

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ПРОБЛЕМЫ
ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Журнал основан
в январе 1965 г.

ISSN: 0555-2923

Выходит
4 раза в год

Том 56, 2020

Вып. 2

Апрель–Май–Июнь

М о с к в а

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Теория информации

- Макур А., Чжэн Л. Сравнение коэффициентов сжатия для f -дивергенций 3
Бурнашев М.В. Новые границы в задаче проверки гипотез с информационными
ограничениями 64

Теория кодирования

- Харин А.В., Заверткин К.Н., Овинников А.А. Обнаружение циклов длины 8 в графе
Таннера квазициклического МПП-кода по результатам анализа протографа 82

Методы обработки сигналов

- Голубев Г.К. Об адаптивном оценивании линейных функционалов по наблюдениям
в белом шуме 95

CONTENTS

Information Theory

Makur, A. and Zheng, L. , Comparison of Contraction Coefficients for f -Divergences.....	3
Burnashev, M.V. , New Upper Bounds in the Hypothesis Testing Problem with Information Constraints.....	64

Coding Theory

Kharin, A.V., Zavertkin, K.N., and Ovinnikov, A.A. , Detecting Cycles of Length 8 in the Tanner Graph of a QC-LDPC Code Based on Protograph Analysis.....	82
--	----

Methods of Signal Processing

Golubev, G.K. , On Adaptive Estimation of Linear Functionals from Observations against White Noise.....	95
--	----

УДК 621.391.1 : 519.72

© 2020 г. А. Макур, Л. Чжэн

СРАВНЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ СЖАТИЯ ДЛЯ f -ДИВЕРГЕНЦИЙ^{1,2}

Коэффициенты сжатия – это зависящие от распределений константы, используемые для улучшения стандартных неравенств об обработке данных для f -дивергенций (или относительных f -энтропий) и приводящие к так называемым “сильным” неравенствам об обработке данных. Для любого двумерного совместного распределения, т.е. пары, состоящей из вектора вероятностей и стохастической матрицы, известно, что коэффициенты сжатия для f -дивергенций ограничены сверху единицей, а снизу – коэффициентом сжатия для χ^2 -дивергенции. Мы показываем, что верхняя граница достигается, когда совместное распределение разложимо, а нижней можно достичь, устремляя f -дивергенции на входе для коэффициентов сжатия к нулю. Затем устанавливается линейная верхняя граница на коэффициенты сжатия совместных распределений для некоторого класса f -дивергенций через коэффициенты сжатия для χ^2 -дивергенции, причем эта граница уточняется для выделенного специального случая дивергенции Кульбака – Лейблера (КЛ-дивергенции). Далее дается альтернативное доказательство того факта, что коэффициенты сжатия для КЛ- и χ^2 -дивергенций совпадают для двумерных гауссовских распределений (где для первого коэффициента может налагаться ограничение на второй момент). Наконец, обобщается известный результат о том, что коэффициенты сжатия для стохастических матриц (после вычисления экстремума по всевозможным векторам вероятностей) для всех нелинейных операторно выпуклых f -дивергенций равны. В частности, доказываем, что так называемый предпорядок “меньшего искажения” на стохастических матрицах эквивалентным образом характеризуется любой нелинейной операторно выпуклой f -дивергенцией. Как приложение этой характеристики, выводится также обобщение сильного неравенства Самоудницкого об обработке данных.

Ключевые слова: коэффициент сжатия, f -дивергенция/относительная f -энтропия, сильное неравенство об обработке данных, предпорядок меньшего искажения, максимальная корреляция.

DOI: 10.31857/S0555292320020011

§ 1. Введение

Коэффициенты сжатия для f -дивергенций (или относительных f -энтропий) широко изучались в теории информации [1–8], статистике [9–13], анализе цепей Маркова в теории вероятностей [14–16], а также в теории матриц [17–19], причем особенно важными частными случаями являются расстояние по вариации, дивергенция Кульбака – Лейблера (КЛ-дивергенция) и взаимная информация, а также χ^2 -дивергенция. Как будет показано на примерах, эти коэффициенты – зависящие от распре-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке фонда NSF (грант 1216476) и стипендии компании Хьюлетт-Паккард.

² Весьма предварительная версия настоящей статьи была представлена в докладе [1].

делений константы, использующиеся для улучшения обычных неравенств об обработке данных для f -дивергенций и приводящие к так называемым “сильным” неравенствам об обработке данных. Коэффициенты сжатия для f -дивергенций бывают двух типов: относящиеся к парам из вектора вероятностей и стохастической матрицы, т.е. совместным распределениям, и относящиеся только к стохастическим матрицам, т.е. условным распределениям. Цель настоящей статьи в широком смысле – изучить различные неравенства и равенства между коэффициентами сжатия в обоих постановках. В постановке, связанной с совместными распределениями, мы главным образом устанавливаем общие границы на коэффициенты сжатия для определенных классов f -дивергенций, а также выводим специфические границы на коэффициенты сжатия для КЛ-дивергенции через коэффициенты сжатия для χ^2 -дивергенции (или квадрата максимальной корреляции Хиршфельда – Гебелейна – Реньи). С другой стороны, в постановке, связанной со стохастическими матрицами, мы обобщаем известную эквивалентность некоторых определенных коэффициентов сжатия, доказывая эквивалентность характеристики предпорядка “меньшего искажения” (less noisy preorder) на стохастических матрицах [20].

Более точно, настоящая статья включает в себя следующее:

1. Полностью независимый обзор результатов о коэффициентах сжатия в § 2 (в котором мы в основном рассматриваем свойства коэффициентов сжатия, а не их применения).
2. Обобщения известных свойств коэффициентов сжатия для совместных распределений, такие как результат о разложимости в теореме 1 (или в п. 3 предложения 3), мета-сильное неравенство об обработке данных в п. 6 предложения 3 и характеристика коэффициента сжатия для χ^2 -дивергенции через коэффициенты сжатия для f -дивергенций при стремлении f -дивергенции на входе к нулю в теореме 2 (что явно объясняет интуитивное понимание нижней границы на максимальную корреляцию в п. 7 предложения 3).
3. Зависящие от распределений нижние границы на КЛ-дивергенцию и некоторые классы f -дивергенций через χ^2 -дивергенцию в леммах 2 и 5 соответственно (эти границы используются для доказательства дальнейших линейных верхних границ на коэффициенты сжатия).
4. Линейные верхние границы на коэффициенты сжатия совместных распределений для КЛ-дивергенции и некоторые классы f -дивергенций через коэффициент сжатия для χ^2 -дивергенции в теоремах 3, 4 и следствии 1.
5. Альтернативное доказательство известной эквивалентности между коэффициентами сжатия для КЛ- и χ^2 -дивергенций двумерных гауссовских распределений в § 5, которое также устанавливает эквивалентность при дополнительном ограничении на среднюю мощность (или второй момент) – см. теорему 5.
6. Эквивалентные характеристики предпорядка меньшего искажения на стохастических матрицах через нелинейные операторно выпуклые f -дивергенции в теореме 6. Эта теорема обобщает известный из литературы важный результат о том, что коэффициенты сжатия для всех нелинейных операторно выпуклых f -дивергенций для заданной стохастической матрицы равны (см. предложение 6).
7. Применения наших основных результатов, такие как обобщение сильного неравенства Самородниченко об обработке данных на нелинейную операторно выпуклую f -информацию в теореме 7, а также простое доказательство в предложении 7 того факта, что скорость сходимости к стационарному состоянию для КЛ-дивергенции определяется коэффициентом сжатия для χ^2 -дивергенции для эргодической обратимой цепи Маркова.

Структура статьи. Кратко обрисовываем дальнейшее изложение. Вначале в § 2 приведен обзор все разрастающейся литературы по коэффициентам сжатия. В этом параграфе собраны формальные определения и важнейшие свойства обоих вышеупомянутых вариантов коэффициентов сжатия, а также вкратце описано их появление

в изучении эргодичности. Затем в §3 сформулированы и пояснены наши основные результаты и рассмотрена относящаяся к этому литература. В §4 представлены некоторые полезные границы, связывающие f -дивергенции и χ^2 -дивергенцию, которые будут использованы для вывода линейных верхних границ на коэффициенты сжатия совместных распределений для некоторого класса f -дивергенций и КЛ-дивергенции. В продолжение этого сюжета в §5 доказана эквивалентность некоторых коэффициентов сжатия двумерных гауссовских распределений. В §6 доказывается эквивалентность характеристик предпорядка меньшего искажения на стохастических матрицах через нелинейные операторно выпуклые f -дивергенции, а затем выводится обобщение сильного неравенства Самородницкого об обработке данных. Наконец, в §7 даются заключительные замечания и намечаются направления дальнейших исследований.

§ 2. Обзор результатов по коэффициентам сжатия

Здесь мы определим коэффициенты сжатия для f -дивергенций и изложим некоторые известные факты о них. Вначале в п. 2.1 вводятся предварительные определения и обозначения, относящиеся к f -дивергенциям, а в последующих пунктах вкратце изложим первые необходимые сведения о коэффициентах сжатия и сильных неравенствах об обработке данных.

2.1. f -дивергенция. Рассмотрим дискретное пространство элементарных событий $\mathcal{X} \triangleq \{1, \dots, |\mathcal{X}|\}$ мощности $2 \leq |\mathcal{X}| < +\infty$, элементы которого будем без ограничения общности считать натуральными числами. Через $\mathcal{P}_{\mathcal{X}} \subseteq (\mathbb{R}^{|\mathcal{X}|})^*$ обозначим вероятностный симплекс в $(\mathbb{R}^{|\mathcal{X}|})^*$, состоящий из всех вероятностных мер на \mathcal{X} , где $(\mathbb{R}^{|\mathcal{X}|})^*$ – двойственное к $\mathbb{R}^{|\mathcal{X}|}$ векторное пространство, состоящее из всех векторов-строк длины $|\mathcal{X}|$. Мы понимаем $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ как множество всевозможных распределений случайной величины X со значениями \mathcal{X} , и будем представлять каждую вероятностную меру $P_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ в виде вектора-строки

$$P_X = (P_X(1), \dots, P_X(|\mathcal{X}|)) \in (\mathbb{R}^{|\mathcal{X}|})^*.$$

Через

$$\mathcal{P}_{\mathcal{X}}^\circ \triangleq \{P_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}} : \forall x \in \mathcal{X}, P_X(x) > 0\}$$

обозначим относительную внутренность множества $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$. Популярным “расстоянием” между вероятностными мерами в теории информации и статистике является понятие f -дивергенции, независимо введенное в [21, 22] и в [23]. (Это понятие также независимо появлялось в [24], [25] и [26, 27].)

Определение 1 (f -дивергенция [21–23]). Для заданной выпуклой функции $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, такой что $f(1) = 0$, f -дивергенцией вероятностной меры $P_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ относительно вероятностной меры $R_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ называется величина

$$D_f(R_X \| P_X) \triangleq \sum_{x \in \mathcal{X}} P_X(x) f\left(\frac{R_X(x)}{P_X(x)}\right) = \mathbf{E}_{P_X} \left[f\left(\frac{R_X(X)}{P_X(X)}\right) \right], \quad (1)$$

где через $\mathbf{E}_{P_X}[\cdot]$ обозначено математическое ожидание относительно P_X и в силу непрерывности и некоторых других соображений (подробнее см. в [28, §3]) приняты соглашения $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ (в том числе, возможно, равный бесконечности), $0f(0/0) = 0$ и $0f(r/0) = \lim_{p \rightarrow 0^+} pf(r/p) = r \lim_{p \rightarrow 0^+} pf(1/p)$ для всех $r > 0$ (этот предел также может быть равен бесконечности).

Понятие f -дивергенции обобщает несколько известных мер расхождения (дивергенции), используемых в теории информации, статистике и теории вероятностей. Приведем несколько примеров:

1. *Расстояние по вариации*: Для $f(t) = \frac{1}{2}|t-1|$ соответствующая f -дивергенция является расстоянием по вариации (total variation (TV) distance):

$$\|R_X - P_X\|_{\text{TV}} \triangleq \max_{A \subseteq \mathcal{X}} |R_X(A) - P_X(A)| = \frac{1}{2} \|R_X - P_X\|_1, \quad (2)$$

где $P_X(A) = \sum_{x \in A} P_X(x)$ для любой $A \subseteq \mathcal{X}$, через $\|\cdot\|_p$ обозначена l^p -норма, $p \in [1, \infty]$, причем второе равенство, как и некоторые другие характеристики расстояния по вариации, доказано в [29, гл. 4].

2. *Дивергенция Кульбака – Лейблера (КЛ-дивергенция)* [30, § 2]: Для функции $f(t) = t \log(t)$, где $\log(\cdot)$ здесь и далее – натуральный логарифм (по основанию e), соответствующая f -дивергенция является КЛ-дивергенцией (или *относительной энтропией*):

$$D(R_X \| P_X) \triangleq \sum_{x \in \mathcal{X}} R_X(x) \log \left(\frac{R_X(x)}{P_X(x)} \right). \quad (3)$$

3. χ^2 -дивергенция (Неймана) [31]: Для $f(t) = (t-1)^2$ или $f(t) = t^2 - 1$ соответствующая f -дивергенция является χ^2 -дивергенцией:

$$\chi^2(R_X \| P_X) \triangleq \sum_{x \in \mathcal{X}} \frac{(R_X(x) - P_X(x))^2}{P_X(x)}. \quad (4)$$

Существуют и другие варианты χ^2 -дивергенции – см., например, [32], где описаны варианты Пирсона и Вайды, а также их связь с f -дивергенциями.

4. *Дивергенция Хеллингера порядка $\alpha \in (0, \infty) \setminus \{1\}$* [33, определение 2.10]: Для $f(t) = \frac{t^\alpha - 1}{\alpha - 1}$ соответствующая f -дивергенция является дивергенцией Хеллингера (или *дивергенцией Цаллиса*) порядка α :

$$\mathcal{H}_\alpha(R_X \| P_X) \triangleq \frac{1}{\alpha - 1} \left(\sum_{x \in \mathcal{X}} R_X(x)^\alpha P_X(x)^{1-\alpha} - 1 \right), \quad (5)$$

где $\frac{1}{2} \mathcal{H}_{\frac{1}{2}}(R_X \| P_X)$ – квадрат расстояния Хеллингера, $\mathcal{H}_2(R_X \| P_X) = \chi^2(R_X \| P_X)$ – это χ^2 -дивергенция, а случай $\alpha = 1$ в смысле аналитического продолжения соответствует КЛ-дивергенции $\mathcal{H}_1(R_X \| P_X) = D(R_X \| P_X)$ (см. [34, § II]).

5. *Дивергенция Винце – Ле Кама порядка $\lambda \in (0, 1)$* [35–37]: для функции $f(t) = \lambda(1-\lambda) \frac{(t-1)^2}{\lambda t + (1-\lambda)}$ соответствующая f -дивергенция – это дивергенция Винце – Ле Кама порядка λ :

$$\begin{aligned} \text{LC}_\lambda(R_X \| P_X) &\triangleq \lambda(1-\lambda) \sum_{x \in \mathcal{X}} \frac{(R_X(x) - P_X(x))^2}{\lambda R_X(x) + (1-\lambda)P_X(x)} = \\ &= \left(\frac{\lambda}{1-\lambda} \right) \chi^2(R_X \| \lambda R_X + (1-\lambda)P_X), \end{aligned} \quad (6)$$

где частный случай при $\lambda = \frac{1}{2}$ известен как *расстояние Винце – Ле Кама* (или *triangular discrimination*).

Хотя в общем случае f -дивергенции не являются метриками³, они обладают несколькими полезными свойствами. Для изложения некоторых из этих свойств обозначим через $\mathcal{Y} \triangleq \{1, \dots, |\mathcal{Y}|\}$ другой дискретный алфавит, где $2 \leq |\mathcal{Y}| < +\infty$, и введем соответствующий вероятностный симплекс $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}$ возможных вероятностных мер для случайной величины Y со значениями в \mathcal{Y} . Кроме того, пусть $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}}$ – множество всех $|\mathcal{X}| \times |\mathcal{Y}|$ стохастических по строкам матриц в пространстве $\mathbb{R}^{|\mathcal{X}| \times |\mathcal{Y}|}$. Всюду далее мы отождествляем условное распределение Y при заданном X (или “дискретный канал”) $P_{Y|X}$ со стохастической по строкам матрицей вероятностей перехода $W \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}}$ (т.е. $P_{Y|X} = W$), где x -й строкой матрицы W для любого $x \in \mathcal{X}$ является условная вероятностная мера $P_{Y|X=x} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}}$. Мы интерпретируем $W: \mathcal{P}_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{Y}}$ как отображение, переводящее вероятностные меры $P_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ на входе в вероятностные меры $P_Y = P_X W \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}}$ на выходе путем умножения слева. Ниже перечислены некоторые хорошо известные свойства f -дивергенций (см. [21, 22]):

1. *Неотрицательность и рефлексивность*: Для любых $R_X, P_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ справедливо $D_f(R_X \| P_X) \geq 0$ (согласно неравенству Йенсена), причем при $R_X = P_X$ имеет место равенство. Кроме того, если f строго выпукла в единице, т.е. $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) > f(1)$ для всех $x, y \in (0, \infty)$ и $\lambda \in (0, 1)$, таких что $\lambda x + (1 - \lambda)y = 1$, то равенство имеет место тогда и только тогда, когда $R_X = P_X$. (Заметим, что во всех приведенных выше примерах f -дивергенции функция f строго выпукла в единице.)
2. *Аффинная инвариантность*: Рассмотрим любую аффинную функцию $\alpha(t) = a(t - 1)$, где $a \in \mathbb{R}$. Ясно, что $D_{f+\alpha}(R_X \| P_X) = 0$ для любых $R_X, P_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$. Следовательно, f и $f + \alpha$ задают одну и ту же f -дивергенцию, т.е. $D_{f+\alpha}(R_X \| P_X) = D_f(R_X \| P_X)$ для любых $R_X, P_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ (где $f + \alpha$ определяется поточечным сложением).
3. *Двойственность Чисара*: Для функции f рассмотрим ее сопряженную по Чисару функцию

$$f^*: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^*(t) = tf\left(\frac{1}{t}\right),$$

которая также выпукла, строго выпукла в единице тогда и только тогда, когда f строго выпукла в единице, и удовлетворяет равенству $f^{**} = f$. Тогда $D_{f^*}(P_X \| R_X) = D_f(R_X \| P_X)$ для любых $R_X, P_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$.

4. *Совместная выпуклость*: Отображение $(R_X, P_X) \mapsto D_f(R_X \| P_X)$ выпукло по паре вероятностных мер на входе.
5. *Неравенство об обработке данных* (см. [23, 24]): Для любой $W \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}}$ и любых $R_X, P_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ справедливо (в силу выпуклости соответствующих функций)

$$D_f(R_X W \| P_X W) \leq D_f(R_X \| P_X), \quad (7)$$

где равенство имеет место, если Y является достаточной статистикой для X , позволяющей делать выводы о паре (R_X, P_X) (см. [28, определение 5]). Кроме того, если f строго выпукла и $D_f(R_X \| P_X) < \infty$, то равенство имеет место тогда и только тогда, когда Y – достаточная статистика для X , позволяющая делать выводы о паре (R_X, P_X) (см., например, [28, теорема 14; 38, п. 3.1]).

Хотя в [22] и [39, § 2] представлено оригинальное изложение этих свойств, большей дидактикой обладает изложение в [38, § 6]. Заметим, что в силу свойства 2 мы рассматриваем f -дивергенции только для нелинейных функций f .

Теперь определим понятие “информации” между случайными величинами, соответствующее произвольной f -дивергенции, для которой также справедливо нера-

³ Мы зачастую выделяем f -дивергенции, являющиеся метриками, называя их “расстояниями” (например, расстояние по вариации, расстояние Хеллингера) и оставляя термин “дивергенция” для тех f -дивергенций, которые метриками не являются (например, КЛ-дивергенция, χ^2 -дивергенция).

венство об обработке данных. Для случайных величин X и Y с совместной вероятностной мерой $P_{X,Y}$, состоящей из (P_X, W) , *взаимная f -информация* между X и Y определяется [19] (см. также [8, формула (V.8); 40, формула (11)]) как

$$I_f(X; Y) \triangleq D_f(P_{X,Y} \| P_X P_Y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} P_X(x) D_f(P_{Y|X=x} \| P_Y), \quad (8)$$

где через $P_X P_Y$ обозначено произведение распределений, определяемых маргинальными вероятностными мерами P_X и P_Y , и при этом используется соглашение, что $P_X(x) D_f(P_{Y|X=x} \| P_Y) = 0$, если $P_X(x) = 0$. Для $f(t) = t \log(t)$ взаимная f -информация соответствует стандартной *взаимной информации* (в смысле определения Фано, см. [41, п. 2.3; 38, п. 2.3]):

$$I(X; Y) \triangleq D(P_{X,Y} \| P_X P_Y).$$

Более того, взаимная f -информация обладает некоторыми естественными свойствами информационных мер. Например, если X и Y независимы, то $I_f(X; Y) = 0$, и верно обратное, если f строго выпукла в единице.

Пусть теперь U – еще одна случайная величина с дискретным алфавитом $\mathcal{U} \triangleq \{1, \dots, |\mathcal{U}|\}$, такая что $2 \leq |\mathcal{U}| < +\infty$. Если (U, X, Y) имеют совместное распределение и образуют цепь Маркова $U \rightarrow X \rightarrow Y$, т.е. U условно независима от Y при заданном X , то они удовлетворяют неравенству об обработке данных [39]

$$I_f(U; Y) \leq I_f(U; X), \quad (9)$$

где равенство имеет место, если Y – достаточная статистика для X , позволяющая делать выводы об U (т.е. $U \rightarrow Y \rightarrow X$ также образуют цепь Маркова). Более того, если f строго выпукла и $I_f(U; X) < \infty$, то равенство имеет место тогда и только тогда, когда Y – достаточная статистика для X , позволяющая делать выводы об U . Заметим, что хотя Чисар в [39] изучал несколько другое понятие, известное как *f -информативность*, соотношение (9) можно извлечь из доказательства предложения 2.1 в [39].

Не стоит и говорить, что неравенства об обработке данных (7) и (9) являются обобщениями более известных неравенств об обработке данных для КЛ-дивергенции и взаимной информации (см., например, [30, теорема 4.1; 41]). Наконец, заметим, что хотя по поводу неравенств об обработке данных (7) и (9) мы ссылаемся на работы [21–24] и [39], соответственно, оба этих неравенства были независимо доказаны в [26, 27]. В частности, в [27] изучались *обобщенные информационные функционалы*, и частный случай из [27, теорема 5.1] дает $D_f(P_U P_Y \| P_{U,Y}) \leq D_f(P_U P_X \| P_{U,X})$ для любой цепи Маркова $U \rightarrow X \rightarrow Y$. По двойственности Чисара для f -дивергенций отсюда вытекает (9).

В заключение этого пункта вкратце опишем “локально квадратичное поведение” f -дивергенций. Локальные аппроксимации f -дивергенций важны с геометрической точки зрения, поскольку они преобразуют окрестности стохастических многообразий с определенными f -дивергенциями в качестве метрики в пространства со скалярным произведением, где метрика задается информацией Фишера – Рао [42–44]. Рассмотрим некоторую выделенную вероятностную меру $P_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}^{\circ}$ (задающую “центр локальной окрестности” рассматриваемых вероятностных мер) и любую другую вероятностную меру $R_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$. Определим вектор *сферического возмущения* меры R_X относительно P_X :

$$K_X \triangleq (R_X - P_X) \text{diag}(\sqrt{P_X})^{-1}, \quad (10)$$

где $\sqrt{\cdot}$ означает поэлементное извлечение квадратного корня из компонент вектора, а через $\text{diag}(\cdot)$ обозначена диагональная матрица с соответствующими компо-

нентами вектора на главной диагонали. С помощью вектора K_X можно построить траекторию сферически возмущенных вероятностных мер:

$$R_X^{(\varepsilon)} = P_X + \varepsilon K_X \operatorname{diag}(\sqrt{P_X}) = \quad (11)$$

$$= (1 - \varepsilon)P_X + \varepsilon R_X, \quad (12)$$

параметризованную параметром $\varepsilon \in (0, 1)$, которая соответствует выпуклым комбинациям R_X и P_X . Заметим, что K_X задает направление траектории (11), а параметр ε контролирует близость между $R_X^{(\varepsilon)}$ и P_X . Равенство (11) объясняет, почему K_X называется вектором “сферического возмущения”; вектор K_X пропорционален члену первого порядка по $\varepsilon \rightarrow 0$ возмущения между векторами $\sqrt{R_X^{(\varepsilon)}}$ и $\sqrt{P_X}$, являющимися вложениями вероятностных мер $R_X^{(\varepsilon)}$ и P_X в единичную сферу в пространстве $(\mathbb{R}^{|\mathcal{X}|})^*$.

Теперь предположим, что функция $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, задающая рассматриваемую f -дивергенцию, дважды дифференцируема в единице и $f''(1) > 0$. Тогда с помощью формулы Тэйлора можно показать, что эта f -дивергенция локально пропорциональна χ^2 -дивергенции (см. [45, § 4], или [41] для случая КЛ-дивергенции):

$$D_f(R_X^{(\varepsilon)} \| P_X) = \frac{f''(1)}{2} \varepsilon^2 \chi^2(R_X \| P_X) + o(\varepsilon^2) = \quad (13)$$

$$= \frac{f''(1)}{2} \varepsilon^2 \|K_X\|_2^2 + o(\varepsilon^2), \quad (14)$$

где используется стандартная o -символика Бахмана – Ландау. Локальная аппроксимация в (14) несколько более удобна, чем в (13). Действительно, можно построить траекторию (11) с помощью сферического вектора возмущения $K_X \in (\mathbb{R}^{|\mathcal{X}|})^*$, который удовлетворяет условию ортогональности $\sqrt{P_X} K_X^T = 0$, но не имеет вид (10). Для достаточно малого $\varepsilon \neq 0$ (зависящего от P_X и K_X), векторы $R_X^{(\varepsilon)}$, определенные в (11), на самом деле являются вероятностными мерами в \mathcal{P}_X .⁴ Таким образом, аппроксимация в (14) останется верной, поскольку она относится к режиму, когда $\varepsilon \rightarrow 0$.

Непосредственной проверкой можно также убедиться, что f -дивергенции, для которых $f''(1) > 0$, локально симметричны, т.е.

$$D_f(R_X^{(\varepsilon)} \| P_X) = D_f(P_X \| R_X^{(\varepsilon)}) + o(\varepsilon^2).$$

Поэтому они напоминают стандартную евклидову метрику в “окрестности” вероятностных мер вокруг заданной вероятностной меры в \mathcal{P}_X° . Отметим, что преимущество использования сферических возмущений

$$\left\{ K_X \in (\mathbb{R}^{|\mathcal{X}|})^* : \sqrt{P_X} K_X^T = 0 \right\}$$

вместо аддитивных возмущений (например, $R_X - P_X$) состоит в том, что они образуют пространство со стандартным евклидовым скалярным произведением. Это позволяет видоизменить (13) с использованием ℓ^2 -нормы K_X вместо взвешенной ℓ^2 -нормы аддитивного возмущения $K_X \operatorname{diag}(\sqrt{P_X})$. Это позволяет сделать обозначения более удобными и упростить вычисления – см. наше доказательство теоремы 2. Наконец, заметим, что идеи возмущения, подобные (11), использовались ранее в различных контекстах, некоторые примеры этого можно найти в [42, 43, 46, 47].

⁴ Хотя компоненты вектора $R_X^{(\varepsilon)}$ в сумме всегда равны 1, поскольку $\sqrt{P_X} K_X^T = 0$, для больших (по абсолютной величине) значений ε некоторые из его компонент могут быть отрицательными.

2.2. Коэффициенты сжатия совместных распределений. Неравенства об обработке данных (7) и (9) можно максимально усилить до так называемых *сильных неравенств об обработке данных* (СНОД), вводя в них некоторые константы, известные как *коэффициенты сжатия*. Как было отмечено выше, имеется два варианта коэффициентов сжатия: первый зависит от пары, состоящей из вектора вероятностей и стохастической матрицы, т.е. совместного распределения, а второй – только от стохастической матрицы, т.е. условного распределения. В этом пункте мы введем коэффициенты первого типа, а коэффициенты второго типа обсудим позже.

Определение 2 (коэффициент сжатия для совместного распределения [1, 6, 8, 11, 15]). Для любой вероятностной меры на входе $P_X \in \mathcal{P}_X$ и любой стохастической матрицы $P_{Y|X} = W \in \mathcal{P}_{Y|X}$ коэффициентом сжатия для фиксированной f -дивергенции называется

$$\eta_f(P_X, P_{Y|X}) \triangleq \sup_{\substack{R_X \in \mathcal{P}_X \\ 0 < D_f(R_X \| P_X) < +\infty}} \frac{D_f(R_X W \| P_X W)}{D_f(R_X \| P_X)},$$

где супремум берется по всем вероятностным мерам R_X , удовлетворяющим ограничению $0 < D_f(R_X \| P_X) < +\infty$. При этом, если X или Y постоянно почти наверное (п.н.), полагаем $\eta_f(P_X, P_{Y|X}) = 0$.

Используя определение 2, из неравенства об обработке данных для f -дивергенций (7) можно вывести следующее СНОД:

$$D_f(R_X W \| P_X W) \leq \eta_f(P_X, P_{Y|X}) D_f(R_X \| P_X), \quad (15)$$

справедливое для всех $R_X \in \mathcal{P}_X$ при фиксированных $P_X \in \mathcal{P}_X$ и $W \in \mathcal{P}_{Y|X}$. Следующее предложение показывает, что неравенство об обработке данных для взаимной f -информации можно улучшить таким же образом.

Предложение 1 (коэффициент сжатия для взаимной f -информации [8, теорема V.2]). Для любой вероятностной меры на входе $P_X \in \mathcal{P}_X$, любой стохастической матрицы $P_{Y|X} \in \mathcal{P}_{Y|X}$ и любой выпуклой дифференцируемой функции $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ с равномерно ограниченной производной в некоторой окрестности единицы, такой что $f(1) = 0$, имеет место равенство

$$\eta_f(P_X, P_{Y|X}) = \sup_{\substack{P_{U|X}: U \rightarrow X \rightarrow Y \\ 0 < I_f(U; X) < +\infty}} \frac{I_f(U; Y)}{I_f(U; X)},$$

где супремум берется по всем стохастическим матрицам $P_{U|X} \in \mathcal{P}_{U|X}$ и конечным алфавитам \mathcal{U} случайной величины U , таким что $U \rightarrow X \rightarrow Y$ образуют цепь Маркова. (Заметим, что в этой экстремальной задаче достаточно взять $|\mathcal{U}| = 2$.)

Предложение 1 доказано в [8, теорема V.2]. Частный случай этого результата для КЛ-дивергенции был доказан в [4] (для случая конечного алфавита) и в [6] (для произвольного алфавита). Интуитивно вариационная задача в предложении 1 определяет вероятностную модель, которая делает Y как можно более близкой к достаточной статистике для X относительно U (см. комментарий после формулы (9)). Кроме того, этот результат показывает, что при условиях регулярности коэффициент сжатия для любой f -дивергенции изящным образом объединяет неравенства об обработке данных для f -дивергенции и соответствующей взаимной f -информации, будучи наилучшим множителем, который можно добавить в каждое из них. Действительно, когда случайные величины $U \rightarrow X \rightarrow Y$ образуют цепь Маркова, можно

записать СНОД-версию неравенства (9):

$$I_f(U; Y) \leq \eta_f(P_X, P_{Y|X}) I_f(U; X), \quad (16)$$

справедливую для любого условного распределения $P_{U|X} \in \mathcal{P}_{\mathcal{U}|X}$ при фиксированных $P_X \in \mathcal{P}_X$ и $P_{Y|X} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}|X}$. Заметим, что даже если условия предложения 1 не выполнены, неравенство (16) по-прежнему справедливо (хотя $\eta_f(P_X, P_{Y|X})$ может уже не быть наилучшей возможной мультипликативной константой в (9)).

Два коэффициента сжатия будут особенно важны для нас. Первый – это коэффициент сжатия для КЛ-дивергенции:

$$\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X}) = \sup_{\substack{R_X \in \mathcal{P}_X \\ 0 < D(R_X \| P_X) < +\infty}} \frac{D(R_X W \| P_X W)}{D(R_X \| P_X)}. \quad (17)$$

Эта величина связана с фундаментальным понятием *гиперсжимаемости* в теории вероятностей и статистике [15]. Гиперсжимаемостью называется явление, когда некоторые операторы условного математического ожидания являются сжимаемыми, даже если функциональное пространство входов имеет (вероятностную) \mathcal{L}^q -норму, в то время как функциональное пространство выходов имеет (вероятностную) \mathcal{L}^p -норму, где $1 \leq q < p$ (см., например, [5]). Это понятие находит применения в теории информации, поскольку гиперсжимаемые величины часто обладают свойствами тензоризации, что позволяет получать однобуквенные характеристики для них. В [5, 15] показано, что величину $\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X})$ можно определить как наклон секущей нижней границы области гиперсжимаемости (соответствующей совместной вероятностной мере $P_{X,Y}$) на бесконечности.

Коэффициент сжатия для КЛ-дивергенции объясняет поразительную дихотомию между экстремальными задачами в определении 2 и предложении 1. Чтобы пояснить этот контраст, вначале рассмотрим частный случай предложения 1 для КЛ-дивергенции и стандартной взаимной информации [4, 6]:

$$\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X}) = \sup_{\substack{P_U, P_{X|U}: U \rightarrow X \rightarrow Y \\ I(U; X) > 0}} \frac{I(U; Y)}{I(U; X)}, \quad (18)$$

где оптимизация проводится (что эквивалентно) по всем $P_U \in \mathcal{P}_{\mathcal{U}}$, таким что $\mathcal{U} = \{0, 1\}$ (без ограничения общности, см. [6, Приложение В]), и всем $P_{X|U} \in \mathcal{P}_{X|U}$, таким что для маргинальных распределений $P_X = P_U P_{X|U}$. Теперь напомним пример из работы [4], где $\mathcal{U} = \{0, 1\}$, $X \sim \text{Bernoulli}(1/2)$ (т.е. $P_X = (1/2, 1/2)$), а $P_{Y|X}$ – матрица “асимметричного канала со стиранием”. В этом численном примере супремум в (18) достигается на последовательностях вероятностных мер $\{P_{X|U=0}^{(k)} \in \mathcal{P}_X : k \in \mathbb{N}\}$, $\{P_{X|U=1}^{(k)} \in \mathcal{P}_X : k \in \mathbb{N}\}$ и $\{P_U^{(k)} \in \mathcal{P}_{\mathcal{U}} : k \in \mathbb{N}\}$, где $\mathbb{N} \triangleq \{0, 1, 2, \dots\}$, удовлетворяющим условиям

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_U^{(k)}(1) = 0, \quad (19)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} D(P_{X|U=0}^{(k)} \| P_X) = 0 < \liminf_{k \rightarrow \infty} D(P_{X|U=1}^{(k)} \| P_X), \quad (20)$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{D(P_{Y|U=0}^{(k)} \| P_Y)}{D(P_{X|U=0}^{(k)} \| P_X)} < \eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{D(P_{Y|U=1}^{(k)} \| P_Y)}{D(P_{X|U=1}^{(k)} \| P_X)}, \quad (21)$$

где $P_Y = P_X P_{Y|X}$ и $P_{Y|U=u}^{(k)} = P_{X|U=u}^{(k)} P_{Y|X}$ для $u \in \mathcal{U}$. Этот пример показывает, что в общем случае, хотя максимум в (18) достигается [2] при $I(U; X) \rightarrow 0$, супремум

в (17) часто достигается на последовательности вероятностных мер

$$\{R_X^{(k)} \in \mathcal{P}_X \setminus \{P_X\} : k \in \mathbb{N}\},$$

которая не стремится к P_X (из-за невыпуклости этой экстремальной задачи). На первый взгляд, это противоречит интуиции, поскольку неравенство об обработке данных (7) обращается в равенство при $R_X = P_X$. Однако в теореме 2 (приведенной в п. 3.1) будет показано, что максимизация отношения КЛ-дивергенций с ограничением $D(R_X \| P_X) \rightarrow 0$ на самом деле позволяет достичь $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$, что зачастую строго меньше [4], чем $\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X})$. Поэтому имеется резкий контраст между поведением оптимизационных задач в (17) и (18).

Второй важный коэффициент сжатия – это коэффициент сжатия для χ^2 -дивергенции:

$$\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}) = \sup_{\substack{R_X \in \mathcal{P}_X \\ 0 < \chi^2(R_X \| P_X) < +\infty}} \frac{\chi^2(R_X W \| P_X W)}{\chi^2(R_X \| P_X)}, \quad (22)$$

тесно связанный с обобщением коэффициента корреляции Пирсона между X и Y , известным как *максимальная корреляция Хиршфельда – Гебелейна – Реньи*, или просто максимальная корреляция [9–12]. Дадим определение максимальной корреляции, которая является мерой статистической зависимости, удовлетворяющей семи естественным аксиомам (некоторые из них будут приведены ниже в предложении 3), которым должны удовлетворять такие меры [12].

Определение 3 (максимальная корреляция [9–12]). Для двух совместно распределенных случайных величин $X \in \mathcal{X}$ и $Y \in \mathcal{Y}$ максимальной корреляцией между X и Y называется

$$\rho(X; Y) \triangleq \sup_{\substack{f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{E}[f(X)] = \mathbf{E}[g(Y)] = 0 \\ \mathbf{E}[f(X)^2] = \mathbf{E}[g(Y)^2] = 1}} \mathbf{E}[f(X)g(Y)],$$

где супремум берется по всем (измеримым по Борелю) функциям f и g с нулевым средним и единичной дисперсией. При этом, если X или Y постоянна п.н., то не существует функций f и g , удовлетворяющих этим условиям, и по определению полагаем $\rho(X; Y) = 0$.

Можно показать, что коэффициент сжатия для χ^2 -дивергенций в точности равен квадрату максимальной корреляции [11]:

$$\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}) = \rho(X; Y)^2. \quad (23)$$

Кроме того, следующее предложение показывает, что максимальную корреляцию можно описать как некоторое сингулярное число; впервые это было показано в [9, 12] в несколько других видах (см. также [1, 4, 13, 40] и [48, теорема 3.2.4]).

Предложение 2 (максимальная корреляция как сингулярное число [9, 12]). Для заданных случайных величин $X \in \mathcal{X}$ и $Y \in \mathcal{Y}$ с совместной вероятностной мерой $P_{X,Y}$, состоящей из (P_X, W) , можно определить матрицу дивергенций переходов (МДП)

$$B \triangleq \text{diag}(\sqrt{P_X}) W \text{diag}(\sqrt{P_Y})^\dagger, \quad (24)$$

где через \dagger обозначено псевдообращение Мура – Пенроуза. Тогда максимальная корреляция $\rho(X; Y)$ равна второму по величине сингулярному числу матрицы B .

Для полноты изложения доказательство этого предложения приведено в Приложении А. Из предложения 2 и равенства (23) видно, что коэффициент сжатия для χ^2 -дивергенции на самом деле равен квадрату второго собственного числа МДП B . Используя принцип минимакса Куранта – Фишера – Вейля (см. [49, теоремы 4.2.6 и 7.3.8]), это можно представить в виде

$$\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}) = \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^{|\mathcal{X}|} \setminus \{\mathbf{0}\} \\ \sqrt{P_X}x=0}} \frac{\|B^T x\|_2^2}{\|x\|_2^2}, \quad (25)$$

где через $\mathbf{0}$ обозначен нулевой вектор соответствующей размерности, а $\sqrt{P_X}^T$ – правый сингулярный вектор матрицы B^T , соответствующий ее максимальному сингулярному числу, равному единице (см. Приложение А).

Разложения по сингулярным числам для МДП и их связь с χ^2 -дивергенцией хорошо изучены в статистике. Например, в области *анализа соответствий*, основанной Хиршфельдом в 1935 г. [9], рассматриваются зависимости между категориальными случайными величинами. В частности, в *простом* анализе соответствий двумерные вероятностные меры $P_{X,Y}$ рассматриваются как факторная таблица, и зависимость между X и Y раскладывается по так называемым *главным компонентам инерции* с помощью разложения по сингулярным числам матрицы B , см. работы [50; 51, § 2] и библиографию в них. В [9] с помощью этого наблюдения было получено модальное разложение взаимной χ^2 -информации (или среднеквадратичной сопряженности Пирсона $\chi^2(P_{X,Y} \| P_X P_Y)$). Хотя в прошлом анализ соответствий использовался просто как техника визуализации данных, теперь он является частью более широкого инструментария геометрического анализа данных. Недавно в [40] в контексте теории информации и теории оценивания были изучены главные компоненты инерции, являющиеся собственными значениями матрицы Грама $B^T B$. Они обобщают первые главные компоненты инерции (т.е. квадраты максимальной корреляции) до величины, известной как k -корреляция, $k \in \{1, \dots, \min\{|\mathcal{X}|, |\mathcal{Y}|\} - 1\}$, которая равна $(k+1)$ -норме Ки Фаня матрицы $B^T B$ минус 1. Там же доказаны некоторые свойства k -корреляции, такие как выпуклость и неравенство об обработке данных [40, § II], и представлены некоторые приложения. В альтернативном направлении в [52] исследованы нейронные сети, позволяющие приближенно выполнить анализ соответствий в больших масштабах.

В то время как в анализе соответствий рассматриваются категориальные случайные величины, зависимость между общими (некатегориальными) случайными величинами изучается в близкой области исследований – анализе и идентификации так называемых *распределений Ланкастера* [53, 54]. Для заданного совместного распределения $P_{X,Y}$ на произведении измеримых пространств $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ пусть P_X и P_Y – маргинальные распределения на \mathcal{X} и \mathcal{Y} соответственно, $P_X P_Y$ – произведение этих распределений, а $\mathcal{L}^2(\mathcal{X}, P_X)$ (соответственно, $\mathcal{L}^2(\mathcal{Y}, P_Y)$) – гильбертово пространство интегрируемых с квадратом вещественнозначных функций на \mathcal{X} (соответственно, на \mathcal{Y}) со скалярным произведением, заданным распределением P_X (соответственно, P_Y). Предположим, что $\chi^2(P_{X,Y} \| P_X P_Y) < \infty$, откуда следует, что $P_{X,Y}$ абсолютно непрерывно относительно $P_X P_Y$, и пусть $dP_{X,Y}/dP_X P_Y$ – производная Радона – Никодима от $P_{X,Y}$ относительно $P_X P_Y$. Для такой постановки в [53] доказано, что существуют ортонормированные базисы $\{f_j \in \mathcal{L}^2(\mathcal{X}, P_X) : 0 \leq j < |\mathcal{X}|\}$ и $\{g_k \in \mathcal{L}^2(\mathcal{Y}, P_Y) : 0 \leq k < |\mathcal{Y}|\}$ и некоторая последовательность $\{\sigma_k \geq 0 : 0 \leq k < \min\{|\mathcal{X}|, |\mathcal{Y}|\}\}$ неотрицательных корреляций, такие что $P_{X,Y}$ является распределением Ланкастера, для которого справедливо разложение

$$\frac{dP_{X,Y}}{dP_X P_Y}(x, y) = \sum_{k=0}^{\min\{|\mathcal{X}|, |\mathcal{Y}|\}-1} \sigma_k f_k(x) g_k(y). \quad (26)$$

Если \mathcal{X} и \mathcal{Y} конечны, разложение (26) в точности повторяет структуру разложения по сингулярным числам матрицы B , соответствующей $P_{X,Y}$. Дальнейшие ссылки по этой довольно общей области можно найти в [55; 56, п. II-D].

Еще одно направление исследований состоит в изучении вычислительных аспектов разложений МДП. Известным методом вычисления разложений по сингулярным числам МДП является алгоритм *чередующихся условных математических ожиданий* (АСЕ) (см. оригинальный алгоритм в контексте параметрической регрессии в [57] и его вариант в контексте выделения признаков и понижения размерности в [58]). По сути, алгоритм АСЕ использует степенной метод, или, в более общем виде, метод ортогональных итераций (см. [59, п. 7.3.2; 60, п. 4.4.3; 61, п. 4.4]), для оценки сингулярных векторов МДП. Оказывается, что такие сингулярные векторы, соответствующие наибольшим сингулярным числам, можно выделять как “более информативные” функции вклада. Этот подход был использован в [62] для получения результатов о скрытых марковских моделях в контексте обработки изображений, а в [63] он был описан как средство *универсального выделения признаков*. В работах [61, п. 4.5; 63] можно найти дальнейшие подробности о связях между разложениями по сингулярным числам МДП и другими известными понятиями в статистике и машинном обучении, такими как *метод главных компонент* [64, 65], *анализ канонической корреляции* [66] и *отображения диффузии* [67].

После того как мы ввели необходимые нам коэффициенты сжатия, приведем теперь несколько свойств коэффициентов сжатия для f -дивергенций; многие из них хорошо известны либо легко доказываются, но некоторые, насколько нам известно, ранее в литературе не встречались.

Предложение 3 (свойства коэффициентов сжатия совместных распределений). *Коэффициент сжатия для f -дивергенции обладает следующими свойствами:*

1. (Нормировка): *Для любой совместной вероятностной меры $P_{X,Y}$, состоящей из $P_X \in \mathcal{P}_X$ и $P_{Y|X} \in \mathcal{P}_{Y|X}$, выполнено $0 \leq \eta_f(P_X, P_{Y|X}) \leq 1$;*
2. (Независимость): *Рассмотрим случайные величины X и Y с совместной вероятностной мерой $P_{X,Y}$, состоящей из $P_X \in \mathcal{P}_X$ и $P_{Y|X} = W \in \mathcal{P}_{Y|X}$. Если X и Y независимы, т.е. W имеет единичный ранг, то $\eta_f(P_X, P_{Y|X}) = 0$. Наоборот, если f строго выпукла в единице и $\eta_f(P_X, P_{Y|X}) = 0$, то X и Y независимы;*
3. (Разложимость): *Рассмотрим произвольную совместную вероятностную меру $P_{X,Y}$, маргинальные вероятностные меры которой таковы, что $P_X \in \mathcal{P}_X^\circ$ и $P_Y \in \mathcal{P}_Y^\circ$, и пусть f дважды дифференцируема в единице, причем $f''(1) > 0$. Если мера $P_{X,Y}$ разложима, то $\eta_f(P_X, P_{Y|X}) = 1$. Наоборот, если f также строго выпукла, $f(0) < \infty$ и $\eta_f(P_X, P_{Y|X}) = 1$, то $P_{X,Y}$ разложима. (Это свойство описано в теореме 1 в п. 3.1, где также определено понятие “разложимости”).*
4. (Выпуклость [8, предложение III.3]): *Для любой фиксированной $P_X \in \mathcal{P}_X^\circ$ функция $\mathcal{P}_{Y|X} \ni P_{Y|X} \mapsto \eta_f(P_X, P_{Y|X})$ выпукла по стохастической матрице $P_{Y|X}$;*
5. (Тензоризация [8, теорема III.9]): *Если f порождает субаддитивную и однородную f -энтропию (где f -энтропия любой неотрицательной случайной величины Z , такой что $\mathbf{E}[f(Z)] < \infty$, определяется как $\text{Ent}_f(Z) \triangleq \mathbf{E}[f(Z)] - f(\mathbf{E}[Z])$, см. [8, § II]), и при этом*

$$\{P_{X_i, Y_i} : P_{X_i} \in \mathcal{P}_{X_i}^\circ \text{ и } P_{Y_i} \in \mathcal{P}_{Y_i}^\circ \text{ при } i \in \{1, \dots, n\}\}$$

– независимые совместные вероятностные меры, то

$$\eta_f(P_{X_1^n}, P_{Y_1^n|X_1^n}) = \max_{1 \leq i \leq n} \eta_f(P_{X_i}, P_{Y_i|X_i}),$$

где $X_1^n = (X_1, \dots, X_n)$ и $Y_1^n = (Y_1, \dots, Y_n)$;

6. (Субмультипликативность): Если $U \rightarrow X \rightarrow Y$ – дискретные случайные величины с конечным числом значений, образующие цепь Маркова, то

$$\eta_f(P_U, P_{Y|U}) \leq \eta_f(P_U, P_{X|U})\eta_f(P_X, P_{Y|X}).$$

При этом для любой фиксированной совместной вероятностной меры $P_{X,Y}$, такой что $X \rightarrow Y$ – не постоянная п.н., справедливо

$$\eta_f(P_X, P_{Y|X}) = \sup_{\substack{P_U: U \rightarrow X \rightarrow Y \\ \eta_f(P_U, P_{X|U}) > 0}} \frac{\eta_f(P_U, P_{Y|U})}{\eta_f(P_U, P_{X|U})},$$

где супремум берется по всевозможным конечным множествам значений U случайной величины U и по всем условным распределениям $P_{U|X} \in \mathcal{P}_{U|X}$, таким что $U \rightarrow X \rightarrow Y$ образуют цепь Маркова;

7. (Нижняя граница максимальной корреляции [1, теорема 5; 8, теорема III.3; 7, теорема 2]): Рассмотрим произвольную совместную вероятностную меру $P_{X,Y}$, маргинальные вероятностные меры которой таковы, что $P_X \in \mathcal{P}_X^\circ$ и $P_Y \in \mathcal{P}_Y^\circ$. Если f дважды дифференцируема в единице и $f''(1) > 0$, то

$$\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}) = \rho(X; Y)^2 \leq \eta_f(P_X, P_{Y|X}).$$

(Усиление этого свойства приведено в теореме 2 в п. 3.1.)

