Российская Академия Наук

Автоматика и Телемеханика

Журнал основан в 1936 году
Выходит 12 раз в год

12
декабрь
Москва
2020

Учредители журнала:
Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
Тел./факс: (495) 334-87-70
Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва
ООО «ИКЦ «АКАДЕМКНИГА»

Тематический выпуск[1]

© 2020 г. **В.М. АЗАНОВ, канд. физ.-мат. наук (azanov59@gmail.com)**
(Московский авиационный институт)

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С ВЕРОЯТНОСТНЫМ КРИТЕРИЕМ И НЕФИКСИРОВАННЫМ ВРЕМЕНЕМ ОКОНЧАНИЯ[2]

Рассматривается задача оптимального управления дискретной стохастической системой с критерием в форме вероятности первого достижения границ заданной области. Формулируются и доказываются достаточные условия оптимальности в форме метода динамического программирования. С помощью поверхностей уровней 1 и 0 функции Беллмана находятся двусторонние оценки функции правой части уравнения метода динамического программирования, функции Беллмана и функции оптимального значения вероятностного критерия, и предлагается способ построения субоптимального управления. Формулируются условия эквивалентности с задачей оптимального управления с вероятностным терминальным критерием. Рассматривается пример.

Ключевые слова: дискретные системы, стохастическое оптимальное управление, вероятностный критерий, метод динамического программирования, функция Беллмана.

DOI: 10.31857/S0005231020120016

1. Введение

Одним из важнейших направлений исследований в области стохастического оптимального управления являются задачи с нефиксированным моментом остановки. Среди них отдельно выделяют задачу стохастического быстродействия [1, 2], задачу с бесконечным горизонтом управления [3–6], задачу оптимизации времени пребывания системы в заданной трубке траекторий [1, 7] и задачу оптимизации момента первого достижения границ заднной области [1, 8, 9]. Модели управления с нефиксированным моментом остановки имеют широкое применение в авиационной [10], экономической [11], биологической, робототехнической и энергетической [1] областях. В случае систем с непрерывным временем известность получили методы, основанные на достаточных условиях оптимальности в форме метода динамического программирования, позволяющие искать оптимальные стратегии в классе позиционных. Интересно, что использование именно вероятностного критерия [1, 7]

---

[1] Статьи данной рубрики являются окончанием тематического выпуска, посвященного В.С. Пугачеву (№ 11, 2020).

[2] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-00595).

приводит к конструктивной форме постановки задач управления с нефиксированным временем, для которой удается записать уравнение Беллмана. Тем не менее до сих пор существует ряд принципиальных проблем численного поиска оптимального управления, а аналитические решения получены лишь для ряда модельных задач [1]. Это обстоятельство связано со следующими трудностями: решение уравнения Беллмана может быть не единственным; даже если решение уравнения Беллмана существует в классе гладких функций, оно может быть недопустимым (например, потому что при нем может не существовать сильного решения уравнения стохастической системы в форме Ито); в классе допустимых управлений не всегда существует такое, при котором достигается точная грань критерия; уравнение Беллмана связано с так называемым "проклятьем размерности".

В случае дискретного времени качественная теория подобных задач изложена в [3]. Известны решения отдельных задач экономики [11] и модельных примеров [9]. В [9] была рассмотрена задача оптимизации вероятности первого достижения окрестности нуля траекториями линейной стохастической системы в канонической форме управляемости Бруновского. С помощью ее сведения к задаче с вероятностным терминальным критерием и дальнейшим использованием метода динамического программирования в форме [12] было найдено ее аналитическое решение.

В настоящей статье исследуется задача оптимального управления дискретной стохастической системой с критерием вероятности первого достижения ее траекториями заданной трубки. Исследуются достаточные условия оптимальности, схожие с [12], и свойства двусторонних границ функции Беллмана [13, 14]. Находятся условия эквивалентности с задачей оптимального управления с вероятностным терминальным критерием [12]. В качестве примера рассматривается задача управления портфелем ценных бумаг.

2. Постановка задачи

Рассмотрим стохастическую систему с дискретным временем

$$(1) \qquad \begin{cases} x_{k+1} = f_k\left(x_k, u_k, \xi_k\right), \\ x_0 = X, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N},$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u_k \in U_k \subset \mathbb{R}^m$ – вектор управления, U_k – множество ограничений на управление, ξ_k – вектор случайных возмущений со значениями на $\mathbb{R}^s$ и известным распределением $\mathbf{P}_{\xi_k}$, $f_k \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$ – функция перехода (функция системы), $N \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ — горизонт управления.

В отношении системы (1) введем *предположения:*

1. Известна полная информация о векторе состояния x_k (данный факт позволяет строить управление в классе функций $u_k = \gamma_k\left(x_k\right)$, где $\gamma_k\left(\cdot\right)$ — некоторая измеримая функция). В данном случае говорят, что "управление ищется в классе полной обратной связи по состоянию";

2. Начальное состояние $x_0 = X$ является детерминированным вектором из $\mathbb{R}^n$;

3. Функция системы $f_k\left(x_k, u_k, \xi_k\right)$ непрерывна для всех k;

4. Вектор управления u_k формируется следующим образом: $u_k = \gamma_k(x_k)$, где $\gamma_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – измеримая функция с ограниченными значениями $u_k \in U_k$, причем U_k — компактное множество;

5. Вектор состояния x_{k+1} формируется следующим образом: на шаге k реализуется вектор x_k, далее формируется вектор управления $u_k = \gamma_k(x_k)$ и в последнюю очередь реализуется случайное возмущение ξ_k;

6. Управлением называется набор функций $u(\cdot) = (\gamma_0(\cdot), \ldots, \gamma_N(\cdot)) \in \mathcal{U}$, классом допустимых управлений называется множество $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \times \ldots \times \mathcal{U}_N$, где $\mathcal{U}_k$ — множество борелевских функций $\gamma_k(\cdot)$ с ограниченными на U_k значениями;

7. Случайный вектор ξ_k является непрерывным с значениями в $\mathbb{R}^s$ и известным распределением $\mathbf{P}_{\xi_k}$, причем компоненты вектора $\zeta = (X, \xi_0, \ldots, \xi_N)$ независимы.

Заметим, что система (1) является марковской, т.е. ее поведение в будущем не зависит от прошлого и полностью определяется текущим состоянием.

На траекториях системы (1) определим функционал вероятности

$$P(u(\cdot)) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N} \{x_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\}\right),$$

множества $\mathcal{F}_k$ имеют вид

$$\begin{cases} \mathcal{F}_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \Phi_k(x) \leqslant \varphi\}, \quad k = \overline{1, N+1}, \\ \mathcal{F}_0 = \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$ — известный скаляр, $\Phi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции, $k = 1, \ldots, N+1$, причем $\Phi_{N+1}(x)$ ограничена снизу.

Рассматривается задача

$$P(u(\cdot)) \to \max_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}, \tag{2}$$

где $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \times \ldots \times \mathcal{U}_N$.

Физически задача (2) заключается в поиске управления, максимизирующего вероятность первого достижения трубки траекторий, заданной в виде последовательности множеств $\{\mathcal{F}_{k+1}\}_{k=0}^{N}$.

Отметим, что метод динамического программирования в форме [12], сформулированный для задач оптимального управления с вероятностным терминальным критерием, неприменим в общем случае к задаче (2). В разделе 3 устанавливаются достаточные условия оптимальности в форме метода динамического программирования, схожие с [12].

3. Метод динамического программирования и двусторонние оценки функции Беллмана

Определим функцию Беллмана $\mathsf{B}_k : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ в задаче (2) как

$$\mathsf{B}_k(x) = \sup_{\gamma_k(\cdot) \in \mathcal{U}_k, \ldots, \gamma_N(\cdot) \in \mathcal{U}_N} \mathbf{P}\left(\min_{i=\overline{k,N}} \Phi_{i+1}(x_{i+1}) \leqslant \varphi \,\Big|\, x_k = x\right).$$

Принимая во внимание сделанные в разделе 2 предположения, сформулируем теорему об уравнении Беллмана для задачи (2) в пространстве состояний размерности n.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*:

1) *функции* $f_k(x_k, u_k, \xi_k)$ *непрерывны для всех* $k = \overline{0, N}$;
2) *функции* $\Phi_k(x_k)$ *непрерывны для всех* $k = \overline{1, N+1}$;
3) *функция* $\Phi_{N+1}(x_{N+1})$ *ограничена снизу*;
4) *случайные векторы* $X, \xi_0, \ldots, \xi_N$ *независимы*;
5) *множества* $U_0, \ldots, U_N$ *компактны*.

Тогда оптимальное управление в задаче (2) *существует в классе измеримых функций* $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}$ *и определяется в результате решения следующих задач*:

$$\gamma_k^*(x) = \arg\max_{u \in U_k} \mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x) + \left(1 - \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)\right)\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k(x, u, \xi_k)\right)\right], \tag{3}$$

$$\mathsf{B}_k(x) = \max_{u \in U_k} \mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x) + \left(1 - \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)\right)\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k(x, u, \xi_k)\right)\right], \quad k = \overline{0, N}, \tag{4}$$

$$\mathsf{B}_{N+1}(x) = \mathbf{I}_{\mathcal{F}_{N+1}}(x). \tag{5}$$

Доказательства теоремы 1, всех последующих теорем, утверждений и леммы приведены в Приложении.

В теореме 1 $\mathbf{M}_{\xi_k}[\cdot]$ — оператор математического ожидания по распределению $\mathbf{P}_{\xi_k}$ случайного вектора ξ_k, а $\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)$ — индикаторная функция множества $\mathcal{F}_k$. Заметим, что соотношения (3)–(5) отличаются от классического уравнения Беллмана [12] в задаче с вероятностным терминальным критерием наличием в правой части дополнительного слагаемого $\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)$ и множителя $1 - \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)$ под оператором математического ожидания.

Как известно, прямое интегрирование уравнения Беллмана связано с трудностями вычислений кратных интегралов и решения задач стохастического программирования в его правой части. Указанные трудности неоднократно проявлялись даже для систем простейшего вида, например для системы управления портфелем ценных бумаг [15–17] и для системы управления стационарным спутником [12]. Вследствие этого на протяжении почти двадцати лет задачи оптимального управления с вероятностным критерием рассматривались в одношаговой $N = 0$ и двухшаговой $N = 1$ постановках [15–17]. В [13, 14] с использованием поверхностей уровня 1 и 0 были найдены двусторонние границы функции Беллмана, что позволило получить решение отдельных задач оптимального управления с вероятностным критерием для произвольного шага по времени N.

По аналогии с [13, 14] исследуем свойства функции Беллмана для задачи (2) с помощью поверхностей уровня 1 и 0 функции Беллмана.

4. Двусторонние границы функции Беллмана

Введем в рассмотрение поверхности уровней 1 и 0 функции Беллмана

$$\mathcal{I}_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad \mathsf{B}_k(x) = 1\}, \quad \mathcal{O}_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad \mathsf{B}_k(x) = 0\}$$

и множество $\mathcal{B}_k = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathcal{I}_k \cup \mathcal{O}_k\}$. Для удобства введем обозначение $\overline{\mathcal{F}}_k = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{F}_k$. Нетрудно видеть, что из определения введенных множеств выполнено, что

$$\mathcal{I}_k \cup \mathcal{B}_k \cup \mathcal{O}_k = \mathbb{R}^n, \quad \begin{cases} \mathsf{B}_k(x) = 1, & x \in \mathcal{I}_k, \\ \mathsf{B}_k(x) \in (0,1), & x \in \mathcal{B}_k, \\ \mathsf{B}_k(x) = 0, & x \in \mathcal{O}_k. \end{cases}$$

Т е о р е м а 2. *Справедливы утверждения*:

1. *Множества $\mathcal{I}_k$, $k = \overline{0,N}$, удовлетворяют рекуррентным соотношениям в обратном времени*

$$\mathcal{I}_k = \mathcal{F}_k \cup \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u \in U_k : \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x,u,\xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) = 1\}, \quad k = \overline{0,N},$$
$$\mathcal{I}_{N+1} = \mathcal{F}_{N+1};$$

2. *Множества $\mathcal{O}_k$, $k = \overline{0,N}$, удовлетворяют рекуррентным соотношениям в обратном времени*

$$\mathcal{O}_k = \overline{\mathcal{F}}_k \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \forall u \in U_k : \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x,u,\xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}) = 1\}, \quad k = \overline{0,N},$$
$$\mathcal{O}_{N+1} = \overline{\mathcal{F}}_{N+1};$$

3. *Для $x \in \mathcal{I}_k$ функция $\gamma_k^*(x)$ принимает любое значение из множества $U_k^{\mathcal{I}}(x)$*

$$U_k^{\mathcal{I}}(x) = \{u \in U_k : \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x,u,\xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) = 1\}; \tag{6}$$

4. *Для $x \in \mathcal{O}_k$ функция $\gamma_k^*(x)$ принимает любое значение из множества U_k;*

5. *Уравнение Беллмана в области $x \in \mathcal{B}_k$ допускает представление*

$$\begin{aligned} \mathsf{B}_k(x) = \max_{u \in U_k} \Big\{ &\mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x,u,\xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) + \\ &+ \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x,u,\xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}) \mathbf{M}_{\xi_k}\Big[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u,\xi_k)) \;\Big|\; f_k(x,u,\xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}\Big] \Big\}; \end{aligned} \tag{7}$$

6. *Для $x \in \mathcal{B}_k$ и $u \in U_k$ справедлива система неравенств*

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x,u,\xi_k) \in \mathcal{F}_{k+1}) \leqslant \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x,u,\xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) \leqslant \\ &\leqslant \mathbf{M}_{\xi_k}[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u,\xi_k))] \leqslant 1 - \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x,u,\xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}); \end{aligned} \tag{8}$$

7. *Для $x \in \mathcal{B}_k$ функция Беллмана удовлетворяет двустороннему неравенству*

$$\Psi_k(x) \leqslant \underline{\mathsf{B}}_k(x) \leqslant \mathsf{B}_k(x) \leqslant \overline{\mathsf{B}}_k(x), \tag{9}$$

где

$$\Psi_k(x) = \sup_{u \in U_k} \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x,u,\xi_k) \in \mathcal{F}_{k+1}), \tag{10}$$

$\underline{\mathsf{B}}_k(x)$ — *нижняя, а* $\overline{\mathsf{B}}_k(x)$ — *верхняя оценки функции Беллмана*

$$\underline{\mathsf{B}}_k(x) = \sup_{u \in U_k} \mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}\right),$$

$$\overline{\mathsf{B}}_k(x) = \sup_{u \in U_k} \left\{1 - \mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}\right)\right\},$$

причем $\underline{\mathsf{B}}_N(x) = \mathsf{B}_N(x) = \overline{\mathsf{B}}_N(x)$.

Отличием правой части соотношений п. 1 теоремы 2 от соотношений для поверхности уровня 1 функции Беллмана в задаче с терминальным вероятностным критерием [18] является наличие операции объединения с множеством $\mathcal{F}_k$. Для поверхности уровня 0 функции Беллмана отличие заключается в наличии операции пересечения с множеством $\overline{\mathcal{F}}_k$. Пункты 3 и 4 устанавливают простейшие (относительно (3)) выражения для определения оптимального управления при $x_k \in \mathcal{I}_k \cup \mathcal{O}_k$, которые с точностью до конструкций множеств $\mathcal{I}_k$ совпадают с аналогичными в задаче с терминальным вероятностным критерием. Пункты 6 и 7 теоремы 2 устанавливают двусторонние оценки функции правой части уравнения динамического программирования и функции Беллмана соответственно. При этом выражения для нижних и верхних границ с точностью до конструкций множеств $\mathcal{I}_k$ и $\mathcal{O}_k$ совпадают с аналогичными в задаче с терминальным критерием [13, 18]. Отличием же является наличие дополнительного неравенства в левой части (8) и, как следствие, неравенства $\Psi_k(x) \leqslant \underline{\mathsf{B}}_k(x)$.

Исследуем детально свойства стратегии, максимизирующей на каждом шаге нижнюю границу функции правой части уравнения динамического программирования.

5. Субоптимальная стратегия

Определим стратегию $\underline{u}(\cdot) = \left(\underline{\gamma}_0(\cdot), \ldots, \underline{\gamma}_N(\cdot)\right)$, где

$$\underline{\gamma}_k(x) = \arg\max_{u \in U_k} \mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}\right), \quad k = \overline{0, N}. \tag{11}$$

Данная стратегия обладает следующими с в о й с т в а м и:

- *При* $x \in \mathcal{I}_k \cup \mathcal{O}_k$ *для всех* $k = \overline{0, N}$ *выполнено равенство* $\underline{\gamma}_k(x) = \gamma_k^*(x)$;
- *Для* $k = N$ *выполнено равенство* $\underline{\gamma}_k(x) = \gamma_k^*(x)$;
- *Из* $\mathcal{F}_k = \mathcal{I}_k$ *для всех* $k = \overline{0, N}$ *следует* $\underline{\gamma}_k(x) = \gamma_k^*(x)$.

Т е о р е м а 3. *Пусть стратегия* $\underline{u}(\cdot)$ *существует в классе* $\mathcal{U}$. *Тогда справедливы утверждения*:

1. *Значение вероятностного критерия на стратегии* $\underline{u}(\cdot)$ *имеет вид*

$$P(\underline{u}(\cdot)) = \underline{F}(\varphi, N, X) + $$
$$+ \sum_{l=1}^{N-1} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{l} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{l} \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{I}_{k+1}\} \,\middle|\, \bigcap_{k=1}^{l} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right) + \tag{12}$$
$$+ \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N} \{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\} \,\middle|\, \bigcap_{k=1}^{N} \{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right),$$

где $\underline{x}_k$ *— траектория системы, замкнутой управлением* (11)

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = f_k\left(\underline{x}_k, \underline{u}_k, \xi_k\right), \\ \underline{x}_0 = X, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N},$$

где $\underline{u}_k = \underline{\gamma}_k\left(\underline{x}_k\right)$;

2. *Оптимальное значение вероятностного критерия имеет вид*

$$P\left(u^*\left(\cdot\right)\right) = \underline{F}\left(\varphi, N, X\right) +$$

$$+\sum_{l=1}^{N-1} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{l}\left\{x_k^* \notin \mathcal{I}_k\right\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{l}\left\{x_{k+1}^* \in \mathcal{I}_{k+1}\right\} \middle| \bigcap_{k=1}^{l}\left\{x_k^* \notin \mathcal{I}_k\right\}\right) + \tag{13}$$

$$+\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N}\left\{x_k^* \notin \mathcal{I}_k\right\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N}\left\{x_{k+1}^* \in \mathcal{F}_{k+1}\right\} \middle| \bigcap_{k=1}^{N}\left\{x_k^* \notin \mathcal{I}_k\right\}\right),$$

где x_k^* *— траектория системы, замкнутой оптимальным управлением*

$$\begin{cases} x_{k+1}^* = f_k\left(x_k^*, u_k^*, \xi_k\right), \\ x_0^* = X, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N},$$

где $u_k^* = \gamma_k^*\left(x_k^*\right)$;

3. *Для любых* $\varphi \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $X \in \mathbb{R}^n$ *справедлива система неравенств*

$$F^{\mathcal{F}}\left(\varphi, N, X\right) \leqslant \underline{F}\left(\varphi, N, X\right) \leqslant P\left(\underline{u}\left(\cdot\right)\right) \leqslant P\left(u^*\left(\cdot\right)\right) \leqslant \overline{F}\left(\varphi, N, X\right), \tag{14}$$

где функции

$$F^{\mathcal{F}}\colon \mathbb{R}\times\mathbb{N}\times\mathbb{R}^n \to [0,1], \quad \underline{F}\colon \mathbb{R}\times\mathbb{N}\times\mathbb{R}^n \to [0,1], \quad \overline{F}\colon \mathbb{R}\times\mathbb{N}\times\mathbb{R}^n \to [0,1]$$

имеют вид

$$F^{\mathcal{F}}\left(\varphi, N, X\right) = \Psi_0\left(X\right), \quad \underline{F}\left(\varphi, N, X\right) = \underline{\mathsf{B}}_0\left(X\right), \quad \overline{F}\left(\varphi, N, X\right) = \overline{\mathsf{B}}_0\left(X\right).$$

Из теоремы 3 можно получить оценку качества субоптимальной стратегии (11) $\underline{u}\left(\cdot\right)$

$$P\left(u^*\left(\cdot\right)\right) - P\left(\underline{u}\left(\cdot\right)\right) \leqslant \Delta\left(\varphi, N, X\right),$$

справедливую для всех

$$\varphi \in \mathbb{R}, \quad N \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \quad X \in \mathbb{R}^n,$$

где функция $\Delta : \mathbb{R}\times\mathbb{N}\times\mathbb{R}^n \to [0,1]$ имеет вид

$$\Delta\left(\varphi, N, X\right) = \overline{F}\left(\varphi, N, X\right) - \underline{F}\left(\varphi, N, X\right) -$$

$$-\sum_{l=1}^{N-1} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{l}\left\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\right\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{l}\left\{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{I}_{k+1}\right\} \middle| \bigcap_{k=1}^{l}\left\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\right\}\right) - \tag{15}$$

$$-\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\right\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N}\left\{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\right\} \middle| \bigcap_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\right\}\right).$$

Исследуем условия эквивалентности задачи (2) и задачи оптимального управления с вероятностным терминальным критерием.

6. Условия эквивалентности с задачей оптимального управления с вероятностным терминальным критерием

Рассмотрим вероятностный терминальный критерий на траекториях системы (1)

$$P_{\varphi}\left(u\left(\cdot\right)\right) = \mathbf{P}\left(x_{N+1} \in \mathcal{F}_{N+1}\right) = \mathbf{P}\left(\Phi_{N+1}\left(x_{N+1}\right) \leqslant \varphi\right) \tag{16}$$

и задачу оптимального управления

$$P_{\varphi}\left(u\left(\cdot\right)\right) \to \max_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} . \tag{17}$$

Согласно [12] решение задачи (17) существует в классе $\mathcal{U}$ и определяется в результате решения уравнений динамического программирования

$$\gamma_k^{\varphi}\left(x\right) = \arg\max_{u\in U_k} \mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x, u, \xi_k\right)\right)\right], \tag{18}$$

$$\mathsf{B}_k^{\varphi}\left(x\right) = \max_{u\in U_k} \mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x, u, \xi_k\right)\right)\right], \quad k = \overline{0, N}, \tag{19}$$

$$\mathsf{B}_{N+1}^{\varphi}\left(x\right) = \mathbf{I}_{\mathcal{F}_{N+1}}\left(x\right), \tag{20}$$

где $\mathsf{B}_k^{\varphi}\left(x\right)$ – функция Беллмана в задаче (17).

Сформулируем утверждение об эквивалентности задач (2) и (17).

Лемма. Пусть для всех $k = \overline{0, N}$ выполнено $\mathcal{F}_k \subseteq \Delta\mathcal{I}_k$, где

$$\Delta\mathcal{I}_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \exists u \in U_k : \mathbf{P}\left(f_k\left(x, u, \xi_k\right) \in \mathcal{I}_{k+1}\right) = 1\right\}. \tag{21}$$

Тогда задача (3) *эквивалентна задаче оптимального управления с вероятностным терминальным критерием* (17) *в смысле равенства оптимальных стратегий $u^*\left(\cdot\right) = u^{\varphi}\left(\cdot\right)$, оптимальных значений критериев $P\left(u^*\left(\cdot\right)\right) = P_{\varphi}\left(u^{\varphi}\left(\cdot\right)\right)$ и равенства для всех $k = \overline{0, N+1}$ и $x \in \mathbb{R}^n$ функций Беллмана $\mathsf{B}_k\left(x\right) = \mathsf{B}_k^{\varphi}\left(x\right)$.*

Отметим, что из леммы для узкого класса систем можно получить более конкретные условия эквивалентности задач (2) и (17), однако это не является целью данной статьи.

Применим полученные результаты для исследования дополнительных свойств задачи оптимального управления портфелем ценных бумаг с вероятностным критерием.

7. Управление портфелем ценных бумаг с нефиксированным временем окончания

Рассмотрим дискретную стохастическую систему управления вида [13, 19]

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k\left(1 + bu_k^1 + \sum_{j=2}^{m} u_k^j \xi_k^{j-1}\right), \\ x_0 = X, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N}, \tag{22}$$

где $n=1$, m и $s=m-1$ — размерности векторов состояния, управления и случайных возмущений соответственно, $X>0$, $b>-1$, $\varphi<0$ — детерминированные скаляры, $\xi_k=\left(\xi_k^1,\ldots,\xi_k^{m-1}\right)^{\mathtt{T}}$ — случайные векторы с независимыми компонентами, причем ξ_{k+1} и ξ_k являются независимыми для всех $k=\overline{0,N-1}$. Пусть ограничения на управления заданы в виде

$$U_k=U=\left\{u\in\mathbb{R}^m:\ \sum_{j=1}^m u^j=1,\ u^j\geqslant 0,\ \forall j=\overline{1,m}\right\},\quad k=\overline{0,N}.$$

Предположим, что носитель распределения случайных векторов ξ_k имеет вид $\operatorname{supp}\rho_\xi\left(t\right)=\bigotimes\limits_{j=1}^{m-1}\left[\underline{\varepsilon}_j,\overline{\varepsilon}_j\right]$, причем $\forall j=\overline{1,m-1}$ выполнено $-1\leqslant\underline{\varepsilon}_j\leqslant b\leqslant\overline{\varepsilon}_j$.

Рассмотрим задачу оптимального управления с нефиксированным временем

$$\mathbf{P}\left(\min_{k=\overline{0,N}}\left\{-x_{k+1}\right\}\leqslant\varphi\right)\to\sup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}}\tag{23}$$

и задачу с вероятностным терминальным критерием

$$\mathbf{P}\left(-x_{N+1}\leqslant\varphi\right)\to\sup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}}.\tag{24}$$

В обозначениях, введенных в статье, имеем:

$$\mathcal{F}_k=\mathcal{F}=\left[-\varphi,+\infty\right),\quad\Phi_k\left(x\right)=-x,\quad f_k\left(x,u,\xi\right)=x\left(1+bu^1+\sum_{j=2}^m u^j\xi^{j-1}\right).$$

Если за X принять размер стартового капитала, за x_k – размер капитала на начало k-го года, за u_k^1 – долю x_k капитала, вкладываемого в безрисковый актив (например, в надежный банк), имеющий доходность b, u_k^j – доли капитала, вкладываемые в рисковые активы, характеризующиеся доходностями ξ_k^{j-1}, $j=\overline{2,m}$, то задача (23) заключается в максимизации вероятности достижения размера капитала уровня $(-\varphi)$ за время, ограниченное сверху величиной $N+1$, а задача (24) — за время $N+1$ путем инвестиций в некоторые активы.

Задача (24) рассматривалась в двухшаговой постановке $N=1$ для случая одного рискового актива $m=2$ в [15, 16]. В [13] был найден целый класс асимптотически оптимальных (при $N\to\infty$) стратегий. Задача (23) рассматривается впервые.

Воспользуемся результатами настоящей статьи и проверим условия эквивалентности задач (23) и (24).

Утверждение 1. Для всех $k=\overline{0,N}$ выполнены равенства

$$\mathcal{I}_k=\Delta\mathcal{I}_k=\left[\varphi_k^{\mathcal{I}},+\infty\right),\quad\mathcal{B}_k=\left(\varphi_k^{\mathcal{O}},\varphi_k^{\mathcal{I}}\right),\quad\mathcal{O}_k=\left(-\infty,\varphi_k^{\mathcal{O}}\right],$$

где скаляры $\varphi_k^{\mathcal{I}}$, $\varphi_k^{\mathcal{O}}$ определяются выражениями

$$\varphi_k^{\mathcal{I}} = -\varphi \left(1 + \max\left\{b,\ \max_{j=\overline{1,m-1}} \underline{\varepsilon}_j\right\}\right)^{k-N-1},$$

$$\varphi_k^{\mathcal{O}} = -\varphi \left(1 + \max\left\{b,\ \max_{j=\overline{1,m-1}} \overline{\varepsilon}_j\right\}\right)^{k-N-1}.$$

Из утверждения 1 вытекает, что условие леммы выполняется $\mathcal{F} \subseteq \Delta\mathcal{I}_k$ и, следовательно, задачи (23) и (24) являются эквивалентными. Из утверждения 1 следует, что управление, оптимальное по вероятностному терминальному критерию, максимизирует вероятность первого достижения капиталом x_k уровня $(-\varphi)$ за время, ограниченное сверху величиной N.

Воспользуемся двусторонними границами функции оптимального значения вероятностного критерия для определения оценки такого момента времени $N^* \in \mathbb{N}$, что

$$\mathbf{P}\left(\max_{k\in\{0,\ldots,N^*\}} x_k^* \geqslant \varphi\right) = 1,$$

где $\{x_k^*\}_{k=0}^{N}$ – траектории системы (22), замкнутой оптимальным управлением $u^*(\cdot)$. Интересно, что двусторонние границы функции оптимального значения вероятностного критерия (см. теорему 3) позволяют найти такую оценку без нахождения оптимального управления.

Утверждение 2. *Пусть $\{\underline{x}_k\}_{k=0}^{N}$ — траектории системы* (22), *замкнутой управлением* (11), *где*

$$\underline{\gamma}_k(x) = \arg\max_{u\in U} \mathbf{P}\left(x\left(1 + bu^1 + \sum_{j=2}^{m} u^j \xi_k^{j-1}\right) \geqslant \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}\right), \quad k = \overline{0,N}. \tag{25}$$

Тогда существует $\underline{N} \in \mathbb{N}$, такой что

$$\mathbf{P}\left(\max_{k=\{0,\ldots,\underline{N}\}} \underline{x}_{k+1} \geqslant \varphi\right) = 1,$$

причем для любых $X > 0$, $b > -1$ выполнено $N^* \geqslant \underline{N}$ и

$$\underline{N} = \left[\frac{\ln(-\varphi) - \ln(X)}{\ln\left(1 + \max\left\{b,\ \max_{j=\overline{1,m-1}} \underline{\varepsilon}_j\right\}\right)} - 1\right]. \tag{26}$$

Проведем серию численных экспериментов для проверки адекватности оценки (26). При этом будем рассматривать случай одного рискового актива, для которого в [13] была найдена стратегия (25)

$$\underline{\gamma}_k(x) = \begin{cases} (1,0)^{\mathrm{T}}, & x \geqslant -\varphi(1+b)^{k-N-1}, \\ (0,1)^{\mathrm{T}}, & x < -\varphi(1+b)^{k-N-1}. \end{cases}$$

Значения параметров системы заданы в табл. 1.

Таблица 1. Значения параметров системы

Номер эксперимента	N	φ	X	b	$\underline{\varepsilon}_1$	$\overline{\varepsilon}_1$
а	200	100	15	0,01	–1	0,02
б	200	100	20	0,01	–1	0,02
в	200	100	25	0,01	–1	0,02

Таблица 2. Значения параметров системы

Номер эксперимента	а	б	в
$\underline{N}$	189	160	138
N^*	189	160	139

Для моделирования уровня N^* будем использовать метод Монте-Карло из 50000 наблюдений. Результаты моделирования занесены в табл. 2. Из табл. 2 видно, что $\underline{N}$ является относительно точной оценкой числа N^*.

8. Заключение

В статье рассмотрена задача оптимального управления дискретной стохастической системой с критерием вероятности первого достижения траекториями системы заданной трубки траекторий. Получены достаточные условия оптимальности в форме метода динамического программирования. Найдены двусторонние оценки функции правой части уравнения метода динамического программирования, функции Беллмана и функции оптимального значения вероятностного критерия. Получены аналитические выражения для приближенного определения оптимального управления и найдены оценки точности такого управления. Доказаны условия эквивалентности данной задачи и задачи оптимального управления с вероятностным терминальным критерием. Данные условия были проверены на задаче оптимального управления портфелем ценных бумаг.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Введем в рассмотрение функцию $\Phi_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, такую что $\Phi_0(x) = \Phi_1(x)$. Расширим вектор состояния системы путем введения новой переменной $y_k = \min_{i=\overline{0,k}} \Phi_i(x_i)$. Расширенная система управления имеет вид

$$\begin{cases} x_{k+1} = f_k\left(x_k, \widetilde{u}_k, \xi_k\right), \\ y_{k+1} = \min\left\{y_k,\ \Phi_k\left(x_k\right)\right\}, \\ x_0 = X, \\ y_0 = \Phi_0\left(X\right), \end{cases} \qquad k = \overline{0, N},$$

где $\widetilde{u}_k = \widetilde{\gamma}_k\left(x_k, y_k\right)$. Введем в рассмотрение функцию правой части расширенной системы $\widetilde{f} : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\widetilde{f}_k\left(x, y, u, \xi\right) = \left(f_k\left(x, u, \xi\right), \min\left\{y,\ \Phi_k\left(x\right)\right\}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Тогда эквивалентную задачу оптимального управления можно представить в виде

$$\mathbf{P}\left(\min\left\{y_{N+1},\ \Phi_{N+1}\left(x_{N+1}\right)\right\}\leqslant\varphi\right)\to\sup_{u(\cdot)\in\widetilde{\mathcal{U}}},\quad k=\overline{0,N},$$

где $\widetilde{\mathcal{U}}=\widetilde{\mathcal{U}}_0\times\ldots\times\widetilde{\mathcal{U}}_N$,

$$\widetilde{\mathcal{U}}_k=\left\{\widetilde{\gamma}:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^m|\ \widetilde{\gamma}\text{ измерима по Борелю, }\forall x\in\mathbb{R}^{n+1}:\ \widetilde{\gamma}\left(x\right)\in U_k\right\}.$$

Эквивалентность выше понимается в смысле равенства критериев

$$P\left(u\left(\cdot\right)\right)=\mathbf{P}\left(\min_{k=\overline{0,N}}\Phi_{k+1}\left(x\right)\leqslant\varphi\right)=\mathbf{P}\left(\min\left\{y_{N+1},\ \Phi_{N+1}\left(x_{N+1}\right)\right\}\leqslant\varphi\right).$$

Уравнение Беллмана для эквивалентной задачи имеет вид [12]:

$$\text{(П.1)}\qquad \widetilde{\gamma}_k^*\left(x,y\right)=\arg\max_{u\in U_k}\mathbf{M}_{\xi_k}\left[\widetilde{\mathsf{B}}_{k+1}\left(\widetilde{f}_k\left(x,y,u,\xi_k\right)\right)\right],$$

$$\text{(П.2)}\qquad \widetilde{\mathsf{B}}_k\left(x,y\right)=\max_{u\in U_k}\mathbf{M}_{\xi_k}\left[\widetilde{\mathsf{B}}_{k+1}\left(\widetilde{f}_k\left(x,y,u_k,\xi_k\right)\right)\right],$$

$$\text{(П.3)}\qquad \widetilde{\mathsf{B}}_{N+1}\left(x,y\right)=\mathbf{I}_{\{\min\{y,\ \Phi_{N+1}(x)\}\leqslant\varphi\}}\left(x,y\right),\quad k=\overline{0,N}.$$

Согласно [12] если выполнены условия:

1) функции $\widetilde{f}_k$ непрерывны для всех $k=\overline{0,N}$;
2) функция $\min\left\{y,\ \Phi_{N+1}\left(x\right)\right\}$ непрерывна и ограничена снизу;
3) случайные векторы $X,\xi_0,\ldots,\xi_N$ независимы;
4) множества $U_0,\ldots,U_N$ компактны,

то оптимальное управление существует в классе измеримых функций и определяется в результате решения задач (П.1)–(П.3).

На шаге $k=N$ уравнение Беллмана можно записать в виде

$$\text{(П.4)}\quad \widetilde{\mathsf{B}}_N\left(x,y\right)=\max_{u\in U_N}\mathbf{M}_{\xi_N}\left[\mathbf{I}_{\{\min\{y,\ \Phi_N(x),\ \Phi_{N+1}(f(x,u,\xi_k))\}\leqslant\varphi\}}\left(x,y\right)\right]=$$
$$=\max_{u\in U_N}\mathbf{M}_{\xi_N}\Big[\mathbf{I}_{\{\min\{y,\ \Phi_N(x)\}\leqslant\varphi\}}\left(x,y\right)+\left(1-\mathbf{I}_{\{\min\{y,\ \Phi_N(x)\}\leqslant\varphi\}}\left(x,y\right)\right)\times$$
$$\times\mathbf{I}_{\{\Phi_{N+1}(f(x,u,\xi_k))\leqslant\varphi\}}\left(x\right)\Big]=$$
$$=\max_{u\in U_N}\mathbf{M}_{\xi_N}\Big[\mathbf{I}_{\{\min\{y,\ \Phi_N(x)\}\leqslant\varphi\}}\left(x,y\right)+\left(1-\mathbf{I}_{\{\min\{y,\ \Phi_N(x)\}\leqslant\varphi\}}\left(x,y\right)\right)\times$$
$$\times\mathsf{B}_{N+1}\left(f_N\left(x,u,\xi_N\right)\right)\Big].$$

Отсюда легко показать, что для любого $k=\overline{0,N}$ уравнение (П.2) можно представить в виде

$$\text{(П.5)}\quad \widetilde{\mathsf{B}}_k\left(x,y\right)=\max_{u\in U_k}\mathbf{M}_{\xi_k}\Big[\mathbf{I}_{\{\min\{y,\ \Phi_k(x)\}\leqslant\varphi\}}\left(x,y\right)+$$
$$+\left(1-\mathbf{I}_{\{\min\{y,\ \Phi_k(x)\}\leqslant\varphi\}}\left(x,y\right)\right)\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right)\right)\Big],$$

поэтому для функции Беллмана в эквивалентной задаче справедливо представление

$$(\text{П.6}) \quad \widetilde{\mathsf{B}}_k(x,y) = \begin{cases} 1, & y \leqslant \varphi, \\ \max\limits_{u \in U_k} \mathbf{M}_{\xi_k} \Big\{ \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x) + (1 - \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)) \mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u,\xi_k)) \Big\}, & y > \varphi. \end{cases}$$

Отсюда получаем представление и для оптимального управления

$$(\text{П.7}) \quad \widetilde{\gamma}_k^*(x,y) = \begin{cases} \text{любой элемент из } U_k, & y \leqslant \varphi, \\ \arg\max\limits_{u \in U_k} \mathbf{M}_{\xi_k} \Big\{ \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x) + (1 - \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)) \mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u,\xi_k)) \Big\}, & y > \varphi. \end{cases}$$

Условия 1–5 теоремы 1 получаются из условий существования оптимального управления для задачи с терминальным критерием. Причем пункты 2 и 3 следуют из условий непрерывности и ограниченности снизу функции $\min\{y,\ \Phi_{N+1}(x)\}$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. 1. Рассмотрим уравнение Беллмана на некотором шаге k. Для поверхности уровня 1 справедливо соотношение

$$\mathcal{I}_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \max_{u \in U_k} \mathbf{M}_{\xi_k} \left[\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x) + (1 - \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)) \mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u,\xi_k)) \right] = 1 \right\} =$$

$$= \mathcal{F}_k \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \max_{u \in U_k} \mathbf{M}_{\xi_k} \left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u,\xi_k)) \right] = 1 \right\}.$$

Используя формулу полного математического ожидания, получаем

$$\mathcal{I}_k = \mathcal{F}_k \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \max_{u \in U_k} \Big\{ \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x,u,\xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) \times \right.$$
$$\times \mathbf{M}_{\xi_k} \left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u,\xi_k)) \;\big|\; f_k(x,u,\xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1} \right] +$$
$$+ (1 - \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x,u,\xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1})) \times$$
$$\left. \times \mathbf{M}_{\xi_k} \left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u,\xi_k)) \;\big|\; f_k(x,u,\xi_k) \notin \mathcal{I}_{k+1} \right] \Big\} = 1 \right\}.$$

Из равенств

$$\mathbf{M}_{\xi_k} \left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u,\xi_k)) \;\big|\; f_k(x,u,\xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1} \right] = 1,$$
$$\mathbf{M}_{\xi_k} \left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u,\xi_k)) \;\big|\; f_k(x,u,\xi_k) \notin \mathcal{I}_{k+1} \right] < 1,$$

следует, что

$$\mathcal{I}_k = \mathcal{F}_k \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \max_{u \in U_k} \Big\{ \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x,u,\xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) + \right.$$
$$+ (1 - \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x,u,\xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1})) \times$$
$$\left. \times \mathbf{M}_{\xi_k} \left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x,u,\xi_k)) \;\big|\; f_k(x,u,\xi_k) \notin \mathcal{I}_{k+1} \right] \Big\} = 1 \right\} =$$
$$= \mathcal{F}_k \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \max_{u \in U_k} \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x,u,\xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) = 1 \right\}.$$

Утверждение 1 доказано.

2. Аналогично п. 1 получаем соотношение для поверхности уровня 0 функции Беллмана:

$$\mathcal{O}_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \max_{u \in U_k} \mathbf{M}_{\xi_k} \left[\mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x) + (1 - \mathbf{I}_{\mathcal{F}_k}(x)) \, \mathsf{B}_{k+1}(f_k(x, u, \xi_k)) \right] = 0 \right\} =$$
$$= \overline{\mathcal{F}}_k \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \max_{u \in U_k} \mathbf{M}_{\xi_k} \left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x, u, \xi_k)) \right] = 1 \right\}.$$

Выполним преобразование правой части последнего выражения с использованием формулы полного математического ожидания:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_k = \overline{\mathcal{F}}_k \cap \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \max_{u \in U_k} \Big\{ & \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) \times \\
& \times \mathbf{M}_{\xi_k} \left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x, u, \xi_k)) \;\middle|\; f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1} \right] + \\
& + \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}) \times \\
& \times \mathbf{M}_{\xi_k} \left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x, u, \xi_k)) \;\middle|\; f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1} \right] + \\
& + \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}) \times \\
& \times \mathbf{M}_{\xi_k} \left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x, u, \xi_k)) \;\middle|\; f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1} \right] \Big\} = 0 \Big\}.
\end{aligned}$$

Из равенств

$$\begin{gathered}
\mathbf{M}_{\xi_k} \left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x, u, \xi_k)) \;\middle|\; f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1} \right] = 1, \\
\mathbf{M}_{\xi_k} \left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x, u, \xi_k)) \;\middle|\; f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1} \right] \in (0, 1), \\
\mathbf{M}_{\xi_k} \left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x, u, \xi_k)) \;\middle|\; f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1} \right] = 0
\end{gathered}$$

получаем, что

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_k = \overline{\mathcal{F}}_k \cap \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \max_{u \in U_k} \Big\{ & \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) + \\
& + \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}) \times \\
& \times \mathbf{M}_{\xi_k} \left[\mathsf{B}_{k+1}(f_k(x, u, \xi_k)) \;\middle|\; f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1} \right] \Big\} = 0 \Big\} = \\
= \overline{\mathcal{F}}_k \cap \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \forall u \in U_k : \; & \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) = 0, \\
& \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}) = 0 \Big\} = \\
= \overline{\mathcal{F}}_k \cap \{ x \in \mathbb{R}^n \;|\; \forall u \in U_k : \; & \mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x, u, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}) = 1 \Big\}.
\end{aligned}$$

Утверждение 2 доказано.

