



*Российская Академия Наук*

# **А Т АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА**

**Журнал основан в 1936 году**

**Выходит 12 раз в год**

**9**

**сентябрь**

**Москва**

**2022**

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,  
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),  
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

**Главный редактор:**

Галяев А.А.

**Заместители главного редактора:**

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

**Ответственный секретарь:**

Родионов И.В.

**Редакционный совет:**

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,  
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Поляк Б.Т., Попков Ю.С.,  
Рутковский В.Ю., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

**Редакционная коллегия:**

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневецкий В.М.,  
Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф.,  
Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П.,  
Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,  
Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М.,  
Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),  
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,  
Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А.,  
Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталеv М.М., Цыбаков А.Б. (Франция),  
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: (495) 334-87-70

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ООО «Тематическая редакция»

© 2022 г. А.В. КАРПОВ (akarпов@hse.ru)  
(Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики», Москва;  
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова, Москва)

## СТРУКТУРИРОВАННЫЕ ПРЕДПОЧТЕНИЯ: ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ<sup>1</sup>

Проведен обзор работ по практически значимым ограничениям на профиль предпочтений коллектива: однопиковые предпочтения, сепарабельные предпочтения, предпочтения со свойством единственного пересечения, евклидовы предпочтения и их расширения. Рассмотрены как ординальные, так и дихотомические предпочтения. Для структурированных предпочтений представлена характеристика через запрещенные подпрофили и вероятность появления профиля с заданным свойством. Для сепарабельных предпочтений описан алгоритм построения иерархического дерева. Отдельно рассмотрены структурированные предпочтения, приводящие к единственному устойчивому паросочетанию в задаче о браке.

*Ключевые слова:* домен предпочтений, паросочетания, однопиковость.

**DOI:** 10.31857/S000523102209001X, **EDN:** AIIVES

### 1. Введение

Существует множество подходов к моделированию предпочтений и постановке задачи их агрегирования [1]. Базовой моделью предпочтения является строгий линейный порядок. Кортеж линейных порядков всех агентов называется профилем предпочтений. Стандартной постановкой задачи коллективного выбора является определение общественного выбора (предпочтения) как функции от профиля предпочтений.

Одной из основных теоретических проблем в данной области является парадокс Кондорсе: предпочтение коллектива, построенное на основе правила простого большинства, может иметь циклы. Данный парадокс возникает при трех и более альтернативах. К. Эрроу [2] сформулировал ряд аксиом, которым должна обладать процедура агрегирования предпочтений коллектива. Система аксиом оказалась несовместной при трех и более альтернативах. А. Гиббард и М. Саттертуэйт [3, 4] показали, что при аналогичных предположениях любое правило агрегирования является манипулируемым, т.е.

---

<sup>1</sup> Работа частично профинансирована Программой фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

допускает наличие выгоды для участника от искажения собственного предпочтения.

Одним из решений парадоксов невозможности является сужение области применения правил агрегирования. На области профилей предпочтений, не создающих циклов при использовании правила простого большинства, правило простого большинства удовлетворяет аксиомам К. Эрроу, и любое правило, отличающееся от правила простого большинства на этой области, будет нарушать условия, близкие к аксиомам К. Эрроу [5, 6]. Правило простого большинства имеет несколько аксиоматических обоснований [7–11], несложно с вычислительной точки зрения и интуитивно понятно участникам голосования.

Задача нахождения всех профилей предпочтений, для которых правило простого большинства дает ациклическое отношение сравнения альтернатив, решена только для случая трех и четырех альтернатив [12]. Для трех альтернатив найдено компактное необходимое и достаточное условие на профиль предпочтений: одна из альтернатив должна быть первой у не менее чем половины агентов или одна из альтернатив должна быть последней у не менее чем половины агентов [13].

Необходимость сужения области рассматриваемых профилей предпочтений привела к теории доменов предпочтений. Под доменом предпочтений понимается подмножество линейных порядков на фиксированном множестве альтернатив. Домен генерирует профили предпочтений, состоящие только из линейных порядков, составляющих домен.

Ограничение предпочтений членов общества предпочтениями из некоторого домена является упрощением, но так как предпочтения в обществе формируются не независимо, то значительная часть его членов имеет ограниченный набор линейных порядков, и ограничение на домен предпочтений представляется разумной предпосылкой для моделирования коллективного выбора. Домены как ограничения на рациональность рассмотрены в [14].

*Доменом Кондорсе* называется такое подмножество предпочтений, что любой профиль предпочтений с нечетным числом агентов приводит к ациклическому решению по правилу простого большинства. Для трех, четырех и пяти альтернатив найдены все домены Кондорсе [15, 16]. Они значительно отличаются по структуре и размеру. Для 6 альтернатив домен Кондорсе максимального размера содержит 45 линейных порядков, для 7 — 100 линейных порядков. Для большего числа альтернатив задача нахождения домена Кондорсе максимального размера остается нерешенной [17]. Последние результаты о максимальных доменах Кондорсе представлены в [18–20]. Некоторое обобщение понятия домена Кондорсе обсуждается в [21, 22].

Некоторые домены Кондорсе представляют собой естественные, хорошо интерпретируемые ограничения на область задания предпочтений. К. Инада [23, 24] и А. Сен [25] описали домены однопиковых предпочтений, однолунковых предпочтений, сепарабельных предпочтений. Дж. Миррлис и К. Робертс

[26, 27] предложили концепцию предпочтений со свойством единственного пересечения. Различные ограничения на профиль предпочтений получили название *структурированных предпочтений* [28]. Все упомянутые выше виды структурированных предпочтений имеют множество полезных свойств и приложений, которые разобраны в данном обзоре.

Кроме гарантии существования решения задачи агрегирования в постановке К. Эрроу, структурированные предпочтения снижают вычислительную сложность многих задач теории коллективного выбора, создают удобное графическое представление предпочтений, имеют аксиоматическое обоснование.

В данном обзоре представлены результаты по характеристике структурированных профилей предпочтений через запрещенные подпрофили и по нахождению числа профилей с заданными свойствами. Характеризация структурированных предпочтений важна для выявления ключевых внутренних структур и для построения алгоритмов распознавания структурированных предпочтений. Количество структурированных профилей предпочтений дает возможность найти вероятность возникновения таких профилей в модели дискретного равновероятного распределения. Хотя такое распределение не отражает реальные данные, нахождение вероятностей представляет интерес для сравнения вероятностей разных видов предпочтений между собой.

В рамках модели равновероятного распределения общие формулы (для произвольного числа агентов и альтернатив) получены для сепарабельных предпочтений [29] и некоторых подклассов однопиковых предпочтений и предпочтений со свойством единственного пересечения [30]. Для малого числа альтернатив задача подсчета числа однопиковых профилей предпочтений решена в [31–33].

Кроме доменов Кондорсе в литературе представлены работы по изучению диктаторских доменов, т.е. доменов, для которых единственной процедурой, удовлетворяющей аксиомам К. Эрроу [2], является диктаторская процедура. Примерами диктаторских доменов являются домены циклической группы [34], круговые домены [35], топ-круговые домены [36], однопиковые на окружности домены [37]. Диктаторский домен минимального размера содержит только 6 типов линейных порядков при любом количестве альтернатив [38]. Диктаторские домены имеют гораздо меньше приложений, чем домены Кондорсе, и не будут рассмотрены в данном обзоре.

Кроме структурированных доменов в задаче агрегирования ординальных предпочтений в обзоре рассмотрены структурированные профили предпочтений в задаче о марьяже (обобщенные паросочетания) и структурированные дихотомические предпочтения.

Структура обзора следующая. Раздел 2 вводит основные понятия и теорию максимальных доменов Кондорсе. Раздел 3 посвящен структурированным ординальным предпочтениям. Раздел 4 содержит анализ структурированных

профилей предпочтений в задаче о марьяже. Раздел 5 исследует дихотомические предпочтения. Раздел 6 содержит заключение.

## 2. Основные понятия

В данной статье приняты следующие обозначения: множество альтернатив обозначается через  $A = \{1, \dots, m\}$ , а множество агентов через  $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$ . Каждый агент  $i \in \mathcal{N}$  имеет линейный порядок предпочтения  $P_i$  на множестве  $A$  (далее, если не оговорено иное, под предпочтением подразумевается линейный порядок). Максимальный элемент в этом порядке является наилучшим, минимальный — наихудшим. Для  $aP_i c$  и  $bP_i c$  вводится обозначение  $\{a, b\}P_i c$ . Пусть  $\mathcal{L}(A)$  будет множеством всех возможных линейных порядков на множестве  $X$ . Кортеж из  $n$  линейных порядков является профилем предпочтений:  $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_n) \in \mathcal{L}(A)^n$ .

Доменом предпочтений называется подмножество линейных порядков. Профиль предпочтений порожден доменом, если предпочтения всех агентов принадлежат домену. Под доменом структурированных предпочтений здесь понимается максимальный домен структурированных предпочтений, т.е. при добавлении к такому домену любого дополнительного линейного порядка домен теряет ключевое свойство, например, свойство однопиковости.

В качестве единственной модели распределения вероятностей в данной работе используется предпосылка о независимом и равновероятном появлении каждого линейного порядка предпочтения у каждого агента. Количество элементарных событий (профилей предпочтений) равно  $(m!)^n$ . Подсчитав количество профилей предпочтений с определенным свойством  $\#structured(m, n)$ , можно рассчитать вероятность появления структурированного профиля предпочтений как  $\frac{\#structured(m, n)}{(m!)^n}$ .

### 2.1. Максимальные домены Кондорсе

*Парадокс Кондорсе* представляет собой ситуацию, в которой предпочтение коллектива, построенное по правилу простого большинства, содержит цикл. Простейшим примером является профиль предпочтений с тремя агентами и тремя альтернативами (предпочтения записаны в столбец без знака бинарного отношения  $P$ )

1	3	2
2	1	3
3	2	1.

Далее в работе будут определены различные конфигурации — определенные фрагменты доменов, наличие или отсутствие которых будут определять свойства доменов.

*Конфигурация 1 (цикл Кондорсе)*. Существуют три агента  $i, j, k \in \mathcal{N}$  и три альтернативы  $a, b, c \in A$  такие, что выполнено  $aP_i bP_i c$ ,  $cP_j aP_j b$ ,  $bP_k cP_k a$ .

Если домен предпочтений содержит конфигурации 1, то среди профилей предпочтений, порожденных данным доменом, найдется профиль с парадоксом Кондорсе. Определение домена Кондорсе через ациклическое отношение коллективных предпочтений, построенных по правилу простого большинства, неоперационально, поэтому для практического применения используют эквивалентные формулировки, представленные в теореме 1.

*Теорема 1 [25]. Существуют следующие эквивалентные определения домена Кондорсе:*

- (i) *Домен предпочтений является доменом Кондорсе тогда и только тогда, когда он не содержит конфигурации 1;*
- (ii) *Домен предпочтений является доменом Кондорсе тогда и только тогда, когда для каждой тройки альтернатив существует альтернатива из этой тройки, для которой верно, что она либо никогда не стоит на первом месте в сужении домена на данную тройку, либо никогда не стоит на втором месте в сужении домена на данную тройку, либо никогда не стоит на третьем месте в сужении домена на данную тройку.*

Условие (ii) теоремы 1 отражает три способа избежать конфигурацию 1, где каждая альтернатива находится и на первом, и на втором, и на третьем месте. Больше число эквивалентных определений домена Кондорсе можно найти в обзоре [39].

Одним из больших доменов Кондорсе является домен Фишберна [40], который удовлетворяет следующей перемежающей схеме. При упорядочении альтернатив  $a_1, \dots, a_m$  для каждой тройки альтернатив  $a_i, a_j, a_k$  верно, что если медиана чисел  $i \leq j \leq k$  четна (нечетна), то альтернатива  $a_j$  никогда не стоит на первом месте в сужении домена на эту тройку, и если медиана чисел  $i \leq j \leq k$  нечетна (четна), то альтернатива  $a_j$  никогда не стоит на последнем месте в сужении домена на эту тройку. Домен Фишберна связан со многими комбинаторными структурами: проволочными диаграммами [17], ромбическими паркетами [41], с конечными группами Коксетера [42].

Количество линейных порядков в домене Фишберна равно [17]:

$$|F_m| = (m + 3) 2^{m-3} - \begin{cases} m - \frac{3}{2} \left( \frac{m-2}{2} - 1 \right) & \text{для четных } m; \\ \frac{m-1}{2} \left( \frac{m-1}{2} \right) & \text{для нечетных } m. \end{cases}$$

Домен Фишберна обладает максимальным размером среди всех доменов Кондорсе при числе альтернатив, не превышающем семи, и является основой для построения больших доменов Кондорсе для любого числа альтернатив [20, 40], но данный домен не имеет ясной интерпретации и не имеет практиче-

ского применения. Известно, что при большом  $m$  существует домен Кондорсе, содержащий не менее  $2,189^m$  линейных порядков [20]. Раздел 3 исследует домены меньшего размера, но с хорошо интерпретируемой структурой.

### 3. Структурированные ординальные предпочтения

#### 3.1. Однопиковые предпочтения

*Однопиковые предпочтения* предполагают некоторое упорядочение альтернатив вдоль так называемой оси (под *осью* понимается линейный порядок альтернатив, понятие расстояния между альтернативами не вводится). Каждый агент имеет идеальную альтернативу на этой оси. Если две альтернативы расположены по одну сторону от идеальной альтернативы, включая возможное совпадение с идеальной, то та альтернатива, которая находится ближе к идеальной точке, предпочитается альтернативе, находящейся дальше. Альтернативы с разных сторон от идеальной могут быть упорядочены любым способом.

Оси с прямым порядком альтернатив и с обратным порядком альтернатив соответствуют идентичным друг другу однопиковым доменам. В этом смысле данные оси эквивалентны. Например, оси 1234 и 4321 эквивалентны. Таким образом, существуют  $m!/2$  различных осей и доменов однопиковых предпочтений. Домены однопиковых предпочтений содержат по  $2^{m-1}$  линейных порядков [43]. Например, ось 1234 задает следующий домен из восьми линейных порядков:

1	2	2	2	3	3	3	4
2	1	3	3	2	2	4	3
3	3	1	4	1	4	2	2
4	4	4	1	4	1	1	1.

Однопиковые домены могут иметь непустое пересечение. Для однопикового профиля предпочтений нельзя однозначно определить, каким однопиковым доменом он порожден. Например, профиль (123, 123, 213) может быть порожден как однопиковым доменом {123, 213, 231, 321} с осью 123, так и однопиковым доменом {312, 132, 123, 213} с осью 312. Алгоритмы распознавания однопиковых профилей предпочтений [44, 45] отвечают на вопрос о возможности построения подходящей оси и конструируют одну из возможных осей.

Однопиковые предпочтения имеют массу приложений в экономике, психологии, политических науках. Причиной этого являются теоретические свойства однопиковых предпочтений. Во-первых, однопиковые предпочтения хорошо интерпретируемы и допускают удобную визуализацию. В политической науке распространена шкала правых-левых кандидатов, партий, в маркетинге агентов различают по лояльности к тому или иному бренду таким образом, что они выстраиваются в линию. Во-вторых, теорема о медианном избирателе [46], гласящая, что политическая позиция двух кандидатов при свободной

конкуренции будет стремиться к позиции медианного избирателя, дает дополнительное обоснование правилу простого большинства. В-третьих, многие вычислительные проблемы теории коллективного выбора значительно упрощаются при однопиковых предпочтениях [47, 48], например упрощаются задачи манипулирования (подробнее о задачах манипулирования см. [49]). В-четвертых, однопиковые предпочтения имеют аксиоматическое обоснование [50]. Домен однопиковых предпочтений для каждой альтернативы имеет хотя бы один линейный порядок с данной альтернативой на первом месте. Все линейные порядки в этом домене связаны друг с другом, т.е. один линейный порядок можно получить из другого с помощью последовательного обращения пар соседних альтернатив линейных порядков, при этом все промежуточные линейные порядки тоже принадлежат тому же домену. Кроме того, в этом домене существует пара линейных порядков, которые имеют обратный порядок альтернатив по отношению друг к другу. Таким образом, домен однопиковых предпочтений состоит из достаточно близких предпочтений, но в то же время достаточно разнообразен, так как содержит пару противоположных предпочтений.

*Однолунковые предпочтения* являются полной противоположностью однопиковых предпочтений. Все альтернативы также находятся на оси, только каждый агент имеет свою наихудшую альтернативу на этой оси и чем дальше от этой альтернативы, тем лучше. В экономике данные предпочтения встречаются при моделировании предпочтений относительно общественного антиблага (например, предпочтения местных жителей относительно расположения на побережье загрязняющего предприятия). Анализ, проведенный для однопиковых предпочтений, практически всегда можно применить к однолунковым, поэтому далее в статье однолунковые предпочтения исследоваться не будут.

Наихудшей альтернативой для каждого из агентов при однопиковых предпочтениях является один из концов оси. Таким образом, профиль предпочтений не может иметь трех агентов с разными наихудшими альтернативами.

*Конфигурация 2.* Существуют три агента  $i, j, k \in \mathcal{N}$  и три альтернативы  $a, b, c \in A$  такие, что выполнено  $\{a, b\}P_i c$ ,  $\{a, c\}P_j b$ ,  $\{b, c\}P_k a$ .

Конфигурация 2 уточняет условие (ii) из теоремы 1: в каждой тройке альтернатив существует альтернатива из этой тройки, для которой верно, что она никогда не стоит на третьем месте в сужении домена на данную тройку. Профиль предпочтений, который не содержит конфигурацию 2, называется однопиковым по Эрроу (подробнее о данных предпочтениях см. в [2, 20, 31, 51, 52]).

*Конфигурация 3.* Существуют два агента  $i, j \in \mathcal{N}$  и четыре альтернативы  $a, b, c, d \in A$  такие, что выполнено  $\{a, d\}P_i b P_i c$ ,  $\{c, d\}P_j b P_j a$ .

Конфигурация 3 задает ограничение на пары агентов. При фиксации одного из агентов множество возможных предпочтений второго агента соответствует некоторому паттерну перестановок, который задается через запре-

ценные комбинации (подробнее о паттернах перестановок см. в [53]). Число перестановок в паттерне дает число профилей с двумя агентами.

*Теорема 2 [54]. Профиль предпочтений является однопиковым тогда и только тогда, когда он не содержит конфигураций 2 и 3.*

*Теорема 3 [31]. Количество однопиковых профилей предпочтений асимптотически равно*

$$\#SP(m, n) \approx \frac{m!}{2} 2^{(m-1)n}.$$

Точное количество однопиковых профилей известно для двух агентов и произвольного количества альтернатив [33], трех, четырех [31], пяти альтернатив [32] и произвольного количества агентов.

Однопиковые предпочтения имеют множество расширений. Одним из направлений является рассмотрение разных классов графов вместо оси альтернатив. Примерами такого расширения являются однопиковые на деревьях предпочтения [55], однопиковые на окружности предпочтения [37], однопиковые на произвольном графе предпочтения [56, 57].

В модели однопиковых на деревьях предпочтений альтернативы являются вершинами связного ациклического графа (дерева) и каждый путь представляет собой ось для соответствующего подпрофиля однопиковых предпочтений. В силу разнообразия деревьев данные предпочтения очень разнообразны. Существуют алгоритмы нахождения дерева, представляющего данный профиль [58, 59], а также алгоритмы для нахождения дерева с некоторыми нужными свойствами, например с малым количеством листьев [60]. Специальная форма деревьев облегчает нахождение комитета в задаче пропорционального представительства [61].

*Однопиковые на окружности предпочтения* определяются аналогично классическим однопиковым предпочтениям. Все альтернативы располагаются на окружности. Каждый агент имеет свою наилучшую альтернативу и наихудшую альтернативу. Вдоль пути от наихудшей альтернативы до наилучшей альтернативы упорядочены по возрастанию предпочтительности. Альтернативы с разных сторон от наилучшей (наихудшей) альтернативы могут быть упорядочены любым способом.

Всего существуют  $\frac{(m-1)!}{2}$  доменов однопиковых на окружности предпочтений, в каждом из которых  $m2^{m-2}$  линейных порядков. Следующие три конфигурации характеризуют однопиковые на окружности предпочтения.

*Конфигурация 4.* Существуют два агента  $i, j \in \mathcal{N}$  и пять альтернатив  $a, b, c, d, e \in A$  такие, что выполнено  $\{a, b\}P_i c P_i \{d, e\}$ ,  $\{a, e\}P_j c P_j \{b, d\}$ .

Конфигурация 4 задает паттерн перестановок, называемый квадратными перестановками [62].

*Конфигурация 5.* Существуют три агента  $i, j, k \in \mathcal{N}$  и четыре альтернативы  $a, b, c, d \in A$  такие, что выполнено  $\{a, b\}P_i \{c, d\}$ ,  $\{a, c\}P_j \{b, d\}$ ,  $\{a, d\}P_k \{b, c\}$ .

*Конфигурация 6.* Существуют три агента  $i, j, k \in \mathcal{N}$  и четыре альтернативы  $a, b, c, d \in A$  такие, что выполнено  $\{a, b\}P_i\{c, d\}$ ,  $\{b, c\}P_j\{a, d\}$ ,  $\{c, a\}P_k\{b, d\}$ .

*Теорема 4 [37]. Профиль предпочтений является однопиковым на окружности тогда и только тогда, когда он не содержит конфигураций 4, 5 и 6.*

Зная количество доменов и количество линейных порядков в каждом домене, получим приблизительное число однопиковых на окружности профилей предпочтений.

*Теорема 5. Количество однопиковых на окружности профилей предпочтений асимптотически равно*

$$\#SPC(m, n) \approx \frac{(m-1)!}{2} (m2^{m-2})^n.$$

Однопиковые на окружности предпочтения имеют главным образом вычислительные приложения в области задачи пропорционального представительства [37].

Еще более широкий класс предпочтений моделируется предпочтениями, близкими к однопиковым. Это класс предпочтений, которые сводятся к однопиковым предпочтениям после удаления либо  $k$  альтернатив, либо  $k$  агентов, либо разбиения множества агентов или альтернатив на  $k$  частей, либо трансформации предпочтений через  $k$  парных инверсий последовательно стоящих альтернатив в некоторых предпочтениях и т.д. Параметр  $k$  в данном определении служит мерой, характеризующей расстояние данного профиля до ближайшего однопикового профиля. Для разных целей такое расстояние можно определить по-разному (удаление агентов, удаление альтернатив и т.д.). Основной проблемой данного подхода является сложность определения принадлежности профиля к тому или иному классу предпочтений. Значительное число таких задач являются NP-трудными [63], но существуют алгоритмы аппроксимации [64]. В то же время некоторые классы предпочтений, близких к однопиковым, выявляются просто и позволяют снизить сложность задач манипулирования и контроля исхода голосования [65–72], задач пропорционального представительства [73], задачи ранжирования по Кемени [74].

Еще одним расширением однопиковых предпочтений являются однопиковые предпочтения при неполных данных [75]. Если исходные данные являются частичными порядками, а не линейными, то задача возможного восстановления предпочтений до однопикового профиля предпочтений является NP-трудной. Если исходные данные представляют собой слабый порядок, то существует алгоритм полиномиальной сложности для определения возможности восстановления профиля предпочтений до однопикового.

### 3.2. Сепарабельные предпочтения

К. Инада [23, 24] ввел свойство сепарабельности следующим образом. Профиль предпочтений является *сепарабельным*, если для любого подмножества

$X \subseteq A$ ,  $|X| \geq 2$  существует его разбиение на такие непустые подмножества  $X'$ ,  $X \setminus X'$ , что для каждого агента  $i \in \mathcal{N}$  имеем либо  $aP_i b$  для каждого  $a \in X'$ ,  $b \in X \setminus X'$ , либо  $bP_i a$  для каждого  $a \in X'$ ,  $b \in X \setminus X'$ . Примерами максимальных доменов сепарабельных предпочтений являются

$$D_1 = \left\{ \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right\}, \quad D_2 = \left\{ \begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 3 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 3 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\}.$$

Все максимальные домены однопиковых предпочтений одинаково устроены, т.е. при фиксированном количестве альтернатив один домен можно получить из другого через переименование альтернатив. В отличие от однопиковых, максимальные сепарабельные домены структурно отличаются друг от друга и не могут быть сведены к одному домену через переименование альтернатив (см. вышеприведенные примеры).

Множество сепарабельных профилей предпочтений замкнуто по отношению к операции удаления альтернатив из профиля. Таким образом, сужение сепарабельного профиля предпочтений на любое подмножество альтернатив является сепарабельным.

Множество альтернатив  $X \subseteq A$  называется *множеством клонов* для профиля  $\mathcal{P}$ , если в предпочтении каждого агента альтернативы из  $X$  стоят последовательно. Назовем *нетривиальными* множества клонов, состоящие из более чем одной альтернативы и не совпадающие с множеством всех альтернатив. К примеру, множества  $\{1, 2\}$  и  $\{3, 4\}$  являются нетривиальными множествами клонов для  $D_1$ . Для  $D_2$  такими множествами являются множества  $\{3, 4\}$  и  $\{2, 3, 4\}$ . Множества клонов объединяют альтернативы, которые в некотором смысле близки друг к другу для каждого агента. Множества клонов являются устоявшимся инструментом анализа в теории коллективного выбора [76, 77].

Ациклический ориентированный граф, в котором только одна вершина не имеет входящих дуг, а остальные вершины имеют единственную входящую дугу, является исходящим деревом. Вершина, не имеющая входящих дуг, является корнем. Вершины, не имеющие исходящих дуг, являются терминальными. Вершинно-индуцированным поддеревом является часть исходящего дерева, которая содержит некоторую вершину дерева, всех потомков этой вершины и соединяющие их дуги. Терминальные вершины и само исходящее дерево являются вершинно-индуцированными поддеревьями.

Исходящее дерево  $T$ , в котором альтернативы являются листьями этого дерева, а исходящие дуги каждой вершины упорядочены, будем называть *иерархическим деревом*, представляющим профиль сепарабельных предпочтений  $\mathcal{P}$ , если для каждого множества клонов  $X$  профиля  $\mathcal{P}$  верно, что существуют вершина и множество вершинно-индуцированных поддеревьев, в корни которых ведут последовательные исходящие дуги этой вершины, такие,

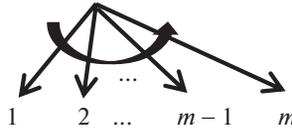


Рис. 1. Иерархическое дерево для линейного порядка  $12 \dots m$ .

что множеством листьев поддеревьев является множество  $X$ . Для каждой вершины определен порядок исходящих дуг и, соответственно, порядок дочерних вершин и вершинно-индуцированных поддеревьев, для которых данные вершины являются корневыми.

Планарное представление иерархического дерева отображает не только дуги и вершины, но и порядок дуг. К примеру, рис. 1 представляет иерархическое дерево для профиля предпочтений, состоящего из одного линейного порядка  $12 \dots m$ . Полуокруглая стрелка отображает порядок дуг. В данном профиле предпочтений все множества вида  $\{i, \dots, j\}$ , где  $i < j$ , являются множествами клонов. Каждое множество клонов образует последовательность терминальных вершин. Таким образом, для каждого множества клонов существует множество вершинно-индуцированных поддеревьев, в корни которых ведут последовательные исходящие дуги, такое, что множеством листьев поддеревьев является данное множество клонов. Инверсия порядка исходящих дуг не нарушает возможность нахождения нужной последовательности исходящих дуг для каждого множества клонов. Способность иерархического дерева и его планарного представления представлять профиль предпочтений инвариантна к операции инверсии порядка исходящих дуг. Произвольная перестановка дуг может привести к невозможности нахождения множества последовательных дуг для некоторого множества клонов. Рассматриваемый вид деревьев является частным случаем PQ-деревьев, см. [78].

Классу бинарных иерархических деревьев со всевозможными порядками исходящих дуг однозначно соответствует бинарное дерево с неупорядоченными дугами. Поэтому каждому максимальному сепарабельному домену соответствует бинарное дерево с неупорядоченными дугами. Построить это дерево для заданного домена можно следующим образом. Берется произвольный линейный порядок из домена. Последовательно строятся иерархические деревья для двух, трех и т.д. лучших альтернатив выбранного линейного порядка. Алгоритм останавливается после построения иерархического дерева для  $m$  альтернатив. Для двух альтернатив иерархическое дерево состоит из корня и двух листьев. На каждом шаге это дерево дополняется новой нетерминальной вершиной и новой терминальной вершиной следующим образом. В дереве, построенном на предыдущем шаге, находятся вершина и соответствующее ей вершинно-индуцированное поддерево такое, что множество листьев (альтернатив) этого поддерева соседствует с новой альтернативой во всех сужениях линейных порядков домена на множество альтернатив

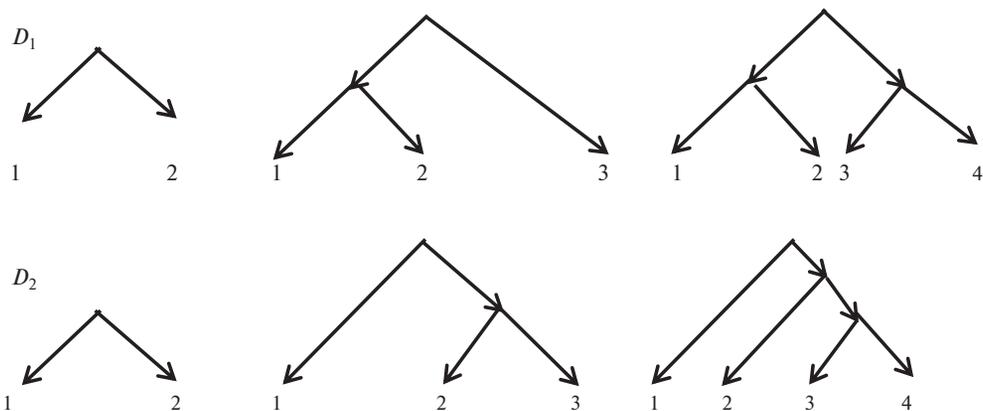


Рис. 2. Пример реализации алгоритма построения иерархического дерева альтернатив для домена  $D_1$  и домена  $D_2$ .

строящегося дерева (множество альтернатив предыдущего шага, объединенное с новой альтернативой). Если найденная вершина не является корневой, то новая вершина делит входящую дугу найденной вершины на две дуги, иначе к дереву достраиваются новый корень и дуга, соединяющая новый корень со старым. Дополнительная дуга соединяет новую нетерминальную вершину с новой терминальной вершиной.

Иллюстрация к алгоритму построения иерархических деревьев для доменов  $D_1$  и  $D_2$ , определенных в начале данного раздела, приведена на рис. 2. В данном примере за основу взят линейный порядок 1234.

По иерархическому дереву можно восстановить максимальный сепарабельный домен. Для выбранного планарного представления дерева линейный порядок, принадлежащий домену, можно построить рекурсивно, выполняя поиск в глубину, начав от корня (согласно порядку исходящих дуг перебираем исходящие дуги; для вершины, в которую ведет дуга, запускаем тот же алгоритм; при нахождении терминальной вершины добавляем ее в линейный порядок и возвращаемся к вершине, у которой еще остались нерассмотренные дуги). Далее необходимо перебрать все инверсии интервалов построенного линейного порядка, соответствующих всем вершинно-индуцированным поддеревьям, и все построенные таким образом линейные порядки будут принадлежать сепарабельному домену. Каждый максимальный домен сепарабельных предпочтений соответствует последовательному разбиению альтернатив на два подмножества.

Для профиля сепарабельных предпочтений и для немаксимального домена итеративный алгоритм построения иерархического дерева модифицируется. Для описания алгоритма введем новое понятие. *Минимальным покрытием множества клонов  $X$  для профиля  $\mathcal{P}$  является множество клонов  $C(X)$ , которое содержит множество  $X$ , не совпадает с множеством  $X$  и не содержит в качестве подмножества другое нетривиальное множество клонов, содержащее*

множество  $X$ . Минимальное покрытие может быть не единственным, но количество минимальных покрытий не может превышать двух [77]. Например, для профиля предпочтений, состоящего из одного линейного порядка 123, имеем  $C(\{1\}) = \{1, 2\}$ , а для множества  $\{2\}$  минимальных покрытий будет два:  $\{1, 2\}$  и  $\{2, 3\}$ .

Алгоритм построения иерархического дерева начинается с выбора одного (произвольного) линейного порядка из профиля предпочтений или из немаксимального домена и построения иерархического дерева для сужения профиля предпочтений на множество из двух лучших альтернатив выбранного предпочтения. Для двух альтернатив иерархическое дерево состоит из корня и двух листьев. Порядок дуг для данного дерева выбирается произвольно. Далее на каждом шаге строится сужение профиля предпочтений на новое подмножество альтернатив, добавляя следующую по предпочтению альтернативу в выбранном линейном порядке. Таким образом, построен сепарабельный профиль предпочтений на некотором множестве альтернатив, в котором одна из альтернатив является новой (альтернатива  $x$ ). Эта альтернатива является худшей в одном из линейных порядков. Существует единственное минимальное покрытие множества, состоящего из альтернативы  $x$ .

Согласно определению сепарабельных предпочтений построенное минимальное покрытие  $C(\{x\})$  можно разбить на два множества клонов. В силу построения минимального покрытия данным разбиением являются множества  $\{x\}$  и  $C(\{x\}) \setminus x$ .

Количество минимальных покрытий множества  $C(\{x\}) \setminus x$  может быть равно одному или двум. В первом случае верно, что  $C(\{x\}) = C(C(\{x\}) \setminus x)$ . В этом случае дерево достраивается новой нетерминальной вершиной, новой терминальной вершиной (альтернатива  $x$ ) и новыми дугами способом, описанным в алгоритме построения иерархического дерева для максимального сепарабельного домена. Порядок исходящих дуг новой нетерминальной вершины выбирается произвольно. Если дерево было бинарным, то оно останется бинарным. Во втором случае дерево достраивается новой терминальной вершиной и новой дугой таким образом, что новая терминальная вершина является дочерней к той же вершине, что и вершина, являющаяся корневой для вершинно-индуцированного поддерева, листьями которого является множество  $C(\{x\}) \setminus x$ . Кроме того, новая терминальная вершина будет одновременно соседней к вершине, являющейся корневой для вершинно-индуцированного поддерева, листьями которого является множество  $C(\{x\}) \setminus x$ , и крайней (первой или последней) в соответствующем порядке дочерних вершин. В этом случае итоговое иерархическое дерево не будет бинарным.

Алгоритм останавливается после выполнения шага для наихудшей альтернативы в выбранном линейном порядке.



Рис. 3. Иерархическое дерево альтернатив, взято из [79].

Разные профили сепарабельных предпочтений, как и разные немаксимальные домены сепарабельных предпочтений, могут иметь одинаковые иерархические деревья. В работе П. Фалишевского и др. [79] найдено количество профилей сепарабельных предпочтений с фиксированным количеством агентов и альтернатив, приводящих к заданному иерархическому дереву, и описан алгоритм равновероятной генерации таких профилей.

Пример иерархического дерева альтернатив представлен на рис. 3. Множество альтернатив соответствует множеству листьев дерева. Вершины дерева соответствуют категориям альтернатив, которые далее делятся на подкатегории. Согласно рис. 2 все множество напитков делится на холодные и горячие. Каждый агент предпочитает все холодные напитки всем горячим, или, наоборот, все горячие напитки всем холодным. Для каждого последующего разбиения альтернатив одна подкатегория лучше другой того же уровня.

Каждый из  $(2m - 3)!$  максимальных сепарабельных доменов содержит  $2^{m-1}$  предпочтений. Каждый максимальный сепарабельный домен содержит такое же количество линейных порядков, как и максимальный домен однопиковых предпочтений, но так как количество сепарабельных доменов больше количества однопиковых, то количество сепарабельных профилей предпочтений превышает количество однопиковых профилей предпочтений.

*Теорема 6 [29]. Количество сепарабельных профилей предпочтений асимптотически равно*

$$\#GS(m, n) \approx (2m - 3)!2^{(m-1)n}.$$

*Конфигурация 7.* Существуют три агента  $i, j, k \in \mathcal{N}$  и три альтернативы  $a, b, c \in A$  такие, что выполнено  $(aP_i bP_i c$  или  $cP_i bP_i a)$ ,  $(bP_j cP_j a$  или  $aP_j cP_j b)$ ,  $(bP_k aP_k c$  или  $cP_k aP_k b)$ .

Конфигурация 7 обеспечивает разнообразие медианных альтернатив. Запрет на конфигурацию 7 ограничивает двумя количество альтернатив в любой тройке, что соответствует одному из способов реализации ограничения (ii) из теоремы 1.

*Конфигурация 8.* Существуют два агента  $i, j \in \mathcal{N}$  и четыре альтернативы  $a, b, c, d \in A$  такие, что выполнено  $aP_i b P_i c P_i d$  и ( $bP_j d P_j a P_j c$  или  $cP_j a P_j d P_j b$ ).

Конфигурация 8 задает паттерн перестановок, называемый сепарабельными перестановками (подробнее о сепарабельных перестановках см. в [80]).

*Теорема 7 [54].* Профиль предпочтений является сепарабельным тогда и только тогда, когда он не содержит конфигураций 7 и 8.

*Конфигурация 9.* Существуют два агента  $i, j \in \mathcal{N}$  и четыре альтернативы  $a, b, c, d \in A$  такие, что выполнено  $aP_i b P_i c P_i d$  и ( $bP_j a P_j d P_j c$  или  $cP_j d P_j a P_j b$ ).

Конфигурация 9 используется в определении усиленно сепарабельных предпочтений, чья характеристика представлена в теореме 9.

*Теорема 8 [81].* Профиль предпочтений является усиленно сепарабельным тогда и только тогда, когда он не содержит конфигураций 7, 8 и 9.

Усиленно сепарабельные предпочтения представляют интерес прежде всего с точки зрения их комбинаторных свойств [81].

Сепарабельные предпочтения упрощают классические задачи теории коллективного выбора только в случае иерархических деревьев ограниченной высоты [79]. Сепарабельные предпочтения создают условия для существования решения задачи случайного распределения неделимых объектов [82]. При ограничении домена до лестничных предпочтений решение задачи становится единственным [83].

Домен предпочтений является *лестничным*, если существует слабый порядок на множестве альтернатив, такой что каждый класс эквивалентности состоит из одной или двух альтернатив, и предпочтения, входящие в домен, являются линеаризацией данного слабого порядка. Лестничный домен максимального размера содержит  $2^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$  предпочтений. Лестничный домен предпочтений не является максимальным доменом Кондорсе, но в задаче распределения неделимых объектов не строится предпочтение коллектива и отношение, порожаемое правилом простого большинства, не играет никакой роли.

### 3.3. Предпочтения со свойством единственного пересечения

Домен предпочтений со свойством единственного пересечения характеризуется линейным порядком (осью) на множестве агентов. Для каждой пары альтернатив подмножества агентов, имеющие одинаковые предпочтения на этой паре, составляют интервал на исходном линейном порядке агентов. Таким образом, для каждой пары альтернатив при движении вдоль оси агентов предпочтения меняются не более одного раза.

Домен предпочтений со свойством единственного пересечения естественным образом возникает при моделировании предпочтений относительно налоговых ставок [25, 26]. Домен предпочтений со свойством единственного пересечения упрощает решение некоторых задач пропорционального представительства [84].

Примерами доменов предпочтений со свойством единственного пересечения являются

$$D_3 = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\}, \quad D_4 = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\}.$$

Как и домены сепарабельных предпочтений, домены предпочтений со свойством единственного пересечения разнообразны и структурно отличаются друг от друга.

*Конфигурация 10.* Существуют три агента  $i, j, k \in \mathcal{N}$  и не обязательно различные альтернативы  $a, b, c, d, e, f \in A$  такие, что выполнено  $bP_i a, cP_i d, eP_i f, aP_j b, dP_j c, eP_j f, aP_k b, cP_k d, fP_k e$ .

*Конфигурация 11.* Существуют четыре агента  $i, j, k, l \in \mathcal{N}$  и не обязательно различные альтернативы  $a, b, c, d \in A$  такие, что выполнено  $aP_i b, cP_i d, aP_j b, dP_j c, bP_k a, cP_k d, bP_l a, dP_l c$ .

*Теорема 9 [85]. Профиль предпочтений обладает свойством единственного пересечения тогда и только тогда, когда он не содержит конфигураций 10 и 11.*

Запрещенные подпрофили содержат трех или четырех агентов, поэтому все профили предпочтений с двумя агентами являются профилями предпочтений со свойством единственного пересечения.

Каждый домен предпочтений со свойством единственного пересечения соответствует максимальной цепи в слабом порядке Брухата, построенном на множестве линейных порядков с отношением вложенности множеств пар альтернатив, которые имеют обратный порядок по отношению к минимальному элементу. Таким образом, слабый порядок Брухата имеет два обратных друг другу линейных порядка в качестве минимального и максимального элемента. Каждый домен предпочтений со свойством единственного пересечения содержит линейные порядки, образующие цепь от минимального до максимального элемента в слабом порядке Брухата. Каждый домен предпочтений со свойством единственного пересечения содержит  $\frac{m(m-1)}{2} + 1$  предпочтений [85]. Согласно [86], количество максимальных цепей в слабом порядке Брухата равно

$$\frac{\binom{m}{2}!}{1^{m-1} 3^{m-2} 5^{m-3} \dots (2m-3)^1}.$$

Далеко не все домены предпочтений со свойством единственного пересечения являются максимальными доменами Кондорсе. Для каждого числа

альтернатив только два домена являются одновременно доменами предпочтений со свойством единственного пересечения и максимальными доменами Кондорсе [87].

Для трех альтернатив количество профилей предпочтений со свойством единственного пересечения выше количества однопиковых профилей предпочтений и количества сепарабельных профилей предпочтений, но для большего числа альтернатив верно обратное. Теорема 11 раскрывает причины большого количества профилей предпочтений со свойством единственного пересечения для трех альтернатив.

*Теорема 10. Профиль предпочтений с тремя альтернативами является профилем предпочтений со свойством единственного пересечения тогда и только тогда, когда он является однопиковым или однолунковым.*

Предпочтения со свойством единственного пересечения имеют много расширений: предпочтения со свойством единственного пересечения на дереве [88], на графах [89], предпочтения, близкие к предпочтениям со свойством единственного пересечения [63, 90–92], это предпочтения, которые сводятся к предпочтениям со свойством единственного пересечения после удаления либо  $k$  альтернатив, либо  $k$  агентов, либо разбиения множества агентов или альтернатив на  $k$  частей, либо трансформация предпочтений через  $k$  парных замен стоящих последовательно альтернатив в некоторых предпочтениях и т.д., предпочтения со свойством единственного пересечения при неполной информации [93].

Предпочтения со свойством единственного пересечения фиксируют некоторое упорядочение агентов, которое можно сравнить с распределением агентов (избирателей) по уровню дохода, образования и т.д., тем самым можно найти объяснение существующим предпочтениям. Исследованию корреляция предпочтений со свойством единственного пересечения и экзогенных атрибутов посвящена работа [94].

*Конфигурация 12 (минимальное разнообразие).* Для каждой альтернативы существует порядок предпочтений с данной альтернативой в качестве максимальной.

*Теорема 11 [95]. Профиль предпочтений со свойством единственного пересечения, содержащий конфигурацию 12, является однопиковым.*

*Теорема 12 [95]. Профиль предпочтений со свойством единственного пересечения является однопиковым, если и только если он может быть дополнен предпочтениями, при которых дополненный профиль будет профилем предпочтений со свойством единственного пересечения и будет содержать конфигурацию 12.*

Теорема 12 характеризует домены, являющиеся пересечением однопикового домена предпочтений и домена предпочтений со свойством единственного пересечения. Интерес к этому домену возник, потому что он близок к домену евклидовых предпочтений, которому посвящен следующий раздел.

### 3.4. Одномерные евклидовы предпочтения

Если не оговорено иное, то в данном разделе под евклидовыми предпочтениями подразумеваются одномерные евклидовы предпочтения. Профиль предпочтений является *евклидовым*, если существует ось, на которой расположены альтернативы и идеальные точки агентов такие, что предпочтения агентов формируются исходя из геометрической близости альтернатив. Каждый агент предпочитает более близкие к его идеальной точке альтернативы более отдаленным. Не для каждого профиля однопиковых предпочтений можно найти координаты альтернатив и агентов таким образом, чтобы он стал евклидовым [96].

Именно евклидовы предпочтения используются во многих моделях пространственной экономики, в том числе в модели линейного города Г. Хотеллинга [97], и моделях политической конкуренции, берущих свое начало из модели Э. Даунса [98].

*Теорема 13 [99]. Для числа альтернатив, не превышающего пяти, профиль предпочтений является евклидовым тогда и только тогда, когда он является одновременно однопиковым и профилем предпочтений со свойством единственного пересечения.*

Начиная с шести альтернатив, все евклидовы профили предпочтений являются одновременно однопиковыми и профилями предпочтений со свойством единственного пересечения, но существуют примеры, когда обратное неверно. Для примера достаточно трех агентов.

*Теорема 14 [99]. Для двух агентов профиль предпочтений является евклидовым тогда и только тогда, когда он является однопиковым.*

*Теорема 15 [100]. Не существует конечного числа запрещенных подпрофилей, характеризующих евклидовы профили предпочтений.*

Теорема 15 не запрещает характеристику через бесконечное количество запрещенных подпрофилей. Такая характеристика могла бы быть достаточно компактна и применима в прикладных исследованиях, как, например, характеристика матриц со свойством последовательных единиц [101]. Несмотря на отсутствие характеристики через конечное число запрещенных подпрофилей существует алгоритм полиномиальной сложности для распознавания евклидовых профилей предпочтений [102, 103].

Естественным обобщением евклидовых предпочтений являются многомерные евклидовы предпочтения, в которых альтернативы и идеальные точки агентов представлены точками в многомерном евклидовом пространстве, но задача распознавания профиля  $k$ -мерных евклидовых предпочтений становится NP-трудной для любого  $k > 1$  [104].

Другим обобщением являются евклидовы на окружности предпочтения. Данные предпочтения нашли применение в теории отраслевых рынков [105] и политической конкуренции [106].

#### 4. Структурированные предпочтения в задаче о марьяже

Рассмотрим два конечных и непересекающихся множества: множество женщин  $W = \{w_1, \dots, w_n\}$  и множество мужчин  $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ . Каждый агент  $i \in W \cup M$  имеет предпочтение на множестве агентов другого пола (предпочтения являются линейными порядками). Проблема состоит в том, чтобы создать такие пары мужчина-женщина, которые агенты хотели бы сохранить.

Задача о марьяже — это кортеж  $(W, M, \mathcal{P})$ , который состоит из множества женщин, множества мужчин и профиля предпочтений, состоящего из  $2n$  линейных порядков. Паросочетанием называется отображение  $\mu : W \cup M \rightarrow W \cup M$  такое, что  $\forall w \in W$  имеем  $\mu(w) \in M$  и  $\mu(\mu(w)) = w$ , и  $\forall m \in M$  имеем  $\mu(m) \in W$  и  $\mu(\mu(m)) = m$ . Паросочетание  $\mu$  называется *устойчивым*, если не существует блокирующей пары, т.е. пары  $(X, x) \in W \times M$  такой, что  $XP_x\mu(x)$  и  $xP_X\mu(X)$ . Устойчивое паросочетание является решением задачи о марьяже. Доказательство существования решения задачи о марьяже и алгоритм построения устойчивого паросочетания были получены Д. Гейлом и Л. Шепли в [107].

Пара, которая предпочитает друг друга всем остальным агентам противоположного пола, называется *фиксированной парой*. В любом устойчивом паросочетании агенты из каждой фиксированной пары будут сопоставлены друг другу. Я. Экхоут [108] сформулировал *условие последовательных предпочтений*: существуют перестановка женщин  $\sigma$  и перестановка мужчин  $\tau$  такие, что

$$\begin{aligned} \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ таких, что } j > i, \text{ имеем } m_{\tau(i)} P_{w_{\sigma(i)}} m_{\tau(j)}, \\ \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ таких, что } j > i, \text{ имеем } w_{\sigma(i)} P_{m_{\tau(i)}} w_{\sigma(j)}. \end{aligned}$$

Из условия последовательных предпочтений следует существование фиксированной пары  $(w_{\sigma(1)}, m_{\tau(1)})$ .

*Теорема 16* [108]. *Условие последовательных предпочтений является достаточным условием единственности устойчивого паросочетания.*

Перестановки из условия последовательных предпочтений определяют паросочетание  $\mu(m_{\tau(i)}) = w_{\sigma(i)}$ . Условие последовательных предпочтений допускает, что агент предпочитает кого-либо своей паре из паросочетания, но только если предпочитаемые находятся «выше» в соответствующем перестановке линейном порядке. Представим, что мужчины и женщины упорядочены по росту и каждый агент стоит в паре с агентом противоположного пола такого же ранга по росту. Если для каждого агента среди агентов, которые лучше его/ее пары из паросочетания, только агенты выше ростом, то построенное по рангам паросочетание является единственным устойчивым паросочетанием. Докажем следующую теорему.

*Теорема 17. Вероятность появления профиля, удовлетворяющего условию последовательных предпочтений, удовлетворяет следующему рекур-*

рентному соотношению:

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i+1} \binom{n}{i}^2 \frac{(n-i)!}{n^{2(n-i)}} s(i),$$

где

$$s(0) = 1.$$

*Доказательство.* Все профили предпочтений, удовлетворяющие условию последовательных предпочтений, можно разделить на множества равной мощности с профилями предпочтений, различающиеся итоговым паросочетанием. Все профили предпочтений с данным паросочетанием можно разделить на множества с разным количеством фиксированных пар. Существует  $\binom{n}{i}$  способов выбрать  $i$  пар. После исключения данных  $i$  пар получается профиль предпочтений с  $n-i$  парами и этот профиль будет удовлетворять условию последовательных предпочтений. Для данного профиля предпочтений меньшего размера существует  $\binom{n}{i}^{2(n-i)} i!^{2(n-i)}$  способов добавить  $i$  пар в профиль и  $(n-1)!^{2i}$  способов определить предпочтения  $i$  пар агентов. Применяя принцип включения-исключения, получим количество профилей предпочтений, удовлетворяющих условию последовательных предпочтений,

$$SPC(n) = n! \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \binom{n}{i}^{2(n-i)} i!^{2(n-i)} (n-1)!^{2i} SPC(n-i),$$

где

$$SPC(0) = 1.$$

Вычисляя вероятность

$$s(n) = \frac{SPC(n)}{n!^{2n}}$$

и вводя новый индекс суммирования  $i' = n - i$ , получим итоговый результат. ■

Карпов [109] предложил более общее условие единственности устойчивого паросочетания:  $\alpha$ -условие. Существуют устойчивое паросочетание  $\mu$ , перестановка женщин  $\sigma$  и перестановка мужчин  $\tau$  такие, что

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ таких, что } j > i, \text{ имеем } \mu(w_{\sigma(i)}) P_{w_{\sigma(i)}} m_{\tau(j)},$$

и перестановка женщин  $\sigma'$  и перестановка мужчин  $\tau'$  такие, что

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ таких, что } j > i, \text{ имеем } \mu(m_{\tau'(i)}) P_{m_{\tau'(i)}} w_{\sigma'(j)}.$$

*Пример* из [109]. Данный профиль предпочтений

$$\begin{aligned} w_1 &: m_1 P_{w_1} m_3 P_{w_1} m_2, & m_1 &: w_3 P_{m_1} w_1 P_{m_1} w_2; \\ w_2 &: m_1 P_{w_2} m_2 P_{w_2} m_3, & m_2 &: w_2 P_{m_2} w_1 P_{m_2} w_3; \\ w_3 &: m_2 P_{w_3} m_3 P_{w_3} m_1, & m_3 &: w_2 P_{m_3} w_3 P_{m_3} w_1; \end{aligned}$$

нарушает условие последовательных предпочтений, так как не имеет фиксированной пары, но имеет единственное устойчивое паросочетание  $w_1 \leftrightarrow m_1, w_2 \leftrightarrow m_2, w_3 \leftrightarrow m_3$ . Данный профиль удовлетворяет  $\alpha$ -условию при  $\sigma = \tau = 123$  и  $\sigma' = \tau' = 231$ .

*Теорема 18* [109].  $\alpha$ -Условие является достаточным условием единственности устойчивого паросочетания.

$\alpha$ -Условие позволяет иметь различные критерии для построения упорядочений. Пусть кроме профиля предпочтений агентов, имеются два упорядочения, выражающие соответственно «женский взгляд» и «мужской взгляд». Например, женщины упорядочивают всех по росту, а мужчины — по возрасту. В  $\alpha$ -условии первое упорядочение определяет перестановки  $\sigma$  и  $\tau$ , второе упорядочение — перестановки  $\sigma'$  и  $\tau'$ . Представим, что мужчины и женщины упорядочены по данным критериям и каждый агент стоит в паре с агентом противоположного пола такого же ранга согласно критерию своего пола. Если для каждого агента среди агентов, которые лучше его/ее пары согласно паросочетанию, только агенты выше по критерию для соответствующего пола, то построенное по рангам паросочетание является единственным устойчивым паросочетанием.  $\alpha$ -Условие находит применение для создания децентрализованных алгоритмов на рынках соответствия [110, 111].

## 5. Дихотомические предпочтения

Дихотомические предпочтения задаются разбиением множества альтернатив на два подмножества: поддерживаемые альтернативы и неприемлемые альтернативы.

Дихотомические предпочтения используются в одобряющем голосовании [112], в задаче пропорционального представительства [113], в задаче нахождения паросочетаний [114], в задаче распределения ресурсов [115, 116], в гедонических играх [117] и других приложениях.

Несмотря на простую структуру многие вычислительные задачи, связанные с дихотомическими предпочтениями, оказываются NP-трудными, что привело к созданию теории доменов дихотомических предпочтений — ограничений на множество возможных предпочтений. Э. Элкин и М. Лакнер [118] показали, что многие естественные ограничения на профиль предпочтений приводят к упрощению вычислительных задач пропорционального представительства.

Как и прежде, имеем множество альтернатив  $A = \{1, \dots, m\}$  и множество агентов  $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$ . Каждый агент  $i \in \mathcal{N}$  одобряет множество  $A_i \subseteq A$ . Со-

ставим матрицу  $X$  размера  $m$  на  $n$ , в которой  $x_{ij} = 1$ , если агент  $i$  одобряет альтернативу  $j$ , и  $x_{ij} = 0$ , если агент  $j$  не одобряет альтернативу  $i$ . Матрица  $X_{m \times n}$  представляет собой профиль предпочтений. Множество всех возможных бинарных матриц размера  $m \times n$  будем обозначать как  $\mathcal{M}_{m \times n}$ . Существуют  $2^{mn}$  различных матриц и, соответственно, различных профилей предпочтений. Доменом предпочтений называется подмножество возможных столбцов в бинарной матрице.

Будем говорить, что матрицы  $X$  и  $Y$  эквивалентны с обозначением,  $X \equiv Y$ , если матрица  $X$  равна матрице  $Y$  после перестановки строк и столбцов:

$X \equiv Y$  тогда и только тогда, когда  $x_{ij} = y_{\sigma(i)\tau(j)}$ ,  $\sigma(i) \in S_m$ ,  $\tau(j) \in S_n$ , где  $S_k$  — множество всех перестановок на множестве  $\{1, \dots, k\}$ .

Матрица  $Q_{k \times l}$  является *паттерном* в матрице  $A_{m \times n}$ , если существует подматрица  $B_{k \times l}$  матрицы  $A_{m \times n}$  такая, что  $Q_{k \times l} \equiv B_{k \times l}$ . Паттерны играют роль конфигураций в ординальных предпочтениях.

Для каждого линейного порядка можно определить множество дихотомических предпочтений, которые могут быть достигнуты при некотором уровне одобрения агентом.

Для однопиковых предпочтений множества одобрения (некоторое количество наилучших альтернатив) обязательно образуют интервал на оси альтернатив (понятие оси однопиковых предпочтений введено в разделе 3.1). Таким образом, получим домен предпочтений с последовательными единицами в столбцах (интервалы кандидатов).

*Паттерн 1.*

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \dots \\ & & & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \in \mathcal{M}_{k+2 \times k+2}, \quad k \geq 1.$$

*Паттерн 2.*

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \dots & \\ & & & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \in \mathcal{M}_{k+2 \times k+3}, \quad k \geq 1.$$

Паттерн 3.

$$\left[ \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \dots \\ & & & & 1 & 1 & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & & \dots & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \in \mathcal{M}_{k+3 \times k+2}, \quad k \geq 1.$$

Паттерн 4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Паттерн 5.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Теорема 19 [101]. Профиль дихотомических предпочтений удовлетворяет свойству последовательных единиц в столбцах тогда и только тогда профиль не содержит паттернов 1–5.*

Характеристика из теоремы 21 содержит бесконечное число паттернов, но так как паттерны схожи друг с другом, задача поиска паттерна минимального размера решается за полиномиальное время [119]. Существует простой алгоритм для тестирования свойства последовательных единиц в матрице, основанный на RQ-деревьях [78].

Транспонированные паттерны 1–5 дадут характеристику домена с последовательными единицами в строках (интервалы агентов), рассмотренного в [118]. В литературе можно найти характеристики бинарных матриц с круговым свойством последовательных единиц [120] со свойством последовательных единиц на дереве [121].

З. Терзопулу и др. [122] исследовали домены предпочтений с ограниченными интервалами агентов. Данные интервалы образуются только у краев оси (домен предпочтений с *внешними интервалами агентов, далее ВИА*) или только у одного края оси (домен предпочтений с *одним внешним интервалом*

агентов, далее *ОВИА*). В случае голосования за кандидатов от политических партий избиратели могут быть упорядочены по степени лояльности к одной из двух партий. Наиболее лояльные избиратели будут одобрять всех кандидатов своей партии, менее лояльные избиратели могут одобрять некоторое количество кандидатов обеих партий. Примером профиля предпочтений с *ВИА* является

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Каждый кандидат получает одобрение от интервала агентов, находящегося у края оси.

*Паттерн 6.*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Паттерн 7.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Паттерн 8.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Паттерн 9.*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Паттерн 10.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Теорема 20 [122]. Профиль дихотомических предпочтений удовлетворяет свойству *ВИА* тогда и только тогда когда профиль не содержит паттернов 6–10.*

Паттерн 11.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Теорема 21 [122]. Профиль дихотомических предпочтений удовлетворяет свойству ОБИА тогда и только тогда профиль не содержит паттерна 11.

Матрицы, не содержащие паттерна 11, могут быть однозначно восстановлены по их суммам строк и столбцов [123].

Теорема 22 [123]. Количество профилей дихотомических предпочтений, удовлетворяющих свойству ОБИА, равно

$$\#SVEI(m, n) = \sum_{k=1}^{\min(m, n)} k!^2 S(n+1, k+1) S(m+1, k+1),$$

где  $S(a, b)$  — число Стирлинга второго рода (см. [124]).

В [122] рассмотрены также достаточные и необходимые условия нахождения структурированных дихотомических предпочтений в случае неполной информации, когда не имеется информации о некоторых ячейках в профиле предпочтений. В [125] расширено возможное применение интервальных на оси предпочтений до интервальных на деревьях.

Другим примером структурированных дихотомических предпочтений является разбиение. Профиль дихотомических предпочтений удовлетворяет свойству *разбиения*, если множество одобрения каждого агента совпадает с одним из множеств, принадлежавших некоторому разбиению множества альтернатив.

Паттерн 12.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Теорема 23 [122]. Профиль дихотомических предпочтений удовлетворяет свойству ОБИА тогда и только тогда профиль не содержит паттерна 12.

Теорема 24 [126]. Количество профилей дихотомических предпочтений, удовлетворяющих свойству ОБИА, равно

$$\#PART(m, n) = \sum_{k=1}^{\min(m, n)} k! S(n, k) S(m, k),$$

где  $S(a, b)$  — число Стирлинга второго рода (см. [124]).

Свойство разбиения является очень ограничивающим и количество профилей, удовлетворяющих этому свойству меньше, чем количество профилей, удовлетворяющих свойству ОБИА.

## 6. Заключение

С одной стороны, структурированные профили предпочтений представляют собой очень ограниченное сочетание предпочтений и не могут отражать разнообразие мнений в реальных проблемах агрегирования. С другой стороны, модели, основанные на структурированных предпочтениях, обычно дают решения с хорошими свойствами. Задача расширения доменов структурированных предпочтений с целью повышения числа охватываемых профилей при сохранении нужных свойств остается открытой. Множество попыток расширения сталкиваются как с вычислительными сложностями, так и с проблемами в интерпретации.

Перспективными, но мало затронутыми областями моделирования предпочтений являются исследования неполных предпочтений, а именно предпочтений, представимых слабыми или частичными порядками, предпочтений, имеющих линейный порядок на подмножестве альтернатив и т.д. Анализ дихотомических предпочтений, представленный в обзоре, является первым шагом в этом направлении.