В Приложении В приведены некоторые доказательства, а также соответствующие ссылки, уточняющие эти результаты. Теперь сделаем несколько замечаний. Во-первых, насколько нам известно, п. 3 предложения ранее не появлялся в литературе в такой общности; были известны лишь случаи η_{χ^2} и η_{KL} (см. [13, 15]).

Во-вторых, так как пп. 1–3 предложения 3 показывают, что коэффициенты сжатия являются нормализованными мерами статистической зависимости между случайными величинами, можно рассматривать субмультипликативность из п. 6 как мета-СНОД для коэффициентов сжатия по аналогии с (16). На самом деле, п. 6 также показывает, что коэффициентом сжатия в СНОД для η_f является сама величина η_f . Этот аспект пункта 6, хотя и довольно простой, также, насколько нам известно, никогда в явном виде не встречался в литературе в такой степени общности; лишь случай η_{χ^2} был представлен в [68, лемма 6].

В-третьих, вариант неравенства об обработке данных для η_{KL} , приведенный в [15] (см. также [5, п. II-A]) справедлив и для общих η_f . Действительно, если $U \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow V$ – дискретные случайные величины с конечными множествами значений, образующие цепь Маркова, то немедленным следствием пп. 1 и 6 предложения 3 является следующее свойство монотонности:

$$\eta_f(P_U, P_{V|U}) \leq \eta_f(P_X, P_{Y|X}). \quad (27)$$

В-четвертых, нижняя грань максимальной корреляции в п. 7 предложения 3 достигается. Например, пусть $f(t) = t \log(t)$, и рассмотрим две равномерные бернуллиевские случайные величины (X, Y) с $P_X = (1/2, 1/2)$ и с условным распределением $P_{Y|X}$, заданным матрицей “двоичного симметричного канала”

$$P_{Y|X} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 - \alpha \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (28)$$

где $\alpha \in [0, 1]$ – вероятность ошибки в канале. В [15] доказано, что в этом случае нижняя грань максимальной корреляции выполнена с равенством:

$$\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X}) = \eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}) = (1 - 2\alpha)^2, \quad (29)$$

где $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}) = (1 - 2\alpha)^2$ можно легко вычислить с помощью характеристики максимальной корреляции через сингулярные числа из предложения 2. Еще один пример: пусть $P_{Y|X} = E_\beta \in \mathcal{P}_{\mathcal{X} \cup \{e\} | \mathcal{X}}$ – матрица “ $|\mathcal{X}|$ -ичного канала со стиранием” с вероятностью стирания $\beta \in [0, 1]$ и символом стирания e :

$$E_\beta = \begin{matrix} & \mathcal{X} & e \\ \mathcal{X} & (1 - \beta)I & \beta \mathbf{1} \end{matrix}, \quad (30)$$

где $I \in \mathbb{R}^{|\mathcal{X}| \times |\mathcal{X}|}$ – единичная матрица, а $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{X}|}$ – вектор-столбец из всех единиц. Непосредственной проверкой легко убедиться, что

$$D_f(R_X E_\beta \| P_X E_\beta) = (1 - \beta) \times D_f(R_X \| P_X)$$

для любых $R_X, P_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$. Поэтому для любой вероятностной меры на входе $P_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ и любой f -дивергенции имеем $\eta_f(P_X, P_{Y|X}) = 1 - \beta$.

Наконец, отметим, что хотя п. 7 предложения 3 был независимо доказан авторами ранее в [1, теорема 5] с помощью идеи аппроксимации f -дивергенции, эта же идея использовалась в [8, теорема III.3; 7, теорема 2] для доказательства этого результата. Кроме того, эта идея вытекает из доказательства теоремы 5.4 работы [17] (приведенной далее в п. 6 предложения 5).

2.3. Коэффициенты эргодичности. Прежде чем перейти к обсуждению коэффициентов сжатия, зависящих только от стохастических матриц, вкратце опишем более общее понятие коэффициентов эргодичности. Впервые они возникли в контексте изучения эргодичности и скоростей сходимости неоднородных (по времени) цепей Маркова с конечными пространствами состояний (см. [69, § 1]). Они определяются следующим образом.

Определение 4 (коэффициент эргодичности [16, определение 4.6]). *Коэффициентом эргодичности* называется непрерывная скалярная функция $\eta: \mathcal{P}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}} \rightarrow [0, 1]$, где $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}}$ имеет фиксированную размерность (и снабжено стандартной топологией, индуцированной нормой Фробениуса). Этот коэффициент называется *собственным*, если для любого $W \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}}$ равенство $\eta(W) = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $W = \mathbf{1}P_Y$ для некоторой вероятностной меры $P_Y \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}}$ (т.е. W имеет единичный ранг).

Полезным свойством собственных коэффициентов эргодичности является взаимосвязь со слабой эргодичностью. Рассмотрим последовательность стохастических по строкам матриц $\{W_k \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}|\mathcal{X}} : k \in \mathbb{N}\}$, задающих неоднородную цепь Маркова на пространстве состояний \mathcal{X} . Введем обозначение для последовательного произведения этих матриц в количестве $r \geq 1$, начиная с номера $p \in \mathbb{N}$:

$$T_{(p,r)} \triangleq \prod_{i=0}^{r-1} W_{p+i}. \quad (31)$$

Цепь Маркова $\{W_k \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}|\mathcal{X}} : k \in \mathbb{N}\}$ называется *слабо эргодической* (в смысле Колмогорова), если для всех $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{X}$ и всех $p \in \mathbb{N}$ [16, определение 4.4]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} ([T_{(p,r)}]_{x_1, x_3} - [T_{(p,r)}]_{x_2, x_3}) = 0. \quad (32)$$

Это определение формализует интуитивное представление, что для эргодической цепи Маркова строки таких произведений должны становиться равными при $r \rightarrow \infty$. (Отметим, что если предельная строка стохастической матрицы $\lim_{r \rightarrow \infty} T_{(p,r)}$ существует для всех $p \in \mathbb{N}$, то цепь Маркова называется *сильно эргодической* [16, определение 4.5].) В следующем предложении утверждается, что слабую эргодичность

можно эквивалентным образом определить через собственные коэффициенты эргодичности.

Предложение 4 (слабая эргодичность [16, лемма 4.1]). Пусть $\eta: \mathcal{P}_{\mathcal{X}|\mathcal{X}} \rightarrow [0, 1]$ – собственный коэффициент эргодичности. Тогда неоднородная цепь Маркова $\{W_k \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}|\mathcal{X}} : k \in \mathbb{N}\}$ слабо эргодична тогда и только тогда, когда

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \eta(T_{(p,r)}) = 0.$$

Чтобы пояснить интуитивный смысл этого результата, заметим, что для слабо эргодической цепи Маркова $T_{(p,r)}$ становится (приблизительно) матрицей единичного ранга при $r \rightarrow \infty$. Таким образом, следует ожидать, что $\lim_{r \rightarrow \infty} \eta(T_{(p,r)}) = 0$, поскольку собственный коэффициент эргодичности непрерывен и равен нулю, когда его аргумент имеет единичный ранг. Формальное доказательство предложения 4 можно найти в [16, лемма 4.1]. О дальнейшем развитии подобных идей см. работы [69; 16, гл. 3 и 4; 70; 71, гл. 3] и библиографию в них.

Одним из первых и наиболее примечательных примеров собственных коэффициентов эргодичности являются коэффициенты сжатия Добрушина⁵. Для заданной стохастической по строкам матрицы $P_{Y|X} = W \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}}$ ее коэффициент сжатия Добрушина определяется как константа Липшица отображения $\mathcal{P}_{\mathcal{X}} \ni P_X \mapsto P_X W$ относительно ℓ^1 -нормы (или расстояния по вариации) [14]:

$$\eta_{\text{TV}}(W) \triangleq \sup_{\substack{R_X, P_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}} \\ R_X \neq P_X}} \frac{\|R_X W - P_X W\|_{\text{TV}}}{\|R_X - P_X\|_{\text{TV}}} = \quad (33)$$

$$= \max_{\substack{v \in (\mathbb{R}^{|\mathcal{X}|})^* \\ \|v\|_1 = 1, v\mathbf{1} = 0}} \|vW\|_1 = \quad (34)$$

$$= \max_{R_X, P_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}} \|R_X W - P_X W\|_{\text{TV}} = \quad (35)$$

$$= \max_{x, x' \in \mathcal{X}} \|P_{Y|X=x} - P_{Y|X=x'}\|_{\text{TV}} = \quad (36)$$

$$= 1 - \min_{x, x' \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} \min\{P_{Y|X}(y|x), P_{Y|X}(y|x')\}, \quad (37)$$

где различные эквивалентные характеристики (34), (35), (36) (двухточечная характеристика Добрушина [14]) и (37) (характеристика аффинности [73; 29, формула (4.13)]) определения (33) можно либо найти в работе [16, гл. 4.3], либо легко ввести из ее результатов. Формула (37) показывает, что $\eta_{\text{TV}}(W) < 1$ тогда и только тогда, когда W является скремблирующей матрицей (т.е. никакие две строки W не ортогональны) [16, с. 82]. (Из этого также следует, что $\eta_{\text{TV}}(W) < 1$ тогда и только тогда, когда пропускная способность с нулевой ошибкой для $P_{Y|X}$ равна нулю [74].)

Вдобавок к свойствам собственных коэффициентов эргодичности величина η_{TV} обладает также следующими свойствами:

1. *Непрерывность по Липшицу* [70, теорема 3.4, замечание 3.5]: Для любых $V, W \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}}$ справедливо неравенство $|\eta_{\text{TV}}(V) - \eta_{\text{TV}}(W)| \leq \|V - W\|_{\infty}$, где через $\|\cdot\|_{\infty}$ обозначена индуцированная ℓ^{∞} -норма, или максимальная сумма модулей по строке применительно к матрице;

⁵ Следуя библиографической дискуссии в [16, с. 144–147], авторами коэффициента сжатия Добрушина (или, эквивалентно, коэффициента эргодичности Добрушина) можно также считать (по крайней мере, частично) Дёблина и Маркова. В литературе этот коэффициент встречался под названием *коэффициент сжатия Дёблина* и возникал в лемме Маркова о сжатии (см., например, [72, с. 619]).

2. *Субмультипликативность* [16, лемма 4.3]: Для любых $V \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}|\mathcal{U}}$ и $W \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}}$ справедливо неравенство $\eta_{\text{TV}}(VW) \leq \eta_{\text{TV}}(V)\eta_{\text{TV}}(W)$;
3. *Граница субдоминантного собственного числа* [69, с. 584, формула (9)]: Для любой $W \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}|\mathcal{X}}$ неравенство $\eta_{\text{TV}}(W) \geq |\lambda|$ справедливо для любого субдоминантного собственного числа $\lambda \neq 1$ матрицы W .

Благодаря двум последним свойствам η_{TV} становится удобным инструментом для исследования неоднородных цепей Маркова. Как указано в [70, § 1], для однородной цепи Маркова $W \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}|\mathcal{X}}$ со стационарной вероятностной мерой $\pi \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ хорошо известно, что *модуль второго по абсолютной величине собственного значения* матрицы W , обозначаемый через $\mu(W)$, отвечает за скорость сходимости к стационарному состоянию. Действительно, если $\mu(W) < 1$, то $\mu(W^n) = \mu(W)^n$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} W^n = \mathbf{1}\pi$ со скоростью, определяемой величиной $\mu(W)$. Однако для неоднородной цепи Маркова в общем случае $\{W_k \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}|\mathcal{X}} : k \in \mathbb{N}\}$, $\mu(T_{(0,n)}) \neq \prod_{i=0}^{n-1} \mu(W_i)$, поскольку модуль второго собственного числа не мультипликативен. Последние два свойства η_{TV} показывают, что эта величина является адекватной заменой модуля второго собственного числа при изучении неоднородных цепей Маркова, поскольку

$$\mu(T_{(0,n)}) \leq \eta_{\text{TV}}(T_{(0,n)}) \leq \prod_{i=0}^{n-1} \eta_{\text{TV}}(W_i).$$

2.4. Коэффициенты сжатия стохастических матриц. Коэффициенты сжатия стохастических матриц для f -дивергенций образуют широкий класс коэффициентов эргодичности. Они определяются аналогично формуле (33), но с использованием других f -дивергенций вместо расстояния по вариации.

Определение 5 (коэффициент сжатия стохастической матрицы [14–17]). Для любой стохастической матрицы $P_{Y|X} = W \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}}$ ее *коэффициент сжатия* для заданной f -дивергенции равен

$$\eta_f(P_{Y|X}) \triangleq \sup_{\substack{R_X, P_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}} \\ 0 < D_f(R_X \| P_X) < +\infty}} \frac{D_f(R_X W \| P_X W)}{D_f(R_X \| P_X)} = \sup_{P_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}} \eta_f(P_X, P_{Y|X}),$$

где супремум берется по всем вероятностным мерам R_X и P_X , таким что $0 < D_f(R_X \| P_X) < +\infty$. Если при этом Y постоянна п.н., то по определению полагаем $\eta_f(P_{Y|X}) = 0$.

Из этого определения немедленно вытекают СНОД для коэффициентов сжатия стохастических матриц, аналогичные неравенствам (15) и (16). Кроме того, для коэффициентов сжатия стохастических матриц также справедлив вариант предложения 1. Действительно, из определения 5 и предложения 1, получаем, что для любой стохастической матрицы $P_{Y|X} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}}$ и любой выпуклой дифференцируемой функции $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ с равномерно ограниченной производной в некоторой окрестности единицы, такой что $f(1) = 0$, справедливо

$$\eta_f(P_{Y|X}) = \sup_{\substack{P_{U,X}: U \rightarrow X \rightarrow Y \\ 0 < I_f(U; X) < +\infty}} \frac{I_f(U; Y)}{I_f(U; X)}, \quad (38)$$

где супремум берется по всем совместным вероятностным мерам $P_{U,X}$ (состоящим из $P_U \in \mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ и $P_{X|U} \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}|\mathcal{U}}$) и конечным алфавитам \mathcal{U} случайной величины U , такой что $U \rightarrow X \rightarrow Y$ образуют цепь Маркова. Частный случай этого результата для КЛ-дивергенции можно найти в [75, с. 345, задача 15.12] (случай конечного алфавита) и [7] (общий случай).

Имеется два важных примера коэффициентов сжатия стохастических матриц: коэффициент сжатия Добрушина для расстояния по вариации (определенный в (33)) и коэффициент сжатия для КЛ-дивергенции. Как и выше, для заданной $P_{Y|X} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}|X}$ обозначаем через $\eta_{\text{TV}}(P_{Y|X})$, $\eta_{\text{KL}}(P_{Y|X})$, и $\eta_{\chi^2}(P_{Y|X})$ коэффициент сжатия $P_{Y|X}$ для расстояния по вариации, КЛ-дивергенции и χ^2 -дивергенции соответственно. В [15] доказано, что для любой стохастической матрицы $P_{Y|X} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}|X}$ верно равенство

$$\eta_{\text{KL}}(P_{Y|X}) = \eta_{\chi^2}(P_{Y|X}). \quad (39)$$

Таким образом, при изучении коэффициентов сжатия стохастических матриц не требуется рассматривать η_{KL} и η_{χ^2} по отдельности. Заметим, что альтернативное доказательство равенства (39) (справедливое для общих измеримых пространств) дано в [7, теорема 3]. Кроме того, менее известное наблюдение состоит в том, что правильное обобщение на произвольную размерность техники доказательства из [76, лемма 1, теорема 1] (где аналитически вычисляется η_{KL} для любой стохастической матрицы размера 2×2) также позволяет доказать равенство (39). Следует отметить, что основным результатом работы [76] является индуктивный подход к оценке сверху для η_{KL} в байесовских сетях (или направленных ациклических графах). Суть этого подхода прекрасно изложена в [7], где также приведены доказательства его обобщения на расстояние по вариации (с помощью представления Гольдштейна расстояния по вариации между двумя совместными распределениями через одновременное максимальное склеивание [77]) и описана его связь с задачей перколяции узлов.

Теперь перечислим некоторые известные свойства коэффициентов сжатия стохастических матриц.

Предложение 5 (свойства коэффициентов сжатия стохастических матриц). *Коэффициент сжатия для f -дивергенции обладает следующими свойствами:*

1. (Нормировка): *Для любой стохастической матрицы $P_{Y|X} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}|X}$ справедливо неравенство $0 \leq \eta_f(P_{Y|X}) \leq 1$;*
2. (Независимость [17, §4]): *Рассмотрим стохастическую матрицу $P_{Y|X} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}|X}$. Если $P_{Y|X}$ имеет единичный ранг, т.е. X и Y независимы, то $\eta_f(P_{Y|X}) = 0$. Наоборот, если f строго выпукла в единице и $\eta_f(P_{Y|X}) = 0$, то $P_{Y|X}$ имеет единичный ранг;*
3. (Скремблирование [17, теорема 4.2]): *Для заданной стохастической матрицы $P_{Y|X} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}|X}$ матрица $P_{Y|X}$ является скремблирующей тогда и только тогда, когда $\eta_f(P_{Y|X}) < 1$;*
4. (Выпуклость [17, §4; 8, предложение III.3]): *Функция $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}|X} \ni P_{Y|X} \mapsto \eta_f(P_{Y|X})$ выпукла;*
5. (Субмультипликативность [17, §4]): *Если $U \rightarrow X \rightarrow Y$ – дискретные случайные величины с конечными множествами значений, образующие цепь Маркова, т.е. стохастические матрицы условных распределений таковы, что $P_{Y|U} = P_{X|U}P_{Y|X}$, то*

$$\eta_f(P_{Y|U}) \leq \eta_f(P_{X|U})\eta_f(P_{Y|X});$$

6. (Нижняя граница χ^2 -дивергенции [17, теорема 5.4; 19, предложение II.6.15]): *Рассмотрим стохастическую матрицу $P_{Y|X} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}|X}$. Если f дважды дифференцируема в единице и $f''(1) > 0$, то*

$$\eta_{\chi^2}(P_{Y|X}) \leq \eta_f(P_{Y|X});$$

7. (Верхняя граница расстояния по вариации [17, теорема 4.1; 19, предложение П.4.10]): Для любой стохастической матрицы $P_{Y|X} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}|X}$ справедливо неравенство

$$\eta_f(P_{Y|X}) \leq \eta_{\text{TV}}(P_{Y|X}).$$

Доказательства этих результатов мы опускаем, поскольку они либо аналогичны соответствующим доказательствам в предложении 3, либо даны в указанных ссылках. Пункты 1, 2 и 4 предложения 5 означают, что коэффициенты сжатия стохастических матриц для f -дивергенций часто являются собственными коэффициентами эргодичности. (Действительно, из выпуклости отображения $P_{Y|X} \mapsto \eta_f(P_{Y|X})$ в п. 4 предложения 5 следует, что это отображение непрерывно на внутренней области $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}|X}$.) Заметим, что п. 3 показывает, что $\eta_f(P_{Y|X}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\eta_{\text{TV}}(P_{Y|X}) = 1$ [17, теорема 4.2], и непосредственной проверкой легко убедиться, что $\eta_f(P_{Y|X}) = 1$ тогда и только тогда, когда пропускная способность при нулевой ошибке для $P_{Y|X}$ строго положительна [74]. Отметим также, что результат об экстремальном значении, аналогичный п. 6 предложения 3, хотя и менее содержательный, можно вывести из п. 5 предложения 5.

В то время как соотношение (39) показывает, что в п. 6 предложения 5 легко может достигаться равенство, неравенство в п. 7 часто бывает строгим. Например, когда $P_{Y|X} = W$ – стохастическая матрица размера 2×2 с параметрами $a, b \in [0, 1]$

$$W = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}, \quad (40)$$

непосредственной проверкой легко убедиться, что $\eta_{\text{KL}}(P_{Y|X}) \leq \eta_{\text{TV}}(P_{Y|X})$, где неравенство обычно бывает строгим, поскольку

$$\eta_{\text{KL}}(P_{Y|X}) = 1 - (\sqrt{a(1-b)} + \sqrt{b(1-a)})^2, \quad (41)$$

$$\eta_{\text{TV}}(P_{Y|X}) = |1-a-b|, \quad (42)$$

где равенство (41) доказано в [76, теорема 1], а (42) легко получить с помощью (36). Более того, в частном случае, где $P_{Y|X}$ имеет вид (28), получаем [15]

$$\eta_{\text{KL}}(P_{Y|X}) = (1-2\alpha)^2 \leq |1-2\alpha| = \eta_{\text{TV}}(P_{Y|X}). \quad (43)$$

С другой стороны, как показано в конце п. 2.2, $\eta_f(P_{Y|X}) = 1 - \beta$ для любой f -дивергенции, когда $P_{Y|X} = E_\beta \in \mathcal{P}_{\mathcal{X} \cup \{e\} | \mathcal{X}}$.

Ввиду п. 6 и равенства (39) естественно задаться вопросом, существуют ли другие f -дивергенции, коэффициенты сжатия которых (для стохастических матриц) также равны η_{χ^2} . Следующий результат из [18, теорема 1], обобщающий соотношение (39), дает ответ на этой вопрос.

Предложение 6 (коэффициенты сжатия для операторно выпуклых f -дивергенций [18, теорема 1; 19]). *Для любой нелинейной операторно выпуклой функции $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, такой что $f(1) = 0$, и любой стохастической матрицы $P_{Y|X} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}|X}$ справедливо равенство*

$$\eta_f(P_{Y|X}) = \eta_{\chi^2}(P_{Y|X}).$$

Доказательство теоремы 1 из [18] основано на элегантном интегральном представлении операторно выпуклых функций (см. п. 6.1). Такие представления являются мощным инструментом для доказательства неравенств между коэффициентами сжатия, и мы воспользуемся ими для обобщения предложения 6 в п. 3.4. На

самом деле, п. 7 предложения 5 также можно доказать с помощью интегрального представления (см. [8, теорема III.1]).

В заключение этого пункта укажем на дополнительный обзор по коэффициентам сжатия [7, §2], где, в частности, имеются ссылки на различные приложения этих идей в существующей литературе.

§ 3. Основные результаты и их обсуждение

В настоящей статье мы в основном будем сравнивать между собой различные коэффициенты сжатия. В частности, мы будем интересоваться следующими основными вопросами:

1. Когда коэффициенты сжатия совместных распределений достигают своей верхней границы, равной единице? В теореме 1 (п. 3.1) мы покажем, что это происходит, когда совместные распределения разложимы.
2. Можно ли достичь нижней границы максимальной корреляции из п. 7 предложения 3 путем наложения дополнительных ограничений в экстремальной задаче, определяющей коэффициенты сжатия совместных распределений? Да, можно потребовать, чтобы f -дивергенция на входе была малой, как показано в теореме 2 (п. 3.1).
3. Обычно мы оцениваем $\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X})$ снизу через $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$ (предложение 3, п. 7), а сверху – через $\eta_{\text{TV}}(P_{Y|X})$ (предложение 5, п. 7). Существует ли простая верхняя граница на $\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X})$ через $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$? Да, две такие границы приведены в следствии 1 и теореме 4 в п. 3.2.
4. Можно ли обобщить эту верхнюю границу для КЛ-дивергенции на другие f -дивергенции? Да, более общая граница представлена в теореме 3 (п. 3.2).
5. Когда X и Y совместно гауссовские, с помощью характеристики взаимной информации, данной в (18), можно установить [2, теорема 7], что

$$\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X}) = \eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}).$$

Существует ли простое доказательство этого результата, опирающееся непосредственно на определение η_{KL} ? Выполняется ли это равенство, если наложить дополнительное ограничение по мощности в экстремальной задаче для η_{KL} ? Да, в п. 3.3 мы рассмотрим гауссовский случай, и в теореме 5 докажем это равенство для η_{KL} с ограничением по мощности. Наше доказательство также устанавливает это известное равенство с помощью определения η_{KL} через КЛ-дивергенцию.

6. Коэффициенты сжатия стохастических матриц тесно связаны с предпорядком меньшего искажения на стохастических матрицах [7, §6]. Можно ли обобщить результат предложения 6 и получить новые сведения о предпорядке меньшего искажения? Да, в п. 3.4 мы вводим предпорядок меньшего искажения, и в теореме 6 получаем целый класс его эквивалентных характеристик. Мы также приводим пример применения теоремы 6 в теореме 7, обобщающей СНОД Самородникового.

Границы, которые мы выведем в ответ на вопросы 3–5, имеют вид верхней границы в

$$\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}) \leq \eta_f(P_X, P_{Y|X}) \leq C\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}), \quad (44)$$

где первое неравенство – это просто нижняя граница максимальной корреляции из п. 7 предложения 3, а константа C зависит от $P_{X,Y}$ и f ; заметим, что $C = 1$ в постановке вопроса 5. Будем называть такие границы *линейными границами* между коэффициентами сжатия совместных распределений. Наши основные результаты сформулированы в нескольких следующих пунктах.

3.1. Свойства коэффициентов сжатия совместных распределений. В этом пункте, как и в п. 3.2, мы будем предполагать, что заданы случайные величины $X \in \mathcal{X}$ и $Y \in \mathcal{Y}$ с совместной вероятностной мерой $P_{X,Y}$, состоящей из $P_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ и $P_{Y|X} = W \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}}$, причем маргинальные вероятностные меры таковы, что $P_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}^\circ$ и $P_Y = P_X W \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}}^\circ$. В этом пункте приведены два результата. В первом из них переформулирован п. 3 предложения 3.

Начнем с необходимого определения: совместная вероятностная мера $P_{X,Y}$ называется *разложимой*, если существуют функции $h: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$, такие что $h(X) = g(Y)$ п.н. и $\text{Var}(h(X)) > 0$, где через $\text{Var}(\cdot)$ обозначена дисперсия. Эквивалентным образом, $P_{X,Y}$ разложима тогда и только тогда, когда неориентированный двудольный граф с непересекающимися множествами вершин \mathcal{X} и \mathcal{Y} и множеством ребер $\{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} : P_{Y|X}(y|x) > 0\}$ имеет две или более компоненты связности (см. [15, §1]). Эта комбинаторная характеристика разложимости имеет место, поскольку h и g существуют тогда и только тогда, когда матрица W имеет блочно-диагональную структуру после соответствующей перестановки ее строк и столбцов (где блоки определяются множествами прообразов h и g), и эти блоки соответствуют компонентам связности ассоциированного двудольного графа.

С помощью понятия разложимости можно описать, когда коэффициенты сжатия совместных распределений равны единице.

Теорема 1 (свойство разложимости). *Пусть задана дважды дифференцируемая в единице выпуклая функция $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, такая что $f(1) = 0$ и $f''(1) > 0$. Тогда справедливо следующее:*

1. Если $P_{X,Y}$ разложима, то $\eta_f(P_X, P_{Y|X}) = 1$;
2. Если f строго выпукла и удовлетворяет условию $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) < \infty$, то из равенства $\eta_f(P_X, P_{Y|X}) = 1$ следует, что $P_{X,Y}$ разложима.

Теорема 1 доказана в Приложении С. Как отмечалось выше, этот результат был ранее известен только для случаев η_{χ^2} и η_{KL} [13, 15]. Заметим также, что в случае $\eta_f(P_X, P_{Y|X}) = 1$ можно проверить, что пропускная способность при нулевой ошибке для $P_{Y|X}$ строго положительна [74].

Наш второй результат – уточнение п. 7 предложения 3, он показывает, что при стремлении f -дивергенции на входе к нулю общие коэффициенты сжатия превращаются в коэффициенты сжатия для χ^2 -дивергенции.

Теорема 2 (локальная аппроксимация коэффициентов сжатия). *Пусть дана выпуклая функция $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, строго выпуклая в единице и дважды дифференцируемая в единице, такая что $f(1) = 0$ и $f''(1) > 0$. Тогда*

$$\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{\substack{R_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}} \\ 0 < D_f(R_X \| P_X) \leq \delta}} \frac{D_f(R_X W \| P_X W)}{D_f(R_X \| P_X)}.$$

Доказательство приведено в Приложении D; заметим, что частный случай теоремы 2 для КЛ-дивергенции был представлен вместе с наброском доказательства в [1, теорема 3]. Теперь уместно сделать несколько замечаний. Во-первых, отметим, что в доказательстве п. 7 предложения 3 в Приложении В (как и в независимых доказательствах в [8, теорема III.2] и [7, теорема 2]) уже содержится идея о том, что оптимизация $\eta_f(P_X, P_{Y|X})$ по локальным возмущениям P_X дает $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$ в силу (14) и (25). Однако это доказательство (с незначительными видоизменениями) показывает лишь, что величина $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$ ограничена сверху правой частью равенства из теоремы 2. Хотя интуитивно может быть и ясно, что эта верхняя грани достигается с равенством, формальное доказательство содержит несколько технических деталей, как показано в Приложении D.

Во-вторых, теорема 2 очевидным образом показывает, что нижняя граница максимальной корреляции в п. 7 предложения 3 может быть достигнута, когда в задаче оптимизации для $\eta_f(P_X, P_{Y|X})$ наложено дополнительное ограничение, что f -дивергенция на входе мала. Поэтому из теоремы 2 вытекает нижняя граница максимальной корреляции. Эта идея оказалась важна при сравнении $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$ и $\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X})$ в статистическом контексте [78, с. 5].

В-третьих, теорему 2 можно рассматривать как минимаксную характеристику $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$, поскольку супремум отношения f -дивергенций является невозрастающей функцией δ , и поэтому предел (при $\delta \rightarrow 0^+$) можно заменить на инфимум (по всем $\delta > 0$).

В-четвертых, при выполнении условий предложения 1 и теоремы 2 непосредственной проверкой легко убедиться, что

$$\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{\substack{P_{U|X}: U \rightarrow X \rightarrow Y \\ 0 < I_f(U; X) \leq \delta}} \frac{I_f(U; Y)}{I_f(U; X)}, \quad (45)$$

где супремум берется по всем стохастическим матрицам $P_{U|X} \in \mathcal{P}_{\mathcal{U}|X}$, таким что $\mathcal{U} = \{0, 1\}$, $U \sim \text{Bernoulli}(1/2)$ и $U \rightarrow X \rightarrow Y$ образуют цепь Маркова. Таким образом, ограничение на малость f -дивергенции на входе в определении $\eta_f(P_X, P_{Y|X})$ через f -дивергенцию соответствует условиям малой $I_f(U; X)$ и $U \sim \text{Bernoulli}(1/2)$ в (45).

Наконец, рассмотрим траекторию вероятностных мер на входе

$$R_X^{(\varepsilon)} = P_X + \varepsilon K_X^* \text{diag}(\sqrt{P_X}),$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, а $K_X^* \in (\mathbb{R}^{|\mathcal{X}|})^*$ – левый сингулярный вектор, соответствующий второму по величине сингулярному числу МДП B (см. (25)). Как показывает доказательство в Приложении D, эта траектория удовлетворяет условию $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_f(R_X^{(\varepsilon)} \| P_X) = 0$ и достигает значения $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$ в теореме 2:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{D_f(R_X^{(\varepsilon)} W \| P_X W)}{D_f(R_X^{(\varepsilon)} \| P_X)} = \eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}). \quad (46)$$

Соответствующей траекторией условных распределений для (45) является $P_{X|U}^{(\varepsilon)} \in \mathcal{P}_{X|U}$ со строками

$$\left\{ P_{X|U=u}^{(\varepsilon)} = P_X + (2u - 1)\varepsilon K_X^* \text{diag}(\sqrt{P_X}) : u \in \{0, 1\} \right\},$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Эта траектория удовлетворяет условию

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_f(U; X^{(\varepsilon)}) = 0$$

и достигает значения $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$ в (45):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I_f(U; Y^{(\varepsilon)})}{I_f(U; X^{(\varepsilon)})} = \eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}), \quad (47)$$

где $U \sim \text{Bernoulli}(1/2)$, $U \rightarrow X^{(\varepsilon)} \rightarrow Y^{(\varepsilon)}$ – случайные величины, образующие цепь Маркова с совместной вероятностной мерой $(P_U, P_{X|U}^{(\varepsilon)}, P_{Y|X}^{(\varepsilon)})$, $P_{Y|U}^{(\varepsilon)} = P_{X|U}^{(\varepsilon)} P_{Y|X}$, а маргинальная вероятностная мера для $X^{(\varepsilon)}$ равна P_X .

3.2. Линейные границы между коэффициентами сжатия. Напомним, что мы рассматриваем заданную совместную вероятностную меру $P_{X,Y}$ с маргинальными вероятностными мерами $P_X \in \mathcal{P}_X^\circ$ и $P_Y \in \mathcal{P}_Y^\circ$. Наш следующий результат описывает линейную верхнюю границу на $\eta_f(P_X, P_{Y|X})$ через $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$ для определенного класса f -дивергенций.

Теорема 3 (граница на коэффициенты сжатия). *Пусть задана выпуклая функция $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, трижды дифференцируемая в единице, такая что $f(1) = 0$, $f''(1) > 0$ и $f(0) < \infty$, удовлетворяющая условию (75) для любого $t \in (0, \infty)$ (см. п. 4.1). Предположим также, что разностное отношение $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, определяемое как $g(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t}$, выпукло вверх. Тогда*

$$\eta_f(P_X, P_{Y|X}) \leq \frac{f'(1) + f(0)}{f''(1) \min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x)} \eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}).$$

Теорема 3 доказана в п. 4.2. Условия на f гарантируют, что получаемая f -дивергенция обладает свойствами КЛ-дивергенции, требуемыми в доказательстве теоремы 4 (см. ниже). Таким образом, аналогичная техника доказательства работает и для теоремы 3. Непосредственным частным случаем для КЛ-дивергенции, впервые доказанным в [1, теорема 10], является

Следствие 1 (граница на КЛ-коэффициенты сжатия [1, теорема 10]). *Справедливо неравенство*

$$\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X}) \leq \frac{\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})}{\min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x)}.$$

Следствие 1 можно вывести из теоремы 3, убедившись, что функция $f(t) = t \log(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3 (см. [79]). Подробное доказательство см. в Приложении Е. Константу в верхней границе на $\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X})$ из следствия 1 можно улучшить, как показывает следующая

Теорема 4 (улучшенная граница на КЛ-коэффициенты сжатия). *Справедливо неравенство*

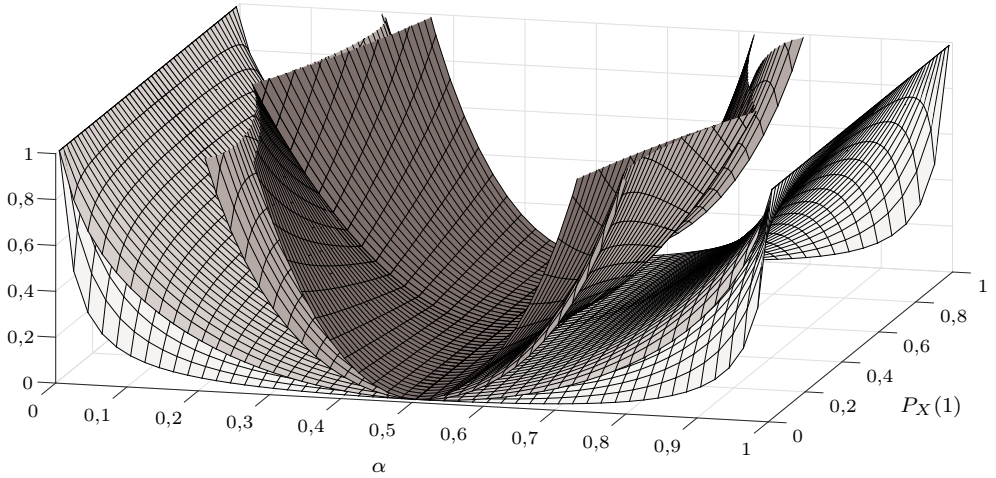
$$\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X}) \leq \frac{2\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})}{\varphi\left(\max_{A \subseteq \mathcal{X}} \min\{P_X(A), 1 - P_X(A)\}\right) \min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x)},$$

где функция $\varphi: [0, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}$ определена в (68) (см. п. 4.1).

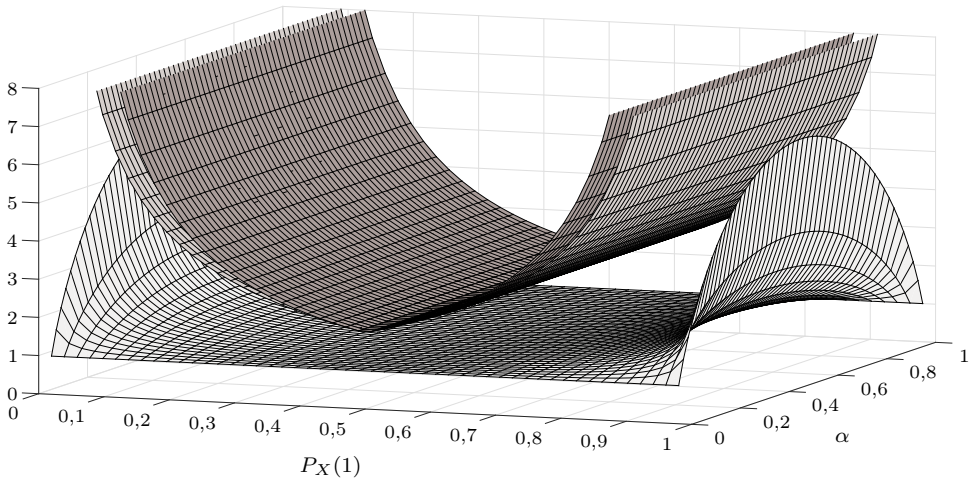
Теорема 4 также доказана в п. 4.2, и в силу соотношения (70) в п. 4.1 эта граница точнее, чем граница из следствия 1. Теперь уместно сделать несколько замечаний по поводу следствия 1 и теорем 3 и 4.

Во-первых, как показано на рис. 1а, верхние границы из этих утверждений могут быть строго меньше тривиальной верхней границы, равной единице. Например, когда (X, Y) – равномерные бернуллиевские случайные величины с $P_X = (1/2, 1/2)$ и $P_{Y|X}$, описанные в (28), для некоторого $\alpha \in [0, 1]$ (что соответствует сечению вдоль $P_X(1) = 1/2$ на рис. 1а), верхние границы из следствия 1 и теоремы 4 обе равны

$$\frac{2\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})}{\varphi\left(\max_{A \subseteq \mathcal{X}} \min\{P_X(A), 1 - P_X(A)\}\right) \min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x)} = \frac{\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})}{\min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x)} = 2(1 - 2\alpha)^2, \quad (48)$$



(а) Графики функций $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$ (нижняя сетка), $\eta_{KL}(P_X, P_{Y|X})$ (вторая снизу) и линейных верхних границ на $\eta_{KL}(P_X, P_{Y|X})$. Верхняя сетка соответствует верхней границе из следствия 1, а вторая сверху – более точной верхней границе из теоремы 4.



(б) Графики верхних границ на отношение $\eta_{KL}(P_X, P_{Y|X})/\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$, соответствующее нижней сетке. Границе $1/\min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x)$ из следствия 1 соответствует верхняя сетка, а более точной границе $2/(\varphi(\max_{A \subseteq \mathcal{X}} \min\{P_X(A), 1 - P_X(A)\}) \min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x))$ из теоремы 4 – вторая сверху.

Рис. 1. Графики границ на коэффициенты сжатия из следствия 1 и теоремы 4 для двух бернуллиевских случайных величин (X, Y) с совместной вероятностной мерой, состоящей из $P_X = (P_X(0), P_X(1))$ и $P_{Y|X}$, заданных в (28), для вероятности перехода в канале $\alpha \in [0, 1]$.

что следует из (29) и того факта, что

$$\max_{A \subseteq \mathcal{X}} \min\{P_X(A), 1 - P_X(A)\} = \frac{1}{2}.$$

Эта верхняя граница точнее, чем тривиальная граница, равная 1, когда

$$2(1 - 2\alpha)^2 < 1 \iff \frac{2 - \sqrt{2}}{4} < \alpha < \frac{2 + \sqrt{2}}{4}. \quad (49)$$

Заметим также, что эта верхняя граница не достигается с равенством при таком сценарии, поскольку $(1 - 2\alpha)^2 = \eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X}) = \eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$, как показано в (29).

Во-вторых, наши доказательства теорем 3 и 4 опираются на обобщения хорошо известного *неравенства Пинскера* (или неравенства Чисара – Кемпермана – Кульбака – Пинскера; см. [80, § V]), оценивающие сверху расстояние по вариации через КЛ-дивергенцию и другие f -дивергенции. Таким образом, возникает естественный вопрос: являются ли эти границы более точными, чем граница расстояния по вариации из п. 7 предложения 5? Как показывает следующий пример, в некоторых режимах наши границы точнее. Пусть (X, Y) – равномерные бернуллиевские случайные величины с $P_X = (1/2, 1/2)$ и $P_{Y|X}$, заданными в (28), для некоторого $\alpha \in [0, 1]$. Тогда (48) задает верхние границы из следствия 1 и теоремы 4, и граница расстояния по вариации имеет вид

$$\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X}) \leq \eta_{\text{KL}}(P_{Y|X}) \leq \eta_{\text{TV}}(P_{Y|X}) = |1 - 2\alpha| \quad (50)$$

с учетом определения 5, п. 7 предложения 5 и соотношения (43). Следовательно, наша граница (48) точнее, чем граница через η_{TV} , когда

$$2(1 - 2\alpha)^2 < |1 - 2\alpha| \iff \frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2} \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}. \quad (51)$$

Поскольку наши верхние границы могут быть больше единицы (см. (49)), мы не можем надеяться превзойти границу через η_{TV} (≤ 1) во всех режимах. С другой стороны, преимущество наших верхних границ является то, что они “подходят” к нижней границе через η_{χ^2} в п. 7 предложения 3; полезное применение этого будет показано в п. 4.3.

В-третьих, интуитивно можно ожидать, что граница между коэффициентами сжатия должна зависеть от мощности $|\mathcal{X}|$ или $|\mathcal{Y}|$. Поскольку минимальная вероятность во всех наших верхних границах соответствует $1/\min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x) \geq |\mathcal{X}|$, на первый взгляд можно было бы интерпретировать ее как “моделирующую” $|\mathcal{X}|$. К сожалению, эта интуитивная догадка неверна. Численные результаты, представленные графически на рис. 1b, показывают, что отношение

$$\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X})/\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$$

значительно увеличивается возле граничного значения $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$, когда любая из компонент P_X близка к нулю. Этот эффект, хотя и неудивительный с учетом поведения вероятностных симплексов в их граничных точках относительно КЛ-дивергенции в качестве расстояния, адекватно учитывается верхними границами в следствии 1 и теореме 4, поскольку величина $1/\min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x)$ возрастает, когда любая из компонент вероятностной меры на входе стремится к нулю (см. рис. 1b). Очевидно, линейные верхние границы на $\eta_f(P_X, P_{Y|X})$, выражаемые только через $|\mathcal{X}|$ или $|\mathcal{Y}|$, этот эффект отражать не могут. Это подтверждает необходимость присутствия минимальной вероятности в наших линейных границах.

Наконец, заметим, что неравенство $1/\min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x) \geq |\mathcal{X}|$ не препятствует возможности того, что $1/\min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x)$ будет гораздо больше, чем $|\mathcal{X}|$. Таким образом, при больших $|\mathcal{X}|$ наши границы могут стать слабыми (см. пример в п. 4.4). В результате границы из теоремы 3, следствия 1 и теоремы 4, как правило, представляют интерес в следующих случаях:

1. $|\mathcal{X}|$ и $|\mathcal{Y}|$ малы: рис. 1 показывает, что наши границы могут быть весьма точными, когда $|\mathcal{X}| = |\mathcal{Y}| = 2$;
2. Слабая зависимость, т.е. $I(X; Y)$ мала: такая ситуация естественным образом возникает при анализе эргодичности цепей Маркова – см. п. 4.3;
3. Произведение распределений: если соответствующая совместная вероятностная мера является произведением, можно использовать свойство тензоризации коэффициентов сжатия (п. 5 предложения 3) – см. п. 4.4.

3.3. Коэффициенты сжатия совместно гауссовских случайных величин. В этом пункте рассмотрим коэффициенты сжатия для КЛ- и χ^2 -дивергенций, соответствующие двумерным гауссовским распределениям. Пусть X и Y – совместно гауссовские случайные величины. Их совместное распределение имеет один из трех возможных видов:

1. Величины X или Y постоянны п.н., и коэффициенты сжатия определяются как $\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X}) = \eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}) = 0$;
2. $aX + bY = c$ п.н. для некоторых констант $a, b, c \in \mathbb{R}$, таких что $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Тогда непосредственной проверкой легко убедиться, что $\rho(X; Y) = 1$, откуда получаем $\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X}) = \eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}) = 1$, поскольку определения 3, (23) и п. 7 предложения 3 справедливы для общих случайных величин (см. [7, формулы (9) и (13)]);
3. Существует совместная плотность распределения $P_{X,Y}$ относительно меры Лебега на \mathbb{R}^2 . Если X и Y независимы, то $\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X}) = \eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}) = 0$, поскольку п. 2 предложения 3 справедлив в общем случае. Поэтому будем предполагать, что X и Y зависимы.

Нас будет интересовать последний невырожденный случай. Для простоты будем также предполагать, что X и Y имеют нулевое среднее. Тогда совместное распределение величин X и Y можно представить в “инновационном виде”: $Y = \gamma X + W$ для некоторой константы $\gamma \neq 0$ и гауссовской случайной величины W с нулевым средним и ненулевой дисперсией, не зависящей от X . Так как для любой плотности распределения R_X справедливо $D_f(R_X \| P_X) = D_f(R_{\gamma X} \| P_{\gamma X})$, то $\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X}) = \eta_{\text{KL}}(P_{\gamma X}, P_{Y|\gamma X})$ и $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}) = \eta_{\chi^2}(P_{\gamma X}, P_{Y|\gamma X})$ (где $R_{\gamma X}$ – производная плотность распределения, соответствующая R_X). Поэтому без ограничения общности положим $\gamma = 1$ и будем рассматривать классическую модель *аддитивного белого гауссовского шума* (АБГШ) [41, гл. 9]:

$$Y = X + W, \quad X \perp W, \quad (52)$$

где входом является $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$ с $\sigma_X^2 > 0$ (т.е. X имеет гауссовскую плотность распределения P_X со средним 0 и дисперсией σ_X^2), гауссовским шумом является $W \sim \mathcal{N}(0, \sigma_W^2)$ с $\sigma_W^2 > 0$, причем X и W независимы. Это соотношение также задает условные плотности распределения

$$P_{Y|X} = \{P_{Y|X=x} = \mathcal{N}(x, \sigma_W^2) : x \in \mathbb{R}\}$$

и маргинальную плотность распределения $P_Y = \mathcal{N}(0, \sigma_X^2 + \sigma_W^2)$.

Напомним, что для любой пары функций плотности распределения относительно меры Лебега Leb на \mathbb{R} их КЛ- и χ^2 -дивергенции определяются (аналогично (3) и (4)) как

$$D(R_X \| S_X) \triangleq \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} R_X(x) \log \left(\frac{R_X(x)}{S_X(x)} \right) d\text{Leb}(x), \\ +\infty & \text{Leb}(\{x \in \mathbb{R} : R_X(x) > 0, S_X(x) = 0\}) = 0, \\ +\infty & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (53)$$

$$\chi^2(R_X \| S_X) \triangleq \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \frac{(R_X(x) - S_X(x))^2}{S_X(x)} d\text{Leb}(x), \\ \text{Leb}(\{x \in \mathbb{R} : R_X(x) > 0, S_X(x) = 0\}) = 0, \\ +\infty \quad \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (54)$$

где используются интегралы Лебега и приняты соглашения $0 \log(0/t) = 0$ для любых $t \geq 0$ (следуя соображениям непрерывности) и $(0 - 0)^2/0 = 0$. Для совместно гауссовской плотности распределения $P_{X,Y}$, описанной в (52), с учетом определений (53) и (54) коэффициенты сжатия для КЛ- и χ^2 -дивергенций имеют вид (см. (17) и (22))

$$\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X}) = \sup_{R_X: 0 < D(R_X \| P_X) < +\infty} \frac{D(R_Y \| P_Y)}{D(R_X \| P_X)}, \quad (55)$$

$$\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}) = \sup_{R_X: 0 < \chi^2(R_X \| P_X) < +\infty} \frac{\chi^2(R_Y \| P_Y)}{\chi^2(R_X \| P_X)}, \quad (56)$$

где супремумы берутся по всем плотностям распределения R_X (отличающихся от P_X на множестве ненулевой меры Лебега)⁶, а через R_Y обозначена маргинальная плотность распределения для Y после прохождения R_X через модель АБГШ $P_{Y|X}$. В частности, $R_Y = R_X * P_W$, где $P_W = \mathcal{N}(0, \sigma_W^2)$, а $*$ означает операцию *свертки*. Далее, определим *коэффициент сжатия для КЛ-дивергенции при ограничении на среднюю мощность* (или ограничении на второй момент) $p \geq \sigma_X^2$ как

$$\eta_{\text{KL}}^{(p)}(P_X, P_{Y|X}) \triangleq \sup_{\substack{R_X: \mathbf{E}_{R_X}[X^2] \leq p \\ 0 < D(R_X \| P_X) < +\infty}} \frac{D(R_Y \| P_Y)}{D(R_X \| P_X)}, \quad (57)$$

где супремум берется по всем плотностям распределения R_X , удовлетворяющим ограничению на среднюю мощность $\mathbf{E}_{R_X}[X^2] \leq p$. Отметим, что при $p = +\infty$ получаем стандартный коэффициент сжатия из (55).

