1} g_1^T(x(t)) - g_2(x(t)) P^{-1} g_2^T(x(t)).$$

Запишем функционал (2.5) с учетом (2.10) и (2.12):

$$\begin{aligned} & J(x(\cdot), u(\cdot), w(\cdot)) = \\ & = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \varepsilon^T(t) Q \varepsilon(t) + \frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \Pi(x(t)) \left\{ \frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \right\}^T \right\} dt = \\ & = - \lim_{t_f \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{dV^0(\varepsilon(t))}{dt} \right\}^T dt = \lim_{t_f \rightarrow \infty} [V^0(\varepsilon(t_0)) - V^0(\varepsilon(t_f))]. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$(2.14) \quad J(u^0, w^0) = V^0(\varepsilon(t_0)),$$

так как в силу (2.5) $V^0(\varepsilon(t_f)) = 0$.

Пусть теперь управления $u(t)$ и $w(t)$ любые отличные от (2.10), но удовлетворяющие предположению 2.4, а $x(t)$ соответствующее решение уравнения (2.1) с этими управлениями. Тогда, используя равенство (2.12), заключаем, что

$$\frac{dV(\varepsilon(t))}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \Pi(x(t)) \left\{ \frac{\partial V(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \right\}^T + \frac{1}{2} \varepsilon^T(t) Q \varepsilon(t) \geq 0.$$

Откуда

$$(2.15) \quad J(u, w) \geq V^0(\varepsilon(t_0)).$$

Сравнение (2.14) и (2.15) показывает, что

$$J(u^0, w^0) = V^0(\varepsilon(t_0)) \leq J(u, w).$$

Тем самым оптимальность управлений $u^0(t, x(t))$ и $w^0(t, x(t))$ установлена. ■

Утверждение 1. Дифференциальная игра (2.1)–(2.5) с нулевой суммой имеет решение, если ограничения (2.4) связаны соотношением

$$(2.16) \quad E_u > E_w.$$

Доказательство утверждения 1. Рассмотрим модифицированное уравнение Беллмана–Айзекса (2.12). Так как в этом уравнении $\varepsilon^T(t)Q\varepsilon(t) > 0$ при $\varepsilon(t) \neq 0$, то

$$\begin{aligned} \frac{dV^0(\varepsilon(t))}{dt} < -\frac{1}{2} \frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \left[g_1(x(t))R^{-1}g_1^T(x(t)) - \right. \\ \left. - g_2(x(t))P^{-1}g_2^T(x(t)) \right] \left\{ \frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \right\}^T \end{aligned}$$

или, учитывая (2.10) и (2.4), имеем

$$\frac{dV^0(\varepsilon(t))}{dt} < -\frac{1}{2} [E_u - E_w].$$

Из последнего выражения следует, что дифференциальная игра (2.1)–(2.5) с нулевой суммой имеет решение, если ограничения (2.4) связаны соотношением

$$E_u > E_w. \quad \blacksquare$$

Очевидно, что последнее будет выполняться, если матрица $\Pi(x(t))$ по крайней мере положительно полуопределенная, что обеспечивается соответствующими свойствами матричных функций $g_1(x(t))$, $g_2(x(t))$ и положительной определенностью матриц штрафов R , P в функционале (2.5). Выполнение утверждения 1 предопределяет существование решения задачи дифференциальной игры с гарантирующим результатом $J(u^0(t), w(t)) \leq J(u^0(t), w^0(t))$.

Отметим, что в соответствии с принятыми свойствами системы (2.1) число ненулевых строк в матрице $\Pi(x(t))$ есть $n - m$.

Система (2.1) с управлениями (2.10) принимает вид

$$(2.17) \quad \frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) - \Pi(x(t)) \left\{ \frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \right\}^T, \quad x(t_0) = x_0,$$

где вектор $\{\partial V^0(x(t))/\partial x\}^T$ отыскивается решением скалярного уравнения в частных производных

$$(2.18) \quad \frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} f(x(t)) - \frac{1}{2} \frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \Pi(x(t)) \left\{ \frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \right\}^T + \frac{1}{2} \varepsilon^T(t)Q\varepsilon(t) = 0.$$

3. Алгебраический метод решения уравнения Беллмана–Айзека

В задачах с линейными объектами, с не заданным временем окончания переходного процесса и квадратичным функционалом качества от уравнения Беллмана–Айзека при выполнении ряда условий можно перейти к уравнению типа Риккати. Уравнение Риккати встречается в различных областях математики (например, в алгебраической геометрии и в теории конформных отображений) и физики. Оно также нередко возникает в прикладных математических задачах. Проблеме поиска решения такого уравнения посвящено достаточно много работ [8, 11]. В этом разделе статьи для задачи дифференциальной игры разрабатывается метод решения уравнения Беллмана–Айзека вида (2.12), основанный на применении алгебраического подхода. Следует отметить, что некоторые результаты разработки алгебраического метода в задачах построения управления для аффинных нелинейных систем, сформулированные в виде леммы, можно обнаружить в работах [19–21]. В этих работах используются свойства псевдообратной матрицы [22] и ее образа, правила выбора которого не устанавливаются. В отличие от этих работ в представляемой статье рассматривается класс задач дифференциальной игры, структура входящих параметров в ее математическую модель объекта такова, что при синтезе оптимальных управлений не требуется использование понятия образа псевдообратной матрицы. Для этого класса задач доказывается лемма, использование которой для синтеза управлений дифференциальной игры с объектом (2.1) и функционалом (2.5) приводит к реализуемым решениям.

3.1. Лемма о методе решения скалярного нелинейного функционального уравнения специального вида

Предположение 3.1. Пусть $\eta(t) \in \Omega_\eta \subset R^n$ — действительный вектор, $\gamma(\eta), \mu(\eta) \in R^n$ — действительные вектор-функции, $\alpha(\eta) > 0$ — действительная функция, определенная на R^n и $\Pi(\eta) \in R^{n \times n}$ — действительная симметрическая неотрицательно определенная вырожденная матрица.

Лемма 1. Псевдообратная матрица $\Pi^+(\eta)$, удовлетворяющая условию

$$(3.1) \quad \Pi(\eta)\Pi^+(\eta)\Pi(\eta) = \Pi(\eta), \quad \Pi^+(\eta) = U\Pi^\Gamma(\eta) = \Pi^\Gamma(\eta)V,$$

где $U \in R^{n \times n}$ и $V \in R^{n \times n}$ — некоторые матрицы, существует и единственна.

Учитывая, что рассматриваются симметрические матрицы, $(\Pi^\Gamma(\eta))^+ = (\Pi^+(\eta))^\Gamma$.

Пусть $K^+(\eta) \in R^{n \times n}$ — симметрическая псевдообратная матрица от $K(\eta)$, которая входит в $\Pi(\eta)$ так, что $\Pi^+(\eta) = K^+(\eta)K^+(\eta)$. Учитывая (3.1), свой-

ства псевдообратных матриц выводятся из определения [22]

$$\begin{aligned} \Pi(\eta)\Pi^+(\eta)\Pi(\eta) &= \Pi(\eta), \quad \Pi^+(\eta)\Pi(\eta)\Pi^+(\eta) = \Pi^+(\eta), \quad (\Pi^+(\eta))^+ = \Pi(\eta), \\ (K(\eta)K(\eta))^+ &= K^+(\eta)K^+(\eta), \quad K^+(\eta) = (K(\eta)K(\eta))^+ K(\eta) = \\ &= K(\eta)(K(\eta)K(\eta))^+, \quad K^+(\eta)K(\eta)K(\eta) = K(\eta)K(\eta)K^+(\eta) = K(\eta). \end{aligned}$$

Рассмотрим скалярное нелинейное функциональное уравнение:

$$(3.2) \quad \gamma^T(\eta)\mu(\eta) - \frac{1}{2}\gamma^T(\eta)\Pi(\eta)\gamma(\eta) + \frac{1}{2}\alpha(\eta) = 0.$$

Лемма 2. Уравнение (3.2) имеет решение относительно $\gamma(\eta)$ в виде

$$(3.3) \quad \gamma(\eta) = \Pi^+(\eta)\mu(\eta) + K^+(\eta)(\mathbf{1}_n \otimes \beta(\eta)),$$

где $\mathbf{1}_n$ — вектор столбец размера $n \times 1$ с элементами, равными 1, \otimes — произведение Кронекера,

$$(3.4) \quad \beta(\eta) = \left\{ \frac{1}{n} \left[\mu^T(\eta) \{ \Pi^+(\eta) \}^T \mu(\eta) + \alpha(\eta) \right] \right\}^{1/2}.$$

Доказательство леммы 2. Подставив (3.3) в (3.2), будем иметь

$$\begin{aligned} \mu^T(\eta)\Pi^+(\eta)\Pi(\eta)\Pi^+(\eta)\mu(\eta) &+ \mu^T(\eta)\Pi^+(\eta)\Pi(\eta)K^+(\eta)(\mathbf{I}_n \otimes \beta(\eta)) + \\ &+ (\mathbf{I}_n \otimes \beta(\eta))^T K^+(\eta)\Pi(\eta)\Pi^+(\eta)\mu(\eta) + \\ &+ (\mathbf{I}_n \otimes \beta(\eta))^T K^+(\eta)\Pi(\eta)K^+(\eta)(\mathbf{I}_n \otimes \beta(\eta)) - \\ &- 2\mu^T(\eta)\Pi^+(\eta)\mu(\eta) - 2(\mathbf{I}_n \otimes \beta(\eta))^T K^+(\eta)\mu(\eta) - \alpha(\eta) = 0 \end{aligned}$$

или, учитывая свойства псевдообратных матриц, будем иметь

$$(3.5) \quad n\beta^2(\eta) - \mu^T(\eta)\Pi^+(\eta)\mu(\eta) - \alpha(\eta) = 0.$$

Из последнего уравнения имеем

$$\beta(\eta) = \left[\frac{1}{n} \left\{ \mu^T(\eta) \{ \Pi^+(\eta) \}^T \mu(\eta) + \alpha(\eta) \right\} \right]^{1/2}.$$

Этим получены достаточные условия существования $\gamma(\eta)$ как решения уравнения (3.2). Используя уравнение (3.5), получим необходимые условия выполнения леммы. Добавим и вычтем в левой части уравнения (3.5) выражение $\mu^T(\eta)K^+(\eta)(\mathbf{1}_n \otimes \beta(\eta))$. Будем иметь

$$\begin{aligned} n\beta^2(\eta) - [\mu^T(\eta)\Pi^+(\eta)\mu(\eta) &+ K^+(\eta)(\mathbf{1}_n \otimes \beta(\eta))] - \\ - \alpha(\eta) + \mu^T(\eta)K^+(\eta)(\mathbf{1}_n &\otimes \beta(\eta)) = 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что из (3.3) следует

$$K^+(\eta) (\mathbf{1}_n \otimes \beta(\eta)) = \gamma(\eta) - \Pi^+(\eta)\mu(\eta),$$

получаем из предыдущего уравнения:

$$\begin{aligned} n\beta^2(\eta) - \mu^T(\eta)\Pi^+(\eta)\mu(\eta) - \alpha(\eta) + \mu^T(\eta)\gamma(\eta) - \mu^T(\eta)\Pi^+(\eta)\mu(\eta) - \\ - \mu^T(\eta)\gamma(\eta) + \mu^T(\eta)\Pi^+(\eta)\mu(\eta) = 0 \end{aligned}$$

или

$$n\beta^2(\eta) - \mu^T(\eta)\Pi^+(\eta)\mu(\eta) - \alpha(\eta) = 0.$$

Полученное уравнение не что иное, как уравнение (3.5). Этим доказывается необходимое условие выполнения леммы 2. \blacksquare

Добавление к лемме 2.

Предположение 3.2. Пусть неотрицательно определенная матрица $\Pi(\eta)$ является диагональной.

В случае выполнения предположения 3.2, когда неотрицательно определенные матрицы $\Pi(\eta)$ и $K(\eta)$ являются диагональными. В этом случае псевдообратная матрица $\Pi^+(\eta)$ заменяется на обратную матрицу $\Pi^{-1}(z)$. В этом случае решение уравнения (3.2) относительно $\gamma(\eta)$ имеет вид

$$\gamma(\eta) = \Pi^{-1}(\eta)\mu(\eta) + K^{-1}(\eta) (\mathbf{1}_n \otimes \beta(\eta)),$$

где

$$\beta(\eta) = \left[\frac{1}{n} \left\{ \mu^T(\eta) \{ \Pi^{-1}(\eta) \}^T \mu(\eta) + \alpha(\eta) \right\} \right]^{1/2}.$$

Отметим, что сформулированное выше справедливо и для случая, когда матрица $\Pi(\eta)$ для всех $\eta(t) \in \Omega_\eta$ — симметричная положительно определенная действительная матрица.

3.2. Применение леммы 2 при решении уравнения Беллмана–Айзекса

Используем результаты леммы 2 для рассматриваемой в статье задачи слежения. Сравнивая (2.18) и (3.2), будем иметь

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \gamma(\eta) = \gamma(t) &= \left\{ \frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \right\}^T, \quad \mu(\eta) = f(x(t)), \\ \alpha(\eta) &= \varepsilon^T(t)Q\varepsilon(t), \quad \Pi(\eta) = \Pi(x(t)). \end{aligned}$$

С учетом введенных обозначений уравнение Беллмана–Айзекса (2.18) принимает вид

$$(3.7) \quad \gamma^T(t)f(x(t)) - \frac{1}{2}\gamma^T(t)\Pi(x(t))\gamma(t) + \frac{1}{2}\varepsilon^T(t)Q\varepsilon(t) = 0.$$

Решением этого уравнения относительно функции $\gamma(t) \in R^n$ является:

$$(3.8) \quad \gamma(t) = \Pi^+(x(t))f(x(t)) + K^+(x(t))(\mathbf{I}_n \otimes \beta(x(t), \varepsilon(t))),$$

где скалярная функция $\beta(x(t), \varepsilon(t))$ определяется решением уравнения

$$(3.9) \quad \beta(x(t), \varepsilon(t)) = \left\{ \frac{1}{n} [f^T(x(t))\Pi^+(x(t))f(x(t)) + \varepsilon^T(t)Q\varepsilon(t)] \right\}^{1/2}.$$

Система (2.17) с учетом (3.6) запишется в виде

$$(3.10) \quad \frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) - \Pi(x(t))\gamma(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

где

$$(3.11) \quad \begin{aligned} & \gamma(t) = \Pi^+(x(t))f(x(t)) + \\ & + K^+(x(t)) \left(\mathbf{I}_n \otimes \left\{ \frac{1}{n} [f^T(x(t))\Pi^+(x(t))f(x(t)) + \varepsilon^T(t)Q\varepsilon(t)] \right\}^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Прежде чем ответить на вопрос об оптимальности управления $\gamma(x(t))$ для системы (3.10), отметим, что функционал

$$(3.12) \quad J(x(\cdot), \gamma(\cdot)) = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \{ \varepsilon^T(t)Q\varepsilon(t) + \gamma^T(t)\Pi(x(t))\gamma(t) \} dt,$$

учитывая введенные обозначения (3.6), эквивалентен функционалу (2.5).

Теорема 2. Пусть имеется система, описываемая обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) - \Pi(x(t))\gamma(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

где $\Pi(x(t))$ — вырожденная неотрицательная матрица. Вектор-функция $\gamma(t) \in R^n$ доставляет минимум функционалу (3.12) на решениях системы

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) - \Pi(x(t))\gamma(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Доказательство теоремы 2. Учитывая, что $\gamma(t) = \{\partial V^0(\varepsilon(t))/\partial \varepsilon\}^T$, перепишем функционал (3.12):

$$\begin{aligned} J(x(\cdot), \gamma(\cdot)) &= \\ &= \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \varepsilon^T(t) Q \varepsilon(t) + \left\{ \frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \right\} \Pi(x(t)) \left\{ \frac{\partial V^0(\varepsilon(t))}{\partial \varepsilon} \right\}^T \right\} dt = \\ &= - \lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{dV^0(\varepsilon(t))}{dt} \right\} dt = \lim_{t_f \rightarrow \infty} [V^0(\varepsilon(t_0)) - V^0(\varepsilon(t_f))]. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$(3.13) \quad J(\gamma^0(t)) = V^0(\varepsilon(t_0)).$$

Сравнение (3.13) и (2.14) показывает, что $J(\gamma^0(t)) = J(u^0(t), w^0(t)) = V^0(\varepsilon(t_0))$. Тем самым оптимальность управления $\gamma^0(x(t))$ в задаче (3.10), (3.12) установлена. \blacksquare

Запишем управления (2.10) с учетом (3.6):

$$(3.14) \quad \begin{aligned} u^0(t) &= -R^{-1} g_1^T(x(t)) \Pi^{-1}(x(t)) f(x(t)) - R^{-1} g_1^T(x(t)) K^{-1}(x(t)) \times \\ &\times \left(\mathbf{1}_n \otimes \left\{ \frac{1}{n} [f^T(x(t)) \Pi^{-1}(x(t)) f(x(t)) + \varepsilon^T(t) Q \varepsilon(t)] \right\}^{1/2} \right), \end{aligned}$$

$$(3.15) \quad \begin{aligned} w^0(t) &= P^{-1} g_2^T(x(t)) \Pi^{-1}(x(t)) f(x(t)) + P^{-1} g_2^T(x(t)) K^{-1}(x(t)) \times \\ &\times \left(\mathbf{1}_n \otimes \left\{ \frac{1}{n} [f^T(x(t)) \Pi^{-1}(x(t)) f(x(t)) + \varepsilon^T(t) Q \varepsilon(t)] \right\}^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Система (2.1) с управлениями (3.14) и (3.15) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= -K(x(t)) \left(\mathbf{1}_n \otimes \left\{ \frac{1}{n} [f^T(x(t)) \Pi^{-1}(x(t)) f(x(t)) + \varepsilon^T(t) Q \varepsilon(t)] \right\}^{1/2} \right), \\ x(t_0) &= x_0, \quad y(t) = Cx(t), \end{aligned}$$

или

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= f(x(t)) - I^* f(x(t)) - K(x(t)) (\mathbf{1}_n \otimes \beta(x(t), \varepsilon(t))), \\ x(t_0) &= x_0, \quad y(t) = Cx(t), \end{aligned}$$

где I^* — диагональная матрица, содержащая в диагонали m нулевых элементов и $n - m$ единичных элементов. Расположение этих элементов в этой

матрице определяется матрицей $K(x(t))$, в которой m строк содержат нулевые элементы.

Следует отметить, что в силу того что $\Pi(x(t)) = K(x(t))K(x(t))$, то матрица $K(x(t))$ может быть, по крайней мере, как положительно, так и отрицательно полуопределенной. В силу того, что скалярная функция $\beta(x(t), \varepsilon(t))$ определяется выражением (3.9), может быть принято как $\beta(x(t), \varepsilon(t)) > 0$, так и $\beta(x(t), \varepsilon(t)) < 0$. Для анализа устойчивости системы (3.16) введем в рассмотрение функцию Ляпунова

$$(3.17) \quad V_L(\varepsilon(t)) = \frac{1}{2} \varepsilon^T(t) \varepsilon(t).$$

Тогда полная производная (3.17) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_L(x) &= \varepsilon^T(t) \left\{ \frac{d}{dt} \varepsilon^T(t) \right\} = -\varepsilon^T(t) \left\{ \frac{d}{dt} z^T(t) \right\} + \varepsilon^T(t) \left\{ C \frac{d}{dt} x^T(t) \right\} = \\ &= -\varepsilon^T(t) \left\{ \frac{d}{dt} z^T(t) \right\} + \varepsilon^T(t) C [f^*(x(t)) - K(x(t)) (I_n \otimes \beta(x(t), \varepsilon(t)))] = \\ &= -\varepsilon^T(t) \left\{ \frac{d}{dt} z^T(t) \right\} + \varepsilon^T(t) C \left\{ \begin{bmatrix} f_1(x(t)) \\ \vdots \\ f_{m-1}(x(t)) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_{mm}(x(t))\beta(x(t), \varepsilon(t)) \\ \vdots \\ k_{nn}(x(t))\beta(x(t), \varepsilon(t)) \end{bmatrix} \right\} < 0, \end{aligned}$$

где $f^*(x(t)) = f(x(t)) - I^* f(x(t))$, или

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} V_L(\varepsilon(t)) &= \sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon_j^T(t) f_j(x(t)) - \\ &- \sum_{j=m}^{n-m} \varepsilon_j^T(t) k_{jj}(x(t)) \beta(x(t), \varepsilon(t)) - \varepsilon^T(t) \left\{ \frac{d}{dt} z^T(t) \right\} < 0 \end{aligned}$$

при $\varepsilon(t) \neq 0$.

Из полученного условия можно видеть, что устойчивость системе (3.17) должно обеспечивать слагаемое уравнения (3.18), в которое входит синтезированное управление, т.е.

$$(3.19) \quad - \sum_{j=m}^{n-m} \varepsilon_j^T(t) k_{jj}(x(t)) \beta(x(t), \varepsilon(t)) < 0 \quad \text{при } x(t) \neq 0.$$

Для определения арифметического знака перед функцией $\varepsilon_j^T(t) k_{jj}(x(t)) \beta(x(t), \varepsilon(t))$, $j = m, \dots, n - m$ примем $k_{jj}(x(t)) \beta(x(t), \varepsilon(t)) > 0$. Тогда условие (3.19) будет выполняться, если назначать знак перед функцией так, чтобы

$$\text{sign} \left\{ \varepsilon_j^T(t) k_{jj}(x(t)) \beta(x(t), \varepsilon(t)) \right\} = \text{sign} \varepsilon_j^T(t), \quad j = m, \dots, n - m.$$

4. Моделирование системы уравнений Лотки-Вольтерра

Рассмотрим динамическую систему [12, 13]

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1(t) &= b_1x_1(t) - a_{11}x_1^2(t) - a_{21}x_1(t)x_2(t), \\ \frac{d}{dt}x_2(t) &= b_2x_2(t) - a_{12}x_1(t)x_2(t) - a_{22}x_2^2(t), \end{aligned}$$

которая описывает взаимодействие конкурирующих популяций. Параметры b_1 и b_2 отвечают за скорость роста каждой популяции (рождаемость), параметры a_{ij} , $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ – за эффективность уничтожения популяции-противника. В большинстве задач данные параметры предполагаются постоянными. Будем рассматривать случай, когда параметры могут быть изменяемыми около некоторых номинальных значений a_{ij}^* – выступать в качестве игроков, т.е. эффективности уничтожения будут задаваться формулой $a_{ij}(t) = a_{ij}^* + u_{ij}(t)$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, векторы $u(t) = (u_{11}(t) \ u_{12}(t))^T$ и $w(t) = (u_{21}(t) \ u_{22}(t))^T$ – управления для двух игроков. В этом случае динамическая система записывается следующим образом:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \begin{pmatrix} b_1x_1(t) - a_{11}^*x_1^2(t) - a_{21}^*x_1(t)x_2(t) \\ b_2x_2(t) - a_{12}^*x_1(t)x_2(t) - a_{22}^*x_2^2(t) \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} -x_1^2(t) & 0 \\ 0 & -x_1(t)x_2(t) \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} -x_1(t)x_2(t) & 0 \\ 0 & -x_2^2(t) \end{pmatrix} w(t). \end{aligned}$$

Таким образом, система (4.2) в сравнении с системой (2.1) имеет следующие параметры:

$$\begin{aligned} f(x(t)) &= \begin{pmatrix} b_1x_1(t) - a_{11}^*x_1^2(t) - a_{21}^*x_1(t)x_2(t) \\ b_2x_2(t) - a_{12}^*x_1(t)x_2(t) - a_{22}^*x_2^2(t) \end{pmatrix}, \\ g_1(x(t)) &= \begin{pmatrix} -x_1^2(t) & 0 \\ 0 & -x_1(t)x_2(t) \end{pmatrix}, \quad g_2(x(t)) = \begin{pmatrix} -x_1(t)x_2(t) & 0 \\ 0 & -x_2^2(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В соответствии с (3.11) управление $\gamma(t)$ определяется выражением:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \Pi^{-1}(x(t))f(x(t)) + \\ &+ K^{-1}(x(t)) \left(\mathbf{I}_n \otimes \left\{ \frac{1}{2} \left[f^T(x(t))\Pi^{-1}(x(t))f(x(t)) + \varepsilon^T(t)Q\varepsilon(t) \right] \right\}^{1/2} \right), \end{aligned}$$

где матрицы $\Pi(x(t))$ и $K(x(t))$ имеют вид

$$\Pi(x(t)) = \begin{pmatrix} \frac{x_1^4(t) - x_1^2(t)x_2^2(t)}{(6x_1(t) + 3x_2(t) + 1)} & 0 \\ 0 & \frac{x_1^2(t)x_2^2(t) - x_2^4(t)}{(3x_1(t) + 6x_2(t) + 1)} \end{pmatrix},$$

$$K(x(t)) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{x_1^4(t) - x_1^2(t)x_2^2(t)}{(6x_1(t) + 3x_2(t) + 1)}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{x_1^2(t)x_2^2(t) - x_2^4(t)}{(3x_1(t) + 6x_2(t) + 1)}} \end{pmatrix}.$$

Система (4.1) имеет четыре положения равновесия

$$(4.3) \quad \begin{aligned} & (0 \ 0)^T, \quad \left(0 \ \frac{b_2}{a_{22}^*}\right)^T, \quad \left(\frac{b_1}{a_{11}^*} \ 0\right)^T, \\ & \left(\frac{b_1 a_{22}^* - b_2 a_{21}^*}{-a_{12}^* a_{21}^* + a_{22}^* a_{11}^*} \ \frac{b_2 a_{11}^* - b_1 a_{12}^*}{-a_{12}^* a_{21}^* + a_{22}^* a_{11}^*}\right)^T. \end{aligned}$$

Пусть желаемым значением для состояния $x(t)$ будет первое условие равновесия из (4.3), т.е. $(z_1(t) \ z_2(t))^T = (0 \ 0)^T$. В силу этого $(\varepsilon_1(t) \ \varepsilon_2(t))^T = (x_1(t) \ x_2(t))^T$.