Естественным направлением исследований является анализ реальных данных по профилям предпочтений. Библиотеки профилей предпочтений [127, 128] являются отправной точкой для многих исследований в этой области.

Автор благодарит Ф.Т. Алескерова, участников Общественного семинара “Экспертные оценки и анализ данных” 11 марта 2020 г. в ИПУ РАН, участников семинара “Математическая экономика” ЦЭМИ РАН 9 ноября 2021 г. и анонимного рецензента за ценные комментарии.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aleskerov F.T.* Arrowian aggregation models. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1999.
2. *Arrow K.J.* Social Choice and Individual Values. New York: Wiley, 1951.
3. *Gibbard A.* Manipulation of voting schemes: a general result // *Econometrica*. 1973. V. 41. No. 4. P. 587–601.
4. *Satterthwaite M.A.* Strategy-proofness and Arrow’s conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions // *J. Econ. Theory*. 1975. V. 10. No. 2. P. 187–217.
5. *Dasgupta P., Maskin E.* On the robustness of majority rule // *J. Eur. Econ. Assoc.* 2008. V. 6. No. 5. P. 949–973.
6. *Xefferis D.* How robust is majority voting as a social choice rule? // *Oxf. Econ. Pap.* 2014. V. 66. No. 4. P. 1006–1018.
7. *Aşan G., Sanver M.R.* Another characterization of the majority rule // *Econ. Lett.* 2002. V. 75. No. 3. P. 409–413.
8. *Campbell D.E., Kelly J.S.* A simple characterization of majority rule // *Econ. Theory*. 2000. V. 15. No. 3. P. 689–700.

9. *Dasgupta P., Maskin E.* Strategy-proofness, independence of irrelevant alternatives, and majority rule // Amer. Econ. Rev. Insights. 2020. V. 2. No. 4. P. 459–474.
10. *May K.O.* A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decisions // Econometrica. 1952. V. 20. No. 4. P. 680–684.
11. *Woeginger G.J.* A new characterization of the majority rule // Econ. Lett. 2003. V. 81. No. 1. P. 89–94.
12. *Gehrlein W.V.* Condorcet’s paradox. Heidelberg: Springer, 2006.
13. *Xeferis D.* A necessary and sufficient single-profile condition for transitivity of the majority rule relation // Econ. Lett. 2012. V. 116. No. 3. P. 516–518.
14. *Aleskerov F.* Categories of Arrovian voting schemes / Arrow K., Sen A., Suzumura K., Eds. Handbook of Social Choice and Welfare, Amsterdam: Elsevier Science. 2002. P. 95–129.
15. *Dittrich T.* Eine vollständige Klassifikation von Condorcet Domains für kleine Alternativenmengen. Karlsruher Instituts für Technologie (KIT), Dissertation, 2018.
16. *Li G., Puppe C., Slinko A.* Towards a classification of maximal peak-pit Condorcet domains // Math. Soc. Sci. 2021. V. 113. P. 191–202.
17. *Galambos Á., Reiner V.* Acyclic sets of linear orders via the Bruhat orders // Soc. Choice Welf. 2008. V. 30. P. 245–264.
18. *Danilov V.I., Koshevoy G.A.* Maximal Condorcet domains // Order. 2013. V. 30. No. 1. P. 181–194.
19. *Danilov V.I., Karzanov A.V., Koshevoy G.A.* Condorcet domains of tiling type // Discrete Appl. Math. 2012. V. 160. P. 933–940.
20. *Karpov A., Slinko A.* Constructing large peak-pit Condorcet domains // Theory Decis. 2022. <https://doi.org/10.1007/s11238-022-09878-9>
21. *Поляков Н.Л., Шамолин М.В.* Теоремы о редукции в теории коллективного выбора // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прилож. Темат. обзор. 2020. Т. 174. С. 46–51.
22. *Danilov V.I., Karzanov A.V., Koshevoy G.A.* Majority rule on rhombus tilings and Condorcet super-domains // Discrete Appl. Math. 2021. V. 292. P. 85–96.
23. *Inada K.* A Note on the simple majority decision rule // Econometrica. 1964. V. 32. No. 4. P. 525–531.
24. *Inada K.* The simple majority decision rule // Econometrica. 1969. V. 37. No. 3. P. 490–506.
25. *Sen A.K.* A Possibility theorem on majority decisions // Econometrica. 1966. V. 34. No. 2. P. 491–499.
26. *Mirrlees J.* An exploration in the theory of optimal income taxation // Rev. Econ. Stud. 1971. V. 38. P. 175–208.
27. *Roberts K.* Voting over income tax schedules // J. Public Econ. 1977. V. 8. No. 3. P. 329–340.
28. *Elkind E., Lackner M., Peters D.* Structured preferences / Endriss U. (ed), Trends in computational social choice. 2017. P 187–207.
29. *Karpov A.* On the number of group-separable preference profiles // Group Decis. Negot. 2019. V. 28. No. 3. P. 501–517.
30. *Chen J., Finnendahl U.P.* On the number of single-peaked narcissistic or single-crossing narcissistic preference profiles // Discrete Math. 2018. V. 341. P. 1225–1236.

31. *Durand S.* Finding sharper distinctions for conditions of transitivity of the majority method // *Discrete Appl Math.* 2003. V. 131. P. 577–595.
32. *Karpov A.* The likelihood of single-peaked preferences under classical and new probability distribution assumptions // *Soc. Choice Welf.* 2020. V. 55. P. 629–644.
33. *Lackner M.L., Lackner M.* On the likelihood of single-peaked preferences // *Soc. Choice Welf.* 2017. V. 48. No. 4. P. 717–745.
34. *Kim K.H., Roush F.W.* Special domains and nonmanipulability // *Math. Soc. Sci.* 1980. V. 1. P. 85–92.
35. *Sato S.* Circular domains // *Rev. Econ. Des.* 2010. V. 14. P. 331–342.
36. *Achuthankutty G., Roy S.* Dictatorship on top-circular domains // *Theory Decis.* 2018. V. 86. P. 479–493.
37. *Peters D., Lackner M.* Preferences single-peaked on a circle // *J. Artif. Intel. Res.* 2020. V. 68. P. 463–502.
38. *Ozdemir U., Sanver M.R.* Dictatorial domains in preference aggregation // *Soc. Choice Welf.* 2007. V. 28. P. 61–76.
39. *Monjardet B.* Acyclic domains of linear orders: a survey / *Brams S., Gehrlein W.V., Roberts F.S., Eds. The mathematics of preference, choice and order, Essays in honor of Peter C. Fishburn, Heidelberg: Springer.* 2009. P. 139–160.
40. *Fishburn P.C.* Acyclic sets of linear orders // *Soc. Choice Welf.* 1996. V. 14. P. 113–124.
41. *Данилов В.И., Карзанов А.В., Кошевой Г.А.* Области Кондорсе и ромбические паркетты // *Экономика и математические методы.* 2010. Т. 46. № 4. С. 55–68.
42. *Labbe J.-P., Lange C.* Cambrian acyclic domains: Counting c-singletons // *Order.* 2020. V. 37. P. 571–603.
43. *Kreweras G.* Les décisions collectives // *Math. Sci. hum.* 1963. V. 2. P. 25–35.
44. *Bartholdi J., Trick M.* Stable matching with preferences derived from a psychological model // *Oper. Res. Lett.* 1986. V. 5. No. 4. P. 165–169.
45. *Escoffier B., Lang J., Ozturk M.* Single-peaked consistency and its complexity / *Ghallab M., Spyropoulos C.D., Fakotakis N., Avouris N., Eds. Proc. of 18th Eur. Conf. on Artif. Intel. (ECAI 2008), 2008.* P. 366–370.
46. *Black D.* On the rationale of group decision-making // *J. Polit. Econ.* 1948. V. 56. P. 23–34.
47. *Brandt F., Brill M., Hemaspaandra E., Hemaspaandra L.A.* Bypassing combinatorial protections: Polynomial-time algorithms for single-peaked electorates // *J. Artif. Intel. Res.* 2015. V. 53. P. 439–496.
48. *Faliszewski P., Hemaspaandra E., Hemaspaandra L.A., Rothe J.* The shield that never was: Societies with single-peaked preferences are more open to manipulation and control // *Inf. Comput.* 2011. V. 209. No. 2. P. 89–107.
49. *Веселова Ю.А.* Вычислительная сложность манипулирования: обзор проблемы // *АиТ.* 2016. № 3. С. 7–32.  
*Veselova Y.A.* Computational complexity of manipulation: A survey // *Autom. Remote Control.* 2016. V. 77. No. 3. P. 369–388.
50. *Puppe C.* The single-peaked domain revisited: A simple global characterization // *J. Econ. Theory.* 2018. V. 176. P. 55–80.

51. *Slinko A.* Condorcet domains satisfying Arrow's single-peakedness // *J. Math. Econ.* 2019. V. 84. P. 166–175.
52. *Liversidge G.* Counting Condorcet domains. arXiv:2004.00751, 2020.
53. *Weisstein E. W.* Permutation pattern. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. 2020. <https://mathworld.wolfram.com/PermutationPattern.html>
54. *Ballester M.A., Haeringer G.* A characterization of the single-peaked domain // *Soc. Choice Welf.* 2011. V. 36. P. 305–322.
55. *Demange G.* Single-peaked orders on a tree // *Math. Soc. Sci.* 1982. V. 3. No. 4. P. 389–396.
56. *Nehring K., Puppe C.* The structure of strategy-proof social choice — part i: General characterization and possibility results on median spaces // *J. Econ. Theory.* 2007. V. 135. No. 1. P. 269–305.
57. *Escoffier B., Spanjaard O., Tydrichová M.* Recognizing single-peaked preferences on an arbitrary graph: Complexity and algorithms / Harks T., Klimm M. Eds. Proc. of the 13th Internat. Symposium, SAGT 2020, Augsburg, 2020. P. 291–306.
58. *Trick M.A.* Recognizing single-peaked preferences on a tree // *Math. Soc. Sci.* 1989. V. 17. No. 3. P. 329–334.
59. *Sliwinski J., Elkind E.* Preferences single-peaked on a tree: Sampling and tree recognition / Kraus S. Ed. Proc. of the Twenty-Eighth Internat. Joint Conf. on Artif. Intel. (IJCAI-19). P. 580–586.
60. *Peters D., Elkind E.* Preferences single-peaked on nice trees / Proc. of the 30th AAAI Conf. on Artif. Intel. (AAAI 2016), 2016. P. 594–600.
61. *Peters D., Yu L., Chan H., Elkind E.* Preferences single-peaked on a tree: Multiwinner elections and structural results // *J. Artif. Intel. Res.* 2022. V. 73. P. 231–276.
62. *Duchi E.* A code for square permutations and convex permutominoes // *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* 2019. V. 21. No. 2. #2.
63. *Erdelyi G., Lackner M., Pfandler A.* Computational aspects of nearly single-peaked electorates // *J. Artif. Intel. Res.* 2017. V. 58. P. 297–337.
64. *Sui X., Nienaber A., Boutilier C.* Multidimensional single-peaked consistency and its approximations / Rossi F. Ed. Proc. of the Twenty-third Internat. Joint Conf. on Artif. Intel. (IJCAI-13), pp. 367–374, Beijing, 2013. P. 375–382.
65. *Faliszewski P., Hemaspaandra E., Hemaspaandra L.A.* The complexity of manipulative attacks in nearly single-peaked electorates // *Artif. Intell.* 2014. V. 207. P. 69–99.
66. *Menon V., Larson K.* Reinstating combinatorial protections for manipulation and bribery in single-peaked and nearly single-peaked electorates / Proc. of the 30th AAAI Conf. on Artif. Intel. (AAAI. 2016), 2016. P. 565–571.
67. *Yang Y.* Manipulation with bounded single-peaked width: A parameterized study / Bordini R.H., Elkind E., Weiss G., Yolum P. Eds. Proc. of the 13th Internat. Joint Conf. on Autonomous Agents and Multiagent Systems, 2015. P. 77–85.
68. *Yang Y.* Complexity of controlling nearly single-peaked elections revisited / Dastani M., Sukthankar G., Andr e E., Koenig S. Eds. Proc. of the 17th Internat. Conf. on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS 2018), 2018. P. 2139–2141.

69. *Yang Y.* On the complexity of constructive control under nearly single-peaked preferences / Proc. of the 24th Eur. Conf. on Artif. Intel. (ECAI 2020), Santiago de Compostela, 2020.
70. *Yang Y., Guo J.* Controlling elections with bounded single-peaked width / Lomuscio A., Scerri P., Bazzan A., Huhns M. Eds. Proc. of the 13th Internat. Conf. on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS 2014), Paris, 2014. P. 629–636.
71. *Yang Y., Guo J.* The control complexity of r-approval: From the single-peaked case to the general case // J. Comput. Syst. Sci. 2017. V. 89. P. 432–449.
72. *Yang Y., Guo J.* Parameterized complexity of voter control in multi-peaked elections // Theory Comput. Syst. 2018. V. 62. No. 8. P. 1798–1825.
73. *Cornaz D., Galand L., Spanjaard O.* Bounded single-peaked width and proportional representation / Proc. of the 24th Eur. Conf. on Artif. Intel. (ECAI 2020), 2012. P. 270–275.
74. *Cornaz D., Galand L., Spanjaard O.* Kemeny elections with bounded single-peaked or single-crossing width / Proc. of the Twenty-Third Internat. Joint Conf. on Artif. Intel. (IJCAI-2013), 2013. P. 76–82.
75. *Fitzsimmons Z., Lackner M.* Incomplete preferences in single-peaked electorates // J. Artif. Intell. Res. 2020. V. 67. P. 797–833.
76. *Tideman T.N.* Independence of clones as a criterion for voting rules // Soc. Choice Welf. 1987. V. 4. No. 3. P. 185–206.
77. *Elkind E., Faliszewski P., Slinko A.* Clone structures in voters' preferences / Proc. of the 13th ACM Conf. on Electronic Commerce (EC-12), Valencia, 2012. P. 496–513.
78. *Booth K.S., Lueker G.S.* Testing for the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using PQ-tree algorithms // J. Comput. Syst. Sci. 1976. V. 13. P. 335–379.
79. *Faliszewski P., Karpov A., Obraztsova S.* The complexity of election problems with group-separable preferences // Auton. Agents Multi-Agent Syst. 2022. V. 36. Article 18.
80. *Kitaev S.* Separable permutations / Patterns in permutations and words. Monographs in Theoretical Computer Science. Berlin: Springer-Verlag, 2011. P. 57–66.
81. *Ferrari L.* Enhancing the connections between patterns in permutations and forbidden configurations in restricted elections // J. Discrete Math. Sci. Cryptography. 2020. <https://doi.org/10.1080/09720529.2020.1776932>
82. *Liu P.* Random assignments on sequentially dichotomous domains // Games Econ. Behav. 2020. V. 121. P. 565–584.
83. *Liu P., Zeng H.* Random assignments on preference domains with a tier structure // J. Math. Econ. 2019. V. 84. P. 176–194.
84. *Skowron P., Yu L., Faliszewski P., Elkind E.* The complexity of fully proportional representation for single-crossing electorates // Theor. Comput. Sci. 2015. V. 569. No. 2. P. 43–57.
85. *Bredereck R., Chen J., Woeginger G.J.* A characterization of the single-crossing domain // Soc. Choice Welf. 2013. V. 41. No. 4. P. 989–998.
86. *Stanley R.P.* On the number of reduced decompositions of elements of Coxeter groups // Eur. J. Combinatorics. 1984. V. 5. P. 359–372.

87. *Slinko A., Qinggong Wu, Xing Zheng Wu.* A characterization of preference domains that are single-crossing and maximal Condorcet // *Economics Letters*. 2021. V. 204. N 109918.
88. *Puppe C., Slinko A.* Condorcet domains, median graphs and the single-crossing property // *Econ. Theory*. 2019. V. 67. No. 1. P. 285–318.
89. *Constantinescu A.C., Elkind E.* Proportional representation under single-crossing preferences revisited / *Proc. of The Thirty-Fifth AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-21)*, 2021. P. 5286–5293.
90. *Bredereck R., Chen J., Woeginger G.J.* Are there any nicely structured preference profiles nearby? // *Math. Soc. Sci.* 2016. V. 79. P. 61–73.
91. *Jaeckle F., Peters D., Elkind E.* On recognising nearly single-crossing preferences / *Proc. of the 32nd AAAI Conf. on Artif. Intel. (AAAI-2018)*, 2018. P. 1079–1086.
92. *Cohen N., Elkind E., Lakhani F.* Single-crossing implementation. arXiv:1906.09671, 2019.
93. *Elkind E., Faliszewski P., Lackner M., Obratzsova S.* The complexity of recognizing incomplete single-crossing preferences / *Proc. Twenty-Ninth AAAI Conf. on Artif. Intel. (AAAI-2015)*, Austin, 2015. P. 865–871.
94. *Lakhani F., Peters D., Elkind E.* Correlating preferences and attributes: Nearly single-crossing profiles / *Proc. of the Twenty-Eighth Internat. Joint Conf. on Artif. Intel. (IJCAI-19)*. P. 414–420.
95. *Elkind E., Faliszewski P., Skowron P.* A characterization of the single-peaked single-crossing domain // *Soc. Choice Welf.* 2020. V. 54. P. 167–181.
96. *Berg S., Perlinger T.* Single-peaked compatible preference profiles: Some combinatorial results // *Soc. Choice Welf.* 2006. V. 27. No. 1. P. 89–102.
97. *Hotelling H.* Stability in competition // *Econ. J.* 1929. V. 153. No. 39. P. 41–57.
98. *Downs A.* An economic theory of democracy. New York: Harper and Row, 1957.
99. *Chen J., Grottko S.* Small one-dimensional Euclidean preference profiles // *Soc. Choice Welf.* 2021. V. 57. P. 117–144.
100. *Chen J., Pruhs K.R., Woeginger G.J.* The one-dimensional Euclidean domain: finitely many obstructions are not enough // *Soc. Choice Welf.* 2017. V. 48. P. 409–432.
101. *Tucker A.* A structure theorem for the consecutive 1's property // *J. Comb. Theory B.* 1972. V. 12. No. 2. P. 153–162.
102. *Knoblauch V.* Recognizing one-dimensional Euclidean preference profiles // *J. Math. Econ.* 2010. V. 46. P. 1–5.
103. *Elkind E., Faliszewski P.* Recognizing 1-euclidean preferences: An alternative approach / Lavi R. Ed. *Proc. of the 13th Internat. Symposium (SAGT 2014)*, Haifa, 2014. P. 146–157.
104. *Peters D.* Recognising multidimensional Euclidean preferences. In *Proc. of the 31st AAAI Conf. on Artif. Intel. (AAAI-2017)*, 2017. P. 642–648.
105. *Salop S.* Monopolistic Competition with Outside Goods // *Bell J. Econ.* 1979. V. 10. P. 141–156.
106. *Peeters R., Saran R., Yuksel A.M.* Strategic party formation on a circle and Durverger's law // *Soc. Choice Welf.* 2016. V. 47. P. 729–759.
107. *Gale D., Shapley L.S.* College admissions and the stability of marriage // *Amer. Math. Month.* 1962. V. 69. No. 1. P. 9–14.

108. *Eeckhout J.* On the uniqueness of stable marriage matchings // *Econ. Lett.* 2000. V. 69. No. 1. P. 1–8.
109. *Karpov A.* A necessary and sufficient condition for uniqueness consistency in the stable marriage matching problem // *Econ. Lett.* 2019. V. 178. P. 63–65.
110. *Sankararaman A., Basu S., Sankararaman K.A.* Dominate or Delete: Decentralized Competing Bandits in Serial Dictatorship / *Proc. of the 24th International Conference on Artificial Intelligence and Statistics (AISTATS 2021)*, San Diego, 2021.
111. *Basu S., Sankararaman K.A., Sankararaman A.* Beyond  $\log^2(T)$  regret for decentralized bandits in matching markets / *Proc. of the 38 th International Conference on Machine Learning*, PMLR 139, 2021.
112. *Brams S.J., Fishburn P.C.* Approval voting // *Amer. Polit. Sci. Rev.* 1978. V. 72. P. 831–847.
113. *Aziz H., Brill M., Conitzer V., Elkind E., Freeman R., Walsh T.* Justified representation in approval-based committee voting // *Soc. Choice Welf.* 2017. V. 48. No. 2. P. 461–485.
114. *Bogomolnaia A., Moulin H.* Random matching under dichotomous preferences // *Econometrica.* 2004. V. 72. P. 257–279.
115. *Bogomolnaia A., Moulin H., Stong R.* Collective choice under dichotomous preferences // *J. Econ. Theory.* 2005. V. 122. No. 2. P. 165–184.
116. *Duddy C.* Fair sharing under dichotomous preferences // *Math. Soc. Sci.* 2015. V. 73. P. 1–5.
117. *Aziz H., Harrenstein P., Lang J., Wooldridge M.* Boolean hedonic games / *Proc. of the 15th Internat. Conf. on the Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR-2016)*, 2016, 166–175.
118. *Elkind E., Lackner M.* Structure in dichotomous preferences / *Proc. of the 24th Internat. Joint Conf. on Artif. Intel. (IJCAI-2015)*, 2015. P. 2019–2025.
119. *Blin G., Rizzi R., Vialette S.* A faster algorithm for finding minimum Tucker submatrices. *Proceedings of the 6th Conf. on Computability in Europe (CiE'10)*, Ponta Delgada, 2010. P. 69–77.
120. *Safe M.D.* Circularly compatible ones, D-circularity, and proper circular-arc bi-graphs // *SIAM J. Discrete Math.* 2021. V. 35. No. 2. P. 707–751.
121. *Pe'er I., Pupko T., Shamir R., Sharan R.* Incomplete directed perfect phylogeny // *SIAM J. Comput.* 2004. V. 33. No. 3. P. 590–607.
122. *Terzopoulou Z., Karpov A., Obratzsova S.* Restricted domains of dichotomous preferences with possibly incomplete information / *Proc. of the 35th AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI 2021)*, 2021. P. 5726–5733.
123. *Brewbaker C.* A combinatorial interpretation of the poly-Bernoulli numbers and two Fermat analogues // *Integers.* 2008. V. 8. No. 1. A2.
124. *Weisstein E.W.* Stirling number of the second kind/ *MathWorld—A Wolfram Web Resource.* <https://mathworld.wolfram.com/StirlingNumberoftheSecondKind.html>
125. *Yang Y.* On the tree representations of dichotomous preferences / *Kraus S. Ed. Proc. of the Twenty-Eighth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-2019)*, 2019. P. 644–650.
126. *Ju H.-K., Seo S.* Enumeration of  $(0, 1)$ -matrices avoiding some  $2 \times 2$  matrices // *Discrete Math.* 2012. V. 312. No. 16. P. 2473–2481.

127. *Mattei N., Walsh T.* Preflib: A library of preference data / Proceedings of Third International Conference on Algorithmic Decision Theory (ADT 2013), Lecture Notes in Artificial Intelligence, 2013. P. 259–270.
128. *Boehmer N., Schaar N.* Collecting, classifying, analyzing, and using real-world elections. arXiv:2204.03589, 2022.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.*

Поступила в редакцию 14.05.2021

После доработки 03.04.2022

Принята к публикации 28.04.2022

## Нелинейные системы

© 2022 г. А.Н. ЖИРАБОК, д-р техн. наук (zhirabok@mail.ru),  
А.В. ЗУЕВ, канд. техн. наук (zuev@dvo.ru)  
(Дальневосточный федеральный университет, Владивосток;  
Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток),  
В.Ф. ФИЛАРЕТОВ, д-р техн. наук (filaretov@inbox.ru)  
(Институт автоматике и процессов управления ДВО РАН,  
Владивосток),  
А.Е. ШУМСКИЙ, д-р техн. наук (a.e.shumsky@yandex.con),  
КИМ ЧХУН ИР (kim.ci@dvfu.ru)  
(Дальневосточный федеральный университет, Владивосток)

### КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА ЖОРДАНА В ЗАДАЧАХ ДИАГНОСТИРОВАНИЯ И ОЦЕНИВАНИЯ<sup>1</sup>

Предлагается метод решения задач диагностирования и оценивания на основе канонической формы Жордана. Рассматриваются задачи построения диагностических наблюдателей, виртуальных датчиков, а также интервальных и скользящих наблюдателей. Алгоритмы решения указанных задач предназначены как для линейных, так и нелинейных систем при наличии внешних возмущений и шумов измерений. Показано, что использование канонической формы Жордана позволяет в ряде случаев уменьшить сложность наблюдателей и датчиков и упростить процедуру их синтеза по сравнению с идентификационной канонической формой. Изложенное иллюстрируется практическим примером.

*Ключевые слова:* динамические системы, каноническая форма Жордана, дефекты, диагностирование, оценивание.

DOI: 10.31857/S0005231022090021, EDN: AILGQC

#### 1. Введение и постановка задачи

Различные канонические формы (КФ) динамических систем играют важную роль в решении многих задач теории и практики, см., например, [1–3]. Они позволяют существенно упростить решение многих задач и получить простые алгоритмы их решения, что существенно для реализации этих алгоритмов средствами вычислительной техники. В частности, в задачах диагностирования и оценивания активно используется идентификационная КФ (ИКФ) [1, 4], позволяющая получить простые процедуры синтеза соответствующих наблюдателей. При этом устойчивость наблюдателя обеспечивается за счет обратной связи по сигналу невязки.

<sup>1</sup> Работа поддержана Российским научным фондом (проект № 22-29-01303).

Последние годы для решения задач построения так называемых интервальных наблюдателей стала активно применяться КФ Жордана [5, 6], которая ранее использовалась при анализе свойства самокоррекции сбоев [7]. Матрица, описывающая динамику системы и реализованная в жордановой КФ, при соответствующем выборе собственных чисел обеспечивает устойчивость наблюдателя и является метцлеровой, т.е. ее внедиагональные элементы неотрицательны. Эти свойства позволяют гарантировать, что интервальный наблюдатель в каждый момент времени вырабатывает оценку множества допустимых значений вектора состояния системы с неопределенностями.

Анализ жордановой КФ показал, что помимо гарантии устойчивости она позволяет упростить процедуру обеспечения нечувствительности наблюдателя к возмущениям и в ряде случаев уменьшить его размерность за счет отсутствия необходимости обеспечивать устойчивость специальными средствами. В работе разрабатываются методы применения этой КФ для решения задач построения диагностических и скользящих наблюдателей, виртуальных датчиков, а также интервальных наблюдателей в постановке более общей, нежели в [5, 6]. Указанные задачи решаются для класса систем, описываемых нелинейной моделью

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) + C\Psi(x(t), u(t)) + Dd(t) + L\rho(t), \\ y(t) &= Hx(t) + w(t), \end{aligned}$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^l$  — векторы состояния, управления и выхода;  $F$  и  $G$  — постоянные матрицы, описывающие линейную динамику;  $H$ ,  $C$ ,  $L$  и  $D$  — известные постоянные матрицы,  $d(t)$  — скалярная функция, описывающая дефекты: если они отсутствуют, то  $d(t) = 0$ , при их появлении  $d(t)$  становится неизвестной ограниченной функцией времени,  $\|d(t)\| \leq d_*$ ;  $\rho(t) \in \mathbb{R}^p$  описывает возмущения, действующие на систему, предполагается, что  $\rho(t)$  — неизвестная ограниченная функция времени,  $\|\rho(t)\| \leq \rho_*$ ;  $w(t) \in \mathbb{R}^l$  — неизвестная ограниченная функция времени, описывающая шумы измерений,  $\|w(t)\| \leq w_*$ ;  $\Psi(x, u)$  — нелинейная составляющая, представленная в виде

$$\Psi(x, u) = \begin{pmatrix} \varphi_1(A_1x, u) \\ \dots \\ \varphi_q(A_qx, u) \end{pmatrix},$$

$A_1, \dots, A_q$  — известные постоянные матрицы-строки,  $\varphi_1, \dots, \varphi_q$  — нелинейные функции, возможно, недифференцируемые. Предполагается, что функция  $C\Psi(x, u)$  удовлетворяет условию Липшица по аргументу  $x$ :

$$(1.2) \quad \|C(\Psi(x, u) - \Psi(x', u))\| \leq N\|x - x'\|,$$

где  $N > 0$ .

Влияния параметрических неопределенностей в статье не рассматривается, это предмет отдельного исследования. Остановимся вначале на классе линейных систем, когда  $C = 0$ .

## 2. Построение диагностического наблюдателя

В основе решения всех рассматриваемых задач лежит модель системы (1.1) минимальной размерности, нечувствительная к возмущению, которая при отсутствии дефектов, шумов и возмущений описывается уравнением

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= F_*x_*(t) + G_*u(t) + J_*y(t), \\ y_*(t) &= H_*x_*(t), \end{aligned}$$

где  $x_*(t) \in \mathbb{R}^k$ ,  $k < n$  — размерность модели,  $y_* \in \mathbb{R}$ ,  $F_*$ ,  $G_*$ ,  $J_*$ ,  $H_*$  — матрицы, подлежащие определению. При решении задачи диагностирования будем предполагать, что  $w(t) = 0$ ; присутствие в измерениях шумов может быть учтено использованием адаптивного порога независимо от вида применяемой КФ, поэтому в работе этот вопрос не обсуждается.

Будем полагать, что при отсутствии дефектов, шумов и возмущений справедливы равенства  $x_*(t) = \Phi x(t)$  и  $y_*(t) = R_*y(t)$ , где  $\Phi$  и  $R_*$  — некоторые постоянные матрицы. Известно [8], что они удовлетворяют условиям

$$(2.2) \quad \Phi F = F_*\Phi + J_*H, \quad R_*H = H_*\Phi, \quad \Phi G = G_*.$$

Критерии разрешимости этих уравнений приведены в [8].

Задача диагностирования включает в себя три подзадачи: обнаружение дефекта, поиск дефекта и его идентификация. Диагностический наблюдатель решает первую задачу путем формирования невязки  $r(t) = R_*y(t) - y_*(t)$ , равной нулю при отсутствии дефектов и возмущений; при появлении дефектов невязка становится отличной от нуля. Ниже решается задача обнаружения, идентификации посвящен раздел 5.

Для построения модели (2.1) матрицы  $F_*$  и  $H_*$  традиционно ищутся в ИКФ:

$$F_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad H_* = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0).$$

Это позволяет получить простые уравнения для определения матриц, описывающих модель (2.1) [1, 8], и обеспечить устойчивость наблюдателя путем введения обратной связи по сигналу невязки  $r(t)$  с матрицей  $K = (k_1 \ k_2 \ \dots \ k_k)^T$ , задавая собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , которые будем полагать разными и отрицательными.

В отличие от этого, в работе предлагается искать матрицу  $F_*$  в КФ Жордана, имеющую диагональный вид

$$(2.3) \quad F_* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

В принципе к такому виду модель, реализованная в ИКФ с обратной связью  $K$ , может быть приведена преобразованием подобия, матрица которого может быть составлена из собственных векторов матрицы  $F_* - KH_*$ . Известно, что преобразование подобия сохраняет собственные числа [9], поэтому полученный наблюдатель будет характеризоваться матрицей (2.3).

Предлагается обойтись без преобразования подобия, а сразу задавать матрицу  $F_*$  в жордановой форме (2.3). Уравнение  $\Phi F = F_*\Phi + J_*H$  в этом случае распадается на  $k$  независимых уравнений:

$$(2.4) \quad \Phi_i F = \lambda_i \Phi_i + J_{*i} H, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

где  $\Phi_i$  и  $J_{*i}$  —  $i$ -е строки матриц  $\Phi$  и  $J_*$  соответственно. Дополнительное требование  $\Phi_i L = 0$  — нечувствительность к возмущениям — учитывается следующим образом. Введем матрицу  $L_0$  максимального ранга, такую, что  $L_0 L = 0$ , тогда  $\Phi = S L_0$  для некоторой матрицы  $S$ . В результате уравнение (2.4) может быть записано в виде

$$(2.5) \quad (S_i \quad - J_{*i}) \begin{pmatrix} L_0(F - \lambda_i I_n) \\ H \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

где  $I_n$  — единичная  $n \times n$ -матрица,  $S_i$  —  $i$ -я строка матрицы  $S$ . Это уравнение разрешимо, если

$$\text{rank} \begin{pmatrix} L_0(F - \lambda_i I_n) \\ H \end{pmatrix} < \text{rank}(L_0(F - \lambda_i I_n)) + \text{rank}(H).$$

Матрицы  $R_*$  и  $H_*$  определяются из уравнения  $R_* H = H_* \Phi$ , записанного в виде

$$(2.6) \quad (R_* \quad - H_*) \begin{pmatrix} H \\ \Phi \end{pmatrix} = 0,$$

которое разрешимо, когда выполняется ранговое неравенство

$$(2.7) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} < \text{rank}(\Phi) + \text{rank}(H).$$

Задавая конкретные значения  $\lambda_i < 0$ , из уравнения (2.5) необходимо, прежде всего, найти такую строку  $\Phi_1 = S_1 L_0$  матрицы  $\Phi$ , для которой выполняется условие чувствительности к дефекту  $\Phi_1 D \neq 0$ . Затем найти минимальное число строк  $\Phi_i$ , для которых вместе с  $\Phi_1$  выполняется условие (2.7), при этом удаление каждой такой строки из проверки (2.7) нарушает это условие. Матрицы  $J_*$ ,  $R_*$  и  $H_*$  определяются из (2.5) и (2.6) соответственно. Вычислением матрицы  $G_* = \Phi G$  заканчивается процесс построения наблюдателя, обладающего требуемыми показателями переходного процесса.

*Замечание 1.* Скалярный характер функции  $d(t)$  соответствует однократным дефектам, которые являются наиболее вероятными. Дефекты кратности  $s$  могут быть описаны векторной функцией  $d(t) \in \mathbb{R}^s$  и  $(n \times s)$ -матрицей  $D$ . В этом случае правило решения уравнения (2.5) модифицируется следующим образом: “Задавая конкретные значения  $\lambda_i < 0$ , из уравнения (2.5) необходимо найти такие строки  $\Phi_1, \dots, \Phi_c$  матрицы  $\Phi$ , что для каждого столбца  $D^{(i)}$  матрицы  $D$  найдется строка  $\Phi_j$  с условием  $\Phi_j D^{(i)} \neq 0$ . Затем найти минимальное число строк  $\Phi_z$ , для которых вместе с  $\Phi_1, \dots, \Phi_c$  выполняется условие (2.7).”

*Замечание 2.* Если уравнение (2.5) или (2.6) не имеет решений, наблюдатель, не чувствительный к возмущениям, не может быть построен, в этом случае необходимо обратиться к робастным методам, описанным в разделе 7.

### 3. Построение виртуального датчика

Одним из препятствий на пути реализации методов диагностирования может быть недостаточное число датчиков, которыми оснащена диагностируемая система. Введение дополнительных датчиков приводит к дополнительным затратам и не всегда реализуемо на практике. Более перспективным является использование так называемых виртуальных датчиков [10, 11], которые строятся на основе наблюдателей Люенбергера и в работах [10, 11] имеют размерность, совпадающую с размерностью исходной системы. Следует отметить, что виртуальные датчики широко используются при решении различных практических задач [12–14].

В [15] задача построения виртуальных датчиков минимальной размерности, оценивающих заданные компоненты вектора состояния нелинейной системы, была решена на основе ИКФ. Решение задачи осуществлялось в три этапа: на первом строилась линейная модель, не чувствительная к возмущениям, далее проверялась возможность оценки заданных компонент, на последнем этапе обеспечивалась устойчивость наблюдателя.

Дальнейшего уменьшения размерности (по сравнению с достигнутой на основе ИКФ) можно добиться за счет использования жордановой КФ, автоматически обеспечивающей устойчивость. Предполагая, что  $w(t) = 0$  и  $d(t) = 0$ , рассмотрим более общую задачу оценки переменной  $z(t) = Mx(t)$  для заданной матрицы  $M$ , которую можно рассматривать как задачу построения виртуального датчика, формирующего переменную  $z(t)$ . Такой датчик задается в виде

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= F_*x_*(t) + G_*u(t) + J_*y(t), \\ z(t) &= H_zx_*(t) + Qy(t) \end{aligned}$$

в предположении, что  $\Phi L = 0$ , где  $H_z$  и  $Q$  — матрицы, подлежащие определению. Из  $z(t) = Mx(t)$  и (3.1) следует  $Mx(t) = H_zx_*(t) + Qy(t)$ , или

$$M = H_z\Phi + QH = \begin{pmatrix} H_z & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}.$$

Это уравнение имеет решение, если

$$(3.2) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ M \end{pmatrix}.$$

Значения  $\lambda_i < 0$  в уравнении (2.5) должны задаваться так, чтобы полученная в результате его решения матрица  $\Phi$  с минимальным числом строк удовлетворяла условию (3.2), после чего определяются матрицы  $H_z$  и  $Q$ . Построение виртуального датчика, обладающего требуемыми показателями переходного процесса, завершается определением матрицы  $G_* = \Phi G$ .

*Замечание 3.* Если  $w(t) \neq 0$ , точность оценивания уменьшается. В этом случае, а также когда решение уравнения (2.5) не удовлетворяет условию (3.2), верхнюю и нижнюю границы, в пределах которых могут находиться значения переменной  $z(t)$ , устанавливаются интервальным наблюдателем, рассматриваемым ниже.

#### 4. Построение интервального наблюдателя

В этом разделе решается задача построения интервальных наблюдателей для динамических систем с неопределенностями, описываемых линейными моделями, позволяющих оценить множество допустимых значений заданной линейной функции  $z(t) = Mx(t)$ . Отметим, что методы построения таких наблюдателей разработаны для широкого класса систем [16, 17]; обстоятельные обзоры по интервальным наблюдателям содержатся в [5, 18]. Из сказанного выше следует, что такие наблюдатели можно рассматривать как обобщение виртуальных датчиков, когда  $w(t) \neq 0$  или  $\Phi L \neq 0$ .

Требуется построить интервальный наблюдатель минимальной размерности, формирующий нижнюю  $\underline{z}(t)$  и верхнюю  $\bar{z}(t)$  границы переменной  $z(t) = Mx(t)$ , для которых справедливо неравенство  $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$  при всех  $t \geq 0$  и условии  $\underline{x}_0 \leq x(0) \leq \bar{x}_0$  для некоторых  $\underline{x}_0$  и  $\bar{x}_0$ . Здесь по аналогии с [5] для произвольных векторов  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$  и  $k \times k$ -матриц  $S^{(1)}$ ,  $S^{(2)}$  отношения  $x^{(1)} \leq x^{(2)}$  и  $S^{(1)} \leq S^{(2)}$  понимаются поэлементно. В [6] для интервальной оценки вектора  $x(t)$  было предложено предварительно построенный устойчивый наблюдатель преобразовать к жордановой КФ. В отличие от этого, матрица  $F_*$  сразу ищется в указанной форме.

Уравнение (2.5) в этом случае упрощается:

$$(4.1) \quad (\Phi_i - J_{*i}) \begin{pmatrix} F - \lambda_i I_n \\ H \end{pmatrix} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

что предусматривает случай  $\Phi L \neq 0$ , и модель (3.1) принимает вид

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= F_* x_*(t) + G_* u(t) + J_* H x(t) + L_* \rho(t), \\ z(t) &= H_z x_*(t) + Q y(t), \end{aligned}$$

где  $L_* = \Phi L$ .

Интервальный наблюдатель ищется в виде

$$\begin{aligned}
 \dot{\underline{x}}_*(t) &= F_*\underline{x}_*(t) + G_*u(t) + J_*y(t) - |J_*|E_k w_* - |L_*|E_k \rho_*, \\
 \dot{\bar{x}}_*(t) &= F_*\bar{x}_*(t) + G_*u(t) + J_*y(t) + |J_*|E_k w_* + |L_*|E_k \rho_*, \\
 \underline{z}(t) &= H_z \underline{x}_*(t) + Qy(t), \\
 \bar{z}(t) &= H_z \bar{x}_*(t) + Qy(t), \\
 \underline{x}_*(0) &= \underline{x}_{*0}, \quad \bar{x}_*(0) = \bar{x}_{*0},
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

где по предположению  $\underline{x}_{*0} \leq x_*(0) \leq \bar{x}_{*0}$ , матрица  $|A|$  состоит из абсолютных значений соответствующих элементов матрицы  $A$ ,  $E_k - k \times 1$ -матрица, составленная из единиц.

*Допущение.* Все элементы матрицы  $H_z$  положительны, т.е.  $H_z \geq 0$ .

*Теорема 1.* Пусть  $H_z \geq 0$  и  $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$ , тогда для интервального наблюдателя (4.3) выполняется соотношение  $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$ .

*Доказательство.* По аналогии с [5] введем ошибки оценивания

$$\begin{aligned}
 \underline{e}_*(t) &= x_*(t) - \underline{x}_*(t), \quad \bar{e}_*(t) = \bar{x}_*(t) - x_*(t), \\
 \underline{e}_z(t) &= z(t) - \underline{z}(t), \quad \bar{e}_z(t) = \bar{z}(t) - z(t).
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

Из  $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$  с очевидностью следует  $\underline{e}_*(0) \geq 0$  и  $\bar{e}_*(0) \geq 0$ . С учетом (4.2) и (4.3) для ошибок оценивания получаем дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned}
 \dot{\underline{e}}_*(t) &= F_*\underline{e}_*(t) + J_*(Hx(t) - y(t)) + L_*\rho(t) + |J_*|E_k w_* + |L_*|E_k \rho_* = \\
 &= F_*\underline{e}_*(t) - J_*w(t) + L_*\rho(t) + |J_*|E_k w_* + |L_*|E_k \rho_*, \\
 \dot{\bar{e}}_*(t) &= F_*\bar{e}_*(t) - J_*(Hx(t) - y(t)) - L_*\rho(t) + |J_*|E_k w_* + |L_*|E_k \rho_* = \\
 &= F_*\bar{e}_*(t) + J_*w(t) - L_*\rho(t) + |J_*|E_k w_* + |L_*|E_k \rho_*.
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

Отметим, что в (4.5)  $\pm J_*w(t) + |J_*|E_k w_* \geq 0$  и  $\pm L_*\rho(t) + |L_*|E_k \rho_* \geq 0$  при всех  $t \geq 0$  и внедиагональные элементы матрицы  $F_*$  неотрицательны; такая система называется монотонной, или неотрицательной [5]. Ее решения при  $\underline{e}_*(0) \geq 0$ ,  $\bar{e}_*(0) \geq 0$  будут поэлементно неотрицательными, т.е.  $\underline{e}_*(t) \geq 0$ ,  $\bar{e}_*(t) \geq 0$  для всех  $t \geq 0$  [5], откуда согласно (4.4) следует  $\underline{x}_*(t) \leq x_*(t) \leq \bar{x}_*(t)$ . Так как  $z(t) = H_z x_*(t) + Qy(t)$ , то из (4.4) имеем

$$\begin{aligned}
 \underline{e}_z(t) &= H_z x_*(t) + Qy(t) - (H_z \underline{x}_*(t) + Qy(t)) = H_z \underline{e}_*(t), \\
 \bar{e}_z(t) &= H_z \bar{x}_*(t) + Qy(t) - (H_z x_*(t) + Qy(t)) = H_z \bar{e}_*(t),
 \end{aligned}$$

откуда с учетом  $\underline{e}_*(t) \geq 0$ ,  $\bar{e}_*(t) \geq 0$  и допущения  $H_z \geq 0$  получаем  $\underline{e}_z(t) \geq 0$ ,  $\bar{e}_z(t) \geq 0$ , что эквивалентно доказываемому утверждению. Теорема доказана.

Таким образом, для построения интервального наблюдателя, оценивающего переменную  $z(t) = Mx(t)$ , необходимо найти такие решения уравнения (4.1), которые при минимальном  $k$  дают матрицу  $\Phi$ , удовлетворяющую условию (3.2), и вычислить матрицы  $J_*$ ,  $G_*$  и  $L_*$ .

*Замечание 4.* Как следует из (4.3), величина интервала  $(\underline{z}(t), \bar{z}(t))$  зависит от амплитуды возмущения и уровня шумов. С целью уменьшения этой величины матрицы  $\Phi$  и  $J_*$  следует определять из уравнения (2.5), которое гарантирует  $L_* = 0$ , или использовать робастное решение (см. раздел 7). Предполагая найденными значениями  $\underline{z}(t)$  и  $\bar{z}(t)$ , можно найти оценку переменной  $z(t)$  в виде  $\hat{z}(t) = 0,5(\underline{z}(t) + \bar{z}(t))$ .

Предложенный подход к получению интервальной оценки заданной переменной  $z(t) = Mx(t)$  в ряде случаев может быть применен к аналогичной оценке всего вектора состояния  $x(t)$  следующим образом. Не уменьшая степени общности, примем, что матрица  $H$  имеет максимальный ранг и

$$H = (H_0 \ 0), \quad y(t) = H_0 x^{(1)}(t) + w(t), \quad x = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix},$$

$H_0$  — невырожденная матрица. Определим

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \underline{y}(t) &= y(t) - E_l w_*, & \bar{y}(t) &= y(t) + E_l w_*, \\ \underline{x}^{(1)}(t) &= H_0^{-1} \underline{y}(t), & \bar{x}^{(1)}(t) &= H_0^{-1} \bar{y}(t). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \underline{e}^{(1)}(t) &= x^{(1)}(t) - \underline{x}^{(1)}(t) = H_0^{-1}(y(t) - w(t)) - H_0^{-1} \underline{y}(t) = H_0^{-1}(E_l w_* - w(t)), \\ \bar{e}^{(1)}(t) &= \bar{x}^{(1)}(t) - x^{(1)}(t) = H_0^{-1} \bar{y}(t) - H_0^{-1}(y(t) - w(t)) = H_0^{-1}(E_l w_* + w(t)). \end{aligned}$$

Полагая, что  $H_0^{-1} \geq 0$ , из  $E_l w_* \pm w(t) \geq 0$  получаем  $\underline{e}^{(1)}(t) \geq 0$  и  $\bar{e}^{(1)}(t) \geq 0$ , откуда следует  $\underline{x}^{(1)}(t) \leq x^{(1)}(t) \leq \bar{x}^{(1)}(t)$ .

Таким образом, переменная  $x^{(1)}(t)$  при условии  $H_0^{-1} \geq 0$  оценивается на основе (4.6), переменная  $x^{(2)}(t)$  может быть интервально оценена наблюдателем вида (4.3), при этом возмущение  $\rho(t)$  на оценку (4.6) влияния не оказывает.

*Замечание 5.* Условие  $H_0^{-1} \geq 0$  с очевидностью выполняется в практически важных случаях, когда компоненты вектора  $x^{(1)}(t)$  измеряются отдельными датчиками и  $H_0 = H_0^{-1} = I_l$ .

## 5. Построение скользящего наблюдателя

Известно, что скользящие наблюдатели позволяют решить задачу идентификации дефектов и вектора состояния в динамических системах. Методы построения таких наблюдателей рассмотрены в [19–27] для различных классов систем, а также для отказоустойчивого управления [28]. Во многих указанных работах для возможности построения скользящих наблюдателей на исходную систему накладываются различные ограничения, в частности, требуется, чтобы она была минимально фазовой или детектируемой и должно выполняться условие согласования. Наиболее слабые условия получены

в [29] на основе редуцированной (меньшей размерности) модели исходной системы, имеющей различную чувствительность к дефектам и возмущениям, и реализованной в виде ИКФ, за счет которой обеспечивается устойчивость. Предлагаемое ниже решение является развитием подхода [29] применительно к жордановой КФ; положим вначале, что  $w(t) = 0$ .

В [21] и аналогичных работах скользящий наблюдатель представляет собой композицию двух подсистем со следующими свойствами: функции  $d(t)$  и  $\rho(t)$  входят только в одну подсистему, выход  $y(t)$  совпадает с вектором состояния этой подсистемы, при этом вторая подсистема является устойчивой. Поскольку в жордановой КФ одномерные подсистемы независимы друг от друга, скользящий наблюдатель на ее основе будет также одномерным. Для его построения в уравнении (2.5) необходимо найти такое значение  $\lambda_1 < 0$  и строку  $\Phi_1 = S_1 L_0$ , для которой выполняются условия  $\Phi_1 = R_* H$  для некоторой матрицы  $R_*$  и  $\Phi_1 D \neq 0$ . Отметим, что это условия эквивалентны требованию согласования в виде  $\text{rank}(HD) = \text{rank}(D)$  [21].

Модель тогда будет описываться уравнениями

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= \lambda_1 x_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) + D_* d(t), \\ y_*(t) &= x_{*1}(t), \end{aligned}$$

где  $x_* = \Phi_1 x$ . Скользящий наблюдатель ищется в виде

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{x}}_*(t) &= \lambda_1 \hat{x}_*(t) + G_* u(t) + J_* y(t) - k_1 v(t), \\ \hat{y}_*(t) &= \hat{x}_*(t), \end{aligned}$$

где  $v(t) = \text{sign}(e(t))$ ,  $k_1 > 0$ ,  $e(t) = \hat{x}_*(t) - x_*(t)$ .

Ошибка оценивания  $e(t)$  с учетом (5.1) и (5.2) описывается уравнением

$$(5.3) \quad \dot{e}(t) = \lambda_1 e(t) - k_1 v(t) - D_* d(t).$$

Так как  $d(t)$  и  $v(t)$  — ограниченные функции и  $\|v(t)\| = 1$ , то

$$\|D_* d(t) + k_1 v(t)\| \leq g_0$$

для некоторого  $g_0$ . Известно тогда, что ошибка  $e(t)$  ограничена и  $\|e(t)\| \leq \delta$  для некоторого  $\delta > 0$ .

*Теорема 2. Наблюдатель (5.2) оценивает функцию  $d(t)$  в виде*

$$(5.4) \quad \hat{d}(t) = -k_1 D_*^{-1} v_{eq}(t),$$

где  $v_{eq}(t)$  — сигнал, представляющий среднее поведение разрывной функции  $v(t)$ . По аналогии с [21] в качестве  $v_{eq}(t)$  используется функция

$$v_{eq}(t) = \frac{e(t)}{|e(t)| + \varepsilon},$$

где  $\varepsilon$  — малое положительное число.

*Доказательство.* Покажем, что при соответствующем выборе коэффициента  $k_1$  получаем  $e = 0$  за конечное время, т.е. достигается скользящий режим. Рассмотрим функцию Ляпунова  $V = e^2$  и найдем ее производную, используя (5.3):

$$\dot{V} = 2e\dot{e} = 2e(\lambda_1 e - k_1 v - D_* d).$$

Так как  $v = \text{sign}(e)$ , то  $ek_1 v = k_1 |e|$  и

$$\dot{V} \leq 2|e|(-k_1 + \lambda_1 \delta + d_* \|D_*\|).$$

Если  $k_1$  удовлетворяет условию

$$(5.5) \quad k_1 > \lambda_1 \delta + d_* \|D_*\|,$$

то  $\dot{V} < 0$ , и достигается скользящий режим, т.е.  $e = \dot{e} = 0$  за конечное время. Из (5.3) с учетом скользящего режима получаем оценку (5.4). Теорема доказана.

*Замечание 6.* Согласно [26] необходимым и достаточным условием попадания системы на поверхность скольжения и возникновения скользящего режима за конечное время является отрицательность действительных частей корней ее характеристического уравнения, а поскольку  $\lambda_1 < 0$ , это условие с очевидностью выполняется. Удержание системы на этой поверхности обеспечивается условием  $\dot{V} < 0$  [19], которое гарантируется условием (5.5).

В случае, когда в измерениях присутствует шум  $w(t) \neq 0$ , главный результат остается прежним, но требование к величине коэффициента  $k_1$  ужесточается. В этом случае по аналогии с (4.5) уравнения (5.3) для ошибки оценивания  $e(t)$  дополняется слагаемым  $J_* w(t)$

$$(5.6) \quad \dot{e}(t) = \lambda_1 e(t) - k_1 v(t) - D_* d(t) + J_* w(t).$$

В результате в производной функции Ляпунова  $\dot{V}$  появляются дополнительный член

$$\dot{V} \leq 2|e|(-k_1 + \lambda_1 \delta + d_* \|D_*\| + w_* \|J_*\|)$$

и требование к коэффициенту  $k_1$  ужесточается

$$k_1 > \lambda_1 \delta + d_* \|D_*\| + w_* \|J_*\|.$$

Присутствие в (5.6) шумов приводит к тому, что оценка (5.4) дефекта становится приближенной

$$\hat{d}(t) \approx -k_1 D_*^{-1} v_{eq}(t).$$

## 6. Нелинейные системы

Если исходная система нелинейна с  $C \neq 0$ , к правой части модели (2.1) добавляется нелинейная составляющая

$$(6.1) \quad C_* \Psi_*(x_*, y, u) = \begin{pmatrix} \varphi_{i_1}(A_{*1,i_1}x_* + A_{*2,i_1}y, u) \\ \dots \\ \varphi_{i_k}(A_{*1,i_k}x_* + A_{*2,i_k}y, u) \end{pmatrix},$$

где  $A_{*1,i_1}, A_{*2,i_1}, \dots, A_{*1,i_k}, A_{*2,i_k}$  — матрицы, подлежащие определению,  $C_* = \Phi C$ ; через  $C_* \Psi_*$  обозначена функция  $C_* \Psi$ , в которой вектор  $x$  заменен на  $x_*$  и  $y$  на основе соотношения  $A_i x = A_{*1,i}x_* + A_{*2,i}y$ ,  $i = i_1, \dots, i_k$ . Функции  $\varphi_j$  — это функции из множества  $\{\varphi_i\}$  раздела 1, номера  $j = i_1, \dots, i_k$  совпадают с номерами ненулевыми столбцов матрицы  $C_*$ .

Уравнения (2.2) дополняются соотношениями

$$(6.2) \quad \Phi C = C_*, \quad A_i = (A_{*1,i} \quad A_{*2,i}) \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}, \quad i = i_1, \dots, i_k.$$

Второе из них выполняется, если

$$(6.3) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ A_i \end{pmatrix}, \quad i = i_1, \dots, i_k.$$

Для построения нелинейной составляющей модели найдем из (2.5) минимальное число строк матрицы  $\Phi$ , положим  $C_* := \Phi C$ , найдем произведение  $C_* \Psi(x, u)$  и с учетом (6.1) проверим условие (6.3). При его выполнении из (6.2) определяются матрицы  $A_{*1,i}$  и  $A_{*2,i}$ ,  $i = i_1, \dots, i_k$ . Если (6.3) несправедливо, находится другое решение уравнения (2.5); возможно, для этого потребуется увеличить значение  $k$ . Если увеличение размерности не приводит к результату, то не чувствительной к возмущениям модели не существует. В таких случаях можно использовать робастный подход, обеспечивающий минимальную чувствительность к возмущениям, детально рассмотренный в [30] и коротко изложенный в разделе 7.

Одна из главных проблем здесь — обеспечение устойчивости наблюдателя, соответствующие методы предложены, в частности, в [3]. Для конкретности рассмотрим только один случай, когда добавление нелинейной составляющей не сказывается на устойчивости, обеспечиваемой жордановой матрицей  $F_*$ . Введем ошибку  $e_*(t) = \Phi x(t) - x_*(t)$  и детально рассмотрим случай, когда функция  $\Psi$  содержит одну нелинейность  $\varphi(Ax, u)$ , которую с учетом (6.2) можно записать в виде  $\varphi(Ax, u) = \varphi(A_{*1}\Phi x + A_{*2}y, u)$ . Тогда из (1.1) и модели (2.1) с добавленной к ней нелинейной составляющей (6.1) при  $\Psi(x, u) = \varphi(Ax, u)$  следует

$$\begin{aligned} \dot{e}_* &= F_* e_* + C_* \varphi(Ax, u) - C_* \varphi(A_{*1}x_* + A_{*2}y, u) = \\ &= F_* e_* + C_* \varphi(A_{*1}\Phi x + A_{*2}y, u) - C_* \varphi(A_{*1}x_* + A_{*2}y, u). \end{aligned}$$

Так как функция  $C\Psi(x, u) = C\varphi(A_{*1}\Phi x + A_{*2}y, u)$  удовлетворяет условию (1.2), то и  $C_*\varphi(Ax, y, u)$  удовлетворяет этому же условию:

$$\|C_*(\varphi(Ax, u) - \varphi(A_{*1}x_* + A_{*2}y, u))\| \leq N_*\|e_*\|,$$

где  $N_* > 0$ . Очевидно, что этот результат может быть распространен на случай произвольной функции  $\Psi$ .

Из устойчивости матрицы  $F_*$  следует, что существуют симметрические положительно-определенные матрицы  $P_*$  и  $W_*$  такие, что  $F_*^T P_* + P_* F_* = -W_*$ . В [3] рассмотрена функция Ляпунова  $V(t) = e_*^T(t)P_*e_*(t)$  и показано, что  $\dot{V}(t) < 0$ , т.е. наблюдатель устойчив, если

$$2N_*\lambda_{\max}(P_*) < \lambda_{\min}(W_*),$$

где  $\lambda_{\max}(P_*)$  и  $\lambda_{\min}(W_*)$  — максимальное и минимальное собственные числа матриц  $P_*$  и  $W_*$  соответственно. Это условие является достаточно консервативным, ему удовлетворяет небольшое число функций.

Рассмотренное требование устойчивости характерно для нелинейного диагностического наблюдателя и виртуального датчика. В случае скользящего наблюдателя нелинейная составляющая учитывается теми же методами, что и шумы измерений, с учетом условия (1.2); покажем это. Обозначив  $\Delta\Psi = \Psi_*(\hat{x}_*, y, u) - \Psi_*(x_*, y, u)$ , по аналогии можно получить

$$(6.4) \quad \|C_*(\Psi_*(\hat{x}_*, y, u) - \Psi_*(x_*, y, u))\| = \|C_*\Delta\Psi\| \leq N_*\|e\|,$$

$$e = \hat{x}_* - x_*, \quad N_* > 0.$$

С учетом нелинейных членов уравнения (5.3) для ошибки оценивания  $e(t)$  дополняется слагаемым  $C_*\Delta\Psi$ :

$$\dot{e}(t) = \lambda_1 e(t) - k_1 v(t) - D_* d(t) + J_* w(t) + C_* \Delta\Psi.$$

В результате в производной функции Ляпунова  $\dot{V}$  появляется дополнительный член, обусловленный неравенством (6.4):

$$\dot{V} \leq 2|e|(-k_1 + \lambda_1 \delta + d_* \|D_*\| + w_* \|J_*\| + \delta N_*)$$

и требование к коэффициенту  $k_1$  ужесточается:

$$k_1 > \lambda_1 \delta + d_* \|D_*\| + w_* \|J_*\| + \delta N_*.$$

Для интервального наблюдателя требование устойчивости сохраняется и добавляется новое — функция  $C_*\Psi_*(x_*, y, u)$  должна быть монотонной по переменной  $x_*$  в смысле введенного выше отношения “ $\leq$ ”:

$$x_* \leq x'_* \Rightarrow C_*\Psi_*(x_*, y, u) \leq C_*\Psi_*(x'_*, y, u).$$

Это необходимо для доказательства того, что  $\underline{e}_*(t) \geq 0$ ,  $\bar{e}_*(t) \geq 0$  для всех  $t \geq 0$ .

Поскольку в общем случае переменная  $y(t)$ , подверженная шумам измерений, входит в нелинейную составляющую, в правые части уравнения (4.3) дополнительно к члену  $\pm|J_*|E_k w_*$  добавится слагаемое  $\pm k_* w_*$ , где коэффициент  $k_*$  может быть подобран в процессе моделирования.

## 7. Робастное решение

Если уравнение (2.5) не имеет решений или условие (2.7) ((3.2) для задач построения виртуальных датчиков и интервальных наблюдателей) не выполняется, то модель, не чувствительная к возмущениям, не может быть построена, в этом случае необходимо обратиться к робастным методам. Применительно к ИКФ наиболее популярный из них детально описан в [30]. Он сводится к минимизации нормы Фробениуса  $\|\Phi L\|_F$ , описывающей вклад возмущения в невязку, и реализуется на основе сингулярного разложения некоторой матрицы, включающей в себя описание модели и возмущения; детали можно найти в [30].

При использовании жордановой КФ этот подход не может быть применен, поскольку строки матрицы  $\Phi$ , определяемые из уравнения (4.1), независимы друг от друга. При решении задач построения диагностических наблюдателей из уравнения (4.1) необходимо найти минимальное число строк  $\Phi_i$  и  $J_{*i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , матриц  $\Phi$  и  $J_*$  соответственно, таких, чтобы удовлетворялось условие (2.7) и хотя бы для одной строки  $\Phi_i$  выполнялось  $\Phi_i D \neq 0$  — условие чувствительности к дефекту. Подбирать их следует так, чтобы при наличии нескольких вариантов выбор делался исходя из минимизации нормы  $\|\Phi_i L\|_F$ . Для построения виртуальных датчиков и интервальных наблюдателей требований меньше — должно выполняться только условие (3.2).