3. Утверждение 3 следует из утверждения 1 теоремы 2.

4. Утверждение 4 выполнено, поскольку при $x \in \mathcal{O}_k$ справедливо равенство $\mathsf{B}_k(x) = 0$.

5. Утверждение 5 следует из утверждения 1 теоремы 2.

6. При $x \in \mathcal{B}_k$ функция правой части уравнения метода динамического программирования представима в виде

$$\begin{gathered}\mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right)\right)\right]=\mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right)\in\mathcal{I}_{k+1}\right)\times\\ \times\left(1-\mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right)\right)\;\middle|\;f_k\left(x,u,\xi_k\right)\in\mathcal{B}_{k+1}\right]\right)+\\ +\left(1-\mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right)\in\mathcal{O}_{k+1}\right)\right)\times\\ \times\mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right)\right)\;\middle|\;f_k\left(x,u,\xi_k\right)\in\mathcal{B}_{k+1}\right],\end{gathered}$$

откуда с использованием двустороннего неравенства для выпуклой комбинации получаем

$$\begin{gathered}\min\left\{\mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right)\in\mathcal{I}_{k+1}\right),\;\left(1-\mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right)\in\mathcal{O}_{k+1}\right)\right)\right\}\leqslant\\ \leqslant\mathbf{M}_{\xi_k}\left[\mathsf{B}_{k+1}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right)\right)\right]\leqslant\\ \leqslant\max\left\{\mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right)\in\mathcal{I}_{k+1}\right),\;\left(1-\mathbf{P}_{\xi_k}\left(f_k\left(x,u,\xi_k\right)\in\mathcal{O}_{k+1}\right)\right)\right\}.\end{gathered}$$

С использованием соотношений $1-\mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x,u,\xi_k)\in\mathcal{O}_{k+1})=\mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x,u,\xi_k)\in \in\mathcal{I}_{k+1})+\mathbf{P}_{\xi_k}(f_k(x,u,\xi_k)\in\mathcal{B}_{k+1})$ и $\mathcal{F}_k\subseteq\mathcal{I}_k$ завершаем доказательство утверждения 6 теоремы 2.

7. Утверждение 7 следует из предыдущего путем взятия супремума во всех частях неравенства (8).

Доказательство теоремы 3. 1. Введем систему гипотез, образующих полную группу несовместных событий:

$$\left\{\bigcup_{k=1}^{N}\{\underline{x}_k\in\mathcal{I}_k\}\right\},\quad\left\{\bigcap_{k=1}^{N}\{\underline{x}_k\notin\mathcal{I}_k\}\right\}.$$

Тогда с учетом формулы полной вероятности справедлива цепочка равенств

$$\begin{gathered}P\left(\underline{u}\left(\cdot\right)\right)=\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N}\left\{\underline{x}_{k+1}\in\mathcal{F}_{k+1}\right\}\right)=\\ =\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N}\{\underline{x}_k\in\mathcal{I}_k\}\right)\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N}\left\{\underline{x}_{k+1}\in\mathcal{F}_{k+1}\right\}\middle|\bigcup_{k=1}^{N}\{\underline{x}_k\in\mathcal{I}_k\}\right)+\\ +\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N}\{\underline{x}_k\notin\mathcal{I}_k\}\right)\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N}\left\{\underline{x}_{k+1}\in\mathcal{F}_{k+1}\right\}\middle|\bigcap_{k=1}^{N}\{\underline{x}_k\notin\mathcal{I}_k\}\right).\end{gathered}\tag{П.8}$$

Исследуем второй множитель первого слагаемого правой части последнего выражения. Из цепочки равенств

$$\mathbf{P}\left(\underline{x}_{N+1}\in\mathcal{F}_{N+1}\;\middle|\;\underline{x}_N\in\mathcal{I}_N\right)=\mathbf{P}\left(\underline{x}_{N+1}\in\mathcal{I}_{N+1}\;\middle|\;\underline{x}_N\in\mathcal{I}_N\right)=1$$

следует, что

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N}\left\{\underline{x}_{k+1}\in\mathcal{F}_{k+1}\right\}\middle|\bigcup_{k=1}^{N}\{\underline{x}_k\in\mathcal{I}_k\}\right)=1.$$

С учетом последнего равенства выражение (П.8) принимает вид

$$
\begin{gathered}
P\left(\underline{u}(\cdot)\right)=\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k\in\mathcal{I}_k\right\}\right)+\\
+\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k\notin\mathcal{I}_k\right\}\right)\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N}\left\{\underline{x}_{k+1}\in\mathcal{F}_{k+1}\right\}\middle|\bigcap_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k\notin\mathcal{I}_k\right\}\right).
\end{gathered}
\tag{П.9}
$$

Введем в рассмотрение систему гипотез, образующих полную группу несовместных событий:

$$
\left\{\bigcup_{k=1}^{N-1}\left\{\underline{x}_k\in\mathcal{I}_k\right\}\right\},\quad\left\{\bigcap_{k=1}^{N-1}\left\{\underline{x}_k\notin\mathcal{I}_k\right\}\right\}.
$$

Воспользуемся формулой полной вероятности для первого слагаемого в правой части (П.9):

$$
\begin{gathered}
\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k\in\mathcal{I}_k\right\}\right)=\\
=\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N-1}\left\{\underline{x}_k\in\mathcal{I}_k\right\}\right)\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k\in\mathcal{I}_k\right\}\middle|\bigcup_{k=1}^{N-1}\left\{\underline{x}_k\in\mathcal{I}_k\right\}\right)+\\
+\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N-1}\left\{\underline{x}_k\notin\mathcal{I}_k\right\}\right)\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k\in\mathcal{I}_k\right\}\middle|\bigcap_{k=1}^{N-1}\left\{\underline{x}_k\notin\mathcal{I}_k\right\}\right).
\end{gathered}
\tag{П.10}
$$

Аналогично (П.9) преобразуем правую часть (П.10), откуда получим

$$
\begin{gathered}
\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k\in\mathcal{I}_k\right\}\right)=\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N-1}\left\{\underline{x}_k\in\mathcal{I}_k\right\}\right)+\\
+\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N-1}\left\{\underline{x}_k\notin\mathcal{I}_k\right\}\right)\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k\in\mathcal{I}_k\right\}\middle|\bigcap_{k=1}^{N-1}\left\{\underline{x}_k\notin\mathcal{I}_k\right\}\right).
\end{gathered}
\tag{П.11}
$$

Выполним подстановку (П.10) в (П.9):

$$
\begin{gathered}
P\left(\underline{u}(\cdot)\right)=\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N-1}\left\{\underline{x}_k\in\mathcal{I}_k\right\}\right)+\\
+\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N-1}\left\{\underline{x}_k\notin\mathcal{I}_k\right\}\right)\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k\in\mathcal{I}_k\right\}\middle|\bigcap_{k=1}^{N-1}\left\{\underline{x}_k\notin\mathcal{I}_k\right\}\right)+\\
+\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k\notin\mathcal{I}_k\right\}\right)\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N}\left\{\underline{x}_{k+1}\in\mathcal{F}_{k+1}\right\}\middle|\bigcap_{k=1}^{N}\left\{\underline{x}_k\notin\mathcal{I}_k\right\}\right).
\end{gathered}
\tag{П.12}
$$

Проводя аналогичные преобразования в отношении первого слагаемого в (П.12) и вводя системы гипотез

$$\left\{\bigcup_{k=1}^{l}\{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\}\right\}, \quad \left\{\bigcap_{k=1}^{l}\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right\}, \quad l=\overline{1,\ldots,N-2},$$

получаем выражение для значения вероятностного критерия на стратегии $\underline{u}(\cdot)$:

$$\text{(П.13)}\qquad \begin{gathered} P(\underline{u}(\cdot)) = \mathbf{P}(\underline{x}_1 \in \mathcal{I}_1) + \\ + \sum_{l=1}^{N-1} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{l}\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{l+1}\{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k\} \,\middle|\, \bigcap_{k=1}^{l}\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right) + \\ + \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N}\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right) \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{N}\{\underline{x}_{k+1} \in \mathcal{F}_{k+1}\} \,\middle|\, \bigcap_{k=1}^{N}\{\underline{x}_k \notin \mathcal{I}_k\}\right). \end{gathered}$$

Заметим теперь, что для первого слагаемого (П.13) справедлива цепочка равенств

$$\mathbf{P}(\underline{x}_1 \in \mathcal{I}_1) = \mathbf{P}(f_0(X, \underline{u}_0, \xi_0) \in \mathcal{I}_1) = \underline{\mathsf{B}}_0(X) = \underline{F}(\varphi, N, X),$$

откуда следует выражение (14).

Пункт 1 теоремы 3 доказан.

2. Для доказательства п. 2 теоремы 3 достаточно заметить, что при $x_k \in \mathcal{I}_k$ выполнено $u_k^* = \underline{u}_k$ для всех $k=\overline{0,N}$, откуда аналогичным способом можно получить выражение (14) для функции оптимального значения вероятностного критерия на траекториях системы $\{x_k^*\}_{k=1}^{N+1}$, замкнутой оптимальным управлением $u^*(\cdot)$.

Пункт 2 теоремы 3 доказан.

3. Пункт 3 теоремы 3 непосредственно следует из п. 7 теоремы 2 и п. 1 теоремы 3.

Теорема 3 доказана.

Доказательство леммы. Рассмотрим соотношения динамического программирования (3)–(5) и (18)–(20) для задач (2) и (17) соответственно. Поскольку в (19) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ выполняется равенство

$$\mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = \max_{u \in U_k} \mathbf{M}\left[\mathbf{I}_{\mathcal{I}_k^{\varphi}}(x) + \left(1 - \mathbf{I}_{\mathcal{I}_k^{\varphi}}(x)\right)\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}(f_k(x,u,\xi_k))\right], \quad k=\overline{0,N},$$

где $\mathcal{I}_k^{\varphi}$ – поверхность уровня 1 функции Беллмана $\mathsf{B}_k^{\varphi}(x)$, то описанные условия эквивалентности верны в том случае, если поверхности уровня 1 функций Беллмана в задачах (2) и (17) равны $\mathcal{I}_k = \mathcal{I}_k^{\varphi}$. С учетом рекуррентного соотношения для $\mathcal{I}_k$ (см. п. 1 теоремы 2) отмеченное равенство справедливо только в том случае, если

$$\text{(П.14)}\qquad \mathcal{F}_k \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u \in U_k : \mathbf{P}(f_k(x,u,\xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}) = 1\}, \quad k=\overline{0,N}.$$

Лемма доказана.

Доказательство утверждения 1. В соответствии с п. 1 теоремы 2 запишем уравнение для поверхностей уровней 1 и 0 функции Беллмана на шаге $k = N$:

$$\mathcal{I}_N = \mathcal{F} \cup \left\{ x \in \mathbb{R}: \exists u \in U: \mathbf{P}\left(x \left(1 + u^1 b + \sum_{i=2}^{m} u^i \xi_N^i \right) \geqslant -\varphi \right) = 1 \right\},$$

$$\mathcal{O}_N = \overline{\mathcal{F}} \cap \left\{ x \in \mathbb{R}: \forall u \in U: \mathbf{P}\left(x \left(1 + u^1 b + \sum_{i=2}^{m} u^i \xi_N^i \right) < -\varphi \right) = 1 \right\}.$$

Используя результат из [13], где были найдены решения соответствующих уравнений, и введенные в разделе 6 обозначения для границ множеств $\mathcal{I}_k$ и $\mathcal{O}_k$, получаем:

$$\mathcal{I}_N = [\varphi, +\infty) \cup \left[\varphi \left(1 + \max\left\{ b, \quad \max_{j=\overline{2,m}} \underline{b}^j \right\} \right)^{-1}, +\infty \right) = \left[\varphi_N^{\mathcal{I}}, +\infty \right),$$

$$\mathcal{O}_N = (-\infty, \varphi] \cap \left(-\infty, \varphi \left(1 + \max\left\{ b, \quad \max_{j=\overline{2,m}} \overline{b}^j \right\} \right)^{-1} \right] = \left(-\infty, \varphi_N^{\mathcal{O}} \right].$$

Отсюда следует, что $\mathcal{I}_N = \Delta\mathcal{I}_N$. Используя п. 1 теоремы 2, получаем, что на шаге $k = N - 1$ уравнение для изобелл примет вид

$$\mathcal{I}_{N-1} = \mathcal{F} \cup \left\{ x \in \mathbb{R}: \exists u \in U: \mathbf{P}\left(x \left(1 + u^1 b + \sum_{i=2}^{m} u^i \xi_{N-1}^i \right) \geqslant \varphi_N^{\mathcal{I}} \right) = 1 \right\},$$

$$\mathcal{O}_{N-1} = \overline{\mathcal{F}} \cap \left\{ x \in \mathbb{R}: \forall u \in U: \mathbf{P}\left(x \left(1 + u^1 b + \sum_{i=2}^{m} u^i \ \xi_{N-1}^i \right) < \varphi_N^{\mathcal{O}} \right) = 1 \right\}.$$

По аналогии с шагом $k = N$ получаем

$$\mathcal{I}_{N-1} = \Delta\mathcal{I}_{N-1} = \left[\varphi_{N-1}^{\mathcal{I}}, +\infty \right), \quad \mathcal{O}_{N-1} = \left(-\infty, \varphi_{N-1}^{\mathcal{O}} \right].$$

Оперируя математической индукцией, заключаем, что для всех $k = \overline{0, N}$ выполнено

$$\mathcal{I}_k = \Delta\mathcal{I}_k = \left[\varphi_k^{\mathcal{I}}, +\infty \right), \quad \mathcal{O}_k = \left(-\infty, \varphi_k^{\mathcal{O}} \right].$$

Утверждение 1 доказано.

Доказательство утверждения 2. Рассмотрим стратегию управления (11), которая с учетом утверждения 1 принимает вид (25). Из п. 3 теоремы 3 следует, что

$$P\left(\underline{u}\left(\cdot\right)\right) = \mathbf{P}\left(\max_{k \in \{0,\dots,N\}} \underline{x}_{k+1} \geqslant -\varphi \right) \geqslant \underline{F}\left(\varphi, N, X\right), \tag{П.15}$$

где функция $\underline{F}$ с учетом

$$\varphi_1^{\mathcal{I}} = -\varphi \left(1 + \max\left\{ b, \max_{j=\overline{1,m-1}} \underline{\varepsilon}_j \right\} \right)^{-N}$$

имеет вид

$$\text{(П.16)} \qquad \underline{F}\,(\varphi, N, X) =$$

$$= \max_{u \in U} \mathbf{P}\left(X \left(1 + bu^1 + \sum_{j=2}^{m} u^j \xi_0^{j-1}\right) \geqslant -\frac{\varphi}{\left(1 + \max\left\{b, \max\limits_{j=\overline{1,m-1}} \underline{\varepsilon}_j\right\}\right)^N} \right).$$

Нетрудно видеть, что величину $\underline{N} \in \mathbb{N}$ можно определить как корень уравнения $\underline{F}\,(\varphi, N, X) = 1$, но поскольку таких корней бесконечное множество, то будем искать оценку $\underline{N}$ в виде

$$\text{(П.17)} \qquad \underline{N} = \min\left\{N \in \mathbb{N} : \ \underline{F}\,(\varphi, N, X) = 1\right\}.$$

Из (П.15) и (П.17) следует, что

$$\mathbf{P}\left(\max_{k \in \{0,\ldots,\underline{N}\}} \underline{x}_{k+1} \geqslant -\varphi\right) = 1.$$

Из определений поверхности уровня 1 функции Беллмана и функции $\underline{F}$ следует, что уравнение $\underline{F}\,(\varphi, N, X) = 1$ эквивалентно включению $X \in \mathcal{I}_0$, что в свою очередь эквивалентно неравенству

$$X \geqslant -\frac{\varphi}{\left(1 + \max\left\{b, \max\limits_{j=\overline{1,m-1}} \underline{\varepsilon}_j\right\}\right)^{N+1}}.$$

Путем логарифмирования получаем

$$N \geqslant \frac{\ln(-\varphi) - \ln(X)}{\ln\left(1 + \max\left\{b, \max\limits_{j=\overline{1,m-1}} \underline{\varepsilon}_j\right\}\right)} - 1.$$

Используя (П.17) окончательно получаем (26).

Утверждение 2 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003.
2. *Смирнов И.П.* Об одной задаче быстродействия для стохастической управляемой системы // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 2. С. 247–254.
3. *Бертсекас Д., Шрив С.* Стохастическое управление: случай дискретного времени. М.: Наука, 1985.
4. *Zhou J.* Infinite Horizon Optimal Control Problem for Stochastic Evolution Equations in Hilbert Spaces // J. Dyn. Control Syst. 2016. V. 22. No. 3. P. 531–554.
5. *Agram N., Haadem S., Øksendal B., Proske F.* A Maximum Principle for Infinite Horizon Delay Equations // SIAM J. Math. Anal. 2013. V. 45. No. 4. P. 2499–2522.

6. *Agram N., Øksendal B.* Infinite Horizon Optimal Control of Forward-Backward Stochastic Differential Equations with Delay // J. Comput. Appl. Math. 2014. V. 259. Part B. P. 336–349.
7. *Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б.* Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978.
8. *Смирнов И.П.* Об управлении вероятностью входа системы в заданную область // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 10. С. 1753–1758.
9. *Азанов В.М.* Оптимальное управление линейной дискретной системой по критерию вероятности // АиТ. 2014. № 10. С. 39–51.

   Azanov V.M. Optimal Control for Linear Discrete Systems with Respect to Probabilistic Criteria // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 10. P. 1743–1753.
10. *Семаков С.Л.* Выбросы случайных процессов: приложения в авиации. М.: Наука, 2005.
11. *Хаметов В.М., Шелемех Е.А.* Суперхеджирование американских опционов на неполном рынке с дискретным временем и конечным горизонтом // АиТ. 2015. № 9. С. 125–149.

    Khametov V.M., Shelemekh E.A. Superhedging of American Options on an Incomplete Market with Discrete Time and Finite Horizon // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 9. P. 1616–1634.
12. *Малышев В.В., Кибзун А.И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987.
13. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Двухсторонняя оценка функции Беллмана в задачах стохастического оптимального управления дискретными системами по вероятностному критерию качества // АиТ. 2018. № 2. С. 3–18.

    Azanov V.M., Kan Yu.S. Bilateral Estimation of the Bellman Function in the Problems of Optimal Stochastic Control of Discrete Systems by the Probabilistic Performance Criterion // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 2. P. 203–215.
14. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Усиленная оценка функции Беллмана в задачах стохастического оптимального управления с вероятностным критерием качества // АиТ. 2019. № 4. С. 53–69.

    Azanov V.M., Kan Yu.S. Refined Estimation of the Bellman Function for Stochastic Optimal Control Problems with Probabilistic Performance Criterion // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 4. P. 634–647.
15. *Григорьев П.В., Кан Ю.С.* Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг // АиТ. 2004. № 2. С. 179–197.

    Grigor'ev P.V., Kan Yu.S. Optimal Control of the Investment Portfolio with Respect to the Quantile Criterion // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. No. 2. P. 319–336.
16. *Бунто Т.В., Кан Ю.С.* Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг с ненулевой вероятностью разорения // АиТ. 2013. № 5. С. 114–136.

    Bunto T.V., Kan Yu.S. Quantile Criterion-based Control of the Securities Portfolio with a Nonzero Ruin Probability // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 5. P. 811–828.
17. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* Двухшаговая задача формирования портфеля ценных бумаг из двух рисковых активов по вероятностному критерию. // АиТ. 2015. № 7. С. 78–100.

    Kibzun A.I., Ignatov A.N. The Two-Step Problem of Investment Portfolio Selection from Two Risk Assets via the Probability Criterion // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 7. P. 1201–1220.

18. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Синтез оптимальных стратегий в задачах управления стохастическими дискретными системами по критерию вероятности // АиТ. 2017. № 6. С. 57–83.

Azanov V.M., Kan Yu.S. Design of Optimal Strategies in the Problems of Discrete System Control by the Probabilistic Criterion // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 6. P. 1006–1027.

19. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* Сведение двухшаговой задачи стохастического оптимального управления с билинейной моделью к задаче смешанного целочисленного линейного программирования // АиТ. 2016. № 12. С. 89–111.

Kibzun A.I., Ignatov A.N. Reduction of the Two-Step Problem of Stochastic Optimal Control with Bilinear Model to the Problem of Mixed Integer Linear Programming // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 12. P. 2175–2192.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 20.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020

© 2020 г. А.В. БОРИСОВ, д-р физ.-мат. наук (ABorisov@frccsc.ru)
(Институт проблем информатики ФИЦ ИУ РАН, Москва;
Московский авиационный институт;
Центр фундаментальной и прикладной математики МГУ)

$\mathcal{L}_1$-ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ МАРКОВСКИХ СКАЧКООБРАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ II: ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ КОНКРЕТНЫХ СХЕМ[1]

Вторая часть статьи посвящена определению порядка точности различных численных схем реализации алгоритма фильтрации состояний марковских скачкообразных процессов по косвенным наблюдениям в присутствии винеровских шумов. Отдельно исследованы случаи аддитивных и мультипликативных шумов в наблюдениях: показано, что одни и те же схемы в этих случаях обеспечивают разную точность. Для наблюдений с аддитивными шумами предложены схемы реализации порядка $\frac{1}{2}$, 1 и 2, а для наблюдений с мультипликативными шумами — порядка 1 и 2. Представленные теоретические результаты проиллюстрированы численными примерами.

Ключевые слова: марковский скачкообразный процесс, устойчивая оценка, оценка максимума апостериорной вероятности, схема численного интегрирования.

DOI: 10.31857/S0005231020120028

1. Введение

Данная статья является продолжением [1]. В первой части поставлена и решена задача $\mathcal{L}_1$–оптимальной фильтрации состояний *марковских скачкообразных процессов* (МСП) по непрерывным косвенным наблюдениям в присутствии винеровских шумов. Представлены точное решение этой задачи, а также класс алгоритмов его численной реализации. Точность вычисляемых оценок зависит от порядка выбранной аналитической аппроксимации и численной схемы ее реализации. В [1] представлены показатели точности численных реализаций оценок и доказаны утверждения, их описывающие.

Целью второй части статьи является вычисление показателей точности для аналитических аппроксимаций различного порядка и численных схем их реализации. Показатели точности анализируются отдельно для случаев наблюдений с аддитивными и мультипликативными шумами: в этих двух случаях они различны.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 сформулирована задача $\mathcal{L}_1$-оптимальной фильтрации, ее теоретическое решение, представлены аналитические аппроксимации и их численные реализации. Для точного

[1] Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-07-00187 А.

и приближенного решения предложены показатели близости и сформулированы утверждения, их характеризующие.

В разделе 3 для случая наблюдений с аддитивными шумами рассмотрены различные схемы численной реализации. В качестве численных реализаций использовалась прямая дискретизация системы наблюдения, схемы «левых» и «средних» прямоугольников, а также квадратуры Гаусса. Использование *простых* (несоставных) схем численного интегрирования позволило получить аппроксимации оценок фильтрации порядка точности $\frac{1}{2}$, 1 и 2.

Раздел 4 посвящен исследованию точности приближенных схем при фильтрации состояний МСП по наблюдениям с мультипликативными шумами. В качестве численных реализаций вновь выступали схема «средних» прямоугольников и схема средних 2-го порядка. Показано, что простые схемы не могут быть использованы для построения аппроксимаций и следует использовать соответствующие составные схемы с дополнительным дроблением области интегрирования. В итоге получены численные алгоритмы фильтрации общего порядка точности 1 и 2.

Раздел 5 содержит иллюстративные примеры применения различных численных схем для фильтрации состояний МСП по наблюдениям с аддитивными и мультипликативными шумами. В разделе 6 представлены заключительные выводы и направления дальнейших исследований.

2. Необходимые сведения об аналитическом и приближенном решении задачи фильтрации

На полном вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega^X \times \Omega^W, \mathcal{F}^X \times \mathcal{F}^W, \mathsf{P}^X \times \mathsf{P}^W, \{\mathcal{F}_t^X \times \mathcal{F}_t^W\}_{t \geqslant 0})$ рассматривается стохастическая динамическая система

$$X_t = X_0 + \int_0^t \Lambda^\top X_s ds + \mu_s, \tag{2.1}$$

$$\mathcal{Y}_r = \int_{t_{r-1}}^{t_r} f X_s ds + \int_{t_{r-1}}^{t_r} \sum_{n=1}^N X_s^n g_n^{1/2} dW_s, \quad r \in \mathbb{N}, \tag{2.2}$$

где

— $X_t \triangleq \mathrm{col}\left(X_t^1, \ldots, X_t^N\right) \in \mathbb{S}^N$ – ненаблюдаемое состояние системы, являющееся однородным МСП с конечным множеством состояний $\mathbb{S}^N \triangleq \triangleq \{e_1, \ldots, e_N\}$ ($\mathbb{S}^N$ – множество единичных векторов евклидова пространства $\mathbb{R}^N$), матрицей интенсивностей переходов Λ и начальным распределением π;

— $\mu_t \triangleq \mathrm{col}\,(\mu_t^1, \ldots, \mu_t^N) \in \mathbb{R}^N$ – $\mathcal{F}_t^X$-согласованный мартингал;

— $\mathcal{Y}_r \triangleq \mathrm{col}\,(\mathcal{Y}_r^1, \ldots, \mathcal{Y}_r^M) \in \mathbb{R}^M$ – косвенные наблюдения, зашумленные $\mathcal{F}_t$-согласованным стандартным винеровским процессом $W_t \triangleq \mathrm{col}\,(W_t^1, \ldots, W_t^M) \in \in \mathbb{R}^M$; f – матрица плана наблюдений, а набор невырожденных симметричных матриц $\{g_n\}_{n=\overline{1,N}}$ характеризует интенсивности шумов в зависимости от текущего состояния X_t; наблюдения $\{\mathcal{Y}_r\}_r$ получены путем дискретизации по времени с постоянным шагом h соответствующих непрерывных наблюдений.

Неубывающее семейство σ-алгебр, порожденное последовательностью $\{\mathcal{Y}_r\}_{r\in\mathbb{N}}$, обозначено как $\mathcal{O}_r \triangleq \sigma\{\mathcal{Y}_\ell : 0 \leqslant \ell \leqslant r\}$, $\mathcal{O}_0 \triangleq \{\varnothing, \Omega\}$.

Задача $\mathcal{L}_1$-оптимальной фильтрации состояния X по дискретным наблюдениям $\mathcal{Y}$ заключается в нахождении такой оценки $\widehat{X}_r$, $r \in \mathbb{N}$ состояния МСП X_{rh}, что

$$\widehat{X}_r \in \operatorname*{Argmin}_{\widetilde{X}_r \in \mathcal{X}_r} \mathsf{E}\left\{\|\widetilde{X}_r - X_{rh}\|_1\right\}, \tag{2.3}$$

где $\mathcal{X}_r$ – множество всех таких $\mathcal{O}_r$-согласованных последовательностей $\{\widetilde{X}_r\}$ с конечным первым моментом, что

$$\sum_{n=1}^{N} \widehat{X}_r^n \equiv 1 \quad \text{с вероятностью } 1.$$

Ниже в изложении будем использовать следующие обозначения:

— $\mathcal{D} \triangleq \left\{u = \mathrm{col}\,(u^1, \ldots, u^N) : u_n \geqslant 0,\ \sum\limits_{n=1}^{N} u^n = h\right\}$ – $(N-1)$-мерный симплекс в пространстве $\mathbb{R}^M$;

— $\Pi \triangleq \left\{\pi = \mathrm{col}\,(\pi^1, \ldots, \pi^N) : \pi_n \geqslant 0,\ \sum\limits_{n=1}^{N} \pi^n = 1\right\}$ – «вероятностный симплекс», множество возможных начальных распределений МСП π;

— N_r^X – случайное число скачков состояния X_t, произошедшее на отрезке времени $[t_{r-1}, t_r]$,

— $\rho_r^{k,\ell,q}(du)$ – распределение вектора $X_{t_r}^\ell \mathbf{I}_{\{q\}}(N_r^X)\tau_r$ при условии $X_{t_{r-1}} = e_k$, т.е. для любого $\mathcal{G} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$ верно равенство

$$\mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{\mathcal{G}}(\tau_r)\mathbf{I}_{\{q\}}(N_r^X)X_{t_r}^\ell | X_{t_{r-1}} = e_k\right\} = \int\limits_{\mathcal{G}} \rho_r^{k,\ell,q}(du);$$

— $\mathcal{N}(y, m, K) \triangleq (2\pi)^{-M/2}\det^{-1/2} K \exp\left\{-\frac{1}{2}\|y - m\|^2_{K^{-1}}\right\}$ – M-мерная плотность гауссовского распределения с математическим ожиданием m и невырожденной ковариационной матрицей K;

— $\|\alpha\|_K^2 \triangleq \alpha^\top K \alpha$, $\langle \alpha, \beta \rangle_K \triangleq \alpha^\top K \beta$.

Решение задачи фильтрации выражается через условное распределение состояния МСП относительно доступных наблюдений $\widehat{x}_r \triangleq \mathsf{E}\{X_{t_r}|\mathcal{O}_r\}$ и совпадает с оценкой максимума апостериорной вероятности: $\widehat{X}_r = e_{n^*}$, где $n^* \in \mathrm{Argmax}_{n=\overline{1,N}}\, \widehat{x}_r^n$.

Условное распределение определяется рекуррентной процедурой

$$\widehat{x}_r^j = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} \widehat{x}_{r-1}^k \sum\limits_{q=0}^{\infty} \int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(\mathcal{Y}_r, fu, \sum\limits_{p=1}^{N} u^p g_p\right) \rho^{k,j,q}(du)}{\sum\limits_{i,\ell=1}^{N} \widehat{x}_{r-1}^i \sum\limits_{c=0}^{\infty} \int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(\mathcal{Y}_r, fv, \sum\limits_{n=1}^{N} v^n g_n\right) \rho^{i,\ell,c}(dv)}, \quad j = \overline{1,N}, \quad \widehat{x}_0 = \pi. \tag{2.4}$$

Дробь в (2.4) содержит в числителе и знаменателе бесконечные суммы интегралов, не вычисляемые аналитически. Для компьютерной реализации данная рекурсия должна быть преобразована. На первом шаге преобразования оценка $\widehat{x}_r$ заменяется *аналитической аппроксимацией порядка* s: бесконечные суммы в числителе и знаменателе заменяются конечными, содержащими только $s+1$ слагаемых:

$$\overline{x}_r^j(s) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} \overline{x}_{r-1}^k(s) \sum\limits_{q=0}^{s} \int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(\mathcal{Y}_r, fu, \sum\limits_{p=1}^{N} u^p g_p\right) \rho^{k,j,q}(du)}{\sum\limits_{i,\ell=1}^{N} \overline{x}_{r-1}^i(s) \sum\limits_{c=0}^{s} \int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(\mathcal{Y}_r, fv, \sum\limits_{n=1}^{N} v^n g_n\right) \rho^{i,\ell,c}(dv)}, \ j=\overline{1,N}, \ \widehat{x}_0 = \pi. \tag{2.5}$$

Ограничение числа слагаемых означает, что в аппроксимации учитывается возможность не более чем s скачков оцениваемого состояния X на интервале дискретизации $[t_{r-1}, t_r]$. Рекурсия (2.5) представима в матричной форме

$$\overline{x}_r(s) = \left(\mathbf{1}\xi_r^\top \overline{x}_{r-1}(s)\right)^{-1} \xi_r^\top \overline{x}_{r-1}(s), \tag{2.6}$$

где

$$\xi_q^{kj} \triangleq \sum_{m=0}^{s} \int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(\mathcal{Y}_q, fu, \sum_{p=1}^{N} u^p g_p\right) \rho^{k,j,m}(du), \quad \xi_q \triangleq \|\xi_q^{kj}\|_{k,j=\overline{1,N}}. \tag{2.7}$$

На втором шаге преобразования интегралы ξ^{ij} (2.7) заменяются суммами

$$\xi^{ij}(y) \approx \psi^{ij}(y) \triangleq \sum_{\ell=1}^{L} \mathcal{N}\left(y, fw_\ell, \sum_{p=1}^{N} w_\ell^p g_p\right) \varrho_\ell^{ij}, \qquad \psi(y) \triangleq \|\psi^{ij}(y)\|_{i,j=\overline{1,N}}, \tag{2.8}$$

определяемыми множеством пар $\left\{(w_\ell, \varrho_\ell^{ij})\right\}_{\ell=\overline{1,L}}$. Здесь $\varrho_\ell^{ij} \geqslant 0$ $(\ell = \overline{1,L})$ – веса:

$$\mathfrak{W} \triangleq \sum_{j=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{L} \varrho_\ell^{ij} \leqslant 1, \tag{2.9}$$

а $w_\ell \triangleq \mathrm{col}\,(w_\ell^1, \dots, w_\ell^N) \in \mathcal{D}$ – точки. Аналогично матрицам ξ_q строятся их аппроксимации $\psi_q \triangleq \|\psi^{ij}(\mathcal{Y}_q)\|_{i,j=\overline{1,N}}$. В результате условное распределение $\widehat{x}_r$ приближенно вычисляется с помощью рекуррентной процедуры

$$\widetilde{x}_r \triangleq \left(\mathbf{1}\psi_r^\top \widetilde{x}_{r-1}\right)^{-1} \psi_r^\top \widetilde{x}_{r-1}, \quad r \geqslant 1, \quad \widetilde{x}_0 = \pi. \tag{2.10}$$

Оценка $\widetilde{x}_r$ называется *численной реализацией аналитической аппроксимации* $\overline{x}_r$, *соответствующей той или иной схеме численного интегрирования.*

Оценки $\widehat{x}_r$, $\overline{x}_r$ и $\widetilde{x}_r$ обладают свойством *устойчивости* [1]: их компоненты почти наверное неотрицательны и нормированы.

Если $\overline{\lambda} \triangleq \max_{n=\overline{1,N}} |\lambda_{nn}|$ и для схемы численного интегрирования верно неравенство

$$\max_{i=\overline{1,N}} \sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^M} |\psi^{ij}(y) - \xi^{ij}(y)| dy \leqslant \delta, \tag{2.11}$$

то расхождение $\widehat{x}_r$ и $\widetilde{x}_r$ характеризуется неравенством

$$\sup_{\pi \in \Pi} \mathsf{E}\Big\{ \|\widehat{x}_r - \widetilde{x}_r\|_1 \Big\} \leqslant 4 \left[1 - \left(1 - \frac{(\overline{\lambda} h)^{s+1}}{(s+1)!} \right)^r \right] + 2r\mathfrak{W}^{r-1}\delta. \tag{2.12}$$

При фиксированном горизонте T и уменьшении шага дискретизации $h \to 0$ это же неравенство приобретает асимптотический вид

$$\sup_{\pi \in \Pi} \mathsf{E}\Big\{ \|\widehat{x}_{T/h} - \widetilde{x}_{T/h}\|_1 \Big\} \leqslant 2T \left(2\overline{\lambda} \frac{(\overline{\lambda} h)^s}{(s+1)!} + \frac{\delta}{h} \right). \tag{2.13}$$

Ниже исследуются аппроксимации порядка $s = 1$ и $s = 2$. Для них с помощью обобщенной формулы полной вероятности легко получить вид интегралов (2.7), используемых в дальнейшем изложении:

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(\mathcal{Y}_r, fu, \sum_{p=1}^{N} u^p g_p \right) \rho^{k,j,0}(du) = \delta_{kj} e^{\lambda_{kk} h} \mathcal{N}\Big(\mathcal{Y}_r, hf^k, hg_k \Big), \tag{2.14}$$

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(\mathcal{Y}_r, fu, \sum_{p=1}^{N} u^p g_p \right) \rho^{k,j,1}(du) = \tag{2.15}$$

$$= (1 - \delta_{kj}) \lambda_{kj} e^{\lambda_{jj} h} \int_0^h e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj})u} \mathcal{N}\Big(\mathcal{Y}_r, uf^k + (h-u) f^j, ug_k + (h-u) g_j \Big) du,$$

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(\mathcal{Y}_r, fu, \sum_{p=1}^{N} u^p g_p \right) \rho^{k,j,2}(du) =$$

$$= \sum_{\substack{i: i \neq k, \\ i \neq j}} \lambda_{ki} \lambda_{ij} e^{\lambda_{jj} h} \int_0^h \int_0^{h-u^k} e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{ii})u + (\lambda_{ii} - \lambda_{jj})v} \times \tag{2.16}$$

$$\times \mathcal{N}\Big(\mathcal{Y}_r, uf^k + vf^i + (h-u-v) f^j, ug_k + vg_i + (h-u-v) g_j \Big) dv du,$$

где f^j – j-й столбец матрицы f.

В следующих разделах представлено исследование влияния точности различных схем вычисления интегралов в (2.15) и (2.16) на точность аппроксимации решений задач фильтрации состояний МСП с аддитивными и мультипликативными шумами в наблюдениях. Доказательства всех утверждений, сформулированных ниже, характеризующих это влияние, базируются на использовании неравенств (2.11), (2.13) и построены по единой схеме. На первом шаге доказательства величина $|\psi^{ij}(y) - \xi^{ij}(y)|$ оценивается сверху с использованием известных границ ошибок численного интегрирования [2]. Обычно эта оценка выражается через производные интеграндов. На втором шаге строится оценка сверху для интеграла в левой части (2.11). Эта операция является нетривиальной, так как выполняется в предположении малости шага h. Дело в том, что с уменьшением h как масштаба области интегрирования синхронно изменяется масштаб интеграндов, которые становятся близки к δ-функции Дирака. Данный факт соответствующим образом влияет и на производные интеграндов. В итоге порядок малости интеграла в правой части (2.11) оказывается ниже, чем порядок численной схемы [2] без условия асимптотической малости h. Основная проблема доказательств утверждений ниже заключается в определении, насколько изменится этот порядок малости.

3. Численные схемы фильтрации по наблюдениям с аддитивными шумами

3.1. Случай $s = 1$: дискретизация стохастической дифференциальной системы наблюдения и схема «левых прямоугольников»

В данном подразделе демонстрируется связь алгоритма (2.10) приближенной фильтрации состояния МСП по дискретизованным наблюдениям для случая $s = 1$ и алгоритма фильтрации состояний марковских цепей – процессов с дискретным временем – по дискретным наблюдениям.

На $(\Omega^x \times \Omega^w, \mathcal{F}^x \times \mathcal{F}^w, \mathsf{P}^x \times \mathsf{P}^w, \{\mathcal{F}_r^x \times \mathcal{F}_r^w\}_{r\in\mathbb{Z}_+})$ рассмотрим стохастическую систему наблюдения с дискретным временем

$$\begin{cases} x_r = P^\top x_{r-1} + m_r, \quad r \in \mathbb{N}, \quad x_0 \sim \pi, \\ y_r = F x_r + \sum_{n=1}^{N} x_r^n G_n^{1/2} w_n. \end{cases} \tag{3.1}$$

Здесь

— $x_r \triangleq \operatorname{col}(x_r^1, \ldots, x_r^N)$ – ненаблюдаемая однородная марковская цепь со значениями в $\mathbb{S}^N$, с матрицей P переходных вероятностей на одном шаге и начальным распределением π; $\{m_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ – $\mathcal{F}_r^x$-согласованная мартингал-разность;

— $y_r \triangleq \operatorname{col}(y_r^1, \ldots, y_r^M)$ – наблюдаемая последовательность, F – матрица плана наблюдения, а $\{G_n\}_{n=\overline{1,N}}$ являются условными матрицами ковариаций шумов в наблюдениях относительно текущего значения марковской цепи;

— $w_r \triangleq \operatorname{col}(w_r^1, \ldots, w_r^M)$ – $\mathcal{F}_r^w$-согласованный стандартный гауссовский дискретный белый шум, не зависимый от $\{x_r\}$, представляющий ошибки наблюдений.