Будем предполагать, что популяции борются между собой, минимизируя собственные затраты и максимизируя затраты противника. Матрицы функционала (2.5) $Q(x(t))$, $R(x(t))$, $P(x(t))$ назовем в виде

$$(4.4) \quad \begin{aligned} Q(x(t)) &= \begin{pmatrix} (x_2(t) - 1/3)^2 & 0 \\ 0 & (x_1(t) - 1/3)^2 \end{pmatrix}, \\ R(x(t)) &= \begin{pmatrix} 6x_1(t) + 3x_2(t) + 1 & 0 \\ 0 & 3x_1(t) + 6x_2(t) + 1 \end{pmatrix}, \\ P(x(t)) &= \begin{pmatrix} 6x_1(t) + 3x_2(t) + 1 & 0 \\ 0 & 3x_1(t) + 6x_2(t) + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Управляемая система (4.2) с учетом изложенного выше принимает вид

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1(t) &= -\varepsilon_1(t) \sqrt{\frac{x_1^4(t) - x_1^2(t)x_2^2(t)}{(6x_1(t) + 3x_2(t) + 1)}} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{2} \left[f^T(x(t)) \Pi^{-1}(x(t)) f(x(t)) + \varepsilon^T(t) Q(x) \varepsilon(t) \right] \right\}^{1/2}, \\ \frac{d}{dt}x_2(t) &= -\varepsilon_2(t) \sqrt{\frac{x_1^2(t)x_2^2(t) - x_2^4(t)}{(3x_1(t) + 6x_2(t) + 1)}} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{2} \left[f^T(x(t)) \Pi^{-1}(x(t)) f(x(t)) + \varepsilon^T(t) Q(x) \varepsilon(t) \right] \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

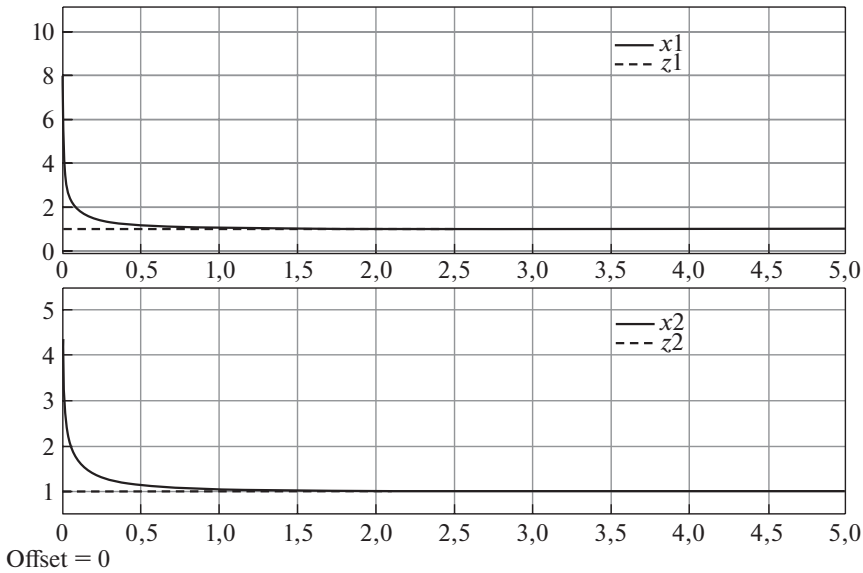


Рис. 1. Управляемые переходные процессы $(x_1(t), x_2(t))$ и $(z_1(t), z_2(t))$.

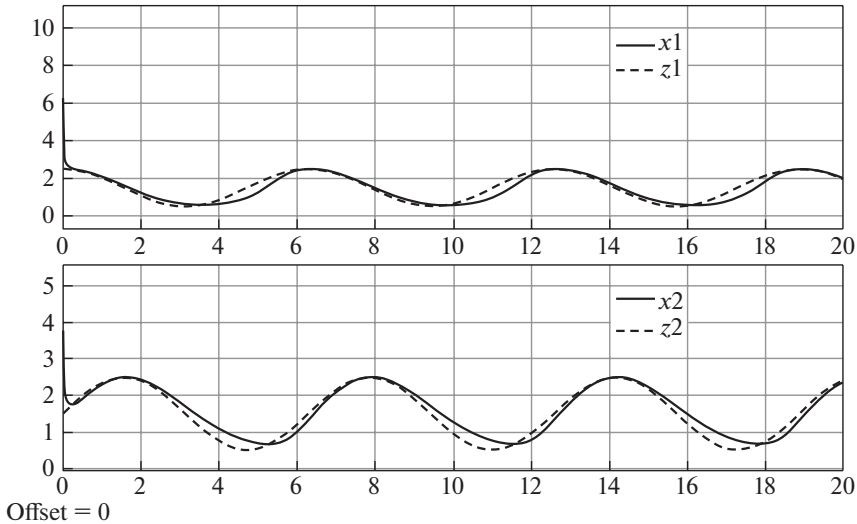


Рис. 2. Управляемые переходные процессы $(x_1(t), x_2(t))$ и $(z_1(t), z_2(t))$.

Вслед за [13] рассмотрим случай, когда постоянные параметры принимаются равными $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $a_{11}^* = 2$, $a_{22}^* = 2$, $a_{12}^* = 1$ и $a_{21}^* = 1$. Назначим для системы (4.5) начальные условия $x_0 = (x_1(0) \ x_2(0))^T = (10 \ 5)^T$. На рис. 1 представлены графики для переходных процессов $x_1(t)$, $x_2(t)$ при $z(t) = (z_1 \ z_2)^T = (1 \ 1)^T$.

На рис. 2 представлены графики переходных процессов $x_1(t)$, $x_2(t)$ при $x_0 = (x_1(0) \ x_2(0))^T = (10 \ 5)^T$ и $z(t) = (z_1 \ z_2)^T = (1,5 + \cos(t) \ 1,5 + \sin(t))^T$.

Приведенные в статье результаты математического моделирования подтверждают эффективность синтезированных управлений в задаче слежения, организованных с использованием ошибки слежения без предварительного знания на всем интервале управления отслеживаемой траектории.

5. Заключение

Дифференциальная игра с нулевой суммой рассмотрена как задача синтеза оптимальных управлений в задаче слежения для класса нелинейных объектов с квадратическим функционалом качества. Реализация полученных управлений связана с проблемой нахождения решения скалярного уравнения в частных производных Беллмана–Айзекса. Для решения этого уравнения предложен алгебраический метод нахождения оптимальных управлений дифференциальной игры. Реализация этих управлений осуществляется решением алгебраических матричных нелинейных уравнений, которое может производиться в темпе функционирования динамического объекта. Разработанный метод алгебраического решения уравнения в частных производных Беллмана–Айзекса может быть использован для реализации управляющих воздействий нелинейными объектами достаточно широкого класса. Полученные в работе теоретические положения проиллюстрированы результатами математического моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
2. Isaacs R.P. Games of Pursuit, Paper P-257. – RAND Corporation, Santa Monica, California. 1951.
3. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх. 1 // Доклады Академии наук СССР. 1967. Т. 174. № 6. С. 1278–1280.
4. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх. 2 // Доклады Академии наук СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 764–766.
5. Мищенко Е.Ф. О некоторых игровых задачах преследования и уклонения от встречи // АиТ. 1972. № 9. С. 24–30.
Mishchenko E.F. On certain game problems in pursuit and evasion // Autom. Remote Control. 1972. V. 33. No. 9. P. 1424–1429.
6. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1969.
7. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
8. Bryson A.E., Yu-Chi Ho. Applied Optimal Control. Optimization, Estimation and Control. Waltham, Massachusetts Toronto, London, 1969.
9. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М.: Мир, 1974.
10. Kalman R.E. The Theory of Optimal Control and Calculus of Variations / in Bellman (ed). Mathematical Optimization Techniques, University of California Press, Berkely, Calif. 1963.

11. *Афанасьев В.Н.* Математическая теория управления нелинейными непрерывными динамическими системами. М.: КРАСНАНД. 2021.
12. *Buratto A., Cesaretto R., Zamarchi R.* HIV vs. the Immune System: A Differential Game // *Math.* 2015. V. 3. No. 4. P. 1139–1170.
13. *Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П.* Динамические системы и модели биологии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
14. *Трубецков Д.И.* Феномен математической модели Лоттки—Вольтерры и сходных с ней // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2011. Т. 19. № 2. С. 69–88.
15. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. Том 2. М.: МЦНМО, 2011.
16. *Галеев Э.М., Зеликин М.Ю., Конягин С.В. и др.* Оптимальное управление / Под ред. Н.П. Осмоловского и В.М. Тихомирова. М.: МЦНМО, 2008.
17. *Егоров А.И.* Уравнения Риккати. М.: Физматлит, 2001. Изд-во Наука, Физматлит 2001.
18. *Winternitz P.* Lie groups and solutions of nonlinear partial differential equations. *Lecture Notes in Physics*, 1983. V. 189. P. 263–331.
19. *Liu R.W., Leake J.* Inverse Lyapunov Problems // *Technical Report No. EE6510*, Department of Electrical Engineering, University of Notre Dame, August 1965.
20. *Sain M.K., Won C.-H., Spencer Jr., B.F., Liberty S.R.* Cumulants and Risk-Sensitive Control: A Cost Mean and Variance Theory with Application to Seismic Protection of Structures // *Advances in Dynamic Games and Applications*, *Annals of the International Society of Dynamic Games*, Boston: Birkhauser. 2000. V. 5. P. 427–459.
21. *Won Chang-Hee, Biswas Saroj.* Optimal Control Using Algebraic Method for Control – Affine Nonlinear Systems. Temple University, USA. cwon@temple.edu, sbiswas@temple.edu. April 20. 2007. 33 p.
22. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 26.07.2021

После доработки 27.06.2022

Принята к публикации 28.07.2022

© 2022 г. А.В. БОРИСОВ, д-р физ.-мат. наук (A.Borisov@frccsc.ru)
(Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, Москва)

\mathcal{L}_1 -ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ МАРКОВСКИХ СКАЧКООБРАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ III: ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ¹

Работа является продолжением цикла статей [1, 2] и посвящена решению задачи оценивания параметров скрытых марковских моделей. В качестве скрытого состояния выступает однородный марковский скачкообразный процесс с конечным множеством состояний. Доступные наблюдения являются косвенными и содержат винеровские процессы, интенсивности которых различны и зависят от скрытого состояния. Оцениванию подлежат как матрица интенсивностей переходов марковского состояния, так и параметры сноса и диффузии наблюдений. Для идентификации предложен итеративный алгоритм, основанный на сглаживании состояния системы по наблюдениям на фиксированном интервале времени. Затем по данным оценкам восстанавливаются параметры. В работе детально описаны все численные схемы оценивания состояния и идентификации параметров. Приведен комплекс иллюстративных численных примеров, демонстрирующих высокое качество предлагаемых оценок идентификации.

Ключевые слова: скрытая марковская модель, мультипликативные шумы в наблюдениях, сглаживание на фиксированном интервале наблюдения, \mathcal{L}_1 -оптимальная оценка, EM-алгоритм.

DOI: 10.31857/S0005231022110058, EDN: КЕКЧУ

1. Введение

Проблемам идентификации параметров систем наблюдения, состояния которых описываются марковскими процессами с конечным множеством возможных состояний, скоро исполнится 60 лет [3, 4]. Несмотря на возраст, теоретические решения и алгоритмы их реализации [5–7] не теряют своей актуальности из-за своей востребованности для решения широкого спектра прикладных задач системного анализа. Другой причиной неослабевающего внимания к проблемам идентификации является постоянное расширение классов систем наблюдения и моделей доступной измерительной информации.

¹ Работа выполнена с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования “Высокопроизводительные вычисления и большие данные” (ЦКП “Информатика”) ФИЦ ИУ РАН, Москва.

К настоящему времени существуют оценки параметров марковских цепей по наблюдениям с аддитивными и мультипликативными шумами [8], а также *марковских скачкообразных процессов* (МСП) по непрерывным косвенным наблюдениям в присутствии аддитивных винеровских процессов [9–11].

Целью данной статьи является разработка нового алгоритма идентификации параметров *скрытых марковских моделей* (СММ) с непрерывным временем по наблюдениям, шумы в которых зависят от скрытого состояния. Обычно такие шумы называют мультипликативными. Задачи оценивания состояний и параметров систем по наблюдениям такого типа исследуются достаточно редко из-за известных теоретических сложностей [12, 13]. Корректная постановка и формальное решение задачи оптимальной фильтрации состояний МСП по диффузионным наблюдениям с мультипликативными шумами совместно с реализующим его комплексом численных методов представлены в [1, 2]. Данная статья является естественным продолжением этих исследований.

Работа организована следующим образом. Раздел 2 содержит описание исследуемой системы наблюдения и постановку задачи идентификации ее параметров. Раздел включает сравнение различных СММ, для которых задача идентификации решалась с помощью EM-алгоритма. В разделе также представлены доводы в пользу предлагаемого алгоритма идентификации. Они основываются на возможности построения для исследуемых СММ высокоточных оценок сглаживания на фиксированном интервале для скрытого состояния в случае выполнения некоторых необременительных условий идентифицируемости. В разделе 3 представлен численный алгоритм двухфильтрового сглаживания, позволяющий получить искомую сглаженную оценку в виде некоторой комбинации оценок фильтрации состояния МСП в прямом и обратном времени.

Раздел 4 посвящен алгоритмам фильтрации состояний МСП в прямом и обратном времени по диффузионным наблюдениям, предварительно дискретизованным по времени. В контексте работы численные алгоритмы оценивания состояния МСП называются *устойчивыми*, если они гарантируют доставляемым оценкам выполнение условий неотрицательности компонент и нормировки. Например, численный алгоритм фильтрации, основанный на схеме Эйлера–Маруямы решения *стохастической дифференциальной системы* (СДС), описывающей фильтр Вонэма, не обеспечивает выполнения этих условий: как только они нарушаются, вычисленные по данной схеме оценки “взрываются”. Именно в контексте этого явления предложенные алгоритмы названы устойчивыми.

Вычисление сглаженных оценок состояния представляет собой E-шаг в EM-процедуре. M-шаг и вся процедура идентификации описаны в разделе 5. В нем представлены формулы пересчета \mathcal{L}_2 -оптимальных оценок сглаживания в \mathcal{L}_1 -оптимальные, а также формулы вычисления функционалов от траекторий наблюдений и оценок МСП, на основании которых собственно и

вычисляются оценки параметров СММ. Предложенные в работе алгоритмы оценивания состояния МСП и идентификации параметров СММ названы *эффективными* в том смысле, что они не являются сеточными. При решении задач оценивания состояния МСП это означает, что алгоритмы не требуют решения стохастических дифференциальных уравнений в частных производных типа Закаи или Кушнера–Стратоновича. При решении задачи идентификации это означает, что алгоритм не привлекает аппарат байесовского оценивания и описания оцениваемых параметров с помощью их вероятностного распределения. С вычислительной точки зрения это означает, что эффективные алгоритмы используют радикально меньше оперативной памяти и требуют меньше вычислений для своей реализации.

Раздел 6 содержит результаты комплекса иллюстративных вычислительных экспериментов. Проведен численный анализ качества оценок фильтрации в прямом и обратном времени состояния МСП в сравнении с оценками сглаживания на фиксированном интервале наблюдения. Сравнение проведено для случая известных параметров СММ. Представлены результаты оценивания параметров СММ, выполненного с помощью предложенного алгоритма идентификации. Исследовано качество последующей фильтрации скрытого состояния МСП с использованием идентифицированных параметров в сравнении с “идеальным вариантом”: фильтрацией состояний при точно известных параметрах системы наблюдения. Раздел 7 содержит заключительные замечания.

2. Постановка задачи

На триplete с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]})$ рассматривается СММ

$$(1) \quad X_t = X_0 + \int_0^t \Lambda^\top X_s ds + M_t^X, \quad t \in [0, T],$$

$$(2) \quad \mathcal{Y}_r = \int_{t_{r-1}}^{t_r} f X_s ds + \int_{t_{r-1}}^{t_r} \sum_{n=1}^N X_s^n g_n^{\frac{1}{2}} dW_s, \quad r \in \{1, \dots, R\}, \quad t_r = r\delta, \quad T = R\delta,$$

где

- $X_t = \text{col}(X_t^1, \dots, X_t^N) \in \mathbb{S}^N$ — ненаблюдаемое состояние, являющееся однородным МСП с конечным множеством состояний $\mathbb{S}^N \triangleq \{e_1, \dots, e_N\}$ (\mathbb{S}^N — множество единичных векторов евклидова пространства \mathbb{R}^N), матрицей интенсивностей переходов (МИП) Λ и начальным распределением $\pi = \text{col}(\pi^1, \dots, \pi^N)$; процесс M_t^X является \mathcal{F}_t -согласованным мартингалом,
- $\mathcal{Y}_r = \text{col}(\mathcal{Y}_r^1, \dots, \mathcal{Y}_r^M) \in \mathbb{R}^M$ — диффузионные наблюдения

$$(3) \quad Y_t = \int_0^t f X_s ds + \int_0^t \sum_{n=1}^N X_s^n g_n^{\frac{1}{2}} dW_s,$$

дискретизованные по времени с шагом δ ; $W_t = \text{col}(W_t^1, \dots, W_t^M) \in \mathbb{R}^M$ является \mathcal{F}_t -согласованным стандартным винеровским процессом, характеризующим шумы в наблюдениях, $M \times N$ -мерная матрица f и набор $M \times M$ -мерных матриц $\{g_n\}_{n=\overline{1, N}}$ определяют снос и интенсивность шумов при условии $X_t = e_n$.

Ниже в изложении неубывающее семейство σ -подалгебр, порожденных наблюдениями \mathcal{Y} , полученными до момента времени t_r , обозначено $\mathfrak{Y}_r \triangleq \{\mathcal{Y}_q : q = \overline{1, r}\}$, $\mathfrak{Y}_0 \triangleq \{\emptyset, \Omega\}$.

Для системы наблюдения (1)–(2) предполагаются выполненными следующие условия.

1. Триплет с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}\}_{t \in [0, T]})$ является пространством Винера–Пуассона [15].

2. Все параметры СММ Λ , f и $\{g_n\}_{n=\overline{1, N}}$ являются неизвестными неслучайными матрицами подходящей размерности.

3. Матрица Λ удовлетворяет условию $\min_{i, j: i \neq j} \lambda^{ij} > 0$, а также обычному тождеству МИП: $\sum_j \lambda^{ij} \equiv 0$.

4. Шумы в наблюдениях \mathcal{Y} равномерно невырождены [16], т.е. $\min_{1 \leq n \leq N} g_n > \alpha I > 0$ для некоторого $\alpha > 0$; здесь и далее I — единичная матрица подходящей размерности.

5. Набор матриц интенсивностей шумов $\{g_n\}_{n=\overline{1, N}}$ удовлетворяет *условию идентифицируемости* [14], заключающемуся в том, что все g_n различны.

Задача идентификации СММ заключается в построении оценок параметров Λ , f и $\{g_n\}_{n=\overline{1, N}}$ по имеющимся наблюдениям $\{\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_R\}$.

Поставленная задача представляет собой аппроксимацию аналогичной задачи идентификации по исходным диффузионным наблюдениям (1), (3). В [9, 10] исследовалась схожая проблема. Наблюдения были скалярными с аддитивными винеровскими процессами (т.е. $g_n \equiv g = I$). Авторы представили процедуру совместной фильтрации состояния МСП и идентификации параметров, основанной на применении ЕМ-алгоритма. Собственно процедура идентификации параметров требовала оценки числа скачков МСП $e_i \rightarrow e_j$ ($i \neq j$)

$$(4) \quad N_t^{i, j} = \int_0^t X_s^i dX_s^j,$$

а также суммарного времени пребывания МСП в различных состояниях e_i

$$(5) \quad O_t^i = \int_0^t X_s^i ds, \quad i = \overline{1, N}.$$

В монографии [8] был исследован аналог системы (1), (3) с дискретным временем. В качестве доступных наблюдений выступал векторный процесс

с мультипликативным шумом. Авторы модифицировали EM-алгоритм, используя в нем не оценки фильтрации функционалов $\{N_t^{i,j}\}$, $\{O_t^i\}$, а их более точные аналоги, полученные сглаживанием на фиксированном интервале наблюдений, а также оценки дополнительных функционалов т.н. “уровневых сумм” (*level sums*):

$$(6) \quad Q_t^{i,q} = \int_0^t X_s^i q(Y_s) dY_s,$$

где $q = q(y)$ — некоторая детерминированная функция. Статья [11] была посвящена алгоритмам численной реализации решения задачи идентификации параметров СММ с дискретным временем по скалярным наблюдениям с аддитивными шумами неизвестной интенсивности ($g_n \equiv g$ — неизвестный скаляр). Идентификация в этом случае также проводилась с использованием оценок функционалов $\{N_t^{i,j}\}$, $\{O_t^i\}$ и $\{Q_t^{i,q}\}$, вычисленных на фиксированном интервале наблюдений.

В [14] представлено решение задачи оптимальной фильтрации состояния МСП по векторным диффузионным наблюдениям с мультипликативными шумами. Предложено некоторое преобразование, разбивающее исходные наблюдения на совокупность диффузионных процессов с единичной диффузией, а также набор считающих процессов и случайных векторов, доступных в неслучайные моменты времени. Аналитическое решение задачи фильтрации представлено в виде решения некоторой дискретно-непрерывной нелинейной СДС с непрерывными и считающими процессами в правой части. В статье показано, что выполнение условия идентифицируемости 5) достаточно для точного восстановления состояния МСП по имеющимся зашумленным наблюдениям.

К сожалению, решение указанной СДС не удастся реализовать численно с помощью известных классических методов [17] из-за того, что упомянутое преобразование наблюдений представляет собой результат двойного предельного перехода, примененного к исходным наблюдениям. Чтобы избежать численной реализации данной операции в [2] было предложено перейти к фильтрации по наблюдениям, предварительно дискретизованным по времени. Был представлен комплекс соответствующих численных алгоритмов, а также характеристики точности соответствующих оценок. Следует отметить, что оцениванию в [2] подвергалось только само состояние МСП X_t , а не процессы $\{N_t^{i,j}\}$, $\{O_t^i\}$ и $\{Q_t^{i,q}\}$, участвующие в процедуре идентификации. Идея предлагаемой статьи заключается в том, чтобы строить оценки этих процессов не непосредственно путем обработки дискретизованных наблюдений, а на основе полученных оптимальных оценок сглаживания состояния X_t .

В статье используются следующие обозначения:

- $\mathbf{1}$ — вектор-строка подходящей размерности, состоящая из единиц,
- $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(x)$ — индикаторная функция множества \mathcal{A} ,
- $\|\alpha\|_K^2 \triangleq \alpha^\top K \alpha$,

- N_r^X — случайное число скачков состояния X_t , произошедших на интервале времени $[t_{r-1}, t_r]$,
- $\tau_r = \text{col}(\tau_r^1, \dots, \tau_r^N) \triangleq \int_{t_{r-1}}^{t_r} X_s ds$ — случайный вектор, компоненты τ_r^n которого равны времени пребывания процесса X в каждом из возможных состояний e_n на интервале $[t_{r-1}, t_r]$,
- $\mathcal{D} \triangleq \left\{ u = \text{col}(u^1, \dots, u^N) : u^n \geq 0, \sum_{n=1}^N u^n = h \right\}$ — $(N-1)$ -мерный симплекс в пространстве \mathbb{R}^N ; \mathcal{D} является носителем распределения вектора τ_r ,
- $\Pi \triangleq \left\{ \pi = \text{col}(\pi^1, \dots, \pi^N) : \pi^n \geq 0, \sum_{n=1}^N \pi^n = 1 \right\}$ — “вероятностный симплекс”, содержащий возможные значения начального распределения π ,
- $\rho_r^{k,\ell}(du)$ — условное распределение вектора $X_{t_r}^\ell \tau_r$ при условии $X_{t_{r-1}} = e_k$, т.е. для любого множества $\mathcal{G} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ верно равенство

$$\mathbb{E} \left\{ \mathbf{I}_{\mathcal{G}}(\tau_r) X_{t_r}^\ell | X_{t_{r-1}} = e_k \right\} = \int_{\mathcal{G}} \rho_r^{k,\ell}(du),$$

- $\rho_r^{k,\ell,q}(du)$ — условное распределение вектора $X_{t_r}^\ell \mathbf{I}_{\{q\}}(N_r^X) \tau_r$ при условии $X_{t_{r-1}} = e_k$, т.е. для любого множества $\mathcal{G} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ верно равенство

$$\mathbb{E} \left\{ \mathbf{I}_{\mathcal{G}}(\tau_r) \mathbf{I}_{\{q\}}(N_r^X) X_{t_r}^\ell | X_{t_{r-1}} = e_k \right\} = \int_{\mathcal{G}} \rho_r^{k,\ell,q}(du),$$

- $\varrho_r^{k,\ell}(du)$ — условное распределение вектора $X_{t_r}^\ell \tau_{r+1}$ при условии $X_{t_{r+1}} = e_k$, т.е. для любого множества $\mathcal{G} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ верно равенство

$$\mathbb{E} \left\{ \mathbf{I}_{\mathcal{G}}(\tau_{r+1}) X_{t_r}^\ell | X_{t_{r+1}} = e_k \right\} = \int_{\mathcal{G}} \varrho_r^{k,\ell}(du),$$

- $\varrho_r^{k,\ell,q}(du)$ — условное распределение вектора $X_{t_r}^\ell \mathbf{I}_{\{q\}}(N_{r+1}^X) \tau_{r+1}$ при условии $X_{t_{r+1}} = e_k$, т.е. для любого множества $\mathcal{G} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ верно равенство

$$\mathbb{E} \left\{ \mathbf{I}_{\mathcal{G}}(\tau_{r+1}) \mathbf{I}_{\{q\}}(N_{r+1}^X) X_{t_r}^\ell | X_{t_{r+1}} = e_k \right\} = \int_{\mathcal{G}} \varrho_r^{k,\ell,q}(du),$$

- $\mathcal{N}(y, m, K) \triangleq (2\pi)^{-M/2} \det^{-1/2} K \exp \left\{ -\frac{1}{2} \|y - m\|_{K^{-1}}^2 \right\}$ — M -мерная гауссовская плотность со средним m и невырожденной ковариационной матрицей K ,
- $\xi \triangleq \text{vec}(\Lambda, f, \{g_n\}_{1,N}) - (N(N-1) + NM + NM^2)$ -мерный вектор оцениваемых параметров СММ,
- $Y_t \triangleq \sigma\{Y_s, 0 \leq s \leq t\}$ — естественный поток σ -алгебр, порожденный непрерывными наблюдениями Y_s , полученными до момента времени t включительно.