Таким образом, простота учета требования нечувствительности к возмущениям в виде условия (2.5) для жордановой КФ оборачивается более сложной процедурой минимизации вклада возмущения в модель, когда условие  $\Phi L = 0$  не выполняется. Более того, жорданова КФ ограничивает возможности такой минимизации. Анализ показывает, что в этом случае предпочтительнее использовать ИКФ ценой некоторого увеличения размерности модели (2.1), что позволяет более эффективно минимизировать вклад возмущения в модель. Сказанное не касается задачи построения интервальных наблюдателей, поскольку здесь реализация модели в ИКФ и последующее ее преобразование к жордановой КФ может заметно увеличить величину вклада возмущения.

## 8. Практический пример

Рассмотрим нелинейную систему

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= a_1 u_1 / \vartheta_1 - a_2 a_4 \sqrt{x_1 - x_2}, \\
 \dot{x}_2 &= a_3 u_2 / \vartheta_2 + a_2 a_4 \sqrt{x_1 - x_2} - a_5 \sqrt{x_2 - x_3} + \rho_1, \\
 \dot{x}_3 &= a_5 \sqrt{x_2 - x_3} - a_6 \sqrt{x_3} - \vartheta_7 + \rho_2, \\
 y_1 &= x_2 + w_1, \quad y_2 = x_3 + w_2,
 \end{aligned}
 \tag{8.1}$$

где  $a_4 = \vartheta_4 \sqrt{2\vartheta_8} / \vartheta_1$ ,  $a_5 = \vartheta_5 \sqrt{2\vartheta_8} / \vartheta_2$ , и  $a_6 = \vartheta_6 \sqrt{2\vartheta_8} / \vartheta_3$ . Приведенные уравнения описывают известную трехтанковую систему (рис. 1), где  $x_1, x_2, x_3$  —

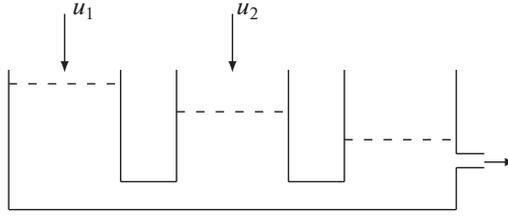


Рис. 1. Трехтанковая система.

уровни жидкости в танках. Система состоит из трех танков сечением  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$  и  $\vartheta_3$  соответственно. Танки соединяются трубами с сечениями  $\vartheta_4$  и  $\vartheta_5$ . Жидкость втекает в первый и второй танки и вытекает из третьего по трубе сечения  $\vartheta_6$ , расположенной на высоте  $\vartheta_7$ ;  $\vartheta_8$  — гравитационная постоянная. Уровни жидкости в танках  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  соответственно. Для простоты примем  $a_1 = a_2 = \dots = a_6 = 1$ ,  $\vartheta_7 = 0$ ;  $|\rho_1| \leq \rho_{*1}$ ,  $|\rho_2| \leq \rho_{*2}$ ,  $|w_1| \leq w_{*1}$ ,  $|w_2| \leq w_{*2}$ . Начальные условия и управление предполагаются таковыми, что  $x_1(t) \geq x_2(t) \geq x_3(t) \geq 0$  при всех  $t \geq 0$ .

Ясно, что  $F = 0$  для (8.1), и непосредственно применить рассмотренный подход невозможно. Для преодоления этой трудности преобразуем (8.1) введением формальных членов  $-(x_1 - x_2) + (x_1 - x_2)$ ,  $((x_1 - x_2) - (x_2 - x_3)) - ((x_1 - x_2) - (x_2 - x_3))$  и  $(x_2 - x_3 - x_3) - (x_2 - x_3 - x_3)$  в первое, второе и третье уравнения соответственно. Слагаемое  $-(x_1 - x_2)$  добавляется к линейной части,  $(x_1 - x_2)$  — к нелинейной; остальные члены рассматриваются аналогично. В результате система описывается следующими матрицами и нелинейностями:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi(x) = \begin{pmatrix} -\sqrt{A_1 x} + A_1 x \\ -\sqrt{A_2 x} + A_2 x \\ -\sqrt{A_3 x} + A_3 x \end{pmatrix},$$

$$A_1 = (1 \ -1 \ 0), \quad A_2 = (0 \ 1 \ -1), \quad A_3 = (0 \ 0 \ 1).$$

Построим виртуальный датчик на основе жордановой КФ, оценивающий переменную  $z(t) = x_1(t)$ . В этом случае

$$M = (1 \ 0 \ 0), \quad L_0 = (1 \ 0 \ 0).$$

Уравнение (2.5) принимает вид

$$(S_i - J_{*i}) \begin{pmatrix} -1 - \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

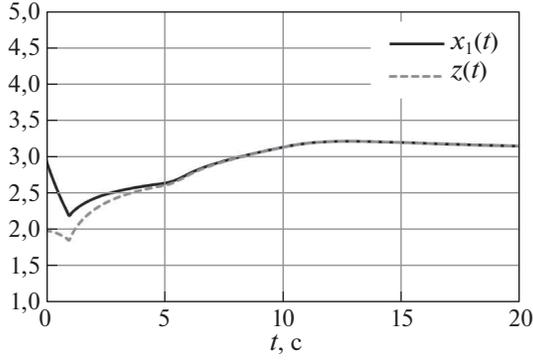


Рис. 2. Графики функций  $x_1(t)$  и  $z(t)$ .

Примем  $\lambda = -1$ , тогда  $S = J_* = (1 \ 0)$ , что дает  $\Phi = (1 \ 0 \ 0)$  и  $G_* = (1 \ 0)$ . Нетрудно проверить, что условие (3.2) выполняется и  $H_z = 1$ ,  $Q = 0$ . Далее получаем  $C_* = \Phi C = (1 \ 0 \ 0)$ ; условие (6.3) выполняется и уравнение (6.2) дает  $A_{*1} = (1 \ -1 \ 0)$ . После упрощений виртуальный датчик (3.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= u_1(t) - \sqrt{x_*(t) - y_1(t)}, \\ z(t) &= x_*(t). \end{aligned}$$

Хотя корень не является липшицевой функцией, обратную связь, описанную в разделе 6, можно не вводить, поскольку система (8.1) с очевидностью устойчива и построенный датчик также устойчив.

Моделирование производилось при  $u_1(t) = 1$ ,  $t \geq 1$ ,  $u_2(t) = 0,5$ ,  $t \geq 5$ ;  $\rho_1(t) = -0,3$ ,  $t \geq 6$ ,  $\rho_2(t) = -0,4$ ,  $t \geq 10$ ; шумы  $w_1(t)$  и  $w_2(t)$  принимались равными нулю. Результаты моделирования представлены на рис. 2, где представлены графики функций  $x_1(t)$  и  $z(t)$ .

Напомним, что в [15] виртуальный датчик для системы (8.1) был построен на основе ИКФ при  $\rho_1 = 0$  и он имел размерность 2. Можно показать, что в случае  $\rho_1 \neq 0$  такой датчик будет чувствителен к возмущению  $\rho_1$ . Этот пример демонстрирует явное преимущество жордановой КФ как в смысле уменьшения размерности датчика, так и с точки зрения чувствительности к возмущению.

В случае, когда присутствуют шумы  $w_1(t)$  и  $w_2(t)$ , предпочтительным является интервальный наблюдатель. Построим его для оценки вектора состояния  $x(t)$  при  $\rho_2 = 0$ . Из результатов раздела 4 следует, что можно принять  $x^{(1)} = (x_2, x_3)^T$ ,  $x^{(2)} = x_1$ . Поскольку  $H_0 = I_2$ , получаем

$$\begin{aligned} \underline{x}_2(t) &= y_1(t) - w_{*1}(t), & \bar{x}_2(t) &= y_1(t) + w_{*1}(t), \\ \underline{x}_3(t) &= y_2(t) - w_{*2}(t), & \bar{x}_3(t) &= y_2(t) + w_{*2}(t). \end{aligned}$$

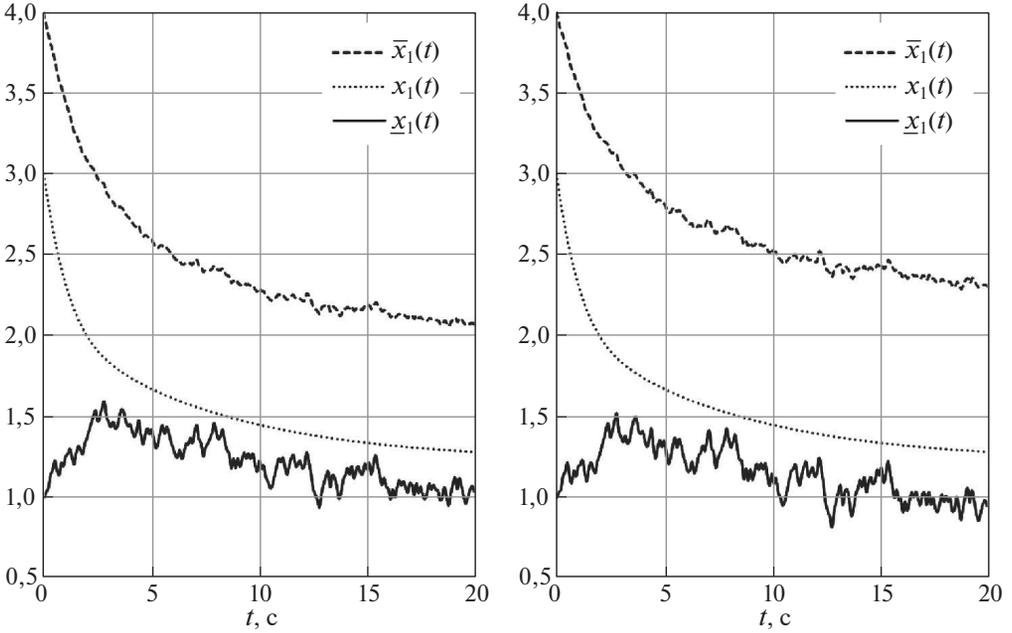


Рис. 3. Графики функций  $x_1(t)$ ,  $\underline{x}_1(t)$  и  $\bar{x}_1(t)$ .

Для интервальной оценки переменной  $x_1(t)$  примем  $M = (1 \ 0 \ 0)$ ,  $L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Уравнение (2.5) принимает вид

$$(S_i - J_{*i}) \begin{pmatrix} -1 - \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 - \lambda_i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

из которого следует, что приняв  $\lambda = -1$ , получаем  $k = 1$ ,  $S = J_* = (1 \ 0)$ , откуда  $\Phi = (1 \ 0 \ 0)$ ,  $G_* = (1 \ 0)$ ,  $L_* = 0$ ,  $C_* = (1 \ 0 \ 0)$ . Нетрудно видеть, что условие (6.3) выполняется и  $A_{*1} = (1 \ -1 \ 0)$ . После упрощений модель (4.2) принимает вид

$$\dot{x}_*(t) = u_1(t) - \sqrt{x_*(t) - y_1(t)}.$$

Поскольку функция “ $\sqrt{\phantom{x}}$ ” монотонна, интервальный наблюдатель для оценки переменной  $x_1(t)$  может быть построен; он принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}_1(t) &= u_1(t) - \sqrt{\underline{x}_1(t) - y_1(t)} - k_* w_{*1}(t), \\ \dot{\bar{x}}_1(t) &= u_1(t) - \sqrt{\bar{x}_1(t) - y_1(t)} + k_* w_{*1}(t). \end{aligned}$$

Отметим, что подход, рассмотренный в [5], даст наблюдатель размерности 6 и большую величину интервала, т.е. оценки более худшего качества,

поскольку в соответствующие выражения войдет возмущение  $\rho_1(t)$ , которое отсутствует в предлагаемом решении.

Моделирование производилось при  $u_1(t) = 0,5$ ,  $u_2(t) = 0,2$ , шумы  $w_1(t)$  и  $w_2(t)$  представляют собой случайные процессы. Результаты моделирования представлены на рис. 3, где представлены графики функций  $x_1(t)$ ,  $\underline{x}_1(t)$  и  $\bar{x}_1(t)$ , когда  $D[w_1] = 0,1$ ,  $k_*w_{*1} = 0,5$  и  $D[w_1] = 0,2$ ,  $k_*w_{*1} = 0,6$  соответственно.

## 9. Заключение

В работе была поставлена и решена задача построения средств диагностирования и оценивания на основе канонической формы Жордана. Были рассмотрены задачи построения диагностических наблюдателей, виртуальных датчиков, а также интервальных и скользящих наблюдателей. Предложенные алгоритмы решения указанных задач предназначены как для линейных, так и нелинейных задач при наличии внешних возмущений и шумов измерений. Показано, что использование канонической формы Жордана позволяет в ряде случаев уменьшить сложность наблюдателей и датчиков и упростить процедуру их синтеза при реализации требования нечувствительности к возмущениям. Наиболее эффективным по сравнению с классическим подходом является применение КФ Жордана к решению задач построения виртуальных датчиков и интервальных наблюдателей, поскольку она позволяет строить соответствующие средства минимальной размерности, нечувствительные или малочувствительные к внешним возмущениям, что дает возможность повысить точность оценок, формируемых датчиком, и уменьшить величину интервала для интервальных наблюдателей.

Определенным недостатком КФ Жордана является то, что процедура на ее основе предполагает перебор вариантов решения. Кроме того, для нее усложняется процедура минимизации вклада возмущения в модель, когда необходимо найти робастное решение. Более того, жорданова КФ ограничивает возможности такой минимизации. Анализ показывает, что в этом случае предпочтительнее использовать ИКФ ценой некоторого увеличения размерности модели, что позволяет более эффективно минимизировать вклад возмущения в модель.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мироновский Л.А.* Функциональное диагностирование динамических систем. М.; СПб.: МГУ-ГРИФ, 1998.
2. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
3. *Misawa E.A., Hedrick J.K.* Nonlinear observers – a state of the art. Survey // J. Dynamic Systems, Measurements and Control. 1989. V. 111. P. 344–352.
4. *Жирабок А.Н., Шумский А.Е., Павлов С.В.* Диагностирование линейных динамических систем непараметрическим методом // АиТ. 2017. № 7. С. 3–21.

- Zhirabok A., Shumsky A., Pavlov S.* Diagnosis of Linear Dynamic Systems by the Nonparametric Method // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 7. P. 1173–1188.
5. *Ефимов Д.В., Раисси Т.* Построение интервальных наблюдателей для динамических систем с неопределенностями // *АиТ.* 2016. № 2. С. 5–49.
- Efimov D., Raissi T.* Design of Interval State Observers for Uncertain Dynamical Systems // *Autom. Remote Control.* V. 77. No. 2. P. 191–225.
6. *Kolesov N., Gruzlikov A., Lukoyanov E.* Using fuzzy interacting observers for fault diagnosis in systems with parametric uncertainty // *Proc. XII-th Inter. Symp. Intelligent Systems, INTELS'16, 5–7 October 2016, Moscow, Russia.* P. 499–504.
7. *Жирабок А.Н.* Самокоррекция ошибок в дискретных динамических системах // *АиТ.* 2006. № 6. С. 41–53.
- Zhirabok A.* Error Selfcorrection in Discrete Dynamic Systems // *Autom. Remote Control.* 2006. No. 6. P. 936–948.
8. *Жирабок А.Н., Зуев А.В., Шумский А.Е.* Диагностирование линейных динамических систем: подход на основе скользящих наблюдателей // *АиТ.* 2020. № 2. С. 18–35.
- Zhirabok A., Zuev A., Shumsky A.* Diagnosis of Linear Dynamic Systems: an Approach Based on Sliding Mode Observers // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 2. P. 211–225
9. *Ланкастер П.* Теория матриц. М.: Наука, 1978.
10. *Blanke M., Kinnaert M., Lunze J., Staroswiecki M.* Diagnosis and Fault-Tolerant Control. Berlin: Springer-Verlag, 2006.
11. *Witczak M.* Fault Diagnosis and Fault Tolerant Control Strategies for Nonlinear Systems. Berlin: Springer, 2014.
12. *Ahmed Q., Bhatti A., Iqbal M.* Virtual sensors for automotive engine sensors fault diagnosis in second-order sliding modes // *IEEE Sensors J.* 2011. V. 11. P. 1832–1840.
13. *Heredia G., Ollero A.* Virtual sensor for failure detection, identification and recovery in the transition phase of a morphing aircraft // *Sensors.* 2010. V. 10. P. 2188–2201.
14. *Hosseinpoor Z., Arefi M., Razavi-Far R., Mozafari N., Hazbavi S.* Virtual sensors for fault diagnosis: a case of induction motor broken rotor bar // *IEEE Sensors J.* 2021. V. 21. P. 5044–5051.
15. *Жирабок А.Н., Ким Чхун Ир.* Виртуальные датчики в задаче функционального диагностирования нелинейных систем // *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2022. № 1. С. 40–48.
16. *Efimov D., Perruquetti W., Raissi T., Zolghadri A.* Interval observers for time-varying discrete-time systems // *IEEE Trans. Automatic Control.* 2013. V. 58. P. 3218–3224.
17. *Efimov D., Polyakov A., Richard J.* Interval observer design for estimation and control of time-delay descriptor systems // *Eur. J. Control.* 2015. V. 23. P. 26–35.
18. *Khan A., Xie W., Zhang L., Liu L.* Design and applications of interval observers for uncertain dynamical systems // *IET Circuits Devices Syst.* 2020. V. 14. P. 721–740.
19. *Уткин В.И.* Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974.
20. *Краснова С.А., Уткин В.А.* Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. М.: Наука, 2006.

21. *Edwards C., Spurgeon S., Patton R.* Sliding mode observers for fault detection and isolation // *Automatica*. 2000. V. 36. P. 541–553.
22. *Fridman L., Levant A., Davila J.* Observation of linear systems with unknown inputs via high order sliding-modes // *Int. J. Syst. Sci.* 2007. V. 38. P. 773–791.
23. *Yan X., Edwards C.* Nonlinear robust fault reconstruction and estimation using a sliding modes observer // *Automatica*. 2007. V. 43. P. 1605–1614.
24. *Shtessel Yu., Edwards C., Fridman L., Levant A.* Sliding Mode Control and Observation. N.Y.: Springer, 2014.
25. *Wang X., Tan C., Zhou D.* A novel sliding mode observer for state and fault estimation in systems not satisfying matching and minimum phase conditions // *Automatica*. 2017. V. 79. P. 290–295.
26. *Емельянов С.В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. М.: Наука, 1967.
27. *Жирабок А.Н., Зуев А.В., Сергиенко О., Шумский А.Е.* Идентификация дефектов в нелинейных динамических системах и их датчиках на основе скользящих наблюдателей // *АиТ*. 2022. № 2. С. 63–89.  
*Zhirabok A., Zuev A., Seriyenko O., Shumsky A.* Fault Identification in Nonlinear Dynamic Systems and Their Sensors Based on Sliding Mode Observers // *Autom. Remote Control*. 2022. No. 2. P. 214–236.
28. *Castillo I., Fridman L., Moreno J.* Super-twisting algorithm in presence of time and state dependent perturbations // *Int. J. Control*. 2018. V. 91. P. 2535–2548.
29. *Zhirabok A., Zuev A., Filaretov V., Shumsky A.* Sliding mode observers for fault identification in linear systems not satisfying matching and minimum phase conditions // *Archives of Control Sciences*. 2021. V. 31. № 2. P. 253–266.
30. *Жирабок А.Н., Шумский А.Е., Соляник С.П., Суворов А.Ю.* Метод построения нелинейных робастных диагностических наблюдателей // *АиТ*. 2017. № 9. С. 34–48.  
*Zhirabok A., Shumsky A., Solyanik S., Suworov A.* Design of Nonlinear Robust Diagnostic Observers // *Autom. Remote Control*. 2017. No 9. P. 1572–1584.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.*

Поступила в редакцию 19.02.2022

После доработки 15.05.2022

Принята к публикации 10.06.2022

© 2022 г. В.А. КАМЕНЕЦКИЙ, канд. физ.-мат. наук (vlakam@ipu.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

**ДИСКРЕТНЫЕ ПОПАРНО СВЯЗНЫЕ СИСТЕМЫ  
С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ И СИСТЕМЫ ЛУРЬЕ,  
КРИТЕРИЙ ЦЫПКИНА ДЛЯ СИСТЕМ  
С ДВУМЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ<sup>1</sup>**

Рассматриваются вопросы устойчивости дискретных систем с переключениями при любых законах переключения между линейными подсистемами. Среди таких систем выделяются системы, которые названы попарно связными. Для них получено достаточное частотное условие устойчивости. Для систем с переключениями, устойчивость которых эквивалентна абсолютной устойчивости систем Лурье с двумя нелинейностями, получено два достаточных условия и два критерия существования квадратичной функции Ляпунова. Эти условия состоят в проверке разрешимости специальных матричных неравенств, размерности которых существенно меньше размерности исходной системы матричных неравенств, определяющей необходимые и достаточные условия. Полученные условия сравниваются с условиями критерия Цыпкина и с необходимыми и достаточными условиями на примерах систем третьего и шестого порядков.

*Ключевые слова:* дискретные системы с переключениями, системы Лурье, устойчивость, функции Ляпунова, матричные неравенства.

**DOI:** 10.31857/S0005231022090033, **EDN:** AILKNJ

## 1. Введение

Интерес к системам с дискретным временем подтверждает тот факт, что большинство вопросов теории управления и теории устойчивости для систем с непрерывным временем и систем с дискретным временем рассматриваются параллельно [1–4]. Относительно недавно вопросы устойчивости дискретных систем рассматривались в [5–7]. Для упрощения условий существования квадратичной функции Ляпунова (КФЛ) в непрерывном случае вводится понятие попарно связанных систем с переключениями [8]. Здесь это понятие переносится на дискретные системы. Показывается, что динамика попарно связанных дискретных систем с переключениями может быть представлена динамикой

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым Президиумом Российской академии наук, № 7 “Новые разработки в перспективных направлениях энергетики, механики и робототехники”.

систем Лурье специального вида. В результате для таких систем Лурье с помощью  $S$ -процедуры [9] получено достаточное частотное условие существования КФЛ.

Задача устойчивости линейных дискретных систем с переключениями обобщает [7] известную задачу об абсолютной устойчивости дискретных систем управления с несколькими нестационарными нелинейностями. Здесь подробно рассматривается вопрос существования КФЛ для системы с переключениями между четырьмя подсистемами в случае, когда устойчивость этой системы эквивалентна абсолютной устойчивости системы Лурье с двумя нелинейностями из конечных секторов. Прежде всего для таких систем демонстрируется получение критерия Цыпкина без использования  $S$ -процедуры. Затем получен вариант критерия Цыпкина для систем Лурье, которые соответствуют попарно связным системам с переключениями.

Необходимые и достаточные условия существования КФЛ определяются разрешимостью специальной системы линейных матричных неравенств (ЛМН) — назовем ее исходной. Частотным условием критерия Цыпкина является критерий разрешимости специального матричного неравенства (МН) — назовем его МН Цыпкина. МН Цыпкина является ЛМН относительно входящих в него неизвестных, его разрешимость лишь достаточна для разрешимости исходной системы ЛМН, но его размерность практически в четыре раза меньше. В работе предлагаются четыре МН, условия разрешимости которых являются менее консервативными, чем критерий Цыпкина, а размерность существенно меньше, чем у исходной системы. Условия разрешимости двух из них являются лишь достаточными условиями существования КФЛ, условия двух других — необходимыми и достаточными. Области существования КФЛ, полученные с помощью новых достаточных условий, сравниваются с областями, полученными из разрешимости МН Цыпкина и исходной системы ЛМН, на примерах систем Лурье третьего и шестого порядков.

Объединяя перечисленные во введении вопросы, которые будут рассмотрены в статье, можно сказать, что целью работы является получение новых, более эффективных условий существования КФЛ, устанавливающих устойчивость для широкого класса систем с переключениями.

Изложение материала статьи организовано следующим образом. В разделе 2 вводится понятие попарно связных систем с переключениями и получено достаточное частотное условие существования КФЛ. В разделе 3 для систем с двумя нелинейностями критерий Цыпкина выводится без использования  $S$ -процедуры. Вопросы улучшения критерия Цыпкина для систем с переключениями между четырьмя подсистемами рассматриваются в разделе 4. В разделе 5 полученные в разделе 4 условия сравниваются с точки зрения сложности их проверки и приводится наиболее эффективное условие, являющееся критерием существования КФЛ. В разделе 6 обсуждаются результаты по всем рассмотренным примерам и приводятся численные результаты по четырем характерным случаям.

## 2. Попарно связные дискретные системы с переключениями

Рассматриваются линейные дискретные системы с переключениями

$$(2.1) \quad x(t+1) = A(t)x(t), \quad A(t) \in \overline{A} = \{A_1, \dots, A_N\},$$

где  $A_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $A(t) : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \overline{A}$  — отображение из множества  $\mathbb{Z}_+$  неотрицательных целых чисел в  $\overline{A}$ . Все матрицы  $A_s$  предполагаются устойчивыми (по Шуру), т.е.  $r(A_s) < 1$ , где  $r(A_s)$  — спектральный радиус матрицы  $A_s$  [10],  $s = \overline{1, N}$ .

Понятие связной дискретной системы с переключениями формулируется [7] в терминах теории графов. Каждой матрице  $A_s$  из системы (2.1) ставится в соответствие вершина графа. Две вершины графа соединяются ребром, если разность матриц, которым соответствуют эти вершины, имеет вид  $bc^\top$ , где  $b, c \in \mathbb{R}^n$ , т.е. ранг матрицы разности равен 1. Система (2.1) называется связной [7], если соответствующий ей граф является связным. Связную систему (2.1) будем называть попарно связной, если каждая пара вершин из соответствующего графа соединена ребром этого графа. В этом случае множество матриц  $\overline{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$  также будем называть попарно связным. Отметим, что определения связной и попарно связной систем с дискретным временем полностью совпадают с соответствующими определениями систем с переключениями с непрерывным временем [8].

Как уже отмечалось [1, 2, 7], устойчивость системы (2.1) при любых  $A(t)$  указанного вида эквивалентна устойчивости разностного включения

$$(2.2) \quad x(t+1) \in F(x(t)), \quad F(x) = \{y : y = Ax, A \in \text{conv} \overline{A}\},$$

где  $\text{conv} \overline{A}$  — выпуклый многогранник в линейном пространстве  $\mathbb{R}^{n \times n}$  матриц порядка  $n$ . Будем считать, что матрицы  $\{A_1, \dots, A_N\}$  являются крайними точками множества  $\text{conv} \overline{A}$ , т.е. вершинами этого многогранника.

Попарно связное множество матриц  $\overline{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$  допускает одно из двух представлений [8]:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} A_1 = A, \quad A_{s+1} = A + bc_s^\top, \quad b, c_s \in \mathbb{R}^n, \quad s = \overline{1, N-1}, \\ A_1 = A, \quad A_{s+1} = A + b_s c^\top, \quad b_s, c \in \mathbb{R}^n, \quad s = \overline{1, N-1}. \end{aligned}$$

Пусть в попарно связной системе (2.1) матрицы  $A_s$  определяются соотношением (2.3), тогда многозначное отображение  $F(x)$ , определяющее разностное включение (2.2), имеет вид

$$(2.4) \quad F(x) = \left\{ y : y = Ax + \langle c, x \rangle \sum_{s=1}^{N-1} \lambda_s b_s, \sum_{s=1}^{N-1} \lambda_s \leq 1, \lambda_s \geq 0, s = \overline{1, N-1} \right\},$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$ .



В матричной форме система (2.6) имеет вид

$$(2.8) \quad x(t+1) = Ax(t) + B\varphi,$$

где  $B = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{N-1})$ , и  $\varphi^\top = (\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_{N-1})$ . Неравенство на первую разность  $\Delta v(x(t)) = x^\top(t+1)Lx(t+1) - x^\top(t)Lx(t)$  функции Ляпунова  $v(x) = x^\top Lx$  вдоль решений системы (2.8) имеет вид

$$(2.9) \quad \Delta v(x, \varphi) = (Ax + B\varphi)^* L(Ax + B\varphi) - x^* Lx < 0$$

и должно выполняться при всех  $(x, \varphi) \neq 0$ , удовлетворяющих (2.5). В соответствии с  $S$ -процедурой составим квадратичную форму

$$(2.10) \quad (Ax + B\varphi)^* L(Ax + B\varphi) - x^* Lx + \sum_{s=1}^{N-1} \tau_s \varphi_s \left( \langle c, x \rangle - \sum_{q=1}^s \varphi_q \right),$$

где  $\tau_s > 0$  — неизвестные параметры,  $s = \overline{1, N-1}$ . Функция ограничений

$$F(x, \varphi) = \sum_{s=1}^{N-1} \tau_s \varphi_s \left( \langle c, x \rangle - \sum_{q=1}^s \varphi_q \right)$$

может быть записана в матричной форме

$$(2.11) \quad F(x, \varphi) = \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 0 & C\tau/2 \\ \tau C^\top/2 & -\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix},$$

где

$$\tau = \text{diag}\{\tau_1, \dots, \tau_{N-1}\}, \quad C = \underbrace{\begin{pmatrix} c & c & \dots & c \end{pmatrix}}_{N-1},$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2/2 & \dots & \tau_{N-1}/2 \\ \tau_2/2 & \tau_2 & \dots & \tau_{N-1}/2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{N-1}/2 & \tau_{N-1}/2 & \dots & \tau_{N-1} \end{pmatrix}.$$

В новых обозначениях отрицательная определенность формы (2.10) эквивалентна МН

$$(2.12) \quad \begin{pmatrix} A^\top LA - L & A^\top LB + C\tau/2 \\ B^\top LA + \tau C^\top/2 & B^\top LB - \Gamma \end{pmatrix} < 0.$$

Из обобщенной леммы Калмана – Сеге – Попова [12, 13] условия разрешимости (2.12) определяются в форме частотного неравенства. В результате аналогом теоремы 3 [8] в дискретном случае будет следующая

*Теорема 1. Пусть матрица  $A$  устойчива ( $r(A) < 1$ ) и существуют числа  $\tau_s > 0$ ,  $s = \overline{1, N-1}$ , такие что  $\Gamma > 0$  и частотное неравенство*

$$\Gamma + \operatorname{Re} \left[ \tau C^\top (A - \lambda E_n)^{-1} B \right] > 0$$

*выполняется при всех  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $|\lambda| = 1$ , где  $E_n$  — единичная ( $n \times n$ )-матрица ( $\operatorname{Re} W = (W + W^*)/2$ ,  $W^* = \overline{W}^\top$  — эрмитово сопряженная к  $W$ ). Тогда попарно связанная система (2.1), (2.3) имеет ОКФЛ (система (2.7) разрешима, система (2.1) устойчива).*

### 3. Системы с переключениями между четырьмя подсистемами. Критерий Цыпкина

Проблема существования ОКФЛ для систем (2.1) с переключениями между двумя или тремя подсистемами подробно рассмотрена в [7]. В случае  $N = 4$  связанные системы (2.1) могут быть двух различных типов. Системы этих двух типов отличаются друг от друга видом соответствующих им графов. Описание обоих этих типов систем с переключениями в дискретном случае полностью совпадает с соответствующим описанием, приведенным в [14] для непрерывного случая. Как и в [14], здесь ограничимся рассмотрением системы (2.1), устойчивость которой эквивалентна абсолютной устойчивости системы управления с двумя нестационарными нелинейностями из конечных секторов [12, 13]. Такая система управления описывается системой Лурье (2.8), в которой  $B = (b_1 \ b_2)$ , т.е. системой

$$(3.1) \quad x(t+1) = Ax(t) + \sum_{s=1}^2 b_s \varphi_s(t, \sigma_s), \quad \sigma_s = \langle c_s, x \rangle,$$

где  $\varphi_s(t, \sigma_s)$  удовлетворяют при всех  $\sigma_s = \langle c_s, x \rangle$  и  $t > 0$  стандартным секторным ограничениям:

$$(3.2) \quad 0 \leq \varphi_s(t, \sigma_s) / \sigma_s \leq 1, \quad \sigma_s = \langle c_s, x \rangle, \quad s = 1, 2.$$

Действительно, абсолютная устойчивость такой системы Лурье эквивалентна [15] устойчивости разностного включения (2.2), в котором матрицы  $A_s$ ,  $s = \overline{1, 4}$ , определяются соотношениями

$$(3.3) \quad A_1 = A, \quad A_2 = A + b_1 c_1^\top, \quad A_3 = A + b_2 c_2^\top, \quad A_4 = A + b_1 c_1^\top + b_2 c_2^\top, \\ b_s, c_s \in \mathbb{R}^n.$$

Таким образом, объектом исследования в этом разделе является устойчивость системы (2.1), определяемой матрицами (3.3). Очевидно, такая система с переключениями будет связанной. Система ЛМН (2.7), определяющая существование ОКФЛ для этой системы, имеет вид

$$(3.4) \quad I_s = A_s^\top L A_s - L < 0, \quad s = \overline{1, 4}.$$

В [7] показано, что связной системе с переключениями (2.1) соответствует связная система МН (2.7). Метод получения одного результирующего неравенства, эквивалентного исходной связной системе МН, приводится в [7, 11]. К сожалению, форма этого результирующего неравенства для системы (2.7) в случае  $N > 2$  не позволяет получить условия его разрешимости в форме частотного критерия. Поэтому система неравенств (2.7) предварительно приводится в [11] к виду, характерному для непрерывного случая.

Метод получения результирующего неравенства опирается на следующее утверждение (теорема 1 из [7]).

*Теорема 2. Для выполнения системы двух МН*

$$I_1 < 0, \quad I_2 < 0, \quad (I_2 - I_1 = Q = pq^\top + qp^\top, \quad p, q \in \mathbb{R}^n),$$

*необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число  $\tilde{\varepsilon} > 0$ , при котором выполнено одно неравенство*

$$I_1 + Q^+(\tilde{\varepsilon}) = I_2 + Q^-(\tilde{\varepsilon}) < 0, \quad Q^\pm(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2} u^\pm (u^\pm)^\top, \quad u^\pm = p \pm q/\varepsilon^2.$$

В [14] показывается, как с помощью теоремы 2 получить достаточные условия существования ОКФЛ для непрерывного варианта системы (2.1) с матрицами (3.3), так чтобы эти условия совпадали с круговым критерием абсолютной устойчивости систем управления с двумя нелинейностями. Здесь рассмотрим получение с помощью теоремы 2 достаточных условий разрешимости системы (3.4) в виде частотного критерия, совпадающего с известным критерием Цыпкина абсолютной устойчивости дискретных систем управления с двумя нелинейностями. Одновременно эти условия служат достаточными условиями существования ОКФЛ для системы (2.1) с матрицами (3.3). Под критерием Цыпкина абсолютной устойчивости дискретных систем управления с несколькими нелинейностями здесь понимается достаточное частотное условие существования для таких систем КФЛ, которое получено с использованием  $S$ -процедуры и обобщенной леммы Калмана – Сеге – Попова [12, 13]. Достаточность объясняется ущербностью  $S$ -процедуры в этом случае. Заметим, что дискретный случай гораздо сложнее непрерывного, поскольку МН в (3.4) зависят от  $A_s$  квадратично, а в непрерывном случае эта зависимость линейна.

Коротко напомним рассуждения, основанные на  $S$ -процедуре и приводящие к критерию Цыпкина. Секторные ограничения (3.2) эквивалентны квадратичным ограничениям:

$$(3.5) \quad F_s(x, \varphi_s) = \varphi_s(\langle c_s, x \rangle - \varphi_s) \geq 0, \quad s = 1, 2.$$

Для первой разности функции Ляпунова  $v(x) = x^\top Lx$  в силу (2.8) имеем то же неравенство (2.9), в котором  $B = (b_1 \ b_2)$  и которое должно выполняться при любых  $(x, \varphi) \neq 0$ , удовлетворяющих (3.5). В результате  $S$ -процедуры

получим квадратичную форму в расширенном пространстве

$$(3.6) \quad (Ax + B\varphi)^\top L(Ax + B\varphi) - x^\top Lx + \sum_{s=1}^2 \tau_s \varphi_s (\langle c_s, x \rangle - \varphi_s),$$

где  $\tau_1 > 0$  и  $\tau_2 > 0$  — неизвестные параметры. Функция ограничений  $F(x, \varphi) = \tau_1 F_1(x, \varphi_1) + \tau_2 F_2(x, \varphi_2)$  может быть представлена выражением (2.11), в котором

$$(3.7) \quad \Gamma = \tau = \text{diag}\{\tau_1, \tau_2\}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

В обозначениях (3.7) отрицательная определенность формы (3.6) эквивалентна МН (2.12). Далее покажем, как это неравенство можно получить с помощью теоремы 2.

Матрица разности  $I_2 - I_1$  имеет вид

$$(3.8) \quad I_2 - I_1 = p_1 q_1^\top + q_1 p_1^\top, \quad p_1 = A^\top L b_1 + (\delta_{11}/2)c_1, \quad q_1 = c_1,$$

где  $\delta_{11} = b_1^\top L b_1$ . Аналогично,

$$(3.9) \quad I_4 - I_3 = p_2 q_2^\top + q_2 p_2^\top, \quad p_2 = A^\top L b_1 + (\delta_{11}/2)c_1 + \delta_{12}c_2, \quad q_2 = c_1,$$

где  $\delta_{12} = \delta_{21} = b_1^\top L b_2 = b_2^\top L b_1$ . Для получения условий разрешимости (3.4), совпадающих с критерием Цыпкина, применим теорему 2 сначала к первой, а затем ко второй паре неравенств из (3.4), получим, что система (3.4) разрешима тогда и только тогда, когда существуют  $\varepsilon_1 > 0$  и  $\varepsilon_2 > 0$  такие, что разрешима система из двух МН

$$(3.10) \quad \tilde{I}_1 = I_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^+(u_1^+)^\top < 0, \quad \tilde{I}_2 = I_3 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} u_2^+(u_2^+)^\top < 0,$$

где

$$u_1^+(\varepsilon_1) = A^\top L b_1 + \left( \frac{\delta_{11}}{2} + \frac{1}{\varepsilon_1^2} \right) c_1,$$

$$u_2^+(\varepsilon_2) = A^\top L b_1 + \left( \frac{\delta_{11}}{2} + \frac{1}{\varepsilon_2^2} \right) c_1 + \delta_{12}c_2.$$

Ключевая идея последующего анализа состоит в том, чтобы перейти от МН на  $(n \times n)$ -матрицы в (3.10) к эквивалентным им МН на  $((n+1) \times (n+1))$ -матрицы, используя лемму Шура. В результате получается следующая система МН, эквивалентная (3.10):

$$(3.11) \quad \tilde{I}_1 < 0 \cong \widehat{\tilde{I}}_1 = \begin{pmatrix} I_1 & u_1^+ \\ (u_1^+)^\top & -\frac{2}{\varepsilon_1^2} \end{pmatrix} < 0,$$

$$\tilde{I}_2 < 0 \cong \widehat{\tilde{I}}_2 = \begin{pmatrix} I_3 & u_2^+ \\ (u_2^+)^\top & -\frac{2}{\varepsilon_2^2} \end{pmatrix} < 0.$$

Если в (3.10) положить  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , то в этом случае разрешимость (3.10) будет только достаточна для разрешимости (3.4). В случае  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  имеем  $u_2^+(\varepsilon_1) = u_1^+(\varepsilon_1) + \delta_{12}c_2$ . Матрица разности  $I_3 - I_1$  (как в (3.8)) имеет вид

$$(3.12) \quad I_3 - I_1 = p_3 q_3^\top + q_3 p_3^\top, \quad p_3 = A^\top L b_2 + (\delta_{22}/2)c_2, \quad q_3 = c_2,$$

где  $\delta_{22} = b_2^\top L b_2$ . Проверяется непосредственно, что

$$\widehat{I}_2 - \widehat{I}_1 = \widetilde{p} \widetilde{q}^\top + \widetilde{q} \widetilde{p}^\top, \quad \widetilde{p} = \begin{pmatrix} p_3 \\ \delta_{12} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{q} = \begin{pmatrix} c_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

т.е. при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  к системе (3.11) применима теорема 2, на основании которой получим, что разрешимость (3.11) при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  эквивалентна существованию такого  $\varepsilon_2 > 0$  (нового), что разрешимо одно МН

$$(3.13) \quad \widetilde{I} = \widehat{I}_1 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} \left( \widetilde{p} + \frac{1}{\varepsilon_2} \widetilde{q} \right) \left( \widetilde{p} + \frac{1}{\varepsilon_2} \widetilde{q} \right)^\top < 0.$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, получим что

$$\widetilde{p} + \frac{1}{\varepsilon_2} \widetilde{q} = \begin{pmatrix} p_3 + \frac{1}{\varepsilon_2} c_2 \\ \delta_{12} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} u_3^+(\varepsilon_2) \\ \delta_{12} \end{pmatrix}, \quad u_3^+(\varepsilon_2) = A^\top L b_2 + \left( \frac{\delta_{22}}{2} + \frac{1}{\varepsilon_2^2} \right) c_2.$$

По лемме Шура МН (3.13) эквивалентно следующему неравенству в расширенном пространстве:

$$(3.14) \quad \widetilde{I} < 0 \cong I_{T_s} = \begin{pmatrix} I_1 & u_1^+(\varepsilon_1) & u_3^+(\varepsilon_2) \\ u_1^+(\varepsilon_1)^\top & -\frac{2}{\varepsilon_1^2} & \delta_{12} \\ u_3^+(\varepsilon_2)^\top & \delta_{21} & -\frac{2}{\varepsilon_2^2} \end{pmatrix} < 0.$$

Разрешимость этого неравенства достаточна для разрешимости системы (3.4). Определим новые параметры  $\tau_s = \delta_{ss} + (2/\varepsilon_s^2) > \delta_{ss}$ , тогда  $-2/\varepsilon_s^2 = \delta_{ss} - \tau_s$ ,  $s = 1, 2$ . Сделаем в (3.14) обратную замену  $I_1 = A^\top L A - L$  и выразим  $\varepsilon_s$  через  $\tau_s$ ,  $s = 1, 2$ . В результате получим, что неравенство (3.14) принимает вид

$$(3.15) \quad \begin{pmatrix} A^\top L A - L & A^\top L b_1 + (\tau_1/2)c_1 & A^\top L b_2 + (\tau_2/2)c_2 \\ (\bullet)^\top & \delta_{11} - \tau_1 & \delta_{12} \\ (\bullet)^\top & \delta_{21} & \delta_{22} - \tau_2 \end{pmatrix} < 0.$$

При  $m = 2$  имеем  $\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{pmatrix} = B^\top L B$ , т.е. МН (3.15) совпадает с (2.12), в котором  $\Gamma$ ,  $\tau$  и  $C$  определены в (3.7). Такое неравенство (2.12), равно как (3.15) и соответствующее МН (3.14), далее будем называть неравенствами Цыпкина.

## 4. Улучшения критерия Цыпкина

### 4.1. Сужение множества систем

В двух предыдущих секциях были рассмотрены два различных сужения множества систем с переключениями (2.1). Это попарно связанные системы с переключениями и системы Лурье со стандартными ограничениями на нелинейности вида (3.2). В непрерывном случае в [8] показано, что задача устойчивости систем Лурье вида (2.6) даже при нескольких нелинейностях вида (3.2) эквивалентна устойчивости систем с переключениями специального вида при произвольных переключениях. Эти системы с переключениями, которые соответствуют системам Лурье, являются связными, но в общем случае попарно связными не являются. Точно такая же ситуация имеет место в дискретном случае. С другой стороны, попарно связанные системы с переключениями из раздела 2 не обязательно являются системами Лурье со стандартными секторными ограничениями. В этом разделе рассмотрим системы с переключениями, которые удовлетворяют обоим ограничениям. Для простоты рассмотрим только случай  $m = 2$ . В этом случае в (3.3)  $c_1 = c_2 = c$ , и теорему 2 можно применить к  $I_1 < 0$  и  $I_4 < 0$ , а затем к  $I_2 < 0$  и  $I_3 < 0$ . Получим результирующее неравенство, разрешимость которого гарантирует разрешимость (3.4) с матрицами (3.3) при  $c_1 = c_2$ . Это МН совпадает с (2.12), в котором

$$(4.1) \quad \begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} b_1 + b_2 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b_1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c & c \end{pmatrix}, \\ \Gamma &= \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \text{diag}\{\tau_1, \tau_2\}. \end{aligned}$$

Подробные выкладки достаточно громоздки и здесь их опускаем.

### 4.2. Схема получения матричного неравенства, эквивалентного исходной системе

Получение МН, эквивалентного (3.4), методом из [11] изображено на схеме

$$\begin{array}{ccccccc} I_2 & \longleftrightarrow & I_1 & \longleftrightarrow & I_3 & \longleftrightarrow & I_4 \\ & & \downarrow \varepsilon_1 & & \downarrow \varepsilon_3 & & \downarrow \varepsilon_2 \\ & & \tilde{I}_1 & \longleftrightarrow & \tilde{I}_3 & \longleftrightarrow & \tilde{I}_2 \\ & & & & \downarrow \varepsilon_4 & & \downarrow \varepsilon_5 \\ & & & & \tilde{\tilde{I}}_1 & \longleftrightarrow & \tilde{\tilde{I}}_2 \\ & & & & & & \downarrow \varepsilon_6 \\ & & & & & & \tilde{\tilde{\tilde{I}}} \end{array}$$

В этой схеме горизонтальные стрелки указывают на пары неравенств, к которым применима теорема 2. Вертикальные стрелки указывают на результирующие МН, полученные в результате применения этой теоремы, а  $\varepsilon_s$  —

появляющиеся при этом новые параметры. Приведем выражения для неравенств из схемы через  $p_s$  и  $q_s$  из (3.8), (3.9), (3.12).

Неравенства первого уровня:  $\tilde{I}_1 < 0 \cong I_1 < 0$ ,  $I_2 < 0$ ,  $\tilde{I}_3 < 0 \cong I_1 < 0$ ,  $I_3 < 0$ ,  $\tilde{I}_2 < 0 \cong I_3 < 0$ ,  $I_4 < 0$ . Ниже для неравенств из (3.10) приведены их более полные выражения и добавлено выражение для  $\tilde{I}_3$ :

$$(4.2) \quad \tilde{I}_1 = I_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^+(u_1^+)^\top = I_2 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^-(u_1^-)^\top < 0, \quad u_1^\pm = p_1 \pm \frac{1}{\varepsilon_1^2} q_1,$$

$$(4.3) \quad \tilde{I}_2 = I_3 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} u_2^+(u_2^+)^\top = I_4 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} u_2^-(u_2^-)^\top < 0, \quad u_2^\pm = p_2 \pm \frac{1}{\varepsilon_2^2} q_2,$$

$$(4.4) \quad \tilde{I}_3 = I_1 + \frac{\varepsilon_3^2}{2} u_3^+(u_3^+)^\top = I_3 + \frac{\varepsilon_3^2}{2} u_3^-(u_3^-)^\top < 0, \quad u_3^\pm = p_3 \pm \frac{1}{\varepsilon_3^2} q_3.$$

Неравенства второго уровня:  $\tilde{\tilde{I}}_1 < 0 \cong \tilde{I}_1 < 0$ ,  $\tilde{I}_3 < 0$ ,  $\tilde{\tilde{I}}_2 < 0 \cong \tilde{I}_2 < 0$ ,  $\tilde{\tilde{I}}_3 < 0$ . Получение неравенств второго уровня продемонстрируем на получении выражения для  $\tilde{\tilde{I}}_1 < 0$ . Разность  $\tilde{\tilde{I}}_3 - \tilde{I}_1$  допускает представление

$$\tilde{\tilde{I}}_3 - \tilde{I}_1 = \frac{\varepsilon_3^2}{2} u_3^+(u_3^+)^\top - \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^+(u_1^+)^\top = p_4 q_4^\top + q_4 p_4^\top,$$

где  $p_4 = \left( \frac{\varepsilon_3}{2} u_3^+ + \frac{\varepsilon_1}{2} u_1^+ \right)$  и  $q_4 = \left( \frac{\varepsilon_3}{2} u_3^+ - \frac{\varepsilon_1}{2} u_1^+ \right)^\top$ . Применяя теорему 2, получим (далее используем обозначение  $\varepsilon_s^\pm = 1 \pm 1/\varepsilon_s^2$ ):

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \tilde{\tilde{I}}_1 &= \tilde{I}_1 + \frac{\varepsilon_4^2}{2} u_4^+(u_4^+)^\top = \tilde{I}_3 + \frac{\varepsilon_4^2}{2} u_4^-(u_4^-)^\top < 0, \\ u_4^\pm &= \frac{\varepsilon_3}{2} u_3^+ + \frac{\varepsilon_1}{2} u_1^+ \pm \frac{1}{\varepsilon_4^2} \left( \frac{\varepsilon_3}{2} u_3^+ - \frac{\varepsilon_1}{2} u_1^+ \right) = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_4^\mp}{2} u_1^+ + \frac{\varepsilon_3 \varepsilon_4^\pm}{2} u_3^+. \end{aligned}$$

Аналогично получим выражение для  $\tilde{\tilde{I}}_2 < 0$ :

$$(4.6) \quad \tilde{\tilde{I}}_2 = \tilde{I}_2 + \frac{\varepsilon_5^2}{2} u_5^+(u_5^+)^\top = \tilde{I}_3 + \frac{\varepsilon_5^2}{2} u_5^-(u_5^-)^\top < 0, \quad u_5^\pm = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_5^\mp}{2} u_2^+ + \frac{\varepsilon_3 \varepsilon_5^\pm}{2} u_3^-.$$

Финальное результирующее неравенство:  $\tilde{\tilde{I}} < 0 \cong \tilde{\tilde{I}}_1 < 0$ ,  $\tilde{\tilde{I}}_2 < 0$ . Таким же образом получим выражение для финального результирующего неравенства

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \tilde{\tilde{I}} &= \tilde{\tilde{I}}_1 + \frac{\varepsilon_6^2}{2} u_6^+(u_6^+)^\top = \tilde{I}_1 + \frac{\varepsilon_4^2}{2} u_4^+(u_4^+)^\top + \frac{\varepsilon_6^2}{2} u_6^+(u_6^+)^\top = \\ &= I_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^+(u_1^+)^\top + \frac{\varepsilon_4^2}{2} u_4^+(u_4^+)^\top + \frac{\varepsilon_6^2}{2} u_6^+(u_6^+)^\top < 0, \end{aligned}$$

где

$$u_6^\pm = \frac{\varepsilon_5}{2} u_5^- + \frac{\varepsilon_4}{2} u_4^- \pm \frac{1}{\varepsilon_6^2} \left( \frac{\varepsilon_5}{2} u_5^- - \frac{\varepsilon_4}{2} u_4^- \right) = \frac{\varepsilon_4 \varepsilon_6^\mp}{2} u_4^- + \frac{\varepsilon_5 \varepsilon_6^\pm}{2} u_5^-.$$

### 4.3. Критерий A

Финальное результирующее МН (4.7) зависит от шести дополнительных параметров. Легкий способ упростить ситуацию — просто положить два из них равными 1. Пусть  $\tilde{I}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, 1, 1, \varepsilon_6) \triangleq \tilde{I}_{(1)}$ . Неравенство  $\tilde{I}_{(1)} < 0$  является достаточным условием для выполнения всей системы (3.4) (достаточным из-за предположения  $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 1$ ). К сожалению, матрицу  $\tilde{I}_{(1)}$  не удастся преобразовать к виду, в котором она линейно зависит от неизвестных параметров. Поэтому вернемся к МН второго уровня, которые сильно упрощаются, если в них положить  $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 1$ . В этом случае  $\varepsilon_4^+ = \varepsilon_5^+ = 2$ , а  $\varepsilon_4^- = \varepsilon_5^- = 0$ . Тогда (см. (4.5) и (4.6))

$$u_4^+ = \varepsilon_3 u_3^+, \quad u_4^- = \varepsilon_1 u_1^+, \quad u_5^+ = \varepsilon_3 u_3^-, \quad u_5^- = \varepsilon_2 u_2^+,$$

и для соответствующих МН второго уровня справедливы выражения

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{1(1)} &= \tilde{I}_3 + \frac{\varepsilon_4^2}{2} u_4^-(u_4^-)^\top = \tilde{I}_3 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^+(u_1^+)^\top = \\ &= I_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_1^+(u_1^+)^\top + \frac{\varepsilon_3^2}{2} u_3^+(u_3^+)^\top < 0, \end{aligned}$$

(4.8)

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{2(1)} &= \tilde{I}_3 + \frac{\varepsilon_5^2}{2} u_5^-(u_5^-)^\top = \tilde{I}_3 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} u_2^+(u_2^+)^\top = \\ &= I_1 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} u_2^+(u_2^+)^\top + \frac{\varepsilon_3^2}{2} u_3^+(u_3^+)^\top < 0. \end{aligned}$$

Понятно, что МН  $\tilde{I}_{(1)} < 0$  является результирующим для системы из двух неравенств (4.8). Применим лемму Шура к обоим этим неравенствам и получим эквивалентную систему МН:

$$(4.9) \quad \tilde{I}_1 = \begin{pmatrix} I_1 & \begin{bmatrix} u_1^+ \\ u_3^+ \end{bmatrix} \\ (\bullet)^\top & \begin{bmatrix} -2/\varepsilon_1^2 & 0 \\ 0 & -2/\varepsilon_3^2 \end{bmatrix} \end{pmatrix} < 0, \quad \tilde{I}_2 = \begin{pmatrix} I_1 & \begin{bmatrix} u_2^+ \\ u_3^+ \end{bmatrix} \\ (\bullet)^\top & \begin{bmatrix} -2/\varepsilon_2^2 & 0 \\ 0 & -2/\varepsilon_3^2 \end{bmatrix} \end{pmatrix} < 0.$$

К системе (4.9) применима теорема 2, что приводит к результирующему МН, разрешимость которого гарантирует разрешимость (3.4) (достаточное условие).

*Теорема 3. МН, результирующее для системы (4.9), эквивалентно неравенству*

$$(4.10) \quad \tilde{I} = \begin{pmatrix} A^\top LA - L & A^\top LB + C \\ B^\top LA + C^\top & \Gamma \end{pmatrix} < 0,$$

где  $B = (b_1 \ b_2 \ 0)$ ,  $C = \left( \frac{\tau_1}{2}c_1, \frac{\tau_2}{2}c_2, \frac{\tau_3 - \tau_1}{2}c_1 + \delta_{12}c_2 \right)$  и

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \delta_{11} - \tau_1 & 0 & (\tau_1 - \tau_3 + \tau_4)/2 \\ 0 & \delta_{22} - \tau_2 & 0 \\ (\tau_1 - \tau_3 + \tau_4)/2 & 0 & -\tau_4 \end{pmatrix}.$$

Доказательство теоремы 3 приведено в Приложении.

Теорема 3 уточняет результат из [16].

С одной стороны, получить аналитические условия разрешимости МН (4.10) с помощью леммы Калмана – Сеге – Попова не представляется возможным, с другой стороны, это МН является ЛМН относительно неизвестных  $L$  и  $\tau_s$ ,  $s = \overline{1, 4}$  и численно решается стандартными программными средствами.

В [16] сделано предположение, которое подтверждено приведенным там примером, что область выполнимости МН (4.10) при оптимизации по входящим в него параметрам превосходит область выполнимости неравенства Цыпкина (3.15). Это предположение вполне естественно. Неравенство Цыпкина зависит от двух дополнительных параметров, неравенство (4.10) — от четырех, т.е. чем больше параметров, тем, вообще говоря, точнее результат. Кроме этого, при различных  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  отсутствует прямое повторение результатов критерия Цыпкина, которое, как показано в разделе 3, наступает в случае  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ . Однако это предположение не нашло подтверждения при детальном рассмотрении на большем количестве примеров. Ниже в разделе 6 будет показано, что на одних примерах проверка МН (4.10) дает более точный результат, чем критерий Цыпкина, на других — наоборот.

#### 4.4. Критерий В

Для улучшения критерия Цыпкина в этом разделе предлагается следующий подход: в результирующем неравенстве (4.7) положить  $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon$ , но отказаться от требования  $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 1$  (т.е. оставить пять дополнительных параметров вместо шести). Далее сравнить аналитически области выполнимости этого неравенства и неравенства Цыпкина.

Выше показано, что из выполнения неравенства Цыпкина (3.14) следует выполнение системы (3.4). В соответствии со схемой из раздела 4.2 в этом случае существуют параметры  $\varepsilon_s$ ,  $s = \overline{1, 6}$ , при которых выполняется результирующее МН (4.7). Ключевым вопросом является возможность в этом наборе (при котором выполняется критерий Цыпкина) взять  $\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon$ .

Отметим, что при получении критерия Цыпкина теорема 2 применяется сразу к неравенствам  $\tilde{I}_1 < 0$  из (4.2) и  $\tilde{I}_2 < 0$  из (4.3) и выполнение неравенства  $\tilde{I}_3 < 0$  из (4.4) не обсуждается. Из общих соображений при выполнении (3.14) это очевидно, покажем это формально.

*Лемма 2.* Пусть выполняется неравенство Цыпкина (3.14), тогда неравенство  $\tilde{I}_3 < 0$  из (4.4) выполняется при  $\varepsilon_3 = \varepsilon_2$ , где  $\varepsilon_2$  — значение параметра, при котором выполняется (3.14).

Доказательство леммы 2 приведено в Приложении.

Далее выясним, при каких  $\varepsilon_4$  и  $\varepsilon_5$  выполнены неравенства второго уровня (4.5) и (4.6) при условии выполнения неравенства Цыпкина.

Понятно, что определить условия, при которых из отрицательной определенности одной матрицы  $I_a(\nu) < 0$ , зависящей от условного параметра  $\nu$ , следует отрицательная определенность другой матрицы  $I_b(\nu) < 0$ , весьма затруднительно. Поэтому будем исходить из очевидного достаточного требования: если  $I_a(\nu) < 0$  и  $I_b(\nu) \leq I_a(\nu)$ , то  $I_b(\nu) < 0$ .

*Теорема 4.* Пусть выполняется неравенство Цыпкина (3.14). Положим  $\xi \triangleq \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \delta_{12}^2$ , где  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\delta_{12}$  определяются при выполнении (3.14). Тогда результирующее МН (4.7) выполняется при

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_4^2 = \varepsilon_5^2 = \frac{2 + \sqrt{\xi}}{2 - \sqrt{\xi}}.$$

Доказательство теоремы 4 приведено в Приложении.

Заметим, что МН (4.5) и (4.6), и тем более МН (4.7), не являются ЛМН относительно входящих в них переменных. Чтобы проверить справедливость теоремы 4 на численных примерах, перейдем от неравенств второго уровня (4.5) и (4.6) к эквивалентным им неравенствам, которые являются ЛМН. Эти неравенства имеют вид

$$(4.11) \quad \hat{\tilde{I}}_1 = \begin{pmatrix} A^\top L A - L & A^\top L b_1 + (\tau_1/2)c_1 & A^\top L(b_2 - b_1) + (\tau_2/2)c_2 - (\tau_1/2)c_1 \\ (\bullet)^\top & \delta_{11} - \tau_1 & (\delta_{22} - \delta_{11} + \tau_1 - \tau_2 + \tau_4)/2 \\ (\bullet)^\top & \bullet & -\tau_4 \end{pmatrix} < 0,$$

$$(4.12) \quad \hat{\tilde{I}}_2 = \begin{pmatrix} A_3^\top L A_3 - L & A^\top L b_1 + \frac{\tau_3}{2}c_1 + \delta_{12}c_2 & A^\top L(b_2 - b_1) - \frac{\tau_3}{2}c_1 + \left(\delta_{22} - \delta_{12} - \frac{\tau_2}{2}\right)c_2 \\ (\bullet)^\top & \delta_{11} - \tau_3 & (\delta_{22} - \delta_{11} + \tau_3 - \tau_2 + \tau_5)/2 \\ (\bullet)^\top & \bullet & -\tau_5 \end{pmatrix} < 0.$$

МН (4.11) является ЛМН относительно неизвестных  $L$  и  $\tau_s$ ,  $s = 1, 2, 4$ , МН (4.12) является ЛМН относительно неизвестных  $L$  и  $\tau_s$ ,  $s = 2, 3, 5$ .

*Теорема 5.* МН (4.11) эквивалентно МН (4.5), МН (4.12) эквивалентно МН (4.6). Система двух МН (4.11) и (4.12) эквивалентна исходной системе (3.4).

Доказательство теоремы 5 приведено в Приложении.