Задача фильтрации цепи x по наблюдениям y заключается в вычислении условного распределения $\widehat{x}_r \triangleq \mathsf{E}\{x_r | y_1, \ldots, y_r\}$. Решение ее известно [3]: оно определяется следующей рекуррентной схемой вида «прогноз–коррекция»:

$$\widehat{x}_0 = \pi \text{ – начальное условие,} \tag{3.2}$$

$$\breve{x}_r = P^\top \widehat{x}_{r-1} \text{ – прогноз,} \tag{3.3}$$

$$\widehat{x}_r = \frac{1}{\mathbf{1}\kappa_r \breve{x}_r} \kappa_r \breve{x}_r \text{ – коррекция,} \tag{3.4}$$

где

$$\kappa_r \triangleq \operatorname{diag}\left(\mathcal{N}(y_1, Fe_1, G_1), \dots, \mathcal{N}(y_N, Fe_N, G_N)\right).$$

Вернемся к системе наблюдения (2.1), (2.2) на сетке с шагом $h < \overline{\lambda}^{-1}$ и покажем, что на ней система может быть приближена некоторой системой с дискретным временем (3.1). Уравнение динамики (2.1) может быть дискретизовано точно: согласно разложению Ито–Тейлора [4]

$$X_{t_r} = \exp(h\Lambda^\top) X_{t_{r-1}} + (\mu_{t_r} - \mu_{t_{r-1}}), \tag{3.5}$$

где

$$\exp(h\Lambda^\top) = I + h\Lambda^\top + O(h^2).$$

Из (2.2) также следует, что

$$Y_{t_r} = hfX_{t_r} + \sum_{n=1}^{N} X_{t_r}^n g_n^{1/2} (W_{t_r} - W_{t_{r-1}}) + \vartheta_r, \tag{3.6}$$

где стохастическая последовательность $\{\vartheta_r\}$ такова, что $\mathsf{E}\left\{\|\vartheta_r\|_2\right\} \leqslant Ch^{3/2}$ для любого $r \in \mathbb{N}$ и некоторой константы $C > 0$. Формулы (3.5) и (3.6) представляют схему временной дискретизации системы (2.1), (2.2), и к ней может быть применим алгоритм фильтрации (3.2)–(3.4) со следующими значениями параметров:

$$P = I + h\Lambda, \quad F = hf, \quad G_n = hg_n, \quad j = \overline{1, N}.$$

При этом рекурсия (3.3), (3.4) для данной системы записывается в форме

$$\widetilde{x}_r = \frac{1}{\mathbf{1}\kappa_r (I + h\Lambda^\top) \widetilde{x}_{r-1}} \kappa_r (I + h\Lambda^\top) \widetilde{x}_{r-1}, \tag{3.7}$$

и ее можно рассматривать как один из видов численной схемы реализации аппроксимации порядка $s = 1$: элементы матрицы ξ имеют вид

$$\xi^{kj}(y) = \delta_{kj} e^{\lambda_{jj} h} \mathcal{N}\left(y, hf^j, hg_j\right) + (1 - \delta_{kj}) \lambda_{kj} e^{\lambda_{jj} h} \int\limits_0^h Q^{kj}(y, u) du, \tag{3.8}$$

где

$$Q^{kj}(y,u) \triangleq e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{jj})u}\mathcal{N}\left(y, uf^k+(h-u)f^j, ug_k+(h-u)g_j\right). \tag{3.9}$$

В рекуррентной процедуре (3.7) элементы ξ^{kj} аппроксимированы функциями

$$\psi^{kj}(y) = (\delta_{kj}+h\lambda_{kj})\mathcal{N}\left(y, hf^j, hg_j\right). \tag{3.10}$$

Следующее утверждение определяет показатель точности численной схемы (3.7).

Лемма 1. В случае фильтрации состояний МСП по наблюдениям с аддитивными шумами схема (3.7) *обеспечивает глобальный порядок точности $\frac{1}{2}$, т.е. для любого $T>0$ при достаточно малом шаге $h>0$*

$$\sup_{\pi\in\Pi}\mathsf{E}\left\{\,\|\widetilde{x}_{T/h}-\widehat{x}_{T/h}\|_1\,\right\}\leqslant CTh^{\frac{1}{2}} \tag{3.11}$$

для некоторой константы $C>0$.

Доказательство леммы 1 дано в Приложении. Предложенная реализация алгоритма фильтрации при выбранном порядке аналитической аппроксимации $s=1$ имеет результирующий порядок точности $\frac{1}{2}$ из-за неэффективного выбора схемы численного интегрирования. Лемма 1 также позволяет получить следствие, согласно которому использование схемы «левых» прямоугольников для численного интегрирования сохранит результирующий порядок точности на уровне $\frac{1}{2}$.

Аппроксимируем интеграл (2.15) по отрезку $[0,h]$ одноточечной схемой (2.8), используя значение интегранда $\mathcal{N}(\cdot)$ в левой точке, беря его с весом ϱ^{kj} $(k\neq j)$:

$$\varrho^{kj} \triangleq \begin{cases} \lambda_{kj}\dfrac{e^{\lambda_{jj}h}-e^{\lambda_{kk}h}}{\lambda_{jj}-\lambda_{kk}}, & \text{если}\quad \lambda_{jj}\neq\lambda_{kk},\\ h\lambda_{kj}e^{\lambda_{jj}h}, & \text{если}\quad \lambda_{jj}=\lambda_{kk}.\end{cases} \tag{3.12}$$

При этом схема «левых» прямоугольников вычисления интегралов в рекурсии (2.10) примет вид

$$\psi^{kj}(y) = \delta_{kj}e^{\lambda_{jj}h}\mathcal{N}\left(y, hf^j, hg_j\right)+(1-\delta_{kj})\varrho^{kj}\mathcal{N}\left(y, hf^j, hg_j\right). \tag{3.13}$$

Следствие 1. В случае фильтрации состояний МСП по наблюдениям с аддитивными шумами схема «левых» прямоугольников в рекурсии (2.10) *обеспечивает глобальный порядок точности $\frac{1}{2}$.*

Доказательство следствия 1 приведено в Приложении.

3.2. Случай $s=1$: простая схема «средних» прямоугольников

Вычислим $\psi^{kj}(y)$ по формуле «средних» прямоугольников:

$$\begin{aligned}\psi^{kj}(y) &= \delta_{kj}e^{\lambda_{jj}h}\mathcal{N}\left(y, hf^j, hg_j\right)+\\ &+(1-\delta_{kj})\lambda_{kj}he^{\frac{(\lambda_{kk}+\lambda_{jj})h}{2}}\mathcal{N}\left(y, \frac{h}{2}\left(f^k+f^j\right), \frac{h}{2}(g_k+g_j)\right).\end{aligned} \tag{3.14}$$

Лемма 2. В случае фильтрации состояний МСП по наблюдениям с аддитивными шумами схема (3.14) *в рекурсии* (2.10) *обеспечивает глобальный порядок точности* 1, *т.е. для любого* $T > 0$ *при достаточно малом шаге* $h > 0$

$$\sup_{\pi\in\Pi} \mathsf{E}\left\{ \|\widetilde{x}_{T/h} - \widehat{x}_{T/h}\|_1 \right\} \leqslant CTh^1 \tag{3.15}$$

для некоторой константы $C > 0$.

Доказательство леммы 2 дано в Приложении.

Таким образом, заменой схемы численного интегрирования без увеличения вычислительных затрат возможно повысить общий порядок точности до первого. Дальнейшая фиксация порядка $s = 1$ и использование более точных методов численного интегрирования не приведет к значительному уточнению оценок, так как в суммарной погрешности основную роль будет играть ошибка аналитической аппроксимации, а не численного интегрирования. Для увеличения общей точности следует увеличить порядок аналитической аппроксимации до второго.

3.3. Случай $s = 2$: квадратуры Гаусса

Формулы (2.14)–(2.16) для $s = 2$ позволяют получить вид функций ξ^{kj}:

$$\begin{aligned}\xi^{kj}(y) = \delta_{kj} e^{\lambda_{jj}h} \mathcal{N}\left(y, hf^j, hg_j\right) + (1-\delta_{kj})\lambda_{kj} e^{\lambda_{jj}h} \int_0^h Q^{kj}(y,u)du +\\ + \sum_{i: i\neq k,\, i\neq j} \lambda_{ki}\lambda_{ij} e^{\lambda_{jj}h} \int_0^h \int_0^{h-u} R^{kij}(y,u,v)dvdu,\end{aligned} \tag{3.16}$$

где функция $Q^{kj}(y,u)$ определена формулой (3.9) и

$$\begin{aligned}R^{kij}(y,u,v) \triangleq e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{ii})u + (\lambda_{ii}-\lambda_{jj})v} \times\\ \times \mathcal{N}\Big(y, uf^k + vf^i + (h-u-v)f^j, ug_k + vg_i + (h-u-v)g_j\Big).\end{aligned} \tag{3.17}$$

Для вычисления одномерного интеграла в (3.16) будем использовать двухточечную квадратуру Гаусса

$$\int_0^h e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{jj})u} \mathcal{N}\left(y, uf^k + (h-u)f^j, y, ug_k + (h-u)g_j\right) du =$$

$$= \frac{h}{2}\left[e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{jj})\frac{(\sqrt{3}-1)h}{2\sqrt{3}}} \mathcal{N}\left(y, \frac{(\sqrt{3}-1)h}{2\sqrt{3}} f^k + \frac{(\sqrt{3}+1)h}{2\sqrt{3}} f^j, \frac{(\sqrt{3}-1)h}{2\sqrt{3}} g_k + \frac{(\sqrt{3}+1)h}{2\sqrt{3}} g_j\right) + \right.$$

$$\left. + e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{jj})\frac{(\sqrt{3}+1)h}{2\sqrt{3}}} \mathcal{N}\left(y, \frac{(\sqrt{3}+1)h}{2\sqrt{3}} f^k + \frac{(\sqrt{3}-1)h}{2\sqrt{3}} f^j, \frac{(\sqrt{3}+1)h}{2\sqrt{3}} g_k + \frac{(\sqrt{3}-1)h}{2\sqrt{3}} g_j\right)\right] + \epsilon_1(y),$$

для повторного интеграла – трехточечную:

$$\int\limits_0^h \int\limits_0^{h-u} e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{ii})u+(\lambda_{ii}-\lambda_{jj})v} \mathcal{N}\Big(y, uf^k+vf^i+(h-u-v)f^j, ug_k+vg_i+(h-u-v)g_j\Big)\,dvdu =$$

$$= \frac{h^2}{6}\left[e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{ii})\frac{h}{6}+(\lambda_{ii}-\lambda_{jj})\frac{h}{6}}\mathcal{N}\left(y, \frac{h}{6}f^k+\frac{h}{6}f^i+\frac{2h}{3}f^j, \frac{h}{6}g_k+\frac{h}{6}g_i+\frac{2h}{3}g_j\right)+\right.$$

$$+ e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{ii})\frac{2h}{3}+(\lambda_{ii}-\lambda_{jj})\frac{h}{6}}\mathcal{N}\left(y, \frac{h}{6}f^k+\frac{2h}{3}f^i+\frac{h}{6}f^j, \frac{h}{6}g_k+\frac{2h}{3}g_i+\frac{h}{6}g_j\right)+$$

$$\left.+ e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{ii})\frac{h}{6}+(\lambda_{ii}-\lambda_{jj})\frac{2h}{3}}\mathcal{N}\left(y, \frac{2h}{3}f^k+\frac{h}{6}f^i+\frac{h}{6}f^j, \frac{2h}{3}g_k+\frac{h}{6}g_i+\frac{h}{6}g_j\right)\right]+\epsilon_2(y),$$

где $\epsilon_1(y)$ и $\epsilon_2(y)$ – ошибки интегрирования. Таким образом, интегралы в рекурсии (2.10)) вычисляются с помощью следующей схемы:

$$\psi^{kj}(y) = \delta_{kj}e^{\lambda_{jj}h}\mathcal{N}\big(y, hf^j, hg_j\big) + (1-\delta_{kj})\frac{\lambda_{kj}he^{\lambda_{jj}h}}{2}\times \tag{3.18}$$

$$\times\left[e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{jj})\frac{(\sqrt{3}-1)h}{2\sqrt{3}}}\mathcal{N}\left(y, \frac{(\sqrt{3}-1)h}{2\sqrt{3}}f^k+\frac{(\sqrt{3}+1)h}{2\sqrt{3}}f^j, \frac{(\sqrt{3}-1)h}{2\sqrt{3}}g_k+\frac{(\sqrt{3}+1)h}{2\sqrt{3}}g_j\right)+\right.$$

$$\left.+ e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{jj})\frac{(\sqrt{3}+1)h}{2\sqrt{3}}}\mathcal{N}\left(y, \frac{(\sqrt{3}+1)h}{2\sqrt{3}}f^k+\frac{(\sqrt{3}-1)h}{2\sqrt{3}}f^j, \frac{(\sqrt{3}+1)h}{2\sqrt{3}}g_k+\frac{(\sqrt{3}-1)h}{2\sqrt{3}}g_j\right)\right]+$$

$$+\sum_{i:i\neq k,\ i\neq j}\frac{\lambda_{ki}\lambda_{ij}h^2e^{\lambda_{jj}h}}{6}\left[e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{ii})\frac{h}{6}+(\lambda_{ii}-\lambda_{jj})\frac{h}{6}}\mathcal{N}\left(y, \frac{h}{6}f^k+\frac{h}{6}f^i+\frac{2h}{3}f^j, \frac{h}{6}g_k+\frac{h}{6}g_i+\frac{2h}{3}g_j\right)+\right.$$

$$+ e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{ii})\frac{2h}{3}+(\lambda_{ii}-\lambda_{jj})\frac{h}{6}}\mathcal{N}\left(y, \frac{h}{6}f^k+\frac{2h}{3}f^i+\frac{h}{6}f^j, \frac{h}{6}g_k+\frac{2h}{3}g_i+\frac{h}{6}g_j\right)+$$

$$\left.+ e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{ii})\frac{h}{6}+(\lambda_{ii}-\lambda_{jj})\frac{2h}{3}}\mathcal{N}\left(y, \frac{2h}{3}f^k+\frac{h}{6}f^i+\frac{h}{6}f^j, \frac{2h}{3}g_k+\frac{h}{6}g_i+\frac{h}{6}g_j\right)\right].$$

Л е м м а 3. *В случае фильтрации состояний МСП по наблюдениям с аддитивными шумами схема* (3.18) *в рекурсии* (2.10) *обеспечивает глобальный порядок точности* 2, *т.е. для любого* $T > 0$ *при достаточно малом шаге* $h > 0$

$$\sup_{\pi\in\Pi}\mathsf{E}\left\{\|\widetilde{x}_{T/h}-\widehat{x}_{T/h}\|_1\right\} \leqslant CTh^2 \tag{3.19}$$

для некоторой константы $C > 0$.

Доказательство леммы 3 дано в Приложении. Сравнивая схемы (3.14) и (3.18) можно сделать вывод, что увеличивая число операций в схеме примерно в $N(N-1)$ раз удается повысить общий порядок точности аппроксимации до второго.

4. Численные схемы фильтрации по наблюдениям с мультипликативными шумами

Для простоты сравнения точности различных численных схем будем считать, что в (2.1), (2.2) $f = 0$, т.е. аддитивный полезный сигнал полностью отсутствует, и все матрицы $\{g_n\}_{n=\overline{1,N}}$ различны. Будет исследована точность тех же численных реализаций алгоритма фильтрации, которые исследовались в предыдущем разделе. Поэтому выполнение условия (2.9) ниже в данном разделе уже не проверяется.

Если все матрицы интенсивности шумов в наблюдениях различны, то оценка оптимальной фильтрации почти наверное совпадает с оцениваемым состоянием [6]. Несмотря на это многообещающее свойство, в разделе будет показано, что системы наблюдения с мультипликативными шумами обладают худшими свойствами для численной реализации, нежели системы с аддитивными шумами. Это означает, что одна и та же численная схема, примененная для фильтрации состояний по наблюдениям с мультипликативными шумами, позволяет получить менее точные оценки, чем при фильтрации состояний по наблюдениям с аддитивными шумами.

4.1. Случай $s = 1$: составная схема «средних» прямоугольников

Рассмотрим аналитическую аппроксимацию $\overline{x}_r(1)$, определенную (3.8), и ее аппроксимацию составной схемой «средних» прямоугольников с шагом дискретизации $h^{1+\alpha}$, $\alpha \geqslant 0$:

$$\psi^{kj}(y) = \delta_{kj} e^{\lambda_{jj} h} \mathcal{N}\left(y, hf^j, hg_j\right) + \\ + (1-\delta_{kj})\lambda_{kj} h^{1+\alpha} \sum_{i=1}^{[h^{-\alpha}]} Q^{kj}\left(y, h^{1+\alpha}\left(i - \frac{1}{2}\right)\right). \tag{4.1}$$

Легко проверить, что при $\alpha = 1$ последняя формула представляет простую схему «средних» прямоугольников.

Лемма 4. *В случае фильтрации состояний МСП по наблюдениям с мультипликативными шумами схема* (4.1) *в рекурсии* (2.10) *обеспечивает глобальный порядок точности* $p = \min(1, 2\alpha)$, *т.е. для любого* $T > 0$ *при достаточно малом шаге* $h > 0$

$$\sup_{\pi \in \Pi} \mathsf{E}\left\{\|\widetilde{x}_{T/h} - \widehat{x}_{T/h}\|_1\right\} \leqslant CTh^p \tag{4.2}$$

для некоторой константы $C > 0$.

Доказательство леммы 4 дано в Приложении. Из него следует, что точности *простого* метода «средних» прямоугольников недостаточно для построения численного алгоритма фильтрации любого положительного порядка точности. Какая-либо замена этой схемы на другую несоставную (например, на схему Симпсона, квадратуры Гаусса и пр.) к улучшению не приведут. Причиной этому является алгебраическая связь между порядком производной и степенью h в оценке ошибки интеграла по остатку ряда Тейлора. Из леммы также можно заключить, что при $s = 1$ рациональным выбором порядка шага дробления является $\alpha = \frac{1}{2}$.

4.2. Случай $s = 2$: составная схема средних

Результаты леммы 4 позволяют построить аппроксимацию элементов ξ^{kj} (3.16) порядка $s = 2$, вычисляя как одномерные, так и двумерные интегралы с помощью составной схемы средних с шагом h^2:

$$\begin{aligned}\psi^{kj}(y) = \delta_{kj} e^{\lambda_{jj} h} \mathcal{N}\left(y, hf^j, hg_j\right) + \\ + (1-\delta_{kj})\lambda_{kj} h^2 \sum_{i=1}^{\left[h^{-1}\right]} Q^{kj}\left(y, h^2(i - \frac{1}{2})\right) + \\ + \frac{h^4}{2} \sum_{\substack{i: i\neq k,\\ i\neq j}} \lambda_{ki}\lambda_{ij} e^{\lambda_{jj} h} \sum_{n=1}^{\left[h^{-1}\right]} \sum_{m=1}^{\left[h^{-1}\right]-n} R^{kij}\left(y, h^2\left(n - \frac{2}{3}\right), h^2\left(m - \frac{2}{3}\right)\right).\end{aligned} \tag{4.3}$$

С л е д с т в и е 2. В случае фильтрации состояний МСП по наблюдениям с мультипликативными шумами схема (4.3) *в рекурсии* (2.10) *обеспечивает глобальный порядок точности* 2, *т.е. для любого $T > 0$ при достаточно малом шаге $h > 0$*

$$\sup_{\pi\in\Pi} \mathsf{E}\left\{\|\widetilde{x}_{T/h} - \widehat{x}_{T/h}\|_1\right\} \leqslant CTh^2 \tag{4.4}$$

для некоторой константы $C > 0$.

Доказательство следствия 2 приведено в Приложении.

5. Численные примеры

Численное сравнение точности представленных выше методов является нетривиальной задачей из-за сложности подбора подходящего примера. Во-первых, разница в точности, обеспечиваемой различными схемами, будет мала в случае, когда столбцы f^n или матрицы g_n для разных значений n близки по значению между собой. Во-вторых, доказанные в [1] утверждения о порядке точности носят асимптотический характер при $h \to 0$: выбор слишком малого шага дискретизации может привести к тому, что вероятность превышения числом скачков состояния на отрезке дискретизации единицы окажется столь незначительной, что численные реализации высокого порядка будут практически не отличимы по точности от численных реализаций первого порядка. Наконец, в-третьих, характеристики точности того или иного метода приходится вычислять методом Монте-Карло, что приводит к необходимости моделирования пучков траекторий и оценок очень большого объема для визуального «разделения» этих характеристик.

5.1. Сравнительный анализ схем фильтрации по наблюдениям с аддитивными шумами

Для сравнительного анализа различных численных реализаций алгоритма фильтрации использовалась система наблюдения (2.1), (2.2) со следующими характеристиками: $t \in [0, 1]$, $N = 3$, $h = 0{,}01$,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -10{,}0 & 2{,}0 & 8{,}0 \\ 8{,}0 & -10{,}0 & 2{,}0 \\ 2{,}0 & 8{,}0 & -10{,}0 \end{bmatrix}, \quad \pi = \begin{bmatrix} 0{,}333 \\ 0{,}333 \\ 0{,}334 \end{bmatrix},$$

$$f = \begin{bmatrix} 0{,}0 \\ -50{,}0 \\ 50{,}0 \end{bmatrix}, \quad g_1 = g_2 = g_3 = 1,$$

объем пучка траекторий для метода Монте-Карло $S = 100000$.

На рис. 1 и 2 представлены графики $Q^{1,2}(y, u)$ и $Q^{1,3}(y, u)$ интеграндов в (2.15) как функций аргумента u для некоторых фиксированных значений y.

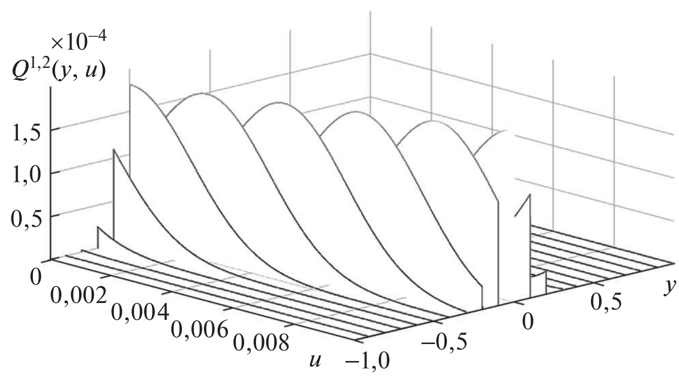


Рис. 1. Графики функции $Q^{1,2}(y, u)$ при некоторых фиксированных y: аддитивные шумы в наблюдениях.

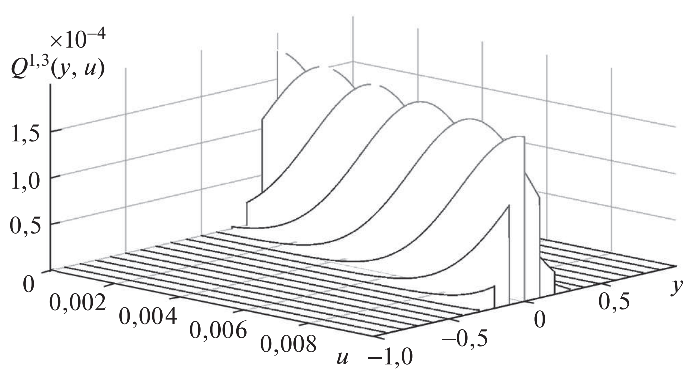


Рис. 2. Графики функции $Q^{1,3}(y, u)$ при некоторых фиксированных y: аддитивные шумы в наблюдениях.

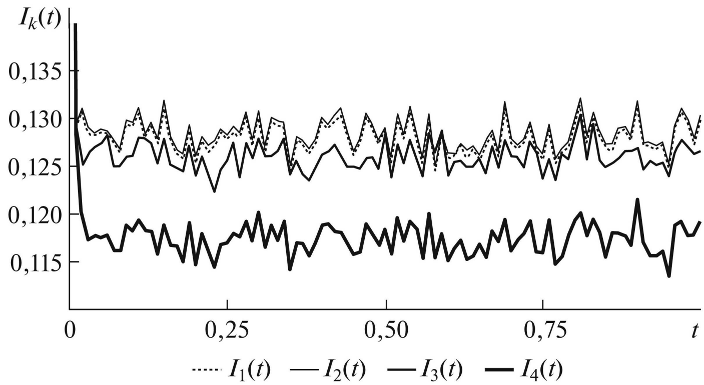


Рис. 3. Критерий точности при использовании различных схем численной реализации: аддитивные шумы в наблюдениях.

С помощью метода имитационного моделирования по пучку траекторий были вычислены выборочные значения критерия качества

$$\mathrm{I}(t) \triangleq \mathsf{E}\left\{ \|\widehat{X}_t - X_t\|_1 \right\}$$

для различных численных реализаций аналитических аппроксимаций:

$$\mathrm{I}_k(t) \triangleq \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} \|\widetilde{X}_t^{s,k} - X_t^s\|_1,$$

где X_t^s – значение s-й траектории состояния в момент времени t, $\widetilde{X}_t^{s,k}$ – значение s-й траектории аппроксимации оценки, полученной применением k-й схемы реализации, в момент времени t. В данном эксперименте были вычислены характеристики точности следующих схем:

— $\mathrm{I}_1(t)$ – простая схема дискретизации стохастической дифференциальной системы наблюдения (порядок точности $\frac{1}{2}$),

— $\mathrm{I}_2(t)$ – простая схема «левых» прямоугольников (порядок точности $\frac{1}{2}$),

— $\mathrm{I}_3(t)$ – простая схема «средних» прямоугольников (порядок точности 1),

— $\mathrm{I}_4(t)$ – простая схема квадратур Гаусса (порядок точности 2).

Их графики представлены на рис. 3. Полученные результаты вполне соответствуют теоретическим выкладкам. Характеристики $\mathrm{I}_1(t)$ и $\mathrm{I}_2(t)$ сопоставимы между собой, так как соответствуют численным реализациям одного порядка точности. Характеристика $\mathrm{I}_3(t)$ меньше $\mathrm{I}_1(t)$ и $\mathrm{I}_2(t)$, так как порядок ее точности выше на $\frac{1}{2}$. Характеристика $\mathrm{I}_4(t)$ значительно меньше $\mathrm{I}_3(t)$, так как порядок ее точности выше на 1.

Примечательно, что для порядка $s = 1$ был проведен дополнительный расчет с использованием схемы адаптивного вычисления интеграла (2.15). Результат ее использования оказался визуально не отличимым от результата метода «средних» прямоугольников. При этом время вычисления оценок с использованием схемы адаптивного интегрирования значительно возросло.

5.2. Сравнительный анализ схем фильтрации по наблюдениям с мультипликативными шумами

Для сравнительного анализа различных численных реализаций алгоритма фильтрации использовалась система наблюдения (2.1), (2.2) со следующими характеристиками:

$$t \in [0,1], \quad N = 3, \quad h = 0{,}05, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} -10{,}0 & 2{,}0 & 8{,}0 \\ 8{,}0 & -10{,}0 & 2{,}0 \\ 2{,}0 & 8{,}0 & -10{,}0 \end{bmatrix},$$

$$\pi = \begin{bmatrix} 0{,}333 \\ 0{,}333 \\ 0{,}334 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 0{,}0 \\ 0{,}0 \\ 0{,}0 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} g_1 = 1{,}0, \\ g_2 = 2{,}0, \\ g_3 = 3{,}0, \end{matrix}$$

объем пучка траекторий для метода Монте-Карло 100000.

На рис. 4 и 5 представлены графики $Q^{1,2}(y,u)$ и $Q^{1,3}(y,u)$ интеграндов в (2.15) как функций аргумента u для некоторых фиксированных значений y.

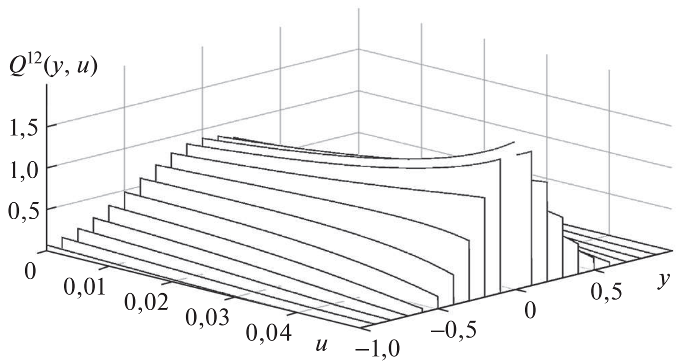


Рис. 4. Графики функции $Q^{1,2}(y,u)$ при некоторых фиксированных y: мультипликативные шумы в наблюдениях.

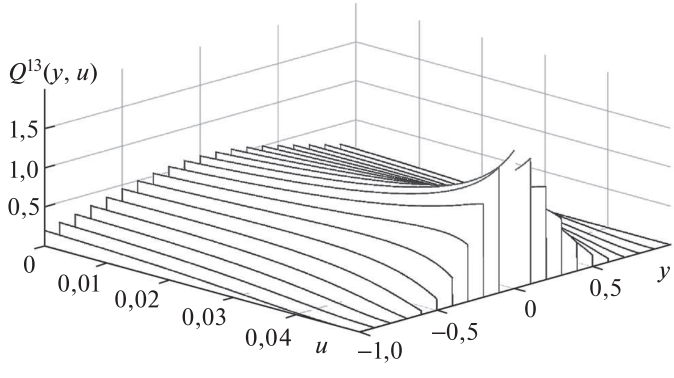


Рис. 5. Графики функции $Q^{1,3}(y,u)$ при некоторых фиксированных y мультипликативные шумы в наблюдениях.

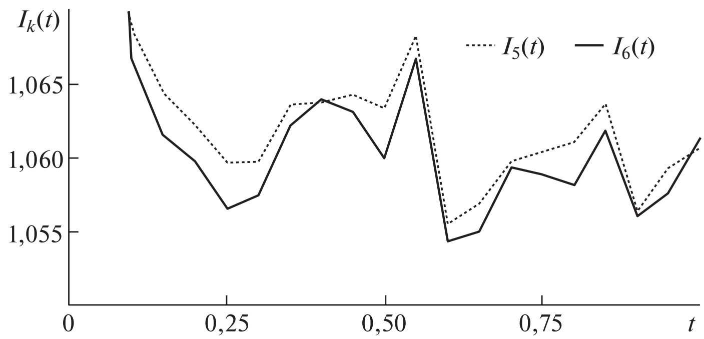


Рис. 6. Критерий точности при использовании различных схем численной реализации: мультипликативные шумы в наблюдениях.

Методом Монте-Карло были вычислены выборочные значения критерия качества $\mathrm{I}(t)$ для следующих численных схем:

— $\mathrm{I}_5(t)$ – составная схема «средних» прямоугольников (порядок точности 1),

— $\mathrm{I}_6(t)$ – составная схема средних (порядок точности 2).

Их графики приведены на рис. 6. Полученные результаты соответствуют теоретическим выкладкам. Величина $\mathrm{I}_6(t)$ меньше $\mathrm{I}_5(t)$, так как порядок ее точности выше.

6. Заключение

Таблица содержит сводную информацию о порядке точности различных схем численных реализаций оценок фильтрации в зависимости от вида шума в наблюдениях: аддитивного или мультипликативного. Первое значение в ячейке означает порядок аналитической аппроксимации, второе – итоговый порядок точности, обеспечиваемый выбранной схемой численной реализации. Значение, взятое в скобки, означает, что детальный вывод итогового порядка в данной работе не приведен.

Анализируя данные в таблице, можно прийти к следующим заключениям.

В случае фильтрации с наблюдениями общего вида (снос в наблюдениях – ненулевой, матрицы интенсивности шумов – неодинаковы для разных состояний МСП) следует применять составные схемы вычисления интегралов. При этом схема должна быть наиболее экономичной с вычислительной

Порядок точности различных схем реализации

<table>
<tr><th>Вид шума</th><th colspan="2">Диск-ция сист.</th><th colspan="2">«Лев.» пр-ки</th><th colspan="2">«Сред.» пр-ки</th><th colspan="2">Кв. Гаусса</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Аддитив. шум</td><td colspan="2">Прост.</td><td colspan="2">Прост.</td><td colspan="2">Прост.</td><td colspan="2">Прост.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$1 \mid \frac{1}{2}$</td><td colspan="2">$1 \mid \frac{1}{2}$</td><td colspan="2">$1 \mid 1$</td><td colspan="2">$2 \mid 2$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Мультиплик. шум</td><td>Прост.</td><td>Сост.</td><td>Прост.</td><td>Сост.</td><td>Прост.</td><td>Сост.</td><td>Прост.</td><td>Сост.</td></tr>
<tr><td>$1 \mid 0$</td><td>$1 \mid (1)$</td><td>$1 \mid (0)$</td><td>$1 \mid (1)$</td><td>$1 \mid 0$</td><td>$1 \mid 1$</td><td>$1 \mid (0)$</td><td>$1 \mid (2)$</td></tr>
<tr><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>$1 \mid (0)$</td><td>$2 \mid 2$</td><td>–</td><td>–</td></tr>
</table>

точки зрения, а требуемая точность должна достигаться путем выбора подходящего дробного шага интегрирования, меньшего, чем шаг дискретизации по времени. В качестве такой схемы предлагается выбрать метод «средних» прямоугольников.

Судя по результатам численных экспериментов, при малых шагах дискретизации по времени, когда полученные асимптотические оценки порядка точности имеют место, разница в применении аналитической аппроксимации того или иного порядка незначительна. Поэтому выбор пары «порядок аналитической аппроксимации–численная схема» должен проводиться индивидуально для каждой конкретной задачи. В итоге должен быть достигнут компромисс между требованиями к точности получаемых оценок и к ограничениям на имеющиеся вычислительные ресурсы.

Построение алгоритмов численного решения задачи фильтрации марковских процессов по непрерывным наблюдениям с аддитивными/мультипликативными шумами нельзя считать законченным. Во-первых, при выводе порядка точности численных реализаций использовались достаточно консервативные неравенства – оценки сверху. Именно они привели к пессимистическому выводу о невозможности использования *простых* (несоставных) схем численного интегрирования для обработки наблюдений с мультипликативными шумами. Использование более «тонких» неравенств, возможно, позволит уточнить порядки точности тех или иных схем интегрирования. Во-вторых, полученные результаты делают возможным разработку численных методов решения задач фильтрации по непрерывным наблюдениям состояний марковских процессов более общего вида: общих МСП, диффузионных процессов и пр. В-третьих, открытым остается вопрос о величине расхождения оценок фильтрации по непрерывным и по дискретизованным наблюдениям. Все эти проблемы представляются перспективными для дальнейших исследований.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Первый сомножитель в (3.10) представляет собой вес ϱ^{kj}, при этом число точек в интегральной сумме $L = 1$. Из свойств матрицы интенсивности следует, что $\mathfrak{W} = \sum_{j=1}^{N} \varrho^{kj} = 1$. Далее в изложении будем использовать следующие обозначения: $\gamma^{kj}(y) \triangleq \psi^{kj}(y) - \xi^{kj}(y)$, $\gamma(y) \triangleq \|\gamma^{kj}(y)\|_{k,j=\overline{1,N}}$. Разность $\gamma^{kj}(y)$ с учетом того, что $g_k \equiv g$, может быть записана в виде

$$\gamma^{kj}(y) = \delta_{kj}\left(1 + \lambda_{jj}h - e^{\lambda_{jj}h}\right)\mathcal{N}(y, hf^j, hg) +$$
$$+ (1 - \delta_{kj})\lambda_{kj}h\left(1 - e^{\lambda_{jj}h}\right)\mathcal{N}(y, hf^j, hg) +$$
$$+ (1-\delta_{kj})\lambda_{kj}e^{\lambda_{jj}h}\underbrace{\left(h\mathcal{N}(y, hf^j, hg) - \int\limits_0^h e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{jj})u}\mathcal{N}(y, uf^k + (h-u)f^j, hg)du\right)}_{\triangleq \mathcal{J}^{kj}(y)}.$$

Оценим сверху интеграл в правой части (2.11) с использованием формулы Тейлора первого и второго порядков:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^M} |\gamma^{kj}(y)|dy \leqslant \delta_{kj}\left(1+\lambda_{jj}h - e^{\lambda_{jj}h}\right) + (1-\delta_{kj})\lambda_{kj}h\left(1-e^{\lambda_{jj}h}\right) +$$

$$+ (1-\delta_{kj})\lambda_{kj}e^{\lambda_{jj}h}\int\limits_{\mathbb{R}^M} |\mathcal{I}^{kj}(y)|dy \leqslant \tag{П.1}$$

$$\leqslant K_1 h^2 + (1-\delta_{kj})\lambda_{kj}e^{\lambda_{jj}h}\int\limits_{\mathbb{R}^M} |\mathcal{I}^{kj}(y)|dy$$

для некоторой константы $K_1 > 0$. Разность $\mathcal{I}^{kj}(y)$ представляет собой ошибку численного интегрирования при использовании простой схемы «левых» прямоугольников и определяется следующим образом [2]:

$$\mathcal{I}^{kj}(y) = \frac{h^2}{2}\frac{d}{du}\left[e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{jj})u}\mathcal{N}\left(y, uf^k + (h-u)f^j, hg\right)\right]\Big|_{u=z} =$$
$$= \frac{h^2}{2}e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{jj})z}\mathcal{N}\left(y, zf^k + (h-z)f^j, hg\right)\zeta_0(y,z),$$

где $z = z(y) \in [0, h]$ – некоторый параметр, зависящий от y, и

$$\zeta_0(z) \triangleq \lambda_{kk} - \lambda_{jj} + \langle f^j, f^k - f^j\rangle_{g^{-1}} - \frac{z}{h}\|f^k - f^j\|^2_{g^{-1}} + \frac{1}{h}\langle y, f^k - f^j\rangle_{g^{-1}}. \tag{П.2}$$

Непосредственно интегрировать абсолютную величину $\mathcal{I}^{kj}$ проблематично, так как $\int_{\mathbb{R}^M} |\mathcal{I}^{kj}(y)|dy = \int_{\mathbb{R}^M} |\mathcal{I}^{kj}(y, z^{kj}(y))|dy$, а зависимость $z^{kj}(y)$ в общем случае неизвестна. Поэтому предварительно оценим $|\mathcal{I}^{kj}|$ сверху. Прежде всего, можно непосредственно проверить истинность неравенства

$$\left\|y - z^{kj}f^k - \left(h - z^{kj}\right)f^j\right\|^2_{(hg)^{-1}} \geqslant$$
$$\geqslant \|y\|^2_{(2hg)^{-1}} - \left\|z^{kj}f^k + \left(h - z^{kj}\right)f^j\right\|^2_{(hg)^{-1}}. \tag{П.3}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{h^2}{2}e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{jj})z}\mathcal{N}\left(y, z^{kj}f^k + \left(h-z^{kj}\right)f^j, hg\right) = \tag{П.4}$$
$$= \frac{h^2}{2}e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{jj})z}(2\pi)^{-M/2}|hg|^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\left\|y - z^{kj}f^k - \left(h - z^{kj}\right)f^j\right\|^2_{(hg)^{-1}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{h^2}{2}e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{jj})z}(2\pi)^{-M/2}|hg|^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\|y\|^2_{(2hg)^{-1}}\right) \times$$
$$\times \exp\left(\frac{1}{2}\left\|z^{kj}f^k + \left(h - z^{kj}\right)f^j\right\|^2_{(hg)^{-1}}\right) \leqslant h^2 K_2 \mathcal{N}(y, 0, 2hg),$$

где $K_2 > 0$ – некоторая константа. Тогда

$$
\text{(П.5)} \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^M} |\mathcal{J}^{kj}(y)|dy \leqslant K_2 h^2 \int\limits_{\mathbb{R}^M} \mathcal{N}(y,0,2hg)|\zeta_0(y,z)|dy \leqslant
$$

$$
\leqslant K_2 h^2 \int\limits_{\mathbb{R}^M} \left| \lambda_{kk} - \lambda_{jj} + \langle f^j, f^k - f^j \rangle_{g^{-1}} - \frac{z}{h} \left\| f^k - f^j \right\|^2_{g^{-1}} \right| \mathcal{N}(y,0,2hg)dy +
$$

$$
+ K_2 h^2 \int\limits_{\mathbb{R}^M} \left| \frac{1}{h} \langle y, f^k - f^j \rangle_{g^{-1}} \right| \mathcal{N}(y,0,2hg)dy =
$$

$$
= K_2 h^2 \int\limits_{\mathbb{R}^M} \left| \lambda_{kk} - \lambda_{jj} + \langle f^j, f^k - f^j \rangle_{g^{-1}} - \frac{z}{h} \left\| f^k - f^j \right\|^2_{g^{-1}} \right| \mathcal{N}(y,0,2hg)dy +
$$

$$
+ \sqrt{2} K_2 h^{\frac{3}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^M} \left| \frac{1}{h} \left\langle y, g^{-\frac{1}{2}}(f^k - f^j) \right\rangle_I \right| \mathcal{N}(y,0,I)dy = K_3 h^2 + K_4 h^{\frac{3}{2}}
$$

для некоторых неотрицательных констант K_3 и K_4. Подставим эти неравенства в оценку интеграла абсолютной величины γ^{kj}:

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^M} \left| \gamma^{kj}(y) \right| dy \leqslant K_1 h^2 + (1 - \delta_{kj}) \lambda_{kj} e^{\lambda_{jj} h} \left(K_3 h^2 + K_4 h^{\frac{3}{2}} \right) \leqslant K_5 h^{\frac{3}{2}}
$$

с некоторой константой $K_5 > 0$. Условие (2.11) в этом случае приобретает форму

$$
\max_{k=\overline{1,N}} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^M} |\gamma^{kj}(y)|dy \leqslant N K_5 h^{\frac{3}{2}},
$$

а неравенство (2.13), характеризующее разницу условного распределения $\widehat{x}_{T/h}$ и его аппроксимации первого порядка, реализованной с помощью дискретизации дифференциальной системы наблюдения, имеет вид

$$
\text{(П.6)} \qquad \sup_{\pi \in \Pi} \mathsf{E} \left\{ \| \widetilde{X}_{T/h} - \widehat{X}_{T/h} \|_1 \right\} \leqslant 2T \left(\overline{\lambda}^2 h + N K_5 h^{\frac{1}{2}} \right) \leqslant C h^{\frac{1}{2}}
$$

для некоторой константы $C > 0$.

Лемма 1 доказана.