3. Вспомогательная задача: сглаживание на фиксированном интервале наблюдения

Предлагаемый алгоритм идентификации параметров СММ основан на итеративном вычислении оценок $\{\widehat{X}_r^s\}_{r=\overline{1,R}}$: $\widehat{X}_r^s \triangleq \mathbf{E} \{X_{t_r} | \mathfrak{Y}_R\}$ сглаживания на фиксированном интервале наблюдения $[0, T]$. Для эффективной реализации этой процедуры предлагается использовать двухфилтровую процедуру сглаживания [18–20].

Во-первых, представим алгоритм вычисления оптимальной оценки фильтрации в прямом времени $\widehat{X}_r \triangleq \mathbf{E} \{X_{t_r} | \mathfrak{Y}_r\}$.

Для этого введем в рассмотрение следующие положительные случайные числа и матрицы, составленные из них:

$$(7) \quad \theta_r^{kj} \triangleq \int_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(\mathcal{Y}_r, f u, \sum_{p=1}^N u^p g_p \right) \rho_r^{k,j}(du), \quad \theta_r \triangleq \|\theta_r^{kj}\|_{k,j=\overline{1,N}}.$$

Предложение 1. Условное математическое ожидание (УМО) \widehat{X}_r вычисляется по рекуррентной формуле

$$(8) \quad \widehat{X}_r = (\mathbf{1}\theta_r^\top \widehat{X}_{r-1})^{-1} \theta_r^\top \widehat{X}_{r-1}, \quad r > 0, \quad \widehat{X}_0 = \pi.$$

Доказательство предложения 1 вполне аналогично доказательству леммы 2 в [1].

Во-вторых, предложим мартингалное представление МСП X_t в обратном времени, а также формулы вычисления оптимальной оценки фильтрации состояния МСП в обратном времени.

На исходном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ рассмотрим

- поток σ -алгебр $\{\mathcal{F}_t^r\}_{t \in [0, T]}$ в обратном времени: $\mathcal{F}_t^r \triangleq \sigma\{X_s, Y_T - Y_s : t \leq s \leq T\}$;
- набор дискретизованных наблюдений, $\mathfrak{Y}_r^b \triangleq \sigma\{\mathcal{Y}_q : r < q \leq R\}$; $\mathfrak{Y}_R^b \triangleq \{\emptyset, \Omega\}$, полученных на интервале времени $(t_r, T]$.

Благодаря условию 3) компоненты распределения МСП $\pi(t) = \mathbf{E} \{X_t\}$, являющегося единственным решением системы уравнений Колмогорова $\pi(t) = \pi + \int_0^t \Lambda^\top \pi(s) ds$, строго положительны $\pi^n(t) > 0$ для любых $n = \overline{1, N}$ и $t > 0$ [16]. Поэтому можно корректно определить матричнозначную функцию

$$(9) \quad \Gamma(t) \triangleq \text{diag}^{-1} \pi(t) \Lambda^\top \text{diag} \pi(t) - \text{diag}^{-1} \pi(t) \text{diag} (\Lambda^\top \pi(t)),$$

являющуюся МИП процесса X_t в обратном времени.

Предложение 2. МСП X_t (1) является единственным сильным решением следующей стохастической системы в обратном времени

$$(10) \quad X_t = X_T + \int_t^T \Gamma^\top(s) X_s ds + \left[M_t^X - M_T^X - \int_t^T (\Gamma(s) + \Lambda)^\top X_s ds \right].$$

$$M_t^{bX} \triangleq M_t^X - M_T^X - \int_t^T (\Gamma(s) + \Lambda)^\top X_s ds$$

представляет собой \mathcal{F}_t^r -согласованный квадратично интегрируемый мартингал:

$$\mathbb{E} \left\{ M_t^{bX} | \mathcal{F}_s^r \right\} = M_s^{bX} \quad \text{P - н.н. для любых } 0 \leq t \leq s \leq T.$$

Доказательство предложения 2 приведено в [19, 21].

Для вычисления оценки фильтрации в обратном времени по аналогии с прямым временем определим следующие положительные случайные величины и матрицы из них:

$$(11) \quad \vartheta_r^{kj} \triangleq \int_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(\mathcal{Y}_{r+1}, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p \right) \varrho_r^{k,j}(du), \quad \vartheta_r \triangleq \|\vartheta_r^{kj}\|_{k,j=\overline{1,N}}.$$

Можно показать, что оценка фильтрации $\widehat{X}_r^b \triangleq \mathbb{E} \{ X_{t_r} | \mathfrak{Y}_r^b \}$ состояния МСП в обратном времени может быть вычислена с помощью рекуррентного алгоритма — аналога (8)

$$(12) \quad \widehat{X}_r^b = (\mathbf{1} \vartheta_r^\top \widehat{X}_{r+1}^b)^{-1} \vartheta_r^\top \widehat{X}_{r+1}, \quad r < R, \quad \widehat{X}_R^b = \pi(T).$$

В-третьих, оптимальная оценка сглаживания на фиксированном интервале наблюдения может быть получена как симметричное преобразование оценок фильтрации в прямом и обратном времени.

Предложение 3. Оптимальная оценка сглаживания $\widehat{X}_r^s = \text{col}(\widehat{X}_r^{1s}, \dots, \widehat{X}_r^{Ns}) = \mathbb{E} \{ X_{t_r} | \mathfrak{Y}_R \}$, $r = \overline{0, R}$ поэлементно определяется формулой

$$(13) \quad \widehat{X}_r^{ns} = \frac{\widetilde{X}_r^{ns}}{\sum_{j=1}^N \widetilde{X}_r^{js}}, \quad n = \overline{1, N},$$

где ненормированная оценка $\widetilde{X}_r^s \triangleq \text{col}(\widetilde{X}_r^{1s}, \dots, \widetilde{X}_r^{Ns})$ является функцией оценок фильтрации в прямом \widehat{X}_r и обратном \widehat{X}_r^b времени, а также априорного распределения $\pi(t_r)$:

$$(14) \quad \widetilde{X}_r^{ns} = \frac{\widehat{X}_r^n \widehat{X}_r^{nb}}{\pi^n(t_r)}, \quad n = \overline{1, N}, \quad r = \overline{1, R}.$$

Доказательство предложения 3 аналогично доказательству теоремы 4 в [20].

4. Численный алгоритм решения задачи фильтрации

Ни условное распределение $\rho^{k,\ell}$ в прямом времени, ни его аналог $\varrho^{k,\ell}$ в обратном времени не являются абсолютно непрерывными по мере Лебега, поэтому вычисление интегралов (7) и (11) является нетривиальной задачей.

По формуле полной вероятности

$$\theta_r^{kj} \triangleq \int_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(\mathcal{Y}_r, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p \right) \rho_r^{k,j}(du) = \sum_{q=0}^{\infty} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(\mathcal{Y}_r, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p \right) \rho_r^{k,j,q}(du).$$

Явный вид отдельных слагаемых $\rho^{k,\ell,q}$ представлен в [2] для $q = 0, 1, 2$, общий же вид может быть выведен также с использованием формулы полной вероятности. Было показано, что в этом нет необходимости: при достаточно малом шаге δ бесконечная сумма в последней формуле хорошо аппроксимируется первыми двумя слагаемыми ($q = 0$ и 1). В этом случае оценка \widehat{X}_r приближается *аналитической аппроксимацией порядка 1*:

$$(15) \quad \widehat{X}_r = (\mathbf{1}_{\mathcal{X}_r}^\top \widehat{X}_{r-1})^{-1} \mathcal{X}_r^\top \widehat{X}_{r-1}, \quad r > 0, \quad \widehat{X}_0 = \pi,$$

где

$$(16) \quad \mathcal{X}_r^{kj} \triangleq \sum_{q=0}^1 \int_{\mathcal{D}} \mathcal{N} \left(\mathcal{Y}_r, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p \right) \rho_r^{k,j,q}(du), \quad \mathcal{X}_r \triangleq \|\mathcal{X}_r^{kj}\|_{k,j=1,\overline{N}}.$$

Данное приближение учитывает не более одного скачка МСП на интервале дискретизации $[t_{r-1}, t_r]$. Если $\bar{\lambda} \triangleq \max_{1 \leq n \leq N} |\lambda_{nn}|$, и шаг δ так мал, что $\bar{\lambda}\delta < 1$, то (см. [2])

$$(17) \quad C \triangleq e^{-\bar{\lambda}\delta} \frac{2}{(\bar{\lambda}\delta)^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\bar{\lambda}\delta)^k}{k!} < 1,$$

и точность аппроксимации характеризуется неравенством

$$\mathbb{E} \left\{ \left\| \widehat{X}_r - \widehat{X}_r \right\|_1 \right\} \leq 2 - 2 \left(1 - C \frac{(\bar{\lambda}\delta)^2}{2} \right)^r \sim \bar{\lambda}^2 \delta t_r \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0.$$

Элементы \mathcal{X}_r^{kj} имеют следующий явный вид:

$$(18) \quad \mathcal{X}_r^{kj} = \delta_{kj} e^{\lambda_{jj}\delta} \mathcal{N}(\mathcal{Y}_r, \delta f^j, \delta g_j) + (1 - \delta_{kj}) \lambda_{kj} e^{\lambda_{jj}\delta} \int_0^\delta V^{kj}(\mathcal{Y}_r, u) du,$$

где δ_{kj} — символ Кронекера, а

$$(19) \quad V^{kj}(y, u) \triangleq e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj})u} \mathcal{N}(y, u f^k + (\delta - u) f^j, u g_k + (\delta - u) g_j).$$

Интеграл в (18), а вместе с ним и вся аппроксимация $\widehat{\mathbf{X}}_r$ не могут быть вычислены аналитически, поэтому их приходится находить численно, внося дополнительную ошибку. Для этого предлагается использовать составной метод средних прямоугольников с малым шагом $\delta^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$:

$$(20) \quad \begin{aligned} \mathcal{Z}_r^{kj} \approx \psi_r^{kj} \triangleq \delta_{kj} e^{\lambda_{jj}\delta} \mathcal{N}(\mathcal{Y}_r, \delta f^j, \delta g_j) + \\ + (1 - \delta_{kj}) \lambda_{kj} \delta^{1+\alpha} \sum_{i=1}^{[\delta^{-\alpha}]} V^{kj} \left(\mathcal{Y}_r, \delta^{1+\alpha} \left(i - \frac{1}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Используя обозначения $\psi_r \triangleq \|\psi_r^{kj}\|_{k,j=\overline{1,N}}$, можно представить численную аппроксимацию порядка $\min(\alpha, 1)$, основанную на составной схеме средних прямоугольников

$$(21) \quad \widehat{\mathbf{X}}_r = (\mathbf{1}\psi_r^\top \widehat{\mathbf{X}}_{r-1})^{-1} \psi_r^\top \widehat{\mathbf{X}}_{r-1}, \quad r > 0, \quad \widehat{\mathbf{X}}_0 = \pi.$$

Суммарная ошибка аппроксимации $\widehat{\mathbf{X}}_r$ характеризуется следующим неравенством [2]:

$$\mathbb{E} \left\{ \left\| \widehat{\mathbf{X}}_r - \widehat{\mathbf{X}}_r \right\|_1 \right\} \leq C_1(\delta + C_2\delta^\alpha)t_r$$

для некоторых положительных констант C_1 и C_2 . Из этого неравенства следует, что рациональным с точки зрения точности выбором параметра α будет 1.

Все рассуждения выше относились к аппроксимации оценки фильтрации в прямом времени. Данный подход может быть применен и при вычислении оценки фильтрации в обратном времени. Как и в случае прямого течения времени предполагается, что на интервале временной дискретизации состояние МСП может совершить не более одного скачка. При этом приходится учитывать тот факт, что МСП X_t в обратном времени в общем случае не обладает свойством однородности. Аналог формулы (18) принимает вид

$$(22) \quad \begin{aligned} \zeta_r^{kj} = \delta_{kj} \exp \left(\int_{t_r}^{t_{r+1}} \gamma_{kk}(u) du \right) \mathcal{N}(\mathcal{Y}_{r+1}, \delta f^k, \delta g_k) + \\ + (1 - \delta_{kj}) \int_0^\delta U_r^{kj}(\mathcal{Y}_{r+1}, u) du, \end{aligned}$$

где

$$(23) \quad \begin{aligned} U_r^{kj}(y, u) \triangleq \gamma_{kj}(u) \exp \left(\int_{t_r}^u \gamma_{kk}(s) ds + \int_u^{t_{r+1}} \gamma_{jj}(s) ds \right) \times \\ \times \mathcal{N} \left(y, u f^k + (\delta - u) f^j, u g_k + (\delta - u) g_j \right). \end{aligned}$$

Формулы (22) и (23) содержат интегралы, которые вновь приближенно вычисляются по составной схеме средних прямоугольников

$$(24) \quad \zeta_r^{kj} \approx \phi_r^{kj} = \delta_{kj} \exp \left(\delta \gamma_{kk} \left(\frac{t_r + t_{r+1}}{2} \right) \right) + \\ + (1 - \delta_{kj}) \delta^{1+\alpha} \sum_{i=1}^{[\delta^{-\alpha}]} \tilde{U}^{kj} \left(\mathcal{Y}_{r+1}, \delta^{1+\alpha} \left(i - \frac{1}{2} \right) \right),$$

где

$$(25) \quad \tilde{U}_r^{kj}(y, u) \triangleq \\ \triangleq \gamma_{kj}(u) \exp \left((u - t_r) \gamma_{kk} \left(\frac{u + t_r}{2} \right) + (t_{r+1} - u) \gamma_{jj} \left(\frac{u + t_{r+1}}{2} \right) \right) \times \\ \times \mathcal{N} \left(y, u f^k + (\delta - u) f^j, u g_k + (\delta - u) g_j \right).$$

Используя матрицы $\phi_r \triangleq \|\phi_r^{kj}\|_{k,j=\overline{1,N}}$, можно представить численную аппроксимацию порядка $\min(\alpha, 1)$, основанную на составной схеме средних прямоугольников для фильтра в обратном времени

$$(26) \quad \hat{\mathbf{X}}_r^b = (\mathbf{1} \phi_r^\top \hat{\mathbf{X}}_{r+1}^b)^{-1} \phi_r^\top \hat{\mathbf{X}}_{r+1}^b, \quad r < R, \quad \hat{\mathbf{X}}_R^b = \pi(T).$$

Таким образом, искомая оценка \hat{X}_r^s сглаживания состояния МСП X_{t_r} на фиксированном интервале наблюдений вычисляется по формулам (13), (14), в которых оценки фильтрации \hat{X} и \hat{X}^b заменены их аппроксимациями $\hat{\mathbf{X}}$ (21) и $\hat{\mathbf{X}}^b$ (26).

5. Алгоритм идентификации параметров скрытой марковской модели

Перед представлением алгоритма идентификации параметров СММ приведем некоторые наводящие соображения.

Рассмотрим СММ с непрерывным временем (1), (3), в которой *оба процесса* X_t и Y_t являются *наблюдаемыми*. По усиленному закону больших чисел для МСП [22] и процессов восстановления [23] имеет место следующая сходимость:

$$(27) \quad \frac{N_T^{ij}}{O_T^i} \rightarrow \lambda^{ij} \quad \text{при } T \rightarrow \infty \quad \text{P-п.н. для любых } i, j = \overline{1, N} : i \neq j,$$

$$(28) \quad \frac{1}{O_T^i} Q_T^{i,1} \rightarrow f e_i \quad \text{при } T \rightarrow \infty \quad \text{P-п.н. для любых } i = \overline{1, N}.$$

Помимо этого

$$(29) \quad \frac{1}{O_T^i} \left[Q_T^{i,1} (Q_T^{i,1})^\top - \int_0^T Q_s^{i,1} d(Q_s^{i,1})^\top - \int_0^T dQ_s^{i,1} (Q_s^{i,1})^\top \right] = g_i$$

для любых $i = \overline{1, N}$ на множестве $\{\omega \in \Omega : O_T^i(\omega) > 0\}$. В (27), (28) и (29)

- процессы N_t^{ij} and O_t^i определяются формулами (4) и (5),
- уровневая сумма $Q_t^{i,1}$ является частным случаем (6):

$$(30) \quad Q_t^{i,1} = \int_0^t X_s^i dY_s.$$

Формулы (27) и (28) могут быть интерпретированы как вариант метода моментов [24]. Если X_t — ненаблюдаемое состояние МСП, но выполняется условие идентифицируемости 5), то X_t может быть восстановлен точно по наблюдениям $\{Y_t\}$:

$$(31) \quad \overline{X}_t \triangleq \mathbb{E} \{X_t | Y_{t+}\} = X_t \quad \text{P-п.н. для любого } 0 \leq t < T.$$

Это означает, что в условиях 5) оценка \overline{X}_t также позволяет идентифицировать параметры СММ ξ , если использовать ее в формулах (4), (5) и (30) вместо истинного значения X_t . Однако точное вычисление \overline{X}_t невозможно: оценка является решением некоторой дискретно-непрерывной СДС, помимо этого, ее вычисление требует знания истинных значений параметров ξ идентифицируемой СММ.

Для преодоления этих сложностей и построения субоптимального алгоритма идентификации предлагается сделать несколько шагов.

Во-первых, согласно [25], при выполнении необременительных условий имеет место непрерывная зависимость решений СДС по параметру, т.е. если последовательность параметров $\{\xi_u\}_{u \in \mathbb{N}}$ сходится к ξ при $u \rightarrow \infty$, то последовательность соответствующих решений систем $\overline{X}(\xi_u) \xrightarrow{p} \overline{X}(\xi)$ при $u \rightarrow \infty$. Это означает, что в случае достаточной близости используемых в алгоритме оценивания параметров ξ_u к истинным значениям ξ качество получаемой оценки $\overline{X}(\xi_u)$ будет близко к качеству оптимальной оценки — условному среднему $\overline{X}(\xi)$ относительно имеющихся наблюдений.

Во-вторых, в случае известных параметров ξ и вложенной последовательности разбиений $\{t_r\}_{r=1, R}$ по теореме Леви имеет место сходимость [16] $\widehat{X}_r \rightarrow \overline{X}_{t_r}$ P-п.н. при $R \rightarrow \infty$. Это означает, что при выполнении условия 5), оценка оптимальной фильтрации \widehat{X}_r , вычисленная по дискретизованным наблюдениям \mathcal{Y} , будет достаточно близка к истинному состоянию X_{t_r} , и оценка оптимального сглаживания \widehat{X}_r^s тем более будет обладать этим свойством.

В-третьих, траектории состояния МСП X_t и их оценок \overline{X}_t по диффузионным наблюдениям Y_t (3) являются кусочно-постоянными функциями со

значениями в \mathbb{S}^N . В отличие от них, значение УМО \widehat{X}_r , вычисленное по дискретизованным наблюдениям $\mathcal{Y}(2)$, принадлежит “вероятностному симплексу” Π . Эту проблему легко решить, заменяя \widehat{X}_r на оценки максимума апостериорной вероятности \mathcal{X}_r :

$$(32) \quad \widehat{\mathcal{X}}_r = \operatorname{argmax}_n \left(e_n^\top \widehat{X}_r \right).$$

Заметим при этом, что условное среднее \widehat{X}_r является \mathcal{L}_2 -оптимальной оценкой, в то время как $\widehat{\mathcal{X}}_r$ — \mathcal{L}_1 -оптимальная оценка.

В-четвертых, формулы (27)–(29), в которых истинные значения N_R^{ij} , O_R^i и $Q_R^{i,1}$ заменены их оценками

$$(33) \quad \widehat{N}_R^{i,j} = \delta \sum_{r=1}^R \widehat{\mathcal{X}}_{r-1}^{is} (\widehat{\mathcal{X}}_r^{js} - \widehat{\mathcal{X}}_{r-1}^{js}),$$

$$(34) \quad \widehat{O}_R^i = \delta \sum_{r=1}^R \widehat{\mathcal{X}}_{r-1}^{is},$$

$$(35) \quad \widehat{Q}_R^{i,1} = \sum_{r=1}^R \widehat{\mathcal{X}}_{r-1}^{is} \mathcal{Y}_r,$$

позволяют построить следующие оценки параметров СММ:

$$(36) \quad \widehat{\lambda}^{ij} = \frac{\widehat{N}_R^{i,j}}{\widehat{O}_R^i}, \quad i \neq j,$$

$$(37) \quad \widehat{\lambda}^{ii} = - \sum_{j:j \neq i} \widehat{\lambda}^{ij},$$

$$(38) \quad \widehat{f}e_i = \frac{1}{\widehat{O}_R^i} \widehat{Q}_R^{i,1},$$

$$(39) \quad \widehat{g}_i = \frac{1}{\widehat{O}_R^i} \sum_{r=1}^R \widehat{\mathcal{X}}_r^{is} (\mathcal{Y}_r - \delta \widehat{f}e_i) (\mathcal{Y}_r - \delta \widehat{f}e_i)^\top.$$

Пересчет параметров СММ может выполняться в цикле: сначала вычисляются оценки состояния МСП, а затем по этим оценкам происходит уточнение параметров СММ. Выход из этой процедуры может быть выполнен по превышении некоторого максимального числа итераций N_{iter} , но возможно и другое условие. Пусть ξ_u и ξ_{u+1} — оценки параметров СММ, вычисленные на u -й и $(u+1)$ -й итерациях соответственно. Условием останова итерационного процесса может быть выбрано выполнение неравенства

$$(40) \quad \frac{\|\xi_{u+1} - \xi_u\|}{\|\xi_u\|} \leq \varepsilon^\xi,$$

т.е. падение относительного изменения вектора параметров ниже некоторого фиксированного порога ε^ξ .

В процессе идентификации также следует обеспечивать выполнение условия 3) строгой положительности внедиагональных элементов оценки МИП $\hat{\Lambda}$. Для этого следует зафиксировать некоторый “барьерный” параметр ε^λ , и вместо оценки $\hat{\lambda}^{ij}(u+1)$ (36) на $(u+1)$ -м шаге использовать его модификацию

$$(41) \quad \hat{\lambda}_\varepsilon^{ij}(u+1) = \max\left(\varepsilon^\lambda |\hat{\lambda}^{ii}(u)|, \hat{\lambda}^{ij}(u+1)\right).$$

Относительно ограничительное условие 3) в данной статье было использовано для того, чтобы продемонстрировать возможность использования “барьеров” для учета различной априорной информации о допустимых областях оцениваемых параметров. Вообще говоря, 3) может быть заменено менее ограничительным условием эргодичности МСП X_t , что достаточно для идентификации МИП Λ .

Суммируя все вышесказанное, алгоритм идентификации параметров СММ имеет следующий вид.

Шаг 1. Инициализация начальных значений параметров СММ $\hat{\xi}_0$ и цикла идентификации $u := 0$.

Шаг 2. Начало цикла $u := u + 1$.

Шаг 3. Вычисление оценок фильтрации в прямом времени $\{\hat{\mathbf{X}}_r(\xi_{u-1})\}_{r=\overline{1,R}}$ по формулам (20) и (21) с использованием оценок параметров $\hat{\xi}_{u-1}$, вычисленных на предыдущем шаге цикла.

Шаг 4. Вычисление оценок фильтрации в обратном времени $\{\hat{\mathbf{X}}_r^b(\xi_{u-1})\}_{r=\overline{1,R}}$ по формулам (24) и (26) с использованием оценок параметров $\hat{\xi}_{u-1}$, вычисленных на предыдущем шаге цикла.

Шаг 5. Вычисление оценок сглаживания на фиксированном интервале $\{\hat{\mathbf{X}}_r^s(\xi_{u-1})\}_{r=\overline{1,R}}$ по формулам (13) и (14).

Шаг 6. Пересчет оценок $\{\hat{\mathbf{X}}_r^s(\xi_{u-1})\}_{r=\overline{1,R}}$ в оценки максимума апостериорной вероятности $\{\hat{\mathcal{X}}_r(\xi_{u-1})\}_{r=\overline{1,R}}$ по формуле (32).