Из литературы хорошо известно, что $\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X}) = \eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$ для совместно гауссовской плотности распределения $P_{X,Y}$, определенной в (52). Например, в [2, теорема 7] этот результат доказан в контексте теории инвестиционного портфеля, в [81, с. 2] доказано его обобщение в контексте гауссовской гиперсжимаемости, а в [78, § 5.2, п. 5] он доказан в попытке аксиоматизации η_{KL} . В то время как доказательства в [2, теоремы 6 и 7; 78, § 5.2, п. 5] используют характеристику η_{KL} через взаимную информацию (18) (см. [7, теорема 4]), в § 5 мы даем альтернативное доказательство этого результата, непосредственно использующее определение η_{KL} через КЛ-дивергенцию в (55). При этом наше доказательство также показывает, что $\eta_{\text{KL}}^{(p)}(P_X, P_{Y|X})$ равно $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$ для любого $p \in [\sigma_X^2, \infty]$. Хотя этот последний результат вытекает из нашего доказательства, ранее в литературе, насколько нам известно, он не встречался. Формально этот результат представляет следующая

Теорема 5 (гауссовские коэффициенты сжатия). *Для заданной совместно гауссовской плотности распределения $P_{X,Y}$, определенной в (52), с маргинальной плотностью распределения $P_X = \mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$ на входе и условными плотностями распределения $P_{Y|X} = \{P_{Y|X=x} = \mathcal{N}(x, \sigma_W^2) : x \in \mathbb{R}\}$, такими что $\sigma_X^2, \sigma_W^2 > 0$,*

⁶ Если P_X – общая вероятностная мера, а $P_{Y|X}$ – марковское ядро между двумя измеримыми пространствами, то коэффициенты сжатия для КЛ- и χ^2 -дивергенций определяются в точности как в (17) и (22) с помощью определений КЛ- и χ^2 -дивергенций с позиций теории меры [7, § 2]. В (55) при оптимизации по всем вероятностным мерам R_X на \mathbb{R} (с борелевской σ -алгеброй) из ограничения $D(R_X \| P_X) < +\infty$ вытекает, что R_X должна быть абсолютно непрерывной относительно гауссовского распределения P_X , см. [38, п. 1.6]. Следовательно, супремум в (55) можно брать по всем плотностям распределения R_X , таким что $0 < D(R_X \| P_X) < +\infty$. То же самое относится и к (56).

следующие величины эквивалентны:

$$\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X}) = \eta_{\text{KL}}^{(p)}(P_X, P_{Y|X}) = \eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}) = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_W^2},$$

где наложено ограничение на среднюю мощность $p \geq \sigma_X^2$.

Как уже сказано, мы доказываем этот результат в § 5. В отличие от теоремы 5, где $\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X})$, $\eta_{\text{KL}}^{(p)}(P_X, P_{Y|X})$ и $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$ могут быть строго меньше 1, коэффициенты сжатия для КЛ- и χ^2 -дивергенций для марковского ядра АБГШ $P_{Y|X}$ (т.е. в условиях определения 5) равны 1 вне зависимости от того, накладываются ли ограничения на второй момент (см. [6, § 1.2; 82, § 1]).

3.4. Предпорядок меньшего искажения и операторная выпуклость. Последний наш основной результат состоит в эквивалентной характеристизации предпорядка меньшего искажения на стохастических матрицах, обобщающей результат предложения 6. Начнем с определения предпорядка меньшего искажения. В постановке с конечным алфавитом из п. 2.1 рассмотрим случайную величину $X \in \mathcal{X}$ на входе и две случайные величины $Y \in \mathcal{Y}$ и $Z \in \mathcal{Z}$ на выходе, где $\mathcal{Z} \triangleq \{1, \dots, |\mathcal{Z}|\}$, $2 \leq |\mathcal{Z}| < +\infty$.

Определение 6 (предпорядок меньшего искажения [20]). Пусть $P_{Y|X} = W \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}|X}$ и $P_{Z|X} = V \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}|X}$ – две стохастические по строкам матрицы с одним алфавитом на входе \mathcal{X} , т.е. с одинаковым числом строк. Будем говорить, что $P_{Y|X}$ *менее искажающая*, чем $P_{Z|X}$, и обозначать это через $P_{Y|X} \succeq_{\text{ln}} P_{Z|X}$, если

$$\forall R_X, P_X \in \mathcal{P}_X, \quad D(R_X W \| P_X W) \geq D(R_X V \| P_X V).$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что определение 6 задает предпорядок на стохастических матрицах⁷. Более того, из этого определения следует, что пара вероятностных мер $R_X W$ и $P_X W$ всегда “более различима”, чем пара $R_X V$ и $P_X V$, что в действительности интуитивно соответствует тому, что W “менее искажающая”, чем V (если рассматривать их как стохастические ядра). Имеется несколько других эквивалентных описаний отношения \succeq_{ln} , например, через кодирование каналов [20, определение В, предложение 2], взаимную информацию [20, предложение 2] и функционал ван Дейка [84, теорема 2]. Подробнее о предпорядке меньшего искажения см. работу [83, пп. I-B, I-D, II-A, IV] и библиографию в ней.

В [7, § 6] показано, что если заданная стохастическая матрица мажорируется в смысле предпорядка меньшего искажения матрицей канала со стиранием, то это тесно связано с коэффициентом сжатия для КЛ-дивергенции для этой стохастической матрицы. Напомним, что через $E_{1-\beta} \in \mathcal{P}_{\mathcal{X} \cup \{e\}|X}$ мы обозначаем матрицу $|\mathcal{X}|$ -ичного канала со стиранием с вероятностью стирания $1 - \beta \in [0, 1]$ (согласно определению (30)). Из [7, предложение 15] можно вывести, что для любой стохастической матрицы $P_{Y|X} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}|X}$ справедливо

$$\eta_{\text{KL}}(P_{Y|X}) = \min\{\beta \in [0, 1] : E_{1-\beta} \succeq_{\text{ln}} P_{Y|X}\}, \quad (58)$$

где множество, по которому ведется минимизация, всегда содержит $\beta = 1$, поскольку по сути E_0 – единичная матрица и $E_0 \succeq_{\text{ln}} P_{Y|X}$. В [83, п. IV-A] отмечено, что хотя (58) показывает, что η_{KL} характеризует мажорирование матрицами канала со

⁷ Как указано в [83, сноска 1], мы называем отношение меньшего искажения *предпорядком*, а не *частичным порядком*, поскольку мы не рассматриваем классы эквивалентности стохастических по строкам матриц, например, отождествляя стохастические по строкам матрицы, полученные перестановкой столбцов.

стиранием в смысле меньшего искажения, формула (39) показывает, что и η_{χ^2} характеризует это мажорирование. Отсюда возникает вопрос: характеризует ли χ^2 -дивергенция предпорядок меньшего искажения в общем случае? В [83, теорема 1] и [85, теорема 1] на этот вопрос дается утвердительный ответ с помощью характеристики отношения \succeq_{\ln} через χ^2 -дивергенцию, обобщая тем самым соотношение (39).

Вдохновляясь этими результатами, рассмотрим предложение 6 (см. [18, теорема 1]), показывающее, что $\eta_{\text{KL}}(P_{Y|X}) = \eta_f(P_{Y|X})$ для всех нелинейных операторно выпуклых функций f (определенных в п. 6.1). Как и выше, отсюда возникает вопрос: *характеризуют ли нелинейные операторно выпуклые f -дивергенции предпорядок меньшего искажения в общем случае?* Следующая теорема отвечает на этот вопрос, обобщая как предложение 6, так и [83, теорема 1], и показывая, что нелинейные операторно выпуклые f -дивергенции также характеризуют предпорядок меньшего искажения.

Теорема 6 (эквивалентные характеристики отношения \succeq_{\ln}). Рассмотрим произвольную нелинейную операторно выпуклую функцию $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, такую что $f(1) = 0$. Тогда для любых стохастических матриц $P_{Y|X} = W \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}|X}$ и $P_{Z|X} = V \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}|X}$ с одинаковым алфавитом на входе \mathcal{X} отношение $P_{Y|X} \succeq_{\ln} P_{Z|X}$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\forall R_X, P_X \in \mathcal{P}_X, \quad D_f(R_X W \| P_X W) \geq D_f(R_X V \| P_X V).$$

Теорема 6 доказана в п. 6.2 с использованием техники из [18]. Хорошо известная теорема Лёвнера–Хайнца утверждает, что функции $f(t) = t \log(t)$ и $f(t) = \frac{t^\alpha - 1}{\alpha - 1}$ для любого $\alpha \in (0, 1) \cup (1, 2]$ являются операторно выпуклыми (см., например, [86, теорема 2.6; 87, теоремы V.2.5 и V.2.10, упражнения V.2.11 и V.2.13], и можно применить свойство аффинного преобразования из п. 6.1). Следовательно, одним классом f -дивергенций, удовлетворяющих условиям теоремы, являются дивергенции Хеллингера порядка $\alpha \in (0, 2]$, где случаи $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ отвечают КЛ- и χ^2 -дивергенциям соответственно.

Теперь в качестве примера применения теоремы 6 докажем обобщение так называемого СНОД Самородницкого. Следуя изложению в [7, п. 6.2], рассмотрим дискретные случайные величины с конечными множествами значений $U \in \mathcal{U}$, $X_1^n = (X_1, \dots, X_n)$ и $Y_1^n = (Y_1, \dots, Y_n)$, где $X_i \in \mathcal{X}_i$ и $Y_i \in \mathcal{Y}_i$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$, а $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Для заданных стохастических матриц $P_{Y_i|X_i} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}_i|\mathcal{X}_i}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, задающих условные распределения каждой из Y_i при заданном X_i , пусть условное распределение $Y_1^n \in \mathcal{Y}^n = \mathcal{Y}_1 \times \dots \times \mathcal{Y}_n$ при заданном $X_1^n \in \mathcal{X}^n = \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_n$ задается произведением стохастических матриц $P_{Y_1^n|X_1^n} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}^n|\mathcal{X}^n}$:

$$P_{Y_1^n|X_1^n} = P_{Y_1|X_1} \otimes P_{Y_2|X_2} \otimes \dots \otimes P_{Y_n|X_n}, \quad (59)$$

где через \otimes обозначено кронекерово (или тензорное) произведение. Заметим, что такие $P_{Y_1^n|X_1^n}$ известны как стохастические ядра *без памяти* (см., например, [41, формула (7.27)]). Определим коэффициент сжатия стохастической матрицы $P_{Y_i|X_i}$ для любой f -дивергенции (см. определение 5) как

$$\eta_i \triangleq \eta_f(P_{Y_i|X_i}) \quad (60)$$

для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. В то время как СНОД для $P_{Y_1^n|X_1^n}$ характеризуется коэффициентом сжатия $\eta_f(P_{Y_1^n|X_1^n})$, хотелось бы получить ослабленный вариант этого СНОД через “однобуквенные” коэффициенты сжатия $\{\eta_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$.

Чтобы проиллюстрировать одно такое тензоризованное СНОД, предположим, что $\eta_i = \eta$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$, и зафиксируем произвольную нелинейную опера-

торно выпуклую функцию $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, такую что $f(1) = 0$. С помощью предложения 6 непосредственной проверкой легко убедиться, что утверждения [7, теорема 5 и следствие 6] справедливы для любой f -дивергенции с нелинейной операторно выпуклой функцией f (а не только для КЛ-дивергенции). В результате из [7, следствие 6] вытекает граница тензоризации

$$\eta_f(P_{Y_1^n | X_1^n}) \leq 1 - (1 - \eta)^n, \quad (61)$$

которую можно считать аналогом п. 5 предложения 3 для коэффициентов сжатия стохастических матриц. Таким образом, для любой пары вероятностных мер на входе $R_{X_1^n}, P_{X_1^n} \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}^n}$ имеется тензоризованное СНОД

$$D_f(R_{Y_1^n} \| P_{Y_1^n}) \leq (1 - (1 - \eta)^n) D_f(R_{X_1^n} \| P_{X_1^n}), \quad (62)$$

где $R_{Y_1^n} = R_{X_1^n} P_{Y_1^n | X_1^n} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}^n}$ и $P_{Y_1^n} = P_{X_1^n} P_{Y_1^n | X_1^n} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}^n}$ – вероятностные меры на выходе после прохождения $R_{X_1^n}$ и $P_{X_1^n}$ через $P_{Y_1^n | X_1^n}$ соответственно. Аналогично, для любого совместного распределения P_{U, X_1^n} , такого что $U \rightarrow X_1^n \rightarrow Y_1^n$ образуют цепь Маркова, имеется тензоризованное СНОД (см. (8) и (38))

$$I_f(U; Y_1^n) \leq (1 - (1 - \eta)^n) I_f(U; X_1^n). \quad (63)$$

Однако, как указано в [7, п. 6.2], “можно было бы указать более сильные тензоризованные границы, если бы мы обладали лучшим знанием” о парах $(R_{X_1^n}, P_{X_1^n})$ или о распределении P_{U, X_1^n} . В этом смысле следующая теорема дает более точные границы на $D_f(R_{Y_1^n} \| P_{Y_1^n})$ и $I_f(U; Y_1^n)$ через однобуквенные коэффициенты сжатия $\{\eta_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$ и величины, представляющие “среднюю” f -дивергенцию на входе и “среднюю” взаимную f -информацию, содержащиеся в подмножествах случайной величины X_1^n , соответственно.

Теорема 7 (обобщенное СНОД Самородницкого). *Рассмотрим произвольную нелинейную операторно выпуклую функцию $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, такую что $f(1) = 0$. Пусть $U \in \mathcal{U}$, $X_1^n \in \mathcal{X}^n$ и $Y_1^n \in \mathcal{Y}^n$ – дискретные случайные величины с заданной стохастической матрицей-произведением $P_{Y_1^n | X_1^n} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}^n | \mathcal{X}^n}$ из (59). Пусть S – случайное подмножество множества $\{1, \dots, n\}$, полученное независимым выбором каждого элемента $i \in \{1, \dots, n\}$ с вероятностью η_i (заданной в (60)), и пусть S не зависит от (U, X_1^n, Y_1^n) . Тогда для любой пары вероятностных мер на входе $R_{X_1^n}, P_{X_1^n} \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}^n}$ имеет место неравенство*

$$D_f(R_{Y_1^n} \| P_{Y_1^n}) \leq \sum_{T \subseteq \{1, \dots, n\}} P_S(T) D_f(R_{X_T} \| P_{X_T}), \quad (64)$$

где P_S – распределение вероятностей для S , $X_T \triangleq \{X_k : k \in T\}$ для любого подмножества $T \subseteq \{1, \dots, n\}$, $D_f(R_{X_\emptyset} \| P_{X_\emptyset}) = 0$, $R_{Y_1^n} = R_{X_1^n} P_{Y_1^n | X_1^n} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}^n}$ и $P_{Y_1^n} = P_{X_1^n} P_{Y_1^n | X_1^n} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}^n}$. Аналогично, для любого совместного распределения P_{U, X_1^n} , такого что $U \rightarrow X_1^n \rightarrow Y_1^n$ образуют цепь Маркова,

$$I_f(U; Y_1^n) \leq I_f(U; X_S, S) = \sum_{T \subseteq \{1, \dots, n\}} P_S(T) I_f(U; X_T), \quad (65)$$

где $I_f(U; X_\emptyset) = 0$. Более того, если $\eta_i = \eta$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$, то

$$I_f(U; Y_1^n) \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \eta^k (1 - \eta)^{n-k} I_k, \quad (66)$$

где для каждого $k \in \{0, \dots, n\}$ величина I_k определяется как “средняя” взаимная f -информация, содержащаяся в подмножествах X_1^n мощности k :

$$I_k \triangleq \binom{n}{k}^{-1} \sum_{\substack{T \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |T|=k}} I_f(U; X_T).$$

Теорема 7 будет доказана в п. 6.3 с помощью теоремы 6, следуя технике доказательства из [7]. Случай КЛ-дивергенции в теореме 7 был впервые доказан Самородничким в [88] с помощью техники линейного программирования при доказательстве частного случая гипотезы Куртада – Кумара из [89]. К ее нынешнему виду она была приведена в [7, теорема 20, замечание 6], где также было дано более простое доказательство. Наш результат в теореме 7 обобщает этот случай КЛ-дивергенции на все нелинейные операторно выпуклые f -дивергенции (включая, например, все дивергенции Хеллингера порядка $\alpha \in (0, 2]$, как отмечалось выше). Заметим также, что случай КЛ-дивергенции имеет и другие приложения, такие как усиление леммы Гербер (см. [90, п. 2.1]) в [7, замечание 5]. И наконец, как показано в [7, замечание 4], если $\eta_i = \eta$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ в теореме 7, то аппроксимация распределения $\text{binomial}(n, \eta)$ в (66) с математическим ожиданием $n\eta$ дает

$$I_f(U; Y_1^n) \lesssim I_{n\eta} \quad (67)$$

для любой цепи Маркова $U \rightarrow X_1^n \rightarrow Y_1^n$; это показывает, что из Y_1^n можно извлечь лишь информацию об U , содержащуюся в подмножествах X_1^n мощности, ограниченной величиной $n\eta$.

§ 4. Доказательства линейных границ между коэффициентами сжатия

В этом параграфе мы докажем теоремы 3 и 4. Основная идея доказательства состоит в оценивании сверху и снизу f -дивергенций в числителе и знаменателе определения 2, соответственно, через χ^2 -дивергенции. С этой целью в п. 4.1 мы приведем несколько простых границ между f -дивергенциями и χ^2 -дивергенцией, а в п. 4.2 докажем основные результаты.

4.1. Границы на f -дивергенции через χ^2 -дивергенцию. Вначале приведем границы между КЛ- и χ^2 -дивергенцией. Для вывода нашей нижней границы на КЛ-дивергенцию нам понадобится следующее “зависящее от распределений уточнение неравенства Пинскера”, доказанное в [91].

Лемма 1 (зависящее от распределений неравенство Пинскера [91, теорема 2.1]). Для любых вероятностных мер $R_X, P_X \in \mathcal{P}_X$ справедливо неравенство

$$D(R_X \| P_X) \geq \varphi \left(\max_{A \subseteq \mathcal{X}} \min \{P_X(A), 1 - P_X(A)\} \right) \|R_X - P_X\|_{\text{TV}}^2,$$

где функция $\varphi: [0, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}$ определяется как

$$\varphi(p) \triangleq \begin{cases} \frac{1}{1-2p} \log\left(\frac{1-p}{p}\right), & p \in [0, 1/2), \\ 2, & p = 1/2. \end{cases} \quad (68)$$

Более того, в этом неравенстве участвует оптимальная зависящая от распределений константа в том смысле, что для любого фиксированного $P_X \in \mathcal{P}_X$

$$\inf_{R_X \in \mathcal{P}_X \setminus \{P_X\}} \frac{D(R_X \| P_X)}{\|R_X - P_X\|_{\text{TV}}^2} = \varphi \left(\max_{A \subseteq \mathcal{X}} \min \{P_X(A), 1 - P_X(A)\} \right).$$

Напомним (см., например, [41, лемма 11.6.1]), что неравенство Пинскера утверждает, что для любых $R_X, P_X \in \mathcal{P}_X$

$$D(R_X \| P_X) \geq 2 \|R_X - P_X\|_{TV}^2. \quad (69)$$

Следовательно, лемма 1 точнее, чем неравенство Пинскера, поскольку имеет место неравенство $0 \leq \max_{A \subseteq \mathcal{X}} \min\{P_X(A), 1 - P_X(A)\} \leq 1/2$, и поэтому

$$\varphi\left(\max_{A \subseteq \mathcal{X}} \min\{P_X(A), 1 - P_X(A)\}\right) \geq 2, \quad (70)$$

где равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$\max_{A \subseteq \mathcal{X}} \min\{P_X(A), 1 - P_X(A)\} = \frac{1}{2}$$

(см. [91, § III]). Следующая лемма использует лемму 1 для оценки КЛ-дивергенции снизу через χ^2 -дивергенцию.

Лемма 2 (нижняя граница КЛ-дивергенции). *Для любых вероятностных мер $R_X, P_X \in \mathcal{P}_X$ справедливо*

$$D(R_X \| P_X) \geq \frac{\varphi\left(\max_{A \subseteq \mathcal{X}} \min\{P_X(A), 1 - P_X(A)\}\right) \min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x)}{2} \chi^2(R_X \| P_X),$$

где функция $\varphi: [0, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}$ определена в (68).

Доказательство. Если $R_X = P_X$ или $\min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x) = 0$, то неравенство выполнено тривиальным образом. (Заметим, что если $\min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x) = 0$ и $P_X(x^*) = 0 < R_X(x^*)$ для некоторого $x^* \in \mathcal{X}$, то $D(R_X \| P_X) = \chi^2(R_X \| P_X) = +\infty$, и можно считать, что неравенство выполнено.) Итак, без ограничения общности будем предполагать, что $R_X \neq P_X$ и $P_X \in \mathcal{P}_X^\circ$.

Так как χ^2 -дивергенция похожа на взвешенную ℓ^2 -норму, вначале применим лемму 1 и получим нижнюю границу

$$D(R_X \| P_X) \geq \varphi\left(\max_{A \subseteq \mathcal{X}} \min\{P_X(A), 1 - P_X(A)\}\right) \frac{\|R_X - P_X\|_1^2}{4}, \quad (71)$$

где используется характеристика расстояния по вариации через ℓ^1 -норму, приведенная в (2). Далее с учетом (4) заметим, что

$$\chi^2(R_X \| P_X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} |R_X(x) - P_X(x)| \left| \frac{R_X(x) - P_X(x)}{P_X(x)} \right| \leq \frac{\|R_X - P_X\|_\infty}{\min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x)} \|R_X - P_X\|_1.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \frac{\|R_X - P_X\|_1^2}{\min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x)} &\geq \chi^2(R_X \| P_X) \frac{\|R_X - P_X\|_1}{\|R_X - P_X\|_\infty} \geq \\ &\geq \chi^2(R_X \| P_X) \min_{\substack{S_X, Q_X \in \mathcal{P}_X \\ S_X \neq Q_X}} \frac{\|S_X - Q_X\|_1}{\|S_X - Q_X\|_\infty} = \\ &= 2\chi^2(R_X \| P_X), \end{aligned} \quad (72)$$

где использован тот факт, что

$$\min_{\substack{S_X, Q_X \in \mathcal{P}_X \\ S_X \neq Q_X}} \frac{\|S_X - Q_X\|_1}{\|S_X - Q_X\|_\infty} = 2. \quad (73)$$

Для доказательства (73) заметим, что для любых $S_X, Q_X \in \mathcal{P}_X$ (см., например, [92, лемма 1])

$$\|S_X - Q_X\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|S_X - Q_X\|_1,$$

поскольку $(S_X - Q_X)\mathbf{1} = 0$, и это неравенство на самом деле может быть точным. Например, выберем любую вероятностную меру $Q_X \in \mathcal{P}_X^0$ и положим $x_0 = \arg \min_{x \in \mathcal{X}} Q_X(x)$. Затем возьмем $S_X \in \mathcal{P}_X$, такую что $S_X(x_0) = Q_X(x_0) + \delta$ для неко-

торого достаточно малого $\delta > 0$, $S_X(x_1) = Q_X(x_1) - \delta$ для некоторого $x_1 \in \mathcal{X} \setminus \{x_0\}$ и $S_X(x) = Q_X(x)$ для всех остальных $x \in \mathcal{X} \setminus \{x_0, x_1\}$. При таком выборе S_X и Q_X получаем $\|S_X - Q_X\|_\infty = \delta = \frac{1}{2} \|S_X - Q_X\|_1$.

Наконец, объединяя (71) и (72), получаем

$$D(R_X \| P_X) \geq \frac{\varphi\left(\max_{A \subseteq \mathcal{X}} \min\{P_X(A), 1 - P_X(A)\}\right) \min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x)}{2} \chi^2(R_X \| P_X),$$

что завершает доказательство. \blacktriangle

Заметим, что если применить (70) к лемме 2, или, что то же самое, использовать стандартное неравенство Пинскера (69) вместо леммы 1 в доказательстве леммы 2, то получим хорошо известное более слабое неравенство (см., например, [34, формула (338)])

$$D(R_X \| P_X) \geq \min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x) \chi^2(R_X \| P_X) \quad (74)$$

для любых $R_X, P_X \in \mathcal{P}_X$.

Стоит отметить, что систематическим методом вывода оптимальных не зависящих от распределений границ между любыми двумя f -дивергенциями является метод *совместной области значений Харремоеса – Вайды* [93]⁸. Однако для вывода нижних границ на КЛ-дивергенцию через χ^2 -дивергенцию мы не можем использовать эту технику, поскольку таких общих нижних границ не существует (когда оба распределения на входе изменяются) [38, п. 7.3]. С другой стороны, зависящие от распределений границы легко можно находить, используя подходящую технику в каждом конкретном случае. Наше доказательство леммы 2 использует один из таких подходов, основанный на неравенстве Пинскера.

Хотелось бы попытаться улучшить лемму 2, используя лучшие нижние границы на КЛ-дивергенцию через расстояние по вариации. Так, наилучшей возможной границей снизу на КЛ-дивергенцию через расстояние по вариации является нижняя граница их совместной области значений Харремоеса – Вайды (см. [93, рис. 1]). Эта нижняя граница, известная как *точная нижняя граница Вайды*, дает наименьшую возможную КЛ-дивергенцию для любого значения расстояния по вариации и полностью описывается параметрической формулой в [94, теорема 1] (см. также [38, п. 7.2.2]). Хотя точная нижняя граница Вайды дает нелинейную границу снизу на КЛ-дивергенцию через χ^2 -дивергенцию, эту нижнюю границу трудно применить в сочетании с леммой 3 (приведенной ниже) для вывода нелинейной верхней

⁸ «Не зависящей от распределений» границей между двумя f -дивергенциями называется граница, зависящая от распределений на входе только через соответствующие f -дивергенции.

границы на отношении КЛ-дивергенций через отношение χ^2 -дивергенций (см. доказательство теоремы 4 в п. 4.2). По этой причине мы прибегаем к использованию простых линейных границ между КЛ- и χ^2 -дивергенцией, что приводит к линейной границе в теореме 4.

Другой, более тонкой причиной использования χ^2 -дивергенции для доказательства линейной нижней границы на КЛ-дивергенцию является возможность применить лемму 1. Хотя неравенство Пинскера и является наилучшей нижней границей на КЛ-дивергенцию через квадрат расстояния по вариации по всем парам вероятностных мер на входе (см., например, [94, формула (9)]), коэффициенты сжатия в п. 3.2 имеют фиксированную маргинальную вероятностную меру P_X . Поэтому можно использовать зависящее от распределений улучшение неравенства Пинскера из леммы 1 для вывода более точной границы, чем (74).

Теперь приведем границу сверху на КЛ-дивергенцию через χ^2 -дивергенцию, которая тривиально следует из неравенства Йенсена. Эта граница была выведена в контексте изучения эргодичности цепей Маркова в [95] и затем повторно получена при исследовании неравенств, связанных с f -дивергенциями (см. [96, 97], а также [98, теорема 5]).

Лемма 3 (верхняя граница КЛ-дивергенции [95]). Для заданных вероятностных мер $P_X, R_X \in \mathcal{P}_X$ справедливо неравенство

$$D(R_X \parallel P_X) \leq \log(1 + \chi^2(R_X \parallel P_X)) \leq \chi^2(R_X \parallel P_X).$$

Доказательство. Для полноты изложения приведем доказательство леммы (см. [96]). Предположим без ограничения общности, что не существует $x \in \mathcal{X}$, такого что $R_X(x) > P_X(x) = 0$. (Если это не так, то $\chi^2(R_X \parallel P_X) = +\infty$, и неравенство тривиальным образом выполнено.) Итак, рассматривая в качестве \mathcal{X} носитель P_X , полагаем, что $P_X \in \mathcal{P}_X^\circ$ (гарантируя тем самым, что все дальнейшие величины будут конечными). Так как функция $x \mapsto \log(x)$ выпукла вверх, то из неравенства Йенсена получаем

$$\begin{aligned} D(R_X \parallel P_X) &= \sum_{x \in \mathcal{X}} R_X(x) \log\left(\frac{R_X(x)}{P_X(x)}\right) \leq \log\left(\sum_{x \in \mathcal{X}} \frac{R_X(x)^2}{P_X(x)}\right) = \\ &= \log(1 + \chi^2(R_X \parallel P_X)) \leq \chi^2(R_X \parallel P_X), \end{aligned}$$

где первое равенство следует из (3), третье – из (4) после некоторых преобразований, а последнее – из хорошо известного неравенства $\log(1 + x) \leq x$ для всех $x > -1$. \blacktriangle

Отметим, что первая нелинейная граница в лемме 3 покрывает метод совместной области значений Харремоеа – Вайды [38, п. 7.3]. Хотя она и точнее, чем вторая линейная граница, в доказательстве теоремы 4 (как объяснялось выше) мы используем именно вторую. Вторая граница также была получена в [99, лемма 6.3].

Теперь приведем границы между общими f -дивергенциями и χ^2 -дивергенцией. Для вывода нашей нижней границы на f -дивергенции вначале сформулируем обобщение неравенства Пинскера для f -дивергенций, доказанное в [79].

Лемма 4 (обобщенное неравенство Пинскера для f -дивергенции [79, теорема 3]). Пусть задана выпуклая функция $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, трижды дифференцируемая в единице, такая что $f(1) = 0$ и $f''(1) > 0$, удовлетворяющая условию

$$(f(t) - f'(1)(t - 1)) \left(1 - \frac{f'''(1)}{3f''(1)}(t - 1)\right) \geq \frac{f''(1)}{2}(t - 1)^2 \quad (75)$$

для любого $t \in (0, \infty)$. Тогда для любых $R_X, P_X \in \mathcal{P}_X$ справедливо

$$D_f(R_X \parallel P_X) \geq 2f''(1) \|R_X - P_X\|_{\text{TV}}^2.$$

Более того, в этом неравенстве участвует оптимальная константа в том смысле, что

$$\inf_{\substack{R_X, P_X \in \mathcal{P}_X \\ R_X \neq P_X}} \frac{D_f(R_X \| P_X)}{\|R_X - P_X\|_{TV}^2} = 2f''(1).$$

Заметим, что функция $f(t) = t \log(t)$ удовлетворяет условиям леммы 4, причем $f''(1) = 1$, как показано в Приложении Е; отсюда вытекает стандартное неравенство Пинскера (69). Поскольку условие (75) может быть нелегко проверить для других f -дивергенций, в [79, следствие 4] приведены достаточные условия для неравенства (75). (Эти условия можно проверить и получить вариант неравенства Пинскера для, например, *дивергенций Реньи* порядка $\alpha \in (0, 1)$ [79, следствие 6].) В следующей лемме с помощью леммы 4 устанавливается нижняя граница на определенные f -дивергенции через χ^2 -дивергенцию, что соответствует лемме 2 (или, точнее, неравенству (74), так как оно вытекает из стандартного неравенства Пинскера).

Лемма 5 (нижняя граница f -дивергенции). Пусть задана выпуклая функция $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, трижды дифференцируемая в единице, такая что $f(1) = 0$ и $f''(1) > 0$, удовлетворяющая условию (75) для любого $t \in (0, \infty)$. Тогда для любых вероятностных мер $R_X \in \mathcal{P}_X$ и $P_X \in \mathcal{P}_X^\circ$ справедливо неравенство

$$D_f(R_X \| P_X) \geq f''(1) \min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x) \chi^2(R_X \| P_X).$$

Доказательство. Будем следовать доказательству леммы 2, внося необходимые изменения. Предположим без ограничения общности, что $R_X \neq P_X$. Обобщенное неравенство Пинскера для f -дивергенций из леммы 4 дает

$$D_f(R_X \| P_X) \geq \frac{f''(1)}{2} \|R_X - P_X\|_1^2,$$

используя характеризацию расстояния по вариации через ℓ^1 -норму, данную в (2). Требуемый результат получается применением (72) к этому неравенству. \blacktriangle

Заметим, что если в лемме 5 положить $f(t) = t \log(t)$, получим неравенство (74).

Наконец, приведем верхнюю границу на некоторые f -дивергенции через χ^2 -дивергенцию, аналогичную лемме 3. Эта верхняя граница была доказана в [8, лемма А.2] в предположении, что f дифференцируема, но как мы увидим ниже, нужно лишь проверить дифференцируемость в единице. (Было бы поучительно еще раз посмотреть на доказательство леммы 3, чтобы увидеть, как нижеследующее доказательство обобщает ее на f -дивергенции.)

Лемма 6 (верхняя граница f -дивергенции [8, лемма А.2]). Пусть дана выпуклая функция $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, дифференцируемая в единице, такая что $f(1) = 0$ и $f(0) < \infty$, и пусть разностное отношение $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, определяемое как

$$g(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t},$$

выпукло вверх. Тогда для любых вероятностных мер $R_X, P_X \in \mathcal{P}_X$ справедливо неравенство

$$D_f(R_X \| P_X) \leq (f'(1) + f(0)) \chi^2(R_X \| P_X).$$

Доказательство. Для полноты изложения приведем доказательство из [8]. Как и в доказательстве леммы 3, можно предполагать без ограничения общности, что $P_X \in \mathcal{P}_X^\circ$, так что все рассматриваемые далее величины конечны. Тогда имеет

место следующая цепочка равенств и неравенств:

$$\begin{aligned}
D_f(R_X \| P_X) &= \sum_{x \in \mathcal{X}} P_X(x) f\left(\frac{R_X(x)}{P_X(x)}\right) = \\
&= f(0) + \sum_{x \in \mathcal{X}} R_X(x) g\left(\frac{R_X(x)}{P_X(x)}\right) \leq f(0) + g\left(\sum_{x \in \mathcal{X}} \frac{R_X(x)^2}{P_X(x)}\right) = \\
&= f(0) + g(1 + \chi^2(R_X \| P_X)) \leq \\
&\leq f(0) + g(1) + g'(1) \chi^2(R_X \| P_X) = (f'(1) + f(0)) \chi^2(R_X \| P_X),
\end{aligned} \tag{76}$$

где во втором равенстве используется соглашение $0g(0) = 0$, третье следует из неравенства Йенсена, так как функция $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла вверх, пятое также вытекает из выпуклости $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, как показано в [100, п. 3.1.3], а последнее неравенство справедливо, поскольку $g(1) = -f(0)$ (так как $f(1) = 0$) и

$$\begin{aligned}
g'(1) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{g(1 + \delta) + f(0)}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(1 + \delta) + \delta f(0)}{\delta(1 + \delta)} = \\
&= \left(\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \delta} \right) \left(f(0) + \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(1 + \delta)}{\delta} \right) = f'(1) + f(0),
\end{aligned}$$

что завершает доказательство. \blacktriangle

Заметим, что выражение (76) является аналогом более точной (нелинейной) границы из леммы 3. Кроме того, отметим, что в лемме 6 можно использовать функцию $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ (в предположении ее выпуклости вверх) вместо разностного отношения. Доказательство останется тем же, но с использованием константы $f'(1)$ вместо $f'(1) + f(0)$. Однако мы для доказательства леммы 6 выбрали разностное отношение ввиду свойства аффинной инвариантности f -дивергенций (см. п. 2.1). Нетрудно проверить, что величина $f'(1) + f(0)$ инвариантна относительно подходящих аффинных сдвигов, что неверно для $f'(1)$. Также отметим, что константа $f''(1)$ в лемме 5 инвариантна относительно соответствующих аффинных сдвигов.

4.2. Доказательства теорем 3 и 4. Напомним (см. начало п. 3.1), что мы рассматриваем совместную вероятностную меру $P_{X,Y}$, состоящую из $P_X \in \mathcal{P}_X^\circ$ и $P_{Y|X} = W \in \mathcal{P}_{Y|X}$, где $P_Y = P_X W \in \mathcal{P}_Y^\circ$. Теперь с помощью лемм 2 и 3 из п. 4.1 мы можем доказать теорему 4.

Доказательство теоремы 4. Для любой вероятностной меры $R_X \in \mathcal{P}_X$, такой что $R_X \neq P_X$, имеем

$$\frac{D(R_X W \| P_Y)}{D(R_X \| P_X)} \leq \frac{2\chi^2(R_X W \| P_Y)}{\varphi\left(\max_{A \subseteq \mathcal{X}} \min\{P_X(A), 1 - P_X(A)\}\right) \min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x) \chi^2(R_X \| P_X)}$$

в силу лемм 2 и 3. Переходя к супремуму по всем $R_X \neq P_X$ в обеих частях неравенства, получаем

$$\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X}) \leq \frac{2\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})}{\varphi\left(\max_{A \subseteq \mathcal{X}} \min\{P_X(A), 1 - P_X(A)\}\right) \min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x)}$$

с учетом (17) и (22), что и завершает доказательство. \blacktriangle

Уместно сделать несколько замечаний. Во-первых, если в этом доказательстве применить (74) вместо леммы 2, получим доказательство следствия 1.

Во-вторых, при доказательстве следствия 1 в [1, теорема 10] была также доказана следующая более слабая граница сверху на $\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X})$ (см. [1, теорема 9]):

$$\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X}) \leq \frac{2}{\min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x)} \eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}), \quad (77)$$

также независимо полученная в [8, формула III.19]. Наше доказательство соотношения (77) в [1, теорема 9] использовало следующий в два раза худший вариант неравенства (74) (см. [1, лемма 6]):

$$D(S_X \parallel Q_X) \geq \frac{\min_{x \in \mathcal{X}} Q_X(x)}{2} \chi^2(S_X \parallel Q_X) \quad (78)$$

для всех $S_X, Q_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$. Это неравенство вытекает из доказательства леммы 2 с использованием границы $\|S_X - Q_X\|_{\infty} \leq \|S_X - Q_X\|_1$ (не учитывающей тот факт, что $(S_X - Q_X)\mathbf{1} = 0$) вместо (73) и последующим применением оценки (70) к получающейся нижней границе на КЛ-дивергенцию. В качестве альтернативы для полноты изложения в Приложении F мы даем доказательство формулы (78) через *дивергенции Брегмана* (см. [1, лемма 6]). То, что границу (78) можно улучшить вдвое до границы (74), было также указано в [34, замечание 33], где отмечалось, что наш результат [1, теорема 9] (приведенный в (77)) можно улучшить вдвое, используя (74) вместо (78). По-видимому, авторы работы [34] не заметили наш результат [1, теорема 10] (представленный в следствии 1), в котором в точности было приведено это улучшение вдвое.

И наконец, отметим, что в [8, п. III-D] также приведены верхние границы на $\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X})$, использующие функцию $\varphi: [0, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}$, что вытекает из улучшенного неравенства Пинскера в [91]. Однако эти верхние границы выражены не через $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$.

Теперь, объединяя результаты лемм 5 и 6 из п. 4.1, докажем теорему 3.

Доказательство теоремы 3. Условия теоремы 3 включают в себя все условия лемм 5 и 6. Следовательно, применяя леммы 5 и 6, для любой вероятностной меры $R_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$, такой что $R_X \neq P_X$, получаем

$$\frac{D_f(R_X W \parallel P_Y)}{D_f(R_X \parallel P_X)} \leq \frac{(f'(1) + f(0))\chi^2(R_X W \parallel P_Y)}{f''(1) \min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x) \chi^2(R_X \parallel P_X)}.$$

Переходя к супремуму по всем $R_X \neq P_X$ в обеих частях этого неравенства, получаем

$$\eta_f(P_X, P_{Y|X}) \leq \frac{f'(1) + f(0)}{f''(1) \min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x)} \eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}),$$

где использовались определение 2 и соотношение (22), что и завершает доказательство. \blacktriangle

Отметим, что в [8, теорема III.4] приведена альтернативная линейная граница сверху на $\eta_f(P_X, P_{Y|X})$ через $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$. Пусть $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — дважды дифференцируемая выпуклая функция, такая что $f(1) = 0$ и $f(0) < \infty$, строго выпуклая в единице и имеющая невозрастающую вторую производную. Если к тому же предположить, что разностное отношение $t \mapsto \frac{f(t) - f(0)}{t}$ выпукло вверх, то справедлива следующая граница [8, теорема III.4]:

$$\eta_f(P_X, P_{Y|X}) \leq \frac{2(f'(1) + f(0))}{f''(1/p_*)} \eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}), \quad (79)$$

где $p_* = \min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x)$. Следовательно, если функция f к тому же трижды дифференцируема в единице, имеет $f''(1) > 0$ и удовлетворяет условию (75) для любого $t \in (0, \infty)$, то можно усилить верхнюю границу теоремы 3 до

$$\eta_f(P_X, P_{Y|X}) \leq \min \left\{ \frac{f'(1) + f(0)}{f''(1)p_*}, \frac{2(f'(1) + f(0))}{f''(1/p_*)} \right\} \eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}). \quad (80)$$

Заметим, что наша граница из теоремы 3 точнее границы (79) тогда и только тогда, когда

$$\frac{2(f'(1) + f(0))}{f''(1/p_*)} \geq \frac{f'(1) + f(0)}{f''(1)p_*} \iff 2f''(1)p_* \geq f''(1/p_*). \quad (81)$$

Одной из функций, удовлетворяющих условиям теоремы 3 и неравенствам (79) и (81), является $f(t) = t \log(t)$. Это и дает улучшение в следствии 1 (получаемом из теоремы 3) по сравнению с неравенством (77) (получаемым из [8, теорема III.4]).

В качестве другого примера рассмотрим функцию

$$f(t) = \frac{t^\alpha - 1}{\alpha - 1}, \quad \alpha \in (0, 2] \setminus \{1\},$$

задающую дивергенцию Хеллингера порядка α (см. п. 2.1). Непосредственными вычислениями нетрудно проверить, что эта функция удовлетворяет условиям теоремы 3 и неравенству (79) (см. [79, следствие 6], [8, п. III-B, с. 3362]). В этом случае наша граница из теоремы 3 точнее, чем (79), для всех дивергенций Хеллингера порядка α , удовлетворяющих условию (81), т.е.

$$2f''(1)p_* = 2\alpha p_* \geq \alpha(1/p_*)^{\alpha-2} = f''(1/p_*) \iff p_*^{\alpha-1} \geq \frac{1}{2},$$

или, что равносильно, $0 < \alpha \leq 1 + (\log(2)/\log(1/p_*))$ (где $\alpha = 1$ соответствует КЛ-дивергенции – см. п. 2.1).

4.3. Эргодичность цепей Маркова. В этом пункте мы выведем из следствия 1 результат, иллюстрирующий одно из применений верхних границ на коэффициенты сжатия совместных распределений через $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$. Рассмотрим матрицу *примитивного* марковского ядра $W \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}|X}$ на пространстве состояний \mathcal{X} , задающую *неприводимую* и *апериодическую* (однородную по времени) дискретную цепь Маркова с единственной стационарной вероятностной мерой $P_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}^o$, такой что $P_X W = P_X$ (см. [29, п. 1.3]). Для простоты предположим также, что W *обратима* (т.е. имеют место уравнения детального баланса $P_X(x)[W]_{x,y} = P_X(y)[W]_{y,x}$ для всех $x, y \in \mathcal{X}$ [29, п. 1.6]). Это означает, что матрица W самосопряжена относительно взвешенного скалярного произведения, задаваемого P_X , и все ее собственные значения $1 = \lambda_1(W) > \lambda_2(W) \geq \dots \geq \lambda_{|\mathcal{X}|}(W) > -1$ вещественны. Через $\mu(W) \triangleq \max\{|\lambda_2(W)|, |\lambda_{|\mathcal{X}|}(W)|\} \in [0, 1)$ обозначается модуль второго по абсолютной величине собственного значения W (см. п. 2.3).

Так как эта цепь Маркова *эргодична*, то $\lim_{n \rightarrow \infty} R_X W^n = P_X$ для всех $R_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ [29, теорема 4.9]. Отсюда $\lim_{n \rightarrow \infty} D(R_X W^n \| P_X) = 0$ из непрерывности КЛ-дивергенции [38, предложение 3.1]. Оценим скорость, с которой убывает это “расстояние до стационарности” (измеряемое КЛ-дивергенцией). Наивный подход состоит в рекурсивном применении СНОД (15) для КЛ-дивергенции, что дает

$$D(R_X W^n \| P_X) \leq \eta_{\text{KL}}(P_X, W)^n D(R_X \| P_X) \quad (82)$$

для всех $R_X \in \mathcal{P}_X$ и всех $n \in \mathbb{N}$. С учетом (17) отсюда следует, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \eta_{\text{KL}}(P_X, W^n)^{\frac{1}{n}} \leq \eta_{\text{KL}}(P_X, W), \quad (83)$$

что оказывается довольно слабой границей на скорость в общем случае.

При больших n , поскольку $R_X W^n$ близка к P_X , интуитивно следует ожидать, что $D(R_X W^n \| P_X)$ ведет себя как χ^2 -дивергенция (см. (13) в п. 2.1), и это наводит на мысль, что $\eta_{\text{KL}}(P_X, W^n)$ должна по порядку величины совпадать с $\eta_{\chi^2}(P_X, W)^n$. Это интуитивная догадка строго доказана в [17, § 6]. Действительно, когда $\mu(W)$ строго больше модуля третьего по абсолютной величине собственного значения W , из [17, следствие 6.2] вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D(R_X W^n \| P_X)}{D(R_X W^{n-1} \| P_X)} \leq \mu(W)^2 \quad (84)$$

для всех $R_X \in \mathcal{P}_X$, таких что знаменатель всегда положителен. (Этот предел равен либо 0, либо $\mu(W)^2$.) Поэтому, используя сходимость по Чезаро и масштабирование, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D(R_X W^n \| P_X)}{D(R_X W^{n-1} \| P_X)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{D(R_X W^n \| P_X)}{D(R_X \| P_X)} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \mu(W)^2, \quad (85)$$

что позволяет предположить, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} \eta_{\text{KL}}(P_X, W^n)^{\frac{1}{n}} \leq \mu(W)^2$. Следующий результат показывает, что это неравенство на самом деле точное.

Предложение 7 (скорость сходимости). *Для любой неприводимой апериодической обратимой цепи Маркова с ядром $W \in \mathcal{P}_{X|X}$ и стационарной вероятностной мерой $P_X \in \mathcal{P}_X$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_{\text{KL}}(P_X, W^n)^{\frac{1}{n}} = \eta_{\chi^2}(P_X, W) = \mu(W)^2.$$

Доказательство. Так как W обратима, а P_X – ее инвариантная мера, то МДП

$$B = \text{diag}(\sqrt{P_X}) W \text{diag}(\sqrt{P_X})^{-1}$$

симметрична и подобна W (см. определение (24)). Следовательно, W и B имеют одинаковые собственные значения, и $\mu(W)$ является вторым по величине сингулярным числом для B . Применяя предложение 2 и (23), получаем $\eta_{\chi^2}(P_X, W) = \mu(W)^2$, что доказывает второе равенство.

Аналогично, $\eta_{\chi^2}(P_X, W^n) = \mu(W^n)^2$, так как W^n обратима для любого $n \geq 1$. Отсюда

$$\eta_{\chi^2}(P_X, W^n) = \mu(W^n)^2 = \mu(W)^{2n} = \eta_{\chi^2}(P_X, W)^n, \quad (86)$$

где второе равенство справедливо, поскольку собственные значения W^n являются n -ми степенями собственных значений W . С учетом (86), п. 7 предложения 3 и следствия 1 получаем

$$\eta_{\chi^2}(P_X, W)^n \leq \eta_{\text{KL}}(P_X, W^n) \leq \frac{\eta_{\chi^2}(P_X, W)^n}{\min_{x \in X} P_X(x)}.$$

Остается извлечь корни n -й степени и перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$. \blacktriangle

Предложение 7 описывает хорошо понимаемое явление, что $D(R_X W^n \| P_X)$ убывает со скоростью, задаваемой величиной $\mu(W)^2 = \eta_{\chi^2}(P_X, W)$. В более широком

смысле оно показывает, что границы следствия 1 и теорем 3 и 4 полезны в режиме, когда случайные величины X и Y слабо зависимы (например, X – начальное состояние эргодической обратимой цепи Маркова, а Y – ее состояние после большого числа шагов). В таком режиме эти границы довольно точны и превосходят границу через η_{TV} в п. 7 предложения 5.

4.4. Тензоризация границ между коэффициентами сжатия. В отсутствие слабой зависимости верхние границы следствия 1 и теорем 3 и 4 могут быть слабыми. На самом деле, их можно считать сколь угодно слабыми, поскольку константы в этих границах не тензоризируются в отличие от коэффициентов сжатия (последнее показано в п. 5 предложения 3). Например, если дана $P_{X,Y}$ с $X \sim \text{Bernoulli}(1/2)$, то константа в верхней границе следствия 1 равна $1/\min_{x \in \{0,1\}} P_X(x) = 2$. Если вместо этого

рассмотреть последовательность независимых и одинаково распределенных (н.о.р.) согласно $P_{X,Y}$ пар $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$, то константа в верхней границе следствия 1 равна $1/\min_{x_1^n \in \{0,1\}^n} P_{X_1^n}(x_1^n) = 2^n$. Но поскольку $\eta_{KL}(P_{X_1^n}, P_{Y_1^n|X_1^n}) = \eta_{KL}(P_X, P_{Y|X})$ и $\eta_{\chi^2}(P_{X_1^n}, P_{Y_1^n|X_1^n}) = \eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$ по свойству тензоризации из п. 5 предложения 3, то константа 2^n становится сколь угодно плохой с ростом n . Эту атаку на следствие 1 с помощью н.о.р. пар частично позволяет отразить

Следствие 2 (тензоризованная КЛ-граница на коэффициенты сжатия). *Если пары $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ н.о.р. с совместной вероятностной мерой $P_{X,Y}$, такой что $P_X \in \mathcal{P}_X^\circ$ и $P_Y \in \mathcal{P}_Y^\circ$, то*

$$\eta_{KL}(P_{X_1^n}, P_{Y_1^n|X_1^n}) \leq \frac{\eta_{\chi^2}(P_{X_1^n}, P_{Y_1^n|X_1^n})}{\min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x)}.$$

Доказательство. Это неравенство тривиальным образом вытекает из следствия 1 и свойства тензоризации в п. 5 предложения 3. \blacktriangle

В контексте произведений распределений это следствие позволяет использовать в верхней границе следствия 1 более точный множитель $1/\min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x)$ вместо $1/\min_{x_1^n \in \mathcal{X}^n} P_{X_1^n}(x_1^n) = \left(1/\min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x)\right)^n$. Аналогичные уточнения в этом контексте можно также сделать для констант в теоремах 3 и 4. Таким образом, тензоризация может улучшить верхние границы в следствии 1 и теоремах 3, 4.

