



*Российская Академия Наук*

# **А Т АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА**

**Журнал основан в 1936 году**

**Выходит 12 раз в год**

**7**

**И Ю Л Ъ**

**Москва**

**2021**

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,  
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),  
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

**Главный редактор:**

Галяев А.А.

**Заместители главного редактора:**

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

**Ответственный секретарь:**

Родионов И.В.

**Редакционный совет:**

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,  
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Поляк Б.Т., Попков Ю.С.,  
Рутковский В.Ю., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

**Редакционная коллегия:**

Алескерев Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М.,  
Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф.,  
Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П.,  
Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,  
Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М.,  
Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),  
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,  
Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А.,  
Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталеv М.М., Цыбаков А.Б. (Франция),  
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: (495) 334-87-70

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ООО «Объединённая редакция»



**СТАНИСЛАВ НИКОЛАЕВИЧ ВАСИЛЬЕВ**  
(к 75-летию со дня рождения)

**DOI:** 10.31857/S0005231021070011

5 июля 2021 г. исполняется 75 лет со дня рождения академика РАН Васильева Станислава Николаевича.

С.Н. Васильев родился в 1946 г. в городе Торез (Чистяково) Донецкой области. В 1964 г. окончил среднюю школу в Казани (с золотой медалью), в 1970 г. – Казанский авиационный институт им. А.Н. Туполева (с отличием и рекомендацией в аспирантуру). В 1975 г. приглашен в организуемый в Иркутске Отдел теории систем и кибернетики при Сибирском энергетическом институте СО АН СССР, возглавляемый зам. директора СЭИ, д.ф.-м.н., позднее академиком, В.М. Матросовым.

В 1980 г. в созданном на базе этого Отдела Иркутском ВЦ СО АН СССР (в 1997 г. ИрВЦ реорганизован в Институт динамики систем и теории управления СО РАН, ныне им. В.М. Матросова) прошел этапы работы от зав. лабораторией и зав. отделом до зам. директора по науч. работе, а с 1991 по 2006 гг. работал в должности директора института.

Переехав в Москву, с 2006 по 2016 гг. возглавлял Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ныне — г.н.с.).

С.Н. Васильев – автор и соавтор более 400 научных работ. Он внес мировой вклад во многие разрабатываемые им направления: математическая теория систем, динамика и управление в нелинейных и логико-динамических

системах, автоматизация исследований, проектирования и управления, интеллектуальное управление, многокритериальное принятие решений, управление развитием эколого-экономических и др. систем. Им разработаны методы редукции в анализе моделей разной природы, в том числе при наличии неопределенностей и возмущений, с приложениями к управлению механическими системами и группировками движущихся объектов, к анализу динамики автоматных сетей и асинхронных переключательных схем. Созданные им логические методы представления и обработки знаний имеют широкое применение в приложениях к проблемам интеллектуализации систем управления, принятия решений и диагностики. Разработанные им методы векторной оптимизации с минимальными требованиями к априорной информации, методы гармонизации интересов сторон, в том числе в задачах регионального развития, легли в основу оригинальных программных продуктов. Научные достижения С.Н. Васильева отмечены его избранием в 1997 г. чл.-корр. РАН, а в 2006 г. – академиком РАН.

С.Н. Васильев неоднократно приглашался в ведущие зарубежные исследовательские центры и университеты для чтения лекций и работы в совместных научных проектах. На протяжении многих лет руководил рядом научных тем, в том числе международными грантами, ведущей научной школой по устойчивости и управлению в гетерогенных моделях динамических и интеллектуальных систем. Многократно приглашался с пленарными докладами на авторитетные российские и международные конференции и являлся председателем программных комитетов и организатором ряда таких конференций.

В 1976–2006 гг. он работал по совместительству профессором и заведующим кафедрами Иркутского и Бурятского госуниверситетов, заведующим (2007–2009) и профессором (2009–2016) кафедры МФТИ. В 2009 г. С.Н. Васильев основал кафедру “Физико-математических методов управления” на Физическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова, которой руководил до 2017 г. Им подготовлено более 20 кандидатов и докторов наук.

Научная, педагогическая, научно-организационная деятельность С.Н. Васильева отмечена званиями лауреата Государственной премии СССР в области науки и техники, Премией Правительства РФ в области образования, Премией Правительства РФ в области науки и техники и премией РАН в области фундаментальных исследований, орденами Почета, Дружбы и другими государственными и научными наградами, грамотами и благодарностями.

Станислав Николаевич Васильев с января 2014 г. по июнь 2020 г. был Главным редактором журнала “Автоматика и телемеханика”.

Коллеги, друзья, коллектив Института проблем управления РАН и редколлегия журнала “Автоматика и телемеханика” сердечно поздравляют Станислава Николаевича Васильева с юбилейной датой и желают крепкого здоровья и новых творческих успехов!

© 2021 г. В.Н. БУРКОВ, д-р техн. наук (vlab17@br.ru),  
А.К. ЕНАЛЕЕВ, канд. техн. наук (anverena@mail.ru),  
Н.А. КОРГИН, д-р техн. наук (nkorgin@ipu.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## СОГЛАСОВАННОСТЬ И НЕМАНИПУЛИРУЕМОСТЬ МЕХАНИЗМОВ ОРГАНИЗАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ: ТЕКУЩЕЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ, РЕТРОСПЕКТИВА, ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ<sup>1</sup>

Описываются предпосылки появления такой ключевой для теории активных систем и теории механизмов (mechanism design), концепции, как проблема согласованности или совместимости со стимулами (incentive compatibility), проводится обзор подходов к решению данной проблемы, приведших к формулировке принципов открытого управления и открытости (revelation principle), а также актуальных направлений развития данной отрасли научного знания; обсуждаются потенциальные сложности и перспективы развития.

*Ключевые слова:* активные системы, дизайн механизмов, согласованность, совместимость со стимулами, принцип открытого управления, принцип откровенности, неманипулируемость, активное планирование.

DOI: 10.31857/S0005231021070023

### 1. Введение

В 2020 г. исполнилось 50 лет с момента появления в журнале «Автоматика и телемеханика» публикации [1], в которой В.Н. Бурков и А.Я. Лернер предложили подход к формированию оптимальных планов хозяйственной системы таким образом, чтобы плановые задания оказались оптимальными также и для отдельных подсистем. Свой подход они назвали принципом открытого управления (ОУ). Суть подхода была очень проста: при решении задачи планирования планирующий орган должен учитывать поступающую от подчиненных систем информацию об их предпочтениях, выбирая для них планы, наилучшие с точки зрения сообщенных предпочтений — так называемые взаимовыгодные планы. Сформулированный ими подход и его формализация были реакцией на предложения академика В.С. Немчинова об актуальности рассмотрения взаимовыгодных планов в задачах управления экономическими системами, высказанные им в [2] в 1964 г. В.Н. Бурковым и А.Я. Лернером было показано, что, если планы выбираются в соответствии с ОУ, то для нижестоящих систем (для которых был предложен термин активный элемент) действительно выгодно сообщать достоверную информацию о своих предпочтениях.

От этой работы ведет отсчет история краеугольных понятий в теории активных систем (ТАС) — согласованности и достоверности сообщаемой информации.

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-17-50190.

Следует отметить, что предложенный подход оказался в русле идущих в то время международных исследований, инициированных в 50–60 годы прошлого века известными экономистами того времени, такими как Поль Самуэльсон [3], Якоб Маршак [4], Кеннет Эрроу [5], и специалистами по теории игр, в первую очередь, Леонидом Гурвичем [6]. Уже в 1971 г. работа [1] должна была быть представлена на международной конференции по теории дифференциальных игр, в которой принимали участие такие известные на тот момент специалисты в области теории игр, как Гарольд Кунн и др. И кто знает, каким было бы дальнейшее развитие теории активных систем, если бы этот момент не совпал с началом драматических событий, связанных с желанием А.Я. Лернера переехать с семьей в Израиль, повлекшим за собой его увольнение из Института проблем управления и потерю возможности заниматься регулярной научной деятельностью [7]. Тем не менее доклад был опубликован в сборнике трудов конференции [8]. Но эта статья оказалась последней англоязычной публикацией по данному направлению на достаточно длительный период, за исключением ряда докладов на международных конгрессах IFAC, например [9].

Проблем согласования интересов в хозяйственной системе Советского Союза оказалось более чем достаточно, и внутри страны ТАС стала довольно быстро развиваться, превратившись в крупное научное направление, знакомое многим читателям журнала «Автоматика и телемеханика» в настоящее время также как теория управления организационными системами (ТУОС), систематически исследующее математические модели взаимодействия рациональных или ограниченно рациональных агентов в условиях асимметричной информации и нетривиального регламента их взаимодействия.

В настоящей обзорной статье акцентируется внимание на предпосылках появления такой ключевой концепции, как проблема совместимости со стимулами (*incentive compatibility*), или согласованности в задачах планирования, перечисляются подходы к решению данной проблемы, приведшие к формулировке принципов открытого управления и откровенности (*revelation principle*).

Целью данного обзора не является перечисление текущего состояния научных исследований в ТАС, предоставляемого на регулярной основе в рамках одноименной конференции [10], или общего позиционирования ТАС относительно смежных научных направлений, см. [11].

Вне фокуса внимания данной статьи останется (в значительной мере) другой краеугольный камень фундамента ТАС — механизмы стимулирования и сопоставление результатов в этой области с близким научным направлением — теорией контрактов, см., например, [12], достаточно исчерпывающий обзор по данной проблематике представлен в [13].

Приведем структуру дальнейшего изложения материала.

Для структуризации и унификации подачи материала в разделе 2 будет описана модель активного планирования, предложенная в [14], на базе которой в разделе 3 будет показано, что, стартуя изначально с разных предпосылок в различных постановках задач, отечественные и западные исследователи пришли к схожим техникам решения поставленных задач. В частности то, что результаты об оптимальности неманипулируемых механизмов опира-

ются на применение абсолютно идентичной техники — исследование игр, порождаемых разными механизмами управления, и предъявление эквивалентности значения критерия эффективности в тех равновесиях, которые могут быть обнаружены в этих играх. А ограничения применимости результатов об оптимальности неманипулируемых механизмов, трактуемые несколько по-разному в отечественной и западной литературе, определяются ключевыми приемами данной техники эквивалентности.

Отталкиваясь от ретроспективной части обзора, в разделе 4 авторы сформулируют свое понимание текущего состояния исследований проблемы согласованности и неманипулируемости механизмов организационного управления, выделяют наиболее актуальные направления развития данной отрасли научного знания, обсудят потенциальные сложности.

В разделе 5 проводится критический анализ современного состояния теоретических исследований в области решения проблемы совместимости со стимулами и неманипулируемости механизмов принятия коллективных решений на основе ряда обзорных и постановочных статей, авторами которых являются известные специалисты в области теории реализуемости, дизайна механизмов и коллективного выбора.

Акцент будет сделан на сложностях, связанных как с чисто вычислительными вызовами, порождаемыми комбинаторной природой большинства теоретико-игровых концепций, так и с задачей поиска адекватного модельного языка для интеграции отдельных результатов теории синтеза механизмов.

## 2. Активное планирование

Формальная постановка задачи планирования может быть записана следующим образом.

Рассматривается двухуровневая организационная система (ОС), состоящая из одного руководящего органа — Центра, или Принципала в терминологии теории контрактов [15], и конечного числа подчиненных — активных элементов, или агентов. Обозначим через  $X$  множество допустимых значений *плана*  $x$  (набора планируемых параметров) для организационной системы, в качестве которого могут рассматриваться такие общепринятые величины, как объем работ, отобранные к реализации проекты или плановые показатели для программы развития, так и более специфичные понятия, такие как профиль предпочтений над некоторым множеством альтернатив, конкретные параметры контрактов и т.д. Обозначим через  $\Omega$  множество возможных значений *исходной информации*  $\omega$ , передаваемой агентами Центру (набора параметров, на основании которых определяется план).

Пусть для некоторого критерия эффективности планирования  $K(x, \omega)$  (например, минимизация затрат на производство, максимизация объема выпуска, максимизация суммарной полезности всех членов общества, максимизация индикатора принадлежности выбранного плана множеству Парето и т.д.) может быть найдена *целевая процедура планирования*  $f : \Omega \rightarrow X$ , оптимальная без учета активности агентов (далее *целевая процедура*):

$$f : K(f(\omega), \omega) \geq K(\tilde{x}, \omega), \forall \{\tilde{x}, \omega\} \in X \times \Omega.$$

Например, для экономики благосостояния (welfare economics) такими целевыми процедурами являются налог Линдаля [3] или расчет равновесия Вальраса [6].

С точки зрения «управляемости» ОС в ТАС сделано предположение, что целевая процедура должна быть *однозначной*, т.е. в случае, если для какого-либо  $\omega$  существует множество планов  $X^*(\omega) \subseteq X$ , оптимальных по критерию  $K$ , то процедура планирования должна обеспечивать выбор единственного плана  $x^* \in X^*(\omega)$ . В общем случае это не так: процедура может быть *многозначной*, определяя только  $X^*(\omega) \subseteq X$ , или быть стохастической, определяя некоторое вероятностное распределение на множестве возможных исходов.

В рамках предложенной в [14] *технологии активного планирования*, задача поиска процедуры  $f$  является первым этапом:

1. Синтез процедуры планирования, оптимальной по требуемому критерию в условиях пассивности подчиненных.

Заинтересованность агентов в определенных результатах планирования формализуется их *предпочтениями*, задаваемыми над множеством результатов планирования с учетом возможных состояний системы  $X \times \Omega$ , или *функциями полезности*  $u^i : X \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ , где  $i \in N$  – индекс агента,  $N$  – множество агентов. Класс возможных предпочтений или функций полезности  $i$ -го агента обозначим через  $U^i$ . Набор функций полезности агентов (*профиль предпочтений*) обозначим через  $u$ , а множество всех допустимых наборов через  $U = \times_{i \in N} U^i$ . Следует отметить, что истинный профиль  $u$  предпочтений может быть также не известен Центру, являясь частью  $\omega$ .

Особую роль играют процедуры планирования, которые являются *эффективными по Парето*, т.е.  $\forall u \in U, \forall \omega \in \Omega \nexists x \in X$ :

$$\exists i \in N : u^i(x, \omega) > u^i(f(\omega), \omega) \quad \text{и} \quad \nexists j \in N : u^j(x, \omega) < u^j(f(\omega), \omega).$$

Задачу планирования будем называть *индивидуальной*, если  $X = \times_{i \in N} X^i$  и  $\forall i \in N$   $u^i$  постоянна на  $X^{-i} = \times_{j \in N \setminus \{i\}} X^j$ , поэтому можно считать, что  $u^i : X^i \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Это означает, что набор планируемых параметров может быть декомпозирован на несколько подмножеств, от каждого из которых зависит целевая функция только соответствующего агента. Модель с одним агентом является классическим примером данного класса задач планирования [15].

Задачу планирования будем называть *смешанной*, если  $\exists \mathbb{N} \subseteq 2^N \setminus \emptyset : X = \times_{C \in \mathbb{N}} X^C : \forall C \in \mathbb{N}$  и  $\forall i \in C$   $u^i : \Omega \times X^C \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Это означает, что не все планируемые параметры представляют интерес для всех агентов. Классическим примером подобной задачи является задача определения уровня выпуска коллективного блага и распределения затрат на его производство [3].

Задачу планирования будем называть *коллективной*, если функция полезности каждого из агентов зависит от всех компонент вектора планов, т.е.  $\mathbb{N} = \{N\}$  и  $\forall i \in N$   $u^i : \Omega \times X \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Большинство классических задач коллективного выбора могут быть отнесены к данному классу [16].

Проблема проявления *активности* (целенаправленности поведения агентов, возможности самостоятельного принятия ими решений, выбора состояний и т.п.) формализуется следующим образом. При некоторых  $\omega$  и  $u$  может оказаться, что для некоторых агентов выгодно сообщение недостоверной

информации, поэтому Центр получает от агентов *искаженную информацию*  $\tilde{\omega} \neq \omega$ , что, в свою очередь, может привести к падению эффективности планирования. Именно на эту проблему указывали в 50-е годы прошлого столетия Поль Самуэльсон [3] и Якоб Маршак [4]. Считается, что систематическое изучение данной проблемы инициировал Леонид Гурвич в своей пионерской работе 1960 г. [6], положив начало направлению *mechanism design*, а позже в работе 1973 г. [17] сформулировав условие *совместимости со стимулами*: “Выгодно ли агентам с точки зрения своих индивидуальных интересов действовать так, как им предписывает процедура планирования?” И негативный результат состоит в том, что решения задачи максимизации коллективного благосостояния в экономике с индивидуальными благами не совместимы со стимулами для агентов достоверно раскрывать информацию о своих предпочтениях. При их применении у агентов возникает мотивация к искажению информации о своих предпочтениях.

Обозначим через преобразование  $\omega_f : \Omega \times U \rightarrow \Omega$  возможные искажения передаваемой информации агентами с учетом *их активности* (возможности использования имеющихся у них степеней свободы в рамках модели ОС и правил планирования в собственных интересах) при заданной процедуре планирования  $f$ . Если  $\omega_f \equiv \omega$ , то процедура планирования  $f$  является *совместимой со стимулами для раскрытия достоверной информации*, или *неманипулируемой*, т.е. *устойчивой к активности* агентов. В рамках технологии активного планирования задача определения преобразования  $\omega_f$  является вторым этапом:

2. Анализ полученной целевой процедуры на предмет ее устойчивости к проявлениям активности агентов.

Если  $\omega_f \neq \omega$ , то актуальным является вопрос, можно ли уменьшить потери, возникающие при планировании вследствие активности агентов. Для ответа на этот вопрос необходимо введение критерия, определяющего потери в ОС при  $\omega_f \neq \omega$ , например, можно использовать *критерий относительных потерь*  $\min_{\omega \in \Omega, u \in U} \frac{K(f(\omega_f(\omega, u)))}{K(f(\omega))}$ . В ТАС этот критерий трактовался именно как относительные потери [18], а позже этому критерию было дано меткое название “цена анархии” [19].

В [14, 20] в качестве такого критерия используется понятие близости результатов планирования, оцениваемой величиной *погрешности манипулирования*  $\Delta_f = \max_{\omega \in \Omega, u \in U} \|f(\omega) - f(\omega_f(\omega, u))\|_L$ , максимальным рассогласованием результатов планирования без и с учетом активности подчиненных по некоторой метрике  $L$ . В работах по теории коллективного выбора для процедур выбора на основе предпочтений агентов, определенных над конечным множеством альтернатив, многие авторы оперируют *критерием Келли* — долей профилей предпочтения агентов, для которых процедура является манипулируемой, см., например, [20–23].

Оценка  $\Delta_f$  является третьим этапом технологии активного планирования.

3. В случае, если процедура неустойчива к активности, оценивается, насколько сильно результат планирования может быть искажен активными подчиненными.

Если исходная целевая процедура неустойчива к активности агентов, то можно ли предложить какое-либо решение, уменьшающее потери, связанные с проблемой несовместимости со стимулами? В ТАС и в теории механизмов был предложен следующий подход. Вводится понятие *механизма*  $\rho = \langle S, \pi \rangle$ , где  $S = \times_{i \in N} S^i$ ,  $S^i$  – множество допустимых действий (это могут быть не только сообщения, передаваемые агентами Центру) агента  $i \in N$ ,  $\pi : S \rightarrow X$  – процедура *активного планирования*, учитывающая активность подчиненных в следующем смысле. Вообще множества  $S$  и  $\Omega$  могут не иметь между собой ничего общего, а с точки зрения проблемы активности существенным является преобразование  $s_\pi : \Omega \times U \rightarrow S$ , определяющее рациональное поведение агентов в рамках процедуры планирования  $\pi$ . О том, как можно определить это преобразование, и определяемо ли оно в принципе, речь пойдет дальше. Учет активности подчиненных агентов как раз и подразумевает необходимость определения данного преобразования. Множество допустимых процедур активного планирования обозначим через  $\Pi$ , множество допустимых механизмов — через  $P$ .

В некоторых работах по теории механизмов из процедуры планирования выделяется отдельно процедура расчета *трансферов*, платежей между участниками ОС. Это является целесообразным в том случае, когда для некоторых задач решение с побочными платежами сравнивается с решением без платежей, см., например, [24]. Следует отметить, что в дальнейшем изложении возможности перераспределения полезности между участниками ОС через платежи будет отведено значительное внимание, поэтому будем выделять ОС с *трансферабельной полезностью* (ТП) и с *нетрансферабельной полезностью* (НТП).

В основу ответа на вопрос “что есть отображение  $s_\pi : \Omega \times U \rightarrow S$ ” в теории механизмов, теории выбора и теории активных систем был положен теоретико-игровой подход. В рамках этого подхода преобразование  $s_\pi$  является *решением* игры  $\Gamma(\rho)$ , определяемой в общем виде следующим образом.

*Игра  $\Gamma(\rho)$ , индуцированная механизмом  $\rho = \langle S, \pi \rangle$ , — это игра, участниками которой являются агенты ОС, описываемая кортежем  $\langle N, S, \varphi, I, T \rangle$ , где  $N$  — множество участников,  $S$  — множество допустимых профилей действий участников,  $\varphi = \{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$  — целевые функции участников,  $\varphi^i(s) = u^i(\omega, \pi(s))$ ,  $I$  — структура информированности участников, формализующая то, что каждому из агентов известно о параметрах игр,  $T$  — последовательность действий участников.*

Здесь следует сделать важное замечание о том, что, на самом деле, порядок действий агентов следует рассматривать как неотъемлемую компоненту самого механизма, однако для большинства исследований «равноправие» агентов между собой подразумевало, что они не должны дискриминироваться по порядку действий, т.е. должны действовать одновременно, что приводит к играм в *нормальной форме*, см., например, [25].

Задание порядка действий, а точнее, придание права первого хода некоторому игроку, образует серию задач определения оптимальной стратегии первого игрока на основе определения его максимального гарантированного результата. Исследование этих задач проводится преимущественно для си-

стем, состоящих из двух игроков, в работах по теории иерархических игр с непротивоположными интересами, см., например, [26–29].

Соответственно разные механизмы могут приводить к разным решениям в индуцированных ими играх — в первую очередь это равновесие Нэша, на основе которого Лео Гурвичем и было введено изначальное понятие совместимости со стимулами [17]. Совместимыми со стимулами стратегиями агентов предполагалось считать равновесные по Нэшу. Соответственно первоначальный вопрос формулировался так: является ли раскрытие информации о своих предпочтениях равновесием Нэша в механизме, который призван обеспечить максимум суммарного благосостояния всех агентов. В дальнейшем в фокусе внимания исследователей оказались и другие теоретико-игровые концепции: равновесие в доминантных стратегиях (РДС) и сильное равновесие Нэша (как частные случаи равновесия Нэша), равновесие Байеса–Нэша, максимин и т.д. [24, 30–41].

Определение отображения  $s_\pi : \Omega \times U \rightarrow S$  позволяет исследовать вопрос об эффективности того или иного механизма, в том числе осуществлять сравнение разных механизмов с точки зрения крайне важного понятия для теории механизмов — их эквивалентности.

*Механизмы  $\rho = \langle S, \pi \rangle$  и  $\tilde{\rho} = \langle \tilde{S}, \tilde{\pi} \rangle$  эквивалентны для заданных  $\Omega$  и  $U$ , если  $\forall \omega \in \Omega, \forall u \in U \pi(s_\pi(\omega, u)) \equiv \tilde{\pi}(\tilde{s}_\pi(\omega, u))$ .*

На эквивалентности между разными механизмами или даже отдельными классами механизмов основан целый ряд ключевых результатов ТАС, например [36, 37, 42] и теории механизмов, например [34, 43], которые подробнее освещаются в дальнейшем изложении.

По аналогии с критерием, на основе которого на этапе 2 определяется, насколько манипулируемой является целевая процедура, эффективность любого механизма может сопоставляться с «эталонной». В частности, можно рассчитывать цену анархии в ее робастной постановке:  $\min_{\omega \in \Omega, u \in U} \frac{K(f(\pi(s_\pi(\omega, u))))}{K(f(\omega))}$ , см., например, обзор [44]. А для задач коллективного выбора и экономики благосостояния ключевым критерием эффективности механизма выступает оптимальность по Парето определяемого плана для истинных предпочтений агентов.

В [14, 20] рассматривался подход к оценке в пространстве планов. Оценивалась *погрешность манипулирования* – максимальное рассогласование результатов планирования целевой процедуры и механизма  $\rho$ :

$$\Delta_f(\rho) = \max_{\omega \in \Omega, u \in U} \|f(\omega) - \pi(s_\pi(\omega, u))\|_L.$$

Перейдем к заключительному этапу технологии, на котором решается *задача активного планирования*.

*Механизм  $\rho_f^* \in P$  является решением задачи активного планирования, если он аппроксимирует целевую процедуру  $f : \rho_f^* \in \underset{\rho \in P}{\text{Argmin}} \Delta_f(\rho)$ .*

При этом подразумевается, что множество механизмов  $P$  должно быть «замкнуто» в том смысле, что любой из механизмов может быть реализован и  $\min_{\rho \in P} \Delta_f(\rho)$  существует.

Очевидно, что «идеальным» решением задачи активного планирования является механизм, для которого  $\Delta_f(\rho) \equiv 0$ .

Механизм  $\rho_f^* \in P$  полностью реализует целевую процедуру  $f$ , если  $\Delta_f(\rho) \equiv 0$ . При этом соответствующая целевая процедура называется полностью реализуемой.

Соединяя понятие реализуемости с введенным выше теоретико-игровым подходом, получаем ключевое для теории механизмов понятие.

Процедура планирования реализуема в рамках некоторой теоретико-игровой концепции, если механизм, реализующий эту процедуру как целевую, индуцирует игру, решение которой определяется данной концепцией.

С точки зрения теории управления организационными системами, наиболее «удачной» является концепция РДС, так как при ее реализации любому агенту нет необходимости пытаться угадать, просчитать или получить информацию о том, как будут действовать другие агенты [45, 46].

Именно для реализуемости в доминантных стратегиях ключевую роль играют неманипулируемые механизмы. Данное понятие определяется для прямых механизмов.

Механизм планирования  $\langle S, \pi \rangle$  называется прямым, если  $S \equiv \Omega$  [34, 46].

Обозначим через  $\Omega^i$  множество допустимых сообщений агента  $i \in N$  в произвольном прямом механизме,  $\Omega = \bigcup_{i \in N} \Omega^i$ . Тип агента  $i \in N$   $r^i \in \Omega^i$  – истинное значение тех компонент исходной информации  $\omega$ , которые должен сообщать Центру данный агент для принятия решения.

Прямой механизм планирования  $\langle \Omega, \pi \rangle$  называется неманипулируемым, если в индуцированной им игре доминантной стратегией любого агента является сообщение истинного значения своего типа:

$$\forall i \in N, \forall r^i, z^i \in \Omega^i, \forall z^{-i} \in \times_{j \in N \setminus \{i\}} \Omega^j \varphi^i(r^i, z^{-i}) \geq \varphi^i(z^i, z^{-i}).$$

Также выделяется коалиционная неманипулируемость механизма планирования [47–50]. Обозначим через  $r^C \in \Omega^C = \times_{i \in C} \Omega^i$  набор типов агентов из группы  $C \subseteq N$ .

Прямой механизм планирования  $\langle \Omega, \pi \rangle$  является коалиционно неманипулируемым, если в индуцированной им игре  $\forall C \subseteq N, \forall i \in C, \forall r^C, z^C \in \Omega^C, \forall z^{N \setminus C} \in \Omega^{N \setminus C}$  выполняются условия:

$$\text{для ОС с НТП: } \forall i \in C \quad \varphi^i(r^C, z^{N \setminus C}) \geq \varphi^i(z^C, z^{N \setminus C});$$

$$\text{для ОС с ТП: } \sum_{i \in C} \varphi^i(r^C, z^{N \setminus C}) \geq \sum_{i \in C} \varphi^i(z^C, z^{N \setminus C}).$$

В соответствии с определением эквивалентности прямой механизм может быть эквивалентен некоторому другому механизму только при условии, что он является неманипулируемым. Этот же факт лежит в основе ключевого результата теории механизмов: в соответствии с принципом откровенности

(*revelation principle*) [34, 51, 52] процедура планирования  $f$  реализуема в доминантных стратегиях тогда и только тогда, когда построенный на ее основе прямой механизм  $\langle \Omega, f \rangle$  является неманипулируемым. Следует отметить, что в русскоязычной литературе также встречается перевод термина *revelation principle* как *принцип выявления*, см., например, [53]. Однако используемый в данной статье перевод, предложенный в русскоязычной версии классической работы [54], по субъективному мнению авторов, лучше отражает его смысл.

Таким образом, общая технология решения задачи активного планирования состоит из следующих основных этапов:

1. Синтез процедуры планирования, оптимальной по требуемому критерию в условиях *пассивности* подчиненных.
2. Анализ полученной процедуры на предмет ее устойчивости к проявлениям активности агентов (выражаемый в форме манипулирования сообщаемой информацией).
3. Оценка, насколько сильно результат планирования может быть искажен активными подчиненными в том случае, если процедура неустойчива к их активности.
4. Синтез процедуры планирования, устраняющей (уменьшающей) данное искажение.

Основываясь на формальной постановке задачи активного планирования, перейдем к обзору результатов исследований, из которых могут быть получены ответы для перечисленных этапов технологии ее решения.

### 3. Ретроспектива исследований

В рамках теории коллективного выбора озвученный выше вопрос об устойчивости целевых процедур к проявлению активности агентами формулировался следующим образом: “В каких случаях *правило коллективного выбора*  $f_U : U \rightarrow X$  может быть неманипулируемым или может быть реализовано через прямой неманипулируемый механизм (что в соответствии с принципом откровенности одно и то же)?”.

*Теорема Гиббарда–Саттертуэйта* [30, 55] является наглядной иллюстрацией того факта, что для некоторых критериев планирования (например, Парето-оптимальности выбранного плана) при произвольных предпочтениях агентов на множестве результатов планирования неманипулируемые механизмы позволяют реализовать лишь тривиальные целевые процедуры планирования — диктаторские.

В то же время исследования в области экономики на предмет устойчивости «хороших» процедур планирования, таких как *распределение стоимости общественных благ* [3, 6], показали, что эти процедуры неустойчивы к манипулированию со стороны агентов [3, 17, 35, 56]. Из принципа откровенности следует, что полностью реализовать подобные процедуры с помощью неманипулируемых механизмов нельзя. Но, решая задачу аппроксимации, возможно, достаточно ограничиться классом прямых неманипулируемых механизмов?

Поэтому актуальным является следующий вопрос: “При каких условиях решение задачи активного планирования целесообразно искать на множестве неманипулируемых механизмов?”.

Для ответа на этот вопрос крайне важными оказываются свойства класса возможных предпочтений агентов  $U$ .

В терминологии, используемой в настоящей работе,  $U$  называется *богатым* [31, 34], если для всех  $i \in N$ ,  $\{u, \tilde{u}\} \subseteq U^i$  функция  $\tilde{u} = \min(u, \tilde{u})$  также является функцией полезности:  $\tilde{u} \in U^i$ .

В [34] показано, что, если правило группового выбора реализуемо в прямом механизме в любой из следующих концепций равновесия: Нэша, Байеса–Нэша и максимин, то оно также реализуемо и в доминантных стратегиях. Для богатого (в определенном выше смысле) класса предпочтений было показано, что, если однозначное правило группового выбора реализуемо по Нэшу в некотором непрямом механизме, то оно реализуемо и в прямом неманипулируемом механизме.

Примерами богатых классов предпочтений являются:

- класс всевозможных предпочтений на  $X$  (в котором полностью реализуемыми оказываются только диктаторские  $f_U$ );
- класс одномерных *однопиковых* функций полезности [47, 57];
- класс линейных аддитивных функций полезности [58].

Примерами классов предпочтений, не удовлетворяющих определению богатого, являются:

- класс многомерных *сепарабельных* функций полезности, в том числе многомерно-однопиковых [47, 59–63].
- класс квазилинейных предпочтений, описываемых *трансферабельными* функциями полезности [17, 35, 64].

Для последнего класса предпочтений было доказано, что эффективное по Парето правило группового выбора не может быть реализовано прямыми неманипулируемыми механизмами, зато может быть реализовано по Нэшу, см. [34, 35, 64, 65].

В общем случае вопрос о соотношении реализуемости по Нэшу и реализуемости в доминантных стратегиях для произвольных небогатых классов предпочтений до сих пор остается открытым.

С озвученными выше результатами согласуются результаты, полученные в рамках теории активных систем [8, 20, 36, 37]. В первую очередь рассматривались задачи, сводимые к задачам индивидуального планирования с помощью гипотезы *слабого влияния*:  $X = \tilde{X} \times_{i \in N} X^i$ , где компоненты плана из  $X^i$  влияют только на полезность агента  $i \in N$ , а компоненты плана из  $\tilde{X}$  могут влиять на полезность произвольной части агентов (в частном случае — на всех). Гипотеза слабого влияния предполагала: каждый агент  $i \in N$  считает, что сообщаемая им информация не влияет на выбор Центром компоненты плана из  $\tilde{X}$ , а лишь на определение компоненты плана из  $X^i$ . Это предположение позволяло произвольные задачи планирования сводить к задачам индивидуального планирования.

В [8] для частного случая, когда множество допустимых планов агента не зависит от сообщений других агентов, было сформулировано *условие совершенного согласования* (УСС), которое в общем виде, полученном в [37], записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \forall i \in N, \forall s \in \Omega \quad u^i(\pi^i(s^i, s^{-i}), \omega = \{s^i, s^{-i}\}) = \\ = \max_{x^i \in X^i(s^{-i})} u^i(x^i, \omega = \{s^i, s^{-i}\}), \end{aligned}$$

где  $X^i(s^{-i}) \subseteq X^i$  – множество компонентов плана, влияющих на полезность агента  $i \in N$ , допустимых с учетом сообщенной остальными агентами информации  $s^{-i}$ . То есть в механизме планирования, удовлетворяющем УСС, план должен выбираться таким образом, чтобы обеспечить максимальную полезность каждому из агентов с учетом ограничений, накладываемых сообщенной агентами информацией  $s$ .

Для частного вида функций полезности агента в [8], а затем для общего случая в [37] было показано, что выполнение УСС является необходимым и достаточным условием того, что в механизме  $\pi(s)$  сообщение достоверной информации агентами является равновесием в доминантных стратегиях. В [36] при гипотезе слабого влияния показано, что в случае сведения задачи к индивидуальному планированию равновесный по Нэшу план реализуется процедурой открытого управления. В [20, 37] для соответствующих задач было показано, что для любого механизма планирования, реализующего эффективную процедуру планирования  $f$  по Нэшу, существует эквивалентный прямой механизм. То есть задачу активного планирования достаточно решать на классе прямых неманипулируемых механизмов, см., например, [45].

Следует отметить, что в ТАС рассматривается и расширенная постановка задачи обеспечения неманипулируемости. Имеется в виду, что агенты могут не только искажать сообщаемую в Центр информацию, но и выбирать свои решения, не совпадающие с планами. В этом случае под неманипулируемостью понимается выполнение планов (мотивация агентов выбирать решения, совпадающие с назначаемыми им планами) [66] и, собственно, сообщение достоверной информации. Следует отметить, что обеспечение совпадения выбираемых агентами своих решений с планами за счет изменения функций полезностей агентов путем назначения Центром функций штрафов за отклонение решения агента от назначенного ему плана, а также назначения таких планов, которые выгодно агентам выполнять, приводит к тому, что УСС в этом случае приобретает следующий модифицированный вид:

$$\begin{aligned} \forall i \in N, \forall s \in \Omega, \quad u^i(\pi^i(s^i, s^{-i}), \omega = \{s^i, s^{-i}\}) = \\ = \max_{x^i \in X^i(s^{-i}) \cap P^i(s^i, s^{-i})} u^i(x^i, \omega = \{s^i, s^{-i}\}), \end{aligned}$$

где  $P^i(s^i, s^{-i})$  – множества планов, которые выгодно агентам выполнять при заданных функциях штрафов. Заметим, что такое изменение УСС отменяет принцип независимости множества, на котором определяется совершенно согласованный план, от сообщения  $i$ -го агента.

В [67–72] рассматривается проблема выбора Центром оптимальных механизма планирования, а также функций поощрения агентов и функций штрафов, влияющих на функцию полезности агентов, при которых модифицированное УСС обеспечивает неманипулируемость в расширенном смысле. В [12, 68–72] исследованы задачи оптимального изменения Центром функций полезности агентов путем назначения функций поощрений в зависимости от величины планов либо выбираемых агентами решений, а также функций наказания агентов (штрафов) за отклонение выбранного решения от плана в рамках заданных ограничений на фонд поощрения и множества допустимых функций штрафов. В [68–70] доказана оптимальность и построен оптимальный механизм для случая одного агента, в [71] — для нескольких агентов, связанных только общим фондом поощрения, в [72] — для множества агентов, связи между которыми описываются графом без контуров, определяющим порядок предшествования выбора агентами решений. Результаты этих работ определяют и уточняют условия согласования, достаточные для сообщения агентами достоверной информации Центру для упомянутой выше расширенной постановки задачи неманипулируемости в ТАС, а также представляют методы построения оптимальных неманипулируемых механизмов.

В [50] был предложен топологический подход к обнаружению классов механизмов, индуцирующих игры, в которых существует равновесие Нэша, и таких, что для любого механизма из данного класса существует эквивалентный прямой механизм. В частности, было показано, что при многомерно-однополюсных предпочтениях агентов для любого механизма  $g : S \rightarrow X$ , таких, что  $S^i \subseteq \mathbb{R}^1$  и  $\forall s \in S$   $g(s)$  дважды непрерывно-дифференцируема, существует эквивалентный прямой механизм. То есть несмотря на то, что класс предпочтений агентов не является богатым, решение задачи активного планирования достаточно искать на классе прямых неманипулируемых механизмов.

В рамках исследования коалиционной неманипулируемости в [47, 48] было показано, что для богатых классов предпочтений агентов неманипулируемые механизмы остаются коалиционно неманипулируемыми. В частности, для однополюсных предпочтений неманипулируемые механизмы остаются коалиционно неманипулируемыми [47].

Таким образом, в ОС с НТП неманипулируемые механизмы целесообразно применять для решения задач активного планирования. Именно поэтому актуальным является вопрос: “Как именно должны выглядеть неманипулируемые механизмы планирования?”

Из работ по аксиоматическому подходу к построению неманипулируемых правил коллективного выбора (см., например, [16, 34, 73–78]) следует выделить следующее, пожалуй ключевое, условие, которому должны удовлетворять неманипулируемые механизмы для ОС с НТП: выбираемый план должен определяться только на основе информации о наилучшем значении плана для каждого из агентов.

Если обозначить  $T^i(\omega) = \{\tau^i \in X : \forall x \in X u^i(\tau^i, \omega) \geq u^i(x, \omega)\}$ , то неманипулируемый механизм должен быть представим в виде  $x = \pi(T(\omega))$ , где  $T(\omega) = \{T^i(\omega)\}_{i \in N}$ . Существенность этого требования заключается в том, что в неманипулируемых механизмах каждого из агентов следует спраши-

вать лишь о том, какой план(ы) является наилучшим с его точки зрения, т.е.  $\forall i \in N \Omega^i = X^i$ . И определять план лишь на основе данной информации.

Широко известный результат, который уже упоминался ранее, теорема Гиббарда–Саттертуэйта [30, 55], указывает, что, если предпочтения агентов на множестве возможных результатов планирования могут быть любыми, то неманипулируемая процедура обязательно будет *диктаторской*: необходимо выбрать одного агента (возможно, случайным образом) и спросить его о том, какой план является наилучшим для него. И лишь для отдельных уточнений класса предпочтений агентов над множеством результатов планирования, при условии сохранения его свойства богатости, можно показать, что класс неманипулируемых процедур планирования будет шире.

Сформулированное выше УСС согласуется с этими результатами, так как из него следует, что, если для какого-либо из агентов  $i \in N \ X^i(s^{-i}) \neq \emptyset$ , то для него должен быть выбран наилучший план из данного множества [37].

Более детальную характеристику того, как именно должны быть устроены прямые неманипулируемые механизмы, представляется удобным провести на основе следующей классификации задач активного планирования [14]:

- однокритериальное коллективное планирование,
- индивидуальное планирование,
- многокритериальное коллективное планирование,
- многокритериальное смешанное планирование.

В рамках введенной терминологии в случае однокритериального планирования задача активного планирования может быть только коллективной. При многокритериальном планировании возможны задачи индивидуального, коллективного и смешанного планирования.

Наиболее подробно исследованной можно считать задачу однокритериального коллективного планирования.

В [47] для однопиковых предпочтений агентов был полностью описан класс неманипулируемых механизмов, эффективных по Парето и показано, что все эти механизмы коалиционно неманипулируемы. Это описание можно считать конструктивным — была предложена аналитическая запись для любой из неманипулируемых процедур планирования. Это — так называемые *медианные схемы* с дополнительными  $n - 1$  *фантомными агентами*, чьи предпочтения (точнее, наилучшие альтернативы) заранее фиксировались на множестве результатов планирования, а итоговый результат выбирался как медиана в упорядочении наилучших планов, сообщаемых реальными агентами и заранее объявленных для фантомных агентов. В литературе этот класс механизмов известен как *обобщенные медианные схемы* (ОМС) [79].

Так как в [34] было показано, что однопиковые предпочтения агентов являются богатым (в определенном выше смысле) классом, то можно утверждать, что задачу активного планирования для данных предпочтений достаточно решать на классе неманипулируемых механизмов. В [20, 42] был получен этот же результат. Для широкого класса механизмов, индуцирующих игры, в которых решением игры является равновесие Нэша, было показано, что для любого механизма из этого класса существует эквивалентный прямой механизм (и был предъявлен алгоритм его построения). Описание немани-

пулируемых механизмов однокритериального коллективного планирования, полученное в [20] как следствие УСС, было согласовано с аналитическим описанием, полученным в [34], т.е. было показано, что  $\forall i \in N \quad X^i(s^{-i}) \neq \emptyset$ , но существует не более одного агента, наилучший план для которого принадлежит  $X^i(s^{-i})$ .

В монографии [76] была предложена характеристика данного класса механизмов на основе идеи *блокирующих множеств* — в терминах УСС результатом выбора является сообщение того агента, для которого  $s^i \in X^i(s^{-i})$ .

По сути, предложенный класс ОМС можно охарактеризовать как *позиционное диктаторство* — выбор диктатора в любом таком механизме определяется на основе упорядочения заявленных агентами наилучшими планами на одномерном множестве результатов выбора, дополненном *зонами нечувствительности* — при определенных сообщениях агентов о предпочитаемых альтернативах выбирается одна из заранее определенных альтернатив — «наилучший план» одного из фантомных агентов.

В [80] класс однопиковых предпочтений агентов для задачи однокритериального планирования был расширен до предпочтений с одним плато — у каждого агента может быть более одного наилучшего плана, но множество наилучших планов для каждого агента — связанное (плато). Было показано, что весь класс неманипулируемых механизмов является все теми же ОМС, но они должны быть дополнены *правилом делегирования*, позволяющего Центру самому выбрать, какой из наилучших планов от каждого агента подавать на вход ОМС.

В [20] в качестве критерия эффективности решения задачи активного планирования был сформулирован критерий минимальной гарантированной погрешности. Первоначально полученное в указанной работе решение для отдельных ОМС было расширено на весь класс позже в [14].

Для задачи распределения ресурсов при индивидуальном планировании был предъявлен алгоритм построения неманипулируемых механизмов планирования [20, 81, 82], но аналитическая запись была предъявлена лишь для отдельного случая *анонимных* механизмов в [82]. Этот механизм известен в иностранной литературе как «единое правило» (uniform rule), а в отечественной — как *механизм последовательного распределения ресурсов* (МПРР) [14, 20, 83].

Было показано, что все неманипулируемые механизмы являются эффективными по Парето. Упомянутый выше результат [20] о достаточности прямых неманипулируемых механизмов для решения задач активного индивидуального планирования естественным образом распространяется и на задачу распределения ресурсов при индивидуальном планировании. При этом было показано, что все анонимные неманипулируемые механизмы эквивалентны [82, 84] (точнее, что существует единственный неманипулируемый анонимный механизм!) и вместо них могут использоваться достаточно простые, но манипулируемые анонимные механизмы [84].

В [83, 85] была получена полная аналитическая запись всех неманипулируемых механизмов распределения ресурсов на основе анализа множеств  $X^i(s^{-i})$  для УСС.

Для случая двух агентов в [81] было показано, что неманипулируемый механизм распределения ресурсов представим как неманипулируемый механизм однокритериального коллективного выбора, описанный в [34]. По сути, впервые был поставлен вопрос об эквивалентности неманипулируемых механизмов для разных классов задач планирования.

Результаты по неманипулируемости механизмов многокритериального коллективного выбора [61–63, 86] в значительной мере опираются на результаты для однокритериального коллективного выбора [47]. В частности, для многомерно-однопиковых предпочтений агентов в [61, 62, 86] было предъявлено аналитическое описание класса неманипулируемых механизмов — каждый такой неманипулируемый механизм состоял из  $m$  однокритериальных неманипулируемых механизмов коллективного выбора, описанных в [47] как *многомерные обобщенные медианные схемы* (МОМС). Однако было доказано, что эти неманипулируемые механизмы не являются эффективными по Парето [62, 63]. Для применения этих результатов к задаче распределения ресурсов необходимо проверять *условие пересечения* [60–62], которое в случае непрерывного  $X$  требует бесконечного числа проверок [61]. В [87] предложен алгоритмический подход, позволяющий осуществлять проверку свойства пересечения для конечного числа возможных планов.

Традиционно акцент в литературе для моделей без трансферабельной полезности делается на задаче либо индивидуального, либо коллективного планирования. Задачей смешанного планирования, исследованной в литературе с точки зрения проблемы манипулирования, является задача *обмена* (см. [88, 89]).

В [83, 90] исследовались неманипулируемые механизмы для решения *обобщенной* задачи распределения ресурсов — задачи многокритериального коллективного или смешанного планирования в ОС с  $n \geq 2$  агентами и множеством допустимых результатов планирования, определяемым ресурсным ограничением

$$X = \left\{ x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}_+^m \mid \sum_{j=1}^m x_j \leq R \right\}, \quad R \in \mathbb{R}_+^1.$$

Частным случаем этой задачи является «классическая» *задача распределения ресурсов* при индивидуальном планировании — когда каждый агент заинтересован только в том количестве ресурса, которое выделяется именно для него. Однако МОМС и МПРР не только различны по форме аналитической записи, любой МПРР обеспечивает оптимальный по Парето результат планирования, а МОМС — нет.

В [83] этот разрыв был устранен. Удалось показать, что любой МПРР может быть представлен в виде МОМС, дополненной правилом делегирования. То есть агент сам выбирает, по каким компонентам плана он хочет принять участие в его определении, а по другим компонентам делегирует механизму (или Центру в соответствии с заранее объявленными правилами) право принимать участие в определении плана вместо него. При этом было показано, что если предпочтения каждого агента в рамках задачи могут быть сведены

к одномерным однопиковым в том смысле, что каждый агент заинтересован не более чем в одной компоненте плана, то результат планирования по МОМС будет оптимальным по Парето. То есть если возможно разбиение всего множества агентов на непересекающиеся подмножества, для каждого из которых из многокритериальной задачи планирования выделяется подзадача, сводимая к однокритериальной, то результат МОМС будет оптимальным по Парето. В случае, если хотя бы два подмножества агентов пересекаются, гарантировать оптимальность по Парето нельзя. Кроме того, было показано, что если принудительно разбивать агентов на подобные подмножества, по сути, не учитывая их предпочтения по каким-либо из компонент плана, то неманипулируемость МОМС пропадает. Этот результат согласуется с результатами об оптимальности по Парето только одномерных процедур планирования [57].

Для задачи распределения ресурсов при многокритериальном планировании в [47] был получен следующий «негативный» результат. Если функции полезности агентов таковы, что  $\forall i \in N$   $u^i(x)$  — вогнутые, однопиковые в смысле:

$$\arg \max_{x \in X} u^i(x) \in \left\{ x : \sum_{k=1}^m x_k = R \right\},$$

и неубывающие, при  $\forall R' > R$ :

$$\max_{x \in X'} u^i(x) > \max_{x \in X} u^i(x),$$

$$X' = \left\{ x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}_+^m \mid \sum_{j=1}^m x_j \leq R' \right\},$$

то любой неманипулируемый и эффективный по Парето механизм — диктаторский.

Однако в [91] были предложены так называемые *механизмы согласия* — неманипулируемые недиктаторские механизмы, применимые для частного случая данного класса предпочтений агентов: на основе многомерно-однопиковых функций полезности конструируются *многомерно-однопиковые в пропорциях* функции полезности. В механизмах согласия на основе сообщений агентов определялись пропорции, в которых весь доступный ресурс  $R$  должен быть разделен по направлениям  $m$ .

В [14] была предложена характеристика этого класса механизмов на основе МОМС.

Как уже было отмечено выше, для ОС с ТП результаты о реализуемости в доминантных стратегиях в целом были негативными. При этом вопрос характеристики самих неманипулируемых механизмов был исследован в самых ранних работах.

Пожалуй, одной из визитных карточек науки “mechanism design” является *механизм Викри–Кларка–Гровса* (VCG) [92–94], который является неманипулируемым и максимизирует суммарное благосостояние агентов без учета

трансферов:

$$\langle U, h \rangle : h(u) \in \text{Arg max}_{x \in X} \left( \sum_{i \in N} u^i(x) - C \right),$$

где  $C \in \mathbb{R}_+^1$  – некоторая константа, описывающая уменьшение полезности.

При этом само правило выбора плана состояло собственно из решения задачи максимизации и трансферов — платежей, вычитаемых из функции полезности каждого агента и рассчитываемых по так называемой схеме налога Кларка [94]:

$$h = \langle x = \arg \max_{x \in X} \sum_{i \in N} u^i(x); t(x) \rangle,$$

где

$$t : X \rightarrow \mathbb{R}_+^n, \forall i \in N \ t^i = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} u^j(x) - \arg \max_{y \in X} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} u^j(y).$$

Данные платежи можно проинтерпретировать как «компенсацию» со стороны каждого агента  $i \in N$  потери суммарной полезности оставшихся членов общества  $N \setminus \{i\}$ , возникающую вследствие учета его индивидуальных интересов.

Следует уделить особое внимание «изящности» этого решения: через такие платежи функции полезности всех агентов становятся согласованными в том смысле, что каждый агент стремится выбором своего сообщения максимизировать сумму полезностей всех агентов! Однако гарантировать сбалансированность этих платежей нельзя, так как в общем случае  $\sum_{i \in N} t^i > 0$ , т.е. в итоге суммарная полезность общества меньше максимально возможной.

При этом весь класс правил группового выбора, который может быть реализуем в доминантных стратегиях для квазилинейных функций полезности, был полностью охарактеризован в работе Робертса 1979 г. [95]:

$$f(u) \in \text{Argmax} (ku' - C),$$

где  $u'$  – вектор-столбец предпочтений агентов,  $k \in \mathbb{R}_+^n$  – вектор неотрицательных множителей, такой что  $\sum_{i \in N} k^i > 0$ ,  $C \in \mathbb{R}_+^1$ .

То есть реализуемыми являются только процедуры, обеспечивающие максимум линейной свертки функций полезности агентов за вычетом некоторой неотрицательной константы. Следует отметить, что этот результат крайне редко упоминается в литературе по дизайну механизмов, см., например, [53, 96, 97], в отличие от его частного случая — механизма VCG.

Рассматриваемые в теории активных систем задачи планирования допускали трансферабельную полезность у агентов, но при условии, что трансфер полезности для каждого из агентов определялся через компоненту плана из  $\tilde{X}$ , т.е. с учетом гипотезы слабого влияния сообщения агентов (см., например, [37]). Это позволяло разбивать задачу на набор слабосвязанных задач

Центр-Агент, для которых достаточность решения задачи активного планирования была доказана в рамках ТАС [13, 37, 71] и в рамках *mechanism design* [12, 15, 52].

В [68–70] показано, как соотносится задача построения механизма в условиях интервальной неопределенности Центра с одной из задач теории контрактов [98, 99].

Возможность трансферов полезности между агентами делает актуальным вопрос исследования коалиционной неманипулируемости механизмов. Следует отметить, что необходимым условием коалиционной неманипулируемости механизма является его Парето эффективность [35, 56]. Из того факта, что при трансферабельной полезности неманипулируемые механизмы не могут обеспечить решений, эффективных по Парето [35, 64], следует, что в ОС с ТП невозможно обеспечить коалиционную неманипулируемость механизмов.

Описанный выше подход к представлению задачи многокритериального индивидуального планирования как задачи многокритериального или смешанного планирования в [100] применен для решения задачи распределения ресурсов в ОС с ТП на основе реализуемости по Нэшу. По аналогии представления МПРР как МОМС эффективный механизм решения задачи однокритериального выбора Гровса–Ледьярда [101] был адаптирован для решения многокритериальной задачи. Полученное решение обладало целым рядом свойств, таких как единственность и устойчивость получаемого в индуцируемой игре равновесия Нэша и сжимаемость отображения наилучших ответов, что позволяло исследовать построенный механизм не только в условиях полной информированности агентов, как этого требует реализуемость по Нэшу (что в настоящее время активно подвергается критике со стороны исследователей — об этом речь пойдет ниже). Перечисленные свойства позволили исследовать итеративные процедуры схождения игроков к равновесному и эффективному решению в соответствии с концепцией *сжимающих* механизмов [102, 103]. Кроме того, в рамках разработанного механизма была обеспечена сбалансированность трансферов, а в равновесии трансферы между любыми двумя агентами отсутствовали, что отличало полученное решение от других, предлагаемых в литературе не только по дизайну механизмов [104–106], но и по распределенной оптимизации [107]. Однако дальнейшие лабораторные (в форме деловых игр) и вычислительные эксперименты [108] показали, что не только синтезированный механизм, но и перечисленные выше решения дают эффективность решения задачи распределения ресурсов, не превышающую эффективность «единого правила» (МПРР). Более того, в рамках теоретического анализа [109] удалось показать, что для всех исследуемых механизмов (пока только в рамках конкретных моделей задачи распределения ресурсов, которая рассматривалась в рамках эксперимента) существуют эквивалентные механизмы, в которых у агентов есть доминантные стратегии, что в соответствии с принципом открытого управления означает, что для них существуют эквивалентные прямые механизмы. Для всех исследуемых механизмов таким эквивалентным прямым механизмом оказалось «единое правило». Этот результат позволяет сделать предположение о том, что утверждение о достаточности решения задачи открытого управления в ОС с НТП можно распространить на широкий класс задач для ОС с ТП.

В соответствии с технологией активного планирования, описанной в предыдущем разделе, выделим следующие подзадачи, которые необходимо решить в рамках конкретной задачи активного планирования и которым уделялось основное внимание в освещенных в данном разделе исследованиях:

1. Описание класса неманипулируемых механизмов:
  - a. формальное описание;
  - b. алгоритм построения.
2. Обоснование достаточности поиска решения задачи активного планирования на классе неманипулируемых механизмов.
3. Поиск неманипулируемых механизмов, являющихся решением задачи активного планирования.
4. Для произвольного неманипулируемого механизма определение множества других механизмов планирования, эквивалентных ему.

Данный список дополним следующими актуальными вопросами для исследования:

5. Существование эффективных по Парето неманипулируемых механизмов (необходимое условие для коалиционной неманипулируемости механизмов).
6. Согласованность классов неманипулируемых механизмов для различных задач планирования.

Последний пункт списка интересен с точки зрения возможности предложения универсального описания неманипулируемых механизмов в ОС с НТП. Об этом пойдет речь в следующем разделе.

#### **4. Откровенное открытое управление — согласование и делегирование**

На основе проведенной в предыдущих разделах структуризации попробуем ответить на вопрос: какие ключевые выводы можно сделать из принципов откровенности и открытого управления?

Первая линия водораздела между рассмотренными подходами проходит через вопрос о возможности передачи полезности между агентами. Принципы построения неманипулируемых механизмов и ответ на вопрос, можно ли утверждать, что задачу активного планирования достаточно искать на классе неманипулируемых механизмов, принципиально различаются для этих двух подходов.

Для ОС с НТП, как было показано выше, неманипулируемые механизмы могут быть построены в форме комбинации диктаторских правил с правилами, нечувствительными к заявкам агентов (константными правилами), и для многих задач доказано, что поиск эффективного решения достаточно вести на этом классе правил.

Для ОС с НТП принцип построения неманипулируемых механизмов иной: конструируя функции трансферов полезности в соответствии с обобщением подхода VCG, можно преобразовать функцию полезности каждого агента в нужный критерий, причем теорема Робертса [95] указывает на то, что это возможно для целевых критериев, являющихся линейной комбинацией функций полезности агентов с неотрицательными множителями, среди которых хотя

бы один множитель не равен нулю. При этом для задач максимизации суммарной полезности показано, что реализуемость в доминантных стратегиях, которой соответствуют данные механизмы, не дает того значения суммарной полезности общества, которую можно получить при реализуемости в других концепциях равновесия, в первую очередь по Нэшу.

Покажем, что на самом деле эти два направления абсолютно согласованы.

Начнем с того, что при переходе от НТП к ТП размерность любой задачи планирования увеличивается на  $(n + 1)n/2$  дополнительных компонент — трансферов от одного агента к другому с учетом Центра, а без его учета — на  $(n - 1)n/2$ . При этом даже если изначальная задача планирования в ОС с НТП могла быть дискретной, скажем, выбор из конечного числа альтернатив, то в ОС с ТП она априори становится непрерывной, так как каждый трансфер можно определять непрерывным образом.

Аналогичный переход происходит и с функциями полезности агентов: если в ОС с НТП можно было вести речь как о предпочтениях агентов, так и о функциях полезности, то в ОС с ТП необходимо рассматривать только функции полезности агентов, причем они должны быть линейны по компоненте трансферов. И этим объясняется то, что в неманипулируемых механизмах в ОС с НТП используется информация только о том, какой план является наилучшим с точки зрения агента, и не важно, какую именно полезность получает от выбора этого плана агент. Так как эту информацию никак нельзя использовать, на функцию полезности агента разработчик может повлиять только посредством выбора плана. А в ОС с ТП использовать информацию о функциях полезности агентов можно и нужно.

Это различие оказывает драматическое влияние на множество оптимальных по Парето планов. В ОС с НТП множество оптимальных по Парето планов может быть сколь угодно широким, вплоть до того, что будет включать в себя все доступные планы! Например, в задачах коллективного выбора, если число выбираемых альтернатив не превышает число агентов, на основе предпочтений которых осуществляется выбор, то может оказаться так, что любой результат выбора будет оптимальным по Парето. Следует отметить, что чем больше множество оптимальных по Парето планов, тем менее согласованы интересы агентов.

А в ОС с ТП множество оптимальных по Парето планов «сжимается» только до тех планов, которые обеспечивают максимум суммарной полезности агентов! То есть требованию оптимальности по Парето удовлетворяют только такие  $x^* \in X$ , которые обеспечивают попадание вектора  $u(x)$  на симплексе  $\|u(x)\|_{L_1} = C$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$ ! И «попасть» в такое «игольное ушко» становится гораздо сложнее. Более того, учитывая, что трансферы полезности рассматриваются как инструмент и разработчик механизма может только взять полезность у любого из агентов и передать ее остальным или уничтожить (сжечь, выбросить, забрать себе и т.д.), то условие оптимальности по Парето для агентов подразумевает выполнение требования «сбалансированности платежей»  $\|t\|_{L_1} = 0$ . Все такие платежи располагаются на гиперплоскости в пространстве  $\mathbb{R}^{(n+1)n/2}$  (если рассматривать трансферы только между агентами, то  $\mathbb{R}^{(n-1)n/2}$ ). Уже для ОС с тремя агентами это простран-

ство трехмерное (без учета трансферов центру, а с учетом — шестимерное), а как следует из обзора выше, если неманипулируемая процедура планирования в ОС с НТП не является диктаторской, то гарантировать попадание в гиперплоскость в трехмерном (и более) случае она не может. Абсолютно аналогичная сложность возникает и при проектировании трансферов и, как и следует из перечисленных публикаций, она не может быть разрешена за исключением отдельных специальных случаев.

Как выглядит диктаторская процедура в ОС с ТП? В принципе, можно в ОС с ТП спросить агента, который был определен диктатором (позиционно или персонально), о наилучшем для него плане. А можно и «помочь» ему, спросив у него про его функцию полезности, и найти за агента ее максимум. При этом платеж Кларка для всех агентов будет нулевым, так как рассчитывается для набора весов агентов, где ненулевой вес будет только у диктатора, а у остальных агентов вес будет равен нулю. То есть диктаторская процедура полностью удовлетворяет классической формулировке УСС, работающей в ОС с НТП.

При этом и сам механизм VCG можно трактовать как диктаторский, потому что тот план, который выбирается для системы, действительно оптимален для каждого агента с учетом платежа Кларка.

Однако то, что план, выбираемый по какой-либо диктаторской процедуре, будет удовлетворять максимуму суммарной полезности всех агентов, также является крайне экзотичным случаем — наличием того самого центрального (pivotal) агента.

То есть задачи планирования в ОС с НТП можно рассматривать как «сужение» по сравнению с аналогичными для ОС с ТП, что в свою очередь сужает и множество доступных решений. При этом очевидно, что любой механизм, который был неманипулируем в ОС с НТП, останется таковым в ОС с ТП, см., например, [97].

Но обеспечение оптимальности по Парето результатов планирования с помощью неманипулируемых механизмов в ОС с ТП не представляется возможным. Из последнего следует, что в отличие от ОС с НТП для ОС с ТП (за исключением некоторых крайне специфичных случаев) не удастся найти коалиционно неманипулируемые механизмы, а любой индивидуально неманипулируемый механизм будет коалиционно манипулируем, включая механизм VCG и диктаторские, так как сообщество агентов всегда сумеет за счет трансферов предложить диктатору  $d \in N$  выбрать более интересный для общества план  $x^*$ , чем оптимальный для него  $x_d^*$ , если  $\|u(x^*)\|_{L_1} > u_d(x_d^*)$ . Вопрос о том, какая коалиция агентов может манипулировать выбором плана, следует отнести к разделу теории кооперативных игр.

Однако если допустить, что Центр (или разработчик механизма) может ограничить возможности по обмену полезностями между агентами, позволяя только трансферы между Центром и каждым агентом индивидуально (что является в некотором смысле реализацией гипотезы слабого влияния), то описанного выше «схлопывания» множества Парето можно попробовать избежать, сохраняя его как в ОС с НТП.

Вторая линия водораздела связана как раз с проблемой схлопывания множества Парето в задачах многокритериального планирования. И здесь выводы, с одной стороны, достаточно конструктивные, с другой — неутешительные. Гарантировать оптимальность по Парето нетривиального решения задачи активного планирования (т.е. не полного диктаторства одного агента) можно в том случае, если она может быть сведена к одномерной в смысле предпочтений агентов, т.е. декомпозирована на набор одномерных задач с одновременной декомпозицией множества агентов на непересекающиеся подмножества, где каждый агент заинтересован в решении только одной подзадачи одномерного планирования. Только в этом случае множество неманипулируемых механизмов расширяется, допуская позиционное диктаторство, поэтому в своих последних исследованиях Эрве Мулен призывает работать именно с такими процедурами [57, 110], однако, как было показано в [83], подобное принудительное ограничение предпочтений агентов может привести к потере свойства неманипулируемости у механизма планирования.

Таким образом, можно сформулировать следующие перспективные направления теоретических исследований.

Во-первых, как тот набор «инструментов», который допустимо применять при построении неманипулируемых механизмов в ОС с НТП (диктаторские и константные процедуры), изменяется для ОС с ТП? То, что он расширяется, это очевидно. Но сводится ли это расширение к дополнению инструментом превращения целевой функции агента в целевую функцию планирования с помощью трансферов платежом Кларка?

Как в целом результаты, полученные для конкретных постановок задач планирования в ОС с НТП, переносятся на ОС с ТП?

Скорее всего, это не так, ведь весь значительный объем литературы по дизайну экономических механизмов, включая недавно выпущенный сборник [111], речь о котором пойдет ниже, активно апеллирует к механизму VCG, но крайне редко — к теореме Робертса [95]. В упомянутом сборнике эта работа упоминается лишь один раз в статье [97], в то время как VCG упоминается в значительной части статей по теоретическим подходам.