Шаг 7. Вычисление оценок $\hat{N}_R^{i,j}(\xi_{u-1})$, $\hat{O}_R^i(\xi_{u-1})$ и $\hat{Q}_R^{i,1}(\xi_{u-1})$ по формулам (33), (34) и (35).

Шаг 8. Вычисление оценок $\hat{\lambda}_u^{ij}$, \hat{f}_u и \hat{g}_u по формулам (36), (37), (38) и (39).

Шаг 9. Если $u < N_{Iter}$ и $\frac{\|\xi_{u+1} - \xi_u\|}{\|\xi_u\|} > \varepsilon^\xi$, то перейти к Шагу 2, в противном случае закончить процесс идентификации.

Для одной итерации предложенного алгоритма идентификации можно теоретически оценить зависимость трудоемкости ее выполнения от объема имеющихся наблюдений и параметров СММ:

- линейная зависимость от числа обрабатываемых измерений (длины общего отрезка наблюдения $[0, T]$, частоты дискретизации δ^{-1}),
- степенная зависимость от размерности N скрытого состояния с показателем, больше 2,

- степенная зависимость от размерности M размерности наблюдаемого процесса с показателем, больше 2.

В настоящий момент времени не существует формальных утверждений, гарантирующих сходимость предложенного алгоритма идентификации, однако высокая точность численных алгоритмов фильтрации состояния СММ по наблюдениям с мультипликативными шумами, а также набросок алгоритма идентификации параметров СММ с дискретным временем, представленный в [8], вселяет надежду на возможность доказательства этой сходимости.

Между предложенной процедурой идентификации и ЕМ-алгоритмом имеется следующая связь. Известно, что последний представляет собой итерационное повторение двух шагов. На Е-шаге по всей совокупности наблюдений $\{\mathcal{Y}_r\}_{r=1, \overline{R}}$ вычисляются оценки состояния СММ $\{X_{t_r}\}_{r=1, \overline{R}}$, используя оценки неизвестных параметров системы ξ_{n-1} , вычисленные на предыдущем шаге. Этому шагу соответствуют формулы (33)–(35). На М-шаге по вновь рассчитанным оценкам состояния пересчитывается условная функция правдоподобия, для которой затем находится максимум — оценка параметров ξ_n на текущем шаге. Этому шагу соответствуют формулы (36)–(39). Далее цикл повторяется. Ключевым свойством ЕМ-алгоритма, доказанным для системы наблюдения (1), (3) в случае аддитивных шумов в наблюдениях, является его сходимость к локальному максимуму условной функции правдоподобия [9, 10]. Так оказалось, что формулы М-шага (36)–(38) совпали с формулами метода моментов. Однако формула (39) в [9, 10] не использовалась: во-первых, задача оценивания интенсивностей шумов наблюдений $\{g_n\}$ не ставилась, во-вторых, [9, 10] не содержит решения задачи фильтрации состояния СММ по наблюдениям с мультипликативными шумами. В предложенной статье по аналогии с тем, что (36)–(38) — формулы метода моментов для оценивания Λ и f , предлагается использовать формулу (39) как вариант метода моментов для оценивания $\{g_n\}$. Так что пересчет оценок Λ и f осуществляется в полном соответствии с М-шагом, а оценивание $\{g_n\}$ осуществляется методом моментов.

6. Численные эксперименты

Для демонстрации качества оценок идентификации был выполнен комплекс численных экспериментов. Для возможности объективного сравнения все вычисления проводились для СММ с одинаковыми параметрами: $N = 3$; $M = 1$; $\delta = 0,0002$;

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 5 & -10 & 5 \\ 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}; \quad \pi = \begin{bmatrix} 0,3571 \\ 0,2858 \\ 0,3571 \end{bmatrix}; \quad f = [0 \ 0 \ 0];$$

$$g_1 = 0,1; \quad g_2 = 0,2; \quad g_3 = 0,3.$$

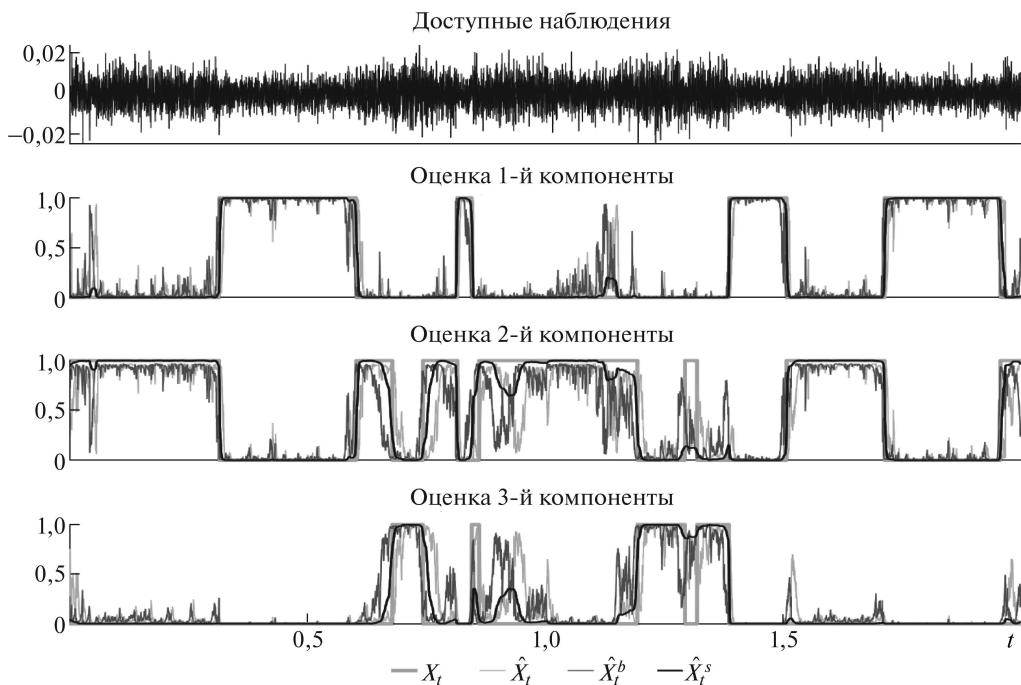


Рис. 1. Доступные наблюдения, компоненты МСП и их оценки.

Начальное распределение было выбрано совпадающим со стационарным, моделирование траекторий выполнялось с шагом 0,00002.

Первая часть экспериментов посвящена сравнению качества оценок фильтрации и сглаживания на фиксированном интервале при условии, что точные значения параметров СММ известны.

На рис. 1 представлены результаты решений задач оценивания, выполненные для исследуемой СММ на отрезке наблюдения $[0; 2]$:

- наблюдения \mathcal{Y}_r , доступные на $[0; 2]$,
- точные значения компонентов МСП X_t ,
- оценки фильтрации \hat{X}_t в прямом времени,
- оценки фильтрации \hat{X}_t^b в обратном времени,
- оценки сглаживания \hat{X}_t^s на фиксированном интервале наблюдения $[0; 2]$.

Для сравнительного анализа точности оценивания по пучку траекторий объемом 1000 вычислены выборочные дисперсии ошибок оценок фильтрации и сглаживания. На рис. 2 представлены:

- выборочная дисперсия D_t ошибок оценок фильтрации в прямом времени,
- выборочная дисперсия D_t^b ошибок оценок фильтрации в обратном времени,
- выборочная дисперсия D_t^s ошибок оценок сглаживания на фиксированном интервале наблюдения.

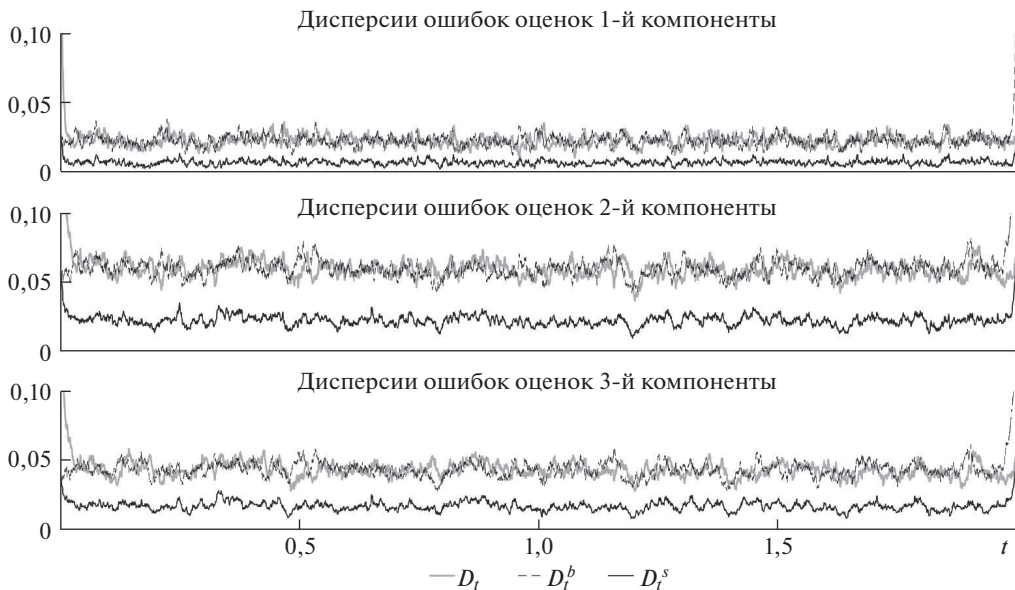


Рис. 2. Выборочные дисперсии ошибок оценок фильтрации и сглаживания.

По результатам первого численного эксперимента можно сделать следующие выводы.

1. С визуальной точки зрения доступные наблюдения малопригодны для оценивания состояния МСП.
2. Нулевой снос в наблюдениях затрудняет процессы оценивания. Тем не менее интенсивности шумов в наблюдениях при разных состояниях МСП различны, поэтому в исследуемой системе наблюдения выполнены условия идентифицируемости 5).
3. В проведенном эксперименте оценки сглаживания обеспечивают высокую точность. К подобному выводу позволяют прийти следующие заключения. Как само оцениваемое состояние, так и его оценка лежат в “вероятностном симплексе” Π , поэтому ошибка оценки имеет негауссовское распределение, а значит и пользоваться “правилом трех сигм” в данном случае бессмысленно. Дисперсия каждой компоненты оцениваемого состояния является индексом статистической неопределенности. Действительно, *тривиальной* оценкой компонент являются их математические ожидания, а дисперсии численно характеризуют меру разброса компонент относительно своих средних величин — тривиальных оценок. Следует отметить, что математические ожидания строятся только на основе априорной информации, без привлечения каких-либо наблюдений. Рассмотрим, например, 1-ю компоненту. Она имеет распределение Бернулли с параметром 0,3571, а значит дисперсию 0,2296. Сравним эту дисперсию с дисперсией ошибки оптимальной оценки сглаживания: из рис. 2 можно сделать вывод, что она колеблется в районе 0,01–0,03 (среднее значение 0,0225), т.е. мень-

Таблица

Истинное значение Λ			Начальное условие Λ_0			Оценка $\hat{\Lambda}$		
-5,0	4,0	1,0	-1,0	0,5	0,5	-4,5455	3,7613	0,7842
5,0	-10,0	5,0	0,5	-1,0	0,5	4,3470	-8,4221	4,0751
1,0	4,0	-5,0	0,5	0,5	-1,0	0,8508	3,3833	-4,2341
Истинное значение f			Начальное условие f_0			Оценка \hat{f}		
0,0	0,0	0,0	-1,0	0,0	1,0	-0,02	0,0278	-0,0171
Истинное значение g			Начальное условие g_0			Оценка \hat{g}		
0,1	0,2	0,3	0,05	0,15	0,4	0,0997	0,1992	0,3003

ше исходного значения дисперсии в 10 раз. Если использовать дисперсию в качестве показателя неопределенности, то данный эксперимент демонстрирует, что статистическая неопределенность снизилась в 10 раз. Соотношение дисперсий других компонент состояния имеет тот же порядок. Вообще, отношение дисперсии ошибки оценки к дисперсии оцениваемого сигнала в линейной регрессии — достаточно известный показатель RSS (*Residual Sum of Squares*).

- Выборочные дисперсии ошибок сглаживания вдвое меньше дисперсий ошибок фильтрации в прямом и обратном времени. Это означает, что использование в процедуре идентификации оценок сглаживания вместо оценок фильтрации способно принести существенный выигрыш в точности.
- Точность оценивания различных состояний зависит не только от параметров оцениваемого СММ, но и характеристик наблюдений. В рассматриваемом примере состояния 1 и 3 оцениваемого МСП “симметричны”: вероятности пребывания в них и интенсивности переходов в них и из них одинаковы. Тем не менее выборочная дисперсия оценки 3-го компонента МСП в 2 раза больше, чем соответствующее значение для 1-го компонента. Это связано с тем, что интенсивность шумов в наблюдениях при условии $X_t = e_1$ равна 0,1, в то время как соответствующее значение при условии $X_t = e_3$ равно 0,3.

Вторая часть экспериментов посвящена исследованию качества оценок параметров СММ. Оценивание выполнялось по наблюдениям, полученным на отрезке времени $[0; 1000]$. Максимальное число итераций $N_{Iter} = 15$, минимальный порог относительного изменения оценок параметров $\varepsilon^\xi = 0,005$. “Барьерные” значения, отделяющие оценки внедиагональных элементов λ_{ij} от нуля $\varepsilon^\lambda = 0,1$.

Приведенная выше таблица содержит истинные значения оцениваемых параметров ξ СММ, начальные условия ξ_0 для старта итерационной процедуры идентификации и окончательные оценки $\hat{\xi}$.

В данном эксперименте процесс идентификации закончился после 12 итераций. Эволюция оценок параметров в зависимости от номера итерации *Iter*

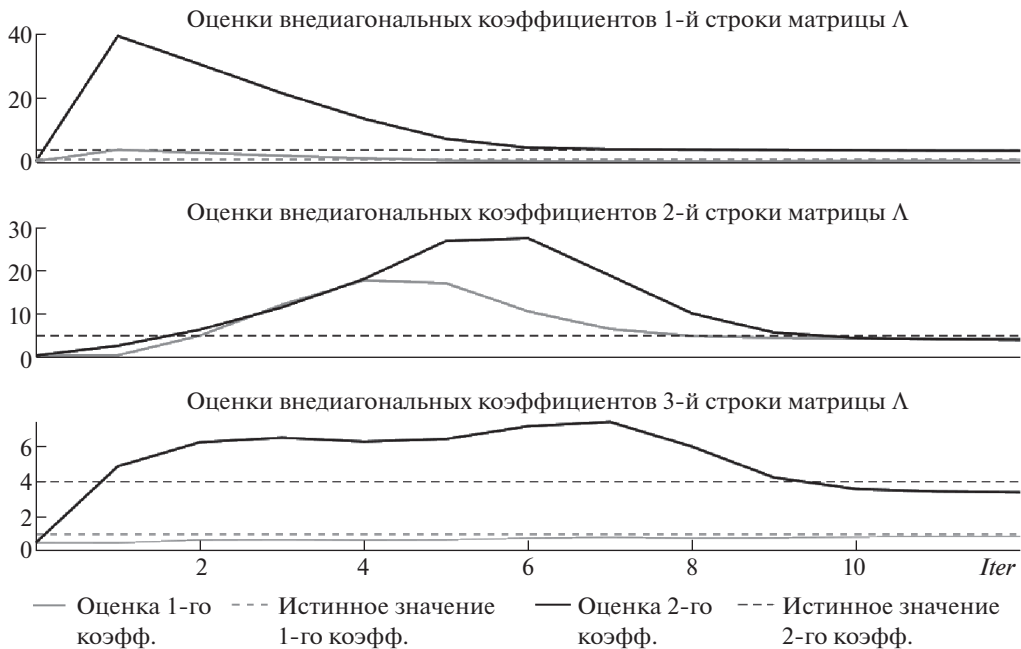


Рис. 3. Оценки и точные значения внедиагональных элементов МИП Λ .

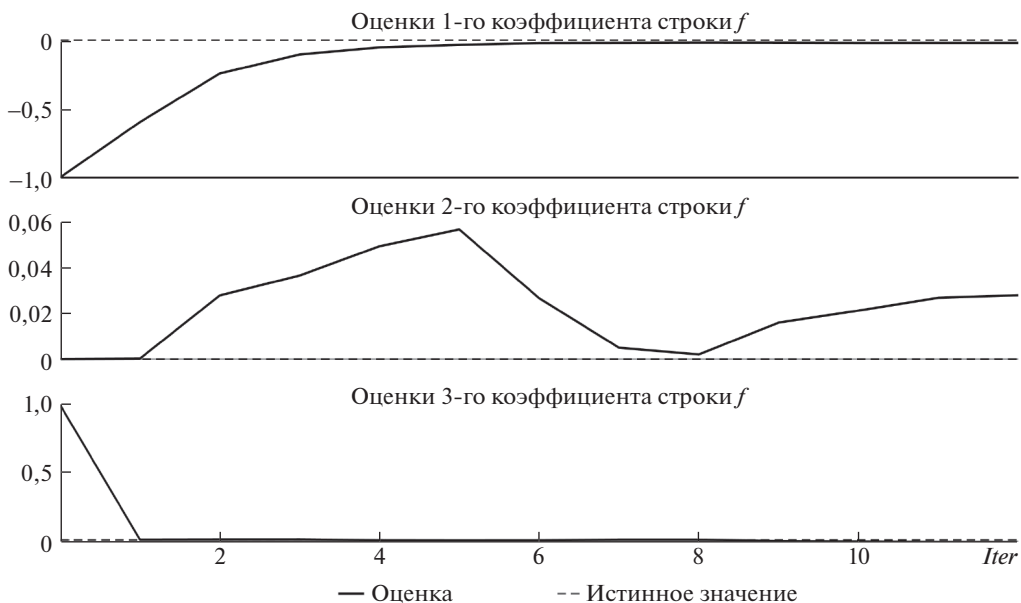


Рис. 4. Оценки и точные значения параметров сноса f .

в сравнении с истинными значениями оцениваемых параметров приведены на рис. 3 — для элементов МИП Λ , на рис. 4 — для параметров сноса f , на рис. 5 — для параметров диффузии g .

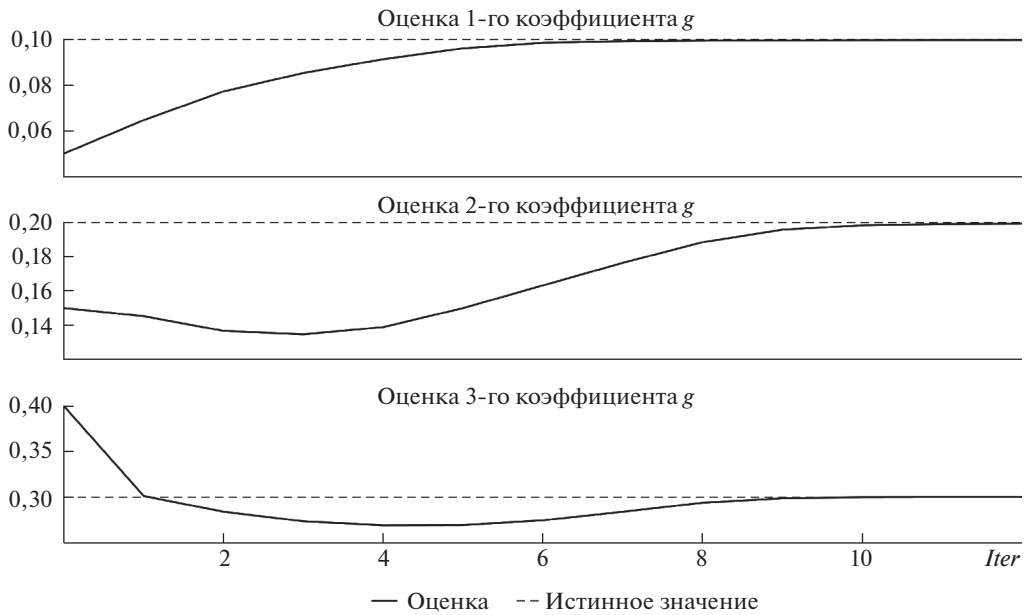


Рис. 5. Оценки и точные значения параметров диффузии g .

По результатам второго численного эксперимента можно сделать следующие выводы:

1. Итерационный процесс идентификации демонстрирует быструю сходимость.
2. В результате идентификации ни один из внедиагональных элементов оценки МИП $\hat{\Lambda}$ не совпадает с “барьерным” значением, что означает, что барьерные ограничения в полученной оценке неактивны, и оценка совпадает с некоторым локальным максимумом условной функции правдоподобия.
3. Качество оценок параметров сноса f и диффузии g выше, чем качество оценивания МИП Λ .

Идентификация параметров СММ не является самоцелью: обычно в прикладных задачах полученные значения используются для последующего решения задач оценивания и/или стохастического управления по неполной информации. Третья часть экспериментов посвящена сравнению оценок фильтрации состояния МСП, вычисленной с использованием идентифицированных параметров, и “эталонных” оценок фильтрации, вычисленных по точным значениям параметров СММ.

На рис. 6 представлены графики траекторий оценок фильтрации на отрезке $[0; 1]$, вычисленных по идентифицированным и точным значениям параметров модели.

На рис. 7 приведены графики выборочных дисперсий ошибок фильтрации, вычисленных по идентифицированным и точным значениям параметров модели. Дисперсии вычислялись методом Монте-Карло по пучку траекторий объемом 100 000.

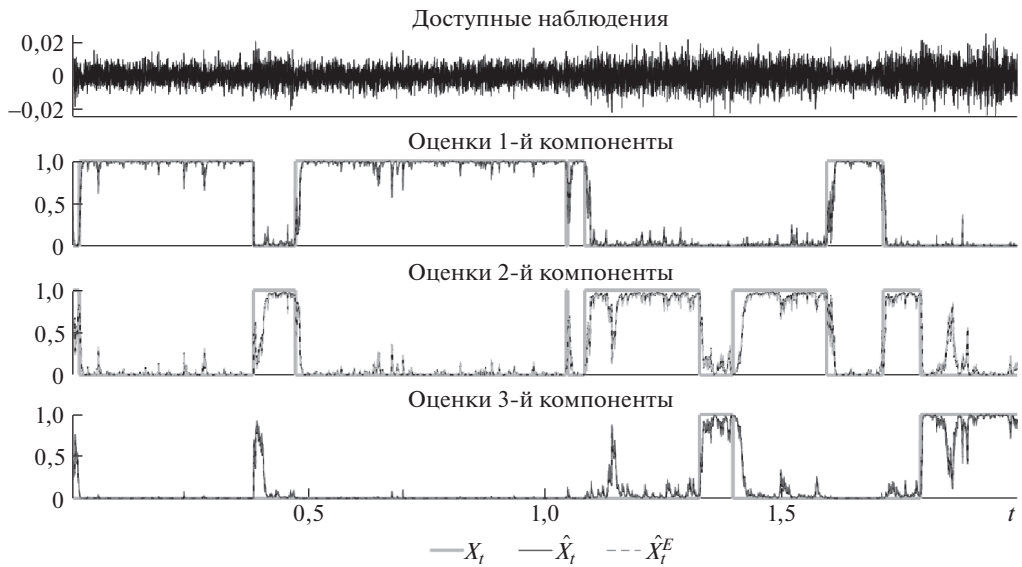


Рис. 6. Оценки фильтрации состояний МСП X_t , вычисленные по идентифицированным \hat{X}_t и точным параметрам \hat{X}_t^E СММ.

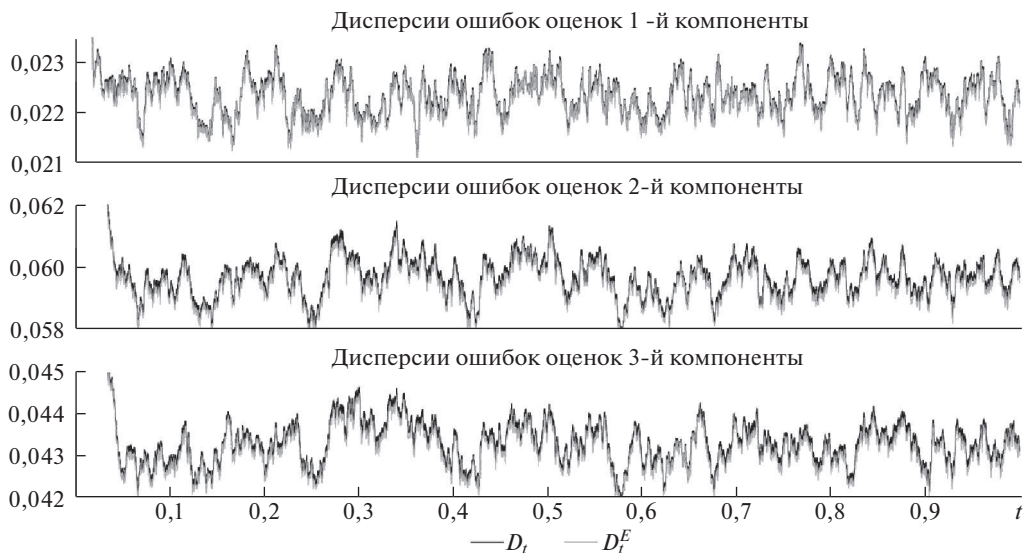


Рис. 7. Выборочные дисперсии ошибок фильтрации состояний МСП, вычисленных по идентифицированным D_t и точным D_t^E параметрам СММ.

По результатам третьего численного эксперимента можно сделать следующие выводы:

1. Оценки фильтрации, вычисленные с помощью идентифицированных значений параметров СММ, визуально не отличаются от оценок, вычисленных со знанием точных значений параметров.