§ 5. Доказательство эквивалентности между гауссовскими коэффициентами сжатия

В этом параграфе мы докажем теорему 5. Напомним (см. п. 3.3), что мы рассматриваем совместно гауссовские плотности распределения $P_{X,Y}$, заданные в (52), с маргинальными плотностями распределения на входе $P_X = \mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$ и условными плотностями распределения $P_{Y|X} = \{P_{Y|X=x} = \mathcal{N}(x, \sigma_W^2) : x \in \mathbb{R}\}$, где $\sigma_X^2, \sigma_W^2 > 0$. Пусть \mathcal{T} – множество всех функций распределения на \mathbb{R} с ограниченным существенным носителем. Таким образом, $R_X \in \mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда существует $C > 0$, такая что $R_X = R_X \mathbb{1}_{[-C, C]}$ почти всюду по мере Лебега, где через $\mathbb{1}_{[-C, C]}: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ обозначена индикаторная функция на $[-C, C]$:

$$\mathbb{1}_{[-C, C]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-C, C], \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (87)$$

Вначале докажем следующую полезную лемму.

Лемма 7 (характеризация η_{KL} через функции с ограниченным носителем). *Супремум в (55) можно ограничить на плотности распределения из множеств*

ва \mathcal{T} :

$$\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X}) = \sup_{\substack{R_X \in \mathcal{T} \\ D(R_X \| P_X) < +\infty}} \frac{D(R_Y \| P_Y)}{D(R_X \| P_X)},$$

где $R_Y = R_X * P_W$ для каждой плотности распределения R_X , $P_W = \mathcal{N}(0, \sigma_W^2)$, а ограничение $D(R_X \| P_X) > 0$ автоматически выполнено для любой $R_X \in \mathcal{T}$, поскольку $P_X = \mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную плотность распределения R_X , такую что $0 < D(R_X \| P_X) < +\infty$, и зададим соответствующую последовательность функций плотности распределения

$$R_X^{(n)} = R_X \mathbb{1}_{[-n, n]} / C_n \in \mathcal{T},$$

где $C_n = \mathbf{E}_{R_X}[\mathbb{1}_{[-n, n]}(X)]$, индексы $n \in \mathbb{N}$ достаточно большие, так что $C_n > 0$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 1$. Заметим, что

$$D(R_X^{(n)} \| P_X) = \frac{1}{C_n} \mathbf{E}_{R_X} \left[\mathbb{1}_{[-n, n]}(X) \log \left(\frac{R_X(X)}{P_X(X)} \right) \right] - \log(C_n).$$

Очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{[-n, n]} \log(R_X/P_X) = \log(R_X/P_X)$ поточечно R_X -п.н., а также $|\mathbb{1}_{[-n, n]} \log(R_X/P_X)| \leq |\log(R_X/P_X)|$ поточечно R_X -п.н., так что выполнено неравенство $\mathbf{E}_{R_X} [|\log(R_X(X)/P_X(X))|] < +\infty$ (где конечность следует из того факта, что $D(R_X \| P_X) < +\infty$). Отсюда по теореме о мажорируемой сходимости получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(R_X^{(n)} \| P_X) = D(R_X \| P_X). \quad (88)$$

Далее, пусть $R_Y^{(n)} = R_X^{(n)} * P_W$, так что для любого $y \in \mathbb{R}$

$$R_Y(y) - C_n R_Y^{(n)}(y) = \mathbf{E}_{R_X} [\mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus [-n, n]}(X) P_W(y - X)].$$

Так как для всех $x, y \in \mathbb{R}$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus [-n, n]}(x) P_W(y - x) = 0$, а также $0 \leq \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus [-n, n]}(x) P_W(y - x) \leq P_W(y - x)$, так что $\mathbf{E}_{R_X} [P_W(y - X)] = R_Y(y) < +\infty$, применяя теорему о мажорируемой сходимости, получаем поточечную сходимость функций плотности распределения $\{R_Y^{(n)}\}$:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} C_n R_Y^{(n)}(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_Y^{(n)}(y) = R_Y(y).$$

Отсюда следует, что $R_Y^{(n)}$ слабо сходится к R_Y при $n \rightarrow \infty$ по лемме Шеффе. Следовательно, согласно слабой полунепрерывности КЛ-дивергенции снизу [38, теорема 3.6, п. 3.5] имеем

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} D(R_Y^{(n)} \| P_Y) \geq D(R_Y \| P_Y). \quad (89)$$

Объединяя (88) и (89), получаем

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{D(R_Y^{(n)} \| P_Y)}{D(R_X^{(n)} \| P_X)} \geq \frac{D(R_Y \| P_Y)}{D(R_X \| P_X)}. \quad (90)$$

Для завершения доказательства применим рассуждения, основанные на “диагональном методе”. Пусть $\{R_{X, m} : m \in \mathbb{N}\}$ – последовательность функций плотности

распределения, таких что $0 < D(R_{X,m} \| P_X) < +\infty$ для всех $m \in \mathbb{N}$, достигающая супремума в (55):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{D(R_{Y,m} \| P_Y)}{D(R_{X,m} \| P_X)} = \eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X}),$$

где $R_{Y,m} = R_{X,m} * P_W$. Тогда в силу (90) можно построить последовательность $\{R_{X,m}^{(n(m))} \in \mathcal{T} : m \in \mathbb{N}\}$, где каждое $n(m)$ выбирается так, чтобы для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{D(R_{Y,m}^{(n(m))} \| P_Y)}{D(R_{X,m}^{(n(m))} \| P_X)} \geq \frac{D(R_{Y,m} \| P_Y)}{D(R_{X,m} \| P_X)} - \frac{1}{2^m},$$

где $R_{Y,m}^{(n(m))} = R_{X,m}^{(n(m))} * P_W$. Устремляя $m \rightarrow \infty$, получаем

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{D(R_{Y,m}^{(n(m))} \| P_Y)}{D(R_{X,m}^{(n(m))} \| P_X)} \geq \eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X}).$$

Поскольку супремум в (55) берется по всем плотностям распределения (которые заведомо включают в себя все плотности распределения из \mathcal{T}), это неравенство на самом деле является равенством, что и завершает доказательство. \blacktriangle

Теперь докажем теорему 5, пользуясь леммой 7, которая гарантирует, что все дифференциальные энтропии, участвующие в нижеследующих рассуждениях, корректно определены и конечны.

Доказательство теоремы 5. Вначале заметим, что

$$\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}) = \rho(X; Y)^2 = \frac{\text{Cov}(X, Y)^2}{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)} = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_W^2},$$

где первое равенство – это в точности соотношение (23) (справедливое для общих случайных величин [11]), второе вытекает из седьмой аксиомы Реньи, гласящей, что $\rho(X; Y)$ равно абсолютной величине коэффициента корреляции Пирсона совместно гауссовских величин X и Y [12], а последнее получается непосредственными вычислениями.

Теперь докажем, что для любого $p \geq \sigma_X^2$

$$\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X}) \geq \eta_{\text{KL}}^{(p)}(P_X, P_{Y|X}) \geq \eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}).$$

Первое неравенство очевидно ввиду (55) и (57). Для второго неравенства положим $R_X = \mathcal{N}(\sqrt{\delta}, \sigma_X^2 - \delta)$ и $R_Y = R_X * P_W = \mathcal{N}(\sqrt{\delta}, \sigma_X^2 + \sigma_W^2 - \delta)$ для любого $\delta > 0$. Тогда получаем

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{D(R_Y \| P_Y)}{D(R_X \| P_X)} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\log\left(\frac{\sigma_X^2 + \sigma_W^2}{\sigma_X^2 + \sigma_W^2 - \delta}\right)}{\log\left(\frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 - \delta}\right)} = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_W^2},$$

где первое равенство получается непосредственными вычислениями (см. [38, формула (1.17)]), а второе следует из правила Лопиталья. Так как $\mathbf{E}_{R_X}[X^2] = \sigma_X^2$ для любого $\delta > 0$, то $\eta_{\text{KL}}^{(p)}(P_X, P_{Y|X}) \geq \sigma_X^2 / (\sigma_X^2 + \sigma_W^2)$ для любого $p \geq \sigma_X^2$.

Поэтому достаточно доказать, что $\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X}) \leq \sigma_X^2 / (\sigma_X^2 + \sigma_W^2)$. С учетом леммы 7 это равносильно тому, что для любой плотности распределения $R_X \in \mathcal{T}$,

такой что $D(R_X \| P_X) < +\infty$,

$$\frac{D(R_Y \| P_Y)}{D(R_X \| P_X)} \leq \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_W^2}. \quad (91)$$

Для любой плотности распределения R_X определим ее *дифференциальную энтропию* $h(R_X) \triangleq -\mathbf{E}_{R_X}[\log(R_X(X))]$. Чтобы проверить, что эти величины корректно определены и конечны для $R_X \in \mathcal{T}$, используем рассуждение из [101, лемма 8.3.1, теорема 8.3.3]. Заметим, что для всех $x \in \text{ess sup}(R_X)$

$$\log(R_X(x)) = \log\left(\frac{R_X(x)}{P_X(x)}\right) - \frac{1}{2} \log(2\pi\sigma_X^2) - \frac{x^2}{2\sigma_X^2},$$

где через $\text{ess sup}(\cdot)$ обозначен существенный носитель измеримой по Борелю функции относительно меры Лебега. Поскольку величина $D(R_X \| P_X)$ должна быть конечна в формуле (55), а $X^2 \geq 0$, можно перейти к математическим ожиданиям относительно R_X :

$$-h(R_X) = D(R_X \| P_X) - \frac{1}{2} \log(2\pi\sigma_X^2) - \frac{\mathbf{E}_{R_X}[X^2]}{2\sigma_X^2}, \quad (92)$$

откуда следует, что $h(R_X)$ существует всегда, она конечна, если $\mathbf{E}_{R_X}[X^2] < +\infty$, и $h(R_X) = +\infty$, когда $\mathbf{E}_{R_X}[X^2] = +\infty$. Кроме того, если функция плотности распределения $R_X \in \mathcal{T}$ имеет ограниченный существенный носитель, то $\mathbf{E}_{R_X}[X^2] < +\infty$, и $h(R_X)$ определена и конечна.

Пусть $R_X \in \mathcal{T}$ и $R_Y = R_X * P_W$ имеют вторые моменты $\mathbf{E}_{R_X}[X^2] = \sigma_X^2 + q > 0$ и $\mathbf{E}_{R_Y}[Y^2] = \sigma_X^2 + \sigma_W^2 + q > 0$ для некоторого $q > -\sigma_X^2$. Используя (92) и [38, формула (1.20)], получаем

$$\begin{aligned} D(R_X \| P_X) &= \frac{1}{2} \log(2\pi\sigma_X^2) + \frac{\sigma_X^2 + q}{2\sigma_X^2} - h(R_X) = h(P_X) - h(R_X) + \frac{q}{2\sigma_X^2}, \\ D(R_Y \| P_Y) &= h(P_Y) - h(R_Y) + \frac{q}{2(\sigma_X^2 + \sigma_W^2)}, \end{aligned}$$

где $h(R_Y)$ существует и конечна, так как $\mathbf{E}_{R_Y}[Y^2]$ конечно (как показано выше с помощью (92)). Значит, достаточно доказать, что

$$h(P_Y) - h(R_Y) \leq \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_W^2} (h(P_X) - h(R_X)), \quad (93)$$

что равносильно (91). Перепишем (93) в виде

$$\begin{aligned} (e^{2h(P_Y) - 2h(R_Y)})^{\sigma_X^2 + \sigma_W^2} &\leq (e^{2h(P_X) - 2h(R_X)})^{\sigma_X^2} \iff \\ \iff \left(\frac{\frac{1}{2\pi e} e^{2h(P_Y)}}{\frac{1}{2\pi e} e^{2h(R_Y)}} \right)^{\sigma_X^2 + \sigma_W^2} &\leq \left(\frac{\frac{1}{2\pi e} e^{2h(P_X)}}{\frac{1}{2\pi e} e^{2h(R_X)}} \right)^{\sigma_X^2} \iff \\ \iff \left(\frac{N(P_Y)}{N(R_Y)} \right)^{\sigma_X^2 + \sigma_W^2} &\leq \left(\frac{N(P_X)}{N(R_X)} \right)^{\sigma_X^2}, \end{aligned}$$

где для любой плотности распределения Q_X , такой что $h(Q_X)$ существует, мы определяем *энтропийную мощность* Q_X как $N(Q_X) \triangleq e^{2h(Q_X)} / (2\pi e)$ [102, п. III-A]. Для $P_X = \mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$, $P_W = \mathcal{N}(0, \sigma_W^2)$ и $P_Y = P_X * P_W = \mathcal{N}(0, \sigma_X^2 + \sigma_W^2)$ энтропийные

мощности равны $N(P_X) = \sigma_X^2$, $N(P_W) = \sigma_W^2$ и $N(P_Y) = \sigma_X^2 + \sigma_W^2$ соответственно (см. [38, формула (1.20)]). Применяя *неравенство для энтропийной мощности* к R_X , P_W и $R_Y = R_X * P_W$ [102, теорема 4], получаем

$$N(R_Y) \geq N(R_X) + N(P_W) = N(R_X) + \sigma_W^2.$$

Следовательно, достаточно доказать, что

$$\left(\frac{\sigma_X^2 + \sigma_W^2}{N(R_X) + \sigma_W^2} \right)^{\sigma_X^2 + \sigma_W^2} \leq \left(\frac{\sigma_X^2}{N(R_X)} \right)^{\sigma_X^2}.$$

Положим $a = \sigma_X^2 + \sigma_W^2$, $b = \sigma_X^2 - N(R_X)$ и $c = \sigma_X^2$. Тогда имеем $a > c > 0$ и $c > b$ (что следует из конечности $h(R_X)$), и поэтому достаточно доказать, что

$$\left(\frac{a}{a-b} \right)^a \leq \left(\frac{c}{c-b} \right)^c,$$

что равносильно

$$a > c > 0 \quad \text{и} \quad c > b \quad \implies \quad \left(1 - \frac{b}{c} \right)^c \leq \left(1 - \frac{b}{a} \right)^a.$$

Это утверждением является вариантом неравенства Бернулли, доказанного в [103, теорема 3.1, пп. (r'_7) и (r''_7)], что и завершает доказательство. \blacktriangle

§ 6. Доказательства результатов о предпорядке меньшего искажения

Наконец, обратимся к выводу эквивалентных характеристик отношения \succeq_{\ln} через операторную выпуклость. В п. 6.1 представлены предварительные сведения об операторно выпуклых функциях, в п. 6.2 доказывается теорема 6, а в п. 6.3 – теорема 7.

6.1. Операторно выпуклые функции. Для любого непустого (конечного или бесконечного, открытого или замкнутого) интервала $I \subseteq \mathbb{R}$ обозначим через $\mathbb{C}_{\text{Herm}}^{n \times n}(I)$ множество всех (комплексных) эрмитовых матриц размера $n \times n$, все собственные значения которых принадлежат I , где $\mathbb{C}_{\text{Herm}}^{n \times n}(\mathbb{R})$ – пространство всех эрмитовых матриц. Любую заданную функцию $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ можно продолжить до функции $f: \mathbb{C}_{\text{Herm}}^{n \times n}(I) \rightarrow \mathbb{C}_{\text{Herm}}^{n \times n}(\mathbb{R})$ следующим образом [87, гл. V.1]:

$$\forall A \in \mathbb{C}_{\text{Herm}}^{n \times n}(I), \quad f(A) \triangleq U \operatorname{diag}((f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))) U^H, \quad (94)$$

где $A = U \operatorname{diag}((\lambda_1, \dots, \lambda_n)) U^H$ – спектральное разложение A с вещественными собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in I$, $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ – унитарная матрица, а U^H – ее эрмитово сопряженная. Будем говорить, что f *операторно выпукла*, если для любого $n \geq 1$, любой пары матриц $A, B \in \mathbb{C}_{\text{Herm}}^{n \times n}(I)$ и любого $\lambda \in [0, 1]$ справедливо соотношение

$$\lambda f(A) + (1 - \lambda) f(B) \succeq_{\text{PSD}} f(\lambda A + (1 - \lambda) B), \quad (95)$$

где через \succeq_{PSD} обозначен *частичный порядок Лёвнера* (т.е. для любых матриц $A, B \in \mathbb{C}_{\text{Herm}}^{n \times n}(\mathbb{R})$ отношение $A \succeq_{\text{PSD}} B$ означает, что матрица $A - B$ положительно полуопределена), и непосредственной проверкой легко убедиться, что $\lambda A + (1 - \lambda) B \in \mathbb{C}_{\text{Herm}}^{n \times n}(I)$ (см. [87, гл. V.1]). Заметим, что операторно выпуклая функция $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ очевидным образом выпукла, и ее аффинные преобразования со сдвигами $g: \{c + x : x \in I\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = af(t - c) + b$, также операторно выпуклы для любых $a \geq 0$, $b \in \mathbb{R}$ и $c \in \mathbb{R}$.

Удивительное свойство операторно выпуклых функций состоит в том, что они характеризуются *интегральными представлениями* определенного типа – см. *теоремы Лёвнера* в [87, гл. V.4, задача V.5.5]. В частности, для любой операторно выпуклой функции $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, такой что $f(1) = 0$, существуют константы $a \in \mathbb{R}$ и $b \geq 0$ и конечная положительная мера μ на $(1, \infty)$ (с соответствующей борелевской σ -алгеброй), такие что

$$f(t) = a(t-1) + b(t-1)^2 + \int_{(1, \infty)} \frac{(t-1)(\omega t - \omega - 1)}{t + \omega - 1} d\mu(\omega), \quad (96)$$

что следует из [18, формула (7)] и соответствующих ссылок (заметим, что наша f и функция g в [18] связаны как $f(t) = g(t-1)$). Как отмечено в [18], верно и обратное, т.е. функции вида (96) операторно выпуклы. Следующая лемма является прямым следствием формулы (96), которую мы выделили из [18] и представляем здесь в более прозрачном виде, показывающем роль дивергенций Винце–Ле Кама.

Лемма 8 (интегральное представление [18, с. 33]). *Рассмотрим произвольную f -дивергенцию, где функция $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ операторно выпукла и $f(1) = 0$. Тогда существует константа $b \geq 0$ и конечная положительная мера τ на $(0, 1)$ (с соответствующей борелевской σ -алгеброй), такие что для любых $R_X, P_X \in \mathcal{P}_X$*

$$D_f(R_X \| P_X) = b\chi^2(R_X \| P_X) + \int_{(0,1)} \frac{1 + \lambda^2}{\lambda(1 - \lambda)} \text{LC}_\lambda(R_X \| P_X) d\tau(\lambda).$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные вероятностные меры $R_X, P_X \in \mathcal{P}_X$, и пусть случайная величина X имеет распределение P_X . Тогда, поскольку для f справедливо интегральное представление (96), подставим $t = R_X(X)/P_X(X)$ в (96) и перейдем к математическим ожиданиям:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[f \left(\frac{R_X(X)}{P_X(X)} \right) \right] &= b \mathbf{E} \left[\left(\frac{R_X(X)}{P_X(X)} - 1 \right)^2 \right] + \\ &+ \int_{(1, \infty)} \mathbf{E} \left[\frac{\left(\frac{R_X(X)}{P_X(X)} - 1 \right) \left(\omega \frac{R_X(X)}{P_X(X)} - \omega - 1 \right)}{\frac{R_X(X)}{P_X(X)} + \omega - 1} \right] d\mu(\omega), \end{aligned}$$

где первое слагаемое в правой части (96) исчезает после перехода к математическому ожиданию (см. свойство аффинной инвариантности в п. 2.1). Отсюда

$$D_f(R_X \| P_X) = b\chi^2(R_X \| P_X) + \int_{(1, \infty)} \mathbf{E} \left[\frac{(1 + \omega^2) \left(\frac{R_X(X)}{P_X(X)} - 1 \right)^2}{\omega \left(\frac{R_X(X)}{P_X(X)} + \omega - 1 \right)} \right] d\mu(\omega),$$

где левая часть вытекает из определения 1, χ^2 -дивергенция получается из (4), а последнее слагаемое следует из свойства аффинной инвариантности в п. 2.1 и соотношения

$$\forall t \geq 0, \forall \omega > 1, \quad \frac{(t-1)(\omega t - \omega - 1)}{t + \omega - 1} = \frac{(1 + \omega^2)(t-1)^2}{\omega(t + \omega - 1)} - \frac{t-1}{\omega}.$$

Теперь заметим, что замена переменных $\omega = \frac{1}{\lambda}$ дает

$$D_f(R_X \| P_X) = b\chi^2(R_X \| P_X) + \int_{(0,1)} \mathbf{E} \left[\frac{\left((1 + \lambda^2) \left(\frac{R_X(X)}{P_X(X)} - 1 \right) \right)^2}{\left(\lambda \frac{R_X(X)}{P_X(X)} + 1 - \lambda \right)} \right] d\tau(\lambda)$$

для некоторой конечной положительной меры τ на $(0, 1)$. Наконец, замечая, что подинтегральное выражение в правой части пропорционально дивергенции Винце–Ле Кама (см. п. 2.1), непосредственными преобразованиями получаем требуемое интегральное представление. \blacktriangle

Лемма 8 использовалась в [18, с. 33] (в несколько другом виде) для доказательства предложения 6 (см. [18, теорема 1]). Кроме того, в [8, с. 3363] также использовалась ключевая идея из [18, с. 33] для получения альтернативного интегрального представления (через дивергенцию Винце–Ле Кама и χ^2 -дивергенцию), аналогичного лемме 8. Однако представление из [8, с. 3363] справедливо лишь для операторно выпуклых функций f , таких что $f(0)$ конечно, в то время как лемма 8 верна и для бесконечных $f(0)$.

6.2. Доказательство теоремы 6.

Доказательство теоремы 6. Наше доказательство использует технику доказательств утверждений [18, теорема 1] и [83, теорема 1] (см. также [8, п. III-C]). Зафиксируем произвольную нелинейную операторно выпуклую функцию $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, такую что $f(1) = 0$, где из нелинейности следует, что соответствующая f -дивергенция не тождественно равна нулю (см. свойство аффинной инвариантности в п. 2.1). Для любых стохастических матриц $P_{Y|X} = W \in \mathcal{P}_{Y|X}$ и $P_{Z|X} = V \in \mathcal{P}_{Z|X}$ вначале установим, что неравенство

$$\forall R_X, P_X \in \mathcal{P}_X, \quad \chi^2(R_X W \| P_X W) \geq \chi^2(R_X V \| P_X V) \quad (97)$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$\forall R_X, P_X \in \mathcal{P}_X, \quad D_f(R_X W \| P_X W) \geq D_f(R_X V \| P_X V). \quad (98)$$

Для доказательства необходимости условия 98, применяя лемму 8 и эквивалентное представление дивергенции Винце–Ле Кама из (6), получаем следующее интегральное представление нашей f -дивергенции через χ^2 -дивергенцию (см. [18, с. 33]):

$$\begin{aligned} \forall R_X, P_X \in \mathcal{P}_X, \quad D_f(R_X \| P_X) &= b\chi^2(R_X \| P_X) + \\ &+ \int_{(0,1)} \frac{1 + \lambda^2}{(1 - \lambda)^2} \chi^2(R_X \| \lambda R_X + (1 - \lambda)P_X) d\tau(\lambda), \end{aligned} \quad (99)$$

где $b \geq 0$ – некоторая константа, а τ – конечная положительная мера на $(0, 1)$. В силу (97) также имеем

$$\begin{aligned} \forall R_X, P_X \in \mathcal{P}_X, \\ \chi^2(R_X W \| (\lambda R_X + (1 - \lambda)P_X)W) \geq \chi^2(R_X V \| (\lambda R_X + (1 - \lambda)P_X)V) \end{aligned} \quad (100)$$

для любого $\lambda \in (0, 1)$. Поэтому, используя (97) и (100), а также интегральное представление (99), получаем (98), что и требовалось.

Для доказательства достаточности заметим, что из интегрального представления Лёвнера (96) следует, что f бесконечно дифференцируема и $f''(1) > 0$. В силу (98)

получаем также, что для любого $\lambda \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \forall R_X, P_X \in \mathcal{P}_X, \quad D_f(((1-\lambda)P_X + \lambda R_X)W \| P_X W) \geq \\ \geq D_f(((1-\lambda)P_X + \lambda R_X)V \| P_X V). \end{aligned} \quad (101)$$

Поэтому, умножая обе части неравенства (101) на $2/(f''(1)\lambda^2) > 0$ и переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0^+$, из локальной аппроксимации f -дивергенций (равенство (13)) получаем (97) для всех $R_X \in \mathcal{P}_X$ и всех $P_X \in \mathcal{P}_X^\circ$. Хотя наш вариант равенства (13) справедлив в предположении $P_X \in \mathcal{P}_X^\circ$, утверждение (97) верно также и для $P_X \in \mathcal{P}_X \setminus \mathcal{P}_X^\circ$ в силу непрерывности χ^2 -дивергенции по второму аргументу при фиксированном первом.

Теперь заметим, что эквивалентность между (97) и (98) показывает, что все предпорядки на стохастических матрицах, определяемые через нелинейные операторно выпуклые f -дивергенции согласно (98) (способом, аналогичным определению 6) эквивалентны. Действительно, все они характеризуются χ^2 -дивергенцией (см. (97)). Поскольку КЛ-дивергенция является нелинейной операторно выпуклой f -дивергенцией (см. замечание после теоремы 6 в п. 3.4 по поводу теоремы Лёвнера–Хайнца), предпорядок меньшего искажения \succeq_{\ln} эквивалентен предпорядку, задаваемому χ^2 -дивергенцией в (97); это в точности является содержанием утверждений [83, теорема 1] и [85, теорема 1]. Следовательно, \succeq_{\ln} эквивалентен предпорядку, задаваемому соотношением (98), для любой нелинейной операторно выпуклой f -дивергенции, что и завершает доказательство. \blacktriangle

Теперь докажем предложение 6, чтобы показать, что оно является немедленным следствием теоремы 6.

Доказательство предложения 6. Зафиксируем произвольную нелинейную операторно выпуклую функцию $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, такую что $f(1) = 0$, и любую стохастическую матрицу $P_{Y|X} = W \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}|X}$. Согласно теореме 6 для матрицы $|\mathcal{X}|$ -ичного канала со стиранием $E_{1-\beta} \succeq_{\ln} P_{Y|X}$ тогда и только тогда, когда

$$\forall R_X, P_X \in \mathcal{P}_X, \quad D_f(R_X W \| P_X W) \leq D_f(R_X E_{1-\beta} \| P_X E_{1-\beta}) = \beta D_f(R_X \| P_X),$$

где равенство разбирается в комментариях после формулы (30) в п. 2.2. Эта эквивалентность приводит к следующему обобщению соотношения (58):

$$\eta_f(P_{Y|X}) = \min\{\beta \in [0, 1] : E_{1-\beta} \succeq_{\ln} P_{Y|X}\}. \quad (102)$$

Поэтому коэффициенты сжатия $\eta_f(P_{Y|X})$ для всех нелинейных операторно выпуклых f равны, и в частности, все они равны $\eta_{\chi^2}(P_{Y|X})$ и $\eta_{\text{KL}}(P_{Y|X})$ (так как функции, соответственно, $f(t) = t^2 - 1$ и $f(t) = t \log(t)$ операторно выпуклы по теореме Лёвнера–Хайнца). \blacktriangle

6.3. Доказательство теоремы 7. Чтобы доказать теорему 7, нам понадобится полезная лемма о тензоризации. Пусть $X_i \in \mathcal{X}_i$, $Y_i \in \mathcal{Y}_i$ и $Z_i \in \mathcal{Z}_i$ – дискретные случайные величины с конечными множествами значений, и пусть $P_{Y_i|X_i} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}_i|\mathcal{X}_i}$ и $P_{Z_i|X_i} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}_i|\mathcal{X}_i}$ – стохастические матрицы, $i = 1, 2$. В следующей лемме сформулировано свойство тензоризации предпорядка меньшего искажения [7, предложение 16; 104, предложение 5].

Лемма 9 (тензоризация предпорядка меньшего искажения [7, 104]). *Если $P_{Z_i|X_i} \succeq_{\ln} P_{Y_i|X_i}$ для $i = 1, 2$, то $P_{Z_1|X_1} \otimes P_{Z_2|X_2} \succeq_{\ln} P_{Y_1|X_1} \otimes P_{Y_2|X_2}$.*

Наконец, приведем доказательство теоремы 7 с помощью теоремы 6, леммы 9 и соотношения (58).

Доказательство теоремы 7. Будем следовать схеме доказательства из [7]. Вначале заметим, что $\eta_i = \eta_{\text{KL}}(P_{Y_i|X_i})$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ согласно предложению 6 (см. [18, теорема 1]). Пусть $Z_i \in \mathcal{Z}_i = \mathcal{X}_i \cup \{e\}$ – дискретная случайная величина, и пусть $P_{Z_i|X_i} = E_{1-\eta_i} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}_i|\mathcal{X}_i}$ – матрица $|\mathcal{X}_i|$ -ичного канала со стиранием с вероятностью стирания $1 - \eta_i$, определенная в (30), для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда, используя (58) (см. [7, предложение 15]), получаем, что матрица $P_{Z_i|X_i}$ менее искажающая, чем $P_{Y_i|X_i}$, для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Теперь определим произведение стохастических матриц $P_{Z_1^n|X_1^n} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}^n|\mathcal{X}^n}$:

$$P_{Z_1^n|X_1^n} = P_{Z_1|X_1} \otimes P_{Z_2|X_2} \otimes \dots \otimes P_{Z_n|X_n},$$

где $Z_1^n = (Z_1, \dots, Z_n)$ и $\mathcal{Z}^n = \mathcal{Z}_1 \times \dots \times \mathcal{Z}_n$. Тогда по лемме 9 получаем, что $P_{Z_1^n|X_1^n}$ менее искажающая, чем $P_{Y_1^n|X_1^n}$.

Чтобы доказать вариант СНОД Самородницкого для f -дивергенции (64), зафиксируем произвольную пару вероятностных мер на входе $R_{X_1^n}, P_{X_1^n} \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}^n}$. Тогда по теореме 6 имеем

$$D_f(R_{Y_1^n} \| P_{Y_1^n}) \leq D_f(R_{Z_1^n} \| P_{Z_1^n}), \quad (103)$$

где $R_{Z_1^n} = R_{X_1^n} P_{Z_1^n|X_1^n} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}^n}$ и $P_{Z_1^n} = P_{X_1^n} P_{Z_1^n|X_1^n} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}^n}$. Теперь заметим, что случайную величину Z_1^n можно эквивалентным образом представить как (X_S, S) , где случайное подмножество S представляет собой позиции, которые не стираются под действием $P_{Z_1^n|X_1^n}$, а X_S – значения в этих позициях. (Заметим, что $Z_1^n = (e, \dots, e)$ соответствует множеству $S = \emptyset$.) Таким образом,

$$\begin{aligned} D_f(R_{Z_1^n} \| P_{Z_1^n}) &= \sum_{T \subseteq \{1, \dots, n\}} P_S(T) \sum_{x_T} P_{X_T}(x_T) f\left(\frac{P_S(T) R_{X_T}(x_T)}{P_S(T) P_{X_T}(x_T)}\right) = \\ &= \sum_{T \subseteq \{1, \dots, n\}} P_S(T) D_f(R_{X_T} \| P_{X_T}), \end{aligned}$$

где использован тот факт, что S не зависит от X_1^n , а также следующие соглашения: $D_f(R_{X_\emptyset} \| P_{X_\emptyset}) = 0$, и $P_S(T) D_f(R_{X_T} \| P_{X_T}) = 0$, если $P_S(T) = 0$. С учетом (103) отсюда получаем (64).

Чтобы доказать вариант СНОД Самородницкого для взаимной f -информации (65), зафиксируем произвольное совместное распределение P_{U, X_1^n} и рассмотрим цепь Маркова $U \rightarrow X_1^n \rightarrow (Y_1^n, Z_1^n)$, такую что Y_1^n и Z_1^n условно независимы при заданном X_1^n . Это задает совместное распределение $P_{U, X_1^n, Y_1^n, Z_1^n}$ через P_{U, X_1^n} , $P_{Y_1^n|X_1^n}$ и $P_{Z_1^n|X_1^n}$. Для любой заданной $U = u \in \mathcal{U}$ из (103) получаем

$$D_f(P_{Y_1^n|U=u} \| P_{Y_1^n}) \leq D_f(P_{Z_1^n|U=u} \| P_{Z_1^n}),$$

где $P_{Y_1^n|U=u} = P_{X_1^n|U=u} P_{Y_1^n|X_1^n} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}^n}$ и $P_{Z_1^n|U=u} = P_{X_1^n|U=u} P_{Z_1^n|X_1^n} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}^n}$ – условные вероятностные меры (на выходе), соответствующие условной вероятностной мере (на входе) $P_{X_1^n|U=u} \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}^n}$ (благодаря марковскому свойству), а $P_{Y_1^n} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}^n}$ и $P_{Z_1^n} \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}^n}$ – маргинальные вероятностные меры для $P_{U, X_1^n, Y_1^n, Z_1^n}$. С учетом (8), переходя к математическим ожиданиям по маргинальной вероятностной мере P_U , получаем

$$I_f(U; Y_1^n) \leq I_f(U; Z_1^n). \quad (104)$$

Далее, используя эквивалентность между Z_1^n и (X_S, S) , имеем (как и выше)

$$I_f(U; Z_1^n) = I_f(U; X_S, S) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{T \subseteq \{1, \dots, n\}} P_S(T) \sum_{u \in \mathcal{U}} P_U(u) \sum_{x_T} P_{X_T}(x_T) f\left(\frac{P_{X_T|U}(x_T|u)P_U(u)P_S(T)}{P_{X_T}(x_T)P_U(u)P_S(T)}\right) = \\
&= \sum_{T \subseteq \{1, \dots, n\}} P_S(T) D_f(P_{U, X_T} \| P_U P_{X_T}) = \sum_{T \subseteq \{1, \dots, n\}} P_S(T) I_f(U; X_T),
\end{aligned}$$

где использовано соотношение (8) и тот факт, что S не зависит от (U, X_1^n) , а также следующие соглашения: $I_f(U; X_\emptyset) = 0$, и $P_S(T)I_f(U; X_T) = 0$, если $P_S(T) = 0$. С учетом (104) отсюда получаем (65).

И наконец, случай $\eta_i = \eta$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ в (66) получается подстановкой выражения для $P_S(T)$ в (65) и дальнейшими стандартными выкладками, что и завершает доказательство. \blacktriangle

Заметим, что в условиях теоремы 7, если к тому же $\eta_i = \eta$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$, то наше обобщенное СНОД Самородницкого действительно точнее, чем тензоризованное СНОД (63):

$$I_f(U; Y_1^n) \leq \sum_{T \subseteq \{1, \dots, n\}} \eta^{|T|} (1 - \eta)^{n - |T|} I_f(U; X_T) \leq (1 - (1 - \eta)^n) I_f(U; X_1^n). \quad (105)$$

Это так, поскольку $I_f(U; Z_1^n) \leq (1 - (1 - \eta)^n) I_f(U; X_1^n)$ с учетом соотношения (63) для произведения стохастических матриц $P_{Z_1^n|X_1^n}$.

§ 7. Заключение

Здесь мы вкратце перечислим наши основные достижения и предложим некоторые направления дальнейшего исследования. Вначале мы описали некоторые свойства коэффициентов сжатия для совместных распределений. Точнее, в теореме 1 было показано, что такие коэффициенты сжатия достигают своей верхней границы, равной единице, когда совместное распределение разложимо, а в теореме 2 – что наложение на оптимизационную задачу, определяющую величину $\eta_f(P_X, P_{Y|X})$ дополнительного ограничения “локальной аппроксимации”, при котором f -дивергенции на входе становятся сколь угодно малыми, приводит к оптимальному значению $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$. Этот последний результат довольно прозрачно объясняет интуитивные соображения по поводу нижней границы довольно максимальной корреляции в п. 7 предложения 3. Затем в теореме 3 мы вывели линейную верхнюю границу на $\eta_f(P_X, P_{Y|X})$ через $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$ для некоторого класса f -дивергенций, а в теореме 4 улучшили эту границу для важного частного случая $\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X})$. Подобные границы полезны для режимов со слабой зависимостью, таких как возникающие при анализе эргодичности цепей Маркова (как показано в предложении 7). В духе сравнения коэффициентов сжатия для совместных распределений мы также дали альтернативное доказательство эквивалентности $\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X}) = \eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$ для совместно гауссовских распределений $P_{X, Y}$, описываемых моделями АБГШ в теореме 5 и § 5. Это доказательство продемонстрировало, что при наложении достаточно сильного ограничения на мощность (или ограниченный второй момент) в экстремальной задаче для величины $\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X})$ ее значение не изменяется. Наконец, в области коэффициентов сжатия для стохастических матриц мы обобщили предложение 6 в теореме 6 и установили, что предпорядок меньшего искажения на стохастических матрицах полностью характеризуется любой нелинейной операторно выпуклой f -дивергенцией. Более того, в качестве приложения этой характеристики мы также обобщили СНОД Самородницкого на все нелинейные операторно выпуклые f -дивергенции в теореме 7.

Как было указано в п. 4.4, константы в линейных границах из теорем 3 и 4 “неотчетливо” изменяются с изменением размерности распределения-произведения.

В то время как результаты, подобные следствию 2, частично позволяют справиться с этой проблемой тензоризации, одним из обязательных направлений будущих исследований должно стать получение линейных границ, константы в которых должным образом ведут себя при тензоризации. Еще одно, по-видимому, более конкретное направление будущей работы – это вывод оптимального зависящего от распределений улучшенного варианта леммы 4 (как предложено в [79, замечание, с. 5380]). Такой улучшенный вариант можно было бы использовать для уточнения теоремы 3 так, чтобы из нее вытекала теорема 4 вместо следствия 1. Однако и такой улучшенный вариант не сможет охватить вопрос, связанный с тензоризацией, что гораздо важнее для данных границ.

ПРИЛОЖЕНИЕ А: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2

Схема доказательства описана в [4], а само доказательство приведено в дипломной работе автора [48, теорема 3.2.4] для случая $P_X \in \mathcal{P}_X^\circ$ и $P_Y \in \mathcal{P}_Y^\circ$. Мы приводим его здесь для полноты изложения.

Пусть маргинальные вероятностные меры для X и Y таковы, что $P_X \in \mathcal{P}_X^\circ$ и $P_Y \in \mathcal{P}_Y^\circ$. Вначале покажем, что наибольшее сингулярное число МДП B равно единице. Рассмотрим матрицу

$$M = \text{diag}(\sqrt{P_Y})^{-1} B^T B \text{diag}(\sqrt{P_Y}) = \text{diag}(P_Y)^{-1} W^T \text{diag}(P_X) W = VW,$$

где $V = \text{diag}(P_Y)^{-1} W^T \text{diag}(P_X) \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}|\mathcal{Y}}$ – стохастическая по строкам обратная матрица вероятностей перехода, соответствующая условному распределению $P_{X|Y}$. Заметим, что M имеет тот же набор собственных значений, что и матрица Грама МДП $B^T B$, поскольку она просто определяется через преобразование подобия. Так как $B^T B$ положительно полуопределена, собственные значения матриц M и $B^T B$ – неотрицательные вещественные числа согласно *спектральной теореме* (см. [49, п. 2.5]). Более того, так как V , и W стохастические по строкам, их произведение $M = VW$ также стохастическое по строкам. Следовательно, наибольшее собственное значение матриц M и $B^T B$ равно единице по *теореме Перрона – Фробениуса* (см. [49, гл. 8]). Отсюда следует, что наибольшее сингулярное число матрицы B также равно единице. Отметим также, что $\sqrt{P_X}$ и $\sqrt{P_Y}$ – соответственно левый и правый сингулярные векторы матрицы B , соответствующие сингулярному числу, равному единице. Действительно,

$$\begin{aligned} \sqrt{P_X} B &= \sqrt{P_X} \text{diag}(\sqrt{P_X}) W \text{diag}(\sqrt{P_Y})^{-1} = \sqrt{P_Y}, \\ B \sqrt{P_Y}^T &= \text{diag}(\sqrt{P_X}) W \text{diag}(\sqrt{P_Y})^{-1} \sqrt{P_Y}^T = \sqrt{P_X}^T. \end{aligned}$$

Далее, следуя определению 3, пусть $f \in \mathbb{R}^{|\mathcal{X}|}$ и $g \in \mathbb{R}^{|\mathcal{Y}|}$ – векторы-столбцы, задающие множества значений функций $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ соответственно. Заметим, что математические ожидания в определении 3 можно выразить через B , P_X , P_Y , f и g :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[f(X)g(Y)] &= (\text{diag}(\sqrt{P_X}) f)^T B (\text{diag}(\sqrt{P_Y}) g), \\ \mathbf{E}[f(X)] &= \sqrt{P_X} (\text{diag}(\sqrt{P_X}) f), \\ \mathbf{E}[g(Y)] &= \sqrt{P_Y} (\text{diag}(\sqrt{P_Y}) g), \\ \mathbf{E}[f(X)^2] &= \|\text{diag}(\sqrt{P_X}) f\|_2^2, \\ \mathbf{E}[g(Y)^2] &= \|\text{diag}(\sqrt{P_Y}) g\|_2^2. \end{aligned}$$

Полагая $a = \text{diag}(\sqrt{P_X})f$ и $b = \text{diag}(\sqrt{P_Y})g$, из определения 3 получаем

$$\rho(X; Y) = \max_{\substack{a \in \mathbb{R}^{|\mathcal{X}|}, b \in \mathbb{R}^{|\mathcal{Y}|} \\ \sqrt{P_X}a = \sqrt{P_Y}b = 0 \\ \|a\|_2^2 = \|b\|_2^2 = 1}} a^T B b,$$

где оптимизация проводится по всем $a \in \mathbb{R}^{|\mathcal{X}|}$ и $b \in \mathbb{R}^{|\mathcal{Y}|}$, поскольку $P_X \in \mathcal{P}_X^\circ$ и $P_Y \in \mathcal{P}_Y^\circ$. Так как a и b ортогональны, соответственно, левому и правому сингулярным векторам, соответствующим максимальному сингулярному числу матрицы B , равному единице, эта максимизация дает второе по величине сингулярное число матрицы B с помощью альтернативной версии (см., например, [105, лемма 2]) *принципа минимакса Куранта – Фишера – Вейля* (см. [49, теоремы 4.2.6 и 7.3.8]). Это доказывает, что $\rho(X; Y)$ – второе по величине сингулярное число МДП, когда $P_X \in \mathcal{P}_X^\circ$ и $P_Y \in \mathcal{P}_Y^\circ$.

Наконец, покажем, что без ограничения общности можно считать, что $P_X \in \mathcal{P}_X^\circ$ и $P_Y \in \mathcal{P}_Y^\circ$. Когда P_X или P_Y имеют нулевые компоненты, X и Y принимают значения лишь на носителях $\text{supp}(P_X) = \{x \in \mathcal{X} : P_X(x) > 0\} \subseteq \mathcal{X}$ и $\text{supp}(P_Y) = \{y \in \mathcal{Y} : P_Y(y) > 0\} \subseteq \mathcal{Y}$ соответственно, что означает, что $P_X \in \mathcal{P}_{\text{supp}(P_X)}^\circ$ и $P_Y \in \mathcal{P}_{\text{supp}(P_Y)}^\circ$. Пусть B обозначает “истинную” МДП размера $|\mathcal{X}| \times |\mathcal{Y}|$, соответствующую вероятностной мере $P_{X,Y}$ на $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, а B_{supp} – “ограниченную на носитель” МДП размера $|\text{supp}(P_X)| \times |\text{supp}(P_Y)|$, соответствующую вероятностной мере $P_{X,Y}$ на $\text{supp}(P_X) \times \text{supp}(P_Y)$. Очевидно, B можно восстановить по B_{supp} , добавляя нулевые строки и столбцы, соответствующие компонентам с нулевой вероятностью в \mathcal{X} и \mathcal{Y} соответственно. Поэтому B и B_{supp} имеют одинаковые ненулевые сингулярные значения (с учетом кратностей), откуда следует, что и второе по величине сингулярное число у них одинаково, что завершает доказательство. ▲

ПРИЛОЖЕНИЕ В: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3

Свойство 1: Нормировка коэффициентов сжатия очевидна в силу неотрицательности f -дивергенций и соответствующих им неравенств об обработке данных (7). Отметим, что в случае $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}) = \rho(X; Y)^2$ (где использовалось (23)) условие $0 \leq \rho(X; Y) \leq 1$ – это третья аксиома Реньи в определении максимальной корреляции [12].

Свойство 2: Дадим простое доказательство этого хорошо известного свойства. Без ограничения общности предположим, что $P_X \in \mathcal{P}_X^\circ$, отбрасывая все компоненты \mathcal{X} , имеющие нулевую вероятность. Если в результате $|\mathcal{X}| = 1$, то X – константа п.н., и результат тривиален. Итак, можно считать, что $|\mathcal{X}| \geq 2$. Так как W – матрица единичного ранга (все ее строки равны P_Y , т.е. $P_{Y|X=x} = P_Y$ для всех $x \in \mathcal{X}$) тогда и только тогда, когда X и Y независимы, достаточно показать, что W имеет единичный ранг тогда и только тогда, когда $\eta_f(P_X, P_{Y|X}) = 0$.

Для доказательства в одну сторону заметим, что если ранг W равен единице, то все ее строки равны P_Y , и $R_X W = P_Y$ для всех $R_X \in \mathcal{P}_X$. Следовательно, $\eta_f(P_X, P_{Y|X}) = 0$ в силу определения 2, поскольку $D_f(R_X W \| P_X W) = 0$ для всех вероятностных мер на входе $R_X \in \mathcal{P}_X$.

Для доказательства обратного утверждения применим слегка измененный вариант рассуждения из [48, лемма 3.1.5], которое использовалось для доказательства случая $\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X})$. Для любых $x \in \mathcal{X}$ и $\lambda \in (0, 1)$ рассмотрим $R_X = (1 - \lambda)\delta_x + \lambda \mathbf{u} \in \mathcal{P}_X^\circ$, где δ_x – вероятностная дельта-мера Кронекера, такая что $\delta_x(x) = 1$ и $\delta_x(x') = 0$ для $x' \in \mathcal{X} \setminus \{x\}$, \mathbf{u} – равномерная вероятностная мера, а λ выбрано так, что $R_X \neq P_X$. Тогда $0 < D_f(R_X \| P_X) < +\infty$, поскольку f строго выпукла в единице, и $D_f(R_X W \| P_X W) = 0$, так как $\eta_f(P_X, P_{Y|X}) = 0$. Отсюда

следует, что

$$(1 - \lambda)P_{Y|X=x} + \lambda uW = R_X W = P_X W = P_Y,$$

так как f строго выпукла в единице. Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, получаем, что каждая строка W равна P_Y . (Заметим, что невозможно применить этот аргумент просто при $\lambda = 0$, или $R_X = \delta_x$, поскольку $f(0)$ может равняться бесконечности.) Значит, W имеет единичный ранг.

Заметим также, что в случае $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$ это свойство максимальной корреляции является четвертой аксиомой Реньи из [12].

Свойство 3: См. теорему 1 и Приложение С. Заметим, что случай $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$ этого результата был доказан в [13, 15] (см. лемму 10), а случай $\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X})$ – в [15].

Свойство 4: Это доказано в [8, предложение III.3].

Свойство 5: Это доказано в [8, теорема III.9]. Заметим также, что два доказательства свойства тензоризации для $\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X})$ можно найти в [4], а доказательство свойства тензоризации для $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$ – в [13].

Свойство 6: Для доказательства первой части этого утверждения обозначим через $P_{U,X,Y}$ совместную вероятностную меру для (U, X, Y) , состоящую из маргинальной вероятностной меры $P_U \in \mathcal{P}_U$ и условных распределений $P_{X|U} = S \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}|U}$ и $P_{Y|X} = W \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}|X}$ (т.е. стохастических по строкам матриц вероятностей перехода). Тогда $P_{Y|U} = SW \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}|U}$ согласно марковскому свойству. Заметим, что для любой вероятностной меры $R_U \in \mathcal{P}_U \setminus \{P_U\}$

$$D_f(R_U SW \| P_U SW) \leq \eta_f(P_X, P_{Y|X}) \eta_f(P_U, P_{X|U}) D_f(R_U \| P_U),$$

где $P_X = P_U S$ и дважды использовалось СНОД (15). Отсюда

$$\eta_f(P_U, P_{Y|U}) \leq \eta_f(P_U, P_{X|U}) \eta_f(P_X, P_{Y|X})$$

согласно определению 2.

Частный случай этого результата для η_{χ^2} соответствует свойству субмультипликативности второго по величине сингулярного числа МДП. Это свойство субмультипликативности также верно и для i -го по величине сингулярного числа МДП (см. [106, теорема 2]), что полезно в приложениях, связанных с кодированием распределенных источников и каналов. При этом результат из [106, теорема 2] также доказан в [40, теорема 3], где показана связь с главными компонентами инерции и максимальной корреляцией.