Выше было показано, что классическое диктаторство (и, как следствие, стохастическое тоже) легко укладывается в схему Робертса, но вопрос о корректном переносе схем Спрумона [82] и Мулена [47] (позиционное диктаторство) пока остается открытым.

С точки зрения ТАС представляется целесообразным посмотреть, можно ли отказаться от гипотезы слабого влияния для учета возможности трансферов в УСС. Здесь же следует отметить, что в работах по согласованным механизмам стимулирования, обзор которых был упомянут во введении к данной статье, в настоящее время рассматриваются нетривиальные сетевые структуры (веерные, цепочки и т.д.) взаимодействия агентов, которые можно трактовать как структуры возможных трансферов полезности [13]. Однако вопрос для произвольных структур допустимых взаимодействий остается открытым.

Во-вторых, результат подобной характеристики неманипулируемых механизмов позволит заново посмотреть на вопрос об эквивалентности результа-

тов реализуемости в разных теоретико-игровых концепциях. Актуальность ответа на этот вопрос представляется крайне важной, особенно в свете упомянутых выше результатов о том, что в рамках задачи распределения ресурсов можно получить эффективное ее решение, как равновесие Нэша, в котором у всех агентов трансферы будут нулевыми, что приводит к неустойчивости этого решения на метаигровом уровне. В результате этого итоговая эффективность решения задачи не превышает той, что может быть получена в прямом неманипулируемом механизме без трансферов — «едином правиле» [108, 109].

Интерпретируя написанное выше в позитивном ключе, можно завершить данный раздел следующим образом. Трактруя диктаторство как делегирование права принятия решения одному агенту, можно сказать, что инструментарий открытого управления, сводящийся в моделях ОС с НТП к различным формам делегирования, при переходе к ОС с ТП расширяется, дополняясь инструментами согласования (возможность изменять целевые функции агентов с помощью трансферов, подстраивая их под интересы системы). Однако одновременно с расширением инструментария при переходе к трансферабельной полезности множество планов, на которых возможно согласованное решение задачи активного планирования, значительно сокращается. А лишь на этом множестве и возможно откровенное открытое управление!

## 5. Ближайшие перспективы и вызовы

В данном разделе перечисляются перспективные по мнению других специалистов направления исследований в области совместимости со стимулами и неманипулируемости механизмов планирования.

Как уже было упомянуто выше, в своем свежем обзорно-постановочном эссе Арунава Сен [97] задается теми же вопросами, которым был завершен предыдущий раздел, указывая на то, что побочные платежи могут рассматриваться как экстерналии. Там же он отмечает и то, что применение стохастических процедур планирования, в которых результат планирования выбирается случайным образом, расширяет множество совместимых со стимулами функций коллективного выбора.

В обзорной статье [112] один из авторов ключевой работы по эквивалентности механизмов [34], Питер Хэммонд, систематизирует подходы к проблеме учета экстерналей в разработке совместимых со стимулами решений задач планирования на основе практически применимых моделей ОС, понимая обобщенно под экстерналиями влияние выбора стратегии одним агентом на предпочтения и стимулы остальных. Он отмечает, что модели, в которых подобным влиянием можно пренебречь (т.е. выполняется гипотеза слабого влияния), описывают практически вырожденные, идеализированные случаи, такие как экономики с исключительно индивидуальными благами, в которых либо бесконечно много агентов, либо влияние агентов настолько мало, что им можно пренебречь. При этом отмечается, что реализуемость по Нэшу, позволяющая на теоретическом уровне разрабатывать эффективные и совместимые со стимулами механизмы, также является идеализацией, так как в своем изначальном виде представляет интерес только для крайне экзо-

тических случаев, когда Центр или разработчик механизма не обладает той информацией, которая является общим знанием среди агентов. В случаях, когда агенты не обладают полной информацией, реализуемость в концепции равновесия Байеса–Нэша, превосходящая по эффективности неманипулируемую реализуемость механизма планирования, подразумевает использование Центром информации не только о предпочтениях и предпочитаемых результатах планирования, но и о взаимной информированности агентов, включая их представления о представлениях друг о друге.

Очевидно, что, с одной стороны, разработка менее абстрактных подходов к моделированию взаимной информированности (рефлексии), нежели условные вероятности, получаемые на основе общего распределения типов агентов, является одним из актуальных и перспективных направлений развития теоретико-игровых подходов (см., например, обзор [113]).

С другой стороны, до тех пор, пока нет возможности адекватно учитывать взаимную информированность, преимущество реализуемости по Байесу–Нэшу перед реализуемостью в доминантных стратегиях исчезает, что делает актуальным применение неманипулируемых механизмов и для ситуаций, когда гипотеза слабого влияния невыполнима.

Эта же проблема выделяется среди основных в последних обзорах Гэбриела Кэррола, посвященных вопросам разработки устойчивых (робастных) оптимальных механизмов планирования [114, 115]. Общий лейтмотив робастного подхода состоит в том, что с целью расширения применимости результатов теории механизмов акцент должен быть смещен с попыток реализации оптимальных решений (как это сделано в классическом подходе) на попытку минимизации числа параметров, учитываемых в разрабатываемых механизмах. Иначе говоря, акцент должен быть сделан на простых механизмах.

Помимо упомянутой выше проблемы, связанной с необходимостью учета взаимной информированности, выделяются проблемы корректного учета рациональности и вычислительной сложности.

В рамках проблемы корректного учета рациональности в качестве одного из рецептов обсуждается применение максиминного подхода к формализации принятия решения агентами (см., например, [22, 116]).

Другой проблемой в рамках данного направления является то, что во многих играх, индуцированных неманипулируемыми механизмами, помимо самого равновесия в доминантных стратегиях, может существовать еще много других равновесных по Нэшу ситуаций, что, в свою очередь, не гарантирует сообщения агентами достоверной информации как равновесного исхода игры — см., например, [108, 109, 117, 118].

Проблему вычислительной сложности можно декомпозировать на несколько аспектов.

Во-первых, само по себе решение задачи планирования без учета активности агентов может оказаться NP-трудным.

Во-вторых, для многих моделей теории игр расчет равновесия, в первую очередь равновесия по Нэшу, может оказаться NP-трудным [119, 120].

Соответственно для ситуаций, когда полиномиально вычислимыми оказываются как решение задачи планирования без учета активности, так и реше-

ние игры, возникающей вследствие применения разработанного механизма, какова окажется сложность расчета решения в соответствии с механизмом?

Здесь представляется целесообразным процитировать Поля Милгрота [121], отметившего, что в реальных аукционах рассчитать результат в соответствии с подходом Викри–Кларка–Гровса не представляется возможным.

В целом ответ на этот вопрос негативный: вычислительная сложность растет [120, 122], хоть для отдельного класса задач и удается получить положительные результаты (при этом жертвуя эффективностью итогового решения). Например, неманипулируемый механизм, реализующий жадный алгоритм для задачи о ранце, имеет сложность, аналогичную сложности жадного алгоритма и эффективность не менее 50 % от решения, получаемого полным перебором.

Наконец, даже для манипулируемых механизмов можно задаться вопросом: «Для каких из них сложность расчета решения в соответствии с заявками агентов окажется ниже, чем сложность расчета оптимального манипулирования для отдельно взятого агента?» Для ряда процедур коллективного выбора можно показать, что сложность расчета в соответствии с процедурой полиномиальная, а расчет рационального манипулирования — NP-труден (см., например, [123, 124]).

В качестве аргумента против такого подхода можно привести цитату из судебного дела о манипуляциях на рынке электроэнергетики в Калифорнии компанией Энрон 2002 г.: «Если закон Мерфи переформулировать для рыночного подхода к регулированию сферы электроэнергетики, то он будет звучать следующим образом. Любая система, которая может быть обыграна, будет обыграна и в самый неподходящий для этого момент». Иллюстрацией этого также являются манипуляции, выявленные на отечественном рынке электроэнергетики в рамках простых игровых экспериментов [125].

Неманипулируемые механизмы, реализуемые в рамках концепции РДС, лишены этого недостатка и в совокупности со своей простотой вызывают регулярный интерес в рамках робастного подхода к реализуемости. В качестве примера можно привести «единое правило» для задачи распределения ресурсов, которое упоминалось выше. В последнее время интерес к нему не уменьшается, особенно в свете того, что оно успешно конкурирует с другими, более сложными и теоретически более эффективными решениями задачи распределения ресурсов [57, 110, 108, 109].

Эрве Мулен в [57] отмечает, что с его точки зрения ключевой характеристикой для успешного решения задачи разработки механизмов является простота пространства предпочтений агентов — чем проще это пространство, тем выше вероятность, что задача реализуемости будет не только решена теоретически, но и внедрена в практику.

Про значимость предположений о множестве предпочтений Сальвадор Барбера в [59] указывает, что малейшие изменения в требованиях к множеству предпочтений оказывают драматическое влияние на то, какие неманипулируемые механизмы могут быть реализованы.

В работе [126], также вошедшей в упомянутый сборник, Вильям Томсон агитирует за более «мягкий» аксиоматический подход, предлагая оценивать

не только то, насколько удовлетворяют отдельные механизмы некоторому набору аксиом, что так часто приводит к негативным результатам, но и смотреть на то, насколько часто эти аксиомы нарушаются.

Созвучным с этой идеей оказывается результат, который представили в своей готовящейся к публикации статье [127] двое из трех авторов работы [34], Патриа Дасгупта и Эрик Маскин. Они показали, что правило выбора Кондорсе удовлетворяет всем основным аксиомам коллективного выбора в том случае, если возможно избежать в предпочтениях агентов циклов, приводящих к парадоксу Кондорсе. Резюмируют они так: «подчеркивая этот недостаток, маркиз де Кондорсе обошелся несправедливо и с собой, и со всем миром...».

Этот результат резюмирует данный раздел, основной лейтмотив которого заключается в том, что многие из перечисленных выше результатов еще ждут своей правильной, не негативной интерпретации, которая позволит конструктивно их использовать при решении реальных задач планирования.

## 6. Заключение

В качестве заключения хотелось бы озвучить следующую неожиданную и, на первый взгляд, несколько «пессимистическую», но, на самом деле, побуждающую к размышлению мысль.

Более полувека теоретических и лабораторных исследований в области проблемы согласованности и неманипулируемости механизмов принятия коллективных решений свидетельствуют о том, что эффективность функционирования социально-экономических систем не может быть обеспечена без согласованности интересов участников системы. Без корректного учета интересов участников механизмы принятия решений теряют свою устойчивость (к стратегическому поведению), а корректный учет интересов приводит к крайне простым и, на первый взгляд, удручающим рекомендациям — доверить принятие решений одному лицу (диктаторство) или поделить все поровну («единое правило»).

С другой стороны, это лишний раз подтверждает очень точное название тех принципов, на которых основаны фундаментальные результаты в этой области, принципы открытого управления и откровенности (revelation). Будем открыты и откровенны — если в вашей команде согласия нет, то и хорошего результата вы не достигнете, какие бы изощренные и запутанные правила управления вы ни применяли. Здесь уместно привести цитату Фридриха Энгельса: «Где нет общности интересов, там не может быть единства целей, не говоря уже о единстве действий». И, наоборот, если ваши интересы с кем-то согласованы, то вы можете смело делегировать ему принятие решений, в любых областях, в которых он разбирается.

Тем не менее данная «откровенность» не означает, что на теоретических и прикладных исследованиях в области согласованности и неманипулируемости следует поставить «крест», ибо в дополнение к теоретическим направлениям, которые выделены в разделах 4 и 5, количество задач выявления несогласованности в действующих управленческих правилах и оценки последствий от недоучета возможностей проявления стратегического поведе-

ния — неисчерпаемо. В 2019 г. увидел свет сборник «Будущее экономического дизайна» [111], часть статей которого, но далеко не все, упомянуты в разделе 5. Этот сборник является наглядной иллюстрацией того, что проблема совместимости со стимулами и неманипулируемости механизмов принятия коллективных решений находится в активной фазе исследований.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурков В.Н., Лернер А.Я.* Принцип открытого управления активными системами // *АиТ.* 1970. № 8. С. 100–111.  
*Burkov V.N., Lerner A.Y.* Open control principle for active systems // *Autom. Remote Control.* 1970. No. 8. P. 1288–1297.
2. *Немчинов В.С.* Социалистическое хозяйствование и планирование производства // *Коммунист.* 1964. № 5. С. 77–78.
3. *Samuelson P.A.* The pure theory of public expenditure // *Rev. Econom. Statist.* 1954. V. 36. No. 4. P. 387–389.
4. *Marschak J.* Elements for a theory of teams // *Management Sci.* 1955. V. 1. No. 2. P. 127–137.
5. *Arrow K.J.* Social choice and individual values. Chicago: Univ. of Chicago, 1951.
6. *Hurwicz L.* Optimality and Informational Efficiency in Resource Allocation Processes / *Mathematical Methods in the Social Sciences*, 1960. P. 27–46.
7. *Lerner A.* Change of heart. Balaban International Science Services, 1992.
8. *Burkov V.N., Lerner A. Ya.* Fairplay in control of active systems / *Differential games and related topics.* Amsterdam, London: North-Holland Publishing Company. 1971. P. 164–168.
9. *Burkov V.N., Yenaleev A.K., Kondrat'ev V.V. et. al.* Regular functioning mechanisms of organizational systems / *Preprints of “Control science and technology for the progress of society”.* International Federation of Automatic Control. 8-th Triennial World Congress. Kyoto. Japan. 1981. V. XII. P. 31–37.
10. *Бурков В.Н., Новиков Д.А.* Теории активных систем 50 лет: история развития // *Теория активных систем – 50 лет / Материалы международной научно-практической конференции, 18–19 ноября 2019 г.* Под общ. ред. В.Н. Буркова. М.: ИПУ РАН. С. 10–54.
11. *Бурков В.Н., Губко М.В., Коргин Н.А., Новиков Д.А.* Теория управления организационными системами и другие науки об управлении организациями // *Проблемы управления.* 2012. № 4. С. 2–10.
12. *Nobel Prize Committee et al.* Oliver Hart and Bengt Holmström: Contract Theory // *Scientific Background on the Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel.* 2016.
13. *Еналеев А.К.* Согласованные механизмы управления в активных системах // *Управление большими системами.* Выпуск 83. М.: Изд-во ИПУ РАН, 2020. С. 5–28.
14. *Коргин Н.А.* Неманипулируемые механизмы принятия решений в управлении организационными системами // *Автореф. дис. ... д-ра техн. наук.* М.: Изд-во ИПУ РАН, 2014.
15. *Laffont J.J., Martimort D.* The theory of incentives: the principal-agent model. Princeton university press, 2009.
16. *Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т.* Выбор вариантов: основы теории. М.: Изд-во “Наука”, 1990.

17. *Hurwicz L.* The design of mechanisms for resource allocation // Amer. Econom. Rev. 1973. V. 63. No. 2. P. 1–30.
18. *Бурков В.Н.* Основы математической теории активных систем. М.: Изд-во “Наука”, 1977.
19. *Koutsourias E., Papadimitriou C.* Worst-case equilibria // Computer science review. 2009. V. 3. No. 2. P. 65–69.
20. *Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К. и др.* Большие системы: моделирование организационных механизмов. М.: Изд-во “Наука”, 1989.
21. *Andersson T., Ehlers L., Svensson L.G.* Budget balance, fairness, and minimal manipulability // Theoretical Economics. 2014. V. 9. No. 3. P. 753–777.
22. *Bergemann D., Morris S.* Robust mechanism design // Econometrica: J. Econom. Soc. 2005. V. 73. No. 6. P. 1771–1813.
23. *Kelly J.* Almost all social choice rules are highly manipulable, but few aren't // Social Choice and Welfare. 1993. V. 10. No. 2. P. 161–175.
24. *Jackson M.* Mechanism Theory / The Encyclopedia of Life Support Systems. Oxford: EOLSS Publishers. 2003.
25. *Губко М.В., Новиков Д.А.* Теория игр в управлении организационными системами. М.: Изд-во “Синтер”, 2002.
26. *Гермейер Ю.Б.* Игры с противоположными интересами. М.: Изд-во “Наука”, 1978.
27. *Горелов М.А., Кононенко А.Ф.* Динамические модели конфликтов. III. Иерархические игры // АиТ. 2015. № 2. С. 89–106.  
*Gorelov M.A., Kononenko A.F.* Dynamic models of conflicts. III. Hierarchical games // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 2. P. 264–277.
28. *Угольниковский Г.А., Усов А.Б.* Алгоритмы решения дифференциальных моделей иерархических систем управления // АиТ. 2016. № 5. С. 148–158.  
*Ougolnitsky G.A., Usov A.B.* Solution algorithms for differential models of hierarchical control systems // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 5. P. 872–880.
29. *Горелов М.А., Ерешко Ф.И.* Иерархические игры в системе управления / Теория и практика системной динамики. 2019. С. 44.
30. *Бурков В.Н., Опоицев В.И.* Метаигровой подход к управлению активными системами // АиТ. 1974. № 1. С. 103–114.  
*Burkov V.N., Opoitsev V.I.* Meta-game approach to control of hierarchical systems // Autom. Remote Control. 1974. V. 35. No. 1. P. 93–103.
31. *Satterthwaite M.A.* Strategy-proofness and Arrow's conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions // J. Econom. Theory. 1975. V. 10. No. 2. P. 187–217.
32. *Бурков В.Н., Еналеев А.К., Кондратьев В.В. и др.* Элементы теории оптимального синтеза механизмов функционирования двухуровневых активных систем. II // АиТ. 1984. № 11. С. 86–92.  
*Burkov V.N., Enaleev A.K., Kondrat'yev V.V. et. al.* Fundamentals of theory of optimal design for functioning mechanisms of two-level active systems. II // Autom. Remote Control. 1984. V. 45. No. 11. P. 1457–1463.
33. *d'Aspremont C., Gérard-Varet L.A.* Incentives and incomplete information // J. Public economics. 1979. V. 11. No. 1. P. 25–45.
34. *Dasgupta P., Hammond P., Maskin E.* The implementation of social choice rules: Some general results on incentive compatibility // Rev. Econom. Stud. 1979. V. 46. No. 2. P. 185–216.

35. Walker M. On the nonexistence of a dominant strategy mechanism for making optimal public decisions // *Econometrica: J. Econom. Soc.* 1980. V. 46. No. 6. P. 1521–1540.
36. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. М.: Изд-во “Наука”, 1981.
37. Бурков В.Н., Еналеев А.К. Оптимальность принципа открытого управления. Необходимые и достаточные условия достоверности информации в активных системах // *АиТ.* 1985. № 3. С. 73–80.  
*Burkov V.N., Enaleev A.K.* Optimality of the principle of open control. Necessary and sufficient conditions for reliability of information in active systems // *Autom. Remote Control.* 1985. V. 46 No. 3. P. 341–348.
38. Sjöström T. On the necessary and sufficient conditions for Nash implementation // *Social Choice and Welfare.* 1991. V. 8. No. 4. P. 333–340.
39. Mookherjee D., Reichelstein S. Dominant strategy implementation of Bayesian incentive compatible allocation rules // *J. Econom. Theory.* 1992. V. 56. No. 2. P. 378–399.
40. Savvateev A. Coalition-proof incentive contracts / CORE, Mimeo – 2006.
41. Izmalkov S., Lepinski M., Micali S. Perfect implementation // *Games and Economic Behavior.* 2011 V. 71. No. 1. P. 121–140.
42. Новиков Д.А. Оптимальность правильных механизмов управления активными системами. I. Механизмы планирования // *АиТ.* 1997. № 2. 154–161.  
*Novikov D.A.* Optimality of correct mechanisms of control of active systems // *Autom. Remote Control.* 1997. V. 58 No. 2. P. 278–283.
43. Myerson R.B. Optimal auction design // *Math. Oper. Res.* 1981. V. 6. No. 1. P. 58–73.
44. Roughgarden T., Talgam-Cohen I. Approximately optimal mechanism design // *Ann. Rev. Econom.* 2019. V. 11. P. 355–381.
45. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы функционирования социально-экономических систем с сообщением информации // *АиТ.* 1996. № 3. С. 3–26.  
*Burkov V.N., Enaleev A.K., Novikov D.A.* Operation Mechanisms of Social Economic Systems with Information Generalization // *Autom. Remote Control.* 1996. V. 57. No. 3. P. 305–321.
46. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами / 3-е изд. М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2012.
47. Moulin H. On Strategy-proofness and Single-peakedness // *Public Choice.* 1980. V. 35. No. 4. P. 437–455.
48. Le Breton M., Zaporozhets V. On the Equivalence of Coalitional and Individual Strategy-proofness Properties // *Social Choice and Welfare.* 2009. V. 33. No. 2. P. 287–309.
49. Barberà S., Berga D., MoreNo. B. Individual Versus Group Strategy-proofness: When Do They Coincide // *J. Econom. Theory.* 2010. V. 145. No. 5. P. 1648–1674.
50. Петраков С.Н. Механизмы планирования в активных системах: неманипулируемость и множества диктаторства. М.: Изд-во ИПУ РАН, 2001.
51. Holmström B. On incentives and control in organizations. Stanford University, 1977.
52. Myerson R B. Incentive compatibility and the bargaining problem // *Econometrica: J. Econom. Soc.* 1979. V. 47. No. 1. P. 61–73.
53. Николенко С.И. Теория экономических механизмов. М.: Изд-во Бином. Лаб. знаний, 2009.

54. *Миллгром П., Робертс Д.* Экономика, организация и менеджмент: в 2-х т. Т. 1. СПб.: Изд-во “Экономическая школа”, 1999.
55. *Gibbard A.* Manipulation of voting schemes: a general result // *Econometrica: J. Econom. Soc.* 1973. V. 41. No. 4. P. 587–601.
56. *Zhou L.* Impossibility of strategy-proof mechanisms in economies with pure public goods // *Rev. Econom.* 1991. V. 58. No. 1. P. 107–119.
57. *Moulin H.* One-dimensional mechanism design // *Theoretical Economics.* 2017. V. 12. No. 2. С. 587–619.
58. *Myerson R.B.* Optimal auction design // *Math. Oper. Res.* 1981. V. 6. No. 1. С. 58–73.
59. *Barberà S.* Theoretical Unification, Domain Restrictions and Further Applications: Some Comments on Future Research in Economic Design / *Future Econom. Design.* Springer, Cham, 2019. С. 21–25.
60. *Barberà S., Masso J., Neme A.* Voting under constraints // *J. Econ. Theory.* 1997. V. 76. P. 298–321.
61. *Barberà S., Masso J., Serizawa S.* Strategy-proof voting on compact ranges // *Games and Economic Behavior.* 1998. V. 25 P. 272–291.
62. *Nehring K., Puppe C.* Efficient and strategy-proof voting rules: A characterization // *Games and Economic Behavior.* 2007. V. 59. No. 1. P. 132–153.
63. *Peters H., van der Stel H., Storcken T.* Pareto optimality, anonymity, and strategy-proofness in location problems // *Int. J. Game Theory.* 1992. V. 21. No. 3. P. 221–235.
64. *Green J.R., Laffont J.J.* Incentives in public decision making. Amsterdam: North-Holland. 1979.
65. *Walker M.* A simple incentive compatible scheme for attaining Lindahl allocations // *Econometrica: J. Econom. Soc.* 1981. V. 49. No. 1. P. 65–71.
66. *Еналеев А.К.* Разработка механизмов стимулирования и управления в двухуровневых активных системах // Автореф. дисс. ... канд. техн. наук. М.: МФТИ, 1980.
67. *Новиков Д.А.* Оптимальность правильных механизмов управления активными системами. II. Механизмы стимулирования // *АиТ.* 1997. № 3. С. 161–167.  
*Novikov D.A.* Optimality of correct mechanisms of control of active systems. II: Incentive mechanisms // *Autom. Remote Control.* 1997. V. 58. No. 3. P. 459–464.
68. *Еналеев А.К.* Оптимальный механизм функционирования в активной системе с обменом информацией // *Управление большими системами.* 2010. № 29. С. 108–127.
69. *Еналеев А.К.* Оптимальность согласованных механизмов функционирования в активных системах // *Управление большими системами.* 2011. № 33. С. 143–166.  
*Enaleev A.K.* Optimal incentive-compatible mechanisms in active systems // *Autom. Remote Control.* 2013. V. 74. No. 3. P. 491–505.
70. *Еналеев А.К.* Оптимальные согласованные механизмы в активных системах и задачи теории контрактов // *Управление большими системами.* 2014. № 49. С. 167–182.
71. *Еналеев А.К.* Оптимальный согласованный механизм в системе с несколькими активными элементами // *Проблемы управления.* 2015. № 3. С. 20–28.  
*Enaleev A.K.* Optimal incentive compatible mechanism in a system with several active elements // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 1. P. 146–158.
72. *Еналеев А.К.* Оптимальность согласованных механизмов в сетевых организационных структурах // *Проблемы управления.* 2020. № 1. С. 24–38.

73. *Aleskerov F.* Arrowian Aggregation Models. Dordrecht: Kluwer, 1999.
74. *Le Breton M., Sen A.* Separable preferences, strategyproofness, and decomposability // *Econometrica*. 1999. V. 67. No. 3. P. 605–628.
75. *Le Breton M., Weymark J. A.* Strategy-proof social choice with continuous separable preferences // *J. Math. Econom.* 1999. V. 32. No. 1. P. 47–85.
76. *Данилов В.И., Сотсков А.И.* Механизмы группового выбора. М.: Изд-во “Наука”, 1991.
77. *Maskin E.S.* Mechanism design: How to implement social goals // *Amer. Econom. Rev.* 2008. V. 98. No. 3. P. 567–576.
78. *Weymark J.A.* A unified approach to strategy-proofness for single-peaked preferences // *SERIEs*. 2011. V. 2. No. 4. P. 529–550.
79. *Barberá S.* Strategyproof Social Choice // *Handbook of social choice and welfare*. 2011. V. 2. P. 731–831.
80. *Berga D.* Strategy-proofness and single-plateaued preferences // *Math. Soc. Sci.* 1998. V. 35. No. 2. P. 105–120.
81. *Barberá S., Jackson M., Neme A.* Strategy-Proof Allotment Rules // *Games and Economic Behavior*. 1997. V. 18. No. 1. P. 1–21.
82. *Sprumont Y.* The division problem with single-peaked preferences: A characterization of the uniform rule // *Econometrica*. 1991. V. 59. No. 2. P. 509–519.
83. *Коргин Н.А.* Представление механизма последовательного распределения ресурсов как неманипулируемого механизма многокритериальной активной экспертизы / Управление большими системами: сборник трудов. 2012. № 36. С. 186–208.  
*Korgin N.A.* Representing a sequential allotment rule in the form of a strategy-proof mechanism of multicriteria active expertise // *Autom. Remote Control*. 2014. V. 75. No. 5. P. 983–995.
84. *Бурков В.Н., Горгидзе И.И., Новиков Д.А., Юсупов Б.С.* Модели и механизмы распределения затрат и доходов в рыночной экономике. М.: Изд-во ИПУ РАН. 1997.
85. *Коргин Н.А.* Эквивалентность и неманипулируемость неанонимных приоритетных механизмов распределения ресурсов // Управление большими системами: сборник трудов. 2009. № 26.1. С. 319–347.  
*Korgin N.A.* Equivalence and strategy-proofness of non-anonymous priority allotment mechanisms // *Autom. Remote Control*. 2016. V. 77. No. 11. P. 2065–2079.
86. *Border K., Jordan J.* Straightforward elections, unanimity and phantom voters // *Rev. Econom.* 1983. V. 50. P. 153–170.
87. *Бондарик В.Н., Коргин Н.А.* Применение блочного метода для определения допустимых неманипулируемых механизмов активной экспертизы при решении задачи распределения ресурсов // Системы управления и информационные технологии. 2012. № 4(50). С. 40–44.
88. *Barbera S., Jackson M.O.* Strategy-proof exchange // *Econometrica: J. Econom. Soc.* 1995. V. 63. No. 1. P. 51–87.
89. *Коргин Н.А.* Задача стимулирования и обменные схемы // *АиТ*. 2001. № 10. С. 147–153.  
*Korgin N.A.* Incentive problems and exchange schemes // *Autom. Remote Control*. V. 62. No. 10. P. 1673–1679.
90. *Бондарик В.Н., Коргин Н.А.* Механизмы распределения ресурсов на основе неманипулируемых симметричных анонимных процедур голосования с делегированием // Проблемы управления. 2012. № 5. С. 26–32.

91. *Бурков В.Н., Грацианский Е.В., Еналеев А.К., Умрихина Е.В.* Организационные механизмы управления научно-техническими программами. М.: Изд-во ИПУ РАН. 1993. 64 с.
92. *Vickrey W.* Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders // *J. Finance*. 1961. V. 16. No. 1. P. 8–37.
93. *Groves T.* Incentives in teams // *Econometrica: J. Econom. Soc.* 1973. V. 41. No. 4. P. 617–631.
94. *Clarke E.H.* Multipart pricing of public goods // *Public choice*. 1971. V. 11. No. 1. P. 17–33.
95. *Roberts K.* The characterization of implementable choice rules // *Aggregation and revelation of preferences*. 1979. V. 12. No. 2. P. 321–348.
96. *Lavi R., Mu'alem A., Nisan N.* Two simplified proofs for Roberts' theorem // *Social Choice and Welfare*. 2009. V. 32. No. 3. C. 407.
97. *Sen A.* Some Issues in Mechanism Design Theory / *Future Econom. Design*. Springer, Cham, 2019. С. 355–357.
98. *Еналеев А.К., Лавров Ю.Г.* Оптимальное стимулирование в активной системе со стохастическим элементом // *АиТ*. 1990. № 2. С. 104–113.  
*Enaleev A.K., Lavrov Yu.G.* Optimal incentives in an active system with a stochastic element // *Autom. Remote Control*. 1990. V. 51. No. 2. P. 223–231.
99. *Bolton P., Dewatripont M.* *Contract Theory*. Cambridge, Mass & London, England: MIT Press, 2005.
100. *Коргин Н.А., Корепанов В.О.* Решение задачи эффективного распределения ресурсов на основе механизма Гровса-Лейдярда при трансферабельной полезности // *Управление большими системами: сборник трудов*. 2013. № 46. С. 216–266.  
*Korgin N.A., Korepanov V.O.* An efficient solution of the resource allotment problem with the Groves-Ledyard mechanism under transferable utility // *Autom. Remote Control*. 2016. V. 77. No. 5. P. 914–942.
101. *Groves T., Ledyard J.O.* The Existence of Efficient and Incentive Compatible Equilibria with Public Goods // *Econometrica: J. Econom. Soc.* 1980. V. 48. No. 6. P. 1487–1506.
102. *Arifovic J., Ledyard J.O.* A behavioral model for mechanism design: Individual evolutionary learning // *J. Econom. Behavior Organizat.* 2011. No. 78. P. 375–395.
103. *Mathevet L.* Supermodular mechanism design // *Theoretical Economics, Econometric Society*. 2010. V. 5(3). P. 403–443.
104. *Maheswaran R.T., Başar T.* Nash equilibrium and decentralized negotiation in auctioning divisible resources // *Group Decision and Negotiation*. 2003. V. 12. No. 5. C. 361–395.
105. *Yang S., Hajek B.* Revenue and stability of a mechanism for efficient allocation of a divisible good // preprint. 2005.
106. *Yang S., Hajek B.* VCG-Kelly mechanisms for allocation of divisible goods: Adapting VCG mechanisms to one-dimensional signals // *IEEE J. on Selected Areas in Communications*. 2007. V. 25. No. 6. C. 1237–1243.
107. *Boyd S., Parikh N., Chu E.* *Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers*. Now Publishers Inc, 2011.
108. *Korgin N.A., Korepanov V.O.* Experimental Gaming Comparison of Resource Allocation Rules in Case of Transferable Utilities // *Int. Game Theory Rev.* 2017. V. 19. No. 02. C. 1750006.

109. *Korgin N.A., Korepanov V.O.* Experimental and theoretical comparison of several resource allocation mechanisms // IFAC-PapersOnLine. 2017. V. 50. No. 1. C. 15592–15597.
110. *Moulin H.* Fair division in the internet age // Ann. Rev. Econom. 2019. V. 11. C. 407–441.
111. *Laslier J.-F. et al. (eds.)* The Future of Economic Design, Studies in Economic Design, Springer Nature Switzerland AG 2019.
112. *Hammond P.J.* Allocation Mechanisms, Incentives, and Endemic Institutional Externalities / Social Design. Springer, Cham, 2019. P. 175–186.
113. *Novikov D., Korepanov V., Chkhartishvili A.* Reflexion in mathematical models of decision-making // Int. J. Parallel, Emergent Distribut. Syst. 2018. V. 33. No. 3. C. 319–335.
114. *Carroll G.* Design for weakly structured environments / Future Econom. Design. Springer, Cham, 2019. C. 27–33.
115. *Carroll G.* Robustness in mechanism design and contracting // Ann. Rev. Econom. 2019. V. 11. C. 139–166.
116. *Zhang L., Levin D.* Bounded rationality and robust mechanism design: An axiomatic approach // Amer. Econom Rev. 2017. V. 107. No. 5. C. 235–39.
117. *Bochet O.* From the Revelation Principle to the Principles of Revelation / Future Econom. Design. Springer, Cham, 2019. C. 311–315.
118. *Bochet O., Tumennasan N.* Dominance of truth-telling and the lattice structure of Nash equilibria // J. Econom. 2020. V. 185. C. 104952.
119. *Nisan N., et al., editors.* Algorithmic Game Theory. Cambridge University Press, 2007.
120. *Roughgarden T.* Complexity-Theoretic Barriers in Economics / Future Econom. Design. Springer, Cham, 2019. C. 159–163.
121. *Milgrom P., Segal I.* Clock auctions and radio spectrum reallocation // J. Political Economy. 2020. V. 128. No. 1. C. 1–31.
122. *Roughgarden T., Talgam-Cohen I.* Approximately optimal mechanism design // Ann. Rev. of Econom. 2019. V. 11. C. 355–381.
123. *Веселова Ю.А.* Вычислительная сложность манипулирования: обзор проблемы // АИТ. 2016. № 3. С. 7–32.  
*Veselova Y.A.* Computational complexity of manipulation: A survey // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 3. P. 369–388.
124. *Veselova Y.A.* Does Incomplete Information Reduce Manipulability? // Group Decision and Negotiation. 2020. V. 29. No. 3. C. 523–548.
125. *Chirkin V. et al.* Gaming Experiments for Analysis of Pricing Mechanisms at Electricity Markets // IFAC-PapersOnLine. 2016. V. 49. No. 32. C. 13–18.
126. *Thomson W.* On the axiomatics of resource allocation: classifying axioms and mapping out promising directions / Future Econom. Design. Springer, Cham, 2019. C. 213–222.
127. *Dasgupta P., Maskin E.* Strategy-Proofness, PIA, and Majority Rule // Amer. Econom. Rev.: Insights. 2020. V. 2. No. 4. P. 459–474.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.*

Поступила в редакцию 26.08.2020

После доработки 05.12.2020

Принята к публикации 15.01.2021

© 2021 г. Ю.Г. КОКУНЬКО (juliakokunko@gmail.com),  
С.А. КРАСНОВА, д-р техн. наук (skrasnova@list.ru),  
В.А. УТКИН, д-р. техн. наук (viktorutkin013@gmail.com)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## КАСКАДНЫЙ СИНТЕЗ ДИФФЕРЕНЦИАТОРОВ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМИ КОРРЕКТИРУЮЩИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ<sup>1</sup>

На основе теории наблюдателей состояния динамических объектов, функционирующих в условиях неопределенности, для сигнала, поступающего в реальном времени (например, задающего воздействия в системе слежения), предложен метод восстановления его производных высокого порядка, не требующий ни численного дифференцирования, ни наличия аналитического описания данного сигнала. Динамический дифференциатор строится как реплика виртуальной канонической модели с неизвестным, но ограниченным входом. Использование ограниченных корректирующих воздействий и специальной структуры дифференциатора позволяет уменьшить выбросы получаемых оценок в начале переходного процесса по сравнению с линейным дифференциатором с большими коэффициентами. В качестве приложения рассмотрена задача отслеживания центром масс беспилотного летательного аппарата пространственной траектории, приведены результаты моделирования.

*Ключевые слова:* динамический дифференциатор, наблюдатель состояния, неопределенный вход, каскадный синтез, слежение, БПЛА.

DOI: 10.31857/S0005231021070035

### 1. Введение

Во многих практических задачах возникает необходимость в дифференцировании сигналов. Например, для функционирования следящих систем с автоматическим управлением, как правило, требуется текущая информация не только о задающих воздействиях, но и об их производных до  $n$ -го порядка включительно, где  $n$  — относительный порядок одноканальной системы (или максимальный элемент вектора относительного порядка многоканальной системы) [1, 2]. В некоторых системах слежения можно обойтись без непосредственной генерации производных задающих воздействий и полагать их, как и внешние возмущения, неизвестными ограниченными функциями времени. Тогда при определенных условиях можно использовать для синтеза выходное отображение и комплексный подход к задаче наблюдения неизмеряемых сигналов. В этом случае наблюдатель строится как реплика системы “вход–выход”, записанной относительно ошибки слежения, и по ее измерениям оцениваются смешанные переменные (линейные комбинации функций от

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-01-00363А).

переменных состояния, внешних возмущающих воздействий и задающих сигналов, а также их производных), по которым формируется обратная связь [3–5]. Для подавления внешних возмущений в рамках этого подхода могут использоваться глубокие обратные связи, скользящие режимы или их допредельные аналоги в наблюдателе смешанных переменных с последующим синтезом комбинированной обратной связи по получаемым оценкам. Другая альтернатива связана с использованием указанных методов непосредственно в законе управления, когда производные задающих и возмущающих воздействий неизвестны и не подлежат оцениванию [6, 7]. При этом возмущение непосредственно действует на регулируемую переменную и не может быть полностью подавлено из-за физических ограничений на управление, что приводит к большей ошибке слежения, чем в первом случае. Таким образом, для создания высокоточных систем слежения в общем случае необходима текущая информация о производных задающих воздействий до  $n$ -го порядка включительно.

Для объектов управления с однотипными режимами работы и простым контуром движения, описываемым одним аналитическим выражением, эта проблема решается с помощью составления динамического генератора задающих воздействий или аналитического описания желаемой траектории, что дает информацию о производных целевых сигналов требуемого порядка. Однако в системах управления автономными движущимися объектами на плоскости или в пространстве полное аналитическое описание сложной траектории, которая представлена разными функциями на разных временных интервалах, является достаточно трудоемким процессом, требующим привлечения теории графов, сплайновой интерполяции и других методов [8–12]. С другой стороны, численное дифференцирование задающих воздействий приводит к нежелательному возбуждению помех и появлению запаздывания, причем погрешности увеличиваются с ростом порядка производной, получаемой численными методами [13].

В данной статье представлен метод получения информации о производных задающих воздействий по их текущим значениям, основанный на теории наблюдателей состояния объектов управления при действии внешних возмущений. Эти алгоритмы, реализуемые в вычислительной среде в реальном времени, не требуют ни численного дифференцирования данных сигналов, ни их аналитического описания. Суть заключается в построении виртуального (т.е. реально не существующего) генератора задающего воздействия в виде динамической модели с неизвестным входом и последующим синтезом наблюдателя состояния этого генератора с использованием в корректирующих воздействиях наблюдателя реального задающего воздействия, поступающего из автономного источника. Особенности построения указанного наблюдателя: при его синтезе реализуется метод разделения движений с помощью непрерывных, ограниченных по модулю корректирующих воздействий, что позволяет избежать больших выбросов в получаемых оценках; наблюдатель не имеет собственной динамики, что также способствует снижению выбросов и упрощает процедуру синтеза параметров корректирующих воздействий [14–16].

Отметим, что и целевые сигналы, и возмущения являются внешними воздействиями для объекта управления. Но в задачах получения оценок производных задающих воздействий и внешних возмущений есть принципиальные отличия. Во-первых, в отличие от внешних возмущений целевые сигналы не действуют непосредственно на объект управления, а поступают в контроллер, где используются для формирования управления. Во-вторых, обычно задающие воздействия полагаются известными, что позволяет построить автономный наблюдатель для оценивания их производных, который не зависит от процессов, протекающих в объекте управления. Внешние возмущения, как правило, неизвестны и оцениваются по их воздействию на объект управления с использованием для построения наблюдателя возмущений модели объекта управления [15, 16]. В случае когда наблюдатель возмущений строится на основе виртуальной динамической модели возмущений, он функционирует совместно с объектом управления, сигналы которого используются для коррекции такого наблюдателя [17]. В-третьих, задача получения оценок производных задающих воздействий, как показано в данной статье, всегда имеет решение и не зависит от постановки задачи управления. В то же время задача получения оценок возмущений и их производных не всегда разрешима, в частности, когда для измерения доступны только выходы объекта управления, как правило, удается получить оценки только смешанных сигналов (комбинации переменных состояния объекта управления и внешних возмущений) [3–5].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 для восстановления  $n$  производных сигнала, поступающего в реальном времени, предложен дифференциатор в виде наблюдателя состояния, построенного на основе виртуальной канонической модели  $(n + 1)$ -го порядка с неизвестным ограниченным входом. Выходом такой модели полагается данный сигнал, его текущие значения известны, аналитическое описание отсутствует, предполагается, что его производные до  $(n + 1)$ -го порядка ограничены известными константами на рассматриваемом интервале времени. В результате целенаправленного синтеза переменные наблюдателя с заданной точностью воспроизводят неизвестные производные данного сигнала. В публикации [18] рассматривалась аналогичная постановка для гладких сигналов из класса алгебраических полиномов любых конечных степеней с непрерывными производными. Настройка наблюдателя стандартно выполнялась с помощью линейных глубоких обратных связей. В данной статье, во-первых, класс допустимых сигналов расширяется за счет кусочно-дифференцируемых составных функций, производные которых имеют точки разрыва первого рода в моменты изменения вида функций. Во-вторых, для настройки наблюдателя используются ограниченные, непрерывные, но негладкие кусочно-линейные корректирующие воздействия [3, 4, 16], которые являются гибридом линейных и разрывных управлений и имеют по два настраиваемых параметра: полку (амплитуду) и угол наклона (большой коэффициент). Они привносят в замкнутую систему положительные свойства обоих методов и исключают их недостатки. Идея заключается в том, чтобы выбором амплитуд последовательно, по каскадному принципу обеспечить попадание за конечное время аргументов корректирующих воздействий в линейные зоны, границы которых и соответственно точность оце-

нивания определяются выбором больших коэффициентов. Заметим, что в отличие от обычных линейных наблюдателей [18] в данном подходе настройка больших коэффициентов осуществляется на основе неравенств и не требует составления эталонных характеристических полиномов. В-третьих, помимо стандартного наблюдателя, который строится как реплика объектов оценивания, в данной статье рассматривается также наблюдатель без собственных движений [14–16]. При этом в системе относительно ошибок наблюдения оцениваемые сигналы присутствуют в явном виде, что существенно упрощает процедуру настройки параметров корректирующих воздействий по сравнению с базовыми алгоритмами [3, 4].

В разделе 3 разработанный метод восстановления производных применяется в системе управления движением центра масс беспилотного летательного аппарата (БПЛА). Демонстрируется также возможность оценивания внешних возмущений, действующих на объект [15, 16], с помощью наблюдателя с кусочно-линейной коррекцией, построенного как реплика модели объекта управления. Приводятся результаты численного моделирования.

## 2. Синтез динамических дифференциаторов в виде наблюдателей состояния

Представим два способа построения дифференциаторов задающего сигнала для выходной переменной следящей одноканальной системы. Без ограничения общности данные методы могут быть использованы в многоканальных системах, где для каждой компоненты вектора задающих воздействий строится свой дифференциатор соответствующего порядка, а также могут найти применение в других прикладных задачах, требующих получения производных сигналов, аналитическое описание которых неизвестно.

### 2.1. Постановка задачи

Рассмотрим случай управляемого объекта с одним входом и одним выходом  $y_1(t) \in Y \subset \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$ , где  $Y$  — открытая рабочая область изменения регулируемой переменной. Предположим, что для данного объекта в рамках тех или иных методов синтезирован закон управления, обеспечивающий отслеживание выходной переменной заданного сигнала, который зависит и от производных задающего воздействия до  $n$ -го порядка включительно. Задающее воздействие поступает в систему управления в реальном времени в виде непрерывного детерминированного сигнала  $g_1(t)$ , его аналитическое описание как функции времени не известно. Задающий сигнал является допустимым для обработки, т.е.  $g_1(t) \in G_1 \subset Y$ ,  $t \geq 0$ , и его производные до  $(n + 1)$ -го порядка включительно ограничены

$$(2.1) \quad \left| g_1^{(i)}(t) \right| \leq G_{i+1}, \quad i = \overline{1, n+1}, \quad t \geq 0,$$

где  $G_{i+1}$  — известные положительные константы, отвечающие проектным ограничениям конкретного объекта управления.

Ставится задача оценивания с заданной точностью производных задающего сигнала до  $n$ -го порядка включительно с помощью динамического на-

блюдателя состояния, который выполняет функции дифференциатора. В качестве основы для построения наблюдателя введем динамическую модель  $(n + 1)$ -го порядка, имеющую канонический вид

$$(2.2) \quad \dot{g}_i = g_{i+1}, \quad i = \overline{1, n+1}.$$

Выходом системы (2.2) полагается измеряемый сигнал  $g_1(t)$ ; переменными состояния являются задающий сигнал и его производные  $g_1^{(i)}(t) = g_{i+1}(t)$  до  $n$ -го порядка включительно; вход  $g_1^{(n+1)}(t) = g_{n+2}(t)$  — производная  $(n + 1)$ -го порядка — является неизвестной ограниченной функцией времени. В силу канонической структуры система (2.2) является наблюдаемой относительно выхода, что является предпосылкой решения задачи оценивания ее состояния.

Естественно предположить, что  $g_1(t)$  как функция времени является непрерывной и кусочно-дифференцируемой, т.е. допускается, что на разных временных интервалах она описывается разными аналитическими выражениями. Как следствие, ее производные в общем случае являются кусочно-непрерывными, ограниченными на интервалах и имеют конечное число точек разрыва первого рода, в которых форма сигнала меняется и в которых ограничения (2.1) следует понимать как односторонние. Применительно к модели (2.2) это означает, что входной виртуальный сигнал  $g_{n+2}(t)$  является неизвестной кусочно-непрерывной ограниченной функцией, которая имеет различный вид на различных временных интервалах.

Таким образом, динамическая модель (2.2) порождает достаточно широкий класс функций  $g_1(t)$ , а именно множество решений канонической системы  $(n + 1)$ -го порядка с произвольным входом  $g_{n+2}(t)$ . Допускаемые точки конечного разрыва производных можно трактовать как моменты изменения скачком начальных условий в системе (2.2).

Обратим внимание, что в рассматриваемой постановке модель (2.2) является виртуальной и не используется в контуре обратной связи в качестве генератора задающего сигнала, она служит для определения структуры и размерности наблюдателя производных данного сигнала. В других постановках входной сигнал  $g_{n+2}(t)$  может зависеть от вектора состояния модели (2.2), а также и от внешних по отношению к модели (2.2) сигналов, в частности от вектора состояния модели объекта управления. В этом смысле (2.2) является обобщением и расширением динамических моделей, используемых для имитации и генерации внешних воздействий в виде экзогенных систем с неизвестными начальными условиями [1, 17]. В [19] рассматривался генератор заданий с неопределенными параметрами. В робастной постановке задача наблюдения его состояний дополнялась решением задачи идентификации неизвестных параметров с привлечением методов теории систем с разрывными управлениями, функционирующих в скользящем режиме.

## 2.2. Наблюдатель производных стандартной структуры

В данном подразделе для системы (2.2) вводится стандартный наблюдатель состояния. Рассматриваются частные случаи, при которых можно по-

лучить асимптотические оценки производных с помощью обычной линейной коррекции. Мотивируется использование в общем случае наблюдателя с кусочно-линейными корректирующими воздействиями.

Стандартный наблюдатель состояния строится как реплика объекта, переменные которого подлежат оцениванию, т.е. в данном случае повторяет структуру виртуальной модели (2.2) и имеет вид

$$(2.3) \quad \dot{z}_i = z_{i+1} + v_i, \quad i = \overline{1, n}; \quad \dot{z}_{n+1} = v_{n+1},$$

где  $z = (z_1, \dots, z_{n+1})^T \in \mathbb{R}^{n+1}$  – вектор состояний наблюдателя,  $v_i$  ( $i = \overline{1, n+1}$ ) – корректирующие воздействия, которые формируются на основе измерений  $g_1(t)$  и переменных наблюдателя так, чтобы обеспечить стабилизацию системы относительно ошибок наблюдения  $\varepsilon_i = g_i - z_i$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ , которая в силу (2.2), (2.3) имеет вид:

$$(2.4) \quad \dot{\varepsilon}_i = \varepsilon_{i+1} - v_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad \dot{\varepsilon}_{n+1} = g_{n+2} - v_{n+1}.$$

Особенность системы (2.4) заключается в наличии неизвестного ограниченного сигнала  $g^{(n+1)}(t) = g_{n+2}(t)$ , который трактуется как внешнее возмущение. Сначала выделим частные случаи, при которых возможна асимптотическая стабилизация системы (2.4).

Если функция  $g_{n+2}(t)$  известна, то с использованием этой информации последние уравнения систем (2.3) и (2.4) примут соответственно вид:  $\dot{z}_{n+1} = g_{n+2} + v_{n+1}$ ,  $\dot{\varepsilon}_{n+1} = -v_{n+1}$ . Тогда применение обычной линейной коррекции

$$(2.5) \quad v_1 = a_1 \varepsilon_1, \quad v_2 = a_2 \varepsilon_1, \quad \dots, \quad v_{n+1} = a_{n+1} \varepsilon_1,$$

параметры которой являются коэффициентами гурвицева полинома  $\lambda^{n+1} + a_1 \lambda^n + a_2 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \lambda + a_{n+1}$ , обеспечит асимптотическую сходимость в нуль ошибок наблюдения и, следовательно, асимптотическую сходимость переменных наблюдателя к неизмеряемым производным:

$$(2.6) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_i(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} z_i(t) = g_i(t), \quad t = \overline{1, n+1}.$$

Если есть основание полагать, что задающий сигнал описывается алгебраическим полиномом с максимальной степенью  $\bar{n} = n$ , то тогда  $g_1^{(n+1)}(t) \equiv 0$ , внешнее возмущение в системе (2.4) отсутствует и линейная коррекция (2.5) также обеспечит асимптотическое оценивание производных (2.6). Если известно, что максимальная степень полиномов  $1 \leq \bar{n} < n$ , то тогда все производные начиная с  $(\bar{n} + 1)$ -й тождественно равны нулю. Соответственно порядок наблюдателя (2.3) следует понизить на  $n - \bar{n}$ . Если  $n < \bar{n} < \infty$ , то, наоборот, можно повысить порядок наблюдателя на  $\bar{n} - n$ , чтобы обеспечить асимптотические оценки (2.6). При этом попутно полученная избыточная информация о  $(n + 1)$ -й производной и выше не используется в законе управления.

В общем случае, когда о “внешнем возмущении”  $g_{n+2}(t)$  предполагается только его ограниченность по модулю (2.1), для его подавления с

необходимостью требуется применять методы теории скользящих режимов [6, 14, 15, 19, 20] или линейных систем с глубокими обратными связями. В последнем случае линейная коррекция (2.5) дополняется большим коэффициентом  $l > 1$  [21] следующим образом:

$$(2.7) \quad v_1 = a_1 l \varepsilon_1, \quad v_2 = a_2 l^2 \varepsilon_1, \quad \dots, \quad v_{n+1} = a_{n+1} l^{m+1} \varepsilon_1,$$

что обеспечивает в замкнутой системе (2.4), (2.7) стабилизацию ошибок наблюдения с заданной точностью. Известным недостатком линейных наблюдателей с большими коэффициентами является большое перерегулирование в начале переходных процессов [5, 18, 21–23], что приводит к перерегулированию и в объекте управления, обратная связь в котором формируется по сигналам наблюдателя.

Чтобы избежать указанной проблемы, в данной статье используется другой метод подавления возмущений — каскадный синтез наблюдателей с кусочно-линейными, всюду ограниченными корректирующими воздействиями [3, 4, 16] вида

$$(2.8) \quad v_1 = p_1 \text{sat}(l_1 \varepsilon_1) = \begin{cases} p_1 \text{sign}(\varepsilon_1), & |\varepsilon_1| > 1/l_1, \\ p_1 l_1 \varepsilon_1, & |\varepsilon_1| \leq 1/l_1; \end{cases}$$

$$v_i = p_i \text{sat}(l_i v_{i-1}) = \begin{cases} p_i \text{sign}(v_{i-1}), & |v_{i-1}| > 1/l_i, \\ p_i l_i v_{i-1}, & |v_{i-1}| \leq 1/l_i, \quad i = \overline{2, n+1}. \end{cases}$$

Каждое корректирующее воздействие (2.8) имеет по два настраиваемых параметра:  $p_i > 0$  — амплитуду, которая отвечает за скорость оценивания, и  $l_i > 0$  — угол наклона, который играет роль большого коэффициента и отвечает за точность оценивания. Будем говорить, что если  $|\varepsilon_1| \leq 1/l_1$ ,  $|v_{i-1}| \leq 1/l_i$ ,  $i = \overline{2, n+1}$ , то соответствующие корректирующие воздействия  $v_i$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ , (2.8) находятся в “линейной зоне”.

В [3] в рамках синтеза одноканальной системы слежения при действии внешних возмущений наблюдатель, аналогичный (2.3), (2.8), применялся для оценивания смешанных переменных (функций от переменных состояния, внешних воздействий и их производных) по измерениям ошибки слежения. Были получены иерархические системы неравенств для выбора параметров кусочно-линейных корректирующих воздействий, при которых за заданное время  $T > 0$  с заданной точностью  $\delta > 0$  обеспечивается оценивание неизмеряемых сигналов канонической системы, аналогичной (2.1)–(2.2). Соответственно в терминах решаемой задачи использование этого подхода обеспечит

$$(2.9) \quad |\varepsilon_i(t)| = |g_i(t) - z_i(t)| \leq \delta, \quad i = \overline{1, n+1}, \quad |g_{n+2}(t) - v_{n+1}(t)| \leq \delta, \quad t \geq T.$$

Первая группа неравенств (2.9) означает, что переменные наблюдателя (2.3) служат оценками соответствующих производных задающего сигнала, последнее неравенство (2.9) показывает, что корректирующее воздействие последнего уравнения может служить оценкой неизвестного входа. Как следствие, для оценивания  $n$  производных можно использовать наблюдатель, порядок которого по сравнению с (2.3) понижен на единицу, при этом  $n$ -я производная

будет трактоваться как возмущение, а ее оценкой будет служить корректирующее воздействие  $v_n(t)$  [3].

*Замечание.* Для простоты изложения в оценках (2.9) и далее области сходимости различных ошибок наблюдения, имеющих различные единицы измерения, будем единообразно обозначать  $\delta$  и придавать им одинаковые числовые значения  $\delta > 0$ , но в соответствующих единицах измерения по умолчанию.

Основное преимущество наблюдателя (2.3), (2.8) по сравнению с наблюдателем с глубокими обратными связями заключается в том, что корректирующие воздействия (2.8) всюду ограничены, следовательно, будут существенно ограничены всплески оценочных сигналов в начале всех переходных процессов, которые порождаются сменой формы выходного кусочно-дифференцируемого сигнала. Результаты моделирования показали [23], что всплески оценочных сигналов производных, полученные с помощью линейного наблюдателя с большими коэффициентами, каждый раз увеличиваются на порядок с ростом порядка производной (что обусловлено иерархией большого коэффициента (2.7)), в отличие от оценочных сигналов наблюдателя с кусочно-линейными корректирующими воздействиями, которые заведомо ограничены амплитудами корректирующих воздействий. Таким образом, применение наблюдателя (2.3), (2.8) существенно расширяет класс допустимых функций, оценочные сигналы производных которых могут быть непосредственно использованы в практических приложениях без дополнительных ограничений.

К преимуществам наблюдателя (2.3), (2.8) можно также отнести каскадную процедуру настройки на основе иерархии неравенств, не требующую составления эталонных характеристических полиномов (в отличие от (2.5)). Заметим, что в указанных выше частных случаях применение корректирующих воздействий (2.8) не только обеспечит асимптотические оценки (2.6), но и даст возможность последовательно управлять темпами сходимости каждой переменной замкнутой системы. Однако для настройки амплитуд и в частных, и в общем случаях требуется определять области изменения ошибок наблюдения в процессе регулирования [3, 4], что усложняет вычислительный аспект, а также приводит к завышенным расчетным оценкам для выбора параметров. Соответствующая процедура будет продемонстрирована в подразделе 3.4 на примере оценивания производных задающих сигналов БПЛА.

В подразделе 2.3 представлен основной результат. Для снятия указанной проблемы предложена другая структура наблюдателя производных с кусочно-линейными корректирующими воздействиями, который обеспечивает такое же качество оценивания (2.9), как и наблюдатель (2.3), (2.8), но имеет более простую первичную настройку благодаря исключению из анализа собственных движений ошибок наблюдения.

### *2.3. Наблюдатель производных без собственных движений*

В данном подразделе представлен основной результат. Для системы (2.2) вводится наблюдатель состояния специальной структуры без собственных движений. Выделяются особенности каскадного синтеза кусочно-линейных корректирующих воздействий, при котором реализуется разделение движе-

ний в пространстве ошибок наблюдения. Формализуются особенности оценивания кусочно-непрерывных сигналов, с учетом которых формулируется теорема о существовании решения задачи оценивания производных предложенным методом.

На основе модели (2.2) построим наблюдатель-дифференциатор специального вида

$$(2.10) \quad \dot{z}_i = v_i, \quad i = \overline{1, n+1},$$

что приведет к системе относительно ошибок наблюдения

$$(2.11) \quad \dot{\varepsilon}_i = g_{i+1} - v_i, \quad i = \overline{1, n+1},$$

и следующему виду кусочно-линейных корректирующих воздействий:

$$(2.12) \quad v_1 = p_1 \text{sat}(l_1 \varepsilon_1) = \begin{cases} p_1 \text{sign}(\varepsilon_1), & |\varepsilon_1| > 1/l_1, \\ p_1 l_1 \varepsilon_1, & |\varepsilon_1| \leq 1/l_1; \end{cases}$$

$$v_i = p_i \text{sat}(l_i(v_{i-1} - z_i)) = \begin{cases} p_i \text{sign}(v_{i-1} - z_i), & |v_{i-1} - z_i| > 1/l_i, \\ p_i l_i (v_{i-1} - z_i), & |v_{i-1} - z_i| \leq 1/l_i, \quad i = \overline{2, n+1}. \end{cases}$$

Отметим, что в отличие от стандартного наблюдателя (2.3), приводящего к системе (2.4), в системе (2.11)–(2.12) асимптотическая сходимость ошибок наблюдения (2.6) может быть обеспечена только тогда, когда все  $n+1$  производных затухают со временем. Но даже в этом частном случае с помощью обычной линейной коррекции (2.5) невозможно обеспечить асимптотическую стабилизацию нейтральной системы (2.11) из-за наличия неустраимых нулевых собственных значений. Таким образом, синтез наблюдателя (2.10) требует применения специальных подходов, основанных на методе разделения движений ошибок наблюдения в замкнутой системе.

В силу структуры системы (2.11) сигналы, на основе которых формируются корректирующие воздействия  $v_i$ ,  $i = \overline{2, n+1}$ , (2.12), можно представить в виде

$$(2.13) \quad v_{i-1} - z_i = g_i - \dot{\varepsilon}_{i-1} - z_i = \varepsilon_i - \dot{\varepsilon}_{i-1}, \quad i = \overline{2, n+1},$$

что совпадает с детализацией соответствующих корректирующих воздействий (2.8) системы (2.4), а именно

$$(2.14) \quad v_{i-1} = \varepsilon_i - \dot{\varepsilon}_{i-1}, \quad i = \overline{2, n+1}.$$

Отличие состоит в том, что в системе (2.11) оцениваемые сигналы присутствуют в явном виде и области их изменения априори известны (2.1), что позволяет достаточно просто обеспечить стабилизацию с заданной точностью ошибок наблюдения.

Согласно идеологии метода разделения движений, реализуемой при каскадном синтезе наблюдателя с кусочно-линейной коррекцией [3, 4, 15, 16], в замкнутой системе (2.11)–(2.12) с учетом (2.13) выбором амплитуд  $p_i > 0$ ,

$i = \overline{1, n+1}$ , требуется последовательно обеспечить сходимость аргументов корректирующих воздействий в линейные зоны:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} |\varepsilon_1(t)| \leq 1/l_1, \quad t \geq t_1 \geq 0 &\Rightarrow |v_1(t) - z_2(t)| = |\varepsilon_2(t) - \dot{\varepsilon}_1(t)| \leq 1/l_2, \\ t \geq t_2 > t_1 &\Rightarrow |\varepsilon_3(t) - \dot{\varepsilon}_2(t)| \leq 1/l_3, \\ t \geq t_3 > t_2 &\Rightarrow \dots \Rightarrow |\varepsilon_{n+1}(t) - \dot{\varepsilon}_n(t)| \leq 1/l_{n+1}, \quad t \geq t_{n+1} > t_n. \end{aligned}$$

Особенность каскадного синтеза заключается в том, что только в первом уравнении системы (2.11)–(2.12) равенство знаков регулируемой переменной и ее корректирующего воздействия имеет место на протяжении всего процесса:  $\text{sign}(\varepsilon_1(t)) = \text{sign}(v_1(t))$ ,  $t \geq 0$ . Для остальных уравнений совпадения знаков  $\text{sign}(\varepsilon_i(t)) = \text{sign}(v_i(t))$ ,  $i = \overline{2, n+1}$ , гарантируются только вне областей (2.15) при достаточном затухании производных ошибок наблюдения в предыдущих уравнениях.

Грубой (первичной) настройкой дифференциатора будем называть процедуру, в которой время оценивания  $T > 0$  априори не устанавливается. Выбором параметров корректирующих воздействий (2.12) обеспечивается последовательная сходимость ошибок наблюдения в заданные окрестности нуля, при этом не учитываются: скорости сходимости в линейные зоны (2.15) и затухания производных ошибок наблюдения, а также ошибки уравнений статики, т.е. полагается, что  $\dot{\varepsilon}_i(t) \approx 0$ ,  $t > t_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

В этих допущениях на основе (2.15) и достаточных условий сходимости имеем первичные нижние оценки для выбора параметров кусочно-линейной коррекции (2.12), обеспечивающих первую группу неравенств (2.9):

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \varepsilon_i \dot{\varepsilon}_i = \varepsilon_i(g_{i+1} - p_i \text{sign}(\varepsilon_i)) \leq |\varepsilon_i| (G_{i+1} - p_i) < 0 &\Rightarrow p_i > G_{i+1}, \\ |\varepsilon_i| \leq 1/l_i < \delta &\Rightarrow l_i > 1/\delta, \quad i = \overline{1, n+1}. \end{aligned}$$

Заметим, что второе неравенство (2.16) можно использовать и для первичной настройки больших коэффициентов базового наблюдателя (2.3), (2.8) в силу (2.14). Однако и грубая ( $p_i > |\varepsilon_{i+1}(t, p_{i+1})|$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $p_{n+1} > G_{n+2}$  [3]), и тонкая (т.е. с обеспечением заданного времени сходимости с учетом быстрых движений) настройки его амплитуд уже не являются автономными, как в первом выражении (2.16), а основаны на иерархии неравенств (как будет показано в подразделе 3.4, выбор допустимой величины  $p_i$ ,  $i = \overline{n, 1}$ , зависит от принятого значения  $p_{i+1}$ ). Преимущество дифференциатора (2.10), (2.12) по сравнению с наблюдателем (2.3), (2.8) заключается в том, что независимый выбор его амплитуд сохранится и при тонкой настройке с учетом заданного времени сходимости (см. Приложение). Кроме того, диапазоны изменения оценочных сигналов (2.1), как правило, меньше расчетных максимальных значений соответствующих ошибок наблюдения в начале переходного процесса, что позволит обеспечить заданное время оценивания с меньшими амплитудами и, как следствие, уменьшить перерегулирование.