2. Даже при большом объеме пучка траекторий, используемых в методе Монте-Карло, разница выборочных дисперсий ошибок фильтрации, полученных по идентифицированным и точным параметрам, находится на уровне статистической погрешности.

7. Заключение

Статья представляет субоптимальный алгоритм идентификации параметров СММ с непрерывным временем. В качестве скрытого состояния выступает однородный МСП с конечным множеством состояний. Имеющиеся наблюдения являются косвенными и содержат мультипликативные шумы.

Предложена итерационная процедура оценивания параметров СММ, родственная EM-алгоритму. Она основана на попеременном решении задач сглаживания скрытого состояния и вычисления на основе этих результатов и имеющихся наблюдений оценок параметров СММ методом моментов.

Алгоритм идентификации сходится за малое число итераций. Проведенные численные примеры демонстрируют высокое качество оценивания матриц сноса f и диффузии g , и приемлемое качество оценивания МИП Λ . Тем не менее продемонстрированной точности достаточно для последующего успешного решения задач фильтрации скрытого состояния МСП с использованием идентифицированных значений параметров.

Несмотря на то что в статье показаны положительные качества алгоритма и его потенциальные возможности, существует целый ряд направлений, по которым он может быть модифицирован.

Во-первых, алгоритм обладает свойством “жадности”: он сходится к локальному максимуму условной функции правдоподобия, ближайшей к начальному условию итерационного процесса. При этом у функции правдоподобия могут существовать другие локальные максимумы с большими значениями. Улучшение качества оценивания возможно с помощью выбора начального условия путем некоторой предобработки имеющихся наблюдений. Другим способом является параллельный запуск нескольких экземпляров итерационного процесса, стартующих из различных начальных условий. В этом случае механизм выбора этих условий также играет существенную роль.

Во-вторых, предложенный алгоритм идентификации не обеспечивает оперативную обработку наблюдений нарастающего объема – это связано с “природой” EM-алгоритма. Дело в том, что СММ включает в себя как наблюдаемые, так и скрытые компоненты, поэтому возможно построить только *условную* функцию правдоподобия, характеризующую распределение скрытого состояния $X_{[0,T]}$, относительно имеющихся наблюдений \mathfrak{Y}_R на всем интервале наблюдения $[0, T]$. Данное условное осреднение автоматически означает сглаживание на фиксированном интервале наблюдения, и это решение этой задачи не может быть представлено в рекуррентной форме. Каждое следующее наблюдение, полученное в момент t_r , должно быть обработано для уточнения *всей* траектории состояния на отрезке $[0, t_{r-1}]$ и оцениванию состояния в

новой точке t_r . Таким образом, с ростом интервала наблюдения растет и длина траектории скрытого состояния, которая должна быть сглажена по всему имеющемуся массиву наблюдений. Данное свойство EM-алгоритм демонстрирует во всех задачах, в которых он может быть применен для идентификации параметров СММ: начиная от классического алгоритма Баума–Велча [3, 4], применяемого для идентификации параметров частично наблюдаемых марковских цепей, и заканчивая алгоритмами идентификации параметров СММ с непрерывным временем [8–11]. Представляется перспективной разработка рекуррентных модификаций алгоритма, позволяющих проводить идентификацию параметров СММ в реальном масштабе времени по наблюдениям нарастающего объема.

В-третьих, в текущей версии алгоритма учет доступной априорной информации о множестве допустимых значений оцениваемых параметров (на примере условия 3) строгой положительности интенсивностей переходов) реализуется с помощью использования некоторых “барьеров”, препятствующих выходу оценок из этого множества. Алгоритм может быть улучшен путем более гибкого подбора значений “барьеров”.

Перечисленные направления исследований представляются интересными не только с точки зрения эмпирического улучшения работы алгоритма и повышения его точности, но и в плане поиска теоретического обоснования свойств алгоритма и его модификаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисов А.* \mathcal{L}_1 -оптимальная фильтрация марковских скачкообразных процессов I // *АиТ.* 2020. № 11. С. 11–31.
Borisov A. \mathcal{L}_1 -Optimal Filtering of Markov Jump Processes I // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 11. P. 1945–1962.
2. *Борисов А.* \mathcal{L}_1 -оптимальная фильтрация марковских скачкообразных процессов II // *АиТ.* 2020. № 12. С. 24–49.
Borisov A. \mathcal{L}_1 -Optimal Filtering of Markov Jump Processes II // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 12. P. 2160–2180.
3. *Baum L., Petrie T.* Statistical Inference for Probabilistic Functions of Finite State Markov Chains // *Ann. Math. Statist.* 1966. V. 37. No. 6. P. 1554–1563.
4. *Baum L., Petrie T., Soules G., Weiss N.* Technique Occurring in the Statistical Analysis of Probabilistic Functions of Markov Chains // *Ann. Math. Statist.* 1970. V. 41. No. 1. P. 164–171.
5. *Cappé O., Moulines E., Rydén T.* Inference In Hidden Markov Models. New York: Springer, 2005.
6. *Rabiner L.* A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition // *Proc. IEEE.* 1989. V. 77. No. 2. P. 257–286.
7. *Ephraim Y., Merhav N.* Hidden Markov Processes // *IEEE Trans. Inf. Theory.* 2002. V. 48. No. 6. P. 1518–1569.
8. *Elliott R.J., Moore J.B., Aggoun L.* Hidden Markov Models: Estimation and Control. New York: Springer, 2008.

9. *Zeitouni O., Dembo A.* Exact filters for the estimation of the number of transitions of finite-state continuous-time Markov processes // *IEEE Trans. Inf. Theory.* 1988. No. 34. P. 890–893.
10. *Dembo A., Zeitouni O.* Parameter estimation of partially observed continuous time stochastic processes via the EM algorithm // *Stochast. Proces. Their Appl.* 1986. V. 23. P. 91–113.
11. *James M., Krishnamurthy V., Le Gland F.* Time Discretization of Continuous-Time Filters and Smoothers for HMM Parameter Estimation // *IEEE Trans. Autom. Contr.* 1996. V. 42. No. 2. P. 593–605.
12. *Лунцер Р., Шуряев А.* Теория мартингалов. М.: Физматлит, 1986.
13. *Takeuchi Y., Akashi H.* Least-squares state estimation of systems with state-dependent observation noise // *Automatica.* 1985. V. 21. No. 3. P. 303–313.
14. *Borisov A., Sokolov I.* Optimal Filtering of Markov Jump Processes Given Observations with State-Dependent Noises: Exact Solution and Stable Numerical Schemes // *Mathematics.* 2020. V. 8. No. 4. 506.
15. *Ishikawa Y., Kunita H.* Malliavin calculus on the Wiener-Poisson space and its application to canonical SDE with jumps // *Stochast. Proces. Their Appl.* 2006. V. 116. P. 1743–1769.
16. *Лунцер Р.Ш., Шуряев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
17. *Platen E., Bruti-Liberati N.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance. Berlin: Springer, 2010.
18. *Badawi F., Lindquist A., Pavon M.* A stochastic realization approach to the smoothing problem // *IEEE Trans. Autom. Contr.* 1979. V. 24. P. 878–888.
19. *Борисов А.* Представление марковских скачкообразных процессов в обратном времени и смежные вопросы. I // *АиТ.* 2006. № 8. С. 51–76.
Borisov A. Backward representation of Markov jump processes and related problems. I // *Autom. Remote Control.* 2006. V. 67. No. 8. P. 1228–1250.
20. *Борисов А.* Представление марковских скачкообразных процессов в обратном времени и смежные вопросы. II // *АиТ.* 2006. № 9. С. 120–141.
Borisov A. Backward representation of Markov jump processes and related problems. II // *Autom. Remote Control.* 2006. V. 67. No. 9. P. 1466–1484.
21. *Elliott R.J.* Reverse-Time Markov Processes // *IEEE Trans. Inf. Theory.* 1986. V. 32. P. 290–292.
22. *Meyn S., Tweedie R.* Markov Chains and Stochastic Stability. Berlin: Springer, 1993.
23. *Боровков А.* Теория вероятностей. М.: Физматлит, 1986.
24. *Боровков А.* Математическая статистика. М.: Физматлит, 1984.
25. *Крылов Н.* Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Физматлит, 1977.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 04.04.2022

После доработки 10.07.2022

Принята к публикации 28.07.2022

Управление в социально-экономических системах

© 2022 г. М.И. ГЕРАСЬКИН, д-р эконом. наук (innovation@ssau.ru)
(Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева)

ВЛИЯНИЕ РЕФЛЕКСИИ НА СВОЙСТВА РАВНОВЕСИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ОЛИГОПОЛИИ ШТАКЕЛЬБЕРГА

Рассматривается теоретико-игровая проблема выбора оптимальных стратегий агентов рынка олигополии при линейной функции спроса и нелинейных функциях издержек агентов. Исследовано влияние рефлексивного поведения на число и свойства равновесий в игре для агентов, имеющих различные типы функций издержек: вогнутые, соответствующие положительному эффекту расширения масштаба, и выпуклые, соответствующие отрицательному эффекту. Доказано, что в случае выпуклых функций издержек существует только одно равновесие, а в случае вогнутых функций издержек может существовать два равновесия, одно из которых меньше равновесия при линейных издержках, а другое — больше. Установлено, что при выпуклых функциях издержек равновесное действие увеличивается с ростом рефлексии агента и снижается с ростом рефлексии окружения, как и в модели с линейными функциями издержек. При вогнутых функциях издержек влияние рефлексии зависит от знака суммы предположительных вариаций S : с повышением рефлексии агента большее равновесие растёт, а меньшее снижается при $S < 0$, а при $S > 0$ — наоборот.

Ключевые слова: олигополия, игра Штакельберга, вогнутость и выпуклость функции издержек, рефлексия.

DOI: 10.31857/S000523102211006X, EDN: KELPWF

1. Введение

В играх олигополии с нелинейными функциями издержек агентов традиционный подход вычисления равновесия Курно–Нэша [1, 2] требует совершенствования, поскольку включение в модель лидерства по Штакельбергу [3] приводит к расширению содержания понятия «тип агента». Если в самой распространенной модели с линейными издержками [4–6] параметром типа агента являются предельные издержки агентов, то нелинейная модель с лидерством по Штакельбергу, во-первых, типизирует агента по признаку выпуклости (вогнутости) функции издержек, т.е. по специфике технологии, и, во-вторых, по типу рефлексивного поведения.

В рамках рефлексии исследуется многообразие представлений агента 1) о стратегиях окружения (т.е. других игроков), 2) о представлениях окружения о стратегии агента; 3) о представлениях окружения о представлении агента о стратегиях окружения и т.д. В этом ряду номер представления называется рангом [7]. Модель рефлексивной игры является инструментом описания информированности агентов, с помощью которого экзогенно заданная информированность сводится к множеству возможных игр с полной информированностью. Поэтому решением рефлексивной игры является информационное равновесие [8]. Рефлексивное поведение агентов исследовалось в постановке Курно–Штакельберга в процессах стратегической и информационной рефлексии [9–13], а также в рамках динамики установления равновесия Курно [14] и Штакельберга [15].

Таким образом, тип агента представляет собой множество из двух характеристик, первая из которых выражает технологию производства агента, а вторая — его способ мышления. Поскольку технология предопределяет вид зависимости производственных издержек от выпуска, то первый элемент множества параметров типа, т.е. *технологический тип* агента, характеризуется значениями коэффициентов его функции издержек. В соответствии с видом функции издержек агента могут быть следующие технологические типы: 1) постоянная отдача от расширения масштаба производства, при которой издержки возрастают прямо пропорционально выпуску, а технология оптимальна, так как достигла предела улучшения; 2) отрицательный эффект расширения масштаба, когда издержки возрастают ускоренным темпом относительно роста выпуска, и технология рецессивная, т.е. тормозит расширение производства; 3) положительный эффект расширения масштаба, если издержки возрастают замедленным темпом относительно роста выпуска, что соответствует прогрессирующей технологии, способствующей расширению производства. Для реальных фирм выявлена [16] следующая тенденция перехода от одного технологического типа к другому в процессе развития фирмы: вначале наблюдается третий тип (положительный эффект), затем совершенствование технологии приводит к оптимуму, т.е. первому типу (постоянная отдача), после чего технология деградирует и наступает второй тип (отрицательный эффект). Следовательно, вообще в экономике могут сосуществовать агенты различных технологических типов. Однако олигополии, как рынки, возникшие из монополии и, следовательно, предлагающие покупателю идентичный товар, как правило, включают в себя фирмы, пребывающие на одной и той же стадии развития. Поэтому в статье исследуется игра олигополии, в которой все агенты имеют одинаковые технологические типы.

В свою очередь, ментальное поведение агента в игре при взаимодействии с окружением характеризуется рангом его рефлексии, которому можно поставить в соответствие предположительную вариацию, т.е. предполагаемое изменение выпуска контрагента, вызываемое единичным увеличением выпуска агента. Поэтому второй элемент множества параметров типа агента, т.е. *ментальный тип*, количественно измеряется его предположительной вариацией,

точнее, в игре более двух агентов, суммой предположительных вариаций касательно всех агентов окружения. По этому признаку агентов можно разделить на следующие типы: 1) ведомый агент, не выдвигающий предположений о стратегиях окружении, вследствие чего сумма предположительных вариаций такого агента равна нулю; 2) лидер по Штакельбергу (первого уровня), предполагающий, что его окружают ведомые агенты, что, как известно [3], означает отрицательную предположительную вариацию, т.е. предположено снижение выпуска контрагента в ответ на рост выпуска лидера; 3) лидер по Штакельбергу второго уровня (или более высоких уровней), предполагающий, что его окружают лидеры первого уровня (или последующих, но низших уровней). В этой классификации типов с ростом уровня лидерства сумма предположительных вариаций лидера возрастает по абсолютной величине, оставаясь отрицательной, если лидера окружают агенты первого и второго технологических типов. Однако если окружение имеет третий технологический тип (положительный эффект), то углубление рефлексии (т.е. рост ранга) агента может приводить к атипичному предположению о том, что рост выпуска агента вызывает увеличение выпуска контрагента; в таком случае сумма предположительных вариаций атипичного агента положительна [17]. Следовательно, на ментальный тип агента опосредованно, через функции издержек агентов как общее знание, влияет технологический тип окружения, и предположительные вариации в результате могут принимать значения в диапазоне $(-\infty, \infty)$. Поэтому дискретный набор ментальных типов моделируется в статье непрерывной величиной суммы предположительных вариаций.

Поскольку совместное влияние технологического и ментального компонентов типа агентов на равновесие в агрегативной игре олигополистов не исследовано, то эта проблема является предметом данной статьи.

2. Методология

Рассмотрим рынок олигополии, на котором фирмы (агенты) имеют степенные функции издержек следующего вида:

$$(1) \quad C_i(Q_i) = C_{Fi} + B_i Q_i^{\beta_i}, \quad C_{Fi} \geq 0, \quad B_i > 0, \quad \beta_i \in (0, 2), \quad i \in N,$$

где Q_i — действие (объем выпуска) i -го агента; $N = \{1, \dots, n\}$ — множество агентов рынка; n — количество агентов; C_{Fi} , B_i , β_i — коэффициенты функций издержек агентов. Степенная функция издержек (1) в диапазоне коэффициентов $\beta_i \in (0, 2)$ обобщает три технологических типа: агент с постоянной отдачей от расширения масштаба описывается линейной функцией издержек ($\beta_i = 1$), агент с отрицательным эффектом — выпуклой функцией при $1 < \beta_i < 2$, агент с положительным эффектом расширения масштаба — вогнутой функцией издержек при $0 < \beta_i < 1$. Следовательно, коэффициенты B_i , β_i представляют собой параметры *технологического типа* агента.

В агрегативной игре на рынке олигополии с линейной функцией спроса агенты выбирают оптимальные действия из условия максимума функции по-

лезности:

$$(2) \quad \max_{Q_i \geq 0} \Pi_i(Q, Q_i) = \max_{Q_i \geq 0} \left\{ (a - bQ) Q_i - C_{Fi} - B_i Q_i^{\beta_i} \right\},$$

$$Q_i \geq 0, \quad Q = \sum_{i \in N} Q_i, \quad i \in N,$$

при условии¹

$$(2a) \quad a > C'_{iQ_i} \quad \forall \beta \in [1, 2), \quad a > \beta^{-1} C'_{iQ_i} \quad \forall \beta \in (0, 1),$$

где Π_i — функция полезности (прибыль) i -го агента; Q — суммарный объем рынка; a, b — коэффициенты обратной функции спроса, $a > 0$, $b > 0$, $a \gg b$.

Равновесие Нэша в модели (2) есть вектор действий агентов при выбранных действиях окружения (т.е. других агентов), который определяется из уравнений

$$(3) \quad \frac{\partial \Pi_i(Q_i, \rho_{ij})}{\partial Q_i} = 0, \quad i, j \in N,$$

где $\rho_{ij} = Q'_{jQ_i}$ — предположительная вариация i -го агента, т.е. предполагаемое изменение выпуска j -го агента в ответ на единичный прирост выпуска i -го агента. Сумма вариаций i -го агента $S_i = \sum_{l \in N \setminus i} \rho_{il}$ выражает *ментальный параметр типа* агента.

Стратегическая игра Γ есть кортеж множества агентов, множества стратегий (действий), множества функций полезности и множества уровней лидерства по Штакельбергу:

$$(4) \quad \Gamma = \langle N, \{Q_i, i \in N\}, \{\Pi_i, i \in N\}, G \rangle,$$

где $G = (M_0, M_1, \dots, M_L)$ — множество уровней лидерства агентов; L — количество уровней лидерства агентов; M_r ($r = 0, \dots, L$) — множества агентов; M_0 — множество ведомых агентов; M_r ($r = 1, \dots, L$) — множество лидеров r -го уровня. Формально уровни лидерства определяются следующим образом. Нулевой уровень, соответствующий ведомому η_0 -му агенту, имеет место, если в η_0 -м уравнении системы (3) полагается $\rho_{\eta_0 j}^0 = 0 \quad \forall j \in N \setminus \eta_0$, где верхний индекс вариации обозначает уровень лидерства r . Первый уровень лидерства η_1 -го агента возникает, если в η_1 -м уравнении системы (3) вариации $\rho_{\eta_1 j}^1$ вычисляются дифференцированием по Q_{η_1} остальных $(n - 1)$ уравнений (3), в которых полагается $\rho_{ij}^0 = 0 \quad \forall j \in N \setminus i$. Произвольный r -й уровень лидерства η_r -го агента возникает, если в η_r -м уравнении системы (3) вариации $\rho_{\eta_r j}^r$ вычисляются дифференцированием по Q_{η_r} остальных $(n - 1)$ уравнений (3), в которых полагается $\rho_{ij} = \rho_{ij}^{r-1} \quad \forall j \in N \setminus i$.

Рефлексией [7] будем называть выполняемую η_r -м агентом мыслительную операцию вычисления вариации $\rho_{\eta_r j}^r$ из системы (3) в предположении $\rho_{ij} = \rho_{ij}^{r-1} \quad \forall j \in N \setminus i$; соответственно, индекс r для агента, выполнившего эту операцию, есть ранг рефлексии.

¹ Условие существования стационарной точки функции полезности.

Ростом рефлексии будем называть увеличение параметра S_i^r по абсолютной величине, поскольку в модели с линейными издержками с увеличением r модуль ρ_{ij} растёт.

Обозначим нормированное действие агента как $y_i = \frac{Q_i}{Q_{\max}} \in (0, 1)$, где $Q_{\max} = \frac{a}{b}$ есть максимальный объём рынка. Введём обозначения:

$$\alpha_i = \frac{\hat{a} - \hat{B}_i \beta_i (2 - \beta_i) x_i^{\beta_i - 1}}{\hat{b}}, \quad \delta_i = 2 + \frac{\hat{B}_i \beta_i (\beta_i - 1)}{\hat{b}} x_i^{\beta_i - 2} + S_i^r,$$

$$\hat{a} = Q_{\max} a, \quad \hat{b} = Q_{\max}^2 b, \quad \hat{B}_i = Q_{\max}^{\beta_i} B_i,$$

где параметры x_i удовлетворяют следующим условиям:

$$(5) \quad y_i - x_i < \varepsilon_i, \quad x_i < y_i, \quad \Omega_i = x_i + \xi_i (y_i - x_i),$$

$$\xi_i, x_i \in (0, 1), \quad \varepsilon_i \in (0, \Omega_i), \quad i \in N.$$

Переменные x_i представляют собой параметры линеаризации системы (3), поэтому имеют ту же размерность, что и равновесные действия y_i , и должны быть им равны с точностью до малых положительных чисел ε_i .

Решение системы (3) было получено [18] в виде следующей формулы равновесия:

$$(6a) \quad y_i = \frac{a_{0i} + a_{1i} x_i^{\theta_i}}{b_{0i} + b_{1i} x_i^{\theta_i - 1}},$$

где коэффициенты вычисляются по следующим формулам:

$$(6b) \quad \theta_i = \beta_i - 1 \in (-1, 1), \quad a_{0i} = \frac{1 - \lambda_i}{\bar{B}_i}, \quad a_{1i} = \theta_i^2 - 1 < 0,$$

$$b_{0i} = \frac{1 + S_i^r + \tau_i}{\bar{B}_i}, \quad b_{1i} = \theta_i (\theta_i + 1),$$

при условии² [19]

$$(6в) \quad S_i^r \in \Xi_i, \quad i \in N, \quad \Xi_i = \{S_i^r : \delta_i > 0\},$$

где

$$(6г) \quad \bar{B}_i = \frac{B_i}{b Q_{\max}^{2 - \beta_i}}, \quad \lambda_i = \tau_i \sum_{j \neq i}^n \frac{\alpha_j}{\omega_j}, \quad \tau_i = \frac{1}{1 + \sum_{j \neq i}^n \frac{1}{\omega_j}},$$

$$\omega_i = \delta_i - 1, \quad b_{1i} \begin{cases} > 0, & \theta_i \in (0, 1), \\ < 0, & \theta_i \in (-1, 0). \end{cases}$$

Поставим задачу анализа влияния параметров функций издержек агентов и суммы предположительных вариаций S_i на функцию равновесного действия агента (6а).

² Условие максимума функции полезности в стационарной точке.

3. Результаты

Опишем свойства равновесий, определяемых формулой (6а), для различных типов функций издержек и ментальных типов агентов. В дальнейшем рассмотрим i -го агента, поэтому для упрощения записи опустим индекс « i », а если рассуждения касаются окружения, используем индекс « $-i$ »; также опустим индекс « r », считая, что каждый агент имеет некоторый ранг рефлексии, приводящий к сумме вариаций S^r .

Для оценки свойств равновесий важную роль играют характеристики параметров (6г), которые представим в виде следующего вспомогательного результата.

Лемма 1. Коэффициенты τ и λ при различных параметрах типа окружения в равновесии удовлетворяют следующим условиям:

$$(7а) \quad \tau \in \begin{cases} (0, 1), & \text{если } \theta_{-i} \in [0, 1), \\ (0, 1), & \text{если } \theta_{-i} \in (-1, 0) \text{ при } \tilde{S}_{-i} \in [\bar{S}, \infty), \\ \left(-\frac{1}{n-2}, 0\right), & \text{если } \theta_{-i} \in (-1, 0) \text{ при } \tilde{S}_{-i} \in (\bar{S}-1, \bar{S}), \end{cases}$$

$$(7б) \quad \lambda \in \begin{cases} (0, 1), & \text{если } \theta_{-i} \in [0, 1), \\ (0, 1), & \text{если } \theta_{-i} \in (-1, 0) \text{ при } \tilde{S}_{-i} \in [\bar{S}, \infty), \\ (0, 1), & \text{если } \theta_{-i} \in (-1, 0) \text{ при } \tilde{S}_{-i} \in (\bar{S}-1, \bar{S}) \text{ и } n \in (n_2, \infty), \\ (1, 2), & \text{если } \theta_{-i} \in (-1, 0) \text{ при } \tilde{S}_{-i} \in (\bar{S}-1, \bar{S}) \text{ и } n \in (n_1, n_2), \end{cases}$$

$$(7в) \quad \frac{\partial \tau}{\partial S_{-i}} > 0, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial S_{-i}} < 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial S} = \frac{\partial \lambda}{\partial S} = 0,$$

где

$$\bar{S} = b^{-1} \tilde{B} \left| \tilde{\theta} \right| \left(\tilde{\theta} + 1 \right) Q^{\tilde{\theta}-1} - 1, \quad n_1 = \frac{4 - \tilde{\alpha}_{\max}}{2 - \tilde{\alpha}_{\max}}, \quad n_2 = \frac{2 - \tilde{\alpha}_{\max}}{1 - \tilde{\alpha}_{\max}},$$

$$\tilde{\alpha}_{\max} = 1 - \frac{\tilde{B} \left(1 - \tilde{\theta}^2 \right) Q_{\max}^{\tilde{\theta}}}{a} \in (0, 1), \quad \tilde{S}_{-i} = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i}^n S_j;$$

$\tilde{\theta}$, \tilde{B} подобраны из условий

$$\omega \left(\tilde{\theta}, \tilde{B} \right) = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i}^n \omega_j, \quad \alpha \left(\tilde{\theta}, \tilde{B} \right) = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i}^n \alpha_j.$$

Содержательно коэффициент τ характеризует интенсивность рефлексии окружения данного агента, так как если $S_{-i} < 0$, то с увеличением $|S_{-i}|$ параметр ω_{-i} уменьшается и τ стремится к нулю, а если параметр $S_{-i} > 0$, то его рост приводит к повышению τ . Коэффициент λ — это комплексная оценка типа окружения, он объединяет коэффициент τ и характеристику нелинейности функций издержек окружения α : чем больше $|\theta|$, т.е. чем более выпуклы

(или вогнуты) функции издержек, тем коэффициент α ближе к единице, а чем меньше $|\theta|$, тем α ближе к нулю.