## 5. Альтернативный взгляд на критерий Цыпкина

Частотное условие критерия Цыпкина получается как условие разрешимости специального МН (МН (3.15) в случае системы (2.8) с двумя нелинейностями (3.2)). МН (3.15) является ЛМН относительно входящих в него неизвестных  $L$  и  $\tau_s$ ,  $s = 1, 2$ , и численно решается стандартными программными средствами. Более того, благодаря линейности МН (3.15), в нем, без ущерба для вопроса о разрешимости, можно считать  $\tau_2 = 1$ . Таким образом, вместо системы (3.4), имеющей общую размерность  $4n$ , можно рассматривать одно МН (3.15) размерности  $n + 2$  с одним дополнительным параметром (разумеется, принимая во внимание риски, связанные с ущербностью  $S$ -процедуры и обусловленные этим потери в области существования КФЛ).

Рассматривая полученные в предыдущих разделах условия существования КФЛ под углом сложности их проверки, отметим следующее.

Достаточное условие теоремы 3, назовем его критерием  $A$ , представляет собой проверку МН (4.10), в котором в силу линейности можно положить  $\tau_4 = 1$ . Таким образом, проверка критерия  $A$  состоит в проверке МН размерности  $n + 3$  с тремя дополнительными параметрами.

Условие, вытекающее из теоремы 5, состоит в проверке системы из двух МН (4.11), (4.12). Полагая в ней в силу линейности  $\tau_5 = 1$ , получим систему ЛМН общей размерности  $2n + 4$  с четырьмя дополнительными параметрами, которая эквивалентна исходной системе (3.4). Если в системе (4.11), (4.12) положить  $\tau_4 = \tau_5 = \tau$ , то условие ее разрешимости будет достаточным условием разрешимости системы (3.4). Дополнительно в силу линейности положим в системе (4.11), (4.12)  $\tau_4 = \tau_5 = 1$ . В результате получим достаточное условие разрешимости (3.4), назовем его критерием  $B$ , состоящее в проверке системы ЛМН общей размерности  $2n + 4$  с тремя дополнительными параметрами.

Наконец, более выгодной с прикладной точки зрения выглядит численная проверка системы ЛМН (3.11), которая, как сказано при ее получении, эквивалентна исходной системе (3.4). Выразим МН системы (3.11) в исходных обозначениях (3.4), (3.10), используя (П.2) для  $\tau_1$  и  $\tau_3$ , и сформулируем этот результат в виде теоремы.

*Теорема 6. Система ЛМН (3.4) эквивалентна системе*

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \widehat{I}_1 &= \begin{pmatrix} A^\top LA - L & A^\top Lb_1 + \frac{\tau_1}{2}c_1 \\ (\bullet)^\top & \delta_{11} - \tau_1 \end{pmatrix} < 0, \\ \widehat{I}_2 &= \begin{pmatrix} A_3^\top LA_3 - L & A^\top Lb_1 + \frac{\tau_3}{2}c_1 + \delta_{12}c_2 \\ (\bullet)^\top & \delta_{11} - \tau_3 \end{pmatrix} < 0, \end{aligned}$$

которая является системой ЛМН относительно входящих в нее неизвестных  $L$ ,  $\tau_1$  и  $\tau_3$ .

В системе (5.1) в силу линейности можно положить  $\tau_3 = 1$ . В результате получим необходимое и достаточное условие разрешимости (3.4), состоящее

в проверке системы ЛМН общей размерности  $2n + 2$  (т.е. почти в два раза меньше) с одним дополнительным параметром.

Критерии  $A$  и  $B$  имеют скорее теоретический интерес, так как уступают по эффективности критерию теоремы 6.

## 6. Примеры

Если устойчивость удается установить с помощью КФЛ, то иногда говорят, что установлена “квадратичная устойчивость”. Поэтому для краткости вместо “область существования КФЛ” будем использовать термин “область квадратичной устойчивости” (ОКУ). Было рассмотрено более пятидесяти примеров систем вида (3.1), (3.2) третьего и шестого порядков, для которых находились оценки ОКУ, вычисляемые с помощью тестируемых алгоритмов из некоторого набора. Этот набор состоит из следующих алгоритмов. Алгоритм  $NS$  (обозначения алгоритмов далее будут использоваться в таблицах) состоит в нахождении ОКУ в соответствии с необходимыми и достаточными условиями существования КФЛ путем проверки системы (3.4). Алгоритм  $Ts$  состоит в нахождении оценки ОКУ с помощью критерия Цыпкина, т.е. путем проверки МН (3.15). Алгоритм  $A$  состоит в нахождении оценки ОКУ на основании теоремы 3, т.е. путем проверки МН (4.10). Алгоритм  $B$  состоит в нахождении оценки ОКУ на основании теоремы 5, т.е. путем проверки системы (4.11), (4.12). Алгоритм  $PW$  используется в соответствии с теоремой 1 для попарно связанных систем и состоит в нахождении оценки ОКУ путем проверки МН (2.12), в котором при  $N = 4$ :  $B = (b_1 \ b_2 \ b_1 + b_1)$ ,  $C = (c \ c \ c)$ ,  $c = c_1 = c_2$ ,  $\tau = \text{diag}\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ ,  $\Gamma = (\tau_1 \ \tau_2/2 \ \tau_3/2; \ \tau_2/2 \ \tau_2 \ \tau_3/2; \ \tau_3/2 \ \tau_3/2 \ \tau_3)$  (для экономии места матрица  $\Gamma$  записана построчно, а знаки “;” обозначают переход на следующую строку).

Для нахождения ОКУ рассматривается луч, выходящий из точки 0. Далее выбирается и фиксируется произвольный вектор  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$  (естественно,  $\alpha_s \geq 0$ ), направленный вдоль этого луча, и решается задача определения наибольшего числа  $k$ , такого что при  $(k_1, k_2) = k\bar{\alpha}$  выполняется условие соответствующего критерия. Для каждой системы, рассмотренной в качестве примера, проводилось сравнение алгоритмов из указанного набора по пяти различным направлениям  $\bar{\alpha}_i$ ,  $i = \overline{1, 5}$ .

Отметим закономерности, выявленные по результатам во всех рассмотренных примерах. Очень хорошо показал себя критерий Цыпкина. Более чем в половине случаев область по критерию Цыпкина совпадает с точной ОКУ. Во всех рассмотренных примерах область по критерию  $B$  либо больше, либо совпадает с областью по критерию Цыпкина. Область по критерию  $A$  в некоторых примерах превосходит область по критерию Цыпкина, а в некоторых наоборот. При этом в ряде случаев область по критерию  $A$  превосходит область по критерию  $B$ . Область по  $PW$  алгоритму почти во всех случаях уступает области по  $Ts$  алгоритму. Это отчасти объясняется тем, что у критерия

Цыпкина и критерия теоремы 1 не совпадают области применения. Нахождение оценки ОКУ для попарно связанных систем с помощью проверки МН (2.12) при (4.1) во всех примерах дает точно тот же результат, что и критерий Цыпкина. Этот факт не отражен в таблицах. Также был проверен численно, но не отражен в таблицах тот факт, что при проверке системы (4.11), (4.12) при  $\tau_4 = 1$  и системы (5.1) при  $\tau_3 = 1$  получается точная оценка ОКУ.

Отметим также, что для одной и той же системы результаты могут принципиально отличаться для разных направлений.

Во всех таблицах, приведенных ниже (см. табл. 1–4), в верхней строке указываются лучи  $\bar{\alpha}_i$ ,  $i = \overline{1, 5}$ , вдоль которых оценивается ОКУ, а в левом столбце приведены обозначения используемых для этого алгоритмов. Номера таблиц совпадают с номерами примеров, к которым они относятся.

*Пример 1.* Рассматривается система Лурье вида (3.1) при  $n = 3$ , в которой

$$A = [0 \ 0 \ -0,5; \ 0,5 \ 0 \ -1,5; \ 0 \ 0,5 \ -1,5],$$

$$\text{spectr}(A) = [-0,5 \ -0,5 \ -0,5],$$

$$b_1^\top = (0 \ 0 \ k_1), \quad b_2^\top = (0 \ k_2 \ 0), \quad c_1^\top = (0 \ 0 \ 1), \quad c_2^\top = (0 \ 0 \ 1),$$

где матрица  $A$  записана построчно. Система попарно связна, так как  $c_1 = c_2$ . Пример 1 уточняет результаты из [16].

**Таблица 1**

Прогр. \ Лучи	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 1)	(3, 1)
NS	0,24999	0,12499	0,08333	0,24107	0,18396
Ts	0,24999	0,12499	0,08333	0,23502	0,17749
A	0,24999	0,12499	0,08333	0,23867	0,18393
B	0,24999	0,12499	0,08333	0,23858	0,18195
PW	0,23211	0,12499	0,08241	0,15263	0,10659
Sh	0,24999	0,12499	0,08333	0,24999	0,24999

Вычислив в этом примере область устойчивости (шуровости) матриц  $A_s$  (последняя строка в табл. 1), приходим к выводу, что дискретный аналог квадратичной проблемы Айзермана имеет положительное решение для направлений (1, 1), (1, 2) и (1, 3). Это означает (с точностью до погрешности вычислений), что в этих случаях алгоритмы  $A$  и  $B$  не только позволяют найти всю ОКУ, но и то, что ОКУ совпадает с точной областью устойчивости.

*Пример 2.* Рассматривается система Лурье вида (3.1) при  $n = 3$ , в которой

$$A = [0 \ 1 \ 0; \ 0 \ 0 \ 1; \ 0,125 \ 0,15 \ -0,3],$$

$$\text{spectr}(A) = [-0,4 + 0,3i \ -0,4 - 0,3i \ 0,5],$$

$$b_1^\top = (k_1 \ 0 \ k_1), \quad b_2^\top = (k_2 \ k_2 \ k_2), \quad c_1^\top = (1 \ 1 \ 0), \quad c_2^\top = (0 \ 1 \ -1).$$

**Таблица 2**

Прогр. \ Лучи	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 1)	(3, 1)
NS	0,28041	0,21944	0,17183	0,15223	0,10308
Ts	0,27338	0,20921	0,16512	0,15124	0,10280
A	0,28033	0,21904	0,17148	0,15219	0,10306
B	0,27964	0,21931	0,17183	0,15205	0,10302

*Пример 3.* Рассматривается система Лурье вида (3.1) при  $n = 3$ , в которой

$$A = [0 \ 1 \ 0; \ 0 \ 0 \ 1; \ -0,125 \ 0,05 \ 0,1],$$

$$\text{spectr}(A) = [0,3 + 0,4i \ 0,3 - 0,4i \ -0,5],$$

$$b_1^\top = (0 \ 0 \ k_1), \quad b_2^\top = (0 \ k_2 \ 0), \quad c_1^\top = (0 \ 0 \ 1), \quad c_2^\top = (0 \ 1 \ 1).$$

**Таблица 3**

Прогр. \ Лучи	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 1)	(3, 1)
NS	0,71219	0,44570	0,31324	0,43866	0,30943
Ts	0,69671	0,43879	0,31168	0,43866	0,30835
A	0,70536	0,44363	0,31293	0,43386	0,30178
B	0,69671	0,43879	0,31168	0,43866	0,30942

*Пример 4.* Рассматривается система Лурье вида (3.1) при  $n = 6$ , в которой матрица  $A$  имеет форму Фробениуса и поэтому здесь задается только последней строкой

$$A \sim [0,0625 \ 0 \ -0,25 \ 0 \ 0,25 \ 0],$$

$$\text{spectr}(A) = [-0,5 \ -0,5 + 0,5i \ -0,5 - 0,5i \ 0,5 + 0,5i \ 0,5 - 0,5i \ 0,5],$$

$$b_1^\top = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ k_1), \quad b_2^\top = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ k_2 \ 0),$$

$$c_1^\top = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1), \quad c_2^\top = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1).$$

Система попарно связна, так как  $c_1 = c_2$ .

**Таблица 4**

Прогр. \ Лучи	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(2, 1)	(3, 1)
NS	0,76665	0,63449	0,53687	0,42254	0,29070
Ts	0,75869	0,62624	0,52991	0,42042	0,28996
A	0,76174	0,63139	0,53578	0,42116	0,29023
B	0,76552	0,63431	0,53685	0,42199	0,29052
PW	0,62305	0,57036	0,51425	0,32334	0,21802

## 7. Заключение

В настоящей работе понятие попарно связных систем с переключениями переносится на дискретные системы. Показано, что динамика таких систем

может быть представлена динамикой систем Лурье с квадратичными ограничениями на нелинейности. Это позволяет получить с помощью  $S$ -процедуры частотный критерий устойчивости таких систем.

Задача устойчивости дискретных систем с переключениями тесно связана с задачей об абсолютной устойчивости дискретных систем Лурье с несколькими нелинейностями из конечных секторов. Здесь для системы Лурье с двумя нелинейностями критерий Цыпкина получен без использования  $S$ -процедуры, что привносит методическое разнообразие в изложение классических результатов.

Помимо теоретического интереса, который связан с получением новых аналитических условий существования КФЛ, предлагаемые в работе результаты имеют существенное прикладное значение, так как позволяют значительно снизить размерность систем ЛМН, определяющих существование КФЛ. Это снижение размерности может быть достигнуто как с потерей в ОКУ, так и без такой потери. Наиболее эффективным с прикладной точки зрения является критерий теоремы 6, состоящий в проверке разрешимости ЛМН, размерность которого практически в два раза меньше размерности исходной системы и при этой проверке не происходит потерь в ОКУ.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы 3.* Пусть  $\gamma \triangleq \frac{1}{\varepsilon_1^2} - \frac{1}{\varepsilon_2^2}$  и  $\hat{p} \triangleq u_2^+ - u_1^+ = -\gamma c_1 + \delta_{12}c_2$ . Матрица разности допускает представление

$$\begin{aligned} \tilde{I}_2 - \tilde{I}_1 &= \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & \begin{bmatrix} \hat{p} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} \bullet \end{pmatrix}^\top & 2\gamma & 0 \\ \begin{pmatrix} \bullet \end{pmatrix}^\top & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p} \end{bmatrix} \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix} (0_{1 \times n} \quad 1 \quad 0) + \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \end{bmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (\hat{p}^\top \quad \gamma \quad 0) \end{aligned}$$

(во избежание путаницы используется обозначение  $0_{n \times m}$  — это матрица размера  $n \times m$ , все элементы которой равны 0). На основании теоремы 2 результирующее неравенство для системы двух неравенств  $\tilde{I}_1 < 0$  и  $\tilde{I}_2 < 0$  из (4.9) имеет вид:

$$\tilde{I}_{(1)} < 0 \cong \tilde{I}_1 + \frac{\varepsilon_6^2}{2} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p} \end{bmatrix} \\ \gamma + \frac{1}{\varepsilon_6^2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p} \end{bmatrix} \\ \gamma + \frac{1}{\varepsilon_6^2} \\ 0 \end{pmatrix}^\top < 0.$$

Еще раз применим лемму Шура, получим  $\tilde{I}_{(1)} < 0 \cong \tilde{I} < 0$ :

$$(II.1) \quad \tilde{I} = \begin{pmatrix} & & & \begin{bmatrix} \hat{p} \end{bmatrix} \\ & \tilde{I}_1 & & \gamma + \frac{1}{\varepsilon_6^2} \\ & & 0 & \\ \begin{bmatrix} \hat{p} \end{bmatrix}^\top & \gamma + \frac{1}{\varepsilon_6^2} & 0 & -\frac{2}{\varepsilon_6^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & \begin{bmatrix} u_1^+ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_3^+ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{p} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u_1^+ \end{bmatrix}^\top & -\frac{2}{\varepsilon_1^2} & 0 & \gamma + \frac{1}{\varepsilon_6^2} \\ \begin{bmatrix} u_3^+ \end{bmatrix}^\top & 0 & -\frac{2}{\varepsilon_3^2} & 0 \\ \begin{bmatrix} \hat{p} \end{bmatrix}^\top & \gamma + \frac{1}{\varepsilon_6^2} & 0 & -\frac{2}{\varepsilon_6^2} \end{pmatrix} < 0.$$

Подставим в  $u_s^+$  выражения для  $p_s$  и  $q_s$  из (3.8), (3.9) и (3.12), введем новые параметры  $\tau_s$ ,  $s = \overline{1, 3}$ , получим:

$$(II.2) \quad \begin{aligned} u_1^+ &= A^\top Lb_1 + \frac{\tau_1}{2}c_1, & \tau_1 &\triangleq \delta_{11} + \frac{2}{\varepsilon_1^2}, \\ u_3^+ &= A^\top Lb_2 + \frac{\tau_2}{2}c_2, & \tau_2 &\triangleq \delta_{22} + \frac{2}{\varepsilon_3^2}, \\ u_2^+ &= A^\top Lb_1 + \frac{\tau_3}{2}c_1 + \delta_{12}c_2, & \tau_3 &\triangleq \delta_{11} + \frac{2}{\varepsilon_2^2}. \end{aligned}$$

Выразим  $\gamma$  через  $\tau_s$  и добавим  $\tau_4$ :

$$(II.3) \quad \gamma = \frac{1}{\varepsilon_1^2} - \frac{1}{\varepsilon_2^2} = \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_3), \quad \tau_4 \triangleq \frac{2}{\varepsilon_6^2}.$$

В обозначениях (II.2) и (II.3) МН (II.1) в точности совпадает с МН  $\tilde{I} < 0$  из (4.10).

Теорема 3 доказана.

*Доказательство леммы 2.* Применим лемму А4 [17, с. 253] к неравенству Цыпкина (3.14)

$$(II.4) \quad I_{T_s} < 0 \cong \hat{I}_{T_s} = \begin{pmatrix} I_1 & u_3^+(\varepsilon_2) \\ u_3^+(\varepsilon_2)^\top & -\frac{2}{\varepsilon_2^2} \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon_1^2}{2} \begin{pmatrix} u_1^+(\varepsilon_1) \\ \delta_{12} \end{pmatrix} (u_1^+(\varepsilon_1)^\top \quad \delta_{12}) < 0.$$

Получим, что из  $\widehat{I}_{Ts} < 0$  следует  $\widetilde{I}_3 < 0 \cong \begin{pmatrix} I_1 & u_3^+(\varepsilon_2) \\ u_3^+(\varepsilon_2)^\top & -\varepsilon_2^2/2 \end{pmatrix} < 0$ .

Лемма 2 доказана.

*Доказательство теоремы 4.* Покажем, что из выполнения неравенства Цыпкина (3.14) следует существование  $\varepsilon_4$ , при котором выполнено  $\widetilde{I}_1 < 0$ . Преобразуем дальше  $\widehat{I}_{Ts}$  из (П.4)

$$\begin{aligned} \widehat{I}_{Ts} &= \begin{pmatrix} I_1 & u_3^+(\varepsilon_2) \\ u_3^+(\varepsilon_2)^\top & -\frac{2}{\varepsilon_2^2} \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon_1^2}{2} \begin{pmatrix} u_1^+(\varepsilon_1)u_1^+(\varepsilon_1)^\top & \delta_{12}u_1^+(\varepsilon_1) \\ \delta_{12}u_1^+(\varepsilon_1)^\top & \delta_{12}^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} I_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2}u_1^+(\varepsilon_1)u_1^+(\varepsilon_1)^\top & \frac{\varepsilon_1^2}{2}\delta_{12}u_1^+(\varepsilon_1) + u_3^+(\varepsilon_2) \\ \frac{\varepsilon_1^2}{2}\delta_{12}u_1^+(\varepsilon_1)^\top + u_3^+(\varepsilon_2)^\top & -\frac{2}{\varepsilon_2^2} + \frac{\varepsilon_1^2}{2}\delta_{12}^2 \end{pmatrix} < 0. \end{aligned}$$

Введем обозначения  $\xi \triangleq \varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\delta_{12}^2$ ,  $\gamma_1 \triangleq \frac{2\varepsilon_2^2}{4-\xi}$ , т.е.  $-\frac{1}{\gamma_1} = -\frac{2}{\varepsilon_2^2} + \frac{\varepsilon_1^2}{2}\delta_{12}^2$  ( $4-\xi > 0$  является следствием  $\widehat{I}_{Ts} < 0$ ). По лемме Шура получим

$$\begin{aligned} \widehat{I}_{Ts} < 0 \cong \widehat{\widehat{I}}_{Ts} = I_1 + \frac{\varepsilon_1^2}{2}u_1^+(\varepsilon_1)u_1^+(\varepsilon_1)^\top + \\ + \gamma_1 (\alpha_1 u_1^+(\varepsilon_1) + u_3^+(\varepsilon_2)) (\alpha_1 u_1^+(\varepsilon_1) + u_3^+(\varepsilon_2))^\top < 0, \end{aligned}$$

где  $\alpha_1 \triangleq (\varepsilon_1^2\delta_{12})/2$ . Таким образом, разность между квадратичными формами, соответствующими матрицам  $\widehat{\widehat{I}}_{Ts}$  и  $\widetilde{I}_1$  из (4.5), представляет собой разность квадратов. Введем еще упрощающие обозначения

$$(П.5) \quad \alpha_2 \triangleq \varepsilon_1\varepsilon_4^-/2, \quad \beta_2 \triangleq \varepsilon_2\varepsilon_4^+/2 > 0, \quad \gamma_2 \triangleq \varepsilon_4^2/2 > 0,$$

тогда

$$\begin{aligned} \widetilde{I}_1 - \widehat{\widehat{I}}_{Ts} \triangleq \Delta_1 = \gamma_2 (\alpha_2 u_1^+(\varepsilon_1) + \beta_2 u_3^+(\varepsilon_2)) (\alpha_2 u_1^+(\varepsilon_1) + \beta_2 u_3^+(\varepsilon_2))^\top - \\ - \gamma_1 (\alpha_1 u_1^+(\varepsilon_1) + u_3^+(\varepsilon_2)) (\alpha_1 u_1^+(\varepsilon_1) + u_3^+(\varepsilon_2))^\top. \end{aligned}$$

Неравенство  $\Delta_1 \leq 0$  для разности квадратов будет выполняться, если стоящие под этими квадратами линейные формы будут пропорциональны, т.е.

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_1^+(\varepsilon_1) + u_3^+(\varepsilon_2) &= \lambda (\alpha_2 u_1^+(\varepsilon_1) + \beta_2 u_3^+(\varepsilon_2)), \\ u_1^+(\alpha_1 - \lambda\alpha_2) &= u_3^+(-1 + \lambda\beta_2). \end{aligned}$$

Векторы  $u_1^+$  и  $u_3^+$ , вообще говоря, произвольные, поэтому последнее равенство возможно, только если  $\alpha_1 - \lambda\alpha_2 = 0$  и  $1 - \lambda\beta_2 = 0$ , т.е.  $\lambda = \alpha_1/\alpha_2 = 1/\beta_2$ .

Вернемся к значениям  $\alpha_s$  и  $\beta_s$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_1^2 \delta_{12}}{2} \frac{2}{\varepsilon_1 \varepsilon_4^-} &= \frac{\varepsilon_1 \delta_{12}}{\varepsilon_4^-} = \frac{2}{\varepsilon_2 \varepsilon_4^+}; & \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_4^2}\right) \frac{1}{\varepsilon_1 \delta_{12}} &= \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_4^2}\right) \frac{\varepsilon_2}{2}; \\ \frac{1}{\varepsilon_4^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_1 \delta_{12}} + \frac{\varepsilon_2}{2}\right) &= \frac{1}{\varepsilon_1 \delta_{12}} - \frac{\varepsilon_2}{2}; & \frac{1}{\varepsilon_4^2} \frac{2 + \sqrt{\xi}}{2 \varepsilon_1 \delta_{12}} &= \frac{2 - \sqrt{\xi}}{2 \varepsilon_1 \delta_{12}}; \\ \varepsilon_4^2 &= \frac{2 + \sqrt{\xi}}{2 - \sqrt{\xi}}. \end{aligned}$$

Случай  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  особый, он означает, что  $\varepsilon_4 = 1$  и  $\delta_{12} = 0$ . Напомним, что  $\delta_{12} = b_1^\top L b_2$  и случай  $\delta_{12} = 0$  возможен. В этом случае линейные формы автоматически пропорциональны.

Перейдем к вопросу о существовании  $\varepsilon_5$ , при котором выполнено  $\tilde{I}_2 < 0$ . Сначала представим неравенство Цыпкина в другой эквивалентной форме. Для этого неравенство (3.13) представим в виде ( $\hat{I}_2$  определена в (3.11))

$$\tilde{I} = \hat{I}_2 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} \left(\tilde{p} - \frac{1}{\varepsilon_2^2} \tilde{q}\right) \left(\tilde{p} - \frac{1}{\varepsilon_2^2} \tilde{q}\right)^\top < 0.$$

Далее, действуя по аналогии, получим неравенство Цыпкина в форме, отличной от (3.14):

$$\tilde{I} < 0 \cong \tilde{I}_{Ts} = \begin{pmatrix} I_3 & u_2^+(\varepsilon_1) & u_3^-(\varepsilon_2) \\ u_2^+(\varepsilon_1)^\top & -\frac{2}{\varepsilon_1^2} & \delta_{12} \\ u_3^-(\varepsilon_2)^\top & \delta_{21} & -\frac{2}{\varepsilon_2^2} \end{pmatrix} < 0.$$

Проделав с  $\tilde{I}_{Ts}$  те же преобразования, что проделаны выше с  $I_{Ts}$  из (3.14), а затем с  $\hat{I}_{Ts}$  из (П.4), получим

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{Ts} < 0 &\cong \tilde{\tilde{I}}_{Ts} = I_3 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u_2^+(\varepsilon_1) u_2^+(\varepsilon_1)^\top + \\ &+ \gamma_1 (\alpha_1 u_2^+(\varepsilon_1) + u_3^-(\varepsilon_2)) (\alpha_1 u_2^+(\varepsilon_1) + u_3^-(\varepsilon_2))^\top < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, разность между квадратичными формами, соответствующими матрицам  $\tilde{\tilde{I}}_{Ts}$  и  $\tilde{\tilde{I}}_2$  из (4.6), представляет собой разность квадратов

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{I}}_2 - \tilde{\tilde{I}}_{Ts} \triangleq \Delta_2 &= \gamma_2 (\alpha_2 u_2^+(\varepsilon_1) + \beta_2 u_3^-(\varepsilon_2)) (\alpha_2 u_2^+(\varepsilon_1) + \beta_2 u_3^-(\varepsilon_2))^\top - \\ &- \gamma_1 (\alpha_1 u_2^+(\varepsilon_1) + u_3^-(\varepsilon_2)) (\alpha_1 u_2^+(\varepsilon_1) + u_3^-(\varepsilon_2))^\top, \end{aligned}$$

где коэффициенты  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  и  $\gamma_2$  теперь определяются соотношением (П.5), в котором нужно заменить  $\varepsilon_4$  на  $\varepsilon_5$ . Повторяя для анализа неравенства  $\Delta_2 \leq 0$

рассуждение о пропорциональности линейных форм, приведенное выше при анализе  $\Delta_1 \leq 0$ , получим, что  $\Delta_2 \leq 0$  при

$$\varepsilon_5^2 = \frac{2 + \sqrt{\xi}}{2 - \sqrt{\xi}}.$$

Вычисление  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  при найденных  $\varepsilon_4$  и  $\varepsilon_5$  дает  $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ .

Теорема 4 доказана.

*Доказательство теоремы 5.* Получим другое эквивалентное представление для  $\tilde{I}_1 < 0$  из (4.5). Для этого сначала применим лемму Шура к неравенствам первого уровня (4.2) и (4.4):

$$(П.6) \quad \begin{aligned} \tilde{I}_1 < 0 &\cong \hat{I}_1 = \begin{pmatrix} I_1 & u_1^+ \\ (u_1^+)^\top & -2/\varepsilon_1^2 \end{pmatrix} < 0, \\ \tilde{I}_3 < 0 &\cong \hat{I}_3 = \begin{pmatrix} I_1 & u_3^+ \\ (u_3^+)^\top & -2/\varepsilon_3^2 \end{pmatrix} < 0. \end{aligned}$$

Матрица разности имеет вид

$$\hat{I}_3 - \hat{I}_1 = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & u_3^+ - u_1^+ \\ (\bullet)^\top & 2/\varepsilon_1^2 - 2/\varepsilon_3^2 \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения  $\hat{p}_1 \triangleq u_3^+ - u_1^+$  и  $\gamma_{13} \triangleq 1/\varepsilon_1^2 - 1/\varepsilon_3^2$ , тогда легко видеть, что

$$\hat{I}_3 - \hat{I}_1 = \tilde{p}_1 \tilde{q}_1^\top + \tilde{q}_1 \tilde{p}_1^\top, \quad \tilde{p}_1 = \begin{pmatrix} \hat{p}_1 \\ \gamma_{13} \end{pmatrix}, \quad \tilde{q}_1 = \begin{pmatrix} 0_{n \times 1} \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. к системе (П.6) применима теорема 2, на основании которой получим, что разрешимость системы (П.6) эквивалентна существованию такого  $\varepsilon_4 > 0$ , что разрешимо одно МН

$$(П.7) \quad \tilde{I}_1 < 0 \cong \hat{I}_1 + \frac{\varepsilon_4^2}{2} \left( \tilde{p}_1 + \frac{1}{\varepsilon_4^2} \tilde{q}_1 \right) \left( \tilde{p}_1 + \frac{1}{\varepsilon_4^2} \tilde{q}_1 \right)^\top < 0.$$

По лемме Шура МН (П.7) эквивалентно следующему неравенству в расширенном пространстве:

$$(П.8) \quad \begin{aligned} \tilde{I}_1 < 0 &\cong \hat{\tilde{I}}_1 = \begin{pmatrix} \hat{I}_1 & \tilde{p}_1 + (1/\varepsilon_4^2)\tilde{q}_1 \\ (\bullet)^\top & -2/\varepsilon_4^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} I_1 & u_1^+(\varepsilon_1) & \hat{p}_1 \\ (\bullet)^\top & -2/\varepsilon_1^2 & \gamma_{13} + 1/\varepsilon_4^2 \\ (\bullet)^\top & \gamma_{13} + 1/\varepsilon_4^2 & -2/\varepsilon_4^2 \end{pmatrix} < 0. \end{aligned}$$

Выразим  $\widehat{I}_1$  из (П.8) в исходных терминах, используя для  $\tau_1$  и  $\tau_2$  обозначения из (П.2) и полагая  $\tau_4 \triangleq 2/\varepsilon_4^2$ . В результате получим, что МН (П.8) совпадает с МН (4.11).

Проведем аналогичные выкладки, чтобы получить другое эквивалентное представление для  $\widehat{I}_2 < 0$  из (4.6). Для этого сначала применим лемму Шура к неравенствам первого уровня (4.3) и (4.4) (теперь другое  $\widehat{I}_3$ ):

$$(П.9) \quad \begin{aligned} \widetilde{I}_2 < 0 &\cong \widehat{I}_2 = \begin{pmatrix} I_3 & u_2^+ \\ (u_2^+)^{\top} & -2/\varepsilon_2^2 \end{pmatrix} < 0, \\ \widetilde{I}_3 < 0 &\cong \widehat{I}_3 = \begin{pmatrix} I_3 & u_3^- \\ (u_3^-)^{\top} & -2/\varepsilon_3^2 \end{pmatrix} < 0. \end{aligned}$$

Матрица разности имеет вид

$$\widehat{I}_3 - \widehat{I}_2 = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & u_3^- - u_2^+ \\ (\bullet)^{\top} & 2/\varepsilon_2^2 - 2/\varepsilon_3^2 \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения  $\widehat{p}_2 \triangleq u_3^- - u_2^+$  и  $\gamma_{23} \triangleq 1/\varepsilon_2^2 - 1/\varepsilon_3^2$ , тогда легко видеть, что

$$\widehat{I}_3 - \widehat{I}_2 = \widetilde{p}_2 \widetilde{q}_2^{\top} + \widetilde{q}_2 \widetilde{p}_2^{\top}, \quad \widetilde{p}_2 = \begin{pmatrix} \widehat{p}_2 \\ \gamma_{23} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{q}_2 = \begin{pmatrix} 0_{n \times 1} \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. к системе (П.9) применима теорема 2, на основании которой получим, что разрешимость системы (П.9) эквивалентна существованию такого  $\varepsilon_5 > 0$ , что разрешимо одно МН

$$(П.10) \quad \widetilde{I}_2 < 0 \cong \widehat{I}_2 + \frac{\varepsilon_5^2}{2} \left( \widetilde{p}_2 + \frac{1}{\varepsilon_5^2} \widetilde{q}_2 \right) \left( \widetilde{p}_2 + \frac{1}{\varepsilon_5^2} \widetilde{q}_2 \right)^{\top} < 0.$$

По лемме Шура МН (П.10) эквивалентно следующему неравенству в расширенном пространстве:

$$(П.11) \quad \begin{aligned} \widetilde{I}_2 < 0 &\cong \widetilde{\widehat{I}}_2 = \begin{pmatrix} \widehat{I}_2 & \widetilde{p}_2 + (1/\varepsilon_5^2)\widetilde{q}_2 \\ (\bullet)^{\top} & -2/\varepsilon_5^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} I_3 & u_2^+(\varepsilon_2) & \widehat{p}_2 \\ (\bullet)^{\top} & -2/\varepsilon_2^2 & \gamma_{23} + 1/\varepsilon_5^2 \\ (\bullet)^{\top} & \gamma_{23} + 1/\varepsilon_5^2 & -2/\varepsilon_5^2 \end{pmatrix} < 0. \end{aligned}$$

Выразим  $\widehat{I}_2$  из (П.11) в исходных терминах, используя для  $\tau_2$  и  $\tau_3$  обозначения из (П.2) и полагая  $\tau_5 \triangleq 2/\varepsilon_5^2$ . В результате получим, что МН (П.11) совпадает с МН (4.12).

Поскольку система двух МН (4.5) и (4.6) эквивалентна результирующему МН (4.7), то система двух МН (4.11) и (4.12) тоже эквивалентна МН (4.7), а следовательно, и исходной системе (3.4).

Теорема 5 доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shorten R., Wirth F., Mason O. et al.* Stability Criteria for Switched and Hybrid Systems // SIAM Rev. 2007. No. 4. P. 545–592.
2. *Lin H., Antsaklis P.J.* Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: a Survey of Recent Results // IEEE Trans. Autom. Control. 2009. V. 54. No. 2. P. 308–322.
3. *Fradkov A.* Early Ideas of the Absolute Stability Theory / 2020 European Control Conference (ECC). May 12–15. 2020. Saint Petersburg. Russia. P. 762–768. <https://ieeexplore.ieee.org/document/9143937>.
4. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Линейные матричные неравенства в системах управления с неопределенностью // АиТ. 2021. № 1. С. 3–54.  
*Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S.* Linear Matrix Inequalities in Control Systems with Uncertainty // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 1. P. 1–40.
5. *Александров А.Ю., Платонов А.В.* Об устойчивости решений одного класса нелинейных разностных систем с переключениями // АиТ. 2016. № 5. С. 37–49.  
*Aleksandrov A.Yu., Platonov A.V.* On Stability of Solutions for a Class of Nonlinear Difference Systems with Switching // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 5. P. 779–788.
6. *Проскурников А.В., Матвеев А.С.* Критерии Цыпкина и Джури-Ли синхронизации и устойчивости дискретных многоагентных систем // АиТ. 2018. № 6. С. 119–139.  
*Proskurnikov A.V., Matveev A.S.* Tsyppkin and Jury-Lee Criteria for Synchronization and Stability of Discrete-Time Multiagent Systems // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 6. P. 1057–1073.
7. *Каменецкий В.А.* Частотные условия устойчивости дискретных систем с переключениями // АиТ. 2018. № 8. С. 3–26.  
*Kamenetskiy V.A.* Frequency-Domain Stability Conditions for Discrete-Time Switched Systems // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 8. P. 1371–1389.
8. *Каменецкий В.А.* Системы с переключениями, системы Лурье, абсолютная устойчивость, проблема Айзермана // АиТ. 2019. № 8. С. 9–28.  
*Kamenetskiy V.A.* Switched Systems, Lur’e Systems, Absolute Stability, Aizerman Problem // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 8. P. 1375–1389.
9. *Гусев С.В., Лихтарников А.Л.* Очерк истории леммы Калмана–Попова–Якубовича и S-процедуры // АиТ. 2006. № 10. С. 77–121.  
*Gusev S.V., Likhtarnikov A.L.* Kalman-Popov-Yakubovich Lemma and the S-Procedure: A Historical Essay // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 11. P. 1768–1810.

10. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
11. Каменецкий В.А. Абсолютная устойчивость дискретных систем управления с нестационарными нелинейностями // Аит. 1985. № 8. С. 172–176.
12. Якубович В.А. Абсолютная устойчивость импульсных систем с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. I, II // Аит. 1967. № 9. С. 59–72; 1968. № 2. С. 81–101.  
*Yakubovich V.A. Absolute Stability of Pulsed Systems with Several Nonlinear or Linear but Nonstationary Blocks. I, II // Autom. Remote Control. 1967. V. 28. No. 9. P. 1301–1313; 1968. V. 29. No. 2. P. 244–263.*
13. Шепелявый А.И. Абсолютная неустойчивость нелинейных амплитудно-импульсных систем управления. Частотные критерии // Аит. 1972. № 6. 49–56.  
*Shepel'yavi A.I. Absolute Instability of Nonlinear Pulse-Amplitude Control Systems. Frequency Criteria // Autom. Remote Control. 1972. V. 33. No. 6. P. 929–935.*
14. Каменецкий В.А. Частотные условия устойчивости гибридных систем // Аит. 2017. № 12. С. 3–25.  
*Kamenetskiy V.A. Frequency-Domain Stability Conditions for Hybrid Systems // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 12. P. 2101–2119.*
15. Молчанов А.П. Функции Ляпунова для нелинейных дискретных систем управления // Аит. 1987. № 6. С. 26–35.  
*Molchanov A.P. Lyapunov Functions for Nonlinear Discrete-Time Control Systems // Autom. Remote Control. 1987. V. 48. No. 6. P. 728–736.*
16. *Kamenetskiy V. Stability Conditions for Systems with Switching Between Four Linear Discrete Subsystems / Proceedings of the 15th International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference) (STAB-2020, Moscow). New York: IEEE Catalog Number CFP20E79-ART, 2020. С. 1–4. <https://ieeexplore.ieee.org/document/9140572>.*
17. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакиным.*

Поступила в редакцию 21.02.2022

После доработки 28.04.2022

Принята к публикации 10.06.2022

© 2022 г. В.А. МОЗЖЕЧКОВ, д-р техн. наук (v.a.moz@yandex.ru)  
(Тульский государственный университет)

## СИНТЕЗ ПРОСТЫХ РЕЛЕЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается задача синтеза релейных регуляторов с простой структурой в составе автоколебательной системы с линейным объектом управления. Структура регулятора считается простой, если ее невозможно упростить, поскольку упрощение, состоящее в исключении из нее любого элемента, приводит к невозможности выполнить все требования, предъявляемые к системе. Необходимо обеспечить наличие в системе автоколебаний с заданной частотой и амплитудой и приблизить ее поведение к желаемому. Предложен метод решения рассматриваемой задачи.

*Ключевые слова:* структурный синтез, автоколебания, релейный регулятор.

DOI: 10.31857/S0005231022090045, EDN: AIMROJ

### 1. Введение

Релейные регуляторы отличаются от непрерывных ступенчатым изменением формируемой ими кусочно-постоянной управляющей величины, которая может принимать только два или три значения. Им часто отдают предпочтение в сравнении с непрерывными регуляторами, в частности, благодаря простоте их технической реализации, низкой стоимости и высокой надежности. Управляющая величина, формируемая в таких регуляторах, является выходом релейного элемента, основанного на применении, например, электронных или электромагнитных ключей, пневматических или гидравлических запорных клапанов.

Важным и широко распространенным классом систем управления с релейным регулятором являются релейные автоколебательные системы. В них автоколебания являются установившимся рабочим режимом, в котором регулируемая величина колеблется в окрестности требуемого значения в допустимом для целей регулирования диапазоне. Релейные системы в ряде случаев способны обеспечить лучшие динамические свойства по сравнению с иными типами систем управления. При малых отклонениях регулируемой величины от требуемого значения поведение таких систем с приемлемой точностью аппроксимируется линейными динамическими моделями, что интерпретируют как результат линеаризации автоколебаниями релейного элемен-

та системы управления. Это позволяет для синтеза таких систем использовать понятийный аппарат и математические методы теории линейных систем управления.

Релейным автоколебательным системам управления посвящено значительное число публикаций, их обзор представлен, в частности, в [1–6]. В большей части они посвящены методам анализа таких систем. Наиболее широко распространенным методом анализа автоколебательных систем управления является метод гармонической линеаризации [5–7]. Методы синтеза, излагаемые в [2, 3, 8, 9], различаются главным образом математическим инструментарием определения частоты, амплитуды автоколебаний и свойств синтезируемой системы. Используемая в них процедура синтеза предполагает задание фиксированной структуры регулятора и выбор значений его параметров на основе оптимизационных методов нелинейного программирования с целью придания синтезируемой системе желаемых свойств. Такой подход к синтезу системы обладает рядом недостатков. Во-первых, в таком случае решается задача параметрического, но не структурного синтеза. Как следствие, конструктор системы, получив решение, не располагает информацией о том, насколько оно выигрышно или проигрышно в сравнении с решениями, основанными на применении альтернативных структур. В частности, при этом не удастся получить ответ на вопрос об отсутствии либо наличии избыточности в структуре регулятора. Во-вторых, методы нелинейного программирования не гарантируют нахождение решения, достаточно близкого к оптимальному. Для их эффективной работы необходимо задание хорошего начального приближения значений параметров регулятора к оптимальным. Получив решение, конструктор не знает, насколько оно близко к глобально оптимальному. В-третьих, указанный выше подход к синтезу требует больших вычислительных затрат, что ограничивает размерность решаемых задач и, как следствие, сужает сферу его применения.

Рассматриваемая в настоящей работе математическая постановка задачи и предлагаемый метод ее решения обладают перечисленными ниже положительными отличиями.

1. Структура регулятора определяется в результате решения задачи синтеза и исходно считается неизвестной. В статье показана возможность автоматически находить структуры релейных регуляторов, обеспечивающие решение задачи синтеза и не обладающие избыточностью, т.е. простые структуры [10], при этом производится исчерпывающий анализ возможных вариантов структур.

2. Процедура синтеза сводится в основном к решению систем линейных алгебраических уравнений и неравенств, что позволяет использовать эффективные методы линейной алгебры, которые по сравнению с методами нелинейного программирования гарантируют нахождение точного решения поставленной задачи и не требуют задания начальных приближений.

3. Предлагаемый метод синтеза релейных регуляторов автоколебательных систем позволяет решать задачи большой размерности в короткое время с высокой точностью.

## 2. Постановка задачи

Объект управления описывается системой уравнений

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + Bu,$$

$$(2) \quad y = Cx,$$

где  $x$  — вектор состояния объекта управления,  $\dot{x} = dx/dt$ ,  $t$  — время,  $u$  — скалярное управляющее воздействие,  $y$  — вектор выходов, все его компоненты могут использоваться в регуляторе в качестве сигналов обратных связей, его первая компонента  $y_1$  — регулируемая переменная — является выходом синтезируемой системы, значения переменных  $t$ ,  $u$ , элементов векторов  $x$ ,  $y$ , элементов заданных постоянных матриц  $A$ ,  $C$  и вектора  $B$  — действительные числа, пара  $(A, B)$  является управляемой, а пара  $(A, C)$  — наблюдаемой.

Регулятор описывается системой уравнений

$$(3) \quad \dot{z} = A_z z - B_y y + B_g g,$$

$$(4) \quad u^* = C_z z - D_y y + D_g g,$$

$$(5) \quad u = U \operatorname{sgn}(u^*).$$

Уравнения (3), (4) [11–14] описывают линейную часть регулятора. В них  $z$  — вектор состояния регулятора,  $\dot{z} = dz/dt$ ,  $g$  — скалярное задающее воздействие (вход системы),  $u^*$  — скалярный выход линейной части регулятора, значения переменных  $u^*$ ,  $g$ , элементов вектора  $z$ , элементов постоянных векторов  $B_g$ ,  $D_g$  и матриц  $A_z$ ,  $B_y$ ,  $C_z$ ,  $D_y$  — действительные числа. Уравнение (5) описывает релейный элемент (реле) регулятора,  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  — функция знака,  $u$  — выход регулятора. Амплитуду  $U$  выхода реле, частоту  $\omega_0$  и амплитуду  $U^*$  автоколебаний на входе реле считаем заданными положительными действительными числами.

Из системы (1), (2), используя преобразование Лапласа, получим уравнение

$$(6) \quad a(p)y(p) = b(p)u(p),$$

отражающее зависимость изображения  $y(p)$  вектора выходов объекта управления от изображения  $u(p)$  управляющего воздействия, в нем  $a(p)$  — характеристический полином объекта управления,  $b(p)$  — вектор, компоненты которого — полиномы числителей передаточных функций (ПФ)  $y(p)/u(p)$ ,  $p$  — переменная преобразования Лапласа.

Из (3), (4) аналогично [11–13] получим уравнение, отражающее зависимость изображения  $u^*(p)$  выхода линейной части регулятора от изображе-

ния  $g(p)$  задающего воздействия и от изображения  $y(p)$  вектора выходов:

$$(7) \quad r(p)u^*(p) = q_g(p)g(p) - \ell^\top(p)y(p),$$

где  $r(p)$  — характеристический полином линейной части регулятора,  $q_g(p)$  — числитель ПФ линейной части регулятора по задающему воздействию,  $\ell(p)$  — вектор, компоненты которого — полиномы числителей ПФ линейной части регулятора по сигналам обратных связей. Считаем, что задан нижний предел  $\mu$  допустимых значений индекса (относительной степени) ПФ линейной части регулятора.

Пусть задана ПФ  $W^*(p) = h_g^*(p)/h_s^*(p)$ , определяющая желаемое поведение системы (1)–(5), в ней

$$\begin{aligned} \deg(h_g^*(p)) &\leq \deg(h_s^*(p)), \\ \deg(h_s^*(p)) &\geq \deg(a(p))(1 + 1/\dim(y)) + \mu - 3, \\ h_g^*(p) &= h'_g(p)b_1(p), \end{aligned}$$

$h_s^*(p)$  — гурвицев полином,  $\deg(\cdot)$  — степень полинома (целое число),  $\dim(\cdot)$  — размерность вектора.

Требуется выбрать значения коэффициентов линейной части (3), (4) регулятора так, чтобы в системе (1)–(5) имели место автоколебания с частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $U^*$ , а ее реакция  $y_1(t)$  на каждое задающее воздействие  $g(t)$  из назначенного набора была достаточно близкой к реакции  $y_L(t)$  на то же воздействие линейной стационарной системы с ПФ  $y_L(p)/g(p) = W^*(p)$ . Структура регулятора должна быть простой, что означает [10] присутствие в ней только тех коэффициентов, выбор отличных от нуля значений которых необходим и достаточен для придания системе требуемых свойств. Необходимо найти структуры регуляторов, соответствующие перечисленным требованиям.

### 3. Метод решения

Следуя методу гармонической линеаризации [5–7] и принимая свойственные ему допущения, заменим описание реле регулятора (5) приближенным описанием:

$$(8) \quad u(p) = Ku^*(p),$$

где  $K$  — коэффициент гармонической линеаризации реле. Известно [5], что для рассматриваемого двухпозиционного реле в установившемся режиме автоколебаний

$$(9) \quad K = 4U/(\pi U^*).$$

Согласно (9) значение  $K$  однозначно определено заданными значениями  $U$  и  $U^*$ .

Из (6)–(8) следуют уравнения [11–13], отражающие зависимость изображения  $y_1(p)$  выхода гармонически линеаризованной системы (ГЛС) от изоб-

ражения  $g(p)$  задающего воздействия:

$$(10) \quad h_s(p)y_1(p) = h_g(p)g(p),$$

$$(11) \quad h_g(p) = b_1(p)q_g(p)K,$$

$$(12) \quad h_s(p) = a(p)r(p) + \ell^\top(p)b(p)K,$$

где  $h_s(p)$  и  $h_g(p)$  — характеристический полином и полином числителя ПФ ГЛС, значение  $K$  считаем постоянным, равным его значению в установившемся режиме автоколебаний.

Из (11), полагая  $h_g(p) = h_g^*(p)$ , получим

$$(13) \quad q_g(p) = h_g'(p)/K.$$

Для существования в системе (1)–(5) автоколебаний с частотой  $\omega_0$  согласно методу гармонической линеаризации [5–7] необходимо обеспечить наличие у полинома  $h_s(p)$  пары чисто мнимых корней  $\pm j\omega_0$  и отрицательность действительной части остальных корней. Для приближения реакции  $y_1(t)$  на задающие воздействия системы (1)–(5) к реакции  $y_L(t)$  на те же воздействия системы с ПФ  $W^*(p) = h_g^*(p)/h_s^*(p)$  необходимо, чтобы полином  $h_s(j\omega)$  был близок к  $h_s^*(j\omega)$ . Для выполнения указанных условий обеспечим равенство

$$(14) \quad h_s(p) = h_s^*(p)(p^2/\omega_0^2 + 1),$$

которое в силу свойств полиномов  $h_s^*(p)$  и  $(p^2/\omega_0^2 + 1)$  гарантирует наличие у  $h_s(p)$  требуемых корней и обеспечивает близость полинома  $h_s(j\omega)$  к полиному  $h_s^*(j\omega)$  в области значений  $\omega$  меньших, чем  $\omega_0$ , т.е. в области частот полезных сигналов.

Приравняв правые части (12) и (14), получим уравнение

$$(15) \quad a(p)r(p) + \ell^\top(p)b(p)K = h_s^*(p)(p^2/\omega_0^2 + 1),$$

которое с учетом (9) позволяет определить  $r(p)$  и  $\ell(p)$ , обеспечивающие выполнение необходимых условий существования автоколебаний с частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $U^*$ , а также близость полиномов  $h_s(j\omega)$ ,  $h_s^*(j\omega)$  в области частот полезных сигналов. Уравнение (15) линейно относительно  $r(p)$  и  $\ell(p)$  и сводится [11–13] в результате приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях переменной  $p$  к системе линейных уравнений

$$(16) \quad G\alpha = h,$$

где вектор неизвестных  $\alpha$  составлен из коэффициентов искомым полиномов, а вектор  $h$  из коэффициентов полинома  $h_s^*(p)(p^2/\omega_0^2 + 1)$ . Элементы матрицы  $G$  — числа, определяемые значениями коэффициентов полиномов объекта управления (6) и значением коэффициента  $K$ . Матрица  $G$  имеет [13]  $\sigma + \deg(a(p)) + 1$  строк и  $\sigma + 1 + (\sigma + 1 - \mu)\dim(y)$  столбцов, где  $\sigma = \deg(r(p))$  — порядок регулятора. Для совместности системы (16) необходимо, чтобы число строк матрицы  $G$  было равно размерности вектора  $h$ , откуда

следует требование

$$(17) \quad \sigma = \deg(h_s^*(p)) - \deg(a(p)) + 2.$$

Равенство (17) однозначно определяет порядок регулятора  $\sigma$ , поскольку значения  $\deg(h_s^*(p))$ ,  $\deg(a(p))$  однозначно определены в исходных данных решаемой задачи.

Для того чтобы система (16) имела не менее, чем одно решение, необходимо, чтобы в матрице  $G$  число столбцов было больше или равно числу строк, что эквивалентно условию [13]

$$(18) \quad \sigma \geq \deg(a(p))/\dim(y) + \mu - 1.$$

Совместность требований (17), (18) достигается выполнением при назначении ПФ  $W^*(p) = h_g^*(p)/h_s^*(p)$  условия

$$\deg(h_s^*(p)) \geq \deg(a(p))(1 + 1/\dim(y)) + \mu - 3.$$

Максимальную структуру [10] линейной части регулятора опишем уравнением (7), в котором порядок  $\sigma = \deg(r(p))$  линейной части регулятора выбран согласно (17),  $\deg(\ell_k(p)) = \sigma - \mu$ ,  $k = 1, \dots, \dim(y)$ ,  $\deg(q_g(p)) = \sigma - \mu$ , а значения всех коэффициентов полиномов могут свободно выбираться. Максимальной структуре соответствует система (16), решения которой будем использовать для определения  $r(p)$  и  $\ell(p)$ . Она, согласно теореме Кронекера–Капелли, совместна тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы  $G$  равен рангу ее расширенной матрицы, т.е. когда  $\text{rank}(G) = \text{rank}(G|h)$ . Если  $\text{rank}(G) = \text{rank}(G|h) = \dim(\alpha)$ , система (16) имеет единственное решение, однозначно определяющее  $r(p)$  и  $\ell(p)$ , при этом максимальная структура не избыточна и соответствует определению простой структуры [10]. Если  $\text{rank}(G) = \text{rank}(G|h) < \dim(\alpha)$ , максимальная структура избыточна и система (16) имеет бесконечное множество решений. Для выделения конечного множества предпочтительных решений и исключения избыточности в структуре регулятора потребуем, чтобы решение было простым [10] или, что эквивалентно, чтобы решение имело простую структуру [10]. Для нахождения решений системы (16) с простой структурой (простых решений), однозначно определяющих  $r(p)$  и  $\ell(p)$ , можно воспользоваться алгоритмом, изложенным в [10].

Будем рассматривать случай, когда допустимо ограниченное отклонение коэффициентов полинома  $h_s(p)$  от их заданных значений. Для выполнения при этом требования равенства частоты автоколебаний заданному значению добавим в (16) два уравнения, описывающие условие равенства нулю при  $p = \pm j\omega_0$  мнимой и действительной частей полинома, представленного в правой части уравнения (12), и сформируем векторы  $h^-$ ,  $h^+$ , определяющие диапазоны допустимых значений компонент вектора  $h$ . Требование (16) замещается условием

$$(19) \quad h^- \leq G\alpha \leq h^+.$$

Для поиска простых решений системы (19) будем использовать метод, изложенный в [10].

Для устойчивости автоколебаний в системе (1)–(5) необходимо, чтобы при положительном приращении амплитуды  $U^*$  размах колебаний убывал, а при отрицательном увеличивался, стремясь к значению  $U^*$ . Из представленного условия следует критерий устойчивости автоколебаний [6, с. 229], применяемый в методе гармонического баланса: характеристический полином ГЛС (12), при подстановке в него возмущенного значения  $K$ , соответствующего согласно (9) значению амплитуды  $U^* + \Delta U^*$ ,  $\Delta U^* > 0$ , должен быть гурвицевым, а в случае  $\Delta U^* < 0$  должен иметь корень с положительной вещественной частью. Указанный критерий устойчивости выражается формулой

$$(20) \quad \rho(h_s(p, U^* + \varepsilon)) < 0, \quad \rho(h_s(p, U^* - \varepsilon)) > 0,$$

где  $\rho(\cdot)$  — максимальное значение действительной части корней (спектральный радиус) полинома,  $\varepsilon$  — малое положительное число. Более строгий критерий устойчивости автоколебаний [15, с. 227; 16, с. 238] состоит в выполнении условия

$$(21) \quad (\Psi_{Ru}/\Psi_{R\omega} - \Psi_{Iu}/\Psi_{I\omega})/(\Psi_{I\xi}/\Psi_{I\omega} - \Psi_{R\xi}/\Psi_{R\omega}) < 0,$$

в котором

$$\begin{aligned} \Psi_{Ru} &= \partial \operatorname{Re}(h_s(\xi + j\omega_0, U^*)) / \partial U^*; & \Psi_{R\xi} &= \partial \operatorname{Re}(h_s(\xi + j\omega_0, U^*)) / \partial \xi; \\ \delta \Psi_{R\omega} &= \partial \operatorname{Re}(h_s(\xi + j\omega_0, U^*)) / \partial \omega_0; \\ \Psi_{Iu} &= \partial \operatorname{Im}(h_s(\xi + j\omega_0, U^*)) / \partial U^*; & \Psi_{I\xi} &= \partial \operatorname{Im}(h_s(\xi + j\omega_0, U^*)) / \partial \xi; \\ \delta \Psi_{I\omega} &= \partial \operatorname{Im}(h_s(\xi + j\omega_0, U^*)) / \partial \omega_0, \end{aligned}$$

все производные берутся при  $\xi = 0$ .

Решение рассматриваемой задачи выполняется в следующей последовательности. Согласно (13) находим полином  $q_g(p)$ . Находим  $r(p)$  и  $\ell(p)$ , решая соответствующую максимальной структуре систему (16) либо (19) при помощи методов поиска простых решений систем уравнений и неравенств, предложенных в [10]. Из множества вариантов регуляторов, соответствующих найденным  $q_g(p)$ ,  $r(p)$ ,  $\ell(p)$ , исключаются те, которые не обеспечивают выполнение условий устойчивости (20), (21). Для оставшихся вариантов проводится проверка их приемлемости численными методами с использованием системы уравнений (1)–(5) (проверяется наличие автоколебаний с частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $U^*$ , близкой к заданным значениям, а также близость реакции  $y_1(t)$  на задающие воздействия системы (1)–(5) к реакции  $y_L(t)$  на те же воздействия системы с ПФ  $y_L(p)/g(p) = W^*(p)$ ). Регуляторы, успешно прошедшие указанную проверку, составляют искомое множество регуляторов с простой структурой.

## 4. Примеры

*Пример 1.* Решим задачу синтеза простых релейных регуляторов автоколебательной системы управления электроприводом. Объект управления, включающий в себя двигатель постоянного тока с неизменным потоком возбуждения, редуктор и инерционную нагрузку, описывается уравнениями (1)–(2), в которых

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & C_m/J \\ 0 & -C_e/L & -R/L \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1/k_r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $R$ ,  $L$  — сопротивление и индуктивность якорной обмотки двигателя;  $C_e$ ,  $C_m$  — коэффициент противо ЭДС и коэффициент момента двигателя;  $k_r$  — коэффициент передачи редуктора;  $J$  — момент инерции подвижных частей, приведенный к валу двигателя. В международной системе единиц:  $R = 0,475$ ;  $L = 5,7 \cdot 10^{-4}$ ;  $C_e = C_m = 6,83 \cdot 10^{-2}$ ;  $k_r = 2$ ;  $J = 9,43 \cdot 10^{-5}$ . Вектор состояний  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , где  $x_1$  и  $x_2$  — угловое положение и угловая скорость вращения вала двигателя,  $x_3$  — ток в якорной обмотке. Вектор выходов  $y = (y_1, y_2, y_3) = (x_1/k_r, x_2, x_3)$ , в нем  $y_1$  — угловое положение выходного вала электропривода является выходом синтезируемой системы. Управляющим воздействием  $u$  является напряжение на якорной обмотке, его амплитуда  $U = 27$  В. Назначим  $U^* = 4U/(100\pi)$ , что согласно (9) соответствует значению  $K = 100$ . Полагаем  $\mu = 0$ .

Электропривод должен соответствовать следующим требованиям:

1) амплитуда  $\varepsilon$  автоколебаний регулируемой переменной  $y_1$  должна быть не более 0,5 мрад;

2) при единичном ступенчатом воздействии  $g_1(t)$  перерегулирование должно быть не более 15%, время переходного процесса — не более 0,075 с (время, после которого модуль ошибки регулирования не превышает 0,01 рад); установившееся значение  $y_1(t)$  должно быть равно  $1 \pm \varepsilon$ ;

3) при воздействии  $g_2(t)$ , возрастающем с постоянной скоростью 5 градусов в секунду, установившееся значение ошибки регулирования должна быть не более  $1 + \varepsilon$  мрад.

Из анализа амплитудно-частотных характеристик объекта управления следует, что требование к амплитуде автоколебаний ( $\varepsilon \leq 0,5$  мрад) обеспечивается, если частота автоколебаний  $\omega_0 \geq 6 \cdot 10^3$  рад/с, поэтому принимаем  $\omega_0 = 6 \cdot 10^3$  рад/с.

Заданные требования к точности обработки задающих воздействий  $g_1(t)$ ,  $g_2(t)$  выполняются, если реакция  $y_1(t)$  привода на эти воздействия будет близкой к реакции  $y_L(t)$  линейной системы, описываемой ПФ  $W^*(p) = y_L(p)/g(p) = h_g^*(p)/h_s^*(p)$ , в которой  $h_g^*(p) = 7,84 \cdot 10^{-3}p + 1$ ,  $h_s^*(p) = p^3/\omega_s^3 + 1,44 \cdot 10^{-4}p^2 + 1,69 \cdot 10^{-2}p + 1$ ,  $\omega_s = 118$ . Корни  $h_s^*(p)$ :  $(-118, 0 \cdot j)$ ,  $(-59, \pm 102 \cdot j)$ . Значения коэффициентов и степени полиномов  $h_g^*(p)$ ,  $h_s^*(p)$

выбраны из условия выполнения требований к точности отработки задающих воздействий, а также из условия минимизации значения  $\omega_s$ , традиционно используемого при выборе желаемой ПФ [6, с. 99] с целью минимизации потребной полосы пропускания системы и, таким образом, потребной области частот полезных сигналов. Получено значение  $\omega_s \ll \omega_0$ . Степени полиномов  $h_g^*(p)$ ,  $h_s^*(p)$  последовательно наращивались начиная с единицы до значений, при которых удается выполнить все требования к системе. Степень полинома  $h_s^*(p)$  обеспечивает совместность условий (17), (18). Допустимо отклонение  $\omega_0$  и  $U^*$  от заданных значений не более чем на  $\pm 10\%$  и  $\pm 15\%$ . Среднеквадратическое отклонение  $y_1(t)$  от  $y_L(t)$  при воздействиях  $g_1(t)$ ,  $g_2(t)$  не должно превышать 1%. Завершив постановку задачи синтеза, приступим к ее решению.