Доказательство следствия 1. Оценим сначала величину $\mathfrak{W}$, предполагая для простоты, что $\lambda_{jj} \neq \lambda_{kk}$:

$$
\mathfrak{W} = e^{\lambda_{kk} h} + \sum_{j: j \neq k} \varrho^{kj} \leqslant
$$

$$
\leqslant 1 + \lambda_{kk} h + \frac{\lambda_{kk}^2 h^2}{2} + K_6 h^3 + \sum_{j: j \neq k} \lambda_{kj} \frac{\lambda_{jj} h + \frac{\lambda_{jj}^2 h^2}{2} - \lambda_{kk} h - \frac{\lambda_{kk}^2 h^2}{2} + K_7 h^3}{\lambda_{jj} - \lambda_{kk}} \leqslant
$$

$$\leqslant 1 + \frac{\lambda_{kk}^2 h^2}{2} + \sum_{j:j\neq k} \lambda_{kj} h^2 \frac{\lambda_{jj}^2 - \lambda_{kk}^2}{2(\lambda_{jj} - \lambda_{kk})} + K_8 h^3 =$$

$$= 1 + \frac{\lambda_{kk}^2 h^2}{2} + \sum_{j:j\neq k} \frac{h^2 \lambda_{kj}(\lambda_{jj} + \lambda_{kk})}{2} + K_8 h^3 =$$

$$= 1 + \sum_{j:j\neq k} \frac{h^2 \lambda_{kj}\lambda_{jj}}{2} + K_8 h^3 \leqslant 1$$

для достаточно малых h и некоторых положительных констант K_6, K_7, и K_8. Аналогичным образом можно показать, что $\mathfrak{W} \leqslant 1$ и при $\lambda_{kk} = \lambda_{jj}$. Далее, определим отклонение схемы (3.13) от эталона (3.8), учитывая, что $g_j \equiv g$:

$$\gamma^{kj}(y) = \psi^{kj}(y) - \xi^{kj}(y) =$$

$$= (1-\delta_{kj}) \left(\varrho^{kj} \mathcal{N}(y, hf^j, hg) - \lambda_{kj} e^{\lambda_{jj} h} \int\limits_0^h e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj})u} \mathcal{N}\left(y, uf^k + (h-u)f^j, hg\right) du \right) =$$

$$= (1 - \delta_{kj}) \left(\varrho^{kj} - \lambda_{kj} h e^{\lambda_{jj} h} \right) \mathcal{N}(y, hf^j, hg) +$$

$$+ (1-\delta_{kj}) \lambda_{kj} e^{\lambda_{jj} h} \left(h\mathcal{N}(y, hf^j, hg) - \int\limits_0^h e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj})u} \mathcal{N}\Big(y, uf^k + (h-u)f^j, hg\Big) du \right) =$$

$$= (1 - \delta_{kj}) \left(\varrho^{kj} - \lambda_{kj} h e^{\lambda_{jj} h} \right) \mathcal{N}(y, hf^j, hg) +$$

$$+ (1 - \delta_{kj}) \frac{\lambda_{kj} h^2}{2} e^{\lambda_{jj} h} \frac{d}{du} \left[e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj})u} \mathcal{N}\Big(y, uf^k + (h-u)f^j, hg\Big) \right] \Big|_{u=z},$$

где $z = z(y) \in [0, h]$ – некоторый параметр, зависящий от y, и $\zeta_0(z)$ определено (П.2). Полностью повторяя выкладки (П.3)–(П.5), можно убедиться в справедливости неравенства (П.8) для схемы «левых» прямоугольников, которая также имеет порядок глобальной точности $\frac{1}{2}$. Следствие 1 доказано.

Доказательство леммы 2. Проверим для (3.14) выполнение условия (2.9), используя формулу Тейлора второго порядка и свойства матрицы интенсивности переходов Λ:

$$\mathfrak{W} = \sum_{j,\ell} \varrho_\ell^{kj} = \sum_{j=1}^N \delta_{kj} e^{\lambda_{kk} h} + (1 - \delta_{kj}) \lambda_{kj} h e^{\frac{(\lambda_{kk} + \lambda_{jj})h}{2}} =$$

$$= 1 + \lambda_{kk} h + \frac{\lambda_{kk}^2 h^2}{2} + C_{kk}(h) h^3 + \sum_{j:j\neq k}^N \lambda_{kj} h \left(1 + \lambda_{kj} h + \frac{\lambda_{kj}^2 h^2}{2} + C_{kj}(h) h^3 \right) =$$

$$= 1 + \frac{h^2}{2} \sum_{j:j\neq k}^N \lambda_{kj} \lambda_{jj} + C(h) h^3.$$

Здесь все функции $\{C_{kj}\}_{k,j}$ ограничены сверху константой $\frac{\max_k |\lambda_{kk}|^3}{6}$. Так как $\sum_{j:j\neq k}^{N} \lambda_{kj}\lambda_{jj} \leqslant 0$, то при достаточно малых h условие (2.9) выполнено: $\mathfrak{W} \leqslant 1$.

$$\gamma^{kj}(y) = (1-\delta_{kj})\frac{\lambda_{kj}h^3}{24}e^{\lambda_{jj}h}\frac{d^2}{du^2}\left[e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{jj})u}\mathcal{N}(y, uf^k + (h-u)f^j, hg)\right]\Big|_{u=z} =$$
$$= (1-\delta_{kj})\frac{\lambda_{kj}h^2}{2}e^{\lambda_{jj}h}e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{jj})z}\mathcal{N}\left(y, zf^k + (h-z)f^j, hg\right)[\zeta_0^2(y,z) - \zeta_1],$$

где вновь $z = z(y) \in [0, h]$ – некоторый параметр, зависящий от y, а

$$\zeta_1(z) \triangleq \frac{\partial}{\partial z}\zeta_0(z) = \frac{1}{h}\|f^j - f^k\|^2_{g^{-1}}. \tag{П.7}$$

Выполняя выкладки, аналогичные (П.3)–(П.5), можно получить вариант условия (2.11) $\max_{k=\overline{1,N}}\sum_{j=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^M}|\gamma^{kj}(y)|dy \leqslant NK_9h^2$ и неравенства (2.13)

$$\sup_{\pi\in\Pi}\mathsf{E}\Big\{\|\widetilde{x}_{T/h} - \widehat{x}_{T/h}\|_1\Big\} \leqslant 2T\left(\overline{\lambda}^2 h + NK_{10}h\right) \leqslant CTh \tag{П.8}$$

для схемы интегрирования простых «средних» прямоугольников. В двух последних неравенствах K_9, K_{10} и C – некоторые положительные константы. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Выполнение условия (2.9) доказывается аналогично, как и в леммах 1 и 2. Согласно [2] и с учетом того, что $g_n \equiv g$, абсолютные значения ошибок ограничены следующим образом:

$$|\epsilon_1(y)| \leqslant h^5K_{11}\max_{u\in[0,h]}\left|\frac{\partial^4}{\partial u^4}\left[e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{jj})u}\mathcal{N}\left(y, uf^k + (h-u)f^j, hg\right)\right]\right|, \tag{П.9}$$

$$|\epsilon_2(y)| \leqslant \tag{П.10}$$
$$\leqslant h^5K_{12}\max_{\substack{(u,v)\in\mathcal{D},\\ k=\overline{0,3}}}\left|\frac{\partial^3}{\partial u^k\partial v^{3-k}}\left[e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{ii})u+(\lambda_{ii}-\lambda_{jj})v}\mathcal{N}\Big(y, uf^k + vf^i + (h-u-v)f^j, hg\Big)\right]\right|,$$

где K_{11} и K_{12} – некоторые положительные константы.

Производная в (П.9) имеет вид

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^4}{\partial u^4}\left[e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{jj})u}\mathcal{N}\left(y, uf^k + (h-u)f^j, hg\right)\right] = \\ &= e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{jj})u}\mathcal{N}\Big(y, uf^k + (h-u)f^j, hg\Big)\left(\zeta_0^4(u) + 6\zeta_0^2(u)\zeta_1(u) + 3\zeta_1^2(u)\right),\end{aligned} \tag{П.11}$$

где ζ_0 и ζ_1 определены (П.2) и (П.7). Строя оценки сверху интеграла от абсолютного значения $e_1(y)$ подобно (П.5), можно получить неравенство $\int_{\mathbb{R}^M}|e_1(y)|dy \leqslant K_{13}h^3$, и аналогичная оценка для $|e_2(y)|$ имеет вид $\int_{\mathbb{R}^M}|e_2(y)|dy \leqslant$ $\leqslant K_{14}h^3$ для некоторых неотрицательных констант K_{13} и K_{14}. В этом случае неравенство (2.13) принимает вид $\sup_{\pi\in\Pi}\mathsf{E}\left\{\|\widetilde{x}_{T/h} - \widehat{x}_{T/h}\|_1\right\} \leqslant CTh^2$ для некоторой константы $C > 0$ и достаточно малого шага h. Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Сначала исследуем характеристики точности интегрирования простой схемы «средних» прямоугольников (т.е. $\alpha = 0$), а затем сделаем выводы на случай составного варианта данной схемы. Итак, с учетом того, что $f^j \equiv 0$,

$$\psi^{kj}(y) = \delta_{kj} e^{\lambda_{jj} h} \mathcal{N}(y, 0, hg_j) + (1 - \delta_{kj}) \lambda_{kj} h Q^{kj}\left(y, \frac{h}{2}\right).$$

При этом разность $\gamma^{kj}(y) = \psi^{kj}(y) - \xi^{kj}(y)$ представима в виде

$$\gamma^{kj}(y) = (1 - \delta_{kj}) \lambda_{kj} e^{\lambda_{jj} h} \left[Q^{kj}\left(y, \frac{h}{2}\right) - \int_0^h Q^{kj}(y, u) du \right],$$

и согласно [2] для нее верно следующее равенство

$$\gamma^{kj}(y) = (1 - \delta_{kj}) \frac{\lambda_{kj} h^3 e^{\lambda_{jj} h}}{24} \frac{\partial^2}{\partial u^2} Q^{kj}(y, u)\Big|_{u=z} =$$
$$= (1 - \delta_{kj}) \frac{\lambda_{kj} h^3 e^{\lambda_{jj} h}}{24} Q^{kj}(y, z) \left[\eta_0^2(y, z) - \eta_1(y, z) \right],$$

где $z = z(y) \in [0, h]$ – параметр, зависящий от y,

$$\eta_0(y, z) \triangleq \lambda_{kk} - \lambda_{jj} - \frac{\frac{d}{dz}|zg_k + (h - z)g_j|}{2|zg_k + (h - z)g_j|} +$$
$$+ \frac{1}{2} y^\top [zg_k + (h - z)g_j]^{-1} (g_k - g_j) [zg_k + (h - z)g_j]^{-1} y \tag{П.12}$$

и

$$\eta_1(y, z) \triangleq \tag{П.13}$$
$$\triangleq \frac{|zg_k + (h - z)g_j| \frac{d^2}{dz^2}|zg_k + (h - z)g_j| - (\frac{d}{dz}|zg_k + (h - z)g_j|)^2}{2|zg_k + (h - z)g_j|^2} +$$
$$+ y^\top [zg_k + (h - z)g_j]^{-1} (g_k - g_j) [zg_k + (h - z)g_j]^{-1} (g_k - g_j) [zg_k + (h - z)g_j]^{-1} y.$$

Предварительно оценим $|\gamma^{kj}|$ сверху. Свойства системы (2.2) гарантируют, что существуют такие симметрические матрицы g и G, что $0 < g \leqslant g_n \leqslant G$ для всех $n = \overline{1, N}$. Поэтому выполняется неравенство

$$Q^{kj}(y, u) \leqslant K_{15} \mathcal{N}(y, 0, hg), \tag{П.14}$$

где

$$K_{15} = \frac{|G|}{|g|} \max_{\substack{k,j=\overline{1,N}: k \neq j \\ u \in [0,h]}} e^{(\lambda_{kk} - \lambda_{jj}) u}.$$

Из свойства определителей [5] следует, что

$$|zg_k + (h-z)g_j| = |z(g_k - g_j) + hg_j| = \sum_{n=0}^{N} z^n h^{N-n} G_{kjn}, \tag{П.15}$$

где G_{kjn} – сумма всех определителей матриц, полученных из $u(g_k - g_j)$ путем замены n столбцов соответствующими столбцами hg_j. Отсюда следует, что

$$\frac{d}{dz}|zg_k + (h-z)g_j| = \sum_{n=1}^{N} n z^{n-1} h^{N-n} G_{kjn}. \tag{П.16}$$

Поэтому верно неравенство

$$\left| \frac{\frac{d}{dz}|zg_k + (h-z)g_j|}{2|zg_k + (h-z)g_j|} \right| = h^{-1} \left| \frac{\sum\limits_{n=1}^{N} n \left(\frac{u}{h}\right)^{n-1} G_{kjn}}{\sum\limits_{m=0}^{N} \left(\frac{u}{h}\right)^{m} G_{kjm}} \right| \leqslant \frac{K_{16}}{h}$$

для $K_{16} = \max_{\substack{k,j=\overline{1,N}:\\ k\neq j}} \frac{\sum_{n=1}^{N} n\left|G_{kjn}\right|}{2\min_{w\in[0,1]}\left|\sum_{m=0}^{N} G_{kjm} w^m\right|}$. Таким образом, для $|\eta_0|$ верна следующая оценка сверху:

$$|\eta_0| \leqslant K_{17} + \frac{K_{16}}{h} + \frac{K_{18}}{h^2}\|y\|_I^2, \tag{П.17}$$

где $K_{17} = \max_{\substack{k,j=\overline{1,N}:\\ k\neq j}} |\lambda_{kk} - \lambda_{jj}|$, $K_{18} = \|g^{-1}Gg^{-1}\|_2^2$ – квадрат спектральной нормы матрицы. Заметим также, что $\int_{\mathbb{R}^M} \|y\|_I^2 \mathcal{N}(y, 0, hg)dy = h\mathrm{tr}\,(g)$.

Из (П.17) следует оценка сверху для квадрата ζ_0:

$$\eta_0^2(y,u) \leqslant K_{21} + \frac{K_{22}}{h^2}\left(1 + \|y\|_I^2\right) + \frac{K_{23}}{h^3}\|y\|_I^2 + \frac{K_{24}}{h^4}\|y\|_I^4 \tag{П.18}$$

с некоторыми положительными константами K_{21}, K_{22}, K_{23} и K_{24}. Используя (П.15) и (П.16), можно получить оценку абсолютного значения первого слагаемого в $\zeta_1(y,u)$:

$$\left| \frac{|zg_k + (h-z)g_j| \frac{d^2}{dz^2}|zg_k + (h-z)g_j| - \left(\frac{d}{dz}|zg_k + (h-z)g_j|\right)^2}{2|zg_k + (h-z)g_j|^2} \right| =$$

$$= \left| \frac{\sum\limits_{n=0}^{N} z^s h^{N-n} G_{kjn} \sum\limits_{m=2}^{N} m(m-1) z^{m-2} h^{N-m} G_{kjm} - \left(\sum\limits_{\ell=1}^{N} \ell z^{\ell-1} h^{N-\ell} G_{kj\ell}\right)^2}{2\left(\sum\limits_{s=0}^{N} z^s h^{N-s} G_{kjs}\right)^2} \right| =$$

$$= \frac{1}{h^2} \left| \frac{\sum\limits_{n=0}^{N} \left(\frac{z}{h}\right)^s G_{kjn} \sum\limits_{m=2}^{N} m(m-1)\left(\frac{z}{h}\right)^{m-2} G_{kjm} - \left(\sum\limits_{\ell=1}^{N} \ell \left(\frac{z}{h}\right)^{\ell-1} G_{kj\ell}\right)^2}{2\left(\sum\limits_{s=0}^{N} \left(\frac{z}{h}\right)^s G_{kjs}\right)^2} \right| \leqslant \frac{K_{25}}{h^2},$$

где $K_{25} = \max_{\substack{k,j=\overline{1,N}:\\ k\neq j}} \frac{\sum_{n=0}^{N} |G_{kjn}| \sum_{m=2}^{N} m(m-1)|G_{kjm}| + (\sum_{\ell=1}^{N} \ell |G_{kj\ell}|)^2}{2\min_{w\in[0,1]}(\sum_{s=0}^{N} w^s G_{kjs})^2}$. Абсолютное значение второго слагаемого в $\zeta_1(y,u)$ также оценивается сверху:

$$y^\top [zg_k + (h-z)g_j]^{-1}(g_k - g_j)[zg_k + (h-z)g_j]^{-1}(g_k - g_j)[zg_k + (h-z)g_j]^{-1} y \leqslant \\ \leqslant \frac{K_{26}}{h^3}\|y\|_I^2,$$

где $K_{26} = 4\|g^{-1}Gg^{-1}Gg^{-1}\|_2^2$.

Используя все эти неравенства и связь между моментами 2-го и 4-го порядков гауссовского распределения, получаем следующий вариант неравенства (2.11):

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^M} |\gamma^{kj}(y)| dy \leqslant K_{27}h + K_{28}h^2 + K_{29}h^3$$

для некоторых положительных констант K_{27}, K_{28} и K_{29}. Это значит, что $\int_{\mathbb{R}^M} |\gamma^{kj}(y)|dy = O(h)$, и согласно (2.13) $\sup_{\pi\in\Pi} \mathsf{E}\left\{\|\widetilde{x}_{T/h} - \widehat{x}_{T/h}\|_1\right\} = O(h^0)$.

Используем для приближенного вычисления ξ^{kj} составную схему «средних» прямоугольников, разбив отрезок интегрирования $[0,h]$ с шагом $h^{1+\alpha}$. В этом случае

$$\gamma^{kj}(y) = (1-\delta_{kj})\frac{\lambda_{kj}h^{3+2\alpha}e^{\lambda_{jj}h}}{24}\frac{\partial^2}{\partial u^2}Q_{kj}(y,u)\Big|_{u=z}.$$

Повторяя все предыдущие выводы этого доказательства для составной схемы «средних» прямоугольников, можно проверить, что она обеспечивает порядок точности $1+2\alpha$:

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^M} |\gamma^{kj}(y)| dy \leqslant NCh^{1+2\alpha},$$

и согласно (2.13) глобальный показатель точности имеет порядок $p = \min(1, 2\alpha)$:

$$\sup_{\pi\in\Pi} \mathsf{E}\left\{\|\widetilde{X}_{T/h} - \widehat{X}_{T/h}\|_1\right\} \leqslant CTh^p.$$

Лемма 4 доказана.

Доказательство следствия 2. Согласно (2.13) для сохранения второго порядка точности аналитической аппроксимации необходимо, чтобы локальная ошибка численного интегрирования на каждом шаге имела порядок не более $O(h^3)$. Составная схема «средних» прямоугольников, представленная в лемме 4, обеспечивает эту точность для вычисления одномерного интеграла – второго слагаемого в (3.16) – при выборе $\alpha = 1$.

Выберем подходящую схему вычисления двойных интегралов по треугольнику, входящих в третье слагаемое (3.16). Прежде всего, определим величину ошибки приближения интеграла в (2.16) простым методом средних:

$$\lambda_{ki}\lambda_{ij}e^{\lambda_{jj}h}\int\limits_0^h\int\limits_0^{h-u}R^{kij}(y,u,v)dvdu=\frac{h^2}{2}\lambda_{ki}\lambda_{ij}e^{\lambda_{jj}h}R^{kij}\left(y,\frac{h}{3},\frac{h}{3}\right)+$$
$$+\lambda_{ki}\lambda_{ij}e^{\lambda_{jj}h}\int\limits_0^h\int\limits_0^{h-u}\chi_2^{kij}(y,u,v)dvdu,$$

где функция $\chi_2^{kij}(y,u,v)$ имеет вид

$$\chi_2^{kij}(y,u,v)\triangleq\frac{1}{2}\left(\left(z-\frac{h}{3}\right)\frac{\partial}{\partial z}+\left(w-\frac{h}{3}\right)\frac{\partial}{\partial w}\right)^2R^{kij}(y,z,w)\bigg|_{(z(y,u),w(y,v))}.$$

Согласно [2] для некоторой положительной константы K_{30} верно неравенство

$$\lambda_{ki}\lambda_{ij}e^{\lambda_{jj}h}\int\limits_0^h\int\limits_0^{h-u}\chi_2^{kij}(y,u,v)dvdu\leqslant h^4K_{30}\max_{\substack{\ell=0,1,2;\\(z,w)\in\mathcal{D}}}\left|\frac{\partial^2}{\partial z^\ell\partial w^{2-\ell}}\chi_2^{kij}(y,z,w)\right|.$$

В лемме 4 также оценивалась вторая производная, однако, от другой функции, Q^{kj}. Она содержала h^2 в знаменателе. Сравнивая Q^{kj} и R^{kij}, можно заключить, что вторая производная от R^{kij} также будет содержать h^2 в знаменателе, т.е. $\lambda_{ki}\lambda_{ij}e^{\lambda_{jj}h}\int_0^h\int_0^{h-u}\chi_2^{kij}(y,u,v)dvdu\leqslant h^2K_{31}$ для некоторой положительной константы K_{31}. Так как требуемый порядок точности – третий, то последнее равенство позволяет сделать вывод о том, что простой метод средних в данном случае нужной точности не обеспечивает.

Используем для вычисления двойного интеграла составной метод средних, разбив область интегрирования, прямоугольный треугольник с катетами длины h, на подобные треугольники с катетами h^2. В этом случае

$$\lambda_{ki}\lambda_{ij}e^{\lambda_{jj}h}\int\limits_0^h\int\limits_0^{h-u}\chi_2^{kij}(y,u,v)dvdu\leqslant h^4K_{32}$$

для некоторой положительной константы K_{32}, и отсюда согласно (2.13) следует выполнение неравенства

$$\sup_{\pi\in\Pi}\mathsf{E}\left\{\|\widetilde{X}_{T/h}-\widehat{X}_{T/h}\|_1\right\}\leqslant CTh^2,$$

т.е. для численной реализации аппроксимации порядка $s=2$ достаточно использования составных схем средних при вычислении одномерных и двойных интегралов с шагом дискретизации h^2.

Следствие 2 доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисов А.В.* $\mathcal{L}_1$-оптимальная фильтрация марковских скачкообразных процессов I: точное решение и численные схемы реализации // АиТ. 2020. № 11. С. 12–34.

   Borisov A.V. $\mathcal{L}_1$-Optimal Filtering of Markov Jump Processes I: Exact Solution and Numerical Realization Schemes // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 11.
2. *Isaacson E., Keller H.* Analysis of Numerical Methods. N.Y.: Dover Publications, 1994.
3. *Elliott R.J., Aggoun L., Moore J.B.* Hidden Markov Models: Estimation and Control. N.Y.: Springer, 2008.
4. *Kloeden P., Platen E.* Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin: Springer, 1992.
5. *Magnus J., Neudecker H.* Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics. N.Y.: Wiley, 2019.
6. *Борисов А.В.* Фильтрация Вонэма по наблюдениям с мультипликативными шумами // АиТ. 2018. № 1. С. 52–65.

   Borisov A.V. Wonham filtering by observations with multiplicative noises // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 1. P. 39–50.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 25.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020

Автоматика и телемеханика, № 12, 2020

© 2020 г. **А.Н. ИГНАТОВ, канд. физ.-мат. наук (alexei.ignatov1@gmail.com)**
(Московский авиационный институт)

О ФОРМИРОВАНИИ ПОЗИЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ В МНОГОШАГОВОЙ ЗАДАЧЕ ПОРТФЕЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ВЕРОЯТНОСТНЫМ КРИТЕРИЕМ[1]

Исследуется многошаговая задача портфельной оптимизации. Рассматривается возможность вложения капитала на каждом шаге в безрисковый актив с фиксированной доходностью и рисковый актив со случайной доходностью с финитной плотностью. Критерием оптимальности выступает вероятность достижения или превышения капитала инвестора в терминальный момент времени некоторого заранее заданного уровня. На основе использования кусочно-постоянного управления предлагается позиционное управление, которое на обширном наборе примеров превосходит по значению вероятностного критерия ранее известные универсальные управления, применяющиеся в задачах портфельной оптимизации.

Ключевые слова: многошаговая задача, портфельная оптимизация, вероятностный критерий, позиционное управление.

DOI: 10.31857/S000523102012003X

1. Введение

Исторически исследование задач портфельной оптимизации началось в 1950-х гг. с конструирования различных критериев и мер риска в одношаговой постановке, когда портфель ценных бумаг не предполагается к ребалансировке в течение инвестиционного горизонта. Хотя в настоящее время также продолжаются поиски новых мер риска и постановок задач, позволяющих сформировать тот или иной портфель ценных бумаг, особый интерес исследователей привлекают многошаговые задачи портфельной оптимизации, в которых в течение инвестиционного горизонта предполагается несколько ребалансировок.

За рубежом исследования многошаговых задач портфельной оптимизации проводятся, как правило, с использованием математического ожидания от некоторой целевой функции в качестве критерия. Так, в [1] в качестве критерия использовалась взвешенная дисперсия, а именно сумма дисперсий капиталов, вкладываемых в произвольное число активов, в каждый момент времени инвестиционного горизонта с некоторыми заданными весами; средний капитал в терминальный момент времени должен быть выше некоторой заданной отметки. Априорно выбранные управления, зависящие от момента времени, корректировались линейно в зависимости от того, насколько реализация доходностей в прошлый момент времени отличается от средних

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-37-70022 Стабильность).

доходностей. В [2] было найдено оптимальное аналитическое решение при использовании экспоненциальной функции полезности, а доходности подчинялись авторегрессии первого порядка с гауссовским белым шумом. А в [3] предлагались процедуры поиска оптимального управления для различных функций полезности, в том числе логарифмической и степенной. В [4] рассматривалась многошаговая задача с критерием в виде суммы сверток среднего дохода, дисперсии дохода, а также транзакционных издержек в каждый момент ребалансировки с управлениями, выбираемыми в классе программных стратегий: для некоторых частных случаев транзакционных издержек находились оптимальные стратегии или устанавливались их свойства.

В России авторы фокусируются, как правило, на вероятностном или квантильном критериях для формирования портфеля ценных бумаг. Для нахождения оптимального позиционного управления в таких задачах используют соотношения метода динамического программирования [5]. В силу трудоемкости нахождения аналитических выражений функций Беллмана получение оптимального решения возможно лишь в очень ограниченном числе случаев: в [6] рассматривалась двухшаговая задача с вероятностным критерием, в которой на каждом шаге был один актив, имеющий нулевую дисперсию доходности, так называемый безрисковый, и один рисковый актив, имеющий равномерное на отрезке $[-1, A]$ распределение доходности; в [7] рассматривалась двухшаговая задача с вероятностным критерием, в которой на каждом шаге был один рисковый актив с равномерным распределением на отрезке $[-1, A]$ доходности, а другой рисковый актив имел доходность, равномерно распределенную на отрезке $[-1, B]$. В связи с ограниченностью в возможности получения оптимального управления найден целый спектр приближенных к оптимальным управлений в задачах с различной постановкой. В [8] на основе доверительного метода было найдено приближенное решение в двухшаговой задаче с квантильным критерием, одним безрисковым активом и одним рисковым, имеющим усеченное нормальное распределение доходности активом на каждом шаге. В [9] также на основе доверительного метода был предложен алгоритм получения приближенного управления в многошаговой задаче с квантильным критерием, одним безрисковым и одним рисковым активом, имеющим плотность доходности с носителем $[-1, A]$ со специальными ограничениями на форму плотности, на каждом шаге. В [10] на основе использования кусочно-постоянного управления был предложен алгоритм нахождения приближенного управления в двухшаговой задаче с вероятностным критерием и произвольным количеством рисковых активов с произвольным финитным распределением на каждом шаге. С использованием полученных в [11] оценок функций Беллмана в [12] обосновывалось использование так называемый рисковой стратегии, оказавшейся асимптотически оптимальной в многошаговой задаче с вероятностным критерием. В [13] предлагалось построенное на основе оптимального решения из [6] приближенное управление в многошаговой задаче с вероятностным критерием, одним безрисковым активом и одним рисковым активом, имеющим равномерное на отрезке $[-1, A]$ распределение доходности. Таким образом, разработка универсального алгоритма поиска приближенного к оптимальному решения в многошаговой задаче с вероятностным критерием является крайне актуальной задачей и составляет предмет настоящей статьи.

В настоящей работе исследуется многошаговая задача портфельной оптимизации с одним безрисковым активом и одним рисковым активом, имеющим финитную плотность доходности, на каждом шаге. Для формирования управления используется вероятностный критерий. С использованием формулы полной вероятности и выбора управления в классе кусочно-постоянных управлений предлагается приближенное к оптимальному позиционному управление. Рассматривается содержательный пример, в котором проводится исследование различных стратегий и демонстрируется преимущество предлагаемого управления над известными универсальными управлениями.

2. Постановка задачи

Рассмотрим многошаговую задачу портфельной оптимизации с безрисковым активом, имеющим детерминированную доходность b_0, и одним рисковым активом (например, некоторой акцией или фондовым индексом в целом), имеющим на t-м шаге случайную доходность X_t, $t = \overline{1, T}$, где T – количество шагов, причем $T \in \{3, 4, \ldots\}$. Будем предполагать, что случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_T$ являются независимыми в совокупности. Будем рассматривать абсолютно непрерывные случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_T$, имеющие финитный носитель, т.е.

$$\inf\left\{x \in \mathbb{R}^1 : F_{X_t}(x) > 0\right\} = a_t, \quad t = \overline{1, T},$$
$$\sup\left\{x \in \mathbb{R}^1 : F_{X_t}(x) < 1\right\} = b_t, \quad t = \overline{1, T},$$

где a_t и b_t – некоторые числа. При этом $\forall t \in \{1, \ldots, T\}$ должно выполняться $-1 \leqslant a_t < b_0 < b_t$. Неравенства $-1 \leqslant a_t$ должны быть выполнены, поскольку цена продажи актива не может быть отрицательной, нарушение неравенств $a_t < b_0$ приведет к тому, что на каком-то шаге/каких-то шагах использование безрискового актива бессмысленно в силу того, что минимальная доходность рискового актива будет выше. Нарушение неравенств $b_0 < b_t$ приведет к тому, что на каком-то шаге/каких-то шагах использование рискового актива бесполезно, так как его максимальная доходность не превышает доходность безрискового актива. Пусть начальный капитал инвестора известен и составляет C_1. Пусть u_{0t} – доля капитала инвестора, вкладываемого в безрисковый актив на t-м шаге, а u_{1t} – доля капитала инвестора, вкладываемого в рисковый актив на t-м шаге. Будем предполагать, что операции «short-sales» невозможны, т.е. нельзя брать деньги в долг. С учетом данного ограничения значения вектора $u_t \overset{\text{def}}{=} \operatorname{col}(u_{0t}, u_{1t})$ выбираются из множества

$$U = \left\{(x, y)^{\mathrm{T}} : x + y = 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\right\}.$$

А динамика капитала инвестора описывается соотношением

$$C_{t+1} = C_t(1 + u_{0t}b_0 + u_{1t}X_t), \quad t = \overline{1, T}, \tag{1}$$

где C_{t+1} – капитал по окончании t-го шага. Отметим, по постановке задачи капитал не может оказаться отрицательным.

Пусть φ – желаемый инвестором уровень капитала в терминальный момент времени. Очевидно, что в зависимости от выбранного управления – структуры инвестиционного портфеля – на каждом шаге вероятность достижения или превышения порога φ различна. Будем выбирать управление в классе позиционных стратегий, т.е. $u_t = u_t(C_t)$, $t = \overline{2, T}$. Управление на первом шаге в силу известности C_1 является программным. Целью управления портфелем ценных бумаг является максимизация вероятности достижения или превышения капиталом инвестора желаемого порога φ. Для этой цели зададим функционал вероятности

$$P_{\varphi}(u(\cdot)) = \mathcal{P}\left(C_{T+1}(u(\cdot), X) \geqslant \varphi\right), \tag{2}$$

где

$$X = \mathrm{col}(X_1, X_2, \ldots, X_T), \quad \text{а} \quad u(\cdot) = \mathrm{col}(u_1, u_2(\cdot), \ldots, u_T(\cdot)).$$

Поставим задачу

$$P_{\varphi}(u(\cdot)) \to \max_{u_1 \in U, u_2(\cdot) \in \mathcal{U}_2, \ldots, u_T(\cdot) \in \mathcal{U}_T}, \tag{3}$$

где $\mathcal{U}_t$ – множество измеримых функций $u_t(\cdot)$, имеющих значения на множестве U. В силу того, что для непосредственного решения задачи (3) требуется проводить поиск в функциональном пространстве, задачу (3) решают с использованием метода динамического программирования Беллмана, предварительно проверяя измеримость и оптимальность получаемых стратегий с помощью ряда условий из [14]. Данные условия для рассматриваемой постановки задачи выполнены. Однако использование соотношений метода динамического программирования для вероятностного критерия практически невозможно в силу трудностей, возникающих в получении аналитического вида функций Беллмана. В этой связи в [10, 15] было предложено сузить класс допустимых управлений до класса кусочно-постоянных управлений. Воспользуемся этим подходом и здесь.

Вначале введем разбиение множества значений состояния системы (капитала инвестора) C_t к началу t-го шага, $t = \overline{2, T}$:

$$s_t = s_t^1 \cup s_t^2 \cup \ldots \cup s_t^{n_t},$$

где

$$s_t^1 = [s_{t1}, s_{t2}), \; s_t^2 = [s_{t2}, s_{t3}), \; \ldots, \; s_t^{n_t - 1} = [s_{tn_t - 1}, s_{tn_t}), \; s_t^{n_t} = [s_{tn_t}, s_{tn_t + 1}],$$

где

$$s_{t1} = C_1 \prod_{k=1}^{t-1} (1 + a_k), \quad s_{tn_t+1} = C_1 \prod_{k=1}^{t-1} (1 + b_k),$$

$$s_{ti} = s_{t1} + (i - 1)\frac{s_{tn_t+1} - s_{t1}}{n_t}, \quad i = \overline{2, n_t}.$$

Отметим, что разбиение s_t может быть и другим, а равномерная длина промежутков s_t^i выбрана для простоты, $t = \overline{2, T}$, $i = \overline{1, n_t}$.

Управление на каждом шаге за исключением первого, являющегося программным из-за известности C_1, будет иметь вид

$$u_t(C_t, s_t) = \begin{cases} (u_{0t}^1, u_{1t}^1)^{\mathrm{T}}, & C_t \in s_t^1, \\ (u_{0t}^2, u_{1t}^2)^{\mathrm{T}}, & C_t \in s_t^2, \\ \ldots, \\ (u_{0t}^{n_t}, u_{1t}^{n_t})^{\mathrm{T}}, & C_t \in s_t^{n_t}. \end{cases}$$

Введя обозначение

$$u_s(\cdot) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{col}(u_1, u_2(\cdot, s_2), \ldots, u_T(\cdot, s_T)),$$

сформулируем задачу поиска оптимального кусочно-постоянного управления

$$(4) \qquad \left(u_1^{\varphi}, u_2^{\varphi}(\cdot, s_2), \ldots, u_T^{\varphi}(\cdot, s_T)\right) = \arg \max_{u_1 \in U, u_2(\cdot, s_2) \in U, \ldots, u_T(\cdot, s_T) \in U} P_{\varphi}(u_s(\cdot)).$$

3. Нахождение приближенного решения

Уже при $T = 2$ поиск аналитического решения в задаче (4) затруднителен. Приходится строить [10, 15] нижнюю оценку функционала вероятности $P_{\varphi}(u_s(\cdot))$ (функционала (2) в классе кусочно-постоянных управлений). Однако согласно [16] имеется сходимость максимального значения конструируемой в [10, 15] нижней оценки к значению вероятностного критерия на оптимальной позиционной стратегии при устремлении мелкости разбиения s_2 к нулю. В этой связи воспользуемся аналогичным подходом и при решении многошаговой задачи.

На последнем шаге, следуя [15], имеем

$$(5) \qquad \begin{gathered} P_{\varphi}(u_s(\cdot)) = \sum_{i=1}^{n_T} \mathcal{P}\left(C_{T+1} \geqslant \varphi, C_T \in s_T^i\right) \geqslant \\ \geqslant \sum_{i=1}^{n_T} \mathcal{P}\left(s_{Ti}(1 + u_{0T}^i b_0 + u_{1T}^i X_T) \geqslant \varphi\right) \mathcal{P}\left(C_T \in s_T^i\right). \end{gathered}$$

Так как задача (4) – задача максимизации функционала вероятности $P_{\varphi}(u_s(\cdot))$, то полученную в (5) оценку также нужно максимизировать. По определению вероятности $\mathcal{P}\left(C_T \in s_T^i\right) \geqslant 0$, поэтому нужно решить задачи

$$(6) \qquad P_{Ti}^* = \max_{(u_{0T}^i, u_{1T}^i)^{\mathrm{T}} \in U} \mathcal{P}\left(s_{Ti}(1 + u_{0T}^i b_0 + u_{1T}^i X_T) \geqslant \varphi\right),$$

$$(7) \qquad (\tilde{u}_{0T}^{i*}, \tilde{u}_{1T}^{i*})^{\mathrm{T}} = \arg \max_{(u_{0T}^i, u_{1T}^i)^{\mathrm{T}} \in U} \mathcal{P}\left(s_{Ti}(1 + u_{0T}^i b_0 + u_{1T}^i X_T) \geqslant \varphi\right),$$

$i = \overline{1, n_T}$. Решение в задачах (6) и (7) найдено в [17] и имеет вид

$$P^*_{Ti} = \begin{cases} 1, & s_{Ti}(1+b_0) \geqslant \varphi, \\ 1 - F_{X_T}\left(\dfrac{\varphi}{s_{Ti}} - 1\right), & s_{Ti}(1+b_0) < \varphi, \end{cases}$$

$$\tilde{u}^{i*}_{1T} = \begin{cases} 0, & s_{Ti}(1+b_0) \geqslant \varphi, \\ 1, & s_{Ti}(1+b_0) < \varphi, \end{cases}$$

$\tilde{u}^{i*}_{0T} = 1 - \tilde{u}^{i*}_{1T}$, $i = \overline{1, n_T}$. Составив вектор-функцию

$$\tilde{u}^{\varphi}_{T}(C_T, s_T) = \begin{cases} (\tilde{u}^{1*}_{0T}, \tilde{u}^{1*}_{1T})^{\mathrm{T}}, & C_T \in s^1_T, \\ (\tilde{u}^{2*}_{0T}, \tilde{u}^{2*}_{1T})^{\mathrm{T}}, & C_T \in s^2_T, \\ \ldots, & \ldots, \\ (\tilde{u}^{n_T*}_{0T}, \tilde{u}^{n_T*}_{1T})^{\mathrm{T}}, & C_T \in s^{n_T}_T, \end{cases} \tag{8}$$

будем использовать ее как приближенное решение задачи (4) на последнем шаге, т.е. как приближение функции $u^{\varphi}_{T}(\cdot, s_T)$. С использованием коэффициентов P^*_{Ti} получим следующую нижнюю оценку максимального значения функционала вероятности $P_{\varphi}(u_s(\cdot))$

$$P^{T-1}_{\varphi}(u_1, u_2(\cdot, s_2), \ldots, u_{T-1}(\cdot, s_{T-1})) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^{n_T} P^*_{Ti} \mathcal{P}\left(C_T \in s^i_T\right). \tag{9}$$

Принимая в расчет формулу полной вероятности, получаем

$$\begin{gathered} P^{T-1}_{\varphi}(u_1, u_2(\cdot, s_2), \ldots, u_{T-1}(\cdot, s_{T-1})) = \\ = \sum_{i=1}^{n_T} \sum_{k=1}^{n_{T-1}} P^*_{Ti} \mathcal{P}\left(C_T \in s^i_T,\ C_{T-1} \in s^k_{T-1}\right) = \\ = \sum_{i=1}^{n_T} \sum_{k=1}^{n_{T-1}} P^*_{Ti} \mathcal{P}\left(C_{T-1}(1 + u^k_{0T-1} b_0 + u^k_{1T-1} X_{T-1}) \in s^i_T,\ C_{T-1} \in s^k_{T-1}\right). \end{gathered}$$

К сожалению, получение нижней оценки последнего выражения приводит впоследствии к решению минимаксной задачи с нелинейной целевой функцией, поэтому ограничимся построением нового функционала $\tilde{P}^{T-1}_{\varphi}(u_1, u_2(\,\cdot,\ s_2), \ldots$ $\ldots, u_{T-1}(\,\cdot,\ s_{T-1}))$, приближенно равного по значениям функционалу $P^{T-1}_{\varphi}(u_1, u_2(\,\cdot,\ s_2), \ldots, u_{T-1}(\,\cdot,\ s_{T-1}))$, т.е.

$$\begin{gathered} P^{T-1}_{\varphi}(u_1, u_2(\cdot, s_2), \ldots, u_{T-1}(\cdot, s_{T-1})) \approx \\ \approx \tilde{P}^{T-1}_{\varphi}(u_1, u_2(\cdot, s_2), \ldots, u_{T-1}(\cdot, s_{T-1})) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \\ \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^{n_T} \sum_{k=1}^{n_{T-1}} P^*_{Ti} \mathcal{P}\left(s_{T-1k}(1 + u^k_{0T-1} b_0 + u^k_{1T-1} X_{T-1}) \in s^i_T, C_{T-1} \in s^k_{T-1}\right). \end{gathered}$$

Учтя, что случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_{T-1}$ независимы, и поменяв порядок суммирования в последнем выражении, получим

$$\tilde{P}_{\varphi}^{T-1}(u_1, u_2(\cdot, s_2), \ldots, u_{T-1}(\cdot, s_{T-1})) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_T} \sum_{k=1}^{n_{T-1}} P_{Ti}^{*} \mathcal{P}\left(s_{T-1k}(1 + u_{0T-1}^{k} b_0 + u_{1T-1}^{k} X_{T-1}) \in s_T^i\right) \mathcal{P}\left(C_{T-1} \in s_{T-1}^{k}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n_{T-1}} \mathcal{P}\left(C_{T-1} \in s_{T-1}^{k}\right) \sum_{i=1}^{n_T} P_{Ti}^{*} \mathcal{P}\left(s_{T-1k}(1 + u_{0T-1}^{k} b_0 + u_{1T-1}^{k} X_{T-1}) \in s_T^i\right).$$

Для нахождения приближенного решения задачи на предпоследнем шаге (4) максимизируем функционал

$$\tilde{P}_{\varphi}^{T-1}\Big(u_1, u_2(\,\cdot,\ s_2), \ldots, u_{T-1}(\,\cdot,\ s_{T-1})\Big).$$

Так как управления на различных шагах не зависят друг от друга, в силу конструкции множества U необходимо решить задачи

$$G_{T-1}^{k,s}(u_{1T-1}^{k}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n_T} P_{Ti}^{*} \mathcal{P}\Big(s_{T-1k}\left(1 + \left(1 - u_{1T-1}^{k}\right) b_0 + \right.$$
$$\left. + u_{1T-1}^{k} X_{T-1}\right) \in s_T^i\Big) \to \max_{0 \leqslant u_{1T-1}^{k} \leqslant 1}, \tag{10}$$

$k = \overline{1, n_{T-1}}$. Имеет место равенство

$$G_{T-1}^{k,s}(u_{1T-1}^{k}) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n_T} P_{Ti}^{*} \mathcal{P}\left(s_{T-1k}\left(1 + b_0\right) \in s_T^i\right), & u_{1T-1}^{k} = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n_T} P_{Ti}^{*} \mathcal{P}\left(s_{T-1k}\left(1 + \left(1 - u_{1T-1}^{k}\right) b_0 + u_{1T-1}^{k} X_{T-1}\right) \in s_T^i\right), & \\ & u_{1T-1}^{k} > 0. \end{cases}$$

Поскольку последняя функция задается кусочно, на открытом множестве, то будем искать приближенное решение в задаче (10), сравнивая значение последней функции в точке $u_{1T-1}^{k} = 0$ и максимальное значение последней функции на отрезке $\varepsilon \leqslant u_{1T-1}^{k} \leqslant 1$, где $\varepsilon > 0$ – некоторое малое число. Таким образом, обозначив

$$\tilde{P}_{T-1}^{k} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n_T} P_{Ti}^{*} \mathcal{P}\left(s_{T-1k}(1 + b_0) \in s_T^i\right),$$

$$\hat{P}_{T-1}^{k} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\varepsilon \leqslant u_{1T-1}^{k} \leqslant 1} \sum_{i=1}^{n_T} P_{Ti}^{*} \mathcal{P}\left(s_{T-1k}\left(1 + \left(1 - u_{1T-1}^{k}\right) b_0 + u_{1T-1}^{k} X_{T-1}\right) \in s_T^i\right),$$

в качестве приближенного решения в задаче (4), т.е. управления $u^{\varphi}_{T-1}(\cdot, s_{T-1})$, выберем

$$\tilde{u}^{\varphi}_{T-1}(C_{T-1}, s_{T-1}) = \begin{cases} (\tilde{u}^{1*}_{0T-1}, \tilde{u}^{1*}_{1T-1})^{\mathrm{T}}, & C_{T-1} \in s^1_{T-1}, \\ (\tilde{u}^{2*}_{0T-1}, \tilde{u}^{2*}_{1T-1})^{\mathrm{T}}, & C_{T-1} \in s^2_{T-1}, \\ \ldots, & \\ (\tilde{u}^{n_{T-1}*}_{0T-1}, \tilde{u}^{n_{T-1}*}_{1T-1})^{\mathrm{T}}, & C_{T-1} \in s^{n_{T-1}}_{T-1}, \end{cases}$$

где

$$\tilde{u}^{k*}_{1T-1} = \begin{cases} 0, & \tilde{P}^k_{T-1} \geqslant \hat{P}^k_{T-1} \text{ и } \tilde{P}^k_{T-1} \neq 0, \\ \arg \max\limits_{\varepsilon \leqslant u^k_{1T-1} \leqslant 1} \sum\limits_{i=1}^{n_T} P^*_{Ti} \mathcal{P}\left(s_{T-1k}\left(1 + b_0 + u^k_{1T-1}\left(X_{T-1} - b_0\right)\right) \in s^i_T\right), & \\ & \tilde{P}^k_{T-1} < \hat{P}^k_{T-1}, \\ 1, & \tilde{P}^k_{T-1} \geqslant \hat{P}^k_{T-1} \text{ и } \tilde{P}^k_{T-1} = 0, \end{cases}$$

$k = \overline{1, n_{T-1}}$. Прокомментируем наличие единицы в $\tilde{u}^{k*}_{1T-1}$: равенство величин $\tilde{P}^k_{T-1}$, $\tilde{P}^k_{T-1}$ нулю означает, что функция $G^{k,s}_{T-1}(u^k_{1T-1})$ на множестве $\{0\} \cup [\varepsilon, 1]$ тождественно равна нулю, так как по определению вероятности функция $G^{k,s}_{T-1}(u^k_{1T-1})$ неотрицательна. Это означает, что все управления одинаково плохи, а значит, можно выбрать наиболее рискованное.