Для доказательства второй части утверждения заметим, что для фиксированного $P_{X,Y}$ и любого $P_{U|X}$, такого что $U \rightarrow X \rightarrow Y$ образуют цепь Маркова (с совместной вероятностной мерой $P_{U,X,Y}$) и $\eta_f(P_U, P_{X|U}) > 0$ (для чего требуется, чтобы X не была постоянной п.н.), справедливо

$$\frac{\eta_f(P_U, P_{Y|U})}{\eta_f(P_U, P_{X|U})} \leq \eta_f(P_X, P_{Y|X}), \quad (106)$$

где использовалось установленное выше свойство субмультипликативности. Пусть $U = X$ п.н., так что $P_{U|X} \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}|X}$ – единичная матрица. Тогда $\eta_f(P_U, P_{X|U}) = 1$ и $\eta_f(P_U, P_{Y|U}) = \eta_f(P_X, P_{Y|X})$ в силу определения 2. Поэтому равенство в (106) достигается, что завершает доказательство.

Отметим, что случай η_{χ^2} этого результата представлен в [68, лемма 6], где также доказано, что в качестве оптимальной стохастической матрицы $P_{U|X}$ можно взять $P_{Y|X}$ (так что U является копией Y) вместо единичной матрицы (где $U = X$ п.н.).

Свойство 7: Будем следовать нашей технике доказательства из [1, теорема 5], наваянной подходом из [17, теорема 5.4].

Напомним, что совместная вероятностная мера $P_{X,Y}$ состоит из $P_X \in \mathcal{P}_X^\circ$ и $P_{Y|X} = W \in \mathcal{P}_{\mathcal{Y}|\mathcal{X}}$, и обозначим через B соответствующую МДП (см. (24)). Зададим траекторию сферически возмущенных вероятностных мер вида (11):

$$R_X^{(\varepsilon)} = P_X + \varepsilon K_X \text{diag}(\sqrt{P_X})$$

где

$$K_X \in \mathcal{S} \triangleq \left\{ x \in (\mathbb{R}^{|\mathcal{X}|})^* : \sqrt{P_X} x^T = 0, \|x\|_2 = 1 \right\}$$

– вектор сферического возмущения. Когда эти вероятностные меры проходят через W , получаем траекторию на выходе

$$R_X^{(\varepsilon)} W = P_Y + \varepsilon K_X B \text{diag}(\sqrt{P_Y}), \quad (107)$$

где B отображает сферические возмущения на входе в сферические возмущения на выходе [43]. Теперь согласно определению 2 имеем

$$\begin{aligned} \eta_f(P_X, P_{Y|X}) &= \sup_{\substack{R_X \in \mathcal{P}_X \\ 0 < D_f(R_X \| P_X) < +\infty}} \frac{D_f(R_X W \| P_X W)}{D_f(R_X \| P_X)} \geq \\ &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{K_X \in \mathcal{S}} \frac{\|K_X B\|_2^2 + o(1)}{\|K_X\|_2^2 + o(1)} \geq \sup_{K_X \in \mathcal{S}} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|K_X B\|_2^2 + o(1)}{1 + o(1)} = \\ &= \eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}) = \rho(X; Y)^2, \end{aligned}$$

где второе неравенство вытекает из (14) при сужении супремума на все вероятностные меры вида (11) (где $\varepsilon \neq 0$ – некоторая достаточно малая фиксированная величина) и перехода к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, третье неравенство следует из неравенства о минимаксе, а заключительные равенства – из (25) и (23) соответственно, что и завершает доказательство.

Заметим, что предположения $P_X \in \mathcal{P}_X^\circ$ и $P_Y \in \mathcal{P}_Y^\circ$, будучи важными для задания вышеупомянутых траекторий вероятностных мер, не существенны для самого результата. Для специального случая $\eta_{\text{KL}}(P_X, P_{Y|X})$ этот результат был впервые доказан в [15], а затем повторно в [3] и [1] – последние два доказательства используют различного типа аргументы, основанные на возмущениях. \blacktriangle

ПРИЛОЖЕНИЕ С: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Для доказательства теоремы 1 нам потребуются следующие две леммы; первая из них известна, а вторая является новой.

Лемма 10 (разложимость и максимальная корреляция [13, 15]). *Совместная вероятностная мера $P_{X,Y}$ является разложимой тогда и только тогда, когда $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}) = \rho(X; Y)^2 = 1$.*

Доказательство. Хотя этот результат и был доказан в [13, 15], для полноты изложения мы приведем здесь доказательство. Пусть $P_{X,Y}$ разложима и существуют функции $h: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$, такие что $h(X) = g(Y)$ п.н. и $\text{Var}(h(X)) > 0$. Тогда без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{E}[h(X)] = 0$ и $\mathbf{E}[h(X)^2] = 1$, откуда $\rho(X; Y) = 1$ согласно определению 3. Таким образом, $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}) = 1$ в силу (23).

В обратную сторону, пусть $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}) = 1$, или, что равносильно, $\rho(X; Y) = 1$ (в силу (23)). Пусть $h: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ – функции, на которых достигается

$\rho(X; Y)$; такие функции существуют, когда \mathcal{X} и \mathcal{Y} конечны, так как в определении 3 берется экстремум непрерывной целевой функции по компактным множествам. Очевидно, что $h(X)$ и $g(Y)$ имеют нулевое среднее, единичную дисперсию и коэффициент корреляции Пирсона, равный 1. Отсюда следует, что $h(X) = g(Y)$ п.н., с помощью прямого (и хорошо известного) рассуждения, использующего неравенство Коши – Буняковского. Следовательно, $P_{X,Y}$ разложима. ▲

Лемма 11 (одновременная экстремальность). *Пусть задана выпуклая функция $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, дважды дифференцируемая в единице и такая, что $f(1) = 0$ и $f''(1) > 0$. Тогда справедливо следующее:*

1. Если $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}) = 1$, то $\eta_f(P_X, P_{Y|X}) = 1$;
2. Если f строго выпукла и удовлетворяет условию $f(0) < \infty$, то из равенства $\eta_f(P_X, P_{Y|X}) = 1$ следует $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}) = 1$.

Доказательство. Утверждение 1 тривиальным образом следует из пп. 1 и 7 предложения 3.

Утверждение 2: Пусть $\eta_f(P_X, P_{Y|X}) = 1$. Рассмотрим последовательность вероятностных мер на входе $\{R_X^{(n)} \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}} : 0 < D_f(R_X^{(n)} \| P_X) < +\infty, n \in \mathbb{N}\}$, на которой в пределе достигается $\eta_f(P_X, P_{Y|X})$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_f(R_X^{(n)} W \| P_Y)}{D_f(R_X^{(n)} \| P_X)} = 1.$$

С учетом секвенциональной компактности $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ можно считать, что $R_X^{(n)} \rightarrow R_X$ для некоторого $R_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ при $n \rightarrow \infty$ (в смысле ℓ^2 -нормы), при необходимости переходя к подпоследовательности. Отсюда получаем следующие две возможности.

Случай 1: Пусть $R_X = P_X$. В этом случае доказательство теоремы 2 в Приложении D показывает, что $\eta_f(P_X, P_{Y|X}) = \eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$. Таким образом, получаем $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}) = 1$.

Случай 2: Пусть $R_X \neq P_X$. Так как $f(0) < \infty$, f строго выпукла и $P_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}^{\circ}$, то $0 < D_f(R_X \| P_X) < +\infty$. Следовательно, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_f(R_X^{(n)} W \| P_Y)}{D_f(R_X^{(n)} \| P_X)} = \frac{D_f(R_X W \| P_Y)}{D_f(R_X \| P_X)} = 1,$$

используя непрерывность f (вытекающую из ее выпуклости). Теперь заметим, что так как f строго выпукла и $0 < D_f(R_X W \| P_X W) = D_f(R_X \| P_X) < +\infty$, то Y является достаточной статистикой для X , позволяющей делать выводы о паре (R_X, P_X) (см. [28, теорема 14] или п. 2.1), откуда, в свою очередь, следует (см. [28, теорема 14] или п. 2.1), что

$$0 < \chi^2(R_X W \| P_X W) = \chi^2(R_X \| P_X) < +\infty.$$

Следовательно, $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}) = 1$ в силу (22). ▲

Доказательство теоремы 1 немедленно следует из лемм 10 и 11. ▲

ПРИЛОЖЕНИЕ D: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Доказательство. Начнем с определения функции $\tau: (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$:

$$\tau(\delta) \triangleq \sup_{\substack{R_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}} \\ 0 < D_f(R_X \| P_X) \leq \delta}} \frac{D_f(R_X W \| P_X W)}{D_f(R_X \| P_X)},$$

так что все, что требуется доказать, это

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(\delta_n) = \eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$$

для любой убывающей последовательности $\{\delta_n > 0 : n \in \mathbb{N}\}$, такой что $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$. Заметим, что предел в левой части существует, поскольку при $\delta_n \rightarrow 0$ супремум по $\tau(\delta_n)$ является невозрастающим и ограничен снизу нулем.

Вначале докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(\delta_n) \geq \eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$, следуя, по существу, доказательству п. 7 предложения 3 в Приложении В. Для этого рассмотрим траекторию сферически возмущенных вероятностных мер вида (11):

$$R_X^{(n)} = P_X + \varepsilon_n K_X \text{diag}(\sqrt{P_X}),$$

где

$$K_X \in \mathcal{S} = \left\{ x \in (\mathbb{R}^{|\mathcal{X}|})^* : \sqrt{P_X} x^T = 0, \|x\|_2 = 1 \right\}$$

– вектор сферического возмущения. Соответствующая траектория вероятностных мер на выходе после прохождения через W имеет вид (107):

$$R_X^{(n)} W = P_Y + \varepsilon_n K_X B \text{diag}(\sqrt{P_Y}),$$

где B – МДП, соответствующая $P_{X,Y}$ в (24). Потребуем, чтобы все скалярные величины $\{\varepsilon_n \neq 0 : n \in \mathbb{N}\}$, определяющие нашу траекторию, удовлетворяли условию $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ и были достаточно малыми, так чтобы

$$D_f(R_X^{(n)} \| P_X) = \frac{f''(1)}{2} \varepsilon_n^2 \|K_X\|_2^2 + o(\varepsilon_n^2) \leq \delta_n,$$

где использовалось (14) (а также тот факт, что $f''(1)$ существует и строго положительна) и стандартная o -символика Бахмана – Ландау. По определению τ имеем

$$\begin{aligned} \sup_{K_X \in \mathcal{S}} \frac{D_f(R_X^{(n)} W \| P_X W)}{D_f(R_X^{(n)} \| P_X)} &\leq \tau(\delta_n), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{K_X \in \mathcal{S}} \frac{\frac{f''(1)}{2} \varepsilon_n^2 \|K_X B\|_2^2 + o(\varepsilon_n^2)}{\frac{f''(1)}{2} \varepsilon_n^2 \|K_X\|_2^2 + o(\varepsilon_n^2)} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(\delta_n), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{K_X \in \mathcal{S}} \frac{\|K_X B\|_2^2 + o(1)}{1 + o(1)} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(\delta_n), \\ \eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(\delta_n), \end{aligned}$$

где во втором неравенстве использовалось (14) как в числителе, так и в знаменателе, а в последнем неравенстве – характеристика $\eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$ через сингулярное число в (25).

Теперь докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(\delta_n) \leq \eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X})$. Заметим, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует вероятностная мера $R_X^{(n)} \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$, обладающая следующими свойствами:

1. $0 < D_f(R_X^{(n)} \| P_X) \leq \delta_n$;
2. $0 \leq \tau(\delta_n) - \frac{D_f(R_X^{(n)} W \| P_X W)}{D_f(R_X^{(n)} \| P_X)} \leq \frac{1}{2^n}$,

первое из которых справедливо, поскольку $R_X \mapsto D_f(R_X \| P_X)$ – непрерывное отображение при фиксированной $P_X \in \mathcal{P}_X^\circ$ (что следует из выпуклости f), а второе – поскольку $\tau(\delta_n)$ определяется как супремум. Так как $\tau(\delta_n)$ сходится при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_f(R_X^{(n)} W \| P_X W)}{D_f(R_X^{(n)} \| P_X)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau(\delta_n). \quad (108)$$

С учетом секвенциальной компактности \mathcal{P}_X можно считать, что $R_X^{(n)}$ сходится при $n \rightarrow \infty$ (в смысле ℓ^2 -нормы), переходя при необходимости к подпоследовательности. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} D_f(R_X^{(n)} \| P_X) = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} R_X^{(n)} = P_X$ в силу непрерывности отображения $R_X \mapsto D_f(R_X \| P_X)$ при фиксированной $P_X \in \mathcal{P}_X^\circ$ и того факта, что f -дивергенция (где f строго выпукла в единице) равна нулю тогда и только тогда, когда ее аргументы равны. Зададим векторы сферического возмущения $\{K_X^{(n)} \in \mathcal{S} : n \in \mathbb{N}\}$ в виде

$$R_X^{(n)} = P_X + \varepsilon_n K_X^{(n)} \text{diag}(\sqrt{P_X}),$$

где $\{\varepsilon_n \neq 0 : n \in \mathbb{N}\}$ задают необходимые масштабирования, а $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ (так как $\lim_{n \rightarrow \infty} R_X^{(n)} = P_X$). Соответствующие вероятностные меры на выходе имеют вид (107) с необходимыми поправками, и отношение между выходной и входной f -дивергенциями можно, как и выше, аппроксимировать с помощью (14):

$$\frac{D_f(R_X^{(n)} W \| P_X W)}{D_f(R_X^{(n)} \| P_X)} = \frac{\frac{f''(1)}{2} \varepsilon_n^2 \|K_X^{(n)} B\|_2^2 + o(\varepsilon_n^2)}{\frac{f''(1)}{2} \varepsilon_n^2 \|K_X^{(n)}\|_2^2 + o(\varepsilon_n^2)} = \frac{\|K_X^{(n)} B\|_2^2 + o(1)}{1 + o(1)}.$$

С учетом секвенциальной компактности \mathcal{S} можно считать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} K_X^{(n)} = K_X^* \in \mathcal{S}$, переходя при необходимости к подпоследовательности. Отсюда, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(\delta_n) = \|K_X^* B\|_2^2 \leq \eta_{\chi^2}(P_X, P_{Y|X}),$$

где равенство следует из (108) и непрерывности отображения $(\mathbb{R}^{|\mathcal{X}|})^* \ni x \mapsto \|xB\|_2^2$, а неравенство – из (25), что и завершает доказательство. \blacktriangle

ПРИЛОЖЕНИЕ E: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1

Доказательство. Выпуклая функция $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t \log(t)$, очевидно, строго выпукла и трижды дифференцируема в единице, причем $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = 1 > 0$ и $f'''(1) = -1$. Кроме того, функция $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t} = \log(t)$, где $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 0$, очевидно, выпукла вверх. Таким образом, для доказательства следствия 1 с помощью теоремы 3 достаточно показать, что f удовлетворяет условию (75) для любого $t \in (0, \infty)$ (см. [79])

$$(f(t) - f'(1)(t-1)) \left(1 - \frac{f'''(1)}{3f''(1)}(t-1)\right) \geq \frac{f''(1)}{2}(t-1)^2,$$

что после упрощения приводится к виду

$$2t(t+2) \log(t) - (5t+1)(t-1) \geq 0.$$

Зададим $h: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(t) = 2t(t+2)\log(t) - (5t+1)(t-1)$, и заметим, что

$$\begin{aligned} h'(t) &= 4(t+1)\log(t) - 8(t-1), \\ h''(t) &= 4\log(t) + \frac{4}{t} - 4 \geq 0, \end{aligned}$$

где неотрицательность второй производной следует из хорошо известного неравенства

$$\forall x > 0, \quad x \log(x) \geq x - 1.$$

Так как h выпукла (поскольку ее вторая производная неотрицательна) и $h(1) = h'(1) = 0$, то $t = 1$ является глобальной точкой минимума h , и $h(t) \geq 0$ для любого $t \in (0, \infty)$, что и требовалось.

Наконец, нетрудно проверить, что константа в следствии 1 равна

$$\frac{f'(1) + f(0)}{f''(1) \min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x)} = \frac{1}{\min_{x \in \mathcal{X}} P_X(x)},$$

что и завершает доказательство. \blacktriangle

ПРИЛОЖЕНИЕ F: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГРАНИЦЫ (78)

Доказательство. В [1, лемма 6] приведены два доказательства границы (78). Здесь мы изложим одно из них, использующее идеи выпуклого анализа. В нем применяется тот факт, что КЛ-дивергенция является так называемой дивергенцией Брегмана, соответствующей отрицательной функции энтропии Шеннона, а затем сильная выпуклость отрицательной функции энтропии Шеннона используется для вывода границы на КЛ-дивергенцию. Пусть $H_{\text{neg}}: \mathcal{P}_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathbb{R}$ – отрицательная функция энтропии Шеннона, определяемая как

$$\forall Q_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}, \quad H_{\text{neg}}(Q_X) \triangleq \sum_{x \in \mathcal{X}} Q_X(x) \log(Q_X(x)).$$

Так как дивергенция Брегмана, соответствующая функции H_{neg} , является КЛ-дивергенцией (см. [107]), то для всех $S_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}$ и $Q_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}^{\circ}$ справедливо

$$D(S_X \| Q_X) = H_{\text{neg}}(S_X) - H_{\text{neg}}(Q_X) - (S_X - Q_X) \nabla H_{\text{neg}}(Q_X),$$

где $\nabla H_{\text{neg}}: \mathcal{P}_{\mathcal{X}}^{\circ} \rightarrow \mathbb{R}^{|\mathcal{X}|}$ – градиент функции H_{neg} . При этом, так как H_{neg} дважды непрерывно дифференцируема, справедливо

$$\forall Q_X \in \mathcal{P}_{\mathcal{X}}^{\circ}, \quad \nabla^2 H_{\text{neg}}(Q_X) = \text{diag}(Q_X)^{-1} \succeq_{\text{PSD}} I,$$

где через $\nabla^2 H_{\text{neg}}: \mathcal{P}_{\mathcal{X}}^{\circ} \rightarrow \mathbb{R}^{|\mathcal{X}| \times |\mathcal{X}|}$ обозначен гессиан функции H_{neg} . (Заметим, что матрица $\text{diag}(Q_X)^{-1} - I$ положительно полуопределена как диагональная матрица с неотрицательными элементами на диагонали.) Напомним [100, гл. 9], что дважды непрерывно дифференцируемая выпуклая функция $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ на открытой области $S \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *сильно выпуклой*, если существует $m > 0$, такое что для всех $x \in S$ выполнено $\nabla^2 f(x) \succeq mI$. Значит, H_{neg} сильно выпукла на $\mathcal{P}_{\mathcal{X}}^{\circ}$. Следствием этой сильной выпуклости является такая квадратичная нижняя граница [100, гл. 9]:

$$\begin{aligned} H_{\text{neg}}(S_X) &\geq H_{\text{neg}}(Q_X) + (S_X - Q_X) \nabla H_{\text{neg}}(Q_X) + \frac{1}{2} \|S_X - Q_X\|_2^2 \iff \\ \iff \quad D(S_X \| Q_X) &\geq \frac{1}{2} \|S_X - Q_X\|_2^2 \end{aligned}$$

для любых $S_X \in \mathcal{P}_X$ и $Q_X \in \mathcal{P}_X^\circ$, где разрешается $S_X \in \mathcal{P}_X \setminus \mathcal{P}_X^\circ$ в силу непрерывности H_{neg} . Это в точности то же самое, что получалось при ослаблении границы (71) в доказательстве леммы 2 с помощью соотношений $\|S_X - Q_X\|_1 \geq \|S_X - Q_X\|_2$ и (70). Наконец, для любых $S_X \in \mathcal{P}_X$ и $Q_X \in \mathcal{P}_X^\circ$ имеем

$$D(S_X \| Q_X) \geq \frac{1}{2} \|S_X - Q_X\|_2^2 \geq \frac{\min_{x \in \mathcal{X}} Q_X(x)}{2} \chi^2(S_X \| Q_X),$$

где второе неравенство вытекает из (4). Это тривиальным образом справедливо также и для всех $Q_X \in \mathcal{P}_X \setminus \mathcal{P}_X^\circ$. ▲

Первый автор выражает благодарность проф. Юрию Полянскому за весьма полезные обсуждения по поводу теорем 6 и 7, а также в целом за обсуждение вопросов, связанных с коэффициентами сжатия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Makur A., Zheng L.* Bounds between Contraction Coefficients // Proc. 53rd Annual Allerton Conf. on Communication, Control, and Computing. Monticello, IL, USA. Sept. 29–October 2, 2015. P. 1422–1429.
2. *Erkip E., Cover T.M.* The Efficiency of Investment Information // IEEE Trans. Inform. Theory. 1998. V. 44. № 3. P. 1026–1040.
3. *Kamath S., Anantharam V.* Non-interactive Simulation of Joint Distributions: The Hirschfeld–Gebelein–Rényi Maximal Correlation and the Hypercontractivity Ribbon // Proc. 50th Annual Allerton Conf. on Communication, Control, and Computing. Monticello, IL, USA. Oct. 1–5, 2012. P. 1057–1064.
4. *Anantharam V., Gohari A., Kamath S., Nair C.* On Maximal Correlation, Hypercontractivity, and the Data Processing Inequality Studied by Erkip and Cover, [arXiv:1304.6133 \[cs.IT\]](https://arxiv.org/abs/1304.6133), 2013.
5. *Anantharam V., Gohari A., Kamath S., Nair C.* On Hypercontractivity and the Mutual Information between Boolean Functions // Proc. 51st Annual Allerton Conf. on Communication, Control, and Computing. Monticello, IL, USA. Oct. 2–4, 2013. P. 13–19.
6. *Polyanskiy Y., Wu Y.* Dissipation of Information in Channels with Input Constraints // IEEE Trans. Inform. Theory. 2016. V. 62. № 1. P. 35–55.
7. *Polyanskiy Y., Wu Y.* Strong Data-Processing Inequalities for Channels and Bayesian Networks // Convexity and Concentration. New York: Springer, 2017. P. 211–249.
8. *Raginsky M.* Strong Data Processing Inequalities and Φ -Sobolev Inequalities for Discrete Channels // IEEE Trans. Inform. Theory. 2016. V. 62. № 6. P. 3355–3389.
9. *Hirschfeld H.O.* A Connection between Correlation and Contingency // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1935. V. 31. № 4. P. 520–524.
10. *Gebelein H.* Das statistische Problem der Korrelation als Variations- und Eigenwertproblem und sein Zusammenhang mit der Ausgleichsrechnung // Z. Angew. Math. Mech. 1941. V. 21. № 6. P. 364–379.
11. *Сарманов О.В.* Максимальный коэффициент корреляции (несимметричный случай) // Докл. АН СССР. 1958. Т. 121. № 1. С. 52–55.
12. *Rényi A.* On Measures of Dependence // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1959. V. 10. № 3–4. P. 441–451.
13. *Witsenhausen H.S.* On Sequences of Pairs of Dependent Random Variables // SIAM J. Appl. Math. 1975. V. 28. № 1. P. 100–113.
14. *Добрушин Р.Л.* Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова. I // Теория вероятн. и ее примен. 1956. Т. 1. № 1. С. 72–89.
15. *Ahlsvede R., Gács P.* Spreading of Sets in Product Spaces and Hypercontraction of the Markov Operator // Ann. Probab. 1976. V. 4. № 6. P. 925–939.
16. *Seneta E.* Non-negative Matrices and Markov Chains. New York: Springer, 1981.

17. *Cohen J.E., Iwasa Y., Răuțu G., Ruskai M.B., Seneta E., Zbăganu G.* Relative Entropy under Mappings by Stochastic Matrices // *Linear Algebra Appl.* 1993. V. 179. P. 211–235.
18. *Choi M.-D., Ruskai M.B., Seneta E.* Equivalence of Certain Entropy Contraction Coefficients // *Linear Algebra Appl.* 1994. V. 208/209. P. 29–36.
19. *Cohen J.E., Kemperman J.H.B., Zbăganu G.* Comparisons of Stochastic Matrices with Applications in Information Theory, Statistics, Economics and Population Sciences. Ann Arbor, MI, USA: Birkhäuser, 1998.
20. *Körner J., Marton K.* Comparison of Two Noisy Channels // *Topics in Information Theory (2nd Colloq., Keszthely, Hungary, 1975).* Colloq. Math. Soc. János Bolyai. V. 16. Amsterdam: North-Holland, 1977. P. 411–423.
21. *Csiszár I.* Eine informationstheoretische Ungleichung und ihre Anwendung auf den Beweis der Ergodizität von Markoffschen Ketten // *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. Ser. A.* 1963. V. 8. P. 85–108.
22. *Csiszár I.* Information-type Measures of Difference of Probability Distributions and Indirect Observations // *Studia Sci. Math. Hungar.* 1967. V. 2. P. 299–318.
23. *Ali S.M., Silvey S.D.* A General Class of Coefficients of Divergence of One Distribution from Another // *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B.* 1966. V. 28. № 1. P. 131–142.
24. *Morimoto T.* Markov Processes and the H -Theorem // *J. Phys. Soc. Japan.* 1963. V. 18. № 3. P. 328–331.
25. *Akaike H.* Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle // *Proc. 2nd Int. Symp. on Information Theory. Tsaghkadzor, Armenia, USSR. Sept. 2–8, 1971.* Budapest, Hungary: Akad. Kiadó, 1973. P. 267–281.
26. *Ziv J., Zakai M.* On Functionals Satisfying a Data-Processing Theorem // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 1973. V. 19. № 3. P. 275–283.
27. *Zakai M., Ziv J.* A Generalization of the Rate-Distortion Theory and Applications // *Information Theory: New Trends and Open Problems.* New York: Springer, 1975. P. 87–123.
28. *Liese F., Vajda I.* On Divergences and Informations in Statistics and Information Theory // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 2006. V. 52. № 10. P. 4394–4412.
29. *Levin D.A., Peres Y., Wilmer E.L.* Markov Chains and Mixing Times. Providence, RI, USA: Amer. Math. Soc., 2009.
30. *Kullback S., Leibler R.A.* On Information and Sufficiency // *Ann. Math. Statist.* 1951. V. 22. № 1. P. 79–86.
31. *Neyman J.* Contribution to the Theory of the χ^2 Test // *Proc. 1st Berkeley Symp. on Mathematical Statistics and Probability.* Berkeley, CA, USA. Aug. 13–18, 1945; Jan. 27–29, 1946. Berkeley, CA, USA: Univ. of California Press, 1949. P. 239–273.
32. *Nielsen F., Nock R.* On the Chi Square and Higher-Order Chi Distances for Approximating f -Divergences // *IEEE Signal Process. Lett.* 2014. V. 21. № 1. P. 10–13.
33. *Liese F., Vajda I.* Convex Statistical Distances. Leipzig: Teubner, 1987.
34. *Sason I., Verdú S.* f -Divergence Inequalities // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 2016. V. 62. № 11. P. 5973–6006.
35. *Le Cam L.* Asymptotic Methods in Statistical Decision Theory. New York: Springer, 1986.
36. *Vincze I.* On the Concept and Measure of Information Contained in an Observation // *Contributions to Probability: A Collection of Papers Dedicated to Eugène Lukacs.* New York: Academic Press, 1981. P. 207–214.
37. *Györfi L., Vajda I.* A Class of Modified Pearson and Neyman Statistics // *Statist. Decisions.* 2001. V. 19. № 3. P. 239–251.
38. *Polyanskiy Y., Wu Y.* Lecture Notes on Information Theory. Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, MIT, Cambridge, USA, 2017. Lect. Notes 6.441.
39. *Csiszár I.* A Class of Measures of Informativity of Observation Channels // *Period. Math. Hungar.* 1972. V. 2. № 1–4. P. 191–213.
40. *du Pin Calmon F., Makhdoumi A., Médard M., Varia M., Christiansen M., Duffy K.R.* Principal Inertia Components and Applications // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 2017. V. 63. № 8. P. 5011–5038.

41. *Cover T.M., Thomas J.A.* Elements of Information Theory. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 2006.
42. *Borade S., Zheng L.* Euclidean Information Theory // Proc. IEEE Int. Zurich Seminar on Communications. Zurich, Switzerland. Mar. 12–14, 2008. P. 14–17.
43. *Huang S.-L., Zheng L.* Linear Information Coupling Problems // Proc. 2012 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT'2012). Cambridge, MA, USA. July 1–6, 2012. P. 1029–1033.
44. *Amari S., Nagaoka H.* Methods of Information Geometry. Providence, RI, USA: Amer. Math. Soc.; Oxford Univ. Press, 2000.
45. *Csiszár I., Shields P.C.* Information Theory and Statistics: A Tutorial. Hanover, MA, USA: Now Publ., 2005.
46. *Gohari A.A., Anantharam V.* Evaluation of Marton's Inner Bound for the General Broadcast Channel // IEEE Trans. Inform. Theory. 2012. V. 58. № 2. P. 608–619.
47. *Abbe E., Zheng L.* A Coordinate System for Gaussian Networks // IEEE Trans. Inform. Theory. 2012. V. 58. № 2. P. 721–733.
48. *Makur A.* A Study of Local Approximations in Information Theory: Master's Thesis. Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, MIT, Cambridge, MA, USA, 2015.
49. *Horn R.A., Johnson C.R.* Matrix Analysis. New York: Cambridge Univ. Press, 2013.
50. *Greenacre M.J.* Theory and Applications of Correspondence Analysis. San Diego, CA, USA: Academic Press, 1984.
51. *Greenacre M., Hastie T.* The Geometric Interpretation of Correspondence Analysis // J. Amer. Statist. Assoc. 1987. V. 82. № 398. P. 437–447.
52. *Hsu H., Salamation S., Calmon F.P.* Correspondence Analysis Using Neural Networks // Proc. 22nd Int. Conf. on Artificial Intelligence and Statistics (AISTATS'2019). Naha, Japan. April 16–18, 2019. P. 2671–2680.
53. *Lancaster H.O.* The Structure of Bivariate Distributions // Ann. Math. Statist. 1958. V. 29. № 3. P. 719–736.
54. *Lancaster H.O.* The Chi-Squared Distribution. New York: John Wiley & Sons, 1969.
55. *Makur A., Zheng L.* Polynomial Spectral Decomposition of Conditional Expectation Operators // Proc. 54th Annual Allerton Conf. on Communication, Control, and Computing. Monticello, IL, USA. Sept. 27–30, 2016. P. 633–640.
56. *Makur A., Zheng L.* Polynomial Singular Value Decompositions of a Family of Source-Channel Models // IEEE Trans. Inform. Theory. 2017. V. 63. № 12. P. 7716–7728.
57. *Breiman L., Friedman J.H.* Estimating Optimal Transformations for Multiple Regression and Correlation // J. Amer. Statist. Assoc. 1985. V. 80. № 391. P. 580–598.
58. *Makur A., Kozynski F., Huang S.-L., Zheng L.* An Efficient Algorithm for Information Decomposition and Extraction // Proc. 53rd Annual Allerton Conf. on Communication, Control, and Computing. Monticello, IL, USA. Sept. 29–Oct. 2, 2015. P. 972–979.
59. *Golub G.H., van Loan C.F.* Matrix Computations Baltimore, MD, USA: The Johns Hopkins Univ. Press, 1996.
60. *Demmel J.W.* Applied Numerical Linear Algebra. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 1997.
61. *Makur A.* Information Contraction and Decomposition: Sc.D. Thesis. Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, MIT, Cambridge, MA, USA, 2019.
62. *Huang S.-L., Makur A., Kozynski F., Zheng L.* Efficient Statistics: Extracting Information from IID Observations // Proc. 52nd Annual Allerton Conf. on Communication, Control, and Computing. Monticello, IL, USA. Oct. 1–3, 2014. P. 699–706.
63. *Huang S.-L., Makur A., Wornell G.W., Zheng L.* On Universal Features for High-Dimensional Learning and Inference, [arXiv:1911.09105 \[cs.LG\]](https://arxiv.org/abs/1911.09105), 2019.
64. *Pearson K.* On Lines and Planes of Closest Fit to Systems of Points in Space // Philos. Mag. 1901. V. 2. № 11. P. 559–572.
65. *Hotelling H.* Analysis of a Complex of Statistical Variables into Principal Components // J. Educ. Psychol. 1933. V. 24. № 6. P. 417–441; 498–520.

66. *Hotelling H.* Relations between Two Sets of Variates // *Biometrika*. 1936. V. 28. № 3/4. P. 321–377.
67. *Coifman R.R., Lafon S.* Diffusion Maps // *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 2006. V. 21. № 1. P. 5–30.
68. *Asoodeh S., Diaz M., Alajaji F., Linder T.* Information Extraction under Privacy Constraints // *Information*. 2016. V. 7. № 1. Article no. 15 (37 pp.).
69. *Seneta E.* Coefficients of Ergodicity: Structure and Applications // *Adv. in Appl. Probab.* 1979. V. 11. № 3. P. 576–590.
70. *Ipsen I.C.F., Selee T.M.* Ergodicity Coefficients Defined by Vector Norms // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2011. V. 32. № 1. P. 153–200.
71. *Selee T.M.* Stochastic Matrices: Ergodicity Coefficients, and Applications to Ranking: Ph.D. Thesis. Dept. of Applied Mathematics, North Carolina State Univ., Raleigh, NC, USA, 2009.
72. *Kontorovich A.* Obtaining Measure Concentration from Markov Contraction // *Markov Process. Related Fields*. 2012. V. 18. № 4. P. 613–638.
73. *Yu B.* Assouad, Fano, and Le Cam // *Festschrift for Lucien Le Cam: Research Papers in Probability and Statistics*. New York: Springer, 1997. P. 423–435.
74. *Shannon C.E.* The Zero Error Capacity of a Noisy Channel // *IRE Trans. Inform. Theory*. 1956. V. 2. № 3. P. 8–19.
75. *Csiszár I., Körner J.* Information Theory: Coding Theorems for Discrete Memoryless Systems. New York: Cambridge Univ. Press, 2011.
76. *Evans W.S., Schulman L.J.* Signal Propagation and Noisy Circuits // *IEEE Trans. Inform. Theory*. 1999. V. 45. № 7. P. 2367–2373.
77. *Goldstein S.* Maximal Coupling // *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*. 1979. V. 46. № 2. P. 193–204.
78. *Kim H., Gao W., Kannan S., Oh S., Viswanath P.* Discovering Potential Correlations via Hypercontractivity // *Entropy*. 2017. V. 19. № 11. Article no. 586 (32 pp.).
79. *Gilardoni G.L.* On Pinsker's and Vajda's Type Inequalities for Csiszár's f -Divergences // *IEEE Trans. Inform. Theory*. 2010. V. 56. № 11. P. 5377–5386.
80. *Verdú S.* Total Variation Distance and the Distribution of Relative Information // *Proc. 2014 Information Theory and Applications Workshop (ITA'2014)*. San Diego, CA, USA. Feb. 9–14, 2014. P. 1–3.
81. *Nair C.* An Extremal Inequality Related to Hypercontractivity of Gaussian Random Variables // *Proc. 2014 Information Theory and Applications Workshop (ITA'2014)*. San Diego, CA, USA. Feb. 9–14, 2014. P. 1–7.
82. *Calmon F.P., Polyanskiy Y., Wu Y.* Strong Data Processing Inequalities for Input Constrained Additive Noise Channels // *IEEE Trans. Inform. Theory*. 2018. V. 64. № 3. P. 1879–1892.
83. *Makur A., Polyanskiy Y.* Comparison of Channels: Criteria for Domination by a Symmetric Channel // *IEEE Trans. Inform. Theory*. 2018. V. 64. № 8. P. 5704–5725.
84. *van Dijk M.* On a Special Class of Broadcast Channels with Confidential Messages // *IEEE Trans. Inform. Theory*. 1997. V. 43. № 2. P. 712–714.
85. *Makur A., Polyanskiy Y.* Less Noisy Domination by Symmetric Channels // *Proc. 2017 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT'2017)*. Aachen, Germany. June 25–30, 2017. P. 2463–2467.
86. *Carlen E.* Trace Inequalities and Quantum Entropy: An Introductory Course // *Entropy and the Quantum*. Providence, RI, USA: Amer. Math. Soc., 2010. P. 73–140.
87. *Bhatia R.* Matrix Analysis. New York: Springer, 1997.
88. *Samorodnitsky A.* On the Entropy of a Noisy Function // *IEEE Trans. Inform. Theory*. 2016. V. 62. № 10. P. 5446–5464.
89. *Kumar G.R., Courtade T.A.* Which Boolean Functions Are Most Informative? // *Proc. 2013 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT'2013)*. Istanbul, Turkey. July 7–12, 2013. P. 226–230.
90. *El Gamal A., Kim Y.-H.* Network Information Theory. New York: Cambridge Univ. Press, 2011.

91. *Ordentlich E., Weinberger M.J.* A Distribution Dependent Refinement of Pinsker's Inequality // IEEE Trans. Inform. Theory. 2005. V. 51. № 5. P. 1836–1840.
92. *Sason I.* Bounds on f -Divergences and Related Distances // CCIT Report № 859. Haifa, Israel: Dept. of Electrical Engineering, Technion – Israel Inst. of Technology, 2014.
93. *Harremoës P., Vajda I.* On Pairs of f -Divergences and Their Joint Range // IEEE Trans. Inform. Theory. June 2011. V. 57. № 6. P. 3230–3235.
94. *Fedotov A.A., Harremoës P., Topsøe F.* Refinements of Pinsker's Inequality // IEEE Trans. Inform. Theory. 2003. V. 49. № 6. P. 1491–1498.
95. *Su F.E.* Methods for Quantifying Rates of Convergence for Random Walks on Groups: Ph.D. Thesis. Dept. of Mathematics, Harvard Univ., Cambridge, MA, USA, 1995.
96. *Dragomir S.S., Gluščević V.* Some Inequalities for the Kullback–Leibler and χ^2 -Distances in Information Theory and Applications // Tamsui Oxf. J. Math. Sci. 2001. V. 17. № 2. P. 97–111.
97. *Sason I.* Tight Bounds for Symmetric Divergence Measures and a New Inequality Relating f -Divergences // Proc. 2015 IEEE Information Theory Workshop (ITW'2015). Jerusalem, Israel. April 26–May 1, 2015. P. 1–5.
98. *Gibbs A.L., Su F.E.* On Choosing and Bounding Probability Metrics // Int. Stat. Rev. 2002. V. 70. № 3. P. 419–435.
99. *Csiszár I., Talata Z.* Context Tree Estimation for Not Necessarily Finite Memory Processes, via BIC and MDL // IEEE Trans. Inform. Theory. 2006. V. 52. № 3. P. 1007–1016.
100. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. New York: Cambridge Univ. Press, 2004.
101. *Ash R.B.* Information Theory. New York: John Wiley & Sons, 1965.
102. *Dembo A., Cover T.M., Thomas J.A.* Information Theoretic Inequalities // IEEE Trans. Inform. Theory. 1991. V. 37. № 6. P. 1501–1518.
103. *Li Y.-C., Yeh C.-C.* Some Equivalent Forms of Bernoulli's Inequality: A Survey // Appl. Math. 2013. V. 4. № 7. P. 1070–1093.
104. *Sutter D., Renes J.M.* Universal Polar Codes for More Capable and Less Noisy Channels and Sources // Proc. 2014 IEEE Int. Symp. on Information Theory (ISIT'2014). Honolulu, HI, USA. June 29–July 4, 2014. P. 1461–1465.
105. *Rakočević V., Wimmer H.K.* A Variational Characterization of Canonical Angles between Subspaces // J. Geom. 2003. V. 78. № 1. P. 122–124.
106. *Kang W., Ulukus S.* A New Data Processing Inequality and Its Applications in Distributed Source and Channel Coding // IEEE Trans. Inform. Theory. 2011. V. 57. № 1. P. 56–69.
107. *Banerjee A., Merugu S., Dhillon I.S., Ghosh J.* Clustering with Bregman Divergences // J. Mach. Learn. Res. 2005. V. 6. P. 1705–1749.

Макур Ануран
Чжэн Личжун
 Отделение информационных технологий,
 Массачусетский технологический институт, Кэмбридж, США
 a_makur@mit.edu
 lizhong@mit.edu

Поступила в редакцию
 17.10.2019
 После доработки
 17.10.2019
 Принята к публикации
 09.03.2020

УДК 621.391.1:519.2

© 2020 г. М.В. Бурнашев

НОВЫЕ ГРАНИЦЫ В ЗАДАЧЕ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ С ИНФОРМАЦИОННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ¹

Рассматривается задача проверки гипотез, в которой мы не можем наблюдать часть данных. Наш помощник наблюдает пропущенные данные и может передать нам некоторую ограниченную информацию о них. Какая ограниченная информация позволит нам сделать наилучшие статистические выводы? В частности, какая минимальная информация достаточна для получения тех же результатов, как если бы мы непосредственно наблюдали все данные? Получены оценки для величины этой минимальной информации и некоторые подобные результаты.

Ключевые слова: проверка гипотез, информационные ограничения, вероятности ошибки.

DOI: 10.31857/S0555292320020023

§ 1. Введение и основные результаты

1. Постановка задачи. Как и в [1, 2], на длине n рассматривается двоичный симметричный канал ДСК(p) с входным и выходным алфавитами $E = \{0, 1\}$ и неизвестной переходной вероятностью p . Для различения входного и выходного множеств блоков $E^n = \{0, 1\}^n$ канала будем обозначать их через E_{in}^n и E_{out}^n соответственно. Относительно величины p имеются две гипотезы (одна из которых верна): $H_0: p = p_0$ и $H_1: p = p_1$, где $0 < p_0, p_1 \leq 1/2$.

Обозначим через $\mathbf{P}(\mathbf{y} | \mathbf{x})$ и $\mathbf{Q}(\mathbf{y} | \mathbf{x})$ вероятности получить на выходе канала блок $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ при условии, что входным был блок $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ для гипотез H_0 и H_1 соответственно. Тогда

$$\mathbf{P}(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = (1 - p_0)^{n-d(\mathbf{x}, \mathbf{y})} p_0^{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})}, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = (1 - p_1)^{n-d(\mathbf{x}, \mathbf{y})} p_1^{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})},$$

где $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ – расстояние Хэмминга между блоками \mathbf{x} и \mathbf{y} (т.е. число несовпадающих компонент этих векторов на всей длине n).

Рассматривается следующая задача минимаксного различения гипотез H_0 и H_1 . Мы (т.е. “статистик”) наблюдаем только блок $\mathbf{y} \in E_{\text{out}}^n$ на выходе канала, а наш помощник (“helper”) наблюдает только блок $\mathbf{x} \in E_{\text{in}}^n$ на входе канала. Предполагается, что у нас нет никакой априорной информации о входном блоке \mathbf{x} . Ясно, что основываясь только на выходном блоке \mathbf{y} , мы не можем сделать никаких содержательных заключений относительно неизвестной величины p .

Предположим далее, что для заданной величины $R > 0$ нашему помощнику разрешается заранее разбить все входное пространство $E_{\text{in}}^n = \{0, 1\}^n$ на $N \leq 2^{Rn}$ произвольных частей $\{X_1, \dots, X_N\}$ и сообщить нам (каким-то дополнительным образом)

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 19-01-00364).

только то, какой части X_i принадлежит входной блок \mathbf{x} . Ясно, что только случай $N < 2^n$, т.е. $R < 1$, является интересным (иначе помощник может просто сообщить нам блок \mathbf{x}).

Например, помощник может сообщить статистику точные значения первых Rn величин x_1, \dots, x_{Rn} (но тогда ничего не сообщить о последующих величинах x_i). Однако такой простой способ разбиения входного пространства E_{in}^n (на цилиндрические множества $\{X_i\}$) не является, вообще говоря, оптимальным. С точки зрения статистика входные данные (x_1, \dots, x_n) представляют собой очень сильный мешающий вектор.

Есть много практических ситуаций, где встречается подобная задача. Например, в некоторых приложениях входной блок $\mathbf{x} \in E_{\text{in}}^n$ представляет собой “мешающий шум”, который “загрязнил” выходной блок $\mathbf{y} \in E_{\text{out}}^n$, и поэтому нам хотелось бы “уменьшить” (по возможности) это “загрязнение”, для того чтобы улучшить статистические выводы. Конечно, при этом очень важно качество канала связи от помощника к статистiku. Для упрощения задачи мы рассматриваем здесь только идеализированный случай бесшумного канала с ограниченной пропускной способностью.

Можно также сказать, что оптимальная ограниченная информация о блоке $\mathbf{x} \in E_{\text{in}}^n$ означает оптимальное “сжатие” полной информации о блоке \mathbf{x} . Конечно, это оптимальное “сжатие” зависит от имеющейся априорной информации о переходной вероятности p и используемого критерия качества.

Замечание 1. Ясно, что задача не изменится, если, наоборот, статистик наблюдает вход, а помощник – выход канала.

Основываясь на наблюдении $\mathbf{y} \in E_{\text{out}}^n$ и номере (индексе) i части X_i , статистик принимает решение в пользу одной из гипотез H_0 или H_1 . Для того чтобы избежать излишних усложнений, рассмотрим только нерандомизованные методы принятия решения (при этом существо задачи и результаты сохраняются).

Нас интересуют разбиения $\{X_1, \dots, X_N\}$ и методы принятия решения, которые являются асимптотически (при $n \rightarrow \infty$) оптимальными. Аналогичные, но значительно более общие постановки такой задачи рассматривались, например, в [3–8].

Замечание 2. Забегая вперед, отметим, что насколько нам известно, все результаты в этой области (см., например, [1–8]) имеют вид “можно получить следующие характеристики проверки гипотез: ...”. Нашей целью являются противоположные результаты, т.е. показать, что “нельзя получить характеристики лучше, чем ...”.

Всюду далее $\log x = \log_2 x$. Введем шары и сферы в E^n :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\mathbf{x}}(p) &= \{\mathbf{u} : d(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq pn\}, \\ \mathbf{S}_{\mathbf{x}}(p) &= \{\mathbf{u} : d(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = pn\}, \end{aligned} \quad \mathbf{x}, \mathbf{u} \in E^n. \quad (1)$$

2. Экспоненты вероятностей ошибки и дуальная задача. Пусть выбрано разбиение $\{X_1, \dots, X_N\}$ входного пространства $E_{\text{in}}^n = \{0, 1\}^n$. Тогда общее правило принятия решения можно описать следующим образом. Для каждого элемента разбиения X_i выбирается некоторое множество $\mathcal{A}(X_i) \subset E_{\text{out}}^n$, и далее, основываясь на наблюдении \mathbf{y} и известном X_i , принимается решение ($\mathcal{A}^c = E_{\text{out}}^n \setminus \mathcal{A}$):

$$\mathbf{y} \in \mathcal{A}(X_i) \implies H_0, \quad \mathbf{y} \in \mathcal{A}^c(X_i) \implies H_1.$$

Определим вероятности ошибки 1-го рода α_n и 2-го рода β_n :

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \Pr(H_1 | H_0) = \max_{i=1, \dots, N} \max_{\mathbf{x} \in X_i} \mathbf{P}(\mathcal{A}^c(X_i) | \mathbf{x}), \\ \beta_n &= \Pr(H_0 | H_1) = \max_{i=1, \dots, N} \max_{\mathbf{x} \in X_i} \mathbf{Q}(\mathcal{A}(X_i) | \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Пусть далее $\gamma \geq 0$ – заданная величина. Будем требовать, чтобы для вероятности ошибки 1-го рода α_n выполнялось условие

$$\alpha_n = \Pr(H_1 | H_0) \leq 2^{-\gamma n}. \quad (2)$$

Нас интересует минимально возможная (по всем разбиениям $\{X_i\}$ входного пространства E_{in}^n и всем решениям) вероятность ошибки 2-го рода $\min \beta_n$. Мы исследуем асимптотический случай, когда $n \rightarrow \infty$ и $N = 2^{Rn}$, где $0 < R < 1$ – заданная постоянная². Тогда для наилучших разбиения $\{X_i\}$ и решения обозначим

$$e(\gamma, R) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{\min \beta_n} > 0, \quad (3)$$

где минимум берется по всем разбиениям $\{X_i\}$ и решениям, удовлетворяющим условию (2).

Основной нашей целью являются оценки сверху для функции $e(\gamma, R)$ (оценки снизу см. в [1]). В данной статье мы ограничиваемся случаем $\gamma \rightarrow 0$, исследуя функцию $e(0, R) = e(R)$ и связанную с ней функцию $r_{\text{crit}}(p_0, p_1)$ (иногда этот случай называют задачей Неймана – Пирсона). В отдельной работе мы рассмотрим случай $\gamma > 0$.

Для нас будет удобно рассмотреть также эквивалентную дуальную задачу (без помощника). Пусть задана величина r , $0 < r < 1$, и нам разрешается заранее выбрать любое множество $\mathcal{X} \subset E_{\text{in}}^n$, состоящее из $X = 2^{rn}$ входных блоков. Известно также, что входной блок \mathbf{x} принадлежит выбранному множеству \mathcal{X} . Мы наблюдаем выход канала \mathbf{y} и, зная множество \mathcal{X} , рассматриваем задачу проверки гипотез H_0 и H_1 . Далее мы выбираем множество \mathcal{A} и в зависимости от наблюдения \mathbf{y} принимаем решение:

$$\mathbf{y} \in \mathcal{A} \implies H_0, \quad \mathbf{y} \in \mathcal{A}^c \implies H_1.$$

Вероятности ошибок 1-го рода α_n и 2-го рода β_n определяются как

$$\alpha_n = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \mathbf{P}(\mathcal{A}^c | \mathbf{x}), \quad \beta_n = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \mathbf{Q}(\mathcal{A} | \mathbf{x}).$$

Пусть для вероятности ошибки 1-го рода α_n выполняется условие (2), и мы хотим выбрать множество $\mathcal{X} \subset E_{\text{in}}^n$ мощности $X = 2^{rn}$ и правило принятия решения таким образом, чтобы достичь минимально возможной вероятности ошибки 2-го рода $\min \beta_n$. Для этой дуальной задачи аналогично (3) определим функцию

$$e_d(\gamma, r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 \frac{1}{\min \beta_n} > 0, \quad (4)$$

где минимум берется по всем множествам $\mathcal{X} \subset E_{\text{in}}^n$ мощности $X = 2^{rn}$ и всем решениям.