Поскольку  $\deg(h_s^*(p)) = 3$ , то из (17) находим  $\sigma = 2$ .

Из (1), (2) получаем уравнение (6), в котором

$$a(p) = p^3/Q + R/(LQ)p^2 + C_e p, \quad b(p) = (1/k_r, p, p^2/(LQ)),$$

где  $Q = C_m/(JL)$ .

Из равенства  $h_g^*(p) = h'_g(p)b_1(p)$  следует:

$$h'_g(p) = h_g^*(p)k_r = (7,84 \cdot 10^{-3}p + 1) \cdot 2.$$

Согласно (13) находим:  $q_g(p) = h'_g(p)/K = 15,68 \cdot 10^{-5}p + 2 \cdot 10^{-2}$ .

Значения  $r(p)$  и  $\ell(p)$  найдем, решив систему (16), соответствующую максимальной структуре регулятора с  $\sigma = 2$ . В ней вектор неизвестных будет  $\alpha = (\ell_{10}, \ell_{11}, \ell_{12}, \ell_{20}, \ell_{21}, \ell_{22}, \ell_{30}, \ell_{31}, \ell_{32}, r_0, r_1, r_2)^\top$ , где  $\ell_{ki}$  — коэффициент при множителе  $p^i$  в полиноме  $\ell_k(p)$ , являющимся  $k$ -й компонентой вектора  $\ell(p)$ ;  $r_0, r_1, r_2$  — коэффициенты полинома  $r(p)$ . Ее матрица

$$G = \begin{pmatrix} \frac{K}{k_r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K}{k_r} & 0 & K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K}{k_r} & 0 & K & 0 & \frac{K}{(LQ)} & 0 & 0 & \frac{R}{(LQ)} & C_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K & 0 & \frac{K}{(LQ)} & 0 & 1/Q & \frac{R}{(LQ)} & C_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{K}{(LQ)} & 0 & \frac{1}{Q} & \frac{R}{(LQ)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Q} \end{pmatrix}.$$

Вектор ее правой части

$$h = (1, 1,69 \cdot 10^{-2}, 1,44 \cdot 10^{-4}, 6,00 \cdot 10^{-7}, 3,83 \cdot 10^{-12}, 1,62 \cdot 10^{-14})$$

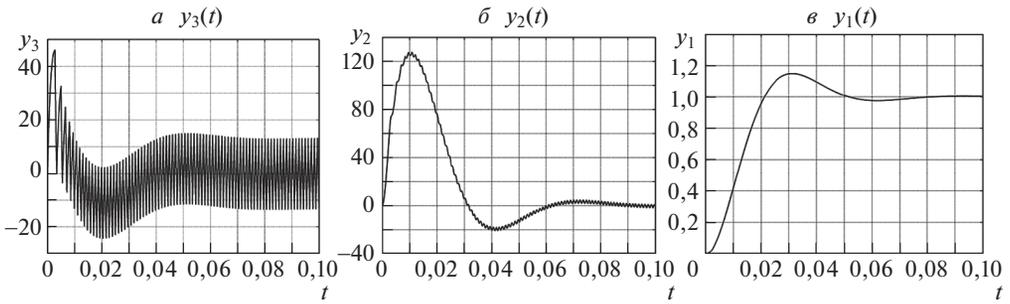


Рис. 1. Графики реакции системы (1)–(5) с регулятором № 1 (табл. 1) на единичное ступенчатое воздействие.

составлен из коэффициентов полинома  $h_s^*(p)(p^2/\omega_0^2 + 1)$ . Система (16) имеет не единственное решение, поскольку в ней  $\text{rank}(G) = \text{rank}(G|h) = 6 < \dim(\alpha) = 12$ . Согласно [10] находим простые решения системы (16), определяющие  $r(p)$ ,  $\ell(p)$ . Им соответствует  $h_s(p)$ , имеющий корни  $(0, \pm 6000 \cdot j)$ ,  $(-118, 0 \cdot j)$ ,  $(-59, \pm 102 \cdot j)$ , удовлетворяющие условию существования автоколебаний с частотой  $\omega_0 = 6000$  рад/с. Найденные полиномы  $q_g(p)$ ,  $r(p)$ ,  $\ell_k(p)$ ,  $k = 1, \dots, 3$  определяют варианты регуляторов, для которых проводим проверку условий устойчивости (20), (21) и проверку соответствия системы (1)–(5) назначенным требованиям. Уравнения линейной части регуляторов с простой структурой, успешно прошедших указанные проверки, представлены в табл. 1.

На рис. 1 представлены графики реакции системы (1)–(5) с релейным регулятором, линейная часть которого описывается уравнением, представленным вариантом № 1 в табл. 1, на единичное ступенчатое воздействие. Для указанного варианта отклонение параметров  $\omega_0$  и  $U^*$  от заданных значений составляет  $-9$  и  $+15\%$ , среднеквадратическое отклонение  $y_1(t)$  от  $y_L(t)$  при отработке воздействий  $g_1(t)$ ,  $g_2(t)$  не превышает  $0,3\%$ , графики реакций  $y_1(t)$ ,  $y_L(t)$  на единичное ступенчатое воздействие в данном случае визуально неразличимы.

*Пример 2.* Допустим возможность ослабления требования минимизации потребной полосы пропускания системы в задаче примера 1, заменив равен-

Таблица 1

№	Уравнение линейной части регулятора
1	$r_2 p^2 u^* = (q_{g0} + q_{g1} p) g - (\ell_{10} + \ell_{11} p + \ell_{12} p^2) y_1 - \ell_{22} p^2 y_2 - \ell_{32} p^2 y_3$
2	$r_2 p^2 u^* = (q_{g0} + q_{g1} p) g - (\ell_{10} + \ell_{11} p) y_1 - (\ell_{21} p + \ell_{22} p^2) y_2 - \ell_{32} p^2 y_3$
3	$r_2 p^2 u^* = (q_{g0} + q_{g1} p) g - (\ell_{10} + \ell_{11} p) y_1 - (\ell_{30} + \ell_{31} p + \ell_{32} p^2) y_3$
4	$r_2 p^2 u^* = (q_{g0} + q_{g1} p) g - (\ell_{10} + \ell_{11} p) y_1 - \ell_{21} p y_2 - (\ell_{31} p + \ell_{32} p^2) y_3$
5	$r_2 p^2 u^* = (q_{g0} + q_{g1} p) g - (\ell_{10} + \ell_{11} p + \ell_{12} p^2) y_1 - (\ell_{31} p + \ell_{32} p^2) y_3$
6	$r_2 p^2 u^* = (q_{g0} + q_{g1} p) g - \ell_{10} y_1 - (\ell_{20} + \ell_{21} p + \ell_{22} p^2) y_2 - \ell_{32} p^2 y_3$

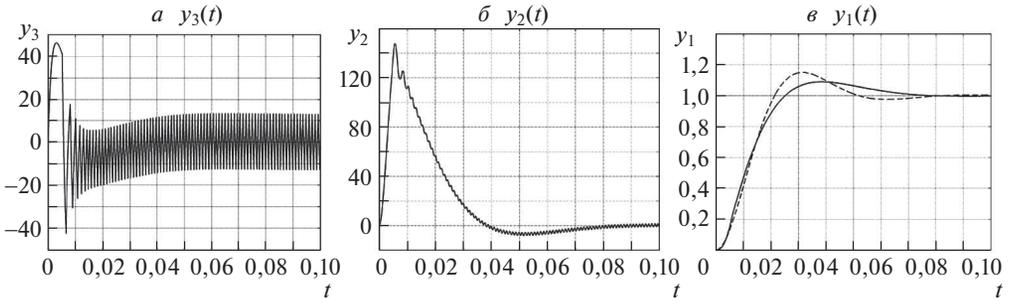


Рис. 2. Графики реакции системы (1)–(5) с регулятором № 1 (табл. 2) на единичное ступенчатое воздействие, на рис. 2, в пунктиром показан график реакции  $y_L(t)$  на единичное ступенчатое воздействие системы с ПФ  $W^*(p)$ .

ство  $\omega_s = 118$  условием  $118 \leq \omega_s \leq 700$ , что эквивалентно условию  $3 \cdot 10^{-9} \leq h_{s3}^* \leq 6 \cdot 10^{-7}$ . Требования к остальным коэффициентам  $h_s^*(p)$  остаются неизменными, в таком случае полином  $h_s^*(p)$  остается гурвицевым, система с ПФ  $W^*(p)$  обрабатывает контрольные воздействия с заданной точностью. Увеличим до 5% допустимое среднеквадратическое отклонение  $y_1(t)$  от  $y_L(t)$  при обработке контрольных воздействий системой (1)–(5). В данном случае система уравнений (16) замещается неравенствами (19). Согласно [10] находим простые решения системы (19), определяющие  $r(p)$ ,  $\ell(p)$ . Им соответствует  $h_s(p)$ , имеющий корни  $(0, \pm 6000 \cdot j)$ ,  $(-5,3 \cdot 10^4, 0 \cdot j)$ ,  $(-59, \pm 61 \cdot j)$ , удовлетворяющие необходимому условию существования автоколебаний с частотой  $\omega_0 = 6000$  рад/с. Полиномы  $q_g(p)$ ,  $r(p)$ ,  $\ell_k(p)$ ,  $k = 1, \dots, 3$  определяют варианты регуляторов, для которых проводим проверку условий устойчивости (20), (21) и проверку соответствия системы (1)–(5) назначенным требованиям. Уравнения линейной части регуляторов с простой структурой, успешно прошедших указанные проверки, представлены в табл. 2.

Из сопоставления табл. 1 и 2 следует, что результатом расширения диапазона допустимых значений  $h_{s3}$  явилось сокращение на единицу числа коэффициентов в уравнении регулятора.

На рис. 2 представлены графики реакции системы (1)–(5) с релейным регулятором, линейная часть которого описывается уравнением, представленным вариантом № 1 в табл. 2, на единичное ступенчатое воздействие. Для указанного варианта отклонение параметров  $\omega_0$  и  $U^*$  от заданных значений

Таблица 2

№	Уравнение линейной части регулятора
1	$r_1 p + r_2 p^2 u^* = (q_{g0} + q_{g1} p) g - (\ell_{10} + \ell_{11} p + \ell_{12} p^2) y_1$
2	$r_1 p + r_2 p^2 u^* = (q_{g0} + q_{g1} p) g - (\ell_{10} + \ell_{11} p) y_1 - \ell_{21} p y_2$
3	$r_1 p + r_2 p^2 u^* = (q_{g0} + q_{g1} p) g - (\ell_{10} + \ell_{12} p^2) y_1 - \ell_{20} p y_2$
4	$r_1 p + r_2 p^2 u^* = (q_{g0} + q_{g1} p) g - \ell_{10} y_1 - (\ell_{20} + \ell_{21} p^2) y_2$

составляет  $-5$  и  $+12\%$ , среднеквадратическое отклонение  $y_1(t)$  от  $y_L(t)$  при отработке воздействий  $g_1(t)$ ,  $g_2(t)$  не превышает  $4,5\%$ .

## 5. Заключение

В статье предложен новый подход к синтезу релейных регуляторов с простой структурой в составе автоколебательной системы с линейным объектом управления, позволяющий автоматически находить структуры релейных регуляторов, обеспечивающие решение задачи синтеза и не обладающие избыточностью. При этом производится исчерпывающий анализ возможных вариантов структур. Процедура синтеза сводится в основном к решению систем линейных алгебраических уравнений и неравенств, что позволяет использовать эффективные методы линейной алгебры, которые гарантируют нахождение точного решения поставленной задачи и не требуют задания начальных приближений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цыпкин Я.З.* Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974.
2. *Фалдин Н.В.* Релейные системы автоматического управления // Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ. 2004.
3. *Voiko I.* Discontinuous Control Systems. Boston: Birkhauser, 2009.
4. *Voiko I.M., Kuznetsov N.V., Mokaev R.N., Akimova E.D.* On asymmetric periodic solutions in relay feedback systems // J. Franklin Institut. 2021. V. 358. (1). P. 363–383.
5. *Попов Е.П., Пальтов И.П.* Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М.: Физматгиз, 1960.
6. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1975.
7. *Леонов Г.А.* О методе гармонической линеаризации // АиТ. 2009. № 5. С. 65–75.  
*Leonov G.A.* On the method of harmonic linearization // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 5. P. 800–810.
8. *Руднев С.А., Фалдин Н.В.* О расширении области применимости условий устойчивости релейных систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 5. С. 193–196.
9. *Фалдин Н.В., Руднев С.А.* Синтез релейных систем методом фазового годографа // Изв. Вузов. Приборостроение. 1982. № 7. С. 32–36.
10. *Мозжечков В.А.* Синтез линейных регуляторов с простой структурой // АиТ. 2003. № 1. С. 27–41.  
*Mozzhechkov V.A.* Design of Simple-Structure Linear Controllers // Autom. Remote Control. 2003. V. 64. No. 1. P. 23–36.
11. *Гайдук А.Р.* Синтез систем автоматического управления по передаточным функциям // АиТ. 1980. № 1. С. 11–16.  
*Gajduk A.R.* Design of control systems from transfer functions // Autom. Remote Control. 1980. V. 41. No. 1. P. 6–11.

12. *Гайдук А.Р.* О синтезе систем управления при заданной форме воздействий // *АиТ.* 1984. № 6. С. 13–20.  
*Gajduk A.R.* On design of control systems with a specified form of exogenous signals // *Autom. Remote Control.* 1984. V. 45. No. 6. P. 692–699.
13. *Гайдук А.Р.* Выбор обратных связей в системе управления минимальной сложности // *АиТ.* 1990. № 5. С. 29–37.  
*Gajduk A.R.* Choice of feedbacks in a control system of minimal complexity // *Autom. Remote Control.* 1990. V. 51. No. 5. P. 593–600.
14. *Воевода А.А., Чехонадских А.В.* Оптимизация расположения полюсов системы управления с регулятором пониженного порядка // *Автометрия.* 2009. Т. 4. № 5. С. 113–123.
15. *Пановко Я.Г.* Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1971.
16. *Горяченко В.Д.* Элементы теории колебаний. М.: Высшая школа, 2001.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.*

Поступила в редакцию 16.11.2021

После доработки 25.05.2022

Принята к публикации 10.06.2022

© 2022 г. В.Н. ТХАЙ, д-р физ.-мат. наук (tkhai@ipu.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ УПРАВЛЯЕМОЙ ОБРАТИМОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассматриваются обратимые механические системы, обладающие свойством пространственно-временной симметрии и выделяющиеся линейным преобразованием фазового пространства. Предполагается, что система допускает невырожденное симметричное периодическое движение. Решается задача стабилизации колебания управляемой обратимой механической системы. Находятся управления, строится притягивающий цикл. Приводится пример.

*Ключевые слова:* обратимая механическая система, симметричное периодическое движение, семейство, управление, притягивающий цикл, естественная стабилизация.

DOI: 10.31857/S0005231022090057, EDN: AIPBRB

### 1. Введение

Для гамильтоновой системы на плоскости Л.С. Понтрягин доказал [1] теорему, обеспечивающую существование предельного цикла: в систему вводятся малые автономные негамильтоновы слагаемые. Этот результат в [2] интерпретируется как естественное решение задачи стабилизации колебания путем использования малого гладкого автономного управления. Особенность постановки задачи стабилизации заключается в том, что стабилизируется не колебание исходной системы, а близкое ему колебание управляемой системы, что, однако, достаточно для приложений.

В подходе к решению задачи стабилизации выбранного колебания динамической системы путем конструирования асимптотически орбитально устойчивого цикла меняются свойства модели. Идея естественной коррекции модели, уже с выбранным явно управлением, ранее была (см. [2]) реализована в уравнении Ван дер Поля

$$\ddot{x} + x = \mu(1 - x^2)\dot{x},$$

в котором управлением  $\mu(1 - x^2)\dot{x}$  корректируется линейный осциллятор, что приводит к притягивающему циклу управляемой системы.

Подход Понтрягина в [2] разрабатывался для отдельной системы общего вида, множества динамических систем, а также динамической модели, содержащей слабо связанные подсистемы (МССП). При этом для МССП устанавливается принципиальная возможность решения задачи стабилизации колебания выбором надлежащих связей между подсистемами. В этом подходе корректируются связи между подсистемами. В результате получается естественное решение задачи стабилизации без применения иных управлений. В [2] построено управление для стабилизации колебаний консервативной системы с одной степенью свободы: для линейного осциллятора таким образом получается уравнение Ван Дер Поля.

В осцилляторе Ван дер Поля управление дается нелинейной силой — диссипацией, действующей в каждой текущей точке траектории: управление реализуется в контуре с триодом в мягком режиме его функционирования [3, с. 63]. В [4, 5] показано, что сила носит универсальный характер, доставляя универсальное управление для стабилизации колебания механической системы.

Постановки задачи управления колебаниями отличаются целями. Задачи решаются разными методами (см., например, [6–10]). Как правило, применяются управления, зависящие явно от времени. В подходе Понтрягина стабилизация достигается путем конструирования притягивающего цикла — орбитально асимптотического устойчивого изолированного периодического решения управляемой автономной системы. Автономное управление действует с малым коэффициентом усиления сигнала генератора. Найденным в [4] управлением достигается, к примеру, устойчивый колебательный режим маятника с желаемой энергией. В данной статье результаты [4] обобщаются на обратимую механическую систему.

Обратимые системы обладают фундаментальным свойством пространственно-временной симметрии (см. [11]). В частности, они описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Обратимые механические системы выделяются симметрией фазового пространства относительно линейного преобразования. К ним относятся основные модели аналитической механики: уравнения Лагранжа второго рода с позиционными силами, уравнения Воронца для неголономной системы, уравнения в квазикоординатах, задача трех тел, задача о вращении тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой и др. В общем случае система не консервативна.

## 2. Обратимая механическая система

Обратимая механическая система записывается в виде

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= U(u, v), & \dot{v} &= V(u, v), \\
 (1) \quad U(u, -v) &= -U(u, v), & V(u, -v) &= V(u, v), \\
 u &\in \mathbb{R}^l, & v &\in \mathbb{R}^n, & l &\geq n.
 \end{aligned}$$

В моделях аналитической механики за  $u$  обычно принимается вектор обобщенных координат (квазикоординат), а за  $v$  — вектор обобщенных скоростей (квазискоростей). Исследуется гладкая система (1).

Для системы (1) вводится неподвижное множество  $M = \{u, v : v = 0\}$ . Фазовое пространство системы симметрично относительно множества  $M$ . Поэтому траектории, пересекающие  $M$ , будут симметричными относительно  $M$ . Траектории, дважды пересекающие  $M$ , называются симметричными периодическими движениями (СПД). На них  $u(t) = u(-t)$ ,  $v(t) = -v(-t)$ .

Симметричное решение  $v = v(u_1^0, \dots, u_l^0, t)$  зависит только от начальной точки  $u^0$  на неподвижном множестве  $M$ . Поэтому необходимые и достаточные условия существования СПД периода  $T$  даются равенствами

$$(2) \quad v_s(u_1^0, \dots, u_l^0, \tau) = 0, \quad \tau = 0, T/2; \quad s = 1, \dots, n.$$

Условия (2) приводят к  $n$  равенствам, полученным при  $\tau = T/2$ . Пусть система (2) допускает решение

$$(3) \quad u_1^0 = u_1^*, \dots, u_l^0 = u_l^*, \quad T = T^*.$$

Тогда формируется матрица

$$A(u^0, T/2) = \|a_{sj}\| = \left\| \frac{\partial v_s(u_1^0, \dots, u_l^0, T/2)}{\partial u_j^0} \right\|,$$

в которой частные производные вычисляются для значений (3). В [12] вводится понятие.

*Определение 1.* Случай  $\text{rank } A(u^0, T/2) = n$  называется невырожденным для симметричного периодического движения, а само СПД — невырожденным.

Семейство СПД является  $k$ -параметрическим,  $k \geq l - n + 1$ . Для семейства невырожденных СПД:  $k = (l - n + 1)$ . Невырожденное СПД продолжается по  $T$  в фазовом пространстве на глобальное семейство  $\Sigma$  невырожденных СПД размерности  $k$  (см. [13]), причем продолжение происходит в направлениях увеличения и уменьшения периода. Сам период  $T(\hat{h})$  на  $\Sigma$  меняется монотонно с параметром  $\hat{h}$  (закон зависимости периода СПД от одного параметра, см. [12]). Для системы (1), содержащей параметра, семейство  $\Sigma$  продолжается по параметрам:  $\Sigma$  устойчиво относительно параметрических возмущений системы [12, разд. 3, свойство 2]. Семейство  $\Sigma$  заполняет инвариантное многообразие  $\hat{\Sigma}$ .

*Замечание 1.* Для обратимой механической системы (1) с первыми интегралами семейство невырожденных СПД может принадлежать интегральным поверхностям, образуя при этом в системе семейство размерности  $k > (l - n + 1)$  при  $l = n > 1$  (см. [13]).

Отметим, что отклонения  $\Delta_u, \Delta_v$  от СПД описываются системой уравнений, инвариантной относительно преобразования

$$(\Delta_u, \Delta_v, t) \rightarrow (\Delta_u, -\Delta_v, -t).$$

### 3. Редукция системы на многообразии $\hat{\Sigma}$

На многообразии  $\hat{\Sigma}$  семейство  $\Sigma$  описывается редуцированной обратимой механической системой.

*Лемма 1.* На многообразии  $\hat{\Sigma}$  семейство  $\Sigma$  описывается редуцированной обратимой механической системой вида (1), в которой  $u \in \mathbb{R}^k$ ,  $k = l - n + 1$ ,  $a, v \in \mathbb{R}$ .

*Доказательство.* Из равенств (2), как следствие, при  $\tau = T/2$  получаются линейные равенства

$$\begin{aligned} \xi_s &\equiv a_{s1}(u^0, \tau) du_1^0 + \dots + a_{sl}(u^0, \tau) du_l^0 + b_s(u^0, \tau) d\tau = 0, \\ b_s &= \partial v_s(u^0, \tau) / \partial t; \quad s = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

выполняющиеся на  $\tilde{\Sigma}$ . Для семейства  $\Sigma$  справедливо условие  $\text{rank } A = n$ , поэтому линейным преобразованием  $\eta = P\xi$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  с постоянной матрицей  $P$  в векторной форме  $\eta$  выделяется форма  $\eta_1$ : формы  $\eta_2, \dots, \eta_n$  тождественно равны нулю. Преобразование справедливо для любой точки  $(q^0, \tau)$ , поэтому выделение происходит на всем  $\tilde{\Sigma}$ . В силу существования в (1) семейства  $\Sigma$  размерности  $k$  на  $\hat{\Sigma}$  оно описывается обратимой механической системой вида (1) с векторами  $u \in \mathbb{R}^k$  и  $v \in \mathbb{R}$ .

*Следствие 1.* В консервативной системе семейство  $\Sigma$  описывается консервативной системой с одной степенью свободы.

В самом деле, в консервативной системе  $l = n$ , поэтому в редуцированной системе  $l = n = 1$ ; сами траектории остаются траекториями консервативной системы. Результат установлен ранее.

*Замечание 2.* Для обратимой механической системы (1) с первыми интегралами редуцированная система выделяется на уровне постоянной интеграла.

Согласно лемме 1 редуцированная система описывается обратимой механической системой вида (1), в которой  $u \in \mathbb{R}^k$ ,  $v \in \mathbb{R}$ . Эта система допускает  $k$ -параметрическое семейство  $T$ -периодических СПД по параметру  $h = (h_1, \dots, h_k)$ . Для невырожденного СПД период зависит только от одного параметра [12]. Без ограничения общности принимается, что период  $T(\hat{h})$  является функцией переменной  $\hat{h} = h_k$ . Семейство невырожденных СПД редуцированной системы дается формулами

$$(4) \quad \begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(h, t), \dots, u_k = \varphi_k(h, t), \quad v = \psi(h, t), \\ \varphi_s(h, -t) &= \varphi_s(h, t), \quad \psi(h, t) = -\psi(h, t), \quad s = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Поэтому система уравнений в вариациях обладает системой из  $k$  периодических решений

$$(5) \quad \begin{aligned} \delta u_s^{(j)}(h, t) &= \frac{\partial \varphi_s(h, t)}{\partial h_j}, \quad \delta v^{(j)}(h, t) = \frac{\partial \psi(h, t)}{\partial h_j}, \quad j = 1, \dots, k-1, \\ \delta u_s^{(k)}(h, t) &= \dot{u}_s(h, t), \quad \delta v^{(k)}(h, t) = \dot{v}(h, t). \end{aligned}$$

#### 4. Условия существования цикла на $\hat{\Sigma}$

На  $\hat{\Sigma}$  рассматривается управляемая обратимая механическая система

$$(6) \quad \dot{u}_s = U_s(u, v) + \bar{F}_s, \quad \dot{v} = V(u, v) + \bar{G}, \quad s = 1, \dots, k.$$

Предполагается, что при  $\bar{F} \equiv 0$ ,  $\bar{G} \equiv 0$  система (6) допускает  $k$ -семейство невырожденных СПД (4). Система (6) исследуется в окрестности решения (4), отвечающего значению параметра  $h = h^*$ . Ставится задача нахождения гладких управлений

$$(7) \quad \bar{F} = \varepsilon F, \quad F = (F_1, \dots, F_k), \quad \bar{G} = \varepsilon G$$

с малым коэффициентом  $\varepsilon$  усиления регулятора таких, чтобы система (6) допускала притягивающий цикл, близкий к СПД с  $h = h^*$ :  $T^* = T(h^*)$ .

В  $\varepsilon$ -окрестности СПД с  $h = h^*$  записывается линейная неоднородная система уравнений, полученная из (6):

$$(8) \quad \begin{aligned} \delta \dot{u}_s &= \sum_{j=1}^k a_{sj}^-(h^*, t) \delta u_j + a_s^+(h^*, t) \delta v + F_s, \\ \delta \dot{v} &= \sum_{j=1}^k b_j^+(h^*, t) \delta u_j + b^-(h^*, t) \delta v + G, \quad s = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

В (8) через  $(\cdot)^+(t)$  и  $(\cdot)^-(t)$  обозначаются четные и нечетные  $T^*$ -периодические функции. Система в вариациях для СПД будет однородной частью системы (8). Вследствие инвариантности системы (1) относительно преобразования  $(u, v, t) \rightarrow (u, -v, -t)$  и симметричности СПД эта система будет инвариантной относительно преобразования  $(\delta u, \delta v, t) \rightarrow (\delta u, -\delta v, -t)$ .

Для краткости записи далее используются матричные и векторные обозначения

$$a^- = \|a_{sj}^-\|, \quad a^+ = (a_1^+, \dots, a_k^+)^T, \quad b^+ = (b_1^+, \dots, b_k^+), \quad f_+ = \|f_{sj}^+\|.$$

В них верхний или нижний символы  $+$  и  $-$  означают четную (нечетную) функцию переменной  $t$ : матрица  $f_+$  вводится ниже. Применяется преобразование

$$\delta u = f_+(h^*, t)\xi, \quad f_+(h^*, t) \neq 0, \quad \dot{f}_+(h^*, t) = a^-(h^*, t),$$

в котором в силу нечетности функций в матрице  $a^-(h^*, t)$  матрица  $f_+(h^*, t)$  находится с точностью до постоянной матрицы  $f_c$ . Тем самым невырожденность матрицы  $f_+(h^*, t)$  при любом  $t$  гарантируется выбором  $f_c$ . В результате получается

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= a^+(h^*, t) f_+^{-1}(h^*, t) \delta v + f_+^{-1}(h^*, t) F, \\ \delta \dot{v} &= b^+(h^*, t) f_+(h^*, t) \xi + b^-(h^*, t) \delta v + G.\end{aligned}$$

Вторым преобразованием

$$\delta v = g_+(h^*, t) \eta, \quad g_+(h^*, t) \neq 0, \quad \dot{g}_+(h^*, t) = b^-(h^*, t),$$

в котором  $g_+(h^*, t)$  выбирается так же, как ранее  $f_+(h^*, t)$ , уравнения (8) приводятся к виду

$$(9) \quad \begin{aligned}\dot{\xi} &= a^+(h^*, t) f_+^{-1}(h^*, t) g_+(h^*, t) \eta + f_+^{-1}(h^*, t) F, \quad \xi \in \mathbb{R}^k, \\ \dot{\eta} &= b^+(h^*, t) f_+(h^*, t) g_+^{-1}(h^*, t) \xi + g_+^{-1}(h^*, t) G, \quad \eta \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Система

$$(10) \quad \begin{aligned}\dot{z} &= -b^+(h^*, t) f_+(h^*, t) g_+^{-1}(h^*, t) w, \quad z \in \mathbb{R}, \\ \dot{w} &= -a^+(h^*, t) f_+^{-1}(h^*, t) g_+(h^*, t) z, \quad w \in \mathbb{R}^k,\end{aligned}$$

сопряженная к однородной части системы (9), не меняет вида при преобразовании  $(z, w, t) \rightarrow (\pm z, \mp w, -t)$ . Поэтому ее  $T^*$ -периодические решения  $(z^{(j)}(h^*, t), w^{(j)}(h^*, t))$  общим числом  $k$  обладают свойством четности и нечетности:

$$z^{(j)}(h^*, -t) = \pm z^{(j)}(h^*, t), \quad w^{(j)}(h^*, -t) = \mp w^{(j)}(h^*, t).$$

В переменных  $\xi = w, \eta = -z$  уравнения (9) совпадают с уравнениями (10), если  $F \equiv 0, G \equiv 0$ . Следовательно, сопряженная система (10) имеет  $k$  периодических решений

$$\begin{aligned}z^{(j)}(h^*, t) &= -g_+^{-1}(h^*, t) \frac{\partial \psi(h^*, t)}{\partial h_j}, \quad w^{(j)}(h^*, t) = f_+^{-1}(h^*, t) \frac{\partial \varphi(h^*, t)}{\partial h_j}, \\ & \quad j = 1, \dots, k-1, \\ z^{(k)}(h^*, t) &= -g_+^{-1}(h^*, t) \dot{\psi}_k(h^*, t), \quad w^{(k)}(h^*, t) = f_+^{-1}(h^*, t) \dot{\varphi}_k(h^*, t).\end{aligned}$$

Выражениями

$$(11) \quad x_j = \eta z^{(j)}(h^*, t) + \xi w^{(j)}(h^*, t), \quad j = 1, \dots, k$$

даются первые интегралы уравнений в вариациях. Поэтому для неоднородной системы (8) получается

$$(12) \quad \dot{x}_j = g_+^{-1}(h^*, t) G z^{(j)}(h^*, t) + f_+^{-1}(h^*, t) F w^{(j)}(h^*, t), \quad j = 1, \dots, k.$$

Из формул (11) видно, что при  $(\xi, \eta) \rightarrow (\xi, -\eta)$  переменные  $x_j$  не меняют знаки. Поэтому этими переменными, дополненными переменной  $y$  (формула для  $y$  приводится в разд. 6), однородная часть системы (9) преобразовывается к виду, сохраняющему обратимость системы.

Выполненные преобразования справедливы для произвольного значения параметра  $h$ . С учетом этого обстоятельства записываются необходимые и достаточные условия

$$(13) \quad I_j(h) \equiv \int_0^{T^*} \left[ g_+^{-1}(h, t) G z^{(j)}(h, t) + f_+^{-1}(h, t) F w^{(j)}(h, t) \right] dt = 0, \quad j = 1, \dots, k$$

существования изолированного  $T^*$ -периодического решения в системе (9). При этом управления  $F(u, v)$  и  $G(u, v)$  вычисляются на СПД, выделенного параметром  $h$ .

*Лемма 2. Необходимым условием существования цикла в управляемой обратимой механической системе будут равенства (13).*

*Доказательство.* В самом деле, равенствами (13) доставляются необходимые и достаточные условия существования  $T$ -периодического решения в первом по  $\varepsilon$  приближении, что означает необходимые условия существования такого решения в системе (6). Так как цикл есть изолированное периодическое решение автономной системы (6), то (13) необходимо выполняются для цикла.

Система (13) состоит из  $k$  уравнений с  $k$  неизвестными  $h_1, \dots, h_k$ . Достаточное условие существования цикла дается теоремой 1.

*Теорема 1. Достаточное условие существования в системе (6) цикла,  $\varepsilon$ -близкого к СПД (4) с параметром  $h = h^*$ , дается неравенством*

$$(14) \quad \det G \neq 0, \quad G = \left\| \frac{\partial I_j(h^*)}{\partial h_i} \right\|.$$

*Если все собственные значения матрицы  $G$  принадлежат левой полуплоскости, то цикл — притягивающий.*

*Доказательство.* Для системы (6) в окрестности решения (4) с  $h = h^*$  строится отображение  $t : 0 \rightarrow T$  на периоде  $T^*$ . Далее применяется стандартная техника для гладкого отображения. Тогда условие (14) гарантирует существование единственной неподвижной точки отображения. Для собственных значений матрицы  $G$ , принадлежащих левой полуплоскости, цикл становится притягивающим.

## 5. Случай $l = n$

Для обратимой механической системы с размерностями  $l = n$  число  $k = 1$ . Такими будут уравнения Лагранжа второго рода для голономной механической системы, подверженной действию позиционных сил, а также уравнения

в квазикоординатах. Редуцированная система описывается на плоскости системой (1), в которой  $l = n = 1$ . Она допускает однопараметрическое по  $\hat{h}$  семейство СПД

$$(15) \quad u = \varphi(\hat{h}, t), \quad v = \psi(\hat{h}, t).$$

Семейству СПД отвечает семейство периодических решений уравнений в вариациях, которая получается из системы

$$(16) \quad \delta \dot{u} = a^-(\hat{h}, t)\delta u + a^+(\hat{h}, t)\delta v + F, \quad \delta \dot{v} = b^+(\hat{h}, t)\delta u + b^-(\hat{h}, t)\delta v + G$$

при  $F \equiv 0$ ,  $G \equiv 0$ . Эти уравнения служат для нахождения необходимых и достаточных условий притягивающего цикла, которые даются первым приближением уравнений движения, составленных в окрестности выделенного СПД семейства (15).

Уравнениям в вариациях отвечает сопряженная система

$$\dot{z} = -a^-(\hat{h}, t)z - b^+(\hat{h}, t)w, \quad \dot{w} = -a^+(\hat{h}, t)z - b^-(\hat{h}, t)w.$$

При этом решению уравнений в вариациях

$$\delta u = \dot{\varphi}(\hat{h}, t), \quad \delta v = \dot{\psi}(\hat{h}, t)$$

отвечает решение

$$z = -g_+^{-1}(\hat{h}, t)\dot{\psi}(\hat{h}, t), \quad w = f_+^{-1}(\hat{h}, t)\dot{\varphi}(\hat{h}, t)$$

сопряженной системы. Поэтому необходимые и достаточные условия существования  $T$ -периодического решения в системе (16) сводятся к равенству

$$(17) \quad I(\hat{h}) \equiv \int_0^T \left[ -g_+^{-1}(\hat{h}, t)G\dot{\psi}(\hat{h}, t) + f_+^{-1}(\hat{h}, t)F\dot{\varphi}(\hat{h}, t) \right] dt = 0,$$

в котором согласно формулам перехода

$$f_+(\hat{h}, t) = \int a^-(\hat{h}, t)dt, \quad g_+(\hat{h}, t) = \int b^-(\hat{h}, t)dt.$$

В системе (16) одна из пар  $(F, G)$  управлений

$$\left( \sigma(1 - Ku^2)\hat{V}, 0 \right), \quad \left( 0, \sigma(1 - Ku^2)\hat{U}, 0 \right),$$

с функциями  $\hat{U}(u, v)$ ,  $\hat{V}(u, v)$  и постоянной  $K$  вполне решает задачу существования притягивающего цикла; число  $\sigma$  равно  $+1$  или  $-1$ . Тем не менее, следуя (5), в первой паре рассматривается конкретная функция

$$F = \sigma(1 - Ku^2)\hat{V} = \sigma(1 - Ku^2)\dot{u} = \sigma(1 - Ku^2)U(u, v).$$

Тогда получается амплитудное уравнение

$$\int_0^{T^*} f_+^{-1}(\hat{h}, t) \left[ 1 - K\varphi^2(\hat{h}, t) \right] \dot{\varphi}^2(\hat{h}, t) dt = 0.$$

Отсюда выводится формула

$$K = \frac{\int_0^{T^*} f_+^{-1}(\hat{h}^*, t) \dot{\varphi}^2(\hat{h}^*, t) dt}{\int_0^{T^*} f_+^{-1}(\hat{h}^*, t) \varphi^2(\hat{h}^*, t) \dot{\varphi}^2(\hat{h}^*, t) dt}$$

для вычисления числа  $K(\hat{h}^*)$ . При этом задается функция  $K(\hat{h})$ , а производная для функции  $I(\hat{h})$  в точке  $\hat{h}^*$  дается формулой

$$\frac{dI(\hat{h}^*)}{dh} = \sigma \frac{dK(\hat{h}^*)}{dh} \int_0^{T^*} f_+^{-1}(\hat{h}^*, t) \varphi^2(\hat{h}^*, t) \dot{\varphi}^2(\hat{h}^*, t) dt.$$

В результате справедлива теорема 2.

*Теорема 2. Для обратимой механической системы (1) с размерностями  $l = n$  в любой точке  $\hat{h} = \hat{h}^*$  семейства СПД, в которой  $dK(\hat{h}^*)/dh \neq 0$ , строится управляемая система с  $K = K(\hat{h}^*)$ , допускающая притягивающий цикл.*

*Замечание 3.* Число  $\sigma$  выбирается противоположным по знаку производной  $dK(\hat{h}^*)/dh$ .

*Замечание 4.* Для обратимой механической системы с одной степенью свободы результат впервые анонсирован в [2]: в [2] применялось управление, в котором  $F = 0$ ,  $G = \sigma(1 - Ku^2)V(u, v)$ .

*Замечание 5.* С учетом возможности приведения системы в вариациях на многообразии  $\hat{\Sigma}$  к виду (9) теоремой 2 обосновывается использование на  $\hat{\Sigma}$  управляемой системы (6) в исходных переменных.

## 6. Выбор управления

В первой группе из  $k - 1$  уравнений системы (13) функция  $z^{(j)}$  — нечетная, а функция  $w^{(j)}$  — четная. В последнем уравнении  $z^{(j)}$  — четная, а функция  $w^{(j)}$  — нечетная. На решении (4) функции  $F$  и  $G$  становятся  $T$ -периодическими. Поэтому при  $k > 1$  условия (13) не могут выполняться, если  $F \equiv 0$ . При четной функции  $G$  первые слагаемые в интегралах  $I_j$ ,  $j = 1, \dots, k - 1$  равны нулю. Поэтому  $F_j$  — четные функции, для  $j = 1, \dots, k - 1$ . В интеграле  $I_k$  функция  $G$  — четная (или равна) нулю, а функция  $F_k$  будет нечетной (или равной нулю).

Согласно проведенному анализу в системе амплитудных уравнений (13) полагается  $G \equiv 0$ . Также используются функции

$$(18) \quad \begin{aligned} F_s &= \sigma_s (1 - K_s \|u\|^2) \hat{U}_s(u, v), & F_k &= \sigma_k (1 - K_k \|u\|^2) \hat{V}(u, v), \\ \hat{U}_s(u, v) &= \hat{U}_s(u, -v), & \hat{V}(u, v) &= -\hat{V}(u, -v), \\ \|u\|^2 &= \sum_{i=1}^k u_i^2, & K_s &= \text{const}, \quad s = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Ими дается обобщение предложенного в [4] универсального управления для обратимой механической системы: числа  $\sigma_s$  принимают значение  $+1$  или  $-1$ .

*Лемма 3.* Для СПД с параметром  $h = h^*$  набор чисел  $(K_1, \dots, K_k)$  существует.

*Доказательство.* Вводится обозначение:  $f_+^{-1}(h, t) = \|c^+_{is}(h, t)\|$ . Тогда для  $T^* = T(h^*)$ -периодического решения условия (13) с функциями (18) записываются в виде системы амплитудных уравнений

$$(19) \quad \begin{aligned} I_j(h) &\equiv \int_0^{T^*} \sum_{s=1}^{k-1} \sigma_s c^+_{js}(h, t) [1 - K_s \|\varphi(h, t)\|^2] \hat{U}_s(h, t) w^{(j)}(h, t) dt + \\ &+ \int_0^{T^*} \sigma_k c^+_{jk}(h, t) [1 - K_k \|\varphi(h, t)\|^2] \hat{V}(h, t) w^{(k)}(h, t) dt = 0, \quad j = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Тогда числа  $K_s$  находятся из условия совместности системы линейных уравнений (19) при  $h = h^*$ .

Подынтегральные функции в (19) — четные. При каждом значении  $t$  ранг подынтегральной расширенной матрицы равен рангу подынтегральной основной матрицы. При разложении элементов матрицы — четных функций, в ряды Фурье, такое равенство сохраняется для матриц из средних значений функций на периоде. Следовательно, система линейных уравнений (19) с неизвестными  $K_1, \dots, K_k$  имеет решение.

*Замечание 6.* С набором чисел  $(K_1, \dots, K_k)$  система амплитудных уравнений (13) имеет корень  $h = h^*$ .

Числа  $K_s$  находятся для значения параметра  $h = h^*$ . При изменении  $h$  получаются функции  $K_s(h)$ . Числами  $K_s(h^*)$  гарантируется выполнение необходимых условий существования цикла. По теореме 1 задача конструирования притягивающего цикл в управляемой обратимой механической системе (6) завершается выбором функций  $\hat{U}_s, \hat{V}$ .

Нахождение функций  $K_s(h)$  в общем виде представляет собой отдельную задачу, сложность которой увеличивается с ростом размерности  $k > 1$ . Поэтому в качестве альтернативы предлагается подход, использующий управления (18), основанный на приведении уравнений в вариациях к системе с

постоянными коэффициентами. При этом само преобразование дается формулами (12), дополненными выражением для переменной  $y$

$$(20) \quad y = \eta \dot{\psi}(h, t) + \xi \dot{\varphi}(h, t).$$

В результате из (8) получается система

$$(21) \quad \begin{aligned} \dot{x}_j &= g_+^{-1} \bar{G} z^{(j)}(h, t) + f_+^{-1}(h, t) F w^{(j)}(h, t), \quad j = 1, \dots, k, \\ \dot{y} &= x_k + g_+^{-1} \bar{G} \dot{\psi}(h, t) + f_+^{-1}(h, t) F \dot{\varphi}(h, t). \end{aligned}$$

Далее используются функции

$$(22) \quad \begin{aligned} F_j &= -\sigma (1 - K \|u\|^2) \xi^{(j)}, \quad j = 1, \dots, k-1; \\ F_k &= -\sigma (1 - K \|u\|^2) z^{(j)}, \quad G \equiv 0. \end{aligned}$$

Тогда из системы (21) выводятся уравнения

$$(23) \quad \begin{aligned} \dot{x}_j &= -\varepsilon \sigma f_+^{-1}(h, t) (1 - K \|u(h, t)\|^2) x_j, \quad j = 1, \dots, k, \\ \dot{y} &= x_k - \varepsilon \sigma f_+^{-1}(h, t) (1 - K \|u(h, t)\|^2) y. \end{aligned}$$

Уравнения с номерами  $j = 1, \dots, k-1$  отделяются от подсистемы, включающей два последних уравнения. Согласно анализу в разделе 5 и теореме 2 последняя подсистема допускает единственное  $T^*$ -периодическое решение. Решение отвечает циклу,  $\varepsilon$ -близкому к СПД с  $h = h^*$ . При надлежащем выборе знака  $\sigma$  цикл будет орбитально асимптотически устойчивым.

В указанном решении  $x_k = 0$ , и нулевое решение уравнения по  $x_k$  — асимптотически устойчиво. В силу идентичности всех уравнений по переменным  $x_j$  система (21) допускает единственное асимптотически устойчивое  $T^*$ -периодическое решение. На нем  $x_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Переходом к системе (6) и выбором  $K = K(h^*)$  строится орбитально асимптотически устойчивый цикл системы (6), близкий к СПД с параметром  $h = h^*$ .

*Теорема 3. Управление (22) гарантирует существование и орбитально асимптотическую устойчивость цикла управляемой обратимой механической системы (6).*

Таким образом, теоремой 3 завершается решение задачи нахождения управлений, гарантирующей существование притягивающего цикла, близкого к СПД, для редуцированной обратимой механической системы.

## 7. Стабилизация цикла

Решение задачи о притягивающем цикле в редуцированной системе в общем случае, когда  $l \geq n > 1$  не приводит к стабилизации цикла в обратимой механической системе (1). Для стабилизации необходимо обеспечить притяжение траекторий к  $\hat{\Sigma}$ .

Согласно [14] невырожденному СПД семейства  $\Sigma$  отвечает  $k + 1$  нулевых характеристических показателей (ХП). При этом  $k - 1$  ХП — простые, а два ХП образуют жорданову клетку. Оставшиеся ХП образуют пары  $\pm\kappa$ . При действии соответствующего  $\varepsilon$ -малого управления эти пары ХП становятся ненулевыми. Поэтому необходимым условием стабилизации цикла управляемой обратимой механической системы будет принадлежность указанных пар  $\pm\kappa$  ХП мнимой оси.

Согласно теореме 1 цикл редуцированной системы стабилизируется естественным образом самим фактом его существования. Вывод справедлив для системы (8), в которой размерности  $l \geq n$ . Применим к такой системе лемму 1. Тогда на  $(k + 1)$ -многообразии строится управляемая система (6). Переменные, описывающие динамику вне  $\hat{\Sigma}$ , на  $\hat{\Sigma}$  принимают нулевые значения. Значит, эти переменные описывают динамику в окрестности нулевого по этим переменным равновесия. Предполагается, что пары  $\pm\kappa$  ХП принадлежат мнимой оси. Тогда  $\varepsilon$ -диссипация будет обеспечивать притяжение к многообразию  $\hat{\Sigma}$ .

Таким образом, справедлива теорема 4.

*Теорема 4. Пусть в обратимой механической системе (1) размерности  $l \geq n$ , и система допускает семейство  $\Sigma$  невырожденных СПД, заполняющее многообразие  $\hat{\Sigma}$ . Тогда задача стабилизации цикла управляемой системы решается построением управляемой редуцированной системы на  $\hat{\Sigma}$  и обеспечением притяжения траекторий к  $\hat{\Sigma}$ .*

*Замечание 7.* Конструктивное решение задачи построения многообразия  $\hat{\Sigma}$  и соответствующей редуцированной системы представляет собой нерешенную в общем случае задачу.

## 8. Пример. Стабилизация колебаний физического маятника

Физический маятник допускает два семейства маятниковых колебаний. Одно из них — плоское — известно с 1884 г. (см. [15]); собственно с этих движений тяжелое твердое тело с одной неподвижной точкой и центром масс, принадлежащим главной плоскости эллипсоида инерции, называется физическим маятником. Другое семейство — пространственное — получается продолжением второго ляпуновского семейства, существующего в окрестности нижнего положения равновесия тела. Многообразие, на котором происходят колебания второго семейства, пока не выделено.

Движение физического маятника описывается обратимой системой уравнений Эйлера–Пуассона

$$(24) \quad \begin{aligned} A\dot{p} &= (B - C)qr + Pz_0\gamma_2, & \dot{\gamma}_1 &= \gamma_2r - \gamma_3q, \\ B\dot{q} &= (C - A)rp + P(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1), & \dot{\gamma}_2 &= \gamma_3p - \gamma_1r, \\ C\dot{r} &= (A - B)pq - Px_0\gamma_2, & \dot{\gamma}_3 &= \gamma_1q - \gamma_2p. \end{aligned}$$

Здесь в обозначениях системы (1) вектор  $u = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ , вектор  $v = (p, q, r)$ ,  $l = n = 3$ , неподвижное множество  $M = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, p, q, r : p = 0, q = 0, r = 0)$ , а  $A, B, C, x_0, z_0$  — параметры.

Система (24) допускает (см. [15]) интегральное многообразие

$$\Psi = \{p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : p = 0, r = 0, \gamma_2 = 0\},$$

которое заполнено движениями физического маятника. Они симметричны относительно множества  $M$  и описываются тремя уравнениями

$$(25) \quad B\dot{q} = P(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1), \quad \dot{\gamma}_1 = -\gamma_3q, \quad \dot{\gamma}_3 = \gamma_1q.$$

После замены  $\gamma_1 = \rho \cos \theta$ ,  $\gamma_3 = \rho \sin \theta$ , учитывающей равенство модуля единичного вектора единице (см. [13]), для  $\Psi$  получается система третьего порядка

$$(26) \quad \begin{aligned} \dot{\rho} &= 0, \quad (\dot{\theta} = -q), \\ B\ddot{\theta} + P\rho\sqrt{x_0^2 + z_0^2} \sin(\theta - \alpha) &= 0, \quad \sin \alpha = x_0/\sqrt{x_0^2 + z_0^2}. \end{aligned}$$

При этом для каждого решения  $\rho = \rho_0(\text{const})$  имеем колебания математического маятника, которые объединяются при изменении  $\rho_0$  в двумерные семейства СПД ( $k = 2 > l - n + 1$ ). Физическому содержанию задачи отвечает значение  $\rho_0 = 1$ .

На трехмерном многообразии строится управляемая система

$$(27) \quad \begin{aligned} \delta\dot{\rho} &= \varepsilon\sigma(1 - K\theta^2)\delta\rho, \quad \delta\rho = \rho - 1, \\ B\ddot{\theta} + P\rho\sqrt{x_0^2 + z_0^2} \sin(\theta - \alpha) &= \varepsilon\sigma(1 - K\theta^2)\dot{\theta}, \end{aligned}$$

в которой число  $K = K(h^*)$ :  $h^*$  — значение энергии для цикла. К системе (27) применяется теорема 3. Получается притягивающий цикл, для которого  $\delta\rho = 0$ . Притяжение траекторий к трехмерному многообразию обеспечивается принадлежностью ХП чисто мнимой оси и применением  $\varepsilon$ -линейной диссипации. Теорема 4 здесь формально не применяется.

В другом подходе выделяется двумерное многообразие  $\Psi_2$ , на котором динамика описывается вторым уравнением системы (26). К колебаниям маятника (СПД) применяется теорема 2, и на  $\Psi_2$  строится притягивающий цикл. Далее учитывается пара простых нулевых ХП СПД, второй из которых отвечает интегралу кинетического момента. Применяется теорема 4. В результате стабилизация цикла всей системы обеспечивается чисто мнимыми ХП пары  $\pm\kappa$  СПД.

Оба подхода приводят к притягивающему циклу, близкому к СПД математического маятника. Второй подход применялся ранее, функция для математического маятника  $K(h)$  вычислялась.

## 9. Заключение

Обратимые механические системы обладают фундаментальным свойством пространственно-временной симметрии и выделяются симметрией фазового пространства относительно линейного преобразования. Этими системами описываются основные модели аналитической механики: уравнения Лагранжа второго рода с позиционными силами, уравнения Воронца для неголомонной системы, уравнения в квазикоординатах, задача трех тел, задача о вращении тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой и др.

Задача стабилизации одночастотного колебания управляемой обратимой системы решается следующим образом. Выделяется интегральное многообразие  $\hat{\Sigma}$ , заполненное семейством невырожденных СПД. На  $\hat{\Sigma}$  строится редуцированная управляемая обратимая механическая система. Наконец, обеспечивается притяжение траекторий к  $\hat{\Sigma}$ . Задача решается конструктивно.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л.С.* О динамических системах, близких к гамильтоновым // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1934. Т. 4. Вып. 9. С. 883–885.
2. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний автономной системы // АИТ. 2016. № 6. С. 38–46.  
*Tkhai V.N.* Stabilizing the Oscillations of an Autonomous System // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 6. P. 972–979.
3. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956.
4. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы // АИТ. 2019. № 11. С. 83–92.  
*Tkhai V.N.* Stabilizing the Oscillations of a Controlled Mechanical System // Automation and Remote Control. 2019. V. 80. No. 11. P. 1996–2004.
5. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы с  $N$  степенями свободы // АИТ. 2020. № 9. С. 93–104.  
*Tkhai V.N.* Stabilizing the Oscillations of an  $N$  Degree of Freedom Controlled Mechanical System // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 9. P. 1637–1646.
6. *Fradkov A.L.* Swinging Control of Nonlinear Oscillations // Int. J. Control. 1996. V. 64. Iss. 6. P. 1189–1202.
7. *Shiriaev A., Perram J.W., Canudas-de-Wit C.* Constructive Tool for Orbital Stabilization of Underactuated Nonlinear Systems: Virtual Constraints Approach // IEEE T. Automat. Contr. 2005. V. 50. No. 8. P. 1164–1176.
8. *Boubaker O.* The Inverted Pendulum Benchmark in Nonlinear Control Theory: a Survey // Int. J. Adv. Robot. Syst. 2013. V. 10. No. 5. 233–242.
9. *Kant K., Mukherjee R., Khalil H.* Stabilization of Energy Level Sets of Underactuated Mechanical Systems Exploiting Impulsive Braking // Nonlinear Dynam. 2021. V. 106. P. 279–293.
10. *Guo Yu., Hou B., Xu Sh., Mei R., Wang Z., Huynh V. Th.* Robust Stabilizing Control for Oscillatory Base Manipulators by Implicit Lyapunov Method // Nonlinear Dynam. 2022. V. 108. P. 2245–2262.

11. *Lamb J.S.W., Roberts J.A.G.* Time-reversal Symmetry in Dynamical Systems: a Survey // *Physica D*. 1998. V. 112. No. 1–2. P. 1–39.
12. *Тхай В.Н.* О поведении периода симметричных периодических движений // *Прикл. матем. и механ.* 2012. Т. 76. Вып. 4. С. 616–622.
13. *Тхай В.Н.* Колебания и равновесия в обратимой механической системе // *Вестник СПбГУ. Сер. 1. Матем. Механ. Астрон.* 2021. Вып. 4. С. 709–715.
14. *Тхай В.Н.* Об устойчивости регулярных прецессий Гриоли // *Прикл. матем. и механ.* 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 848–857.
15. *Млодзиевский Б.К.* О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // *Тр. отд. физ. наук о-ва любит. естеств., антропол. и этнограф.* 1894. Т. 7. Вып. 1. С. 46–48.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.М. Красносельским.*

Поступила в редакцию 17.03.2022

После доработки 18.05.2022

Принята к публикации 10.06.2022

## Стохастические системы

© 2022 г. А.В. БОРИСОВ, д-р физ.-мат. наук (A.Borisov@frcsc.ru),  
А.В. БОСОВ, д-р техн. наук (A.Bosov@frcsc.ru)  
(Федеральный исследовательский центр  
“Информатика и управление” РАН, Москва)

### ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТАБИЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ СО СКАЧКООБРАЗНЫМ СЛУЧАЙНЫМ ДРЕЙФОМ ПО КОСВЕННЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ<sup>1</sup>

Исследуются вопросы реализации стратегии оптимального управления, полученного в [1] и дополненного в [2]. Алгоритм оптимальной стабилизации линейной стохастической дифференциальной системы в положении, определяемом кусочно-постоянным марковским дрейфом, опробован на значительном числе модельных экспериментов. Значение дрейфа наблюдается косвенно, т.е. задача управления решается в постановке с неполной информацией. Практическая реализация осложняется неустойчивостью численных схем Эйлера–Маруямы, реализующих фильтр Вонэма, который является ключевым элементом оптимальной стратегии управления. Для выполнения расчетов фильтр Вонэма аппроксимируется устойчивыми схемами, основанными на оптимальной фильтрации марковских цепей по дискретизованным наблюдениям [3]. Эти схемы имеют разную сложность реализации и порядки точности. В статье проведен сравнительный анализ качества управления для различных устойчивых аппроксимаций фильтра Вонэма и его типовой реализации с помощью схемы Эйлера–Маруямы. Помимо этого, выполнено сравнение трех вариантов дискретизованных фильтров и даны финальные рекомендации по их применению в задаче стабилизации системы со скачкообразно изменяющимся дрейфом.

*Ключевые слова:* управление линейной дифференциальной системой, марковская цепь с непрерывным временем, квадратичный функционал качества, фильтр Вонэма, схема Эйлера–Маруямы, дискретизованный фильтр.

DOI: 10.31857/S0005231022090069, EDN: AJBXXKL

#### 1. Введение

Отправной точкой для постановки задачи, исследованной в работе, является один прикладной пример из [4]. Он представляет собой специальный

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-28-00588, <https://rscf.ru/project/22-28-00588/>. Работа выполнялась с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования “Высокопроизводительные вычисления и большие данные” (ЦКП “Информатика” ФИЦ ИУ РАН, Москва).

случай задачи оптимальной квадратичной стабилизации состояния линейной стохастической дифференциальной системы. Особенность этого примера состоит в представлении системы в форме “вход-выход”, где вход является внешним неуправляемым процессом, а задача заключается в стабилизации выхода. Важнейшим фактором, влияющим на управление в таких задачах, является наличие или отсутствие полной информации о входных воздействиях. Управление по неполной информации всегда значительно сложнее, но интереснее с прикладной точки зрения. К обобщениям упомянутой задачи стабилизации состояния линейной стохастической системы по квадратичному критерию на случай неполной информации следует относить статьи [5–7]. В них использовался частный случай критерия, включающий только слагаемые с управлением. Наиболее общий результат получен в [8] для случая классического квадратичного критерия и произвольных марковских входных воздействий. Отметим, что упомянутые работы носят чисто теоретический характер без акцента на практическую реализацию.

Для аналогичной модели в [1, 2] предложена конструктивная интерпретация входа как воздействия, требующего ответной управляемой реакции. Для этого в квадратичный функционал включены слагаемые с разностью между входными и выходными переменными, т.е. дана возможность ставить задачу слежения за траекторией входа. Постановка с неполной информацией, в которой процесс выхода представляет наблюдения входного процесса, приводит к вспомогательной задаче фильтрации. В обсуждаемой модели использование в качестве входа цепи Маркова с конечным числом состояний привело к фильтру Вонэма [9]. В сочетании с универсальными свойствами квадратичного критерия для решаемой задачи в [1] удалось доказать теорему разделения и получить замкнутые уравнения для оптимальной стратегии стабилизации, обеспечивающей эффективный алгоритм отслеживания изменяющегося дрейфа линейной системы, а в [2] — дополнить решение для случая полной информации, получив в том числе референсные характеристики управления. Кроме того, в [1, 2] приведен содержательный прикладной пример использования предложенной модели для описания простого механического привода. В численных экспериментах использовалась простая аппроксимация фильтра Вонэма методом Эйлера–Маруямы [10]. Для иллюстрации результатов была опубликована лишь небольшая часть выполненных экспериментов. Большинство же экспериментов оказалось не слишком удачным из-за неустойчивости использованной схемы Эйлера–Маруямы для реализации фильтра Вонэма.

Трудности с практическим применением фильтра Вонэма известны [11, 12], равно как и способы их преодоления. Пример такого рода кратко обсуждается в [2] и состоит в использовании численных схем дискретизованных фильтров [3]. Степень целесообразности и эффективности применения этих алгоритмов при реализации решения задачи стабилизации требует проведения масштабных сравнительных экспериментов и анализа их результатов, который и представлен в статье.

## 2. Модель и оптимальное управление

Кратко сформулируем основной результат статей [1, 2]. На каноническом вероятностном пространстве с фильтрацией  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \{\mathcal{F}_t\})$ ,  $t \in [0, T]$ , рассматривается задача управления для линейной дифференциальной стохастической системы с управляемым вектором выхода  $z_t \in \mathbb{R}^{n_z}$  вида

$$(1) \quad dz_t = a_t y_t dt + b_t z_t dt + c_t u_t dt + \sigma_t dw_t, \quad z_0 = Z,$$

и входом, задаваемым марковской цепью  $y_t$  с конечным числом состояний и значениями во множестве  $\{e_1, \dots, e_{n_y}\}$ , состоящем из единичных координатных векторов в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{n_y}$ . Распределение начального состояния  $y_0 = Y$  обозначается как  $\pi_0$ , матрица интенсивностей переходов — как  $\Lambda_t$ . Остальные величины в уравнении (1):

- $w_t \in \mathbb{R}^{n_w}$  — стандартный векторный винеровский процесс;
- $Z \in \mathbb{R}^{n_z}$  — гауссовская случайная величина с известными математическим ожиданием и ковариацией,  $w_t, y_t, Y, Z$  независимы в совокупности;
- $u_t \in \mathbb{R}^{n_u}$  — управление — случайный процесс с конечным вторым моментом;
- $a_t \in \mathbb{R}^{n_z \times n_y}$ ,  $b_t \in \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$ ,  $c_t \in \mathbb{R}^{n_z \times n_u}$ ,  $\sigma_t \in \mathbb{R}^{n_z \times n_w}$  — заданные матричные функции.