Введя обозначение $P^*_{T-1k} \stackrel{\text{def}}{=} \max\{\tilde{P}^k_{T-1}, \hat{P}^k_{T-1}\}$, получим следующую оценку максимального значения функционала вероятности $P_{\varphi}(u_s(\cdot))$

$$P^{T-2}_{\varphi}(u_1, u_2(\cdot, s_2), \ldots, u_{T-2}(\cdot, s_{T-2})) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n_{T-1}} P^*_{T-1k} \mathcal{P}\left(C_{T-1} \in s^k_{T-1}\right). \tag{11}$$

Отметим, что структура функционалов (9) и (11) идентична. А значит, если двигаться в обратном времени, аналогично для шагов $t = T-1, \ldots, 2$ получаются следующие приближенные к оптимальным $u^{\varphi}_t(\cdot, s_t)$ стратегии

$$\tilde{u}^{\varphi}_t(C_t, s_t) = \begin{cases} (\tilde{u}^{1*}_{0t}, \tilde{u}^{1*}_{1t})^{\mathrm{T}}, & C_t \in s^1_t, \\ (\tilde{u}^{2*}_{0t}, \tilde{u}^{2*}_{1t})^{\mathrm{T}}, & C_t \in s^2_t, \\ \ldots, & \\ (\tilde{u}^{n_t*}_{0t}, \tilde{u}^{n_t*}_{1t})^{\mathrm{T}}, & C_t \in s^{n_t}_t, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$\tilde{u}^{k*}_{1t} = \begin{cases} 0, & \tilde{P}^k_t \geqslant \hat{P}^k_t \text{ и } \tilde{P}^k_t \neq 0, \\ \arg \max\limits_{\varepsilon \leqslant u^k_{1t} \leqslant 1} \sum\limits_{i=1}^{n_{t+1}} P^*_{t+1i} \mathcal{P}\left(s_{tk}\left(1 + b_0 - u^k_{1t} b_0 + u^k_{1t} X_t\right) \in s^i_{t+1}\right), & \tilde{P}^k_t < \hat{P}^k_t, \\ 1, & \tilde{P}^k_t \geqslant \hat{P}^k_t \text{ и } \tilde{P}^k_t = 0, \end{cases}$$

а

$$\tilde{u}_{0t}^{k*} = 1 - \tilde{u}_{1t}^{k*}$$

и где, в свою очередь,

$$\tilde{P}_t^k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n_{t+1}} P_{t+1i}^* \mathcal{P}\left(s_{tk}\left(1+b_0\right) \in s_{t+1}^i\right),$$

$$\hat{P}_t^k \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\varepsilon \leqslant u_{1t}^k \leqslant 1} \sum_{i=1}^{n_{t+1}} P_{t+1i}^* \mathcal{P}\left(s_{tk}\left(1+b_0-u_{1t}^k b_0+u_{1t}^k X_t\right) \in s_{t+1}^i\right),$$

$$P_{tk}^* \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{\tilde{P}_t^k, \hat{P}_t^k\right\},$$

а $k=\overline{1,n_t}$. Отметим, что при $0<\varepsilon \leqslant u_{1t}^k \leqslant 1$ в силу непрерывности случайной величины X_t имеет место

(13)

$$\mathcal{P}\left(s_{tk}\left(1+b_0-u_{1t}^k b_0+u_{1t}^k X_t\right) \in s_{t+1}^i\right) =$$

$$= \mathcal{P}\left(s_{t+1i} \leqslant s_{tk}\left(1+b_0-u_{1t}^k b_0+u_{1t}^k X_t\right) \leqslant s_{t+1i+1}\right) =$$

$$= F_{X_t}\left(\frac{s_{t+1i+1}/s_{tk}-1-b_0+u_{1t}^k b_0}{u_{1t}^k}\right) - F_{X_t}\left(\frac{s_{t+1i}/s_{tk}-1-b_0+u_{1t}^k b_0}{u_{1t}^k}\right),$$

когда $s_{tk}>0$, $k=\overline{1,n_t}$, $i=\overline{1,n_{t+1}}$. Когда $s_{tk}=0$, а $s_{t+1i}\neq 0$, то выражение (13) равно нулю, в случае $s_{tk}=s_{t+1i}=0$ выражение (13) равно единице, $k=\overline{1,n_t}$, $i=\overline{1,n_{t+1}}$.

Для отыскания стратегии первого шага нужно решить задачу

(14) $$\sum_{i=1}^{n_2} P_{2i}^* \mathcal{P}\left(C_2 \in s_2^i\right) \to \max_{u_{01}\geqslant 0, u_{11}\geqslant 0, u_{01}+u_{11}=1}.$$

Поскольку критериальная функции в последней задаче

$$\sum_{i=1}^{n_2} P_{2i}^* \mathcal{P}\left(C_2 \in s_2^i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_2} P_{2i}^* \mathcal{P}\left(C_1\left(1+u_{01}b_0+u_{11}X_1\right) \in s_2^i\right) =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n_2} P_{2i}^* \mathcal{P}\left(C_1(1+b_0) \in s_2^i\right), & u_{11}=0, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n_2} P_{2i}^* \mathcal{P}\left(C_1\left(1+b_0-u_{11}b_0+u_{11}X_1\right) \in s_2^i\right), & u_{11}>0 \end{cases}$$

задается кусочно, на открытом множестве, то найдем приближенное решение задачи (14). Для этого введем

$$\tilde{P}_1 = \sum_{i=1}^{n_2} P_{2i}^* \mathcal{P}\left(C_1(1+b_0) \in s_2^i\right)$$

и найдем

$$\hat{P}_1 = \max_{\varepsilon \leqslant u_{11} \leqslant 1} \sum_{i=1}^{n_2} P_{2i}^* \mathcal{P}\left(C_1\left(1+b_0-u_{11}b_0+u_{11}X_1\right) \in s_2^i\right).$$

Используя величины $\hat{P}_1$ и $\tilde{P}_1$, доопределим приближенное к оптимальному управление, получаемое с использованием соотношений (8) и (12), в задаче (4) на первом шаге:

$$\tilde{u}_1^{\varphi} = (\tilde{u}_{01}^*, \tilde{u}_{11}^*)^{\mathrm{T}}, \tag{15}$$

где

$$\tilde{u}_{11}^* = \begin{cases} 0, & \tilde{P}_1 \geqslant \hat{P}_1, \\ \arg \max\limits_{\varepsilon \leqslant u_{11} \leqslant 1} \sum\limits_{i=1}^{n_2} P_{2i}^* \mathcal{P}\left(C_1\left(1+b_0-u_{11}b_0+u_{11}X_1\right) \in s_2^i\right), & \tilde{P}_1 < \hat{P}_1, \end{cases}$$

а

$$\tilde{u}_{01}^* = 1 - \tilde{u}_{11}^*.$$

При $u_{11} \geqslant \varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{n_2} P_{2i}^* \mathcal{P}\left(C_1\left(1+b_0-u_{11}b_0+u_{11}X_1\right) \in s_2^i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_2} P_{2i}^* \mathcal{P}\left(s_{2i} \leqslant C_1\left(1+b_0-u_{11}b_0+u_{11}X_1\right) \leqslant s_{2i+1}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_2} P_{2i}^* \left(F_{X_1}\left(\frac{s_{2i+1}/C_1 - 1 - b_0 + u_{11}b_0}{u_{11}}\right) - F_{X_1}\left(\frac{s_{2i}/C_1 - 1 - b_0 + u_{11}b_0}{u_{11}}\right)\right).$$

В этой связи заключаем, что для поиска предлагаемого по формулам (8), (12), (15) приближенного к оптимальному управления, называемого в дальнейшем *вероятностным*, не нужно проводить оптимизацию в функциональном пространстве или вычислять функцию Беллмана на каждом шаге, необходимо лишь решить ряд одномерных задач условной нелинейной оптимизации. При этом оценкой вероятности превышения капиталом инвестора запланированного порога φ при использовании такой стратегии выступает величина $P_1^* = \max\{\tilde{P}_1, \hat{P}_1\}$, которая является оценкой максимального значения функционала $P_{\varphi}(u_s(\cdot))$. Данную величину можно уточнить, используя статистическую оценку исследуемой вероятности.

Отметим, что исследование сходимости предлагаемого управления к точному позиционному при уменьшении мелкости разбиений s_t, $t = \overline{2,T}$, представляет отдельный интерес, однако затруднительно ввиду разрывности функций Беллмана для данной постановки задачи.

4. Пример

Пусть $C_1 = 1$, $\varphi = 1{,}5$, $b_0 = 0{,}03$, $\varepsilon = 10^{-6}$, $n_1 = n_2 = \ldots = n_T = N$, где N – некоторое число, а $T = 10$. Предположим также, что инвестиционный портфель ребалансируется каждый год. Сравним предлагаемую многошаговую вероятностную стратегию (8), (12), (15) с известными: *рисковой* стратегией

$$u_t^R(C_t) = \begin{cases} (1,0)^{\mathrm{T}}, & \varphi \leqslant C_t(1+b_0)^{T-t+1}, \\ (0,1)^{\mathrm{T}}, & \varphi > C_t(1+b_0)^{T-t+1} \end{cases}$$

из [17], достоинства которой обсуждались в [12], и логарифмической стратегией (стратегией *Келли*) [18–20], обеспечивающей максимальную среднюю скорость роста капитала [17], являющейся решением задачи

$$u_t^L = (u_{0t}^L, u_{1t}^L)^{\mathrm{T}} = \arg \max_{u_{0t}+u_{1t}=1, u_{0t}\geqslant 0, u_{1t}\geqslant 0} \mathbf{M}\left[\ln(1 + u_{0t}b_0 + u_{1t}X_t)\right],$$

$t = 1, \ldots, T$. Будем предполагать, что случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_T$ одинаково распределены. Рассмотрим несколько случаев: когда $X_t \sim \mathcal{R}[a,b]$, т.е. когда плотность случайной величины X_t имеет вид

$$f_{X_t}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases}$$

и когда $X_t \sim \overline{\mathcal{N}}(m, \sigma^2)$, т.е. когда плотность случайной величины X_t имеет вид

$$f_{X_t}(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}, & m - 5\sigma \leqslant x \leqslant m + 5\sigma, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases} \tag{16}$$

где константа $c = 1/0{,}9999994$ определяется из условия нормировки плотности, а $m - 5\sigma \geqslant -1$ для соответствия постановке задачи. Плотность (16) является плотностью усеченного нормального распределения, $t = \overline{1,T}$. Выбор именно такого усечения связан с тем фактом, что для случайной величины $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ с любыми значениями параметров m и σ^2 имеет место равенство $\mathcal{P}\{m - 5\sigma \leqslant Y \leqslant m + 5\sigma\} = 0{,}9999994$. А это значит, что построенное таким образом усечение оставляет плотность симметричной и «отбрасывает» диапазоны значений исходной неусеченной случайной величины, вероятность попадания в которые ничтожно мала. В силу введенного в примере предположения об одинаковой распределенности случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_T$

Сравнение различных стратегий

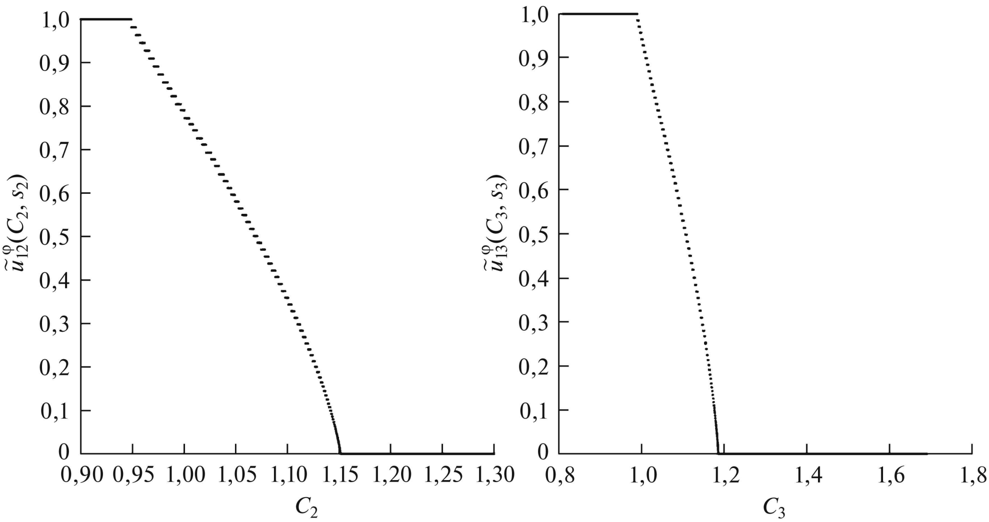
Распределение	Стратегия	P_1^*	Выборочная оценка вероятности	Распределение	Стратегия	P_1^*	Выборочная оценка вероятности
$\mathcal{R}[-0{,}5,\ 0{,}7]$	Келли	–	**0,5637**	$\overline{\mathcal{N}}(0{,}1,\ 0{,}1^2)$	Келли	–	**0,9567**
	Рисковая	–	**0,81**		Рисковая	–	**0,9811**
	Вероятн. ($N = 100$)	0,2088	0,5983		Вероятн. ($N = 100$)	0,3049	0,9489
	Вероятн. ($N = 500$)	0,7427	0,7857		Вероятн. ($N = 500$)	0,9364	0,9718
	Вероятн. ($N = 1000$)	0,8144	0,8367		Вероятн. ($N = 1000$)	0,9621	0,9757
	Вероятн. ($N = 2000$)	0,8625	0,8735		Вероятн. ($N = 2000$)	0,9757	0,981
	Вероятн. ($N = 5000$)	0,8849	0,8896		Вероятн. ($N = 5000$)	0,9829	0,9846
	Вероятн. ($N = 10000$)	0,8982	**0,9005**		Вероятн. ($N = 10000$)	0,9844	**0,9853**
$\mathcal{R}[-0{,}1,\ 0{,}3]$	Келли	–	**0,9275**	$\overline{\mathcal{N}}(0{,}1,\ 0{,}15^2)$	Келли	–	**0,8471**
	Рисковая	–	**0,9679**		Рисковая	–	**0,938**
	Вероятн. ($N = 100$)	0,9049	0,9535		Вероятн. ($N = 100$)	0,0483	0,8471
	Вероятн. ($N = 500$)	0,9662	0,9715		Вероятн. ($N = 500$)	0,7427	0,8904
	Вероятн. ($N = 1000$)	0,9717	0,9741		Вероятн. ($N = 1000$)	0,8715	0,9214
	Вероятн. ($N = 2000$)	0,9733	0,9744		Вероятн. ($N = 2000$)	0,8996	0,9261
	Вероятн. ($N = 5000$)	0,9747	0,9751		Вероятн. ($N = 5000$)	0,9344	0,9438
	Вероятн. ($N = 10000$)	0,9753	**0,9755**		Вероятн. ($N = 10000$)	0,944	**0,9483**

далее для краткости будем говорить только о распределении случайной величины X_1, опуская, что случайные величины $X_2, \ldots, X_T$ распределены по тому же закону. Для сравнения указанных стратегий в каждом из рассматриваемых случаев найдем $5 \cdot 10^6$ реализаций случайного вектора X и с помощью выборочной оценки вероятности оценим вероятность события $\mathcal{P}\{C_{T+1} \geqslant \varphi\}$ на этих стратегиях.

Во всех рассмотренных случаях математическое ожидание случайной величины X_1 составляет 0,1, что примерно соответствует средней годовой доходности индекса S & P 500, оцененной по данным за последние 30 лет, и предлагается в качестве примера годовой доходности в [21]. Отличием же рассмотренных случаев друг от друга выступает форма плотности распределения случайной величины X_1, а также их дисперсия и, как следствие, коэффициент вариации, т.е. отношение среднеквадратического отклонения к математическому ожиданию. Отметим также, что среднеквадратичное отклонение доходности индекса S & P 500, оцененной по данным за последние 30 лет, составляет порядка 0,15. Таким образом, «естественное» значение коэффициента вариации на основе данных по индексу S & P 500 составляет 1,5.

Как следует из таблицы, стратегия Келли существенно уступает рисковой и вероятностной (при больших значениях N) в терминах выборочной оценки вероятности $\mathcal{P}\{C_{T+1} \geqslant \varphi\}$. С ростом величины N во всех рассмотренных случаях растет величина P_1^*, при этом растет и выборочная оценка вероятности $\mathcal{P}\{C_{T+1} \geqslant \varphi\}$ при использовании вероятностной стратегии. При увеличении N наблюдается сближение P_1^* и выборочной оценки вероятности $\mathcal{P}\{C_{T+1} \geqslant \varphi\}$. В этой связи по значениям P_1^* и выборочной оценки вероятности $\mathcal{P}\{C_{T+1} \geqslant \varphi\}$ можно сделать вывод, что дальнейшее увеличение N для случаев $X_1 \sim \mathcal{R}[-0{,}1, 0{,}3]$ и $X_1 \sim \overline{\mathcal{N}}(0{,}1, 0{,}1^2)$ не приведет к существенному увеличению P_1^* и оценки вероятности $\mathcal{P}\{C_{T+1} \geqslant \varphi\}$ на вероятностной стратегии. В то же время увеличение N для случаев $X_1 \sim \mathcal{R}[-0{,}5,\ 0{,}7]$ и $X_1 \sim \overline{\mathcal{N}}(0{,}1,\ 0{,}15^2)$ позволит сформировать еще более качественное управление в терминах оценки вероятности $\mathcal{P}\{C_{T+1} \geqslant \varphi\}$. Во всех рассмотренных случаях (уже при $N = 5000$) вероятностная стратегия лучше рисковой в терминах оценки вероятности $\mathcal{P}\{C_{T+1} \geqslant \varphi\}$. При этом с увеличением коэффициента вариации разница между выборочной оценкой вероятности на вероятностной и рисковой стратегиях растет, достигая практически 0,1 в случае $X_1 \sim \mathcal{R}[-0{,}5,\ 0{,}7]$.

В статьях [6, 7, 22], связанных или посвященных отысканию оптимальной инвестиционной стратегии в задаче с вероятностным и логарифмическим критерием использовалось равномерное распределение доходности с носителем $[-1, A]$. Отметим, что хотя такой случай и малореален на практике, но получаемое с учетом такого распределения управление полезно, когда достоверно известна только средняя доходность. Заметим, что использование такого носителя учитывает случай возможного банкротства компании-эмитента рискового актива. Более того, как отмечено в [17, 23], равномерное распределение при минимальных предположениях о законе распределения случайных величин в целевой функции оказывается наихудшим с точки зрения величины вероятностного критерия. Таким образом, получаемое управление при та-



Вид второй компоненты вероятностной стратегии на втором и третьем шагах для случая $X_1 \sim \mathcal{R}[-0{,}1,\ 0{,}3], \ldots, X_T \sim \mathcal{R}[-0{,}1,\ 0{,}3]$.

ком носителе интересно не только с теоретической точки зрения, но и полезно с точки зрения получения наилучшей стратегии при недостатке информации. При $A = 1{,}2$ оказалось, что выборочная оценка вероятности $\mathcal{P}\{C_{T+1} \geqslant \varphi\}$ на $5 \cdot 10^6$ реализациях случайного вектора X для предлагаемой вероятностной стратегии при $N = 10000$ составляет 0,8253 (при $P_1^* = 0{,}8165$), что существенно выше выборочной оценки вероятности для рисковой стратегии, составляющей в этом случае 0,6953.

Таким образом, в условиях «естественной» неопределенности (коэффициента вариации, примерно равного или меньшего 1,5) вероятностная стратегия несколько лучше рисковой по значению выборочной оценки вероятности $\mathcal{P}\{C_{T+1} \geqslant \varphi\}$, в случае же существенной неопределенности предлагаемая вероятностная стратегия значительно превосходит рисковую.

Теперь рассмотрим вид второй компоненты вероятностной стратегии, т.е. доли капитала инвестора, вкладываемого в рисковой актив, при $N = 10000$ на некоторых шагах для случая $X_1 \sim \mathcal{R}[-0{,}1,\ 0{,}3]$.

Как видно из рисунка вторая компонента вероятностной стратегии далека от релейного типа управления, доставляемого рисковой стратегией. Имеется «нелинейный» участок, описание которого простыми функциями (линейной, параболической, логарифмической) вряд ли возможно, что еще раз доказывает полезность предлагаемой вероятностной стратегии.

Результаты получены на персональном компьютере (Intel Core i5 4690, 3.5 GHz, 8 GB DDR3 RAM). Время вычислений для $N = 10000$ составило от одного до трех часов в зависимости от используемого распределения доходностей, что доказывает применимость на практике разработанного алгоритма. При этом было задействовано только одно ядро компьютера, распараллеливание не применялось, а значит, процесс вычислений может быть еще существенно ускорен.

5. Заключение

В работе было предложено новое позиционное управление, приближенное к оптимальному в многошаговой задаче портфельной оптимизации с вероятностным критерием. Соотношения, на основе которых построено предлагаемое управление, получены на основе полной вероятности и формирования управления в классе кусочно-постоянных управлений. На каждом шаге предлагаемое управление получается исходя из решения ряда задач одномерной условной нелинейной оптимизации. В рассмотренном примере продемонстрировано преимущество предлагаемого управления над известными универсальными управлениями. Рассмотренный подход и предлагаемое управление можно обобщить на случай произвольного количества рисковых активов на каждом шаге, не отыскивая при поиске вероятностной стратегии на каждом шаге детерминированный эквивалент, как в настоящей статье, а, например, используя дискретизацию вероятностной меры, что является предметом дальнейших исследований, как и исследование статистических свойств предлагаемого управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Calafiore G.* Multi-period Portfolio Optimization with Linear Control Policies // Automatica. 2008. V. 44. No. 10. P. 2463–2473.
2. *Bodnar T., Parolya N., Schmid W.* On the Exact Solution of the Multi-period Portfolio Choice Problem for an Exponential Utility under Return Predictability // Eur. J. Oper. Res. 2015. V. 246. No. 2. P. 528–542.
3. *Canakoglu E., Ozekici S.* Portfolio Selection in Stochastic Markets with HARA Utility Functions // Eur. J. Oper. Res. 2010. V. 201. No. 2. P. 520–536.
4. *Mei X., DeMiguel V., Nogales F.J.* Multiperiod Portfolio Optimization with Multiple Risky Assets and General Transaction Costs // J. Bank. & Fin. 2016. V. 69. P. 108–120.
5. *Кан Ю.С.* Оптимизация управления по квантильному критерию // АиТ. 2001. № 5. С. 77–88.

   Kan Yu.S. Control Optimization by the Quantile Criterion // Autom. Remote Control. 2001. V. 62. No. 5. P. 746–757.
6. *Григорьев П.В., Кан Ю.С.* Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг // АиТ. 2004. № 2. С. 179–197.

   Grigor'ev V.P., Kan Yu.S. Optimal Control of the Investment Portfolio with Respect to the Quantile Criterion // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. No. 2. P. 319–336.
7. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* Двухшаговая задача формирования портфеля ценных бумаг из двух рисковых активов по вероятностному критерию // АиТ. 2015. № 7. С. 78–100.

   Kibzun A.I., Ignatov A.N. The Two-step Problem of Investment Portfolio Selection from Two Risk Assets via the Probability Criterion // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 7. P. 1201–1220.
8. *Кибзун А.И., Кузнецов Е.А.* Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг // АиТ. 2001. № 9. С. 101–113.

   Kibzun A.I., Kuznetsov E.A. Optimal Control of Discretionary Portfolio // Autom. Remote Control. 2001. V. 64. No. 9. P. 1489–1501.

9. *Кибзун А.И., Кузнецов Е.А.* Позиционная стратегия формирования портфеля ценных бумаг // АиТ. 2003. № 1. С. 151–166.

   Kibzun A.I., Kuznetsov E.A. Positional Strategy of Forming the Investment Portfolio // Autom. Remote Control. 2003. V. 64. No. 1. P. 138–152.

10. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* Сведение двухшаговой задачи стохастического программирования с билинейной функцией дохода к задаче смешанного целочисленного линейного программирования // АиТ. 2016. № 12. С. 89–111.

    Kibzun A.I., Ignatov A.N. Reduction of the Two-step Problem of Stochastic Optimal Control with Bilinear Model to the Problem of Mixed Integer Linear Programming // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 12. P. 2175–2192.

11. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Синтез оптимальных стратегий в задачах управления дискретными системами по вероятностному критерию // АиТ. 2017. № 6. 57–83.

    Azanov V.M., Kan Yu.S. Design of Optimal Strategies in the Problems of Discrete System Control by the Probabilistic Criterion // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 6. P. 1006–1027.

12. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Двухсторонняя оценка функции Беллмана в задачах стохастического оптимального управления дискретными системами по вероятностному критерию качества // АиТ. 2018. № 2. С. 3–18.

    Azanov V.M., Kan Yu.S. Bilateral Estimation of the Bellman Function in the Problems of Optimal Stochastic Control of Discrete Systems by the Probabilistic Performance Criterion // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 2. P. 203–215.

13. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Усиленная оценка функции Беллмана в задачах стохастического оптимального управления с вероятностным критерием качества // АиТ. 2019. № 4. С. 53–69.

    Azanov V.M., Kan Yu.S. Refined Estimation of the Bellman Function for Stochastic Optimal Control Problems with Probabilistic Performance Criterion // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 4. P. 634–647.

14. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* О существовании оптимальных стратегий в задаче управления стохастической системой с дискретным временем по вероятностному критерию. // АиТ. 2017. № 10. С. 139–154.

    Kibzun A.I., Ignatov A.N. On the Existence of Optimal Strategies in the Control Problem for a Stochastic Discrete Time System with Respect to the Probability Criterion // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 10. P. 1845–1856.

15. *Ignatov A.N.* The Structure of an Investment Portfolio in Two-step Problem of Optimal Investment with One Risky Asset Via the Probability Criterion // Sup. Proc. 5th Int. Conf. Analysis of Images, Soc, Networks and Texts (AIST'2016). Yekaterinburg, Russia, April 7–9, 2016. P. 42–50.

16. *Игнатов А.Н.* Синтез оптимальных стратегий в двухшаговых задачах стохастического оптимального управления билинейной моделью с вероятностным критерием // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. МАИ, Москва, 2016. 135 с.

17. *Кан Ю.С., Кибзун А.И.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.

18. *Kelly J.L.* A New Interpretation of Information Rate // Bell Sys. Tech. J. 1956. No. 35. P. 917–926.

19. *MacLean L.C., Thorp E.O., Zhao Y., Ziemba W.T.* How Does the Fortune's Formula Kelly Capital Growth Model Perform? // J. Port. Man. Sum. 2011. V. 37. No. 4. P. 96–111.

20. *Ziemba W.T., Wickson R.G.* Stochastic Optimization Models in Finance. World Scientific, 2006.

21. Энциклопедия финансового риск-менеджмента. Под ред. Лобанова А.А., Чугунова А.В. М.: Альпина Паблишер, 2003.
22. *Игнатов А.Н., Кибзун А.И.* О формировании портфеля ценных бумаг с равномерным распределением по логарифмическому критерию с приоритетной рисковой составляющей // АиТ. 2014. № 3. С. 87–105.

    Ignatov A.N., Kibzun A.I. On Formation of Security Portfolio with Uniform Distribution by Logarithmic Criterion and Priority Risk Component // Autom. Remote Control. 2014. V. 75. No. 3. P. 481–495.
23. *Barmish B.R., Lagoa C.M.* The Uniform Distribution: a Rigorous Justification for its Use in Robustness Analysis // Math. Cont. Signals Sys. 1997. V. 10. P. 203–222.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 28.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020

Автоматика и телемеханика, № 12, 2020

© 2020 г. **Ю.С. КАН, д-р физ.-мат. наук (yu_kan@mail.ru)**
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет))

РАСШИРЕНИЕ ЗАДАЧИ КВАНТИЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ЛИНЕЙНОЙ ПО СЛУЧАЙНЫМ ПАРАМЕТРАМ ФУНКЦИЕЙ ПОТЕРЬ[1]

Задача стохастического программирования с квантильным критерием исследуется в классической одноэтапной постановке в предположении, что функция потерь линейна по случайным параметрам. Расширением данной задачи является минимаксная задача, в которой внутренний максимум берется от функции потерь по реализациям вектора случайных параметров на ядре вероятностного распределения этого вектора, а внешний минимум — по оптимизируемой стратегии на заданном множестве допустимых стратегий. На основе принципа расширения оптимизационных задач устанавливается, что достаточным условием оптимальности решения этой минимаксной задачи в исходной задаче с квантильным критерием является выполнение некоторого вероятностного ограничения.

Ключевые слова: стохастическое программирование, функция квантили, принцип расширения, ядро вероятностного распределения, вероятностное ограничение.

DOI: 10.31857/S0005231020120041

1. Введение

Конечномерные задачи оптимизации квантильного критерия являются частными случаями более общих оптимизационных моделей, изучаемых в теории стохастического программирования с вероятностными ограничениями. Сам квантильный критерий определяется как квантиль заданного уровня вероятностного распределения некоторой функции потерь, зависящей от оптимизируемой стратегии и вектора случайных параметров. Видимо, впервые такой критерий введен в рассмотрение в [1] для учета инвестиционного риска в задаче оптимизации портфеля ценных бумаг, но в [1] он не был назван квантильным. В этой статье приведена лишь математическая формула для определения квантильного критерия и подчеркнуто, что это доверительная граница для дохода портфеля. Впервые термин функция (функционал) квантили использован Райком [2], который заложил основы качественной теории стохастических оптимизационных задач с вероятностными критериями, к числу которых относится и квантильный. Бурное развитие теории в области оптимизационных задач с квантильным критерием связано с публикацией [3], в которой было установлено, что задача минимизации

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-00595).

квантильного критерия эквивалентна обобщенной минимаксной задаче, в которой внутренний максимум (на самом деле точная верхняя грань) функции потерь ищется по реализациям случайных параметров на доверительном множестве, а внешний минимум — по оптимизируемой стратегии и по доверительным множествам. Таким образом, в обобщенной минимаксной задаче требуется подобрать множество неопределенности. Этот результат получил название "обобщенный минимаксный подход" и сразу зарекомендовал себя как методологическая основа для решения прикладных задач, модельных примеров и разработки численных методов минимизации квантильного критерия. Важное свойство, фактически аналитическое представление оптимального доверительного множества, установлено в [4]. Подробнее об этом речь пойдет далее. Многочисленные примеры и некоторые прикладные задачи были решены сравнительно в короткое время, что нашло отражение в [5]. Можно отметить, что использование обобщенного минимаксного подхода для разработки приближенных методов в течение длительного времени шло в основном по пути сужения класса доверительных множеств, который используется в обобщенной минимаксной задаче. Такое сужение подбиралось в каждом конкретном случае с использованием специфики решаемой задачи. Некоторые результаты в этом направлении собраны в [6], но общих рекомендаций по построению таких сужений к настоящему времени практически не сформулировано.

Отметим, что для случая, когда вектор случайных параметров является дискретным с конечным числом реализаций, существует лишь конечное число доверительных множеств. В этом случае обобщенная минимаксная задача может быть решена простым перебором этих множеств. Такая идея реализована в [7] для случая, когда функция потерь имеет полиэдральную структуру. В общем случае реализация этой идеи затруднена ввиду того, что возникающие на этом пути оптимизационные модели могут иметь ярко выраженную многоэкстремальную структуру, примером является минимум конечного числа выпуклых функций.

Структура статьи следующая. В разделе 2 формулируется задача минимизации квантильного критерия, которая часто называется также задачей квантильной оптимизации. Рассматривается частный случай, когда функция потерь линейна по случайным параметрам. Важность именно такой структуры подкрепляется методом линеаризации [8]. В разделе 3 формулируются результаты, составляющие теоретическую основу доверительного метода: обобщенная минимаксная задача, свойство оптимального доверительного множества, понятие и свойства α-ядра вероятностного распределения. С использованием α-ядра формулируется вспомогательная минимаксная задача, в которой внутренний максимум функции потерь берется по реализациям случайных параметров на α-ядре, а внешний минимум — по оптимизируемой стратегии. Эта минимаксная задача является нижней аппроксимацией обобщенной минимаксной, а следовательно и исходной задачи квантильной оптимизации. В разделе 4 приводится формулировка известного принципа расширения (название ввел В.И. Гурман в [9]), позволяющего конструировать достаточные условия оптимальности решений нижних аппроксимаций абстрактных задач минимизации. С помощью этого принципа в разделе 5 выводится достаточное условие оптимальности решения указанной выше вспомогательной минимаксной задачи для исходной задачи квантильной оптимизации. Это условие имеет вид некоторого вероятностного неравенства и составляет основной результат настоящей статьи. Различные аспекты этого результата иллюстрируются в разделе 6 тремя примерами. В разделе 7 приводится обобщение предлагаемого достаточного условия для минимизирующих последовательностей.

2. Постановка задачи

Рассмотрим функцию вероятности:

$$P_\varphi(u) = \mathbf{P}\left(f(u,\xi) \leqslant \varphi\right),$$

где $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ – вектор стратегии (на самом деле можно считать, что U – множество элементов u произвольной природы, не обязательно векторов), φ – скалярный параметр, ξ – n-мерный случайный вектор с распределением $\mathbf{P}$, т.е. $\mathbf{P}$ – вероятностная мера, определенная на борелевских подмножествах пространства $\mathbb{R}^n$ и определяющая вероятность принадлежности вектора ξ этим подмножествам. Функция $f(u,\xi)$ называется далее функцией потерь и предполагается линейной по ξ:

$$f(u,\xi) = a^{\mathrm{T}}(u)\xi + b(u), \tag{1}$$

где $a(u)$ и $b(u)$ – некоторые векторная и скалярная функции, $(\cdot)^{\mathrm{T}}$ – операция транспонирования.

Введем в рассмотрение функцию квантили (квантильный критерий):

$$\varphi_\alpha(u) = [f(u,\xi)]_\alpha = \min\left\{\varphi : \ P_\varphi(u) \geqslant \alpha\right\}, \tag{2}$$

где $\alpha \in (0,1)$ – доверительная вероятность.

Предметом исследования настоящей статьи является задача квантильной оптимизации:

$$\varphi_\alpha^0 = \varphi_\alpha\left(u_\alpha\right) = \min_{u\in U} \varphi_\alpha(u). \tag{3}$$

Цель статьи – вывод достаточных условий оптимальности. По этой причине вопрос существования решения u_α задачи (3) здесь не затрагивается.

3. Обобщенные минимаксные задачи и α-ядра

Отправной точкой исследования задачи квантильной оптимизации (3) является следующий результат, составляющий основу доверительного метода [6]:

Т е о р е м а 1. *Справедливо обобщенное минимаксное соотношение:*

$$\varphi_\alpha^0 = \min_{u\in U, E\in\mathcal{E}_\alpha} \sup_{x\in E} f(u,x), \tag{4}$$

где $\mathcal{E}_\alpha$ – семейство всех доверительных борелевских множеств E в $\mathbb{R}^n$ (т.е. $\mathbf{P}(E) \geqslant \alpha$). Если пара u_α, E_α доставляет минимум в (4), то u_α – оптимальная стратегия в задаче (3). При этом минимум по $E \in \mathcal{E}_\alpha$ в (4) достигается на множестве

$$E_\alpha = \left\{x : \ f(u_\alpha, x) \leqslant \varphi_\alpha^0\right\}. \tag{5}$$

Впервые идея доверительного метода была сформулирована в [3], затем развита и уточнена в [4]. Как отмечено в [5], теорема 1 устанавливает взаимосвязь между стохастическими и игровыми (минимаксными) оптимизационными моделями. Но сложность задачи (4) долгое время не позволяла получать на ее основе способы точного решения задач квантильной оптимизации. Эта сложность обусловлена неконструктивностью операции оптимизации доверительного множества. В частном случае, когда доверительных множеств конечное число и их можно просто перебрать, задача (4) распадается на конечное число обычных минимаксных задач, в которых операция оптимизации множества отсутствует. Это обстоятельство использовано в [7] для сведения задачи квантильной оптимизации с полиэдральной функцией потерь и дискретным вектором случайных параметров к задаче смешанного целочисленного линейного программирования.

В [5] впервые сформулирована идея сужения задачи (4): несмотря на то что оптимальное доверительное множество (5) невозможно использовать для решения задачи (4), так как оно зависит от искомых параметров u_α и φ_α^0, свойства функции потерь $f(u,x)$ делают априори известными геометрические свойства этого множества. В частности, из линейности функции потерь (1) следует, что оптимальное доверительное множество E_α является замкнутым полупространством, т.е. выпуклым замкнутым множеством. Поэтому в [10] предложено сузить задачу (4) следующим образом:

$$\varphi_\alpha^0 = \min_{u \in U, E \in \mathcal{E}_\alpha^c} \sup_{x \in E} f(u,x), \tag{6}$$

где $\mathcal{E}_\alpha^c$ – семейство всех выпуклых, замкнутых, доверительных множеств в $\mathbb{R}^n$. Задача (6) оказывается более конструктивной по сравнению с (4) ввиду того, что пересечение всех множеств семейства $\mathcal{E}_\alpha^c$ может оказаться не пустым в отличие от семейства $\mathcal{E}_\alpha$. В [5] это пересечение K_α, как понятие, использовано, видимо, впервые и названо ядром вероятностной меры уровня α. Но поскольку, как указано выше в постановке задачи, вероятностная мера $\mathbf{P}$ есть распределение случайного вектора ξ, в этом частном случае удобнее называть K_α α-ядром распределения случайного вектора ξ. Итак,

$$K_\alpha = \bigcap_{E \in \mathcal{E}_\alpha^c} E = \bigcap_{c:\, \|c\|=1} \left\{x : c^{\mathrm{T}} x \leqslant \left[c^{\mathrm{T}} \xi\right]_\alpha \right\}, \tag{7}$$

где $\|\cdot\|$ – любая векторная норма. Непустота α-ядра обоснована в [8] следующей теоремой.