Следующий результат устанавливает простую связь между функциями $e(\gamma, R)$ и $e_d(\gamma, r)$.

Предложение 1 [1, предложение 1]. *Справедливо соотношение*

$$e(\gamma, 1 - R) = e_d(\gamma, R), \quad 0 \leq R \leq 1, \quad \gamma \geq 0. \quad (5)$$

В силу предложения 1 и формулы (5) достаточно исследовать функцию $e_d(\gamma, r)$. В данной статье мы ограничимся случаем $\gamma \rightarrow 0$, исследуя функцию $e_d(0, r)$.

² Для упрощения формул здесь и далее не будем использовать знак целой части.

Замечание 3. По существу в статье рассматривается случай, когда распределения $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имеют вид $P(x, y) = p(x)P(y|x)$ и $Q(x, y) = p(x)Q(y|x)$, где распределение $p(x)$ одно и то же для $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. В более общей постановке задачи это может быть не так.

3. Известный входной блок. Предположим, что мы знаем входной блок $\mathbf{x} \in E_{\text{in}}^n$ (тогда можно считать, что $\mathbf{x} = \mathbf{0}$) и наблюдаем выходной блок $\mathbf{y} \in E_{\text{out}}^n$. Если требуется только $\alpha_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ (т.е. $\gamma = 0$), и нас интересует только экспонента (по n) вероятности ошибки 2-го рода β_n , то при $n \rightarrow \infty$ в силу центральной предельной теоремы (или в силу леммы Неймана–Пирсона) оптимальным множеством решения в пользу H_0 (т.е. p_0) является сферический слой $\mathbf{B}_0(p_0 + \delta) \setminus \mathbf{B}_0(p_0 - \delta)$ в E_{out}^n (см. (1)), где $\delta > 0$ мало. Тогда для экспоненты (по n) вероятности ошибки 2-го рода β_n имеем

$$\frac{1}{n} \log \beta_n = \frac{1}{n} \log \left[\binom{n}{p_0 n} (1 - p_1)^{(1-p_0)n} p_1^{p_0 n} \right] + o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

и поэтому при $n \rightarrow \infty$ получаем

$$\frac{1}{n} \log \frac{1}{\beta_n} = -(1 - p_0) \log(1 - p_1) - p_0 \log p_1 - h(p_0) + o(1) = D(p_0 \| p_1) + o(1), \quad (6)$$

где $h(p) = -p \log p - (1 - p) \log(1 - p)$ и

$$D(a \| b) = a \log \frac{a}{b} + (1 - a) \log \frac{1 - a}{1 - b}. \quad (7)$$

Замечание 4. Величина $D(a \| b)$ из (7) представляет собой расхождение (divergence) для двух бернуллиевских случайных величин с параметрами a и b соответственно. В русскоязычной литературе $D(a \| b)$ чаще называется расстоянием Кульбака–Лейблера. Величина $D(a \| b)$ дает наилучшую экспоненту для вероятности ошибки 2-го рода при заданной вероятности ошибки 1-го рода (т.е. когда ее экспонента равна нулю) при проверке простой гипотезы $H_0: p = a$ против простой альтернативы $H_1: p = b$.

При $\gamma = r = 0$ для величины $e_d(0, 0)$ (см. (4)) из (6) получаем

$$e_d(0, 0) = D(p_1 \| p_0). \quad (8)$$

4. Неизвестный входной блок и критическая скорость. Если мы знаем входной блок $\mathbf{x} \in E_{\text{in}}^n$ и $\alpha_n \rightarrow 0$, то наилучшая экспонента $e_d(0, 0)$ вероятности ошибки 2-го рода β_n дается формулой (8).

Если же мы знаем только, что входной блок \mathbf{x} принадлежит множеству $\mathcal{X} \subseteq E_{\text{in}}^n$ мощности $X \sim 2^{rn}$, то для наилучшего такого множества \mathcal{X} экспонента $e_d(0, r)$ вероятности ошибки 2-го рода β_n определяется формулой (4). Ясно, что

$$e_d(\gamma, r) \leq e_d(\gamma, 0), \quad \gamma \geq 0, \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (9)$$

Функция $e_d(\gamma, r)$ не возрастает по r . Поэтому возникает естественный вопрос: существует ли $r(\gamma) > 0$, для которого в (9) выполняется равенство, и если да, то какова максимальная такая скорость $r_{\text{crit}}(\gamma)$? Ограничиваясь случаем $\gamma = 0$, определим $r_{\text{crit}}(p_0, p_1) = r_{\text{crit}}(p_0, p_1, 0)$ как (см. (8))

$$r_{\text{crit}} = r_{\text{crit}}(p_0, p_1) = \sup\{r : e_d(0, r) = e_d(0, 0) = D(p_0 \| p_1)\}. \quad (10)$$

Иными словами, какова наибольшая мощность 2^{rn} “наилучшего” множества \mathcal{X} , для которого можно достичь такой же асимптотической эффективности, как и при известном входном блоке \mathbf{x} (хотя мы и не знаем входной блок \mathbf{x})?

Аналогично введем критическую скорость R_{crit} для исходной задачи (см. (3))

$$R_{\text{crit}}(p_0, p_1) = \inf\{R : e(0, R) = e(0, 1) = D(p_0 \| p_1)\}. \quad (11)$$

В силу предложения 1 и (11) имеем

$$R_{\text{crit}}(p_0, p_1) = 1 - r_{\text{crit}}(p_0, p_1). \quad (12)$$

Основной результат статьи составляет

Теорема 1. *Если $p_1 < p_0 \leq 1/2$, то существует $p_1^*(p_0) \leq p_0$, такое что для любого $p_1 \leq p_1^*(p_0)$ справедлива формула*

$$r_{\text{crit}}(p_0, p_1) = 1 - R_{\text{crit}}(p_0, p_1) = 1 - h(p_0), \quad 0 < p_1 \leq p_1^* < p_0 \leq 1/2. \quad (13)$$

Замечание 5. Хотя величина $r_{\text{crit}}(p_0, p_1)$ в (13) совпадает с пропускной способностью канала ДСК(p_0), ее происхождение (10) связано с функцией $e_d(0, r)$, аналогичной функции надежности $E(r, p)$ в теории информации [9, 10]. При этом точный вид функции $E(r, p)$ до сих пор известен только частично [11]. Поэтому, как и в [11–13], в доказательстве теоремы 1 используются достаточно недавние результаты о спектре двоичных кодов. Полное описание функции $e_d(\gamma, r)$ выглядит трудной задачей.

В § 2 приводится граница снизу для r_{crit} (предложение 2). В § 3 выводится общая формула для вероятности ошибки 2-го рода β_n (лемма 1). В § 4, используя метод “двух гипотез”, доказывается теорема 1. Но граница сверху (13) для r_{crit} , вообще говоря, слабее соответствующей границы снизу из § 2. В § 5 с помощью дополнительных комбинаторных соображений выводится еще одна граница сверху для r_{crit} (предложение 3). В § 6 показывается точность границы снизу для r_{crit} из предложения 2 при условии, что выполняется некоторое дополнительное условие. В Приложении приводятся некоторые необходимые аналитические результаты.

В статье $f \sim g$ означает, что $n^{-1} \ln f = n^{-1} \ln g + o(1)$, $n \rightarrow \infty$, а $f \lesssim g$ означает $n^{-1} \ln f \leq n^{-1} \ln g + o(1)$, $n \rightarrow \infty$.

§ 2. Граница снизу для r_{crit}

Следующий результат следует из [1, предложение 2].

Предложение 2. *Для $r_{\text{crit}}(p_0, p_1)$ справедливы оценки снизу*

$$r_{\text{crit}}(p_0, p_1) \geq 1 - h(p_0), \quad \text{если } 0 < p_1 < p_0 \leq 1/2, \quad (14)$$

и

$$r_{\text{crit}}(p_0, p_1) \geq 1 - h(p_0) - D(p_0 \| p_1), \quad \text{если } 0 < p_0 < p_1 \leq 1/2. \quad (15)$$

Доказательство. Для заданного r , $0 < r < 1$, выберем случайно и равномерно множество \mathcal{X} из $X = 2^{rn}$ входных блоков \mathbf{x} . В [1, предложение 2] было показано, что если $p_0 < p_1 \leq 1/2$, то для любого τ , $p_0 \leq \tau \leq p_1$, существует множество \mathcal{X} и метод принятия решения, для которого выполняются неравенства

$$\frac{1}{n} \log \frac{1}{\alpha_n} \geq D(\tau \| p_0), \quad \frac{1}{n} \log \frac{1}{\beta_n} \geq \min\{D(\tau \| p_1), 1 - h(\tau) - r\}. \quad (16)$$

Если достаточно иметь $\alpha_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то полагая в (16) $\tau = p_0$, из (10) получаем (15).

Аналогично, если $p_1 < p_0 \leq 1/2$, то меняя в (16) местами p_0 с p_1 и α_n с β_n , для любого τ имеем

$$\frac{1}{n} \log \frac{1}{\alpha_n} \geq \min\{D(\tau \| p_0), 1 - h(\tau) - r\}, \quad \frac{1}{n} \log \frac{1}{\beta_n} \geq D(\tau \| p_1). \quad (17)$$

Если $\alpha_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то полагая в (17) $\tau = p_0$, из (10) получаем (14). \blacktriangle

§ 3. Общая формула для вероятности ошибки 2-го рода β_n

Пусть $\mathcal{C}_n(r) = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\}$ – множество (код) из $M = 2^{rn}$ различных входных (кодовых) блоков. Для кода $\mathcal{C}_n(r)$ и вероятности ошибки 1-го рода α_n обозначим через $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0(\mathcal{C}_n, \alpha_n) \subseteq E_{\text{out}}^n$ оптимальное множество решения в пользу H_0 , минимизирующее вероятность ошибки 2-го рода β_n . Хотя множество \mathcal{D}_0 имеет довольно сложный вид, можно установить некоторые его свойства, достаточные для доказательства теоремы 1.

Выберем малое $\delta > 0$, и для каждого \mathbf{x}_k , $k = 1, \dots, M$, введем сферический слой в E_{out}^n

$$SL_{\mathbf{x}_k}(p_0, \delta) = \mathbf{B}_{\mathbf{x}_k}(p_0 + \delta) \setminus \mathbf{B}_{\mathbf{x}_k}(p_0 - \delta) = \{\mathbf{u} : |d(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}) - p_0 n| \leq \delta n\}, \quad (18)$$

где $\mathbf{B}_{\mathbf{x}}(p)$ определено в (1). Для каждого \mathbf{x}_k введем также множество

$$D_{\mathbf{x}_k}(\delta) = \mathcal{D}_0 \cap SL_{\mathbf{x}_k}(p_0, \delta). \quad (19)$$

Так как необходимо иметь $\alpha_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то оптимальное множество \mathcal{D}_0 содержит “существенную” часть каждого множества $SL_{\mathbf{x}_k}(p_0, \delta)$, $k = 1, \dots, M$. Для того чтобы оценить это, заметим, что для любых \mathbf{x}_k и $\mathbf{u}, \mathbf{z} \in SL_{\mathbf{x}_k}(p_0, \delta)$ имеем

$$\frac{\mathbf{P}(\mathbf{u} | p_0, \mathbf{x}_k)}{\mathbf{P}(\mathbf{z} | p_0, \mathbf{x}_k)} = \left(\frac{q_0}{p_0}\right)^{d(\mathbf{z}, \mathbf{x}_k) - d(\mathbf{u}, \mathbf{x}_k)} \leq \left(\frac{q_0}{p_0}\right)^{2\delta n}, \quad q_0 = 1 - p_0. \quad (20)$$

По экспоненциальному неравенству Чебышева (граница Чернова) для любого \mathbf{x}_k и малых $\delta > 0$ получаем

$$\log \mathbf{P}\{\mathbf{u} \notin SL_{\mathbf{x}_k}(p_0, \delta) | \mathbf{x}_k, p_0\} \leq -\frac{n\delta^2}{2p_0q_0}. \quad (21)$$

Тогда в силу (18), (19) и (21) для любого \mathbf{x}_k имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{D_{\mathbf{x}_k}(\delta) | p_0, \mathbf{x}_k\} &\geq 1 - \mathbf{P}\{\mathbf{u} \notin \mathcal{D}_0 | p_0, \mathbf{x}_k\} - \mathbf{P}\{\mathbf{u} \notin SL_{\mathbf{x}_k}(p_0, \delta) | p_0, \mathbf{x}_k\} \\ &\geq 1 - \alpha_n - e^{-n^2\delta^2/(2p_0q_0)}, \end{aligned} \quad (22)$$

а в силу (20) также имеем

$$\begin{aligned} \delta_1 |SL_{\mathbf{x}_k}(p_0, \delta)| &\leq |D_{\mathbf{x}_k}(\delta)| \leq |SL_{\mathbf{x}_k}(p_0, \delta)|, \\ \delta_1 &= (1 - \beta_n - e^{-n^2\delta^2/(2p_0q_0)}) \left(\frac{p_0}{q_0}\right)^{2\delta n}. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как $D_{\mathbf{x}_k}(\delta) \subseteq \mathcal{D}_0$ для любого \mathbf{x}_k , то в силу (19), (22) и (23) для вероятности $\mathbf{P}(e | p_1, \mathbf{x}_i)$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(e | p_1, \mathbf{x}_i) &= \mathbf{P}\{\mathcal{D}_0 | p_1, \mathbf{x}_i\} \sim \mathbf{P}\left\{\bigcup_{k=1}^M D_{\mathbf{x}_k}(\delta) | p_1, \mathbf{x}_k\right\} \sim \\ &\sim \delta_1 \mathbf{P}\left\{\bigcup_{k=1}^M SL_{\mathbf{x}_k}(p_0, \delta) | p_1, \mathbf{x}_i\right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Для $t > 0$ и каждого \mathbf{x}_i введем множество

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{x}_i}(t, p) &= \\ &= \{\mathbf{u} : \text{существует } \mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}_i, \text{ такое что } d(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}) = tn, d(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}) = pn\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Лемма 1. Для вероятности ошибки 2-го рода β_n кода $\mathcal{C}_n = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\}$ и оптимального решения \mathcal{D}_0 в пользу H_0 при $n \rightarrow \infty$ справедлива формула

$$\frac{\log \beta_n}{n} \sim \max_{t>0} \left\{ \frac{1}{n} \log \left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |D_{\mathbf{x}_i}(t, p_0)| \right] + t \log p_1 + (1-t) \log(1-p_1) \right\}. \quad (26)$$

Критическая скорость $r_{\text{crit}}(p_0, p_1)$ определяется формулой ($M = 2^{rn}$)

$$r_{\text{crit}}(p_0, p_1) = \sup \{r : F(p_0, p_1, r) \leq 0\} = \inf \{r : F(p_0, p_1, r) > 0\}, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} F(p_0, p_1, r) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{|\mathcal{C}_n| \leq M} \max_t F(p_0, p_1, r, \mathcal{C}_n, t), \\ F(p_0, p_1, r, \mathcal{C}_n, t) &= \frac{1}{n} \log \left[\sum_{i=1}^M |D_{\mathbf{x}_i}(t, p_0)| \right] + (p_0 - t) \log \frac{1-p_1}{p_1} - r - h(p_0). \end{aligned} \quad (28)$$

Доказательство. Используя (24) при $\delta = o(1)$ и $\delta_1 = e^{o(n)}$ при $n \rightarrow \infty$, имеем

$$\begin{aligned} \beta_n &= \max_i \mathbf{P}(e | p_1, \mathbf{x}_i) \sim \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{P}(e | p_1, \mathbf{x}_i) \sim \\ &\sim \frac{\delta_1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{P}\left\{\bigcup_{k=1}^M SL_{\mathbf{x}_k}(p_0, \delta) | p_1, \mathbf{x}_i\right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Из (25) и (26) для каждого \mathbf{x}_i

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\bigcup_{k=1}^M SL_{\mathbf{x}_k}(p_0, \delta) | p_1, \mathbf{x}_i\right\} &\sim \mathbf{P}\left\{\bigcup_{t>0} D_{\mathbf{x}_i}(t, p_0) | p_1, \mathbf{x}_i\right\} \sim \\ &\sim \max_{t>0} \left\{ p_1^{tn} (1-p_1)^{(1-t)n} |D_{\mathbf{x}_i}(t, p_0)| \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Поэтому из (29) и (30) следует формула (26).

Так как

$$\mathbf{P}\{SL_{\mathbf{x}_i}(p_0, \delta) | p_1, \mathbf{x}_i\} \sim \mathbf{P}\{d(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}) \geq p_0 n | p_1, \mathbf{x}_i\} \sim 2^{-D(p_0 \| p_1)n},$$

то правая часть (26) возрастает по r (т.е. по $M = 2^{rn}$), начиная с $-D(p_1 \| p_0)$. Поэтому из (6) и (26) следует, что критическая скорость r_{crit} равна максимальной

скорости r , такой что

$$\begin{aligned} \min_{\{\mathbf{x}_i\}} \max_{t>0} \left\{ \frac{1}{n} \log \left[\sum_{i=1}^M |D_{\mathbf{x}_i}(t, p_0)| \right] + t \log p_1 + (1-t) \log(1-p_1) \right\} - r \leq \\ \leq -D(p_0 \| p_1). \end{aligned} \quad (31)$$

Заметим, что

$$D(p_0 \| p_1) + t \log p_1 + (1-t) \log(1-p_1) = -h(p_0) + (p_0 - t) \log \frac{1-p_1}{p_1}. \quad (32)$$

Из (31) и (32) следуют формулы (27), (28). \blacktriangle

Отметим, в частности, что из (53) при $t = p_0$ имеем

$$F(p_0, p_1, r, \mathcal{C}_n, p_0) = o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

В анализе соотношений (27), (28) основную трудность составляет оценка мощностей $|D_{\mathbf{x}_i}(t, p_0)|$ в (28), которые зависят от геометрии кода \mathcal{C}_n . Аналогичная проблема возникла в [11–13] при исследовании функции надежности $E(R, p)$ канала ДСК(p). Прямая оценка этих мощностей ведет к весьма громоздким формулам.

§ 4. Граница сверху для r_{crit} : две гипотезы

Получим простую (но не очень точную) оценку сверху для $r_{\text{crit}}(p_0, p_1)$, используя популярный в математической статистике (чаще в теории оценивания) метод “двух гипотез”. Используя для этого формулу (26), выберем из кода $\mathcal{C}_n(r) = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M\}$, $M = 2^{rn}$, какие-либо два кодовых слова, скажем, \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 с $d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \omega n$. Можно считать, что для скорости $r > 0$ величина ω удовлетворяет ограничениям

$$0 < \omega \leq \omega_{\min}(r),$$

где величина $\omega_{\min}(r)$ будет определена далее. Заменяем код $\mathcal{C}_n(r)$ кодом \mathcal{C}' из двух выбранных кодовых слов $\mathcal{C}' = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$. Тогда $\beta_n(\mathcal{C}) \geq \beta_n(\mathcal{C}')$. Аналогично (29), (30) имеем

$$\beta_n(\mathcal{C}') \sim 2^{-D(p_0 \| p_1)n} + \mathbf{P} \{SL_{\mathbf{x}_2}(p_0, \delta) \mid p_1, \mathbf{x}_1\}.$$

Нас интересует, когда для $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{n} \log \mathbf{P} \{SL_{\mathbf{x}_2}(p_0, \delta) \mid p_1, \mathbf{x}_1\} > -D(p_0 \| p_1). \quad (33)$$

Оценим вероятность в левой части (33). Для $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k) = \omega n$ обозначим

$$S_{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k}(t, p, \omega) = \{\mathbf{u} : d(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}) = tn, d(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}) = pn, d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k) = \omega n\}. \quad (34)$$

Тогда (см. Приложение)

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log |S_{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k}(t, p, \omega)| &= g(t, p, \omega) + o(1), \quad n \rightarrow \infty, \\ \frac{1}{n} \log \mathbf{P} \{S_{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k}(t, p, \omega) \mid p_1, \mathbf{x}_i\} &= g(t, p, \omega) - t \log \frac{1-p_1}{p_1} + \log(1-p_1) + o(1), \end{aligned} \quad (35)$$

где $g(t, p, \omega)$ определено в (78). Поэтому при $n \rightarrow \infty$ (см. (76), (77))

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \log \mathbf{P} \{SL_{\mathbf{x}_2}(p_0, \delta) \mid p_1, \mathbf{x}_1\} = \\ & = \frac{1}{n} \max_t \log \mathbf{P} \{S_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2}(t, p_0, \omega) \mid p_1, \mathbf{x}_1\} + o(1) = f(p_0, p_1, \omega) + o(1), \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} f(p_0, p_1, \omega) &= \max_t f(p_0, p_1, \omega, t), \\ f(p_0, p_1, \omega, t) &= g(t, p_0, \omega) - t \log \frac{1-p_1}{p_1} + \log(1-p_1). \end{aligned} \quad (37)$$

Имеем

$$f'_t(p_0, p_1, \omega, t) = \log \frac{\omega-t}{t} - \log \frac{p_0+t-\omega}{1-p_0-t} - 2 \frac{1-p_1}{p_1}, \quad f''_{tt}(p_0, p_1, \omega, t) < 0. \quad (38)$$

В силу (32) и (35)–(37) неравенство (33) принимает вид

$$\max_t F(p_0, p_1, \omega, t) > 0, \quad (39)$$

где

$$\begin{aligned} F(p_0, p_1, \omega, t) &= f(p_0, p_1, \omega, t) + D(p_0 \parallel p_1) = \\ &= g(t, p_0, \omega) + (p_0 - t) \log \frac{1-p_1}{p_1} - h(p_0). \end{aligned} \quad (40)$$

Если для каких-либо p_0, p_1 и ω выполняется неравенство (39), то справедлива соответствующая граница сверху (14), (15). Обозначим через $t_1^0 = t_1^0(p_0, p_1, \omega)$ максимизирующую величину t в (37) (она же остается максимизирующей в (39)). Тогда

$$f(p_0, p_1, \omega) = f(p_0, p_1, \omega, t_1^0(p_0, p_1, \omega)). \quad (41)$$

Из уравнения $f'_t(p_0, p_1, \omega, t) = 0$ для t_1^0 из (38) получаем

$$\begin{aligned} t_1^0 &= t_1^0(p_0, p_1, \omega) = \frac{\sqrt{1 + (v_0 - 1)[(\omega - p_0)^2 v_0 - (1 - \omega - p_0)^2 + 1]} - 1}{v_0 - 1}, \\ v_0(p_1) &= \left(\frac{1-p_1}{p_1} \right)^2 \geq 1. \end{aligned} \quad (42)$$

Тогда из (40) и (42) имеем

$$F(p_0, p_1, \omega, t_1^0) = g(t_1^0, p_0, \omega) + (p_0 - t_1^0) \log \frac{1-p_1}{p_1} - h(p_0). \quad (43)$$

Можно проверить, что для функции $F(p_0, p_1, \omega, t_1^0)$ из (43) вытекают свойства $F(p_0, p_1, 0, t_1^0) = 0$ и $F''_{\omega\omega} < 0, \omega > 0$. Поэтому достаточно проверить неравенство (39) с $t = t_1^0$ только для минимальной для кода $\mathcal{C}_n(r)$ величины ω (т.е. для его кодового расстояния $d(\mathcal{C})$).

Пусть $\omega_{\min}(r)n$ – максимально возможное минимальное расстояние кода $\mathcal{C}_n(r)$. Для величины $\omega_{\min}(r)$ известна граница [14, формула (1.5)]

$$r \leq h \left[\frac{1}{2} - \sqrt{\omega_{\min}(1 - \omega_{\min})} \right], \quad \omega_{\min} = \omega_{\min}(r). \quad (44)$$

Рассмотрим два возможных случая: 1) $p_1 < p_0 \leq 1/2$ и 2) $p_0 < p_1 \leq 1/2$.

1) Случай $p_1 < p_0 \leq 1/2$. Полагая $r = 1 - h(p_0)$, обозначим через $\omega_0 = \omega_0(p_0)$ корень уравнения (см. (44))

$$1 - h(p_0) = h \left[\frac{1}{2} - \sqrt{\omega(1 - \omega)} \right].$$

Тогда неравенство (39) принимает вид ($\omega_0 = \omega_0(p_0)$)

$$F(p_0, p_1, \omega_0, t_1^0) = g(t_1^0, p_0, \omega_0) + (p_0 - t_1^0) \log \frac{1 - p_1}{p_1} - h(p_0) > 0. \quad (45)$$

Можно проверить (с помощью Maple), что (45) выполняется, если $p_1 \leq p_1^*(p_0)$, где

p_0	0,1	0,12	0,15	0,2	0,3	0,4	0,45	0,49
$p_1^*(p_0)$	0,0003	0,003	0,016	0,056	0,17	0,317	0,4	0,48

Если $p_0 \leq 0,20707$ (т.е. $\omega < 0,273$), то в [14, формула (1.4)] имеется оценка чуть более точная (но более громоздкая), чем (44).

2) Случай $p_0 < p_1 \leq 1/2$. Можно проверить, что неравенство (39) не выполняется ни при каких $p_0 < p_1$!

§ 5. Граница сверху для r_{crit} : комбинаторика

Приведем еще одну границу сверху для r_{crit} , по-прежнему основанную на формуле (26), но использующую дополнительные комбинаторные соображения.

1. Комбинаторная лемма. В коде $\mathcal{C}_n = \{\mathbf{x}_i\}$ будем называть $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ ω -парой, если $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \omega n$. Будем говорить, что точка $\mathbf{y} \in E^n$ является (ω, p, t) -покрытой, если существует ω -пара $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$, такая что $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) = pn$, $d(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) = tn$. Обозначим через $K(\mathbf{y}, \omega, p, t)$ число (ω, p, t) -покрытий точки \mathbf{y} (учитывая кратность покрытий), т.е.

$$K(\mathbf{y}, \omega, p, t) = |\{(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) : d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \omega n, d(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) = pn, d(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) = tn\}|, \quad \omega > 0. \quad (46)$$

Введем множества (ср. (25))

$$D_{\mathbf{x}_i}(t, p, \omega) = \bigcup_{\mathbf{x}_k} S_{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k}(t, p, \omega) = \{\mathbf{u} : \text{существует } \mathbf{x}_k, \text{ такое что } d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k) = \omega n, d(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}) = tn, d(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}) = pn\}. \quad (47)$$

Тогда

$$D_{\mathbf{x}_i}(t, p) = \bigcup_{\omega > 0} D_{\mathbf{x}_i}(t, p, \omega).$$

Для $t > 0$ введем величину

$$m_t(\mathbf{y}) = |\{\mathbf{x}_i : \mathbf{x}_i \in \mathbf{S}_{\mathbf{y}}(t)\}|. \quad (48)$$

Тогда для любых $\mathbf{y}, p, t > 0$

$$K(\mathbf{y}, t, p) = m_t(\mathbf{y})m_p(\mathbf{y}). \quad (49)$$

Лемма 2. Для кода $\{\mathbf{x}_i\}$ и $\omega, p, t > 0$ справедлива формула (см. (46) и (47))

$$\sum_{i=1}^M |D_{\mathbf{x}_i}(t, p, \omega)| \leq \sum_{\mathbf{y} \in E^n} K(\mathbf{y}, \omega, t, p). \quad (50)$$

Также, если (см. (48))

$$\max_{\mathbf{y}} m_p(\mathbf{y}) = 2^{o(n)}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (51)$$

то для любых $\omega, t > 0$

$$\sum_{i=1}^M |D_{\mathbf{x}_i}(t, p, \omega)| = 2^{o(n)} \sum_{\mathbf{y} \in E^n} K(\mathbf{y}, \omega, t, p), \quad n \rightarrow \infty. \quad (52)$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{y} \in E^n$ и имеется m упорядоченных пар $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ с $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \omega n$ и $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) = tn$, $d(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}) = pn$. Эти m пар $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ имеют $m_1 \leq m$ различных первых аргументов $\{\mathbf{x}_i\}$. Тогда \mathbf{y} присутствует m раз в правой части (50) и m_1 раз в левой части, что доказывает формулу (50). Если выполнено условие (51), то $m_1 = m\epsilon^{o(n)}$, откуда следует равенство (52). Отметим также, что в силу (49) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M |D_{\mathbf{x}_i}(t, p)| &= \sum_{\mathbf{y}: m_p(\mathbf{y}) \geq 1} \frac{K(\mathbf{y}, t, p)}{m_p(\mathbf{y})} = \sum_{\mathbf{y}: m_p(\mathbf{y}) \geq 1} m_t(\mathbf{y}) \sim \\ &\sim M2^{h(t)n} - \sum_{\mathbf{y}: m_p(\mathbf{y})=0} m_t(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (53)$$

Из первого равенства в (53) также следуют формулы (50) и (52). \blacktriangle

Формула (53) выглядит простой и привлекательной, однако ее правая часть имеет вид “большое минус большое”, что неудобно. Отметим, что в (53) нельзя пренебрегать последней суммой, так как тогда получим только $r_{\text{crit}} \leq 1$, что неинтересно.

2. Еще одна граница сверху для r_{crit} . Оценим сверху последнюю сумму в (53) следующим образом. Имеем

$$\sum_{\mathbf{y}: m_{p_0}(\mathbf{y})=0} m_t(\mathbf{y}) \leq 2^{h(t)n} |\{\mathbf{y} : m_{p_0}(\mathbf{y}) = 0\}|. \quad (54)$$

Максимум мощности $|\{\mathbf{y} : m_{p_0}(\mathbf{y}) = 0\}|$ достигается, когда код \mathcal{C} является шаром $\mathbf{B}_0(\tau)$ радиуса τn , где $r = h(\tau)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \max_{\mathcal{C}} |\{\mathbf{y} : m_{p_0}(\mathbf{y}) = 0\}| &= 2^n - |\mathbf{B}_0(\tau + p_0)| \sim 2^{h(\tau+p_0)n}, \quad \tau + p_0 \geq 1/2, \\ \max_{\mathcal{C}} |\{\mathbf{y} : m_{p_0}(\mathbf{y}) = 0\}| &\sim 2^n, \quad \tau + p_0 \leq 1/2. \end{aligned} \quad (55)$$

Если $\tau + p_0 \geq 1/2$, т.е. если $r \geq h(1/2 - p_0)$, то из (53)–(55) получаем

$$\sum_{i=1}^M |D_{\mathbf{x}_i}(t, p_0)| \geq 2^{h(t)n} [M - 2^{h(\tau+p_0)n}] = 2^{h(t)n} [2^{h(\tau)n} - 2^{h(1-\tau-p_0)n}] \sim M2^{h(t)n},$$

если $\tau > 1 - \tau - p_0$, т.е. $\tau > (1 - p_0)/2$, или, эквивалентно, если $r > h[(1 - p_0)/2]$.

Поэтому если $r \geq \max\{h(1/2 - p_0), h[(1 - p_0)/2]\} = h[(1 - p_0)/2]$, то при любом $p_0 \neq p_1$ равенство (28) принимает вид

$$\begin{aligned} F(p_0, p_1, r) &= \max_{t>0} \left\{ h(t) + (p_0 - t) \log \frac{1 - p_1}{p_1} \right\} - h(p_0) = \\ &= h(p_1) + (p_0 - p_1) \log \frac{1 - p_1}{p_1} - h(p_0) > 0, \quad p_0 \neq p_1, \end{aligned}$$

так как максимум по t достигается при $t = p_1$. Поэтому это дает следующую границу сверху для r_{crit} (более слабую, чем (13)):

$$r_{\text{crit}}(p_0, p_1) \leq h[(1 - p_0)/2], \quad p_0 \neq p_1. \quad (56)$$

Замечание 6. Отметим, что $1 - h(p_0) < h(1/2 - p_0) < h[(1 - p_0)/2]$, $0 < p_0 < 1/2$.

Усилим оценку (56). Наряду с (54) также имеем

$$\sum_{\mathbf{y}: m_{p_0}(\mathbf{y})=0} m_t(\mathbf{y}) \leq M |\{\mathbf{y} : m_{p_0}(\mathbf{y}) = 0\}|.$$

Поэтому если $\tau + p_0 \geq 1/2$ и $t \geq 1 - \tau - p_0$, то

$$\sum_{i=1}^M |D_{x_i}(t, p_0)| \geq M [2^{h(t)n} - 2^{h(1-\tau-p_0)n}] \sim M 2^{h(t)n}.$$

В силу (39), (40) необходимо иметь

$$\begin{aligned} \max_{t \geq 1-\tau-p_0} f(t, p_0, p_1) &> 0, \\ f(t, p_0, p_1) &= h(t) + (p_0 - t) \log \frac{1 - p_1}{p_1} - h(p_0). \end{aligned} \quad (57)$$

Максимум по $t \geq 1 - \tau - p_0$ функции $f(t, p_0, p_1)$ достигается при $t = \max\{p_1, 1 - \tau - p_0\}$, так как

$$\begin{aligned} \max_t f(t, p_0, p_1) &= f(p_1, p_0, p_1) > 0, \quad p_0 \neq p_1, \quad f(p_0, p_0, p_1) = 0, \\ f'_t(t, p_0, p_1) &= \log \frac{1 - t}{t} - \log \frac{1 - p_1}{p_1}, \quad f''_{tt}(t, p_0, p_1) < 0, \\ \text{sign } f'_t(t, p_0, p_1) &= \text{sign}(p_1 - t). \end{aligned} \quad (58)$$

Поэтому если $p_1 \geq 1 - \tau - p_0$, то из (57), (58) для $p_0 \neq p_1$ получаем

$$\max_{t \geq 1-\tau-p_0} f(t, p_0, p_1) = h(p_1) + (p_0 - p_1) \log \frac{1 - p_1}{p_1} - h(p_0) > 0. \quad (59)$$

Тогда если $\tau \geq \max\{1/2 - p_0, 1 - p_0 - p_1\} = 1 - p_0 - p_1$, то для $p_0 \neq p_1$ выполняется неравенство (59), откуда следует оценка

$$\tau_{\text{crit}} \leq 1 - p_0 - p_1, \quad r_{\text{crit}} = h(\tau_{\text{crit}}). \quad (60)$$

Если же $p_1 < 1 - \tau - p_0$, то максимум в (57) достигается при $t = 1 - \tau - p_0$, и тогда

$$\max_{t \geq 1-\tau-p_0} f(t, p_0, p_1) = f(1 - \tau - p_0, p_0, p_1).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} f(p_0, p_0, p_1) &= 0, & f'_{t=p_0}(t, p_0, p_1) &\neq 0, & p_0 &\neq p_1, \\ f''_{tt}(t, p_0, p_1) &< 0, & \text{sign } f'_t(t, p_0, p_1) &= \text{sign}(p_1 - t). \end{aligned}$$

Пусть также $p_0 > 1 - \tau - p_0$ (т.е. $\tau > 1 - 2p_0$). Тогда $\max_{t \geq 1 - \tau - p_0} f(t, p_0, p_1) > 0$ (достаточно выбрать t близким к p_0). Тогда

$$\tau_{\text{crit}} \leq 1 - 2p_0, \quad r_{\text{crit}} = h(\tau_{\text{crit}}). \quad (61)$$

В результате из (60) и (61) получаем

Предложение 3. При любых $p_0, p_1 \in [0, 1/2]$ для r_{crit} справедлива оценка сверху

$$\tau_{\text{crit}}(p_0, p_1) \leq \min\{1 - p_0 - p_1, 1 - 2p_0\}, \quad r_{\text{crit}} = h(\tau_{\text{crit}}). \quad (62)$$

Следствие. Если $p_0 = 1/2$, то из (62) следует $\tau_{\text{crit}}(1/2, p_1) = r_{\text{crit}}(1/2, p_1) = 0$.

Ранее этот частный результат был получен другим способом в [1, предложение 3]. Там же найдена наилучшая экспонента $e_d(\gamma, r)$ из (4) для $\gamma \geq 0, 0 \leq r \leq 1$.

§ 6. “Потенциальная” аддитивная граница сверху для r_{crit}

Теорема 1 была доказана, заменяя в формуле (26) экспоненциальное число M кодовых слов $\{\mathbf{x}_i\}$ двумя ближайшими кодовыми словами $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$. Такой способ исследования дает оптимальный результат, только если можно выбрать пару $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ с $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \omega n$ и малым $\omega > 0$. В рассматриваемой постановке задачи этого сделать нельзя.

Для того чтобы усилить теорему 1, необходимо рассмотреть в (26) экспоненциальное число M кодовых слов $\{\mathbf{x}_i\}$, что значительно труднее (см. [11–13]). Усилим теорему 1 при условии, что в формуле (26) можно применить аддитивную аппроксимацию.

Предположим, что при $n \rightarrow \infty$ для всех $\{\mathbf{x}_i\}$ в формуле (26) справедливо аддитивное приближение

$$\mathbf{P} \left\{ \bigcup_{k \neq i} SL_{\mathbf{x}_k}(p_0, \delta) \mid p_1, \mathbf{x}_i \right\} = 2^{o(n)} \sum_{k \neq i} \mathbf{P} \{ SL_{\mathbf{x}_k}(p_0, \delta) \mid p_1, \mathbf{x}_i \}. \quad (63)$$

Тогда (см. (36)) при $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k) = \omega_{ik} n$

$$\mathbf{P} \left\{ \bigcup_{k \neq i} SL_{\mathbf{x}_k}(p_0, \delta) \mid p_1, \mathbf{x}_i \right\} = 2^{o(n)} \sum_{k \neq i} 2^{f(p_0, p_1, \omega_{ik} n)}$$

и

$$\sum_{i=1}^M \mathbf{P} \left\{ \bigcup_{k \neq i} SL_{\mathbf{x}_k}(p_0, \delta) \mid p_1, \mathbf{x}_i \right\} = 2^{o(n)} \sum_{i=1}^M \sum_{k \neq i} 2^{f(p_0, p_1, \omega_{ik} n)}. \quad (64)$$

Для того чтобы далее развить соотношение (64), введем некоторые дополнительные понятия. Спектром (распределением расстояний) $B(C) = (B_0, B_1, \dots, B_n)$ кода C длины n называется $(n+1)$ -вектор с компонентами

$$B_i = |C|^{-1} |\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = i\}|, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (65)$$

Иными словами, B_i равно среднему числу кодовых слов \mathbf{y} на расстоянии i от кодового слова \mathbf{x} . Общее число упорядоченных кодовых пар $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{C}$ с $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = i$ равно $|\mathcal{C}|B_i$. Обозначим также $B_{\omega n} = 2^{b(\omega, r)n}$.

Тогда формулу (64) можно продолжить следующим образом:

$$\sum_{i=1}^M \mathbf{P} \left\{ \bigcup_{k \neq i} SL_{\mathbf{x}_k}(p_0, \delta) \mid p_1, \mathbf{x}_i \right\} = 2^{o(n)} M \sum_{\omega > 0} 2^{[b(\omega, r) + f(p_0, p_1, \omega)]n}.$$

Поэтому (см. (36), (37))

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log \left[\sum_{i=1}^M \mathbf{P} \left\{ \bigcup_{k \neq i} SL_{\mathbf{x}_k}(p_0, \delta) \mid p_1, \mathbf{x}_i \right\} \right] = \\ = r + \max_{\omega, t} \{ b(\omega, r) + f(p_0, p_1, \omega, t) \} + o(1), \end{aligned} \quad (66)$$

где $f(p_0, p_1, \omega, t)$ определено в (37). Тогда для функции $F(p_0, p_1, r)$ из (28) и (66) имеем

$$F(p_0, p_1, r) = \max_{\omega, t} \left\{ b(\omega, r) + g(p_0, t, \omega) + (p_0 - t) \log \frac{1 - p_1}{p_1} - h(p_0) \right\}. \quad (67)$$

В качестве оценки для $b(\omega, r)$ в (67) используем какую-либо функцию $b_{\text{low}}(\omega, r)$ со следующим свойством: существует величина $\omega_{\max} = \omega_{\max}(r) > 0$, такая что

$$\max_{0 < \omega \leq \omega_{\max}} [b(\omega, r) - b_{\text{low}}(\omega, r)] \geq 0, \quad r > 0. \quad (68)$$

Тогда для того чтобы выполнялось неравенство $F(p_0, p_1, r) > 0$ (см. (27)), достаточно, чтобы было справедливо условие (см. (37) и (67))

$$\min_{0 < \omega \leq \omega_{\max}} \max_{t > 0} \left\{ b_{\text{low}}(\omega, r) + g(p_0, t, \omega) + (p_0 - t) \log \frac{1 - p_1}{p_1} - h(p_0) \right\} > 0. \quad (69)$$

Используем в (69) в качестве $b_{\text{low}}(\omega, r)$ наилучшую из известных таких функций $\mu(r, \alpha, \omega)$, $h_2(\tau) = h_2(\alpha) - 1 + r$, с произвольным $\alpha \in [\delta_{GV}(r), 1/2]$ (см. (81), (82) и теорему 2 в Приложении). Для функции $\mu(r, \alpha, \omega)$ выполняется условие (68), она монотонно возрастает по r , и $\omega_{\max} = G(\alpha, \tau)$, где $G(\alpha, \tau)$ определено в (79). Тогда для того чтобы выполнялось неравенство (69), достаточно, чтобы было справедливо условие

$$\min_{0 < \omega \leq \omega_{\max}} \max_{t > 0} K(p_0, p_1, r, \omega, t) > 0, \quad (70)$$

где

$$K(p_0, p_1, r, \omega, t) = \mu(r, p_0, \omega) + g(p_0, t, \omega) + (p_0 - t) \log \frac{1 - p_1}{p_1} - h(p_0). \quad (71)$$

Заметим, что $K(p_0, p_1, r, 0, p_0) = 0$. Чтобы избежать громоздких вычислений, положим $t = p_0$. Функция $K(p_0, p_1, r, \omega, p_0) = 0$ вогнута по ω , т.е. $K''(p_0, p_1, r, \omega, p_0)_{\omega\omega} < 0$ (проще всего это проверить с помощью Maple). Поэтому минимум по ω достигается при $\omega = \omega_{\max} = G(\alpha, \tau)$, и условие (70) достаточно проверить для $\omega = G(\alpha, \tau)$. Известна полезная формула [11, лемма 4]

$$\mu(r, \alpha, G(\alpha, \tau)) = h_2(G(\alpha, \tau)) + r - 1, \quad h_2(\alpha) - h_2(\tau) = 1 - r. \quad (72)$$

Далее рассмотрим только более простой

Случай $p_1 < p_0 \leq 1/2$. Положим $r = r_0 = 1 - h(p_0)$ и $\alpha = p_0$ (заметим, что тогда $\delta_{GV}(r_0) = p_0$, $\tau = 0$). Тогда $G(\alpha, \tau) = 2p_0(1 - p_0)$, и условие (70) достаточно проверить для $\omega = 2p_0(1 - p_0)$. Из (71), (72) при $\alpha = p_0$, $\tau = 0$, $r = r_0 = 1 - h(p_0)$, $t = p_0$ и $\omega_{\max} = G(\alpha, \tau) = 2p_0(1 - p_0)$ имеем

$$K(p_0, p_1, 1 - h(p_0), \omega_{\max}, p_0) = h_2(\omega_{\max}) + g(p_0, p_0, \omega_{\max}) - 2h(p_0),$$

где

$$g(p, p, 2p(1 - p)) = 2p(1 - p) + [1 - 2p(1 - p)]h\left[\frac{p^2}{1 - 2p(1 - p)}\right].$$

Можно проверить, что при $\omega_0 = 2p_0(1 - p_0)$ справедливо равенство

$$K(p_0, p_1, 1 - h(p_0), \omega_0, p_0) = h_2(\omega_0) + \omega_0 + (1 - \omega_0)h\left(\frac{p_0^2}{1 - \omega_0}\right) - 2h(p_0) = 0. \quad (73)$$

Также имеем

$$\begin{aligned} [K(p_0, p_1, 1 - h(p_0), \omega_0, t)]'_t &= \frac{1}{2} \log \frac{(1 - t)^2 - (1 - \omega_0 - p_0)^2}{t^2 - (\omega_0 - p_0)^2} - \log \frac{1 - p_1}{p_1}, \\ [K(p_0, p_1, 1 - h(p_0), \omega_0, t)]''_{tt} &< 0. \end{aligned} \quad (74)$$

Поэтому при $t = p_0$ имеем

$$[K(p_0, p_1, 1 - h(p_0), \omega_0, t)]'_{t=p_0} = \log \frac{1 - p_0}{p_0} - \log \frac{1 - p_1}{p_1} < 0, \quad p_1 < p_0, \quad (75)$$

Из (73)–(75) следует, что

$$K(p_0, p_1, 1 - h(p_0), \omega_0, t) > 0, \quad t < p_0.$$

Поэтому неравенство (70) выполняется для любых $r > r_0 = 1 - h(p_0)$ и $p_1 < p_0 \leq 1/2$.

В результате получаем следующий условный результат.

Предложение 4. *Если справедливо аддитивное приближение (63), то тогда $r_{\text{crit}}(p_0, p_1) = 1 - h(p_0)$, $0 < p_1 < p_0 \leq 1/2$.*

Замечание 7. Можно показать, что теорема 1 и формула (13) справедливы при любых $p_1 < p_0 \leq 1/2$. Для этого можно действовать аналогично [11], используя лемму 2 и рассматривая по отдельности случаи равенства в формуле (50) (по существу, это эквивалентно рассмотренному в § 6 случаю) и неравенства в ней. Доказательство во втором случае оказывается неоправданно громоздким (и ориентированным только на двоичный канал ДСК(p)). По этой причине мы его не приводим. Определенно, есть более простой способ доказательства.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Функция $g(t, p, \omega)$ и формула (35). Рассмотрим кодовые слова $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ и \mathbf{x}_1 с $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) = w(\mathbf{x}_1) = \omega n$, а также множество $S_{\mathbf{x}, \mathbf{x}_1}(t, p, \omega)$ из (34). Можно считать, что $\mathbf{x}_1 = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, причем \mathbf{x}_1 имеет сначала ωn “единиц”, а затем $(1 - \omega)n$ “нулей”. Пусть также $\mathbf{u} \in S_{\mathbf{x}, \mathbf{x}_1}(t, p, \omega)$ имеет $u_1 n$ “единиц” на первых ωn позициях и $u_2 n$ “единиц” на следующих $(1 - \omega)n$ позициях. Так как $u_1 + u_2 = t$, $\omega - u_1 + u_2 = p$, то

$$u_1 = \frac{t - p + \omega}{2}, \quad u_2 = \frac{t + p - \omega}{2}, \quad (76)$$

и при $n \rightarrow \infty$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log |S_{\mathbf{x}, \mathbf{x}_1}(t, p, \omega)| &= \frac{1}{n} \log \left[\binom{\omega n}{u_1 n} \binom{(1-\omega)n}{u_2 n} \right] = \\ &= \omega h\left(\frac{u_1}{\omega}\right) + (1-\omega)h\left(\frac{u_2}{1-\omega}\right) + o(1) = g(t, p, \omega) + o(1), \end{aligned} \quad (77)$$

где

$$g(t, p, \omega) = \omega h\left(\frac{t+\omega-p}{2\omega}\right) + (1-\omega)h\left(\frac{t+p-\omega}{2(1-\omega)}\right). \quad (78)$$

Также имеем

$$\begin{aligned} 2g'_\omega(p, t, \omega) &= -2 \log \frac{1-\omega}{\omega} + \log \frac{(1-\omega)^2 - (1-t-p)^2}{\omega^2 - (t-p)^2}, \\ 2g'_t(p, t, \omega) &= \log \frac{(1-t)^2 - (1-\omega-p)^2}{t^2 - (\omega-p)^2}, \quad g''_{tt}(p, t, \omega) < 0, \quad g''_{\omega\omega}(p, t, \omega) \leq 0. \end{aligned}$$

Для корня ω_0 уравнения $g'_\omega(t, p, \omega) = 0$ имеем

$$\omega_0 = \frac{p-t}{1-2t}, \quad g(t, p, \omega_0) = h(t).$$

2. Функция $\mu(R, \alpha, \omega)$. Введем функцию [14] ($0 \leq \tau \leq \alpha \leq 1/2$)

$$G(\alpha, \tau) = 2 \frac{\alpha(1-\alpha) - \tau(1-\tau)}{1 + 2\sqrt{\tau(1-\tau)}} \geq 0. \quad (79)$$

Для α, τ , таких что $0 \leq \tau \leq \alpha \leq 1/2$ и $h_2(\alpha) - h_2(\tau) = 1 - R$, введем функцию [16]

$$\mu(R, \alpha, \omega) = h_2(\alpha) - 2 \int_0^{\omega/2} \log \frac{P + \sqrt{P^2 - 4Qy^2}}{Q} dy - (1-\omega)h_2\left(\frac{\alpha - \omega/2}{1-\omega}\right), \quad (80)$$

$$P = \alpha(1-\alpha) - \tau(1-\tau) - y(1-2y), \quad Q = (\alpha-y)(1-\alpha-y).$$

Определим функцию $\delta_{GV}(R) \leq 1/2$ (граница Варшавова – Гилберта) как

$$1 - R = h_2(\delta_{GV}(R)), \quad 0 \leq R \leq 1. \quad (81)$$

Важность функции $\mu(R, \alpha, \omega)$ и ее связь со спектром кода $\{B_i\}$ определяет следующий вариант теоремы 3 из [15].