Управление  $u_t$  выбирается из класса допустимых управлений вида  $u_t = U_t(z_t)$ , т.е. в форме обратной связи по выходу. Закон управления  $U_t = U_t(z)$ ,  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ , является результатом оптимизации функционала качества вида

$$(2) \quad J(U_0^T) = \mathbb{E} \left\{ \int_0^T \|P_t y_t + Q_t z_t + R_t u_t\|_{S_t}^2 dt + \|P_T y_T + Q_T z_T\|_{S_T}^2 \right\},$$

где  $U_0^T = \{U_t(z), 0 \leq t \leq T\}$ ,  $P_t \in \mathbb{R}^{n_J \times n_y}$ ,  $Q_t \in \mathbb{R}^{n_J \times n_z}$ ,  $R_t \in \mathbb{R}^{n_J \times n_u}$ ,  $S_t \in \mathbb{R}^{n_J \times n_J}$ ,  $S_t \geq 0$ ,  $S_t = S'_t$ ,  $0 \leq t \leq T$ , — заданные ограниченные матричные функции,  $\|x\|_S^2 = x' S x$  — весовая функция, заданная симметричной неотрицательно определенной матрицей  $S$ , единичной матрице  $S$  соответствует евклидова норма  $|x|^2$ ,  $x'$  — транспонированная матрица,  $\mathbb{E}\{y\}$  — математическое ожидание  $y$ .

При выполнении стандартных условий для параметров (1), (2) (ограниченность, кусочная непрерывность, невырожденность  $R'_t S_t R_t > 0$  и  $\sigma_t \sigma'_t > 0$ ) решением задачи оптимизации

$$\hat{U}_0^T = \left\{ \hat{U}_t(z), 0 \leq t \leq T \right\} \in \operatorname{argmin} J(U_0^T)$$

является стратегия управления  $\hat{u}_t = \hat{U}_t(\hat{z}_t)$  вида

$$(3) \quad \hat{u}_t = -\frac{1}{2} (R'_t S_t R_t)^{-1} (c'_t (2\alpha_t \hat{z}_t + \beta_t \hat{y}_t) + 2R'_t S_t (P_t \hat{y}_t + Q_t \hat{z}_t)),$$

где

$$(4) \quad \frac{d\alpha_t}{dt} - (M_t^\alpha \alpha_t + \alpha_t'(M_t^\alpha)') + N_t^\alpha - \alpha_t' c_t (R_t' S_t R_t)^{-1} c_t' \alpha_t = 0, \quad \alpha_T = Q_T' S_T Q_T,$$

$$(5) \quad \frac{d\beta_t}{dt} + \beta_t \Lambda_t' + M_t^\beta - N_t^\beta \beta_t = 0, \quad \beta_T = 2Q_T' S_T P_T,$$

$$(6) \quad d\hat{y}_t = \Lambda_t' \hat{y}_t dt + (\text{diag}(\hat{y}_t) - \hat{y}_t \hat{y}_t') a_t' (\sigma_t \sigma_t')^{-1} \times \\ \times (d\hat{z}_t - a_t \hat{y}_t dt - b_t z_t dt - c_t \hat{u}_t dt), \quad \hat{y}_0 = \mathbb{E}\{Y\},$$

и через  $\hat{z}_t$  обозначена оптимальная траектория выхода, т.е. решение (1), отвечающее  $u_t = \hat{u}_t$ .

Соотношения для параметров уравнений (4) и (5):

$$M_t^\alpha = Q_t' S_t R_t (R_t' S_t R_t)^{-1} c_t', \quad N_t^\alpha = Q_t' (S_t - S_t R_t (R_t' S_t R_t)^{-1} R_t' S_t) Q_t, \\ M_t^\beta = 2 \left( (a_t' - P_t' S_t R_t (R_t' S_t R_t)^{-1} c_t') \alpha_t + P_t' (S_t - S_t R_t (R_t' S_t R_t)^{-1} R_t' S_t) Q_t \right), \\ N_t^\beta = Q_t' S_t R_t (R_t' S_t R_t)^{-1} c_t' + \alpha_t c_t (R_t' S_t R_t)^{-1} c_t'.$$

Таким образом, оптимальное управление является линейной функцией выхода  $z_t$  и оценки фильтрации  $\hat{y}_t$  входа  $y_t$ , которую определяет фильтр Вонэма [9]. Надо отметить, что уравнение (6), записанное для оценки  $\hat{y}_t = \mathbb{E}\{y_t | \mathcal{F}_t^z\}$ , имеет такой же вид для любого другого управления  $u_t$  и соответствующего ему выхода  $z_t$ , т.е.  $\hat{y}_t = \mathbb{E}\{y_t | \mathcal{F}_t^z\}$ . Здесь через  $\mathcal{F}_t^z$  обозначена  $\sigma$ -алгебра, порожденная наблюдаемыми величинами  $\{z_\tau, 0 \leq \tau \leq t\}$ , так что  $\mathcal{F}_t^z \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ ,  $\mathbb{E}\{y | \mathcal{F}\}$  — условное математическое ожидание  $y$  относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}$ .

Приведенные соотношения означают, что для практической реализации оптимальной стратегии стабилизации  $\hat{u}_t$ , в частности для проведения компьютерного моделирования, требуется:

- приближенно решать обыкновенные дифференциальные уравнения (4) и (5), для чего подойдет любая устойчивая численная схема,
- моделировать траектории цепи  $y_t$ , для чего достаточно уметь моделировать экспоненциально распределенные случайные величины с малыми интенсивностями, что также не представляет трудностей,
- моделировать траектории для решений уравнения Ито (1), здесь вполне подойдет простая схема метода Эйлера–Маруямы,
- приближенно вычислять решения соответствующего уравнения фильтра Вонэма (6).

Именно с последней задачей связаны действительные трудности, с которыми столкнулись авторы при подготовке численных примеров для статей [1, 2]. В итоге были выбраны наборы параметров, для которых фильтр Вонэма успешно аппроксимировался приближенным решением по схеме Эйлера–Маруямы. Анализ остальных экспериментов и варианту преодоления трудностей численной реализации оптимальной оценки фильтрации в них посвящена данная статья. Используется та же модель. Ее более подробное, чем в [1, 2], описание приведено в следующем разделе.

### 3. Модель механического привода и результативность управления

Образцом технической системы для предлагаемой модели привода является мостовой кран или кран-балка. Приводом обеспечивается перемещение по рельсу тележки с закрепленным талем для подъема груза. Перемещаемая тележка обладает значительной инерцией. Размещать ее требуется в конечном числе определенных положений на рельсе, например напротив линий погрузки-разгрузки или железнодорожных путей. В модели состояние привода описывается скалярной переменной  $x_t$ , задающей положение тележки на балке, и скоростью  $v_t$ , которая может регулироваться. Скорость определяется силой, которая линейно зависит от текущих положения и скорости, неконтролируемого входного воздействия  $y_t$  (номера линии погрузки) и управления  $u_t$ :

$$(7) \quad \begin{aligned} dx_t &= v_t dt, \quad t \in (0, T], \\ dv_t &= ax_t dt + bv_t dt - cy_t dt + hu_t dt + \sqrt{g} dw_t. \end{aligned}$$

В примерах, рассмотренных в [1, 2], марковская цепь  $y_t$  имеет три состояния, т.е.  $n_y = 3$ ,  $y_t \in \{e_1, e_2, e_3\}$ , и является однородной, т.е.  $\Lambda_t = \Lambda = \text{const}$ , начальное распределение  $\pi_0 = (1, 0, 0)'$ , т.е.  $y_0 = Y = e_1$ . Все примеры, обсуждаемые далее, используют цепь такой же размерности. Скаляры  $a, b, h, g$  и строка  $(c_1, c_2, c_3)$  — известные постоянные;  $w_t$  — стандартный винеровский процесс. Начальные условия  $x_0$  и  $v_0$  предполагаются независимыми гауссовскими случайными величинами с нулевым средним и дисперсиями  $\sigma_x^2 = 1$  и  $\sigma_v^2 = 1$ .

Нетрудно видеть, что система (7) является устойчивой, если  $b < 0$  и  $b^2 + 4a < 0$ , поскольку  $b$  и  $b^2 + 4a$  — собственные числа матрицы  $a_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ . Принципиальная возможность применения обсуждаемой стратегии стабилизации в условиях неустойчивой модели некоторый академический интерес представляет, но более важны реалистичные модели, поэтому большая часть расчетов представляется для исходной модели, использованной в [1]. Набор параметров таков:

$$(8) \quad \begin{aligned} a &= -1; \quad b = -0,5; \quad T = 10; \quad h = 10; \quad g = 0,01; \\ (c_1, c_2, c_3) &= (1, 0, -1); \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отметим, что однородная цепь  $y_t$  с такой матрицей интенсивностей является эргодической и ее предельное распределение  $\pi_\infty = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})'$ . Интегрирование в представленных далее расчетах для системы (7) и соответствующих уравнений (4) и (5) выполнялось методом Эйлера с шагами  $\delta = 0,005; 0,001; 0,0001$ . Дискретная цепь, аппроксимирующая  $y_t$ , моделировалась независимыми экспоненциальными величинами для 100 интервалов для каждого интервала интегрирования длины  $\delta$ , например для  $\delta = 0,001$  моделировалась выборка из распределения  $E(0,00001)$ . Для моделирования вы-

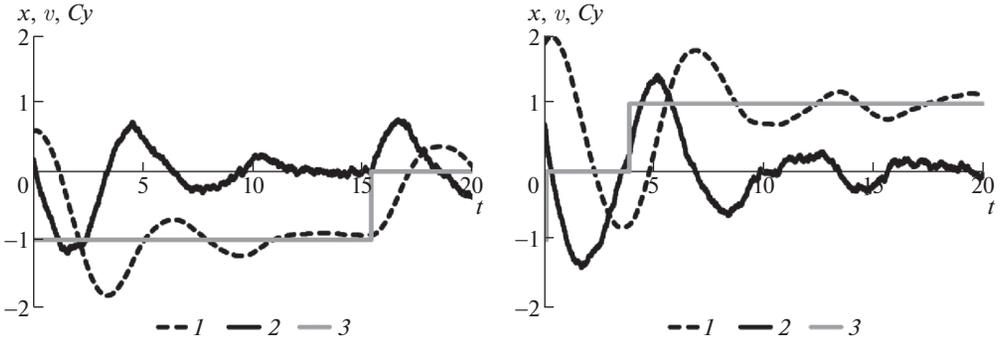


Рис. 1. Характерные траектории для модели привода с “медленным” дрейфом без управления: 1 — положение  $x_t$ , 2 — скорость  $v_t$ , 3 — дрейф  $Cy_t$ .

ходных переменных  $x_t$ ,  $v_t$  шаг интегрирования  $\delta$  также разбивался на 100 интервалов длины  $\frac{\delta}{100}$ .

Для начальной иллюстрации работы привода исключим из набора параметров (8) управление  $u_t$ , положив  $u_t = 0$ . Нетрудно видеть, что данный устойчивый привод будет стремиться стабилизировать положение  $x_t$  около направлений дрейфа выхода, определяемых вектором  $Cy_t$ , где  $C = (\frac{c_1}{a}, \frac{c_2}{a}, \frac{c_3}{a})$ , а скорость  $v_t$  — около нуля. Для набора параметров (8) имеем  $C = (-1, 0, 1)$ . Графическая иллюстрация работы такого привода дана на рис. 1. При этом вместо матрицы интенсивностей из (8) использованы:

на первом графике рис. 1 — матрица  $\Lambda = \begin{pmatrix} -0,05 & 0,05 & 0 \\ 0,005 & -0,01 & 0,005 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}$ , а на вто-

ром графике — матрица  $\Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 0,005 & -1,005 & 1,0 \\ 0 & 0,005 & -0,005 \end{pmatrix}$ . Первая матрица  $\Lambda$

обеспечивает большинству траекторий цепи  $y_t$  на интервале  $T = 20$  длительное пребывание в начальном состоянии  $e_1$  и один скачок из  $e_1$  в  $e_2$ , вторая матрица  $\Lambda$  обеспечивает два скачка из  $e_1$  в  $e_2$  и следом в  $e_3$  с дальнейшим длительным пребыванием в  $e_3$ . Это единственный расчет, выполненный для горизонта  $T = 20$ , который нужен, чтобы дать системе время установиться.

Показанные на рис. 1 траектории  $v_t$ , реагируя на смену состояния  $y_t$ , действительно направляют  $x_t$  в сторону дрейфа  $Cy_t$ . Используемые матрицы интенсивностей позволяют показать, как завершается каждый промежуточный переходный процесс.

Работа такого неуправляемого привода может быть сделана более эффективной с помощью управления  $u_t$ , если цель управления задать функционалом вида

$$(9) \quad J(U_0^T) = \mathbb{E} \left\{ \int_0^T (|Cy_t - x_t|^2 + R|u_t|^2) dt \right\}.$$

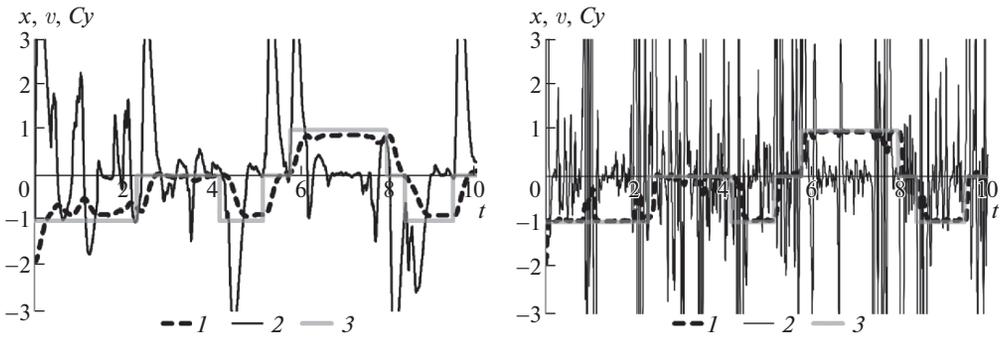


Рис. 2. Характерные траектории для модели привода с дрейфом в условиях обычного и малого штрафа за величину управления: 1 — положение  $x_t$ , 2 — скорость  $v_t$ , 3 — дрейф  $Cy_t$ .

В исходном примере в [1] полагалось  $R = 0,01$ . Иллюстрация работы управляемого в соответствии с целевым функционалом (9) привода для набора параметров (8) показана на первом графике рис. 2. На втором иллюстрируется потенциал стратегии стабилизации  $\hat{u}_t$ , для чего тот же расчет выполнен для  $R = 0,00001$  и изображена та же траектория дрейфа.

Как и следовало ожидать, фактическое отсутствие штрафа за управление делает его очень активным, что позволяет стабилизировать привод значительно эффективнее.

Основным недостатком использованной в этих расчетах схемы Эйлера–Маруямы является ее неустойчивость, приводящая к расхождению некоторых траекторий оценок фильтрации. В зависимости от величины  $\delta$  практически в каждой траектории оценки  $\hat{y}_t$  присутствовали точки, в которых нарушались условия неотрицательности  $(\hat{y}_t)_1 \geq 0$ ,  $(\hat{y}_t)_2 \geq 0$ ,  $(\hat{y}_t)_3 \geq 0$  и/или нормировки  $(\hat{y}_t)_1 + (\hat{y}_t)_2 + (\hat{y}_t)_3 = 1$ . Число таких точек в разных расчетах составляло от нескольких штук (5–10) до всех траекторий в моделируемом пучке. Во многих случаях такие ситуации приводят к взрывной расходимости оценки и невозможности синтеза управления. Причем чем больше в расчете таких точек, тем вероятнее расходимость оценки. Если такие ситуации достаточно редки, то для борьбы с ними в численную процедуру были внесены простые эвристические модификации.

В качестве признака расходимости оценки  $\hat{y}_t$  использовалось условие  $|(\hat{y}_t)_k| > 1$  для любого  $k = 1, 2, 3$ . При выполнении этого условия оценка фильтрации  $\hat{y}_t$  возвращалась в предельное состояние:  $\hat{y}_\tau = \pi_\infty = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})'$  для момента времени  $\tau$ , в который были нарушены эти условия. Скорректированную таким образом оценку схемы Эйлера–Маруямы будем далее обозначать как  $\hat{y}_t^{lim}$ , подчеркивая применение предельного распределения  $\pi_\infty$ . Второй прием в такой же ситуации оценку  $\hat{y}_t$  заменяет оценкой предыдущего шага, т.е.  $\hat{y}_\tau = \hat{y}_{\tau-\delta}$ . Скорректированную таким образом оценку схемы Эйлера–Маруямы будем далее обозначать как  $\hat{y}_t^{del}$ , подчеркивая ее “запаздывание”.

В ряде случаев вычисляемые при этом значения целевого функционала показали, что такие приемы достаточно эффективны. Однако для других комбинаций параметров методы могут оказаться и оказываются нерезультативными. Этот тезис подробно иллюстрируется в разделе 5. Продемонстрированная ограниченная применимость предложенных эвристик означает, что для численной реализации стратегии оптимальной стабилизации  $\hat{u}_t$  требуется гарантированно устойчивая процедура аппроксимации оценки  $\hat{y}_t$ . Возможному решению этой задачи посвящен следующий раздел.

#### 4. Устойчивые фильтры по дискретизованным наблюдениям

В данном разделе представлены использованные далее устойчивые аппроксимации фильтра Вонэма [3], адаптированные к исследуемой задаче.

Алгоритм фильтрации, как и алгоритм оптимальной стабилизации, численно реализуется с заданным временным шагом. Используется схема дискретизации с постоянным шагом  $\delta$ , таким что  $\frac{T}{\delta}$  — целое и

$$0 = t_0, t_1 = t_0 + \delta, \dots, t_i = t_{i-1} + \delta, \dots, t_{\frac{T}{\delta}-1} + \delta = t_{\frac{T}{\delta}} = T.$$

Кроме того, без ограничения общности будем считать, что  $a_t \equiv \text{const}$ ,  $b_t \equiv \text{const}$ ,  $\sigma_t \equiv \text{const}$  на интервалах дискретизации  $[t_{i-1}, t_i]$ . В противном случае  $a_t$ ,  $b_t$ ,  $\sigma_t$  должны аппроксимироваться кусочно-постоянными функциями на интервалах дискретизации, что на цели данной работы не влияет.

Рассмотрим процесс  $z_t^0$ , являющийся неупреждающим преобразованием исходного наблюдаемого выхода  $z_t$ :

$$z_t^0 = \int_0^t (dz_\tau - (b_\tau z_\tau + c_\tau u_\tau) d\tau) = \int_0^t (a_\tau y_\tau d\tau + \sigma_\tau dw_\tau).$$

Процесс  $z_t^0$  может рассматриваться в качестве преобразованных наблюдений, не зависящих от стратегии управления, и в силу тождества

$$\mathcal{F}_t^z = \sigma \{z_\tau, 0 \leq \tau \leq t\} \equiv \sigma \{z_\tau^0, 0 \leq \tau \leq t\} = \mathcal{F}_t^{z^0}$$

выполнено равенство  $\hat{y}_t = \mathbb{E} \{y_t \mid \mathcal{F}_t^z\} = \mathbb{E} \{y_t \mid \mathcal{F}_t^{z^0}\}$ .

Поскольку управляющие воздействия  $u_t$  вырабатываются в дискретные моменты времени  $t_i = i\delta$ , то и оценки марковского дрейфа  $y_t$  должны вычисляться в эти же моменты. Будем использовать для этого новые наблюдения  $z_t^0$ , дискретизованные по времени с шагом  $\delta$ :

$$\Delta z_{t_i}^0 = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (a_\tau y_\tau d\tau + \sigma_\tau dw_\tau).$$

Эти наблюдения являются приращениями  $z_i^0$  на интервалах дискретизации, они порождают  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{F}_i^{\Delta z^0} = \sigma \left\{ \Delta z_{t_j}^0, 1 \leq j \leq i \right\}$ .

Если обозначить через  $\mu_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} y_\tau d\tau = (\mu_i^1, \dots, \mu_i^{n_y})'$  случайный вектор, компоненты которого равны времени пребывания марковской цепи  $y_t$  в каждом из возможных состояний на интервале времени  $(t_{i-1}, t_i]$ , а через  $\mathcal{N}(z; m, \sigma^2)$  гауссовскую плотность вероятности со средним  $m$  и дисперсией  $\sigma^2$ , вычисленную в точке  $z$ , то оценка  $\hat{y}_{t_i} = \mathbb{E} \left\{ y_t \mid \mathcal{F}_i^{\Delta z^0} \right\}$  находится с помощью следующей рекуррентной процедуры [3]:

$$(10) \quad \hat{y}_{t_i} = (\mathbf{1} \hat{q}'_{t_i} \hat{y}_{t_{i-1}})^{-1} (\hat{q}'_{t_i} \hat{y}_{t_{i-1}}),$$

где  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)' \in \mathbb{R}^{n_y}$  — вектор из единиц, начальное условие  $\hat{y}_0 = \pi_0$ , матрица  $\hat{q}_{t_i} = \left\| \hat{q}_{t_i}^{k,j} \right\|_{k,j=1}^{n_y}$  состоит из случайных элементов

$$(11) \quad \hat{q}_{t_i}^{k,j} = \mathbb{E} \left\{ \mathcal{N}(\Delta z_{t_i}^0; a\mu_i, \delta\sigma\sigma') y_{t_i}^j \mid y_{t_{i-1}} = e_k \right\}.$$

Условные математические ожидания  $\hat{q}_{t_i}^{k,j}$  представляют собой интегралы — масштабно-сдвиговые смеси гауссиан, где в качестве смешивающего выступает распределение вектора  $\mu_i$ . Принципиальной проблемой является то, что это распределение не является абсолютно непрерывным относительно меры Лебега и сами интегралы (11) не могут быть вычислены аналитически. Для аппроксимации оценки  $\hat{y}_{t_i}$  эти интегралы вычисляются приближенно. В данной статье с этой целью используются и сравниваются между собой следующие схемы вычисления  $\hat{q}_{t_i}^{k,j}$  (далее через  $\Delta_{kj}$  обозначен символ Кронекера):

$$\hat{q}_{t_i}^{k,j} \approx \left( \hat{q}_{t_i}^{\delta \frac{1}{2}} \right)_{kj} = \mathcal{N}(\Delta z_{t_i}^0; \delta a e_k, \delta\sigma\sigma') (\Delta_{kj} + \delta\lambda_{kj})$$

— схема “левых” прямоугольников порядка точности  $\frac{1}{2}$ ,

$$\begin{aligned} \hat{q}_{t_i}^{k,j} \approx \left( \hat{q}_{t_i}^{\delta} \right)_{kj} &= \Delta_{kj} e^{\lambda_{kk}\delta} \mathcal{N}(\Delta z_{t_i}^0, \delta a e_k, \delta\sigma\sigma') + \\ &+ (1 - \Delta_{kj}) \delta \lambda_{kj} e^{\frac{\delta}{2}(\lambda_{kk} + \lambda_{jj})} \mathcal{N}\left(\Delta z_{t_i}^0, \frac{\delta}{2} a(e_k + e_j), \delta\sigma\sigma'\right) \end{aligned}$$

— схема “средних” прямоугольников порядка точности 1,

$$\begin{aligned} \hat{q}_{t_i}^{k,j} \approx \left( \hat{q}_{t_i}^{\delta^2} \right)_{kj} &= \Delta_{kj} e^{\lambda_{kk}\delta} \mathcal{N}(\Delta z_{t_i}^0, \delta a e_k, \delta\sigma\sigma') + \\ &+ (1 - \Delta_{kj}) \frac{\delta}{2} \left( e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj}) \frac{(\sqrt{3}-1)\delta}{2\sqrt{3}}} \mathcal{N}\left(\Delta z_{t_i}^0, \frac{(\sqrt{3}-1)\delta}{2\sqrt{3}} a e_k + \frac{(\sqrt{3}+1)\delta}{2\sqrt{3}} a e_j, \delta\sigma\sigma'\right) + \right. \\ &\left. + e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj}) \frac{(\sqrt{3}+1)\delta}{2\sqrt{3}}} \mathcal{N}\left(\Delta z_{t_i}^0, \frac{(\sqrt{3}+1)\delta}{2\sqrt{3}} a e_k + \frac{(\sqrt{3}-1)\delta}{2\sqrt{3}} a e_j, \delta\sigma\sigma'\right) \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i:i \neq j i \neq k} \frac{\delta^2}{6} \left( e^{\frac{\delta}{6}(\lambda_{kk}-\lambda_{ii})+\frac{\delta}{6}(\lambda_{ii}-\lambda_{jj})} \mathcal{N} \left( \Delta z_{t_i}^0, \frac{\delta}{6} a(e_k + e_i + 4e_j), \delta \sigma \sigma' \right) + \right. \\
& \quad + e^{\frac{2\delta}{3}(\lambda_{kk}-\lambda_{ii})+\frac{\delta}{6}(\lambda_{ii}-\lambda_{jj})} \mathcal{N} \left( \Delta z_{t_i}^0, \frac{\delta}{6} a(e_k + 4e_i + e_j), \delta \sigma \sigma' \right) + \\
& \quad \left. + e^{\frac{\delta}{6}(\lambda_{kk}-\lambda_{ii})+\frac{2\delta}{3}(\lambda_{ii}-\lambda_{jj})} \mathcal{N} \left( \Delta z_{t_i}^0, \frac{\delta}{6} a(4e_k + e_i + e_j), \delta \sigma \sigma' \right) \right)
\end{aligned}$$

— схема, основанная на квадратурах Гаусса порядка точности 2.

Отметим, что в исследуемой модели привода  $k, j = 1, 2, 3$  и  $\left( \check{q}_{t_i}^{\delta \frac{1}{2}} \right)_{13} = \left( \check{q}_{t_i}^{\delta \frac{1}{2}} \right)_{31} = \left( \check{q}_{t_i}^{\delta} \right)_{13} = \left( \check{q}_{t_i}^{\delta} \right)_{31} = \left( \check{q}_{t_i}^{\delta^2} \right)_{13} = \left( \check{q}_{t_i}^{\delta^2} \right)_{31} = 0$ , так как в матрице интенсивностей  $\lambda_{13} = \lambda_{31} = 0$ , что существенно упрощает вычисления в сравнении с записанным общим случаем.

Итак, в сравнительном анализе, представленном в следующем разделе, участвуют аппроксимации  $\check{y}_{t_i}^{\delta \frac{1}{2}}, \check{y}_{t_i}^{\delta}, \check{y}_{t_i}^{\delta^2}$ , вычисляемые с помощью алгоритма (10), (11), в котором матрицы  $\hat{q}_{t_i}$  вычисляются приближенно одним из трех приведенных способов  $\check{q}_{t_i}^{\delta \frac{1}{2}}, \check{q}_{t_i}^{\delta}, \check{q}_{t_i}^{\delta^2}$  соответственно.

## 5. Экспериментальное исследование дискретизованных фильтров

Выполненный практический эксперимент включал большой комплекс расчетов, направленных на изучение влияния точности аппроксимации фильтра Вонэма на итоговое качество управления системой (7). Все расчеты, как указано в разделе 3 статьи, были выполнены для  $\delta = 0,005; 0,001; 0,0001$ . Отметим, что в анализе не участвовали модели с  $\delta = 0,01$ , как это было в исходном примере в [1], чтобы обеспечить единообразие во всех представляемых расчетах и исключить трудности при приближенном вычислении коэффициентов  $\alpha_t$  и  $\beta_t$  из (4) и (5), которые возникали при  $\delta = 0,01$ . Кроме того, существенно детализированы и расширены примеры, представленные в [2].

В каждом расчете моделировалось по 1000 траекторий системы (7) с оптимальной стратегией стабилизации  $u_{t_i} = \hat{u}_{t_i}$  из (3), причем наборы случайных величин, формирующих пучки траекторий, одинаковы во всех расчетах для заданного  $\delta$ . Это обеспечивает корректность сравнения качества разных алгоритмов. Для иллюстрации некоторых результатов дополнительно рассчитывалось управление  $u_{t_i} = u_{t_i}^*$  — оптимальное решение задачи стабилизации для случая полной информации о состоянии цепи  $y_t$  (в [2] показано, что это управление определяется тем же соотношением (3) с заменой оценки  $\hat{y}_t$  на состояние  $y_t$ , т.е. имеет место сильное разделение [8]).

Все расчеты, результаты которых представлены в статье, выполнены на средствах ЦКП “Информатика” ФИЦ ИУ РАН. Для их выполнения использовался сервер Huawei XH 622 V3 (2\*CPU Intel Xeon E5-2683V4 (2.1 GHz, 16 Core), 512 Gb RAM, 2\*10G Ethernet, 2\*16G FibreChannel, Intel Xeon Phi

7120P), входящий в состав инфраструктуры Гибридного высокопроизводительного вычислительного кластера архитектуры Intel x86\_64. На данном сервере использовалась виртуальная среда с гостевой операционной системой Windows 10, для которой выделялось 32 Gb RAM и до 4 ядер. Программы для расчетов написаны на языке Python и реализованы в среде PyCharm 2021.2 (Community Edition). Это свободно распространяемое программное обеспечение хорошо зарекомендовало себя в научной среде и очень широко применяется именно в исследовательских целях. Временные ресурсы на проведение экспериментов на использованном оборудовании оказались не слишком велики. Расчеты пучка из 1000 траекторий всех алгоритмов фильтрации и управления на одном ядре для величин  $\delta = 0,005$  и  $0,001$  занимали порядка 10–12 и 35–40 мин соответственно. Для  $\delta = 0,0001$  один расчет требовал порядка 6 ч компьютерного времени. Довольно большие временные затраты не должны вызывать сомнения в практической пригодности исследованных методов по той причине, что большая часть компьютерного времени (по субъективной оценке, более 75%) затрачивалась на выгрузку результатов расчетов в файлы электронных таблиц, с помощью которых выполнялся качественный и визуальный анализ, в том числе графическими инструментами. Возможность параллельного применения нескольких ядер использовалась авторами для ускорения расчетов за счет реализации расчетов для нескольких моделей одновременно. На весь комплекс расчетов, выполненных при подготовке статьи, в том числе не упомянутых здесь явно, потребовалось не более 1 мес.

Результаты расчетов далее представлены в табличной форме, при необходимости дополнительно даны графические иллюстрации. Для удобства каждая таблица в заголовке содержит набор параметров модели. Кроме того, наиболее важные результаты выделены полужирным шрифтом. Для характеристики качества оценок фильтрации  $\hat{y}_{t_i}$ ,  $\check{y}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$ ,  $\check{y}_{t_i}^{\delta}$ ,  $\check{y}_{t_i}^{\delta^2}$  рассчитывались интегральные квадратичные ошибки  $\hat{D}(\hat{y}_{t_i})$ ,  $\hat{D}(\check{y}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}})$ ,  $\hat{D}(\check{y}_{t_i}^{\delta})$ ,  $\hat{D}(\check{y}_{t_i}^{\delta^2})$  для

$$\hat{D}(\check{y}_{t_i}) = \hat{\mathbb{E}} \left\{ \frac{\delta}{T} \sum_{i=1}^{\frac{T}{\delta}} (cy_{t_i} - c\check{y}_{t_i})^2 \right\},$$

где  $\hat{\mathbb{E}}$  обозначает усреднение по пучку.

В тех расчетах, когда хотя бы одна траектория оценки  $\hat{y}_{t_i}$ , вычисленной с помощью схемы Эйлера–Маруямы, оказывалась расходящейся и синтезировать управление с ее помощью было невозможно, использовались оценки  $\hat{y}_{t_i}^{lim}$  и  $\hat{y}_{t_i}^{del}$ . Там, где это потребовалось, в таблицы внесена дополнительная информация.

Для характеристики качества стабилизации системы рассчитывались целевые функционалы  $\hat{J}(\hat{u}_{t_i})$ ,  $\hat{J}(\check{u}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}})$ ,  $\hat{J}(\check{u}_{t_i}^{\delta})$ ,  $\hat{J}(\check{u}_{t_i}^{\delta^2})$ , в которых  $\hat{u}_{t_i}$ ,  $\check{u}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$ ,  $\check{u}_{t_i}^{\delta}$ ,  $\check{u}_{t_i}^{\delta^2}$  — оптимальные управления, вычисленные с помощью оценок фильтрации

$\hat{y}_{t_i}, \check{y}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}, \check{y}_{t_i}^{\delta}, \check{y}_{t_i}^{\delta^2}$  соответственно,

$$\hat{J}(u_{t_i}) = \hat{\mathbb{E}} \left\{ \delta \sum_{i=1}^{\frac{T}{\delta}} \left( (Cy_{t_i} - x_{t_i})^2 + R(u_{t_i})^2 \right) \right\}.$$

Результаты первого расчета представлены в табл. 1. Использовалась модель привода с параметрами (8), т.е. модель исходного примера из [1]. Графических иллюстраций данный пример не требует, достаточно рис. 2.

**Таблица 1**

$a = -1; b = -0,5; T = 10; h = 10; g = 0,01; R = 0,01;$ $(c_1, c_2, c_3) = (1, 0, -1); \Lambda = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}.$								
$\delta$	$\hat{D}(\hat{y}_{t_i})$ $\hat{y}_{t_i} = \hat{y}_{t_i}^{lim}$ $\hat{y}_{t_i} = \hat{y}_{t_i}^{del}$	$\hat{D}(\check{y}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}})$	$\hat{D}(\check{y}_{t_i}^{\delta})$	$\hat{D}(\check{y}_{t_i}^{\delta^2})$	$\hat{J}(\hat{u}_{t_i})$ $\hat{y}_{t_i} = \hat{y}_{t_i}^{lim}$ $\hat{y}_{t_i} = \hat{y}_{t_i}^{del}$	$\hat{J}(\check{u}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}})$	$\hat{J}(\check{u}_{t_i}^{\delta})$	$\hat{J}(\check{u}_{t_i}^{\delta^2})$
0,005	$\infty$ <b>0,22689</b> <b>0,39545</b>	<b>0,04955</b>	0,04955	0,04955	$\infty$ <b>3,18759</b> <b>4,53704</b>	<b>1,59087</b>	1,59126	1,59124
0,001	$\infty$ <b>0,05386</b> <b>0,04924</b>	<b>0,04851</b>	0,04851	0,04851	$\infty$ <b>1,60354</b> <b>1,56307</b>	<b>1,55757</b>	1,55756	1,55757
0,0001	<b>0,04927</b>	<b>0,04923</b>	0,04923	0,04923	<b>1,54318</b>	<b>1,54306</b>	1,54307	1,54307

Результаты в табл. 1 приводят к двум выводам. Во-первых, использование дискретизованных фильтров действительно дает преимущества, гарантируя устойчивость и высокое качество оценки фильтрации в любых условиях. И это преимущество тем больше, чем больше шаг  $\delta$ . Предложенные эвристические схемы обеспечения устойчивости простой численной схемы для фильтра Вонэма дают вполне предсказуемый результат. Для больших  $\delta$ , когда расходящихся траекторий много, результативность обеих эвристик крайне низкая. С уменьшением  $\delta$  и, соответственно, сокращением числа “проблемных” траекторий эвристики работают вполне эффективно, но ожидаемо проигрывают дискретизованному фильтру. Для малых  $\delta$  в смоделированном пучке вовсе не оказалось расходящихся траекторий, эвристики оказываются ненужными, а схема Эйлера обеспечивает оценке фильтра Вонэма точность, совпадающую с точностью дискретизованных фильтров вплоть до четвертого знака.

Второй вывод из табл. 1 — это отсутствие для дискретизованных фильтров иерархии качества, отвечающей скорости сходимости. Можно считать, что все три оценки дают один и тот же результат.

Давая оценку этим выводам и результатам расчета в целом, прежде всего напомним, что даже одной расходящейся траектории достаточно, чтобы вели-

чина  $\hat{D}(\hat{y}_{t_i})$  оказалась сколь угодно большой. Для наименьшего значения  $\delta$  в моделируемых пучках расходящихся траекторий не было, но гарантировать, что так будет для пучка любого размера нельзя. Более того, эксперименты подтверждают, что при увеличении размера пучка до нескольких десятков миллионов неустойчивые траектории появляются и для малых  $\delta$ . При этом предложенные в разделе 3 эвристические приемы для оценки  $\hat{y}_{t_i}$  успешно работают.

Чтобы разнообразить условия применения стратегии стабилизации, нужно “ухудшать” модель. В следующем расчете для этого были сделаны два изменения. Во-первых, сохраняя физическую реализуемость, т.е. устойчивости модели привода (7), можно уменьшать абсолютные значения параметров  $a$  и  $b$  вплоть до нуля. В следующем расчете система рассматривается на границе устойчивости со значениями  $a = b = 0$ . Для этих параметров уже нельзя использовать определение для состояний стабилизации  $C = (\frac{c_1}{a}, \frac{c_2}{a}, \frac{c_3}{a})$ . Воспользуемся этим поводом, чтобы внести в модель второе изменение и избавиться от симметрии состояний цепи. Положим  $c = (-1,5; -0,5; 0,5)$  и сохраним состояния стабилизации  $C = (-1, 0, 1)$ . Качество наблюдений остается как в первом расчете  $g = 0,01$ . Результаты выполненного эксперимента приведены в табл. 2.

**Таблица 2**

$a = 0; b = 0; T = 10; h = 10; g = 0,01; R = 0,01;$ $(c_1, c_2, c_3) = (-1,5; -0,5; 0,5); (C_1, C_2, C_3) = (-1, 0, 1); \Lambda = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}.$								
$\delta$	$\hat{D}(\hat{y}_{t_i})$ $\hat{y}_{t_i} = \hat{y}_{t_i}^{lim}$ $\hat{y}_{t_i} = \hat{y}_{t_i}^{del}$	$\hat{D}(\hat{y}_{t_i}^{\frac{1}{2}})$	$\hat{D}(\hat{y}_{t_i}^{\delta})$	$\hat{D}(\hat{y}_{t_i}^{\delta^2})$	$\hat{J}(\hat{u}_{t_i})$ $\hat{y}_{t_i} = \hat{y}_{t_i}^{lim}$ $\hat{y}_{t_i} = \hat{y}_{t_i}^{del}$	$\hat{J}(\hat{u}_{t_i}^{\frac{1}{2}})$	$\hat{J}(\hat{u}_{t_i}^{\delta})$	$\hat{J}(\hat{u}_{t_i}^{\delta^2})$
0,005	$\infty$ <b>0,67763</b> <b>1,13598</b>	0,05573	0,05575	0,05572	$\infty$ <b>4,41541</b> <b>5,10793</b>	1,66704	1,66719	1,66714
0,001	$\infty$ <b>0,35003</b> <b>0,07415</b>	<b>0,05283</b>	0,05283	0,05283	$\infty$ <b>1,60354</b> <b>1,56307</b>	1,61349	1,61354	1,61354
0,0001	<b>0,05273</b> <b>0,05274</b> <b>0,05273</b>	<b>0,05230</b>	0,05230	0,05230	<b>1,61684</b> <b>1,61685</b> <b>1,61684</b>	<b>1,61581</b>	1,61582	1,61582

К табл. 2 следует сделать три замечания. Сначала отметим, что исследуемая стратегия стабилизации в модели на границе устойчивости оказывается столь же эффективной, как и в аналогичном устойчивом варианте табл. 1. Ни асимметрия состояний цепи  $y_t$ , ни отсутствие нативной помощи системы в стабилизации принципиального влияния на эффективность управления не оказали.

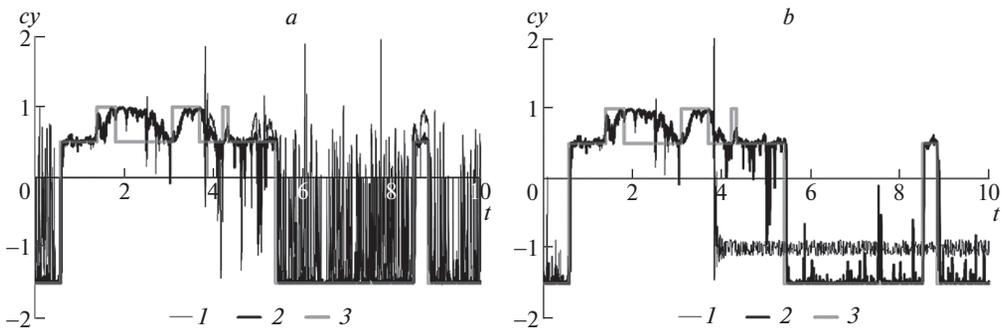


Рис. 3. Траектории эвристических оценок, на которых выполняются условия расходимости схемы Эйлера–Маруямы: *a*): 1 — оценка  $\hat{y}_{t_i}^{lim}$ , 2 — оценка  $\check{y}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$ , 3 — цепь  $c_{y_t}$ ; *b*): 1 — оценка  $\hat{y}_{t_i}^{del}$ , 2 — оценка  $\check{y}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$ , 3 — цепь  $c_{y_t}$ .

Второе замечание — это безусловное преимущество дискретизованных фильтров над любыми вариантами аппроксимаций фильтра Вонэма. И в первом расчете, и здесь это преимущество растет с ростом  $\delta$ . В частности, при “больших”  $\delta = 0,005; 0,001$  проигрыш оценки Эйлера–Маруямы с обеими эвристиками  $\hat{y}_{t_i}^{lim}$  и  $\hat{y}_{t_i}^{del}$  становится катастрофическим. Еще обращает на себя внимание то, что предсказать поведение этих оценок невозможно.

Наконец третье. В этом расчете столкнулись с ситуацией, когда в “хорошем” пучке с “маленьким”  $\delta = 0,0001$  все-таки оказалось несколько “плохих” траекторий оценки  $\hat{y}_{t_i}$ , т.е. таких, для которых хотя бы раз нарушалось упомянутое выше условие  $|(\hat{y}_t)_k| > 1$ . Таких траекторий было пять и существенного влияния на результат они не оказали, но важен сам факт их наличия, как основание для использования гарантированно устойчивых оценок дискретизованных фильтров, эффективных в любом случае. При этом различия между оценками  $\check{y}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$ ,  $\check{y}_{t_i}^{\delta}$ ,  $\check{y}_{t_i}^{\delta^2}$  не выявлено.

Кроме того, данный расчет дал возможность проиллюстрировать поведение предложенных в разделе 3 эвристических оценок  $\hat{y}_{t_i}^{lim}$ ,  $\hat{y}_{t_i}^{del}$  в случаях, когда они существенно отличаются от оценок дискретизованных фильтров. В рассматриваемом примере такие случаи есть, например для  $\delta = 0,001$ , о чем свидетельствует видимая разница в качестве оценок, вычисленных по схеме Эйлера–Маруямы, и оценок дискретизованных фильтров, представленных в табл. 2. На рис. 3 показаны траектории оценок  $\hat{c}_{y_{t_i}}^{lim}$ ,  $\hat{c}_{y_{t_i}}^{del}$ ,  $\check{c}_{y_{t_i}}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$  и состояние цепи  $c_{y_{t_i}}$ , на которых существенно повлияло выполнение условий  $|(\hat{y}_t)_k| > 1$ . Именно такие траектории внесли основной вклад, обеспечив существенный проигрыш оценкам Эйлера–Маруямы.

Дополняет рис. 3 следующий рис. 4, на котором показаны траектории положения для той же реализации системы.

Итак, главный итог третьего расчета — это подтверждение эффективности управления на основе оценок дискретизованных фильтров в задаче стабили-

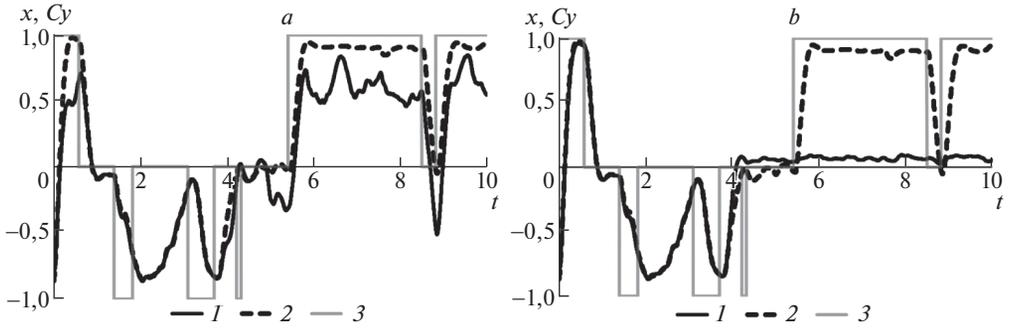


Рис. 4. Траектории положения для эвристических оценок, на которых выполняются условия расходимости схемы Эйлера–Маруямы: а): 1 — положение  $x_{t_i}$  для управления  $\hat{u}_{t_i}$  с оценкой  $\hat{y}_{t_i}^{lim}$ , 2 — положение  $x_{t_i}$  для управления  $\hat{u}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$ , 3 — дрейф  $Cy_t$ ; б): 1 — положение  $x_{t_i}$  для управления  $\hat{u}_{t_i}$  с оценкой  $\hat{y}_{t_i}^{del}$ , 2 — положение  $x_{t_i}$  для управления  $\hat{u}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$ , 3 — дрейф  $Cy_t$ .

зации для модели привода на границе устойчивости. Ясно, что и при существенном нарушении условий устойчивости, т.е. при положительных  $a$ ,  $b$ , исследуемая стратегия стабилизации будет столь же эффективна. Это подтверждают и другие выполненные эксперименты, в том числе последний пример в [2]. Здесь же более важно сравнить оценки дискретизованных фильтров между собой, поэтому следующим шагом “ухудшения” модели будет существенное изменение параметров цепи  $y_t$ .

Еще один вывод из выполненных расчетов — отсутствие перспектив дальнейшего исследования эвристических оценок  $\hat{y}_{t_i}^{lim}$ ,  $\hat{y}_{t_i}^{del}$ . Нецелесообразность их использования подтверждена в достаточной степени, поскольку предугадать и избежать ситуаций, аналогичных тем, что проиллюстрированы на рис. 3 и рис. 4, невозможно.

Усложняя условия работы привода в следующих расчетах, значительно увеличим интенсивности смены состояний цепью  $y_t$ . Тем самым будет проверено предположение о том, что систематическая разница в качестве оценок фильтрации  $\check{y}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$ ,  $\check{y}_{t_i}^{\delta}$ ,  $\check{y}_{t_i}^{\delta^2}$  будет обнаруживаться в моделях, допускающих возможность реализации непрерывной цепью  $y_t$  более чем одного скачка на интервале дискретизации длины  $\delta$ . Чем вероятнее появление таких реализаций на интервалах  $(t_{i-1}, t_i]$ , тем точнее должны оказываться аппроксимации  $\check{q}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$ ,  $\check{q}_{t_i}^{\delta}$ ,  $\check{q}_{t_i}^{\delta^2}$  условных математических ожиданий  $\hat{q}_{t_i}$ . Добиться этого эффекта можно, увеличивая значения интенсивностей переходов в матрице  $\Lambda$ . Более частые смены состояния входной цепи  $y_t$  с точки зрения решаемой задачи стабилизации, очевидно, потребуют более активного поведения от управления. Если при этом штрафовать за активное управление также, как в примерах с небольшими интенсивностями, то стратегия стабилизации будет вырождаться, стремясь к некоторому постоянному значению, не реагирующему на об-

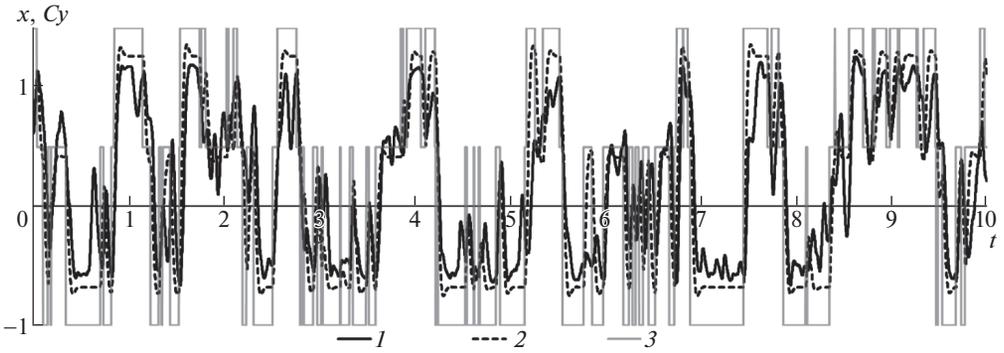


Рис. 5. Характерные траектории положения привода для модели с увеличенной до 10 интенсивностью скачков: 1 — положение  $x_{t_i}$  для управления  $\check{u}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$ , 2 — положение  $x_{t_i}$  для управления  $u_{t_i}^*$ , 3 — дрейф  $Cy_{t_i}$ .

ратную связь. Поэтому в расчетах далее используется  $R = 0,00001$ , как в примере из раздела 3, иллюстрирующем работу привода в “идеальных” условиях (рис. 2).

В табл. 3 и 4 приведены результаты двух расчетов, выполненных с увеличенными до 10 и 50 интенсивностями изменения значений дрейфа.

**Таблица 3**

$a = -1; b = -0,5; T = 10; h = 10; g = 0,01; R = 0,00001;$ $(c_1, c_2, c_3) = (-1,5; -0,5; 0,5); \Lambda = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 10 & -20 & 10 \\ 0 & 10 & -10 \end{pmatrix}.$								
$\delta$	$\hat{D}(\hat{y}_{t_i})$	$\hat{D}(\check{y}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}})$	$\hat{D}(\check{y}_{t_i}^{\delta})$	$\hat{D}(\check{y}_{t_i}^{\delta^2})$	$\hat{J}(\hat{u}_{t_i})$	$\hat{J}(\check{u}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}})$	$\hat{J}(\check{u}_{t_i}^{\delta})$	$\hat{J}(\check{u}_{t_i}^{\delta^2})$
0,005	$\infty$	<b>0,37441</b>	<b>0,37347</b>	<b>0,37333</b>	$\infty$	<b>7,15385</b>	<b>7,11694</b>	<b>7,11460</b>
0,001	$\infty$	<b>0,34302</b>	<b>0,34299</b>	<b>0,34298</b>	$\infty$	<b>6,49080</b>	<b>6,48944</b>	<b>6,48942</b>
0,0001	0,33543	0,33565	0,33565	0,33565	6,30794	6,30954	6,30954	6,30954

Результаты табл. 3 соответствуют ожиданиям. Для  $\delta = 0,005$  и  $\delta = 0,001$  качество оценок дискретизационных фильтров выстроено в соответствии с их теоретической скоростью сходимости. Разница, надо заметить, довольно мала и видна только в третьей-четвертой значащей цифре. Вариант с  $\delta = 0,0001$  уже можно считать предельным.

Графическая иллюстрация исследуемой стратегии управления при увеличении интенсивности смены состояний цепью  $y_t$  до 10 приведена на рис. 5. График типовой траектории положения  $x_{t_i}$  приведен для управления  $\check{u}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$ , но он такой же, т.е. визуально неотличим, для управлений  $\check{u}_{t_i}^{\delta}$ ,  $\check{u}_{t_i}^{\delta^2}$ . Чтобы охарактеризовать потенциал стабилизации в этом примере, на рис. 5 выведена траектория положения  $x_{t_i}$ , формируемого управлением  $u_{t_i}^*$ , оптимальным в постановке с полной информацией [2]. Этот график показывает, что принци-

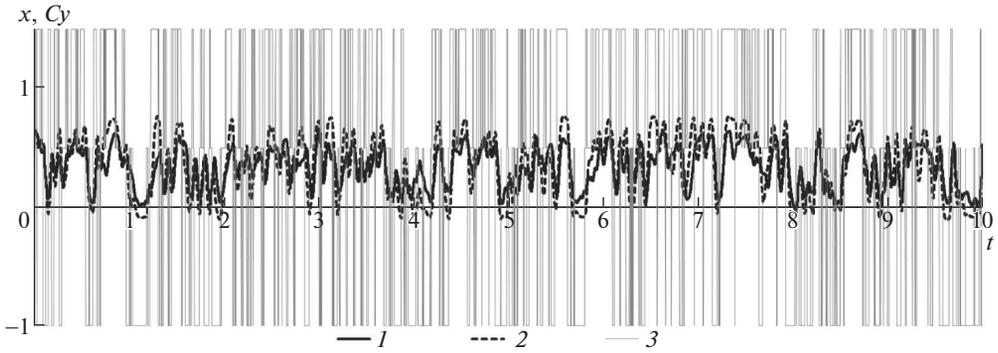


Рис. 6. Характерные траектории положения привода для модели с увеличенной до 50 интенсивностью скачков: 1 — положение  $x_{t_i}$  для управления  $\check{u}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$ , 2 — положение  $x_{t_i}$  для управления  $u_{t_i}^*$ , 3 — дрейф  $Cy_{t_i}$ .

пиальная возможность эффективной стабилизации в рассматриваемой модели остается за счет увеличения точности оценивания величины входа.

В этом расчете удалось проиллюстрировать отличия между оценками  $\check{y}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}}$ ,  $\check{y}_{t_i}^{\delta}$ ,  $\check{y}_{t_i}^{\delta^2}$ , но разница видна только в третьей-четвертой значащей цифре. Предполагая, что эта разница может демонстрировать тенденцию к росту с увеличением интенсивности скачков цепи  $y_t$ , продолжим усложнять условия работы привода и увеличим интенсивность изменения величин дрейфа до 50. Параметры и результаты этого расчета приведены в табл. 4, графическая иллюстрация — на рис. 6.

Таблица 4

$a = -1; b = -0,5; T = 10; h = 10; g = 0,01; R = 0,00001;$ $(c_1, c_2, c_3) = (-1,5; -0,5; 0,5); \Lambda = \begin{pmatrix} -50 & 50 & 0 \\ 50 & -100 & 50 \\ 0 & 50 & -50 \end{pmatrix}.$								
$\delta$	$\hat{D}(\hat{y}_{t_i})$	$\hat{D}(\check{y}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}})$	$\hat{D}(\check{y}_{t_i}^{\delta})$	$\hat{D}(\check{y}_{t_i}^{\delta^2})$	$\hat{J}(\hat{u}_{t_i})$	$\hat{J}(\check{u}_{t_i}^{\delta^{\frac{1}{2}}})$	$\hat{J}(\check{u}_{t_i}^{\delta})$	$\hat{J}(\check{u}_{t_i}^{\delta^2})$
0,005	$\infty$	<b>0,75826</b>	<b>0,74700</b>	<b>0,74609</b>	$\infty$	<b>10,70809</b>	<b>10,65900</b>	<b>10,65582</b>
0,001	$\infty$	<b>0,64742</b>	<b>0,64701</b>	<b>0,64699</b>	$\infty$	<b>10,31655</b>	<b>10,31497</b>	<b>10,31494</b>
0,0001	0,62598	0,62768	0,62768	0,62768	10,23954	10,24153	10,24152	10,24152

Представленный в табл. 4 расчет отвечает ожидаемым результатам в той же степени, что и предыдущий. Для  $\delta = 0,005$  разница качества оценок дискретизационных фильтров и соответствующих стратегий стабилизации видна во второй-третьей значащей цифре. Для  $\delta = 0,001$  имеется та же разница и та же иерархия качества алгоритмов, но уже в третьей-четвертой значащей цифре. Это значит, что порядок интенсивностей переходов цепи  $y_t$  для таких шагов дискретизации обеспечивает достаточно много реализацией более чем одного скачка на интервале  $\delta$ , что дает преимущество фильтрам старших по-

рядков. Случай  $\delta = 0,0001$  видится уже предельным, и разницы в оценках нет. Преимущество оценки  $\hat{y}_{t_i}$ , напомним, означает, что в смоделированном пучке не оказалось расходящихся траекторий, которые непременно появятся в других реализациях. Добившись этого результата, нельзя не отметить, что согласно рис. 6 эффективность самой стратегии стабилизации даже в случае полной информации о состоянии цепи  $y_t$  крайне низка. Это результат ухудшения условий работы привода до совсем нереалистичных параметров.

Как уже говорилось, приведенными результатами не исчерпывается весь объем выполненного вычислительного эксперимента. Другие модели включали примеры более выраженной асимметрии состояний цепи  $y_t$  и направлений стабилизации  $Sy_t$ , разные интенсивности возмущений выхода  $z_t$ , увеличения размерности цепи  $n_y$ , увеличение интенсивности ошибок наблюдений  $g$ . Эти расчеты вполне согласуются с представленными результатами и подтверждают следующие выводы.

## 6. Выводы

Основным объектом исследования данной статьи являлась задача стабилизации простого механического привода с динамически изменяющимся марковским скачкообразным дрейфом [1, 2], не доступным прямому наблюдению. Для рассмотренной задачи верна теорема разделения, поэтому оптимальное управление выражается через оптимальную оценку, задаваемую фильтром Вонэма. Целью работы являлась выработка рекомендаций по алгоритмам численной реализации оптимального управления и использования в ней устойчивых фильтров [3] вместо неустойчивых численных схем типа Эйлера–Маруямы. Результаты комплекса разнообразных численных экспериментов позволяют сделать вывод об обоснованности применения устойчивых дискретизованных фильтров и общей эффективности численной реализации оптимального управления. Помимо этого основного вывода можно сформулировать ряд практических рекомендаций.

1. Все дискретизованные фильтры демонстрируют корректную работу в качестве устойчивых аппроксимаций фильтра Вонэма.

2. Выбор схемы устойчивой дискретизованной фильтрации зависит от параметров тройки “оцениваемый марковский дрейф — доступные наблюдения — штраф за неточность оценивания в критерии”. Если интенсивность скачков дрейфа умеренная, отношение “сигнал/шум” в наблюдениях достаточно велико и вклад ошибок фильтрации в целевой функционал незначителен, рациональнее использовать схемы малого порядка аппроксимации.

3. Расходимость численных аппроксимаций фильтра Вонэма, реализованного “классическими” схемами, нельзя игнорировать. Вполне реальной является модель, когда расходятся *все* траектории фильтра.

4. По совокупности результатов экспериментов для практического применения предпочтительным является дискретизованный фильтр первого порядка, основанный на схеме “средних” прямоугольников.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Borisov A., Bosov A., Miller G.* Optimal Stabilization of Linear Stochastic System with Statistically Uncertain Piecewise Constant Drift // *Mathematics*. 2022. V. 10. No. 2 (84).
2. *Босов А.В.* Стабилизация и слежение за траекторией линейной системы со скачкообразно изменяющимся дрейфом // *АиТ*. 2022. № 4. С. 27–46.  
*Bosov A.V.* Stabilization and Trajectory Tracking of Linear System with Jumping Drift // *Autom. Remote Control*. 2022. V. 83. No. 4. P. 1963–1973.
3. *Борисов А.В.* L1-оптимальная фильтрация марковских скачкообразных процессов II: численный анализ конкретных схем // *АиТ*. 2020. № 12. С. 24–49.  
*Borisov A.V.* L1-Optimal Filtering of Markov Jump Processes. II. Numerical Analysis of Particular Realizations Schemes // *Autom. Remote Control*. 2020. V. 81. No. 12. P. 2160–2180.
4. *Athans M., Falb P.L.* Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications. N.Y.–Sydney: McGraw-Hill, 1966.
5. *Beneš V.* Quadratic Approximation by Linear Systems Controlled from Partial Observations / *Stochastic Analysis*. Mayer-Wolf E., Merzbach E., Shwartz A., Eds.; Academic Press, 1991. P. 39–50.
6. *Helmes K., Rishel R.* The Solution of a Partially Observed Stochastic Optimal Control Problem in Terms of Predicted Miss // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1992. V. 37. No. 9. P. 1462–1464.
7. *Benes V., Karatzas I., Ocone D., Wang H.* Control with Partial Observations and an Explicit Solution of Mortensen’s Equation // *Appl Math Optim*. 2004. No. 49. P. 217–239. <https://doi.org/10.1007/s00245-003-0788-0>
8. *Rishel R.* A Strong Separation Principle for Stochastic Control Systems Driven by a Hidden Markov Model // *SIAM J. Control and Optimization*. 1994. V. 32. No. 4. P. 1008–1020.
9. *Elliott R.J., Aggoun L., Moore J.B.* Hidden Markov Models: Estimation and Control. N.Y.: Springer-Verlag, 1995.
10. *Kloeden P.E., Platen E.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer, 1992.
11. *Yin G., Zhang Q., Liu Y.* Discrete-time Approximation of Wonham Filters // *J. Control Theory Applications*. 2004. No. 2. P. 1–10.
12. *Кушнер Г.Д.* Вероятностные методы аппроксимации в стохастических задачах управления и теории эллиптических уравнений. М.: Наука, 1985.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.*

Поступила в редакцию 05.04.2022

После доработки 15.05.2022

Принята к публикации 10.06.2022

# Стохастические системы

© 2022 г. М.М. ХРУСТАЛЕВ, д-р физ.-мат. наук  
(mmkhrustalev@mail.ru),

К.А. ЦАРЬКОВ, канд. физ.-мат. наук (k6472@mail.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## ОПТИМИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПО УПРАВЛЕНИЮ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФFUЗИОННО-СКАЧКООБРАЗНОГО ТИПА<sup>1</sup>

Рассматривается задача оптимального программного управления линейной по состоянию и нелинейной по управлению стохастической системой диффузионно-скачкообразного типа относительно заданного линейно-квадратичного по состоянию функционала качества. Получены необходимые и достаточные условия локальной оптимальности, разработана численная процедура последовательного улучшения заданной программы управления. В качестве приложений рассмотрены примеры задач оптимизации переключаемой системы со случайными начальными данными и терминальной инвариантности.