Т е о р е м а 2. *K_α не пусто, если $\alpha > \frac{n}{n+1}$.*

Отметим, что этот результат справедлив для любого распределения $\mathbf{P}$. Предположим далее, что K_α не пусто. Очевидно, что оно является выпуклым и компактным множеством. Введем в рассмотрение функцию максимума на ядре:

$$\psi_\alpha(u) = \max_{x \in K_\alpha} f(u, x). \tag{8}$$

В [5] установлено, что

$$\psi_\alpha(u) \leqslant \varphi_\alpha(u) \tag{9}$$

для любой непрерывной и квазивыпуклой по x функции потерь $f(u, x)$. Поскольку в соответствии с (1) рассматриваемая функция потерь линейна по x, то она выпукла по x и неравенство (9) для нее справедливо, т.е. функция максимума на ядре — нижняя граница квантильного критерия.

Определение [10]. *Ядро K_α регулярно, если любое замкнутое полупространство, его содержащее, является доверительным.*

В [10] доказано, что для регулярного α-ядра K_α в неравенстве (9) достигается равенство:

$$\psi_\alpha(u) = \varphi_\alpha(u) \quad \forall u \in U. \tag{10}$$

В этом случае задача (3) оказывается эквивалентной минимаксной задаче

$$\psi_\alpha^* = \psi_\alpha\left(u_\alpha^*\right) = \min_{u \in U} \psi_\alpha(u) \tag{11}$$

(если, конечно, оптимальная стратегия u_α^* существует), т.е. $u_\alpha = u_\alpha^*$, $\varphi_\alpha^0 = \psi_\alpha^*$. В отличие от (4) в минимаксной задаче (11) отсутствует операция оптимизации доверительного множества. В связи с этим проблема регулярности α-ядра представляется важной.

Теорема 3. Ядро K_α регулярно, если его граница является гладкой поверхностью в $\mathbb{R}^n$, а ξ имеет плотность вероятности.

Эта теорема впервые сформулирована и доказана в [10], где на ее основе установлено, что регулярность имеет место при $\alpha \geqslant 1/2$ для эллиптически симметричных распределений с плотностями

$$p(x) = h\Big((x-m)^{\mathrm{T}} Q^{-1} (x-m)\Big),$$

где $h(\cdot)$ – некоторая функция скалярного аргумента, $m \in \mathbb{R}^n$ – детерминированный вектор (центр симметрии), Q – симметричная положительно определенная матрица. Примером такого распределения, помимо многомерного нормального и равномерного на эллипсоиде, является равномерное распределение на эллиптическом кольце

$$\Big\{x : r_1^2 \leqslant (x-m)^{\mathrm{T}} Q^{-1} (x-m) \leqslant r_2^2\Big\}, \tag{12}$$

где $r_1 < r_2$. Тогда ядро является эллипсоидом

$$K_\alpha = \left\{ x : (x - m)^{\mathrm{T}} K^{-1} (x - m) \leqslant r_\alpha^2 \right\},$$

где параметр r_α зависит от α, функции $h(\cdot)$ и матрицы K. При α, близком к $1/2$, может получиться $r_\alpha < r_1$, т.е. α-ядро для равномерного распределения на эллиптическом кольце (12) может оказаться внутри эллипсоида

$$\left\{ x : (x - m)^{\mathrm{T}} Q^{-1} (x - m) \leqslant r_1^2 \right\}$$

и будет иметь пустое пересечение с данным кольцом.

В [11] регулярное α-ядро в случае абсолютно непрерывного распределения случайного вектора ξ названо плавающим телом. При этом понятие α-ядра не использовалось. Под плавающим телом понималось выпуклое тело, для которого любая опорная гиперплоскость отсекает вероятностную меру, в точности равную $1 - \alpha$. Основной результат статьи [11] заключается в том, что существование плавающего тела, т.е. регулярность α-ядра, доказано для абсолютно непрерывных распределений с логарифмически вогнутыми и симметричными плотностями $p(x)$. Отметим, что указанное выше равномерное распределение на эллиптическом кольце (12) не обладает свойством логарифмической вогнутости. Поэтому классы симметричных эллиптических и логарифмически вогнутых плотностей дополняют друг друга.

В [12, 13] предложены алгоритмы построения сколь угодно точных, внешних, полиэдральных аппроксимаций α-ядра. Эти алгоритмы хорошо зарекомендовали себя для $n = 2$, т.е. для плоского случая. Но они имеют один методологический недостаток: указанные аппроксимации всегда имеют кусочно-гладкую границу и поэтому с их помощью невозможно проверить условие гладкости в теореме 3 при исследовании вопроса о регулярности α-ядра. Это обстоятельство затрудняет использование вспомогательной задачи (11) для решения исходной задачи (3). Ведь при отсутствии свойства регулярности или при отсутствии обоснования, что регулярность имеет место, можно лишь гарантировать выполнение неравенства (9), т.е. что функция максимума $\psi_\alpha(u)$ на α-ядре является нижней оценкой квантильного критерия. Математический аппарат, обосновывающий использование нижних оценок оптимизируемого критерия в задачах минимизации для вывода достаточных условий оптимальности, впервые предложен в [14]. В настоящее время он известен как принцип расширения [9].

4. Замечание о принципе расширения

Принцип расширения выражает следующее свойство абстрактных оптимизационных задач. Рассмотрим множество M элементов m произвольной природы.

Лемма 1. *Пусть имеются функционалы $I, L : M \to \mathbb{R}^1$ и множества $D, E \subset M$, удовлетворяющие условиям:*

1) $L(m) \leqslant I(m)\ \forall m \in D$,

2) $D \subset E$,

3) $m^* = \arg\min\limits_{m \in E} L(m) \in D$,

4) $I\left(m^*\right) = L\left(m^*\right)$.

Тогда $m^* = \arg\min\limits_{m \in D} I(m)$.

Эта лемма в такой редакции опубликована в [15]. Ее обоснование дано в [14, 16], а в книге [9] она получила название “принцип расширения”. Принцип позволяет получить достаточные условия оптимальности решения m^* вспомогательной оптимизационной задачи $L(m) \to \min_{m \in E}$ в исходной задаче $I(m) \to \min_{m \in D}$. Эти достаточные условия получаются в результате применения третьего и четвертого условий леммы с учетом конкретики исходной задачи оптимизации. При этом четвертое условие имеет форму равенства, которое при конкретизации приводит к некоторому достаточному условию в форме алгебраического соотношения типа равенства. Однако можно указать одну интересную альтернативную возможность. Заменим четвертое условие леммы неравенством

$$I\left(m^*\right) \leqslant L\left(m^*\right). \tag{13}$$

Это неравенство равносильно четвертому условию леммы 1. Действительно, из выполнения четвертого условия следует выполнение неравенства (13), так как это неравенство нестрогое. С другой стороны, если справедливо неравенство (13), то из первого и третьего условий леммы 1 следует, что в этом неравенстве строгое неравенство невозможно. Однако применение леммы 1 к синтезу достаточных условий оптимальности с заменой четвертого условия неравенством (13) приводит к формулировке некоторого достаточного условия в виде неравенства, что открывает дополнительные возможности, как демонстрируется, например, в разделе 5.

5. Достаточные условия оптимальности в задаче квантильной минимизации

Из (9) и леммы 1 очевидно вытекает истинность следующего утверждения.

Лемма 2. *Пусть существует решение вспомогательной минимаксной задачи* (11), *причем*

$$\varphi_\alpha\left(u_\alpha^*\right) \leqslant \psi_\alpha^*. \tag{14}$$

Тогда оно оптимально в задаче (3), *т.е.* $\varphi_\alpha^0 = \psi_\alpha^*$, $u_\alpha = u_\alpha^*$.

Неравенство (14) является конкретизацией четвертого условия леммы 1. Именно оно и гарантирует, что решение минимаксной задачи (11) оптимально в исходной задаче квантильной минимизации. Заметим, что проверка (14) требует вычисления квантильного критерия на стратегии u_α^*, которая подозревается на оптимальность в задаче (3). Этого можно избежать, поскольку, как доказано в [17], неравенство (14) равносильно следующему:

$$P_\varphi\left(u_\alpha^*\right)\big|_{\varphi = \psi_\alpha^*} \geqslant \alpha. \tag{15}$$

Это неравенство как достаточное условие оптимальности стратегии u_α^* для исходной задачи квантильной оптимизации и составляет основной результат данной статьи, который оформим в виде следующей теоремы.

Теорема 4. Пусть существует решение вспомогательной минимаксной задачи (11), *удовлетворяющее вероятностному ограничению* (15). *Тогда оно оптимально в задаче* (3), *т.е.* $\varphi_\alpha^0 = \psi_\alpha^*$, $u_\alpha = u_\alpha^*$.

Обсудим смысл этого утверждения. Пусть

$$\psi_\alpha^* = \max_{x \in K_\alpha} f\left(u_\alpha^*, x\right) = f\left(u_\alpha^*, x_\alpha\right), \tag{16}$$

где x_α – граничная точка K_α. Тогда неравенство (15) можно записать в виде

$$\mathbf{P}\Big\{x:\ f\left(u_\alpha^*, x\right) \leqslant f\left(u_\alpha^*, x_\alpha\right)\Big\} \geqslant \alpha. \tag{17}$$

Это неравенство, по существу, означает регулярность α-ядра в локальном смысле, в граничной точке x_α. В [18] доказана следующая лемма.

Лемма 3. Для любой граничной точки α-ядра существует замкнутое, доверительное полупространство, для которого эта точка также является граничной.

Поэтому если некоторая граничная точка α-ядра является точкой гладкости его границы, то существует единственное замкнутое полупространство, содержащее в себе α-ядро, для которого эта точка является граничной. Это опорное полупространство в данной граничной точке. По лемме 3 оно доверительное из-за того, что единственное. Поэтому неравенство (17) оказывается выполненным, если x_α – точка гладкости границы α-ядра. Многочисленные аналитические и численные примеры построения плоских α-ядер, приведенные в [12, 13, 18], свидетельствуют о том, что граница α-ядра является кусочно-гладкой. В указанных примерах число точек негладкости границы не превышает четырех.

6. Примеры

Пример 1. Рассмотрим задачу квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь

$$f(u, \xi) = u_1\xi_1 + u_2\xi_2, \tag{18}$$

где $u = (u_1, u_2)^{\mathrm{T}}$ – двумерный вектор стратегии со значениями из множества допустимых стратегий

$$U = \Big\{(u_1, u_2)^{\mathrm{T}}:\ u_1 \geqslant 0,\ u_2 \geqslant 0,\ u_1 + u_2 = 1\Big\}. \tag{19}$$

Случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы, причем ξ_1 распределена равномерно на отрезке $[-1/2, 1/2]$, а ξ_2 распределена равномерно в граничных точках этого отрезка, т.е.

$$\mathbf{P}\left(\xi_2 = -1/2\right) = \mathbf{P}\left(\xi_2 = 1/2\right) = \frac{1}{2}.$$

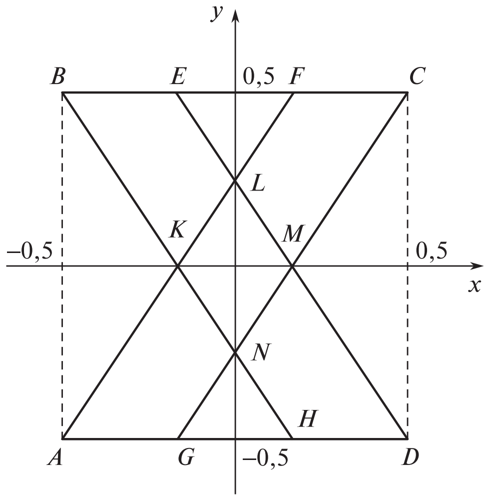


Рис. 1. Нерегулярное ядро $KLMN$. $x_M = 1/6$. $y_L = 1/4$.

Поэтому двумерный случайный вектор $(\xi_1, \xi_2)^{\mathrm{T}}$ распределен равномерно на противоположных сторонах AD и BC квадрата $ABCD$, см. рис. 1. Уровень доверительной вероятности примем равным $\alpha = 2/3$.

В [10] показано, что ядро K_α в рассматриваемом случае не регулярно и представляет собой ромб $KLMN$. Нерегулярность обусловлена тем, что полуплоскость, задаваемая неравенством $y \leqslant 3/8$, содержит целиком отрезок AD и не пересекается с BC. Поэтому она имеет вероятностную меру $1/2$, что меньше $2/3$. На рис. 1 точки E, F, G и H делят каждый из отрезков AD и BC на три равные части, имеющие вероятностную меру $1/6$.

С учетом (19) можно ввести в рассмотрение скалярную переменную $v \in [0, 1]$, с помощью которой можно параметризовать все допустимые стратегии: $u_1 = v$, $u_2 = 1 - v$.

Задача на максимум функции потерь на ядре

$$\psi_\alpha(v) = \max_{(x,y) \in K_\alpha} vx + (1 - v)y$$

является задачей линейного программирования на многоугольнике (ромбе $KLMN$). Из-за того что вектор $(v, 1 - v)^{\mathrm{T}}$ лежит на числовой плоскости в неотрицательном квадранте, этот максимум может достигаться лишь в вершинах M и L. Поэтому

$$\psi_\alpha(v) = \max\{v \cdot x_M, (1 - v) \cdot y_L\} = \max\left\{\frac{v}{6}, \frac{1 - v}{4}\right\}.$$

Минимум этой функции по v легко находится путем приравнивания двух линейных функций, из которых берется максимум в последнем соотношении. Поэтому решение минимаксной задачи (11) в рассматриваемом примере имеет вид:

$$\frac{v}{6} = \frac{1 - v}{4} \quad \Longrightarrow \quad v_\alpha^* = \frac{3}{5}, \quad \psi_\alpha^* = \frac{1}{10}.$$

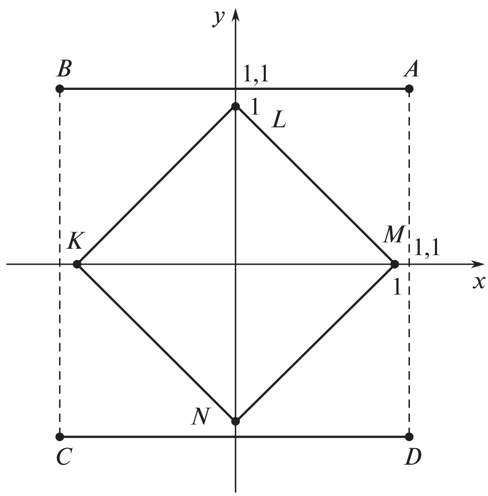


Рис. 2. Нерегулярное ядро $KLMN$ для дискретного распределения.

Проверим достаточное условие оптимальности (15). В данном случае оно приводит к неравенству

$$\mathbf{P}\left\{\frac{3}{5}\xi_1 + \frac{2}{5}\xi_2 \leqslant \frac{1}{10}\right\} \geqslant \alpha. \tag{20}$$

Неравенство

$$\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y \leqslant \frac{1}{10}$$

определяет *доверительную* полуплоскость с границей, содержащей M и L. Поэтому (20) справедливо, и, следовательно, найденное решение минимаксной задачи

$$u_1^* = \frac{3}{5}, \quad u_2^* = \frac{2}{5}, \quad \psi_\alpha^* = \frac{1}{10}$$

есть решение задачи квантильной оптимизации: $u_{1\alpha} = u_1^*$, $u_{2\alpha} = u_2^*$ и $\varphi_\alpha^0 = \psi_\alpha^*$.

Пример 2. Рассмотрим задачу примера 1 с другим законом распределения случайного вектора ξ. А именно: функция потерь определена соотношением (18), множество допустимых стратегий – формулой (19), а двумерный случайный вектор ξ имеет дискретное распределение с восемью реализациями в вершинах квадратов $KLMN$ и $ABCD$, изображенных на рис. 2. Вершины внутреннего квадрата $KLMN$ имеют одинаковые вероятностные веса 0,2, а вершины внешнего квадрата $ABCD$ – одинаковые вероятностные веса 0,05. Рассмотрим задачу квантильной оптимизации с $\alpha = 0{,}95$.

Целью данного примера является иллюстрация того обстоятельства, что предложенный подход может успешно применяться и для дискретных распределений случайных параметров.

Нетрудно видеть, что ядро K_α совпадает с внутренним квадратом $KLMN$ и не является регулярным. Действительно, каждая из четырех полуплоскостей, задаваемых неравенствами $x \geqslant -1{,}05$, $x \leqslant 1{,}05$, $y \geqslant -1{,}05$ и $y \leqslant 1{,}05$, содержит α-ядро, но имеет меру 0,9, что меньше, чем $\alpha = 0{,}95$. Так же как и в примере 1, введем в рассмотрение скалярную переменную v. С ее помощью легко находим

$$\psi_\alpha(v) = \max\left\{v \cdot x_M, (1-v) \cdot y_L\right\} = \max\left\{v, 1-v\right\},$$

откуда $v^* = 1/2$, $\psi_\alpha^* = 1/2$. Достаточное условие оптимальности (15) приводит к неравенству

$$x + y \leqslant 1,$$

которое определяет *доверительную* полуплоскость с границей, содержащей M и L. Следовательно, найденное решение минимаксной задачи

$$u_1^* = v^* = \frac{1}{2}, \quad u_2^* = 1 - v^* = \frac{1}{2}, \quad \psi_\alpha^* = \frac{1}{2}$$

есть решение задачи квантильной оптимизации: $u_{1\alpha} = u_1^*$, $u_{2\alpha} = u_2^*$ и $\varphi_\alpha^0 = \psi_\alpha^*$.

Пример 3. Покажем, что в условии (15) на оптимальном решении может иметь место строгое неравенство. С этой целью расширим пример 1 следующим образом. Рассмотрим функцию потерь, характерную для портфеля ценных бумаг:

$$f(u, \xi) = u_0 b + u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2, \tag{21}$$

где $u = (u_0, u_1, u_2)^{\mathrm{T}}$ – трехмерный вектор стратегии со значениями из множества допустимых стратегий

$$U = \left\{(u_0, u_1, u_2)^{\mathrm{T}} : u_0 \geqslant 0,\, u_1 \geqslant 0,\, u_2 \geqslant 0,\, u_0 + u_1 + u_2 = 1\right\}, \tag{22}$$

b – детерминированная константа. В портфельной проблематике величина $(-b)$ имеет смысл доходности безрисковой ценной бумаги, поэтому типичными для b являются отрицательные значения. Случайный вектор $(\xi_1, \xi_2)^{\mathrm{T}}$ тот же, что и в примере 1. Т.е. его α-ядро для $\alpha = 2/3$ – тот же самый ромб $KLMN$, как в примере 1.

С целью решения вспомогательной минимаксной задачи (11), как и выше, введем скалярную переменную $v \in [0, 1-u_0]$: $u_1 = v$, $u_2 = 1 - u_0 - v$. Тогда

$$\psi_\alpha\left(u_0, v\right) = u_0 b + \max\left\{\frac{v}{6}, \frac{1 - u_0 - v}{4}\right\}.$$

Приравнивая линейные функции под знаком максимума, находим, что минимум этой функции по v достигается в точке

$$v^* = \frac{3}{5}\left(1 - u_0\right) \in \left[0, 1 - u_0\right].$$

Поэтому

$$\min_v \psi_\alpha(u_0, v) = \psi_\alpha(u_0, v^*) = \frac{1}{10} + u_0\left(b - \frac{1}{10}\right).$$

Минимум этой функции по $u_0 \in [0,1]$ легко находится. Если $b \geqslant 1/10$, то $u_0^* = 0$, и решением рассматриваемой задачи квантильной оптимизации является решение примера 1. А вот если $b < 1/10$, то $u_0^* = 1$, откуда $v^* = u_1^* = u_2^*$. В этом случае

$$\psi_\alpha^* = \frac{1}{10} + b - \frac{1}{10} = b.$$

Проверим достаточное условие оптимальности (15). В данном случае из-за того что $f(u^*, \xi) \equiv b$, оно имеет вид

$$\mathbf{P}\{b \leqslant b\} = 1 > \alpha,$$

т.е. выполняется как строгое неравенство. Таким образом, в случае $b < 1/10$ решением рассматриваемой задачи квантильной оптимизации является "безрисковая" стратегия $u_{0\alpha} = 1$, $u_{1\alpha} = u_{2\alpha} = 0$, $\varphi_\alpha^0 = b$.

Если же $b \geqslant 1/10$, то как установлено в примере 1, решением является: $u_{0\alpha} = 0$, $u_{1\alpha} = 3/5$, $u_{2\alpha} = 2/5$, $\varphi_\alpha^0 = 1/10$.

7. Обобщение для минимизирующих последовательностей

Минимаксная задача (11) в общем случае является сложной главным образом ввиду того, что α-ядро K_α сложно задать в простой аналитической форме. Следствием этого является то, что оптимальную стратегию для указанной задачи приходится определять с помощью некоторой численной процедуры, приводящей не к нахождению оптимальной стратегии u_α^*, а к построению некоторой минимизирующей последовательности u_α^N. Такую последовательность можно получить, например, следующим образом.

В [12] предложен алгоритм аппроксимации α-ядра последовательностью содержащих его полиэдров K_α^N:

$$K_\alpha^N = \bigcap_{j \in J(N)} \left\{x : c_j^{\mathrm{T}} x \leqslant \left[c_j^{\mathrm{T}} \xi\right]_\alpha\right\}, \tag{23}$$

где c_j, $j \in J(N)$, – конечный, сгущающийся набор векторов на единичной сфере. Предположим, что величины $\left[c_j^{\mathrm{T}} \xi\right]_\alpha$ вычисляются точно, см. по данному вопросу примеры в [12]. Ситуация, когда эти величины определяются с ошибками, возможно случайными, требует специального исследования, выходящего за рамки настоящей статьи. В [18] доказано, что последовательность (23) сходится к K_α в метрике Хаусдорфа. В указанном алгоритме предусмотрена возможность строить сгущающийся набор векторов таким образом, что $J(N) \subset J(N+1)$. Будем считать, что именно такая возможность реализована. Это приводит к тому, что (23) сходится к K_α монотонно, т.е. $K_\alpha^{N+1} \subset K_\alpha^N$.

Определим последовательность функций максимума

$$\psi_\alpha^N(u) = \max_{x\in K_\alpha^N} f(u,x).$$

Пусть

$$u_\alpha^N = \arg\min_{u\in U} \psi_\alpha^N(u). \tag{24}$$

Если U – компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^m$ и функции $a(u)$ и $b(u)$ в (1) непрерывны, то согласно [19, с. 29] u_α^N существует и является минимизирующей для задачи (11), т.е.

$$\lim_{N\to\infty} \psi_\alpha\left(u_\alpha^N\right) = \psi_\alpha^*.$$

Для формулировки достаточных условий оптимальности последовательности u_α^N в исходной задаче квантильной оптимизации воспользуемся следующей версией принципа расширения [9].

Лемма 4. *Пусть имеются функционалы $I, L : M \to \mathbb{R}^1$ и множества $D, E \subset M$ и последовательность $m^N \in D$, удовлетворяющие условиям*:

1) $L(m) \leqslant I(m)\ \forall m \in D$,

2) $D \subset E$,

3) $l \leqslant \inf\limits_{m\in E} L(m)$,

4) $I\left(m^N\right) \to l$.

Тогда m^N минимизирует функционал I на D.

Рассуждая по аналогии с замечанием раздела 4, можно легко установить, что четвертое условие этой леммы равносильно существованию числовой последовательности a^N со свойствами:

$$I\left(m^N\right) \leqslant l + a^N, \tag{25}$$

$a^N \geqslant 0$, $a^N \to 0$ при $N \to \infty$. Роль функционала I, как и выше, играет квантильный критерий, роль функционала L – функция максимума $\psi_\alpha(u)$. Роль константы l в квантильной проблематике играет ψ_α^*. Тогда

$$a^N = \psi_\alpha^N\left(u_\alpha^N\right) - \psi_\alpha^*,$$

где u_α^N определяется согласно (24) (если, конечно, U – компакт). Таким образом, конкретизация четвертого условия леммы 4 приводит к неравенству:

$$\varphi_\alpha\left(u_\alpha^N\right) \leqslant \psi_\alpha^N\left(u_\alpha^N\right),$$

которое по лемме Розенблатта [17] равносильно условию

$$P_\varphi\left(u_\alpha^N\right) \geqslant \alpha, \tag{26}$$

где $\varphi = \psi_\alpha^N\left(u_\alpha^N\right)$. Именно это условие и гарантирует, что последовательность u_α^N минимизирует квантильный критерий качества.

8. Заключение

Можно констатировать, что в статье предложен новый метод оптимизации квантильного критерия для линейной по случайным параметрам функции потерь. Метод сводит задачу квантильной оптимизации к вспомогательной минимаксной, в которой в роли множества неопределенности выступает α-ядро распределения вектора случайных параметров. Эта минимаксная задача получена путем сужения и расширения обобщенной минимаксной задачи, составляющей основу доверительного метода решения задач квантильной оптимизации. Предложено достаточное условие оптимальности решения вспомогательной задачи для исходной задачи с квантильным критерием в форме некоторого вероятностного ограничения. В отличие от известных ранее результатов метод применим без предположения о регулярности α-ядра. На примерах показано, что он работает и в случаях, когда α-ядро не регулярно, в частности для дискретных и непрерывно-дискретных распределений вектора случайных параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kataoka S.* On a Stochastic Programming Model // Econometrica. 1963. V. 31. P. 181–196.
2. *Райк Э.* О функции квантиля в стохастическом нелинейном программировании // Изв. АН ЭССР. Физ.-мат. 1971. Т. 20. № 2. С. 229–231.
3. *Кибзун А.И., Малышев В.В.* Обобщенный минимаксный подход к решению задач с вероятностными ограничениями // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1984. № 1. С. 20–29.
4. *Кибзун А.И., Лебедев А.А., Малышев В.В.* О сведении задачи с вероятностными ограничениями к эквивалентной минимаксной // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1984. № 4. С. 73–80.
5. *Малышев В.В., Кибзун А.И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987.
6. *Кибзун А.И., Кан Ю.С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
7. *Иванов С.В., Наумов А.В.* Алгоритм оптимизации квантильного критерия для полиэдральной функции потерь и дискретного распределения случайных параметров // АиТ. 2012. № 1. С. 116–129.

   Ivanov S.V., Naumov A.V. Algorithm to Optimize the Quantile Criterion for the Polyhedral Loss Function and Discrete Distribution of Random Parameters // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 1. P. 105–117.
8. *Васильева С.Н., Кан Ю.С.* Метод линеаризации для решения задачи квантильной оптимизации с функцией потерь, зависящей от вектора малых случайных параметров // АиТ. 2017. № 7. С. 95–109.

   Vasil'eva S.N., Kan Yu.S. Linearization Method for Solving Quantile Optimization Problems with Loss Function Depending on a Vector of Small Random Parameters // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 7. P. 1251–1263.
9. *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1985.
10. *Kan Yu.S.* Application of the Quantile Optimization to Bond Portfolio Selection // Stochastic Optimization Techniques. Numerical Methods and Technical Applications. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. V. 513. K. Marti, ed. Berlin: Springer, 2002. P. 145–153.

11. *Meyer M., Reisner S.* Characterizations of affinely-rotation-invariant log-concave measures by section-centroid location // Geometric Aspects of Functional Analysis. Lecture Notes in Math. 1989–1990. V. 1469. Berlin: Springer, 1991. P. 145–152.

12. *Васильева С.Н., Кан Ю.С.* Метод решения задачи квантильной оптимизации с билинейной функцией потерь // АиТ. 2015. № 9. С. 83–101.

    Vasil'eva S.N., Kan Yu.S. A Method for Solving Quantile Optimization Problems with a Bilinear Loss Function // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 9. P. 1582–1597.

13. *Васильева С.Н., Кан Ю.С.* Алгоритм визуализации плоского ядра вероятностной меры // Информатика и ее применения. 2018. № 12. Вып. 2. С. 60–68.

14. *Кротов В.Ф.* Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума. I // АиТ. 1962. Т. 23. Вып. 12. С. 1571–1583.

    Krotov V.F. Methods for the Solution of Variational Problems Using Sufficient Conditions for an Absolute Minimum. I // Autom. Remote Control. 1962. V. 23. No. 12. P. 1473–1484.

15. *Гурман В.И., Хрусталев М.М.* Анормальность в теории необходимых условий оптимальности // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2017. № 19. С. 44–61.

16. *Хрусталев М.М.* О достаточных условиях оптимальности в задачах с ограничениями на фазовые координаты // АиТ. 1967. Вып. 4. С. 18–29.

    Khrustalev M.M. On Sufficient Optimality Conditions in the Problems with Phase Coordinates Constraints // Autom. Remote Control. 1967. No. 4. P. 544–554.

17. *Rosenblatt-Roth. M.* Quantiles and Medians // The Annals of Mathematical Statistics. 1965. V. 36. P. 921–925.

18. *Васильева С.Н., Кан Ю.С.* Аппроксимация вероятностных ограничений в задачах стохастического программирования с использованием ядра вероятностной меры // АиТ. 2019. № 11. С. 93–107.

    Vasil'eva S.N., Kan Yu.S. Approximation of Probabilistic Constraints in Stochastic Programming Problems with a Probability Measure Kernel // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 11. P. 2005–2016.

19. *Федоров В.В.* Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 29.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020

© 2020 г. **А.И. КИБЗУН, д-р физ.-мат. наук (kibzun@mail.ru),**
С.В. ИВАНОВ, канд. физ.-мат. наук (sergeyivanov89@mail.ru)
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет))

ПОСТРОЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ ПОГЛОЩЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ[1]

Рассматривается задача о построении доверительного множества поглощения, представляющего собой множество начальных позиций системы, обеспечивающих с заданной вероятностью непревышение функцией потерь в терминальный момент времени некоторого фиксированного уровня. Предполагается, что зависимость состояния системы в терминальный момент времени от начальной позиции описывается известной случайной функцией. Предлагается подход к построению внешних и внутренних аппроксимаций доверительного множества поглощения. На первом этапе строятся детерминированные внутренняя и внешняя аппроксимации. Затем полученные аппроксимации уточняются для некоторого конечного множества начальных позиций системы с помощью выборочных оценок. Получены оценки объема выборки, достаточного для построения указанных аппроксимаций. Данная оценка улучшается для случая звездчатой функции потерь. Предлагается алгоритм построения аппроксимаций доверительного множества поглощения в двумерном случае. Полученные аппроксимации применяются в задаче планирования производства.

Ключевые слова: стохастическое программирование, доверительное множество поглощения, функция вероятности, функция квантили.

DOI: 10.31857/S0005231020120053

1. Введение

Качество функционирования стохастической системы при заданном начальном состоянии системы может оцениваться вероятностью непревышения потерями фиксированного предельно допустимого уровня в терминальный момент времени. Представляет интерес множество начальных состояний системы, при которых с заданной вероятностью потери, возникающие в ходе функционирования системы, в терминальный момент времени не будут превышать заданный предельно допустимый уровень. Данное множество называется доверительным множеством поглощения.

Описанная задача аналогична задаче построения множеств уровня функции вероятности в задачах стохастического программирования. Свойства

[1] Работа Кибзуна А.И. выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-07-00617 А). Работа Иванова С.В. выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-07-00436 А).

функции вероятности изучаются в [1, 2]. С точки зрения построения множеств уровня наиболее важными свойствами функции вероятности является выпуклость и квазивыпуклость, при наличии которых множества уровня являются выпуклыми. Достаточные условия выпуклости, квазивыпуклости и логарифмической выпуклости функции вероятности изучаются в [3–8].

Для аппроксимации множеств уровня функции вероятности может быть использован подход, основанный на использовании p-эффективных точек, представляющих собой многомерное обобщение квантили распределения. Алгоритм для поиска p-эффективных точек дискретного случайного вектора предложен в [9]. Аппроксимации множеств уровня с помощью p-эффективных точек, предназначенные для решения задач стохастического программирования, предлагаются в [10, 11]. Обзор подобных методов решения задач стохастического программирования приведен в [12].

Другим подходом к аппроксимации доверительного множества поглощения является использование выборочных методов, когда функция вероятности оценивается с помощью выборки. Данный подход известен и как метод Монте-Карло. Основой для построения таких оценок является равномерный закон больших чисел [13, 14], позволяющий оценить объем выборки, достаточный для оценивания максимального отклонения частоты от вероятности по некоторому классу событий. В дальнейшем данные идеи применялись в [15–17] для оценивания объема выборки, достаточного для аппроксимации задач оптимизации функции математического ожидания. В [18] проведено исследование скорости сходимости для задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями.

Данная статья является дальнейшим развитием [19], где был предложен основанный на доверительном методе [1] подход к построению внутренней аппроксимации доверительного множества поглощения. В статье предлагается подход, сочетающий детерминированные и выборочные методы. На первом этапе строятся детерминированные аппроксимации. Внутренняя аппроксимация строится с помощью методов, предложенных в [19], а внешняя аппроксимация — с помощью α-ядра вероятностной меры [1, 20]. На втором этапе полученные аппроксимации улучшаются с помощью выборочных оценок. Выводятся оценки достаточного для аппроксимации объема выборки. Приводится описание класса задач, для которых объем выборки может быть уменьшен. Рассматривается численный пример.

2. Постановка задачи

Пусть зависимость терминального состояния системы от начального состояния $y \in Y \subset \mathbb{R}^s$ и от реализации $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^m$ случайного вектора X описывается функцией $z\colon Y \times \mathcal{X} \to Z$. Считается, что данная зависимость известна. Поиск функции z не является предметом статьи. Конечно, ее вид существенно зависит от того, какого класса изучаемая система. Будем считать, что множества Y, Z и $\mathcal{X}$ замкнуты. Данное предположение не ограничивает общности, поскольку можно от исходных множеств перейти к их замыканиями. Случайный вектор X определен на вероятностном пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{L}(\mathcal{X}), \mathbf{P}_0)$, где $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ — лебегово пополнение борелевской σ-алгебры подмножеств $\mathcal{X}$. Будем считать, что для всех $x \in \mathcal{X}$ выполнено равенство $X(x) = x$, т.е. пространство элементарных событий отождествляется с пространством реализаций случайного вектора X. Предполагается, что функция $x \mapsto z(y, x)$ является измеримой при всех $y \in Y$.

Пусть борелевская функция $\tilde{\Phi}\colon Z \to \mathbb{R}$ описывает потери, возникающие при известном терминальном состоянии системы. Определим функцию потерь $\Phi\colon Y \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ в терминальный момент времени:

$$\Phi(y, x) \triangleq \tilde{\Phi}(z(y, x)).$$

Введем функцию вероятности

$$P_\varphi(y) \triangleq \mathbf{P}_0\{\Phi(y, X) \leqslant \varphi\},$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$ — заданный максимально допустимый уровень потерь.

Рассматривается задача построения доверительного множества поглощения, определяемого по правилу

$$\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \triangleq \{y \in Y \mid P_\varphi(y) \geqslant \alpha\},$$

где $\alpha \in (0, 1)$ — заданное значение вероятности непревышения максимально допустимого уровня потерь. Из приведенного определения следует, что доверительное множество поглощения можно рассматривать как множество уровня функции вероятности.

3. Построение внешней и внутренней аппроксимации доверительного множества поглощения

Определим функцию квантили

$$\varphi_\alpha(y) \triangleq \min\{\varphi \in \mathbb{R} \mid P_\varphi(y) \geqslant \alpha\}.$$

Приведем утверждение, известное как лемма Розенблатта.

Лемма 1 [1]. *Пусть $\alpha \in (0, 1)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, функция $x \mapsto \Phi(y, x)$ измерима для всех $y \in Y$. Тогда*

$$\{y \in Y \mid P_\varphi(y) \geqslant \alpha\} = \{y \in Y \mid \varphi_\alpha(y) \leqslant \varphi\}.$$

Согласно приведенной лемме Розенблатта доверительное множество поглощения можно определить с помощью функции квантили:

$$\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} = \{y \in Y \mid \varphi_\alpha(y) \leqslant \varphi\}. \tag{1}$$

Для построения внешней аппроксимации доверительного множества поглощения будем использовать понятие α-ядра вероятностной меры.

Определение 1 [1]. *Множество*

$$K_\alpha = \bigcap_{\|c\|=1} \left\{x \mid c^\top x \leqslant b_\alpha(c)\right\},$$

где $b_\alpha(c)$ — α-квантиль случайной величины $c^\top X$, называется α-ядром вероятностной меры, порожденной распределением случайного вектора X.

Иными словами, α-ядро является пересечением замкнутых полупространств вероятностной меры не менее α.

Введем обозначения:

$$\psi(S, y) \triangleq \sup_{x \in S} \Phi(y, x),$$
$$\mathcal{Y}_\varphi(S) \triangleq \{y \in Y \mid \psi(S, y) \leqslant \varphi\},$$

где $S \subset \mathcal{X}$ — некоторое множество реализаций случайного вектора X.

Сформулируем утверждение о внешней аппроксимации доверительного множество поглощения.

Лемма 2. Пусть функция $x \mapsto \Phi(y, x)$ квазивыпукла и полунепрерывна снизу при всех значениях $y \in Y$. Тогда для любого множества $\varnothing \neq \underline{K}_\alpha \subset K_\alpha$

$$\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \subset \mathcal{Y}_\varphi(K_\alpha) \subset \mathcal{Y}_\varphi(\underline{K}_\alpha). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $y \in \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$. Тогда из (1) следует, что

$$\varphi_\alpha(y) \leqslant \varphi. \tag{3}$$

Как доказано в [1, лемма 3.15], для всех $y \in Y$ справедлива оценка

$$\psi(K_\alpha, y) \leqslant \varphi_\alpha(y), \tag{4}$$

если выполнены условия сформулированной леммы 2. Из полученных неравенств (3) и (4) следует, что

$$\psi(K_\alpha, y) \leqslant \varphi,$$

а значит, $y \in Y_\varphi(K_\alpha)$. Таким образом, выполнено включение $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \subset \mathcal{Y}_\varphi(K_\alpha)$.

Проверим включение $\mathcal{Y}_\varphi(K_\alpha) \subset \mathcal{Y}_\varphi(\underline{K}_\alpha)$. Пусть $y \in \mathcal{Y}_\varphi(K_\alpha)$. Это значит, что $\psi(K_\alpha, y) \leqslant \varphi$. По построению $\psi(\underline{K}_\alpha, y) \leqslant \psi(K_\alpha, y)$. Поэтому $\psi(\underline{K}_\alpha, y) \leqslant \varphi$. Таким образом, $y \in \mathcal{Y}_\varphi(\underline{K}_\alpha)$. Лемма 2 доказана.

В [21] доказано, что $K_\alpha \neq \varnothing$ при $\alpha \in \left(\frac{m}{m+1}, 1\right)$. Лемма 2 предлагает способ построения внешней аппроксимации в том случае, когда возможно построить хотя бы внутреннюю аппроксимацию α-ядра вероятностной меры. Для построения внутренней аппроксимации α-ядра достаточно найти в нем хотя бы одну точку. Если удается найти несколько точек, принадлежащих α-ядру, то в силу его выпуклости выпуклая комбинация данных точек также является его внутренней аппроксимацией. Если α-ядро данной вероятностной меры пусто, то в качестве внешней аппроксимации доверительного множества поглощения можно взять тривиальную аппроксимацию в виде множества Y.

Перейдем к построению внутренней аппроксимации доверительного множества поглощения. Пусть S — некоторое доверительное множество с вероятностной мерой не менее α, т.е. $S \in \mathcal{F}_\alpha$, где $\mathcal{F}_\alpha$ — семейство всех доверительных множеств с мерой не менее α. В [1, теорема 3.9] доказано, что для всех $y \in Y$ и $S \in \mathcal{F}_\alpha$ выполнено неравенство

$$\psi(S, y) \geqslant \varphi_\alpha(y).$$

Поэтому при выполнении неравенства

$$\psi(S, y) \leqslant \varphi$$

справедливо, что

$$\varphi_\alpha(y) \leqslant \varphi.$$

Из полученного неравенства следует, что

$$\mathcal{Y}_\varphi(S) \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}.$$

Дальнейшие способы улучшения внутренней аппроксимации доверительного множества поглощения приводятся в [19]. Предлагается использовать параметризованное семейство множеств S_t, $t \in T$, таких что $\mathbf{P}_0(S_t) \geqslant \alpha$, например семейство прямоугольников, повернутых относительно начала координат. В этом случае внутренняя аппроксимация доверительного множества поглощения принимает вид

$$\bigcup_{t \in T} \mathcal{Y}_\varphi(S_t) \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}.$$

4. Улучшение аппроксимации доверительного множества поглощения с помощью выборочных методов

Пусть построены (например, с помощью методов, описанных в разделе 3) внутренняя и внешняя аппроксимации доверительного множества поглощения:

$$\underline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \subset \overline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha}.$$

Чтобы выяснить, какие из точек множества $\overline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha} \setminus \underline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha}$ содержатся в доверительном множестве поглощения, построим выборочную оценку функции вероятности.