Теорема 2 [15, теорема 3]. *Для любого (R, n) -кода и любого $\alpha \in [\delta_{GV}(R), 1/2]$ существуют $r_1(R, \alpha) > 0$ и ω , $0 < r_1(R, \alpha) \leq \omega \leq G(\alpha, \tau)$, где $h_2(\tau) = h_2(\alpha) - 1 + R$, а $G(\alpha, \tau)$ определено в (79), такие что*

$$n^{-1} \log B_{\omega n} \geq \mu(R, \alpha, \omega) + o(1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (82)$$

Для $\mu(R, \alpha, \omega)$ из (80) справедливо также неинтегральное представление (83)–(85).

Замечание 8. Теорема 2 уточняет теорему 5 из [16] (см. также [12, теорема 2]). При $r_1 = 0$ теорема 2 переходит в теорему 5 из [16]. В [15, теорема 3] имеются оценки для $r_1(R, \alpha) > 0$.

Предложение 5 [11, предложение 3]. Для функции $\mu(R, \alpha, \omega)$ справедливо представление

$$\mu(R, \alpha, \omega) = (1 - \omega)h_2\left(\frac{\alpha - \omega/2}{1 - \omega}\right) - h_2(\alpha) + 2h_2(\omega) + \omega \log \frac{2\omega}{e} - T(A, B, \omega), \quad (83)$$

где

$$\begin{aligned} T(A, B, \omega) &= \omega \log(v - 1) - (1 - \omega) \log \frac{v^2 - A^2}{v^2 - B^2} + \\ &+ B \log \frac{v + B}{v - B} - A \log \frac{v + A}{v - A} - \frac{(v - 1)(B^2 - A^2)}{(v^2 - B^2) \ln 2}, \quad (84) \\ v &= \frac{\sqrt{B^2\omega^2 - 2a_1\omega + a_1^2} + a_1}{\omega}, \quad a_1 = \frac{B^2 - A^2}{2}, \end{aligned}$$

и

$$h_2(\alpha) - h_2(\tau) = 1 - R, \quad A = 1 - 2\alpha, \quad B = 1 - 2\tau, \quad 0 \leq \tau \leq \alpha \leq 1/2. \quad (85)$$

Для любых $\alpha_0(R) \leq \alpha < 1/2$ и $\omega > 0$ имеем

$$\frac{d\mu(R, \alpha, \omega)}{d\alpha} > 0, \quad \alpha_0(R) = h_2^{-1}(1 - R).$$

Также для любых $\alpha > 0$ и $R > 0$ имеем $\mu(R, \alpha, 0) = 0$ и $\mu'_\omega(R, \alpha, \omega)|_{\omega=0} > 0$. Кроме того, для любых $0 \leq \tau \leq \alpha \leq 1/2$ и $0 < \omega < G(\alpha, \tau)$

$$\mu''_{\omega^2}(R, \alpha, \omega) > 0.$$

Для любого $\omega > 0$ имеем $\mu(0, 1/2, \omega) = 0$.

Автор благодарит Ш. Ватанабе (Shun Watanabe) и рецензента за полезные обсуждения и конструктивные критические замечания, улучшившие статью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурнашев М.В., Амару Ш., Хан Т.С. О некоторых задачах проверки гипотез с информационными ограничениями // Теория вероятн. и ее примен. 2000. Т. 45. № 4. С. 625–638.
2. Бурнашев М.В., Хан Т.С., Амару Ш. О некоторых задачах оценивания с информационными ограничениями // Теория вероятн. и ее примен. 2001. Т. 46. № 2. С. 233–246.
3. Ahlswede R., Csiszár I. Hypothesis Testing with Communication Constraints // IEEE Trans. Inform. Theory. 1986. V. 32. № 4. P. 533–542.
4. Han T.S., Kobayashi K. Exponential-type Error Probabilities for Multiterminal Hypothesis Testing // IEEE Trans. Inform. Theory. 1989. V. 35. № 1. P. 2–14.
5. Ahlswede R., Burnashev M.V. On Minimax Estimation in the Presence of Side Information about Remote Data // Ann. Statist. 1990. V. 18. № 1. P. 141–171.
6. Han T.S., Amari S. Statistical Inference under Multiterminal Data Compression // IEEE Trans. Inform. Theory. 1998. V. 44. № 6. P. 2300–2324.
7. Shimokawa H., Han T.S., Amari S. Error Bounds of Hypothesis Testing with Data Compression // Proc. 1994 IEEE Int. Sympos. on Information Theory (ISIT'94). Trondheim, Norway. June 27–July 1, 1994. P. 114.
8. Watanabe S. Neyman–Pearson Test for Zero-Rate Multiterminal Hypothesis Testing // Proc. 2017 IEEE Int. Sympos. on Information Theory (ISIT'2017). Aachen, Germany. June 25–30, 2017. P. 116–120.

9. *Elias P.* Coding for Noisy Channels // IRE Conv. Rec. 1955. V. 4. P. 37–46. Reprinted in: Key Papers in the Development of Information Theory. New York: IEEE Press, 1974. P. 102–111.
10. *Gallager R.G.* Information Theory and Reliable Communication. New York: John Wiley & Sons, 1968.
11. *Бурнашев М.В.* О функции надежности ДСК: расширение области, где она известна в точности // Пробл. передачи информ. 2015. Т. 51. № 4. С. 3–22.
12. *Бурнашев М.В.* Спектр кода и функция надежности: двоичный симметричный канал // Пробл. передачи информ. 2006. Т. 42. № 4. С. 3–22.
13. *Бурнашев М.В.* Усиление оценки сверху для функции надежности двоичного симметричного канала // Пробл. передачи информ. 2005. Т. 41. № 4. С. 3–22.
14. *McEliece R.J., Rodemich E.R., Rumsey H., Jr., Welch L.R.* New Upper Bounds on the Rate of a Code via the Delsarte–MacWilliams Inequalities // IEEE Trans. Inform. Theory. 1977. V. 23. № 2. P. 157–166.
15. *Бурнашев М.В.* О границах снизу для спектра двоичного кода // Пробл. передачи информ. 2019. Т. 55. № 4. С. 76–85.
16. *Litsyn S.* New Bounds on Error Exponents // IEEE Trans. Inform. Theory. 1999. V. 45. № 2. P. 385–398.

Бурнашев Марат Валиевич
 Институт проблем передачи информации
 им. А.А. Харкевича РАН
 burn@iitp.ru

Поступила в редакцию
 10.04.2020
 После доработки
 15.05.2020
 Принята к публикации
 19.05.2020

УДК 621.391.15 : 519.725

© 2020 г. А.В. Харин, К.Н. Заверткин, А.А. Овинников

**ОБНАРУЖЕНИЕ ЦИКЛОВ ДЛИНЫ 8 В ГРАФЕ ТАННЕРА
КВАЗИЦИКЛИЧЕСКОГО МПП-КОДА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ
АНАЛИЗА ПРОТОГРАФА¹**

Предложена процедура идентификации циклов длины 8 в графе Таннера, основанная на анализе маршрутов в протографе. Сформулирован и доказан ряд теорем, которые вводят правила идентификации циклов и ограничивают число анализируемых подграфов. Для их различения предложен набор параметров, однозначно определяющих группу анализируемых маршрутов в протографе.

Ключевые слова: граф Таннера, протограф, расширенный граф, объединение циклов, базовое уравнение, метрика связанности цикла, МПП-код.

DOI: 10.31857/S0555292320020035

§ 1. Введение

В настоящее время широкое распространение в технике передачи и хранения данных получили коды с малой плотностью проверок (МПП-коды). Среди них особое место занимает подкласс квазициклических (КЦ) МПП-кодов, которые были предложены в работах [1–3]. Максимальную популярность в современных спецификациях получили нерегулярные КЦ МПП-коды из-за их высокой энергетической эффективности [4] и наличия относительно быстрых алгоритмов кодирования и декодирования [5, 6]. Структура КЦ проверочных матриц обеспечивает компактность хранения в памяти и упрощает процедуру кодирования МПП-кода. Однако с точки зрения синтеза таких кодов еще остается ряд нерешенных задач. Первой из них является оптимизация весовых распределений ненулевых элементов по строкам и столбцам проверочной матрицы в заданном канале связи с учетом ограниченной длины кода и размера циркулянта. Вторая задача состоит в получении кодов с заданным обхватом графа Таннера и распределением метрик связанности циклов (МСЦ) [7] в нем. Представленное здесь исследование может выступать как теоретическая основа для решения последней задачи.

Величина обхвата графа Таннера считается [8] важной метрикой в оценке эффективности итеративного декодирования МПП-кодов. В работе [2] была предложена формула, отражающая необходимое и достаточное условие существования цикла в графе Таннера, определяемое по протографу. Там же было показано, что для полносвязанных графов обхват ограничен значением $g_0 = 12$. Впервые концепция объединений циклов в протографе была введена в публикации [9]. Авторами [9] было обнаружено, что процедура преобразования циклов в процессе расширения базового графа КЦ МПП-кода является достаточно сложной и предложили необходимые условия для получения $g_0 = 10$. Однако ими была допущена ошибка при рассмотрении вариантов пар объединений циклов с длинами 4, один из них был пропущен,

¹ Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-79-20302).

о чем подробнее будет рассказано далее. Кроме того, ничего не сказано про необходимые условия для достижения в графе Таннера обхвата, равного 12. Логическим завершением работ [2, 9] стал разработанный в [10] метод синтеза КЦ МПП-кодов, основанный на двух теоремах, описывающих необходимые и достаточные условия существования циклов в расширенных двудольных графах по обозначенным конфигурациям объединенных циклов в протографе. Авторами [10] была выдвинута гипотеза о существовании необнаруживаемого алгоритмом PEG [11] цикла в расширенном графе, состоящая в том, что объединение циклов в базовом графе должно содержать как минимум одно общее ребро. Полученные нами результаты, а также исходное описание алгоритма PEG [11] говорят об ошибочности такого предположения. Однако даже в рамках рассматриваемых множеств объединений авторы [10] упустили ряд важных конфигураций.

Первые предпосылки к полученным в настоящей статье результатам были обозначены в [12], где сформулированы и доказаны две теоремы о преобразовании одиночного цикла протографа при его расширении в граф Таннера. Кроме того, в работе [12] введены необходимые понятия для описания параметров объединенных циклов и получен первичный набор правил для их идентификации в базовом графе. В то же время было упущено несколько важных исключений и дополнений, которые не позволят достичь поставленной в работе [12] задачи для произвольных размеров циркулянтов КЦ МПП-кодов. Таким образом, до настоящего времени не было получено исчерпывающего описания процесса топологического расширения базового графа с точки зрения преобразования коротких циклов длины до 8 включительно. Настоящая статья решает эту задачу как в части анализа соответствующих маршрутов в протографе, так и в рамках расчета МСЦ [7], чему посвящены последующие параграфы.

§ 2. Общие теоретические сведения

Ненаправленный двудольный граф $G = (V, C, E)$ определяется множествами кодовых V и проверочных C вершин, таких что $V \cap C = \emptyset$, а также подмножеством пар $\{(v, c), v \in V, c \in C\}$, соответствующих ребрам $e = (v, c) \in E$. Степени кодовых и проверочных вершин обозначаются через $d_v, v \in V$, и $d_c, c \in C$. В силу того, что в дальнейшем интерес будут представлять только значения d_v , можно ввести упрощенное обозначение вида $d_{v_i} = d_i$. Маршрут w^g длины g в графе G представляется последовательностью вершин вида $v_0, c_0, v_1, c_1, \dots, v_{g-1}, c_{g-1}, v_g$. При этом если $v_0 = v_g$, то маршрут называется замкнутым. Маршрут не содержит обратных проходов, если любая тройка вершин имеет вид v_i, c_j, v_k или $c_i, v_j, c_k, i \neq k$. В дальнейшем будем рассматривать только замкнутые маршруты без обратных проходов и будем называть их просто маршрутами. Циклом s^g длины g называется такой маршрут, в котором все промежуточные вершины за исключением $v_0 = v_g$ отличаются друг от друга. Обхватом графа G считается длина g_0 кратчайшего цикла s_0 . В классе двудольных графов g_0 не может быть меньше $g_{\min} = 4$. Общее количество кодовых и проверочных вершин определяется формулами $n = |V|, m = |C|$. В статье рассматриваются только такие двудольные графы, для которых отсутствуют кратные ребра.

Рассмотрим следующую конструкцию. Пусть C_q – циклическая подгруппа симметричной группы S_q над множеством целых чисел $Z_q = \{0, 1, \dots, q-1\}$ мощности q с единственной операцией – циклической перестановкой. Элементы S_q – это перестановки на множестве из q элементов. Рассмотрим циркулянт p_a в C_q , который соответствует циклическому сдвигу на a элементов вправо, где a – величина сдвига циркулянта.

Пусть G_b и G – топологически связные двудольные графы, причем второй получается из первого следующим образом: копируем q раз каждую кодовую и проверочную вершину в G_b , где $v_b \in V_b, c_b \in C_b$. Полученные q копий $v = \{v_b^0, v_b^1, \dots, v_b^{q-1}\} \in$

$\in V$ и $c = \{c_b^0, c_b^1, \dots, c_b^{q-1}\} \in C$ подвергаются циклической перестановке $p_a \in C_q$ для каждой копии e_b в e . Далее граф G_b будет называться базовым, или протографом, а G – расширенным графом. Число вершин в G определяется соотношениями $m = m_b q$ и $n = n_b q$.

Известно [2], что представленное топологическое преобразование графов приводит к тому, что интегральный сдвиг для маршрута в G_b определяется согласно формуле

$$P^{g_b} = \sum_{k=0}^{g_b/2-1} (a_{i_k, j_k} - a_{i_{k+1}, j_k}) \pmod{q}. \quad (1)$$

Для пояснения этого выражения рассмотрим базовую матрицу регулярного МПП-кода, элементы которой соответствуют величинам сдвига циркулянтов $p_{a_{i,j}}$. Любой маршрут в связанном с ней протографе можно записать в виде последовательности элементов, например, $a_{0,0}, a_{0,1}, a_{1,1}, a_{1,0}, a_{0,0}$. Согласно [2] сумма попарных разностей значений базовой матрицы, принадлежащих одному столбцу j_k , позволяет получить так называемый интегральный сдвиг, обладающий рядом чрезвычайно важных свойств, которые рассмотрены далее,

$$H_b = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \dots & a_{0,d_c-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \dots & a_{1,d_c-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{d_v-1,0} & a_{d_v-1,1} & \dots & a_{d_v-1,d_c-1} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Формулу (1) и величину P^{g_b} назовем базовым уравнением (БУ) и его решением (РБУ) соответственно. Важно отметить, что изменение направления обхода маршрута на противоположный приводит к изменению знака РБУ с плюса на минус или наоборот. Следующая теорема описывает необходимое и достаточное условие существования циклов в расширенном графе [9].

Теорема 1. Маршрут w^{g_b} длины g_b в базовом графе отображается в набор циклов длины $g = g_b$ в расширенном графе тогда и только тогда, когда $P^{g_b} = 0$ и w^{g_b} не содержит в себе маршрутов $w_{\text{инс}}$, для которых $P_{\text{инс}} = 0$. Здесь P^{g_b} и $P_{\text{инс}}$ рассчитываются согласно (1), а индекс инс обозначает вложенность маршрута.

Данная теорема описывает возможные преобразования как одиночного цикла, так и маршрута при расширении графа. Однако согласно [9, 10] объединения циклов также могут быть подвержены изменениям. Циклы s_i и s_j образуют объединение в протографе тогда и только тогда, когда они содержат хотя бы одну общую вершину. Такая пара циклов в G_b описывается следующим набором параметров:

- g_i и g_j – длины пересекающихся циклов;
- n_{cv} – число общих вершин между s_i и s_j ;
- n_{ce} – число общих ребер между s_i и s_j ;
- n_{cr} – взаимное направление обхода, которое принимает значение, равное нулю, при совпадении обходов циклов по общему ребру (общим ребрам), а в противном случае $n_{cr} = 1$.

В работе [7] рассмотрена мера, описывающая число ребер, связывающих кодовые вершины цикла с внешними по отношению к нему проверочными вершинами. Для определения числа таких связей используется формула (см. [7])

$$\gamma = \sum_{k=0}^{g/2-1} (d_k - 2). \quad (3)$$

Определим параметр γ как метрику связанности цикла (МСЦ) s с графом G .

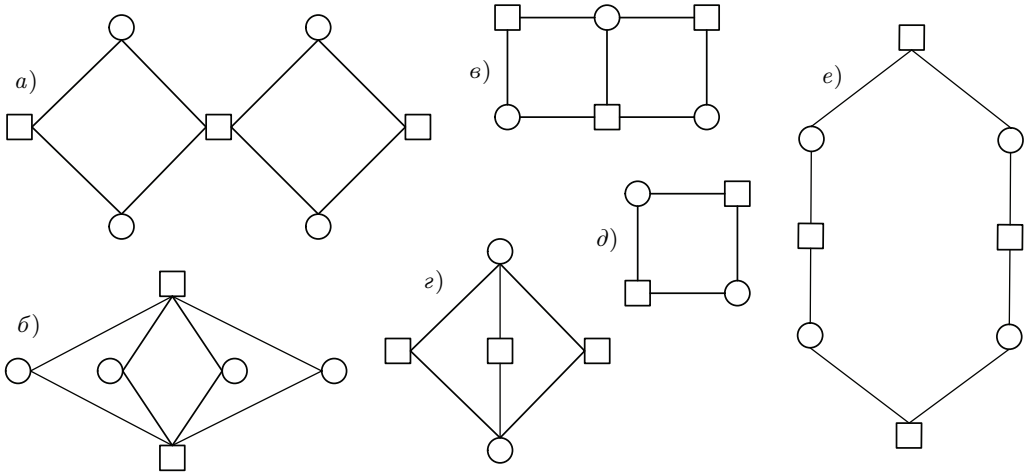


Рис. 1. Конфигурации подграфов, в которых возможно существование маршрутов длины g_x

В последующих параграфах рассмотрены маршруты целевой длины $g_x = 8$ и образующие их подграфы – элементы протографов, состоящие из объединений циклов минимальной длины, а также аналитика изменения значений МСЦ при расширении базового графа.

§ 3. Условия образования циклов

Теорема 2. Циклы s^{g_x} в расширенном графе G образуются из маршрутов w^{g_x} в базовом графе G_b , таких что определяемые ими подграфы изоморфны одному из шести графов, представленных на рис. 1.

Доказательство. Пусть цикл имеет вид $s^{g_x} = (u_1, u_2, \dots, u_{g_x}, u_1)$, где $u \in C \cup V$. Тогда маршрут в протографе, из которого образовался цикл, имеет вид $w^{g_x} = (f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_{g_x}), f(u_1))$, где $f(u_b^i) = v_b$, $f(u_b^j) = c_b$ для всех $v_b \in V_b$, $c_b \in C_b$, $i, j \in [0, q - 1]$.

Тогда маршрут w^{g_x} определяет в графе G_b подграф T с множеством вершин $\{f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_{g_x})\}$ и множеством ребер

$$\{(f(u_1), f(u_2)), (f(u_2), f(u_3)), \dots, (f(u_{g_x}), f(u_1))\}.$$

Теперь можно сформулировать следующие предложения.

Предложение 1. Подграф T изоморфен факторграфу графа S по разбиению P , а именно $T \cong S/P$, где S – цикл с вершинами $\{u_1, u_2, \dots, u_{g_x}\}$ и ребрами $\{(u_1, u_2), (u_2, u_3), \dots, (u_{g_x}, u_1)\}$, а $P = \{i, j \in I \mid f(u_j) = f(u_i)\}$, $I = \{1, 2, \dots, g_x\}$.

Предложение 2. Для всяких $J \in P$, $u_i, u_j \in J$ разность $i - j$ четна, но отлична от двух.

Для $g_x = 8$ из предложения 2 следует, что J либо одноэлементно, либо является одной из пар (u_1, u_5) , (u_2, u_6) , (u_3, u_7) , (u_4, u_8) .

Пусть \mathcal{P} – множество всех разбиений множества J , указанного в предложении 2. Назовем $P, Q \in \mathcal{P}$ эквивалентными, $P \sim Q$, если $Q = \{\{a(u_j) \mid u_j \in J\} \mid J \in P\}$, где a – автоморфизм цикла S . Тогда справедливо следующее

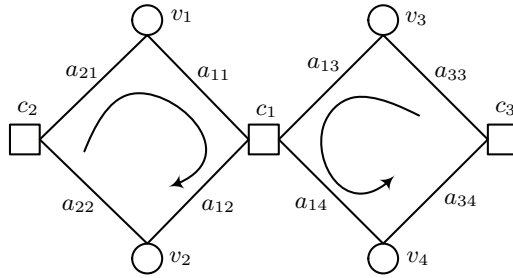


Рис. 2. Графическое изображение подграфа а)

Предложение 3. Если $P \sim Q$, $P, Q \in \mathcal{P}$, то $S/P \cong S/Q$. Если P эквивалентно Q , то факторграф графа S по разбиению P изоморфен факторграфу графа S по разбиению Q .

Учитывая возможные значения J и предложение 3, существует шесть вариантов для P :

$$\begin{aligned}
 & \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}, \\
 & \{(u_1, u_5), u_2, u_3, u_4, u_6, u_7, u_8\}, \\
 & \{(u_1, u_5), (u_2, u_6), u_3, u_4, u_7, u_8\}, \\
 & \{(u_1, u_5), (u_3, u_7), u_2, u_4, u_6, u_8\}, \\
 & \{(u_1, u_5), (u_2, u_6), (u_3, u_7), u_4, u_8\}, \\
 & \{(u_1, u_5), (u_2, u_6), (u_3, u_7), (u_4, u_8)\}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Тогда S/P для этих вариантов P будет соответствовать подграфам е), а), в), б), г) и д). ▲

В силу того, что подграф е) является одиночным циклом в базовом графе, его учет является относительно тривиальной задачей и может быть выполнен на основе любого алгоритма нумерации циклов.

Теорема 3. Базовое уравнение для любого маршрута w^{g_x} в протографе может быть выражено через БУ пары циклов $s^{g_{\min}}$, покрывающих все вершины маршрута w^{g_x} .

Доказательство. В соответствии с теоремой 2 маршруты длины g_x могут образовываться в одном из шести возможных подграфов, исключая из рассмотрения случай е). Рассмотрим первый из них (рис. 2).

В данном подграфе возможно существование двух маршрутов длины g_x :

$$w_1^{g_x} = v_1, c_1, v_4, c_3, v_3, c_1, v_2, c_2, v_1,$$

$$w_2^{g_x} = v_1, c_1, v_3, c_3, v_4, c_1, v_2, c_2, v_1.$$

Запишем БУ для этих маршрутов:

$$P_1^{g_x} = (a_{3,4} - a_{1,4}) + (a_{1,1} - a_{2,1}) + (a_{2,2} - a_{1,2}) + (a_{1,3} - a_{3,3}), \tag{5}$$

$$P_2^{g_x} = (a_{1,4} - a_{3,4}) + (a_{3,3} - a_{1,3}) + (a_{1,1} - a_{2,1}) + (a_{2,2} - a_{1,2}). \tag{6}$$

Уравнение для $P_1^{g_x}$ может быть представлено в виде следующих двух сумм: $P_1^{g_{\min}} = (a_{1,1} - a_{2,1}) + (a_{2,2} - a_{1,2})$ и $P_2^{g_{\min}} = (a_{3,4} - a_{1,4}) + (a_{1,3} - a_{3,3})$. При этом первая из них является записью БУ для цикла $s_1^{g_{\min}} = v_1, c_1, v_2, c_2, v_1$, а вторая – для цикла $s_2^{g_{\min}} = v_3, c_1, v_4, c_3, v_3$. Таким образом, БУ для маршрута $w_1^{g_x}$ может быть выражено

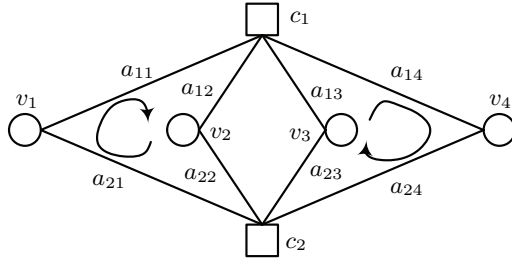


Рис. 3. Графическое изображение подграфа б)

как сумма БУ циклов $s_1^{g_{\min}}$ и $s_2^{g_{\min}}$:

$$P_1^{g_x} = P_1^{g_{\min}} + P_2^{g_{\min}}. \quad (7)$$

Аналогично, уравнение для $P_2^{g_x}$ можно разбить на следующие две суммы: $P_1^{g_{\min}} = (a_{1,1} - a_{2,1}) + (a_{2,2} - a_{1,2})$ и $P_2^{g_{\min}} = (a_{1,4} - a_{3,4}) + (a_{3,3} - a_{1,3})$, где $P_2^{g_{\min}} = -P_2^{g_{\min}}$. Таким образом, БУ для маршрута $w_2^{g_x}$ может быть выражено через БУ тех же циклов, что и БУ для маршрута $w_1^{g_x}$:

$$P_2^{g_x} = P_1^{g_{\min}} - P_2^{g_{\min}}. \quad (8)$$

В итоге БУ для обоих маршрутов длины g_x , существующих в подграфе а), могут быть выражены через БУ циклов длины g_{\min} .

Далее рассмотрим второй из возможных подграфов (рис. 3). В нем возможно существование шести маршрутов длины g_x :

$$\begin{aligned} w_1^{g_x} &= v_1, c_1, v_2, c_2, v_3, c_1, v_4, c_2, v_1, & w_2^{g_x} &= v_1, c_1, v_2, c_2, v_4, c_1, v_3, c_2, v_1, \\ w_3^{g_x} &= v_1, c_1, v_3, c_2, v_2, c_1, v_4, c_2, v_1, & w_4^{g_x} &= v_1, c_1, v_3, c_2, v_4, c_1, v_2, c_2, v_1, \\ w_5^{g_x} &= v_1, c_1, v_4, c_2, v_2, c_1, v_3, c_2, v_1, & w_6^{g_x} &= v_1, c_1, v_4, c_2, v_3, c_1, v_2, c_2, v_1. \end{aligned}$$

Записав БУ для каждого из маршрутов, можно показать, что все они могут быть выражены суммой или разностью БУ пары циклов длины g_{\min} :

$$\begin{aligned} P_i^{g_x} &= P_i^{g_{\min}} + P_{i+1}^{g_{\min}}, \\ P_{i+1}^{g_x} &= P_i^{g_{\min}} - P_{i+1}^{g_{\min}}, \end{aligned} \quad i = 1, 3, 5.$$

Здесь $P_j^{g_{\min}}$, $j \in [1, 6]$, — БУ для циклов длины g_{\min} : $s_1^{g_{\min}} = v_1, c_1, v_2, c_2, v_1$, $s_2^{g_{\min}} = v_3, c_1, v_4, c_2, v_3$, $s_3^{g_{\min}} = v_1, c_1, v_3, c_2, v_1$, $s_4^{g_{\min}} = v_2, c_1, v_4, c_2, v_2$, $s_5^{g_{\min}} = v_1, c_1, v_4, c_2, v_1$ и $s_6^{g_{\min}} = v_2, c_1, v_3, c_2, v_2$.

Таким образом, БУ для всех маршрутов длины g_x , существующих в подграфе б), могут быть выражены через БУ циклов длины g_{\min} .

Далее рассмотрим третий из возможных подграфов (рис. 4). В нем возможно существование одного маршрута длины g_x :

$$w_1^{g_x} = v_1, c_1, v_3, c_2, v_1, c_1, v_2, c_3, v_1.$$

Записав БУ для этого маршрута, можно показать, что оно может быть выражено суммой БУ пары циклов длины g_{\min} :

$$P_1^{g_x} = P_1^{g_{\min}} + P_2^{g_{\min}}, \quad (9)$$

где $P_1^{g_{\min}}$ и $P_2^{g_{\min}}$ — БУ для циклов длины g_{\min} : $s_1^{g_{\min}} = v_1, c_1, v_3, c_2, v_1$ и $s_2^{g_{\min}} = v_1, c_1, v_2, c_3, v_1$.

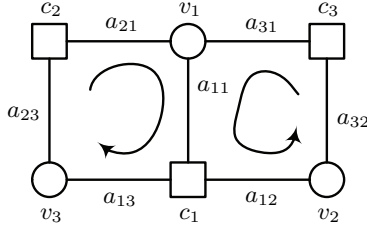


Рис. 4. Графическое изображение подграфа в)

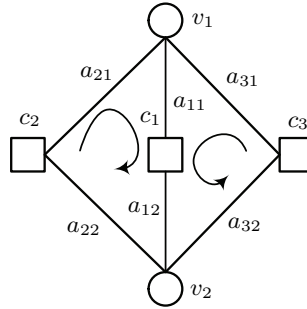


Рис. 5. Графическое изображение подграфа г)

Таким образом, БУ для маршрута длины g_x , существующего в подграфе в), может быть выражено через БУ циклов длины g_{\min} .

Далее рассмотрим четвертый из возможных подграфов (рис. 5). В нем возможно существование одного маршрута длины g_x :

$$w_1^{g_x} = v_1, c_1, v_2, c_2, v_1, c_1, v_2, c_3, v_1.$$

Записав БУ для этого маршрута, можно показать, что оно может быть выражено суммой БУ пары циклов длины g_{\min} :

$$P_1^{g_x} = P_1^{g_{\min}} + P_2^{g_{\min}}, \quad (10)$$

где $P_1^{g_{\min}}$ и $P_2^{g_{\min}}$ – БУ для циклов длины g_{\min} : $s_1^{g_{\min}} = v_1, c_1, v_2, c_2, v_1$ и $s_2^{g_{\min}} = v_1, c_1, v_2, c_3, v_1$.

Таким образом, БУ для маршрута длины g_x , существующего в подграфе г), может быть выражено через БУ циклов длины g_{\min} .

Наконец, рассмотрим пятый из возможных подграфов (рис. 6). В нем возможно существование одного маршрута длины g_x :

$$w_1^{g_x} = v_1, c_1, v_2, c_2, v_1, c_1, v_2, c_2, v_1.$$

Записав БУ для этого маршрута, можно показать, что оно может быть выражено удвоенным БУ цикла длины g_{\min} :

$$P_1^{g_x} = P_1^{g_{\min}} + P_1^{g_{\min}}, \quad (11)$$

где $P_1^{g_{\min}}$ – БУ для цикла длины g_{\min} : $s_1^{g_{\min}} = v_1, c_1, v_2, c_2, v_1$.

Таким образом, БУ для маршрута длины g_x , существующего в подграфе д), может быть выражено через БУ цикла длины g_{\min} .

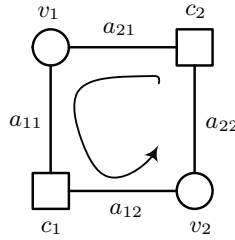


Рис. 6. Графическое изображение подграфа д)

Из всего вышесказанного следует, что БУ любого маршрута длины g_x может быть выражено через БУ циклов длины g_{\min} , которые существуют в подграфе, формируемом маршрутом, и покрывают всего его вершины. ▲

Теорема 4. Условие образования цикла длины g_x в расширенном графе из маршрута в протографе может быть выражено через базовые уравнения циклов длины g_{\min} .

Доказательство. В соответствии с теоремой 1 маршрут в базовом графе будет преобразован в цикл в расширенном графе, если решение БУ для маршрута равно нулю, а решения БУ для всех более коротких маршрутов, входящих в рассматриваемый, будут отличны от нуля.

Рассмотрим пару маршрутов длины g_x , образующихся в подграфе а). В соответствии с теоремой 3 БУ для каждого из них может быть выражено через БУ циклов длины g_{\min} . Также, обратившись к записи маршрутов, легко заметить, что они содержат более короткие маршруты, являющиеся циклами длины g_{\min} , через БУ которых выражается БУ маршрутов. Далее такие короткие циклы будем называть компонентными циклами.

Таким образом, преобразование маршрутов в протографе в цикл при расширении графа происходит при выполнении системы условий вида

$$\begin{cases} (P_1^{g_{\min}} \pm P_2^{g_{\min}}) \bmod q = 0, \\ P_1^{g_{\min}} \bmod q \neq 0, \\ P_2^{g_{\min}} \bmod q \neq 0. \end{cases}$$

Аналогичные системы условий можно составить для маршрутов, существующих в подграфах в) и д):

$$\begin{cases} (P_1^{g_{\min}} + P_2^{g_{\min}}) \bmod q = 0, \\ P_1^{g_{\min}} \bmod q \neq 0, \\ P_2^{g_{\min}} \bmod q \neq 0. \end{cases}$$

Для подграфа г) количество дополнительных условий сводится к одному согласно теореме 3, что позволяет составить следующую систему условий:

$$\begin{cases} (P_1^{g_{\min}} + P_1^{g_{\min}}) \bmod q = 0, \\ P_1^{g_{\min}} \bmod q \neq 0. \end{cases}$$

Маршруты, образующиеся в подграфе б), отличаются от рассмотренных выше тем, что каждый из них содержит по четыре дополнительных цикла. Используя

нумерацию циклов из описания подграфа б) в теореме 3, можно показать, что

$$\begin{aligned} w_1^{g_x} &\supset s_1^{g_{\min}}, s_2^{g_{\min}}, s_5^{g_{\min}}, s_6^{g_{\min}}, & w_2^{g_x} &\supset s_1^{g_{\min}}, s_2^{g_{\min}}, s_3^{g_{\min}}, s_4^{g_{\min}}, \\ w_3^{g_x} &\supset s_3^{g_{\min}}, s_4^{g_{\min}}, s_5^{g_{\min}}, s_6^{g_{\min}}, & w_4^{g_x} &\supset s_3^{g_{\min}}, s_4^{g_{\min}}, s_1^{g_{\min}}, s_2^{g_{\min}}, \\ w_5^{g_x} &\supset s_5^{g_{\min}}, s_6^{g_{\min}}, s_3^{g_{\min}}, s_4^{g_{\min}}, & w_6^{g_x} &\supset s_5^{g_{\min}}, s_6^{g_{\min}}, s_1^{g_{\min}}, s_2^{g_{\min}}. \end{aligned}$$

В таком случае происходит преобразование маршрута w^{g_x} в равновеликий цикл при расширении протографа, если выполняется система условий

$$\begin{cases} (P_i^{g_{\min}} + P_{i+1}^{g_{\min}}) \bmod q = 0, \\ P_i^{g_{\min}} \bmod q \neq 0, \\ P_{i+1}^{g_{\min}} \bmod q \neq 0, \\ P_k^{g_{\min}} \bmod q \neq 0, \\ P_\ell^{g_{\min}} \bmod q \neq 0, \end{cases} \quad i = 1, 3, 5, \quad k = 5, 5, 3, \quad \ell = 6, 6, 2,$$

или

$$\begin{cases} (P_i^{g_{\min}} - P_{i+1}^{g_{\min}}) \bmod q = 0, \\ P_i^{g_{\min}} \bmod q \neq 0, \\ P_{i+1}^{g_{\min}} \bmod q \neq 0, \\ P_k^{g_{\min}} \bmod q \neq 0, \\ P_{k+1}^{g_{\min}} \bmod q \neq 0, \end{cases} \quad i = 1, 3, 5, \quad k = 3, 1, 1.$$

Таким образом, утверждение, указанное в формулировке теоремы, является верным для всех существующих маршрутов. \blacktriangle

Теорема 5. Значение МСЦ для циклов s^{g_x} в расширенном графе определяется суммой метрик связности циклов, через которые выражено БУ маршрута.

Доказательство. В соответствии с теоремой 3 БУ любого маршрута длины g_x может быть описано суммой БУ циклов длины g_{\min} .

В случае подграфа а) МСЦ циклов длины g_x , образованных соответствующими им маршрутами, равны и вычисляются согласно выражению

$$\gamma^{g_x} = (d_1 - 2) + (d_2 - 2) + (d_3 - 2) + (d_4 - 2). \quad (12)$$

При этом МСЦ компонентных циклов длины g_{\min} равны

$$\begin{aligned} \gamma_1^{g_{\min}} &= (d_1 - 2) + (d_2 - 2), \\ \gamma_2^{g_{\min}} &= (d_3 - 2) + (d_4 - 2). \end{aligned} \quad (13)$$

Объединяя (12) и (13), получим

$$\gamma^{g_x} = \gamma_1^{g_{\min}} + \gamma_2^{g_{\min}}.$$

Если в подграфе а) все кодовые вершины заменить проверочными и наоборот, то выражения для вычисления МСЦ изменятся, однако соотношение между ними сохранится:

$$\begin{aligned} \gamma^{g_x} &= 2(d_1 - 2) + (d_2 - 2) + (d_3 - 2), \\ \gamma_1^{g_{\min}} &= (d_1 - 2) + (d_2 - 2), \\ \gamma_2^{g_{\min}} &= (d_1 - 2) + (d_3 - 2), \\ \gamma^{g_x} &= \gamma_1^{g_{\min}} + \gamma_2^{g_{\min}}. \end{aligned}$$

В случае подграфа б) МСЦ для циклов длины g_x , образующихся из всех шести возможных маршрутов, одинакова:

$$\gamma^{g_x} = (d_1 - 2) + (d_2 - 2) + (d_3 - 2) + (d_4 - 2),$$

а МСЦ компонентных циклов выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma_1^{g_{\min}} &= (d_1 - 2) + (d_2 - 2), & \gamma_2^{g_{\min}} &= (d_3 - 2) + (d_4 - 2), \\ \gamma_3^{g_{\min}} &= (d_1 - 2) + (d_3 - 2), & \gamma_4^{g_{\min}} &= (d_2 - 2) + (d_4 - 2), \\ \gamma_5^{g_{\min}} &= (d_1 - 2) + (d_4 - 2), & \gamma_6^{g_{\min}} &= (d_2 - 2) + (d_3 - 2), \end{aligned}$$

и тогда МСЦ для циклов длины g_x может быть выражено одной из трех сумм:

$$\gamma^{g_x} = \gamma_1^{g_{\min}} + \gamma_2^{g_{\min}} = \gamma_3^{g_{\min}} + \gamma_4^{g_{\min}} = \gamma_5^{g_{\min}} + \gamma_6^{g_{\min}}. \quad (14)$$

Если в подграфе б) все кодовые вершины заменить проверочными и наоборот, то выражения для МСЦ циклов изменятся:

$$\begin{aligned} \gamma^{g_x} &= 2(d_1 - 2) + 2(d_2 - 2), \\ \gamma_1^{g_{\min}} &= \gamma_2^{g_{\min}} = \gamma_3^{g_{\min}} = \gamma_4^{g_{\min}} = \gamma_5^{g_{\min}} = \gamma_6^{g_{\min}} = (d_1 - 2) + (d_2 - 2), \end{aligned}$$

а формула (14) останется верной.

Запишем выражение для МСЦ циклов, образующихся из подграфа в):

$$\gamma^{g_x} = 2(d_1 - 2) + (d_2 - 2) + (d_3 - 2).$$

Эту же метрику для компонентных циклов выразим уравнениями

$$\begin{aligned} \gamma_1^{g_{\min}} &= (d_1 - 2) + (d_2 - 2), \\ \gamma_2^{g_{\min}} &= (d_1 - 2) + (d_3 - 2). \end{aligned}$$

Объединяя приведенные выше выражения, получим

$$\gamma^{g_x} = \gamma_1^{g_{\min}} + \gamma_2^{g_{\min}}.$$

Если в подграфе заменить типы вершин на противоположные, то выражения для вычисления МСЦ не изменятся.

Формула для вычисления МСЦ циклов, образующихся из подграфа г), имеет вид

$$\gamma^{g_x} = 2(d_1 - 2) + 2(d_2 - 2),$$

причем компонентные циклы характеризуются следующей метрикой связанности:

$$\begin{aligned} \gamma_1^{g_{\min}} &= (d_1 - 2) + (d_2 - 2), \\ \gamma_2^{g_{\min}} &= (d_1 - 2) + (d_2 - 2). \end{aligned}$$

Объединяя приведенные выше выражения, получим

$$\gamma^{g_x} = \gamma_1^{g_{\min}} + \gamma_2^{g_{\min}}.$$

Если в подграфе г) все кодовые вершины заменить проверочными и наоборот, то выражения для вычисления МСЦ изменятся, однако соотношение между ними

Параметры n_{cv} и n_{ce} для подграфов

Подграф	а)	б)	в)	г)	д)
n_{cv}	1	2	2	3	4
n_{ce}	0	0	1	2	4

сохранится:

$$\gamma^{g_x} = 2(d_1 - 2) + (d_2 - 2) + (d_3 - 2),$$

$$\gamma_1^{g_{\min}} = (d_1 - 2) + (d_2 - 2),$$

$$\gamma_2^{g_{\min}} = (d_1 - 2) + (d_3 - 2),$$

$$\gamma^{g_x} = \gamma_1^{g_{\min}} + \gamma_2^{g_{\min}}.$$

И наконец, для подграфа д) МСЦ образующихся циклов вычисляется в соответствии со следующим выражением:

$$\gamma^{g_x} = 2(d_1 - 2) + 2(d_2 - 2).$$

При этом МСЦ цикла длины g_{\min} , БУ которого используется для выражения БУ маршрута, равна

$$\gamma_1^{g_{\min}} = (d_1 - 2) + (d_2 - 2).$$

В этом случае

$$\gamma^{g_x} = \gamma_1^{g_{\min}} + \gamma_1^{g_{\min}}.$$

Замена типа вершин в подграфе на противоположные не изменяет выражений для вычисления МСЦ.

Таким образом, утверждение, указанное в формулировке теоремы, является верным для всех типов подграфов при целевой длине цикла, равной g_x . ▲

§ 4. Процедура определения наличия циклов длины g_x в расширенном графе путем анализа протографа

Полученные выше условия позволяют построить процедуру определения наличия циклов длины g_x в расширенном графе путем анализа циклов, существующих в протографе.

Сравнение алгоритмов обнаружения коротких циклов с прямым поиском маршрутов по вычислительной сложности говорит не в пользу последнего. Поэтому целесообразно взять за основу именно первый вариант. Любой из пяти возможных подграфов, в котором существуют маршруты длины g_x , может быть представлен как объединение двух циклов длины g_{\min} с некоторым количеством общих вершин n_{cv} и ребер n_{ce} . В табл. 1 приведено соответствие между подграфами, в которых существуют маршруты длины g_x , и параметрами n_{cv} и n_{ce} объединения двух циклов длины g_{\min} .

Таким образом, сравнив записи двух циклов длины g_{\min} и определив наличие общих вершин и ребер, мы можем однозначно определить наличие и тип подграфа согласно теореме 2. Также можно заметить, что для описания протографа и выражения БУ маршрута используется одна и та же пара циклов. Все это позволяет нам предложить процедуру определения наличия циклов длины g_x в расширенном графе, который включает в себя следующие шаги:

1. Выполнить поиск одиночных циклов длины g_x и g_{\min} ;
2. Составить и решить БУ для одиночных циклов длины g_x , найденных в п. 1. Если хотя бы одно связанное с циклом РБУ равно нулю, то процедура завершается, иначе переходим к следующему шагу;
3. Парно сравнить все циклы длины g_{\min} и обнаружить их объединения;
4. Определить тип подграфа по табл. 1 для каждого из обнаруженных объединений;
5. Составить и решить систему условий по всем объектам из п. 4;
6. Цикл длины g_x считается обнаруженным, если хотя бы одна из систем условий выполнена, иначе циклы целевой длины отсутствуют.

С помощью предложенной процедуры мы можем обнаружить циклы длины g_x без выполнения затратной процедуры расширения протографа.

§ 5. Заключение

В рамках проделанной работы предложена процедура определения наличия цикла длины g_x в графе Таннера КЦ МПП-кода путем анализа соответствующих маршрутов в протографе. Сформулирован и доказан набор теорем 2–5, которые лежат в основе представленной процедуры. Они служат для определения множества подграфов в базовом графе, образованных объединением одиночных циклов длины g_{\min} и позволяющих выявить факт существования циклов длины g_x в расширенном графе с универсальной формулой расчета МСЦ. Таким образом, описан процесс топологического расширения двудольного графа без параллельных ветвей в плоскости изменения структуры циклов длины g_x . В дальнейшем планируется продолжить работу в направлении увеличения длины анализируемого цикла в расширенном графе без кратных ребер, а также разработать алгоритм, максимизирующий обхват графа Таннера КЦ МПП-кода с $g_0 \leq 12$ на основе предлагаемого подхода.

Авторы выражают особую благодарность А.Н. Воропаеву за помощь в доказательстве теоремы 2, а также рецензенту за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания, позволившие улучшить качество итоговой работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tanner R.M.* On Quasi-cyclic Repeat-Accumulate Codes // Proc. 37th Allerton Conf. on Communication, Control and Computing. Monticello, IL, USA. Sept. 22–24, 1999. P. 249–259.
2. *Fossorier M.P.C.* Quasi-cyclic Low-Density Parity-Check Codes from Circulant Permutation Matrices // IEEE Trans. Inform. Theory. 2004. V. 50. № 8. P. 1788–1793.
3. *Fan J.L.* Array Codes as Low-Density Parity-Check Codes // Proc. 2nd Int. Symp. on Turbo Codes and Related Topics. Brest, France. Sept. 4–7, 2000. P. 543–546.
4. *Richardson T.J., Shokrollahi M.A., Urbanke R.L.* Design of Capacity-Approaching Irregular Low-Density Parity-Check Codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 2001. V. 47. № 2. P. 619–637.
5. *Li Z., Chen L., Zeng L., Lin S., Fong W.H.* Efficient Encoding of Quasi-cyclic Low-Density Parity-Check Codes // IEEE Trans. Commun. 2006. V. 54. № 1. P. 71–81.
6. *Kschischang F.R., Frey B.J., Loeliger H.-A.* Factor Graphs and the Sum-Product Algorithm // IEEE Trans. Inform. Theory. 2001. V. 47. № 2. P. 498–519.
7. *Tian T., Jones C.R., Villasenor J.D., Wesel R.D.* Selective Avoidance of Cycles in Irregular LDPC Code Construction // IEEE Trans. Commun. 2004. V. 52. № 8. P. 1242–1247.
8. *Mao Y., Banihashemi A.H.* A Heuristic Search for Good Low-Density Parity-Check Codes at Short Block Lengths // Proc. 2001 IEEE Int. Conf. on Communications (ICC'2001). Helsinki, Finland. June 11–14, 2001. V. 1. P. 41–44.
9. *Karimi M., Banihashemi A.H.* On the Girth of Quasi Cyclic Protograph LDPC Codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 2013. V. 59. № 7. P. 4542–4552.

10. *Diouf M., Declercq D., Fossorier M., Quya S., Vasić B.* Improved PEG Construction of Large Girth QC-LDPC Codes // Proc. 9th Int. Symp. on Turbo Codes & Iterative Information Processing (ISTC'2016). Brest, France. Sept. 5–9, 2016. P. 146–150.
11. *Hu X.-Y., Eleftheriou E., Arnold D.M.* Regular and Irregular Progressive Edge-Growth Tanner Graphs // IEEE Trans. Inform. Theory. 2005. V. 51. № 1. P. 386–398.
12. *Овинников А.А.* Способ идентификации циклов в графах Таннера LDPC кодов на основе пересечения коротких замкнутых структур в протографах // Цифровая обработка сигналов. 2016. № 4. С. 26–30.

Харин Алексей Владимирович
Заверткин Константин Николаевич
Овинников Алексей Анатольевич
Рязанский государственный радиотехнический
университет им. В.Ф. Уткина,
факультет радиотехники и телекоммуникаций,
кафедра телекоммуникаций и основ радиотехники
kharin.a.v@tor.rsreu.ru
zavertkin.k.n@tor.rsreu.ru
ovinnikov.a.a@tor.rsreu.ru

Поступила в редакцию
05.07.2019
После доработки
08.05.2020
Принята к публикации
12.05.2020

УДК 621.391.1:519.2

© 2020 г. Г.К. Голубев

ОБ АДАПТИВНОМ ОЦЕНИВАНИИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ В БЕЛОМ ШУМЕ

Рассматривается задача оценивания линейного функционала от неизвестного многомерного вектора по его наблюдениям в гауссовском белом шуме. В качестве семейства оценок функционала используются оценки, порождаемые проекционными оценками неизвестного вектора, и основная задача состоит в том, чтобы выбрать наилучшую оценку в этом семействе. Цель статьи объяснить и обосновать математически простую статистическую идею, которая используется при адаптивном, т.е. основанном на наблюдениях, выборе наилучшей оценки линейного функционала из заданного семейства оценок. Обсуждаются также обобщения рассматриваемой статистической модели и предлагаемого метода оценивания, которые позволяют охватить широкий класс статистических задач.

Ключевые слова: линейный функционал, белый гауссовский шум, винеровский процесс, проекционная оценка, огибающая риска, адаптивная оценка, метод Акаике, мягкое пороговое ограничение, метод главных компонент, спектральная регуляризация.

DOI: 10.31857/S0555292320020047

§ 1. Введение

В этой статье рассматривается задача оценивания линейного функционала

$$L(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k$$

от неизвестного вектора $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots)^\top$ по наблюдениям

$$Y_k = \theta_k + \sigma \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где ξ_k – случайные шумы, точнее, независимые стандартные гауссовские случайные величины, а $\sigma > 0$ – уровень шума, который далее для простоты считается известным. При этом естественно предполагается, что $\theta \in \ell_2(\mathbb{Z}^+)$.