Отметим, что порядок дифференциатора (2.10) также может быть понижен на единицу, если использовать корректирующее воздействие последнего уравнения в качестве оценочного сигнала для  $n$ -й производной (аналогично второму неравенству (2.9)). Более того, корректирующие воздействия при

выполнении уравнений статики могут служить оценками не только входного сигнала, но и всех остальных производных:

$$\dot{\varepsilon}_i = g_{i+1} - v_i \approx 0 \Rightarrow v_i(t) \approx g_{i+1}(t), \quad i = \overline{1, n+1}.$$

Однако на практике в качестве оценочных сигналов производных до  $n$ -го порядка рекомендуется использовать соответствующие переменные дифференциатора:  $z_i(t) \approx g_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ ,  $t \geq T$ . Причина заключается в том, что при каждой смене формы задающего сигнала корректирующие воздействия  $v_i(t) \leq p_i$ ,  $i = \overline{2, n+1}$ , могут выходить на предельные значения (в отличие от переменных наблюдателя, которые в общем случае этих пиков не достигают), что приведет к большей ошибке оценивания и негладкости оценочных сигналов в начале переходных процессов. По указанным причинам для оценивания  $1 < n$  незатухающих производных целесообразно использовать полноразмерный дифференциатор (2.10), (2.12) порядка  $n+1$ , и далее будем рассматривать его тонкую настройку без соблюдения точности оценивания входного сигнала (т.е. без требования выполнения последнего неравенства (2.9)). При необходимости получения оценки ненулевой производной порядка  $n+1$  рекомендуется использовать дифференциатор порядка  $n+2$ .

Что касается установки начальных условий в дифференциаторе (2.10), то с учетом измерений  $g_1(t)$  и для сокращения времени оценивания целесообразно принять

$$z_1(0) = g_1(0) \Rightarrow \varepsilon_1(0) = 0, \quad z_i(0) = 0 \Rightarrow \varepsilon_i(0) = g_i(0), \quad |\varepsilon_i(0)| \leq G_i, \quad i = \overline{2, n+1}.$$

Соответствующие оценки начальных условий ошибок наблюдения являются опорными при тонкой настройке дифференциатора гладкого сигнала с непрерывными производными, которая в рамках используемого подхода обеспечит

$$|g_1(t) - z_1(t)| \leq \delta, \quad t \geq 0; \quad |g_i(t) - z_i(t)| \leq \delta, \quad i = \overline{2, n+1}, \quad t \geq T.$$

Теперь формализуем особенности процесса оценивания кусочно-дифференцируемых функций, удовлетворяющих (2.1). Наложим следующее условие на формирование задающего сигнала. Пусть минимальный интервал времени, на котором  $g_1(t)$  является  $n+1$  раз дифференцируемой функцией, равен  $\tau_{\min} \leq \tau_j - \tau_{j-1}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , где  $[\tau_{j-1}; \tau_j)$  — текущий интервал времени, на котором сигнал является гладким. В точках  $\tau_1, \tau_2, \dots$ :  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$  его производные могут иметь конечные разрывы, которые трактуются как переустановка скачком начальных условий в виртуальной модели (2.2). Каждая следующая переустановка допускается не раньше, чем через  $\tau_{\min}$ . Соответственно при настройке параметров дифференциатора следует положить  $T \ll \tau_{\min}$ , тогда ошибки наблюдения будут находиться в заданной окрестности нуля в интервалах

$$(2.17) \quad |\varepsilon_i(t)| \leq \delta, \quad \tau_{j-1} + T \leq t < \tau_{\min} \leq \tau_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad i = \overline{2, n+1}; \\ |\varepsilon_1(t)| \leq \delta, \quad t \geq 0.$$

Максимальные величины скачков производных  $|g_i(\tau_j + 0) - g_i(\tau_j - 0)| \leq 2G_i$ ,  $i = \overline{2, n+1}$ , с учетом  $z_i(\tau_j - 0) \approx g_i(\tau_j - 0)$  можно принять в качестве консервативных расчетных оценок начальных условий системы (2.11) для всех

интервалов:

$$(2.18) \quad |\varepsilon_1(\tau_{j-1})| \leq \delta, \quad |\varepsilon_i(\tau_{j-1})| \leq 2G_i, \quad i = \overline{2, n+1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Данные оценки позволяют не учитывать особые точки  $\tau_1, \tau_2, \dots$  и выполнить тонкую настройку параметров корректирующих воздействий (2.12), рассматривая только наименьший интервал  $t \in [0; \tau_{\min})$ , где  $g_1(t)$  является гладкой функцией с непрерывными производными. Параметры, выбранные исходя из расчетных начальных условий (2.18), а также выполнение  $T \ll \tau_{\min}$  обеспечат нахождение ошибок наблюдения в заданной окрестности нуля в указанное время (2.17). В сделанных предположениях имеет место следующая теорема.

*Теорема.* Если в системе (2.11)–(2.12) условия (2.1) выполняются, то тогда для любых начальных условий  $\varepsilon_i(0)$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ , и сколь угодно малых  $\delta, T > 0$  найдутся такие положительные действительные числа  $p_i^*, l_i^*$ , что при любых  $p_i, l_i$ :  $p_i > p_i^*, l_i > l_i^*, i = \overline{1, n+1}$ , выполняются неравенства

$$(2.19) \quad |\varepsilon_i(t)| = |z_i(t) - g_i(t)| \leq \delta, \quad i = \overline{1, n+1}, \quad t \geq T.$$

В Приложении приведено конструктивное доказательство теоремы, в ходе которого получены неравенства (П.8), (П.13) для выбора параметров (2.12) с учетом быстрых движений, обеспечивающие (2.19).

Заметим, что априори моменты времени  $\tau_1, \tau_2, \dots$  и  $\tau_{\min} > 0$  неизвестны. Если длина текущего интервала окажется меньше принятого при настройке времени оценивания  $T > \tau_j - \tau_{j-1}$ , то тогда на этом интервале заданная точность оценивания (2.17) в общем случае достигнута не будет, можно только гарантировать ограниченность ошибок оценивания:

$$|\varepsilon_i(\tau_j)| \leq 2G_i + (G_{i+1} + p_i)(\tau_j - \tau_{j-1}), \quad i = \overline{2, n+1}.$$

### 3. Синтез системы управления БПЛА без использования генераторов внешних воздействий

В данном разделе представленные методы построения дифференциаторов применяются в системе управления беспилотным летательным аппаратом (БПЛА) для оценивания производных задающих сигналов и внешних возмущений.

#### 3.1. Модель объекта управления. Постановка задач

Рассматривается математическая модель пространственного движения центра масс (материальной точки) БПЛА в траекторной системе координат, представленная в нормальной форме [12, 22]

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= ag + \eta + B(\theta, \Psi)u, \end{aligned}$$

где  $x_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13})^T \in \mathbb{R}^3$  — вектор пространственных координат центра масс (выходные регулируемые переменные) с элементами  $x_{11} := L$  — продольная дальность,  $x_{12} := H$  — высота,  $x_{13} := Z$  — боковое смещение;  $x_2 =$

$= (x_{21}, x_{22}, x_{23})^T \in \mathbb{R}^3$  — вектор скорости пространственных координат с элементами

$$(3.2) \quad x_{21} := V \cos \theta \cos \Psi, \quad x_{22} := V \sin \theta, \quad x_{23} := -V \cos \theta \sin \Psi,$$

где  $V$  — путевая скорость,  $\theta$  — угол наклона траектории,  $\Psi$  — путевой угол;  $g$  — ускорение свободного падения,  $a = (0; -1; 0)^T$ ;  $u = (u_1, u_2, u_3)^T \in \mathbb{R}^3$  — вектор управления, элементы которого  $u_1 = gn_x$ ,  $u_2 = gn_y \cos \gamma$ ,  $u_3 = gn_y \sin \gamma$  выражены через продольную  $n_x$  и поперечную  $n_y$  перегрузки, а также угол крена  $\gamma$  вектора перегрузки,  $|\gamma(t)| < \pi$ ;  $\eta(t)$  — вектор внешних детерминированных возмущений;

$$B = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \Psi & -\sin \theta \cos \Psi & \sin \Psi \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta \sin \Psi & \sin \theta \sin \Psi & \cos \Psi \end{pmatrix}, \quad \det B \equiv 1, \quad B^{-1} = B^T.$$

Рассматривается проблема синтеза обратной связи, обеспечивающей отслеживания выходными переменными  $x_1(t)$  заданных сигналов  $g_1(t) = (g_{11}, g_{12}, g_{13})^T$  в следующих предположениях:

— прямым измерениям доступны пространственные координаты  $x_1(t)$ , а также  $V(t)$ ,  $\theta(t)$ ,  $\Psi(t)$ , через которые пересчитываются элементы вектора скорости  $x_2(t)$  (3.2);

— генераторы внешних воздействий в системе управления отсутствуют, сигналы  $g_1(t)$  поступают в нее в реальном времени из независимого источника, их аналитический вид неизвестен, но предполагается, что задающие воздействия корректны и могут быть отработаны конкретным БПЛА;

— элементы векторов  $\eta(t)$ ,  $\dot{g}_1(t) = g_2(t)$ ,  $\ddot{g}_1(t) = g_3(t)$ ,  $\ddot{\ddot{g}}_1(t) = g_4(t)$  являются неизвестными функциями времени, нормы векторов ограничены известными константами:

$$(3.3) \quad |\eta(t)| \leq H, \quad |g_1^{(j)}(t)| \leq G_j, \quad t \geq 0, \quad j = 1, 3,$$

здесь и далее под обозначением  $|\ast|$  следует понимать евклидову норму вектора.

Ставится задача синтеза динамической обратной связи, обеспечивающей стабилизацию ошибок слежения  $e_1(t) = x_1(t) - g_1(t)$ , которая включает решение следующих подзадач:

1) синтез базового (т.е. в предположении, что все внешние сигналы известны) закона комбинированного управления, обеспечивающего экспоненциальную сходимость в нуль ошибки слежения с заданной скоростью:

$$(3.4) \quad |e_1(t)| \Big|_{t \rightarrow +\infty} = O(\exp(-k_1 t)) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} e_1(t) = 0, \quad k_1 = \text{const} > 0;$$

2) синтез наблюдателя внешних возмущений, построенный как реплика редуцированной модели объекта управления (3.1), с получением оценок

$$(3.5) \quad |\eta(t) - v_0(t)| \leq \delta, \quad t \geq T > 0,$$

где  $v_0 \in \mathbb{R}^3$  — корректирующие воздействия наблюдателя возмущений;

3) синтез наблюдателя производных задающих воздействий, построенный как реплика виртуальной канонической модели (2.2), с получением оценок

$$(3.6) \quad |g_i(t) - z_i(t)| \leq \delta, \quad t \geq T > 0, \quad i = 2, 3,$$

где  $z_i \in \mathbb{R}^3$  — переменные состояния наблюдателя производных.

Как будет показано далее, данные наблюдатели функционируют и настраиваются автономно друг от друга, поэтому имеется возможность реализовать процесс оценивания внешних сигналов за заданное время  $T > 0$  с одинаковой точностью  $\delta > 0$  (см. замечание). Как следствие, использование оценочных сигналов в базовом законе управления обеспечит экспоненциальную сходимость ошибок слежения с заданной скоростью в некоторую окрестность нуля

$$(3.7) \quad |e_1(t)| \leq \bar{\delta} + O(\exp(-k_1 t)), \quad t > T.$$

Приведем последовательно решение указанных подзадач.

### 3.2. Синтез базового закона управления

Модель объекта управления (3.1) представлена в блочно-канонической форме “вход–выход” и является управляемой. Для синтеза базового закона управления целесообразно использовать блочный подход [4–7, 22], который в отличие от стандартных методов позволяет непосредственно установить заданную скорость стабилизации ошибок слежения (3.4) на этапе синтеза.

Согласно идеологии блочного принципа запишем первое уравнение системы (3.1) относительно ошибки слежения  $\dot{e}_1 = x_2 - g_2$ , где переменная  $x_2$  трактуется как фиктивное управление и выбирается в виде  $x_2 = -k_1 e_1 + g_2$ , где  $k_1 = \text{const} > 0$  — заданный коэффициент усиления (3.4). Задача синтеза заключается в выборе истинного управления, обеспечивающего стабилизацию невязки между реальным и выбранным фиктивным управлением:

$$(3.8) \quad e_2 = x_2 - g_2 + k_1 e_1, \quad e_2 = (e_{21}, e_{22}, e_{23})^T.$$

Относительно ошибки слежения и невязки (3.8) получим следующую систему:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \dot{e}_1 &= -k_1 e_1 + e_2, \\ \dot{e}_2 &= q(x_2, g_2, g_3, \eta) + B(\theta, \Psi)u, \end{aligned}$$

где

$$(3.10) \quad q(x_2, g_2, g_3, \eta) = ag - g_3 + k_1 \dot{e}_1 + \eta = ag - g_3 + k_1(x_2 - g_2) + \eta.$$

В предположении, что не только все внутренние, но и внешние сигналы известны, в терминах системы (3.7) сформируем закон комбинированного управления с линейной стабилизирующей составляющей

$$(3.11) \quad u = -B^T(\theta, \Psi)(k_2 e_2 + q(x_2, g_2, g_3, \eta)), \quad k_2 = \text{const} > 0$$

и получим замкнутую линейную виртуальную систему (3.7), (3.9) вида

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= -k_1 e_1 + e_2, \\ \dot{e}_2 &= -k_2 e_2.\end{aligned}$$

При  $k_2 \geq k_1$  переменные этой системы стремятся к нулю с заданной скоростью

$$|e_2(t)| \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(\exp(-k_2 t)) \Rightarrow |e_1(t)| \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(\exp(-k_1 t)) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = g_1(t),$$

поставленная задача (3.4) выполняется.

При реализации закона управления (3.11) по оценочным сигналам внешних воздействий (3.5), (3.6) с учетом (3.8), (3.10) имеем

$$\begin{aligned}\bar{u} &= -B(\theta, \Psi)^T(k_2(x_2 - z_2 + k_1(x_1 - g_1)) + ag - z_3 + k_1(x_2 - z_2) + v_0) = \\ (3.12) \quad &= -B^T(\theta, \Psi)(k_2 e_2 + q(x_2, g_2, g_3, \eta) + \varphi(t)),\end{aligned}$$

где  $\varphi(t)$  — суммарный сигнал ошибок оценивания,  $|\varphi(t)| \leq \delta(k_2 + k_1 + 2)$ ,  $t > T$ , с учетом которого замкнутая виртуальная система (3.9), (3.12) принимает вид

$$\dot{e}_1 = -k_1 e_1 + e_2, \quad \dot{e}_2 = -k_2 e_2 + \varphi(t),$$

а ее переменные при  $t > T$  последовательно сходятся в указанные окрестности нуля:

$$\begin{aligned}|e_2(t)| &\leq \frac{\delta(k_2 + k_1 + 2)}{k_2} + O(\exp(-k_2 t)) \Rightarrow \\ \Rightarrow |e_1(t)| &\leq \frac{\delta(k_2 + k_1 + 2)}{k_2 k_2} + O(\exp(-k_1 t)).\end{aligned}$$

Для решения задачи слежения с заданной точностью (3.7) потребуется обеспечить при решении задач наблюдения (3.5), (3.6) следующую точность оценивания:

$$(3.13) \quad \frac{\delta(k_2 + k_1 + 2)}{k_2 k_2} \leq \bar{\delta} \Rightarrow \delta \leq \bar{\delta} \frac{k_2 k_2}{k_2 + k_1 + 2}.$$

### 3.3. Синтез наблюдателя возмущений

Используем возможности наблюдателей с кусочно-линейными корректирующими воздействиями восстанавливать при определенных условиях внешние ограниченные сигналы (входы) без наличия их динамической модели (см. второе неравенство (2.9)) и будем оценивать внешние возмущения по их воздействию на объект в процессе управления. В качестве основы для наблюдателя возмущений примем второе уравнение исходной системы (3.1)

$$\dot{x}_2 = ag + \eta + B(\theta, \Psi)\bar{u},$$

где все параметры и сигналы, кроме  $\eta(t)$ , известны. Наблюдатель-дифференциатор строится как реплика этой системы с использованием всех известных сигналов в виде

$$(3.14) \quad \dot{z}_0 = ag + B(\theta, \Psi)\bar{u} + v_0, \quad z_0, \quad v_0 \in \mathbb{R}^3,$$

что приведет к следующей системе относительно ошибок наблюдения  $\varepsilon_0 = x_2 - z_0 \in \mathbb{R}^3$ :

$$(3.15) \quad \dot{\varepsilon}_0 = \eta - v_0.$$

Для решения поставленной задачи (3.5) используем кусочно-линейные корректирующие воздействия

$$(3.16) \quad v_{0j} = p \operatorname{sat}(l\varepsilon_{0j}) = \begin{cases} p \operatorname{sign}(\varepsilon_{0j}), & |\varepsilon_{0j}| > 1/l; \\ pl\varepsilon_{0j}, & |\varepsilon_{0j}| \leq 1/l, \quad j = \overline{1, 3}, \end{cases}$$

с одинаковыми (для простоты изложения) параметрами  $p, l = \operatorname{const} > 0$ .

Установим в наблюдателе (3.14) следующие начальные условия

$$z_0(0) = x_2(0) \Rightarrow \varepsilon_0(0) = \vec{0},$$

что сразу обеспечит нахождение ошибки наблюдения в линейной зоне.

Чтобы обеспечить  $|\varepsilon_0(t)| \leq 1/l$  на протяжении всего процесса при  $t \geq 0$ , выберем амплитуду корректирующих воздействий на основе достаточных условий сходимости в линейную зону, аналогичных первому выражению (2.16). В силу (3.3) имеем:

$$(3.17) \quad \varepsilon_0^T \dot{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0(\eta - p \operatorname{sign}(\varepsilon_0)) \leq |\varepsilon_0| (H - p) < 0 \Rightarrow p > H.$$

Аналогично второму неравенству (2.16) получим первичную оценку для выбора второго параметра, обеспечивающего заданную точность стабилизации ошибки наблюдения:

$$|\varepsilon_0(t)| \leq 1/l < \delta \Rightarrow l > 1/\delta.$$

Более детально: в линейной зоне система (3.15)–(3.16) имеет вид  $\dot{\varepsilon}_0 = \eta - pl\varepsilon_0$ , тогда

$$(3.18) \quad \varepsilon_0^T \dot{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0^T (\eta - pl\varepsilon_0) \leq |\varepsilon_0| (H - pl\delta) < 0 \Rightarrow l > H/(p\delta).$$

С учетом (3.17) нижняя оценка (3.18) меньше, чем первичная. Однако основная цель построения наблюдателя (3.14) — обеспечить заданную точность оценивания внешнего возмущения (3.5). С этой целью оценим решение системы (3.15), (3.16) на интервале  $[0; T]$ :

$$|\varepsilon_0(T)| \leq \frac{|\eta(t)|}{pl} (1 + e^{-plT}) \leq \frac{H}{pl} + \frac{H}{pl} e^{-plT} \Rightarrow pl |\varepsilon_0(T)| \leq H + H e^{-plT}.$$

Из данного выражения с учетом  $v_0(t) = pl\varepsilon_0(t)$  следует, что при  $t \geq T$  корректирующее воздействие сходится к оцениваемому сигналу с заданной точностью, если

$$|\eta_2(t) - v_0(t)| \leq \delta \Leftrightarrow He^{-plT} \leq \delta \Rightarrow l > \frac{1}{pT} \ln \frac{H}{\delta}.$$

В итоге имеем нижнюю оценку для выбора большого коэффициента, при котором обеспечивается стабилизация ошибок наблюдения и их производных за заданное время

$$(3.19) \quad l > \frac{1}{p} \max \left\{ \frac{H}{\delta}; \frac{1}{T} \ln \frac{H}{\delta} \right\},$$

что в совокупности с (3.18) и решает поставленную задачу (3.5). Заметим, что для получения менее консервативных оценок следует рассматривать систему (3.15)–(3.16) покомпонентно.

#### 3.4. Синтез наблюдателя производных задающих воздействий

Основой для построения наблюдателя производных задающих воздействий является виртуальная модель (2.2), которая в данном случае имеет три блока третьей размерности:

$$\dot{g}_1 = g_2, \quad \dot{g}_2 = g_3, \quad \dot{g}_3 = g_4(t),$$

где  $g_1(t) \in \mathbb{R}^3$  — измеряемый выход,  $g_i \in \mathbb{R}^3$ ,  $i = \overline{2,4}$ , — неизвестные ограниченные сигналы (3.3). Для получения оценок первых  $g_2(t)$  и вторых  $g_3(t)$  производных задающих сигналов с заданными показателями (3.6) используем стандартный наблюдатель с целью продемонстрировать процедуру его настройки [3]. Выражения (2.3), (2.4), (2.8) в данном случае принимают вид:

$$(3.20) \quad \dot{z}_1 = z_2 + v_1, \quad \dot{z}_2 = z_3 + v_2, \quad \dot{z}_3 = v_3, \quad z_i \in \mathbb{R}^3,$$

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_2 - v_1, & \dot{\varepsilon}_2 &= \varepsilon_3 - v_2, & \dot{\varepsilon}_3 &= g_4(t) - v_3, \\ \varepsilon_i &= g_i - z_i = (\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \varepsilon_{i3})^T; \end{aligned}$$

$$(3.22) \quad v_{1j} = p_1 \text{sat}(l_1 \varepsilon_{1j}) = \begin{cases} p_1 \text{sign}(\varepsilon_{1j}), & |\varepsilon_{1j}| > 1/l_1; \\ p_1 l_1 \varepsilon_{1j}, & |\varepsilon_{1j}| \leq 1/l_1, \end{cases} \quad p_1, l_1 = \text{const} > 0;$$

$$(3.22) \quad v_{ij} = p_j \text{sat}(l_j \varepsilon_{ij}) = \begin{cases} p_j \text{sign}(v_{i-1,j}), & |v_{i-1,j}| > 1/l_i; \\ p_j l_j v_{i-1,j}, & |v_{i-1,j}| \leq 1/l_i, \end{cases} \quad p_i, l_i = \text{const} > 0, \\ i = 2, 3, \quad j = \overline{1,3}.$$

Установим в наблюдателе начальные условия  $z_1(0) = g_1(0)$ ,  $z_i(0) = \vec{0}$ ,  $i = 2, 3$ . Допуская смену формы непрерывных задающих сигналов  $g_1(t)$  в процессе управления, для настройки параметров принимаются оценки начальных условий системы (3.21), аналогичные (2.18):

$$(3.23) \quad |\varepsilon_1(0)| \leq \delta, \quad |\varepsilon_i(0)| \leq 2G_i, \quad i = 2, 3.$$

Разделим интервал оценивания на отрезки  $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = T$  и формализуем желаемое поведение переменных виртуальной системы (3.21)–(3.22), обеспечивающее решение поставленной задачи (3.6):

$$\begin{aligned}
 & 1) |\varepsilon_1(t)| \leq 1/l_1 \leq \delta, \quad t \geq 0; \\
 & 2) |\varepsilon_2(t) - v_1(t)| \leq \Delta_2 < \delta \Leftrightarrow v_1(t) = \varepsilon_2(t) - \alpha_2(t), \quad |\alpha_2(t)| \leq \Delta_2, \quad t \geq t_1; \\
 (3.24) \quad & 3) |v_1(t)| \leq 1/l_2 \Leftrightarrow |\varepsilon_2(t)| \leq \Delta_2 + 1/l_2 \leq \delta, \quad t \geq t_2; \\
 & 4) |\varepsilon_3(t) - v_2(t)| \leq \Delta_3 < \delta \Leftrightarrow v_2(t) = \varepsilon_3(t) - \alpha_3(t), \quad |\alpha_3(t)| \leq \Delta_3, \quad t \geq t_3; \\
 & 5) |v_2(t)| \leq 1/l_3 \Leftrightarrow |\varepsilon_3(t)| \leq \Delta_3 + 1/l_3 \leq \delta, \quad t \geq t_4.
 \end{aligned}$$

Нечетные неравенства в (3.24), которые означают попадание (и нахождение) в линейные зоны аргументов соответствующих корректирующих воздействий (3.22), обеспечиваются выбором амплитуд  $p_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ . Вне линейных зон система (3.21), (3.22) представима в виде:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_2 - p_1 \text{sign}(\varepsilon_1), \quad \dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_3 - p_2 \text{sign}(\varepsilon_2 - \alpha_2), \quad \dot{\varepsilon}_3 = g_4(t) - p_3 \text{sign}(\varepsilon_3 - \alpha_3).$$

Достаточные условия для выбора амплитуд, аналогичные (2.16), в данном случае имеют вид:

$$\begin{aligned}
 (3.25) \quad \varepsilon_i^T \dot{\varepsilon}_i = \varepsilon_i^T (\varepsilon_{i+1} - p_i \text{sign}(\varepsilon_i)) &\leq |\varepsilon_i| (|\varepsilon_{i+1}| - p_i) < 0 \Rightarrow p_i > |\varepsilon_{i+1}|, \\
 &i = \overline{1, 3}, \quad \varepsilon_4 := g_4.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что сходимость ошибок наблюдения  $\varepsilon_i(t)$ ,  $i = 2, 3$ , в указанные области (3.24) гарантируется только при  $t > t_{2i-3}$  (3.24), определим области их изменения с учетом (3.23):

$$|\varepsilon_2(t)| \leq E_2 = 2G_2 + (E_3 + p_2)t_1, \quad |\varepsilon_3(t)| \leq E_3 = 2G_3 + (G_4 + p_3)t_3, \quad t \geq 0.$$

С учетом (3.25) и данных оценок получим неравенства для последовательного (снизу вверх) выбора амплитуд, которые обеспечивают на интервалах  $[t_3; t_4]$ ,  $[t_1; t_2]$  сходимость ошибок наблюдения  $\varepsilon_3(t)$ ,  $\varepsilon_2(t)$  соответственно в указанные области нуля (3.24), а также выполнение первого неравенства (3.24):

$$\begin{aligned}
 & p_3 > G_4 + \frac{E_3 - \delta}{t_4 - t_3} = G_4 + \frac{2G_3 + (G_4 + p_3)t_3 - \delta}{t_4 - t_3} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow p_3 > \frac{2G_3 + G_4 t_4 - \delta}{t_4 - 2t_3}, \quad t_2 < t_3 < \frac{t_4}{2}; \\
 (3.26) \quad & p_2 > E_3 + \frac{E_2 - \delta}{t_2 - t_1} = E_3 + \frac{2G_2 + (E_3 + p_2)t_1 - \delta}{t_2 - t_1} \Rightarrow p_2 > \\
 & > \frac{2G_2 + E_3 t_2 - \delta}{t_2 - 2t_1} = \frac{2G_2 + (2G_3 + (G_4 + p_3)t_3)t_2 - \delta}{t_2 - 2t_1}, \quad 0 < t_1 < \frac{t_2}{2}; \\
 & p_1 > E_2 = 2G_2 + (E_3 + p_2)t_1.
 \end{aligned}$$

В неравенствах (3.26) продемонстрирована указанная в разделе 2 зависимость выбора амплитуд в верхних уравнениях от принятых значений амплитуд в нижних уравнениях.

В линейных зонах в указанных интервалах система (3.21), (3.22) представима в виде:

$$(3.27) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_2 - p_1 l_1 \varepsilon_1, & t \geq 0; \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \varepsilon_3 - p_2 l_2 (\varepsilon_2 - \alpha_2), & t \geq t_2; \\ \dot{\varepsilon}_3 &= g_4(t) - p_3 l_3 (\varepsilon_3 - \alpha_3), & t \geq t_4. \end{aligned}$$

Из достаточных условий устойчивости аналогично (3.18) получим неравенства для выбора больших коэффициентов наблюдателя, обеспечивающих заданную точность стабилизации ошибок наблюдения (3.21):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^T \dot{\varepsilon}_1 &\leq |\varepsilon_1| (E_2 - p_1 l_1 |\varepsilon_1|) < 0 \Rightarrow l_1 > E_2 / (p_1 \delta), \\ \varepsilon_2^T \dot{\varepsilon}_2 &\leq |\varepsilon_2| (E_3 - p_2 l_2 (|\varepsilon_2| - \Delta_2)) < 0 \Rightarrow l_2 > E_3 / (p_2 (\delta - \Delta_2)), \\ \varepsilon_3^T \dot{\varepsilon}_3 &\leq |\varepsilon_3| (G_4 - p_3 l_3 (|\varepsilon_3| - \Delta_3)) < 0 \Rightarrow l_3 > G_4 / (p_3 (\delta - \Delta_3)). \end{aligned}$$

Для оценок больших коэффициентов, обеспечивающих выполнение четных неравенств (3.24) (т.е. стабилизацию производных ошибок наблюдения  $\dot{\varepsilon}_1(t), \dot{\varepsilon}_2(t)$ ), оценим решения первого и второго уравнения системы (3.27) на интервалах  $[0; t_1], [t_2; t_3]$  соответственно:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_1(t_1)| &\leq \frac{E_2}{p_1 l_1} + \frac{p_1 - E_2}{p_1 l_1} e^{-p_1 l_1 t_1} \Rightarrow |\varepsilon_2(t) - v_1(t)| \leq \Delta_2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (p_1 - E_2) e^{-p_1 l_1 t_1} \leq \Delta_2 \Rightarrow l_1 > \frac{1}{t_1 p_1} \ln \frac{p_1 - E_2}{\Delta_2}; \\ |\varepsilon_2(t_3)| &\leq \frac{E_3}{p_2 l_2} + \Delta_2 + \frac{p_2 - E_3}{p_2 l_2} e^{-p_2 l_2 (t_3 - t_2)} \Rightarrow |\varepsilon_3(t) - v_2(t)| \leq \Delta_3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (p_2 - E_3) e^{-p_2 l_2 (t_3 - t_2)} \leq \Delta_3 \Rightarrow l_2 > \frac{1}{(t_3 - t_2) p_2} \ln \frac{p_2 - E_3}{\Delta_3}. \end{aligned}$$

С учетом данных оценок приведем последовательность действий при настройке параметров наблюдателя (3.21), (3.22), обеспечивающих (3.24) и, следовательно, цель наблюдения (3.6):

- 1) исходя из заданного времени оценивания  $T > 0$ , с учетом  $t_1 < t_2/2$ ,  $t_3 < t_4/2$  зафиксировать моменты времени  $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 = T$ ;
- 2) выбрать значения амплитуд  $p_i$ ,  $i = \overline{3, 1}$ , на основе нижних оценок (3.26);
- 3) принять значение  $0 < \Delta_3 < \delta$  и на основе нижней оценки выбрать

$$(3.28) \quad l_3 > \frac{G_4}{p_3 (\delta - \Delta_3)};$$

- 4) принять значение  $0 < \Delta_2 < \delta$  и на основе нижней оценки выбрать

$$(3.29) \quad l_2 > \frac{1}{p_2} \max \left\{ \frac{E_3}{\delta - \Delta_2}; \frac{1}{t_3 - t_2} \ln \frac{p_2 - E_3}{\Delta_3} \right\};$$

- 5) на основе нижней оценки выбрать

$$(3.30) \quad l_1 > \frac{1}{p_1} \max \left\{ \frac{E_2}{\delta}; \frac{1}{t_1} \ln \frac{p_1 - E_2}{\Delta_2} \right\}.$$

### 3.5. Результаты моделирования

Для численного моделирования разработанных алгоритмов (которое проводилось в среде MATLAB-Simulink с методом интегрирования Эйлера с постоянным шагом 0,001) были использованы параметры микро БПЛА весом до 5 кг, поднимающегося на высоту до 5 км. Электрический двигатель может обеспечить ему скорость до 95 км/ч (26 м/с), в воздухе способен находиться до одного часа. Подобные летательные аппараты выполняют разведывательные функции и предоставляют информацию о текущей обстановке.

Для системы (3.1) с начальными условиями  $x_1(0) = (0; 100; 1)^T$  метров при действии внешних возмущений

$$\eta_1(t) = 0,2 \sin(t), \quad \eta_2(t) = 0,24 \sin(t), \quad \eta_3(t) = 0,9 \cos(t)$$

ставилась задача вывода центра масс БПЛА на пространственную траекторию:

$$(3.31) \quad g_{11}(t) = 3 \sin(\pi t/3), \quad g_{12}(t) = t + 100, \quad g_{13}(t) = 3 \cos(\pi t/3), \quad t = [0; 3] \text{ с}; \\ g_{11}(t) = t^2 - 9, \quad g_{12}(t) = t + 100, \quad g_{13}(t) = t - 6, \quad t \geq 3 \text{ с}.$$

В законе управления (3.11) были приняты следующие коэффициенты усиления:  $k_1 = \text{diag}(64; 66; 65)$ ,  $k_2 = \text{diag}(67; 66; 65)$ .

Для наблюдателя возмущений (3.14) на основе (3.18)–(3.19) были приняты следующие параметры корректирующих воздействий (3.16):  $p = 4$ ,  $l = 180$ .

Для наблюдателя производных задающих сигналов (3.20) на основе (3.26), (3.28)–(3.30) были приняты следующие параметры корректирующих воздействий (3.22):  $p_1 = 13$ ,  $l_1 = 100$ ;  $p_2 = 8$ ,  $l_2 = 100$ ;  $p_3 = 4$ ,  $l_3 = 100$ .

На рис. 1–6 показаны графики первых  $g_{2i}(t)$  и вторых  $g_{3i}(t)$  производных задающих воздействий и их оценок  $z_{2i}(t)$ ,  $z_{3i}(t)$ , полученных с помощью дифференциатора (3.20), а также ошибок наблюдения  $\varepsilon_{2i}(t)$  метров в секунду,  $\varepsilon_{3i}(t)$  метров за секунду в квадрате,  $i = 1, 2, 3$ .

Как видно из рис. 1–2 и 5–6, в момент  $t = 3$  с при смене формы задающих сигналов  $g_{11}(t)$ ,  $g_{13}(t)$ , приводящей к точкам конечного разрыва производных, имеют место небольшие всплески оценочных сигналов, ошибки наблюдения в установившемся режиме составляют  $|\varepsilon_{2i}| \leq 10^{-7}$  метров в секунду,  $|\varepsilon_{3i}| \leq 5 \cdot 10^{-5}$  метров за секунду в квадрате.

Заметим, что результаты моделирования дифференциатора (2.10), (2.12) с выходом (3.31) практически не отличаются от представленных на рис. 1–6. При использовании наблюдателя (2.3) с глубокой обратной связью (2.7), обеспечивающего такую же точность оценивания, всплески оценочных сигналов вторых производных оказались на порядок больше [23].

Следует отметить, что на практике задающие воздействия должны быть допустимыми для конкретного объекта управления (2.1), в частности, достаточно гладкими, что обеспечивается на этапе планировании траекторий. С целью продемонстрировать работоспособность дифференциатора производных кусочно-дифференцируемых функций рассмотрена нештатная ситуация с использованием непрерывных, но негладких задающих воздействий (3.31). Учитывая, что в законах управления (3.11), (3.12) используется линейная стаби-

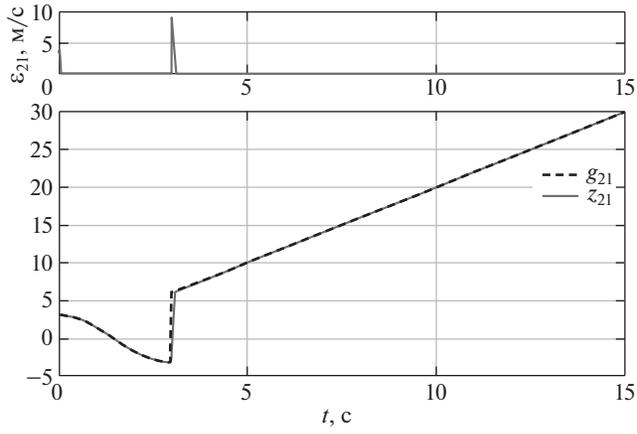


Рис. 1. Графики  $g_{21}(t)$ ,  $z_{21}(t)$ ,  $\varepsilon_{21}(t)$  м/с.

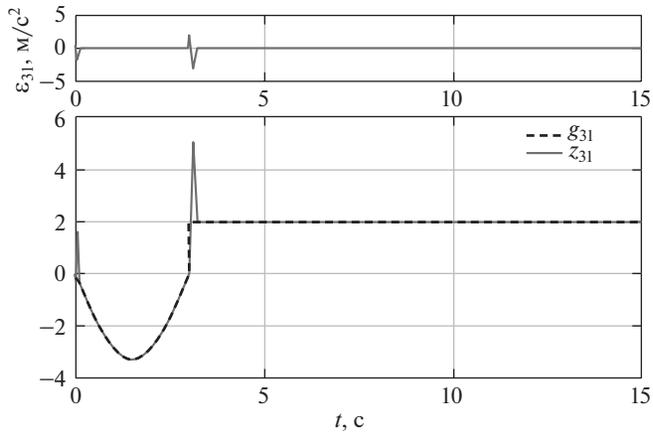


Рис. 2. Графики  $g_{31}(t)$ ,  $z_{31}(t)$ ,  $\varepsilon_{31}(t)$  м/с<sup>2</sup>.

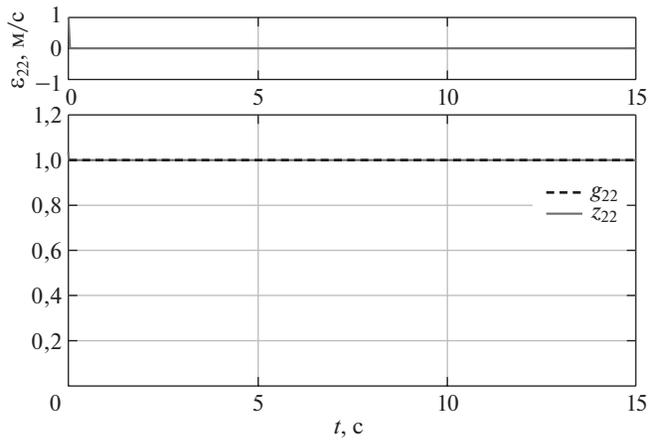


Рис. 3. Графики  $g_{22}(t)$ ,  $z_{22}(t)$ ,  $\varepsilon_{22}(t)$  м/с.

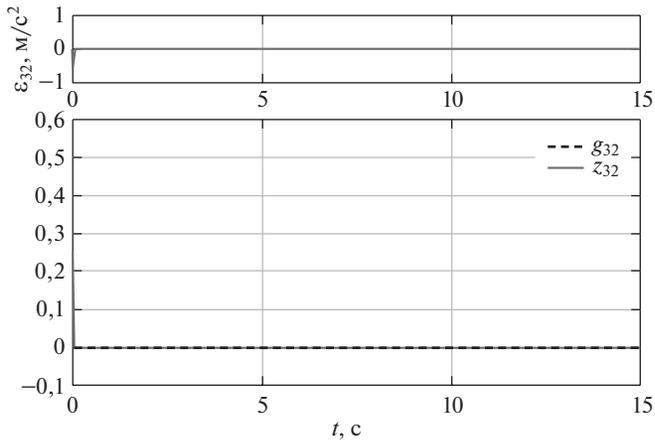


Рис. 4. Графики  $g_{32}(t)$ ,  $z_{32}(t)$ ,  $\varepsilon_{32}(t)$  м/с<sup>2</sup>.

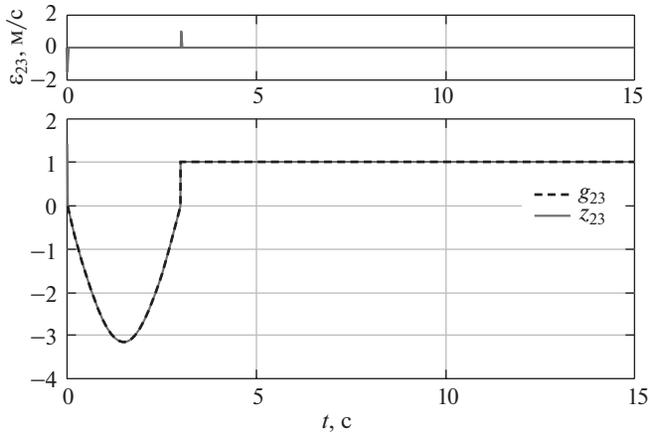


Рис. 5. Графики  $g_{23}(t)$ ,  $z_{23}(t)$ ,  $\varepsilon_{23}(t)$  м/с.

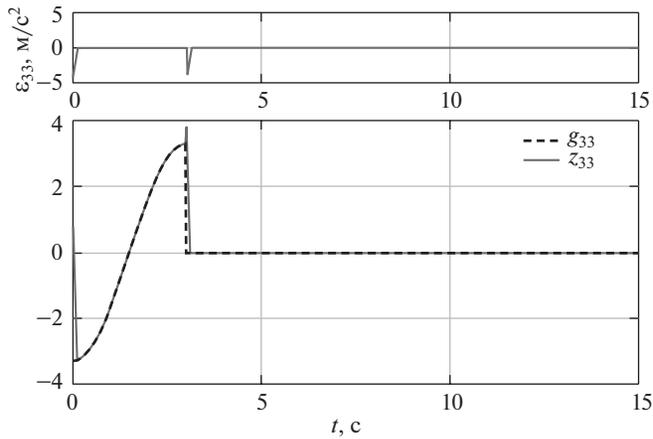


Рис. 6. Графики  $g_{33}(t)$ ,  $z_{33}(t)$ ,  $\varepsilon_{33}(t)$  м/с<sup>2</sup>.

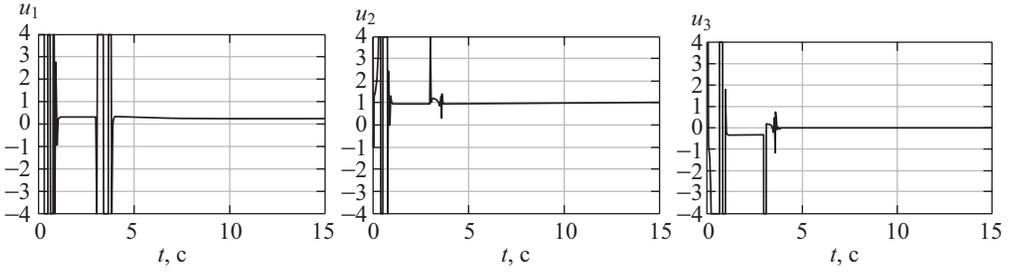


Рис. 7. Графики управлений для системы с динамической обратной связью.

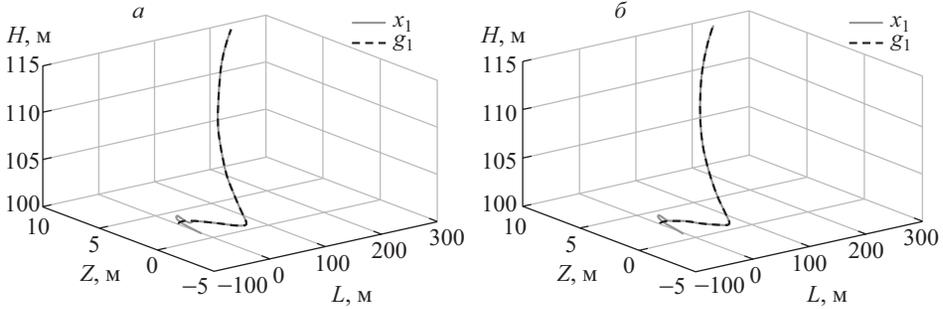


Рис. 8. Пространственные графики заданной траектории  $g_1(t)$  и изображающей точки  $x_1(t)$ : эталонной системы (а); системы с динамической обратной связью (б).

лизирующая составляющая, для снижения перегрузок в начале переходных процессов при моделировании управляющие воздействия были ограничены:

$$(3.32) \quad U_i = 4\text{sat}(u_i), \quad \bar{U}_i = 4\text{sat}(\bar{u}_i), \quad i = \overline{1, 3}.$$

Графики управлений с указанными ограничениями для системы с динамической обратной связью представлены на рис. 7.

На рис. 8,а показан эталонный процесс отслеживания центром масс  $x_1(t)$  заданной пространственной траекторией  $g_1(t)$  с базовым законом управления (3.11), (3.32) в предположении, что все внешние сигналы и их производные известны. На рис. 8,б показан график изображающей точки замкнутой системы (3.1) с динамической обратной связью (3.12), (3.32) с наблюдателями возмущений (3.14) и производных заданий (3.20).

В таблице для ошибок слежения  $e_{1i} = x_{1i} - g_{1i}$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , эталонной системы и системы с динамической обратной связью на интервалах  $t \in [0; 3]/t \geq 3$  с представлены: величина перерегулирования  $e_{1\max, i} \geq |e_{1i}(t)|$ ; время регулирования  $t_i: |e_{1i}(t)| \leq 0,01$  м,  $t \geq t_i$ , а также точность в установившемся режиме  $\Delta_i \geq |e_{1i}(t)|$  при  $t \rightarrow 3 - 0/t \geq 10$  с. Показатели системы с наблюдателями практически не отличаются от показателей эталонной системы, что подтверждает эффективность разработанных алгоритмов оценивания внешних сигналов.

**Таблица.** Показатели регулирования ошибок слежения

Сигнал	Эталонная система (3.1), (3.11) $t \in [0; 3]/t \geq 3$ с		
	$e_{1 \max, i}$ , М	$t_i$ , с	$\Delta_i$ , м
$e_{11} = x_{11} - g_{11}$	0,35/0,7	0,97/3,83	$6 \cdot 10^{-4}/8 \cdot 10^{-4}$
$e_{12} = x_{12} - g_{12}$	0,3/0,083	0,84/3,77	$3,5 \cdot 10^{-4}/3,2 \cdot 10^{-5}$
$e_{13} = x_{13} - g_{13}$	0,6/0,095	0,97/3,77	$3,15 \cdot 10^{-4}/3,1 \cdot 10^{-5}$
Сигнал	Система (3.1) с динамической обратной связью (3.12), (3.14), (3.20) $t \in [0; 3]/t \geq 3$ с		
	$e_{1 \max, i}$ , М	$t_i$ , с	$\Delta_i$ , м
$e_{11} = x_{11} - g_{11}$	0,36/0,78	1/3,837	$6 \cdot 10^{-4}/8 \cdot 10^{-4}$
$e_{12} = x_{12} - g_{12}$	0,35/0,084	0,85/3,79	$3,5 \cdot 10^{-4}/3,2 \cdot 10^{-5}$
$e_{13} = x_{13} - g_{13}$	0,6/0,092	1/3,79	$3,6 \cdot 10^{-4}/3,1 \cdot 10^{-5}$

#### 4. Заключение

Использование теории наблюдателей состояния на основе виртуальных моделей является конструктивной альтернативой по отношению к численному дифференцированию сигналов. При этом пространство состояний замкнутой системы расширяется только за счет порядка наблюдателей и не требует построения реальных динамических генераторов внешних воздействий и задающих сигналов. Предложенный подход, с одной стороны, обобщает случай, когда дифференцируемый сигнал порождается известной динамической моделью, до робастной постановки. С другой стороны, введение виртуальной динамической модели и получение оценок ее вектора состояния на основе теории робастных наблюдателей позволяют исключить или по крайней мере не учитывать динамику такого дифференциатора при синтезе обратной связи, что является важным преимуществом по сравнению с использованием устройств непосредственного дифференцирования.

Предложенный подход апробирован на примере синтеза системы управления беспилотным летательным аппаратом пространственной траектории, заданной в виде вектора целевых сигналов для путевых координат. Предлагаемый подход к получению информации о производных задающего сигнала обобщает случаи, когда траектория движения задается и когда задание формируется в текущий момент времени (последнее актуально, например, в задачах преследования, наведения и т.п.). Результаты моделирования подтверждают эффективность использования предложенного подхода.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы.* Учитывая специфику решаемой задачи, без ограничения общности примем в системе (2.11) начальные условия в виде (2.18), а именно:

$$(П.1) \quad |\varepsilon_1(0)| \leq \delta, \quad |\varepsilon_i(0)| \leq 2G_i, \quad 2G_i \gg \delta, \quad i = \overline{2, n+1}.$$

Разделим отрезок времени  $[0; T]$  на  $2n$  отрезков с помощью точек  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{2n-1} < t_{2n} = T$  и формализуем во времени желаемое

поведение ошибок наблюдения и их производных, обеспечивающих выполнение (2.19):

$$\begin{aligned}
& |\varepsilon_1(t)| \leq \delta, \quad t \geq t_0, \quad |\dot{\varepsilon}_1(t)| \leq \Delta_{1,1}, \quad t \geq t_1, \quad |\ddot{\varepsilon}_1(t)| \leq \Delta_{1,2}, \quad t \geq t_2, \dots \\
& \dots, \quad |\varepsilon_1^{(n)}(t)| \leq \Delta_{1,n}, \quad t \geq t_n, \\
& |\varepsilon_2(t)| \leq \delta, \quad t \geq t_2, \quad |\dot{\varepsilon}_2(t)| \leq \Delta_{2,1}, \quad t \geq t_3, \quad |\ddot{\varepsilon}_2(t)| \leq \Delta_{2,2}, \quad t \geq t_4, \dots \\
& \dots, \quad |\varepsilon_2^{(n-1)}(t)| \leq \Delta_{2,n-1}, \quad t \geq t_{n+1}, \\
& |\varepsilon_3(t)| \leq \delta, \quad t \geq t_4, \quad |\dot{\varepsilon}_3(t)| \leq \Delta_{3,1}, \quad t \geq t_5, \quad |\ddot{\varepsilon}_3(t)| \leq \Delta_{3,2}, \quad t \geq t_6, \dots \\
& \dots, \quad |\varepsilon_3^{(n-2)}(t)| \leq \Delta_{3,n-2}, \quad t \geq t_{n+2}, \\
(\text{П.2}) \quad & \dots \\
& |\varepsilon_{n-1}(t)| \leq \delta, \quad t \geq t_{2(n-1)-2}, \quad |\dot{\varepsilon}_{n-1}(t)| \leq \Delta_{n-1,1}, \quad t \geq t_{2(n-1)-1}, \\
& \quad \quad \quad |\ddot{\varepsilon}_{n-1}(t)| \leq \Delta_{n-1,2}, \quad t \geq t_{2(n-1)}; \\
& |\varepsilon_n(t)| \leq \delta, \quad t \geq t_{2n-2}, \quad |\dot{\varepsilon}_n(t)| \leq \Delta_{n,1}, \quad t \geq t_{2n-1}; \\
& \quad \quad \quad \Delta_{i,j} < \delta, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n+1-i}; \\
& |\varepsilon_{n+1}(t)| \leq \delta, \quad t \geq t_{2n}.
\end{aligned}$$

С учетом (2.13), (2.15) конкретизируем первые неравенства в строках (П.2), предполагая, что на предыдущих интервалах указанные соотношения были выполнены:

$$\begin{aligned}
& |\varepsilon_1(t)| \leq 1/l_1 \leq \delta, \quad t \geq t_0; \\
(\text{П.3}) \quad & |v_{i-1}(t) - z_i(t)| = |\varepsilon_i(t) - \dot{\varepsilon}_{i-1}(t)| \leq 1/l_i \Leftrightarrow |\varepsilon_i(t)| \leq 1/l_i + \Delta_{i-1,1} \leq \delta, \\
& \quad \quad \quad t \geq t_{2i-2}, \quad i = \overline{2, n+1}.
\end{aligned}$$

Сходимость аргументов корректирующих воздействий в линейные зоны (П.3) обеспечивается выбором амплитуд  $p_i > 0$ , а размеры линейных зон и выполнение остальных, вспомогательных неравенств (П.2) — выбором больших коэффициентов  $l_i > 0$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ .

Как было отмечено, в системе (2.11)–(2.12) по построению  $|\varepsilon_1(0)| \leq \delta$  и  $\text{sign}(v_1(t)) = \text{sign}(\varepsilon_1(t))$ ,  $t \geq 0$ , требуется обеспечить первое неравенство (П.3) выбором  $p_1 > 0$ , который совпадает с первичной настройкой (первое неравенство (2.16)), а именно

$$(\text{П.4}) \quad \varepsilon_1 \dot{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1(g_2 - p_1 \text{sign}(\varepsilon_1)) \leq |\varepsilon_1| (G_2 - p_1) < 0 \Rightarrow p_1 > G_2.$$

В остальных уравнениях системы (2.11) совпадение знаков  $\text{sign}(v_i(t)) = \text{sign}(\varepsilon_i(t))$ ,  $i = \overline{2, n+1}$ , может не иметь места при  $0 \leq t \leq t_{2(i-1)-1}$  и гарантируется только при  $t > t_{2(i-1)-1}$  вне окрестности  $|\varepsilon_i| \leq \Delta_{i-1,1}$ . Это означает, что в общем случае значения  $\varepsilon_i(t)$  растут по модулю на интервале  $[0; t_{2(i-1)-1}]$ , нужно обеспечить их сходимость в области (П.3) за время  $t_{2(i-1)} - t_{2(i-1)-1}$  выбором  $p_i$ ,  $i = \overline{2, n+1}$ . Детализируем первичную настройку амплитуд с уче-

том начальных условий (П.1) и заданного времени сходимости:

$$p_i \geq \frac{|\varepsilon_i(t_{2(i-1)-1})|}{t_{2(i-1)} - t_{2(i-1)-1}} + G_{i+1},$$

$$|\varepsilon_i(t_{2(i-1)-1})| \leq 2G_i + (G_{i+1} + p_i)t_{2(i-1)-1}, \quad i = \overline{2, n+1}, t \geq 0.$$

Отсюда имеем

$$(П.5) \quad p_i \geq \frac{2G_i + (G_{i+1} + p_i)t_{2(i-1)-1}}{t_{2(i-1)} - t_{2(i-1)-1}} + G_{i+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_i \geq \frac{2G_i + G_{i+1}t_{2(i-1)}}{t_{2(i-1)} - 2t_{2(i-1)-1}}, \quad i = \overline{2, n+1},$$

где  $2t_{2(i-1)-1} < t_{2(i-1)}$ . Положим, например, все нечетные временные интервалы одинаковыми  $\Delta t = t_{2i-1} - t_{2i-2} > 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ , а для четных установим  $\Delta t = t_{2(i-1)} - 2t_{2(i-1)-1}$ ,  $i = \overline{2, n+1}$ , тогда

$$(П.6) \quad t_{2(i-1)} - t_{2(i-1)-1} = (3 \cdot 2^{i-2} - 1)\Delta t, \quad i = \overline{2, n+1},$$

откуда имеем верхнюю оценку для выбора  $\Delta t > 0$ :

$$(П.7) \quad t_{2n} = 3(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1})\Delta t \leq T \Rightarrow 0 < \Delta t \leq \frac{T}{3(2^n - 1)}.$$

С учетом (П.4)–(П.7) имеем нижние оценки для выбора амплитуд, обеспечивающих сходимость аргументов корректирующих воздействий в линейные зоны (П.3) за заданное время:

$$(П.8) \quad p_1^* = G_2, \quad p_i^* = \frac{2G_i + G_{i+1}3(2^{i-1} - 1)\Delta t}{\Delta t} = \frac{2G_i}{\Delta t} + 3(2^{i-1} - 1)G_{i+1},$$

$$i = \overline{2, n+1}.$$

Еще раз отметим, что в отличие от (3.26) в дифференциаторе (2.10), (2.12) амплитуды выбираются независимо друг от друга.

Для настройки больших коэффициентов рассмотрим уравнения системы (2.11)–(2.12) с учетом (2.13) в линейных зонах, куда они попадают в указанные интервалы времени:

$$(П.9) \quad \dot{\varepsilon}_1 = g_2 - p_1 l_1 \varepsilon_1, \quad |\varepsilon_1| \leq 1/l_1, \quad t \geq 0,$$

$$\dot{\varepsilon}_i = g_{i+1} - p_i l_i (\varepsilon_i - \dot{\varepsilon}_{i-1}), \quad |\varepsilon_i - \dot{\varepsilon}_{i-1}| \leq 1/l_i, \quad t \geq t_{2i-2}, \quad i = \overline{2, n+1}.$$

Из достаточных условий сходимости  $\varepsilon_i \dot{\varepsilon}_i < 0$  найдем нижние оценки для выбора  $l_i > 0$ ,  $i = \overline{1, n+1}$ , обеспечивающих заданную точность оценивания (2.19), а также установим точность, которую надо обеспечить при стабилизации первых производных ошибок оценивания, разделив заданную величину  $\delta$

на две части, например пополам:

$$\begin{aligned}
 |\varepsilon_1(t)| \leq \delta(t \geq 0) &\Rightarrow l_1 \geq \frac{G_2}{p_1 \delta}; \\
 |\varepsilon_i(t)| \leq \underbrace{\frac{G_{i+1}}{p_i l_i}}_{\delta/2} + \underbrace{|\dot{\varepsilon}_{i-1}|}_{\delta/2} &\leq \delta(t \geq t_{2i-2}) \Rightarrow l_i \geq \frac{2G_{i+1}}{p_i \delta}, \\
 |\dot{\varepsilon}_{i-1}| \leq \Delta_{i-1,1} = \frac{\delta}{2}, \quad i &= \overline{2, n+1}.
 \end{aligned}
 \tag{П.10}$$

Далее для обеспечения стабилизации с заданной точностью за заданное время производных ошибок наблюдения (П.2) рассмотрим итерационную процедуру, состоящую из  $n$  шагов, где  $n$  — максимальный порядок учитываемых производных.

*Шаг 1.* Выбором  $l_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , нужно также обеспечить сходимость первых производных ошибок наблюдения  $\dot{\varepsilon}_i(t)$  в установленные области (П.10) за время  $t_{2i-1} - t_{2i-2} = \Delta t$  (П.2) из начальных условий  $|\dot{\varepsilon}_i(t_{2i-2})| = G_{i+1} + p_i$  (П.9). С этой целью оценим на указанных интервалах решения вспомогательной системы

$$\ddot{\varepsilon}_1 = g_3 - p_1 l_1 \dot{\varepsilon}_1; \quad \ddot{\varepsilon}_i = g_{i+2} - p_i l_i (\dot{\varepsilon}_i - \ddot{\varepsilon}_{i-1}), \quad i = \overline{2, n},
 \tag{П.11}$$

и установим точность, которую надо обеспечить при стабилизации вторых производных ошибок оценивания, разделив величины  $\Delta_{i,1} = \delta/2$  на части, например указанным образом:

$$\begin{aligned}
 |\dot{\varepsilon}_1(t)| &\leq \underbrace{(G_2 + p_1)e^{-p_1 l_1 \Delta t}}_{\delta/4} + \underbrace{\frac{G_3}{p_1 l_1}}_{\delta/4} \leq \Delta_{1,1} = \frac{\delta}{2} (t \geq t_1) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow l_1 \geq \frac{1}{p_1} \max \left\{ \frac{4G_3}{\delta}; \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{4(G_2 + p_1)}{\delta} \right\}; \\
 |\dot{\varepsilon}_i(t)| &\leq \underbrace{(G_{i+1} + p_i)e^{-p_i l_i \Delta t}}_{\delta/8} + \underbrace{\frac{G_{i+2}}{p_i l_i}}_{\delta/8} + \underbrace{|\ddot{\varepsilon}_{i-1}|}_{\delta/4} \leq \Delta_{i,1} = \frac{\delta}{2} (t \geq t_{2i-1}) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow l_i \geq \frac{1}{p_i} \max \left\{ \frac{8G_{i+2}}{\delta}; \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{8(G_{i+1} + p_i)}{\delta} \right\}, \\
 |\ddot{\varepsilon}_{i-1}| &\leq \Delta_{i-1,2} = \frac{\delta}{4}, \quad i = \overline{2, n}.
 \end{aligned}
 \tag{П.12}$$

*Шаг 2.* Выбором  $l_i$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ , нужно также обеспечить сходимость вторых производных ошибок наблюдения  $\ddot{\varepsilon}_i(t)$  в установленные области (П.12) за время  $t_{2i} - t_{2i-1} = (3 \cdot 2^{i-1} - 1)\Delta t$  (П.2), (П.6) из начальных условий  $|\ddot{\varepsilon}_i(t_{2i-1})| = G_{i+2} + p_i$  (П.11). С этой целью оценим на указанных интервалах решения вспомогательной системы

$$\ddot{\varepsilon}_1 = g_4 - p_1 l_1 \ddot{\varepsilon}_1; \quad \ddot{\varepsilon}_i = g_{i+3} - p_i l_i (\ddot{\varepsilon}_i - \ddot{\varepsilon}_{i-1}), \quad i = \overline{2, n-1},$$

а также установим точность, которую надо обеспечить при стабилизации третьих производных ошибок оценивания, разделив величины  $\Delta_{i,2} = \delta/4$ , например, аналогично (П.12):

$$\begin{aligned}
 |\ddot{\varepsilon}_1(t)| &\leq \underbrace{(G_3 + p_1)e^{-p_1 l_1 2\Delta t}}_{\delta/8} + \underbrace{\frac{G_4}{p_1 l_1}}_{\delta/8} \leq \frac{\delta}{4} (t \geq t_2) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow l_1 \geq \frac{1}{p_1} \max \left\{ \frac{8G_4}{\delta}; \frac{1}{2\Delta t} \ln \frac{8(G_3 + p_1)}{\delta} \right\}; \\
 |\ddot{\varepsilon}_i(t)| &\leq \underbrace{(G_{i+2} + p_i)e^{-p_i l_i (3 \cdot 2^{i-1} - 1)\Delta t}}_{\delta/16} + \underbrace{\frac{G_{i+3}}{p_i l_i}}_{\delta/16} + \underbrace{|\ddot{\varepsilon}_{i-1}|}_{\delta/8} \leq \Delta_{i,2} = \frac{\delta}{4} (t \geq t_{2i}) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow l_i \geq \frac{1}{p_i} \max \left\{ \frac{16G_{i+3}}{\delta}; \frac{1}{(3 \cdot 2^{i-1} - 1)\Delta t} \ln \frac{16(G_{i+2} + p_i)}{\delta} \right\}, \\
 |\ddot{\varepsilon}_{i-1}| &\leq \Delta_{i-1,3} = \frac{\delta}{8}, \quad i = \overline{2, n-1},
 \end{aligned}$$

и т.д. На каждом шаге количество рассматриваемых больших коэффициентов и размерность вспомогательных систем понижаются на единицу. Таким образом, на последнем  $n$ -м шаге выбором  $l_1$  нужно обеспечить сходимость  $\varepsilon_1^{(n)}(t)$  в область, установленную на предыдущем шаге, например, указанным выше образом  $\Delta_{1,n} = \delta/2^n$  за время  $t_n - t_{n-1}$  (П.2) из начальных условий  $|\varepsilon_1^{(n)}(t_{n-1})| = G_{n+1} + p_1$ . Оценка решения вспомогательного уравнения

$$\varepsilon_1^{(n+1)} = g_{n+2} - p_1 l_1 \varepsilon_1^{(n)}$$

дает следующий результат:

$$\begin{aligned}
 \left| \varepsilon_1^{(n)}(t) \right| &\leq \underbrace{(G_{n+1} + p_1)e^{-p_1 l_1 (t_n - t_{n-1})\Delta t}}_{\delta/2^{n+1}} + \underbrace{\frac{G_{n+2}}{p_1 l_1}}_{\delta/2^{n+1}} \leq \frac{\delta}{2^n} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow l_1 \geq \frac{1}{p_1} \max \left\{ \frac{2^{n+1}G_{n+2}}{\delta}; \frac{1}{(t_n - t_{n-1})\Delta t} \ln \frac{2^{n+1}(G_{n+1} + p_1)}{\delta} \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь если  $n$  — нечетное число, то  $t_n - t_{n-1} = \Delta t$ , если четное, то  $t_n - t_{n-1} = (3 \cdot 2^{n/2-1} - 1)\Delta t$ .

Учитывая, что логарифмическая функция очень медленно возрастает, множитель при  $\Delta t$ , определяющий длину четного интервала (П.6), есть натуральное число и  $1/\Delta t > 1/((3 \cdot 2^{i-1} - 1)\Delta t)$ , можно упростить конечный результат, полагая этот множитель равным единице в формулах, полученных на четных шагах.