Таким образом, коэффициенты τ и λ положительны и не превышают единицы в случаях линейных или выпуклых функций издержек окружения (постоянного или отрицательного эффектов расширения масштаба), а также в случае вогнутых функций издержек окружения, если средняя сумма вариаций окружения S_{-i} не меньше \bar{S} ; если эта величина меньше \bar{S} , то коэффициент τ отрицательный и по модулю меньше $\frac{1}{n-2}$, а коэффициент λ либо также не превышает единицы при большом числе агентов (больше n_2), либо не превышает двух при меньшем числе агентов (от n_1 до n_2). Важно, что с ростом рефлексии окружения, т.е. с увеличением $|S_{-i}|$, в случае $S_{-i} > 0$ коэффициент τ растет, а α снижается, а в случае $S_{-i} < 0$ — наоборот. Опосредованно через функцию $y(S, S_{-i})$ коэффициенты τ и λ испытывают также влияние изменения равновесия, но эта зависимость будет исследована в нижеследующих утверждениях.

Равновесие³ (6а) отклоняется от классического равновесия Курно [20] вследствие двух факторов — нелинейности функции издержек агента, характеризуемой параметром θ , а также рефлексии агента (параметр S) и его окружения (параметры λ и τ). Поэтому для факторного анализа устраним влияние нелинейности, т.е. рассмотрим случай $\theta = 0$ (или $\beta = 1$), что позволяет выявить чистое влияние фактора рефлексии.

Утверждение 1. В игре агентов с линейными функциями издержек ($\beta = 1$) равновесное действие $y_{\beta=1}$

i) *единственное, конечное, отличное от нуля, вычисляется по формуле*

$$(8a) \quad y_{\beta=1} = \chi_{\beta=1} \frac{a - B}{Q_{\max} b},$$

ii) *растет с ростом рефлексии агента и снижается с ростом рефлексии окружения*

$$(8b) \quad \frac{\partial \chi_{\beta=1}}{\partial S} < 0, \quad \frac{\partial \chi_{\beta=1}}{\partial S_{-i}} > 0,$$

iii) *превышает равновесное действие по Курно $y_K = \frac{a-B}{(n+1)Q_{\max} b}$, т.е. $\chi_{\beta=1} > \chi_K$, при следующих ограничениях:*

$$(8b) \quad \kappa < 0 \vee (n < \kappa \wedge \kappa > 0),$$

где $\chi_{\beta=1} = \frac{\tau}{1+S+\tau}$, $\kappa = \frac{S+1}{S_{-i}-S} S_{-i}$, $\chi_K = \frac{1}{n+1}$, индекс K — равновесие Курно.

Содержательно коэффициент χ показывает изменение действия агента вследствие рефлексии по сравнению с равновесным действием по Курно.

Далее рассмотрим игру агентов, имеющих технологии с отрицательным эффектом расширения масштаба, т.е. выпуклыми функциями издержек.

³ Здесь и далее термин «равновесие» используется также как синоним термина «равновесное действие».

Утверждение 2. В игре агентов с выпуклыми функциями издержек ($\beta > 1$) равновесие агента $y_{\beta > 1}$

i) существует при следующих условиях:

$$(9a) \quad S \in (\max\{-1, s_2\}, 0], \quad \text{если } \{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta > 1},$$

причем $s_2 > -1$, если $\lambda + \tau < 1$ и $Q_{\max} < \widehat{Q}_{\max}$,

ii) при $\beta = 2$ вычисляется по формуле

$$(9б) \quad y_{\beta=2} = \chi_{\beta=2},$$

iii) меньше равновесия при линейных функциях издержек

$$(9в) \quad y_{\beta=2} < y_{\beta=1} \quad \text{при } S < \widehat{S},$$

iiii) растет с ростом рефлексии агента и снижается с ростом рефлексии окружения

$$(9г) \quad \frac{\partial \chi_{\beta=2}}{\partial S} < 0, \quad \frac{\partial \chi_{\beta=2}}{\partial S_{-i}} > 0,$$

iiiii) влияние рефлексии ниже, чем при линейных функциях издержек

$$(9д) \quad \left| \frac{\partial \chi_{\beta=2}}{\partial S} \right| < \left| \frac{\partial \chi_{\beta=1}}{\partial S} \right|, \quad \frac{\partial \chi_{\beta=2}}{\partial S_{-i}} < \frac{\partial \chi_{\beta=1}}{\partial S_{-i}},$$

где

$$\begin{aligned} \chi_{\beta=2} &= \frac{\tau}{1 + S + \tau + 2b^{-1}B}, \quad s_2 = -\beta\overline{B} - (\lambda + \tau), \\ \widehat{Q}_{\max} &= \left(\frac{B}{a} \frac{\beta}{1 - \lambda - \tau} \right)^{\frac{1}{1-\beta}}, \quad \widehat{S} = 2\frac{a}{b} \left(1 - \frac{B}{a} \right) - 1 - \tau, \\ \Omega_{\beta > 1} &= \{(S, \tau, \lambda) : a_0 > 0 \wedge b_0 > 0\}. \end{aligned}$$

Наконец, исследуем игру агентов, имеющих технологии с положительным эффектом расширения масштаба, т.е. вогнутыми функциями издержек.

Утверждение 3. В игре агентов с вогнутыми функциями издержек ($\beta < 1$) равновесие агента $y_{\beta < 1}$

i) существует при следующих условиях:

$$(10a) \quad S \in \begin{cases} (\max\{s_0, s_1\}, s_3) \text{ при } a_0 > |a_1|, \\ (\max\{s_0, s_1\}, s_2) \text{ при } a_0 < |a_1|, \\ (\max\{s_0, s_2\}, s_4), \text{ если } \{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta < 1}^2, \\ (s_0, s_2), \text{ если } \{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta < 1}^3, \\ (s_0, \min\{s_1, s_2\}), \text{ если } \{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta < 1}^4, \end{cases} \quad \text{если } \{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta < 1}^1,$$

ii) при $\beta = 0,5$ вычисляется по формуле

$$(106) \quad y_{\beta=0,5} = \begin{cases} y_{\beta=0,5}^{+,-} = \frac{\zeta \pm \sqrt{d}}{2(1+S+\tau)}, & \text{если } \{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta < 1}^2, \\ \left(\frac{0,5\bar{B}}{1+S+\tau} \right)^{\frac{2}{3}}, & \text{если } \{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta < 1}^1 \cup \Omega_{\beta < 1}^3 \cup \Omega_{\beta < 1}^4, \end{cases}$$

iii) соотносится с равновесием при линейных функциях издержек как

$$(10в) \quad \begin{aligned} y_{\beta=0,5}^+ > y_{\beta=1} \wedge y_{\beta=0,5}^- < y_{\beta=1} & \text{ при } \lambda < \bar{\lambda}, \text{ если } \{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta < 1}^2, \\ y_{\beta=1} < y_{\beta=0,5} & \text{ при } Q_{\max} > \bar{Q}_{\max}, \text{ если } \{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta < 1}^1, \end{aligned}$$

iii) зависит от рефлексии агента и рефлексии окружения следующим образом:

$$(10г) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial y_{\beta=0,5}^+}{\partial S} < 0, \quad \frac{\partial y_{\beta=0,5}^-}{\partial S} > 0, \\ \frac{\partial y_{\beta=0,5}^+}{\partial S_{-i}} > 0, \quad \frac{\partial y_{\beta=0,5}^-}{\partial S_{-i}} < 0 \text{ при } \lambda > \widehat{\lambda}, \end{aligned} \right\} \text{если } \{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta < 1}^2,$$

$$\frac{\partial y_{\beta=0,5}}{\partial S} < 0, \quad \frac{\partial y_{\beta=0,5}}{\partial S_{-i}} < 0, \text{ если } \{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta < 1}^1 \cup \Omega_{\beta < 1}^3 \cup \Omega_{\beta < 1}^4,$$

iiii) влияние рефлексии по сравнению со случаем линейных функций издержек сказывается следующим образом:

$$(10д) \quad \left. \begin{aligned} \left| \frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S} \right| > \left| \frac{\partial y_{\beta=0,5}^+}{\partial S} \right| & \text{ при } \lambda > \widehat{\lambda}^+, \\ \left| \frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S} \right| > \left| \frac{\partial y_{\beta=0,5}^-}{\partial S} \right| & \text{ при } \lambda > \widehat{\lambda}^-, \\ \left| \frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S_{-i}} \right| > \left| \frac{\partial y_{\beta=0,5}^{+,-}}{\partial S_{-i}} \right| & \text{ при } \lambda > \widehat{\lambda} + \widehat{\lambda}_{-i}, \end{aligned} \right\} \text{если } \{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta < 1}^2,$$

$$\left| \frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S} \right| > \left| \frac{\partial y_{\beta=0,5}}{\partial S} \right|, \quad \left| \frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S_{-i}} \right| > \left| \frac{\partial y_{\beta=0,5}}{\partial S_{-i}} \right|$$

при $Q_{\max} > \bar{Q}_{\max}$, если $\{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta < 1}^1$,

где

$$\Omega_{\beta < 1}^1 = \{(S, \tau, \lambda) : a_0 > 0 \wedge b_0 > 0 \wedge b_0 < |b_1|\},$$

$$\Omega_{\beta < 1}^2 = \{(S, \tau, \lambda) : a_0 > 0 \wedge b_0 > 0 \wedge b_0 > |b_1| \wedge a_0 > |a_1|\},$$

$$\Omega_{\beta < 1}^3 = \{(S, \tau, \lambda) : a_0 < 0 \wedge b_0 < 0\},$$

$$\Omega_{\beta < 1}^4 = \{(S, \tau, \lambda) : a_0 > 0 \wedge b_0 < 0\},$$

$$\begin{aligned}
\zeta &= 1 - \lambda, \quad d = \zeta^2 - 2\bar{B}(1 + S + \tau), \quad \bar{\lambda} = 1 - \tau(1 - B/a), \\
\widehat{\lambda}^+ &= 1 - \frac{2\tau(1 - B/a)}{\Delta_1 + 2}, \quad \widehat{\lambda}^- = 1 - \frac{2\tau(1 - B/a)}{\Delta_1}, \\
s_0 &= \beta(1 - \beta)\bar{B}y^{\beta-2} - 2, \quad s_1 = -(1 + \tau), \quad s_2 = -\beta\bar{B} - (\lambda + \tau), \\
s_3 &= \beta(1 - \beta)\bar{B} - (1 + \tau), \quad s_4 = \beta(1 - \beta)\psi - (1 + \tau), \\
\widehat{\lambda}_{-i} &= \frac{2(1 - B/a)(1 + S) - \Delta_2}{2 + \Delta_1}, \quad \bar{Q}_{\max} = \frac{(0,5B/a)^2}{\tau^3(1 - B/a)^3}, \quad \widehat{\lambda} = 1 - (1 + S + \tau)\alpha, \\
\Delta_1 &= \frac{Q_{\max}^{0,25}(1 - \tau\alpha(n - 1))}{\varphi^{0,5}} - 1, \quad \Delta_2 = \frac{(B/a)^{0,5}(1 + \tau)^{0,5}}{\varphi^{0,5}}, \\
\varphi &= Q_{\max}^{0,5}(1 - \tau\alpha(n - 1))^2 - 2\frac{B}{a}(1 + \tau), \\
y^-, y^+ & \text{ — меньшее и большее равновесия.}
\end{aligned}$$

Таким образом, исследована полная совокупность возможных игровых ситуаций, возникающих при различных технологических и ментальных типах агентов олигополии.

4. Численный эксперимент и обсуждение результатов

Игра агентов с линейными функциями издержек, свойства равновесия в которой описаны в утверждении 1, является референтным случаем. В этом случае равновесные действия агентов выше, чем в классическом случае Курно, если рефлексия агента выше рефлексии окружения (т.е. $|S| > |S_{-i}|$) при любых $n > 1$, а если окружение рефлексировать сильнее (т.е. $|S| < |S_{-i}|$), то при некотором ограниченном числе агентов, т.е. $n < \kappa$. Кроме того, поскольку в случае линейных издержек $S < 0$ и $S_{-i} < 0$, то рост рефлексии агента всегда ведет к росту его равновесия, а рост рефлексии окружения способствует снижению равновесия агента.

В игре агентов, имеющих технологии с отрицательным эффектом масштаба, т.е. выпуклые функции издержек, описанной в утверждении 2, область значений S , при которых равновесие в игре существует, может сужаться по сравнению с линейным случаем, когда $S \in (-1, 0]$. Это проявляется при малых значениях λ и τ , т.е. когда $S_{-i} \rightarrow -1$ (окружение интенсивно рефлексировать) и $|\theta| \rightarrow 0$ (функции издержек окружения близки к линейным). Выпуклость функций издержек приводит к уменьшению равновесного действия по сравнению с моделью линейных издержек при условии $S < \widehat{S}$, что является типичным случаем, поскольку $\widehat{S} \gg 1$, так как $\frac{a}{b} \gg 1$. Кроме того, при выпуклых функциях издержек снижается влияние рефлексии по сравнению с линейным случаем, а тип влияния рефлексии на равновесие остается прежним: рост рефлексии агента повышает его равновесное действие, а рост рефлексии окружения — снижает.

Коэффициенты функций издержек телекоммуникационных компаний РФ

i	Агент	B_i	β_i
1	ПАО «МТС»	2,41	0,76
2	ПАО «МегаФон»	1,36	0,85
3	ПАО «ВымпелКом»	2,46	0,81

Игра агентов, технологии которых характеризуются положительным эффектом расширения масштаба, когда у всех агентов вогнутые функции издержек, описана в утверждении 3. При этом равновесие существует в менее широком диапазоне, чем $S \in (-\infty, \infty)$ [19]. Следовательно, в этом случае S может быть как положительным, так и отрицательным, поэтому понятие роста рефлексии можно трактовать двояко: при $S < 0$, как и ранее, ростом рефлексии будем считать увеличение параметра S по абсолютной величине, т.е. уменьшение S ; при $S > 0$ будем называть ростом рефлексии увеличение параметра S .

Возможны две ситуации: существование двух равновесий в случае $\{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta < 1}^2$ или одного равновесия в случае $\{S, \tau, \lambda\} \subset \Omega_{\beta < 1}^1 \cup \Omega_{\beta < 1}^3 \cup \Omega_{\beta < 1}^4$.

В ситуации двух равновесий одно из них больше равновесия в линейном случае, а другое меньше, если $\lambda < \bar{\lambda}$, а поскольку $\bar{\lambda}$ близко к единице при достаточно большом n , то эта закономерность типична. Кроме того, в этой ситуации рост рефлексии агента при $S < 0$ влечет за собой увеличение большего равновесия и уменьшение меньшего, а при $S > 0$, наоборот, приводит к снижению большего равновесия и повышению меньшего. В свою очередь, рост рефлексии окружения вызывает противоположный эффект при условии $\lambda > \hat{\lambda}$.

В ситуации единственного равновесия его значение больше равновесия в линейном случае при условии $Q_{\max} > \bar{Q}_{\max}$, которое выполняется при малых значениях \bar{Q}_{\max} , т.е. когда $B \ll a$. Кроме того, в данной ситуации при $S < 0$ рост рефлексии агента и окружения способствует уменьшению равновесия, а при $S > 0$ ведет к увеличению равновесия.

При вогнутых функциях издержек влияние рефлексии на равновесие отличается от случая линейных издержек следующим образом: 1) в ситуации двух равновесий рефлексия агента в линейном случае влияет сильнее, чем в нелинейном, при условии $\lambda > \hat{\lambda}^+$ для большего равновесия и $\lambda > \hat{\lambda}^-$ для меньшего равновесия, а рефлексия окружения при условии $\lambda > \hat{\lambda} + \hat{\lambda}_{-i}$; 2) в ситуации одного равновесия рефлексия агента и окружения влияет сильнее в линейном случае при условии $Q_{\max} > \bar{Q}_{\max}$.

Проведем моделирование равновесий на основе параметров функций спроса $a = 1,77$, $b = 0,0009$ и издержек (таблица), полученных для телекоммуникационных компаний РФ [19], причем $C_{Fi} = 0$, $i = 1, 2, 3$. Поскольку $\beta_i < 1$, $i = 1, 2, 3$, то для всех агентов имеет место наиболее интересный случай положительного эффекта масштаба, описанный в утверждении 3, в котором могут наблюдаться два равновесия.

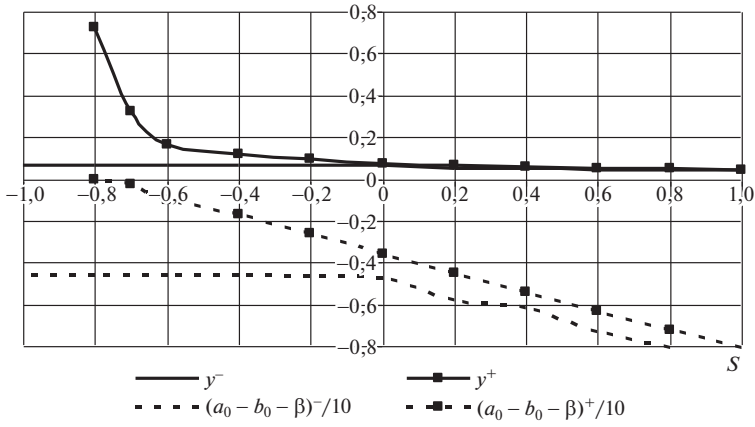


Рис. 1. Влияние рефлексии агента 1 на точки и условия равновесия.

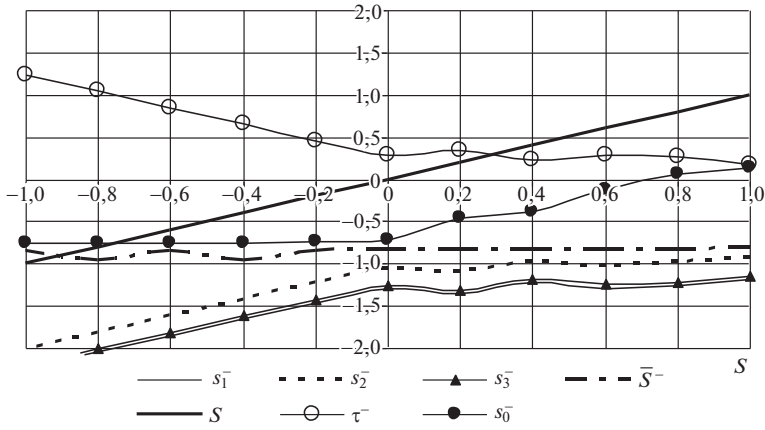


Рис. 2. Ограничения на рефлекссию агента 1 в первой точке равновесия.

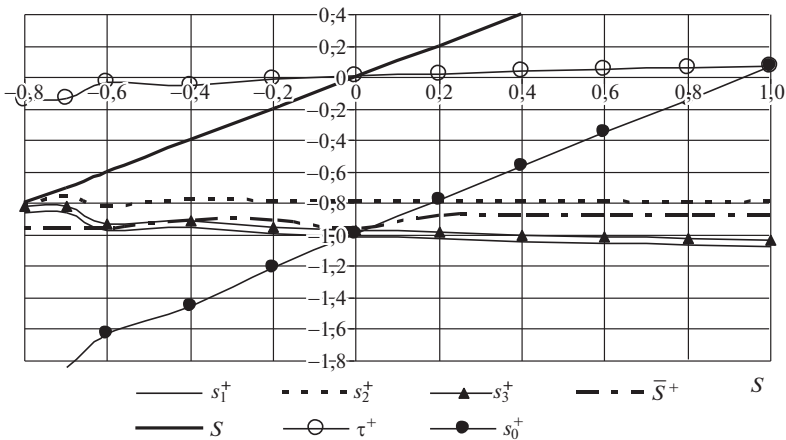


Рис. 3. Ограничения на рефлекссию агента 1 во второй точке равновесия.

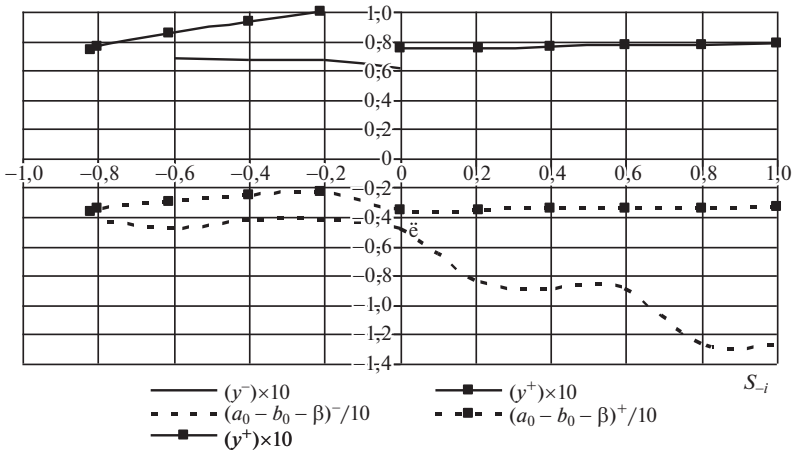


Рис. 4. Влияние рефлексии окружения агента 1 на точки и условия равновесия.

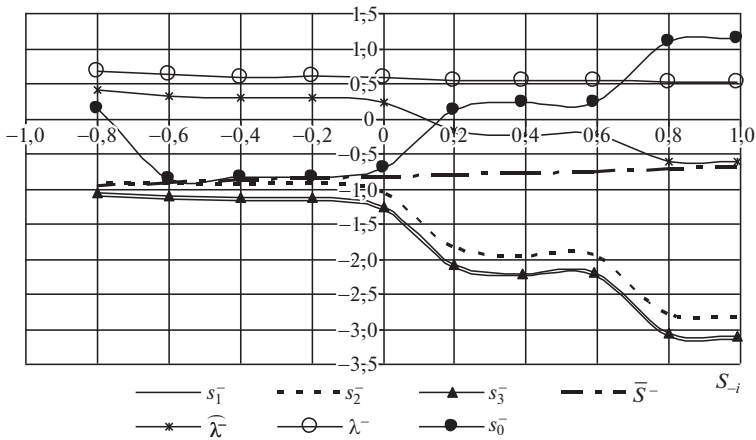


Рис. 5. Ограничения на рефлексии окружения агента 1 в первой точке равновесия.

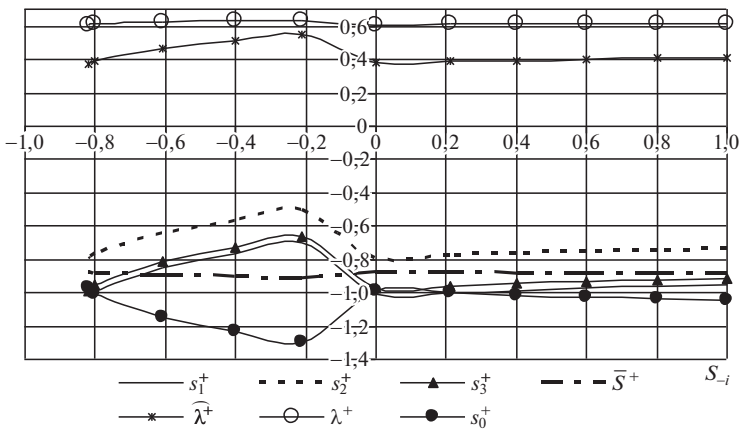


Рис. 6. Ограничения на рефлексии окружения агента 1 во второй точке равновесия.

Поскольку для таких исходных данных не выполняются условия применимости приближенных формул (10) [18], то равновесия рассчитаны путем численного решения уравнения (9а) [18], т.е. $f(y) = \frac{b_0}{a_0}y + \frac{b_1 - a_1}{a_0}y^{\beta-1} = 1$. Для всех агентов выполняются условия $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, $b_0 > |b_1|$, $a_0 > |a_1|$ [18], при которых может быть два равновесия, а условия существования двойного равновесия $a_0 - b_0 - \beta < 0$ и $u_\infty > 0$ соблюдаются в определенных диапазонах S и S_{-i} . Во всех точках равновесия выполняется условие $S = s_4$, т.е. $u_\infty = 0$ (или $f(y) = 1$). Кроме того, моделирование показало, что при равновесии соблюдается соотношение $\omega_i = -\tau_i \forall i \in N$; это свойство не было установлено аналитически.

Рассмотрим влияние на равновесия рефлексии агента (рис. 1–3), считая $S_{-i} = 0$. Для равновесия y^+ при $S < -0,8$ нарушается условие $a_0 - b_0 - \beta < 0$ (рис. 1), т.е. условие $S > s_2$ (рис. 3). Для равновесия y^- при $S < -0,8$ нарушается условие (6в), т.е. $S > s_0$, в результате становится $\tau > 1$ (рис. 2). Поэтому равновесия рассчитаны в указанных диапазонах. Характер изменения равновесий с ростом S подтверждает условия (10г): с ростом S равновесие y^+ уменьшается, а равновесие y^- возрастает.

Рассмотрим влияние на равновесия рефлексии окружения (рис. 4–6), полагая $S = 0$. Изменение S_{-i} не ведет к нарушению условий $a_0 - b_0 - \beta < 0$ и $u_\infty > 0$ в данных диапазонах (рис. 4), однако условие (6в), т.е. $S > s_0$, для равновесия y^- выполняется только в диапазоне $S_{-i} \in (-0,6; 0)$, поэтому y^- представлено в указанном диапазоне. В соответствии с условиями (10г) с ростом S_{-i} равновесие y^- уменьшается, а равновесие y^+ возрастает, если $\lambda > \widehat{\lambda}$ (рис. 6).