В качестве оценок $L(\theta)$ будут использоваться оценки

$$\widehat{L}(\omega; Y) = \sum_{k=1}^{\omega} Y_k, \quad \omega \in \mathbb{Z}^+, \quad (2)$$

где величина ω , называемая далее частотой среза, может выбираться на основе наблюдений $Y = \{Y_1, Y_2, \dots\}$. За идеей использовать это семейство оценок лежит эвристическая гипотеза, что θ_k становятся малыми, начиная с некоторого k_0 , и они не вносят ощутимый вклад в значение $L(\theta)$, но при этом значение k_0 неизвестно.

Скажем сразу же несколько слов об используемых в статье обозначениях. В (2) и всюду далее аргументы функций разделяются символом “;” на два класса. До этого символа находятся фактические аргументы, т.е. те, которые меняются, а после него аргументы, которые рассматриваются как “замороженные”, т.е. параметры.

Основная задача в этой статье – выбрать ω так, чтобы минимизировать ошибку оценивания

$$R(\omega; \theta) = \mathbf{E}|L(\theta) - \widehat{L}(\omega; Y)|;$$

здесь и далее \mathbf{E} – усреднение по мере, порожденной наблюдениями (1) при фиксированном θ .

Ответ на вопрос, почему рассматривается именно эта статистическая модель, прост. Цель этой статьи – объяснить на элементарном уровне очень простую идею, которая лежит в основе адаптивного выбора ω , сведя при этом к минимуму технические математические детали. Возможные обобщения рассматриваемой модели обсуждаются в § 4.

Очевидно, что принципиальная проблема при выборе хорошей оценки из семейства $\widehat{L}(\omega; Y)$, $\omega \in \mathbb{Z}^+$, заключается в том, что θ_k неизвестны. Ранние подходы к ее решению (см., например, [1]) основывались на предположении, что эти величины принадлежат некоторому известному множеству Θ и частота среза выбирается так, чтобы минимизировать $\sup_{\theta \in \Theta} R(\omega; \theta)$. Очевидно, что с практической точки зрения такой метод является излишне пессимистичным, так как ориентируется на самые “плохие” векторы в Θ . Кроме того, гипотеза о том, что множество Θ известно точно, является мало правдоподобной с практической точки зрения. Однако с математической точки зрения значение минимаксного подхода невозможно переоценить, поскольку только он позволяет определить достаточно узкий класс оценок, в котором имеет смысл искать наилучшую. В качестве такого класса оценок можно использовать, например, проекционные оценки из (2). Конечно, это справедливо отнюдь не для всех множеств Θ , но их достаточно много, например, такими являются

$$\Theta = \left\{ \theta_k : \sum_{k=1}^{\infty} a_k |\theta_k| \leq 1 \right\}, \quad (3)$$

где a_k – некоторая возрастающая по k последовательность.

Очевидно, что если у нас нет никакой априорной информации о векторе θ , единственное, что остается, это выбрать оценку $\widehat{L}(\omega; Y)$ или, что эквивалентно, ω на основе наблюдений. Сама по себе эта идея в статистике, конечно, не нова, но ее первая простая и эффективная реализация появилась относительно недавно в [2]. Причем она касалась не оценивания линейных функционалов, а восстановления всего вектора θ при квадратичном критерии качества. В данном случае речь идет о проекционных оценках θ

$$\widehat{\theta}_k(\omega; Y) = Y_k \mathbf{1}\{k \leq \omega\},$$

и задача состоит в том, чтобы выбрать ω на основе наблюдений так, чтобы среднеквадратичный риск

$$r(\omega; \theta) = \mathbf{E} \sum_{k=1}^{\infty} [\theta_k - \widehat{\theta}_k(\omega; Y)]^2$$

был минимален. Ее решение основано на следующих простых соображениях:

- При фиксированной частоте среза ω

$$r(\omega; \theta) = \sum_{k=\omega+1}^{\infty} \theta_k^2 + \sigma^2 \omega,$$

и если бы мы знали θ_k , то выбрали бы

$$\omega(\theta) = \arg \min \left\{ \sum_{k=\omega+1}^{\infty} \theta_k^2 + \sigma^2 \omega \right\}. \quad (4)$$

- Очевидно, что

$$\sum_{k=\omega+1}^{\infty} \theta_k^2 = \|\theta\|^2 - \sum_{k=1}^{\omega} \theta_k^2,$$

и поэтому

$$\omega(\theta) = \arg \min \left\{ - \sum_{k=1}^{\omega} \theta_k^2 + \sigma^2 \omega \right\}. \quad (5)$$

- Для величины $\sum_{k=1}^{\omega} \theta_k^2$ можно использовать ее несмещенную оценку $\sum_{k=1}^{\omega} (Y_k^2 - \sigma^2)$.

Эти аргументы приводят к методу Акаике

$$\hat{\omega}_A(Y) = \arg \min_{\omega} \left\{ - \sum_{k=1}^{\omega} Y_k^2 + 2\sigma^2 \omega \right\}. \quad (6)$$

Несмотря на простоту этой мотивации, ее строгое математическое обоснование и практически важные обобщения появились лишь спустя 20 лет в работе [3]. Общая форма этого метода часто называется принципом несмещенного оценивания риска.

Ключевым элементом в методе Акаике и его понимании является эквивалентность формул (4) и (5). Это свойство присуще исключительно задачам, в которых риск оценивания измеряется аддитивными квадратичными потерями. Рассматриваемая в этой статье задача таковой, очевидно, не является, и поэтому для ее решения нужны принципиально другие методы.

По-видимому, работа [4] была первой, в которой предлагался математически обоснованный подход к адаптивному выбору сглаживающих параметров (в нашем случае это частота среза ω) в задачах, в которых не применим принцип несмещенного оценивания риска. Эта работа была безусловно революционной в математической статистике. За ней, естественно, последовало много работ, в которых предложенный метод применялся в различных статистических моделях, и ссылки на которые мы приводить не будем ввиду их многочисленности. К сожалению, ни из оригинальной работы, ни из последующих совсем не просто извлечь простые для понимания статистические аргументы, поясняющие, почему надо делать так, а не иначе. Оптимальность предложенного метода доказывалась с помощью довольно непростых вычислений, как правило, нагруженных многочисленными техническими условиями и деталями. Поэтому совсем не удивительно, что позднее оказалось, что можно адаптивно выбирать ω несколько проще [5, 6]. Но опять же, вычлнить из этих статей простые для понимания аргументы, объясняющие статистическую суть метода, довольно сложно, поскольку она скрывается в доказательствах, переполненных важными, но по сути второстепенными математическими деталями.

Цель этой статьи – объяснить на элементарном уровне без несущественных математических деталей несколько простых идей, которые позволяют адаптивно вы-

бирать частоту среза. Как мы увидим, эти идеи и их математическое обоснование оказываются не сложнее тех, которые лежат в методе несмещенного оценивания риска.

§ 2. Основные результаты

Заметим, что для риска $R(\omega; \theta)$ справедлива следующая тривиальная граница сверху:

$$R(\omega; \theta) \leq \mathbf{E} \left| \sum_{k=\omega+1}^{\infty} \theta_k \right| + \sigma \mathbf{E} \left| \sum_{k=1}^{\omega} \xi_k \right|.$$

Поэтому мы хотели бы выбрать ω с помощью наблюдений Y так, чтобы правая часть в этом неравенстве была как можно меньше. При этом понятно, что желательно решить две следующие задачи:

1. Поскольку случайные величины ξ_k ненаблюдаемы, а выбираемое ω от них зависит, то нужно ограничить сверху $\mathbf{E} |W(\omega)|$, где

$$W(\omega) = \sum_{k=1}^{\omega} \xi_k,$$

при любых ω , зависящих от ξ_k . (Для кумулятивной суммы мы использовали обозначение $W(\cdot)$, чтобы подчеркнуть, что это винеровский процесс.)

2. Так как θ_k неизвестны, то ясно, что необходимо оценить по наблюдениям абсолютную величину смещения $|B(\omega; \theta)|$, где

$$B(\omega; \theta) = \sum_{k=\omega+1}^{\infty} \theta_k.$$

Хотя на первый взгляд эти две задачи кажутся разными, в действительности для их решения используется одна и та же идея. Она состоит в замене случайных процессов некоторыми детерминированными функциями, которые их ограничивают либо сверху, либо снизу.

Проще всего пояснить этот подход на примере вычисления верхней границы для $\mathbf{E} |W(\omega)|$.

Чтобы максимально упростить технические детали, будем далее считать, что ω лежит на геометрической решетке

$$\Omega_h = \{1, \omega_2, \omega_3, \dots\},$$

где

$$\omega_{k+1} = \min\{k \in \mathbb{Z}^+ : k \geq (1+h)\omega_k\},$$

а величина $h > 0$ является фиксированной.

Отметим, что в принципе, вместо геометрической решетки можно использовать множество положительных целых чисел. Для этого нужно немного модифицировать леммы 1 и 3, в доказательстве которых эта решетка реально применяется. Сделать это несложно, если воспользоваться стандартным методом, который применяется при доказательстве закона повторного логарифма для винеровского процесса. С другой стороны, геометрическая решетка может быть реально полезной, поскольку она позволяет существенно снизить вычислительную сложность предлагаемого далее метода.

Предположим, что найдена некоторая детерминированная функция $V_h(\omega) > 0$, такая что

$$\mathbf{E} \sup_{x \in \Omega_h} [|W(\omega)| - V_h(\omega)]_+ \leq K_h, \quad (7)$$

где K_h – некоторая постоянная. Тогда очевидно, что для любой частоты среза $\hat{\omega}$, зависящей от ξ_k , $k = 1, \dots$, выполнено неравенство

$$\mathbf{E} |W(\hat{\omega})| \leq \mathbf{E} V_h(\hat{\omega}) + K_h.$$

При этом ясно также, что чем меньше будет функция $V_h(\cdot)$, тем лучше будет эта граница.

Хотя на первый взгляд кажется, что задача вычисления минимальной функции $V_h(\cdot)$, удовлетворяющей (7) при заданной постоянной K_h , является простой, ее точное решение, по-видимому, не известно. Близкую к минимальной функции дает следующая лемма. В ней и далее для краткости будем обозначать

$$\log[1 + \log(x)] = \log^*(x).$$

Лемма 1. Если

$$V_h(t) = \sqrt{tv_h(t)}, \quad (8)$$

где

$$v_h(t) = \log(t+1) + \frac{2\log^*(t+1)}{\log(1+1/h)},$$

то неравенство (7) выполняется с

$$K_h = \frac{K}{h} \log\left(1 + \frac{1}{h}\right), \quad (9)$$

а K – универсальная постоянная.

Доказательство этой леммы и нижеследующих лемм 2, 3 приведены в § 5.

Таким образом, мы приходим к следующей верхней границе для риска:

$$R(\omega; \theta) = \mathbf{E} |L(\theta) - \hat{L}(\omega; Y)| \leq \mathbf{E} [|B(\omega; \theta)| + \sigma V_h(\omega)] + \sigma K_h. \quad (10)$$

В данной статье мы будем использовать правую часть этого неравенства для выбора частоты среза, т.е. пытаться приблизиться к выбору, который сделал бы оракул, знающий все θ_k , а именно

$$\omega_\circ(\theta) = \arg \min_{\omega \in \Omega_h} \{|B(\omega; \theta)| + \sigma V_h(\omega)\}. \quad (11)$$

Тогда ясно, что нам потребуется оценка для абсолютной величины смещения $|B(\omega; \theta)|$, построенная на основе наблюдений Y . Если такая оценка $\hat{B}(\omega; Y)$ найдена, то заменив в (11) неизвестное смещение на его оценку, придем к следующему методу выбора частоты среза:

$$\hat{\omega}(Y) = \arg \min_{\omega \in \Omega_h} \{\hat{B}(\omega; Y) + \sigma V_h(\omega)\}.$$

Задача оценивания $|B(\omega; \theta)|$ является ключевой в данной статье. Ее сложность связана прежде всего с тем, что построить хорошую оценку для этой величины

невозможно. Достаточно надежно можно оценивать только лишь модули конечных сумм

$$\left| \sum_{k=w}^{w'} \theta_k \right| = |L(w'; \theta) - L(w; \theta)|,$$

да и то лишь в случае, когда они существенно превосходят уровень шума $\sigma\sqrt{w' - w}$.

Чтобы пояснить, как можно трансформировать этот простой факт в оценку для $|B(\omega; \theta)|$, рассмотрим следующую вспомогательную прокси-задачу. Предположим, что мы хотим минимизировать по ω функцию

$$r(\omega) = |b(\omega)| + p(\omega),$$

где $p(\omega) \geq 0$ – известная неубывающая функция. При этом функцию $b(\omega)$ мы не знаем полностью, а знаем только лишь величины

$$\Delta(\omega, \omega') = |b(\omega) - b(\omega')| \mathbf{1}\{|b(\omega) - b(\omega')| \geq u(\omega' - \omega)\}; \quad (12)$$

здесь $u(\omega) \geq 0$ – известная неубывающая функция. Ясно, что без ограничения общности можно считать, что $u(0) = 0$. Чтобы избежать излишних математических формальностей, будем считать для простоты, что ω принадлежит некоторому конечному множеству.

Обозначим через $\mathcal{W}^N(\omega, \omega')$ подмножество векторов $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_N)^\top \in \Omega_h^N$, у которых первый и последний элементы фиксированы и равны, соответственно, ω и ω' , а остальные упорядочены:

$$\omega = w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_N = \omega'.$$

Подмножество $\mathcal{W}^N(\omega)$ определяется аналогично, за исключением того, что последний элемент в нем не фиксирован.

Кроме того, нам потребуется любая монотонная огибающая функции $|b(\omega)|$, т.е. невозрастающая функция $\bar{b}(\omega)$, такая что

$$\bar{b}(\omega) \geq |b(\omega)|.$$

Оценим сверху $|b(\omega)|$ с помощью следующего тривиального неравенства:

$$|b(\omega)| \leq \sum_{k=1}^{N-1} |b(w_{k+1}) - b(w_k)| + |b(\omega' + 1)|,$$

которое справедливо для любого вектора $\mathbf{w} \in \mathcal{W}^N(\omega, \omega')$. Поэтому ясно, что

$$|b(\omega)| \leq \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^N(\omega, \omega')} \sum_{k=1}^{N-1} |b(w_{k+1}) - b(w_k)| + \bar{b}(\omega' + 1), \quad (13)$$

и наш следующий шаг – ограничить сверху правую часть этого неравенства с помощью функций $\Delta(\cdot, \cdot)$ из (12).

Обозначим $[x]_+ = \max\{0, x\}$, и воспользовавшись элементарным неравенством

$$\min_x [f(x) + g(x)] \leq \max_x f(x) + \min_x g(x),$$

продолжим (13) следующим образом:

$$\begin{aligned}
|b(\omega)| &\leq \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^N(\omega, \omega')} \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} [|b(w_{k+1}) - b(w_k)| - u(w_{k+1} - w_k)]_+ + \right. \\
&\quad \left. + \bar{b}(\omega' + 1) + \sum_{k=1}^{N-1} u(w_{k+1} - w_k) \right\} \leq \\
&\leq \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^N(\omega, \omega')} \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} [|b(w_{k+1}) - b(w_k)| - u(w_{k+1} - w_k)]_+ \right\} + \\
&\quad + \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^N(\omega, \omega')} \left\{ \bar{b}(\omega' + 1) + \sum_{k=1}^{N-1} u(w_{k+1} - w_k) \right\} \leq \\
&\leq \max_{\omega' \geq \omega} \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^N(\omega, \omega')} \left\{ \sum_{k=1}^{N-1} [|b(w_{k+1}) - b(w_k)| - u(w_{k+1} - w_k)]_+ \right\} + \\
&\quad + \min_{\omega' \geq 1} \{ \bar{b}(\omega + \omega') + u(\omega') \}. \tag{14}
\end{aligned}$$

Заметим, что первое слагаемое в правой части этого неравенства можно выразить через величины $\Delta(\omega_{k+1}, \omega_k)$, а второе – нет. Поэтому единственное, что можно сделать в такой ситуации, это минимизировать по ω функцию

$$\max_{\omega' > \omega} \{ \tilde{b}^N(\omega) + p(\omega) \},$$

где

$$\tilde{b}^N(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^N(\omega)} \sum_{k=1}^{N-1} [|b(w_{k+1}) - b(w_k)| - u(w_{k+1} - w_k)]_+.$$

Таким образом, приходим к следующему методу минимизации $|b(\omega)| + p(\omega)$:

$$\omega^* = \arg \min_{\omega} \{ \tilde{b}^N(\omega) + p(\omega) \}.$$

Для этого алгоритма в силу (14) справедливо

Предложение. Для ω^* справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
|b(\omega^*)| + p(\omega^*) &\leq \\
&\leq \min_{\omega} \left\{ \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^N(\omega)} \sum_{k=1}^{N-1} |b(w_{k+1}) - b(w_k)| + p(\omega) \right\} + \min_{\omega} \{ \bar{b}(\omega + 1) + u(\omega) \}.
\end{aligned}$$

Доказательство. При $\omega = \omega^*$ для первого слагаемого в правой части (14) справедлива тривиальная граница сверху

$$\begin{aligned}
&\max_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^N(\omega^*)} \sum_{k=1}^{N-1} [|b(w_{k+1}) - b(w_k)| - u(w_{k+1} - w_k)]_+ \leq \\
&\leq \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^N(\omega^*)} \sum_{k=1}^{N-1} [|b(w_{k+1}) - b(w_k)|],
\end{aligned}$$

а последнее слагаемое в (14) в силу монотонности $\bar{b}(\omega)$ оценивается сверху как

$$\min_{\omega' \geq 1} \{ \bar{b}(\omega^* + \omega') + u(\omega') \} \leq \min_{\omega} \{ \bar{b}(\omega + 1) + u(\omega) \}. \quad \blacktriangle$$

Чтобы использовать этот подход для минимизации $|B(\omega; \theta)| + \sigma V_h(\omega)$ по наблюдениям Y , возьмем

$$b(\omega) = B(\omega; \theta), \quad p(\omega) = \sigma V_h(\omega),$$

и пусть $\bar{B}(\omega; \theta)$ – любая невозрастающая огибающая $|B(\omega; \theta)|$.

Тогда в силу сказанного выше справедлива следующая граница сверху:

$$|B(\omega; \theta)| \leq \max_{\omega \in \mathcal{W}^N(\omega)} \sum_{s=1}^{N-1} \varphi[\Delta L(w_s; \theta); u(\Delta w_s)] + \min_{\omega} \{ \bar{B}(\omega; \theta) + u(\omega) \}; \quad (15)$$

здесь

- $\Delta L(w_s; \theta) = L(w_{s+1}; \theta) - L(w_s; \theta)$,
- $\Delta w_s = w_{s+1} - w_s$,
- $u(x): \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ – любая неубывающая функция, такая что $u(0) = 0$.

Функцию

$$\varphi(x, t) = [|x| - t]_+, \quad x \in \mathbb{R},$$

часто называют мягким пороговым ограничением (soft thresholding), а параметр $t > 0$ – порогом. В статистике она обычно возникает и используется при оценивании разреженных векторов. Эта функция обладает простыми, но полезными свойствами. Например,

$$\begin{aligned} \min_{|\xi| \leq t} \varphi(x + \xi; t) &= \varphi(x; 2t), \\ \max_{|\xi| \leq t} \varphi(x + \xi; t) &= \varphi(x; 0) = |x|. \end{aligned}$$

Далее потребуется несколько более общий факт, обобщающий эти тождества, а именно следующая

Лемма 2. Справедливы неравенства

$$\varphi(x; 2t) - \varphi(\xi; t) \leq \varphi(x + \xi; t) \leq \varphi(x; 0) + \varphi(\xi; t).$$

Из вероятностных свойств мягкого порогового ограничения будет нужен только один простой результат.

Лемма 3. Пусть $W(\cdot)$ – стандартный винеровский процесс. Тогда

$$\mathbf{E} \sup_{\substack{\omega_2, \omega_1 \in \Omega_h \\ \omega_2 \geq \omega_1}} \varphi[W(\omega_2) - W(\omega_1); V_h(\omega_2 - \omega_1)] \leq CK_h^2,$$

где величина K_h определена в (9), а C – некоторая константа.

Основная идея в этой статье – использовать первое слагаемое в правой части неравенства (15) для выбора частоты среза на основе наблюдений. Взяв $u(\omega) = \sigma V_h(\omega)$ и заменив величины $\Delta L(w_s; \theta)$ их несмещенными оценками

$$\Delta \hat{L}(w_s; \theta) = \hat{L}(w_{s+1}; Y) - \hat{L}(w_s; Y) = \Delta L[w_s; \theta] + \sigma[W(w_{s+1}) - W(w_s)],$$

придем к

$$\widehat{\omega}^N(Y) = \arg \min_{\omega \in \Omega_h} \left\{ \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^N(\omega)} \sum_{s=1}^{N-1} \varphi[\Delta \widehat{L}(w_s; Y); \sigma V_h(\Delta w_s)] + \sigma V_h(\omega) \right\}. \quad (16)$$

Оценка линейного функционала $L(\theta)$ вычисляется, естественно, как

$$\widehat{L}^N(Y) = \widehat{L}[\widehat{\omega}^N(Y); Y]. \quad (17)$$

Задача контроля риска этого метода имеет довольно простое решение. Дело в том, что с помощью лемм 2 и 3 она сводится к детерминированному случаю. Точнее, из этих результатов сразу же вытекают следующие неравенства:

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left\{ \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^N(\widehat{\omega}^N)} \sum_{s=1}^{N-1} \varphi[\Delta \widehat{L}(w_s; \theta); \sigma V_h(\Delta w_s)] + \sigma V_h(\widehat{\omega}^N) \right\} \geq \\ & \geq \mathbf{E} \left\{ \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^N(\widehat{\omega}^N)} \sum_{s=1}^{N-1} \varphi[\Delta L(w_s; \theta); 2\sigma V_h(\Delta w_s)] + \sigma V_h(\widehat{\omega}^N) \right\} - C(N-1)\sigma K_h^2 \end{aligned}$$

и в силу (16) для любого $\omega \in \Omega_h$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left\{ \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^N(\widehat{\omega}^N)} \sum_{s=1}^{N-1} \varphi[\Delta \widehat{L}(w_s; \theta); \sigma V_h(\Delta w_s)] + \sigma V_h(\widehat{\omega}^N) \right\} \leq \\ & \leq \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^N(\omega)} \sum_{s=1}^{N-1} |\Delta L(w_s; \theta)| + \sigma V_h(\omega) + C(N-1)\sigma K_h^2. \end{aligned}$$

Поэтому очевидно, что для любого $\omega \in \Omega_h$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left\{ \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^N(\widehat{\omega}^N)} \sum_{s=1}^{N-1} \varphi[\Delta L(w_s; \theta); 2\sigma V_h(\Delta w_s)] + \sigma V_h(\widehat{\omega}^N) \right\} \leq \\ & \leq \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^N(\omega)} \sum_{s=1}^{N-1} |\Delta L(w_s; \theta)| + \sigma V_h(\omega) + CN\sigma K_h^2. \end{aligned}$$

Отсюда и из (10) и (15) с $u(\omega) = 2\sigma V_h(\omega)$ получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} |L(\theta) - \widehat{L}^N(Y)| \leq \\ & \leq \mathbf{E} \left\{ \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^N(\widehat{\omega}^N)} \sum_{s=1}^{N-1} \varphi[\Delta L(w_s; \theta); 2\sigma V_h(\Delta w_s)] + \sigma V_h(\widehat{\omega}^N) \right\} + \\ & + \min_{\omega \in \Omega_h} \{ \bar{B}(\omega; \theta) + 2\sigma V_h(\omega) \} + \sigma K_h \leq \\ & \leq \min_{\omega \in \Omega_h} \left\{ \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^N(\omega)} \sum_{s=1}^{N-1} |\Delta L(w_s; \theta)| + \sigma V_h(\omega) \right\} + \\ & + \min_{\omega \in \Omega_h} \{ \bar{B}(\omega; \theta) + 2\sigma V_h(\omega) \} + CN\sigma K_h^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Более компактная, но несколько более грубая версия этого неравенства представлена в следующей теореме. Определим огибающую $\bar{B}^N(\omega; \theta)$ следующим образом:

$$\bar{B}^N(\omega; \theta) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\omega'' > \omega' > \omega} \left\{ \max_{w \in \mathcal{W}^N(\omega', \omega'')} \sum_{s=1}^{N-1} |\Delta L(w_s; \theta)| + |B(w''; \theta)| \right\}.$$

Теорема 1. Для риска оценки $\hat{L}^N(Y)$, определенной в (16), (17), справедливо неравенство

$$\mathbb{E}|L(\theta) - \hat{L}^N(Y)| \leq 3 \min_{\omega \in \Omega_h} \{ \bar{B}^N(\omega; \theta) + \sigma V_h(\omega) \} + CN\sigma K_h^2. \quad (19)$$

Доказательство вытекает практически непосредственно из (18). \blacktriangle

Замечание 1. По-видимому, константу 3 в (19) можно уменьшить (сделать близкой к 1), но для этого потребуются более сложные вероятностные методы, чем используемые в этой статье.

Замечание 2. Если формально интерпретировать неравенство (19), то оно кажется в некоторой степени абсурдным, потому что чем больше N , тем хуже граница сверху, и самая лучшая граница получается при $N = 2$. На самом деле ситуация не столь очевидна. Дело в том, что эта граница является заведомо завышенной, и если бы мы попытались ее улучшить (уменьшить постоянную 3 в (19)), то увидели бы “правильную” зависимость от N . Результаты моделирования в следующем параграфе подтверждают эту гипотезу.

Замечание 3. Для огибающей $\bar{B}^N(\omega; \theta)$ справедлива простая граница сверху

$$\bar{B}^N(\omega; \theta) \leq \sum_{k=\omega+1}^{\infty} |\theta_k|.$$

Ее достаточно для доказательства многих классических минимаксных теорем, например, для множеств Θ , определенных в (3). Но если рассматривать байесовскую постановку задачи, т.е. считать θ_k случайными величинами с нулевым средним, то она может привести к плохой верхней границе для риска.

§ 3. Моделирование

Практическое сравнение непараметрических методов оценивания является условно сложной задачей, не имеющей однозначно хорошего решения. Ее трудность связана прежде всего с тем, что рассматриваемая статистическая модель описывается многомерным параметром.

Грубо говоря, подход, который наиболее часто встречается в литературе по математической статистике, состоит в том, что выбирается от двух до двенадцати многомерных параметров θ , и для них методом Монте-Карло (как правило, с небольшим объемом выборки) вычисляются риски сравниваемых методов оценок. При таком подходе очевидно, что сказать что-либо определенное о том, как поведут себя сравниваемые методы при других параметрах, довольно затруднительно.

Чтобы охватить как можно более широкий класс неизвестных параметров, в этой статье для сравнения оценок будем использовать байесовский подход. Как хорошо известно, только он позволяет сравнивать статистические методы математически. Наряду с этим неоспоримым преимуществом существенный недостаток байесовского подхода заключается в том, что он зависит от априорного распределения многомерного параметра. Поскольку очевидно, что никаких сколько-нибудь существенных

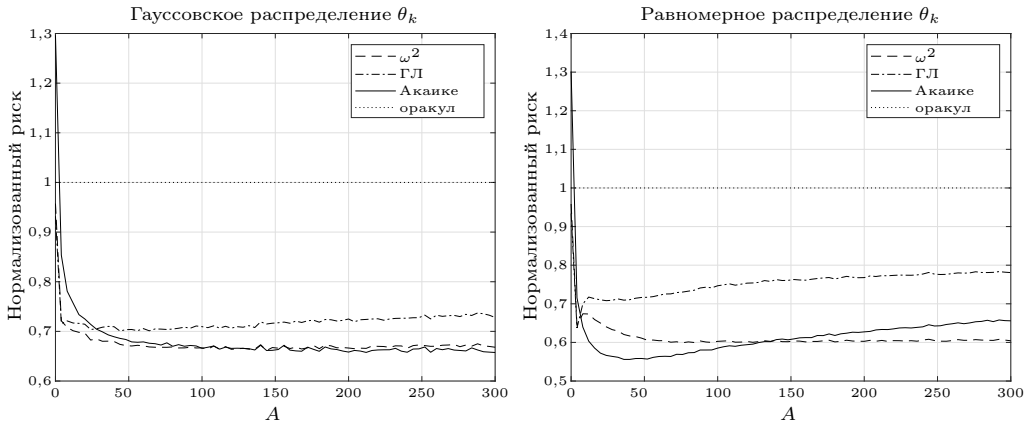


Рис. 1. Нормированные риски адаптивных частот среза при $\beta = 2$. Левый график – гауссовское распределение θ_k , правый – равномерное

аргументов в пользу выбора того или иного априорного распределения не существует, мы будем рассматривать классы априорных распределений.

Конкретно, в этой статье для сравнения статистических методов используется следующая стохастическая модель для θ_k : эти величины предполагаются независимыми и представимыми в виде

$$\theta_k = \frac{A}{k^\beta} \zeta_k,$$

где ζ_k – случайные величины, имеющие либо стандартное гауссовское, либо равномерное распределение. Параметр β характеризует скорость убывания θ_k , а A – их амплитуду. Таким образом, мы описываем бесконечномерный параметр θ с помощью пары положительных чисел $A \geq 0$ и $\beta > 1$. Для простоты будем считать, что $\sigma = 1$, но при этом изменять величину A , которая в этом случае играет роль отношения сигнал/шум, будем в достаточно широком диапазоне.

Далее сравним с помощью байесовского подхода три следующих метода адаптивного, т.е. основанного на наблюдениях, выбора частоты среза:

1. Метод Акаике $\hat{\omega}_A(Y)$ из (6).
2. Метод, предложенный Гольденшлюгером и Лепским (ГЛ) в [5].
3. Оценки $\hat{L}^2(Y)$ и $\hat{L}^3(Y)$ из (16), (17).

То, что метод Акаике можно применять не только для оценивания векторов, но также и линейных функционалов, было показано в [7]. При этом принципиально важно, чтобы θ_k были случайными величинами с нулевым средним.

В методе ГЛ частота среза вычисляется как

$$\hat{\omega}_{GL}(Y) = \arg \min_w \left\{ \max_{w' > w} [L(w'; Y) - L(w; Y)] - \sigma V_h(w') \right\}_+ + \sigma V_h(w).$$

Отметим, что мы немного упростили и оптимизировали оригинальный метод из [5]. При этом была использована работа [8].

На рис. 1 показаны нормированные риски трех описанных выше методов выбора частоты среза, а именно $\hat{\omega}_A(Y)$, $\hat{\omega}_{GL}(Y)$ и $\hat{\omega}^2(Y)$ как функции от амплитуды A при $\beta = 2$. В качестве нормировки был использован риск частоты среза $\omega_o(\theta)$ из (11), выбираемой оракулом. Другими словами, для каждого из описанных выше методов

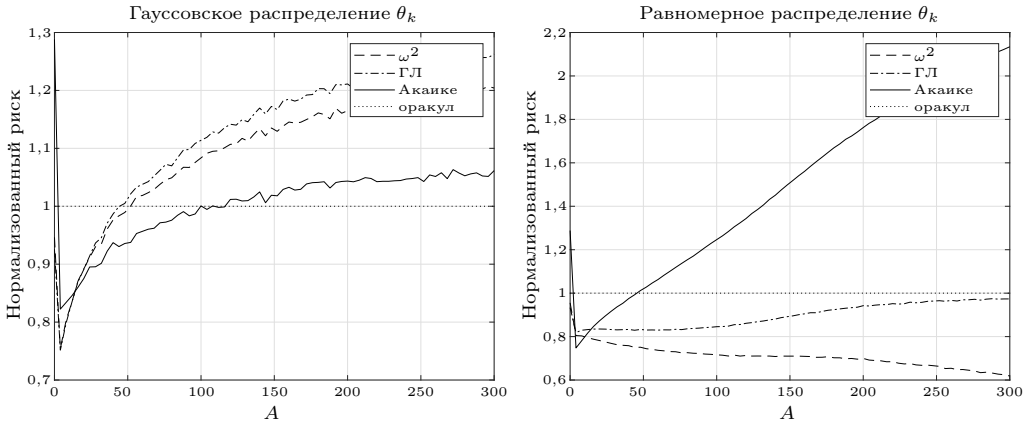


Рис. 2. Нормированные риски адаптивных частот среза при $\beta = 1,1$. Левый график – гауссовское распределение θ_k , правый – равномерное

на этом рисунке показаны графики функций

$$\rho(A) = \frac{\mathbf{E}|L(\theta) - \widehat{L}[\widehat{\omega}(Y); Y]|}{\mathbf{E}|L(\theta) - \widehat{L}[\omega_o(\theta); Y]|};$$

здесь математическое ожидание вычисляется по совместному распределению случайных величин $Y_k, \theta_k, k = 1, 2, \dots$, с помощью метода Монте-Карло с объемом выборки $3 \cdot 10^4$. Из этого рисунка, в частности, видно, что все три метода практически эквивалентны. Они в некотором смысле являются суперэффективными, так как выбирают частоту среза лучше, чем это делает оракул. К сожалению, этот эффект невозможно объяснить на основе результатов статьи. Он связан с тем, что θ_k случайны.

На рис. 2 показаны те же самые нормированные риски, но при $\beta = 1,1$. Мы видим, что при гауссовских θ_k метод Акаике является лучшим, что в силу результатов [7] неудивительно. В случае же равномерного распределения его оптимальность естественно теряется, так как в этом случае θ_k уже не имеют нулевого среднего.

Завершим этот параграф кратким сравнением оценок $\widehat{L}^2(Y)$ и $\widehat{L}^3(Y)$. Из правого графика на рис. 2 видно, что оценка $\widehat{L}^2(Y)$ проигрывает методу Акаике при гауссовских ζ_k и $\beta = 1,1$. Естественный вопрос – что будет происходить, если вместо этой оценки использовать $\widehat{L}^3(Y)$? Как видно из левого графика на рис. 3, оценка $\widehat{L}^3(Y)$ оказывается лучше, чем $\widehat{L}^2(Y)$. При этом надо отметить, что, во-первых, реальное улучшение не очень велико, а во-вторых, вычислительная сложность $\widehat{L}^3(Y)$ существенно выше. Поэтому оценки $\widehat{L}^N(Y)$ при $N > 3$ представляют скорее теоретический интерес. Для большинства практических задач $\widehat{L}^2(Y)$ и $\widehat{L}^3(Y)$ являются разумными компромиссами между статистическим качеством и вычислительной сложностью.

§ 4. Некоторые возможные обобщения

В этом параграфе кратко обсудим некоторые практически очевидные обобщения рассмотренной задачи, которые не влекут кардинального изменения предлагаемого метода оценивания.

1. Статистическая модель. Сама по себе статистическая модель (1) практически никогда не возникает в реальных статистических задачах. По существу, она пред-

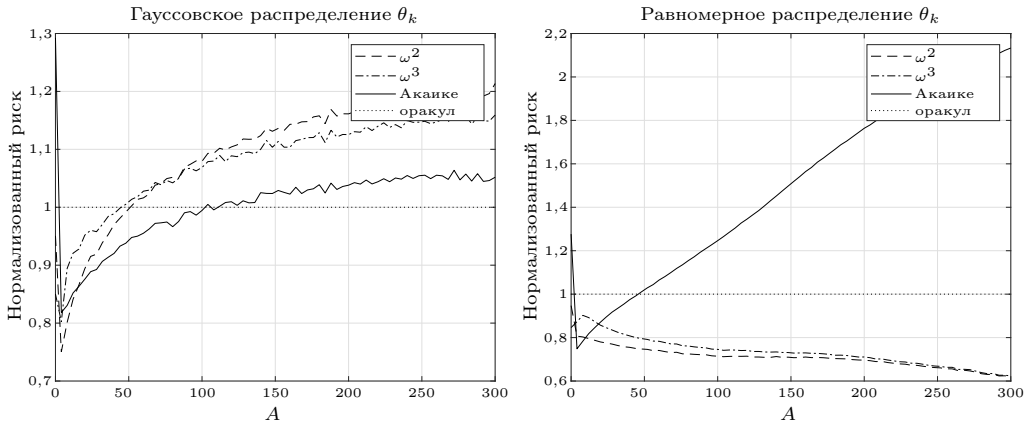


Рис. 3. Сравнение рисков оценок $\widehat{L}^2(Y)$, $\widehat{L}^3(Y)$ и метода Акаике при $\beta = 1,1$. Левый график – гауссовское распределение θ_k , правый – равномерное

ставляет собой так называемое спектральное представление линейных моделей большой размерности, имеющих очень широкие практические применения. Речь идет о моделях, в которых наблюдаемые данные $Z \in \mathbb{R}^n$ описываются следующей вероятностной моделью:

$$Z = X\beta + \sigma\xi, \quad (20)$$

где X – известная $(n \times m)$ -матрица, $\beta \in \mathbb{R}^m$ – неизвестный вектор, а ξ – стандартный дискретный белый гауссовский шум. При этом размерности n и m , как правило, велики и таковы, что $n \geq m$. В частности, они могут быть равны ∞ .

Эта модель приводится к (1) с помощью метода главных компонент. А именно, пусть $e_k \in \mathbb{R}^m$ и $\lambda_k \in \mathbb{R}^+$ – соответственно, собственные векторы и собственные числа матрицы $X^\top X$:

$$X^\top X e_k = \lambda_k e_k, \quad k = 1, \dots, m.$$

Для определенности будем считать, что

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m.$$

Тогда

$$X^\top X = \sum_{k=1}^m \lambda_k e_k e_k^\top$$

и

$$X^\top Z = \sum_{k=1}^m \lambda_k e_k \langle e_k, \beta \rangle + \sigma\xi;$$

здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в \mathbb{R}^m .

Поэтому для $Y_k = \langle e_k, X^\top Z \rangle$ получаем следующее представление:

$$Y_k = \lambda_k \langle e_k, \beta \rangle + \sigma\xi_k, \quad k = 1, \dots, m,$$

и положив

$$\theta_k = \lambda_k \langle e_k, \beta \rangle, \quad (21)$$

приходим к (1).

2. Линейные функционалы. Прежде всего заметим, что в доказательстве теоремы 1 практически ничего не изменится, если вместо линейного функционала $L(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k$ оценивать линейный функционал

$$L(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} l_k \theta_k, \quad (22)$$

где l_k таковы, что для всех ω

$$c\omega \leq \sum_{k=1}^{\omega} l_k^2 \leq C\omega; \quad (23)$$

здесь и далее c, C – некоторые строго положительные постоянные. При этом надо, естественно, сделать замену (см. (8))

$$V_h(t) \rightarrow V_h\left(\sum_{k=1}^t l_k^2\right).$$

Для линейной модели (20) семейство линейных функционалов из (22), (23) допускает следующее представление (см. (21)):

$$L_X(\beta) = \sum_{k=1}^m l_k \lambda_k \langle e_k, \beta \rangle = \sum_{k=1}^m l_k \langle e_k, X^T X \beta \rangle = \langle l, X^T X \beta \rangle,$$

где вектор $l \in \mathbb{R}^+$ таков, что

$$cs \leq \sum_{k=1}^s \langle l, e_k \rangle^2 \leq Cs.$$

3. Семейства оценок. Чтобы использовать проекционные оценки для оценивания линейных функционалов в модели (20), необходимо вычислять собственные векторы большой матрицы $X^T X$. Эта и так достаточно непростая в вычислительном отношении задача станет очень сложной, если матрица $X^T X$ окажется плохо обусловленной.

Один из возможных подходов к решению этой проблемы состоит в замене проекционных оценок на упорядоченные [3]. Это несколько более общий класс статистических методов, и в нем уже содержатся оценки, которые по своим статистическим свойствам так же хороши, как и проекционные, но не требуют применения метода главных компонент.

Очень кратко, упорядоченная оценка вектора β имеет вид

$$\hat{\beta}(\alpha; Y) = H(X^T X, \alpha)(X^T X)_+^{-1} X^T Y;$$

здесь

- $(X^T X)_+^{-1}$ – псевдообратная матрица к $(X^T X)$;
- $H(X^T X, \alpha)$ – некоторая специальная матрица, которая зависит от сглаживающего параметра $\alpha \in \mathbb{R}^+$ и допускает следующее представление:

$$H_\alpha(X^T X, \alpha) = \sum_{k=1}^m H(\lambda_k, \alpha) e_k e_k^T.$$

При этом функция $H(\cdot, \alpha): \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ такова, что при любых фиксированных $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$ и всех $\lambda \in \mathbb{R}^+$

$$\text{либо } H(\lambda, \alpha_1) \leq H(\lambda, \alpha_2), \text{ либо } H(\lambda, \alpha_1) \geq H(\lambda, \alpha_2).$$

Кроме того, как правило,

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} H(\lambda, \alpha) &= 0, & \alpha > 0, \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} H(\lambda, \alpha) &= 1, & \lambda > 0. \end{aligned}$$

Оценки $\widehat{\beta}(\alpha; Y)$ порождают, естественно, следующее семейство оценок линейного функционала $L_X(\beta)$:

$$\widehat{L}_X(\alpha; Y) = \langle \widehat{\beta}(Y; \alpha), X^\top X l \rangle, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Метод выбора наилучшей оценки в этом семействе совершенно аналогичен рассмотренному ранее. Для его статистического анализа требуются некоторые дополнительные свойства упорядоченных оценок, которые можно найти, например, в [3] или [9].

4. Функция потерь. В этой статье качество оценивания линейного функционала измерялось величиной $\mathbf{E} |\widehat{L}(Y) - L(\theta)|$. Переход к другим потерям, например, к $\mathbf{E} |\widehat{L}(Y) - L(\theta)|^p$, $p \geq 1$, не влечет принципиальных и больших изменений. Единственное, что меняется, – это функция $V_h(t)$. Новая функция $V_{h,p}(t)$ будет теперь определяться из условия (см. лемму 3)

$$\mathbf{E} \sup_{\substack{\omega_2, \omega_1 \in \Omega_h \\ \omega_2 \geq \omega_1}} \left\{ \varphi [W(\omega_2) - W(\omega_1); V_{h,p}(\omega_2 - \omega_1)] \right\}^p \leq (CK_h^2)^p.$$

Ее вычисление очень просто, и мы его опустим.

§ 5. Доказательства

Доказательство леммы 1. Воспользуемся тривиальным неравенством

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{t \in \Omega_h} [|W(t)| - V_h(t)]_+ &\leq \sum_{t \in \Omega_h} \mathbf{E} [|W(t)| - V_h(t)]_+ \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\omega_k} \mathbf{E} [|\xi| - \sqrt{v_h(\omega_k)}]_+; \end{aligned} \quad (24)$$

здесь ξ – стандартная гауссовская случайная величина.

Далее применим известное неравенство

$$\mathbf{E} [|\xi| - x]_+ \leq \frac{2}{x^2 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

которое нетрудно проверить с помощью интегрирования по частям.

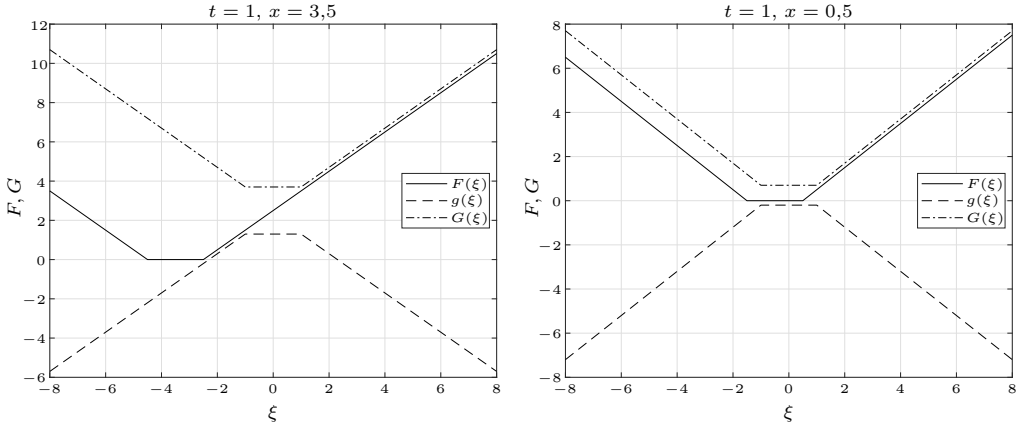


Рис. 4. Графики функций $F(\xi)$, $g(\xi)$ и $G(\xi)$ при $t = 1$, $x = 3,5$ и при $t = 1$, $x = 0,5$

Обозначив для краткости $\varepsilon = 1/\log(1 + 1/h)$, с помощью этого неравенства продолжим (24) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{t \in \Omega_h} [|W(t)| - V_h(t)]_+ &\leq K \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\omega_k}}{v_h(\omega_k)} \exp\left[-\frac{v_h(\omega_k)}{2}\right] \leq \\ &\leq K \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[\log(\omega_k)]^{1+\varepsilon}} \leq K \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(hk)^{1+\varepsilon}} \leq \frac{K}{\varepsilon h^{1+\varepsilon}} \leq \frac{K \log(1 + 1/h)}{h}. \quad \blacktriangle \end{aligned} \quad (25)$$

Доказательство леммы 2. Рассмотрим следующие функции:

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \varphi(x + \xi; t), \\ g(\xi) &= \varphi(x; 2t) - \varphi(\xi; t), \\ G(\xi) &= \varphi(x; 0) + \varphi(\xi; t). \end{aligned}$$

Проще всего проверить, что $g(\xi) \leq F(\xi) \leq G(\xi)$, посмотрев на графики этих функций на рис. 4. \blacktriangle

Доказательство леммы 3 практически аналогично доказательству леммы 1 и приводится здесь только для полноты изложения. Пусть, как и ранее, $\varepsilon = \log^{-1}(1 + h^{-1})$. Тогда аналогично (25) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \sup_{\omega \in \Omega_h} \sup_{t > \omega} \varphi[W(t) - W(\omega); \sqrt{(t - \omega)v_h(t - \omega)}] &\leq \\ &\leq \mathbf{E} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k > s} \varphi[W(\omega_k) - W(\omega_s); \sqrt{(\omega_k - \omega_s)v_h(\omega_k - \omega_s)}]_+ = \\ &= C \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{\sqrt{\omega_k - \omega_s}}{v_h(\omega_k - \omega_s)} \exp\left[-\frac{v_h(\omega_k - \omega_s)}{2}\right] \leq \\ &\leq C \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{1}{[\log(\omega_k - \omega_s)]^{1+\varepsilon}} \leq C \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{1}{\log^{1+\varepsilon}[(1+h)^k - (1+h)^s]} \leq \\ &\leq C \left[\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(hs)^{1+\varepsilon}} \right]^2 \leq \frac{C}{\varepsilon^2 h^{2+2\varepsilon}} = CK_h^2. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

В заключение автор хотел бы поблагодарить рецензента за сделанные замечания, способствовавшие улучшению статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ибрагимов И.А., Хасъминский Р.З.* О непараметрическом оценивании значения линейного функционала в гауссовском белом шуме // Теория вероятн. и ее примен. 1984. Т. 29. № 1. С. 19–32.
2. *Akaike H.* Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle // Proc. 2nd Int. Symp. on Information Theory. Tsaghkadsor, Armenia, USSR. Sept. 2–8, 1971. Budapest: Akad. Kiadó, 1973. P. 267–281.
3. *Kneip A.* Ordered Linear Smoothers // Ann. Statist. 1994. V. 22. № 2. P. 835–866.
4. *Лепский О.В.* Об одной задаче адаптивного оценивания в гауссовском белом шуме // Теория вероятн. и ее примен. 1990. Т. 35. № 3. С. 459–470.
5. *Goldenshluger A., Lepski O.* Universal Pointwise Selection Rule in Multivariate Function Estimation // Bernoulli. 2008. V. 14. № 4. P. 1150–1190.
6. *Laurent B., Ludeña C., Prieur C.* Adaptive Estimation of Linear Functionals by Model Selection // Electron. J. Stat. 2008. V. 2. P. 993–1020.
7. *Golubev Yu., Levit B.* An Oracle Approach to Adaptive Estimation of Linear Functionals in a Gaussian Model // Math. Methods Statist. 2004. V. 13. № 4. P. 392–408.
8. *Lacour C., Massart P.* Minimal Penalty for Goldenshluger–Lepski Method // Stochastic Process. Appl. 2016. V. 126. № 12. P. 3774–3789.
9. *Голубев Г.К.* Концентрации рисков выпуклых комбинаций линейных оценок // Пробл. передачи информ. 2016. Т. 52. № 4. С. 31–48.

Голубев Георгий Ксенофонович
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича РАН
golubev.yuri@gmail.com

Поступила в редакцию
14.02.2020
После доработки
25.02.2020
Принята к публикации
28.02.2020

Р е д к о л л е г и я :

Главный редактор Л.А. БАССАЛЫГО

**Члены редколлегии: А.М. БАРГ, В.А. ЗИНОВЬЕВ, В.В. ЗЯБЛОВ,
И.А. ИБРАГИМОВ, Н.А. КУЗНЕЦОВ (зам. главного редактора),
В.А. МАЛЫШЕВ, Д.Ю. НОГИН (ответственный секретарь),
В.М. ТИХОМИРОВ, Ю.Н. ТЮРИН, Б.С. ЦЫБАКОВ**

Зав. редакцией *С.В. ЗОЛОТАЙКИНА*

Адрес редакции: 127051, Москва, Б. Каретный пер., 19, стр. 1, тел. (495) 650-47-39

Оригинал-макет подготовил *Д.Ю. Ногин*
по контракту с ООО «ИКЦ «АКАДЕМКНИГА»

Москва
ООО «ИКЦ «АКАДЕМКНИГА»