Неравенства для выбора больших коэффициентов (П.10) и типа (П.12), полученные на разных шагах процедуры, должны выполняться одновременно. С учетом указанного упрощения объединим их и получим итоговые нижние оценки, при которых поставленная задача (2.19) обеспечивается с учетом

быстрых движений и погрешностей уравнений статики:

$$\begin{aligned}
 \text{(П.13)} \quad l_{n+1}^* &= \frac{2G_{n+2}}{p_{n+1}\delta}, \quad l_n^* = \frac{1}{p_n} \max \left\{ \frac{2G_{n+1}}{\delta}; \frac{8G_{n+2}}{\delta}; \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{8(G_{n+1} + p_n)}{\delta} \right\}, \\
 l_{n-1}^* &= \frac{1}{p_{n-1}} \max \left\{ \frac{2G_n}{\delta}; \frac{8G_{n+1}}{\delta}; \frac{16G_{n+2}}{\delta}; \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{8(G_n + p_{n-1})}{\delta}; \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{16(G_{n+1} + p_{n-1})}{\delta} \right\}, \\
 &\dots \\
 l_3^* &= \frac{1}{p_3} \max \left\{ \frac{2G_4}{\delta}; \frac{2^3G_5}{\delta}; \frac{2^4G_6}{\delta}; \dots; \frac{2^nG_{n+2}}{\delta}; \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{2^3(G_4 + p_3)}{\delta}; \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{2^4(G_5 + p_3)}{\delta}; \dots; \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{2^n(G_{n+1} + p_3)}{\delta} \right\}, \\
 l_2^* &= \frac{1}{p_2} \max \left\{ \frac{2G_3}{\delta}; \frac{2^3G_4}{\delta}; \frac{2^4G_5}{\delta}; \dots; \frac{2^{n+1}G_{n+2}}{\delta}; \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{2^3(G_3 + p_2)}{\delta}; \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{2^4(G_4 + p_2)}{\delta}; \dots; \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{2^{n+1}(G_{n+1} + p_2)}{\delta} \right\}, \\
 l_1^* &= \frac{1}{p_1} \max \left\{ \frac{G_2}{\delta}; \frac{2^2G_3}{\delta}; \frac{2^3G_4}{\delta}; \dots; \frac{2^{n+1}G_{n+2}}{\delta}; \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{2^2(G_2 + p_1)}{\delta}; \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{2^3(G_3 + p_1)}{\delta}; \dots; \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{2^{n+1}(G_{n+1} + p_1)}{\delta} \right\}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, существуют такие  $p_i^*$  (П.8) и  $l_i^*$  (П.13), что для любых  $p_i, l_i: p_i > p_i^*, l_i > l_i^*, i = \overline{1, n+1}$ , неравенства (2.19) будут выполнены. Теорема доказана.

Следует отметить, что оценки для выбора больших коэффициентов (П.13), полученные из достаточных условий, могут оказаться достаточно консервативными, особенно для систем (2.11) большой размерности. При практическом применении данной процедуры рекомендуется опираться на заданные значения  $G_i, i = \overline{2, n+2}, \delta > 0, T > 0$  и при необходимости снижения расчетных оценок:

— учитывать множители при  $\Delta t$  в формулах, полученных на четных шагах процедуры;

— использовать другой способ разделения  $\Delta_{i,j}$  ( $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n+1-i}$ ) на части, отводя меньшую долю при оценке затухающих собственных движений производных.

Обратим внимание, что введенный прием с разделением на части областей сходимости производных ошибок наблюдения позволил сделать независимым друг от друга выбор больших коэффициентов (П.13). Можно использовать другую, связную процедуру настройки, в ходе которой последовательно (снизу вверх) из достаточных условий фиксируются значения  $l_i^*, i = \overline{n+1, 1}$ , с учетом которых области сходимости старших производных определяются по остаточному принципу. Такая процедура будет более трудоемкой, но может привести к менее консервативным расчетным оценкам.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wonham W.M.* Linear Multivariable Control: a Geometric Approach. N.Y.: Springer-Verlar, 1979.
2. *Фомичев В.В., Высоцкий А.О.* Алгоритм построения каскадного асимптотического наблюдателя для системы с максимальным относительным порядком // ДУ. 2019. Т. 55. № 4. С. 567–573.  
*Fomichev V.V., Vysotskii A.O.* Algorithm for Designing a Cascade Asymptotic Observer for a System of Maximal Relative Order // Differ. Equations. 2019. V. 55. No. 4. P. 553–560.
3. *Краснов Д.В., Уткин А.В.* Синтез многофункциональной системы слежения в условиях неопределенности // УБС. 2017. Вып. 69. С. 29–49.  
*Krasnov D.V., Utkin A.V.* Synthesis of a Multifunctional Tracking System in Conditions of Uncertainty // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 9. P. 1704–1716.
4. *Краснова С.А., Уткин В.А., Уткин А.В.* Блочный подход к анализу и синтезу инвариантных нелинейных систем слежения // АиТ. 2017. № 12. С. 26–53.  
*Krasnova S.A., Utkin V.A., Utkin A.V.* Block Approach to Analysis and Design of the Invariant Nonlinear Tracking Systems // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 12. P. 2120–2140.
5. *Антипов А.С., Краснов Д.В., Уткин А.В.* Декомпозиционный синтез системы управления электромеханическими объектами в условиях неполной информации // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 4. С. 530–548.  
*Antipov A.S., Krasnov D.V., Utkin A.V.* Decomposition Synthesis of the Control System of Electromechanical Objects in Conditions of Incomplete Information // Mechanics of Solids. 2019. V. 54. No. 5. P. 47–60.
6. *Уткин В.А.* Инвариантность и автономность в системах с разделяемыми движениями // АиТ. 2001. № 11. С. 73–94.  
*Utkin V.A.* Invariance and Independence in Systems with Separable Motion // Autom. Remote Control. 2001. V. 62. No. 11. P. 1825–1843.
7. *Kochetkov S.A., Krasnova S.A., Antipov A.S.* Cascade Synthesis of Electromechanical Tracking Systems with Respect to Restrictions on State Variables // IFAC-PapersOnLine. 2017. V. 50. No. 1. P. 1042–1047.
8. *LaValle S.M.* Planning Algorithms. Cambridge University Press, 2006.
9. *De Filippis L., Guglieri G., Quagliotti F.* Path Planning Strategies for UAVS in 3D Environments // J. of Intelligent and Robotic Systems. 2012. V. 65. No. 1. P. 247–264.
10. *Гилимьянов Р.Ф., Рапопорт Л.Б.* Метод деформации пути в задачах планирования движения роботов при наличии препятствий // ПУ. 2012. № 1. С. 70–76.  
*Gilimyanov R.F., Rapoport L.B.* Path Deformation Method for Robot Motion Planning Problems in the Presence of Obstacles // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 12. P. 2163–2172.
11. *Kamyar K., Taheri E.* Aircraft Optimal Terrain/Threat-Based Trajectory Planning and Control // J. of Guidance, Control, and Dynamics. 2014. V. 37. No. 2. P. 466–483.
12. *Ткачев С.Б., Крищенко А.П., Канатников А.Н.* Автоматическая генерация сложных пространственных траекторий БПЛА и синтез управлений // Математика и математическое моделирование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 01. С. 1–17.  
*Tkachev S.B., Krishenko A.P., Kanatnikov A.N.* Automatic Generation of Complex Spatial Trajectories of the UAV and Synthesis of Control // Mathematics and Mathematical Modelling of the Bauman MSTU. 2015. No. 01. P. 1–17.

13. *Емельянов С.В., Афанасьев А.П.* Дифференцирование сигнала в системах автоматического регулирования // *АиТ.* 2015. № 12. С. 27–42.  
*Emel'yanov S.V., Afanas'ev A.P.* Signal Differentiation in Automatic Control Systems // *Autom. Remote Control.* 2015. V. 76. No. 12. P. 2110–2123.
14. *Utkin V.A., Krasnova S.A.* Improving the Accuracy of the Estimated Signals in the State and Disturbance Observer // *Proc. of the Twelfth Int. Conf. "Management of large-scale system development" (MLSD).* 1–3 October, 2019. Moscow, Russia, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences. IEEE Xplore, 2019. 4 p.
15. *Краснова С.А., Кузнецов С.И.* Оценивание на скользящих режимах неконтролируемых возмущений в нелинейных системах // *АиТ.* 2005. № 10. С. 54–69.  
*Krasnova S.A., Kuznetsov S.I.* Incontrollable Perturbations on Nonlinear Dynamic Systems: Estimation on Moving Modes // *Autom. Remote Control.* 2005. V. 66. No. 10. P. 1580–1593.
16. *Краснова С.А.* Оценивание внешних возмущений на основе виртуальных динамических моделей // *УБС.* 2018. Вып. 76. С. 6–25.  
*Krasnova S.A.* Estimating the Derivatives of External Perturbations Based on Virtual Dynamic Models // *Autom. Remote Control.* 2020. V. 81. No. 5. P. 897–910.
17. *Никифоров В.О.* Наблюдатели внешних детерминированных возмущений. Ч. 2. Объекты с неизвестными параметрами // *АиТ.* 2004. № 11. С. 40–48.  
*Nikiforov V.O.* Observers of External Deterministic Disturbances. P. II. Objects with Unknown Parameters // *Autom. Remote Control.* 2004. V. 65. No. 11. P. 1724–1732.
18. *Дылевский А.В., Лозгачев Г.И.* Применение метода пространства состояний для синтеза дифференциаторов // *АиТ.* 1999. № 9. С. 13–20.  
*Dylevskii A.V., Lozgachev G.I.* State Space Approach to the Design of Differentiators // *Autom. Remote Control.* 1999. V. 60. No. 9. P. 1222–1229.
19. *Уткин В.А., Уткин А.В.* Задача слежения в линейных системах с параметрическими неопределенностями при неустойчивой нулевой динамике // *АиТ.* 2014. № 9. С. 62–81.  
*Utkin V.A., Utkin A.V.* Problem of Tracking in Linear Systems with Parametric Uncertainties under Unstable Zero Dynamics // *Autom. Remote Control.* 2014. V. 75. No. 9. P. 1577–1592.
20. *Levant A.* Higher-Order Sliding Modes, Differentiation and Output-Feedback Control // *Int. J. Control.* 2003. V. 76. No. 9. P. 924–941.
21. *Khalil H.K., Praly L.* High-Gain Observers in Nonlinear Feedback Control // *Int. J. Robust and Nonlinear Control.* 2014. V. 24. No. 6. P. 993–1015.
22. *Кожунько Ю.Г., Краснов Д.В., Уткин А.В.* Два метода синтеза наблюдателей состояния и возмущений для беспилотного летательного аппарата // *ПУ.* 2020. № 1. С. 3–16.
23. *Кожунько Ю.Г., Антипов А.С., Краснова С.А.* Наблюдатели состояния как средство оценивания производных детерминированных сигналов // *Матер. XXXII конф. памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова, 13-я Мультиконференция по проблемам управления (МКПУ-2020), Санкт-Петербург, 6–8 октября 2020 г. СПб.: АО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор", 2020. С. 312–315.*

*Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакшиным.*

Поступила в редакцию 09.08.2020

После доработки 20.01.2021

Принята к публикации 16.03.2021

© 2021 г. В.А. АЛЕКСАНДРОВ, канд. техн. наук (va.alexandrov@yandex.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН),  
Е.Ю. ЗЫБИН, д-р техн. наук (zybin@mail.ru),  
В.В. КОСЬЯНЧУК, д-р техн. наук (kos.vl.v@gmail.com),  
Н.И. СЕЛЬВЕСЮК, д-р техн. наук (nis@gosniias.ru)  
(ФГУП Государственный научно-исследовательский институт  
авиационных систем),  
А.А. ТРЕМБА, канд. физ.-мат. наук (atremba@ipu.ru),  
М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН)

## ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫСОТНО-СКОРОСТНОГО ПРОФИЛЯ КРЕЙСЕРСКОГО ПОЛЕТА ВОЗДУШНОГО СУДНА ПРИ ФИКСИРОВАННОМ ВРЕМЕНИ ПРИБЫТИЯ<sup>1</sup>

Рассматривается задача минимизации расхода топлива дозвуковых пассажирских и транспортных самолетов на этапе крейсерского полета. Для формирования высотно-скоростного профиля полета сформулирована задача оптимизации и предложено ее решение методом покоординатного спуска с учетом ограничений, совмещенного с использованием набора вспомогательных точек-кандидатов. Вычисление расхода топлива как целевой функции оптимизации реализовано через численное моделирование с фиксированным шагом переходных процессов скорости и высоты и упрощенный расчет значений секундного расхода по статическим уравнениям на участках полета с постоянной скоростью и высотой.

*Ключевые слова:* оптимизация, воздушное судно, расход топлива, крейсерский полет, моделирование полета, высотно-скоростной профиль.

DOI: 10.31857/S0005231021070047

### 1. Введение

Задача оптимизации маневрирования воздушных судов была и остается актуальной, требуя новых подходов и решений с развитием авиации и возможностей вычислительных систем [1, 2]. Проблема снижения расхода топлива обусловлена не только экономическими критериями, но и необходимостью сокращения выбросов CO<sub>2</sub>. В настоящей работе рассматривается задача формирования высотно-скоростного профиля полета воздушного судна, обеспечивающего снижение расхода топлива в рамках уже совершающегося полета, когда задано время прибытия в конечную точку. При этом предполагается, что оптимизация профиля скорости и высоты периодически обновляется в процессе полета с учетом фактического местоположения воздушного судна и параметров полета. Поэтому важен вопрос разработки процедуры оптимизации с невысокой вычислительной сложностью для получения результата расчетов за несколько минут с учетом ограниченных вычислительных ресурсов на борту воздушного судна.

<sup>1</sup> Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 21-71-30005).

Сложность вычисления целевой функции оптимизации состоит в том, что секундный расход топлива зависит в том числе от массы воздушного судна, а масса, в свою очередь, постоянно уменьшается на величину расхода топлива. Поэтому для получения значения целевой функции необходимо промоделировать расход на всем оптимизируемом этапе полета.

В [3] рассмотрен выбор оптимальной скорости при полете на постоянной высоте как решение задачи оптимального управления (вариационной задачи). Получено аналитическое решение, при этом использована упрощенная модель расхода топлива, а также не учитываются ветровые условия. Изменение скорости для такого режима непрерывное.

Альтернативным подходом является разбиение траектории полета на интервалы и оптимизация скоростного профиля на этих интервалах (на постоянной высоте). В [4] сделана попытка найти точное решение задачи об оптимальной скорости на каждом из участков с учетом продольного ветрового воздействия. Для решения необходимо использовать явный вид функции расхода топлива, зависящей от скорости и массы, и ее особенность в виде выпуклости. Оптимальный профиль скоростей является решением системы уравнений и находится с помощью метода Ньютона. Существенной особенностью этого подхода является то, что задача с фиксированным временем полета заменяется задачей оптимизации по критерию “прямой цены полета” (direct operation cost), учитывающей как расход топлива, так и задержку по времени прибытия в конечную точку.

В [5] выполнена оптимизация профиля скорости и высоты по критерию “прямой цены полета” для случая, когда скорости и высоты являются дискретными, тем самым задача сводится к задаче смешанного целочисленно-нелинейного программирования, которая решалась стандартными методами среды МАТЛАВ. При этом число сегментов траектории выбиралось малым (до трех), что позволяло осуществлять прямой перебор вариантов.

Все три подхода являются многообещающими с точки зрения дальнейшей работы над оптимизацией полного профиля полета, но для их реализации требуется уточнение аналитической модели полета, которая должна учитывать как адекватную модель расхода топлива, так и динамику изменения скорости и высоты полета.

Вопрос модели полета, с одной стороны, позволяющей с достаточной точностью оценить расход топлива, а с другой стороны, достаточно простой, чтобы на ее основе можно было строить расчет целевой функции процедуры оптимизации, остается актуальным [6]. В [7] рассмотрена задача минимизации расхода топлива дальнемагистрального самолета. Для моделирования полета использована упрощенная система дифференциальных уравнений, где тяга и угол атаки вычисляются по статическим уравнениям. Сделан вывод, что маневрирование по скорости не дает заметного снижения расхода топлива, а оптимизация высоты полета эффективна при дальности полета более 5000 км. При этом не рассматривается быстроедействие используемых алгоритмов для применения в функции самолетовождения, реализуемой вычислительной системой на борту воздушного судна.

Таким образом, задача формирования высотно-скоростного профиля полета, обеспечивающего минимальный расход топлива на этапе крейсерского

полета, исследована недостаточно. Для оценки расхода топлива обычно используются статические уравнения или приближенные аппроксимации расхода в зависимости от массы воздушного судна, скорости и высоты полета. Такой подход не учитывает характер расхода топлива при переходных процессах, возникающих при изменении скорости или высоты полета.

В настоящей работе предлагается комбинированный подход, когда переходные процессы при изменении скорости или высоты полета моделируются системой дифференциальных уравнений, описывающей динамику полета, а расход топлива на участках с постоянной скоростью и высотой полета вычисляется по статическим уравнениям.

Для задач невыпуклой оптимизации с ограничениями (таких, как рассматриваемая задача) можно применять разные подходы, например градиентный или покоординатный спуск с проекцией на множество ограничений, метод доверительной области, случайный поиск и т.п. Часто применяются приемы глобальной оптимизации, использующие множественные начальные точки и рандомизацию поиска, а также эвристики типа генетических алгоритмов, так как невыпуклые задачи часто многоэкстремальные. Часть методов используют оценки градиента функции, которые требуют многократного вычисления самой функции, тем самым общее время выполнения алгоритма замедляется в число раз, кратное числу варьируемых компонент. В безградиентных методах чаще всего используется случайный поиск, что приводит к непредсказуемым результатам. В рассматриваемой задаче такие подходы признаны нецелесообразными из-за недетерминированности результата и с учетом, что вычислительная сложность — это один из основных критериев выбора метода оптимизации для реализации в бортовой вычислительной системе при ограниченном времени выполнения. Поэтому предлагается использовать детерминированный безградиентный поисковый метод оптимизации [8] с учетом ограничений.

Статья организована следующим образом: в разделе 2 сделана постановка задачи и сформулирована задача оптимизации расхода топлива; в разделе 3 рассмотрена динамическая модель движения центра масс воздушного судна; в разделе 4 приведены статические уравнения, по которым можно получить секундный расход топлива из текущих значений высоты и скорости полета и массы воздушного судна, считая их постоянными; в разделе 5 предложен алгоритм расчета расхода топлива на этапе крейсерского полета; в разделе 6 предлагается алгоритм оптимизации, решающий поставленную задачу; в разделе 7 предложенные алгоритмы проверяются на примере среднемагистрального пассажирского самолета; в разделе 8 приведены заключительные выводы.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается крейсерский полет без учета маневрирования по курсу. Предполагается, что заданы

- 1) расстояние  $R$ , которое должно быть пройдено на этапе крейсерского полета;
- 2) время  $t_s$ , отведенное для прохождения этого расстояния;
- 3) интервал допустимых скоростей крейсерского полета  $[V_{\min}, V_{\max}]$ ;

4) разрешенные значения эшелонов высоты  $\{h_1, \dots, h_K\}$ ;

5) значения скорости  $V_0$  и высоты  $h_0$  в начале этапа крейсерского полета, а также высоты  $h_{N+1}$ , на которую необходимо выйти в конце этапа крейсерского полета;

6) масса воздушного судна в начале этапа крейсерского полета  $m_0$ ;

7) параметры воздушного судна.

Задача состоит в том, чтобы определить требуемые скорость и высоту полета в каждый момент времени, которые передаются в бортовую систему управления, такие что суммарный расход топлива на этапе крейсерского полета будет минимальным для заданных расстояния, времени, других исходных данных и ограничений крейсерского полета. При определении высоты полета необходимо учитывать, что 1) высота должна быть равна одному из заданных допустимых значений, соответствующих эшелонам полета, 2) задается некоторое минимальное время нахождения в одном эшелоне, т.е. смена эшелонов может производиться не чаще, чем через некоторое заданное время. При этом требуемые скорость и высота полета будут определяться для некоторого количества участков, на которых эти значения остаются постоянными. Это означает, что требуемые скорость и высота полета не будут функциями времени с разными значениями в каждый момент, а будут кусочно-постоянными функциями. Количество участков по скорости и по высоте, на которые разбивается весь этап крейсерского полета, должно быть задано. Таким образом, можно сформулировать решаемую задачу.

**Задача.** Определить для этапа крейсерского полета требуемую скорость на каждом участке по скорости и требуемую высоту полета на каждом участке по высоте, минимизирующие суммарный расход топлива на всем этапе крейсерского полета при заданных времени и расстоянии полета, высотах в начале и в конце этапа крейсерского полета, массе и скорости в начале этапа крейсерского полета, ограничениях на допустимые минимальную и максимальную скорость и минимальное допустимое время между изменениями требуемой высоты, допустимые дискретные значения высоты полета, соответствующие эшелонам полета.

Чтобы сформулировать эту задачу как задачу оптимизации, необходимо выделить вектор варьируемых переменных, ограничения на эти переменные, целевую функцию и функции ограничений. Для скоростного профиля зададим число  $n$  участков равного размера  $r = R/n$ , для каждого из которых нужно выбрать скорость  $V_i \in [V_{\min}, V_{\max}]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , так чтобы выполнялось условие прибытия в заданное время  $t_s$ :

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \frac{r}{V_i} = t_s.$$

Предлагается использовать в качестве варьируемых переменных не скорости  $V_i$ , а периоды времени  $x_i = r/V_i$ , так как в этом случае вместо (1) получаем линейную функцию ограничения

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n x_i = t_s, \quad x_i \in \left[ \frac{r}{V_{\max}}, \frac{r}{V_{\min}} \right].$$

Пусть для высотного профиля задано число  $N$  участков с различной высотой полета. Тогда следующая группа варьируемых переменных — это высота полета на каждом из  $N$  участков  $x_i \in \{h_1, \dots, h_K\}$ ,  $i = n + 1, \dots, n + N$ , где  $K$  — число разрешенных эшелонов высоты.

Для каждого участка различной высоты необходимо определить его длительность. Высота полета не может меняться слишком часто, т.е. число  $N$  выбирается в пределах от 1 до 5 в зависимости от расстояния, которое должно быть пройдено на этапе крейсерского полета. Поэтому дополнительная группа варьируемых переменных — это время полета для каждого участка высоты  $x_i \geq t_{h \min}$ ,  $i = n + N + 1, \dots, n + 2N$ , где  $t_{h \min}$  — минимальное допустимое время между изменениями требуемой высоты. Тем самым участки для каждой высоты не имеют фиксированную длину, как для скорости, а время полета на каждом эшелоне может варьироваться. При этом должно выполняться условие

$$(3) \quad \sum_{i=n+N+1}^{n+2N} x_i = t_s - t_e,$$

где  $t_e$  — время, зарезервированное для выхода на заданную высоту в конце крейсерского полета.

Таким образом, задача оптимизации состоит в том, чтобы найти вектор

$$x = [x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+N}, x_{n+N+1}, \dots, x_{n+2N}],$$

минимизирующий целевую функцию

$$(4) \quad q_s = \int_0^{t_s} q_c(t) dt,$$

где  $q_c$  — секундный расход топлива, при соблюдении ограничений (2) и (3).

### 3. Динамическая модель

Динамика движения центра масс воздушного судна определяется действующими силами тяги двигателей, лобового сопротивления, подъемной силы и силы тяжести [9] с учетом того, что масса не постоянна, а уменьшается за счет расхода топлива [6] и может быть описана уравнениями

$$(5) \quad m\dot{V} = T \cos(\alpha + \varphi) - \frac{1}{2}c_x \rho S V^2 - mg \sin \Theta + V q_c,$$

$$(6) \quad mV\dot{\Theta} = T \sin(\alpha + \varphi) + \frac{1}{2}c_y \rho S V^2 - mg \cos \Theta,$$

$$(7) \quad \dot{h} = V \sin \Theta,$$

$$(8) \quad \dot{L} = V \cos \Theta + V_w,$$

$$(9) \quad \dot{m} = -q_c,$$

$$(10) \quad \alpha = \theta - \Theta,$$

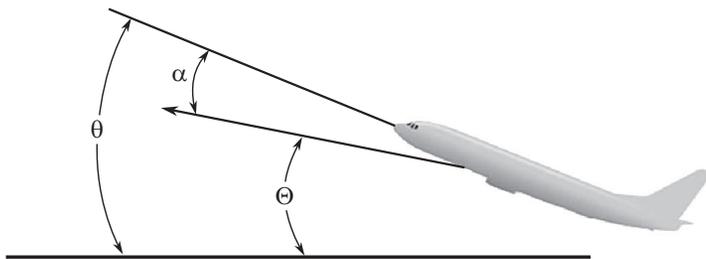


Рис. 1. Взаимосвязь угла атаки и тангажа.

где переменные состояния  $m$  — масса воздушного судна (кг),  $V$  — воздушная скорость (м/с),  $\Theta$  — угол наклона траектории (рад),  $h$  — высота полета (м),  $L$  — пройденное расстояние (м); известные для исследуемой модели воздушного судна константы  $\varphi$  — угол установки двигателей (рад) и  $S$  — площадь крыла (м<sup>2</sup>), ускорение свободного падения будем считать константой  $g = 9,80665$  м/с<sup>2</sup>, плотность воздуха  $\rho$  (кг/м<sup>3</sup>) определяем из стандартной атмосферы [10] в зависимости от высоты  $h$ ,  $\alpha$  — угол атаки (рад) (его соотношение с углами наклона траектории и тангажа показано на рис. 1),  $c_x$  и  $c_y$  — аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы,  $q_c$  — секундный расход топлива (кг/с),  $V_w$  — известная или прогнозируемая скорость попутной/встречной составляющей ветра (м/с), значения  $T$  суммарной тяги двигателей (Н) и тангажа  $\theta$  (рад) определяются работой регуляторов скорости и высоты бортовой системы управления.

Для исследуемой модели воздушного судна должны быть известны аппроксимирующие формулы зависимости аэродинамических коэффициентов от числа Маха и угла атаки  $c_x(M, \alpha)$  и  $c_y(M, \alpha)$  или заданы таблицы для интерполяции. Число Маха находим как

$$M = \frac{V}{a},$$

где  $a$  — скорость звука, определяемая из стандартной атмосферы в зависимости от высоты  $h$ . Кроме того, аэродинамические коэффициенты зависят от значения числа Рейнольдса, но так как в работе рассматривается только крейсерский полет, то в подразумеваемом диапазоне высот влияние этого значения незначительно и им пренебрегаем. Типовые зависимости  $c_x(M, \alpha)$  и  $c_y(M, \alpha)$  для диапазона значений  $M$  и  $\alpha$  в режиме крейсерского полета показаны на рис. 2 и рис. 3.

Секундный расход топлива можно выразить как

$$(11) \quad q_c = \eta(M, T, h)T,$$

где  $\eta(M, T, h)$  — удельный расход топлива (кг/с/Н) — известная для двигателей исследуемой модели воздушного судна функция от числа Маха, тяги, высоты полета и, возможно, других параметров [11].

ПИД-регулятор скорости формирует сигнал управления как функцию уставки и измеренного значения воздушной скорости. Коэффициенты регулятора должны быть известны. Следует учитывать, что существует некоторая

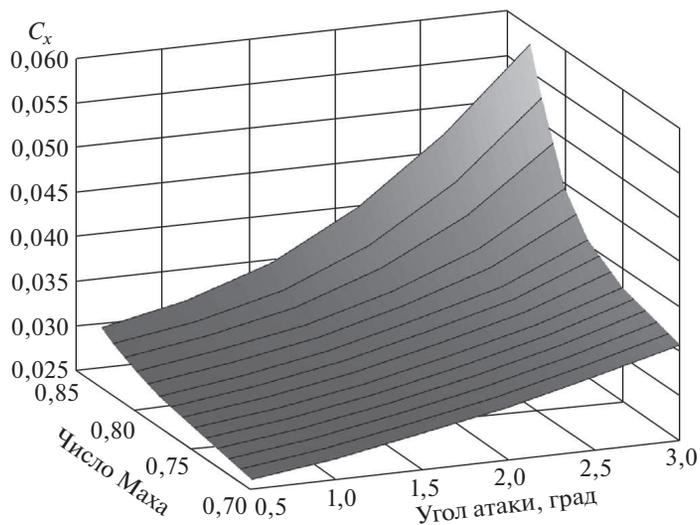


Рис. 2. Зависимость аэродинамического коэффициента лобового сопротивления  $c_x$  от числа Маха и угла атаки (градусы).

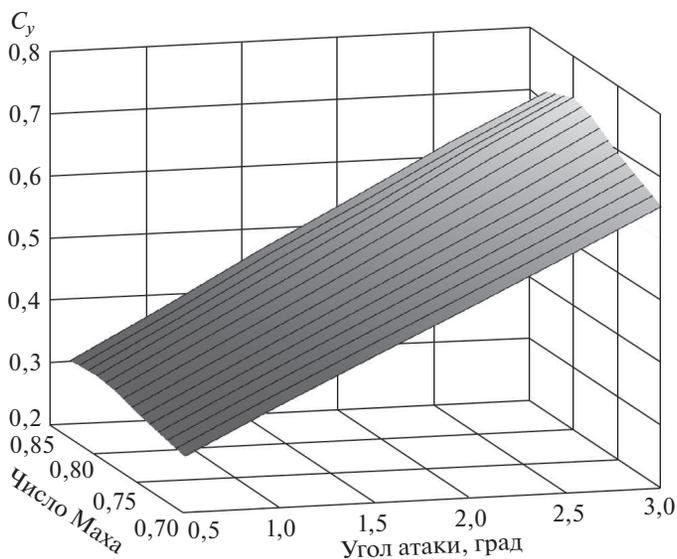


Рис. 3. Зависимость аэродинамического коэффициента подъемной силы  $c_y$  от числа Маха и угла атаки (градусы).

динамика тяги в зависимости от этого сигнала управления, и модель этой динамики также должна быть известна. В этой работе для моделирования динамики двигателей используется дифференциальное уравнение первого порядка. Аналогично работа регулятора высоты моделируется как ПИ-регулятор с известными коэффициентами, а инерционность тангажа к сигналу управления рулем высоты моделируется дифференциальным уравнением первого

порядка. Кроме того, в регуляторе высоты предусмотрено ограничение угла наклона траектории.

Таким образом, система уравнений (1)–(10), дополненная формулами расчета  $c_x(M, \alpha)$ ,  $c_y(M, \alpha)$  и  $\eta(M, T, h)$ , уравнениями регуляторов скорости и высоты и уравнениями динамики тяги и тангажа, позволяет моделировать крейсерский полет для заданных уставок скорости и высоты, определяющих высотно-скоростной профиль полета. Начальные условия должны быть заданными в соответствии с параметрами полета в начале этапа крейсерского полета.

В рассматриваемой задаче предполагается, что время  $t_s$ , отведенное на крейсерский полет, задано (и скорость выбирается так, что за это время будет преодолено планируемое расстояние крейсерского полета). Поэтому, моделируя полет в течение времени  $t_s$ , можно получить суммарный расход топлива на этапе крейсерского полета как разность заданной массы воздушного судна в начале этапа крейсерского полета и массы, полученной в конце моделирования.

#### 4. Статическая модель

При решении задачи оптимизации целевая функция (4) вычисляется для каждого варианта варьируемых переменных, использованного в процедуре поиска минимального значения целевой функции. Поэтому время, необходимое для вычисления значения целевой функции, должно быть достаточно малым, и даже за счет некоторой потери точности расчета значения целевой функции нужно искать пути сокращения вычислений.

Статическая модель позволяет получить значение секундного расхода топлива для текущих значений скорости и высоты полета и массы воздушного судна. Так как существуют участки полета, когда скорость и высоту можно принять постоянными значениями, а при моделировании без учета возмущений — весь этап крейсерского полета, кроме участков переходного процесса между сформированными уставками скорости и высоты, то тогда

$$(12) \quad \dot{V} = 0, \quad \dot{\Theta} = 0, \quad \Theta = 0, \quad \dot{h} = 0.$$

Для этих условий из уравнения (5), приняв  $q_c = \eta_0 T$ , где  $\eta_0$  — приближительное среднее значение удельного расхода топлива, получаем формулу расчета тяги

$$(13) \quad T = \frac{c_x \rho S V^2}{2(\cos(\alpha + \varphi) + V \eta_0)}.$$

Для использования формулы (13) необходимо определить значение  $c_x(M, \alpha)$ , т.е. нужно еще найти значение угла атаки  $\alpha$ . Для этого запишем уравнение (6) при условиях (12):

$$(14) \quad T \sin(\alpha + \varphi) + \frac{1}{2} c_y \rho S V^2 - mg = 0.$$

Так как в режиме крейсерского полета угол  $\alpha + \varphi$  мал, то часто первым слагаемым в этом уравнении пренебрегают, и тогда можно получить значение

$$(15) \quad c_y = \frac{2mg}{\rho SV^2}.$$

Приблизительное значение  $\hat{\alpha}$  определяется из известной зависимости  $c_y(M, \alpha)$ . В настоящей работе предлагается определять значение угла атаки  $\alpha$  более точно. Для этого подставим в (14) вместо  $T$  выражение (13), где пренебрегаем малым слагаемым  $V\eta_0$ :

$$(16) \quad \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)c_x\rho SV^2 + c_y\rho SV^2 - 2mg = 0.$$

Для малых значений угла  $\alpha + \varphi$  можно принять  $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \approx \alpha + \varphi$  и из (16) получить

$$(17) \quad (\alpha + \varphi)c_x(M, \alpha) + c_y(M, \alpha) - \frac{2mg}{\rho SV^2} = 0.$$

Здесь важно помнить, что использование приближительных статических уравнений предполагается для сокращения времени вычислений. Поэтому для того, чтобы получение значения  $\alpha$  как решение уравнения (17) не стало вычислительно сложной задачей, необходимо получить линейные аппроксимации

$$(18) \quad c_x(M, \alpha) = k_{x1}(M, \alpha)\alpha + k_{x0}(M, \alpha),$$

$$(19) \quad c_y(M, \alpha) = k_{y1}(M)\alpha + k_{y0}(M).$$

На рис. 3 видно, что зависимость  $c_y(M, \alpha)$  практически линейна относительно  $\alpha$ , и будем считать, что коэффициенты в линейной аппроксимации (19) зависят только от числа Маха  $M$ , которое при рассмотрении статических уравнений является известным значением для заданных воздушной скорости и высоты полета. На рис. 2 видно, что зависимость  $c_x(M, \alpha)$  нелинейна относительно  $\alpha$ , поэтому коэффициенты в линейной аппроксимации (18) зависят и от угла атаки  $\alpha$ . Будем использовать оценку  $\hat{\alpha}$ , полученную из уравнений (15) и (19) для вычисления значений коэффициентов  $k_{x1}(M, \alpha)$  и  $k_{x0}(M, \alpha)$ .

Таким образом, подставив (18) и (19) в (17), получим квадратное уравнение с неизвестным  $\alpha$ , из которого легко находится его значение. Выбирается большее из двух решений квадратного уравнения с учетом, что значение угла атаки в рассматриваемых режимах должно быть положительным. Теперь можно посчитать тягу по формуле (13) и найти текущее значение расхода топлива (11).

Следует заметить, что в (17) использовано текущее значение массы  $m$ , которое постоянно уменьшается в соответствии с расходом топлива. Поэтому для получения расхода топлива на участке с постоянными скоростью и высотой полета нужно выбрать некоторый шаг времени, на котором изменением массы можно пренебречь, и с этим шагом повторять расчет секундного расхода топлива по формулам (11) и (13), обновляя значение массы на каждом

шаге с учетом расхода топлива и интегрируя расход. В рассматриваемом в разделе 7 примере расход топлива на участках без переходных процессов составляет не более 0,72 кг/с, и при выборе шага в 60 с изменение общей массы за один шаг будет менее 0,07 %, а изменение расхода топлива менее 0,04 %, что можно считать верхней оценкой возможной ошибки расчета расхода. Ошибка по сравнению с моделированием этого примера методом Рунге–Кутты четвертого порядка практически оказалась в несколько раз меньше.

## 5. Алгоритм расчета расхода топлива

Предлагается вычислять значение суммарного расхода топлива на этапе крейсерского полета (4), используя для участков с постоянными скоростью и высотой полета формулы (11) и (13), где значение массы будет уменьшаться на величину расхода топлива с шагом вычислений таким, на котором массу можно считать постоянной с достаточной степенью точности. То есть выбрав шаг моделирования  $\Delta_{st}$ , принимаем длительность участка с постоянными скоростью и высотой полета равным

$$t_k = l\Delta_{st} + \Delta,$$

где  $l$  — натуральное число,  $\Delta < \Delta_{st}$ , и вычисляем расход топлива на этом участке как сумму

$$q_k = \sum_{i=1}^l \bar{q}_{c_i} \Delta_{st} + \bar{q}_{c_{l+1}} \Delta,$$

где  $\bar{q}_{c_i}$  — полученные значения секундного расхода топлива на каждом шаге.

Для переходных процессов при изменении скорости или высоты полета предлагается находить расход топлива, моделируя полет по уравнениям (5)–(11), формулам расчета  $c_x(M, \alpha)$ ,  $c_y(M, \alpha)$  и  $\eta(M, T, h)$  и формулам регуляторов скорости и высоты, учитывая инерционность тяги и тангажа и используя простейший численный метод Эйлера первого порядка с шагом одна секунда. Использование этого метода для рассматриваемого в разделе 7 примера дает ошибку значения расхода топлива по сравнению с моделированием методом Рунге–Кутты четвертого порядка всего 0,004 % при повышении быстродействия в 3 раза.

Следует учитывать, что если принимать уставку скорости на каждом из  $n$  участков равной

$$(20) \quad V_i = \frac{r}{x_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

то в результате моделирования пройденное расстояние может отличаться от заданного, так как в начале каждого участка во время переходного процесса от скорости  $V_{i-1}$  к скорости  $V_i$  реальная скорость еще не равна значению  $V_i$ . Поэтому для соблюдения условия, что необходимо преодолеть заданное расстояние за заданное время, уставка скорости на участке рассчитывается как

$$(21) \quad V_i = \frac{r - t_v V_{i-1}}{x_i - t_v}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $t_v$  — примерное усредненное значение, подбираемое экспериментально, соответствующее половине времени основной части переходного процесса, где скорость принимается как среднеарифметическое от скоростей предыдущего и текущего участков. Это позволяет скомпенсировать ошибку в итоговом пройденном расстоянии. В рассматриваемом в разделе 7 примере  $t_v = 11$  с. При больших участках постоянной скорости, например, для  $r = 500\,000$  м и  $x_i = 2200$  с разницей значений, полученных по формуле (20) или (21), составит примерно 0,02% при изменении скорости на 10 м/с и еще меньше при меньшем изменении. Такой разницей можно пренебречь. Но если значения  $r$  и  $x_i$  будут в 10 раз меньше, то ошибка вырастет в 10 раз и будет уже неприемлемой.

Кроме того, во время переходного процесса по высоте горизонтальная скорость должна учитывать угол наклона траектории. Поэтому уставка скорости на участке рассчитывается следующим образом:

$$(22) \quad V_i = \frac{r - t_v V_{i-1}}{x_i - t_v - t_{hi}(1 - \cos \Theta_{\max})}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $\Theta_{\max}$  — максимально разрешенный угол наклона траектории в режиме крейсерского полета,  $t_{hi}$  — общее время переходных процессов по высоте на  $i$ -м участке по скорости (если их нет на этом участке, то  $t_{hi} = 0$ , и тогда (22) совпадает с (21)), которое находится как сумма длительностей переходных процессов по высоте, каждую из которых определяем как

$$\frac{|x_j - x_{j-1}|}{V_i \sin \Theta_{\max}},$$

где  $x_j$  — значение высоты. Такой расчет требуемой скорости носит оценочный характер, что может приводить к тому, что за заданное время при найденных значениях скоростей пройденное расстояние будет отличаться от заданного. Так, в примере раздела 7 при моделировании профиля полета длительностью 6 ч, показанного на рис. 7, расстояние полета получилось равным 5 000 031 м при заданном значении 5 000 000 м, т.е. ошибка составила менее 0,001%. Практически требуемая точность моделирования расхода топлива составляет 0,05%. При этом нужно учитывать, что задача — найти оптимальный высотно-скоростной профиль полета, а не значение расхода, т.е. важно, чтобы разные исходные данные моделирования не приводили к существенно разным ошибкам и таким образом влияли на полученный результат, а расхождение моделируемого и реального расхода топлива может быть более существенным.

## 6. Алгоритм оптимизации

Целевая функция расхода топлива моделируется нелинейными дифференциальными и алгебраическими уравнениями, поэтому ее градиент аналитически недоступен, а его численная оценка по непрерывным переменным требует  $n + N$  дополнительных вычислений функций, что неприемлемо с точки зрения замедления алгоритма. Более того, функция невыпуклая и многоэкстремальная, что затрудняет применение ряда алгоритмов (ускоренных и

проксимальных), а также исключает гарантии нахождения глобального минимума методами оптимизации, не использующими переборный подход. Поэтому применяются эвристические и частично переборные алгоритмы, сходящиеся к локальному минимуму. Постановка задачи усложняется введением дискретных переменных (эшелоны высоты). Их полный перебор требует  $K^N$  вычислений целевой функции и представляется нереализуемым даже для небольшого числа переменных  $N$  (число участков полета на постоянной высоте) и доступных эшелонов  $K$ .

Обе сложности удалось преодолеть с помощью гибридного метода оптимизации, требующего небольшое количество вычислений целевой функции и одновременно учитывающего “разумный” перебор дискретных величин. Реализованный метод схож с методом покоординатного спуска [8, 12]. Метод отличается тем, что для соблюдения ограничений на каждом шаге может изменяться не одна, а несколько компонент вектора переменных. Кроме того, используется набор вспомогательных точек-кандидатов, что позволяет успешно решать проблему попадания в локальный минимум, в отличие от метода локальных вариаций [12]. Выбор точек-кандидатов детерминирован в отличие от метода роя частиц [13]. Алгоритм выполняется с фиксированным параметром шага, поэтому нужно учитывать, что это минимум на множестве варьируемых переменных, зависящем от выбранного параметра шага. При выполнении алгоритма генерируется последовательность точек  $\{x^{(i)}, i = 1, 2, \dots\}$ , образующих релаксирующую, убывающую последовательность

$$q_s(x^{(i+1)}) \leq q_s(x^{(i)}).$$

Вектор переменных  $x = [x^1, x^2, x^3]$  состоит из трех групп:  $x^1$  — время на каждый из  $n$  участков различной скорости,  $x^2$  — высота из множества разрешенных эшелонов для каждого из  $N$  участков различной высоты,  $x^3$  — время на каждый из  $N$  участков различной высоты. При изменении компоненты в первой или третьей группах необходимо соблюдать ограничения (2) или (3) соответственно. Например, при увеличении выбранной компоненты “соседние” с ней или все остальные компоненты группы уменьшаются так, чтобы выполнялись ограничения (2) и (3). По существу подзадача выбора точек-кандидатов состоит в подборе нескольких “соседних” по отношению к текущей точек, удовлетворяющих ограничениям. Изменение основной выбранной компоненты характеризуется внутренним параметром алгоритма, играющим роль длины шага. В группе варьируемых переменных  $x^2$  (высота полета на каждом из  $N$  участков  $x_i \in \{h_1, \dots, h_K\}$ ,  $i = n + 1, \dots, n + N$ ) в качестве точек-кандидатов берутся все возможные варианты, т.е. все  $K$  эшелонов.

### Алгоритм оптимизации.

Шаг 1. Выбрать начальную точку

$$x^{(0)} = [x^{1,(0)}, x^{2,(0)}, x^{3,(0)}],$$

удовлетворяющую всем ограничениям. Инициировать общий счетчик итераций  $k = 0$ , внутренние счетчики для каждой группы переменных  $k^1 = k^2 = k^3 = 1$  и счетчик неэффективных шагов  $k^{\text{bad}} = 0$ .

Шаг 2. Выбрать группу переменных  $j = \text{mod}(k, 3) + 1$ .

Шаг 3. В группе переменных  $x^j$  выбрать основную изменяемую компоненту и увеличить ее счетчик.

Шаг 4. Сформировать набор точек-кандидатов  $X = \{x^a, x^b, \dots\}$  на основе выбранной группы и изменяемой компоненты. Число кандидатов зависит от группы.

Шаг 5. Вычислить целевую функцию во всех точках-кандидатах и выбрать среди них минимальное значение и соответствующую точку

$$x^{\text{cand}} = \arg \min_{x \in X} q_s(x).$$

Шаг 6. Если значение функции удалось улучшить, т.е.

$$q_s(x^{\text{cand}}) < q_s(x^{(k)}),$$

то изменить текущую точку  $x^{(k+1)} \leftarrow x^{\text{cand}}$  и сбросить счетчик неэффективных шагов  $k^{\text{bad}} \leftarrow 0$ . В противном случае сохранить точку  $x^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)}$  и увеличить счетчик неэффективных шагов  $k^{\text{bad}} \leftarrow k^{\text{bad}} + 1$ .

Шаг 7. Если счетчик неэффективных шагов меньше числа переменных  $k^{\text{bad}} < n + 2N$ , то перейти к Шагу 2. Иначе

Завершить алгоритм: Вернуть в качестве решения текущую точку  $x^{(k)}$ .

## 7. Пример

Предложенные алгоритмы оптимизации и расчета целевой функции реализованы в среде МАТЛАВ. Проверка их работоспособности проведена на следующем примере. Рассмотрим среднемагистральный пассажирский самолет МС-21-300 с площадью крыла  $S = 113 \text{ м}^2$  и следующими исходными данными крейсерского полета, представленными в табл. 1.

Проверим сначала эффективность варьирования скорости на постоянной высоте. Пусть для скорости задано  $n = 10$  участков (тогда  $r = R/n = 500 \text{ км}$ ), а высоту считаем постоянной:  $N = 1$ ,  $K = 1$ ,  $h_0 = h_1 = h_{N+1} = 9144 \text{ м}$ . Процедурой оптимизации найдены значения скоростей:

$$V = [235,33, 235,45, 235,58, 235,7, 234,96, \dots \\ \dots 227,37, 227,37, 227,48, 227,59, 228,64] \text{ м/с}.$$

**Таблица 1.** Исходные данные

Расстояние крейсерского полета	$R$	5 000 000 м (5000 км)
Время крейсерского полета	$t_s$	21 600 с (6 ч)
Минимальная скорость	$V_{\text{min}}$	210 м/с
Максимальная скорость	$V_{\text{max}}$	250 м/с
Начальная скорость	$V_0$	$R/t_s = 231,48 \text{ м/с}$
Начальная высота	$h_0$	9144 м (30 000 футов)
Конечная высота	$h_{N+1}$	9144 м (30 000 футов)
Разрешенный угол наклона траектории	$\Theta_{\text{max}}$	1 градус
Масса в начале крейсерского полета	$m_0$	75 000 кг

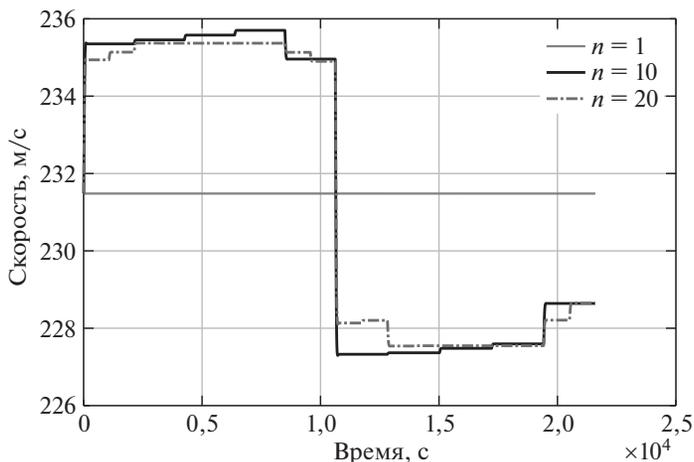


Рис. 4. Скорость при моделировании найденного профиля.

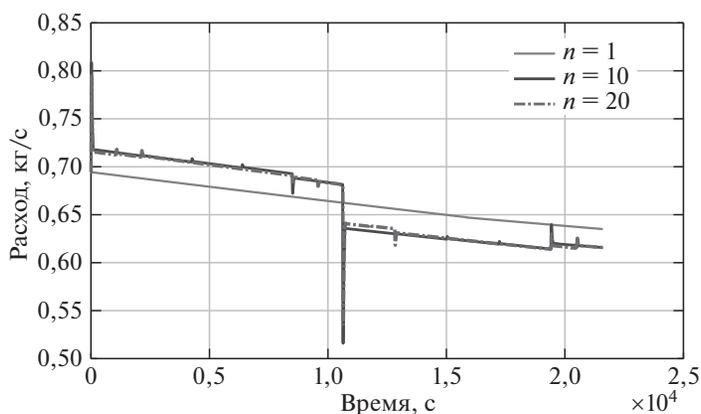


Рис. 5. Расход топлива при моделировании найденного профиля скорости.

Расход топлива составил 14 293 кг. Если менять скорость чаще и принять  $n = 20$ , то получим такой же расход топлива с точностью до 0,2 кг. То есть повышение вариативности скорости не дает дополнительной экономии. При моделировании полета с постоянной скоростью

$$V = \frac{5\,000\,000}{21\,600} = 231,481 \text{ м/с}$$

расход топлива составил 14 314 кг. Маневрирование по скорости дало экономию всего 21 кг. Графики моделирования скорости и секундного расхода топлива для этих трех вариантов показаны на рис. 4 и 5.

При оптимизации высоты и скорости для  $n = 10$ ,  $N = 4$ ,  $K = 6$ ,  $h_0 = h_{N+1} = 9144$  м и разрешенных значениях эшелонов высоты

$$\begin{aligned} \{h_1, \dots, h_K\} &= \{9144, 9753,6, 10363,2, 10972,8, 11582,4, 12192\} \text{ м} = \\ &= \{30\,000, 32\,000, 34\,000, 36\,000, 38\,000, 40\,000\} \text{ футов} \end{aligned}$$

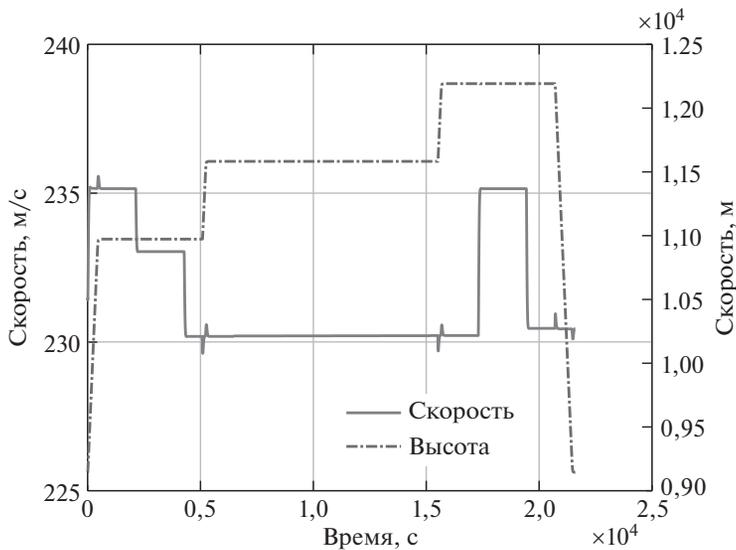


Рис. 6. Скорость и высота при моделировании найденного профиля.

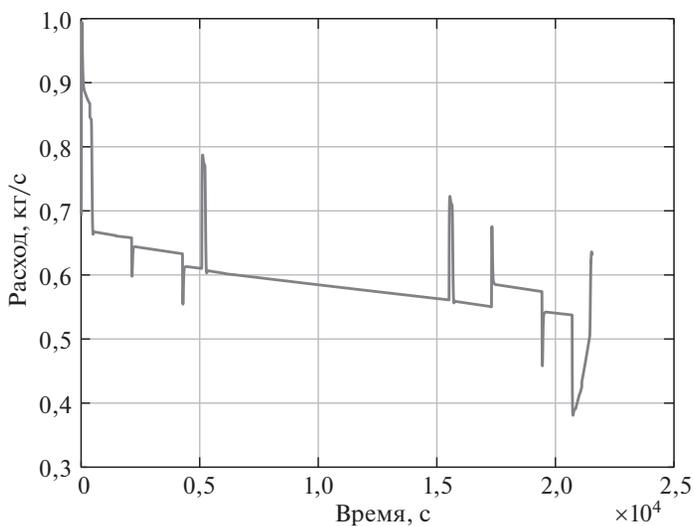


Рис. 7. Расход топлива при моделировании найденного профиля.

получен расход топлива 12838 кг при значениях скоростей на каждом из десяти участков:

$$V = [235,15, 233,04, 230,18, 230,20, 230,2, \dots \\ \dots 230,21, 230,21, 230,21, 235,15, 230,46] \text{ м/с.}$$

значениях высоты на каждом из четырех участков:

$$h = [10972,8, 11582,4, 11582,4, 12192] \text{ м,}$$

**Таблица 2.** Зависимость расхода топлива от высоты полета

Высота, м	9144	11582,4	12 192
Расход, кг	14 314	12 893	13 016

значениях длительности каждого из четырех участков высоты:

$$x^3 = [5082,4, 5224,2, 5204,1, 5189,3] \text{ с.}$$

Графики моделирования скорости и высоты показаны на рис. 6, график секундного расхода топлива — на рис. 7. При моделировании полета с постоянной скоростью  $V = 231,481 \text{ м/с}$  и на постоянной высоте 11582,4 м расход топлива составил 12 893 кг. Маневрирование дало более заметную экономию 55 кг. Заметим, что даже если не менять высоту на этапе крейсерского полета ( $N = 1$ ), важен выбор высоты полета в зависимости от массы. Для рассматриваемого примера при  $m_0 = 75\,000 \text{ кг}$  при полете с постоянной скоростью  $V = 231,481 \text{ м/с}$  и на постоянной высоте расход на разных высотах приведен в табл. 2.

Заметим, что в полученных значениях расхода топлива учтены набор высоты от начальной высоты крейсерского полета и снижение к высоте, требуемой в конце этапа крейсерского полета.

## 8. Заключение

Полученные результаты моделирования подтверждают результаты других исследований, что при решении задачи минимизации расхода топлива при условии заданных расстояния и времени крейсерского полета маневрирование по скорости и высоте не дает существенной экономии топлива. Так, в рассмотренном примере маневрирование только по скорости дало снижение расхода на 0,15 %, а при маневрировании по скорости и высоте — на 0,4 %. Тем не менее важен расчет экономической высоты полета при заданной массе воздушного судна, так как правильный выбор эшелона дает существенную экономию топлива. Кроме того, разработанные алгоритмы позволяют учитывать прогнозные значения скорости ветра. При этом оптимальное формирование высотно-скоростного профиля полета может давать более заметное снижение расхода. Таким образом, дальнейшее развитие работы предполагает исследование оптимизации расхода топлива с использованием данных о скорости ветра.

Авторы выражают признательность Борису Теодоровичу Поляку и Николаю Владимировичу Куланову за ценные советы при подготовке работы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Русол В.А.* Оптимизация маневрирования воздушных судов. М.: Транспорт, 1986.
2. *Скрипниченко С.Ю.* Оптимизация режимов полета по экономическим критериям. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1988.

3. *Franco A., Rivas D., Valenzuela A.* Minimum-Fuel Cruise at Constant Altitude With Fixed Arrival Time // *J. Guidance, Control, Dynam.* 2010. V. 33. No. 1. P. 280–285.
4. *Saucier A., Maazoun W., Soumis F.* Optimal Speed-Profile Determination for Aircraft Trajectories // *Aerosp. Sci. Technol.* 2017. V. 67. P. 327–342.
5. *Valenzuela A., Rivas D.* Optimization of Aircraft Cruise Procedures Using Discrete Trajectory Patterns // *J. Aircraft.* 2014. V. 51. Iss. 5. P. 1632–1640.
6. *Григоров П.Ю., Куланов Н.В.* Применение концепции обратных задач динамики в задачах вертикальной навигации // *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2016. № 3. С. 130–140.
7. *Губарева Е.А., Мозжорина Т.Ю.* Оптимизация программы полета дозвукового пассажирского самолета на участке крейсерского полета // *Инженерный журнал: наука и инновации.* 2014. Вып. 12(36).
8. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. 2-е изд., испр. и доп. М.: ЛЕНАНД, 2014.
9. *Hull D.G.* *Fundamentals of Airplane Flight Mechanics.* Berlin: Springer-Verlag, 2007.
10. ГОСТ 4401-81. Атмосфера стандартная. Параметры. М.: Изд-во стандартов, 2004.
11. *Bartel M., Trevor M.Y.* Simplified Thrust and Fuel Consumption Models for Modern Two-Shaft Turbofan Engines // *J. Aircraft.* 2008. V. 45. Iss. 4. P. 1450–1456.
12. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
13. *Kennedy J., Eberhart R.* Particle Swarm Optimization // *Proc. 1995 IEEE Int. Conf. Neural Networks.* 1995. Vol. 4. P. 1942–1948.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галляевым.*

Поступила в редакцию 23.11.2020

После доработки 05.02.2021

Принята к публикации 16.03.2021

© 2021 г. Я.Г. САПУНКОВ, канд. физ.-мат. наук (iptmuran@san.ru),  
А.В. МОЛОДЕНКОВ, д-р техн. наук (molalex@yandex.ru)  
(Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов)

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО В СМЫСЛЕ КОМБИНИРОВАННОГО ФУНКЦИОНАЛА РАЗВОРОТА ОСЕСИММЕТРИЧНОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА<sup>1</sup>

В кватернионной постановке рассматривается задача оптимального управления пространственной переориентацией космического аппарата как твердого тела с одной осью симметрии без ограничения на функцию управления. В качестве критерия оптимальности используется комбинированный функционал, который объединяет время и энергию, затраченные на разворот космического аппарата. На основании принципа максимума Л.С. Понтрягина для этой задачи получены новые аналитические решения в классах конических и обобщенных конических движений. Приводятся численные примеры.

*Ключевые слова:* оптимальное управление, космический аппарат, осесимметричное твердое тело, аналитическое решение.

**DOI:** 10.31857/S0005231021070059

### 1. Введение

Построение управления угловым движением космического аппарата (КА) как твердого тела в традиционной постановке включает задачи программного углового движения (разворота), программного управления и построения управления, стабилизирующего программу углового движения в малом. Задача построения программного углового движения и программного управления во многих случаях решается с помощью методов теории оптимального управления. Точное аналитическое решение этой задачи для наиболее часто используемых функционалов оптимизации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА не найдено даже в случае сферической симметрии КА, не говоря уже о его произвольной динамической конфигурации. Известны лишь некоторые частные случаи решения задачи (например, [1–13]); в общем случае приходится рассчитывать только на приближенные численные методы. Между тем аналитическое решение задачи оптимального разворота КА (твердого тела) в замкнутой форме имеет не только теоретический, но и большой практический интерес, так как позволяет использовать на борту КА готовые законы программного управления и изменения оптимальной траектории.

В статье (разделы 2–6) в традиционной постановке рассматривается задача оптимального разворота КА как твердого тела с одной осью симметрии

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00205).

при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА без ограничения на управление. В качестве критерия оптимальности используется комбинированный функционал, который объединяет время и энергию, затраченные на переориентацию КА. С помощью замен переменных исходная задача упрощается (в отношении динамических уравнений Эйлера) до задачи оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс, содержащей одно дополнительное скалярное дифференциальное уравнение. С использованием кватернионов на основании принципа максимума Л.С. Понтрягина получено точное аналитическое решение этой задачи в классе конических движений. Представлено явное выражение для оптимального управления и постоянного по модулю оптимального вектора угловой скорости КА. Траектория движения осесимметричного КА представляет собой регулярную прецессию (в этом отличие предлагаемого решения от [4]). Векторы начального и конечного значений угловой скорости КА должны принадлежать конической поверхности, порождаемой произвольно заданными постоянными условиями задачи. В разделах 7, 8 статьи получено аналитическое решение модифицированной задачи оптимального в смысле комбинированного функционала разворота КА при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА. В классе обобщенных конических движений произведена модификация традиционной задачи оптимального разворота, которая позволила получить аналитические решения для уравнений движения, содержащие произвольные постоянные и две произвольные скалярные функции (параметры обобщенного конического движения). Относительно этих функций и их производных формулируется и решается оптимизационная задача, в которой в качестве управлений выступают вторые производные от этих двух функций. Полученное аналитическое решение модифицированной задачи может рассматриваться как приближенное (квазиоптимальное) решение традиционной задачи оптимального разворота КА. Следует отметить, что для случаев аналитической разрешимости традиционной задачи оптимального разворота при сферической симметрии КА, когда наложены ограничения на краевые условия задачи — плоский эйлеров разворот, коническое движение, — решения традиционной и модифицированной задач полностью совпадают [8–11]. В разделе 9 приводятся: численный пример решения задачи оптимальной переориентации КА с одной осью симметрии в классе конических движений (в виде регулярной прецессии); примеры, показывающие близость решений традиционной и модифицированной задач оптимального разворота КА при произвольных граничных условиях.

Статья продолжает исследования, начатые в [11–13]. Отметим, что в [12, 13] были получены аналитические решения традиционной и модифицированной задач оптимальных по быстродействию и в смысле минимума энергетических затрат разворотов осесимметричного КА в классах конических и обобщенных конических движений. В [11] найдено аналитическое решение задачи оптимального в смысле комбинированного функционала разворота сферически-симметричного твердого тела.

## 2. Постановка задачи

Движение КА как твердого тела с одной осью симметрии вокруг центра масс описывается дифференциальными уравнениями [1]:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} 2\dot{\mathbf{L}} &= \mathbf{L} \circ \mathbf{w}, \\ I_1 \dot{w}_1 &= M_1, \end{aligned}$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} I_2 \dot{w}_2 &= M_2 - (I_1 - I_2) w_1 w_3, \\ I_2 \dot{w}_3 &= M_3 + (I_1 - I_2) w_1 w_2. \end{aligned}$$

Здесь фазовыми координатами являются  $\mathbf{L}(t)$  — нормированный кватернион поворота КА:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(t) &= l_0(t) + l_1(t)\mathbf{i}_1 + l_2(t)\mathbf{i}_2 + l_3(t)\mathbf{i}_3 = [l_0(t), l_1(t), l_2(t), l_3(t)]^T, \\ \|\mathbf{L}\| &= l_0^2 + l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  — орты гиперкомплексного пространства (мнимые единицы Гамильтона), которые можно идентифицировать с ортами  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  жестко связанного с КА трехмерного векторного пространства, и  $\mathbf{w}(t)$  — вектор угловой скорости КА:

$$\mathbf{w}(t) = w_1(t)\mathbf{i}_1 + w_2(t)\mathbf{i}_2 + w_3(t)\mathbf{i}_3 = [w_1(t), w_2(t), w_3(t)]^T,$$

причем символ “ $\circ$ ” означает кватернионное умножение, а управление — вектор  $\mathbf{M}(t)$  действующего на КА внешнего момента

$$\mathbf{M}(t) = M_1(t)\mathbf{i}_1 + M_2(t)\mathbf{i}_2 + M_3(t)\mathbf{i}_3 = [M_1(t), M_2(t), M_3(t)]^T.$$

Фазовые координаты и управление подчинены требованиям задачи понтрягинского типа ( $\mathbf{L}(t), \mathbf{w}(t)$  — непрерывные функции,  $\mathbf{M}(t)$  — кусочно-непрерывная функция). В динамических уравнениях Эйлера (2.2) для КА с одной осью симметрии (направленной в данном случае вдоль орта  $\mathbf{i}_1$  связанной с КА системы координат)  $I_1, I_2$  — главные центральные моменты инерции твердого тела,  $I_1, I_2 = \text{const} > 0$ .

Заданы произвольные граничные условия по угловому положению

$$(2.3) \quad \mathbf{L}(0) = \mathbf{L}_0, \quad \mathbf{L}(T) = \mathbf{L}_T$$

и угловой скорости КА

$$(2.4) \quad \mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0, \quad \mathbf{w}(T) = \mathbf{w}_T.$$

Требуется определить оптимальное управление  $\mathbf{M}^{\text{опт}}(t)$  системой (2.1), (2.2) при условиях (2.3)–(2.4), доставляющее минимум функционалу

$$(2.5) \quad J = \int_0^T (1 + a\mathbf{M}^2) dt,$$

где  $a = \text{const} > 0$ , время  $T$  не задано. Функционал (2.5) представляет собой комбинацию двух критериев с размерным весовым множителем  $a$ : времени и энергии, затраченных на разворот КА.