5. Заключение

Исследование совместного влияния технологического и ментального портретов агентов на равновесие в игре олигополии продемонстрировало зависимость количества равновесий и величины равновесных действий как от выпуклости (вогнутости) функций издержек агентов, так и от их рефлексивного поведения. Если в случае линейных функций издержек существует единственное равновесие и рост рефлексии агента всегда ведет к увеличению его равновесия, а рост рефлексии окружения способствует снижению равновесия агента, то нелинейный характер издержек приводит к существенным особенностям.

Первая особенность игры агентов с нелинейными функциями издержек состоит в сужении допустимого диапазона суммы предположительных вариаций агента, в котором существует игровое равновесие, по сравнению с возможным значением этой суммы с точки зрения менталитета агента.

Вторая особенность присуща игре агентов с вогнутыми издержками, в которой может существовать два равновесия, одно из которых меньше равновесия в линейном случае, а другое больше; если же равновесие единственно, то оно, как правило, больше равновесного действия в линейном случае. В случае

с выпуклыми издержками равновесие, как правило, меньше, чем в линейном случае.

Третье свойство касается степени влияния рефлексии на равновесие при выпуклых или вогнутых издержках. Выпуклость функций издержек приводит к ослаблению влияния рефлексии по сравнению с линейным случаем, но характер влияния совпадает с линейным случаем. В случае вогнутых издержек рефлексия агента и рефлексия окружения, как правило, слабее, чем в линейном случае, влияют на изменение единственного равновесия, а если равновесия два, то рефлексия окружения может влиять как сильнее, так и слабее.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Поскольку условия (5) определяют неподвижную точку, т.е. $x = y$, то преобразуем выражения α , δ и ω :

$$\alpha = \frac{a - B(1 - \theta^2)Q^\theta}{Q_{\max}b}, \quad \delta = 2 + S + b^{-1}B\theta(\theta + 1)Q^{\theta-1},$$

$$\omega = 1 + S + b^{-1}B\theta(\theta + 1)Q^{\theta-1}.$$

Введем следующее упрощение: так как параметры τ и λ зависят от сумм $\frac{\alpha_{-i}}{\omega_{-i}}$ и $\frac{1}{\omega_{-i}}$ по множеству $-i = \{N \setminus i\}$, то без ограничения общности положим параметры α и ω равными средним в этом множестве, т.е. $\alpha_{-i} = \tilde{\alpha}$, $\omega_{-i} = \tilde{\omega}$ (символом « \sim » обозначим также $\tilde{\theta}$, \tilde{B} , \tilde{S}_{-i} , при которых $\tilde{\omega} = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i}^n \omega_j$, $\tilde{\alpha} = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i}^n \alpha_j$). Тогда

$$\tau = \frac{1}{1 + (n-1)\frac{1}{\tilde{\omega}}} = \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega} + n - 1}, \quad \lambda = \tau(n-1)\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\omega}} = \frac{(n-1)\tilde{\alpha}}{\tilde{\omega} + n - 1}.$$

Из этих формул следует:

$$\frac{\partial \tau}{\partial S} = \frac{\tilde{\omega}'_S(\tilde{\omega} + n - 1) - \tilde{\omega}\tilde{\omega}'_S}{(\tilde{\omega} + n - 1)^2} = \frac{\tilde{\omega}'_S(n-1)}{(\tilde{\omega} + n - 1)^2},$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial S} = \frac{-\tilde{\omega}'_S(n-1)\tilde{\alpha}}{(\tilde{\omega} + n - 1)^2}, \quad \left| \frac{\partial \lambda}{\partial S} \right| = \tilde{\alpha} \frac{\partial \tau}{\partial S}.$$

Производные

$$\omega'_S = 1 + b^{-1}B\theta(\theta + 1)(\theta - 1)Q^{\theta-2}Q'_S,$$

$$\omega'_{S_{-i}} = b^{-1}B\theta(\theta + 1)(\theta - 1)Q^{\theta-2}Q'_{S_{-i}}$$

учитывают неявную зависимость $Q(S, S_{-i})$, но поскольку оцениваются знаки производных $\frac{\partial \tau}{\partial S}$, $\frac{\partial \lambda}{\partial S}$ с целью последующего вывода о знаках Q'_S , $Q'_{S_{-i}}$, которые связаны со знаками τ'_S , $\tau'_{S_{-i}}$, то эта зависимость не учитывается и

считается, что в равновесии $Q(S, S_{-i}) = \text{const}$. Поэтому $\omega'_S = 1$, $\omega'_{S_{-i}} = 0$. Тогда $\frac{\partial \tau}{\partial S_{-i}} = \frac{(n-1)}{(\tilde{\omega}+n-1)^2} > 0$, $\frac{\partial \lambda}{\partial S_{-i}} = \frac{-(n-1)\tilde{\alpha}}{(\tilde{\omega}+n-1)^2} < 0$, $\frac{\partial \tau}{\partial S_i} = \frac{\partial \lambda}{\partial S_i} = 0$. Заметим, что так как $Q_{\max} b = a$, то $\tilde{\alpha} = 1 - \frac{\tilde{B}(1-\tilde{\theta}^2)Q^{\tilde{\theta}}}{a} < 1 \quad \forall Q > 0$. Кроме того, из условия (2а) следует, что $\tilde{\alpha} > 0$, так как $a - \tilde{B}(1 - \tilde{\theta}^2)Q^{\tilde{\theta}} > 0$ при $\theta_{-i} \in (0, 1)$, если $a > C'_{iQ_i}$, т.е. $a > \tilde{B}(1 + \tilde{\theta})Q^{\tilde{\theta}}$, и $a - \tilde{B}(1 - \tilde{\theta}^2)Q^{\tilde{\theta}} > 0$ при $\theta_{-i} \in (-1, 0)$, если $a > \beta^{-1}C'_{iQ_i}$, т.е. $a > \tilde{B}Q^{\tilde{\theta}}$. Поэтому $\tilde{\alpha} \in (0, 1)$.

В случае $\theta_{-i} \in [0, 1)$ доказано, что $S_{-i} \in (-1, 0]$ [19], поэтому $\omega_{-i} > 0$, значит, $\tau \in (0, 1)$; при этом $\lambda \in (0, 1)$, так как $\frac{(n-1)\tilde{\alpha}}{\tilde{\omega}+n-1} > 0 \quad \forall n > 1$ и $(n-1)(\tilde{\alpha}-1) < < \tilde{\omega} \quad \forall n > 1$. В случае $\theta_{-i} \in (-1, 0)$ по [19] $S_{-i} \in (-\infty, \infty)$, но с учетом (6в), из которого следует $\tilde{\omega} > -1$, возможны два варианта: i) $\tilde{\omega} \geq 0$ при условии $\tilde{S} \geq \geq b^{-1}\tilde{B}|\tilde{\theta}|(\tilde{\theta}+1)Q^{\tilde{\theta}-1} - 1 = \bar{S}$; в этом случае, как и в предыдущем, $\tau \in (0, 1)$, $\lambda \in (0, 1)$; ii) $\tilde{\omega} < 0$ при условии $\tilde{S} < \bar{S}$ и $\tilde{\omega} > -1$ при условии $\tilde{S} > \bar{S} - 1$; тогда $\tau \in \left(-\frac{1}{n-2}, 0\right)$, а $\lambda \in \left(0, \frac{n-1}{n-2}\tilde{\alpha}\right)$ при $n > 2$, причем $\lambda \in (0, 1)$, если $\tilde{\alpha} < \frac{n-2}{n-1} = n_2$, т.е. если $\tilde{\alpha}_{\max} = 1 - \frac{\tilde{B}(1-\tilde{\theta}^2)Q^{\tilde{\theta}_{\max}}}{a} < \frac{n-2}{n-1}$, откуда $n > \frac{2-\tilde{\alpha}_{\max}}{1-\tilde{\alpha}_{\max}}$; а при $\lambda > 1$ условие $\lambda - 1 \leq 1$ выполняется, если $n \geq \frac{4-\tilde{\alpha}_{\max}}{2-\tilde{\alpha}_{\max}} = n_1$, тогда $\lambda \in (1, 2)$.

Доказательство утверждения 1. В случае $\beta = 1$ (или $\theta = 0$) показано [19], что $S < 0$, $|S| \in [0, 1)$, поэтому $\delta = 2 + S > 1$, значит, $\omega = \delta - 1 = S + 1 \in (0, 1)$. Если все агенты окружения интенсивно рефлексивируют, т.е. $|S_{-i}| \rightarrow 1$, то $\omega_{-i} \rightarrow 0$, поэтому по (6г) $\tau \rightarrow 0$; если окружение не рефлексивирует, т.е. $|S_{-i}| = 0$, то $\omega_{-i} = 1$, поэтому $\tau = \frac{1}{n}$. Поскольку $a_1 = -1$, $b_1 = 0$, $\alpha = \frac{aQ_{\max} - BQ_{\max}}{Q_{\max}^2 b} = \frac{a-B}{Q_{\max} b}$ при $\theta = 0$, то, во-первых, из (6а) следует $y = \frac{a}{Q_{\max} b - \lambda - \frac{B}{Q_{\max} b}}$, во-вторых, $\lambda = \alpha \tau \sum_{j \neq i}^n \frac{1}{\omega_j} = \alpha \tau \sum_{j=1 \setminus i}^n \frac{1}{\omega_j} = \alpha \tau (\tau - 1)$.

Причем из (2а) следует, что $a > B$. Следовательно, $y = \chi \frac{a-B}{Q_{\max} b}$, где $\chi = \frac{\tau}{\omega+\tau}$. Сравним данное решение с равновесным действием при условии гипотезы Курно $Q_i^K = \frac{a-B}{(n+1)b}$ или $y^K = \frac{a-B}{(n+1)Q_{\max} b}$ [20], т.е. когда предположительные вариации всех агентов равны нулю ($S = 0$, $S_{-i} = 0$), поэтому $\omega = 1$, $\tau = \frac{1}{n}$, $\chi^K = \frac{1}{n+1}$. Покажем, как рефлексивное поведение агентов влияет на увеличение действия, т.е. при каких n выполняется неравенство $\frac{\chi}{\chi^K} = \frac{\tau(n+1)}{\omega+\tau} > 1$: пусть S_{-i} одинаковы для всех агентов окружения, тогда $\tau = \frac{S_{-i}+1}{S_{-i}+n}$, и $\frac{\chi}{\chi^K} > 1$ при условиях $n > \frac{S+1}{S_{-i}-S} S_{-i}$, если $S_{-i} - S > 0$ (т.е. $\kappa < 0$) или $n < \frac{S+1}{S_{-i}-S} S_{-i}$, если $S_{-i} - S < 0$ (т.е. $\kappa > 0$), где обозначено $\kappa = \frac{S+1}{S_{-i}-S} S_{-i}$; очевидно, что $n > \kappa \quad \forall n > 1$ при $\kappa < 0$. Поскольку $\frac{\partial \omega}{\partial S} > 0$, $\frac{\partial \tau}{\partial S} = 0$, то $\frac{\partial \chi}{\partial S} = -\frac{\tau}{(\omega+\tau)^2} \omega' < 0$, а с учетом (7в) получим $\frac{\partial \chi}{\partial S_{-i}} = \frac{\tau'(\omega+\tau) - \tau\tau'}{(\omega+\tau)^2} = \frac{\tau'\omega}{(\omega+\tau)^2} > 0$.

Доказательство утверждения 2. В случае $\beta > 1$ (или $\theta > 0$) показано, что $S \in (-1, 0]$ [19], и $\bar{B} = \frac{B}{bQ_{\max} Q_{\max}^{1-\beta}} = \frac{B}{aQ_{\max}^{1-\beta}}$; из условия (2а) вытекает, что $\bar{B} < 1$, так как из $a > \beta B Q^{\beta-1}$ следует $\frac{B}{aQ^{1-\beta}} < \frac{1}{\beta} < 1$.

Рассмотрим случай $t = 1$ [18], когда $a_0 = \frac{1-\lambda}{B} > 0$, $b_0 = \frac{1+S+\tau}{B} > 0$, т.е. $\lambda < 1$, $1 + S + \tau > 0$. Условие равновесия $a_0 - b_0 - \beta < 0$ имеет вид $-\frac{1}{B}(\lambda + S + \tau) - \beta < 0$, откуда следует $\lambda + S + \tau > -\beta B$. Поэтому получаем систему: $S > -(1 + \tau) = s_1$, $S > -\beta B - (\lambda + \tau) = s_2$. С учетом $S \in (-1, 0]$ и (7а) ограничение $S > s_1$ не играет роли, так как $s_1 < -1$. Поэтому будет следующее решение: если $s_2 \leq -1$, то $S \in (-1, 0]$, а если $s_2 > -1$, то $S \in (s_2, 0]$. Вариант $s_2 > -1$ имеет место, если $\lambda + \tau < 1$ и $Q_{\max} < \left(\frac{B}{a} \frac{\beta}{1-\lambda-\tau}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$.

В случае $t = 2$ [18], когда $a_0 < 0$, $b_0 > 0$, равновесие отсутствует, поскольку $\lambda > 1$ противоречит (7б). Случаи $t = 3, 4$ [18], когда $b_0 < 0$, т.е. $1 + S + \tau < 0$, невозможны при $S \in (-1, 0]$ и (7а).

Получим аналитическое решение в случае $t = 1$ для наиболее характерного варианта нелинейности $\beta = 2$ (или $\theta = 1$), используя формулу (10а) [18]: $y_{\beta=2} = \frac{1}{k_1+k_2}$, где $k_1 = \frac{b_0}{a_0} = \frac{1+S+\tau}{1-\lambda}$, $k_2 = \frac{b_1-a_1}{a_0} = \frac{\theta+1}{1-\lambda} \bar{B}$. Тогда $y_{\beta=2} = \frac{1-\lambda}{1+S+\tau+2\bar{B}}$, причем при $\theta = 1$: $\bar{B} = b^{-1}B$, $\omega = 1 + S + 2b^{-1}B$, поэтому $y_{\beta=2} = \frac{1-\lambda}{\omega+\tau}$. Если $\theta = 1$ для всех агентов, то $\alpha_{-i} = 1$. Аналогично лемме 1 рассмотрим средние значения \tilde{S}_{-i} , $\tilde{\theta}$, \tilde{B} , тогда $\lambda = \frac{(n-1)}{\tilde{\omega}+n-1}$, и $1 - \lambda = \tau$, поэтому $y_{\beta=2} = \frac{\tau}{\omega+\tau} = \chi_{\beta=2}$.

Сравним $y_{\beta=1}$ и $y_{\beta=2}$, пусть $y_{\beta=1} > y_{\beta=2}$, т.е. $\frac{\tau}{1+S+\tau} \frac{a-B}{a} \div \frac{\tau}{1+S+2b^{-1}B+\tau} > 1$, откуда $1 + S + \tau < 2\frac{a}{b} \left(1 - \frac{B}{a}\right)$, или $S < 2\frac{a}{b} \left(1 - \frac{B}{a}\right) - 1 - \tau = \hat{S}$. Как и в утверждении 1, доказывается, что $\frac{\partial \chi}{\partial S} = -\frac{\tau}{(\omega+\tau)^2} \omega' S < 0$, $\frac{\partial \chi}{\partial S_{-i}} = \frac{\tau'_{S_{-i}} \omega}{(\omega+\tau)^2} > 0$. Но поскольку $\omega'_{\beta=1_S} = \omega'_{\beta=2_S} = 1$, $\omega_{\beta=2} > \omega_{\beta=1}$, $\tau_{\beta=2} > \tau_{\beta=1}$ (так как $\frac{\partial \tau}{\partial \omega_{-i}} > 0$), то $\left| \frac{\partial \chi_{\beta=2}}{\partial S} \right| < \left| \frac{\partial \chi_{\beta=1}}{\partial S} \right|$, аналогично, $\frac{\partial \chi_{\beta=2}}{\partial S_{-i}} < \frac{\partial \chi_{\beta=1}}{\partial S_{-i}}$, так как $\tau'_{\beta=2_{S_{-i}}} > \tau'_{\beta=1_{S_{-i}}}$.

Доказательство утверждения 3. В случае $\beta < 1$ (или $\theta < 0$) показано $S \in (-\infty, \infty)$ [19], но из условия (6в) $\omega = 1 + S + b^{-1}B\theta(\theta + 1)Q^{\theta-1} = \delta - 1 > -1$, т.е. $S > b^{-1}B|\theta|(\theta + 1)Q^{\theta-1} - 2 = \beta(1 - \beta)\bar{B}y^{\beta-2} - 2 = s_0$, и $\bar{B} = \frac{B}{bQ_{\max}Q_{\max}^{1-\beta}} = \frac{B}{aQ_{\max}^{1-\beta}} < 1$ из условия (2а).

Рассмотрим случай $t = 5$ [18], когда $a_0 = \frac{1-\lambda}{B} > 0$, $b_0 = \frac{1+S+\tau}{B} > 0$, т.е. $\lambda < 1$, $1 + S + \tau > 0$.

Случай $t = 5.1$: введем множество параметров (S, τ, λ) , соответствующих этому случаю, в виде $\Omega_{\beta < 1}^1 = \{(S, \tau, \lambda) : a_0 > 0 \wedge b_0 > 0 \wedge b_0 < |b_1|\}$; условие $b_0 < |b_1|$ равносильно $\frac{1+S+\tau}{B} < |\theta|(\theta + 1) = \beta(1 - \beta)$, т.е. $1 + S + \tau < \beta(1 - \beta)\bar{B}$; условие равновесия $a_0 - b_0 - \beta > 0$ имеет вид $-\frac{1}{B}(\lambda + S + \tau) - \beta > 0$, откуда следует $\lambda + S + \tau < -\beta B$. Поэтому получаем систему: $S > \beta(1 - \beta)\bar{B}y^{\beta-2} - 2 = s_0$, $S > -(1 + \tau) = s_1$, $S < -\beta B - (\lambda + \tau) = s_2$, $S < \beta(1 - \beta)\bar{B} - (1 + \tau) = s_3$.

В этой системе $s_2 < s_3$, т.е. $1 - \lambda < \beta(2 - \beta)\bar{B}$ при условии $a_0 < |a_1|$, и $s_3 < s_2$ при $a_0 > |a_1|$; неравенство $s_1 < s_0$, т.е. $\frac{1-\tau}{\beta(1-\beta)\bar{B}} < y^{\beta-2}$ может выполняться при $y \rightarrow 0$, так как $y^{\beta-2}$ имеет порядок $Q_{\max}^{\beta-2}$, а \bar{B}^{-1} имеет порядок $Q_{\max}^{\beta-1}$. Поэто-

му решением системы будет диапазон $S \in \left\{ \begin{array}{l} (\max \{s_0, s_1\}, s_3) \text{ при } a_0 > |a_1|, \\ (\max \{s_0, s_1\}, s_2) \text{ при } a_0 < |a_1|. \end{array} \right.$
Этот диапазон не пуст в частных случаях, например, $s_1 < s_3$ (так как $\beta(1-\beta)\overline{B} > 0$); $s_1 < s_2$, если $\beta\overline{B} < 1-\lambda$.

В случае $t = 5.1$ аналитическое решение для варианта нелинейности $\beta = 0,5$ (или $\theta = -0,5$) следует из формулы (10) [18]:

$$y_{\beta=0,5} = \left(\sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}} \right)^2,$$

где $k_1 = \frac{1+S+\tau}{1-\lambda} = \frac{\gamma}{\zeta}$, $k_2 = \frac{0,5\overline{B}}{1-\lambda} = \frac{0,5\overline{B}}{\zeta}$, $\gamma = 1 + S + \tau$, $\zeta = 1 - \lambda$, $q = \frac{k_2}{2k_1} = 0,25\frac{\overline{B}}{\gamma}$, $D = \frac{27k_2^2k_1-4}{108k_1^3} = \frac{27 \cdot 0,25\overline{B}^2\gamma-4\zeta^3}{108\gamma^3}$. Поскольку $\lambda < 1$, то $\zeta^3 \ll 1$, поэтому $D \approx \frac{0,25\overline{B}^2}{4\gamma^2}$, значит, $-q + \sqrt{D} = 0$, $-q - \sqrt{D} = -\frac{\overline{B}}{2\gamma}$, следовательно, $y_{\beta=0,5} = \left(\frac{0,5\overline{B}}{1+S+\tau} \right)^{\frac{2}{3}}$.

Сравним $y_{\beta=1}$ и $y_{\beta=0,5}$, учитывая, что из формулы (8а) следует $y_{\beta=1} = \frac{\tau(1-\vartheta)}{1+S+\tau}$, где $\vartheta = \overline{B}_{\beta=1} = \frac{B}{a} < 1$ при $a > B$ (но иное невозможно, так как $y_{\beta=1} < 0$ при $a < B$), а в формуле (9б) $\overline{B}_{\beta=0,5} = \frac{B}{aQ_{\max}^{0,5}}$. Пусть $y_{\beta=0,5} > y_{\beta=1}$, т.е. $\left(\frac{0,5\overline{B}_{\beta=0,5}}{1+S+\tau} \right)^{\frac{2}{3}} \div \left(\frac{\tau(1-\vartheta)}{1+S+\tau} \right) > 1$, откуда следует $\frac{\tau^3(1-\vartheta)^3}{(0,5\overline{B}_{\beta=0,5})^2} > 1 + S + \tau$; поскольку $0 < 1 + S + \tau < \beta(1-\beta)\overline{B} < 1$ по свойствам случая $t = 5.1$, то заменим это неравенство на более жесткое $\frac{\tau^3(1-\vartheta)^3}{(0,5\vartheta)^2} Q_{\max} > 1$, откуда $Q_{\max} > \frac{(0,5\vartheta)^2}{\tau^3(1-\vartheta)^3} = \overline{Q}_{\max}$.

Оценим влияние S и S_{-i} : $\frac{\partial y_{\beta=0,5}}{\partial S} = -\frac{2}{3} (0,5\overline{B}_{\beta=0,5})^{\frac{2}{3}} (1+S+\tau)^{-\frac{1}{3}} < 0$, $\frac{\partial y_{\beta=0,5}}{\partial S_{-i}} = -\frac{2}{3} (0,5\overline{B}_{\beta=0,5})^{\frac{2}{3}} (1+S+\tau)^{-\frac{1}{3}} \tau'_{S_{-i}} < 0$, так как $1+S+\tau > 0$ и $\tau'_{S_{-i}} > 0$ согласно (7в). Неравенство $\left| \frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S} \right| > \left| \frac{\partial y_{\beta=0,5}}{\partial S} \right|$, учитывая, что $\frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S} = -\frac{\tau(1-\vartheta)}{(1+S+\tau)^2}$, приводит к $\left(\frac{3}{2} \right)^3 \frac{\tau^3(1-\vartheta)^3}{(0,5\overline{B}_{\beta=0,5})^2} > (1+S+\tau)^5$, которое также выполняется при $Q_{\max} > \frac{(0,5\vartheta)^2}{\tau^3(1-\vartheta)^3} = \overline{Q}_{\max}$. Неравенство $\left| \frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S_{-i}} \right| > \left| \frac{\partial y_{\beta=0,5}}{\partial S_{-i}} \right|$ верно по аналогии.

Случай $t = 5.2$: условие $b_0 > |b_1|$ равносильно $1 + S + \tau > \beta(1-\beta)\overline{B}$, условие $a_0 < |a_1| \Rightarrow \frac{1-\lambda}{B} < 1 - \theta^2 \Rightarrow \lambda > 1 - \beta(2-\beta)\overline{B}$. Если суммировать эти два неравенства, то $\lambda + S + \tau > -\beta\overline{B}$, поэтому $a_0 - b_0 - \beta < 0$, т.е. производная функции (6а) не меняет знака при $y \in (0, 1)$, значит, равновесие не существует.

Случай $t = 5.3$: обозначим $\Omega_{\beta < 1}^2 = \left\{ (S, \tau, \lambda) : a_0 > 0 \wedge b_0 > 0 \wedge b_0 > |b_1| \wedge a_0 > |a_1| \right\}$; условие $b_0 > |b_1|$ равносильно $1 + S + \tau > \beta(1-\beta)\overline{B}$, условие $a_0 > |a_1| \Rightarrow 1 - \lambda > \beta(2-\beta)\overline{B}$. Условие равновесия $a_0 - b_0 - \beta < 0$ имеет

вид $-\frac{1}{B}(\lambda + S + \tau) - \beta < 0$, откуда следует $\lambda + S + \tau > -\beta\bar{B}$. Дополнительное условие $-\frac{a_0}{a_1} > \left| \frac{b_0}{b_1} \right|^{\frac{\theta}{\theta-1}}$ равносильно $1 + S + \tau < \beta(1 - \beta)\bar{B}\psi$, где $\psi = \left(\frac{a_0}{|a_1|} \right)^{\frac{\beta-2}{\beta-1}} = \left(\frac{1-\lambda}{\beta\beta(2-\beta)} \right)^{\frac{\beta-2}{\beta-1}} > 1$ (в силу $\lambda < 1 - \beta(2 - \beta)\bar{B}$). Поэтому получаем систему: $S > \beta(1 - \beta)\bar{B}y^{\beta-2} - 2 = s_0$, $S > -(1 + \tau) = s_1$, $S > -\beta\bar{B} - (\lambda + \tau) = s_2$, $S > \beta(1 - \beta)\bar{B} - (1 + \tau) = s_3$, $S < \beta(1 - \beta)\psi - (1 + \tau) = s_4$.