Пусть задана последовательность независимых случайных векторов $\{X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, распределения которых совпадают с распределением случайного вектора X. Будем считать, что последовательность случайных векторов $\{X_n\}$ задана на вероятностном пространстве $(\mathcal{X}^\infty, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Построим оценку функции вероятности как частоту события $\{\Phi(y, X) \leqslant \varphi\}$:

$$P_\varphi^{(n)}(y) \triangleq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_{(-\infty,\varphi]}(\Phi(y, X_k)),$$

где

$$\chi_A(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \in A, \\ 0, & \text{если } a \notin A. \end{cases}$$

Выборочная аппроксимация доверительного множества поглощения имеет вид

$$\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}^{(n)} \triangleq \left\{ y \in \overline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha} \setminus \underline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha} \mid P_\varphi^{(n)}(y) \geqslant \alpha \right\} \cup \underline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha}.$$

Множество $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}^{(n)}$ является случайным. Этот объект следует рассматривать как функцию, которая каждой реализации выборки ставит в соответствие некоторое числовое множество.

В общем случае множество $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}^{(n)}$ не является ни внутренней, ни внешней аппроксимацией множества $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$. Однако, как будет показано далее, с высокой вероятностью множество $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)}$, где $\varepsilon > 0$, целиком содержится в множестве $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$, а множество $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha-\varepsilon}^{(n)}$ является его внешней аппроксимацией. Пусть $\tilde{Y}$ — конечное подмножество $\overline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha} \setminus \underline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha}$, состоящее из $|\tilde{Y}|$ точек. Количество элементов в данном множестве связано с требуемой точностью построения доверительного множества поглощения и должно обеспечивать достаточную мелкость разбиения множества Y. Выясним, при каком объеме выборки n можно с вероятностью $\beta \in (0,1)$ гарантировать включения $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$ и $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha-\varepsilon}^{(n)}$. Данные включения гарантируют, что все точки из множества $\tilde{Y}$, в которых значение выборочной оценки вероятности не менее $\alpha+\varepsilon$, содержатся в доверительном множестве поглощения, а во всех точках $\tilde{Y}$ из доверительного множества поглощения значение выборочной оценки вероятности не менее $\alpha - \varepsilon$. Второе условие эквивалентно тому, что все точки из множества $\tilde{Y}$, в которых значение выборочной оценки вероятности менее $\alpha - \varepsilon$, содержатся в дополнении доверительного множества поглощения.

Т е о р е м а 1. *Пусть $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$, $\tilde{Y}$ — конечное подмножество $\overline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha} \setminus \underline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha}$. Тогда при*

$$n \geqslant \frac{\ln|\tilde{Y}| - \ln(1-\beta)}{2\varepsilon^2} \tag{5}$$

выполнено неравенство

$$\mathbf{P}\left(\left\{ \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \right\} \cap \left\{ \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha-\varepsilon}^{(n)} \right\} \right) \geqslant \beta. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. События, состоящие в том, что $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$ и $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha-\varepsilon}^{(n)}$, можно представить в виде

$$\left\{ \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \right\} = \bigcup_{y \in \tilde{Y} \setminus \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \left\{ P_\varphi^{(n)}(y) \geqslant \alpha + \varepsilon \right\},$$

$$\left\{ \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha-\varepsilon}^{(n)} \right\} = \bigcup_{y \in \tilde{Y} \cap \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \left\{ P_\varphi^{(n)}(y) < \alpha - \varepsilon \right\},$$

который гарантирует измеримость события, рассматриваемого в неравенстве (6).

Случайная величина $nP^{(n)}_{\varphi}(y)$ определяет число успехов в серии из n опытов с вероятностью успеха $P_{\varphi}(y)$, а значит, распределена по биномиальному закону. Известно из [22], что для биномиально распределенной случайной величины выполнены неравенства

$$\mathbf{P}\left\{P^{(n)}_{\varphi}(y) - P_{\varphi}(y) \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant e^{-2n\varepsilon^2}, \tag{7}$$

$$\mathbf{P}\left\{P^{(n)}_{\varphi}(y) - P_{\varphi}(y) \leqslant -\varepsilon\right\} \leqslant e^{-2n\varepsilon^2}. \tag{8}$$

Из неравенства (7) следует, что

$$\begin{gathered}
\mathbf{P}\left\{\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\} = \mathbf{P}\left(\bigcup_{y \in \tilde{Y} \setminus \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \left\{P^{(n)}_{\varphi}(y) \geqslant \alpha + \varepsilon\right\}\right) \leqslant \\
\leqslant |\tilde{Y} \setminus \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}| \max_{y \in \tilde{Y} \setminus \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \mathbf{P}\left\{P^{(n)}_{\varphi}(y) \geqslant \alpha + \varepsilon\right\} \leqslant \\
\leqslant |\tilde{Y} \setminus \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}| \max_{y \in \tilde{Y} \setminus \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \mathbf{P}\left\{P^{(n)}_{\varphi}(y) \geqslant P_{\varphi}(y) + \varepsilon\right\} \leqslant |\tilde{Y} \setminus \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}| e^{-2n\varepsilon^2}.
\end{gathered} \tag{9}$$

Из неравенства (8) следует, что

$$\begin{gathered}
\mathbf{P}\left\{\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha-\varepsilon}\right\} = \mathbf{P}\left(\bigcup_{y \in \tilde{Y} \cap \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \left\{P^{(n)}_{\varphi}(y) < \alpha - \varepsilon\right\}\right) \leqslant \\
\leqslant |\tilde{Y} \cap \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}| \max_{y \in \tilde{Y} \cap \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \mathbf{P}\left\{P^{(n)}_{\varphi}(y) \leqslant \alpha - \varepsilon\right\} \leqslant \\
\leqslant |\tilde{Y} \cap \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}| \max_{y \in \tilde{Y} \cap \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \mathbf{P}\left\{P^{(n)}_{\varphi}(y) \leqslant P_{\varphi}(y) - \varepsilon\right\} \leqslant |\tilde{Y} \cap \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}| e^{-2n\varepsilon^2}.
\end{gathered} \tag{10}$$

Складывая неравенства (9) и (10), получаем

$$\begin{gathered}
\mathbf{P}\left(\left\{\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\} \cup \left\{\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}\right\}\right) \leqslant \\
\leqslant \mathbf{P}\left\{\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\} + \mathbf{P}\left\{\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}\right\} \leqslant \\
\leqslant |\tilde{Y} \setminus \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}| e^{-2n\varepsilon^2} + |\tilde{Y} \cap \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}| e^{-2n\varepsilon^2} = |\tilde{Y}| e^{-2n\varepsilon^2}.
\end{gathered}$$

Чтобы обеспечить выполнение неравенства (6), эквивалентного неравенству

$$1 - \mathbf{P}\left(\left\{\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\} \cup \left\{\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha-\varepsilon}\right\}\right) \geqslant \beta,$$

достаточно выполнения условия

$$1-|\tilde{Y}|e^{-2n\varepsilon^2} \geqslant \beta. \tag{11}$$

Выражая из полученного неравенства (11) n, получаем неравенство (5). Теорема 1 доказана.

В общем случае сделать заключение о том, принадлежат ли точки, не входящие в конечное множество $\tilde{Y}$, доверительному множеству поглощения, не представляется возможным. Однако в том случае, когда функция вероятности является квазивогнутой, можно построить выпуклую внутреннюю аппроксимацию доверительного множества $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$.

Следствие. Пусть множество Y выпукло, а функция вероятности $y \mapsto P_\varphi(y)$ квазивогнута. Тогда в условиях теоремы 1 при выполнении неравенства (5) *справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\left(\left\{\mathrm{Conv}\left(\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}\cap\tilde{Y}\right)\subset\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\}\cap\left\{\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\cap\tilde{Y}\subset\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha-\varepsilon}\right\}\right)\geqslant\beta. \tag{12}$$

Доказательство. Поскольку функция $y \mapsto P_\varphi(y)$ является квазивогнутой, все ее верхние множества уровня вида

$$\{y\in Y \mid P_\varphi(y)\geqslant\delta\},$$

где $\delta\in[0,1]$, к которым относится и множество $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$, выпуклы. Поэтому выпуклая оболочка любых элементов множества $\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}$ также содержится в нем, а значит,

$$\left\{\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}\cap\tilde{Y}\subset\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\}\subset\left\{\mathrm{Conv}\left(\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}\cap\tilde{Y}\right)\subset\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\}. \tag{13}$$

Из того что выпуклая оболочка элементов множества содержит эти элементы и из (13) следует равенство

$$\left\{\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}\cap\tilde{Y}\subset\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\}=\left\{\mathrm{Conv}\left(\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}\cap\tilde{Y}\right)\subset\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\},$$

обеспечивающее измеримость события, вероятность которого рассматривается в (12). Из теоремы 1 следует, что при выполнении неравенства (5)

$$\mathbf{P}\left(\left\{\mathrm{Conv}\left(\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}\cap\tilde{Y}\right)\subset\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\}\cap\left\{\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\cap\tilde{Y}\subset\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha-\varepsilon}\right\}\right)=$$
$$=\mathbf{P}\left(\left\{\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}\cap\tilde{Y}\subset\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\}\cap\left\{\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\cap\tilde{Y}\subset\mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha-\varepsilon}\right\}\right)\geqslant\beta.$$

Следствие доказано.

5. Уменьшение объема выборки с помощью учета ядра вероятностной меры

Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда в качестве внешней аппроксимации доверительного множества поглощения можно взять множество

$$\overline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha}=\mathcal{Y}_\varphi(\underline{K}_\alpha),$$

где $\underline{K}_\alpha \subset K_\alpha$. В силу определения множества $\mathcal{Y}_\varphi(\underline{K}_\alpha)$ для всех $x \in \underline{K}_\alpha$ выполнено неравенство $\Phi(y,x) \leqslant \varphi$, а значит,

$$\underline{K}_\alpha \subset \{\Phi(y,X) \leqslant \varphi\}.$$

Поэтому

$$P_\varphi(y) = \gamma + (1-\gamma)\mathbf{P}_0\left\{\Phi(y,X) \leqslant \varphi \mid X \notin \underline{K}_\alpha\right\},$$

где $\gamma = \mathbf{P}_0(\underline{K}_\alpha)$. Таким образом, для оценивания функции вероятности $P_\varphi(y)$ можно использовать выборку, закон распределения которой совпадает с условным законом распределения случайного вектора X относительно события $\{X \notin \underline{K}_\alpha\}$. Последовательность независимых случайных векторов, распределенных по указанному закону, обозначим через $\{\tilde{X}_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Используя данную выборку, можно построить оценку функции вероятности

$$\hat{P}_\varphi^{(n)}(y) \triangleq \gamma + \frac{1-\gamma}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_{(-\infty,\varphi]}\left(\Phi(y,\tilde{X}_k)\right)$$

и оценку доверительного множества поглощения

$$\hat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha}^{(n)} \triangleq \left\{y \in \overline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha} \setminus \underline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha} \mid \hat{P}_\varphi^{(n)}(y) \geqslant \alpha\right\} \cup \underline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha}.$$

Сформулируем теорему 2, аналогичную теореме 1, для уточненной оценки доверительного множества поглощения.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия леммы 2, $\beta \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$, $\tilde{Y}$ — конечное подмножество $\overline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha} \setminus \underline{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha}$. Тогда при*

$$n \geqslant \frac{\ln|\tilde{Y}| - \ln(1-\beta)}{2\varepsilon^2}(1-\gamma)^2 \tag{14}$$

выполнено неравенство

$$\mathbf{P}\left(\left\{\hat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\} \cap \left\{\mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \subset \hat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha-\varepsilon}^{(n)}\right\}\right) \geqslant \beta. \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначения

$$P_{\varphi,\underline{K}_\alpha}(y) \triangleq \mathbf{P}_0\left\{\Phi(y,X) \leqslant \varphi \mid X \notin \underline{K}_\alpha\right\},$$

$$\tilde{P}_\varphi^{(n)}(y) \triangleq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_{(-\infty,\varphi]}\left(\Phi(y,\tilde{X}_k)\right).$$

Справедливы включения

$$\left\{\hat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}\right\} = \bigcup_{y \in \tilde{Y} \setminus \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \left\{\hat{P}_\varphi^{(n)}(y) \geqslant \alpha + \varepsilon\right\} =$$

$$= \bigcup_{y \in \tilde{Y} \setminus \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \left\{ \gamma + (1-\gamma)\tilde{P}_{\varphi}^{(n)}(y) \geqslant \alpha + \varepsilon \right\} \subset$$

$$\subset \bigcup_{y \in \tilde{Y} \setminus \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \left\{ \gamma + (1-\gamma)\tilde{P}_{\varphi}^{(n)}(y) \geqslant \gamma + (1-\gamma)P_{\varphi,\underline{K}_\alpha}(y) + \varepsilon \right\} =$$

$$= \bigcup_{y \in \tilde{Y} \setminus \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \left\{ \tilde{P}_{\varphi}^{(n)}(y) \geqslant P_{\varphi,\underline{K}_\alpha}(y) + \frac{\varepsilon}{1-\gamma} \right\}.$$

Аналогично получаем, что

$$\left\{ \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \not\subset \hat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha-\varepsilon}^{(n)} \right\} = \bigcup_{y \in \tilde{Y} \cap \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \left\{ P_{\varphi}^{(n)}(y) < \alpha - \varepsilon \right\} \subset$$

$$\subset \bigcup_{y \in \tilde{Y} \cap \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}} \left\{ \tilde{P}_{\varphi}^{(n)}(y) \leqslant P_{\varphi,\underline{K}_\alpha}(y) - \frac{\varepsilon}{1-\gamma} \right\}.$$

Учитывая, что случайная величина $n\hat{P}_{\varphi}^{(n)}(y)$ распределена по биномиальному закону, для которой выполнены неравенства, аналогичные (7) и (8), из полученных включений следует, что

$$\mathbf{P}\left(\left\{ \hat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \right\} \cup \left\{ \hat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)} \right\} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left\{ \hat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \right\} + \mathbf{P}\left\{ \hat{\mathcal{Y}}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \not\subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha+\varepsilon}^{(n)} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant |\tilde{Y} \setminus \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}| e^{-\frac{2n\varepsilon^2}{(1-\gamma)^2}} + |\tilde{Y} \cap \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha}| e^{-\frac{2n\varepsilon^2}{(1-\gamma)^2}} = |\tilde{Y}| e^{-\frac{2n\varepsilon^2}{(1-\gamma)^2}}.$$

Решая неравенство

$$1 - |\tilde{Y}| e^{-\frac{2n\varepsilon^2}{(1-\gamma)^2}} \geqslant \beta,$$

гарантирующее выполнение утверждения теоремы 2, получаем значения n, удовлетворяющие неравенству (14).

Теорема 2 доказана.

6. Уменьшение объема выборки для звездчатой функции потерь

Дальнейшее улучшение оценки объема выборки проведем для случая, когда функция потерь $(y, x) \mapsto \Phi(y, x)$ является звездчатой по y при всех x. Таковыми, например, являются системы с линейной по y функцией потерь $c^\top(x)y$, если $y \geqslant 0$, $c(x) \geqslant 0$.

О п р е д е л е н и е 2. Функция f с действительными значениями, определенная на выпуклом множестве Y, таком что $0 \in Y$, называется звездчатой, если функция

$$\mu \mapsto f(\mu y)$$

является неубывающей по $\mu \in [0, 1]$ для всех y, являющихся внутренними точками множества Y.

Будем считать, что $Y \subset \mathbb{R}^2$ — компактное множество. Пусть

$$D = \max_{y \in Y} \|y\|.$$

Построим конечное множество $\tilde{Y}$ следующим образом:

$$\tilde{Y} = \left\{ y_{ij} \triangleq (r_i \cos\theta_j, r_i \sin\theta_j) \mid r_i = \frac{iD}{M},\ \theta_j = \frac{2(j-1)\pi}{N},\ i = \overline{1, M},\ j = \overline{1, N} \right\} \cap Y, \tag{16}$$

где N, M — выбранные натуральные константы.

Из леммы 2 следует, что вероятность

$$\mathbf{P}\left(\left\{ \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \right\} \cap \left\{ \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha-\varepsilon} \right\} \right) \geqslant \beta$$

при

$$n \geqslant \frac{\ln(MN) - \ln(1-\beta)}{2\varepsilon^2}.$$

Однако данную оценку можно существенно улучшить.

Т е о р е м а 3. Пусть $\beta \in (0, 1)$, $\varepsilon > 0$, $\tilde{Y}$ – множество, определенное в (16). Тогда при

$$n \geqslant \frac{\ln(2N) - \ln(1-\beta)}{2\varepsilon^2} \tag{17}$$

выполнено неравенство

$$\mathbf{P}\left(\left\{ \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \right\} \cap \left\{ \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha-\varepsilon} \right\} \right) \geqslant \beta. \tag{18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из того что функция потерь является звездчатой, следует, что

$$P_\varphi(y_{ij}) \geqslant P_\varphi(y_{i+1,j}), \tag{19}$$

$$P^{(n)}_\varphi(y_{ij}) \geqslant P^{(n)}_\varphi(y_{i+1,j}) \tag{20}$$

для всех $i = \overline{1, M-1}$ и при всех реализациях выборки. Пусть

$$i_1(j) \triangleq \max\{i \mid P_\varphi(y_{ij}) < \varphi - \varepsilon\},$$
$$i_2(j) \triangleq \min\{i \mid P_\varphi(y_{ij}) \geqslant \varphi + \varepsilon\}.$$

Если указанный минимум или максимум не достигается при некотором j, положим по определению $i_1(j) = 0$ или $i_2(j) = 0$. Пусть

$$\bar{Y} \triangleq \left\{ y_{i_1(j),j} \mid j = \overline{1, N}, i_1(j) \neq 0 \right\} \cup \left\{ y_{i_2(j),j} \mid j = \overline{1, N}, i_2(j) \neq 0 \right\}.$$

Заметим, что $|\bar{Y}| \leqslant 2N$.

В силу отмеченных свойств монотонности (19) и (20) справедливо равенство событий

$$\begin{aligned} &\left\{ \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \right\} \cap \left\{ \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \subset \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha-\varepsilon} \right\} = \\ &= \left\{ \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \bar{Y} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \right\} \cap \left\{ \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \bar{Y} \subset \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha-\varepsilon} \right\}. \end{aligned} \tag{21}$$

Применяя теорему 1 для конечного множества $\bar{Y}$, получаем, что при

$$n \geqslant \frac{\ln(2N) - \ln(1-\beta)}{2\varepsilon^2}$$

выполнено неравенство

$$\mathbf{P}\left(\left\{ \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \bar{Y} \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \right\} \cap \left\{ \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \bar{Y} \subset \mathcal{Y}^{(n)}_{\varphi,\alpha-\varepsilon} \right\} \right) \geqslant \beta. \tag{22}$$

Из равенства (21) и неравенства (22) следует утверждение теоремы 3.

Если дополнительно к условиям теоремы 3 выполнены условия теоремы 2, то при

$$n \geqslant \frac{\ln(2N) - \ln(1-\beta)}{2\varepsilon^2}(1-\gamma)^2$$

выполнено неравенство (15), а если при этом функция вероятности $y \mapsto P_\varphi(y)$ квазивыпукла, то более того

$$\mathbf{P}\left(\left\{ \mathrm{Conv}\left(\hat{\mathcal{Y}}^{(n)}_{\varphi,\alpha+\varepsilon} \cap \tilde{Y} \right) \subset \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \right\} \cap \left\{ \mathcal{Y}_{\varphi,\alpha} \cap \tilde{Y} \subset \hat{\mathcal{Y}}^{(n)}_{\varphi,\alpha-\varepsilon} \right\} \right) \geqslant \beta.$$

Для решения задачи построения доверительного множества поглощения в рассматриваемом случае может быть использован следующий алгоритм.

Алгоритм 1.

1. Сгенерировать

$$n = \left\lceil \frac{\ln|\tilde{Y}| - \ln(1-\beta)}{2\varepsilon^2}(1-\gamma)^2 \right\rceil$$

реализаций случайный величины, распределенной по условному закону распределения случайного вектора X относительно события $X \notin \underline{K}_\alpha$. ($\lceil z \rceil$ обозначает минимальное целое число не менее z.)

2. Присвоить $j := 1$.

3. Пока $j \leqslant N$:

а) найти с помощью метода дихотомии максимальный $\underline{r} \in \mathbb{R}$, такой что $P_\varphi^{(n)}((\underline{r}\cos(\theta_j), \underline{r}\sin(\theta_j))) \geqslant \alpha + \varepsilon$, и минимальный $\bar{r} \in \mathbb{R}$, такой что $P_\varphi^{(n)}((\bar{r}\cos(\theta_j), \bar{r}\sin(\theta_j))) < \alpha - \varepsilon$.

б) включить точки $(r\cos(\theta_j), r\sin(\theta_j))$ для $r \leqslant \underline{r}$ во внутреннюю аппроксимацию доверительного множества поглощения, а для $r \leqslant \bar{r}$ — во внешнюю аппроксимацию.

в) $j := j + 1$.

Замечание 1. Если построение ядра вероятностной меры K_α и даже его непустой внутренней аппроксимации $\underline{K}_\alpha$ является затруднительным, то можно считать, что $\underline{K}_\alpha = \varnothing$, $\gamma = 0$. В этом случае на шаге 1 алгоритма 1 вместо условного закона распределения рассматривается безусловный закон распределения случайного вектора X.

Замечание 2. Аналогичный алгоритм можно предложить и в пространствах большей размерности, но при этом придется отказаться от построения равномерной сетки.

7. Пример

Рассмотрим простейшую модель экономической системы производства и потребления. Предположим, что для производства продукции двух видов может быть закуплено сырье трех типов. Через $v \triangleq (v_1, v_2, v_3)^\top$ обозначим вектор, в котором v_i — объем закупаемого сырья i-го типа, $i \in \{1, 2, 3\}$. Цены на каждый из видов сырья образуют вектор $c \triangleq (c_1, c_2, c_3)^\top$. Технологию производства описывает матрица $B \triangleq (b_{ij})$, $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, в которой величина b_{ij} показывает количество i-го вида продукции, получаемого из единицы сырья j-го типа. Спрос на продукцию складывается из двух компонент. Первая компонента соответствует спросу, возникающему вследствие заранее подписанных договоров на поставку продукции, и поэтому является детерминированной. Для компоненты спроса введем обозначение

$$y = (y_1, y_2)^\top \in Y = \Big\{ y \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y_1 \leqslant \bar{y}_1,\ 0 \leqslant y_2 \leqslant \bar{y}_2 \Big\}.$$

Вторая компонента $X = (X_1, X_2)^\top$ случайна, ее реализации обозначены через $x = (x_1, x_2)^\top$. Случайность спроса связана с непредсказуемостью поведения потребителей продукции. Необходимо удовлетворить весь возникающий спрос. Тогда потери, связанные с функционированием системы, описываются функцией

$$\Phi(y, x) = \min_{v \in \mathbb{R}^3} \left\{ c^\top v \mid Bv \geqslant x + y,\ v \geqslant 0 \right\}.$$

Требуется определить, при каких значениях $y \in Y$ потери при функционировании системы не превысят величину φ с вероятностью α, т.е. построить доверительное множество поглощения.

Переходя к двойственной задаче, получаем, что

$$\Phi(y,x) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}^2} \left\{ (x+y)^\top \lambda \mid B^\top \lambda \leqslant c,\ \lambda \geqslant 0 \right\}.$$

Через λ^j, $j = \overline{1,J}$, обозначим вершины множества

$$\Lambda \triangleq \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^2 \mid B^\top \lambda \leqslant c,\ \lambda \geqslant 0 \right\}.$$

Тогда функцию потерь можно записать в виде

$$\Phi(y,x) = \max_{j=\overline{1,J}} \left\{ (x+y)^\top \lambda^j \right\}.$$

Заметим, что полученная функция является выпуклой по совокупности аргументов и звездчатой по y.

Решим задачу для следующих модельных данных:

$$c = (8;17;11)^\top, \quad \varphi = 100, \quad \bar{y}_1 = 20, \quad \bar{y}_2 = 20,$$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пусть компоненты случайного вектора X независимы и распределены по нормальному закону $X_1 \sim \mathcal{N}(5,1)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(6,4)$.

Множество Λ содержит пять вершин:

$$\lambda^1 = (0;0)^\top, \quad \lambda^2 = (0;5{,}5)^\top, \quad \lambda^3 = (1;5)^\top, \quad \lambda^4 = (7;1)^\top, \quad \lambda^5 = (8;0)^\top.$$

Для построения детерминированных аппроксимаций доверительного множества поглощения введем случайный вектор $\bar{X} \triangleq (\bar{X}_1, \bar{X}_2)^\top$, распределенный по стандартному нормальному закону. Реализации этого случайного вектора будем обозначать через $\bar{x} \triangleq (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Случайный вектор $\bar{X}$ свяжем с вектором X соотношениями

$$X_1 = 5 + \bar{X}_1, \quad X_2 = 6 + 2\bar{X}_2.$$

Тогда можно ввести функцию потерь

$$\bar{\Phi}(y,\bar{x}) \triangleq \Phi\left(y, (5+\bar{x}_1, 6+2\bar{x}_2)^\top \right),$$

значения которой совпадают с исходной функцией потерь. Для вероятностной меры, порожденной двумерным стандартным нормальным распределением, известно, что α-ядро является шаром радиуса, равного квантили стандартного нормального распределения уровня α, а доверительный шар имеет радиус, равный квадратному корню из квантили уровня α распределения $\chi^2(2)$.

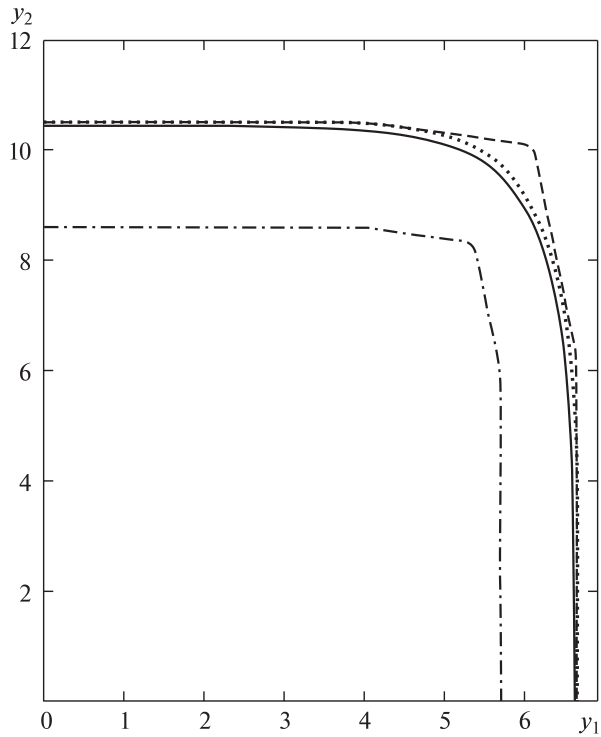


Рис. 1. Аппроксимации доверительного множества поглощения при $\alpha = 0{,}8$.

Вычисления были проведены для уровней $\alpha = 0{,}8$ и $\alpha = 0{,}9$. Их результаты представлены на рис. 1 и 2.

Штриховой линией обозначена граница внешней аппроксимации доверительного множества поглощения, полученной с помощью ядра вероятностной меры. Штрихпунктирной линией обозначена граница внутренней аппроксимации доверительного множества поглощения, полученной с помощью доверительного шара.

Статистическая аппроксимация строилась для уровня доверительной вероятности $\beta = 0{,}99$ при $\varepsilon = 0{,}01$. Для построения аппроксимаций доверительного множества поглощения использовался алгоритм 1 при $N = 400$, но в силу того что множество Y целиком содержится в первой координатной четверти, рассматривались значения $j = \overline{1, \tilde{N}}$, $\tilde{N} = 101$, что позволило уменьшить объем используемой выборки. Если не учитывать вероятностную меру α-ядра, то для аппроксимации задачи необходим объем выборки $n = 49568$. Если использовать условное распределение, то при $\alpha = 0{,}8$ требуется объем выборки $n = 24411$, а при $\alpha = 0{,}9$ ее объем можно уменьшить до $n = 9593$.

На рис. 1 и 2 сплошной линией изображена внутренняя статистическая аппроксимация доверительного множества поглощения, а отмеченные точки с вероятностью β являются внешними по отношению к доверительному множеству поглощения. Полученные внешняя и внутренняя аппроксимации близки друг к другу, что подтверждает эффективность разработанного ме-

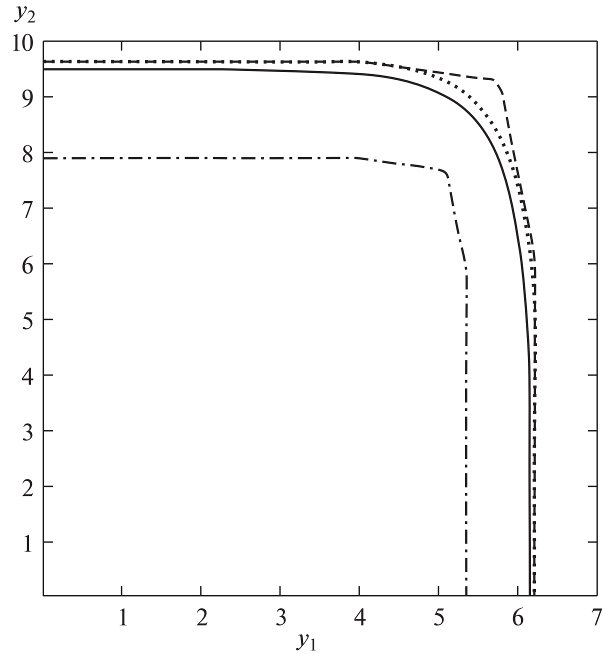


Рис. 2. Аппроксимации доверительного множества поглощения при $\alpha = 0{,}9$.

тода построения статистических аппроксимаций доверительного множества поглощения.

Заметим, что в сравнении с предложенным в статье методом решения задачи непосредственное статистическое оценивание значений функции вероятности в большом количестве точек из множества Y приводит к гораздо большему объему вычислений. Для получения аналогичных по точности результатов в каждой точке конечного подмножества $\tilde{Y}$ множества Y необходимо провести около 2300 вычислений. При $N = 100$, $M = 100$ это приводит к необходимости моделирования $23 \cdot 10^6$ реализаций случайных факторов.

8. Заключение

В статье разработан статистический подход к построению внутренней и внешней статистических аппроксимаций доверительного множества поглощения. Получены теоретические оценки достаточного объема выборки для построения аппроксимаций некоторого конечного множества начальных позиций системы. Отметим, что данный объем выборки одновременно гарантирует с заданной вероятностью то, что два построенных множества являются внутренней и внешней аппроксимациями заданного конечного подмножества истинного доверительного множества поглощения. Предложены условия, при которых можно построить внутреннюю аппроксимацию самого́ доверительного множества поглощения, а не его конечного подмножества. На численном примере показано, что указанные аппроксимации строятся при приемлемом объеме выборки. При этом обеспечивается близость внутренней и внешней аппроксимаций друг к другу. Конечно, для ряда задач достаточный объем выборки может быть уменьшен. Описание классов таких задач может являться предметом дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кибзун А.И., Кан Ю.С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
2. *Prékopa A.* Stochastic Programming. Dordrecht–Boston: Kluwer, 1995.
3. *Тамм Э.* О квазивыпуклости функций вероятности и квантили // Изв. АН ЭССР, физ.-мат. 1976. Т. 25. № 2. С. 141–144.
4. *Кан Ю.С., Кибзун А.И.* Свойства выпуклости функций вероятности и квантили в задачах оптимизации // АиТ. 1996. № 3. С. 82–102.

   Kan Yu.S., Kibzun A.I. Convexity Properties of Probability Functions and Quantiles in Optimization Problems // Autom. Remote Control. 1996. V. 57. No. 3. P. 368–383.
5. *Van Ackooij W.* Eventual Convexity of Chance Constrained Feasible Sets // Optimization (J. Math. Programm. Oper. Res.). 2015. V. 64. No. 5. P. 1263–1284.
6. *Prékopa A.* On Logarithmic Concave Measures and Functions // Acta Sci. Math. (Szeged). 1973. V. 34. P. 335–343.
7. *Borell C.* Convex Set Functions in d-Space // Period. Math. Hung. 1975. V. 6. No. 2. P. 111–136.
8. *Норкин В.И., Роенко Н.В.* α-вогнутые функции и меры и их приложения // Кибернетика и системный анализ. 1991. № 6. С. 77–88.

   Norkin V.I., Roenko N.V. α-Concave Functions and Measures and Their Applications // Cybern. Syst. Anal. 1991. V. 27. No. 6. P. 860–869.
9. *Lejeune M., Noyan N.* Mathematical Programming Approaches for Generating p-Efficient Points // Eur. J. Oper. Res. 2010. V. 207 P. 590–600.
10. *Dentcheva D., Prékopa A., Ruszczyński A.* On Convex Probabilistic Programming with Discrete Distributions // Nonlinear Anal.-Theor. 2001. V. 47. No. 3. P. 1997–2009.
11. *Van Ackooij W., Berge V, de Oliveira W., Sagastizábal C.* Probabilistic Optimization via Approximate p-Efficient Points and Bundle Methods // Comput. Oper. Res. 2017. V. 77. P. 177–193.
12. *Lejeune M.A., Prékopa A.* Relaxations for Probabilistically Constrained Stochastic Programming Problems: Review and Extensions // Ann. Oper. Res. 2018 (online first). https://doi.org/10.1007/s10479-018-2934-8.
13. *Вапник В.Н., Червоненкис А.Я.* Теория распознавания образов (статистические проблемы обучения). М.: Наука, 1974.
14. *Вапник В.Н., Червоненкис А.Я.* О равномерной сходимости частот появления событий к их вероятностям // Теория вероятн. и ее примен. 1971. Т. 16. № 2. С. 264–279.
15. *Shapiro A.* Monte Carlo Sampling Methods. / Ruszczyński A., Shapiro A. (eds.) Handbooks in OR Handbooks in Operations Research and Management Science & MS. V. 10. P. 353–425. North-Holland, Dordrecht, The Netherlands, 2003.
16. *Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A.* Lectures on Stochastic Programming. Modeling and Theory. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2014.

17. *Kleywegt A.J., Shapiro A., Homem-De-Mello T.* The Sample Average Approximation Method for Stochastic Discrete Optimization // SIAM J. Optim. 2001. V. 12. No. 2. P. 479–502.

18. *Luedtke J. Ahmed S.* A Sample Approximation Approach for Optimization with Probabilistic Constraints // SIAM J. Optim. 2008. V. 19. No. 2. P. 674–699.

19. *Кибзун А.И., Иванов С.В., Степанова А.С.* Построение доверительного множества поглощения в задачах анализа статических стохастических систем // АиТ. 2020. № 4. С. 21–36.

    Kibzun A.I., Ivanov S.V., Stepanova A.S. Construction of Confidence Absorbing Set for Analysis of Static Stochastic Systems // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 4. P. 589–601.

20. *Васильева С.Н., Кан Ю.С.* Аппроксимация вероятностных ограничений в задачах стохастического программирования с использованием ядра вероятностной меры // АиТ. 2019. № 11. С. 93–107.

    Vasil'eva S.N., Kan Yu.S. Approximation of Probabilistic Constraints in Stochastic Programming Problems with a Probability Measure Kernel // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 11. P. 2005–2016.

21. *Васильева С.Н., Кан Ю.С.* Метод линеаризации для решения задачи квантильной оптимизации с функцией потерь, зависящей от вектора малых случайных параметров // АиТ. 2017. № 7. С. 95–109.

    Vasil'eva S.N., Kan Yu.S. Linearization Method for Solving Quantile Optimization Problems with Loss Function Depending on a Vector of Small Random Parameters // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 7. P. 1251–1263.

22. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: МЦНМО, 2017.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 18.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020

Автоматика и телемеханика, № 12, 2020

Линейные системы

© 2020 г. **ДАТ ВО КУОК** (cuoi.di.em89@gmail.com),
А.А. БОБЦОВ, д-р техн. наук (bobtsov@mail.ru)
(Университет ИТМО, Санкт-Петербург)

АДАПТИВНЫЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С ПАРАМЕТРАМИ, ЗАДАННЫМИ НЕ ТОЧНО[1]

Рассматривается задача синтеза адаптивного наблюдателя переменных состояния для линейных нестационарных систем. Допускается, что часть параметров нестационарного объекта могут быть неизвестными числами, умноженными на известные функции времени. Предлагаемый подход базируется на идентификационных методах адаптации. Другими словами, основная идея заключается в преобразовании математической модели в виде линейного нестационарного дифференциального уравнения к статической линейной регрессионной модели, содержащей неизвестные параметры. При этом в качестве неизвестных параметров упомянутой регрессионной модели, выступают как неизвестные параметры объекта, так и начальные условия переменных состояния. Далее, с использованием стандартных градиентных методов или других подходов параметрической идентификации осуществляется оценивание неизвестных параметров регрессионной модели и строится наблюдатель. Представленные результаты компьютерного моделирования иллюстрируют достижение заданной цели синтеза наблюдателя переменных состояния.

Ключевые слова: линейные нестационарные системы, наблюдатели переменных состояния, идентификация параметров.

DOI: 10.31857/S0005231020120065

1. Введение

В статье рассматривается новый метод синтеза наблюдателей переменных состояния для линейных нестационарных систем. Хотя данная проблематика не является новой, она до сих пор активно исследуется. Однако, с точки зрения авторов, на текущий момент универсальных подходов практически не существует. На сегодняшний день в современной научной литературе хорошо зарекомендовал себя универсальный подход, предусматривающий решение матричного дифференциального уравнения Риккати (см, например, [1, 2]). Суть этого подхода заключается в следующем. Рассматривается линейная нестационарная система вида

$$\dot{v} = M(t)\, v + U,$$
$$w = Lv,$$

[1] Данная статья выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, паспорт госзадания № 2019-0898.

для которой синтезируется наблюдатель

$$\dot{\hat{v}} = M\hat{v} + U - HL^{\mathrm{T}}(L\hat{v} - w),$$

где $v(t) \in \mathrm{R}^n$ – неизмеряемый вектор переменных состояния, $\hat{v}(t)$ – текущая оценка $v(t)$, $w(t)$ – измеряемый выход, матрица $H(t)$ является решением дифференциального матричного уравнения Риккати

$$\dot{H} = HM^{\mathrm{T}} + MH - HL^{\mathrm{T}}LH + Q.$$

Хорошо известно (см., например, [1, 2]), что данный наблюдатель обеспечивает асимптотическую сходимость, если система является равномерно наблюдаемой, т.е. существуют положительные числа T_0, δ_1 и δ_2, такие что для любого момента времени t выполняется неравенство

$$\delta_1 I \leq \int\limits_t^{t+T_0} X^{\mathrm{T}}(t,\tau)L^{\mathrm{T}}LX(t,\tau)d\tau \leq \delta_2 I,$$

где $X(\cdot,\cdot)$ – переходная матрица системы.

Однако реализация подобных наблюдателей имеет ряд недостатков. Прежде всего, это вычисление матрицы H, требующее решения онлайн n дифференциальных уравнений с квадратичными членами, которые могут быть чувствительны к численным методам. Еще одним существенным недостатком является необходимость точного знания всех параметров объекта управления. В данной статье предлагается новый подход, позволяющий синтезировать наблюдателей для систем, в которых некоторые параметры являются частично неизвестными.

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейный нестационарный полностью управляемый и наблюдаемый одноканальный объект управления вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)u(t), \tag{1}$$

$$y(t) = c^{\mathrm{T}}(t)x(t), \tag{2}$$

где $x(t) \in \mathrm{R}^n$ – неизмеряемый вектор переменных состояния; $A(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ – нестационарные матрицы с частично известными коэффициентами; $y(t)$ и $u(t)$ – соответственно измеряемые выход и сигнал управления.

Ставится задача синтеза наблюдателя переменных состояния

$$\hat{x}\,(t) = f(y,u), \tag{3}$$

обеспечивающего для системы (1), (2) достижение целевого условия

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{x}(t) = 0, \tag{4}$$

где $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$.

Решение задачи синтеза наблюдателя (3) для полностью управляемого и наблюдаемого объекта (1), (2), обеспечивающего выполнение (4), будет обеспечиваться при выполнении следующих предположений.

Предположение 1. Матрица $A(t)$ имеет структуру

$$A(t) = A_0(t) + g(t)c^{\mathrm{T}}(t),$$

где $A_0(t)$ – нестационарная матрица с известными параметрами; $g(t)$ – вектор неизвестных параметров, элементы которого заданы в виде

$$g_i(t) = a_i s_i(t),$$

где a_i – неизвестное число, но $s_i(t)$ – известная функция.

Предположение 2. Векторы $b(t)$ и $c(t)$ имеют вид

$$b(t) = \beta b_0(t), \tag{5}$$

$$c(t) = \sigma c_0(t), \tag{6}$$

где $b_0(t)$ и $c_0(t)$ – известные функции; $\beta > 0$ и $\sigma > 0$ – неизвестные числа.

Замечание 1. Следует отметить, что структуры (5), (6) можно было бы обобщить до уровня

$$b_i(t) = \beta_i b_{0i}(t),$$
$$c_i(t) = \sigma_i c_{0i}(t),$$

где β_i, σ_i – неизвестные числа и $\beta_i b_{0i}(t)$, $c_{0i}(t)$ – известные функции. Однако в этом случае задача идентификации существенно усложняется из-за большого количества настраиваемых параметров, а содержательная идея подхода синтеза наблюдателя переменных состояния может исчезнуть за большим числом математических манипуляций.