### 3. Переход к безразмерным переменным

Перейдем от размерных переменных в задаче к безразмерным по формулам

$$\begin{aligned} I^{\text{масш}} &= ((I_1^2 + 2I_2^2)/3)^{1/2}, & I_k^{\text{безраз}} &= I_k/I^{\text{масш}}, & k &= 1, 2; \\ \mathbf{w}^{\text{безраз}} &= (I^{\text{масш}})^{1/2} a^{1/4} \mathbf{w}, & t^{\text{безраз}} &= (I^{\text{масш}})^{-1/2} a^{-1/4} t, \\ \mathbf{M}^{\text{безраз}} &= a^{1/2} \mathbf{M}, & J^{\text{безраз}} &= (I^{\text{масш}})^{-1/2} a^{-1/4} J, \end{aligned}$$

при этом вид выражений (2.1)–(2.4) не изменится, а функционал (2.5) примет вид

$$(3.1) \quad J = \int_0^T (1 + \mathbf{M}^2) dt.$$

Далее будем иметь в виду постановку задачи (2.1)–(2.4), (3.1) в безразмерных переменных, и верхние индексы у них будут опущены. Таким образом, безразмерная задача явно не зависит от параметра  $a$ . Зависимость возникнет лишь при обратном переходе к размерным переменным.

### 4. Замены переменных в задаче с осевой симметрией КА

С целью упрощения (в отношении динамических уравнений Эйлера) задачи (2.1)–(2.4), (3.1) осуществим замены переменных, сводящие исходную задачу к задаче оптимального разворота КА со сферическим распределением масс, содержащей одно дополнительное скалярное дифференциальное уравнение. Для этого перепишем уравнения (2.2) в виде

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= m_1, \\ \dot{w}_2 &= b_1 m_2 - b w_1 w_3, \\ \dot{w}_3 &= b_1 m_3 - b w_1 w_2, \end{aligned}$$

где

$$m_1 = M_1/I_1, \quad m_2 = M_2/I_1, \quad m_3 = M_3/I_1, \quad b = (I_1 - I_2)/I_2, \quad b_1 = I_1/I_2.$$

Заменим переменные  $w_1, w_2, w_3$  на новые  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ :

$$(4.1) \quad \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ 0 & \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}.$$

Тогда получим для уравнений Эйлера (2.2) в кватернионной записи

$$(4.2) \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\mathbf{B}} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \mathbf{B},$$

$$(4.3) \quad \mathbf{B}(t) = \exp \{ \mathbf{i}_1 \theta(t)/2 \},$$

где “ $\sim$ ” – сопряжение кватерниона, “ $\exp \{ \cdot \}$ ” – кватернионная экспонента, вектор  $\mathbf{m} = [m_1, m_2, m_3]^T$ ,

$$(4.4) \quad \theta(t) = b_2 \int_0^t \omega_1(\tau) d\tau, \\ b_2 = bb_1^{-1} = 1 - I_2/I_1 = 1 - b_1^{-1}.$$

Отметим, что  $|\mathbf{B}(t)| = 1, \forall t$ .

Кватернионное уравнение углового движения КА (2.1) при этом запишется так:

$$(4.5) \quad 2\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \circ \mathbf{B} \circ (b_1^{-1}\omega_1\mathbf{i}_1 + \omega_2\mathbf{i}_2 + \omega_3\mathbf{i}_3) \circ \tilde{\mathbf{B}},$$

где кватернион  $\mathbf{B}$  определяется (3.3).

С учетом начального условия по угловой скорости КА (1.5) уравнение (3.2) можно переписать следующим образом:

$$(4.6) \quad \dot{\omega} = \tilde{\beta} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \beta,$$

$$(4.7) \quad \beta(t) = \exp \left\{ \mathbf{i}_1 b_2 \int_0^t \left( \int_0^\tau m_1(\xi) d\xi + w_{01} \right) d\tau / 2 \right\}.$$

Нелинейное выражение, стоящее в правой части (4.5) и зависящее только от переменных  $m_k(t), k = \overline{1,3}$ , примем за новое управление  $\mathbf{u}(t)$ :

$$(4.8) \quad \mathbf{u} = \tilde{\beta} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \beta,$$

где  $\beta$  определяется (4.7). Отметим, что  $u_1(t) = b_1 m_1(t)$ , и поэтому в замене переменных (4.8) всегда можно совершить обратный ход: по новой векторной переменной  $\mathbf{u}(t)$  (когда она будет известна) восстановить управление  $\mathbf{m}(t)$  задачи (2.1)–(2.4), (3.1).

Модуль вектора нового управления связан с модулем вектора управляющего момента КА так:

$$|\mathbf{u}| = \left| \tilde{\beta} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \beta \right| = b_1 \left| \tilde{\beta} \right| |\mathbf{m}| |\beta| = b_1 |\mathbf{m}| = b_1 |\mathbf{M}|/I_1 = |\mathbf{M}|/I_2$$

Исходя из (3.5), осуществим еще одну замену переменных:

$$(4.9) \quad \mathbf{L} = \mathbf{\Lambda} \circ \tilde{\mathbf{B}},$$

где  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}(t)$  – новая кватернионная переменная, описывающая угловое положение КА, при этом, так как

$$\|\mathbf{B}(t)\| = |\mathbf{B}(t)|^2 = 1, \forall t,$$

то

$$\|\mathbf{L}(t)\| = \|\mathbf{\Lambda}(t)\| = 1, \forall t.$$

С учетом всех указанных выше замен переменных задача оптимального разворота КА (2.1)–(2.4), (3.1) примет вид

$$(4.10) \quad 2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega,$$

$$(4.11) \quad \dot{\omega} = \mathbf{u},$$

$$(4.12) \quad \dot{\theta} = b_2 \omega_1,$$

$$(4.13) \quad \theta(0) = 0,$$

$$(4.14) \quad \omega(0) = \omega_0 = b_1 w_{01} \mathbf{i}_1 + w_{02} \mathbf{i}_2 + w_{03} \mathbf{i}_3, \quad \Lambda(0) = \Lambda_0 = \mathbf{L}_0,$$

$$(4.15) \quad \omega(T) = \omega_T = \tilde{\mathbf{B}}(\theta(T)) \circ (b_1 w_{T1} \mathbf{i}_1 + w_{T2} \mathbf{i}_2 + w_{T3} \mathbf{i}_3) \circ \mathbf{B}(\theta(T)), \\ \Lambda(T) = \Lambda_T = L_T \circ \mathbf{B}(\theta(T)),$$

$$(4.16) \quad J = \int_0^T (1 + I_2^2 \mathbf{u}^2) dt \rightarrow \min,$$

где  $w_{01}, w_{02}, w_{03}, w_{T1}, w_{T2}, w_{T3}$  — компоненты вектора

$$\mathbf{w}(t) = [w_1(t), w_2(t), w_3(t)]^T$$

в начальный и конечный моменты времени соответственно, а кватернион  $\mathbf{B}(\theta(T))$  определяется по формуле (4.3).

Согласно (4.9), (4.15) задачу (4.10)–(4.16) можно переформулировать так: в восьмимерном фазовом пространстве  $\Lambda \times \omega \times \theta$  управляемую систему (4.10)–(4.12) необходимо оптимально в смысле функционала (4.16) перевести из начального состояния (3.14) на многообразии, которое определяется соотношениями

$$(4.17) \quad \text{vect}(\Lambda \circ \tilde{\mathbf{B}}(\theta) \circ \tilde{\mathbf{L}}_T) = 0, \\ \omega - \tilde{\mathbf{B}}(\theta) \circ (b_1 w_{T1} \mathbf{i}_1 + w_{T2} \mathbf{i}_2 + w_{T3} \mathbf{i}_3) \circ \mathbf{B}(\theta) = 0,$$

где “ $\text{vect}(\cdot)$ ” обозначает векторную часть кватерниона.

Из этой задачи найдем оптимальное управление  $\mathbf{u}^{\text{опт}}$  и траекторию  $\Lambda^{\text{опт}}, \omega^{\text{опт}}$ . Как видно, векторное дифференциальное уравнение (4.11) имеет структуру, соответствующую динамическим уравнениям Эйлера для сферически-симметричного твердого тела. Это существенно облегчает исследование задачи.

Далее будем рассматривать задачу (4.10)–(4.16) ((4.17)).

## 5. Применение принципа максимума

Выполним процедуру принципа максимума Л.С. Понтрягина [1, 14]. Введем вспомогательные функции  $\Psi(t)$  (кватернион) и  $\varphi(t)$  (вектор), соответствующие фазовым координатам  $\Lambda(t)$  и  $\omega(t)$ . Составим функцию Гамильтона–Понтрягина

$$(5.1) \quad H = -\psi^* (1 + I_2^2 \mathbf{u}^2) + (\Psi, \Lambda \circ \omega) / 2 + (\varphi, \mathbf{u}) + b_2 \omega_1 \rho,$$

где постоянная  $\psi^* \geq 0$ , а “ $(\cdot, \cdot)$ ” означает скалярное произведение векторов.

Будем рассматривать невырожденные решения краевой задачи принципа максимума, для которых  $\psi^* > 0$ . В силу однородности функции Гамильтона–Понтрягина  $H$  [14] в (5.1) положим  $\psi^* I_2^2 = 1$ .

Сопряженная система:

$$(5.2) \quad \begin{cases} 2\dot{\Psi} = \Psi \circ \omega, \\ \dot{\rho} = 0, \\ \dot{\varphi} = -\text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi) / 2 - b_2 \rho \mathbf{i}_1. \end{cases}$$

Как видно, уравнения для переменных  $\Psi$  и  $\Lambda$  совпадают с точностью до константы. Используя это и введя обозначение [1]

$$(5.3) \quad \mathbf{p} = \text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi) = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_v \circ \Lambda,$$

где  $\mathbf{c}_v$  – произвольная векторная постоянная, сопряженную систему запишем так:

$$(5.4) \quad \begin{cases} \mathbf{p} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_v \circ \Lambda, & \rho = \rho_0 = \text{const}, \\ \dot{\varphi} = -\mathbf{p}/2 - b_2 \rho_0 \mathbf{i}_1. \end{cases}$$

Следует отметить, что применение этого приема [1], основанного на самосопряженности дифференциальной кватернионной системы уравнений (4.10) (замена кватернионной сопряженной переменной  $\Psi$  на векторную переменную  $\mathbf{p}$  (5.3)), позволяет понизить размерность краевой задачи, получаемой после применения принципа максимума, на четыре единицы.

Условие максимума функции Гамильтона–Понтрягина (5.1) дает следующую структуру оптимального управления:

$$(5.5) \quad \mathbf{u}^{\text{опт}} = \varphi/2.$$

Как видно, вектор-функция управления в задаче носит непрерывный характер.

Из (4.11), (4.12), (5.4), (5.5) имеем:

$$(5.6) \quad \dot{\mathbf{p}} = [\mathbf{p}, \omega],$$

$$(5.7) \quad \mathbf{p} = -4\ddot{\omega} + 2b_2 \rho_0 \mathbf{i}_1,$$

где “[ . , . ]” означает векторное произведение.

Подставляя (5.7) в (5.6), получим

$$(5.8) \quad \ddot{\omega} = [\ddot{\omega} - b_2 \rho_0 \mathbf{i}_1 / 2, \omega].$$

Таким образом, оптимальная угловая скорость твердого тела на всем интервале времени движения удовлетворяет векторному дифференциальному уравнению третьего порядка (5.8). Решение поставленной задачи оптимального управления сводится тем самым к решению краевой задачи (4.11), (5.8), (4.13)–(4.16).

Из постановки задачи видно, что конечные значения фазовых координат  $\Lambda(t)$ ,  $\omega(t)$  не являются фиксированными величинами, а принадлежат многообразию, определяемому выражениями (4.5), (4.15), (4.16). Поэтому для фазовых координат  $\Lambda(t)$ ,  $\omega(t)$ ,  $\theta(t)$  и сопряженных переменных  $\Psi(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $\rho$  в момент времени  $t = T$  выполняются условия трансверсальности

$$(5.9) \quad \text{scal}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi(t)) = 0,$$

где “ $\text{scal}(\cdot)$ ” обозначает скалярную часть кватерниона, и

$$(5.10) \quad \rho_0 + p_1(T)/2 + \varphi_2(T)\omega_3(T) - \varphi_3(T)\omega_2(T) = 0,$$

полное построение которых приведено в [12,13].

Относительно условия (5.9) отметим, что оно выполняется автоматически при переходе к вектору сопряженных переменных  $\mathbf{p}$  (5.3). Условие (5.10) вытекает из первого интеграла задачи (4.11)–(4.17), (5.2)–(5.8), который справедлив для оптимального управления и оптимальной траектории и получается на основе выражений (4.12), (5.4)–(5.6). Покажем это.

Из (4.12), (5.5) следует, что  $[\dot{\omega}, \varphi] = 0$ ,  $\forall t \in [0, T]$ . Тогда с учетом выражения для  $\dot{\varphi}$  (5.4) и  $\dot{\mathbf{p}}$  (5.6) можем записать

$$\omega_2^{\bullet}\varphi_3 - \omega_3^{\bullet}\varphi_2 + \omega_2\varphi_3^{\bullet} - \omega_3\varphi_2^{\bullet} = p_1^{\bullet}/2$$

или

$$(5.11) \quad p_1(t)/2 + \omega_3(t)\varphi_2(t) - \omega_2(t)\varphi_3(t) = \text{const} = \rho_0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Это выражение и есть первый интеграл задачи (4.11)–(4.17), (5.2)–(5.8).

Отметим, что функция Гамильтона–Понтрягина (5.1) для оптимального процесса управления может быть представлена в виде

$$(5.12) \quad H = -I_2^{-2} + \dot{\omega}^2 - (2\ddot{\omega} + b_2\rho_0\mathbf{i}_1, \omega) + b_2\omega_1\rho_0 = 0, \quad t \in [0, T].$$

## 6. Аналитическое решение задачи оптимального разворота КА в классе конических движений

Будем искать решение уравнений (4.11), (5.8) в классе конических движений. Для этого оптимальную угловую скорость КА представим в виде

$$(6.1) \quad \omega(t) = \mathbf{i}_1\gamma + \alpha\tilde{\mathbf{e}}_{\delta} \circ (\mathbf{i}_2 \sin \Omega t + \mathbf{i}_3 \cos \Omega t) \circ \mathbf{e}_{\delta},$$

где  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\gamma$ ,  $\Omega$  – неопределенные постоянные, а  $\mathbf{e}_{\delta} = \exp\{\mathbf{i}_1\delta/2\}$ .

Последовательно дифференцируя (6.1) три раза по переменной  $t$ , получим:

$$(6.2) \quad \dot{\omega} = \alpha\Omega\tilde{\mathbf{e}}_{\delta} \circ (\mathbf{i}_2 \cos \Omega t - \mathbf{i}_3 \sin \Omega t) \circ \mathbf{e}_{\delta},$$

$$(6.3) \quad \ddot{\omega} = -\alpha\Omega^2\tilde{\mathbf{e}}_{\delta} \circ (\mathbf{i}_2 \sin \Omega t + \mathbf{i}_3 \cos \Omega t) \circ \mathbf{e}_{\delta},$$

$$(6.4) \quad \dddot{\omega} = -\alpha\Omega^3\tilde{\mathbf{e}}_{\delta} \circ (\mathbf{i}_2 \cos \Omega t - \mathbf{i}_3 \sin \Omega t) \circ \mathbf{e}_{\delta}.$$

Подставляя (6.1)–(6.4) в (5.8) и учитывая выражения (4.12), (5.5), (5.11), убедимся в выполнении равенства в (5.8); при этом

$$(6.5) \quad \gamma = \Omega - b_2\alpha^2/((1 + b_2)\Omega), \quad \rho_0 = 2\alpha^2\Omega/(1 + b_2).$$

Отметим, что

$$\ddot{\omega} = [\ddot{\omega} - b_2\rho_0\mathbf{i}_1/2, \omega] = ((\ddot{\omega} - b_2\rho_0\mathbf{i}_1/2) \circ \omega - \omega \circ (\ddot{\omega} - b_2\rho_0\mathbf{i}_1/2))/2.$$

Траектория движения КА при угловой скорости (5.1) из (3.10) находится явно и имеет вид регулярной прецессии

$$(6.6) \quad \mathbf{\Lambda}(t) = \mathbf{\Lambda}_0 \circ \tilde{\mathbf{e}}_\delta \circ \exp\{(\mathbf{i}_3\alpha + \mathbf{i}_1(\gamma - \Omega))t/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_1(\Omega t + \delta)/2\}.$$

Вектор оптимального управления  $\mathbf{u}$  определяется из формул (4.11), (6.2).

Подставляя в выражение для функции Гамильтона–Понтрягина (5.12) формулы (6.1)–(6.4), получим дополнительное условие

$$(6.7) \quad \alpha^2\Omega^2 = I_2^{-2}/3.$$

Возвращаясь к исходным безразмерным переменным задачи (2.1)–(2.4), (3.1), запишем окончательные выражения для вектора оптимальной угловой скорости

$$(6.8) \quad \mathbf{w}(t) = \mathbf{i}_1 b_1^{-1}\gamma + \alpha(\mathbf{i}_2 \sin((\Omega - b_2\gamma)t + \delta) + \mathbf{i}_3 \cos((\Omega - b_2\gamma)t + \delta)),$$

кватерниона оптимальной траектории

$$(6.9) \quad \mathbf{L}(t) = \mathbf{L}_0 \circ \tilde{\mathbf{e}}_\delta \circ \exp\{(\mathbf{i}_3\alpha + \mathbf{i}_1(\gamma - \Omega))t/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_1((b_2\gamma + \Omega)t + \delta)/2\}$$

и вектора оптимального управляющего момента КА

$$(6.10) \quad \mathbf{M}(t) = I_2\alpha\Omega (\mathbf{i}_2 \cos((\Omega - b_2\gamma)t + \delta) - \mathbf{i}_3 \sin((\Omega - b_2\gamma)t + \delta)),$$

где  $\gamma$  определяется первым из выражений (6.5).

При  $t = 0$  из (6.7) имеем

$$(6.11) \quad \mathbf{w}(0) = \mathbf{i}_1 b_1^{-1}(\Omega - b_2\alpha^2/((1 + b_2)\Omega)) + \alpha(\mathbf{i}_2 \sin \delta + \mathbf{i}_3 \cos \delta).$$

При  $t = T$  из (6.7), (6.8), (2.3) имеем:

$$(6.12) \quad \mathbf{w}(T) = \mathbf{i}_1 b_1^{-1}(\Omega - b_2\alpha^2/((1 + b_2)\Omega)) + \alpha(\mathbf{i}_2 \sin((\Omega - b_2\gamma)T + \delta) + \mathbf{i}_3 \cos((\Omega - b_2\gamma)T + \delta)),$$

$$(6.13) \quad \text{vect}(\tilde{\mathbf{e}}_\delta \circ \exp\{(\mathbf{i}_3\alpha - \mathbf{i}_1 b_2\alpha^2/((1 + b_2)\Omega))T/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_1(\Omega T(1 + b_2) - b_2^2\alpha^2 T/((1 + b_2)\Omega)) + \delta\}/2) \circ \tilde{\mathbf{L}}_T \circ \mathbf{L}_0 = 0.$$

В выражения (6.10)–(6.12) входят три произвольные постоянные  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\Omega$  и неизвестное время переориентации  $T$ . Определяя их из условия (6.7) и системы трех нелинейных алгебраических уравнений (6.13), удовлетворим граничные условия по угловому положению КА (2.3) ( $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\Omega$ ,  $T$  будут зависеть от компонент кватернионов  $\mathbf{L}_0$ ,  $\mathbf{L}_T$  и главных центральных моментов инерции КА (твердого тела)  $I_1$ ,  $I_2$ ). Из-за недостаточного количества произвольных постоянных в решении задачи на величины  $\mathbf{w}_0$ ,  $\mathbf{w}_T$  (2.4) налагаются требования вида (6.11), (6.12).

Таким образом, в случаях, когда на граничные условия по угловой скорости КА наложены ограничения вида (6.11), (6.12) (это означает, что вектор угловой скорости  $\mathbf{w}(t)$  на всем интервале времени движения принадлежит некоторой конической поверхности, определяемой в пространстве заданными постоянными задачи  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $\mathbf{L}_0$ ,  $\mathbf{L}_T$ ), траектория углового движения осесимметричного КА находится в классе конических движений и определяется явными аналитическими выражениями (6.8), (6.9), управляющий момент КА определяется (6.10).

Оптимальное значение функционала качества в безразмерных переменных (3.1) составляет величину

$$(6.14) \quad J = \int_0^T (1 + \mathbf{M}^2) dt = (1 + I_2^2 \alpha^2 \Omega^2) T = 4T/3.$$

Из выражений (4.4), (4.6), (4.9), (4.10), (5.3), (5.5), (5.7), (6.5), (6.8) и (6.9) можно найти сопряженные переменные. Тем самым, задача при существующих ограничениях решена полностью.

Приведем алгоритм решения задачи оптимального разворота осесимметричного КА (2.1)–(2.4), (3.1) в безразмерных переменных в классе конических движений:

**Шаг 1.** По заданным кватернионам  $\mathbf{L}_0$ ,  $\mathbf{L}_T$  (2.3), главным центральным моментам инерции КА (твердого тела)  $I_1$ ,  $I_2$  и формулам (6.7), (6.13) определяются величины  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\Omega$  и времени переориентации  $T$ .

**Шаг 2.** Используя  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\Omega$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $T$ , по формуле (6.11)

$$\mathbf{w}_0^{\text{выч}} = \mathbf{i}_1(\Omega - b_2\alpha^2/((1 + b_2)\Omega))I_2/I_1 + \alpha(\mathbf{i}_2 \sin \delta + \mathbf{i}_3 \cos \delta)$$

и формуле (6.12)

$$\mathbf{w}_T^{\text{выч}} = \mathbf{i}_1(\Omega - b_2\alpha^2/((1 + b_2)\Omega))I_2/I_1 + \alpha(\mathbf{i}_2 \sin((\Omega - b_2\gamma)T + \delta)) + \mathbf{i}_3 \cos((\Omega - b_2\gamma)T + \delta), \quad b_2 = 1 - I_2/I_1$$

вычисляются значения векторов  $\mathbf{w}_0^{\text{выч}}$ ,  $\mathbf{w}_T^{\text{выч}}$ .

**Шаг 3.** Полученные значения  $\mathbf{w}_0^{\text{выч}}$ ,  $\mathbf{w}_T^{\text{выч}}$  сравниваются с заданными в (2.4) величинами  $\mathbf{w}_0$ ,  $\mathbf{w}_T$ .

**Шаг 4.** Если равенство на шаге 3 алгоритма выполняется, то оптимальное решение задачи находится в классе конических движений; при этом угловая скорость КА, траектория его углового движения, вектор управляющего

момента и значение функционала оптимизации вычисляются по формулам (6.8)–(6.10), (6.14) и шагу 1 алгоритма.

Шаг 5. Сопряженные переменные задачи находятся по формулам (4.4), (4.6), (4.9), (4.10), (5.3), (5.5), (5.7), (6.5), (6.8) и (6.9).

## 7. Модифицированная задача оптимального разворота твердого тела

Движение КА по-прежнему описывается соотношениями (2.1)–(2.4), (3.1) при этом начальное и конечное значения по угловому положению и угловой скорости КА произвольны. Далее будем рассматривать приведенную задачу (4.10)–(4.17).

Одной из основных проблем при построении аналитического решения в задаче оптимального разворота твердого тела (КА) является разрешимость классической задачи Дарбу — аналитического определения  $\Lambda(t)$  из уравнения (4.10) при известных  $\Lambda_0$ ,  $\omega(t)$ .

Для кватернионного дифференциального уравнения (4.10) при условии, что вектор угловой скорости  $\omega(t)$  задается выражением

$$(7.1) \quad \omega(t) = \mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t),$$

в котором  $f(t)$  и  $g(t)$  — произвольные функции времени, известно решение [15], удовлетворяющее начальному условию (4.16)

$$(7.2) \quad \Lambda(t) = \Lambda_0 \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{-\mathbf{i}_2 f(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 f(t)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\}.$$

Формулы (7.1), (7.2) включают в себя все известные точные аналитические решения традиционной задачи оптимального разворота КА при его сферической симметрии, когда вектор угловой скорости на всем интервале времени движения КА постоянен по направлению или описывает в пространстве круговой конус [1–3, 5, 6, 8–11].

Заметим [15], что задачу Дарбу с произвольно заданным вектором угловой скорости  $\omega(t)$  с помощью замен переменных можно свести к решению уравнения типа (4.10) с угловой скоростью

$$\omega^*(t) = -(\mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t)),$$

отличающейся от (7.1) только знаком. При этом явное аналитическое решение этой задачи, как и при произвольном векторе  $\omega(t)$ , не известно.

Выражение (7.1) и решение (7.2) можно обобщить, добавив поворот на постоянный угол вокруг некоторой оси. Такой поворот задается с помощью кватерниона  $\mathbf{K}$ ,  $\|\mathbf{K}\| = 1$ . Тогда вектор  $\omega$  и кватернион  $\Lambda$  будут определяться соотношениями

$$(7.3) \quad \omega = \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 \dot{f}(t) \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \dot{f}(t) \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \dot{g}(t)) \circ \mathbf{K},$$

$$(7.4) \quad \Lambda = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (f(t) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\} \circ \mathbf{K}.$$

Будем рассматривать вторые производные от функций  $f$  и  $g$  в качестве управляющих параметров. Тогда если ввести обозначения

$$(7.5) \quad \dot{f} = f_1, \quad \dot{g} = g_1,$$

то можно составить систему дифференциальных уравнений, описывающих управляемую систему:

$$(7.6) \quad \dot{f} = f_1, \quad \dot{g} = g_1, \quad \dot{f}_1 = \nu_1, \quad \dot{g}_1 = \nu_2,$$

где  $f, f_1, g, g_1$  – фазовые координаты,  $\nu_1, \nu_2$  – управляющие параметры. Ограничимся случаем, когда кватернион  $\mathbf{K}$  представляется в виде произведения

$$(7.7) \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1, \quad \mathbf{K}_1 = \exp\{\mathbf{i}_1 \alpha_1 / 2\}, \quad \mathbf{K}_2 = \exp\{\mathbf{i}_2 \alpha_2 / 2\},$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  – некоторые постоянные. Отметим, что кватернионы  $\mathbf{K}_1$  и  $\mathbf{K}_2$  определяют поворот вектора  $\boldsymbol{\omega}$  (7.1) вокруг осей  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ . Поворот вокруг оси  $\mathbf{i}_3$  уже включен в формулу (7.3), если учесть, что в функцию  $g(t)$  входит аддитивная постоянная. Сопряженный кватернион  $\tilde{\mathbf{K}}$  будет представляться так:

$$(7.8) \quad \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_1 \circ \tilde{\mathbf{E}}_2, \quad \tilde{\mathbf{E}}_1 = \exp\{-\mathbf{i}_1 \alpha_1 / 2\}, \quad \tilde{\mathbf{E}}_2 = \exp\{-\mathbf{i}_2 \alpha_2 / 2\}.$$

Условия того, что выражения для  $\boldsymbol{\omega}, \mathbf{L}$  (6.3), (6.4) удовлетворяют граничным условиям (4.14), (4.15) ((4.17)) с учетом (7.7), (7.8), запишутся как

$$(7.9) \quad \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 f_1(0) \sin g(0) + \mathbf{i}_2 f_1(0) \cos g(0) + \mathbf{i}_3 g_1(0)) \circ \mathbf{K} - \\ - b_1 w_0 \mathbf{i}_1 + w_0 \mathbf{i}_2 + w_0 \mathbf{i}_3 = 0,$$

$$(7.10) \quad \tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 f_1(T) \sin g(T) + \mathbf{i}_2 f_1(T) \cos g(T) + \mathbf{i}_3 g_1(T)) \circ \mathbf{K} - \\ - \tilde{\mathbf{B}}(\theta(T)) \circ (b_1 w_{T_1} \mathbf{i}_1 + w_{T_2} \mathbf{i}_2 + w_{T_3} \mathbf{i}_3) \circ \mathbf{B}(\theta(T)) = 0,$$

$$(7.11) \quad \text{vect}(\mathbf{L}_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0) / 2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (f(T) - f(0)) / 2\} \circ \\ \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(T) / 2\} \circ \mathbf{K} \circ \tilde{\mathbf{B}}(\theta(T)) \circ \mathbf{L}_T) = 0.$$

С учетом (7.7), компоненты вектора  $\boldsymbol{\omega}$  (7.3) имеют в явной форме вид

$$(7.12) \quad \omega_1 = f_1 \sin g \cos \alpha_2 - g_1 \sin \alpha_2, \\ \omega_2 = f_1 (\sin g \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos g \cos \alpha_1) + g_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \\ \omega_3 = f_1 (\sin g \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos g \sin \alpha_1) + g_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2.$$

Компоненты вектора управления  $\mathbf{u}$ , который согласно (5.11) является производной по времени от вектора  $\boldsymbol{\omega}$ , определяется по формулам

$$(7.13) \quad u_1 = \dot{\omega}_1 = (v_1 \sin g + f_1 g_1 \cos g) \cos \alpha_2 - v_2 \sin \alpha_2, \\ u_2 = \dot{\omega}_2 = v_1 (\sin g \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos g \cos \alpha_1) + \\ + f_1 g_1 (\cos g \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin g \cos \alpha_1) + v_2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2, \\ u_3 = \dot{\omega}_3 = v_1 (\sin g \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos g \sin \alpha_1) + \\ + f_1 g_1 (\cos g \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \sin g \sin \alpha_1) + v_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2.$$

Тогда для управляемой системы (7.6) можно сформулировать следующую задачу оптимального управления, решение которой можно рассматривать (с учетом замен переменных раздела 4) как приближенное (квазиоптимальное) решение задачи (4.10)–(4.16) ((2.1)–(2.4), (3.1)): требуется найти оптимальные управления  $\nu_1(t)$ ,  $\nu_2(t)$ , которые переводят управляемую систему (7.6) из начального состояния

$$(7.14) \quad f = f(0), \quad f_1 = f_1(0), \quad g = g(0), \quad g_1 = g_1(0)$$

в конечное состояние

$$(7.15) \quad f = f(T), \quad f_1 = f_1(T), \quad g = g(T), \quad g_1 = g_1(T),$$

удовлетворяющие соотношениям (7.9)–(7.11), в которых  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  выступают как параметры, подлежащие определению, и доставляют минимум комбинированному функционалу, где время  $T$  не задано,

$$(7.16) \quad J = \int_0^T (1 + \nu_1^2 + \nu_2^2) dt.$$

Такую задачу оптимального управления будем называть модифицированной задачей оптимального разворота осесимметричного КА.

## 8. Решение задачи с помощью принципа максимума

Функция Гамильтона–Понтрягина для поставленной задачи оптимального управления имеет вид

$$(8.1) \quad H = -(1 + \nu_1^2 + \nu_2^2) + \psi_1 f_1 + \psi_2 g_1 + \psi_3 \nu_1 + \psi_4 \nu_2,$$

где  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$ ,  $\psi_4$  – сопряженные переменные, удовлетворяющие системе уравнений:

$$(8.2) \quad d\psi_1/dt = 0, \quad d\psi_2/dt = 0, \quad d\psi_3/dt = -\psi_1, \quad d\psi_4/dt = -\psi_2.$$

Общее решение уравнений (8.2), содержащее произвольные постоянные  $c_1, \dots, c_4$ , имеет вид

$$(8.3) \quad \psi_1 = c_1, \quad \psi_2 = c_2, \quad \psi_3 = -c_1 t + c_3, \quad \psi_4 = -c_2 t + c_4.$$

Из условия максимума для функции Гамильтона–Понтрягина (8.1) определяется оптимальное управление

$$(8.4) \quad \nu_1 = \psi_3/2 = (-c_1 t + c_3)/2, \quad \nu_2 = \psi_4/2 = (-c_2 t + c_4)/2.$$

После подстановки (8.4) в систему уравнений (7.6) находится общее решение для фазовых координат, содержащее восемь произвольных постоянных  $c_1, \dots, c_8$ :

$$(8.5) \quad \begin{aligned} f &= -c_1 t^3/12 + c_3 t^2/4 + c_5 t + c_7, & g &= -c_2 t^3/12 + c_4 t^2/4 + c_6 t + c_8, \\ f_1 &= -c_1 t^2/4 + c_3 t/2 + c_5, & g_1 &= -c_1 t^2/4 + c_4 t/2 + c_6. \end{aligned}$$

Так как в поставленной задаче оптимального управления конечный момент времени  $T$  не задается, то функция Гамильтона–Понтрягина (8.1) при  $t = T$  должна обращаться в нуль

$$(8.6) \quad H = -(1 + \nu_1^2(T) + \nu_2^2(T)) + c_1 f_1(T) + c_2 g_1(T) + \\ + \psi_3(T)\nu_1(T) + \psi_4(T)\nu_2(T) = 0.$$

Для системы уравнений (7.6), (8.2) функция  $H$  является первым интегралом. По этой причине условие (8.6) выполняется для всех  $t \in [0, T]$ .

В связи с тем, что  $c_7$  входит в функцию  $f$  как аддитивная постоянная, из формулы (7.4) видно, что эта постоянная не оказывает влияние; поэтому  $c_7$  можно положить равной нулю. Таким образом, для определения десяти неизвестных постоянных задачи  $c_1, \dots, c_6, c_8, T$  и  $\alpha_1, \alpha_2$  служат девять уравнений системы (7.9)–(7.11) и условие (8.6). Если формулы (8.5) подставить в (7.3), (7.4), то будут получены аналитические выражения для определения законов изменения оптимальной угловой скорости и оптимальной траектории твердого тела. Эти выражения определяют оптимальный в смысле минимума комбинированного функционала (7.16) разворот твердого тела в классе обобщенных конических движений. Далее по формулам (4.1), (4.4), (4.10) вычисляются вектор безразмерной угловой скорости  $\mathbf{w}$  и кватернион ориентации КА  $\mathbf{L}$ . По формулам (7.13) определяются компоненты вектора  $\mathbf{u}$ . Из выражений (4.2), (4.4), (4.7), (4.8) следует, что безразмерный управляющий момент  $\mathbf{M}$  выражается через вектор  $\mathbf{u}$  так

$$(8.7) \quad \mathbf{M} = I_2 \tilde{\mathbf{B}}(\theta) \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{B}(\theta).$$

Формула (8.7) определяет аналитическое решение для управляющего момента, соответствующего решению модифицированной задачи. Модифицированная задача оптимального разворота КА тем самым решена полностью. Полученные таким способом кватернион  $\mathbf{L}$  и векторы  $\mathbf{w}, \mathbf{M}$  можно рассматривать как приближенное решение традиционной задачи оптимального разворота осесимметричного КА (твердого тела).

Следует отметить, что при сферической симметрии КА ( $I_1 = I_2 = I_3$ ) квадрат модуля безразмерного управляющего момента традиционной задачи выражается через управляющие параметры и фазовые координаты модифицированной задачи следующим образом:

$$(8.8) \quad \mathbf{M}^2 = v_1^2 + f_1^2 g_1^2 + v_2^2.$$

Если в задаче оптимального разворота сферически-симметричного КА векторы граничных условий по угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}_0, \boldsymbol{\omega}_T$  положить параллельными  $\text{vect}(\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_0 \circ \boldsymbol{\Lambda}_T)$  (плоский эйлеров разворот КА), то решения задач в традиционной и модифицированной постановках полностью совпадут. То же самое можно сказать и о случае, когда решение традиционной задачи оптимального разворота сферически-симметричного КА получено в классе конических движений [11]. В этих случаях слагаемое  $f_1^2 g_1^2$  в (8.8) обращается в нуль и функционал (7.16) полностью переходит в функционал (3.1) традиционной задачи.

## 9. Численные примеры

В данном разделе на примере осесимметричного КА “Спейс Шаттл” [16] приводятся результаты численных решений задачи оптимального разворота в традиционной и модифицированной постановке для нескольких вариантов граничных условий по угловому положению и угловой скорости КА. Ниже на рисунках представлены графики изменения во времени компонент угловой скорости  $w_i(t)$ ,  $i = \overline{1,3}$ , векторной части кватерниона ориентации  $L_i(t)$ ,  $i = \overline{1,3}$  и компонент вектора управляющего момента  $M_i(t)$ ,  $i = \overline{1,3}$  КА.

На рис. 1 приведены результаты решения задачи в традиционной постановке в классе конических движений по формулам раздела 6.

Расчеты проводились для значений:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= 3400648 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, & I_2 &= 21041672 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, & I_3 &= I_2 = 21041672 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \\
 \text{или } I_1 &= 0,1967, & I_2 &= 1,2168, & I_3 &= I_2 \text{ (безразмерные моменты инерции);} \\
 (9.1) \quad \mathbf{L}_0 &= [0,79505, 0,29814, -0,39752, 0,34783]^T, \\
 \mathbf{L}_T &= [0,84434, 0,39846, -0,3260, 0,14848]^T, \\
 \mathbf{w}_0 &= [-0,02249, -0,21699, -0,61494]^T, \\
 \mathbf{w}_T &= [-0,02249, -0,14018, -0,63685]^T,
 \end{aligned}$$

где граничные условия по угловой скорости КА удовлетворяют ограничениям раздела 6.

Вначале по формулам (6.7), (6.13), находились величины  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\Omega$ ,  $T$  ( $\alpha = 0,65210$ ,  $\delta = 3,48082$ ,  $\Omega = -0,72761$ ,  $T = 0,74469$ ), затем по формулам (6.8)–(6.10) определялись векторы  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{M}$  и кватернион  $\mathbf{L}$ .

На рис. 2 приведены результаты решения модифицированной задачи оптимального разворота КА при произвольно выбранных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА по формулам разделов 7, 8. Расчеты проводились для значений угловой скорости:

$$(9.2) \quad \mathbf{w}_0 = [0,27388, -0,23883, -0,3]^T, \quad \mathbf{w}_T = [0, 0, -0,59]^T;$$

граничные условия по угловому положению КА задавались (9.1)

Значения постоянных  $\alpha_1, \alpha_2, c_1, \dots, c_6, c_8$ , входящих в аналитическое решение задачи, таковы:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= -1,22190, & \alpha_2 &= -0,89091, & C_1 &= -0,44648, & c_2 &= -3,82943, \\
 c_3 &= -0,63861, & c_4 &= -2,71375, & c_5 &= -0,37172, \\
 c_6 &= 0,28961, & c_8 &= -0,20978.
 \end{aligned}$$

С граничными условиями (9.1), (9.2) при помощи универсальной программы численного решения, описанной в [17], также решалась задача оптимального разворота КА в традиционной постановке (2.1)–(2.4), (3.1) в безразмерных переменных. Графики решения двух задач практически совпали. Для примера в табл. 1 приведем значения компонент вектора  $\mathbf{M}(t)$  на концах и в

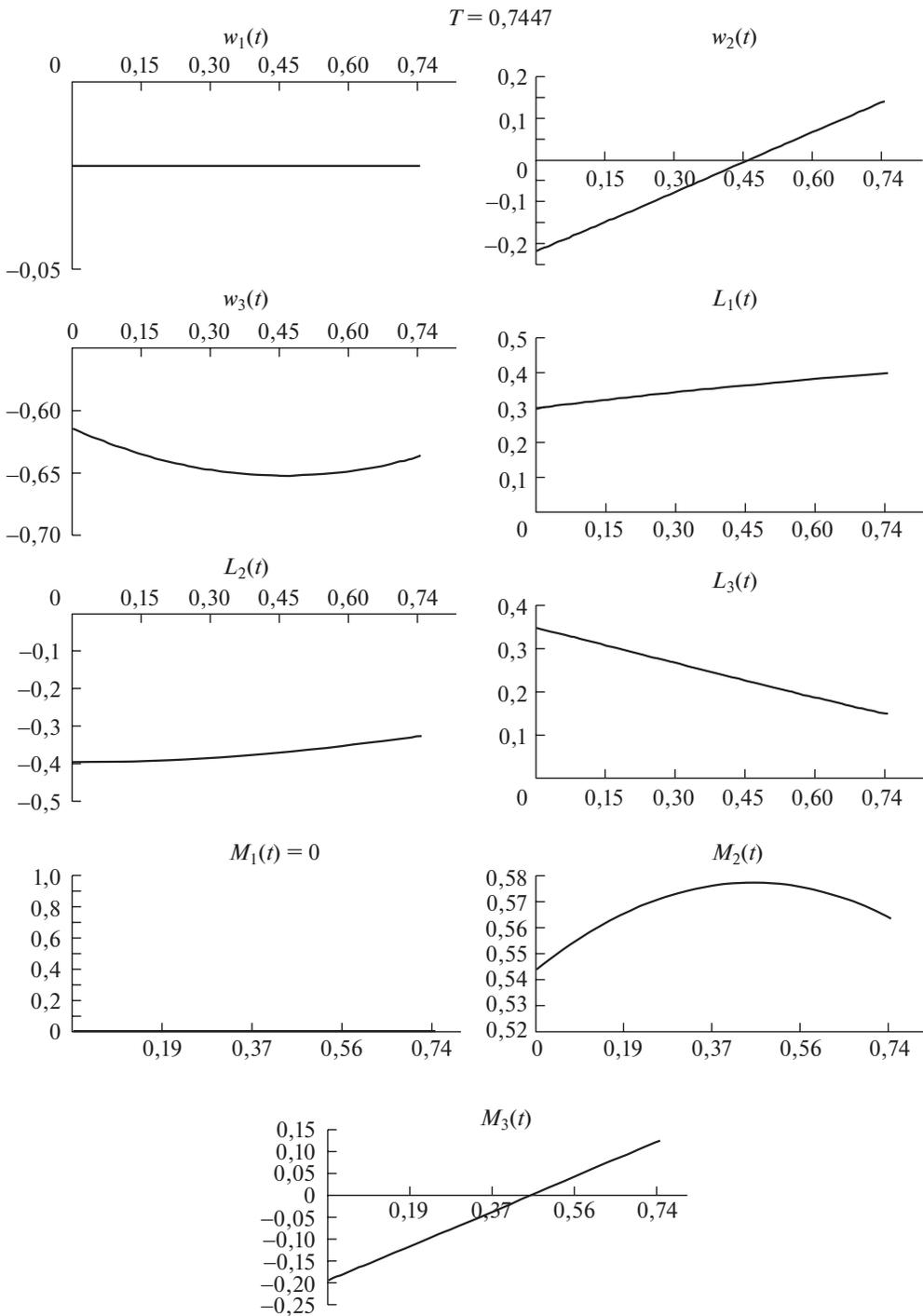


Рис. 1. Результаты решения традиционной задачи (коническое движение).

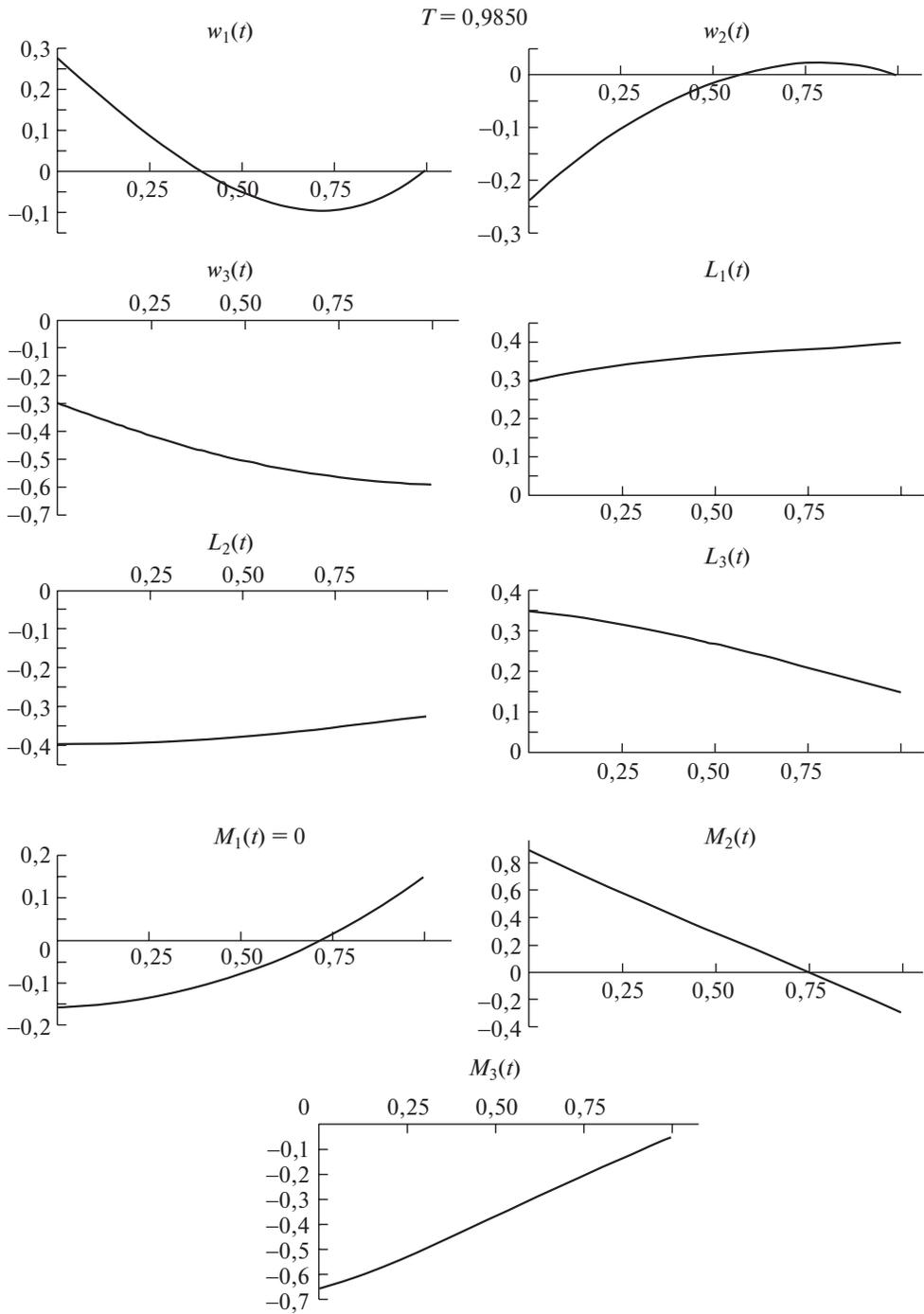


Рис. 2. Результаты решения модифицированной задачи при произвольных граничных условиях.

$T = 1,8713$

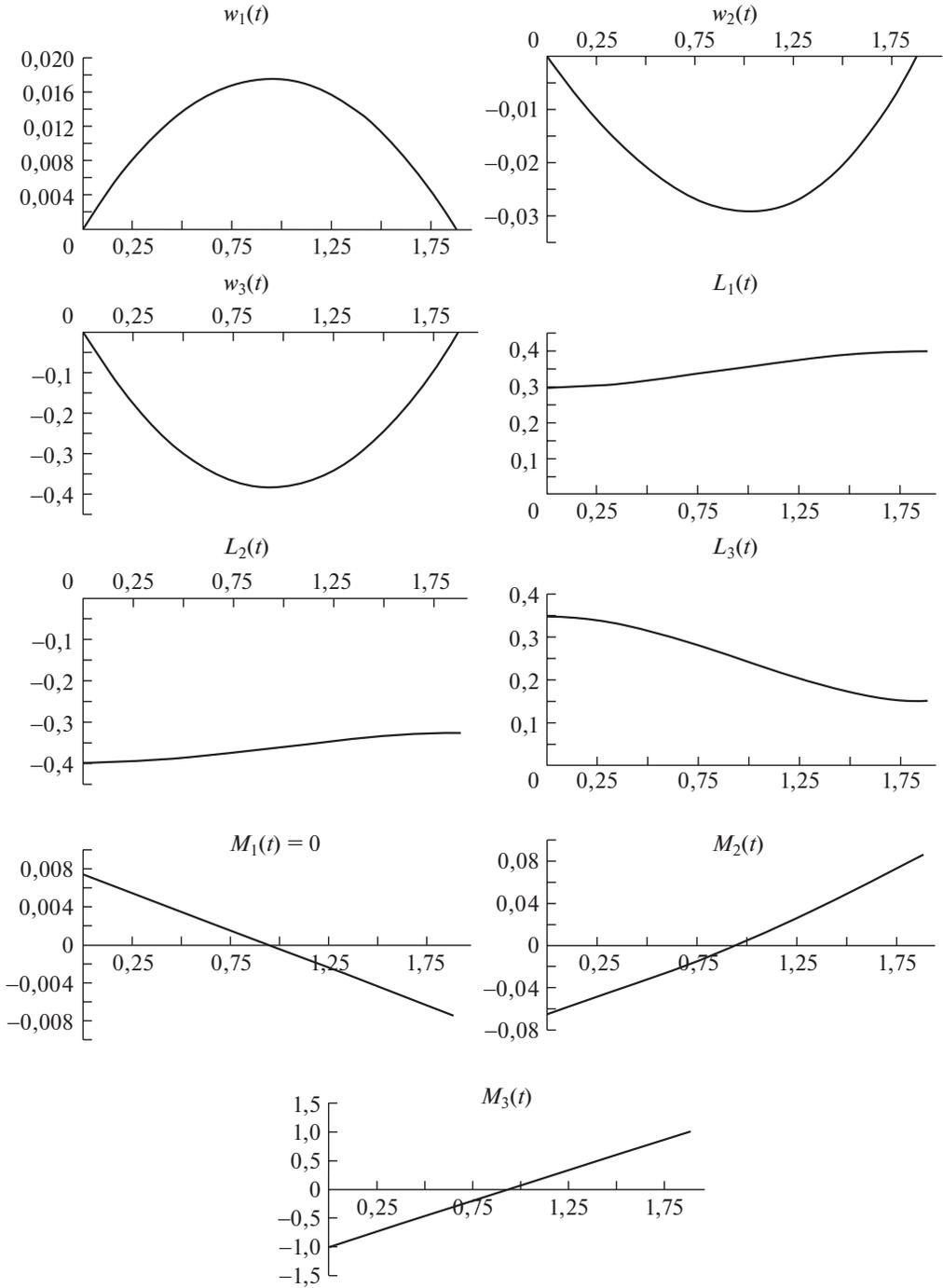


Рис. 3. Результаты решения модифицированной задачи при развороте из положения покоя в положение покоя.

Таблица 1

$t$	$M_1^{\text{традиц}}$	$M_2^{\text{традиц}}$	$M_3^{\text{традиц}}$	$t$	$M_1^{\text{модиф}}$	$M_2^{\text{модиф}}$	$M_3^{\text{модиф}}$
0	-0,1574	0,8887	-0,6587	0	-0,2123	0,8856	-0,7918
0,4925	-0,0792	0,2893	-0,3699	0,4840	-0,0521	0,3001	-0,3691
$T = 0,9850$	0,1460	-0,2898	-0,0539	$T = 0,9679$	0,0881	-0,3024	0,0072

Таблица 2

$t$	$M_1^{\text{традиц}}$	$M_2^{\text{традиц}}$	$M_3^{\text{традиц}}$	$t$	$M_1^{\text{модиф}}$	$M_2^{\text{модиф}}$	$M_3^{\text{модиф}}$
0	0,0074	-0,0655	-0,9978	0	0,0091	-0,0907	-1,2121
0,9356	0,0000	-0,0003	0,0000	0,8486	-0,0002	0,0076	-0,0006
$T = 1,8713$	-0,0074	0,0850	0,9963	$T = 1,6972$	-0,0086	0,0925	1,2121

промежуточных точках интервала времени движения КА  $[0, T]$  в этих двух решениях.

Значение функционала (3.1) для традиционной задачи в рассматриваемом примере составляет 1,35662. Значение того же функционала вычисленного на основе решения модифицированной задачи составляет  $J = 1,35928$ . Другими словами, в рассматриваемом примере расхождение между величинами функционала (3.1) для традиционной и модифицированной задачи составляет менее 0,00266. Таким образом, построено управление, которое сообщает функционалу значение, близкое к оптимальному для традиционной задачи. Из таблицы видно, что построенные управляющие моменты для этих двух задач близки друг к другу.

На рис. 3 приведены результаты решения модифицированной задачи оптимального разворота КА “Спейс Шаттл” в важном с практической точки зрения случае разворота из положения покоя в положение покоя. По формулам разделов 7, 8 расчеты проводились для граничных условий по угловому положению (9.1) и угловой скорости КА

$$(9.3) \quad \mathbf{w}_0 = \mathbf{w}_T = [0, 0, 0]^T.$$

Значения постоянных  $\alpha_1, \alpha_2, c_1, \dots, c_6, c_8$ , входящих в аналитическое решение задачи, таковы:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -1,47437, & \alpha_2 &= -0,55315, & c_1 &= -2,35673, & c_2 &= 0,01373, \\ c_3 &= -1,99997, & c_4 &= 0,01165, & c_5 &= 0,0, & c_6 &= 0,0, & c_8 &= -0,05078. \end{aligned}$$

Также с граничными условиями (9.1), (9.3) численно решалась задача оптимального разворота КА в традиционной постановке (2.1)–(2.4), (3.1). Графики решения двух задач практически совпали. Для примера в табл. 2 приведены значения компонент вектора  $\mathbf{M}(t)$  на концах и в середине интервала времени движения КА  $[0, T]$  в этих двух решениях.

Величина функционала (3.1) для традиционной задачи в рассматриваемом примере составляет 2,49504. Значение того же функционала, вычисленного на основе решения модифицированной задачи, составляет  $J = 2,53333$ . Таким образом, расхождение между величинами функционала (2.6) для традиционной и модифицированной задач составляет 0,03826.

Следует отметить, что кватернион ориентации КА  $\mathbf{L}(t)$  может быть двузначным [1], т.е.  $\mathbf{L}$  и  $-\mathbf{L}$  соответствуют одному и тому же угловому положению КА в пространстве.

## 10. Заключение

Представленное в статье аналитическое решение традиционной задачи оптимального разворота осесимметричного КА (твердого тела) в классе конических движений (в виде регулярной прецессии) может найти свое применение при построении систем управления КА, как и известное аналитическое решение задачи оптимального разворота сферически-симметричного КА, полученное в классе плоских эйлеровых разворотов. Решение модифицированной задачи оптимального разворота осесимметричного КА можно использовать для этих же целей как аналитическое приближенное (квазиоптимальное) решение задачи оптимального управления при произвольных граничных условиях. Также отметим, что аналитическое решение модифицированной задачи оптимального разворота осесимметричного КА при произвольных граничных условиях, полученное на основе решения приведенной задачи (4.10)–(4.16), оказалось существенно точнее, чем решение [18] (применительно к осевой симметрии КА), где квазиоптимальный управляющий момент КА строился на основе обратной задачи динамики КА по результатам решения модифицированной задачи без приведения с помощью замен переменных системы уравнений Эйлера для осесимметричного твердого тела к такой же системе для тела со сферической динамической симметрией.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.
2. *Scrivener S.L., Thompson R.C.* Survey of Time-Optimal Attitude Maneuvers // J. Guidance, Control Dynam. 1994. V. 17. No. 2. P. 225–233.
3. *Петров Б.Н., Боднер В.А., Алексеев К.Б.* Аналитическое решение задачи управления пространственным поворотным маневром // ДАН СССР. 1970. Т. 192. № 6. С. 1235–1238.
4. *Бранец В.Н., Черток М.Б., Казначеев Ю.В.* Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космич. исслед. 1984. Т. 22. Вып. 3. С. 352–360.
5. *Сиротин А.Н.* Оптимальное управление переориентацией симметричного твердого тела из положения покоя в положение покоя // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. 36–47.
6. *Челноков Ю.Н.* Кватернионное решение кинематических задач управления ориентацией твердого тела: уравнения движения, постановка задач, программное движение и управление // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 4. С. 7–14.
7. *Levskii M.V.* Pontryagin's Maximum Principle in Optimal Control Problems of Orientation of a Spacecraft // J. Comput. Sci. Int. 2008. V. 47. No. 6. P. 974–986.
8. *Molodenkov A.V., Sapunkov Ya.G.* A New Class of Analytic Solutions in the Optimal Turn Problem for a Spherically Symmetric Body // Mechan. Solid. 2012. V. 47. No. 2. P. 167–177.

9. *Molodenkov A.V., Sapunkov Ya.G.* Analytical Solution of the Optimal Slew Problem of a Spherically Symmetric Spacecraft in the Class of Conical Motion // *J. Comput. Sci. Int.* 2013. V. 52. No. 3. P. 491–501.
10. *Molodenkov A.V., Sapunkov Ya.G.* Analytical Solution of the Time-Optimal Slew Problem of a Spherically Symmetric Spacecraft in the Class of Conical Motion // *J. Comput. Sci. Int.* 2014. V. 53. No. 2. P. 159–171.
11. *Molodenkov A.V., Sapunkov Ya.G.* Analytical Solution of the Optimal Attitude Maneuver Problem with a Combined Objective Functional for a Rigid Body in the Class of Conical Motions // *Mechan. Solid.* 2016. Vol. 51. No. 2. P. 135–147.
12. *Molodenkov A.V., Sapunkov Ya.G.* Analytical Solution of the Optimal Slew Problem for an Axisymmetric Spacecraft in the Class of Conical Motions // *J. Comput. Sci. Int.* 2016. V. 55. No. 6. P. 969–985.
13. *Molodenkov A.V., Sapunkov Ya.G.* Analytical Solution of the Minimum Time Slew Maneuver Problem for an Axially Symmetric Spacecraft in the Class of Conical Motions // *J. Comput. Sci. Int.* 2018. V. 57. No. 2. P. 302–318.
14. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
15. *Molodenkov A.V.* On the solution of the Darboux problem // *Mechan. Solid.* 2007. V. 42. No. 2. P. 167–176.
16. *Li. F., Bainum P.M.* Numerical Approach for Solving Rigid Spacecraft Minimum Time Attitude Maneuvers // *J. Comput. Sci. Int.* 1990. V. 13. No. 1. P. 38–45.
17. *Сапунков Я.Г., Молоденков А.В.* Численное решение задачи оптимальной переориентации вращающегося космического аппарата // *Мехатроника, автоматизация, управление.* 2008. № 6. С. 66–70.
18. *Molodenkov A.V., Sapunkov Ya.G.* Analytical Approximate Solution of the Problem of a Spacecraft's Optimal Turn with Arbitrary Boundary Conditions // *J. Comput. Sci. Int.* 2015. V. 54. No. 3. P. 458–468.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.*

Поступила в редакцию 07.07.2019

После доработки 24.02.2021

Принята к публикации 16.03.2021

## Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2021 г. К.Р. АЙДА-ЗАДЕ, д-р физ.-мат. наук, член-корр. НАН Азербайджана (kamil\_aydazade@rambler.ru)  
(Институт систем управления НАН Азербайджана;  
Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку),  
Е.Р. АШРАФОВА, канд. физ.-мат. наук (ashrafova.yegana@gmail.com)  
(Бакинский государственный университет;  
Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку)

### ОПТИМИЗАЦИЯ МЕСТ И ПАРАМЕТРОВ ИСТОЧНИКОВ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ СЕТЕВОЙ СТРУКТУРЫ

Исследуется задача оптимизации мест размещения и значений параметров сосредоточенных источников, влияющих на функционирование сложного объекта. Объект состоит из большого числа одномерных объектов, состояние каждого из которых описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений с неразделенными краевыми условиями. Получены необходимые условия оптимальности как по параметрам, так и местам сосредоточения источников. На примере модельной задачи приведены результаты численных экспериментов.

*Ключевые слова:* источники, размещение источников, нелокальные условия, условия оптимальности, градиент функционала.

DOI: 10.31857/S0005231021070060

#### 1. Введение

В статье исследуется задача оптимизации мест размещения и значений параметров сосредоточенных источников [1–4], влияющих на функционирование сложного объекта. Объект состоит из большого числа одномерных объектов, состояние каждого из которых описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Подобъекты связаны между собой в произвольном порядке лишь состояниями в своих начальных или конечных точках. В точках соединения смежных подобъектов выполняются условия, являющиеся аналогами физических законов, например законами сохранения энергии, материального баланса и т.п.

Такие сложные объекты будем называть динамическими объектами сетевой структуры, по аналогии с публикацией [5], а соответствующие математические модели — сетевыми. Они возникают при использовании методов декомпозиции [6–8] при математическом моделировании сложных объектов, состоящих из подобъектов, имеющих самостоятельное назначение. Предполагается, что математические модели каждого из подобъектов известны или их

получение несложно. Декомпозиция объекта может проводиться по пространственным переменным, если объект имеет пространственную протяженность, или по временной переменной, или же по обоим переменным одновременно.

На отдельные точки подобъектов и на точки их соединения воздействуют источники, влияющие на функционирование как отдельных подобъектов, так и всего объекта в целом. Точки воздействия источников на подобъекты и их параметры требуется оптимизировать, исходя из заданного целевого функционала задачи.

Таким образом, исследуемая задача оптимизации описывается большой системой дифференциальных уравнений с обыкновенными производными. Система уравнений имеет блочную структуру, сами блоки связаны между собой в произвольном порядке лишь неразделенными начальными или конечными значениями фазовых переменных. Это означает, что система дифференциальных уравнений не структурирована каким-либо специальным образом, а краевые условия являются нелокальными.

Структуру таких объектов удобно представлять в виде ориентированного графа [9]. Предполагается, что граф неполный, т.е. большая часть элементов матрицы связей равны нулю. Ненулевые элементы этой матрицы соответствуют наличию связи между начальными и конечными состояниями отдельных блоков, соответствующих смежным дугам графа.

В статье исследованы выпуклость функционала, его дифференцируемость, получены необходимые условия оптимальности как по параметрам, так и местам сосредоточения источников. Предложена двухуровневая схема численного решения задачи. На верхнем уровне используются методы оптимизации [10, 11] первого порядка с применением полученных формул для градиента целевого функционала по оптимизируемым местам воздействия и параметрам источников. На нижнем уровне решаются прямая и сопряженная системы дифференциальных уравнений большой размерности блочной структуры с краевыми условиями, включающими неразделенные начальные и конечные значения фазовых переменных смежных блоков и значения параметров внешних источников. Для решения этих краевых задач применяется предложенный в [12–14] подход, основанный на аналоге метода прогонки [15–18]. Данный подход и расчетные формулы дают возможность проводить процедуру прогонки для каждого условия каждого блока отдельно, независимо от других условий и блоков. Это позволяет распараллеливать [19, 20] этап решения прямой и сопряженной краевых задач, к которому приходится многократно обращаться в процессе решения основной задачи оптимизации.

К рассматриваемой задаче, в частности, приводится задача оптимального управления переходным процессом неустановившегося движения жидкости (газа) в трубопроводных сетях сложной структуры [21, 22]. Математические модели этих процессов состоят из подсистем дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа, каждая из которых описывает процесс движения на отдельном участке трубопровода. В местах соединения участков выполняются условия непрерывности потока и материального баланса, которые приводят к неразделенным краевым условиям. Применение метода прямых по временной или пространственной переменных (аналог

применения метода декомпозиции) приводит задачу управления режимами движения сырья в транспортной сети к задаче, исследуемой в данной статье.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается сложный объект, состоящий из  $m$  звеньев (блоков), в произвольном порядке соединенных своими концами, структуру которого удобно представить в виде ориентированного графа. Каждой дуге графа сопоставляется независимый подобъект (блок), состояние которого описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Множество всех вершин графа обозначим через  $I$ , а множество дуг (звеньев)  $(k, s)$  длиной  $l^{ks}$  с началом в вершине  $k \in I$  и концом в вершине  $s \in I$  обозначим через  $J = \{(k, s) : k, s \in I\}$ ,  $|I| = N$ ,  $|J| = m$ ,  $|I|$  указывает на число элементов множества  $I$ .