*Ключевые слова:* скачкообразные диффузии, нелинейные управляемые системы, условия локальной оптимальности, последовательное улучшение.

DOI: 10.31857/S0005231022090070, EDN: AJGPGW

### 1. Введение

В [1, 2] были получены необходимые и достаточные условия локальной оптимальности линейных по состоянию и нелинейных по управлению стохастических систем диффузионного типа относительно линейно-квадратичного по состоянию функционала качества управления. Основным инструментом анализа в этих работах послужил метод моментных характеристик [3], который состоит в том, что исходная стохастическая задача оптимального управления заменяется эквивалентной детерминированной задачей оптимизации моментов управляемого случайного процесса. В [3] было показано, что этот подход может быть обобщен на некоторые случаи нелинейных по состоянию стохастических систем диффузионного типа.

В настоящей статье рассматривается другое обобщение — предлагается исследовать задачу оптимального управления случайным процессом диффузионно-скачкообразного типа [4]. В последние десятилетия скачкообразные

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-08-00400).

диффузии начали активно применять для моделирования разнообразных физических и экономических процессов, на которые существенное влияние оказывают регулярно происходящие в некоторые моменты времени независимые друг от друга события произвольной природы [5, 6]. Дополнительный интерес представляет ситуация, в которой интенсивность происходящих событий можно считать управляемой. Сюда относятся, в частности, задачи оптимального управления переключаемыми системами, в которых выбор моментов переключения (скачкообразного изменения состояния системы) является ресурсом управления. Как правило, такие задачи рассматриваются в полностью детерминированной постановке или как задачи управления пучком траекторий (см., например, [7]). Одна из целей данной работы состоит в изучении возможности включения подобных задач в рамки вопроса оптимизации скачкообразных диффузий. Опустим стремление к максимальной общности и рассмотрим естественную для приложений линейную по состоянию управляемую систему с линейно-квадратичным функционалом качества.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$(1) \quad \begin{aligned} dx(t) = & (A_1(t, u(t))x(t) + B_1(t, u(t))) dt + \\ & + (A_2(t, u(t))x(t) + B_2(t, u(t))) dw(t) + \\ & + (A_3(t, u(t))x(t^-) + B_3(t, u(t))) dP_u(t), \quad x(0) = x_0, \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} J(u) = \mathbb{E} \left[ \int_0^T (x(t)^T D_1(t, u(t))x(t) + S_1(t, u(t))^T x(t) + E_1(t, u(t))) dt + \right. \\ \left. + x(T)^T Qx(T) + R^T x(T) + \right. \\ \left. + \int_0^T (x(t^-)^T D_2(t, u(t))x(t^-) + S_2(t, u(t))^T x(t^-) + E_2(t, u(t))) dP_u(t) \right] \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])}. \end{aligned}$$

Здесь  $t \in [0; T] \subset \mathbb{R}_+$  — время;  $x(t)$  —  $n$ -мерный вектор, характеризующий состояние системы в момент времени  $t$ ; начальное состояние  $x_0$  — это случайный вектор с заданными первым и вторым начальными моментами;  $u(t)$  — случайный  $m$ -мерный вектор программной функции управления в момент  $t$ , причем  $u(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$ , где принадлежность, как обычно, понимается в смысле классов эквивалентных вектор-функций;  $w(\cdot)$  — стандартный винеровский процесс;  $P_u(\cdot)$  — пуассоновский процесс с управляемой неоднородной интенсивностью скачков  $\lambda(t, u(t))$ ; отображения  $A_i : [0; T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i : [0; T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $D_i : [0; T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $S_i : [0; T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $E_i : [0; T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ , и  $\lambda : [0; T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  заданы и непрерывны вместе со своими первыми и вторыми частными производными по  $u$  на  $[0; T] \times \mathbb{R}^m$ ,

причем  $\lambda(t, u) \geq 0 \quad \forall (t, u) \in [0; T] \times \mathbb{R}^m$ ;  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^n$ ; здесь и далее в работе используется обозначение  $x(t^-) := \lim_{s \rightarrow t-0} x(s)$ ,  $t \in (0; T]$ ,  $x(0^-) := x_0$ . Начальное состояние  $x_0$ , винеровский процесс  $w(\cdot)$  и пуассоновский процесс  $P_u(\cdot)$  независимы в совокупности.

Прокомментируем модель управляемого процесса (1). Предполагается, что помимо детерминированного первого слагаемого и непрерывных (вообще говоря, частично управляемых) случайных внешних воздействий, моделируемых вторым слагаемым в правой части (1), на процесс управления оказывает влияние некоторый случайный поток событий, которые происходят независимо друг от друга с интенсивностью  $\lambda(t, u(t))$ , т.е. управляющее устройство в известных пределах может воздействовать на текущую частоту их возникновения. Если в момент времени  $s \in [0; T]$  произошло одно из событий потока, то вектор состояния системы получает мгновенное (скачкообразное) приращение на величину, зависящую от момента времени  $s$ , текущего состояния  $x(s^-)$  и значения вектора управления  $u(s)$ . Характер указанной зависимости определяется структурой третьего слагаемого в (1). В интегральной записи системы (1) первое слагаемое в правой части понимается в средне-квадратичном смысле, второе — как интеграл Ито, третье — как интеграл по случайной мере Пуассона (детальные определения можно найти в [8] или [9]).

Теперь скажем несколько слов о функционале качества (2). Во-первых, он определен и принимает действительное значение при любом  $u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$  ввиду существования сильного решения (1) с конечными первым и вторым моментами [8]. Во-вторых, он включает в себя не только стандартные слагаемые для учета суммарных и конечных отклонений от цели управления, а также суммарных затрат на управляющие воздействия, но и слагаемые для учета затрат на управление в рамках влияния на пуассоновский поток событий. В-третьих, не накладываются никакие излишние требования на отображения  $D_i$ ,  $S_i$ ,  $E_i$  (помимо указанных выше свойств гладкости), матрицу  $Q$  и вектор  $R$ , поэтому функционал (2) может не достигать своей точной нижней грани  $J^* \geq -\infty$ . В этом случае решением задачи (1)–(2) будем считать минимизирующую последовательность  $\{u_k\} \subset \mathcal{L}_\infty^m([0; T]) : \lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = J^*$ , иначе считаем решением функцию  $u^* \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T]) : J(u^*) = J^*$ .

*Замечание 1.* В данной работе намеренно опускается естественное, но громоздкое, обобщение задачи (1)–(2) на случай многомерных винеровского и пуассоновского процессов. Также не рассматриваются некоторые допустимые варианты нелинейных по состоянию управляемых систем (см. [3]). Кроме того, в сравнении с работой авторов [10] по задаче терминальной инвариантности управляемой диффузионно-скачкообразной системы из рассмотрения убрана случайная мера Пуассона общего вида. Вместо нее рассмотрен более частный случай в виде пуассоновского процесса. Основное отличие общего случая заключается в наличии дополнительного вектора случайных параметров, влияющего на величину скачков в системе. Для всех указанных здесь обобщений проводимые ниже рассуждения могут быть повторены практически дословно.

**Замечание 2.** С точки зрения приложений основным частным случаем задачи (1)–(2) является линейно-квадратичная постановка об аффинном регулировании

$$\begin{aligned}
 dx(t) &= (A(t)x(t) + B(t)\tilde{u}(t, x(t))) dt + (G(t)x(t) + C(t)) dw(t) + \\
 &\quad + (F(t)x(t^-) + V(t)) dP_u(t), \quad x(0) = x_0, \\
 J(u) &= \\
 &= \mathbb{E} \left[ \int_0^T (x(t)^T D(t)x(t) + \tilde{u}(t, x(t))^T E(t)\tilde{u}(t, x(t))) dt + x(T)^T Qx(T) + \gamma P_u(T) \right],
 \end{aligned}$$

где  $\tilde{u}(t, x) = L_1(t)x + L_2(t)$ , пуассоновский процесс  $P_u(\cdot)$  имеет интенсивность скачков  $\lambda(t, u(t)) = \lambda_1 u_\lambda(t)^2 + \lambda_0$ ,  $\lambda_i \geq 0$ , а вектором управления  $u(t)$  является совокупность элементов матрицы  $L_1(t)$ , вектора  $L_2(t)$  и числа  $u_\lambda(t)$ . Число  $\gamma \geq 0$  характеризует величину штрафа за совершение управляемых скачков. Аффинный регулятор  $\tilde{u}(t, x)$  может также входить во второе и третье слагаемые стохастического дифференциального уравнения. Примеры таких задач будут рассмотрены в разделе 6.

### 3. Метод моментных характеристик и обобщенная формула Ито

Начнем с того, что преобразуем функционал качества управления (2). Обозначим  $m(t) := \mathbb{E}[x(t)]$ ,  $N(t) := \mathbb{E}[x(t)x(t)^T]$ , тогда для всякого  $u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad J(u) &= \int_0^T \left( \text{tr} [D_1(t, u(t))N(t)] + S_1(t, u(t))^T m(t) + E_1(t, u(t)) + \right. \\
 &\quad \left. + \lambda(t, u(t)) (\text{tr} [D_2(t, u(t))N(t)] + S_2(t, u(t))^T m(t) + E_2(t, u(t))) \right) dt + \\
 &\quad + \text{tr} [QN(T)] + R^T m(T).
 \end{aligned}$$

В самом деле, функция  $u(\cdot)$  неслучайна, а случайные величины  $x(t^-)$  и  $P_u(t)$  независимы при каждом  $t \in [0; T]$ , так как независимы  $x_0$ ,  $w(\cdot)$  и  $P_u(\cdot)$ . Следовательно, можно внести линейный оператор математического ожидания под знак каждого из интегралов в (2), при этом второй из них преобразуется к виду интеграла Лебега в силу равенства  $\mathbb{E} [\int_r^s dP_u(t)] = \mathbb{E}[P_u(s) - P_u(r)] = \int_r^s \lambda(t, u(t)) dt \quad \forall r, s \in [0; T]$  [8]. В предположении непрерывности функций  $m(t)$  и  $N(t)$  (будет показано ниже) получаем (3).

Видно, что качество управления определяется по самой функции  $u(\cdot)$  и по детерминированным моментным характеристикам случайного процесса  $x(\cdot)$ . Хорошо известно, что в случае отсутствия пуассоновской компоненты в (1) первый и второй начальные моменты процесса  $x(\cdot)$  могут быть последовательно найдены из решения двух линейных задач Коши [1–3], которые не содержат моментов более высокого порядка и потому разрешимы. Установим

аналогичное свойство для систем вида (1), выписав систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции  $m : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  и  $N : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ . Для этого потребуется соответствующая обобщенная формула Ито [8].

Пусть  $u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$  и задана функция  $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ . Через  $\varphi'(x)$  обозначим строку, составленную из элементов  $\partial\varphi(x)/\partial x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , а через  $\varphi''(x)$  —  $(n \times n)$ -матрицу  $\{\partial^2\varphi(x)/\partial x_i\partial x_j\}$ . Тогда с вероятностью 1 при всех  $t \in [0; T]$  справедливо следующее соотношение [4, теорема 1.16]:

$$\begin{aligned} \varphi(x(t)) &= \varphi(x_0) + \int_0^t \varphi'(x(s)) (A_1(s, u(s))x(s) + B_1(s, u(s))) ds + \\ &+ \int_0^t \varphi'(x(s)) (A_2(s, u(s))x(s) + B_2(s, u(s))) dw(s) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t (A_2(s, u(s))x(s) + B_2(s, u(s)))^T \varphi''(x(s)) (A_2(s, u(s))x(s) + B_2(s, u(s))) ds + \\ &+ \int_0^t (\varphi(x(s^-)) + A_3(s, u(s))x(s^-) + B_3(s, u(s))) - \varphi(x(s^-)) dP_u(s). \end{aligned}$$

Положим  $\varphi(x) = x_i$ ,  $i \in \{\overline{1, n}\}$ , тогда

$$\begin{aligned} x_i(t) &= x_{i0} + \int_0^t (A_1(s, u(s))x(s) + B_1(s, u(s)))_i ds + \\ &+ \int_0^t (A_2(s, u(s))x(s) + B_2(s, u(s)))_i dw(s) + \\ &+ \int_0^t (A_3(s, u(s))x(s^-) + B_3(s, u(s)))_i dP_u(s), \end{aligned}$$

и, учитывая, как и ранее, независимость случайных величин  $x(t^-)$  и  $P(t)$ ,  $t \in [0; T]$ , равенство  $\mathbb{E} [\int_r^s dP_u(t)] = \int_r^s \lambda(t, u(t)) dt$ ,  $r, s \in [0; T]$ , а также мартингалное свойство интеграла Ито [8], получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [x_i(t)] &= \mathbb{E} [x_{i0}] + \int_0^t (A_1(s, u(s))m(s) + B_1(s, u(s)))_i ds + \\ &+ \int_0^t \lambda(s, u(s)) (A_3(s, u(s))m(s) + B_3(s, u(s)))_i ds, \end{aligned}$$

откуда непосредственно вытекает следующая линейная задача Коши, решением которой является абсолютно непрерывная вектор-функция  $m(\cdot)$ :

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{m}(t) &= A_1(t, u(t))m(t) + B_1(t, u(t)) + \\ &+ \lambda(t, u(t)) (A_3(t, u(t))m(t) + B_3(t, u(t))), \\ m(0) &= \mathbb{E}[x_0]. \end{aligned}$$

Положим  $\varphi(x) = x_i x_j$ ,  $i, j \in \{\overline{1, n}\}$ , тогда

$$\begin{aligned} x_i(t)x_j(t) &= x_{i_0}x_{j_0} + \\ &+ \int_0^t \left( x_j(s) (A_1(s, u(s))x(s) + B_1(s, u(s)))_i + \right. \\ &\quad \left. + x_i(s) (A_1(s, u(s))x(s) + B_1(s, u(s)))_j \right) ds + \\ &+ \int_0^t \left( x_j(s) (A_2(s, u(s))x(s) + B_2(s, u(s)))_i + \right. \\ &\quad \left. + x_i(s) (A_2(s, u(s))x(s) + B_2(s, u(s)))_j \right) dw(s) + \\ &+ \int_0^t \left( A_2(s, u(s))x(s) + B_2(s, u(s)) \right)_i \left( A_2(s, u(s))x(s) + B_2(s, u(s)) \right)_j ds + \\ &+ \int_0^t \left( x_i(s^-) (A_3(s, u(s))x(s^-) + B_3(s, u(s)))_j + \right. \\ &\quad \left. + x_j(s^-) (A_3(s, u(s))x(s^-) + B_3(s, u(s)))_i + \right. \\ &\quad \left. + (A_3(s, u(s))x(s^-) + B_3(s, u(s)))_i (A_3(s, u(s))x(s^-) + B_3(s, u(s)))_j \right) dP_u(s), \end{aligned}$$

а значит, используя обозначение  $\mathcal{A}_i$  для  $i$ -й строки матрицы  $\mathcal{A}$ , получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[x_i(t)x_j(t)] &= \mathbb{E}[x_{i_0}x_{j_0}] + \int_0^t \left( A_1(s, u(s))_i \mathbb{E}[x_j(s)x(s)] + m_j(s)B_1(s, u(s))_i + \right. \\ &\quad \left. + A_1(s, u(s))_j \mathbb{E}[x_i(s)x(s)] + m_i(s)B_1(s, u(s))_j \right) ds + \\ &+ \int_0^t \left( A_2(s, u(s))_i \mathbb{E}[x(s)x(s)^T] A_2(s, u(s))_j^T + A_2(s, u(s))_i m(s)B_2(s, u(s))_j + \right. \\ &\quad \left. + A_2(s, u(s))_j m(s)B_2(s, u(s))_i + B_2(s, u(s))_i B_2(s, u(s))_j \right) ds + \\ &+ \int_0^t \lambda(s, u(s)) \left( A_3(s, u(s))_i \mathbb{E}[x_j(s^-)x(s^-)] + m_j(s)B_3(s, u(s))_i + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A_3(s, u(s))_j \mathbb{E} [x_i(s^-) x(s^-)] + m_i(s) B_3(s, u(s))_j + \\
& + A_3(s, u(s))_i \mathbb{E} [x(s^-) x(s^-)^T] A_3(s, u(s))_j^T + A_3(s, u(s))_i m(s) B_3(s, u(s))_j + \\
& + A_3(s, u(s))_j m(s) B_3(s, u(s))_i + B_3(s, u(s))_i B_3(s, u(s))_j \Big) ds,
\end{aligned}$$

откуда непосредственно вытекает следующая линейная задача Коши, решением которой является абсолютно непрерывная матричная функция  $N(\cdot)$ :

$$\begin{aligned}
\dot{N}(t) = & A_1(t, u(t))N(t) + N(t)A_1(t, u(t))^T + B_1(t, u(t))m(t)^T + \\
& + m(t)B_1(t, u(t))^T + A_2(t, u(t))N(t)A_2(t, u(t))^T + \\
& + A_2(t, u(t))m(t)B_2(t, u(t))^T + B_2(t, u(t))m(t)^T A_2(t, u(t))^T + \\
(5) \quad & + B_2(t, u(t))B_2(t, u(t))^T + \lambda(t, u(t)) \Big( A_3(t, u(t))N(t) + N(t)A_3(t, u(t))^T + \\
& + B_3(t, u(t))m(t)^T + m(t)B_3(t, u(t))^T + A_3(t, u(t))N(t)A_3(t, u(t))^T + \\
& + A_3(t, u(t))m(t)B_3(t, u(t))^T + B_3(t, u(t))m(t)^T A_3(t, u(t))^T + \\
& + B_3(t, u(t))B_3(t, u(t))^T \Big), \quad N(0) = \mathbb{E}[x_0 x_0^T].
\end{aligned}$$

#### 4. Эквивалентная детерминированная задача оптимизации

Рассмотрим полученную задачу оптимального управления системой моментов (4)–(5) относительно функционала качества (3), опустив для краткости записи аргументы всех имеющихся отображений:

$$\dot{m} = A_1 m + B_1 + \lambda(A_3 m + B_3), \quad m(0) = \mathbb{E}[x_0],$$

$$\begin{aligned}
\dot{N} = & A_1 N + N A_1^T + B_1 m^T + m B_1^T + A_2 N A_2^T + A_2 m B_2^T + B_2 m^T A_2^T + B_2 B_2^T + \\
& + \lambda(A_3 N + N A_3^T + B_3 m^T + m B_3^T + A_3 N A_3^T + A_3 m B_3^T + B_3 m^T A_3^T + B_3 B_3^T), \\
& N(0) = \mathbb{E}[x_0 x_0^T],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J = & \int_0^T (\text{tr}[D_1 N] + S_1^T m + E_1 + \lambda(\text{tr}[D_2 N] + S_2^T m + E_2)) dt + \\
& + \text{tr}[QN(T)] + R^T m(T).
\end{aligned}$$

Видно, что  $m$  и  $N$  входят во все соотношения не более чем линейно.

Составим новый вектор состояния  $y(t) \in \mathbb{R}^{n(n+3)/2}$  из компонент вектора  $m(t)$  и различных компонент симметричной матрицы  $N(t)$ . С его помощью задача может быть переписана в виде

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) = & \tilde{A}(t, u(t))y(t) + \tilde{B}(t, u(t)), \quad y(0) = y_0, \\
J(u) = & \int_0^T \left( \tilde{D}(t, u(t))^T y(t) + \tilde{E}(t, u(t)) \right) dt + \tilde{Q}y(T) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{L}_\infty^m([0;T])}.
\end{aligned}$$

Здесь вектор  $y_0$  составлен из элементов вектора  $\mathbb{E}[x_0]$  и матрицы  $\mathbb{E}[x_0 x_0^T]$ , а отображения  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{D}$ ,  $\tilde{E}$  и вектор  $\tilde{Q}$  явно выражаются через данные исходно в задаче (1)–(2) (например, с помощью оператора (симметричной) векторизации, как в [2]).

Дополнительно увеличив размерность вектора состояния на единицу, приведем задачу к стандартной форме линейной по состоянию управляемой системы с терминальным линейным функционалом качества

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \hat{A}(t, u(t))y(t) + \hat{B}(t, u(t)), \quad y(0) = y_0, \\ J(u) &= \hat{Q}y(T) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])}. \end{aligned}$$

Эта новая задача теперь может быть исследована независимо от исходной стохастической постановки. К ней, в частности, применимы методы локального и глобального улучшения [11] и классический принцип максимума [12]. В следующем разделе будут сформулированы необходимые и достаточные условия локальной оптимальности, а также описан численный подход к исследованию, важный для практических приложений.

## 5. Условия оптимальности и процедура улучшения

В предыдущих разделах была получена детерминированная линейная по состоянию задача оптимального управления с терминальным функционалом качества, эквивалентная исходной стохастической линейно-квадратичной оптимизационной проблеме (1)–(2). Для удобства допустим некоторую вольность и перепишем ее в традиционных обозначениях:

$$(6) \quad \dot{x}(t) = A(t, u(t))x(t) + B(t, u(t)), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

$$(7) \quad J(u) = Q^T x(T) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])}.$$

Здесь по построению  $A$  и  $B$  — известные непрерывные по  $t$  и дважды непрерывно дифференцируемые по  $u$  на  $[0; T] \times \mathbb{R}^m$  отображения,  $Q \in \mathbb{R}^n$ .

Для дальнейшего потребуются соотношения для определения градиента функционала (7) в произвольной точке  $u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$ . Перед тем как их выписать, обратим внимание на одну существенную деталь.

*Замечание 3.* Градиент функционала в точке обычно определяется для дифференцируемых функционалов на гильбертовом пространстве  $X$  (например,  $X = \mathbb{R}^n$  или  $X = \mathcal{L}_2([0; T])$ ) как тот элемент из  $X$ , в который переходит производная функционала в точке при естественном изоморфизме между  $X^*$  и  $X$ . В случае банахова пространства  $\mathcal{L}_\infty^m([0; T])$  такого изоморфизма нет, но если производная некоторого функционала  $J$  в точке  $u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$  имеет вид

$$J'(u)[v] = \int_0^T f(t)^T v(t) dt, \quad v \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T]),$$

где  $f \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$ , то функция  $f$  может быть по определению названа градиентом функционала  $J$  в точке  $u$  ввиду включения множеств  $\mathcal{L}_\infty^m([0; T]) \subset \mathcal{L}_2^m([0; T])$ .

Формулы для записи производной функционала (7) имеют вид, указанный в замечании 3, и в общем нелинейном случае были получены уже в [13–15]. Существует несколько стандартных способов вывода этих формул, которые подробно описаны в известной литературе. К ним относятся вариация функции управления и введение дополнительной сопряженной переменной [16], применение абстрактного правила множителей Лагранжа [17] и непосредственное дифференцирование наиболее подходящей формы функционала Лагранжа [18]. Конкретизируем эти результаты для задачи (6)–(7) в следующем виде. Пусть  $\mathcal{AC}^n([0; T])$  обозначает пространство абсолютно непрерывных функций из  $[0; T]$  в  $\mathbb{R}^n$ .

*Теорема 1. Пусть функционал*

$$L : \mathcal{AC}^n([0; T]) \times \mathcal{L}_\infty^m([0; T]) \times \mathcal{AC}^n([0; T]) \rightarrow \mathbb{R}$$

*имеет вид*

$$L(x, u, \psi) = (Q - \psi(T))^T x(T) + \psi(0)^T x_0 + \int_0^T \left( \dot{\psi}(t)^T x(t) + \psi(t)^T (A(t, u(t))x(t) + B(t, u(t))) \right) dt.$$

*Тогда для любого  $u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$  существует пара абсолютно непрерывных вектор-функций  $(x, \psi)$ , составляющих единственное решение двух задач Коши*

$$(8) \quad \dot{x}(t) = A(t, u(t))x(t) + B(t, u(t)), \quad x(0) = x_0,$$

$$(9) \quad \dot{\psi}(t) = -A(t, u(t))^T \psi(t), \quad \psi(T) = Q,$$

*и таких, что для любого  $\xi \in \mathcal{AC}^n([0; T])$  верны равенства*

$$L(x, u, \xi) = Q^T x(T) = \psi(0)^T x_0 + \int_0^T \psi(t)^T B(t, u(t)) dt, \quad L'_x(x, u, \psi) = 0.$$

*Следствие 1 (градиент функционала). В любой точке  $u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$  компоненты градиента функционала  $J$  аналитически определяются соотношениями*

$$\frac{\partial J(u)}{\partial u_j(\cdot)}(t) = \psi(t)^T \left( A'_{u_j}(t, u(t))x(t) + B'_{u_j}(t, u(t)) \right), \quad t \in [0; T], \quad j = \overline{1, m},$$

*где пара  $(x, \psi)$  – решение задач Коши (8)–(9).*

*Следствие 2* (необходимые условия оптимальности). Пусть  $u^* \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$  — точка минимума в задаче (6)–(7), а пара  $(x^*, \psi^*)$  — соответствующее решение задач Коши (8)–(9). Тогда для почти всех  $t \in [0; T]$  и всех  $j \in \{\overline{1, m}\}$  вектора  $\psi^*(t)$  и  $A'_{u_j}(t, u^*(t))x^*(t) + B'_{u_j}(t, u^*(t))$  ортогональны в  $\mathbb{R}^n$ .

Доказательства этих трех утверждений приведены в Приложении.

Заметим, что на практике аналитическое исследование результата следствия 2, т.е. поиск всех стационарных точек в задаче (6)–(7), в большинстве случаев оказывается затруднительным. В такой ситуации результат следствия 1 может быть использован для решения задачи улучшения данной программы управления. А именно, произвольно или из дополнительных соображений выбирается допустимая программа  $u_0(t)$ ,  $t \in [0; T]$ , после чего методом градиентного спуска с применением какой-либо процедуры численного интегрирования задач Коши (8)–(9) из этого начального приближения строится локально минимизирующая последовательность программ  $\{u_k(t)\}$ . При этом значения всех функций и градиента функционала  $J$  подсчитываются только в конечном числе узлов выбранной численной сетки интегрирования на  $[0; T]$ . Малость какой-либо нормы такого конечномерного вектора градиента можно принять за условие останковки расчетов. Решение задачи улучшения естественно считать некоторым приближением к решению задачи (6)–(7), несмотря на то что фактическое приближение не может быть гарантировано.

Если все же удастся отыскать программу управления  $u^* \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$ , удовлетворяющую следствию 2 (см., например, [2, раздел 5]), то для нее могут быть проверены некоторые достаточные условия оптимальности. Предлагается в этих целях использовать следующие известные результаты [2, 18], которые приведем здесь без доказательства. Пусть  $\mathcal{AC}^{n \times n}([0; T])$  обозначает пространство абсолютно непрерывных функций из  $[0; T]$  в  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

*Теорема 2.* Пусть  $u^* \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$ ,  $(x^*, \psi^*)$  — соответствующее ему решение задач Коши (8)–(9), а функционал

$$K : \mathcal{AC}^n([0; T]) \times \mathcal{L}_\infty^m([0; T]) \times \mathcal{AC}^{n \times n}([0; T]) \rightarrow \mathbb{R}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} K(x, u, \Sigma) = & (Q - \psi^*(T))^T x(T) + \psi^*(0)^T x_0 - \\ & - \frac{1}{2} (x(T) - x^*(T))^T \Sigma(T) (x(T) - x^*(T)) + \\ & + \int_0^T \left( \dot{\psi}^*(t)^T x(t) + \psi^*(t)^T (A(t, u(t))x(t) + B(t, u(t))) \right) dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T (x(t) - x^*(t))^T \dot{\Sigma}(t) (x(t) - x^*(t)) dt + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^T (x(t) - x^*(t))^T \Sigma(t) \left( A(t, u(t))x(t) + B(t, u(t)) - \right. \\ \left. - A(t, u^*(t))x^*(t) - B(t, u^*(t)) \right) dt.$$

Тогда для любого  $u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$  и соответствующего ему решения  $x$  задачи Коши (8) при любом  $\Sigma \in \mathcal{AC}^{n \times n}([0; T])$  верны равенства

$$K(x, u, \Sigma) = Q^T x(T), \quad K'_x(x^*, u^*, \Sigma) = 0, \quad K'_u(x^*, u^*, \Sigma) = \nabla_u J(u^*).$$

*Следствие 3* (достаточные условия локальной оптимальности). Пусть задано  $u^* \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$ , а  $(x^*, \psi^*)$  — соответствующее ему решение задач Коши (8)–(9). Пусть выполнены условия: для почти всех  $t \in [0; T]$  и всех  $j \in \{\overline{1, m}\}$  вектора  $\psi^*(t)$  и  $A'_{u_j}(t, u^*(t))x^*(t) + B'_{u_j}(t, u^*(t))$  ортогональны в  $\mathbb{R}^n$ ; функция  $\Sigma^*$  является решением задачи Коши

$$\dot{\Sigma}^*(t) = -\Sigma^*(t)A(t, u^*(t)) - A(t, u^*(t))^T \Sigma^*(t) - \gamma I, \quad \Sigma^*(T) = \gamma_1 I,$$

где  $\gamma, \gamma_1$  — положительные числа,  $I$  — единичная матрица; для почти всех  $t \in [0; T]$  строго положительны последние  $m$  угловых миноров матрицы

$$\Omega(t) = \left( \begin{array}{c|c} \gamma I & \tilde{\Omega}(t) \\ \hline \tilde{\Omega}(t)^T & \hat{\Omega}(t) \end{array} \right),$$

в которой блоки  $\tilde{\Omega}$  и  $\hat{\Omega}$  составлены из компонент

$$\tilde{\Omega}_{ij}(t) = \sum_{s=1}^n \left[ \psi_s^*(t) \frac{\partial A_{si}(t, u^*(t))}{\partial u_j} + \right. \\ \left. + \Sigma_{is}^*(t) \left( \sum_{l=1}^n \frac{\partial A_{sl}(t, u^*(t))}{\partial u_j} x_l^*(t) + \frac{\partial B_s(t, u^*(t))}{\partial u_j} \right) \right], \\ \hat{\Omega}_{jk}(t) = \psi^*(t)^T \left[ \frac{\partial^2 A(t, u^*(t))}{\partial u_j \partial u_k} x^*(t) + \frac{\partial^2 B(t, u^*(t))}{\partial u_j \partial u_k} \right].$$

Тогда функционал  $J$  имеет в точке  $u^*$  локальный минимум.

## 6. Примеры

*Пример 1.* На интервале времени  $[0; 1]$  рассматривается управляемая динамическая система

$$dx_1(t) = x_2(t)dt + dw(t) + x_2(t^-)dP_u(t), \quad x_1(0) \sim \mathcal{N}(0, 1), \\ dx_2(t) = u_1(t)x_1(t)dt, \quad x_2(0) = 0,$$

где  $P_u(\cdot)$  — процесс Пуассона интенсивности  $\lambda(t, u(t)) = u_2(t)^2$ . Функционал качества управления имеет вид

$$J(u) = \mathbb{E} \left[ \int_0^1 u_1(t)^2 dt + x_1(1)^2 \right]$$

и подлежит минимизации за счет выбора функций  $u_{1,2}(t) \in \mathcal{L}_\infty([0; 1])$ .

Запишем эквивалентную детерминированную задачу (3)–(5) оптимального управления моментными характеристиками случайного процесса  $x(\cdot)$ :

$$\begin{aligned} \dot{m}_1(t) &= m_2(t) + u_2(t)^2 m_2(t), & m_1(0) &= 0, \\ \dot{m}_2(t) &= u_1(t) m_1(t), & m_2(0) &= 0, \\ \dot{N}_{11}(t) &= 2(1 + u_2(t)^2) N_{12}(t) + u_2(t)^2 N_{22}(t) + 1, & N_{11}(0) &= 1, \\ \dot{N}_{12}(t) &= u_1(t) m_1(t) + u_1(t) N_{11}(t) + (1 + u_2(t)^2) N_{22}(t), & N_{12}(0) &= 0, \\ \dot{N}_{22}(t) &= 2u_1(t) (m_2(t) + N_{12}(t)), & N_{22}(0) &= 0, \\ J(u) &= \int_0^1 u_1(t)^2 dt + N_{11}(1) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{L}_\infty^2([0;1])}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем следующие исходные данные для задачи (6)–(7):  $t \in [0; 1]$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^6$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$A(t, u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 + u_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 + 2u_2^2 & u_2^2 & 0 \\ u_1 & 0 & u_1 & 0 & 1 + u_2^2 & 0 \\ 0 & 2u_1 & 0 & 2u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B(t, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ u_1^2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Использование необходимых условий оптимальности (следствие 2) в этом примере не позволяет аналитически найти стационарные точки функционала  $J$ , поэтому будем его исследовать с помощью итерационной процедуры улучшения.

При отсутствии управляющих воздействий ( $u_1(t) = u_2(t) \equiv 0$ ) имеем  $J(u) = 2$ , и это решение не удовлетворяет необходимым условиям оптимума. Взяв его в качестве начального приближения, получим методом градиентного

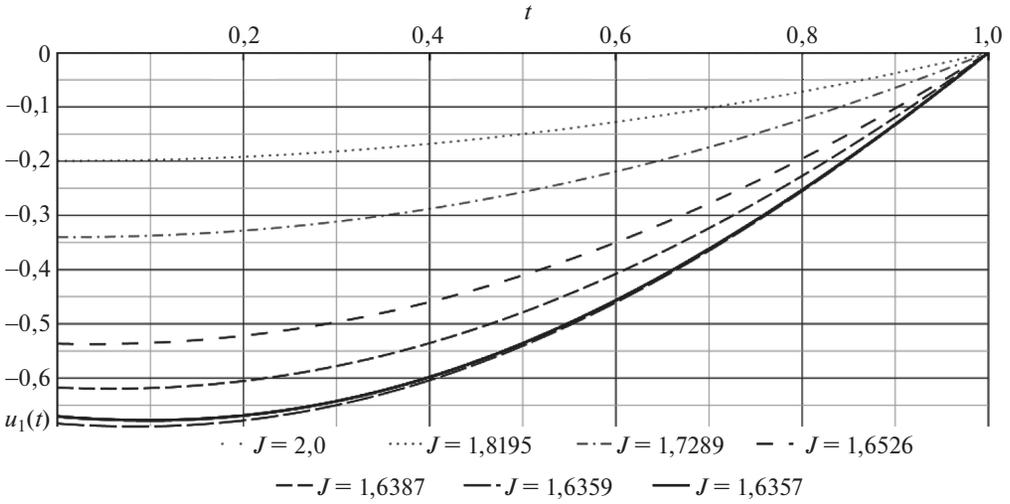


Рис. 1. Градиентный спуск для функции  $u_1(t)$  (первое решение).

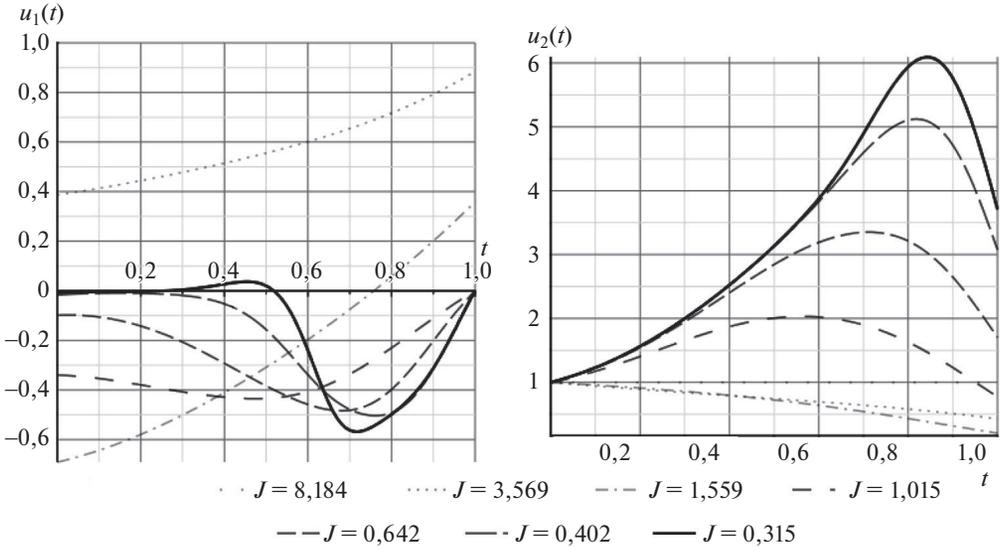


Рис. 2. Градиентный спуск для функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  (второе решение).

спуска (следствие 1) решение с  $u_2(t) \equiv 0$  и ненулевой функцией  $u_1(t)$ , со значением  $J(u) \approx 1,636$  (см. рис. 1). Однако и оно не является близким к оптимальному. Так, взяв в качестве начального приближения точку  $u_1(t) = u_2(t) \equiv 1$  (в ней  $J(u) \approx 8$ ), после градиентного спуска получаем решение со значением  $J(u) \approx 0,315$  (см. рис. 2). Таким образом, в данном примере имеется возможность сильно улучшить некоторую произвольным образом выбранную программу управления и в несколько раз повысить качество в сравнении с отсутствием управляющих воздействий.

*Пример 2.* На интервале времени  $[0; 3]$  рассматривается управляемая динамическая система

$$\begin{aligned} dx_1(t) &= u_1(t)dt + (x_2(t^-) - x_1(t^-)) dP_u(t), \\ dx_2(t) &= x_2(t)dt + (x_1(t^-) - x_2(t^-)) dP_u(t), \end{aligned}$$

где  $P_u(\cdot)$  — процесс Пуассона интенсивности  $\lambda(t, u(t)) = u_2(t)^2$ , а начальное состояние  $x(0)$  имеет равномерное распределение на квадрате  $[7, 8; 8, 2] \times [2; 4]$ . Последнее, в частности, означает, что известны первый и второй начальные моменты случайного вектора  $x(0)$ :

$$m(0) = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad N(0) \approx \begin{pmatrix} 64,01 & 24 \\ 24 & 9,33 \end{pmatrix}.$$

Функционал качества управления имеет вид

$$J(u) = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{2} \int_0^3 (u_1^2(t) + x_1^2(t) + x_2^2(t)) dt + \gamma P_u(3) \right], \quad \gamma = 100,$$

и подлежит минимизации за счет выбора функций  $u_{1,2}(t) \in \mathcal{L}_\infty([0; 3])$ .

Эта задача в форме проблемы управления пучком траекторий переключаемой системы с полностью управляемыми моментами скачков (переключений) была рассмотрена в [7]. Там был получен следующий результат: оптимальным является одноразовое переключение в момент времени  $t_1 \approx 0,7$ . Изучим, возможно ли получить приближение к этому решению или иные результаты за счет какого-либо управления интенсивностью случайно происходящих переключений. Отметим, что точное соответствие с результатами работы [7] невозможно, так как в [7] рассматриваемая задача решается на другом множестве допустимых управлений. В частности, ни одна из функций  $u_2(t) \in \mathcal{L}_\infty([0; 3])$  не позволяет получить  $\delta$ -образную интенсивность пуассоновского процесса, которую можно было бы считать соответствующей детерминированному одноразовому переключению.

Эквивалентная детерминированная задача управления моментами (3)–(5) записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{m}_1(t) &= u_1(t) + (m_2(t) - m_1(t)) u_2(t)^2, & m_1(0) &= 8, \\ \dot{m}_2(t) &= m_2(t) + (m_1(t) - m_2(t)) u_2(t)^2, & m_2(0) &= 3, \\ \dot{N}_{11}(t) &= 2u_1(t)m_1(t) + u_2(t)^2 (N_{22}(t) - N_{11}(t)), & N_{11}(0) &\approx 64,01, \\ \dot{N}_{12}(t) &= N_{12}(t) + u_1(t)m_2(t), & N_{12}(0) &= 24, \\ \dot{N}_{22}(t) &= 2N_{22}(t) + u_2(t)^2 (N_{11}(t) - N_{22}(t)), & N_{22}(0) &\approx 9,33, \end{aligned}$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^3 (u_1(t)^2 + \tilde{\gamma} u_2(t)^2 + N_{11}(t) + N_{22}(t)) dt \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{L}_\infty^2([0; 3])}, \quad \tilde{\gamma} = 200.$$

Отсюда получаем следующие исходные данные для задачи (6)–(7):  $t \in [0; 3]$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^6$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$A(t, u) = \begin{pmatrix} -u_2^2 & u_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_2^2 & 1 - u_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2u_1 & 0 & -u_2^2 & 0 & u_2^2 & 0 \\ 0 & u_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_2^2 & 0 & 2 - u_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B(t, u) = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,5u_1^2 + 100u_2^2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 64,01 \\ 24 \\ 9,33 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Применение необходимых условий оптимальности дает следующие результаты: либо почти всюду

$$(10) \quad u_1(t) = \frac{8}{1 + e^6} (e^t - e^{6-t}), \quad u_2(t) \equiv 0, \quad J(u) \approx 970,53,$$

либо на некоторых интервалах выполняются соотношения

$$(11) \quad \begin{aligned} u_1(t) &= -\psi_1(t) - 2x_1(t)\psi_3(t), \\ (\psi_2(t) - \psi_1(t))(x_2(t) - x_1(t)) + (\psi_5(t) - \psi_3(t))(x_5(t) - x_3(t)) &= 100, \end{aligned}$$

где  $\psi(t)$  — вектор сопряженных переменных. Ясно, что решение системы алгебраических уравнений (11) совместно с прямой и сопряженной системами дифференциальных связей и краевыми условиями затруднительно. В то же время аналитическое решение вида (10) едва ли является оптимальным, так как, например, полученное в [7] решение с одним неслучайным моментом переключения  $t_1 \approx 0,7$  имеет значение  $J(u) \approx 178$ . Попробуем улучшить результат, используя градиентный спуск.

Отметим, что  $\partial J(u_1, 0)/\partial u_2(\cdot) = 0$  при любом  $u_1 \in \mathcal{L}_\infty([0; 3])$ , поэтому итерационный поиск решений с ненулевой интенсивностью необходимо начинать из начального приближения с  $u_2 \neq 0$ . Так, взяв за начальное приближение функцию  $u_1$  из (10) и  $u_2(t) \equiv 1$ , находим решение со значением  $J(u) \approx 500$ . Сравнение найденного управления  $u_1(t)$  с соответствующим из решения [7] приведено на рис. 3 слева. В свою очередь, вид найденного  $u_2(t)$  показан на рис. 3 справа. Ясно, что такая функция интенсивности есть не что иное, как приближение к интенсивности «импульсного» типа в момент времени  $t_1 = 0,64$ , что соответствует детерминированному переключению в этот момент. Подчеркнем, что выбранное начальное приближение никак не соотно-

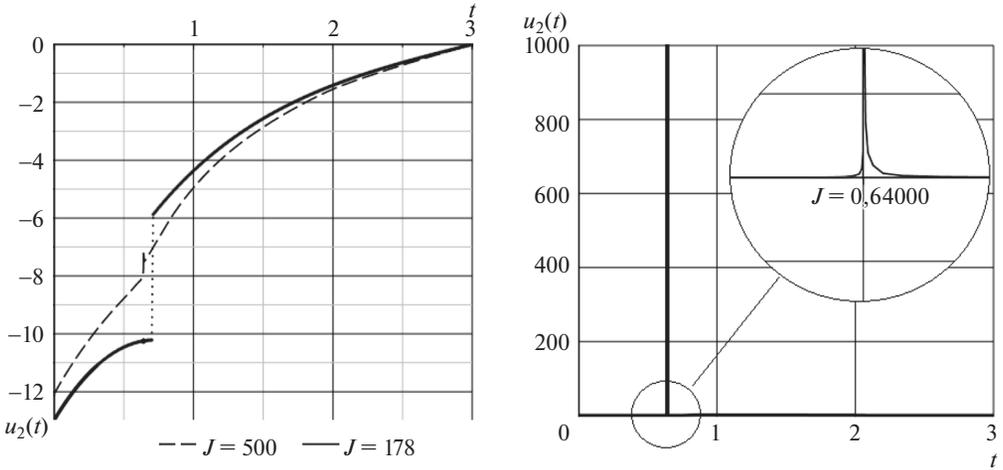


Рис. 3. Сравнение управлений  $u_1(t)$  и график  $u_2(t)$  для найденного решения.

сится с решением из [7], и тем не менее получена качественно схожая программа управления с фактически одним неслучайным переключением, несмотря на то что она сильно отличается от оптимальной.

Близкое к оптимальному значение  $J(u) \approx 178$  может быть также получено с использованием заранее подобранной ограниченной интенсивности. Соответствующий численный результат получается при  $u_1(t)$ , взятом из [7] (см. рис. 3, сплошная линия слева), и  $u_2(t)$ , взятом в виде непрерывной ломаной со значениями  $u_2(t_k) = 0$  при  $t_k \neq 0,7$  и  $u_2(0,7) = 1/h$ , на равномерной сетке численного интегрирования с достаточно малым шагом дискретизации  $h > 0$ . Этот результат уже не может быть улучшен за счет градиентного спуска.

*Пример 3.* В рамках заключительного примера рассмотрим адаптацию задачи о терминальной инвариантности из [19]. На интервале времени  $[0; 1]$  рассматривается управляемая система

$$\begin{aligned} dx_1(t) &= (x_2(t) + u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t))dt + x_2(t^-)dP_u(t), \\ dx_2(t) &= -x_1(t)dt + u_3(t)x_2(t^-)dP_u(t), \end{aligned}$$

где  $P_u(\cdot)$  — процесс Пуассона интенсивности  $\lambda(t, u(t)) \equiv 5$ , а начальное состояние  $x(0)$  имеет нормальное распределение с характеристиками  $m(0) = 0$ ,  $N(0) = 10I$ , где  $I$  — единичная матрица. Функционал качества управления имеет вид

$$J(u) = \mathbb{E}[x_2(1)^2].$$

Результат, полученный в [19], можно интерпретировать так: сингулярная на правом конце интервала времени программа управления

$$u_1(t) = \frac{A}{t-1}, \quad u_2(t) = \frac{Actg(t-1)}{t-1}, \quad u_3(t) = -tg(t-1), \quad A > 0,$$

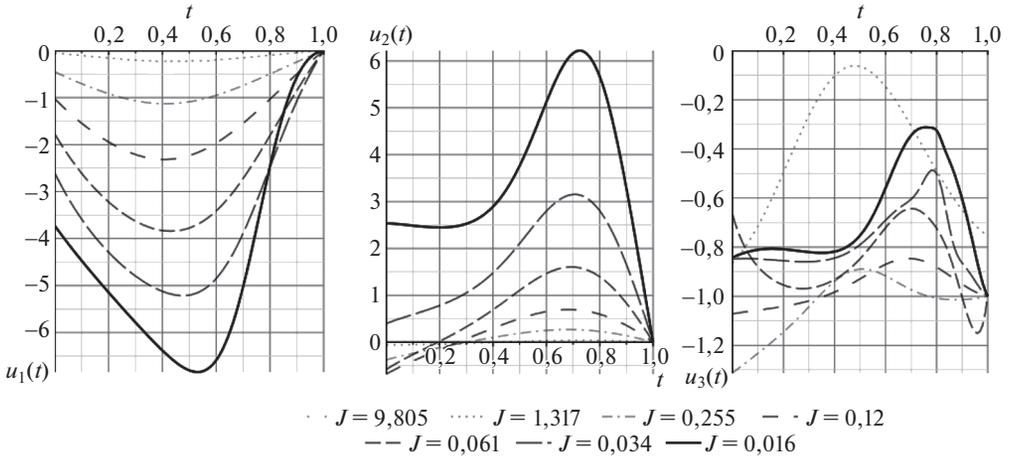


Рис. 4. Градиентный спуск и приближение к оптимальному решению  $u(t)$ .

обеспечивает минимальное значение функционала  $J(u) = 0$ . Естественно ожидать приближения к этому результату при решении задачи рассматриваемыми здесь методами.

Эквивалентная детерминированная задача управления моментами (3)–(5) записывается в виде

$$\dot{m}_1(t) = u_1(t)m_1(t) + (u_2(t) + 6)m_2(t), \quad m_1(0) = 0,$$

$$\dot{m}_2(t) = -m_1(t) + 5u_3(t)m_2(t), \quad m_2(0) = 0,$$

$$\dot{N}_{11}(t) = 2u_1(t)N_{11}(t) + 2(u_2(t) + 6)N_{12}(t) + 5N_{22}(t), \quad N_{11}(0) = 10,$$

$$\dot{N}_{12}(t) = -N_{11}(t) + (u_1(t) + 5u_3(t))N_{12}(t) + (u_2(t) + 5u_3(t) + 6)N_{22}(t), \quad N_{12}(0) = 0,$$

$$\dot{N}_{22}(t) = -2N_{12}(t) + 5(u_3(t))^2 + 2u_3(t)N_{22}(t), \quad N_{22}(0) = 10,$$

$$J(u) = N_{22}(1) \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{L}_{\infty}^3([0;1])}.$$

Ясно, что первый момент  $m(t)$  тождественно равен нулю и не влияет на решение задачи, поэтому первые два уравнения можно исключить и записать следующие исходные данные для задачи (6)–(7):  $t \in [0; 1]$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^3$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$A(t, u) = \begin{pmatrix} 2u_1 & 2u_2 + 12 & 5 \\ -1 & u_1 + 5u_3 & u_2 + 5u_3 + 6 \\ 0 & -2 & 5u_3^2 + 10u_3 \end{pmatrix}, \quad B(t, u) \equiv 0,$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Градиентный спуск из начального приближения  $u(t) \equiv 0$  позволяет получить программу управления со значением  $J(u) \approx 0,016$  (см. рис. 4). Заметим

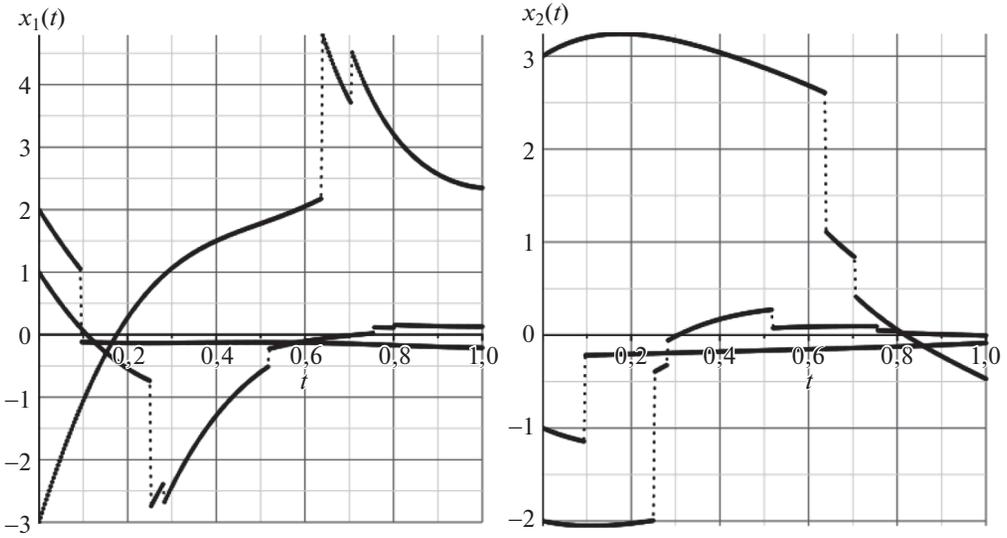


Рис. 5. Реализации случайного процесса  $x(t)$ .

при этом, что она не близка к решению из [19] и вообще не близка к сингулярному управлению, ее аналитическое выражение затруднительно, однако эта программа достаточно точно решает поставленную задачу оптимизации, а следовательно, приближенно обеспечивает терминальную инвариантность [19] системы по переменной  $x_2$ . Последнее можно наглядно продемонстрировать, выполнив численное моделирование нескольких реализаций случайного процесса  $x(t)$  при фиксированных начальных условиях (см. рис. 5). Однако здесь, в отличие от терминально инвариантной системы в [19], выбор начального условия влияет на степень приближения реализации случайной величины  $x_2(1)$  к нулю.

## 7. Заключение

Полученные в работе результаты показывают принципиальную возможность содержательного исследования задач оптимального программного управления стохастическими системами диффузионно-скачкообразного типа. Прикладная значимость результатов проистекает из того обстоятельства, что в настоящее время эффективные математические модели реальных управляемых процессов все чаще содержат элементы «событийной» природы. В различных областях приложений в роли независимых друг от друга однотипных случайных событий выступают скачки напряжения, обрывы связи, порывы ветра, малые метеоритные воздействия, поломки, чрезвычайные происшествия на производстве, корпоративные дефолты, страховые случаи и т.п. Изученная в работе диффузионно-скачкообразная модель является одной из наиболее распространенных моделей подобного рода. В связи с этим создание

методов оптимизации управления для нее открывает новые возможности в соответствующих прикладных проблемах.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы 1.* Пусть  $u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$ . Тогда задачи Коши (8), (9) имеют на  $[0; T]$  единственное решение  $(x, \psi)$  [20, стр. 63]. Первое равенство  $L(x, u, \xi) = Q^T x(T)$  вытекает из легко проверяемого интегрированием по частям соотношения

$$L(x, u, \xi) = Q^T x(T) + \xi(0)^T (x_0 - x(0)) - \int_0^T \xi(t)^T (\dot{x}(t) - A(t, u(t))x(t) - B(t, u(t))) dt,$$

а второе равенство

$$Q^T x(T) = \psi(0)^T x_0 + \int_0^T \psi(t)^T B(t, u(t)) dt$$

следует из первого при  $\xi = \psi$  и определения функционала  $L$ . Также из определения  $L$  вытекает эквивалентность равенства  $L'_x(x, u, \psi) = 0$  и двух равенств в (9), что проверяется непосредственным дифференцированием. Здесь  $L'_x(x, u, \psi)$  — элемент пространства  $\mathcal{L}_\infty^n([0; T]) + \mathbb{R}^n$ , сопряженного к пространству  $\mathcal{AC}^n([0; T])$  [21].

*Доказательство следствия 1.* Определим функцию  $f : [0; T] \rightarrow \mathbb{R}^m$  равенством

$$f_j(t) = \psi(t)^T \left( A'_{u_j}(t, u(t))x(t) + B'_{u_j}(t, u(t)) \right), \quad j = \overline{1, m}.$$

Исходя из замечания 3 достаточно проверить, что полная производная в смысле Фреше функционала  $J$  в точке  $u \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$  имеет вид

$$J'(u)[v] = \int_0^T f(t)^T v(t) dt, \quad v \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T]).$$

В самом деле, если  $u(\cdot)$  — ограниченная измеримая функция, то  $t \rightarrow A'_{u_j}(t, u(t))$  и  $t \rightarrow B'_{u_j}(t, u(t))$  — тоже ограниченные измеримые функции (так как отображения  $(t, u) \rightarrow A'_{u_j}(t, u)$  и  $(t, u) \rightarrow B'_{u_j}(t, u)$  непрерывны по постановке задачи), а значит, это верно и для  $f_j(\cdot)$  как для произведения непрерывной и ограниченной измеримых функций. Следовательно, функция  $f \in \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$  может быть градиентом  $J$  в точке  $u$ . Дифференцируя функционал  $L$ , определенный в теореме 1, по переменной  $u$ , устанавливаем, что

$$L'_u(x, u, \psi)[v] = \int_0^T f(t)^T v(t) dt.$$

Таким образом, нужно проверить равенство  $J'(u)[v] = L'_u(x, u, \psi)[v]$ . Для этого определим два отображения  $F, F^* : \mathcal{L}_\infty^m([0; T]) \rightarrow \mathcal{AC}^n([0; T])$  как решения задач Коши (8), (9). Хорошо известно [17, стр. 179], что эти отображения непрерывны. Теорема 1 утверждает, что для пространств  $X = \Xi = \mathcal{AC}^n([0; T])$ ,  $U = \mathcal{L}_\infty^m([0; T])$ , отображений  $F, F^*$  и функционалов  $\mathcal{J}(x, u) = Q^T x(T)$  и  $L$  выполнены условия следующей общей леммы (доказательство см. ниже).

*Лемма 1. Пусть заданы банаховы пространства  $X$  и  $U$ , непрерывное отображение  $F : U \rightarrow X$  и произвольная функция  $\mathcal{J} : X \times U \rightarrow \mathbb{R}$ . Если существуют множество  $\Xi$ , отображение  $F^* : U \rightarrow \Xi$  и функция  $L : X \times U \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}$  такие, что*

- 1)  $L(F(u), u, \xi) = \mathcal{J}(F(u), u) \quad \forall (u, \xi) \in U \times \Xi$ ;
- 2)  $L'_x(F(u), u, F^*(u)) = 0 \quad \forall u \in U$ ;
- 3) для любого  $u \in U$  существует непрерывное в точке  $F(u)$  отображение  $x \rightarrow L'_u(x, u, F^*(u)) : X \rightarrow U^*$ ,

то функция  $u \rightarrow \mathcal{J}(F(u), u)$  дифференцируема всюду на  $U$  и

$$\frac{d\mathcal{J}(F(u), u)}{du} = L'_u(F(u), u, F^*(u)), \quad u \in U.$$

Действительно, условия 1) и 2) составляют результат теоремы 1, а условие 3) выполнено в силу доказанного ранее равенства и определения функции  $f$ . Применяя лемму 1 и учитывая равенство  $J(u) = \mathcal{J}(F(u), u)$ , получаем

$$J'(u)[v] = L'_u(x, u, \psi)[v] = \int_0^T f(t)^T v(t) dt.$$

Доказательство следствия 1 завершено.