В этой системе $s_3 < s_2$ (из условия $a_0 > |a_1|$), $s_1 < s_3$ (так как $\beta(1 - \beta)\bar{B} > 0$), т.е. $s_1 < s_3 < s_2$; а $s_0 < s_2$ в случае $\beta\bar{B}((1 - \beta)y^{\beta-2} + 1) < 2 - (\lambda + \tau)$. Поэтому решением системы будет диапазон $S \in (\max\{s_0, s_2\}, s_4)$, который может быть не пустым в частных случаях: например, $s_0 < s_4$, если $\beta(1 - \beta)\bar{B}(\psi - y^{\beta-2}) > \tau - 1$, т.е. когда $\psi > y^{\beta-2}$ (так как $\tau < 1$) или $y < \left(\frac{a_0}{|a_1|} \right)^{\frac{1}{\beta-1}}$, что выполняется для меньшего из двух равновесий [18]; кроме того, $s_2 < s_4$, если $\beta\bar{B}((1 - \beta)\psi + 1) > 1 - \lambda$; отметим, что более слабое неравенство $s_3 < s_4$ верно, так как соответствует $\psi > 1$.

В случае $t = 5.3$ найдем решение для варианта $\beta = 0,5$ (или $\theta = -0,5$), из формулы (10) [18] для $\beta = 0$, поскольку она отражает два равновесия, $y_{\beta=0,5} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4k_1k_2}}{2k_1}$, подставив параметры, соответствующие $t = 5.1$: $1 - 4k_1k_2 = 1 - 2\frac{\bar{B}\gamma}{\zeta^2} = \frac{\zeta^2 - 2\bar{B}\gamma}{\zeta^2}$. Тогда получим: $y_{\beta=0,5}^{+,-} = \frac{\zeta \pm \sqrt{d}}{2\gamma}$, $d = \zeta^2 - 2\bar{B}\gamma$, $\gamma = 1 + S + \tau$.

Сравним $y_{\beta=1}$ и $y_{\beta=0,5}^{+,-}$, пусть $y_{\beta=0,5}^+ > y_{\beta=1}$, т.е. $\frac{\zeta + \sqrt{d}}{2\gamma} \div \frac{\tau(1-\vartheta)}{\gamma} > 1$, что приводит к неравенству $2\tau\zeta(1 - \vartheta) - 2\tau^2(1 - \vartheta)^2 - \bar{B}\gamma > 0$, в котором последним членом можно пренебречь, заменив неравенство на более жесткое, в результате получим $\zeta - \tau(1 - \vartheta) > 0$, откуда следует $\lambda < 1 - \tau(1 - B/a)$. Аналогично, $y_{\beta=0,5}^- < y_{\beta=1}$ при том же условии $\lambda < 1 - \tau(1 - B/a) = \bar{\lambda}$.

Оценим влияние S на равновесие: $\frac{\partial y_{\beta=0,5}^+}{\partial S} = \frac{0,5d^{-0,5}d'_S 2\gamma - 2(\zeta + \sqrt{d})}{4\gamma^2} = \frac{-2\bar{B}\gamma - 2(\zeta\sqrt{d} + d)}{4\sqrt{d}\gamma^2} = -\frac{\zeta^2 - d + 2(\zeta\sqrt{d} + d)}{4\sqrt{d}\gamma^2} = -\frac{(\zeta + \sqrt{d})^2}{4\sqrt{d}\gamma^2} < 0$, по аналогии, $\frac{\partial y_{\beta=0,5}^-}{\partial S} = \frac{(\zeta - \sqrt{d})^2}{4\sqrt{d}\gamma^2} > 0$.

Оценим влияние S_{-i} на равновесие, учитывая, что $d'_{S_{-i}} = 2\zeta\lambda'_{S_{-i}} - 2\bar{B}\tau'_{S_{-i}}$, $\zeta'_{S_{-i}} = -\lambda'_{S_{-i}}$, $\lambda'_{S_{-i}} = -\alpha\tau'_{S_{-i}}$: $\frac{\partial y_{\beta=0,5}^+}{\partial S_{-i}} = \frac{(\zeta'_{S_{-i}} + 0,5d^{-0,5}d'_{S_{-i}})2\gamma - 2\tau'_{S_{-i}}(\zeta + \sqrt{d})}{4\gamma^2} = \tau'_{S_{-i}} \frac{(\alpha\sqrt{d} + \alpha\zeta - \bar{B})\gamma - \zeta\sqrt{d} - d}{2\gamma^2\sqrt{d}} = \tau'_{S_{-i}} \frac{(\sqrt{d} + \zeta)(\gamma\alpha - \zeta) + \bar{B}\gamma}{2\gamma^2\sqrt{d}}$; аналогично, $\frac{\partial y_{\beta=0,5}^-}{\partial S_{-i}} = \tau'_{S_{-i}} \frac{(\sqrt{d} - \zeta)(\gamma\alpha - \zeta) - \bar{B}\gamma}{2\gamma^2\sqrt{d}}$. Поскольку $\tau'_{S_{-i}} > 0$ по (7в), то $\frac{\partial y_{\beta=0,5}^+}{\partial S_{-i}} > 0$ будет, если верно неравенство $(\sqrt{d} + \zeta)(\gamma\alpha - \zeta) + \bar{B}\gamma > 0$, которое заменим (учитывая, что $\bar{B}\gamma$ мало) на более жесткое $(\sqrt{d} + \zeta)(\gamma\alpha - \zeta) > 0$, верное при $\gamma\alpha - \zeta > 0$, откуда следует $\lambda > 1 - \gamma\alpha = \hat{\lambda}$. Аналогично, $\frac{\partial y_{\beta=0,5}^-}{\partial S_{-i}} < 0$ будет

при $(\sqrt{d} - \zeta)(\gamma\alpha - \zeta) > 0$, а поскольку $\zeta > \sqrt{d}$, то также при $\gamma\alpha - \zeta > 0$ или $\lambda > \widehat{\lambda}$.

Сравним $\left| \frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S} \right|$ и $\left| \frac{\partial y_{\beta=0.5}^{+,-}}{\partial S} \right|$. Пусть $\left| \frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S} \right| > \left| \frac{\partial y_{\beta=0.5}^{+,-}}{\partial S} \right|$, т.е. $\frac{\tau(1-\vartheta)}{\gamma^2} \div \frac{(\zeta + \sqrt{d})^2}{4\sqrt{d}\gamma^2} > 1$; отсюда следует $2\tau(1-\vartheta) > \frac{\zeta^2 - \overline{B}\gamma}{\sqrt{d}} + \zeta$, поскольку $\frac{(\zeta + \sqrt{d})^2}{\sqrt{d}} = 2\left(\frac{\zeta^2 - \overline{B}\gamma}{\sqrt{d}} + \zeta\right)$; заменим это неравенство на более жесткое

$$(II.1) \quad 2\tau(1-\vartheta) > \frac{\zeta^2}{\sqrt{d}} + \zeta = \zeta \left(\frac{\zeta}{\sqrt{d}} + 1 \right)$$

(так как $\overline{B}\gamma \ll \frac{\zeta^2}{2}$ из условия $d > 0$); численные эксперименты показывают, что $\frac{\zeta}{\sqrt{d}} \approx 1$, поэтому сделаем замену $\frac{\zeta}{\sqrt{d}} \leq 1 + \Delta_1$, откуда $(1 + \Delta_1)^2 \geq \frac{1}{1 - \frac{2\overline{B}\gamma}{\zeta^2}}$;

правая часть этого неравенства наибольшая при наибольшем $\frac{\gamma}{\zeta^2}$, или когда $\gamma = 1 + \tau$ (т.е. $S = 0$) и $\lambda = \tau\alpha(n-1)$ (т.е. при $\omega = 1$, когда $S_{-i} = 0$), поэтому $\frac{\gamma}{\zeta^2} < \frac{1+\tau}{(1-\tau\alpha(n-1))^2}$; тогда $(1 + \Delta_1)^2 \geq \frac{1}{1 - \frac{2\vartheta}{Q_{\max}^{0.5}} \frac{1+\tau}{(1-\tau\alpha(n-1))^2}}$, откуда $\Delta_1 \geq$

$\geq \frac{Q_{\max}^{0.25}(1-\tau\alpha(n-1))}{\varphi^{0.5}} - 1$, где $\varphi = Q_{\max}^{0.5}(1-\tau\alpha(n-1))^2 - 2\vartheta(1+\tau)$; следовательно, из неравенства (II.1) вытекает $2\tau(1-\vartheta) > \zeta(\Delta_1 + 2)$, откуда

$\lambda > 1 - \frac{2\tau(1-\vartheta)}{\Delta_1 + 2} = \widehat{\lambda}^+$. При аналогичных рассуждениях условие $\left| \frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S} \right| > \left| \frac{\partial y_{\beta=0.5}^-}{\partial S} \right|$ приводит к виду $2\tau(1-\vartheta) > \zeta\Delta_1$, или $\lambda > 1 - \frac{2\tau(1-\vartheta)}{\Delta_1} = \widehat{\lambda}^-$.

Поскольку $\frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S_{-i}} = \tau'_{S_{-i}} \frac{(1-\vartheta)(1+S)}{\gamma^2}$, то определим условие, при котором

$\left| \frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S_{-i}} \right| > \left| \frac{\partial y_{\beta=0.5}^+}{\partial S_{-i}} \right|$ (отметим, что поскольку $\left| \frac{\partial y_{\beta=0.5}^+}{\partial S_{-i}} \right| > \left| \frac{\partial y_{\beta=0.5}^-}{\partial S_{-i}} \right|$, то $\left| \frac{\partial y_{\beta=1}}{\partial S_{-i}} \right| > \left| \frac{\partial y_{\beta=0.5}^-}{\partial S_{-i}} \right|$ будет также выполнено при таком условии), т.е. $\frac{2(1-\vartheta)(1+S)\sqrt{d}}{(\sqrt{d}+\zeta)(\gamma\alpha-\zeta)+\overline{B}\gamma} > 1$; запишем это в виде

$$(II.2) \quad 2(1-\vartheta)(1+S) > \left(1 + \frac{\zeta}{\sqrt{d}}\right)(\gamma\alpha - \zeta) + \frac{\overline{B}\gamma}{\sqrt{d}};$$

как было показано при анализе (II.1), $\frac{\zeta}{\sqrt{d}} \leq 1 + \Delta_1$; численные эксперименты показывают, что $\frac{\overline{B}\gamma}{\sqrt{d}} \approx 0$, поэтому $\frac{\overline{B}\gamma}{\sqrt{d}} \leq \Delta_2$, откуда $\Delta_2^2 \geq \frac{1}{\frac{\zeta^2}{B\gamma} - 2}$ и наибольшее

значение правая часть неравенства принимает при наименьшем $\frac{\zeta^2}{B\gamma}$ (как и для (II.1)), поэтому сделаем замену $\Delta_2^2 \geq \frac{1}{\frac{Q_{\max}^{0.5}(1-\tau\alpha(n-1))^2}{\vartheta} - 2}$, откуда $\Delta_2 \geq$

$\geq \frac{\vartheta^{0.5}(1+\tau)^{0.5}}{\varphi^{0.5}}$; значит, (II.2) можно записать в виде $2(1-\vartheta)(1+S) > (2 + \Delta_1)(\gamma\alpha - \zeta) + \Delta_2$, откуда следует $\lambda > 1 - \gamma\alpha + \frac{2(1-\vartheta)(1+S) - \Delta_2}{2 + \Delta_1} = \widehat{\lambda} + \widehat{\lambda}_{-i}$, где $\widehat{\lambda}_{-i} = \frac{2(1-\vartheta)(1+S) - \Delta_2}{2 + \Delta_1}$.

В случае $t = 6$ [18] обозначим $\Omega_{\beta < 1}^3 = \{(S, \tau, \lambda) : a_0 < 0 \wedge b_0 < 0\}$, $a_0 = \frac{1-\lambda}{B} < 0$, $b_0 = \frac{1+S+\tau}{B} < 0$, т.е. $\lambda > 1$, $1 + S + \tau < 0$. Условие равновесия $a_0 - b_0 - \beta > 0$ имеет вид $-\frac{1}{B}(\lambda + S + \tau) - \beta > 0$, откуда следует $\lambda + S + \tau < -\beta\bar{B}$. Поэтому получаем систему: $S > \beta(1 - \beta)\bar{B}y^{\beta-2} - 2 = s_0$, $S < -(1 + \tau) = s_1$, $S < -\beta\bar{B} - (\lambda + \tau) = s_2$. Поскольку $s_2 < s_1$ (в силу $\lambda - 1 > -\beta\bar{B}$), то решение будет $S \in (s_0, s_2)$; этот диапазон не пуст при условии $s_0 < s_2$, т.е. $\beta\bar{B}((1 - \beta)y^{\beta-2} + 1) < 2 - (\lambda + \tau)$. Решение вычисляется как при $t = 5.1$, но хотя $\lambda > 1$, тем не менее $\zeta^3 \ll 1$, так как при условии (76) $\lambda < 2$.

В случае $t = 7$ [18] обозначим $\Omega_{\beta < 1}^4 = \{(S, \tau, \lambda) : a_0 > 0 \wedge b_0 < 0\}$, $a_0 = \frac{1-\lambda}{B} > 0$, $b_0 = \frac{1+S+\tau}{B} < 0$, т.е. $\lambda < 1$, $1 + S + \tau < 0$. Условие равновесия $-\frac{1}{B}(\lambda + S + \tau) - \beta > 0$ дает $\lambda + S + \tau < -\beta\bar{B}$. Поэтому получаем систему: $S > \beta(1 - \beta)\bar{B}y^{\beta-2} - 2 = s_0$, $S < -(1 + \tau) = s_1$, $S < -\beta\bar{B} - (\lambda + \tau) = s_2$. В этом случае $s_2 < s_1$ не всегда, а только при условии $1 - \lambda > \beta\bar{B}$, поэтому решением является область $S \in (s_0, \min\{s_1, s_2\})$, которая не пуста при условиях $s_0 < s_1$, т.е. $\frac{1-\tau}{\beta(1-\beta)\bar{B}} > y^{\beta-2}$, и $s_0 < s_2$, т.е. $\beta\bar{B}((1 - \beta)y^{\beta-2} + 1) < 2 - (\lambda + \tau)$. Отметим, что в этом случае, как и при $t = 6$, сравнение $y_{\beta=1}$ и $y_{\beta=0,5}$, а также их производных по S и S_{-i} , невозможно, так как $y_{\beta=1} > 0$ не существует при $1 + S + \tau < 0$.

В случае $t = 8$ [18] $a_0 < 0$, $b_0 > 0$, и условие $a_0 - b_0 - \beta > 0$ не может быть выполнено, поэтому равновесие отсутствует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nash J. Non-cooperative Games // Ann. Math. 1951. No. 54. P. 286–295.
2. Cournot A.A. Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960. (Original 1838).
3. Stackelberg H. Market Structure and Equilibrium: 1st Edition. Translation into English, Bazin, Urch & Hill: Springer, 2011. (Original 1934).
4. Sarkar S., Tarafdar S. Investment Choice with Managerial Incentive Schemes. Int. Game Theory Rev. 2021. No. 23(2). P. 2050016.
5. Cao B.-B., Gong Z.-J., You T.-H. Stackelberg Pricing Policy in Dyadic Capital-Constrained Supply Chain Considering bank's Deposit and Loan Based on Delay Payment Scheme // J. Industr. Manag. Optimiz. 2021. No. 17(5). P. 2855–2887.
6. Li M., Zhang J., Xu Y., Wang W. Effect of disruption risk on a supply chain with price-dependent demand // J. Industr. Manag. Optimiz. 2020. No. 16(6). P. 3083–3103.
7. Novikov D.A., Chkhartishvili A.G. Reflexion and Control: Mathematical Models. London: CRC Press, 2014.
8. Novikov D., Korepanov V., Chkhartishvili A. Reflexion in mathematical models of decision-making // Int. J. Parall., Emergent Distribut. Syst. 2018. No. 33(3). P. 319–335.
9. Novikov D.A., Chkhartishvili A.G. Mathematical Models of Informational and Strategic Reflexion: a Survey // Advan. Syst. Sci. Appl. 2014. No. 3. P. 254–277.

10. *Chkhartishvili A.G., Korepanov V.O.* Adding Informational Beliefs to the Players Strategic Thinking Model // IFAC-PapersOnLine. 2016. No. 49(32). P. 19–23.
11. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Коллективное поведение в модели Штакельберга в условиях неполной информации // *АиТ*. 2017. № 9. С. 91–105.
Algazin G.I., Algazina D.G. Collective behavior in the Stackelberg model under incomplete information // *Autom. Remote Control*. 2017. No. 78(9). P. 1619–1630.
12. *Filatov A.Yu., Makolskaya Ya.S.* The equilibrium and socially effective number of firms in oligopoly: theory and empirics // VIII Moscow Int. Conf. Oper. Res. (ORM2016). 2016. P. 207–208.
13. *Korepanov V.* Strategic Thinking Models for Team Building // Proc. 2019 1st Int. Conf. Control Syst. Mathem. Modell., Autom. Energy Eff., SUMMA 2019. 2019. No. 8947593. P. 185–187.
14. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Рефлексивная динамика в условиях неопределенности олигополии Курно // *АиТ*. 2020. № 2. С. 115–133.
Algazin G.I., Algazina D.G. Reflexive Dynamics in the Cournot Oligopoly under Uncertainty // *Autom. Remote Control*. 2020. No. 81(2). P. 287–301.
15. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Процессы рефлексии и равновесие в модели олигополии с лидером // *АиТ*. 2020. № 7. С. 113–128.
Algazin G.I., Algazina D.G. Reflexion Processes and Equilibrium in an Oligopoly Model with a Leader // *Autom. Remote Control*. 2020. No. 81(7). P. 1258–1270.
16. *Уолтерс А.А.* Производственные функции и функции затрат: эконометрический обзор // Теория фирмы. Т. 2. СПб: Экономич. школа. 2000. С. 160–204.
Walters A.A. Production and cost functions: and econometric survey // *Econometr.* 1963. No. 31(1). P. 1–66.
17. *Гераськин М.И.* Свойства предположительных вариаций в нелинейной модели олигополии Штакельберга // *АиТ*. 2020. № 6. С. 105–130.
Geraskin M. The Properties of Conjectural Variations in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model // *Autom. Remote Control*. 2020. No. 81(6). P. 1051–1072.
18. *Гераськин М.И.* Анализ равновесий в нелинейной модели олигополии // *АиТ*. 2022. № 8. С. 140–158.
19. *Гераськин М.И.* Приближенное вычисление равновесий в нелинейной модели олигополии Штакельберга на основе линеаризации // *АиТ*. 2020. № 9. С. 120–143.
Geraskin M. Approximate Calculation of Equilibria in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model: A Linearization Based Approach // *Autom. Remote Control*. 2020. No. 81(9). P. 1659–1678.
20. *Intriligator M.D.* Mathematical Optimization and Economic Theory. New Jersey: Prentice-Hall. Englewood Cliffs. 1971.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 28.01.2022

После доработки 15.04.2022

Принята к публикации 10.06.2022

Заметки, хроника, информация

© 2022 г. ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

ПОПРАВКА К СТАТЬЕ Б.Т. ПОЛЯКА, М.В. ХЛЕБНИКОВА “СИНТЕЗ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО ВЫХОДУ ПРИ ПОМОЩИ НАБЛЮДАТЕЛЯ КАК ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ” (Авт. 2022. № 3. С. 7–32)

DOI: 10.31857/S0005231022110071, EDN: KERLLG

Формула для градиента $\nabla_L f(K, L, \alpha)$ в лемме 3 приведена неточно; она должна выглядеть следующим образом:

$$(1) \quad \frac{1}{2} \nabla_L f(K, L, \alpha) = \rho_L L + M_2^T Y P N_2^T - \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} D \\ D - LD_1 \end{pmatrix} D_1^T.$$

Приводим полный вывод этого результата.

Для дифференцирования по L функции $f(K, L, \alpha)$ при ограничении в виде уравнения Ляпунова

$$(2) \quad \left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2} I \right) P + P \left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} D \\ D - LD_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ D - LD_1 \end{pmatrix}^T = 0$$

придадим величине L приращение ΔL и обозначим соответствующее приращение P через ΔP :

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 (L + \Delta L) N_2 + \frac{\alpha}{2} I \right) (P + \Delta P) + \\ & + (P + \Delta P) \left(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 (L + \Delta L) N_2 + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \\ & + \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} D \\ D - (L + \Delta L) D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ D - (L + \Delta L) D_1 \end{pmatrix}^T = 0. \end{aligned}$$

Оставляя обозначение ΔP для главной части приращения, получаем

$$\begin{aligned} & \left(A_{K,L} + M_2 \Delta L N_2 + \frac{\alpha}{2} I \right) P + P \left(A_{K,L} + M_2 \Delta L N_2 + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \\ & + \left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2} I \right) \Delta P + \Delta P \left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \\ & + \frac{1}{\alpha} \left[\begin{pmatrix} D \\ D - LD_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ D - LD_1 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta L D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ D - LD_1 \end{pmatrix}^T - \right. \\ & \left. - \begin{pmatrix} D \\ D - LD_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta L D_1 \end{pmatrix}^T \right] = 0. \end{aligned}$$

После вычитания уравнения (2) из этого уравнения имеем:

$$(3) \quad \left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2}I\right) \Delta P + \Delta P \left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2}I\right)^T + M_2 \Delta L N_2 P + P (M_2 \Delta L N_2)^T - \\ - \frac{1}{\alpha} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \Delta L D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ D - L D_1 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} D \\ D - L D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta L D_1 \end{pmatrix}^T \right] = 0.$$

Вычислим приращение функционала $f(K, L, \alpha)$ по L , линеаризуя соответствующие величины:

$$\Delta_L f(K, L, \alpha) = \text{tr } \mathcal{C}_2 \Delta P \mathcal{C}_2^T + \rho_L \text{tr } L^T \Delta L + \rho_L \text{tr } (\Delta L)^T L = \\ = \text{tr } \Delta P \mathcal{C}_2^T \mathcal{C}_2 + 2\rho_L \text{tr } L^T \Delta L.$$

Рассмотрим уравнение Ляпунова

$$(4) \quad \left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2}I\right)^T Y + Y \left(A_{K,L} + \frac{\alpha}{2}I\right) + \mathcal{C}_2^T \mathcal{C}_2 = 0.$$

Из двойственных уравнений (3) и (4) имеем:

$$\Delta_L f(K, L, \alpha) = \\ = 2\text{tr } Y \left[M_2 \Delta L N_2 P - \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta L D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ D - L D_1 \end{pmatrix}^T \right] + 2\rho_L \text{tr } L^T \Delta L = \\ = 2\text{tr} \left[N_2 P Y M_2 \Delta L - \frac{1}{\alpha} D_1 \begin{pmatrix} D \\ D - L D_1 \end{pmatrix}^T Y \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \Delta L \right] + 2\rho_L \text{tr } L^T \Delta L = \\ = 2 \left\langle \rho_L L + M_2^T Y P N_2^T - \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} D \\ D - L D_1 \end{pmatrix} D_1^T, \Delta L \right\rangle,$$

откуда и следует формула (1).

Авторы

СОДЕРЖАНИЕ

Обзоры

- Курина Г.А., Калашникова М.А.** Сингулярно возмущенные задачи с разнотемповыми быстрыми переменными 3

Линейные системы

- Поляк Б.Т., Хлебников М.В.** Новые критерии настройки ПИД-регуляторов 62

Нелинейные системы

- Александров В.А., Зыбин Е.Ю., Косьянчук В.В., Сельвесюк Н.И., Тремба А.А., Хлебников М.В.** Оптимизация расхода топлива воздушного судна на этапе набора высоты 83
- Афанасьев В.Н.** Задача слежения при действии ограниченных возмущений. Алгебраический метод синтеза 103

Стохастические системы

- Борисов А.В.** \mathcal{L}_1 -оптимальная фильтрация марковских скачкообразных процессов III: идентификация параметров системы 121

Управление в социально-экономических системах

- Гераськин М.И.** Влияние рефлексии на свойства равновесий в нелинейной модели олигополии Штакельберга 145

Заметки, хроника, информация

- Поправка к статье Б.Т. Поляка, М.В. Хлебникова “Синтез обратной связи по выходу при помощи наблюдателя как задача оптимизации” (АиТ. 2022. № 3. С. 7–32) 167

C O N T E N T S

Surveys

- Kurina G.A., Kalashnikova M.A.** Singularly Perturbed Problems with Multi-Tempo Fast Variables 3

Linear Systems

- Polyak B.T., Khlebnikov M.V.** New Criteria for Tuning PID Controllers 62

Nonlinear Systems

- Alexandrov V.A., Zybin E.Yu., Kos'yanchuk V.V., Sel'vesyuk N.I., Tremba A.A., Khlebnikov M.V.** Optimization of Aircraft Fuel Consumption During the Climb Stage 83
- Afanas'ev V.N.** Tracking Problem under the Action of Limited Perturbations. Algebraic Synthesis Method 103

Stochastic Systems

- Borisov A.V.** \mathcal{L}_1 -Optimal Filtering of Markov Jump Processes III: Identification of System Parameters 121

Control in Social Economic Systems

- Geraskin M.I.** Influence of Reflexion on Properties of Equilibria in Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model 145

Notes, Meetings, Information

- Polyak B.T., Khlebnikov M.V.** Erratum to: "Observer-Aided Output Feedback Synthesis as an Optimization Problem" [Automation and Remote Control, 2022, Vol. 83, No. 3, pp. 303–324] 167