Пусть  $J_i^+ = \{(j, i) : j \in I_i^+\}$ ,  $J_i^- = \{(i, j) : j \in I_i^-\}$  – множества дуг соответственно входящих и выходящих из  $i$ -й вершины,  $I_i^+$  и  $I_i^-$  – множества вершин, смежных с  $i$ -й вершиной, являющихся соответственно концами и началами дуг из множества  $J_i$ ,  $J_i = J_i^+ \cup J_i^-$ ,  $I_i = I_i^+ \cup I_i^-$ . Обозначим  $|J_i^+| = |I_i^+| = \bar{n}_i$ ,  $|J_i^-| = |I_i^-| = \underline{n}_i$ ,  $\bar{n}_i + \underline{n}_i = n_i$ ,  $i \in I$ .

Ясно, что

$$\sum_{i \in I} \underline{n}_i = \underline{n}, \quad \sum_{i \in I} \bar{n}_i = \bar{n}, \quad \underline{n} + \bar{n} = 2m, \quad \sum_{i \in I} n_i = 2m.$$

В практических приложениях, как правило, имеет место соотношение  $n_i \ll N$ ,  $i \in I$ , т.е. число вершин, смежных с какой-либо вершиной, много меньше общего числа вершин.

Пусть состояние каждого из звеньев  $(k, i) \in J$ ,  $k \in I_i^+$ ,  $i \in I$ , описывается системой  $\aleph$ -мерных линейных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(2.1) \quad \frac{du^{ki}(x)}{dx} = A^{ki}(x)u^{ki}(x) + B^{ki}w^{ki}\delta(x - \xi^{ki}) + f^{ki}(x),$$

$$x \in (0, l^{ki}), \quad k \in I_i^+, \quad i \in I,$$

с  $M_i$ ,  $M_i \leq n_i \cdot \aleph$ , линейно независимыми краевыми условиями, заданными в неразделенном виде

$$(2.2) \quad \sum_{s=1, k_s \in I_i^-}^{\underline{n}_i} g_j^{ik_s} u^{ik_s}(0) + \sum_{s=1, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_s i} u^{k_s i}(l^{k_s i}) = v_j^i, \quad j = \overline{1, M_i}, \quad i \in I.$$

Здесь функция  $u^{ki}(x) = u^{ki}(x; v) \in \mathbb{R}^{\aleph}$  характеризует состояние  $(k, i)$ -го звена длиной  $l^{ki}$  в точке  $x \in [0, l^{ki}]$ ;  $v = (w, v, \xi)$  – вектор оптимизируемых параметров, у которого параметры  $w \in \mathbb{R}^\mu$ ,  $w = (w^{ki} = (w_1^{ki}, \dots, w_{\mu_{ki}}^{ki}) \in \Omega_{w^{ki}} \subset \mathbb{R}^{\mu_{ki}} : k \in I_i^+, i \in I)$ ,  $w_j^{ki}$  –  $j$ -я компонента  $\mu_{ki}$ -мерного  $(k, i)$ -го внешнего источника, воздействующего на  $(k, i)$ -ю подсистему в точке  $\xi^{ki} \in \Omega_{\xi^{ki}} \equiv [0, l^{ki}]$ ,

$\xi = (\xi^{ki} : k \in I_i^+, i \in I)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^{\overline{m}}$ ,  $\overline{m} \leq m$ ;  $v \in \mathbb{R}^M$ ,  $v = (v^i \in \Omega_{v^i} \subset \mathbb{R}^{M_i}, i \in I)$ ,  $v^i = (v_1^i, \dots, v_{M_i}^i)^\top$ ,  $v_j^i$  —  $j$ -я компонента внешнего источника, действующего на  $i$ -ю вершину. Обозначим  $\mu = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_k^+} \mu_{ki}$ ,  $M = \sum_{i=1}^N M_i$ . В задаче заданными являются:  $A^{ki}(x) \neq \text{const}$ ,  $f^{ki}(x)$  — соответственно  $\aleph$ -мерные квадратные матричные и векторные непрерывные при  $x \in [0, l^{ki}]$  функции;  $B^{ki}$  —  $(\aleph \times \mu_{ki})$ -мерные скалярные матрицы; строчные векторы  $g_j^{iks} = (g_{j,1}^{iks}, \dots, g_{j,\aleph}^{iks})$ ,  $k_s \in I_i^-$ ,  $s = \overline{1, \underline{n}_i}$ ,  $q_j^{ks i} = (q_{j1}^{ks i}, \dots, q_{j\aleph}^{ks i})$ ,  $k_s \in I_i^+$ ,  $s = \overline{1, \overline{n}_i}$ ,  $j = \overline{1, M_i}$ ,  $i \in I$ .

Если  $B^{ki} = 0_{\aleph \times \mu_{ki}}$ , то это означает, что на  $(k, i)$ -м участке источников нет.

В уравнениях системы (2.1) участвует  $\delta(\cdot)$ -функция Дирака такая, что для произвольной непрерывной функции  $\varphi(x)$  и точки  $\xi^{ki}$ :  $x, \xi^{ki} \in [0, l^{ki}]$  имеет место равенство [23, с. 270]

$$(2.3) \quad \int_0^{l^{ks}} \varphi(x) \delta(x - \xi^{ki}) dx = \varphi(\xi^{ki}).$$

Под решением системы (2.1) понимается вектор-функция  $u^{ki}(x)$ , которая непрерывно дифференцируема при  $x \in (0; \xi^{ki}) \cup (\xi^{ki}, l^{ki})$ , а при  $x = \xi^{ki}$  имеет место равенство

$$u^{ki}(\xi^{ki} + 0) - u^{ki}(\xi^{ki} - 0) = B^{ki} w^{ki}, \quad (k, i) \in J.$$

В уравнениях системы (2.1) относительно каждого  $(k, i)$ -го звена, содержащего источник, можно исключить второе слагаемое с  $\delta(\cdot)$ -функцией, разбив ее на две системы:

$$\begin{aligned} \frac{du_1^{ki}(x)}{dx} &= A_1^{ki}(x) u_1^{ki}(x) + f_1^{ki}(x), \quad x \in (0, l_1^{ki}), \\ \frac{du_2^{ki}(x)}{dx} &= A_2^{ki}(x) u_2^{ki}(x) + f_2^{ki}(x), \quad x \in (0, l_2^{ki}) \end{aligned}$$

с краевыми неразделенными условиями типа скачка:

$$u_1^{ki}(l_1^{ki}) = u_2^{ki}(0) + B^{ki} w^{ki}.$$

Здесь использованы обозначения:

$$\begin{aligned} A_1^{ki}(x) &= A^{ki}(x), & f_1^{ki}(x) &= f^{ki}(x), & l_1^{ki} &= \xi^{ki}, \\ A_2^{ki}(x) &= A^{ki}(x + \xi^{ki}), & f_2^{ki}(x) &= f^{ki}(x + \xi^{ki}), & l_2^{ki} &= l^{ki} - \xi^{ki}. \end{aligned}$$

Общее число подсистем (2.1) равно числу звеньев  $m$ , текущие состояния которых связаны со смежными звеньями (блоками) в произвольном порядке лишь посредством неразделенных (нелокальных) краевых условий (2.2). Отметим, что общее число дифференциальных уравнений в системе (2.1) равно  $m\aleph$  и число краевых условий в (2.2), равное  $M$ , должны быть равны между собой:  $M = m\aleph$ .

Будем предполагать, что краевая задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение. Это, как известно из [24], зависит лишь от матриц  $A^{ki}(x)$ ,  $k \in I_i^+$ , векторов  $g_j^{iks}$ ,  $k_s \in I_i^-$ ,  $s = \overline{1, \underline{n}_i}$ ,  $q_j^{k_s i}$ ,  $k_s \in I_i^+$ ,  $s = \overline{1, \overline{n}_i}$ ,  $j = \overline{1, \overline{M}_i}$ ,  $i \in I$ , и не зависит от других данных, участвующих в задаче, в частности от неизвестных векторов  $w, v, \xi$ .

На значения оптимизируемых в задаче параметров  $w^{ki}$ ,  $\xi^{ki}$ ,  $v^i$ ,  $k \in I_i^+$ ,  $i \in I$ , исходя из практических соображений, накладываются ограничения:

$$(2.4) \quad w^{ki} \in \Omega_{W^{ki}}, \quad v^i \in \Omega_{V^i}, \quad \xi^{ki} \in \Omega_{\xi^{ki}} \equiv [0; l^{ki}], \quad k \in I_i^+, \quad i \in I, \\ \Omega^{ki} = \Omega_{W^{ki}} \times \Omega_{V^i} \times \Omega_{\xi^{ki}}.$$

Будем предполагать, что множества допустимых значений  $\Omega_{W^{ki}}$ ,  $\Omega_{V^i}$  являются выпуклыми компактными.

Требуется найти такие значения компонент вектора  $v = (w, v, \xi)$ , при которых функционал

$$(2.5) \quad \mathfrak{Z}(w, v, \xi) = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \int_0^{l^{ki}} f_0^{ki}(u^{ki}(x), x) dx + \Phi(\underline{u}, \overline{u}, w, v, \xi)$$

получает минимальное значение. Здесь заданные функции  $f_0^{ki}(u^{ki}, x)$ ,  $\Phi^i(\underline{u}^i, \overline{u}^i, w, \xi, v)$  непрерывно дифференцируемы по своим аргументам и использованы обозначения:

$$u = u(x) = (u^{ki}(x) : k \in I_i^+, i \in I), \\ \underline{u}^i = \left( u^{ik_1}(0), \dots, u^{ik_{\underline{n}_i}}(0) \right)^T \in \mathbb{R}^{\underline{n}_i \cdot \aleph}, \quad \underline{u} = (\underline{u}^i : i \in I) \in \mathbb{R}^{\underline{n}}, \\ \overline{u}^i = \left( u^{k_1 i}(l^{k_1 i}), \dots, u^{k_{\overline{n}_i} i}(l^{k_{\overline{n}_i} i}) \right)^T \in \mathbb{R}^{\overline{n}_i \cdot \aleph}, \quad \overline{u} = (\overline{u}^i : i \in I) \in \mathbb{R}^{\overline{n}}.$$

Сформулированную задачу (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) можно отнести к классу параметрических задач оптимального управления. Оптимизируемый конечномерный вектор  $(w, \xi, v)$ , определяющий параметры и месторасположения внешних источников, в реальных задачах имеет небольшую размерность, несмотря на большую размерность самой системы дифференциальных уравнений (2.1). Определенную вычислительную сложность представляет решение краевой задачи (2.1), (2.2) при заданных значениях вектора  $(w, \xi, v)$ . Сложность обусловлена неразделенными (нелокальными) краевыми условиями и, конечно, размерностью самой системы дифференциальных уравнений (2.1), так как при численном решении задачи оптимизации необходимо многократно определять значение функционала при текущих значениях оптимизируемого вектора  $(w, \xi, v)$ , а следовательно, решать краевую задачу (2.1), (2.2). Поэтому важно использовать как эффективные методы решения оптимизационной задачи, так и уделить особое внимание решению краевой задачи (2.1), (2.2).

### 3. Необходимые условия оптимальности

Исследуем выпуклость и дифференцируемость функционала (2.5), получим формулы для градиента функционала и сформулируем необходимые условия оптимальности относительно оптимизируемых параметров.

*Теорема 1.* Пусть выполнены все условия, наложенные на функции и параметры, участвующие в задаче (2.1), (2.2), (2.4), (2.5). Если функции  $f_0^{ki}(u^{ki}, x)$ ,  $\Phi(\underline{u}, \bar{u}, w, v, \xi)$  при фиксированном допустимом векторе  $\xi$  выпуклы по другим своим аргументам, то функционал  $\mathfrak{F}(w, v, \xi)$  является выпуклым по  $w, v$ , а если хотя бы одна из этих функций сильно выпукла, то и функционал является сильно выпуклым.

Доказательства теоремы 1 и всех последующих теорем приведены в Приложении.

Несложно доказать, что функционал  $\mathfrak{F}(w, v, \xi)$  по  $\xi$  не является выпуклым, если хотя бы для одного участка  $(k, i) \in J$  выполняется условие  $B^{ki}w^{ki} \neq 0$ , т.е. имеются дуги, на которые не воздействуют внешние источники.

Далее исследуем дифференцируемость функционала (2.5) и получим формулы для компонент его градиента по оптимизируемой тройке  $v = (w, v, \xi)$ .

Введем следующие обозначения. Обозначим через  $\underline{c}_j^i = (g_j^{ik_1}, \dots, g_j^{ik_{n_i}})$ ,  $\bar{c}_j^i = (q_j^{k_1 i}, \dots, q_j^{k_{n_i} i})$  — строчные векторы размерности соответственно  $\underline{n}_i \cdot \aleph$  и  $\bar{n}_i \cdot \aleph$ , через  $u^i = (\underline{u}^i, \bar{u}^i)^T$  — расширенный вектор размерности  $n_i \cdot \aleph$ . Пусть  $C_i = (c_{js}^i)_{j=1, s=1}^{M_i, n_i \cdot \aleph}$ ,  $i \in I$ , есть расширенная матрица, каждая строка которой является расширенным строчным вектором  $c_j^i = (\underline{c}_j^i, \bar{c}_j^i)$  размерности  $n_i \cdot \aleph$ . Согласно предположению о линейной независимости условий (2.2) имеет место

$$(3.1) \quad \text{rank } C_i = M_i.$$

Так как матрица  $C_i$  имеет размерность  $M_i \times (n_i \cdot \aleph)$ ,  $M_i \leq n_i \cdot \aleph$ ,  $i \in I$ , то из матрицы  $C_i$  можно извлечь обратимую подматрицу (минор)  $\widehat{C}_i$  с рангом, равным  $M_i$ . Изменив порядок столбцов, расширенную матрицу вновь обозначим через  $C_i = [\widehat{C}_i, \widetilde{C}_i]$ . Здесь  $\widetilde{C}_i$  — матрица, составленная из столбцов расширенной матрицы  $C_i$ , не включенных в матрицу  $\widehat{C}_i$ . Аналогично этому вектор  $u^i$  разбивается на  $M_i$ -мерный вектор  $\widehat{u}^i = (\widehat{u}_1^i, \dots, \widehat{u}_{M_i}^i)^T$ , соответствующий матрице  $\widehat{C}_i$ , и  $(n_i \cdot \aleph - M_i)$ -мерный вектор  $\widetilde{u}^i = (\widetilde{u}_1^i, \dots, \widetilde{u}_{(n_i \cdot \aleph) - M_i}^i)^T$ . Пусть  $\widehat{\mu}_j$ ,  $j = 1, \dots, M_i$  — номера столбцов матрицы  $C_i$ , включенные в матрицу  $\widehat{C}_i$ , а  $\widetilde{\mu}_j$ ,  $j = 1, \dots, (n_i \cdot \aleph - M_i)$  — номера столбцов матрицы  $C_i$ , включенные в матрицу  $\widetilde{C}_i$ .

Здесь и далее производные  $\partial f_0^{ki} / \partial u^{ki}$ ,  $\partial \Phi / \partial \underline{u}$ ,  $\partial \Phi / \partial \bar{u}$ ,  $\partial \Phi / \partial w$ ,  $\partial \Phi / \partial v$ ,  $\partial \Phi / \partial \xi$  будут пониматься как строчные векторы соответствующей размерности. Из расширенных векторов  $\partial \Phi / \partial u^i = [\partial \Phi / \partial \underline{u}^i, \partial \Phi / \partial \bar{u}^i]$ ,  $\psi^i =$

$= \left( (-\underline{\psi}^i)^\top, (\bar{\psi}^i)^\top \right)^\top$  размерности  $n_i \cdot \aleph$  выделим векторы  $\partial\Phi/\partial\widehat{u}^i =$   
 $= \left( \partial\Phi/\partial\widehat{u}_1^i, \dots, \partial\Phi/\partial\widehat{u}_{M_i}^i \right), \bar{\psi}^i = \left( \bar{\psi}_1^i, \dots, \bar{\psi}_{M_i}^i \right)^\top$  с номерами компонент, со-  
 ответствующих номерам столбцов из  $C_i$ , включенных в матрицу  $\widehat{C}_i$ .

Имеет место следующая теорема.

*Теорема 2. Пусть выполнены условия, наложенные на функции и параметры, участвующие в задаче (2.1), (2.2), (2.4), (2.5). Тогда функционал (2.5) дифференцируем, а компоненты его градиента по оптимизируемым параметрам  $w^{ki}, \xi^{ki}, v^i, k \in I_i^+, i \in I$ , определяются формулами:*

$$(3.2) \quad \text{grad}_{w^{ki}} \mathfrak{S}(w, v, \xi) = - \left( B^{ki} \right)^\top \psi^{ki}(\xi^{ki}) + \frac{\partial\Phi}{\partial w^{ki}},$$

$$(3.3) \quad \text{grad}_{\xi^{ki}} \mathfrak{S}(w, v, \xi) = - \left( B^{ki} \right)^\top \left. \frac{d\psi^{ki}(x)}{dx} \right|_{x=\xi^{ki}} w^{ki} + \frac{\partial\Phi}{\partial \xi^{ki}},$$

$$(3.4) \quad \text{grad}_{v^i} \mathfrak{S}(w, v, \xi) = \left( \widehat{C}_i^{-1} \right)^\top \left( \left( \frac{\partial\Phi}{\partial \widehat{u}^i} \right)^\top + \bar{\psi}^i \right) + \frac{\partial\Phi}{\partial v},$$

где непрерывно-дифференцируемые вектор-функции  $\psi^{ki}(x) \in R^\aleph, x \in [0, l^{ki}], k \in I_i^+, i \in I$ , являются решениями сопряженной системы дифференциальных уравнений

$$(3.5) \quad \frac{d\psi^{ki}(x)}{dx} = \left( \frac{\partial f_0^{ki}(u^{ki}(x), w^{ki}, \xi^{ki}, v^i)}{\partial u^{ki}} \right)^\top - (A^{ki}(x))^\top \psi^{ki}(x),$$

$$x \in (0, l^{ki}), \quad k \in I_i^+, \quad i \in I,$$

с неразделенными краевыми условиями

$$(3.6) \quad \left( \frac{\partial\Phi}{\partial \widehat{u}^i} \right)^\top + \bar{\psi}^i - \left( \widetilde{C}_i \right)^\top \left( \widehat{C}_i^{-1} \right)^\top \left( \left( \frac{\partial\Phi}{\partial \widehat{u}^i} \right)^\top + \bar{\psi}^i \right) = 0, \quad i \in I.$$

Интересно отметить следующее. Во-первых, сопряженная задача (3.5), (3.6) имеет ту же специфику, что и прямая задача. А именно система (3.5) имеет блочную структуру, а краевые условия (3.6) во всех вершинах являются неразделенными. Во-вторых, в выражениях компонент градиента функционала по параметрам  $(k, i)$ -й подсистемы, как видно из (3.2), (3.3), участвует сопряженная функция только этой подсистемы. А в формулах для компонент градиента функционала по источникам, воздействующих на  $i$ -ю вершину, как видно из (3.4), участвуют краевые значения прямой и сопряженной переменных, определенных именно только в этой вершине.

Сформулируем необходимые условия оптимальности в вариационной форме [25–29] для задачи (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) в виде следующей теоремы.

*Теорема 3. Пусть выполнены условия, наложенные на функции и параметры, участвующие в задаче (2.1), (2.2), (2.4), (2.5). Для оптимальности*

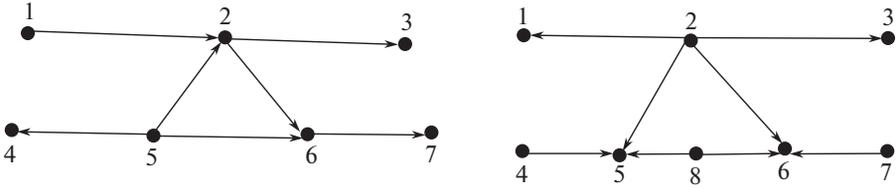


Рис. 1. Исходный граф – а, преобразованный граф – б.

параметров  $(w^{ki*}, v^{i*}, \xi^{ki*}) \in \Omega^{ki}$ ,  $k \in I_i^+$ ,  $i \in I$ , необходимо, чтобы неравенства

$$\begin{aligned} (\text{grad}_{w^{ki}} \mathfrak{F}(w, v, \xi), w^{ki} - w^{ki*}) &\geq 0, & (\text{grad}_{v^i} \mathfrak{F}(w, v, \xi), v^i - v^{i*}) &\geq 0, \\ (\text{grad}_{\xi^{ki}} \mathfrak{F}(w, v, \xi), \xi^{ki} - \xi^{ki*}) &\geq 0 \end{aligned}$$

выполнялись для всех допустимых значений параметров  $(w^{ki*}, v^{i*}, \xi^{ki*}) \in \Omega^{ki}$ ,  $k \in I_i^+$ ,  $i \in I$ .

Отметим следующее. Рассматриваемые в статье многосвязные объекты произвольной структуры можно за счет изменения направления дуг, а в случае необходимости введением дополнительных вершин привести к виду, когда все вершины из  $I$  разбиваются на два непересекающихся подмножества: вершины, у которых все ребра являются входящими ( $I^{\text{вх}}$ ), и вершины, у которых все ребра — исходящие ( $I^{\text{исх}}$ ), т.е.  $I = I^{\text{вх}} \cup I^{\text{исх}}$ . Например, на рис. 1, а ребро (5, 6) введением новой вершины (8) разбито на две дуги (8, 5) и (8, 6) (рис. 1, б), и тогда  $I^{\text{вх}} = \{1, 3, 5, 6\}$ ,  $I^{\text{исх}} = \{2, 4, 7\}$ .

В этом случае условия (2.2) разбиваются на две группы условий

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \underline{C}_i \underline{u}^i &= \underline{v}^i, & i \in I^{\text{вх}}, & \quad \underline{u}^i = \{u^{ki} : k \in I_i^+, i \in I^{\text{вх}}\}, \\ \overline{C}_i \overline{u}^i &= \overline{v}^i, & i \in I^{\text{исх}}, & \quad \overline{u}^i = \{u^{ki} : k \in I_i^-, i \in I^{\text{исх}}\}. \end{aligned}$$

Однако замена условий (2.2) условиями (3.7) в исследовании задачи (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) никаких преимуществ с теоретической точки зрения не дает.

Во многих практических приложениях внешние источники участвуют не на всех звеньях и в вершинах объекта или же на некоторых звеньях или вершинах их значения могут быть заданы и не оптимизироваться. В этих случаях соответствующие компоненты градиентов функционала  $\text{grad}_w \mathfrak{F}(w, v, \xi)$ ,  $\text{grad}_v \mathfrak{F}(w, v, \xi)$ ,  $\text{grad}_\xi \mathfrak{F}(w, v, \xi)$  не вычисляются и принимаются равными нулю.

*Замечание 1.* Если в результате численного решения задачи для достаточно малого  $\varepsilon$  будет получено или  $\|w^{ki}\|_{R^{\mu_{ki}}} < \varepsilon$ , или  $|\xi^{ki}| < \varepsilon$ , или  $|\xi^{ki} - l^{ki}| < \varepsilon$ , то это означает, что внутри  $(k, i)$ -го звена внешнего источника нет. Если же  $\|w^{ki}\|_{R^{\mu_{ki}}} > \varepsilon$ , а  $|\xi^{ki}| < \varepsilon$  или  $|\xi^{ki} - l^{ki}| < \varepsilon$ , то это означает, что источник с параметрами  $w^{ki}$  воздействует на  $k$ -ю или  $i$ -ю вершину и соответственно значения параметров  $w^{ki}$  надо добавить к параметрам  $v^k$  или  $v^i$ .

В практических задачах в зависимости от знака параметров источника  $w^{ki}$ ,  $k \in I_i^+$ ,  $i \in I$ , внешний источник в точке  $\xi^{ki}$  называется “оттоком” или “притоком”.

#### 4. Схема численного решения задачи

В этом разделе предлагается численная схема решения задачи (2.1), (2.2), (2.4), (2.5). Отметим, что решение задачи требует рассмотрения задач двух уровней: задачи минимизации функционала (верхний уровень) [10, 11, 21, 22, 25–29] и краевой задачи (прямой и сопряженной) относительно систем обыкновенных дифференциальных уравнений блочной структуры с неразделенными краевыми условиями (нижний уровень) [12–14, 16].

Верхний уровень. Пусть допустимые множества  $\Omega_{w^{ki}}$ ,  $\Omega_{\xi^{ki}}$ ,  $\Omega_{v^i}$  имеют простую структуру (шар, параллелепипед и т.п.). Для определения оптимальных значений  $v = (w, v, \xi)$ , применяя формулы (3.2), (3.3), (3.4) для вычисления компонент градиента функционала задачи (2.1), (2.2), (2.4), (2.5), можно использовать эффективные методы оптимизации первого порядка, например метод проекции градиента [10, 11]:

$$(4.1) \quad \begin{pmatrix} w^{ki} \\ v^i \\ \xi^{ki} \end{pmatrix}^{t+1} = P_{\Omega^{ki}} \left[ \begin{pmatrix} w^{ki} \\ v^i \\ \xi^{ki} \end{pmatrix}^t - \alpha_t \begin{pmatrix} \text{grad}_{w^{ki}} \mathfrak{S}(w^t, v^t, \xi^t) \\ \text{grad}_{v^i} \mathfrak{S}(w^t, v^t, \xi^t) \\ \text{grad}_{\xi^{ki}} \mathfrak{S}(w^t, v^t, \xi^t) \end{pmatrix} \right],$$

$$k \in I_i^+, \quad i \in I, \quad t = 1, 2, \dots$$

Здесь  $P_{\Omega^{ki}}[\bullet]$  – оператор проектирования произвольной точки  $(w^{ki}, \xi^{ki}, v^i)$  на допустимое множество  $\Omega^{ki}$ ,  $\alpha_t \geq 0$  – шаг одномерной минимизации.

На каждой итерации процедуры (4.1) требуется вычисление компонент градиента функционала  $\mathfrak{S}(w, v, \xi)$  при текущих значениях вектора  $v = (w, v, \xi)$ . Для этого сначала решается прямая краевая задача (2.1), (2.2), далее – сопряженная краевая задача (3.5), (3.6). Результаты решения подставляются в формулы (3.2), (3.3), (3.4) для вычисления компонент градиента функционала.

Нижний уровень. Прямая (2.1), (2.2) и сопряженная (3.5), (3.6) краевые задачи являются двухточечными задачами специфической блочной структуры большой размерности. Для их решения далее предлагается подход, основанный на использовании предложенной в [12–14] операции переноса неразделенных краевых условий, учитывающий специфику (большую размерность и блочную структуру) прямой и сопряженной начально-краевых задач. Приведем соответствующие формулы, схемы, не требующие одновременного решения всех подсистем систем (2.1) или (3.5). Подход позволяет проводить прогонку каждого значения переменной из одного конца в другой в каждом условии отдельно и поблочно. В результате потребуются решение алгебраической системы уравнений со слабо и произвольно заполненной матрицей относительно значений всех переменных задачи в одном из концов, а далее решаются задачи Коши в отдельности для каждой подсистемы.

Сначала рассмотрим решение прямой задачи. Предлагаемый подход, как и все подобные методы переноса условий, заключается в замене условий (2.2)

относительно вершин  $i \in I$ , содержащих значение  $u^{ik}(0)$ , на эквивалентные условия со значением  $u^{ki}(l^{ki})$  при переносе вправо (при переносе влево — в замене условий, содержащих  $u^{ki}(l^{ki})$ , на условия со значением  $u^{ik}(0)$ ). В результате вместо условий вида (2.2) будут получены все  $M$  условий в виде

$$(4.2) \quad \sum_{s=1, k_s \in I_i^+}^{n_i} \tilde{q}_j^{k_s i} u^{k_s i}(l^{k_s i}) = r_j^i, \quad j = \overline{1, M_i}, \quad i \in I,$$

при переносе условий (2.2) вправо или в виде

$$(4.3) \quad \sum_{s=1, k_s \in I_i^-}^{n_i} \tilde{g}_j^{i k_s} u^{i k_s}(0) = r_j^i, \quad j = \overline{1, M_i}, \quad i \in I,$$

при переносе условий (2.2) влево. Получение условий вида (4.2) или (4.3) будем осуществлять поэтапно. Чтобы избежать матричных операций, значение каждого состояния на одном из концов в каждом условии из (2.2) будем переносить в другой конец отдельно и по блоку.

Условия (4.2) и (4.3) представляют собой систему  $M$  алгебраических уравнений с  $M$  неизвестными относительно соответственно  $u(l) \in \mathbb{R}^M$  и  $u(0) \in \mathbb{R}^M$ . После решения одной из этих систем относительно подсистем системы дифференциальных уравнений (2.1) получаем  $m$  задач Коши, которые решаются независимо друг от друга.

*Замечание 2.* Во многих конкретных практических задачах большая часть условий из (2.2) вместо общего вида (2.2), как указывалось, в целом могут быть заданы в виде (3.7) или, более того, совпадают с условиями Коши на левом или правом концах. Поэтому выбор направления переноса условий влево или вправо следует осуществлять исходя из того, в каком из концов локальных условий больше, в тот конец и переносить оставшиеся условия.

Изложим процесс переноса вправо граничного значения  $k$ -й функции  $u^{ik}(x)$  в  $j$ -м условии для  $i$ -го узла из (2.2), предполагая, что среди компонент вектора  $g_j^{i k_s} = (g_{j,1}^{i k_s}, \dots, g_{j,\aleph}^{i k_s})$ ,  $k_s \in I_i^-$ ,  $s = \overline{1, n_i}$ , имеются ненулевые. В противном случае  $j$ -е условие прогонять вправо не надо, так как относительно этой функции в этом условии участвует только значение  $u^{ki}(l^{ki})$ . Пусть отличный от нуля коэффициент есть  $g_j^{id} \neq 0_{\aleph}$ ,  $d \in I_i^-$  ( $0_{\aleph}$  —  $\aleph$ -мерный вектор, все компоненты которого равны нулю).

Отметим, что порядок выбора отличных от нуля коэффициентов непринципиален. Перенос значений решений подсистем из левого конца в правый можно осуществлять в произвольной последовательности выбора как подсистем, так и самих ограничений.

*Определение.* Будем говорить, что  $\aleph$ -мерная строчная вектор-функция  $\alpha_j^{id}(x) = (\alpha_{j,1}^{id}(x), \dots, \alpha_{j,\aleph}^{id}(x))$  и скалярная функция  $\gamma_j^i(x)$  такие, что

$$(4.4) \quad \alpha_j^{id}(0) = g_j^{id}(0), \quad \gamma_j^i(0) = v_j^i, \quad d \in I_i^-, \quad i \in I,$$

осуществляют перенос слева направо граничного значения решения  $(i, d)$ -й подсистемы (2.1) в  $j$ -м условии для  $i$ -го узла из (2.2) вправо, если для произвольного решения  $u^{id}(x)$  этой подсистемы во всех точках  $x \in [0, l^{id}]$  выполняется равенство

$$(4.5) \quad \alpha_j^{id}(x)u^{id}(x) + \sum_{s=1, k_s \in I_i^- \setminus \{d\}}^{\underline{n}_i} g_j^{ik_s} u^{ik_s}(0) + \sum_{s=1, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_s i} u^{k_s i}(l^{k_s i}) = \gamma_j^i(x).$$

Ясно, что условие (4.5), учитывая (4.4), при  $x = 0$  совпадает с  $j$ -м условием для  $i$ -го узла из (2.2). Функции  $\alpha_j^{id}(x)$ ,  $\gamma_j^i(x)$  будем называть прогоночными. Подставляя значения функций  $\alpha_j^{id}(x)$ ,  $\gamma_j^i(x)$  при  $x = l^{id}$  в (4.4), получим равенство, эквивалентное  $j$ -му условию для  $i$ -го узла из (2.2):

$$(4.6) \quad \sum_{s=1, k_s \in I_i^- \setminus \{d\}}^{\underline{n}_i} g_j^{ik_s} u^{ik_s}(0) + \sum_{s=1, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_s i} u^{k_s i}(l^{k_s i}) + \alpha_j^{id}(l^{id})u^{id}(l^{id}) = \gamma_j^i(l^{id}).$$

Прогоночные функции  $\alpha_j^{id}(x)$ ,  $\gamma_j^i(x)$ , используемые для переноса с одного конца в другой граничных значений решений подсистем, участвующих в краевых условиях (2.2), не единственны. В частности, конструктивное их построение предложено в следующей теореме.

**Теорема 4.** Пусть  $g_j^{id} \neq 0_{\mathbb{R}}$  для  $d \in I_i^-$  и  $\aleph$ -мерная вектор-функция  $\alpha_j^{id}(x)$  и скалярная функция  $\gamma_j^i(x)$  при  $x \in (0, l^{id})$  являются решением следующих задач Коши:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \frac{d\alpha_j^{id}(x)}{dx} &= -\alpha_j^{id}(x)A^{id}(x), \quad \alpha_j^{id}(0) = g_j^{id}, \\ \frac{d\gamma_j^{id}(x)}{dx} &= \alpha_j^{id}(x) \left( f^{id}(x) + B^{ki} w^{ki} \delta(x - \xi^{ki}) \right), \quad \gamma_j^i(0) = v_j^i. \end{aligned}$$

Тогда эти функции являются прогоночными коэффициентами для переноса слева направо граничного значения  $u^{id}(0)$  решения  $(i, d)$ -й подсистемы (2.1) в  $j$ -м условии для  $i$ -го узла.

Указанная выше процедура переноса повторяется для значения следующей функции  $u^{ik_s}(x)$ ,  $k_s \in I_i^- \setminus \{d\}$ , у которой в новом полученном условии вида (4.6) коэффициент  $g_j^{id} \neq 0_{\mathbb{R}}$ . Это повторяется, пока в  $j$ -м условии для  $i$ -го узла не перестанет участвовать какая-либо компонента вектора  $u^{ik_s}(0)$ ,  $k_s \in I_i^-$ ,  $s = \overline{1, \underline{n}_i}$ , с ненулевым коэффициентом. После этого необходимо перейти к  $(j + 1)$ -му условию для  $i$ -го узла из (2.2). Эта процедура повторяется до тех пор, пока все условия (2.2) не будут приведены к виду (4.2).

Далее, решая систему алгебраических уравнений (4.2) (или (4.3))  $M$ -го порядка, определяются векторы  $u^{k_s i}(l^{k_s i})$ ,  $k_s \in I_i^+$ ,  $s = \overline{1, \bar{n}_i}$  (при переносе влево определяются  $u^{ik_s}(0)$ ,  $k_s \in I_i^-$ ,  $s = \overline{1, \underline{n}_i}$ ).

Для определения искомых вектор-функций  $u^{ik}(x)$ ,  $x \in [0, l^{ki}]$ ,  $k \in I_i^+$ ,  $i \in I$ , компоненты  $u^{ki}(l^{ki})$ ,  $k \in I_i^+$ ,  $i \in I$ , найденного вектора используются в качестве начальных значений для соответствующих задач Коши относительно каждой отдельной подсистемы системы (2.1), решаемых в обратном порядке: от  $x = l^{ki}$  до  $x = 0$ ,  $k \in I_i^+$ ,  $i \in I$ .

Перенос условий может осуществляться также справа налево. Получение вспомогательных задач Коши относительно прогоночных коэффициентов в этом случае проводится аналогично.

Численное решение сопряженной краевой задачи (3.5), (3.6) большой размерности и блочной структуры проводится вполне аналогично изложенному выше решению прямой задачи (2.1), (2.2).

Таким образом, выше приведена схема решения прямой и сопряженной краевых задач большой размерности блочной структуры с произвольно связанными блоками посредством только начальных и конечных значений фазовых переменных. Видно, что приведенная схема решения этих краевых задач позволяет легко распараллеливать вычислительный процесс по каждой переменной в каждом условии (2.2), (3.6), причем эти процессы проводятся поблочно, т.е. отдельно для каждой подсистемы (2.1), (3.5).

## 5. Результаты численных экспериментов

Приведем результаты численных экспериментов, полученные при решении задачи оптимизации значений параметров и мест расположения источников для объекта (рис. 2), в котором

$$\begin{aligned} N &= 4, \quad m = 3, \quad \aleph = 2, \quad M = 6, \quad J = \{(1, 2), (3, 2), (2, 4)\}, \\ I &= \{1, 2, 3, 4\}, \quad I_1^+ = \emptyset, \quad I_1^- = \{2\}, \quad I_2^+ = \{1, 3\}, \quad I_2^- = \{4\}, \\ I_3^+ &= \emptyset, \quad I_3^- = \{2\}, \quad I_4^+ = \{2\}, \quad I_4^- = \emptyset, \quad l^{ki} = 1, \quad k \in I_i^+, \quad i \in I. \end{aligned}$$

Состояние каждого из трех подобъектов (блоков) описывается системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(5.1) \quad \begin{cases} \frac{du_1^{1,2}}{dx} = u_2^{1,2} + x^2 - 3x - 2, & \frac{du_2^{1,2}}{dx} = xu_1^{1,2} - 2u_2^{1,2} + 5x + 3, \\ \frac{du_1^{3,2}}{dx} = u_2^{3,2} + 2 - 4x^2 + x + w^{3,2}\delta(x - \xi^{3,2}), & \frac{du_2^{3,2}}{dx} = u_1^{3,2} - xu_2^{3,2} + 5 + 3x^2 - 2x, \\ \frac{du_1^{2,4}}{dx} = u_2^{2,4} - x - 2 - w^{2,4}\delta(x - \xi^{2,4}), & \frac{du_2^{2,4}}{dx} = u_1^{2,4} - u_2^{2,4} + 5. \end{cases}$$

Ребра (блоки) (1, 2), (3, 2), (2, 4) связаны между собой начальными и/или конечными (краевыми) значениями состояний в виде (2.2). В вершинах {1}, {3}, {4} задано по одному условию, а в вершине {2} заданы три условия:  $M_1 = 1$ ,  $M_2 = 3$ ,  $M_3 = 1$ ,  $M_4 = 1$ . В целом заданы 6 условий, из них три являются неразделенными:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} u_1^{1,2}(0) &= v^1, & u_2^{3,2}(1) - u_2^{2,4}(0) &= v_1^2, & u_2^{1,2}(1) - u_2^{3,2}(1) &= v_2^2, \\ u_1^{1,2}(1) + u_1^{3,2}(1) + u_1^{2,4}(0) &= v_3^2, & u_1^{2,3}(0) &= v^3, & u_2^{4,2}(1) &= 0. \end{aligned}$$

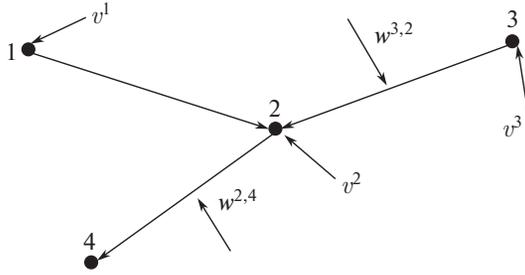


Рис. 2. Граф рассматриваемого объекта.

Таким образом, в условиях (5.2) матрицы  $C_i$ ,  $i = 1, 3, 4$ , имеют размерность  $M_1 \times \aleph = 1 \times 2$ , а размерность  $C_2$  равна  $M_2 \times n_2 \aleph = 3 \times 6$ ,

$$C_1 = \begin{pmatrix} g_{1,1}^{1,2} & g_{1,2}^{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} g_{1,1}^{2,4} & g_{1,2}^{2,4} & q_{1,1}^{1,2} & q_{1,2}^{1,2} & q_{1,1}^{3,2} & q_{1,2}^{3,2} \\ g_{2,1}^{2,4} & g_{2,2}^{2,4} & q_{2,1}^{1,2} & q_{2,2}^{1,2} & q_{2,1}^{3,2} & q_{2,2}^{3,2} \\ g_{3,1}^{2,4} & g_{3,2}^{2,4} & q_{3,1}^{1,2} & q_{3,2}^{1,2} & q_{3,1}^{3,2} & q_{3,2}^{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(5.3) \quad C_3 = \begin{pmatrix} g_{1,1}^{2,3} & g_{1,2}^{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} q_{1,1}^{4,2} & q_{1,2}^{4,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как видно из (5.1), (5.2), источники, воздействующие на звенья (3;2), (2;4) и вершины  $\{1\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{4\}$ , являются однопараметрическими, на вершину  $\{3\}$  – трехпараметрическим, а вершина  $\{4\}$  внешних источников не имеет:  $v^4 \equiv 0$ , т.е.  $w^{3,2}, w^{2,4} \in \mathbb{R}^1$ ,  $v^1, v^3 \in \mathbb{R}^1$ ,  $v^2 \in \mathbb{R}^3$ .

В задаче имеются ограничения на значения параметров источников и их месторасположения:  $|w^{3,2}| \leq 1$ ,  $|w^{2,4}| \leq 1$ ,  $0 \leq \xi^{3,2} \leq 1$ ,  $0 \leq \xi^{2,4} \leq 1$ .

Предположим, что параметры источников и места их воздействия на заранее заданных двух участках множества  $J$  и трех вершинах множества  $I$  неизвестны и требуется их определить, минимизируя функционал

$$(5.4) \quad \mathfrak{S}(v) = \int_0^{l^{1,2}} \left[ u_2^{1,2}(x; v) - \tilde{u}_2^{1,2}(x) \right]^2 dx + \int_0^{l^{3,2}} \left[ u_2^{3,2}(x; v) - \tilde{u}_2^{3,2}(x) \right]^2 dx + \\ + \int_0^{l^{2,4}} \left[ u_2^{2,4}(x; v) - \tilde{u}_2^{2,4}(x) \right]^2 dx.$$

Для построения модельной задачи предполагалось, что функции  $\tilde{u}_2^{1,2}(x)$ ,  $\tilde{u}_2^{3,2}(x)$ ,  $\tilde{u}_2^{2,4}(x)$ , определяющие желаемые значения первых компонент состояния подобъектов, заданы, и их графики приведены на рис. 3. Эти функции были получены численным решением краевой задачи (5.1)–(5.4) для следующих параметров  $v^* = (w^*, v^*, \xi^*)$ :  $v^{1*} = (1)$ ,  $v^{2*} = (0; 0; -1)$ ,  $v^{3*} = (-2)$ ,

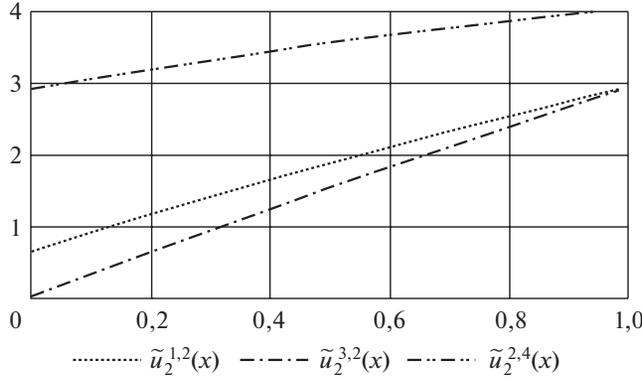


Рис. 3. Графики функций  $\tilde{u}_2^{1,2}(x)$ ,  $\tilde{u}_2^{3,2}(x)$ ,  $\tilde{u}_2^{2,4}(x)$ .

$w^{3,2} = (0, 2)$ ,  $w^{2,4} = (0, 3)$ ,  $\xi^{3,2} = 0,5$ ,  $\xi^{2,4} = 0,6$ , значения которых требовалось определить минимизацией функционала (5.4).

Задача оптимизации (5.1)–(5.4) решалась для разных начальных значений вектора  $v^0$  с использованием описанной выше численной схемы. На верхнем уровне для решения задачи оптимизации был использован метод проекции градиента [10, 11].

Согласно формулам (3.6) сопряженная краевая задача имеет вид

$$(5.5) \quad \begin{cases} \frac{d\psi_1^{1,2}}{dx} = -x\psi_2^{1,2}, & \frac{d\psi_2^{1,2}}{dx} = 2[u_2^{1,2}(x) - \tilde{u}_2^{1,2}(x)] - \psi_1^{1,2} + 2\psi_2^{1,2}, \\ \frac{d\psi_1^{3,2}}{dx} = -\psi_2^{3,2}, & \frac{d\psi_2^{3,2}}{dx} = 2[u_2^{3,2}(x) - \tilde{u}_2^{3,2}(x)] - \psi_1^{3,2} + x\psi_2^{3,2}, \\ \frac{d\psi_1^{2,4}}{dx} = -\psi_2^{2,4}, & \frac{d\psi_2^{2,4}}{dx} = 2[u_2^{2,4}(x) - \tilde{u}_2^{2,4}(x)] - \psi_1^{2,4} + \psi_2^{2,4}. \end{cases}$$

Учитывая (5.3), подматрицы матрицы  $C_i$ ,  $i = 1, 3, 4$ , состоят из одного элемента. Тогда обратные матрицы к одноэлементным матрицам  $\widehat{C}_1 = (1)$ ,  $\widehat{C}_3 = (1)$ ,  $\widehat{C}_4 = (1)$  совпадают с самими матрицами  $\widehat{C}_i$ ,  $P_i = 1, 3, 4$ , а  $\widetilde{C}_1 = (0)$ ,  $\widetilde{C}_3 = (0)$ ,  $\widetilde{C}_4 = (0)$ . Из матрицы  $C_2$  можно выделить подматрицу  $\widehat{C}_2$  ранга  $M_2 = 3$ , например,

$$\widehat{C}_2 = \begin{pmatrix} g_{1,1}^{2,4} & q_{1,2}^{1,2} & q_{1,2}^{3,2} \\ g_{2,1}^{2,4} & q_{2,2}^{1,2} & q_{2,2}^{3,2} \\ g_{3,1}^{2,4} & q_{3,2}^{1,2} & q_{3,2}^{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{C}_2 = \begin{pmatrix} g_{1,2}^{2,4} & q_{1,1}^{1,2} & q_{1,1}^{3,2} \\ g_{2,2}^{2,4} & q_{2,1}^{1,2} & q_{2,1}^{3,2} \\ g_{3,2}^{2,4} & q_{3,1}^{1,2} & q_{3,1}^{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда компонентами векторов  $\widehat{u}^i$ ,  $i = 1, 3, 4$ , соответствующими столбцам подматриц  $\widehat{C}_i$ ,  $i = 1, 3, 4$ , являются:  $\widehat{u}^1 = \begin{pmatrix} u_1^{1,2}(0) \end{pmatrix}$ ,  $\widehat{u}^3 = \begin{pmatrix} u_1^{2,3}(0) \end{pmatrix}$ ,  $\widehat{u}^4 = \begin{pmatrix} u_1^{4,2}(1) \end{pmatrix}$ , а векторы, соответствующие столбцам подматриц  $\check{C}_i$ ,  $i = 1, 3, 4$ , являются векторы:  $\check{u}^1 = \begin{pmatrix} u_2^{1,2}(0) \end{pmatrix}$ ,  $\check{u}^3 = \begin{pmatrix} u_2^{2,3}(0) \end{pmatrix}$ ,  $\check{u}^4 = \begin{pmatrix} u_2^{4,2}(1) \end{pmatrix}$ . Столбцам подматриц  $\widehat{C}_2$  соответствует вектор  $\widehat{u}^2 = \begin{pmatrix} u_1^{2,4}(0), u_2^{1,2}(1), u_2^{3,2}(1) \end{pmatrix}^T$ , а вектор, соответствующий столбцам подматрицы  $\check{C}_2$ , есть  $\check{u}^2 = \begin{pmatrix} u_2^{2,4}(0), u_1^{1,2}(1), u_1^{3,2}(1) \end{pmatrix}^T$ . Тогда краевые условия во всех вершинах для сопряженной системы (5.5) можно получить согласно (3.6) из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} & (\check{C}_1)^T (\widehat{C}_1^{-1})^T \psi_1^{1,2}(0) = \psi_2^{1,2}(0), \\ & (\check{C}_2)^T (\widehat{C}_2^{-1})^T \begin{pmatrix} -\psi_1^{2,4}(0) \\ \psi_2^{1,2}(1) \\ \psi_2^{3,2}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_2^{2,4}(0) \\ \psi_1^{1,2}(1) \\ \psi_1^{3,2}(1) \end{pmatrix}, \quad (\check{C}_2)^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ & (\widehat{C}_2^{-1})^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\check{C}_3)^T (\widehat{C}_3^{-1})^T \psi_1^{2,3}(0) = \psi_2^{2,3}(0), \\ & (\check{C}_4)^T (\widehat{C}_4^{-1})^T \psi_1^{4,2}(1) = \psi_2^{4,2}(1). \end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$(5.6) \quad \begin{aligned} & \psi_2^{1,2}(0) = 0, \quad \psi_2^{2,3}(0) = 0, \quad \psi_2^{4,2}(1) = 0, \\ & -\psi_2^{1,2}(1) - \psi_2^{3,2}(1) = -\psi_2^{2,4}(0), \quad -\psi_1^{2,4}(0) = \psi_1^{1,2}(1), \quad -\psi_1^{2,4}(0) = \psi_1^{3,2}(1). \end{aligned}$$

Градиент функционала согласно (3.2)–(3.4) определяется формулами:

$$(5.7) \quad \begin{aligned} & \text{grad}_{w^{3,2}} \mathfrak{F}(w, v, \xi) = -\psi^{3,2}(\xi^{3,2}), \\ & \text{grad}_{w^{2,4}} \mathfrak{F}(w, v, \xi) = \psi^{2,4}(\xi^{2,4}), \\ & \text{grad}_{v^1} \mathfrak{F}(w, v) = -\psi_1^{1,2}(0), \\ & \text{grad}_{v^2} \mathfrak{F}(w, v) = (\widehat{C}_2^{-1})^T \begin{pmatrix} -\psi_1^{2,4}(0) \\ \psi_2^{1,2}(1) \\ \psi_2^{3,2}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_2^{1,2}(1) + \psi_2^{3,2}(1) \\ \psi_2^{1,2}(1) \\ -\psi_1^{2,4}(0) \end{pmatrix}, \\ & \text{grad}_{v^3} \mathfrak{F}(w, v) = -\psi_1^{2,3}(0), \\ & \text{grad}_{\xi^{3,2}} \mathfrak{F}(w, v, \xi) = -w^{3,2} \frac{d\psi^{3,2}(x)}{dx} \Big|_{x=\xi^{3,2}}, \\ & \text{grad}_{\xi^{2,4}} \mathfrak{F}(w, v, \xi) = w^{2,4} \frac{d\psi^{2,4}(x)}{dx} \Big|_{x=\xi^{2,4}}. \end{aligned}$$

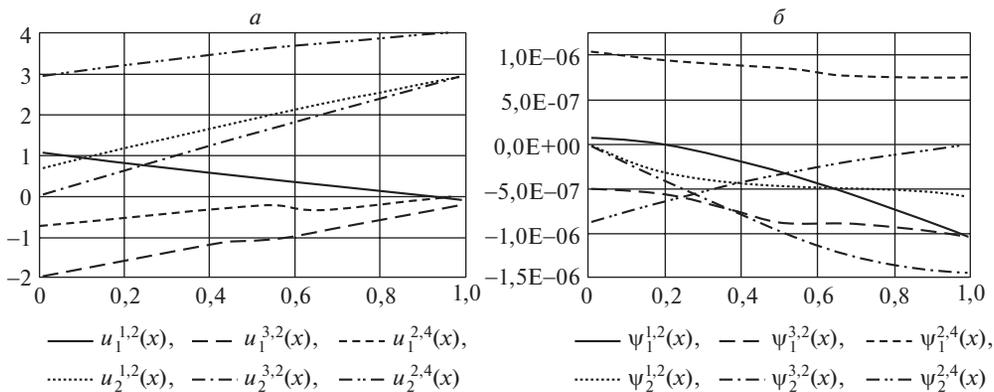


Рис. 4. Графики функций, полученные в результате решения задачи (5.1)–(5.4).

Для решения прямой и сопряженной краевых задач использовался метод прогонки, основанный на теореме 1. Задачи Коши (5.1), (5.2) и (5.5), (5.6) решались методом Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом  $h = 0,01$  [30]. Для аппроксимации  $\delta(\cdot)$ -функции Дирака использовалась функция Гаусса

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\xi^{ki})^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma = 2h \text{ [21, 31].}$$

В таблице приведены значения оптимальных параметров  $v_*$ , полученные методом проекции градиента для четырех различных начальных значений параметров  $v^0$ .

На рис. 4, а и 4, б приведены графики соответственно решения прямой и сопряженных задач для полученного значения параметров  $v_* = (w_*, v_*, \xi_*)$  методом проекции градиента.

**Таблица.** Результаты численного решения задачи (5.1)–(5.4)

	$v^0 = (w^0, v^0, \xi^0)$	$v_* = (w_*, v_*, \xi_*)$	$\mathfrak{Z}(v^0)$	$\mathfrak{Z}(v_*)$
1	$((0,2; 0,72);$ $(-1,7; (0; 1; -2,8); 0);$ $(0,2; 0,36))$	$(0,1998; 0,2999); (0,9999; (0,0001;$ $0; -1); -1,999); (0,5; 0,5999)$	0,7713	$2 \cdot 10^{-9}$
1	$((0,3; 0,8);$ $(-0,7; (0; 1,7; -2,7); 0,7);$ $(0,43; 0,5))$	$((0,2033; 0,2960); (1,0001; -0,0038;$ $-0,0002; -0,997); -2,0011);$ $(0,5001; 0,6001))$	1,2894	$1,4 \cdot 10^{-6}$
2	$((0,6; 0,12);$ $(-1; (0; 1,7; -2,7); 0,7);$ $(0,43; 0,5));$	$((0,2051; 0,3362); (0,9928; (-0,001;$ $0,0063; -1,008); -2,0013); (0,49943;$ $0,5957)$	1,5060	0,0001
3	$((0,28; 0,2);$ $(-1; (0; 1,7; 0,7); -2,7);$ $(0,43; 0,45));$	$((0,2002; 0,3005); (1,0002; (-0,0016;$ $-0,0001; -1) -1,9999); (0,4998;$ $0,5999))$	1,1639	$4,4 \cdot 10^{-8}$
4	$((0,28; 0,2);$ $(-1,8; (0; 1,7; 0); -2);$ $(0,3; 0,6))$	$((0,20004; 0,2999); (1; (0; 0,0002;$ $-0,9999) -2); (0,5; 0,59999))$	0,2221	$6,4 \cdot 10^{-10}$

## 6. Заключение

Исследуется задача оптимизации, описываемая системой дифференциальных уравнений с обыкновенными производными большой размерности. Система уравнений имеет блочную структуру, сами блоки связаны между собой в произвольном порядке лишь неразделенными начальными или конечными значениями фазовых переменных. В статье исследованы выпуклость функционала, его дифференцируемость, получены необходимые условия оптимальности как по параметрам, так и местам сосредоточения источников. Показано, что сопряженная задача имеет ту же специфику, что и прямая задача, а в выражениях компонент градиента функционала по параметрам источников участвуют краевые значения прямой и сопряженной переменных, определенных только в соответствующих вершинах и блоках. Это позволяет легко распараллеливать решение прямой и сопряженной краевых задач, что существенно повышает эффективность решение задачи оптимизации в целом.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы 1.* Пусть  $w_1^{ki}$ ,  $v_1^i$  и  $w_2^{ki}$ ,  $v_2^i$  – произвольные допустимые параметры из  $W^{ki} \times V^i$ , а  $u_1^{ki}(x)$  и  $u_2^{ki}(x)$  – соответствующие решения краевых задач (2.1), (2.2), т.е.

$$(II.1) \quad \frac{du_1^{ki}(x)}{dx} = A^{ki}(x)u_1^{ki}(x) + B^{ki}w_1^{ki}\delta(x - \xi^{ki}) + f^{ki}(x),$$

$$x \in (0, l^{ki}), \quad k \in I_i^+, \quad i \in I,$$

$$(II.2) \quad \sum_{s=1, k_s \in I_i^-}^{\bar{n}_i} g_j^{ik_s} u_1^{ik_s}(0) + \sum_{s=1, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_s i} u_1^{k_s i}(l^{k_s i}) = v_{1j}^i, \quad j = \overline{1, M_i}, \quad i \in I,$$

$$(II.3) \quad \frac{du_2^{ki}(x)}{dx} = A^{ki}(x)u_2^{ki}(x) + B^{ki}w_2^{ki}\delta(x - \xi^{ki}) + f^{ki}(x),$$

$$x \in (0, l^{ki}), \quad k \in I_i^+, \quad i \in I,$$

$$(II.4) \quad \sum_{s=1, k_s \in I_i^-}^{\bar{n}_i} g_j^{ik_s} u_2^{ik_s}(0) + \sum_{s=1, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_s i} u_2^{k_s i}(l^{k_s i}) = v_{2j}^i,$$

$$j = \overline{1, M_i}, \quad i \in I.$$

В силу выпуклости допустимого множества  $\Omega_{v^i}$  для произвольного  $\lambda \in [0; 1]$  имеет место  $w_1^{ki} = \lambda w_1^{ki} + (1 - \lambda)w_1^{ki} \in \Omega_{w^{ki}}$ . Обозначим  $u^{ki}(t) = \lambda u_1^{ki}(x) + (1 - \lambda)u_2^{ki}(x)$ .

Умножим обе части (II.1) на  $\lambda$ , а (II.3) — на  $(1 - \lambda)$ , почленно сложим полученные равенства и сгруппируем

$$\lambda \frac{du_1^{ki}(x)}{dx} + (1 - \lambda) \frac{du_2^{ki}(x)}{dx} = A^{ki}(x) \left[ \lambda u_1^{ki}(x) + (1 - \lambda)u_2^{ki}(x) \right] +$$

$$+ B^{ki} \left[ \lambda w_1^{ki} + (1 - \lambda)w_2^{ki} \right] \delta(x - \xi^{ki}) + \left[ \lambda f^{ki}(x) + (1 - \lambda)f^{ki}(x) \right], \quad x \in (0, l^{ki}).$$

Отсюда следует, что пара  $(u^{ki}(x), w^{ki})$  удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\frac{du^{ki}(x)}{dx} = A^{ki}(x)u^{ki}(x) + B^{ki}w^{ki}\delta(x - \xi^{ki}) + f^{ki}(x),$$

$$x \in (0, l^{ki}), \quad k \in I_i^+, \quad i \in I.$$

Умножая обе части (П.2) на  $\lambda$ , а (П.4) – на  $(1 - \lambda)$ , складывая и группируя, получим:

$$\sum_{s=1, k_s \in I_i^-}^{\bar{n}_i} g_j^{ik_s} \left[ \lambda u_1^{ik_s}(0) + (1 - \lambda) u_2^{ik_s}(0) \right] +$$

$$+ \sum_{s=1, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_s i} \left[ \lambda u_1^{k_s i}(l^{k_s i}) + (1 - \lambda) u_2^{k_s i}(l^{k_s i}) \right] =$$

$$= \lambda v_{1j}^i + (1 - \lambda) v_{2j}^i, \quad j = \overline{1, \bar{M}_i}, \quad i \in I.$$

Отсюда следует, что пара  $(u^{ki}(x), v^i)$  удовлетворяет условиям

$$\sum_{s=1, k_s \in I_i^-}^{\bar{n}_i} g_j^{ik_s} u^{ik_s}(0) + \sum_{s=1, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_s i} u^{k_s i}(l^{k_s i}) = v_j^i, \quad j = \overline{1, \bar{M}_i}, \quad i \in I.$$

В силу выпуклости функций  $f_0^{ki}(u^{ki}, x)$  и  $\Phi(\underline{u}, \bar{u}, w, v, \xi)$  по аргументам  $u, w, v$  имеем:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(w, v, \xi) &= \mathfrak{S}(\lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2, \lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2, \xi) = \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+}^{l^{ki}} \int_0^{l^{ki}} f_0^{ki}(\lambda u^{ki}(x) + (1 - \lambda)u^{ki}(x), x) dx + \\ (П.5) \quad &+ \Phi(\lambda \underline{u} + (1 - \lambda)\underline{u}, \lambda \bar{u} + (1 - \lambda)\bar{u}, \lambda w + (1 - \lambda)w, \lambda v + (1 - \lambda)v, \xi) \leq \\ &\leq \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \left( \lambda \int_0^{l^{ki}} f_0^{ki}(u^{ki}(x), x) dx + (1 - \lambda) \int_0^{l^{ki}} f_0^{ki}(u^{ki}(x), x) dx \right) + \\ &+ \lambda \Phi(\underline{u}, \bar{u}, w, v, \xi) + (1 - \lambda) \Phi(\underline{u}, \bar{u}, w, v, \xi) \leq \\ &\leq \lambda \mathfrak{S}(w, v, \xi) + (1 - \lambda) \mathfrak{S}(w, v, \xi). \end{aligned}$$

Отсюда следует выпуклость функционала  $\mathfrak{S}(w, v, \xi)$  по  $w$  и  $v$ . Ясно, что в случае если одна из функций  $f_0^{ki}(u^{ki}, x)$  и  $\Phi(\underline{u}, \bar{u}, w, v, \xi)$  будет строго выпуклой, то знак неравенства в (П.5) будет строгим. Следовательно, и функционал задачи (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) по  $w, v$  будет строго выпуклым. Теорема 1 доказана.

*Доказательство теоремы 2.* Используя метод приращения оптимизируемого вектора, докажем дифференцируемость и определим линейные части приращения функционала [10, 11].

В системе уравнений (2.1) введем обозначения для оптимизируемых слагаемых  $W^{ki} = W^{ki}(x; w^{ki}, \xi^{ki}) = w^{ki} \delta(x - \xi^{ki})$ ,  $(k, i) \in J$ ,  $W = W(x; w, \xi) = (W^{ki}(x, w^{ki}, \xi^{ki}) : (k, i) \in J)$  и запишем систему (2.1) так

$$\frac{du^{ki}(x)}{dx} = A^{ki}(x)u^{ki}(x) + B^{ki}W^{ki}(x; w^{ki}, \xi^{ki}) + f^{ki}(x), \quad (k, i) \in J.$$

Пусть оптимизируемая тройка параметров  $v = (w, v, \xi)$  получила приращение  $\Delta v = (\Delta w, \Delta v, \Delta \xi)$ . Обозначим:  $\tilde{v} = v + \Delta v$ ,  $\tilde{w} = w + \Delta w$ ,  $\tilde{v} = v + \Delta v$ ,  $\tilde{\xi} = \xi + \Delta \xi$ .

При этом получают приращения функция  $W(x; w, \xi)$  и решение краевой задачи (2.1), (2.2):

$$\Delta W(x; w, \xi) = W(x; w + \Delta w, \xi + \Delta \xi) - W(x; w, \xi),$$

$$\Delta u^{ki}(x; v) = u^{ki}(x; v + \Delta v) - u^{ki}(x; v) = \tilde{u}^{ki}(x; \tilde{v}) - u^{ki}(x; v), \quad (k, i) \in J,$$

где  $u^{ki}(x; v)$  и  $\tilde{u}^{ki}(x; \tilde{v})$ ,  $(k, i) \in J$  – решения краевых задач (2.1), (2.2) при оптимизируемых параметрах соответственно  $v$  и  $\tilde{v} = v + \Delta v$ .

Несложно показать, что  $\Delta u^{ki}(x; v)$ ,  $(k, i) \in J$  являются решениями следующей системы краевых задач:

$$(II.6) \quad \frac{d\Delta u^{ki}(x)}{dx} = A^{ki}(x)\Delta u^{ki}(x) + B^{ki}\Delta W^{ki}(x; w^{ki}, \xi^{ki}), \quad (k, i) \in J,$$

$$(II.7) \quad \sum_{s=1, k_s \in I_i^-}^{n_i} g_j^{ik_s} \Delta u^{ik_s}(0) + \sum_{s=1, k_s \in I_i^+}^{\bar{n}_i} q_j^{k_s i} \Delta u^{k_s i}(l^{k_s i}) = \Delta v_j^i, \\ j = \overline{1, M_i}, \quad i \in I.$$

Тогда для приращения функционала (2.5) будем иметь:

$$(II.8) \quad \Delta \mathfrak{S}(w, v, \xi) = \mathfrak{S}(\hat{w}, \hat{v}, \hat{\xi}) - \mathfrak{S}(w, v, \xi) = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \int_0^{l^{ki}} \frac{\partial f_0^{ki}}{\partial u^{ki}} \Delta u^{ki}(x) + \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{u}} \Delta \underline{u} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}} \Delta \bar{u} + \frac{\partial \Phi}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Delta \xi + \eta,$$

$$(II.9) \quad \eta = o \left( \|\Delta u(x)\|_{L_2^M[0, l]}, \|\Delta \underline{u}\|_{\mathbb{R}^n}, \|\Delta \bar{u}\|_{\mathbb{R}^{\bar{n}}}, \|\Delta w\|_{\mathbb{R}^\mu}, \|\Delta \xi\|_{\mathbb{R}^{\bar{m}}}, \|\Delta v\|_{\mathbb{R}^M} \right).$$

Здесь обозначено:  $f_0^{ki} = f_0^{ki}(u^{ki}(x), x)$ ,  $\Phi = \Phi(\underline{u}, \bar{u}, w, v, \xi)$ ,  $\eta$  – остаточный член в соответствующих пространствах функций и конечномерных векторов.