*Доказательство леммы 1.* Для любых точек  $u, \tilde{u} \in U$  в силу условия 1) справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(F(\tilde{u}), \tilde{u}) - \mathcal{J}(F(u), u) &= L(F(\tilde{u}), \tilde{u}, F^*(u)) - L(F(u), u, F^*(u)) = \\ &= L(F(\tilde{u}), \tilde{u}, F^*(u)) - L(F(\tilde{u}), u, F^*(u)) + \\ &\quad + L(F(\tilde{u}), u, F^*(u)) - L(F(u), u, F^*(u)) = \\ &= L'_u(F(\tilde{u}), u, F^*(u))[\tilde{u} - u] + L'_x(F(u), u, F^*(u))[F(\tilde{u}) - F(u)] + \\ &\quad + o(\|\tilde{u} - u\|) + o(\|F(\tilde{u}) - F(u)\|). \end{aligned}$$

Отсюда ввиду непрерывности  $F$  и условий 2), 3) получаем

$$\lim_{\tilde{u} \rightarrow u} \frac{\mathcal{J}(F(\tilde{u}), \tilde{u}) - \mathcal{J}(F(u), u)}{\|\tilde{u} - u\|} = L'_u(F(u), u, F^*(u))[e], \quad e \in U : \|e\| = 1.$$

*Доказательство следствия 2.* Утверждение получается применением леммы Ферма [17, стр. 216] к следствию 1.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хрусталеv М.М., Румянцев Д.С., Царьков К.А.* Оптимизация квазилинейных стохастических систем диффузионного типа, нелинейных по управлению // *АиТ.* 2017. № 6. С. 84–105.  
*Khrustalev M.M., Rumyantsev D.S., Tsarkov K.A.* Optimization of Quasilinear Stochastic Control-Nonlinear Diffusion Systems // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 6. P. 1028–1045.
2. *Хрусталеv М.М., Царьков К.А.* Достаточные условия относительного минимума в задаче оптимального управления квазилинейными стохастическими системами // *АиТ.* 2018. № 12. С. 83–102.  
*Khrustalev M.M., Tsarkov K.A.* Sufficient Relative Minimum Conditions in the Optimal Control Problem for Quasilinear Stochastic Systems // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 12. P. 2169–2185.
3. *Хрусталеv М.М., Царьков К.А.* Метод моментных характеристик в теории оптимального управления стохастическими системами диффузионного типа // *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2019. № 5. С. 20–31.
4. *Øksendal B., Sulem A.* Applied Stochastic Control of Jump Diffusions. Berlin Heidelberg, Germany: Springer, 2005.
5. *Platen E., Bruti-Liberati N.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance. Berlin Heidelberg, Germany: Springer, 2010.
6. *Yin G., Zhu C.* Hybrid Switching Diffusions. New York, USA: Springer, 2010.
7. *Бортаковский А.С., Нельмиченков Г.И.* Оптимальное в среднем управление детерминированными переключаемыми системами при наличии дискретных неточных измерений // *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2019. № 1. С. 52–77.
8. *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985.
9. *Миллер Б.М., Панков А.Р.* Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
10. *Хрусталеv М.М., Царьков К.А.* Достаточные условия терминальной инвариантности стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа // *АиТ.* 2020. № 11. С. 155–173.  
*Khrustalev M.M., Tsarkov K.A.* Sufficient Conditions for Terminal Invariance of Stochastic Jump Diffusion Systems // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 11. P. 2062–2077.
11. *Krotov V.F.* Global Methods in Optimal Control Theory. Advances in Nonlinear Dynamics and Control: A Report from Russia. Progress in Systems and Control Theory, Vol 17. Birkhauser, Boston, MA., 1993.
12. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
13. *Kelley H.J.* Gradient Theory of Optimal Flight Paths // *J. Amer. Rocket Soc.* 1960. Vol. 30. No. 10. P. 947–954.
14. *Bryson A.E., Denham W.F.* A Steepest Ascent Method for Solving Optimum Programming Problems // *J. Appl. Mech.* 1962. Vol. 29. No. 2. P. 247–257.
15. *Левитин Е.С., Поляк Б.Т.* Методы минимизации при наличии ограничений // *Журн. вычисл. матем. и мат. физики.* 1966. Том 6. № 5. С. 787–823.

16. *Брайсон А., Хо-Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Наука, 1972.
17. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
18. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
19. *Хрусталева М.М., Царьков К.А.* Терминальная инвариантность стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа // ДАН. 2020. Т. 493. № 1. С. 104–107.
20. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: МИР, 1970.
21. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во ИЛ, 1962.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.*

Поступила в редакцию 13.12.2021

После доработки 20.05.2022

Принята к публикации 10.06.2022

# Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2022 г. Ю.П. ЕМЕЛЬЯНОВА (emelianovajulia@gmail.com),  
(Арзамасский политехнический институт (филиал)  
Нижегородского государственного технического  
университета им. Р.Е. Алексеева)

## УПРАВЛЕНИЕ С ИТЕРАТИВНЫМ ОБУЧЕНИЕМ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМОЙ С ИЗМЕНЯЕМОЙ ЭТАЛОННОЙ ТРАЕКТОРИЕЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ<sup>1</sup>

Рассматривается линейная дискретная система, функционирующая в повторяющемся режиме, задачей которой является слежение за эталонной траекторией с заданной точностью. Параметры системы точно неизвестны и описываются аффинной моделью неопределенности. Кроме того, на нее действуют случайные возмущения и измерения осуществляются с шумами. В процессе работы системы через определенное число повторений происходит изменение эталонной траектории. Возникающая при этом переходная ошибка может приводить к временной потере точности. Предлагается новый метод синтеза управления с итеративным обучением, позволяющий компенсировать переходную ошибку. Приведен пример, демонстрирующий эффективность метода.

*Ключевые слова:* управление с итеративным обучением, фильтр Калмана, 2D-системы, устойчивость, векторная функция Ляпунова, повторяющиеся процессы, неопределенности параметров.

DOI: 10.31857/S0005231022090082, EDN: AJGQJE

### 1. Введение

В настоящее время огромный интерес как специалистов, так и широкой общественности вызывает машинное обучение, одним из мощных движущих факторов которого является создание интеллектуальных производств (ИП). С учетом возросшей производительности компьютеров и развития робототехники такие производства становятся реальностью и являются основной движущей силой «четвертой промышленной революции» (Индустрия 4.0). Системы ИП определяются как системы, способные реагировать в режиме реального времени на удовлетворение меняющихся требований и условий на производстве, в сети поставок и в потребностях клиентов в полностью интегрированной и совместной форме.

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-00091, <https://rscf.ru/project/21-71-00091/>.

Машинное обучение представляет очень обширную область кибернетики и информатики, содержащую целый ряд крупных направлений. В данной статье рассматриваются динамические системы, для которых концепция обучения была определена еще в 60-х годах прошлого века Я.З. Цыпкиным [1]: «Под обучением мы будем подразумевать процесс выработки в некоторой системе той или иной реакции на внешние сигналы путем *многократных воздействий на систему и внешней корректировки*».

Управление с итеративным обучением (УИО) полностью соответствует этому определению. Оно основано на том, что тот или иной показатель качества системы, которая выполняет одну и ту же задачу многократно, может быть улучшен путем обучения на основе информации с предыдущих выполнений. Характерным примером может служить порталный робот, захватывающий и перемещающий детали по заданной (эталонной) траектории на конвейер. Показателем качества здесь служит точность воспроизведения эталонной траектории.

Впервые идея УИО появилась в патенте США [3], а затем в журнальной публикации 1978 г. [4], написанной на японском языке. Однако эти результаты оставались невостребованными, пока серия статей в 1984 г. [5–8] не вызвала всеобщий интерес. С тех пор количество публикаций по УИО стремительно растет и включает как многочисленные статьи, так и монографии. Отметим два обзора [2, 9], которые охватывают лишь часть результатов, известных на сегодняшний день. В стандартной постановке УИО предназначено для систем, которые многократно выполняют одну и ту же операцию в одних и тех же условиях функционирования и при одинаковых начальных условиях на каждом повторении. Для таких систем управление без обучения дает одинаковую ошибку слежения на каждом повторении. Сигналы ошибок от предыдущих повторений содержат существенную информацию, но они не используются при управлении без обучения. Целью УИО является повышение точности и других показателей за счет включения информации об ошибках на текущем повторении в алгоритм управления для последующих повторений. УИО отличается от других стратегий управления с обучением, таких как адаптивное управление и нейронные сети. Стратегии адаптивного управления изменяют параметры регулятора, тогда как УИО изменяет только входной сигнал. Кроме того, адаптивные регуляторы обычно не используют информацию, содержащуюся в повторяющихся командных сигналах. Точно так же обучение нейронной сети включает в себя изменение параметров регулятора, а не управляющего сигнала; в этом случае модифицируются большие сети нелинейных нейронов. Эти большие сети требуют обширных обучающих данных, и бывает трудно гарантировать быструю сходимость, тогда как алгоритмы УИО обычно сходятся адекватно всего за несколько итераций [2] и список литературы в [2].

Интеллектуальные производства являются киберфизическими системами, представляющими собой сложную интеграцию управления, сетевых коммуникаций и вычислений с физическим производственным процессом. В соот-

ветствии с этими особенностями ИП, алгоритмы УИО индивидуальной или сетевой конфигурации должны без потери точности быстро и легко перестраиваться в зависимости от изменяющихся условий, а также при информационных нарушениях и возможных кибератаках. Применение УИО в интеллектуальных производствах выдвигает новые задачи. В стандартной постановке задачи УИО эталонная траектория остается неизменной в процессе обучения. Однако в интеллектуальных производствах эталонная траектория и задачи могут оперативно меняться в зависимости от программы, что требует корректировки управления [10, 11]. Подобная проблема возникает также в аддитивных производствах, где для послойного создания требуемой трехмерной геометрии изделия эталонная траектория должна меняться от слоя к слою [13, 15]. Такая же проблема возникает в медицинских роботах для реабилитации больных, перенесших инсульт. Робот должен перестраивать эталонную траекторию движения руки или ноги пациента в зависимости от достигнутых им успехов. Таким образом, возникают новые задачи управления с итеративным обучением реконфигурируемыми системами. Из этих новых задач в статье ставится задача синтеза УИО системой, функционирующей в повторяющемся режиме, при условии изменения эталонной траектории в процессе обучения.

В известных работах [12–17], где рассматривались системы, в которых реконфигурация состояла в изменении опорной траектории, исследования проводились в рамках детерминированных моделей, хотя в [12] было отмечено существенное влияние шумов измерений.

Задача синтеза УИО для стохастической системы с переключаемыми параметрами и с неизменяемой эталонной траекторией изучалась в [18]. В недавних работах [20, 21] разработан метод синтеза УИО для системы, в которой эталонная траектория изменяется между повторениями известным образом, на систему действуют случайные возмущения и измерения осуществляются с шумами. В [20], кроме того, известным образом между повторениями изменяются и параметры системы. Из-за изменения эталонной траектории возникает переходная ошибка и на определенном числе повторений точность снижается до недопустимого уровня. Этот эффект компенсируется за счет специального алгоритма переключения управления, в то время как влияние шумов удастся снизить только за счет предварительной фильтрации.

В данной работе рассматривается задача синтеза управления с итеративным обучением для системы, которая, как и в [20, 21], находится под воздействием шумов, и эталонная траектория меняется через определенное число повторений. В отличие от [20, 21] и других указанных выше работ предполагается, что параметры системы точно неизвестны и описываются аффинными моделями неопределенности. Для решения используется разработанный ранее автором и коллегами дивергентный метод векторных функций Ляпунова, который дает возможность применения эффективной техники линейных матричных неравенств.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную дискретную систему с неопределенными параметрами, функционирующую в повторяющемся режиме, которая на  $k$ -м повторении описывается следующей моделью в пространстве состояний:

$$(1) \quad \begin{aligned} x_k(p+1) &= A(\delta(p))x_k(p) + B(\delta(p))u_k(p) + D\nu_k(p), \\ y_k(p) &= Cx_k(p), \\ y_{\omega k}(p) &= y_k(p) + G\omega_k(p), \quad 0 \leq p \leq N-1, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где на повторении  $k$   $x_k(p) \in \mathbb{R}^{n_x}$  — вектор состояния,  $u_k(p) \in \mathbb{R}^{n_u}$  — вектор управления  $y_k(p) \in \mathbb{R}^{n_y}$  — вектор выходных переменных, называемый профилем повторения,  $y_{\omega k}(p) \in \mathbb{R}^{n_y}$  — измеренный выходной вектор,  $N$  — продолжительность повторения,  $\nu_k(p) \in \mathbb{R}^{n_\nu}$  — вектор случайных возмущений, действующих на объект и  $\omega_k(p) \in \mathbb{R}^{n_\omega}$  — вектор шума измерения,  $\nu_k(p)$  и  $\omega_k(p)$  — независимые векторы гауссовских белых шумов с нулевым средним, такие что  $E[\nu_k(p)\nu_k^T(p)] = S_\nu$ ,  $E[\omega_k(p)\omega_k^T(p)] = S_\omega$ , где  $E$  — оператор математического ожидания. Предполагается, что  $\nu_k(p)$  не зависит от вектора начального состояния.

Модель неопределенности задается следующим образом:

$$(2) \quad A(\delta(p)) = A + \sum_{j=1}^l \delta_j(p)A_j, \quad B(\delta(p)) = B + \sum_{j=1}^l \delta_j(p)B_j,$$

где  $A$  и  $B$  — матрицы номинальной модели,  $A_j$  и  $B_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, l$ ) — постоянные матрицы соответствующих размеров и  $\delta_j(p) \in [\underline{\delta}_j, \bar{\delta}_j]$ . Далее повсюду для компактности записи зависимость  $\delta$  от  $p$  указывать не будем.

Обозначим

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \{ \delta = [\delta_1 \dots \delta_l]^T, \delta_j \in [\underline{\delta}_j, \bar{\delta}_j] \}, \\ \mathbf{D}_v &= \{ \delta = [\delta_1 \dots \delta_l]^T, \delta_j \in \{ \underline{\delta}_j, \bar{\delta}_j \} \}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{D}_v$  — конечное множество из  $2^l$  элементов.

Пусть  $y_{ref}(p)$ ,  $0 \leq p \leq N-1$  — заданная эталонная траектория (желаемый профиль повторения). Тогда

$$(3) \quad e_k(p) = y_{ref}(p) - y_k(p)$$

является ошибкой обучения на повторении  $k$ . Кроме того, эталонная траектория изменяется на повторении  $k_s$ , так что:

$$(4) \quad y_{ref}(p) = \begin{cases} y_{ref1}(p), & k < k_s, \\ y_{ref2}(p), & k \geq k_s. \end{cases}$$

Предполагается, что до повторения  $k_s$  требуемая точность воспроизведения  $y_{ref1}(p)$  достигнута. Это реалистичный сценарий для интеллектуальных производственных систем.

Задача синтеза УИО состоит в том, чтобы построить такую последовательность управлений  $u_k(p)$ , которая обеспечивает достижение заданной точности воспроизведения эталонной траектории за конечное число повторений. Формально выразим это в виде выполнения следующих условий сходимости. Существуют такие числа  $\kappa > 0$ ,  $\mu > 0$  и  $0 < \rho < 1$ , что:

$$(5) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} E[|e_k(p)|] = E|e_\infty|, \quad E[|e_k(p)|]^2 \leq \kappa \rho^k + \mu, \quad k \neq k_s - 1, \\ \lim E[|u_k(p)|] = E[|u_\infty(p)|], \quad 0 \leq p \leq N - 1,$$

при этом если случайные возмущения, действующие на объект и шумы измерения отсутствуют, то

$$(6) \quad \lim |u_k(p)| = |u_\infty(p)|,$$

где  $u_\infty(p)$  — ограниченная переменная, обычно называемая обученным управлением.

Условия (5) означают, что ошибка обучения остается ограниченной для всех  $k$  и убывает не медленнее некоторой геометрической прогрессии при  $k \neq k_s$ .

Закон управления с итеративным обучением на повторении  $k + 1$  формируется как управление на предыдущем повторении  $k$  плюс коррекция, т.е.

$$(7) \quad u_{k+1}(p) = u_k(p) + \Delta u_{k+1}(p),$$

где  $\Delta u_{k+1}(p)$  — корректирующая поправка, которая должна быть выбрана так, чтобы обеспечить условия сходимости (5) и ограниченности (6). Заметим, что при случайных возмущениях  $E[|e_\infty|^2] \neq 0$  в отличие от  $E[|e_\infty|]$ , и можно только пытаться минимизировать это значение.

На повторении  $k = k_s$  эталонная траектория изменяется, что приведет к появлению переходной ошибки, которая может привести к потере точности на некотором числе повторений после повторения  $k_s$ . Следовательно, задача состоит в том, чтобы найти корректирующую поправку в (7) (с возможным переключением в зависимости от изменения эталонной траектории), которая обеспечит компенсацию переходной ошибки, в том смысле, что значение  $|e_{k_s}|^2$  будет в пределах заданного допуска в среднеквадратическом смысле и будут выполняться условия сходимости (5).

### 3. Построение 2D модели

Эталонная траектория изменяется между итерациями запланированным и заранее определенным образом. Следовательно, моменты переключения наблюдаемы. Поскольку выходной сигнал измеряется с шумами, его необходимо

предварительно обработать. С этой целью используем номинальный фильтр Калмана

$$(8) \quad \hat{x}_k(p+1) = A\hat{x}_k(p) + Bu_k(p) + F(y_{\omega k}(p) - C\hat{x}(p)), \quad \hat{x}_k(0) = Fy_{\omega k}(0),$$

где  $\hat{x}_k(p)$  — оценка вектора состояния  $x_k(p)$ ,  $\hat{y}_k(p) = C\hat{x}_k(p)$ ,  $A, B$  — номинальные матрицы.

*Замечание 1.* Как показывает рассмотренный далее пример, выбор номинальной модели для построения фильтра Калмана не является лучшим решением, поскольку при таком выборе требуемая точность может не обеспечиваться при заданном разбросе параметров. Этот вопрос требует дальнейших исследований, которые выходят за рамки статьи.

Обозначим через  $\tilde{x}_k(p) = x_k(p) - \hat{x}_k(p)$  ошибку оценивания и введем в рассмотрение вспомогательные переменные в виде приращения оценки вектора состояния и ошибки оценивания

$$(9) \quad \begin{aligned} \hat{\eta}_{k+1}(p+1) &= \hat{x}_{k+1}(p) - \hat{x}_k(p), \\ \tilde{\eta}_{k+1}(p+1) &= \tilde{x}_{k+1}(p) - \tilde{x}_k(p). \end{aligned}$$

Поскольку выходной сигнал измеряется с шумом, ошибка обучения  $e_k(p) = y_{ref}(p) - y_k(p)$  недоступна для формирования корректирующей поправки. Разумным подходом в этом случае может служить использование оценки ошибки обучения

$$\hat{e}_k(p) = y_{ref}(p) - C\hat{x}_k(p).$$

Управляемая динамика в терминах приращений (9) и  $\hat{e}_k(p)$  будет иметь вид

$$(10) \quad \begin{aligned} \tilde{\eta}_{k+1}(p+1) &= (A(\delta) - FC)\tilde{\eta}_{k+1}(p) + \Delta A\hat{\eta}_{k+1}(p) + \Delta B\Delta u_{k+1}(p-1) - \\ &\quad - FG\Delta\omega_{k+1}(p-1) + D\Delta\nu_{k+1}(p-1), \end{aligned}$$

$$(11) \quad \begin{aligned} \hat{\eta}_{k+1}(p+1) &= FC\tilde{\eta}_{k+1}(p) + A\hat{\eta}_{k+1}(p) + B\Delta u_{k+1}(p-1) + \\ &\quad + FG\Delta\omega_{k+1}(p-1). \end{aligned}$$

Оценка ошибки обучения при  $k+1 \neq k_s$  в силу (1), (3), (9) опишется уравнением

$$(12) \quad \begin{aligned} \hat{e}_{k+1}(p) &= -CFC\tilde{\eta}_{k+1}(p) - CA\hat{\eta}_{k+1}(p) + \hat{e}_k(p) - \\ &\quad - CB\Delta u_{k+1}(p-1) - CFG\Delta\omega_{k+1}(p-1). \end{aligned}$$

В момент переключения при  $k+1 = k_s$  уравнение для оценки ошибки обучения примет следующий вид:

$$(13) \quad \begin{aligned} \hat{e}_{k_s}(p) &= -CFC\tilde{\eta}_{k_s}(p) - CA\hat{\eta}_{k_s}(p) + \hat{e}_{k_s-1}(p) - \\ &\quad - CB\Delta u_{k_s}(p-1) - CFG\Delta\omega_{k_s}(p-1) + r(p), \end{aligned}$$

где  $r(p) = y_{ref_2}(p) - y_{ref_1}(p)$ .

Для  $k + 1 \neq k_s$  корректирующую поправку зададим в виде

$$(14) \quad \Delta u_{k+1}(p-1) = K_1 \hat{\eta}_{k+1}(p) + K_2 \hat{e}_k(p).$$

С учетом (14) уравнения (10)–(13) запишутся следующим образом:

$$(15) \quad \begin{aligned} \tilde{\eta}_{k+1}(p+1) &= (A(\delta) - FC)\tilde{\eta}_{k+1}(p) + (\Delta A + \Delta BK_1)\hat{\eta}_{k+1}(p) + \\ &\quad + \Delta BK_2 \hat{e}_k(p) - FG\Delta\omega_{k+1}(p-1) + D\Delta\nu_{k+1}(p-1) \\ \hat{\eta}_{k+1}(p+1) &= FC\tilde{\eta}_{k+1}(p) + (A + BK_1)\hat{\eta}_{k+1}(p) + \\ &\quad + BK_2 \hat{e}_k(p) + FG\Delta\omega_{k+1}(p-1) \\ \hat{e}_{k+1}(p) &= -CFC\tilde{\eta}_{k+1}(p) - C(A + BK_1)\hat{\eta}_{k+1}(p) + \\ &\quad + (I - CBK_2)\hat{e}_k(p) - CFG\Delta\omega_{k+1}(p-1). \end{aligned}$$

Обозначим  $\bar{\eta}_{k+1}(p) = [\tilde{\eta}_{k+1}(p)^T \quad \hat{\eta}_{k+1}(p)^T]^T$ . Тогда уравнения замкнутой системы (15) в более компактном виде запишутся в стандартной форме линейного дискретного повторяющегося процесса

$$(16) \quad \begin{bmatrix} \bar{\eta}_{k+1}(p+1) \\ \hat{e}_{k+1}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(\delta) & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\eta}_{k+1}(p) \\ \hat{e}_k(p) \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} A_{11}(\delta) &= \begin{bmatrix} A(\delta) - FC & \Delta A + \Delta BK_1 C \\ FC & A + BK_1 C \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} \Delta BK_2 \\ BK_2 \end{bmatrix}, \\ A_{21} &= \begin{bmatrix} -CFC \\ -C(A + BK_1 C) \end{bmatrix}, \quad A_{22} = I - CBK_2, \\ \Delta A(\delta) &= \sum_{j=1}^l \delta_j A_j, \quad \Delta B(\delta) = \sum_{j=1}^l \delta_j B_j, \quad K = [K_1 \quad K_2]. \end{aligned}$$

#### 4. Основной результат

Закон управления с итеративным обучением (7), (14) должен обеспечивать условия сходимости (5). Чтобы найти матрицы  $K_1$  и  $K_2$ , гарантирующие это свойство, воспользуемся дивергентным методом векторных функций Ляпунова для переключаемых стохастических повторяющихся процессов [18].

*Определение 1.* Дискретный повторяющийся процесс (16) называется устойчивым вдоль повторений по второму моменту, если

$$(17) \quad \lim_{k,p \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\|\bar{\eta}_k(p)\|^2 + \|\hat{e}_k(p)\|^2] \leq \Gamma < \infty,$$

где  $\Gamma$  не зависит от  $N$ .

Определим векторную функцию Ляпунова вида

$$(18) \quad V(\xi, \epsilon) = \begin{bmatrix} V_1(\xi) \\ V_2(\epsilon) \end{bmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}^{n_y},$$

где  $V_1(\xi) > 0$ ,  $\xi \neq 0$ ,  $V_2(\epsilon) > 0$ ,  $\epsilon \neq 0$ , и  $V_1(0) = 0$ ,  $V_2(0) = 0$ .

Определим дискретный аналог дивергенции (18) следующим образом:

$$(19) \quad \mathcal{D}V(\xi, \epsilon) = \mathbb{E}[V_1(\bar{\eta}_{k+1}(p+1)) | \bar{\eta}_{k+1}(p) = \xi, \hat{e}_k(t) = \epsilon] - V_1(\xi) + \\ + \mathbb{E}[V_2(\hat{e}_{k+1}(p)) | \bar{\eta}_{k+1}(p) = \xi, \hat{e}_k(p) = \epsilon] - V_2(\epsilon).$$

*Теорема 1.* Если существует векторная функция Ляпунова (18) и положительные скаляры  $c_1, c_2, c_3$ , и  $\gamma$  такие, что

$$(20) \quad c_1 \|\xi\|^2 \leq V_1(\xi) \leq c_2 \|\xi\|^2,$$

$$(21) \quad c_1 \|\epsilon\|^2 \leq V_2(\epsilon) \leq c_2 \|\epsilon\|^2,$$

$$(22) \quad \mathcal{D}V(\xi, \epsilon) \leq \gamma - c_3(\|\xi\|^2 + \|\epsilon\|^2),$$

тогда повторяющийся процесс (16) устойчив вдоль повторений по второму моменту. Кроме того, для  $k \neq k_s$  выполняются условия сходимости (5) и ограниченности (6).

*Доказательство.* Следуя схеме доказательства теоремы 1 из [18] с учетом, что в рассматриваемом случае  $V_2$  не зависит от переключений вместо оценок (3.16), (3.17), из упомянутого доказательства соответственно получим

$$(23) \quad \mathbb{E}[\|\bar{\eta}_{k+1}(p)\|^2] \leq \frac{1}{c_1} \left[ \lambda^k \sum_{q=0}^{p-1} \lambda^{p-1-q} \mathbb{E}[V_2(\hat{e}_0(q))] \right] + \frac{\gamma}{c_1(1-\lambda)^2},$$

$$(24) \quad \mathbb{E}[\|\hat{e}_k(p-1)\|^2] \leq \frac{1}{c_1} \left[ \lambda^k \sum_{q=0}^{p-1} \lambda^{p-1-q} \mathbb{E}[V_2(\hat{e}_0(q))] \right] + \frac{\gamma}{c_1(1-\lambda)^2},$$

где  $0 < \lambda < 1$ . Поскольку величина  $\hat{e}_0(q) = y_{ref1}(q) - C\hat{x}_0(q)$  ограничена при всех  $0 \leq q \leq N-1$ , то существует  $\bar{\mu} > 0$ , такое что  $\|\hat{e}_0(q)\|^2 \leq \bar{\mu}$  и в соответствии с (21)

$$(25) \quad \sum_{q=0}^{p-1} \lambda^{p-1-q} V_2(\bar{e}_0(q)) \leq c_2 \bar{\mu} \sum_{q=0}^{\infty} \lambda^{p-1-q} = \frac{c_2 \bar{\mu}}{1-\lambda}.$$

Из (23) с учетом (25) следует (5) с  $\kappa = \frac{c_2 \bar{\mu}}{c_1(1-\lambda)}$ ,  $\rho = \lambda$  и  $\mu = \frac{\gamma}{c_1(1-\lambda)^2}$ .

Далее заметим, что при отсутствии случайных возмущений, действующих на объект, и шумов измерений теорема 1 будет справедлива при  $\gamma = 0$ . Тогда, в соответствии с (23), (24)

$$\mathbb{E}[\|\hat{\eta}_{k+1}(p)\|^2] \leq \mathbb{E}[\|\bar{\eta}_{k+1}(p)\|^2] \leq \kappa \rho^k, \quad \mathbb{E}[\|\hat{e}_k(p)\|^2] \leq \kappa \rho^k$$

и с учетом (14) из (7) следует (6). Теорема доказана.

В момент изменения опорной траектории за счет появления переходной ошибки может нарушиться монотонная сходимость и на некотором числе повторений достигнутая точность слежения может выйти за пределы допуска. Следовательно, закон управления должен быть разработан таким образом, чтобы при изменении опорной траектории происходила компенсация переходной ошибки. Поскольку параметры системы неизвестны, используем следующий подход: на повторении  $k_s$  переключимся на закон управления, который минимизирует ошибку обучения на этом повторении для системы с номинальными параметрами в установившемся режиме. Тогда можно ожидать, что при определенном разбросе неопределенных параметров системы ошибка обучения останется в пределах допуска.

Полагая  $k \neq k_s - 1$ , выберем компоненты векторной функции Ляпунова (18) в виде квадратичных форм

$$V_1(\xi) = \xi^T P_1 \xi, \quad V_2(\epsilon) = \epsilon^T P_2 \epsilon,$$

где  $P_1 > 0$  и  $P_2 > 0$  и вычислим стохастический аналог дивергенции этой функции в силу (16):

$$DV(\xi, \epsilon) = \begin{bmatrix} \xi \\ \epsilon \end{bmatrix}^T (\Phi^T(\delta) P \Phi(\delta) - P) \begin{bmatrix} \xi \\ \epsilon \end{bmatrix} + 2(\text{tr}[P_1 S_1] + \text{tr}[P_2 S_2]),$$

где

$$P = \text{diag}[P_1 \quad P_2], \quad \Phi(\delta) = \bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)KH, \quad K = [K_1 \quad K_2],$$

$$\bar{A}(\delta) = \begin{bmatrix} A(\delta) - FC & \Delta A(\delta) & 0 \\ FC & A & 0 \\ -CFC & -CA & I \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \bar{B}(\delta) = \begin{bmatrix} \Delta B(\delta) \\ B \\ -CB \end{bmatrix},$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} DS_\nu D^T + FGS_\omega G^T F^T & -F^T GS_\omega G^T \\ -FGS_\omega G^T & FGS_\omega G^T F^T \end{bmatrix}.$$

Введем

$$\bar{A}(\delta) = \begin{bmatrix} A(\delta) - FC & \Delta A(\delta) & 0 \\ FC & A & 0 \\ -CFC & -CA & I \end{bmatrix}, \quad \bar{B}(\delta) = \begin{bmatrix} \Delta B(\delta) \\ B \\ -CB \end{bmatrix}.$$

Пусть матрицы  $P$  и  $K$  удовлетворяют билинейному матричному неравенству

$$(26) \quad (\bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)KH)^T P (\bar{A}(\delta) + \bar{B}(\delta)KH) - \\ - P + Q + (KH)^T R KH \leq 0, \quad \delta \in \mathbf{D},$$

где  $Q = \text{diag}[Q_1 \quad Q_2] \succ 0$  и  $R \succ 0$  — весовые матрицы, которые подлежат выбору. Они аналогичны весовым матрицам в теории линейно-квадратичного регулятора, и их выбор осуществляется на основе результатов этой теории.

Следуя известным в технике линейных матричных неравенств преобразованиям [23], получим, что разрешимость неравенства (26) эквивалентна разрешимости системы линейных матричных неравенств относительно переменных  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ :

$$(27) \quad \begin{bmatrix} X & (\bar{A}(\delta)X + \bar{B}(\delta)YH)^T & X & (YH)^T \\ (\bar{A}(\delta)X + \bar{B}(\delta)YH) & X & 0 & 0 \\ X & 0 & Q^{-1} & 0 \\ YH & 0 & 0 & R^{-1} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \delta \in \mathbf{D}_v,$$

$$HX = ZH,$$

$$X = \text{diag}[X_1 \ X_2], \quad X_1 = \text{diag}[X_{11} \ X_{22}].$$

Если эти ЛМН разрешимы, то  $P = X^{-1}$  и  $K = YZ^{-1}$ .

Следующая теорема служит теоретическим обоснованием конструкции УИО с переключением.

*Теорема 2. Управление с итеративным обучением, обеспечивающее сходимость ошибки обучения для системы (1) в смысле (5), (6), определяется соотношением (7).*

- 1) При  $k \neq k_s - 1$  корректирующая поправка имеет вид (14), где матрицы  $K_1$  и  $K_2$  находятся в результате решения ЛМН (27).
- 2) При  $k = k_s - 1$  корректирующая поправка определяется по формуле

$$(28) \quad \Delta u_{k_s}(p-1) = -(CB)^{-1}[CA\hat{\eta}_{k_s}(p) - \hat{e}_{k_s-1}(p) - r(p)]$$

и обеспечивает минимизацию переходной среднеквадратической ошибки, вызванной изменением эталонной траектории для системы с номинальными параметрами в установившемся режиме оценивания ( $\hat{\eta}_k(p) = 0$ ).

*Доказательство.*

- 1) При  $k \neq k_s - 1$ , если ЛМН (27) разрешимы, то корректирующая поправка (14) обеспечивает выполнение условий теоремы 1 при

$$c_1 = \min \lambda_{\min}(P_1), \lambda_{\min}(P_2), \quad c_2 = \max \lambda_{\max}(P_1), \lambda_{\max}(P_2),$$

$$c_3 = \lambda_{\min}(Q + (KH^T)RKH) \quad \text{и} \quad \gamma = 2(\text{tr}[P_1S_1] + \text{tr}[P_2S_2]).$$

- 2) При  $k = k_s - 1$  введем в рассмотрение локальный функционал

$$(29) \quad J_s = E[|\hat{e}_{k_s}|^2 | \hat{e}_{k_s-1}(p) = \epsilon, \hat{\eta}_{k_s-1}(p) = \xi],$$

который, следуя принятой концепции, будем минимизировать при условии, что оценка достаточно близка к установившемуся значению, фор-

мально это будет означать  $\tilde{\eta}_k(p) = 0$ . Тогда, в соответствии с (13),  $\hat{e}_{k_s}$  будет удовлетворять уравнению:

$$(30) \quad \hat{e}_{k_s}(p) = -CA\hat{\eta}_{k_s}(p) + \hat{e}_{k_s-1}(p) - CB\Delta u_{k_s}(p-1) - \\ - CFG\Delta\omega_{k_s}(p-1) + r(p).$$

Функционал (29) характеризует переходную среднеквадратическую ошибку системы с номинальными параметрами, вызванную изменением эталонной траектории. Это является мотивацией для нахождения корректирующей поправки на рассматриваемом повторении из условия минимума (29). Решение задачи минимизации (29) при условии (30) дает (28). Прямой подстановкой (28) в (10)–(13) и последующими непосредственными вычислениями можно убедиться, что при  $k+1 = k_s$  все переменные остаются ограниченными в среднем квадратическом.

Таким образом, условия сходимости ошибки обучения для системы (1) выполнены. Теорема доказана.

## 5. Пример

Рассмотрим модель однозвенного манипулятора с гибким звеном [19], функционирующего в повторяющемся режиме с постоянным периодом повторения. Манипулятор во время первых  $k_s - 1$  повторений перемещает груз одной массы вдоль заданной опорной траектории, а начиная с повторения  $k_s$ , начинает перемещать груз другой массы по другой опорной траектории. Из-за изменения массы транспортируемых грузов момент инерции подвижной части манипулятора (гибкого звена) также изменяется, и динамика движения манипулятора в пространстве состояний описывается следующими уравнениями линейного дифференциального повторяющегося процесса

$$(31) \quad \begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= A_c(\delta(t))x_k(t) + B_c u_k(t) + Dv_k(t), \\ y_k(t) &= Cx_k(t) + Gw_k(t), \quad t \in [0, T], \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где  $x = [\theta \quad \alpha \quad \dot{\theta} \quad \dot{\alpha}]^T$ ,  $\theta$  — угол поворота сервопривода,  $\alpha$  — угол отклонения гибкого звена

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_s}{J_{eq}} & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & -\frac{K_s(J_l + J_{eq})}{J_l J_{eq}} & \frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \\ -\frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

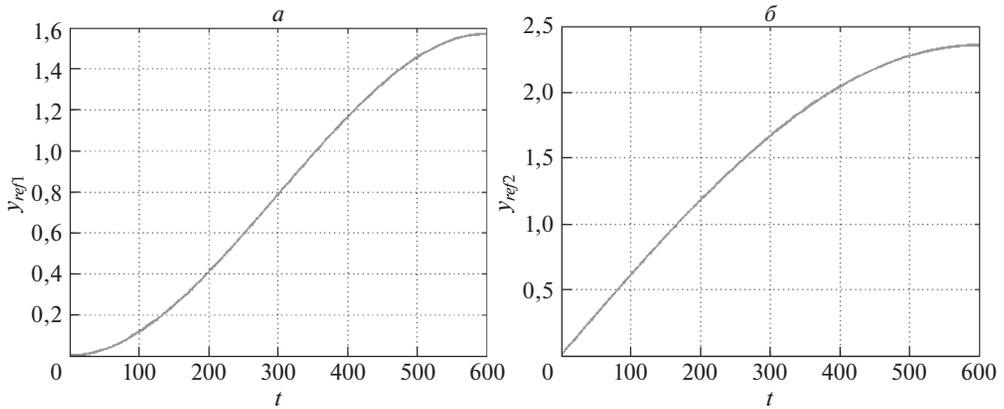


Рис. 1. Желаемая траектория движения гибкого звена  $a - y_{ref1}$  (до переключения  $k_s$ ),  $b - y_{ref2}$  (в момент и после переключения  $k_s$ ).

$B_{eq}$  — коэффициент вязкого трения сервопривода,  $K_s$  — жесткость гибкого звена,  $J_l$  — момент инерции гибкого звена относительно центра масс,  $J_{eq}$  — момент инерции сервопривода. Движение гибкого звена происходит в горизонтальной плоскости,  $v_k(t)$  — внешнее возмущение, действующее на механическую часть и  $w_k(t)$  — шум измерений. Источником случайного внешнего возмущения являются высокочастотные промышленные вибрации, действующие на гибкое звено. В рассматриваемом масштабе такие вибрации адекватно описываются гауссовским белым шумом. Интенсивность внешнего возмущения будем считать равной  $Q_n$ , интенсивность шума измерений —  $R_n$ .

Задача состоит в том, чтобы найти алгоритм управления с итеративным обучением, при котором выходная переменная  $y(t)$  воспроизводила бы эталонную траекторию  $y_{ref}(t)$  с заданной точностью. Непосредственному измерению доступен только угол  $\theta$ .

Эталонная траектория задает изменение угла поворота сервопривода  $\theta$  для обеспечения захвата и размещения груза за время  $T$ . Эта траектория представлена на рис. 1 и описывается уравнениями

$$(32) \quad y_{ref}(t) = \begin{cases} y_{ref1}(t) = \frac{\pi t^2}{6} - \frac{\pi t^3}{27}, & k < k_s, \\ y_{ref2}(t) = \frac{3\pi}{4} \sin \frac{\pi t}{6}, & k \geq k_s, \end{cases} \quad t \in [0 \ T].$$

Для расчетов и моделирования были приняты следующие значения параметров из [19]:  $B_{eq} = 0,004$  Н·м/(рад/с),  $K_s = 1,3$  Н·м/рад,  $J_l = 0,0057$  кг·м<sup>2</sup>,  $J_{eq} = 2,08 \times 10^{-3}$  кг·м<sup>2</sup>. Продолжительность цикла повторения  $T = 3$  с. Требуемую точность будем оценивать по предельной величине среднеквадрати-

ческой ошибки  $E(k) = E^* = 0,05$  рад, где  $E(k)$  вычисляется по формуле

$$(33) \quad E(k) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \|e_k(p)\|^2}.$$

При вычислениях использовался метод дискретизации Эйлера с шагом  $T_s = 0,005$  с. Дискретизация по времени дифференциальной динамики (31) дает модель в пространстве состояний (1) для синтеза УИО с  $A(\delta(p)) = (I + A_c(\delta(t))T_s)$ ,  $B = B_c T_s$ ,  $D = [T_s B Q_n B^T]^{1/2}$ ,  $G = (R_n/T_s)^{1/2}$  [22], для дальнейших расчетов будем считать  $Q_n = 1,6 \cdot 10^{-5}$  и  $R_n = 2 \cdot 10^{-5}$ .

В данном примере  $CB = 0$ , а разработанная теория предполагает, чтобы  $CB \neq 0$ . С целью обойти это затруднение воспользуемся тем, что для данной системы

$$\dot{y}_k = C \dot{x}_k = C_1 x_k,$$

где  $C_1 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$  и  $C_1 B \neq 0$ . Дискретизация по Эйлера с шагом  $T_s$  дает

$$y_k(p+1) = (C + C_1 T_s) x_k(p) = \bar{C} x_k(p),$$

где  $\bar{C} = C + C_1 T_s$ .

Поскольку вектор состояния недоступен измерению, для дальнейшего синтеза управления используется оценка вектора состояния  $\hat{x}_k(p)$ , полученная с помощью фильтра Калмана (8) на повторении  $k$ , и тогда

$$\hat{y}_k(p+1) = \bar{C} \hat{x}_k(p)$$

и вместо ошибки используется оценка ошибки

$$\hat{e}_k(p+1) = y_{ref}(p+1) - \bar{C} \hat{x}_k(p).$$

Тогда ошибка обучения при  $k+1 \neq k_s$  опишется уравнением

$$(34) \quad \hat{e}_{k+1}(p+1) = \hat{e}_k(p+1) - \bar{C}[A\hat{\eta}_{k+1}(p) + FC\tilde{\eta}_{k+1}(p) + B\Delta u_{k+1}(p-1) + FG\Delta\omega_{k+1}(p-1)],$$

а при  $k+1 = k_s$

$$(35) \quad \hat{e}_{k_s}(p+1) = \hat{e}_{k_s-1}(p+1) - \bar{C}[A\hat{\eta}_{k_s}(p) + FC\tilde{\eta}_{k_s}(p) + B\Delta u_{k_s}(p-1) + FG\Delta\omega_{k_s}(p-1)] + r(p+1),$$

где  $r(p+1) = y_{ref_2}(p+1) - y_{ref_1}(p+1)$ .

Далее для синтеза УИО можно использовать модель приращений (16) с учетом того, что ошибка обучения формируется в виде (34), (35).

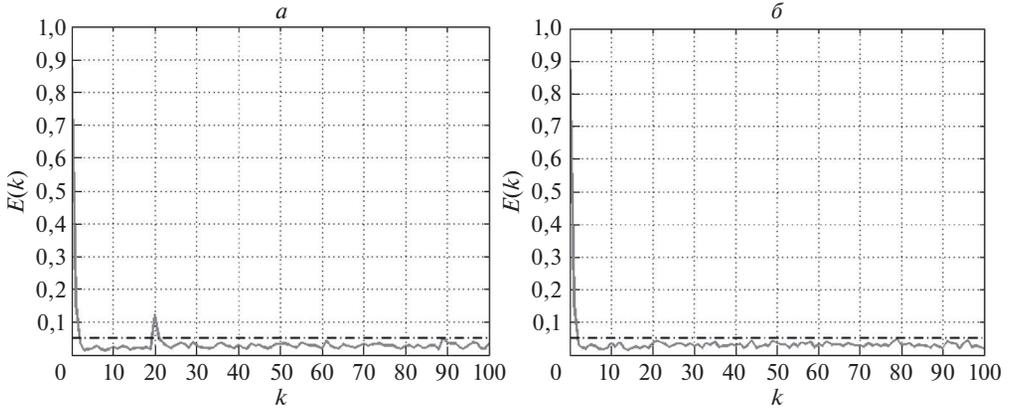


Рис. 2. Среднеквадратическая ошибка обучения  $E(k)$  при использовании на повторении  $k_s = 20$  закона управления  $a$  — без переключения (36),  $b$  — с переключением (36), (37). Штрихпунктирной линией обозначено предельно допустимое значение среднеквадратической ошибки  $E^* = 0,05$  рад.

Выберем корректирующую поправку в виде

$$\Delta u_{k+1}(p-1) = K_1 \hat{\eta}_{k+1}(p) + K_2 \hat{e}_k(p).$$

Тогда закон УИО при  $k > k_s$  и  $k < k_s$  будет иметь вид

$$(36) \quad u_k(p) = u_{k-1}(p) + K_1(\hat{x}_k(p) - \hat{x}_{k-1}(p)) + K_2 \hat{e}_{k-1}(p+1), \quad k \neq k_s,$$

а в момент переключения при  $k = k_s$

$$(37) \quad u_{k_s}(p) = u_{k_s-1}(p) - (\bar{C}B)^{-1} \bar{C}A(\hat{x}_{k_s}(p) - \hat{x}_{k_s-1}(p)) + (\bar{C}B)^{-1} \hat{e}_{k_s-1}(p+1).$$

Поскольку манипулятор перемещает грузы различных масс, то из-за изменения массы грузов момент инерции гибкого звена изменяется, т.е. может принимать значения от  $J_l + \Delta \underline{J}_l$  до  $J_l + \Delta \overline{J}_l$ . В этом случае матрица параметров  $A_c(\delta)$  будет иметь следующий вид:

$$A_c(\delta) = A_c + A_a(\delta), \quad A_a(\delta) = \delta A_c, \quad \delta = [\underline{J}_l; \overline{J}_l].$$

Для дальнейших расчетов возьмем  $\Delta \overline{J}_l = \frac{1}{3} J_l$ ,  $\Delta \underline{J}_l = -\frac{1}{3} J_l$ . Матрица усиления фильтра при заданных ковариационных матрицах шумов находится с помощью стандартной функции `dlqr` пакета `MATLAB`:

$$F = [0,2220 \quad -0,1501 \quad 3,9983 \quad -3,0935].$$

*Замечание 2.* Для построения данного фильтра были выбраны параметры нижней границы области неопределенности, поскольку, как показывает моделирование, такой фильтр обеспечивает требуемую точность при заданном разбросе неопределенных параметров, в то время как фильтр с номинальными параметрами эту точность не обеспечивает.

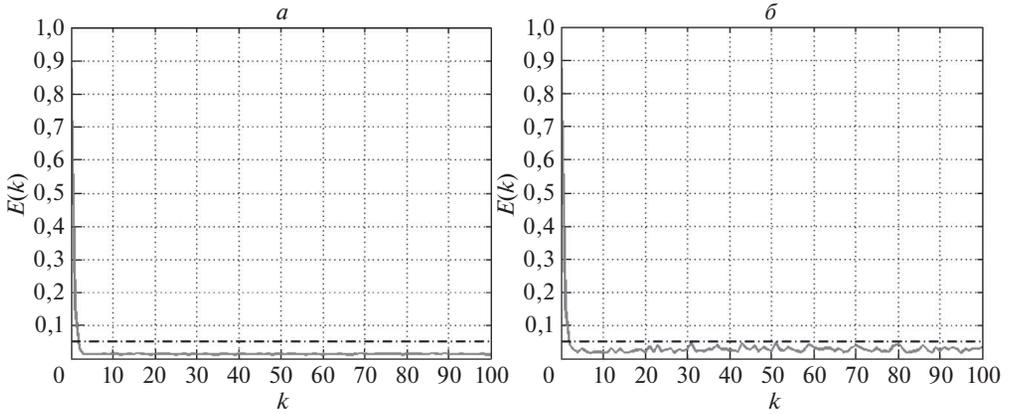


Рис. 3. Среднеквадратическая ошибка обучения  $E(k)$  при использовании на повторении  $k_s = 20$  закона управления с переключением (36), (37) при выборе параметров модели  $a$  — на нижней границе области неопределенности,  $b$  — на верхней границе области неопределенности. Штрихпунктирной линией обозначено предельно допустимое значение среднеквадратической ошибки  $E^* = 0,05$  рад.

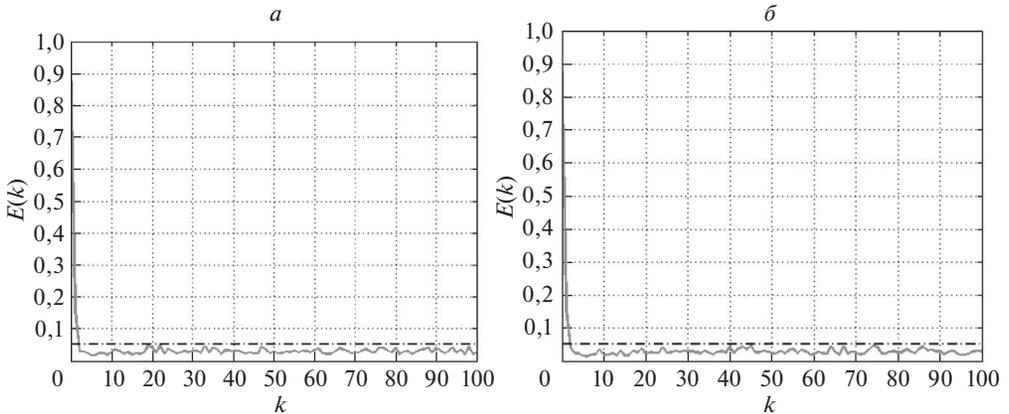


Рис. 4. Среднеквадратическая ошибка обучения  $E(k)$  при использовании на повторении  $k_s = 20$  закона управления с переключением (36), (37)  $a$  — без ограничения на управление,  $b$  — при ограничении на управление. Штрихпунктирной линией обозначено предельно допустимое значение среднеквадратической ошибки  $E^* = 0,05$  рад.

Решая неравенства (27) с учетом очевидных изменений матриц  $A_{11}(\delta)$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$ ,  $A_{22}$ , и задавая  $Q = \text{diag}[Q_1 \ Q_2]$ ,  $Q_1 = 10^{-5}I$ ,  $Q_2 = 10^8I$ ,  $R = 1$ , получим

$$K_1 = [-74,7601 \ 0,9671 \ -1,0629 \ -0,2729], \quad K_2 = 62,4502.$$

В момент переключения матрицы усиления в (37) имеют следующие значения:

$$-(\bar{C}B)^{-1}\bar{C}A = [-83,2000 \ -1,3000 \ -0,8280 \ 0], \quad (\bar{C}B)^{-1} = [83,2000].$$

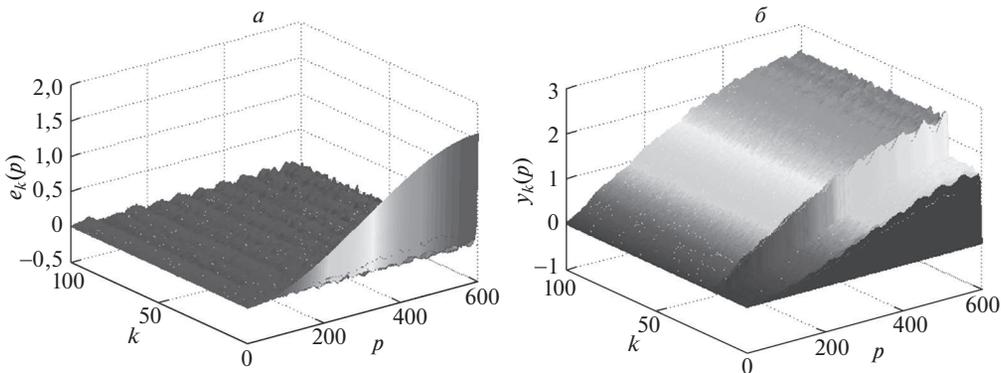


Рис. 5. Изменение  $a$  — ошибки  $e_k(p)$  и  $b$  — выходной переменной  $y_k(p)$  в зависимости от времени  $p$  и повторения  $k$  при использовании на повторении  $k_s = 20$  закона управления с переключением (36), (37).

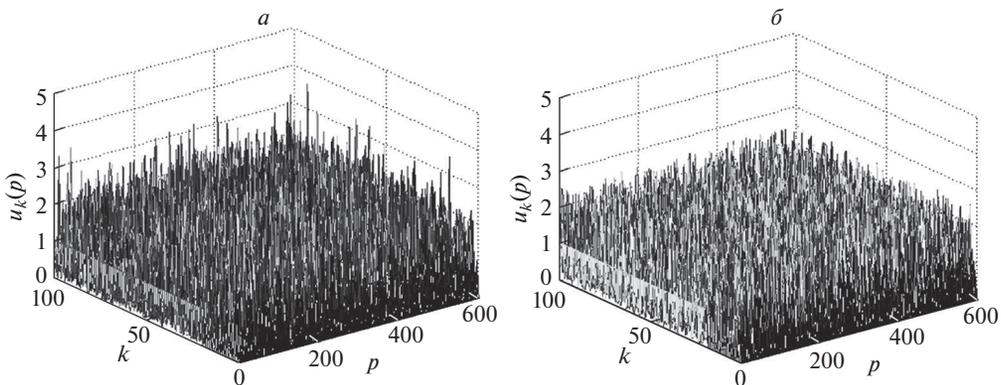


Рис. 6. Управление  $u_k(p)$   $a$  — без ограничения,  $b$  — с ограничением  $u_m \leq 2,5$ .

На первом графике рис. 2 показана среднеквадратическая ошибка обучения (33), когда на повторении  $k_s = 20$  (в момент изменения желаемой траектории) применяется закон управления без переключения (36). В этом случае видны скачкообразное увеличение ошибки и ее выход за пределы допуска. Результат применения закона управления с переключением (36), (37) показан на втором графике рис. 2, где скачок ошибки значительно меньше и не выходит за пределы допуска. Параметры модели в данном случае были взяты соответствующими верхней границе области неопределенности.

Для проверки робастности алгоритма компенсации сравним процессы на границах области неопределенности — верхней и нижней. На рис. 3,а представлена среднеквадратическая ошибка обучения (33) при выборе параметров модели на нижней границе области неопределенности, на рис. 3,б — на верхней границе. Из графиков видно, что несмотря на то что алгоритм компенсации построен по номинальной модели, он тем не менее, способен компен-

сировать переходную ошибку при рассматриваемом разбросе неопределенных параметров.

Кроме того, с точки зрения анализа робастности, представляет интерес оценить эффект ограничения управления. На первом графике рис. 4 представлена среднеквадратическая ошибка обучения (33) при использовании на повторении  $k_s = 20$  закона управления с переключением (36), (37) без ограничения на управление. На втором графике рис. 4 — при ограничении на управление  $u_m \leq 2,5$ . Из графиков видно, что ограничение управления не оказывает существенного влияния на динамику процесса обучения, что подтверждает робастность разработанного закона УИО с переключением. В данном случае рассматривалась модель с параметрами верхней границы неопределенности. Заметим, что при учете ограничений система становится нелинейной и эти результаты, не имея теоретического обоснования, носят чисто иллюстративный характер.

На рис. 5 представлено изменение ошибки  $e_k(p)$  и выходной переменной  $y_k(p)$  в зависимости от времени  $p$  и повторения  $k$  для случая, рассмотренного на рис. 2,б. На рис. 6,а представлено управление без ограничения, на рис. 6,б — с ограничением  $u_m \leq 2,5$  для случая, рассмотренного на рис. 4.

## 6. Заключение

В данной работе разработан метод синтеза управления с итеративным обучением системой с неопределенными параметрами, функционирующей в повторяющемся режиме в условиях изменяемой эталонной траектории при учете случайных возмущений и шумов измерений. Приведенный пример подтверждает работоспособность предложенного закона управления как с точки зрения скорости сходимости процесса обучения, так и с точки зрения компенсации переходной ошибки, вызванной изменением эталонной траектории. Несмотря на это, вопросы выбора модели фильтра и построения алгоритма переключения с целью компенсации переходной ошибки требуют более глубокого и расширенного изучения, поскольку предложенный в данной работе подход в решении этих вопросов использует элементы эвристики.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цыпкин Я.З.* Адаптация и обучение в автоматических системах. М.: Наука, 1968. *Tsytkin Ya.Z.* Adaptation and Learning in automatic systems. New York: Academic Press, 1971 (Translated by Z.J. Nikolic).
2. *Bristow D.A., Tharayil M., Alleyne A.G.* A Survey of Iterative Learning Control: A Learning-Based Method for High-Performance Tracking Control // IEEE Control Syst. Magaz. 2006. V. 26. No. 3. P. 96–114.
3. *Garden M.* Learning control of actuators in control systems, U.S. Patent 3555252, 1971.
4. *Uchiyama M.* Formation of high-speed motion pattern of a mechanical arm by trial // Trans. Soc. Instrument Contr. Engineers. 1978. V. 14. 6. P. 706–712.

5. *Arimoto S., Kawamura S., Miyazaki F.* Bettering Operation of Robots by Learning // J. Robot. Syst. 1984. V. 1. P. 123–140.
6. *Craig J.J.* Adaptive control of manipulators through repeated trials // Proc. Amer. Contr. Conf. 1984. P. 1566–1573.
7. *Casalino G., Bartolini G.* A learning procedure for the control of movements of robotic manipulators // Proc. IASTED Symp. Robot. Automat. 1984. P. 108–111.
8. *Kawamura S., Miyazaki F., Arimoto S.* Iterative learning control for robotic systems // Proc. Int. Conf. Ind. Electron., Contr. and Instrum. 1984. P. 393–398.
9. *Ahn H-S., Chen Y.Q., Moore K.L.* Iterative Learning Control: Survey and Categorization // IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Part C: Appl. Rev. 2007. V. 37. No. 6. P. 1099–1121.
10. *Saez M.A., Maturana F.P., Barton K., Tilbury D.M.* Context-Sensitive Modeling and Analysis of Cyber-Physical Manufacturing Systems for Anomaly Detection and Diagnosis // IEEE Transaction on Automation Science and Engineering. 2020. V. 17. No. 1. P. 29–40.
11. *Qamsane Y., Balta E.C., Moyne J., Tilbury D., Barton K.* Dynamic rerouting of cyber-physical production systems in response to disruptions based on SDC framework // Proc. American Control Conference. 2019. P. 3650–3657.
12. *Balta E.C., Tilbury D.M., Barton K.* Switch-Based Iterative Learning Control for Tracking Iteration Varying References // IFAC PapersOnLine. 2020. V. 20. Issue. 2. P. 1493–1498.
13. *Hoelzle D.J., Alleyne A.G., Johnson A.J.W.* Basis task approach to iterative learning control with applications to micro-robotic deposition. // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2010. V. 19 (5). P. 1138–1148.
14. *Zundert J., Bolder J., Oomen T.* Optimality and flexibility in iterative learning control for varying tasks // Automatica. 2016. V. 67. P. 295–302.
15. *Altin B., Wang Z., Hoelzle D.J., Barton K.* Robust monotonically convergent spatial iterative learning control: Interval systems analysis via discrete Fourier transform // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2018. V. 27(6). P. 2470–2483.
16. *Balta E.C., Tilbury D.M., Barton K.* Control-oriented modeling and layer-to-layer stability for fused deposition modeling: a kernel basis approach // Proc. Amer. Control Conf. (ACC). 2019. P. 4727–4733.
17. *Guo Y., Mishra S.* A predictive control algorithm for layer-to-layer ink-jet 3D printing // Proc. Amer. Control Conf. (ACC). 2016. P. 833–838.
18. *Пакшин П.В., Емельянова Ю.П.* Управление с итеративным обучением дискретными стохастическими системами с переключениями // АИТ. 2020. № 11. С. 93–111.  
*Pakshin P.V., Emelianova J.P.* Iterative learning control design for discrete-time stochastic switched systems // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 11. P. 2011–2025.
19. *Apkarian J., Karam P., Levis M.* Workbook on Flexible Link Experiment for Matlab/Simulink Users. Quanser, 2011.
20. *Pakshin P., Emelianova J., Emelianov M.* Iterative learning control of stochastic linear systems under switching of the reference trajectory and parameters // Proc. 29th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED 2021), 2021, P. 1311–1316, 9480192.

21. *Pakshin P., Emelianova J., Rogers E., Galkowski K.* Iterative Learning Control of Stochastic Linear Systems with Reference Trajectory Switching // Proc. 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) December 13–15, 2021. Austin, Texas, 2021, P. 6565–6570.
22. *Franklin G.F., Powell J.D., Workman M.L.* Digital Control of Dynamical Systems. Third edition. Ellis-Kagle Press, 2006.
23. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии О.Н. Граничиным.*

Поступила в редакцию 21.02.2022

После доработки 25.05.2022

Принята к публикации 10.06.2022

---

---

## СОДЕРЖАНИЕ

### Обзоры

**Карпов А.В.** Структурированные предпочтения: обзор литературы . . . . . 3

### Нелинейные системы

**Жирабок А.Н., Зуев А.В., Филаретов В.Ф., Шумский А.Е.,  
Ким Чхун Ир.** Каноническая форма Жордана в задачах диагностирования  
и оценивания . . . . . 36

**Каменецкий В.А.** Дискретные попарно связные системы с переключения-  
ми и системы Лурье, критерий Цыпкина для систем с двумя нелинейно-  
стями . . . . . 55

**Мозжечков В.А.** Синтез простых релейных регуляторов автоколебатель-  
ных систем управления . . . . . 81

**Тхай В.Н.** Стабилизация колебаний управляемой обратимой механической  
системы . . . . . 94

### Стохастические системы

**Борисов А.В., Босов А.В.** Практическая реализация решения задачи ста-  
билизации линейной системы со скачкообразным случайным дрейфом по  
косвенным наблюдениям . . . . . 109

**Хрусталеv М.М., Царьков К.А.** Оптимизация нелинейных по управле-  
нию стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа . . . . . 128

### Интеллектуальные системы управления, анализ данных

**Емельянова Ю.П.** Управление с итеративным обучением дискретной систе-  
мой с изменяемой эталонной траекторией в условиях неопределенности . . . . 150

# C O N T E N T S

## Surveys

<b>Karpov A.V.</b> Structured Preferences: A Survey .....	3
---	---

## Nonlinear Systems

<b>Zhirabok A.N., Zuev A.V., Filaretov V.F., Shumsky A.E., Kim Chung Il.</b> Jordan Canonical Form in the Diagnosis and Estimation Problems .....	36
<b>Kamenetskiy V.A.</b> Discrete-Time Pairwise Connected Switched Systems and Lur'e Systems, Tsytkin's Criterion for Systems with Two Nonlinearities .....	55
<b>Mozzhechkov V.A.</b> Synthesis of Simple Relay Controllers of Self-Oscillating Control Systems .....	81
<b>Tkhai V.N.</b> Stabilizing the Oscillations of a Controlled Reversible Mechanical System .....	94

## Stochastic Systems

<b>Borisov A.V., Bosov A.V.</b> Practical Implementation of the Stabilization Problem Solution for a Linear System with Discontinuous Random Drift by Indirect Observations .....	109
<b>Khrustalev M.M., Tsarkov K.A.</b> Optimization of Control-Nonlinear Stochastic Jump Diffusion Systems .....	128

## Intellectual Control Systems, Data Analysis

<b>Emelianova J.P.</b> Iterative Learning Control for a Discrete-Time System with Changing Reference Trajectory under Uncertainty .....	150
---	-----