Как известно из теории дифференциальных уравнений [24], при сделанных предположениях на данные, участвующие в задаче, имеет место оценка:

$$\|\Delta u(x)\|_{L_2^M[0, l]} \leq O(\|\Delta w\|_{\mathbb{R}^\mu}, \|\Delta \xi\|_{\mathbb{R}^{\bar{m}}}, \|\Delta v\|_{\mathbb{R}^M}),$$

а следовательно, имеют место оценки:

$$\begin{aligned}\|\Delta \underline{u}\|_{\mathbb{R}^{\underline{n}}} &= \|\Delta u(0)\|_{\mathbb{R}^{\underline{n}}} \leq O(\|\Delta w\|_{\mathbb{R}^{\mu}}, \|\Delta \xi\|_{\mathbb{R}^{\bar{m}}}, \|\Delta v\|_{\mathbb{R}^M}), \\ \|\Delta \bar{u}\|_{\mathbb{R}^{\bar{n}}} &= \|\Delta u(l)\|_{\mathbb{R}^{\bar{n}}} \leq O(\|\Delta w\|_{\mathbb{R}^{\mu}}, \|\Delta \xi\|_{\mathbb{R}^{\bar{m}}}, \|\Delta v\|_{\mathbb{R}^M}).\end{aligned}$$

Тогда из (П.9) имеем основную оценку

$$\eta = o(\|\Delta w\|_{\mathbb{R}^{\mu}}, \|\Delta \xi\|_{\mathbb{R}^{\bar{m}}}, \|\Delta v\|_{\mathbb{R}^M}),$$

откуда следует дифференцируемость функционала  $\mathfrak{F}(w, v, \xi)$  по всем своим аргументам.

Теперь получим формулы для компонентов градиента функционала задачи по  $w, v, \xi$ . Для этого перенесем правые части уравнений (П.6) влево и умножим равенства на пока произвольные непрерывно дифференцируемые по своим аргументам  $\aleph$ -мерные вектор-функции  $\psi^{ki}(x) \in \mathbb{R}^{\aleph}$ ,  $x \in (0, l^{ki})$ ,  $k \in I_i^+$ ,  $i \in I$ . Просуммируем полученные выражения, равные нулю, и проинтегрируем эту сумму по частям:

$$\begin{aligned}(П.10) \quad 0 &= \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \int_0^{l^{ki}} \left[ (\psi^{ki}(x))^T \left( \frac{d\Delta u^{ki}(x)}{dx} - A^{ki}(x)\Delta u^{ki}(x) - B^{ki}\Delta W^{ki}(x, \Delta w, \Delta \xi) \right) \right] dx = \\ &= \sum_{i \in I} \left\{ \left[ \sum_{k \in I_i^+} (\psi^{ki}(l^{ki}))^T \Delta u^{ki}(l^{ki}) - \sum_{k \in I_i^-} (\psi^{ik}(0))^T \Delta u^{ik}(0) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k \in I_i^+} \int_0^{l^{ki}} \left[ \left( \left( \frac{d\psi^{ki}(x)}{dx} \right)^T + (\psi^{ki}(x))^T A^{ki}(x) \right) \Delta u^{ki}(x) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\psi^{ki}(x))^T B^{ki} \Delta W^{ki}(x, \Delta w, \Delta \xi) \right] dx \right\}.\end{aligned}$$

Прибавим правую часть (П.10) к (П.8), группируя, получим:

$$\begin{aligned}(П.11) \quad \Delta \mathfrak{F}(w, v, \xi) &= \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \int_0^{l^{ki}} \left\{ \left[ \frac{\partial f_0^{ki}}{\partial u^{ki}} - \left( \frac{d\psi^{ki}(x)}{dx} \right)^T - (\psi^{ki}(x))^T A^{ki}(x) \right] \Delta u^{ki}(x) - \right. \\ &\quad \left. - (\psi^{ki}(x))^T B^{ki} \Delta W^{ki}(x, \Delta w, \Delta \xi) \right\} dx + \\ &\quad + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{u}} - (\underline{\psi})^T \right) \Delta \underline{u} + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}} + (\bar{\psi})^T \right) \Delta \bar{u} + \frac{\partial \Phi}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Delta \xi + \eta,\end{aligned}$$

где  $\underline{\psi} = (\underline{\psi}^i : i \in I) \in \mathbb{R}^{\underline{n}}$ ,  $\bar{\psi} = (\bar{\psi}^i : i \in I) \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ ,  $\underline{\psi}^i = (\psi^{ik_1}(0), \dots, \psi^{ik_{n_i}}(0))^T$ ,  $\bar{\psi}^i = (\psi^{k_1 i}(l^{k_1 i}), \dots, \psi^{k_{n_i} i}(l^{k_{n_i} i}))^T$ .

Преобразуем второе слагаемое в подынтегральном выражении (П.11) без учета членов меньше первого порядка малости:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \int_0^{l^{ki}} (\psi^{ki}(x))^T B^{ki} \Delta W^{ki}(x, \Delta w, \Delta \xi) dx = \\
& = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \int_0^{l^{ki}} (\psi^{ki}(x))^T B^{ki} \left[ (w^{ki} + \Delta w^{ki}) \delta(x - (\xi^{ki} + \Delta \xi^{ki})) - w^{ki} \delta(x - \xi^{ki}) \right] dx = \\
& = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \left( \int_0^{l^{ki}} (\psi^{ki}(x))^T \delta(x - (\xi^{ki} + \Delta \xi^{ki})) dx \right) B^{ki} (w^{ki} + \Delta w^{ki}) - \\
& \quad - \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \left( \int_0^{l^{ki}} (\psi^{ki}(x))^T \delta(x - \xi^{ki}) dx \right) B^{ki} w^{ki} = \\
& = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} (\psi^{ki}(\xi^{ki} + \Delta \xi^{ki}))^T B^{ki} (w^{ki} + \Delta w^{ki}) - \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} (\psi^{ki}(\xi^{ki}))^T B^{ki} w^{ki} = \\
& = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} (\psi^{ki}(\xi^{ki} + \Delta \xi^{ki}))^T B^{ki} w^{ki} + \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} (\psi^{ki}(\xi^{ki} + \Delta \xi^{ki}))^T B^{ki} \Delta w^{ki} - \\
& \quad - \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} (\psi^{ki}(\xi^{ki}))^T B^{ki} w^{ki} = \\
& = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \left( \frac{d\psi^{ki}(x)}{dx} \Big|_{x=\xi^{ki}} \right)^T B^{ki} w^{ki} \Delta \xi^{ki} + \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} (\psi^{ki}(\xi^{ki}))^T B^{ki} \Delta w^{ki}.
\end{aligned}$$

Подставив полученное выражение в (П.11), после группировки получим

$$\begin{aligned}
& \Delta \mathfrak{S}(w, v, \xi) = \\
& = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \int_0^{l^{ki}} \left[ \frac{\partial f_0^{ki}}{\partial u^{ki}} - \left( \frac{d\psi^{ki}(x)}{dx} \right)^T - (\psi^{ki}(x))^T A^{ki}(x) \right] \Delta u^{ki}(x) dx - \\
(П.12) \quad & - \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \left[ \left( \frac{d\psi^{ki}(x)}{dx} \Big|_{x=\xi^{ki}} \right)^T B^{ki} w^{ki} - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^{ki}} \right] \Delta \xi^{ki} - \\
& - \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \left[ (\psi^{ki}(\xi^{ki}))^T B^{ki} - \frac{\partial \Phi}{\partial w^{ki}} \right] \Delta w^{ki} + \sum_{i \in I} \frac{\partial \Phi}{\partial v^i} \Delta v^i + \\
& + \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{u}} - (\underline{\psi})^T \right) \Delta \underline{u} + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}} + (\bar{\psi})^T \right) \Delta \bar{u} \right] + \eta.
\end{aligned}$$

Займемся выражением в последней квадратной скобке.

Для простоты изложения приводимых далее выкладок вместо матричных и векторных операций будем использовать и покомпонентную их запись. Условия (П.7) запишем в виде

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} g_{11}^{ik_1} \cdots g_{1\aleph}^{ik_1} & \cdots & g_{1\underline{n}_i}^{ik_{\underline{n}_i}} \cdots g_{1\underline{n}_i \cdot \aleph}^{ik_{\underline{n}_i}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{M_i,1}^{ik_1} \cdots g_{M_i,\aleph}^{ik_1} & \cdots & g_{M_i,\underline{n}_i}^{ik_{\underline{n}_i}} \cdots g_{M_i,\underline{n}_i \cdot \aleph}^{ik_{\underline{n}_i}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \underline{u}_1^i \\ \cdots \\ \Delta \underline{u}_{\underline{n}_i \cdot \aleph}^i \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} q_{11}^{ik_1} \cdots q_{1\aleph}^{ik_1} & \cdots & q_{1\overline{n}_i}^{ik_{\overline{n}_i}} \cdots q_{1\overline{n}_i \cdot \aleph}^{ik_{\overline{n}_i}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{M_i,1}^{ik_1} \cdots q_{M_i,\aleph}^{ik_1} & \cdots & q_{M_i,\overline{n}_i}^{ik_{\overline{n}_i}} \cdots q_{M_i,\overline{n}_i \cdot \aleph}^{ik_{\overline{n}_i}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \overline{u}_1^i \\ \cdots \\ \Delta \overline{u}_{\overline{n}_i \cdot \aleph}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta v_1^i \\ \cdots \\ \Delta v_{M_i}^i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Используя обозначения, сделанные выше, соотношения (П.7) примут вид:

$$(П.13) \quad \begin{pmatrix} c_{1,1}^i & \cdots & c_{1,(n_i \cdot \aleph)}^i \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{M_i,1}^i & \cdots & c_{M_i,(n_i \cdot \aleph)}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u_1^i \\ \cdots \\ \Delta u_{n_i \cdot \aleph}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta v_1^i \\ \cdots \\ \Delta v_{M_i}^i \end{pmatrix}, \quad i \in I,$$

или в матричной форме:

$$C_i \Delta u^i = \Delta v^i, \quad i \in I.$$

Тогда (П.13) можно записать так:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \widehat{c}_{1,1}^i & \cdots & \widehat{c}_{1,M_i}^i \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \widetilde{c}_{M_i,1}^i & \cdots & \widetilde{c}_{M_i,M_i}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \widehat{u}_1^i \\ \cdots \\ \Delta \widehat{u}_{M_i}^i \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} \widetilde{c}_{1,1}^i & \cdots & \widetilde{c}_{1,(n_i \cdot \aleph - M_i)}^i \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \widetilde{c}_{M_i,1}^i & \cdots & \widetilde{c}_{M_i,(n_i \cdot \aleph - M_i)}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \widetilde{u}_1^i \\ \cdots \\ \Delta \widetilde{u}_{(n_i \cdot \aleph) - M_i}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta v_1^i \\ \cdots \\ \Delta v_{M_i}^i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

или в виде:

$$(П.14) \quad \widehat{C}_i \Delta \widehat{u}^i + \widetilde{C}_i \Delta \widetilde{u}^i = \Delta v^i, \quad i \in I.$$

Учитывая (П.13),  $\widehat{C}_i$  имеет обратную матрицу. Тогда из (П.14) имеем:

$$(П.15) \quad \Delta \widehat{u}^i = - \left( \widehat{C}_i \right)^{-1} \widetilde{C}_i \Delta \widetilde{u}^i + \widehat{C}_i^{-1} \Delta v^i, \quad i \in I.$$

Согласно (П.15) примем  $M_i$ -мерный вектор приращений

$$\Delta \widehat{u}^i = (\Delta \widehat{u}_1^i, \dots, \Delta \widehat{u}_{M_i}^i)^T = \left( \Delta u_{\mu_1}^i, \dots, \Delta u_{\mu_{M_i}}^i \right)^T$$

зависимым, а  $(n_i \aleph - M_i)$ -мерный вектор

$$\Delta \tilde{u}^i = (\Delta \tilde{u}_1^i, \dots, \Delta \tilde{u}_{n_i \aleph - M_i}^i)^T = \left( \Delta u_{\mu_1}^i, \dots, \Delta u_{\mu_{n_i \aleph - M_i}}^i \right)^T$$

— независимым. Учтем (П.15) в выражении последней квадратной скобки (П.12):

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in I} \left( \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{u}^i} - (\underline{\psi}^i)^T \right) \Delta \underline{u}^i + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{u}^i} + (\bar{\psi}^i)^T \right) \Delta \bar{u}^i \right) = \\ & = \sum_{i \in I} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u^i} + (\psi^i)^T \right) \Delta u^i = \\ & = \sum_{i \in I} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \widehat{u}^i} + (\widehat{\psi}^i)^T \right) \Delta \widehat{u}^i + \sum_{i \in I} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \widetilde{u}^i} + (\widetilde{\psi}^i)^T \right) \Delta \widetilde{u}^i = \\ & = \sum_{i \in I} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \widetilde{u}^i} + (\widetilde{\psi}^i)^T \right) \Delta \widetilde{u}^i - \sum_{i \in I} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \widehat{u}^i} + (\widehat{\psi}^i)^T \right) \widehat{C}_i^{-1} \widetilde{C}_i \Delta \widetilde{u}^i + \\ & \quad + \sum_{i \in I} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \widehat{u}^i} + (\widehat{\psi}^i)^T \right) \widehat{C}_i^{-1} \Delta v^i. \end{aligned}$$

Учитывая это равенство в (П.12), для приращения функционала окончательно получим:

$$\begin{aligned} & \Delta \mathfrak{F}(w, v, \xi) = \\ & = \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \int_0^{l^{ki}} \left[ \frac{\partial f_0^{ki}}{\partial u^{ki}} - \left( \frac{d\psi^{ki}(x)}{dx} \right)^T - (\psi^{ki}(x))^T A^{ki}(x) \right] \Delta u^{ki}(x) dx - \\ & \quad - \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \left[ \left( \frac{d\psi^{ki}(x)}{dx} \Big|_{x=\xi^{ki}} \right)^T B^{ki} w^{ki} - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^{ki}} \right] \Delta \xi^{ki} - \\ (П.16) \quad & \quad - \sum_{i \in I} \sum_{k \in I_i^+} \left[ (\psi^{ki}(\xi^{ki}))^T B^{ki} - \frac{\partial \Phi}{\partial w^{ki}} \right] \Delta w^{ki} + \\ & \quad + \sum_{i \in I} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial v^i} + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \widehat{u}^i} + (\widehat{\psi}^i)^T \right) \widehat{C}_i^{-1} \right] \Delta v^i + \\ & \quad + \sum_{i \in I} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \widetilde{u}^i} + (\widetilde{\psi}^i)^T - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \widehat{u}^i} + (\widehat{\psi}^i)^T \right) \widehat{C}_i^{-1} \widetilde{C}_i \right] \Delta \widetilde{u}^i + \eta. \end{aligned}$$

Пользуясь произвольностью вектор-функций  $\psi^{ki}(x) \in \mathbb{R}^{\aleph}$ ,  $k \in I_i^+$ ,  $i \in I$ , потребуем от них равенства нулю выражений в квадратных скобках (множителей  $\Delta u^{ki}$  и  $\Delta \widetilde{u}^i$ ). Получим краевую задачу (3.5), (3.6) относительно вектор-функций  $\psi^{ki}(x)$ ,  $k \in I_i^+$ ,  $i \in I$ , которую будем называть сопряженной относительно задачи (2.1), (2.2). Искомые компоненты градиента функционала

$\mathfrak{Z}(w, \xi, v)$  будут определяться линейными частями приращения функционала (П.16) по приращениям  $\Delta w^{ki}$ ,  $\Delta \xi^{ki}$ ,  $\Delta v^i$  по формулам (3.2), (3.3), (3.4).

Таким образом, можно считать доказанной теорему 2.

*Доказательство теоремы 3* следует из дифференцируемости функционала задачи, компактности допустимых множеств  $\Omega_{w^{ki}} \times \Omega_{\xi^{ki}} \times \Omega_{v^i}$ ,  $k \in I_i^+$ ,  $i \in I$ , конечномерности оптимизируемого вектора параметров задачи и необходимых условий оптимальности в вариационной форме в задачах оптимизации [10, 11].

*Доказательство теоремы 4.* Пусть  $\alpha_j^{id}(x)$ ,  $\gamma_j^i(x)$  – пока произвольные дифференцируемые функции, удовлетворяющие (4.5) и условию (4.6). Продифференцируем условие (4.6), учитывая  $(i, d)$ -ю подсистему уравнений из (2.1). После группировки соответствующих слагаемых, при  $d \in I_i^-$  получим

$$(П.17) \quad \left[ \frac{d\alpha_j^{id}(x)}{dx} + \alpha_j^{id}(x)A^{id}(x) \right] u^{id}(x) + \\ + \left[ -\frac{d\gamma_j^{id}(x)}{dx} + \alpha_j^{id}(x) \left( f^{id}(x) + B^{ki}w^{ki}\delta(x - \xi^{ki}) \right) \right] = 0.$$

Учитывая произвольность функций  $\alpha_j^{id}(x)$ ,  $\gamma_j^i(x)$  и необходимость выполнения равенства (П.9) для всех решений  $u^{id}(x)$   $(i, d)$ -й подсистемы уравнений (2.1), потребуем выполнения равенства нулю выражений в квадратных скобках. Отсюда следует, что  $\alpha_j^{id}(x)$ ,  $\gamma_j^i(x)$  являются решением задач Коши (4.5)–(4.6). Теорема 4 доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lions J.L. Controle des Systemes Distributes Singuliers, Gauthier-Villars, Paris, 1987.
2. Миллер Б.М., Рубинович Е.Я. Задача импульсного управления с двумя типами импульсных воздействий // АИТ. 2009. № 11. С. 34–54.  
Miller B.M., Rubinovich E.Y. Impulsive Control with Impulsive Actions of Two Types // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 11. P. 1795–1813.
3. Миллер Б.М., Рубинович Е.Я. Оптимизация динамических систем с импульсным управлением. М.: Наука, 2005.
4. Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R. Optimal Control of Sources on Some Classes of Functions // Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research. 2014. V. 63. No. 7. P. 1135–1152.
5. Aida-zade K.R. Investigation of Non-Linear Optimization Problems of Networks Structure // Autom. Remote Control. 1990. V. 51. No. 2. P. 135–145.  
Айда-заде К.Р. Исследование нелинейных оптимизационных задач сетевой структуры // АИТ. 1990. № 2. С. 3–14.
6. Айда-заде К.Р., Али-заде Р.И., Новрузбеков И.Г., Калаушин М.А. Декомпозиционный метод анализа и синтеза плоских механизмов // Механика машин. 1980. Вып. 57. С. 26–30.

7. Цурков В.И. Декомпозиция в задачах большой размерности. М.: Наука, 1981.
8. Geiser J. Decomposition Methods for Differential Equations: Theory and Applications. CRC Press, Taylor and Francis Group, 2009.
9. Черноусько Ф.Л. Оптимальное перемещение многозвенной системы в среде с сопротивлением // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17. № 2. С. 240–255.
10. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс. 2002.
11. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. 3-е изд. М.: Наука, 2019.
12. Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R. Solving Systems of Diferential Equations of Block Structure with Nonseparated Boundary Conditions // J. of Applied and Industrial Mathem. 2015. V. 9. No. 1. P. 1–10.
13. Aida-zade K.R., Ashrafova Y.R. Calculation of the State of a System of Discrete Linear Processes Connected by Nonseparated Boundary Conditions // J. of Applied and Industrial Mathematics. 2016. V. 10. No. 4. P. 1–13.
14. Ashrafova Y.R. On One Method of Block Transfer of Conditions for a System of Three-Step Discrete Processes Connected Only by Boundary Conditions // Informatics and Control Problems. 2019. V. 39. No. 2. P. 48–56.
15. Абрамов А.А. О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) // Журн. вычисл. матем. и математ. физики. 1961. Т. 1. № 3. С. 542–545.
16. Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On the Solution of Boundary Value Problems with Nonseparated Multipoint and Integral Conditions // Diff. Equations. 2013. V. 49. No. 9. P. 1114–1125.
17. Воеводин А.Ф., Шугрин С.М. Методы решения одномерных эволюционных систем, Новосибирск: ВО Наука, 1993.
18. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
19. Абрамов А.А., Бураго Н.Г. и др. Пакет прикладных программ для решения линейных двухточечных краевых задач // Сообщения по программному обеспечению ЭВМ. М.: ВЦ АН СССР, 1982.
20. Быков А.Н., Ерофеев А.М., Сизов Е.А., Федоров А.А. Метод распараллеливания прогонки на гибридных ЭВМ // Вычислительные методы и программирование. 2013. № 14. С. 43–47.
21. Aida-zade K.R., Bagirov A.H. On the Problem of Placement of Oil Wells and Control of Their Flow-rates // Autom. Remote Control. 2006. No. 1. P. 52–61.  
Айда-заде К.Р., Багиров А.Г. О задаче размещения нефтяных скважин и управления их дебитами // АИТ. 2006. № 1. С. 52–62.
22. Aida-zade K.R., Ashrafova E.R. Numerical Solution to the Problem of Determination of Places and Volume of the Fluid Leakage under Non-stationary Regimes in a Pipeline Network // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2017. V. 57. No. 12. P. 1919–1934.
23. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.
24. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2005.
25. Васильева О.О., Мизуками К. Динамические процессы, описываемые краевой задачей: необходимые условия оптимальности и методы решения // Изв. АН. Теория и системы управления. 2000. № 1. С. 95–100.
26. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление системой с промежуточными условиями // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 2. С. 215–222.

27. *Vasilieva O.O., Mizukami K.* Optimality Criterion for Singular Controllers: Linear Boundary Conditions // J. Math Anal. and Appl. 1997. V. 213. No. 2. P. 620–641.
28. *Sharifov Y.A., Mammadova N.B.* Optimal Control Problem Described by Impulsive Differential Equations With Nonlocal Boundary Conditions // Differ. Equations. 2014. V. 50. No. 3. P. 403–411.
29. *Abdullayev V.M.* Numerical Solution to Optimal Control Problems with Multipoint and Integral Conditions // Proc. of the Institute of Mathematics and Mechanics. 2018. V. 44. No. 2. P. 171–186.
30. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука. 1983.
31. *Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М.* Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1980.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.*

Поступила в редакцию 07.06.2020

После доработки 13.02.2021

Принята к публикации 16.03.2021

# Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2021 г. С.А. АГЕЕВ, д-р техн. наук (serg123\_61@mail.ru)  
(ОАО “Радиоавионика”, Санкт-Петербург),  
А.А. ПРИВАЛЮВ, д-р воен. наук (apivalov@inbox.ru)  
(Петербургский государственный университет путей сообщения  
Императора Александра I),  
В.В. КАРЕТНИКОВ, д-р техн. наук (spguwc-karetnikov@yandex.ru),  
А.А. БУЦАНЕЦ, канд. техн. наук (butsanetsaa@gumrf.ru)  
(ФГБОУ ВО “ГУМРФ им. адмирала С.О. Макарова”, Санкт-Петербург)

## АДАПТИВНЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ХАРАКТЕРИСТИК ТРАФИКА В ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ МУЛЬТИСЕРВИСНЫХ СЕТЯХ СВЯЗИ НА ОСНОВЕ ПРОЦЕДУРЫ НЕЧЕТКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Предложены адаптивный метод и реализующий его векторный алгоритм оценки основных характеристик трафика в высокоскоростных мультисервисных сетях связи. Адаптивный алгоритм оценки характеристик сетевого трафика функционирует в режиме реального времени. В основу разработанного метода положен принцип условно нелинейной Парето-оптимальной фильтрации, в котором оценка неизвестных параметров трафика производится в два этапа. На первом этапе оценивается значение функции текущего прогноза от неизвестных параметров трафика, на втором этапе производится коррекция полученного прогноза. Анализ результатов исследования предложенных метода и алгоритма оценки основных характеристик трафика в высокоскоростных мультисервисных сетях связи показал их высокую эффективность. Средняя относительная погрешность полученных оценок не превышает 10% от текущих значений оцениваемых характеристик трафика.

*Ключевые слова:* высокоскоростные мультисервисные сети связи, псевдоградиентный алгоритм, условно нелинейная Парето-оптимальная фильтрация, нечеткий логический вывод Такаги–Сугено, сети связи нового поколения.

DOI: 10.31857/S0005231021070072

### 1. Введение

Современный этап развития промышленности, бизнеса, транспортных и логистических систем характеризуется успешным внедрением технологий высокоскоростных телекоммуникаций и сетей связи нового поколения (NGN). Достигнутые успехи в развитии этих технологий привели к созданию и реализации концепции мультисервисной сети связи (МСС), ядром которой являются пакетные IP-сети, интегрирующие и предоставляющие пользователям различные услуги и сервисы связи [1, 2].

Перечень основных услуг и сервисов, предоставляемых пользователям с помощью МСС, хорошо известен [3, 4]. Однако появление большого количества дополнительных сервисов у МСС делает достаточно острой проблему управления такой сетью. Актуальность этой проблемы приобретает особую важность по следующим причинам:

- необходимость обеспечения заданного качества предоставляемых услуг связи (QoS) пользователям [4], включая обеспечение заданного уровня сетевой и информационной безопасности [5], при реализации процедур динамического изменения топологии сети МСС;

- необходимость обеспечения QoS при добавлении или исключении из сети различного, априори неопределенного, числа абонентов;

- необходимость обеспечения сетевой управляемости при взаимодействии и сопряжении МСС друг с другом и т.д.

Трафик в МСС является достаточно разнообразным [6–8]. При этом заданные требования к качеству услуг и сервисов должны выполняться полностью. Однако существуют объективные трудности в построении системы управления МСС, которые обусловлены сложностью структуры МСС и ее большим пространственным размахом, а также необходимостью быстрого и качественного анализа большого количества различных сетевых и информационных характеристик и параметров.

Следовательно, оперативное оценивание основных параметров высокоскоростного сетевого трафика с априори неизвестными и динамично изменяющимися характеристиками является одной из ключевых задач управления МСС и представляет собой актуальную научную проблему.

## 2. Анализ методов оценки трафика в высокоскоростных МСС

В [6–8] отмечается, что трафик для различных приложений в МСС может быть аппроксимирован с помощью вероятностных распределений, основными из которых являются распределения Пуассона, Парето, Вейбулла, логарифмически нормальное и экспоненциальное распределения. Например, если трафик является аудио или видео, то он обладает эффектом самоподобия, и для его адекватного описания применяется распределение Парето. Если трафик сформирован протоколами SMTP/TCP, то для его описания применяются распределение Пуассона или экспоненциальное распределение. Перечень законов распределения трафика в МСС для различных приложений можно найти в [3, 6, 7].

Проще всего решать задачу оценивания текущих значений параметров трафика, если он является стационарным случайным процессом. Однако во многих публикациях, например, в [7–9], отмечается, что трафик в МСС является нестационарным по своей природе, а математические модели, адекватно описывающие его поведение, являются нелинейными стохастическими моделями. Это обстоятельство существенно осложняет разработку и реализацию процедур оперативной оценки параметров и характеристик сетевого мультисервисного трафика с требуемым качеством в условиях априорной неопределенности.

Основными характеристиками мультисервисного трафика являются максимальное и минимальное значение его интенсивности, текущее значение математического ожидания, среднее квадратическое отклонение (СКО) и коэффициент вариации его интенсивности.

Известно [10], что при нелинейных моделях случайных процессов процедуры оценки их параметров также являются нелинейными. Применение процедур фильтрации, основанных на оценивании максимальной апостериорной плотности вероятности значений оцениваемых нестационарных параметров в условиях априорной параметрической и непараметрической неопределенностей, которые должны функционировать в режиме реального времени, вызывает значительные как методологические, так и вычислительные трудности [10–13].

Одним из конструктивных подходов к решению задачи оценки векторных параметров случайных процессов, при нелинейных моделях наблюдений, является метод условной нелинейной Парето-оптимальной фильтрации [11–13]. Суть данного подхода заключается в том, что оценка векторного неизвестного параметра производится в два этапа. На первом этапе вычисляется функция текущего прогноза оценок значений векторного параметра. На втором этапе с помощью корректирующих функций и полученной дополнительной апостериорной информации о значениях этих оценок производят их коррекцию. Выбор класса и вида функций оценки текущего прогноза, класса и вида корректирующих функций является достаточно свободным и определяется конкретной постановкой решаемой проблемы.

В данной статье на основе концепции условно нелинейной Парето-оптимальной фильтрации разработаны метод и алгоритм совместного оценивания текущего значения математического ожидания, СКО и коэффициента вариации интенсивности трафика МСС. Предлагается адаптацию корректирующих функций к неизвестным характеристикам интенсивности трафика МСС производить с помощью псевдоградиентных процедур, общая теория которых была заложена в публикациях [14, 15]. При этом регулирование параметров корректирующих функций в зависимости от значений оценок параметров трафика МСС производится с помощью нечеткого логического вывода Такаги–Сугено [16, 17] с учетом динамики изменения их значений.

### **3. Формулировка проблемы, теоретические основы, метод и алгоритм оценки характеристик трафика в высокоскоростных мультисервисных сетях связи**

Пусть наблюдения трафика МСС на соответствующем сетевом интерфейсе сетевого элемента, например маршрутизатора, представлены в виде случайной последовательности (СП)  $x(i)$ . Пусть СП  $x(i)$  задана в дискретные моменты времени  $t = i = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ , что соответствует реальной ситуации обработки трафика на вычислительных средствах. Пусть наблюдения СП  $x(i)$  описываются аддитивно-мультипликативной моделью в виде

$$(1) \quad x(i) = \theta(i) \cdot w(x(i-1)) + \xi(i),$$

где  $w(*)$  – некоторая случайная функция от наблюдений,  $\theta(i)$  – некоторая случайная величина, а  $\xi(i)$  – помеха наблюдений с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией. Также пусть СП  $x(i)$  имеет конечные математическое ожидание и дисперсию.

Необходимо построить векторную рекуррентную процедуру оценки значений математического ожидания СП  $x(i)$ , СКО СП и ее коэффициента вариации по критерию минимума среднего квадрата ошибки:

$$(2) \quad J(i) = \left\{ M(m(i) - \widehat{m}(i))^2 \rightarrow \min, \quad M(\sigma(i) - \widehat{\sigma}(i))^2 \rightarrow \min, \right. \\ \left. M(K_V(i) - \widehat{K}_V(i))^2 \rightarrow \min \right\},$$

где  $\widehat{m}(i)$ ,  $\widehat{\sigma}(i)$ ,  $\widehat{K}_V(i)$  – оценки математического ожидания, СКО и коэффициента вариации СП  $x(i)$  на шаге  $i$ , а  $m(i)$ ,  $\sigma(i)$ ,  $K_V(i)$  – их истинные значения на этом шаге.

Функция прогноза для текущего значения математического ожидания СП определяется как

$$(3) \quad \widehat{m}(i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(i-k), \quad i = 1, 2, \dots, n, \dots,$$

где  $N$  – размер скользящего окна. Следует отметить, что размер скользящего окна функций текущего прогноза выбирается относительно небольшим.

Далее, прогнозы оценок СКО и коэффициента вариации СП на шаге  $i$  также производятся в этом же скользящем окне и имеют вид

$$(4) \quad \widehat{\sigma}(i) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \left( \sum_{k=1}^N x^2(i-k) - \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(i-k) \right)^2 \right)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \dots, \\ \widehat{K}_V = \widehat{\sigma}(i) / \widehat{m}(i).$$

Без потери общности, дальнейшее подробное рассмотрение построения корректирующей процедуры проведем для компоненты значения оценки математического ожидания функционала (2) с последующим обобщением на векторный случай.

Следует отметить, что значение функционала  $J(i)$  может быть недоступно наблюдению, а доступна наблюдению только случайная реализация его градиента со случайной ошибкой

$$(5) \quad \nabla Q(\xi, \widehat{m}) = \nabla J(\widehat{m}) + \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где  $\xi$  – ошибка наблюдения градиента. Сделаем предположение о том, что  $\xi$  – центрированные, некоррелированные ошибки оценки градиента функционала качества. Минимизацию функционала (5) будем проводить с помощью рекуррентного алгоритма вида

$$(6) \quad \widehat{m}(i+1) = \widehat{m}(i) - \lambda_m(i+1) \nabla Q(\xi, \widehat{m}(i+1)),$$

где  $\nabla Q(\xi, \widehat{m}(i+1))$  – некоторое случайное направление движения в фазовом пространстве в точке  $\widehat{m}(i+1)$ ,  $\widehat{m}(i)$  – скорректированная оценка математического ожидания на предыдущем шаге,  $\{\lambda_m(i)\}$  – последовательность положительных чисел, которая для стационарной СП должна удовлетворять условиям [14]

$$(7) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_m(i) = \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_m(i) < \infty.$$

Эти числа называют коэффициентами шага алгоритма. В соответствии с [14, 15] вектор  $\nabla Q(\xi, \widehat{m}(i))$  называется псевдоградиентом в точке  $\widehat{m}(i)$ , если в этой точке выполняется условие

$$(8) \quad \nabla J(\widehat{m}(i-1)) \cdot M\{\nabla Q(\xi, \widehat{m}(i))\} \geq 0,$$

где  $M\{\ast\}$  – операция математического ожидания, т.е. вектор  $\nabla Q(\xi, \widehat{m}(i))$  в среднем составляет острый угол с вектором градиента функционала качества  $\nabla J(\widehat{m}(i-1))$ . Реализацию функционала качества в точке  $\widehat{m}(i+1)$  в соответствии с [8, 9, 14, 15] можно представить как

$$(9) \quad Q(\widehat{m}(i+1)) = \left(\widehat{m}(i+1) - \widehat{m}(i)\right)^2.$$

Тогда, после преобразований, рекуррентный псевдоградиентный алгоритм (ПГА) оценивания текущего значения математического ожидания с учетом знаков будет иметь вид

$$(10) \quad \widehat{\widehat{m}}(i+1) = \widehat{\widehat{m}}(i) + \lambda_m(i+1) \left(\widehat{m}(i+1) - \widehat{\widehat{m}}(i)\right).$$

Если плотность распределения значений СП  $\widehat{m}(i)p(\widehat{m})$  симметрична относительно математического ожидания, то возможно применение ПГА вида

$$(11) \quad \widehat{\widehat{m}}(i+1) = \widehat{\widehat{m}}(i) + \lambda_m(i+1) \varphi\left(\widehat{m}(i+1) - \widehat{\widehat{m}}(i)\right),$$

где в качестве функции  $\varphi(\ast)$  может быть использована неубывающая монотонная функция, например знаковая функция  $\varphi(\ast) = \text{sign}(\ast)$ . Применение данной функции позволяет повысить устойчивость ПГА к ошибкам оценки градиента функционала качества [14, 15].

Обобщением алгоритма (10) является векторный ПГА оценки параметров СП, имеющий вид

$$(12) \quad \widehat{\widehat{G}}(i+1) = \widehat{\widehat{G}}(i) + R(i+1) \times (\nabla Q(i+1)),$$

где  $\widehat{\widehat{G}}(i+1)$  – вектор оценок параметров СП на шаге  $i+1$ , представимый в виде

$$(13) \quad \widehat{\widehat{G}}(i+1) = \left[ \widehat{\widehat{m}}(i+1), \widehat{\widehat{\sigma}}(i+1), \widehat{\widehat{K}}_V(i+1) \right]^T.$$

Матрица  $R(i+1)$  является диагональной матрицей коэффициентов шага оцениваемых параметров.

Относительно алгоритмов (10), (11), (12) можно сформулировать *утверждения* о том, что:

1. *Данные алгоритмы являются псевдоградиентными алгоритмами.* Доказательство данного утверждения основано на корректной проверке условия (8). Следствием из этого утверждения является то обстоятельство, что данные процедуры обладают всеми свойствами ПГА [14, 15].

2. *Структура алгоритмов (10) и (12) оценки текущих значений математического ожидания, дисперсии и квадрата коэффициента вариации трафика МСС инвариантна относительно статистических характеристик СП  $x(i)$  с точностью, определяемой точностью идентификации своих параметров.* Доказательство данного утверждения основано на применении центральной предельной теоремы [10]. Следствием данного утверждения является то, что при любых вероятностных свойствах трафика структура алгоритма оценки его параметров постоянна, изменяться могут только параметры его настройки.

Для оценивания параметров нестационарных СП условие (7) ограничивает применение ПГА, так как ПГА должен отслеживать изменения значения параметров трафика, а не сходиться к определенным их значениям. Поэтому предлагается последовательность  $R(i)$  ограничить снизу постоянным значением. В результате выбора ограниченного коэффициента шага дисперсия оценки параметров СП также будет ограничена снизу. Следовательно, необходимо найти компромиссное решение между скоростью и точностью оценивания значений интенсивности СП [8, 9, 14, 15].

Очевидно, что модули градиентов компонент векторного функционала качества пропорциональны динамическим свойствам СП. Подобные зависимости носят характер трудноформализуемых задач, поэтому предлагается процедуру подстройки коэффициентов шага ПГА автоматизировать на основе метода нечеткого вывода Такаги–Сугено или на основе его частного вида – синглтонного метода [16, 17], имеющего вид

(14) ЕСЛИ

$$\langle \hat{G}(i) \in D1 \rangle \text{ И } \langle \nabla Q(i) \in D2 \rangle \text{ И } \langle \hat{\sigma}(i) \in D3 \rangle \text{ И } \langle \hat{K}_V(i) \in D4 \rangle, \\ \text{ТО } R(i+1) = R(z) \text{ И } N(i+1) = N_k.$$

Для реализации этих правил предварительно проводится обучение системы нечеткого логического вывода по экспериментальным данным, полученным на стадии ее проектирования, на тестовых СП, с известными статистическими параметрами [8, 9]. Увеличение размера скользящего окна, если возникает такая необходимость, производится последовательно с шагом, равным одной ячейке скользящего окна. Это позволяет обеспечить наблюдаемость оцениваемых параметров трафика МСС.

Особенностью данной системы нечеткого логического вывода является то, что обучение производится на этапе ее проектирования. На этапе эксплуатации возможна небольшая корректировка нечетких баз правил и нечетких баз знаний. Структура системы нечеткого логического вывода в процессе эксплуатации остается постоянной.

#### 4. Анализ результатов численного моделирования

Численное моделирование проверки эффективности разработанных алгоритмов оценки характеристик трафика МСС проводилось для трафиков, имеющих распределение Пуассона, экспоненциальное распределение, логнормальное и распределение Парето.

Моделирование проводилось как для стационарных, так и для нестационарных трафиков. Обучение системы нечеткого логического вывода Такаги–Сугено с учетом утверждения 2 из раздела 3 проводилось на основе анализа данных, полученных при моделировании СП с логарифмически нормальным распределением. Модулирующие функции для моделирования нестационарных СП представляли собой:

1. Случайные процессы авторегрессии первого порядка (АР-1), имеющие вид [7, 8]

$$(15) \quad m(i+1) = \rho m(i) + \sigma_m \sqrt{1 - \rho^2} \zeta(i+1),$$

где  $\rho$  – коэффициент корреляции,  $\sigma_m$  – СКО процесса,  $m(i+1)$  – текущее значение математического ожидания интенсивности трафика МСС,  $m(i)$  – его предыдущее значение,  $\zeta(i+1)$  – значение независимой случайной величины, имеющей нормальное распределение с нулевым значением математического ожидания и единичной дисперсией;

2. Детерминированные периодические функции вида

$$(16) \quad m(i) = m + a_0 \times \sin(2\pi i/T),$$

где  $a_0$  – амплитуда модулирующего процесса,  $T$  – период модулирующей функции;

3. Ступенчатые функции вида

$$(17) \quad m(i) = \begin{cases} m_1, & \text{если } i \leq k, \\ m_2, & \text{если } i \geq k, \end{cases}$$

где  $m_1$  и  $m_2$  – значения уровней математического ожидания СП.

Ниже приведены некоторые результаты предварительного обучения системы нечеткого логического вывода. Так, в качестве примеров на рис. 1 приведена поверхность коэффициентов шага для процедуры корректировки оценки текущего значения математического ожидания СП в зависимости от периода изменения математического ожидания СП и от возможного значения модуля оценки его градиента.

Обучение проводилось с помощью процедуры (16) при заданном среднем значении СП, равном  $m(i) = 167$ , и коэффициенте вариации СП, равном  $K_V(i) = 0,5$ . По вертикальной оси  $\lambda_m$  выбран логарифмический масштаб. Аналогичные поверхности строятся и для других значений  $m(i)$ , количество которых определяется пропускной способностью канала связи с помощью эмпирически установленной зависимости – одна поверхность на один диапазон изменения математического ожидания, равный  $\Delta m(i) \approx 200-300$ . Следует отметить, что процедуры обучения системы нечеткого логического вывода достаточно легко автоматизируются.

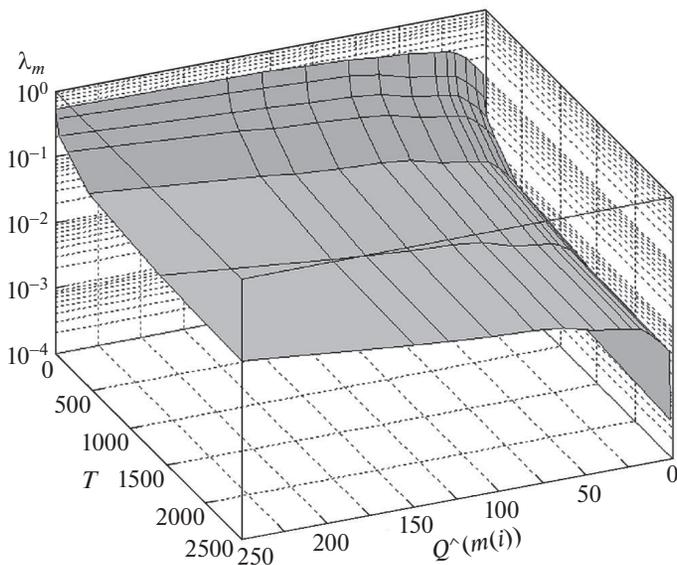


Рис. 1. Поверхность коэффициентов шага для процедуры корректировки оценки  $m(i)$ .

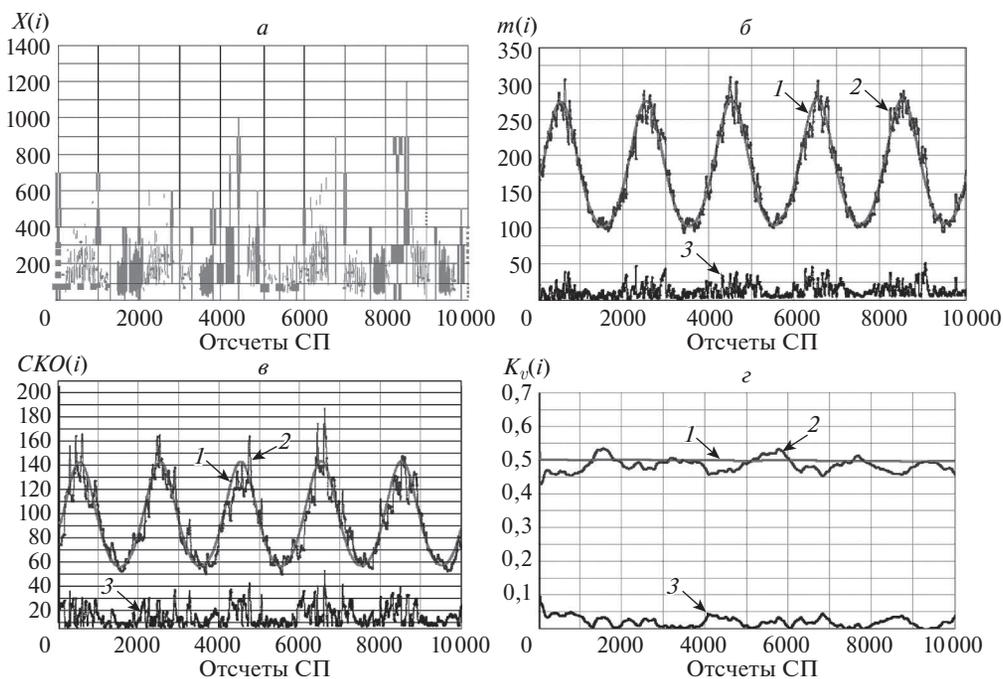


Рис. 2. Результаты оценки параметров нестационарного тренда с логнормальным распределением: *а* – отсчеты СП, *б* – оценка  $m(i)$ , 1 – истинное значение  $m(i)$ , 2 – оценка  $m(i)$ , 3 – модуль абсолютной погрешности оценки; *в* – оценка СКО СП, 1 – истинное значение СКО, 2 – значение оценки СКО, 3 – модуль абсолютной погрешности оценки; *г* – оценка  $K_V$ , 1 – истинное значение  $K_V$ , 2 – оценка  $K_V$ , 3 – модуль абсолютной погрешности оценки  $K_V$ .

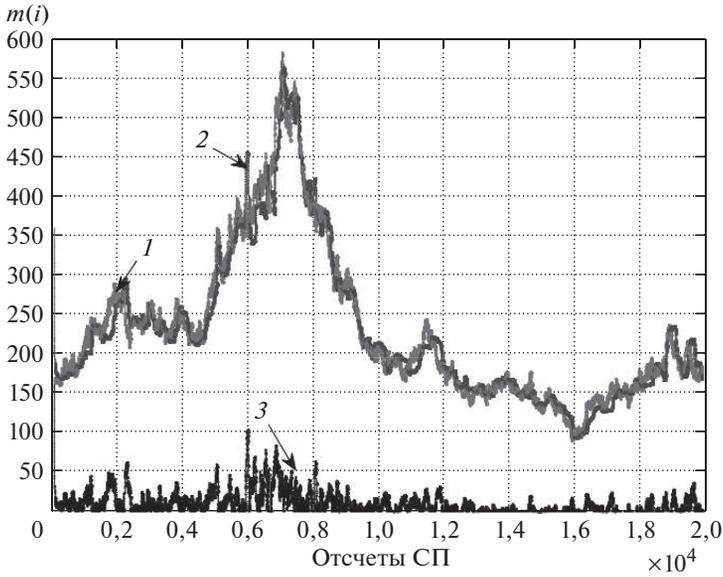


Рис. 3. Логнормальное распределение. 1 – Истинное значение  $m(i)$ , 2 – оценка  $m(i)$ , 3 – модуль абсолютной ошибки оценивания.

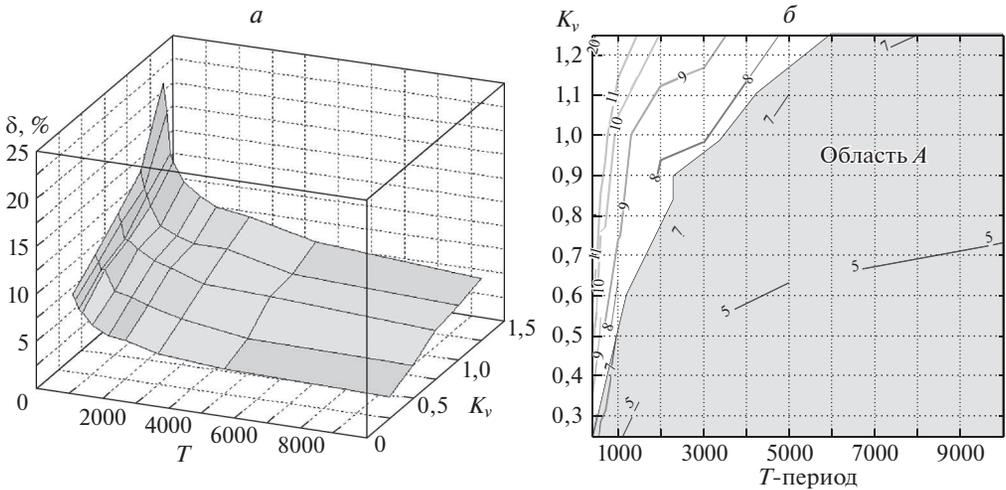


Рис. 4. а – Зависимость средней относительной погрешности оценки параметров СП от скорости их изменения и от  $K_V$ ; б – область А – область Парето-оптимальных значений параметров алгоритма.

На рис. 2 приведены результаты численного моделирования процедур оценок текущих значений математического ожидания, СКО и коэффициента вариации интенсивности нестационарного трафика с логарифмически нормальным распределением.

В результате моделирования средняя относительная погрешность оценки математического ожидания составила не более 5,3%, средняя относительная погрешность оценки СКО составила не более 8,7%, средняя относительная погрешность оценки  $K_V$  составила не более 5,3%.

**Таблица.** Точность алгоритмов оценки стохастических параметров трафика МСС

Тип распределения	Коэффициент корреляции ( $\rho$ )	Средняя относительная погрешность МСС (%)
Распределение Парето ( $H = 0,7-0,85$ )	0,99	9,8
	0,999	9,4
	0,9999	8
Распределение Пуассона	0,9	8,6
	0,99	7,6
	0,999	6,4
	0,9999	3,3
Логарифмически нормальное распределение	0,9	9,6
	0,99	9,3
	0,999	8,4
	0,9999	6,7
Экспоненциальное распреде- ление	0,9	8,9
	0,99	8,2
	0,999	7,2
	0,9999	5,6

На рис. 3 приведены результаты оценки математического ожидания нестационарного СП с логарифмически нормальным распределением, в котором математическое ожидание изменялось в соответствии с рекуррентной процедурой (15).

Средняя относительная погрешность оценки значений  $m(i)$  не превысила 7,3 %.

На рис. 4 представлены зависимости средней относительной погрешности оценки параметров СП в зависимости от скорости их изменения и от текущего значения коэффициента вариации при изменении математического ожидания от 167 до 240 и при изменении  $K_V$  от 0,25 до 1,25.

Область А на рис. 4,б – область Парето-оптимальных значений параметров алгоритма оценки параметров СП, в которой средние относительные погрешности оценок математического ожидания, СКО и  $K_V$  не превышают 8,4 %.

В таблице приведены обобщенные результаты анализа точностных характеристик алгоритма оценки параметров трафика МСС для стохастического случая.

При оценивании параметров нестационарных трафиков средняя относительная погрешность оценок не превысила 9,3 %. Средняя относительная погрешность оценивания для стационарного трафика составила менее 3,3 %. Размер скользящего окна прогнозирующей процедуры алгоритма для нестационарного трафика составил 10–90 отсчетов. В абсолютных временных единицах алгоритм показал устойчивую работу с периодом изменения параметров трафика 1,5–2 миллисекунды.

## 5. Анализ результатов экспериментальной проверки

На рис. 5 приведена структура фрагмента сети для экспериментального исследования предложенного подхода. Локальная вычислительная сеть (ЛВС, LAN) через маршрутизатор доступа имела выход в сеть Internet. Одна из ЭВМ LAN, на которой производились оценки характеристик сетевого трафика, подключена к ЛВС через аппаратно-программное средство (АПС), которое реализует разработанный алгоритм. Это АПС реализовано на основе концепции построения интеллектуальных агентов (ИА) [18, 19].

Интеллектуальный агент (ИА) реализован в виде системы на кристалле (SoC – System – on – Chip), основой которой служит программируемая логическая интегральная микросхема (ПЛИС) field – programmable gate array (FPGA) Cyclone V фирмы Altera [20, 21]. В качестве макета ИА использовался отладочный комплект Cyclone V SX SoC Development Board.

При разработке ИА были использованы средства САПР Quartus II и язык программирования Verilog.

Подключение платы Cyclone V SX SoC Development Board к экспериментальному макету осуществлялось с помощью двух интерфейсов Ethernet с пропускными способностями 1 Гбит/с. Управление ИА реализовывалось с компьютера, к которому он подключался. Все каналы ЛВС имели пропускные способности 1 Гбит/с.

Первый эксперимент заключался в том, что делались запросы в сеть Internet, а по ним производился обмен данными большого объема. Например, пересылка файлов на скорости около 60 Мбит/с проводилась в течение 30 с. С помощью ИА выполнялись оценка значений интенсивности трафика и оценка его текущего значения математического ожидания. Период получения одного отсчета интенсивности трафика равен 1 мкс ( $10^{-6}$  с). Измерялось зна-

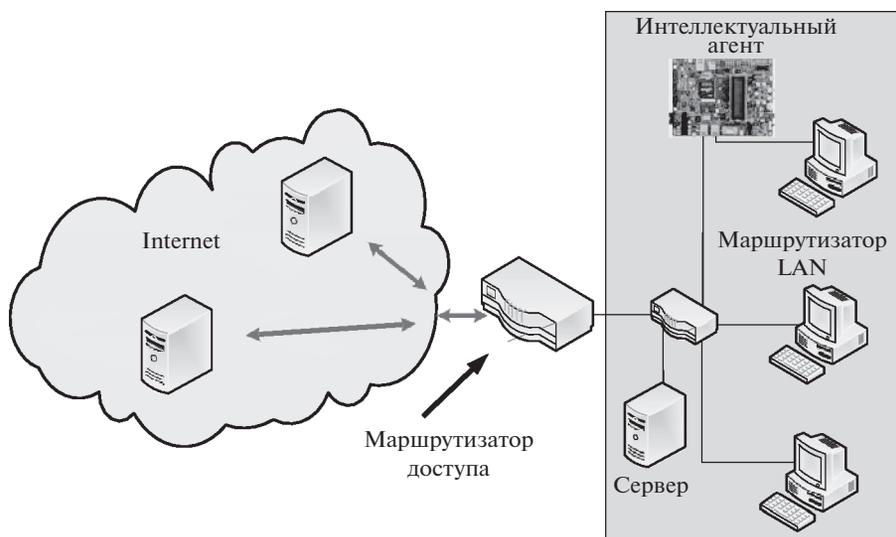


Рис. 5. Структура фрагмента сети для экспериментального исследования характеристик сетевого трафика.

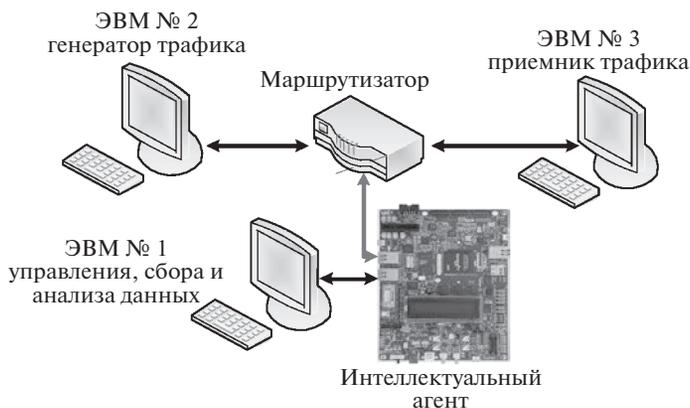


Рис. 6. Макет фрагмента сети.

чение битовой скорости на входе интерфейса Ethernet ИА. Проверка по критерию  $\chi^2$  показала, что распределение трафика можно отнести к распределению Пуассона.

Характер изменения текущего значения математического ожидания интенсивности трафика приблизительно соответствовал модели AP – 1 (15).

Испытания ИА, в которых динамика изменения трафика была более интенсивной, чем поведение реального трафика, проводились на макете сети, приведенном на рис. 6.

В данном эксперименте текущее значение математического ожидания интенсивности трафика моделировалось с помощью модели AP – 1 (15). Использовалось распределение Пуассона. Подключение ИА было выполнено аналогично структуре, приведенной на рис. 5.

С помощью разработанного программного обеспечения моделировалось динамичное изменение характеристик трафика. Средняя относительная погрешность оценки текущего значения математического ожидания составила  $\delta \approx 0,62\%$ . За время измерения, которое составило 0,6 с, значение математического ожидания изменилось более чем в два раза.

Второй эксперимент заключался в оценке характеристик трафика, соответствующего передаче видео. С помощью стенда сети (рис. 6) были оценены характеристики трафика видеоконференцсвязи (ВКС). Время регистрации трафика, как и в первом эксперименте, составило 0,6 с. Анализ показал, что трафик соответствует логарифмически нормальному закону распределения. Средняя относительная погрешность оценки  $m(i)$  составила  $\delta \approx 2,46\%$ . Диапазон изменения  $m(i)$  за время измерения составил приблизительно 1,9 раза.

## 6. Заключение

1. Полученные характеристики предложенных в статье метода и алгоритма обеспечивают оценку параметров и характеристик нестационарного трафика в высокоскоростных мультисервисных сетях связи со средней относительной погрешностью, не превышающей 10 %, что является достаточно высоким показателем качества оценивания [10–13].

2. Проведенный в статье анализ показал возможность реализации разработанного алгоритма на существующих аппаратно-программных платформах.

3. Наиболее перспективной является реализация алгоритма как интеллектуального агента для многоагентной интеллектуальной системы оперативной поддержки принятия решений для управления МСС. Аппаратно-программной платформой подобной системы может быть система на кристалле на основе высокопроизводительной ПЛИС (FPGA).

4. Полученные экспериментальные данные полностью подтверждают достоверность результатов численного моделирования.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ITU-T Recommendation Y.2001. General overview of NGN. Geneva: ITU, 2004.
2. ITU-T Recommendation Y.2011. General principles and general reference model for Next Generation Networks. Geneva: ITU, 2004.
3. *Гольдштейн Б.С., Соколов Н.А., Яновский Г.Г.* Сети связи. Уч. для ВУЗов. СПб.: БХВ Санкт-Петербург, 2011.
4. ITU-T Recommendation G.1000. Communications quality of service: A framework and definitions. Geneva: ITU, 2001.
5. ISO/IEC 27001. Information technology – Security techniques – Information security management Systems – Requirements. Switzerland: ISO/IEC, 2005.
6. *Симонова О.А.* Модели расчета показателей QoS в сетях следующего поколения: Дисс. канд. техн. наук. СПб.: 2005.
7. *Шелухин О.И., Осин А.В., Смольский С.М.* Самоподобие и фракталы. Телекоммуникационные приложения. М.: Физматлит, 2008.
8. *Агеев С.А., Гладких А.А., Курносое В.И., Привалов А.А.* Адаптивный метод обнаружения аномалий трафика в высокоскоростных мультисервисных сетях связи // Научное издание «Технологии в исследованиях Земли». 2019. Т. 11. № 5. С. 4–13. <https://doi.org/10.24411/2409-5419-2018-10282>
9. *Агеев С.А., Саенко И.Б., Котенко И.В.* Метод и алгоритмы обнаружения аномалий в трафике мультисервисных сетей связи, основанные на нечетком логическом выводе // Информационно – управляющие системы. 2018. № 3. С. 61–68. <https://doi.org/10.15217/issn 1684-8858.2018.3.61>
10. *Тихонов В.И., Кульман Н.К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. М.: Сов. радио, 1975.
11. *Пугачев В.С.* Обобщение теории условно оптимального оценивания и экстраполяции // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 3. С. 535–538.
12. *Пугачев В.С.* Условно оптимальная фильтрация и экстраполяция непрерывных процессов // АИТ. 1984. № 2. С. 82–89.  
*Pougatcheff W.* Conditionally Optimal Filtering and Extrapolation of Continuous Processes // Autom. Remote Control. 1984. V. 45. No. 2. P. 212–218.
13. *Синицын И.Н.* Фильтры Калмана и Пугачева. Уч. пос. М.: Университетская книга, Логос, 2006.
14. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Псевдоградиентные алгоритмы адаптации и обучения // АИТ. 1973. № 3. С. 45–63.  
*Polyak B.T., Tsybkin Ya.Z.* Pseudogradient adaptation and training algorithms // Autom. Remote Control. 1973. V. 34. No. 3. P. 377–397.

15. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Оптимальные псевдоградиентные алгоритмы адаптации // *АиТ.* 1980. № 8. С. 74–84.  
*Polyak B.T., Tsytkin Ya.Z.* Optimal pseudogradient adaptation algorithms // *Autom. Remote Control.* 1981. V. 41. No. 8. P. 1101–1110.
16. *Takagi T., Sugeno M.* Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control // *IEEE Trans. on Syst., Man and Cybernetics.* 1985. V. SMC-15. Iss. 1. P. 116–132. <https://doi.org/10.1109/TSMC.1985.6313399>
17. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. 2-е изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013.
18. *Wooldridge M., Jennings N.* Intelligent Agents: Theory and Practice // *Knowledge Engineering Review.* 1995. V. 10. No. 2. P. 115–152.  
<https://doi.org/10.1017/S0269888900008122>
19. *Wooldridge M., Jennings N.* Agent Theories, Architectures and Languages: a Survey // *Intelligent Agents: ECAI-94 Workshop on Agent Theories, Architectures and Languages (Amsterdam, The Netherlands, August 8–9, 1994)* / Eds. M. Wooldridge, N. Jennings. Berlin: Springer Verlag, 1995. P. 1–22.  
[https://doi.org/10.1007/3-540-58855-8\\_1](https://doi.org/10.1007/3-540-58855-8_1)
20. URL: Intel Corporation. <https://www.altera.com/> /дата обращения 18.11.2019.
21. URL: Open Cores. <http://opencores.org/projects/> /дата обращения 05.11.2019.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии О.Н. Граничиным.*

Поступила в редакцию 20.11.2019

После доработки 25.02.2021

Принята к публикации 16.03.2021

© 2021 г. А.И. ГЛУЩЕНКО, канд. техн. наук (a.glushchenko@sf-misis.ru),  
В.А. ПЕТРОВ, канд. техн. наук (petrov.va@misis.ru),  
К.А. ЛАСТОЧКИН (lastconst@yandex.ru)  
(Старооскольский технологический институт им. А.А. Угарова (филиал)  
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский технологический  
университет «МИСиС»)

## I-DREM: ОСЛАБЛЕНИЕ УСЛОВИЯ КВАДРАТИЧНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ<sup>1</sup>

Исследование посвящено ослаблению в процедуре DREM условия квадратичной интегрируемости регрессора  $\omega(t) \notin L_2$  для обеспечения монотонной асимптотической сходимости параметрической ошибки в задаче оценки постоянных параметров линейной регрессионной зависимости.

*Ключевые слова:* линейная регрессия, идентификация параметров, постоянное возбуждение, начальное возбуждение, квадратичная интегрируемость, коэффициент усиления закона оценки.

DOI: 10.31857/S0005231021070084

### 1. Введение. Постановка задачи.

В последние годы в отечественной и зарубежной литературе появилось множество публикаций [1–11], посвященных ослаблению требования постоянного возбуждения (в зарубежной литературе *Persistent Excitation* — *PE*) для экспоненциальной сходимости ошибки  $\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta$  в градиентных схемах идентификации постоянных параметров линейной регрессии

$$(1.1) \quad y(t) = \varphi^T(t)\theta,$$

где  $y(t) \in \mathbb{R}$  — функция регрессионной зависимости,  $\varphi(t) \in \mathbb{R}^n$  — вектор регрессора,  $\theta \in \mathbb{R}^n$  — вектор неизвестных параметров,  $\hat{\theta}(t) \in \mathbb{R}^n$  — вектор оценок параметров  $\theta$ .

*Определение 1.* Регрессор  $\varphi(t) \in L_\infty$ , где  $t \in [0; \infty)$ , постоянно возбужден ( $\varphi(t) \in PE$ ), если  $\exists T_0 > 0$  и  $\alpha > 0$  такие, что  $\forall t \geq 0$  верно неравенство

$$(1.2) \quad \int_t^{t+T_0} \varphi(\tau) \varphi^T(\tau) d\tau \geq \alpha I,$$

где  $I$  — единичная матрица, а  $\alpha$  — степень возбуждения.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-47-310003 p\_a).

*Предположение.* Неизвестные параметры регрессии (1.1) таковы, что  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\theta = \text{const} \forall t \geq 0$ .

Не претендуя на полноту обзора и не учитывая весьма частные решения [1, 2] и другие, выделим некоторые основные методы [3–6], позволяющие ослабить условие (1.2). Для более полного ознакомления с существующими решениями рекомендуем обратиться к обзору [7].

Во-первых, это схемы расширения и фильтрации регрессора DRE [12] и MRE [13] при применении автоколебательных [3] и интегральных [4] фильтров. Использование фильтров такого рода позволяет ослабить требование постоянного возбуждения до требования начального возбуждения (в зарубежной литературе *Initial Excitation* — *IE*).

*Определение 2.* Регрессор  $\varphi(t) \in L_\infty$ , где  $t \in [0; \infty)$ , возбужден ( $\varphi(t) \in \text{IE}$ ) на начальном интервале времени  $[0; T_0]$ , если для  $T_0 > 0 \exists \alpha > 0$  такое, что

$$(1.3) \quad \int_0^{T_0} \varphi(\tau) \varphi^T(\tau) d\tau \geq \alpha I,$$

где  $I$  — единичная матрица, а  $\alpha$  — степень возбуждения.

Однако, несмотря на ослабление условия  $\varphi(t) \in \text{PE}$  до  $\varphi(t) \in \text{IE}$ , упомянутые решения не являются универсальными, поскольку в уравнениях фильтров содержатся незамкнутые отрицательной обратной связью интеграторы, чувствительные к шумам и начальным условиям [7]. Для решения этой проблемы в [8] был предложен новый фильтр, свободный от данного недостатка и в отличие от фильтра Крейссельмейера [13] позволяющий в схеме расширения и фильтрации регрессора MRE обеспечить экспоненциальную сходимость при выполнении условия  $\varphi(t) \in \text{IE}$ .

Во-вторых, это процедура DREM [5, 6], в которой используются исключительно устойчивые фильтры в виде апериодических звеньев первого порядка или операторов задержки. В отличие от рассмотренных методов [3, 4, 12, 13], подход DREM позволяет преобразовать уравнение регрессии (1.1) с матричным регрессором  $\varphi(t)$  к  $n$  скалярным уравнениям, что влечет за собой как получение нового условия асимптотической сходимости, оказывающегося слабее  $\varphi(t) \in \text{PE}$  и отличающегося от него, так и монотонную сходимость к нулю в отдельности по каждой ошибке из вектора  $\tilde{\theta}(t)$ . Чтобы более детально проанализировать этот подход, применим его к регрессии (1.1).

Для этого в количестве  $n - 1$  введем устойчивые операторы

$$(1.4) \quad (\cdot)_{f_i(t)} := [H_i(\cdot)](t); \quad H_i(p) = \frac{\alpha_i^f}{p + \beta_i^f}; \quad i \in \{1, 2, \dots, n - 1\},$$

где  $\alpha_i^f > 0$  и  $\beta_i^f > 0$ .

Пропуская через операторы (1.4) функцию  $y(t)$  и регрессор  $\varphi(t)$ , сформируем расширенное уравнение регрессии

$$(1.5) \quad \begin{aligned} Y_f(t) &= \Phi_f(t)\theta, \\ Y_f(t) &= [y(t) \quad y_{f_1}(t) \quad \dots \quad y_{f_{n-1}}(t)]^T; \\ \Phi_f(t) &= [\varphi^T(t) \quad \varphi_{f_1}^T(t) \quad \dots \quad \varphi_{f_{n-1}}^T(t)]^T. \end{aligned}$$

Домножив уравнение (1.5) слева на присоединенную матрицу алгебраических дополнений  $\text{adj}\{\Phi_f(t)\}$  матрицы расширенного регрессора  $\Phi_f(t)$ , а также пользуясь равенством  $\text{adj}\{\Phi_f(t)\}\Phi_f(t) = \det\{\Phi_f(t)\}I$  ( $I$  – единичная матрица), получим уравнение

$$(1.6) \quad Y(t) = \text{adj}\{\Phi_f(t)\}Y_f(t) = \text{adj}\{\Phi_f(t)\}\Phi_f(t)\theta = \det\{\Phi_f(t)\}I\theta = \omega(t)\theta,$$

где  $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\omega(t) \in \mathbb{R}$ .

Уравнение (1.6) может быть преобразовано к  $n$  скалярным уравнениям вида

$$(1.7) \quad Y_i(t) = \omega(t)\theta_i.$$

На основе скалярных уравнений (1.7) может быть получен закон градиентной оценки неизвестных параметров

$$(1.8) \quad \dot{\hat{\theta}}_i = -\gamma_i \omega(\omega\hat{\theta}_i - Y_i),$$

где  $\gamma_i > 0$  – коэффициент усиления закона настройки.

В силу уравнения (1.7) решение дифференциального скалярного уравнения (1.8) имеет вид

$$(1.9) \quad \tilde{\theta}_i(t) = e^{-\gamma_i \int_{t_0}^t \omega^2(\tau) d\tau} \tilde{\theta}_i(t_0),$$

где  $t_0$  – момент времени, в который достигается неравенство нулю регрессора  $\omega(t)$ .

Из уравнения (1.9) следует: 1) сохранение после применения процедуры DREM требования постоянного возбуждения (1.2) для экспоненциальной сходимости параметрической ошибки; 2) возникновение нового условия *квадратичной интегрируемости*  $\omega(t) \notin L_2$ , необходимого для асимптотической сходимости  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}_i| = 0$ .

*Определение 3.* Для регрессора  $\omega(t)$  выполняется условие квадратичной интегрируемости ( $\omega(t) \notin L_2$ ), если верно равенство

$$(1.10) \quad \|\omega\|_2 = \sqrt{\int_0^t \omega^2(\tau) d\tau} = \infty.$$

В [5], не ограничивая общности, на примере  $n = 2$  был установлен класс исходных регрессоров  $\varphi(t)$ , отличных от  $\varphi(t) \in \text{PE}$ , для которых скалярные регрессоры, полученные с помощью процедуры (1.5)–(1.7), удовлетворяют условию  $\omega(t) \notin L_2$ .

*Утверждение 1. Если исходный регрессор задан как  $\varphi^T(t) = [c \ g(t) + \dot{g}(t)]$ , где  $c$  — произвольная постоянная, и в процедуре (1.5)–(1.7) используются операторы (1.4), то  $\varphi(t) \notin \text{PE}$  и  $\omega(t) \notin L_2$ , если и только если для функции  $g(t)$  и ее производной выполняются условия*

$$(1.11) \quad \begin{aligned} g(t) \in L_\infty, \quad \dot{g}(t) \in L_\infty, \quad \dot{g}(t) \notin L_2, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{g}(t) = 0. \end{aligned}$$

На основе определения функции  $g(t)$  очевидно, что новое условие (1.11) слабее [5–7] требования постоянного возбуждения (1.2), но сильнее требования начального возбуждения (1.3). Так, например, существует исходный регрессор вида  $\varphi^T(t) = [1 \ e^{-t}] \in \text{IE}$  или скалярный регрессор вида  $\omega(t) = e^{-t} \in \text{IE}$  и  $\omega(t) = e^{-t} \in L_2$ , для которых в силу (1.11) и утверждения 1 закон оценки (1.8) не обеспечивает ни экспоненциальной, ни даже асимптотической параметрической сходимости.

Для решения этой проблемы и обеспечения сходимости  $\forall \omega(t) \in \text{IE}$  в [9–11] был предложен ФТС (finite-time convergence) контур оценки:

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \hat{\theta}_i^{FTC} = \frac{1}{1 - \phi_c} [\hat{\theta}_i - \phi_c \hat{\theta}_i(0)]; \quad \phi_c = \begin{cases} \sigma, & \text{если } \phi \geq \sigma, \\ \phi, & \text{если } \phi < \sigma, \end{cases} \\ \dot{\phi} = -\gamma_i \omega^2 \phi, \quad \phi(0) = 1. \end{aligned}$$

Контур оценки (1.12) обеспечивает сходимость оценки  $\hat{\theta}_i^{FTC}$  к  $\theta_i$  за конечное время  $t_c$ , если для регрессора  $\omega(t)$  выполняется условие

$$(1.13) \quad \int_0^{t_c} \omega^2(\tau) d\tau \geq -\frac{1}{\gamma_i} \ln(\sigma).$$

Недостатками контура оценки (1.12) является отсутствие доказательства робастности к возмущениям, потеря сходимости за конечное время при  $\omega(t) \notin L_2$  (решение этой проблемы предложено в [11]), а также высокая чувствительность к параметрам  $\sigma \in (0; 1)$  и  $\gamma_i$ , от выбора значений которых целиком зависит выполнение условия (1.13).

Поэтому задача обеспечения сходимости параметрической ошибки в случае  $\omega(t) \in \text{IE}$  является решенной не до конца, что позволяет сформулировать первую задачу настоящей статьи в следующем виде.

*Задача 1. Требуется построить закон оценки неизвестных параметров скалярных регрессий (1.7), обеспечивающий монотонную экспоненциальную сходимость ошибки  $\hat{\theta}_i(t)$  в случае  $\varphi(t) \in \text{IE}$  ( $\omega(t) \in \text{IE}$ ).*

*Замечание.* В силу устойчивости и различия  $i$ -х фильтров (1.4) если исходный регрессор  $\varphi(t) \in \text{IE}$ , то и скалярный регрессор  $\omega(t) \in \text{IE}$ . Доказательству этого утверждения посвящена публикация [14].

В законах оценки вида (1.8) важную роль выполняет экспериментально подбираемый параметр — коэффициент усиления  $\gamma_i$ , с помощью которого возможно повлиять на скорость сходимости параметрической ошибки (1.9). На практике, во многих приложениях, эксперименты по выбору данного коэффициента проведены быть не могут. Поэтому полезно было бы иметь закон настройки коэффициента усиления.

Такой закон настройки может быть построен с помощью применения для оценки параметров  $\theta$  не градиентного закона (1.8), а контура оценки, построенного согласно рекурсивному методу наименьших квадратов с коэффициентом забывания  $\lambda$ :

$$(1.14) \quad \begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_i = -\gamma_i \omega(\omega \hat{\theta}_i - Y_i), & \gamma_i(0) > 0; \\ \dot{\gamma}_i = \lambda \gamma_i - \gamma_i^2 \omega^2, & \lambda > 0. \end{cases}$$

Однако в [15] была доказана невозможность применения контура (1.14) для идентификации параметров скалярных регрессий (1.7), если: 1)  $\omega(t) \notin \text{PE}$ ; 2)  $\omega(t) \notin \text{L}_2$  и  $\omega(t) \rightarrow 0$ ; 3)  $\omega(t) \in \text{L}_2$ . В этих случаях  $\gamma_i(t) \rightarrow \infty$ . Поэтому вторую задачу настоящей статьи сформулируем в следующем виде:

*Задача 2.* Требуется построить контур оценки неизвестных параметров скалярных регрессий (1.7), использующий переменный коэффициент усиления закона оценки  $\gamma_i(t)$  и обеспечивающий  $\gamma_i(t) \in \text{L}_\infty$  и экспоненциальную сходимость ошибки  $\hat{\theta}_i(t)$  в случае  $\varphi(t) \in \text{IE}$  ( $\omega(t) \in \text{IE}$ ).

Для решения поставленных задач в данной статье предлагается сначала выполнить расширение скалярных регрессий (1.7) по методу MRE [13] с использованием упомянутого нового фильтра [8]. Затем на основе полученной модифицированной регрессии построить закон оценки по градиентному методу (задача 1) и рекурсивному методу наименьших квадратов (задача 2), а после доказать аналитически и экспериментально их требуемые свойства.

## 2. Расширение и фильтрация скалярного регрессора

Применим к скалярной регрессии (1.7) метод расширения регрессора MRE. Для этого умножим уравнение (1.7) слева и справа на регрессор  $\omega(t)$ :

$$\omega(t)Y_i(t) = \omega^2(t)\theta_i.$$

Воспользуемся предложенным в [8] фильтром<sup>2</sup>

$$(2.1) \quad u_f(t) = \int_{t_0}^t e^{-\mu\tau} u(\tau) d\tau,$$

где  $\mu > 0$  — коэффициент памяти,  $u_f(t)$  и  $u(t)$  — выход и вход фильтра.

<sup>2</sup> Фильтр представляет собой интегратор с экспоненциальным уменьшением вклада новых слагаемых, поэтому полученную в статье процедуру назовем I-DREM.

Утверждение 2. Если вход фильтра  $u(t) \in L_\infty$ , то выход фильтра  $u_f(t) \in L_\infty$ .

Доказательство утверждения 2 можно найти в [8].

Пропустим через фильтр (2.1) расширенный регрессор  $\omega^2(t)$  и функцию  $\omega(t)Y_i(t)$ :

$$(2.2) \quad \Omega(t) = \int_{t_0}^t e^{-\mu\tau} \omega^2(\tau) d\tau; \quad \Upsilon_i(t) = \int_{t_0}^t e^{-\mu\tau} \omega(\tau) Y_i d\tau.$$

Утверждение 3. Фильтрованный скалярный регрессор  $\Omega(t) \forall \omega(t) \in \text{IE}$  является таким, что:

1)  $\forall t \geq 0 \Omega(t) \geq 0$  и  $\Omega(t) \in L_\infty$ ;

2)  $\forall t \geq T_0 \Omega(t) > 0$ ;

3) а) если  $\omega(t) \in \text{IE}$  и  $\omega(t) \notin \text{PE} \forall t \geq T_0$ , верно  $\Omega(T_0) \leq \Omega(t) \leq \Omega(T_0) + \beta$ ;

б) если  $\omega(t) \in \text{PE} \forall t \geq T_\mu$ , верно  $\Omega(T_\mu) \leq \Omega(t) \leq \Omega(T_\mu) + \beta_1$  и  $\Omega(t) > 0$ , где  $T_\mu \geq T_0$ ;

4)  $\Omega(t) \notin L_2$ .

Доказательство. Для доказательства первой части утверждения найдем производную по времени регрессора  $\Omega(t)$ :

$$\dot{\Omega}(t) = e^{-\mu t} \omega^2(t).$$

Так как  $\forall t \geq 0 \text{sign}(e^{-\mu t} \omega^2(t)) \geq 0$ , то  $\dot{\Omega}(t) \geq 0$ , а следовательно,  $\Omega(t) \geq 0 \forall t \geq 0$ . По условию  $\text{IE} - \omega(t) \in L_\infty$ , а согласно доказательству утверждения 2 этого достаточно для  $\Omega(t) \in L_\infty$ . Первая часть утверждения 3 доказана, перейдем к доказательству второй части.

Следуя определению 2, запишем условие начального возбуждения для регрессора  $\omega(t)$ :

$$(2.3) \quad \int_{t_0}^{T_0} \omega^2(\tau) d\tau \geq \alpha.$$

Тогда  $\forall t \geq T_0$  верно неравенство

$$\int_{t_0}^t \omega^2(\tau) d\tau > 0.$$

Откуда, так как  $e^{-\mu t} > 0 \forall t < \infty$ , следует

$$(2.4) \quad \Omega(t) = \int_{t_0}^t e^{-\mu\tau} \omega^2(\tau) d\tau > 0 \quad \forall t \geq T_0.$$

Что и требовалось доказать во второй части утверждения 3.

Для доказательства п. За утверждения 3 перепишем выражение (2.4), разбив всю ось времени на два интервала:

$$(2.5) \quad \Omega(t) = \int_{t_0}^{T_0} e^{-\mu\tau} \omega^2(\tau) d\tau + \int_{T_0}^t e^{-\mu\tau} \omega^2(\tau) d\tau.$$

Первый интеграл в (2.5), согласно  $\omega(t) \in \text{IE}$  (2.3) и в силу п. 1 утверждения 3, ограничен своим значением на правой границе

$$(2.6) \quad \int_{t_0}^{T_0} e^{-\mu\tau} \omega^2(\tau) d\tau \leq \Omega(T_0).$$

Согласно определению 2 при  $\omega(t) \in \text{IE}$  и  $\omega(t) \notin \text{PE}$  можно предположить, что  $\forall t \geq T_0$   $\omega(t) \rightarrow 0$ , тогда  $\forall t \geq T_0$  для второго интеграла в (2.5) справедливо неравенство

$$(2.7) \quad \Omega(t) = \int_{T_0}^t e^{-\mu\tau} \omega^2(\tau) d\tau \leq \beta,$$

где  $\beta \geq 0$ .

С учетом (2.5)–(2.7) имеем

$$\Omega(T_0) \leq \Omega(t) \leq \Omega(T_0) + \beta \quad \forall t \geq T_0,$$

что завершает доказательство п. За утверждения 3.

Для доказательства п. Зб утверждения 3 введем момент времени  $T_\mu \geq T_0$ . Тогда так как  $e^{-\mu t} \rightarrow 0$ , то аналогично анализу (2.5)–(2.7), используя  $T_\mu$  вместо  $T_0$ , можно показать, что

$$\Omega(T_\mu) \leq \Omega(t) \leq \Omega(T_\mu) + \beta_1 \quad \forall t \geq T_\mu,$$

где  $\beta_1 \geq 0$ .

По п. 2 утверждения 3, в силу  $T_\mu \geq T_0$ , ясно, что  $\Omega(t) > 0$ , что завершает доказательство п. Зб утверждения 3.

Согласно доказательству п. 3 утверждения 3 введем понятия максимального и минимального  $\forall t \geq T_0$  значений регрессора  $\Omega(t)$  и моментов времени, в которые эти значения достигаются:

$$(2.8) \quad \Omega_{\max} = \Omega(t \rightarrow \infty) = \begin{cases} \Omega(T_0) + \beta, & \text{если } [\omega(t) \in \text{IE} \wedge \omega(t) \notin \text{PE}], \\ \Omega(T_\mu) + \beta_1, & \text{если } \omega(t) \in \text{PE}, \end{cases}$$

$$\Omega_{\min}(T_{\min}) = \begin{cases} \Omega(T_0), & \text{если } [\omega(t) \in \text{IE} \wedge \omega(t) \notin \text{PE}], \\ \Omega(T_\mu), & \text{если } \omega(t) \in \text{PE}. \end{cases}$$

Тогда проверить условие квадратичной интегрируемости (1.10) для регрессора  $\Omega(t)$  представляется возможным, используя определения  $\Omega_{\min}(T_{\min})$  и  $T_{\min}$ ,

$$\begin{aligned} \|\Omega(t)\|_2 &= \sqrt{\int_0^\infty \Omega^2(\tau) d\tau} \geq \sqrt{\int_0^{T_{\min}} \Omega^2(\tau) d\tau + \int_{T_{\min}}^\infty \Omega^2(\tau) d\tau} = \\ &= \sqrt{C + \int_{T_{\min}}^\infty \Omega_{\min}^2(T_{\min}) d\tau} \geq \sqrt{C + \Omega_{\min}^2(T_{\min})(\infty - T_{\min})} = \infty, \end{aligned}$$

где  $C > 0$ .

Отсюда следует  $\Omega(t) \notin L_2$ , что и требовалось доказать в части 4 утверждения 3.

С учетом обозначений (2.2) регрессия (1.7) может быть переписана в виде

$$(2.9) \quad \Upsilon_i(t) = \Omega(t)\theta_i.$$

### 3. Градиентный закон оценки

Градиентный закон оценки, построенный на основе уравнений регрессии (2.9), имеет вид

$$(3.1) \quad \dot{\hat{\theta}}_i = -\gamma_i \Omega \left( \Omega \hat{\theta}_i - \Upsilon_i \right).$$

По аналогии с (1.9) решение уравнения (3.1) приобретает вид

$$(3.2) \quad \tilde{\theta}_i(t) = e^{-\gamma_i \int_{t_0}^t \Omega^2(\tau) d\tau} \tilde{\theta}_i(t_0).$$

Согласно части 4 утверждения 3  $\forall \omega(t) \in \text{IE}$   $\Omega(t) \notin L_2$ , а значит, согласно уравнению (3.2) гарантируется асимптотическая сходимость  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}_i(t)| = 0$ .

Таким образом, относительно классической процедуры DREM получено ослабление требования  $\omega(t) \notin L_2$  для сходимости параметрической ошибки до требования  $\omega(t) \in \text{IE}$  ( $\varphi(t) \in \text{IE}$ ).

В следующей теореме 1 докажем, что при  $\omega(t) \in \text{IE}$  ( $\varphi(t) \in \text{IE}$ ) сходимость параметрической ошибки (3.2) не только асимптотическая, но и экспоненциальная.

*Теорема 1. 1. Параметрическая ошибка  $\tilde{\theta}_i$  при  $\omega(t) \in \text{IE}$  ( $\varphi(t) \in \text{IE}$ ) монотонно экспоненциально сходится к нулю со скоростью больше чем  $0,5\kappa_{\min}$ ; 2. Минимальная  $0,5\kappa_{\min}$  и максимальная  $0,5\kappa_{\max}$  скорости сходимости могут быть произвольно увеличены выбором коэффициента  $\gamma_i$ .*

Доказательство теоремы 1, а также выражения для оценок  $\kappa_{\min}$  и  $\kappa_{\max}$  приведены в Приложении.

Согласно доказательству теоремы 1 полученный закон оценки (3.1), как и закон оценки (1.8), обеспечивает монотонность для каждой параметрической ошибки  $\tilde{\theta}_i$ , но при этом требует более слабого условия  $\omega(t) \in \text{IE}$  для ее асимптотической и экспоненциальной сходимости по сравнению с законом (1.8). Отсюда следует решение поставленной задачи 1.

#### 4. Контур идентификации с настраиваемым коэффициентом усиления

Теперь для идентификации неизвестных параметров регрессии (2.9) воспользуемся формулами рекурсивного метода наименьших квадратов. В этом случае контур оценки примет вид

$$(4.1) \quad \begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_i = -\gamma_i \Omega \left( \Omega \hat{\theta}_i - \Upsilon_i \right), & \gamma_i(0) > 0; \\ \dot{\gamma}_i = \lambda \gamma_i - \gamma_i^2 \Omega^2, & \lambda > 0. \end{cases}$$

Свойства контура оценки (4.1) опишем теоремой 2.

*Теорема 2. При  $\omega(t) \in \text{IE}$  ( $\varphi(t) \in \text{IE}$ ) контур оценки (4.1) обладает следующими свойствами:*

1) коэффициент усиления  $\gamma_i(t)$  ограничен так, что  $\forall t \geq 0$  верно неравенство

$$(4.2) \quad \gamma_{i.\min} \leq \gamma_i(t) \leq \gamma_{i.\max};$$

2) для коэффициента усиления  $\gamma_i(t)$  справедлив предел:

$$(4.3) \quad \gamma_{i.\lim} = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_i(t) = \lambda \Omega_{\max}^{-2};$$

3) параметрическая ошибка  $\tilde{\theta}_i$  монотонно экспоненциально сходится к нулю со скоростью больше чем  $0,5\eta_{\min}$ ;

4) минимальная  $0,5\eta_{\min}$  и максимальная  $0,5\eta_{\max}$  скорости сходимости могут быть произвольно увеличены выбором коэффициента  $\lambda$ .

Доказательство теоремы 2, а также выражения для оценок  $\gamma_{i.\min}$ ,  $\gamma_{i.\max}$  и  $\eta_{\min}$ ,  $\eta_{\max}$  приведены в Приложении.

Согласно доказательству теоремы 2 контур оценки (4.1) использует коэффициент усиления  $\gamma_i(t) \in L_{\infty}$ , настраиваемый по формулам рекурсивного метода наименьших квадратов с фактором забывания, и при этом обеспечивает монотонную экспоненциальную сходимость при  $\varphi(t) \in \text{IE}$ , что было невозможно в исходной схеме DREM [15] и свидетельствует о решении поставленной задачи 2.

#### 5. Рассуждение о потере идентифицирующей способности

Из выражения (2.2) следует, что через  $5\mu^{-1}$  регрессор  $\Omega(t)$  и функция  $\Upsilon_i(t)$ , а значит, и контуры оценки (3.1) и (4.1) станут нечувствительными

к новым значениям регрессора  $\omega(t)$  и функции  $Y_i(t)$ . Однако при выполнении предположения по доказанному в теоремах 1 и 2 это обстоятельство не оказывает влияния на экспоненциальную параметрическую сходимость, которая гарантируется  $\forall t \geq T$ .

Если же допустить, что параметры регрессии (1.1), вопреки принятому предположению, изменили свое значение в любой момент времени  $t \geq 5\mu^{-1}$ , то контуры оценки (3.1) и (4.1) не смогут произвести переидентификацию, поскольку оперируют “старыми данными” о регрессоре  $\omega(t)$  и функции  $Y_i(t)$ .

Необходимо отметить, что обойти описанную потерю идентифицирующей способности возможно двумя способами. Во-первых, устремив значение параметра  $\mu$  к нулю, приближая тем самым предложенный фильтр к интегральному [4], но сохраняя при этом свойство робастности к возмущениям (доказательство сохранения робастности при  $\mu \rightarrow 0$  и  $\mu \neq 0$  можно найти на рис. 6 и в Приложении публикации [8]) и, во-вторых, “привязавшись” к конкретному типу регрессора  $\varphi(t)$ . В частности, если регрессор  $\varphi(t)$  — это координаты состояния объекта управления, работающего по ступенчатому задающему воздействию, то возможно проводить переидентификацию начиная отсчет  $t$  с нуля в моменты времени изменения задающего воздействия. В целом случай потери идентифицирующей способности выходит за рамки настоящей статьи, поскольку согласно предположению идентификацию параметров регрессии (1.1) достаточно провести один раз.

## 6. Иллюстративный пример

В качестве иллюстрации эффективности предлагаемого подхода приведем результаты математического моделирования контуров оценки (1.8), (3.1) и (4.1) при идентификации параметров линейной регрессии (1.1) для случая  $n = 2$ . Моделирование проводилось в Matlab/Simulink на основе численного интегрирования методом Эйлера с постоянным шагом дискретизации  $\tau_s = 10^{-6}$  с. Регрессор  $\varphi(t)$ , вектор неизвестных параметров  $\theta$  и параметры фильтра (1.4) в DREM процедуре были заданы такими:

$$(6.1) \quad \varphi^T(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-\frac{1}{4}t} \end{bmatrix}; \quad \theta^T = \begin{bmatrix} 5 & -5 \end{bmatrix}; \quad \alpha_1^f = \beta_1^f = 1.$$

Как следует из выражения (6.1), для регрессора  $\varphi(t)$  не выполняются требования (1.2) и (1.11), необходимые соответственно для асимптотической и экспоненциальной сходимости параметрической ошибки  $\tilde{\theta}$  при использовании контура оценки (1.8), что в ходе эксперимента должно продемонстрировать эффективность разработанного подхода.

Параметры контура оценки (1.8) были выбраны в соответствии со значениями

$$(6.2) \quad \hat{\theta}^T(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 50.$$

Параметры фильтра (2.1) и контура идентификации (3.1) были выбраны в соответствии со значениями, приведенными в выражении

$$\hat{\theta}^T(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 50; \quad \mu = \frac{1}{8}.$$

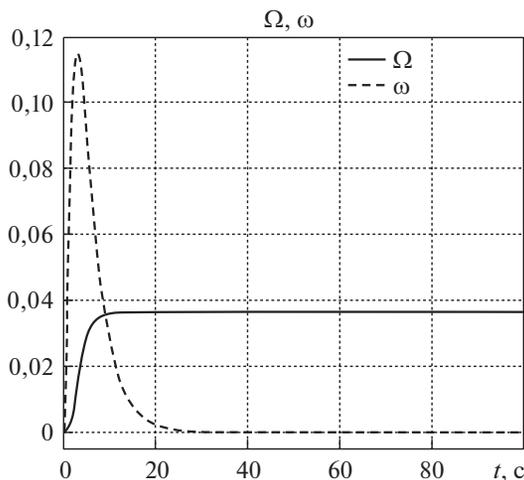


Рис. 1. Переходные процессы по DREM и I-DREM регрессорам  $\omega(t)$  и  $\Omega(t)$ .

Для контура (4.1) использовались начальные значения  $\gamma_1(0)$  и  $\gamma_2(0)$ , совпадающие со значениями для контура (3.1). Коэффициент забывания был принят  $\lambda = 0,1$ .

На рис. 1 изображены переходные процессы по регрессору  $\omega(t)$ , полученному по (1.4)–(1.7) из  $\varphi(t)$ , и фильтрованному регрессору  $\Omega(t)$ , полученному в соответствии с (2.1) из  $\omega(t)$ .

Результаты моделирования, приведенные на рис. 1, полностью подтверждают все аналитические выкладки, полученные в утверждении 3. Благодаря применению разработанной процедуры I-DREM из исходного регрессора  $\omega(t) \in \text{IE}$  ( $\varphi(t) \in \text{IE}$ ) действительно можно получить фильтрованный регрессор  $\Omega(t) \notin L_2$ .

На рис. 2 приведены переходные процессы по параметрическим ошибкам  $\tilde{\theta}_1$  и  $\tilde{\theta}_2$  при использовании закона оценки (1.8) — рис. 2,а и (3.1) — рис. 2,б.

Из сравнения переходных процессов на рис. 2,а и рис. 2,б следует, что контур оценки (3.1), в отличие от (1.8), обеспечивает экспоненциальную сходимость параметрических ошибок  $\tilde{\theta}_1$  и  $\tilde{\theta}_2$ , что подтверждает выводы, сделанные при доказательстве теоремы 1, и свидетельствует о решении задачи 1. Для контура оценки (3.1) увеличения скорости сходимости ошибок  $\tilde{\theta}_1$  и  $\tilde{\theta}_2$  согласно части 2 теоремы 1 и замечанию П.2 (см. Приложение) возможно добиться, увеличивая коэффициенты  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  или уменьшая параметр фильтра  $\mu$ .

На рис. 3,а изображены переходные процессы по коэффициентам усиления  $\gamma_1(t)$  и  $\gamma_2(t)$  при использовании контура оценки (4.1), а также их верхние и нижние оценки (4.2) и предел (4.3). Так как для контуров настройки  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  использовались одинаковые параметры  $\lambda$ ,  $\gamma_1(0)$  и  $\gamma_2(0)$ , то графики для  $\gamma_1(t)$  и  $\gamma_2(t)$ , как и их верхние и нижние оценки и пределы, совпадают.

Из рис. 3,а следует, что  $\gamma_1(t)$  и  $\gamma_2(t)$  являются  $L_\infty$  ограниченными (4.2) для регрессора (6.1), что было невозможно в схеме (1.12) [15].

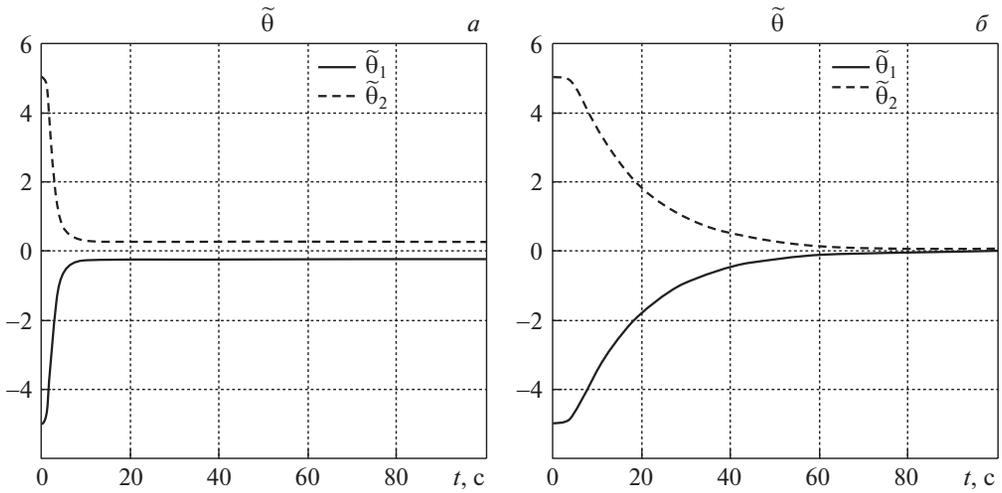


Рис. 2. Переходные процессы по параметрическим ошибкам  $\tilde{\theta}_1$  и  $\tilde{\theta}_2$  для законов оценки (1.8) и (3.1).

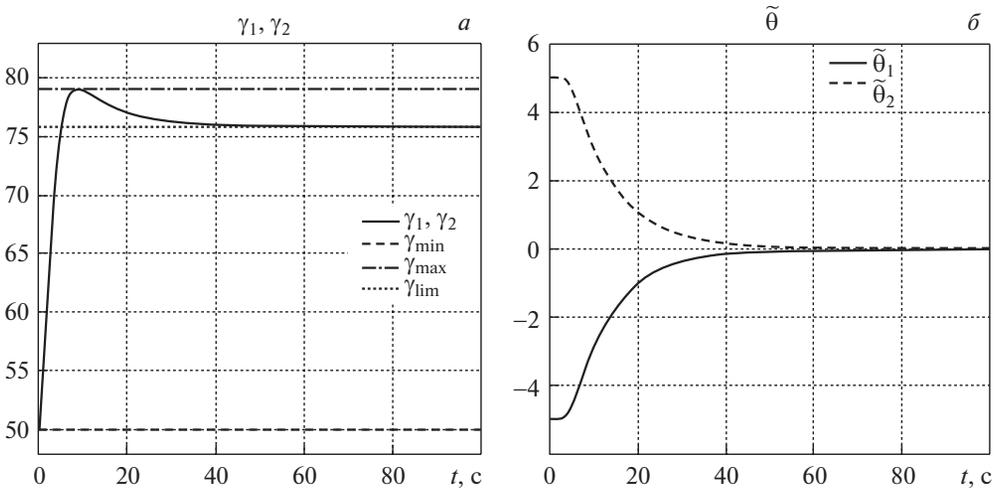


Рис. 3. Переходные процессы по коэффициентам усиления  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (а) и по параметрическим ошибкам  $\tilde{\theta}_1$  и  $\tilde{\theta}_2$  для контура (4.1) (б).

На рис. 3,б приведены переходные процессы по параметрическим ошибкам при использовании закона оценки с настраиваемым коэффициентом усиления (4.1).

Из сравнения переходных процессов рис. 2,а и рис. 3,б следует, что контур оценки (4.1), в отличие от (1.8), обеспечивает экспоненциальную сходимость параметрических ошибок  $\tilde{\theta}_1$  и  $\tilde{\theta}_2$  и использует настраиваемый коэффициент усиления, что подтверждает выводы, сделанные при доказательстве теоремы 2, и в совокупности с показанной на рис. 3,а ограниченностью  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$

свидетельствует о решении задачи 2. Для контура оценки (4.1) увеличения скорости сходимости ошибок  $\tilde{\theta}_1$  и  $\tilde{\theta}_2$  согласно части 4 теоремы 2 и замечанию П.3 (см. Приложение) можно добиться, увеличивая коэффициент  $\lambda$  или уменьшая параметр фильтра  $\mu$ .

## 7. Заключение

В статье для процедуры DREM предложена модификация, ослабляющая требование квадратичной интегрируемости для асимптотической сходимости процесса оценки до требования начального возбуждения регрессора. Кроме того, предложенный подход позволил обеспечить процессу оценки не только асимптотическую, но и экспоненциальную сходимость при выполнении требования начального возбуждения регрессора, что слабее требования постоянного возбуждения в исходной схеме DREM.

Результатом статьи являются контуры идентификации (3.1) и (4.1), которые могут быть использованы во многих задачах теории адаптивного управления, требующих идентификации постоянных параметров линейной регрессии (1.1).

В дальнейших исследованиях планируется ослабить принятое предположение и распространить полученные результаты на интервально заданные параметры регрессии (1.1).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство теоремы 1.* Чтобы осуществить доказательство теоремы 1 с учетом предположения, перепишем уравнение (3.1):

$$(П.1) \quad \dot{\tilde{\theta}}_i = -\gamma_i \Omega^2 \tilde{\theta}_i.$$

Так как  $\text{sign}(-\gamma_i \Omega^2) \leq 0$ , то  $\dot{\tilde{\theta}}_i \leq 0$ , а следовательно,  $\tilde{\theta}_i$  монотонна.

Для доказательства экспоненциальной сходимости ошибки  $\tilde{\theta}_i$  выберем кандидата в функции Ляпунова в виде квадратичной формы

$$(П.2) \quad V_i = 0,5 \tilde{\theta}_i^2.$$

Производная квадратичной формы (П.2) в силу действия уравнения (П.1) имеет вид

$$(П.3) \quad \dot{V}_i = \tilde{\theta}_i \dot{\tilde{\theta}}_i = \tilde{\theta}_i \left[ -\gamma_i \Omega^2 \tilde{\theta}_i \right] = -\gamma_i \Omega^2 \tilde{\theta}_i^2 \leq 0.$$

Найдем наименьшую отрицательную верхнюю границу производной (П.3). Для этого введем момент времени  $T \leq T_0$ , определяющий верхнюю границу наименьшего интервала времени, на котором выполняется  $\omega(t) \in \text{IE}$ . В этом случае условие (1.3) может быть переписано в виде

$$\int_t^T \omega^2(\tau) d\tau \geq \alpha.$$

Тогда  $\forall t \geq T$  верно неравенство

$$\int_{t_0}^t \omega^2(\tau) d\tau > 0.$$

Откуда, так как  $e^{-\mu t} > 0 \forall t < \infty$ , следует, что

$$(П.4) \quad \begin{aligned} \Omega(t) &= \int_{t_0}^t e^{-\mu\tau} \omega^2(\tau) d\tau > 0, \\ \Omega(t) &\geq \Omega(T) > 0 \quad \forall t \geq T, \end{aligned}$$

где  $\Omega(T)$  — наименьшее  $\forall t$  отличное от нуля значение регрессора  $\Omega(t)$ .

Если справедлива оценка (П.4), то справедлива и оценка

$$(П.5) \quad \Omega^2(t) \geq \Omega^2(T).$$

Тогда верхняя оценка производной (П.3)  $\forall t \geq T$  приобретает вид

$$(П.6) \quad \dot{V}_i \leq -\gamma_i \Omega^2(T) \tilde{\theta}_i^2 = -2\gamma_i \Omega^2(T) \left(0,5 \tilde{\theta}_i^2\right) = -\kappa_{\min} V_i.$$

*Замечание П.1.* В силу действия утверждения 3 время  $T$  и величина  $\Omega^2(T)$  на практике могут быть определены в момент времени выполнения равенства

$$(П.7) \quad \Omega(t) = c,$$

где  $c$  выбирается таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$0 < c < \mu^{-1} \operatorname{ess\,sup}_{t \geq t_0} |\omega^2(t)|.$$

Получим  $\forall t \geq T$  решение дифференциального неравенства (П.6) с учетом определения функции Ляпунова (П.2)

$$(П.8) \quad \tilde{\theta}_i \leq \sqrt{2e^{-\kappa_{\min}(t-T)} V_i(T)}.$$

Из уравнения (П.8) следует монотонная экспоненциальная сходимость параметрической ошибки  $\tilde{\theta}_i \forall t \geq T$  со скоростью больше чем  $0,5\kappa_{\min}$ , что и следовало доказать в первой части теоремы 1.

Чтобы доказать вторую часть теоремы 1, определим миноранту для ошибки  $\tilde{\theta}_i$ . В силу свойств регрессора  $\Omega(t)$ , доказанных в утверждении 3, а также определения  $\Omega_{\max}$  в (2.8) нижняя оценка производной функции Ляпунова примет вид

$$(П.9) \quad \dot{V}_i \geq -\gamma_i \Omega_{\max}^2 \tilde{\theta}_i^2 = -2\gamma_i \Omega_{\max}^2 \left(0,5 \tilde{\theta}_i^2\right) = -\kappa_{\max} V_i.$$

Тогда с учетом (П.8) для  $\tilde{\theta}_i$  справедливо неравенство

$$(П.10) \quad \sqrt{2e^{-\kappa_{\max}(t-T)}V_i(T)} \leq \tilde{\theta}_i \leq \sqrt{2e^{-\kappa_{\min}(t-T)}V_i(T)}.$$

Откуда по определению  $\kappa_{\min}$  и  $\kappa_{\max}$  следует возможность их увеличения с помощью выбора коэффициента усиления  $\gamma_i$ , что и требовалось доказать во второй части теоремы 1. Теорема 1 доказана.

*Замечание П.2.* Поскольку  $\Omega(T)$  и  $\Omega_{\max}$  зависят от постоянной фильтра  $\mu$  (см. (2.8), (П.4)), то увеличить  $\kappa_{\min}$  и  $\kappa_{\max}$  можно и с помощью выбора (уменьшения) значения параметра  $\mu$ .

*Доказательство теоремы 2.* Чтобы доказать первую часть теоремы 2, введем вспомогательное равенство

$$(П.11) \quad \frac{d}{dt}1 = \frac{d}{dt}[\gamma_i^{-1}\gamma_i] = \gamma_i \frac{d\gamma_i^{-1}}{dt} + \gamma_i^{-1} \frac{d\gamma_i}{dt} = 0.$$

Откуда, подставляя из (4.1) закон настройки  $\gamma_i(t)$ , имеем закон настройки  $\gamma_i^{-1}(t)$ :

$$(П.12) \quad \frac{d\gamma_i^{-1}}{dt} = -\gamma_i^{-2} \frac{d\gamma_i}{dt} = \Omega^2 - \lambda\gamma_i^{-1}.$$

Решим дифференциальное уравнение (П.12):

$$(П.13) \quad \gamma_i^{-1}(t) = \gamma_i^{-1}(0) e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \Omega^2(\tau) d\tau.$$

По доказанному в теореме 1  $\exists T > t_0$ , такая что для  $\Omega(t)$  верна оценка снизу (П.4), поэтому ограниченность  $\gamma_i^{-1}(t)$  удобно рассматривать на интервалах  $0 \leq t < T$  и  $t \geq T$ . Тогда  $\forall t < T$  полагаем  $\Omega(t) = 0$  и из (П.13) получаем неравенство на интервале  $t < T$  для  $\gamma_i^{-1}(t)$ :

$$(П.14) \quad \gamma_i^{-1}(0) e^{-\lambda T} \leq \gamma_i^{-1}(t) \leq \gamma_i^{-1}(0).$$

Перейдем к рассмотрению интервала  $t \geq T$ . Поскольку первое слагаемое функции (П.13) строго убывающее  $\forall t > 0$ , а второе, по доказанным в утверждении 3 свойствам функции  $\Omega(t)$ , — возрастающее  $\forall t \geq T$ , то минимум функции их суммы (П.13) будет достигнут при равенстве нулю суммы их производных при  $t < \infty$ . Тогда  $\forall t \geq T$  будет верна оценка снизу

$$(П.15) \quad \begin{aligned} \gamma_i^{-1}(t) &\geq \gamma_i^{-1}(0) e^{-\lambda T_{extr.\gamma_i}} + \int_0^{T_{extr.\gamma_i}} e^{-\lambda(T_{extr.\gamma_i}-\tau)} \Omega^2(\tau) d\tau \geq \\ &\geq \underbrace{\gamma_i^{-1}(0) e^{-\lambda T_{extr.\gamma_i}}}_{\gamma_i^{-1}(T_{extr.\gamma_i})}, \end{aligned}$$

где  $T \leq T_{extr.\gamma_i} < \infty$  — априорно неизвестный момент времени равенства модулей производных слагаемых в функции (П.13).

Также из свойств функции  $\Omega(t)$  и по теореме о среднем следует  $\forall t \geq T$  оценка сверху для  $\gamma_i^{-1}(t)$ :

$$(П.16) \quad \gamma_i^{-1}(t) \leq \Omega_{\max}^2 \int_T^t e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau = \Omega_{\max}^2 \frac{1 - e^{-\lambda(t-T)}}{\lambda} \leq \frac{\Omega_{\max}^2}{\lambda}.$$

Объединяя оценки (П.14) и (П.15)–(П.16), получим глобальные оценки для  $\gamma_i^{-1}(t)$ :

$$(П.17) \quad \min \left\{ \gamma_i^{-1}(0) e^{-\lambda T}, \gamma_i^{-1}(T_{extr.\gamma_i}) \right\} \leq \\ \leq \gamma_i^{-1}(t) \leq \max \left\{ \gamma_i^{-1}(0), \lambda^{-1} \Omega_{\max}^2 \right\}.$$

Откуда можно перейти к оценкам для  $\gamma_i(t)$ :

$$(П.18) \quad \underbrace{\min \left\{ \gamma_i(0), \lambda \Omega_{\max}^{-2} \right\}}_{\gamma_i. \min} \leq \gamma_i(t) \leq \underbrace{\max \left\{ \gamma_i(0) e^{\lambda T}, \gamma_i(T_{extr.\gamma_i}) \right\}}_{\gamma_i. \max}.$$

Что и требовалось доказать в первой части теоремы 2.

Чтобы доказать существование предела (4.3) для уравнения настройки коэффициента усиления  $\gamma_i(t)$ , введем кандидата в функции Ляпунова

$$(П.19) \quad V_i = 0,5\gamma_i^2.$$

Производная функции (П.19) примет вид

$$(П.20) \quad \dot{V}_i = \gamma_i \dot{\gamma}_i = 2 \cdot 0,5 \cdot \lambda \gamma_i^2 - 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5^{0,5} \cdot 0,5^{-0,5} \cdot \gamma_i^3 \Omega^2 = \\ = 2\lambda V_i - 2 \cdot 0,5^{-0,5} \cdot V_i \sqrt{V_i} \Omega^2 = -2V_i \left[ \sqrt{\frac{V_i}{0,5}} \Omega^2 - \lambda \right].$$

При  $t \rightarrow \infty$ , учитывая (2.8), производная (П.20) примет вид

$$(П.21) \quad \dot{V}_i = -2V_i \left[ \sqrt{\frac{V_i}{0,5}} \Omega_{\max}^2 - \lambda \right].$$

Как следует из выражения (П.21), производная квадратичной формы (П.19) при  $t \rightarrow \infty$  отрицательна вне множества

$$(П.22) \quad B_r = \left\{ \gamma_i \in \mathbb{R} : \gamma_i \leq \lambda \Omega_{\max}^{-2} = \partial B_r \right\}.$$

Так как производная квадратичной формы (П.19) отрицательна вне множества  $B_r$ , а внутри  $B_r$  — положительна, то согласно теореме ЛаСалля [16]

множество  $\partial B_r$ , определяющее границу множества  $B_r$ , является притягивающим ( $\partial B_r = \gamma_{\text{lim}}$ ) для траекторий  $\gamma_i(t)$ . Откуда следует выполнение предельного равенства (4.3), что и требовалось доказать во второй части теоремы 2.

Для доказательства третьей части теоремы 2 выберем кандидата в функции Ляпунова

$$(П.23) \quad \begin{aligned} V_i &= \gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i^2, \\ \min \left\{ \gamma_i^{-1}(0) e^{-\lambda T}, \gamma_i^{-1}(T_{\text{extr.}\gamma_i}) \right\} \tilde{\theta}_i^2 &\leq \\ &\leq \gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i^2 \leq \max \left\{ \gamma_i^{-1}(0), \lambda^{-1} \Omega_{\text{max}}^2 \right\} \tilde{\theta}_i^2. \end{aligned}$$

Найдем производную функции (П.23):

$$(П.24) \quad \begin{aligned} \dot{V}_i &= \dot{\gamma}_i^{-1} \tilde{\theta}_i^2 + 2\gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i \dot{\tilde{\theta}}_i = [\Omega^2 - \lambda \gamma_i^{-1}] \tilde{\theta}_i^2 + 2\gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i [-\gamma_i \Omega^2 \tilde{\theta}_i] = \\ &= -[\lambda \gamma_i^{-1} + \Omega^2] \tilde{\theta}_i^2. \end{aligned}$$

С учетом выражений (П.5) и (П.18) получим  $\forall t \geq T$  оценку сверху производной (П.24)

$$(П.25) \quad \begin{aligned} \dot{V}_i &\leq - \left[ \lambda \min \left\{ \gamma_i^{-1}(0) e^{-\lambda T}, \gamma_i^{-1}(T_{\text{extr.}\gamma_i}) \right\} + \Omega^2(T) \right] \tilde{\theta}_i^2 \leq \\ &\leq - \frac{\lambda \min \left\{ \gamma_i^{-1}(0) e^{-\lambda T}, \gamma_i^{-1}(T_{\text{extr.}\gamma_i}) \right\} + \Omega^2(T)}{\max \left\{ \gamma_i^{-1}(0), \lambda^{-1} \Omega_{\text{max}}^2 \right\}} \times \\ &\quad \times \max \left\{ \gamma_i^{-1}(0), \lambda^{-1} \Omega_{\text{max}}^2 \right\} \tilde{\theta}_i^2 \leq -\eta_{\text{min}} V_i. \end{aligned}$$

Решим  $\forall t \geq T$  дифференциальное неравенство (П.25), подставив при этом в левую часть полученного решения нижнюю оценку функции Ляпунова

$$(П.26) \quad \begin{aligned} \tilde{\theta}_i &\leq \sqrt{\max \left\{ \gamma_i(0) e^{\lambda T}, \gamma_i(T_{\text{extr.}\gamma_i}) \right\} e^{-\eta_{\text{min}}(t-T)} V_i(T)} = \\ &= \sqrt{\gamma_{i.\text{max}} e^{-\eta_{\text{min}}(t-T)} V_i(T)}. \end{aligned}$$

Из уравнения (П.25) следует монотонная экспоненциальная сходимость параметрической ошибки  $\tilde{\theta}_i \forall t \geq T$  со скоростью больше чем  $0,5\eta_{\text{min}}$ , что и следовало доказать в третьей части теоремы 2.

Для доказательства четвертой части теоремы 2, в силу свойств регрессора  $\Omega(t)$ , доказанных в утверждении 3, и определения  $\Omega_{\text{max}}$  в (2.8), получим нижнюю оценку производной (П.23):

$$(П.27) \quad \begin{aligned} \dot{V}_i &\geq - \left[ \lambda \max \left\{ \gamma_i^{-1}(0), \lambda^{-1} \Omega_{\text{max}}^2 \right\} + \Omega_{\text{max}}^2 \right] \tilde{\theta}_i^2 = \\ &= - \frac{\lambda \max \left\{ \gamma_i^{-1}(0), \lambda^{-1} \Omega_{\text{max}}^2 \right\} + \Omega_{\text{max}}^2}{\min \left\{ \gamma_i^{-1}(0) e^{-\lambda T}, \gamma_i^{-1}(T_{\text{extr.}\gamma_i}) \right\}} \times \\ &\quad \times \min \left\{ \gamma_i^{-1}(0) e^{-\lambda T}, \gamma_i^{-1}(T_{\text{extr.}\gamma_i}) \right\} \tilde{\theta}_i^2 = -\eta_{\text{max}} V_i. \end{aligned}$$

Решим  $\forall t \geq T$  дифференциальное неравенство (П.26), подставив при этом в левую часть полученного решения верхнюю оценку функции Ляпунова

$$(П.28) \quad \begin{aligned} \tilde{\theta}_i &\geq \sqrt{\min \{ \gamma_i(t_0), \lambda \Omega_{\max}^{-2} \} e^{-\eta_{\max}(t-T)} V_i(T)} = \\ &= \sqrt{\gamma_{i.\min} e^{-\eta_{\max}(t-T)} V_i(T)}. \end{aligned}$$

Тогда с учетом (П.26) для  $\tilde{\theta}_i$  справедливо неравенство

$$(П.29) \quad \sqrt{\gamma_{i.\min} e^{-\eta_{\max}(t-T)} V_i(T)} \leq \tilde{\theta}_i \leq \sqrt{\gamma_{i.\max} e^{-\eta_{\min}(t-T)} V_i(T)}.$$

Откуда по определению  $\eta_{\min}$  и  $\eta_{\max}$  следует возможность их увеличения с помощью выбора коэффициента  $\lambda$ , что и требовалось доказать в четвертой части теоремы 2. Теорема 2 доказана.

*Замечание П.3.* Поскольку  $\Omega(T)$ ,  $\Omega_{\max}$  и  $\gamma_i(T_{extr.\gamma_i})$  зависят (см. (2.8), (П.4), (П.15)) от постоянной фильтра  $\mu$ , то увеличить  $\eta_{\min}$  и  $\eta_{\max}$  можно и с помощью выбора (уменьшения) значения параметра  $\mu$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chowdhary G., Yucelen T., Muhlegg M., Johnson E. Concurrent Learning Adaptive Control of Linear Systems with Exponentially Convergent Bounds // Int. J. Adaptive Control Signal Process. 2013. V. 27. No. 4. P. 280–301.
2. Adetola V., Guay M. Finite-Time Parameter Estimation in Adaptive Control of Nonlinear Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2008. V. 53. No. 3. P. 807–811.
3. Wang J., Aranovskiy S.V., Bobtsov A.A., Pyrkin A.A., Kolyubin S.A. A Method to Provide Conditions for Sustained Excitation // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 2. P. 258–264.  
*Ванг Ц., Арановский С.В., Бобцов А.А., Пыркин А.А., Колубин С.А.* Метод обеспечения условий незатухающего возбуждения // АиТ. 2018. № 2. С. 71–79.
4. Roy S.B., Bhasin S., Kar I.N. Combined MRAC for Unknown MIMO LTI Systems with Parameter Convergence // IEEE Trans. Autom. Control. 2017. V. 63. No. 1. P. 283–290.
5. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A. Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing // IEEE Trans. Autom. Control. 2016. V. 62. No. 7. P. 3546–3550.
6. Aranovskiy S., Belov A., Ortega R., Barabanov N., Bobtsov A. Parameter Identification of Linear Time-Invariant Systems Using Dynamic Regressor Extension and Mixing // Int. J. Adaptive Control Signal Process. 2019. V. 33. No. 6. P. 1016–1030.
7. Ortega R., Nikiforov V., Gerasimov D. On Modified Parameter Estimators for Identification and Adaptive Control. A Unified Framework and Some New Schemes // Annual Reviews in Control. 2020. V. 50. P. 1–16.
8. Glushchenko A., Petrov V., Lastochkin K. Robust Method to Provide Exponential Convergence of Model Parameters Solving LTI Plant Identification Problem // arXiv preprint arXiv:2009.14496. 2020. P. 1–18.
9. Gerasimov D., Ortega R., Nikiforov V. Adaptive Control of Multivariable Systems with Reduced Knowledge of High Frequency Gain: Application of Dynamic Regressor Extension and Mixing Estimators. IFAC-PapersOnLine. 2018. V. 51. No. 15. P. 886–890.

10. *Pyrkin A., Bobtsov A., Ortega R., Vedyakov A., Aranovskiy S.* Adaptive State Observers Using Dynamic Regressor Extension and Mixing // *Syst. & Control Lett.* 2019. V. 133. No. 11. P. 1–8.
11. *Ortega R., Aranovskiy S., Pyrkin A., Astolfi A., Bobtsov A.* New Results on Parameter Estimation via Dynamic Regressor Extension and Mixing: Continuous and Discrete-Time Cases // *IEEE Trans. Autom. Control.* 2020. P. 1–8.
12. *Lion P.M.* Rapid Identification of Linear and Nonlinear Systems // *AIAA J.* 1967. V. 5. No. 10. P. 1835–1842.
13. *Kreisselmeier G.* Adaptive Observers with Exponential Rate of Convergence // *IEEE Trans. Autom. Control.* 1977. V. 22. No. 1. P. 2–8.
14. *Yi B., Ortega R.* Conditions for Convergence of Dynamic Regressor Extension and Mixing Parameter Estimator Using LTI Filters // *arXiv preprint arXiv:2007.15224.* 2020. P. 1–6.
15. *Korotina M., Aranovskiy S., Ushirobira R., Vedyakov A.* On Parameter Tuning and Convergence Properties of the DREM Procedure // *ECC 18th Europ. Control Conf.* 2020. P. 1–7.
16. *Khalil H.K., Grizzle J.W.* Nonlinear systems. N.J.: Prentice-Hall, 2002.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.*

Поступила в редакцию 28.10.2020

После доработки 09.12.2020

Принята к публикации 15.01.2021

## Заметки, хроника, информация



### К 100-летию профессора Н.С. Райбмана

**DOI:** 10.31857/S0005231021070096

4 февраля 2021 г. исполнилось 100 лет со дня рождения выдающегося ученого Наума Самойловича Райбмана.

Наум Самойлович был человеком необыкновенной душевной доброты, высокой интеллигентности, яркой одаренности. Всю свою сознательную жизнь он посвятил развитию отечественной науки, техники и промышленности. Он внес неоценимый вклад в развитие теории идентификации и управления сложными системами.

Н.С. Райбман родился 4 февраля 1921 г. на Украине в г. Меджибож Хмельницкой области. Обучение в Московском станкоинструментальном институте было прервано войной. Вместе с сокурсниками Н.С. Райбман служил в армии. После того как студентов возвращают в институт, продолжает обучение. В 1943 г., после окончания института, он был направлен в Новосибирск, где в течение нескольких лет работал технологом, а потом — заместителем начальника цеха на одном из оборонных заводов.

С 1946 по 1950 гг. Н.С. Райбман проходил обучение в аспирантуре Московского авиационного технологического института, где продолжил работать после защиты диссертации. Далее он преподавал в Уфимском авиационном институте. В Москву возвратился в 1959 г.

Начиная с этого времени он руководит отделом в одном из отраслевых НИИ.

В 1959 г. Наум Самойлович начинает работать в Институте автоматике и телемеханики АН СССР. В это время сферой его научных интересов становится идентификация систем управления.

В 1965 г. Н.С. Райбман защищает докторскую диссертацию по идентификации и начинает руководить научной группой в лаборатории В.С. Пугачева. В апреле 1968 г. на базе этой группы образуется лаборатория № 41 — Лаборатория идентификации объектов управления.

Н.С. Райбман приложил много усилий к тому, чтобы идентификация объектов и систем управления была сформирована в виде отдельного научного направления. Он полагал, что в создании новых принципов и методов построения моделей объектов для решения задач анализа и синтеза систем управления важную роль должны играть парирование неполноты и неточности априорной информации, а также учет реальных условий функционирования и изменений во времени как характеристик самих объектов, так и условий их функционирования.

Под руководством Н.С. Райбмана были разработаны новые методы идентификации многомерных, нелинейных, нестационарных объектов, гетероскедастических объектов, методы определения структуры, методы идентификации объектов с распределенными параметрами. Была создана дисперсионная теория статистически оптимальных систем, в рамках которой характеристики оптимальной системы находятся по сложному критерию, представляющему собой функционал от дисперсионных функций различных типов.

Теория адаптивных систем управления с идентификатором, предложенная Н.С. Райбманом, соединявшем в себе талант ученого и техническую эрудицию инженера, получила реальное воплощение: адаптивные системы с идентификатором для управления точностью горячей прокатки бесшовных труб были внедрены на многих заводах страны. В 1976 г. коллективу лаборатории 41 ИПУ РАН под руководством Н.С. Райбмана была присуждена Государственная премия СССР за разработку и успешное внедрение системы управления трубопрокатным станом 160 на Первоуральском новотрубном заводе.

Научные результаты Н.С. Райбмана опубликованы в 7 книгах и 150 статьях, которые и сегодня вызывают интерес у исследователей и студентов.

Н.С. Райбман много времени и сил отдавал воспитанию молодых специалистов, успешно работающих сегодня в нашей стране и за рубежом. Благодаря активной научно-организационной деятельности Наума Самойловича многие конференции по теории управления, проводимые как в СССР, так и в других странах, стали включать секции, посвященные исследованиям в области идентификации.

Н.С. Райбман и сотрудники лаборатории осуществляли координирование направления идентификации на конференциях и симпозиумах, проводимых Международной Федерацией автоматического управления (ИФАК), Советом экономической взаимопомощи (СЭВ), Европейской экономической комиссией (ЕЭК). В организации и проведении IV Симпозиума ИФАК по идентификации и оцениванию параметров систем в Тбилиси в 1976 г. принимали

деятельное участие Н.С. Райбман и сотрудники его лаборатории. Также осуществлялись: организация Всесоюзных симпозиумов по статистическим методам в управлении, проводимых в Москве, Ташкенте, Фрунзе, Вильнюсе; организация всесоюзных ежегодных семинаров по идентификации в рамках программы “Кибернетика”.

Под редакцией Н.С. Райбмана выходят переводы лучших зарубежных книг по идентификации.

На протяжении многих лет Н.С. Райбман активно функционировал в структурах ИФАК. В течение последних четырех лет жизни он был членом Консультативного комитета ИФАК.

Наум Самойлович скончался 8 января 1981 г. — сорок лет назад. Он ушел в расцвете творческих сил. Многие ученые в разных странах откликнулись на его кончину посвящением ему научных публикаций. Его памяти был посвящен VI Симпозиум ИФАК по идентификации и оцениванию параметров систем, состоявшийся в 1982 г. в Вашингтоне.

Сегодня дело Н.С. Райбмана — идентификация систем управления — активно развивается как в рамках традиционных, так и создаваемых сегодня новых направлений, в том числе — в лаборатории 41 ИПУ РАН.

*Группа сотрудников ИПУ РАН*

---

---

## СОДЕРЖАНИЕ

К 75-летию академика Васильева Станислава Николаевича ..... 3

### Обзоры

**Бурков В.Н., Еналеев А.К., Коргин Н.А.** Согласованность и неманипулируемость механизмов организационного управления: текущее состояние проблемы, ретроспектива, перспективы развития теоретических исследований ..... 5

### Линейные системы

**Кокунько Ю.Г., Краснова С.А., Уткин В.А.** Каскадный синтез дифференциаторов с кусочно-линейными корректирующими воздействиями ..... 38

### Нелинейные системы

**Александров В.А., Зыбин Е.Ю., Косьянчук В.В., Сельвесюк Н.И., Тремба А.А., Хлебников М.В.** Оптимизация высотно-скоростного профиля крейсерского полета воздушного судна при фиксированном времени прибытия ..... 69

**Сапунков Я.Г., Молоденков А.В.** Аналитическое решение задачи оптимального в смысле комбинированного функционала разворота осесимметричного космического аппарата ..... 86

### Робастное, адаптивное и сетевое управление

**Айда-заде К.Р., Ашрафова Е.Р.** Оптимизация мест и параметров источников для объектов сетевой структуры ..... 107

### Интеллектуальные системы управления, анализ данных

**Агеев С.А., Привалов А.А., Каретников В.В., Буцанец А.А.** Адаптивный метод оценки характеристик трафика в высокоскоростных мультисервисных сетях связи на основе процедуры нечеткого регулирования ..... 133

**Глуценко А.И., Петров В.А., Ласточкин К.А.** I-DREM: ослабление условия квадратичной интегрируемости ..... 147

### Заметки, хроника, информация

К 100-летию профессора Н.С. Райбмана ..... 166

## C O N T E N T S

To the 75th Anniversary of Academician S.N. Vassilyev ..... 3

### Surveys

**Burkov V.N., Enaleev A.K., Korgin N.A.** Incentive Compatibility and Strategy-Proofness of Mechanisms of Organizational Behavior Control: Retrospective, Current State and Perspectives for Theoretical Research ..... 5

### Linear Systems

**Kokunko Ju.G., Krasnova S.A., Utkin V.A.** Cascade Synthesis of Differentiators with Piecewise Linear Corrective Actions ..... 38

### Nonlinear Systems

**Alexandrov V.A., Zybin E.Yu., Kosyanchuk V.V., Selvesyuk N.I., Tremba A.A., Khlebnikov M.V.** Optimization of the Altitude and Speed Profile of the Aircraft Cruise with a Fixed Arrival Time ..... 69

**Sapunkov Ya.G., Molodenkov A.V.** Analytical Solution of the Optimal Attitude Maneuver Problem with a Combined Objective Functional for an Axissymmetric Spacecraft ..... 86

### Robust, Adaptive and Network Control

**Aida-zade K.R., Ashrafova Ye.R.** Optimization of Locations and Parameters of Sources for Objects of Network Structure ..... 107

### Intellectual Control Systems, Data Analysis

**Ageev S.A., Privalov A.A., Karetnikov V.V., Butsanets A.A.** Adaptive Estimation Method of Traffic Characteristics in high – Speed Multiservice Communication Networks Based on Fuzzy Control Procedure ..... 133

**Glushchenko A.I., Petrov V.A., Lastochkin K.A.** I-DREM: Relaxation of Square Integrability Condition ..... 147

### Notes, Meetings, Information

To the 100th Anniversary of Professor N.S. Raibman ..... 166