3. Синтез адаптивного наблюдателя

Рассмотрим новый метод синтеза наблюдателя для объекта управления (1), (2). Для синтеза наблюдателя будем использовать идеи, опубликованные в [3, 4]. Рассмотрим уравнение (1) при структурных предположениях

$$A(t) = A_0(t) + g(t)c^{\mathrm{T}}(t),$$
$$b(t) = \beta b_0(t).$$

Тогда (1) примет вид

$$\dot{x} = \left(A_0 + gc^{\mathrm{T}}\right)x + \beta b_0 u = A_0 x + gy + \beta b_0(t)\,u. \tag{7}$$

Для системы (7) введем в рассмотрение новый вектор $\xi = col\{x, a, \beta\}$, где $a = col\{a_1, \ldots, a_n\}$ – вектор неизвестных постоянных параметров. Тогда (7) можно записать в виде

$$\dot{\xi} = F(t)\,\xi = \begin{bmatrix} A_0 & y\Omega & b_0 u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ a \\ \beta \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$y = r^{\mathrm{T}}\xi, \tag{9}$$

где матрица $\Omega = \mathrm{diag}\{s_1(t), \ldots, s_n(t)\}$ и $r^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} c^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Введем в рассмотрение новую переменную $z(t)$, являющуюся решением уравнения

$$\dot{z} = F\,(t)\,z. \tag{10}$$

Рассмотрим вектор ошибок

$$e\,(t) = z\,(t) - \xi\,(\mathrm{t})\,. \tag{11}$$

Дифференцируя (11), получаем

$$\dot{e}\,(t) = F\,(t)\,e\,(t)\,. \tag{12}$$

Сформируем фундаментальную матрицу решения уравнения (12)

$$\dot{\Phi}\,(t) = F\,(t)\,\Phi\,(t)\,,$$

где для простоты выберем $\Phi\,(0) = I$.

Хорошо известно (см, например, [5]), что

$$e\,(t) = \Phi\,(t)\,\theta,$$

где $\theta = z\,(0) - \xi\,(0)\,.$

Тогда из уравнения (11) следует

$$\xi\,(t) = z\,(t) - e\,(t) = z\,(t) - \Phi\,(t)\,\theta,$$

откуда легко видеть, что задача оценивания вектора $\xi\,(t)$ может быть сведена к идентификации вектора неизвестных параметров θ, т.е.

$$\hat{\xi}\,(t) = z\,(t) - \Phi\,(t)\,\hat{\theta}, \tag{13}$$

где $\hat{\theta}$ – оценка θ.

Для идентификации вектора неизвестных параметров θ воспользуемся выражением (9). Подставляя в (9) слагаемое $\xi\,(t) = z\,(t) - e\,(t)$, получаем

$$y\,(t) = r^{\mathrm{T}}\,(z\,(t) - e\,(t)) = r^{\mathrm{T}}z\,(t) - r^{\mathrm{T}}\Phi\,(t)\,\theta = \sigma\psi_1\,(t) - \sigma\psi_2^{\mathrm{T}}\,(t)\,\theta, \tag{14}$$

где $\psi_1 = \left[\begin{array}{ccc} c_0(t)^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \end{array}\right] z$ и $\psi_2 = \left[\begin{array}{ccc} c_0(t)^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \end{array}\right] \Phi$ – соответственно скаляр и вектор, полученные из уравнений

$$\sigma\psi_1 = r^{\mathrm{T}}z = \left[\begin{array}{ccc} \sigma c_0(t)^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \end{array}\right] z = \sigma \left[\begin{array}{ccc} c_0(t)^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \end{array}\right] z,$$
$$\sigma\psi_2^{\mathrm{T}} = r^{\mathrm{T}}\Phi = \sigma \left[\begin{array}{ccc} c_0(t)^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \end{array}\right] \Phi.$$

Из (14) получаем классическую регрессионную модель вида

$$y = \psi^{\mathrm{T}}\eta, \tag{15}$$

где $\psi = col\{\psi_1, -\psi_2\}$ – вектор известных функций и $\eta = col\{\sigma, \sigma\theta\}$ – вектор неизвестных постоянных параметров.

Для идентификации вектора неизвестных параметров η можно воспользоваться стандартными процедурами, например градиентным алгоритмом вида

$$\dot{\hat{\eta}} = -k\psi\psi^{\mathrm{T}}\hat{\eta} + k\psi y, \tag{16}$$

где $k > 0$ – коэффициент настройки.

Из $\eta = col\{\sigma, \sigma\theta\}$ следует, что для вычисления вектора θ необходимо воспользоваться уравнением

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\hat{\eta}_1} col(\hat{\eta}_2, \ldots, \hat{\eta}_{n+1}). \tag{17}$$

Из (17) следует, что для вычисления $\hat{\theta}$ требуется осуществлять деление на функцию $\hat{\eta}_1$, которая может пересекать ноль. Данная проблема не является тривиальной, но ее можно избежать, например используя алгоритм, опубликованный в [6]. Однако заметим, что если число σ известно, то данная проблема существенно упрощается.

Утверждение. Рассмотрим систему (8), (9)*, полученную путем расширения объекта* (1), (2)*. Пусть для оценивания вектора переменных состояния* $\xi(t)$ *используется уравнение* (13) *с настройкой вектора неизвестных параметров вида* (16), (17) *при предположении, что вектор* ψ *удовлетворяет условиям незатухающего возбуждения* (*см., подробнее,* [7–9])*. Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} \left| \hat{\xi}(t) - \xi(t) \right| = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим вектор

$$\tilde{\xi} = \hat{\xi} - \xi.$$

Поскольку

$$\xi(t) = z(t) - e(t) = z(t) - \Phi(t)\theta,$$
$$\hat{\xi}(t) = z(t) - \Phi(t)\hat{\theta},$$

то для $\tilde{\xi}$ имеем

$$\tilde{\xi} = \hat{\xi} - \xi = -\Phi\hat{\theta} + \Phi\theta = -\Phi\tilde{\theta},$$

где $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$.

Поскольку в рамках утверждения допускается, что вектор ψ удовлетворяет условиям незатухающего возбуждения, то гарантируется экспоненциальная сходимость $\hat{\eta}$ к $\eta = col\{\sigma, \sigma\theta\}$. Так как $\hat{\eta}$ сходится экспоненциально к η, то из уравнения (17) следует асимптотическая сходимость $\hat{\theta}$ к θ, откуда имеем

$$\lim_{t\to\infty} \left| \Phi\tilde{\theta} \right| = 0.$$

Из последнего выражения следует

$$\lim_{t\to\infty}\left|\hat{\xi}(t)-\xi(t)\right|=0,$$

что и требовалось доказать.

Замечание 2. Следует отметить, что выбор в качестве $\Phi(0)$ единичной матрицы не вносит никаких принципиальных изменений в алгоритм вычисления переменной $\xi(t)$ и, как следствие, вектора $x(t)$. Разница будет состоять в изменении уравнения

$$\theta = z(0)-\xi(0)$$

на аналогичное уравнение вида

$$\theta=\Phi^{-1}(0)(z(0)-\xi(0)),$$

что в свою очередь повлияет только на качество переходных процессов, но не на сходимость оценки $\hat{\xi}(t)$ к истинному значению $\xi(t)$.

Замечание 3. Хорошо известно, что в случае градиентного алгоритма настройки (16) вектор $\hat{\eta}$ экспоненциально сходится к η при условии незатухающего возбуждения. Более того, алгоритм (16) не дает возможности существенного ускорения процессов идентификации за счет выбора коэффициента настройки $k>0$. Поэтому для обеспечения высокого быстродействия оценивания параметров целесообразно воспользоваться другими подходами, например методом DREM (см., например, [7]).

4. Пример

Для иллюстрации работоспособности предлагаемой схемы синтеза наблюдателя, а также для наибольшей прозрачности предлагаемого подхода рассмотрим пример. Пусть система (1), (2) имеет вид

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & 1\\ 0 & \sin 2t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u, \tag{18}$$

$$y=5x_1, \tag{19}$$

где a_1 – неизвестный постоянный параметр.

Легко видеть, что с помощью представленных далее простых манипуляций система (18) может быть приведена к виду (8). Для этого рассмотрим новый вектор переменных состояния $\xi=[x_1\quad x_2\quad a_1]^{\mathrm{T}}$. Тогда легко видеть, что модель (18), (19) можно записать в виде

$$\dot{\xi}=F\xi+Gu,\quad y=r^{\mathrm{T}}\xi, \tag{20}$$

где

$$F(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0{,}2y\\ 0 & \sin 2t & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\quad r^{\mathrm{T}}=[5\quad 0\quad 0].$$

Далее рассмотрим динамическую систему, полностью эквивалентную (20),

$$\dot{z}\,(t) = F\,(t)\,z\,(t) + G\,(t)\,u\,(t)\,.$$

Сформируем матрицу $\Phi(t)$ с единичными начальными условиями

$$\dot{\Phi}\,(t) = F\,(t)\,\Phi\,(t)$$

и регрессионное уравнение для поиска вектора неизвестных параметров

$$y\,(t) = r^{\mathrm{T}}\,(t)\,z\,(t) - r^{\mathrm{T}}\,(t)\,\Phi\,(t)\,\theta. \tag{21}$$

Из уравнения (21) получаем

$$q = \omega^{\mathrm{T}}\theta, \tag{22}$$

где $q = r^{\mathrm{T}}\,(t)\,z\,(t) - y(t)$ и вектор $\omega^{\mathrm{T}} = r^{\mathrm{T}}\,(t)\,\Phi\,(t)$.

Для обеспечения быстродействия оценивания параметров и монотонности их переходных процессов воспользуемся методом DREM (см., например, [7]). Следуя [7], пропустим известные элементы регрессионной модели (22) через блоки запаздывания $[H\,(\cdot)]\,(t) = (\cdot)\,(t - \tau)$, где $\tau \in R_{+}$. Тогда для (22) имеем

$$q_{f_i} = \omega_{f_i}^{\mathrm{T}}\theta. \tag{23}$$

Сформулируем на основе исходной регрессионной модели (22) и новой отфильтрованной регрессионной модели (23) расширенную модель

$$q_e = A_e\theta, \tag{24}$$

где

$$q_e = \begin{bmatrix} q \\ q_{f_1} \\ \vdots \\ q_{f_{n-1}} \end{bmatrix}, \quad A_e = \begin{bmatrix} \omega^{\mathrm{T}} \\ \omega_{f_1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \omega_{f_{n-1}}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}.$$

Умножая (24) на алгебраическое дополнение A_e, получаем

$$Y = adj A_e q_e = \Delta\theta,$$

откуда имеем скалярную модель вида

$$Y_i = \Delta\theta_i,$$

где $\Delta = \det\{A_e\}$ – определитель матрицы A_e.

Оценку θ_i будем вычислять по формуле

$$d\hat{\theta}_i/dt = -k_i\Delta(\Delta\hat{\theta}_i - Y_i), \tag{25}$$

где k_i – положительное число, увеличивая которое можно добиваться ускорения процессов сходимости неизвестных параметров к истинным значениям.

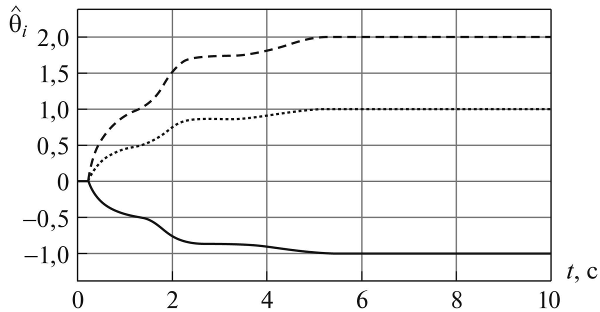


Рис. 1. Графики переходных процессов для $\hat{\theta}_i$ при $k_i = 10$ ($\hat{\theta}_1$ – сплошная линия; $\hat{\theta}_2$ – штриховая линия; $\hat{\theta}_3$ – точечная линия).

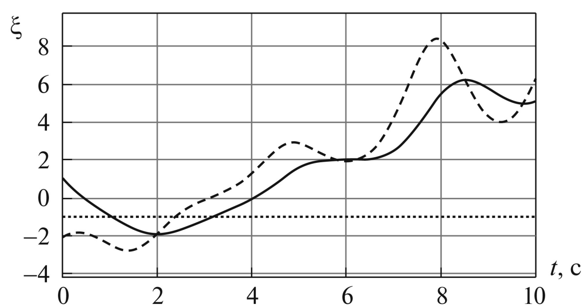


Рис. 2. Графики переменных вектора ξ при $k_i = 10$ (x_1 – сплошная линия; x_2 – штриховая линия; a_1 – точечная линия).

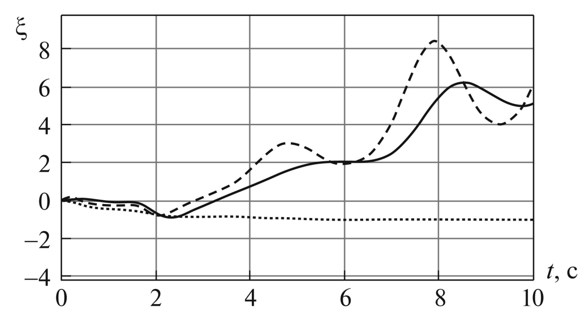


Рис. 3. Графики оценок переменных вектора $\widehat{\xi}$ при $k_i = 10$ ($\hat{x}_1$ – сплошная линия; $\hat{x}_2$ – штриховая линия; $\hat{a}_1$ – точечная линия).

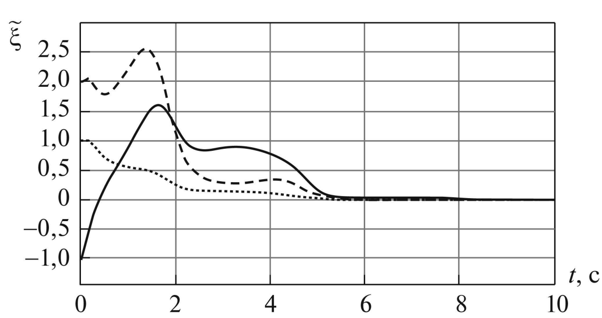


Рис. 4. Графики оценок сигналов $\tilde{\xi} = \widehat{\xi} - \xi$ при $k_i = 10$ ($\tilde{x}_1$ – сплошная линия; $\tilde{x}_2$ – штриховая линия; $\tilde{a}_1$ – точечная линия).

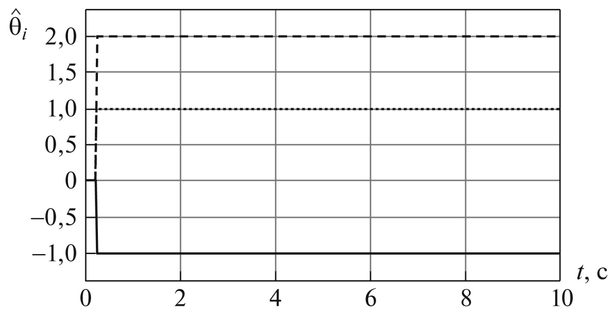


Рис. 5. Графики переходных процессов для $\hat{\theta}_i$ при $k_i = 1000$ ($\hat{\theta}_1$ – сплошная линия; $\hat{\theta}_2$ – штриховая линия; $\hat{\theta}_3$ – точечная линия).

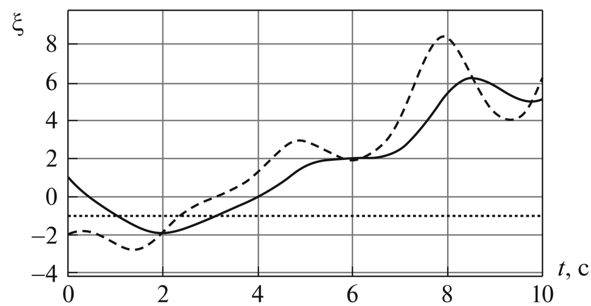


Рис. 6. Графики переменных вектора ξ при $k_i = 1000$ (x_1 – сплошная линия; x_2 – штриховая линия; a_1 – точечная линия).

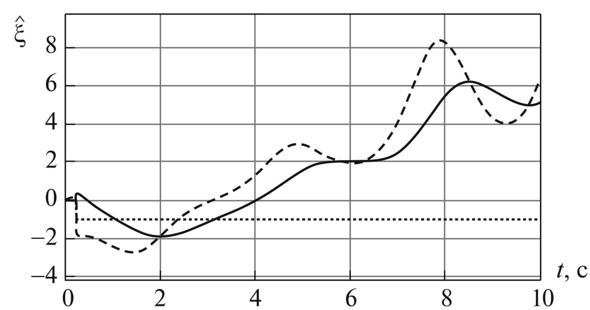


Рис. 7. Графики оценок переменных вектора $\hat{\xi}$ при $k_i = 1000$ ($\hat{x}_1$ – сплошная линия; $\hat{x}_2$ – штриховая линия; $\hat{a}_1$ – точечная линия).

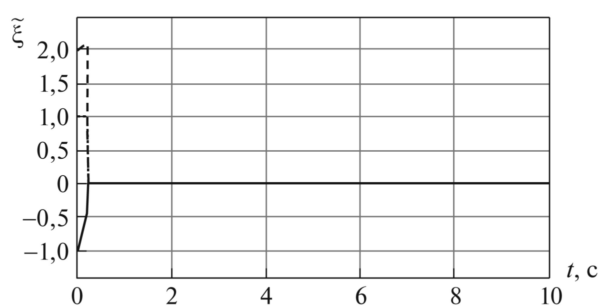


Рис. 8. Графики оценок сигналов $\tilde{\xi} = \hat{\xi} - \xi$ при $k_i = 1000$ ($\tilde{x}_1$ – сплошная линия; $\tilde{x}_2$ – штриховая линия; $\tilde{a}_1$ – точечная линия).

Для формирования оценок вектора ξ подставим полученные значения оцениваемых параметров в уравнение

$$\hat{\xi}(t) = z(t) - \Phi(t)\,\hat{\theta}. \tag{26}$$

Замечание 4. Легко показать, что для ошибки оценивания параметра $\tilde{\theta}_i = \hat{\theta}_i - \theta_i$ справедливо

$$\dot{\tilde{\theta}}_i = -k_i \Delta^2 \tilde{\theta}_i,$$

откуда легко видеть, что за счет увеличения числа k_i можно добиваться увеличения скорости сходимости $\tilde{\theta}_i$ к нулю.

При моделировании адаптивного наблюдателя (25), (26) были выбраны: $\tau = 0{,}1$, $z(0) = 0$, $u = 1$. На рис. 1–4 и 5–8 соответственно представлены графики переходных процессов для $\hat{\theta}_i$, ξ, $\hat{\xi}$, $\tilde{\xi} = \hat{\xi} - \xi$ при $k_i = 10$ и $k_i = 1000$. Из графиков переходных процессов можно видеть, что предлагаемый подход синтеза адаптивного наблюдателя обеспечивает достижение целевого условия (4), демонстрируя улучшение быстродействия за счет увеличения коэффициента k_i.

5. Заключение

В статье предложен новый метод синтеза наблюдателя переменных состояния для линейной, полностью управляемой и наблюдаемой нестационарной системы (1), (2). Допуская, что параметры системы (1), (2) могут быть неизвестными, был синтезирован наблюдатель переменных состояния (13)–(17), обеспечивающий асимптотическую сходимость настраиваемых оценок к истинным значениям. Данная задача была решена в некотором классе структурных ограничений, представленных в предположениях 1 и 2. Для синтеза наблюдателя был использован новый подход, предусматривающий преобразование исходной модели объекта управления к линейной регрессионной модели вида (14), (15). Представленные в статье результаты компьютерного моделирования иллюстрируют работоспособность предложенного подхода и демонстрируют хорошее качество переходных процессов.

В качестве перспектив развития рассмотренного подхода видится его расширение на класс многоканальных объектов управления. Рассмотрим многоканальный объект вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{27}$$

$$y(t) = C(t)\,x(t), \tag{28}$$

где $x(t) \in \mathrm{R}^n$ – неизмеряемый вектор переменных состояния; $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ – нестационарные матрицы соответствующих размеров; $y(t) \in \mathrm{R}^{n_y}$ и $u(t) \in \mathrm{R}^{n_u}$ – соответственно измеряемые выход и сигнал управления.

Действуя по аналогии с одноканальным случаем, будем предполагать (см. предположения 1 и 2), что

$$A(t) = A_0(t) + G_s(t)\,C(t), \quad B(t) = \beta B_0(t), \quad C(t) = \sigma C_0(t)$$

и квадратная матрица $G_s(t) = \mathrm{diag}\{g_1(t), \ldots, g_n(t)\}$ с элементами $g_i(t) = a_i s_i(t)$. Тогда, следуя (13)–(17), с несущественными изменениями может быть построен наблюдатель переменных состояния для объекта (27), (28).

Также дальнейшее развитие данного подхода может быть связано с усложнением предположений на структуру матрицы $A(t)$ и на системы, подверженные влиянию внешних возмущающих воздействий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rugh W.J.* Linear system theory. Prentice Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996.
2. *Rueda-Escobedo J., Ushirobira R., Efimov D., Moreno J.* Gramian-Based Uniform Convergent Observer for Stable LTV Systems with Delayed Measurements // Int. J. Control. 2019. https://doi.org/10.1080/00207179.2019.1569256.
3. *Ortega R., Bobtsov A., Pyrkin A., Aranovskiy S.* A Parameter Estimation Approach to State Observation of Nonlinear Systems // Syst. Control Lett. 2015. V. 85. No. 11. P. 8–94.
4. *Ortega R., Bobtsov A., Dochain D., Nikolaev N.* State Observers for Reaction Systems with Improved Convergence Rates // J. Process Control. 2019. V. 83. No. 11. P. 53–62.
5. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
6. *Bobtsov A.A., Miroshnik I.V.* A Dynamic Adaptation Algorithm for Time-varying Systems // Autom. Remote Control. 1999. V. 60. No. 12. 1773–1781.
7. *Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A.* Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing // IEEE Trans. Automat. Control. 2016. V. 62. No. 7. P. 3546–3550.
8. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
9. *Sastry S., Bodson M.* Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness. Mineola: Dover, 2011.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 12.04.2020

После доработки 02.07.2020

Принята к публикации 09.07.2020

Стохастические системы

© 2020 г. **А.В. ГОРБУНОВА, канд. физ.-мат. наук (avgorbunova@list.ru)**
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
А.В. ЛЕБЕДЕВ, д-р физ.-мат. наук (avlebed@yandex.ru)
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ДВУМЯ ВХОДЯЩИМИ ПОТОКАМИ, АБСОЛЮТНЫМ ПРИОРИТЕТОМ И СТОХАСТИЧЕСКИМ СБРОСОМ

Рассматривается однолинейная система массового обслуживания с накопителем неограниченной емкости, в которую с различными интенсивностями поступают два пуассоновских потока заявок. Заявки первого типа имеют абсолютный приоритет относительно заявок второго типа. Кроме того, в момент окончания обслуживания приоритетная заявка с некоторой вероятностью может сбросить все неприоритетные заявки, находящиеся в очереди. Обслуживание заявок обоих типов имеет экспоненциальное распределение с разными параметрами. Представлены выражения для вычисления стационарных вероятностей системы, вероятности обслуживания неприоритетной заявки в терминах производящей функции и формула для среднего числа заявок второго типа.

Ключевые слова: система массового обслуживания, абсолютный приоритет, обобщенное обновление, стохастический сброс заявок.

DOI: 10.31857/S0005231020120077

1. Введение

Рассмотрим систему массового обслуживания (СМО) с двумя входящими потоками, заявки первого потока имеют абсолютный приоритет относительно заявок второго потока, причем в момент окончания обслуживания приоритетная заявка может с некоторой вероятностью сбросить все неприоритетные заявки.

Подобное явление, когда заявка при уходе сбрасывает другие заявки из накопителя, называется обновлением (renovation). Класс систем с обновлением возник в результате развития идей СМО с отрицательными заявками [1]. Разница в том, что отрицательные заявки представляют собой отдельный тип заявок и “убивают” или выталкивают куда-то обычные заявки при своем поступлении, а не уходе, причем сами не требуют обслуживания. Системам с отрицательными заявками посвящена обширная литература, подробный обзор которой можно найти, например, в [2], начиная с самых ранних работ на эту тему, или в [3], где обсуждаются более свежие публикации. В свою очередь упомянем лишь некоторые статьи, отражающие различные направления исследований. Так, в [4, 5] изучаются системы с отрицательными заявками и ограниченным временем пребывания, в [6–10] представлены системы с отрицательными заявками и повторными обращениями, ряд работ [11–16] посвящен изучению подобных систем в дискретном времени, кроме того известны статьи, в которых рассматриваются системы с групповыми поступлениями заявок, причем некоторые из них предполагают коррелированные входные потоки [16–20], также стоит отметить ряд публикаций, освещающих характеристики так называемых СМО с доходами [21–25], при этом выделенные категории не исключают взаимных пересечений и наложений дополнительных условий, так, например, в [6, 13, 16, 18, 20, 26] исследуемые системы подразумевают еще и прогулки или отдых (vacations) приборов на периодах простоя. Отметим также ряд последних зарубежных работ [27–29], где можно найти соответствующую библиографию.

Одной из первых статей, посвященных системам с обновлением, была [30], где стационарное распределение вероятностей было получено в терминах производящей функции. В более поздних публикациях [31–33] был предложен другой метод нахождения искомых вероятностей и найдены некоторые временные характеристики. При этом было введено понятие обобщенного обновления, когда из накопителя сбрасываются не все заявки, а случайное число с заданным распределением.

Заметим, что обобщенное обновление можно рассматривать как механизм активного управления очередью (Active Queue Management, AQM). Такие механизмы предполагают принятие решения об отказе заявке в обслуживании в зависимости от состояния системы, с целью ограничения числа заявок в очереди. Простейшей, но часто оптимальной оказывается пороговая стратегия управления [34, 35]. В других случаях широко используются различные стохастические алгоритмы, например RED (Random Early Detection), согласно которому вероятность отказа линейно возрастает на определенном промежутке числа заявок. Обычно решение принимается в момент прихода заявки, однако ничто не мешает его принимать и в момент ухода заявки (в отношении имеющихся или будущих заявок). Следуя такому подходу, в [36] проведено сравнение обобщенного обновления с RED-подобными алгоритмами. Основные результаты исследований по AQM можно найти в [37, 38].

Рассматриваемая в настоящей статье модель со стохастическим сбросом также может рассматриваться как вариант AQM. В частности, модель эффективно ограничивает число заявок 2-го типа, при любой интенсивности их поступления система остается эргодической, что может быть важно в случае DDoS-атак (Distributed Denial of Service attack) (см. далее).

Классическая система с двумя типами заявок и абсолютным приоритетом была введена в [39]. Там, в частности, были выведены условие эргодичности, вероятность простоя, среднее и дисперсия числа неприоритетных заявок и др. Отметим, что понятие обновления может быть обобщено на системы с приоритетами многими способами. Авторы будут придерживаться направления, заданного публикациями [40, 41], где предполагалось, что приоритетные заявки (1-го типа) при уходе с некоторой вероятностью сбрасывают все неприоритетные заявки (2-го типа). Таким образом, заявки 1-го типа отчасти играют роль отрицательных заявок в отношении заявок 2-го типа, но с указанными выше различиями.

Практический интерес к перечисленным системам массового обслуживания объясняется следующим. Во-первых, с помощью такого рода моделей возможно проанализировать поведение компьютерных и телекоммуникационных систем в условиях потери данных, которые могут быть вызваны всевозможными причинами, начиная с банальных поломок, оптимизации работы подобным образом и заканчивая нетерпеливостью пользователей таких систем [40]. Также механизм сброса может применяться с целью регулирования интенсивности потока данных и политики дифференцированного обслуживания пользователей [42, 43]. Все названные варианты могут действовать в рамках различных стратегий AQM.

Кроме того, речь может идти и об анализе (мониторинге) угроз информационной безопасности, поскольку безопасность сети является довольно важной проблемой как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения инженерных приложений. Существует множество типов сетевых атак (вирусы, черви, трояны, DDoS-атаки), которые могут вызывать значительные сбои и создавать серьезные проблемы в работе компьютерных сетей. Большинство исследований в этой области концентрируется на способах обнаружения атак и ответных действиях, а работ, посвященных аналитическому изучению данной проблемы не так много, несмотря на то что это могло бы поспособствовать увеличению знаний о поведении вредоносных программ и соответственно улучшить качество оценки их влияния на систему [44–47].

Таким образом, анализируемая авторами СМО может моделировать функционирование какой-либо информационной системы, которая подвергается различного рода атакам с целью нарушения ее деятельности или получения несанкционированного доступа к данным. В систему поступает обычный для нее пользовательский поток запросов (заявки 2-го типа) и периодически приходит условная “вирусная” заявка (заявка 1-го типа). В случае пассивной атаки вредоносная заявка просто покидает систему. Либо эту ситуацию можно расценить как то, что система безопасности угрозу распознала и обработала, не дав ей навредить. В противном случае, когда система безопасности не справилась с угрозой либо атака оказалась активной, эта вредоносная заявка сбрасывает весь поток “хороших” заявок.

Исследование рассматриваемой в статье системы было начато в [41], но тогда удалось получить некоторые результаты[1] только для специального случая детерминированного сброса при уходе заявки (с вероятностью единица), в том числе вывести формулу вероятности простоя. В [40] рассматривалась аналогичная система с относительным приоритетом, однако она оказалась более сложной для теоретического анализа. Заметим, что при малом среднем времени обслуживания заявки 2-го типа характеристики систем с абсолютным и относительным приоритетом должны быть близкими.

Поскольку терминология обновления систем с приоритетами пока не принята, будем называть рассматриваемую модель системой со стохастическим сбросом.

Отметим, что данная система является промежуточной между классической системой с абсолютным приоритетом без сброса [39] и системой с детер-

[1] При этом в (4) и (17) были допущены логические ошибки.

минированным сбросом [41], поэтому можно ожидать, что ее характеристики также окажутся промежуточными, а характеристики в крайних случаях могут быть получены соответствующими предельными переходами. Теоретический и численный анализ подтверждают это предположение.

Итак, статья организована следующим образом: во втором разделе описана математическая модель СМО и представлены формулы для распределения числа заявок в системе, в третьем разделе описывается способ вычисления вероятности простоя системы, в четвертом — основное внимание уделено вычислению среднего числа заявок 2-го типа, в пятом — нахождению вероятности обслуживания заявки 2-го типа, а в шестом разделе приведен численный пример.

2. Математическая модель

В однолинейную систему массового обслуживания с накопителем неограниченной емкости поступают заявки двух типов. Входящие в систему потоки являются пуассоновскими с интенсивностью λ_1 для заявок 1-го типа и интенсивностью λ_2 для заявок 2-го типа. Времена обслуживания заявок имеют экспоненциальное распределение с параметрами μ_1 и μ_2 соответственно. Заявки 1-го типа имеют абсолютный приоритет по сравнению с заявками 2-го типа, т.е. при наличии в очереди заявок обоих потоков на обслуживание выбирается приоритетная заявка, а неприоритетная заявка может быть выбрана на обслуживание только в том случае, когда в очереди нет заявок 1-го типа. Кроме того, если в момент поступления приоритетной заявки на обслуживании находится заявка 2-го типа, то ее обслуживание немедленно прерывается и она возвращается в начало очереди, а заявка 1-го типа поступает на прибор. Заявки одного потока обслуживаются в порядке поступления. Более того, приоритетная заявка, находящаяся на приборе, может в момент окончания обслуживания либо с вероятностью p просто покинуть систему, либо с вероятностью q еще и сбросить все заявки второго типа из накопителя, $p + q = 1$.

Функционирование представленной СМО можно описать марковским процессом $X(t) = \{\nu_1(t), \nu_2(t)\}$, где $\nu_1(t)$ и $\nu_2(t)$ — число заявок первого (i) и второго (j) типов, с дискретным множеством состояний $X = \{(i, j), i \geqslant 0, j \geqslant 0\}$ (рис. 1).

Зададимся вопросом об эргодичности системы. Поскольку заявки 2-го типа никак не влияют на заявки 1-го типа, то поведение $\nu_1(t)$ будет таким же, как в соответствующей системе $M|M|1$, с условием эргодичности $\rho_1 < 1$, $\rho_i = \lambda_i/\mu_i$, $i = 1, 2$. При этом поскольку время от времени происходит полный сброс заявок 2-го типа (через промежутки времени с конечным средним), то $\nu_2(t)$ не может стремиться к бесконечности, независимо от ρ_2. Таким образом, условием эргодичности системы оказывается $\rho_1 < 1$, в чем имеется качественное различие с классической системой [39], где условием эргодичности было $\rho_1 + \rho_2 < 1$. Далее будем считать условие $\rho_1 < 1$ выполненным по умолчанию.

Обозначим через $p_{i,j}$, $i \geqslant 0$, $j \geqslant 0$ — стационарную вероятность того, что в системе находится i приоритетных заявок и j неприоритетных заявок. Ста-

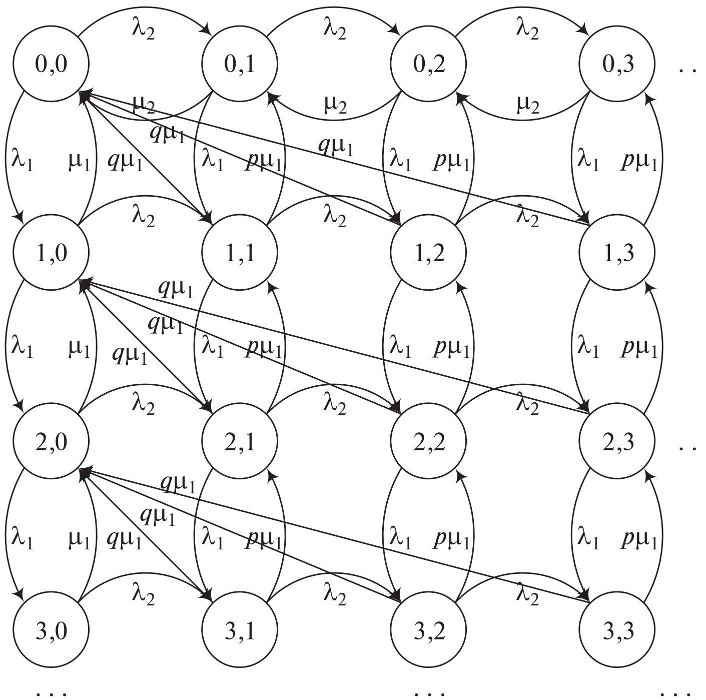


Рис. 1. Диаграмма интенсивностей переходов.

ционарное распределение существует и удовлетворяет системе уравнений равновесия:

$$(\lambda_1 + \lambda_2)p_{0,0} = \mu_1 p p_{1,0} + \mu_2 p_{0,1} + \mu_1 q \sum_{j=0}^{\infty} p_{1,j}, \tag{1}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)p_{i,0} = \lambda_1 p_{i-1,0} + \mu_1 p p_{i+1,0} + \mu_1 q \sum_{j=0}^{\infty} p_{i+1,j}, \quad i \geqslant 1, \tag{2}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)p_{0,j} = \mu_1 p p_{1,j} + \lambda_2 p_{0,j-1} + \mu_2 p_{0,j+1}, \quad j \geqslant 1, \tag{3}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)p_{i,j} = \mu_1 p p_{i+1,j} + \lambda_1 p_{i-1,j} + \lambda_2 p_{i,j-1}, \quad i, j \geqslant 1. \tag{4}$$

Введем обозначения для маргинальных вероятностей:

$$p_{i,\cdot} = \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j}, \quad p_{\cdot,j} = \sum_{i=0}^{\infty} p_{i,j}, \quad i, j \geqslant 0.$$

Поскольку заявки 2-го типа никак не влияют на приоритетные заявки, то распределение числа приоритетных заявок будет соответствовать распределению числа заявок в СМО типа $M|M|1$, т.е.

$$p_{i,\cdot} = (1 - \rho_1)\rho_1^i, \quad i \geqslant 0,$$

причем должно выполняться условие эргодичности $\rho_1 < 1$.

Далее введем обозначение для производящей функции

$$B(u,v) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j}u^i v^j. \tag{5}$$

Тогда справедливо, что

$$\begin{aligned}
B(u,0) &= \sum_{i=0}^{\infty} p_{i,0}u^i,\\
B(0,v) &= \sum_{j=0}^{\infty} p_{0,j}v^j,\\
B(u,1) &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j}u^i = \sum_{i=0}^{\infty} p_{i,\cdot}u^i = \frac{1-\rho_1}{1-\rho_1 u},\\
B(1,v) &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j}v^j = \sum_{j=0}^{\infty} p_{\cdot,j}v^j.
\end{aligned}$$

Теперь найдем выражение для производящей функции. Для этого умножим уравнения (1)–(4) на $u^i v^j$ и просуммируем по всем возможным значениям i и j, т.е.

$$(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)B(u,v) - \mu_1 p_{0,0} + (\mu_2-\mu_1)\sum_{j=1}^{\infty} p_{0,j}v^j =$$

$$= \mu_1 p p_{1,0} + \mu_2 p_{0,1} + \mu_1 q\frac{1}{u}\sum_{j=0}^{\infty} p_{1,j}u + \lambda_1\sum_{i=1}^{\infty} p_{i-1,0}u^i + \mu_1 p\sum_{i=1}^{\infty} p_{i+1,0}u^i +$$

$$+ \mu_1 q\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} p_{i+1,j}u^i + \mu_1 p\sum_{j=1}^{\infty} p_{1,j}v^j + \lambda_2\sum_{j=1}^{\infty} p_{0,j-1}v^j + \mu_2\sum_{j=1}^{\infty} p_{0,j+1}v^j +$$

$$+ \mu_1 p\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{i+1,j}u^i v^j + \lambda_1\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{i-1,j}u^i v^j + \lambda_2\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{i,j-1}u^i v^j.$$

После преобразований получим, что

$$B(u,v) = \tag{6}$$
$$= \frac{\big(\mu_1 v(u-p) - \mu_2 u(v-1)\big)B(0,v) + \mu_1 q v(B(u,1) - p_{0,\cdot}) + \mu_2 p_{0,0}u(v-1)}{\lambda_1 uv(1-u) + \lambda_2 uv(1-v) + \mu_1 v(u-p)}.$$

Тогда распределение числа заявок, не обладающих приоритетом, описывается выражением

$$p_{\cdot,j} = \frac{1}{j!}\frac{\partial^j B(1,v)}{\partial v^j}\bigg|_{v=0},$$

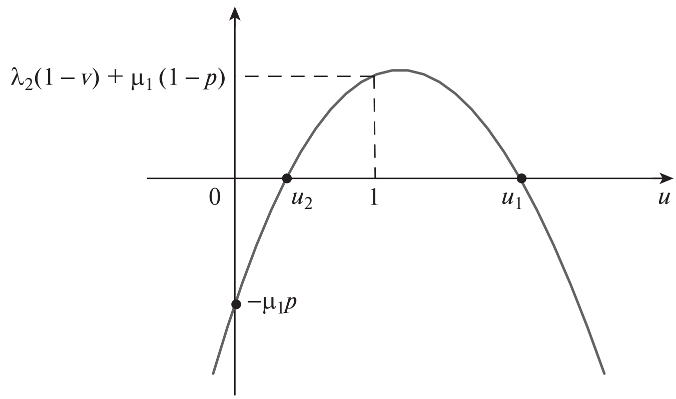


Рис. 2. Иллюстрация к утверждению, что $0 < u_2(v) < 1$.

а распределение числа заявок первого и второго типов определяется формулой

$$p_{i,j} = \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} B(u,v)}{\partial u^i \partial v^j}\bigg|_{u=v=0}.$$

Далее найдем нули знаменателя (6), т.е. получим корни квадратного трехчлена относительно переменной u

$$(7)\quad u_{1,2} = u_{1,2}(v) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2(1-v) + \mu_1 \pm \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2(1-v) + \mu_1)^2 - 4\lambda_1\mu_1 p}}{2\lambda_1}.$$

Докажем, что $0 < u_2(v) < 1$ с учетом того, что $\rho_1 = \lambda_1/\mu_1 < 1$. Для этого рассмотрим поведение функции $\lambda_1 u(1-u) + \lambda_2 u(1-v) + \mu_1(u-p)$ из знаменателя (6). При $u = 0$ получаем $-\mu_1 p < 0$, при $u = 1$ имеем $\lambda_2(1-v) + \mu_1(1-p) > 0$, $0 < p < 1$. Поскольку графиком функции является парабола, ветви которой направлены вниз (рис. 2), можем сделать вывод, что корень квадратного трехчлена, лежащий в интервале от 0 до 1, существует, кроме того, он будет являться меньшим корнем этого трехчлена.

В силу того что производящая функция $B(u,v)$ является непрерывной функцией при $u, v \in [0,1]$, при подстановке (u_2, v), $0 < u_2 < 1$, в выражение (6) одновременно со знаменателем в ноль должен обращаться и числитель. Следовательно, имеем

$$\big(\mu_1 v(u_2 - p) - \mu_2 u_2(v-1)\big)B(0,v) + \mu_1 q v(B(u_2,1) - p_{0,\cdot}) + \mu_2 p_{0,0} u_2(v-1) = 0,$$

где, напомним,

$$B(u_2, 1) = \frac{1-\rho_1}{1-\rho_1 u_2}, \quad p_{0,\cdot} = (1-\rho_1).$$

Таким образом, выражение для $B(0,v)$ примет вид

$$(8)\qquad B(0,v) = \frac{\mu_1 q \rho_1 u_2(\rho_1 - 1)v + (1-\rho_1 u_2)\mu_2 u_2(1-v)p_{0,0}}{(1-\rho_1 u_2)(\mu_1 v(u_2-p) - \mu_2 u_2(v-1))},$$

и для полного решения задачи остается только найти вероятность простоя системы $p_{0,0}$.

3. Вероятность простоя системы

Рассмотрим знаменатель выражения (8). Поскольку $v \in [0,1]$, то в крайних точках отрезка выражение принимает значение $\mu_2 u_2 > 0$ при $v = 0$ и при $v = 1$ — значение $\mu_1 v(u_2 - p)$, определим его знак. В силу того что из знаменателя (6)

$$\lambda_1 u_2(1-u_2) + \lambda_2 u_2(1-v) + \mu_1(u_2 - p) = 0,$$

где $\lambda_1 u_2(1-u_2) > 0$ и $\lambda_2 u_2(1-v) > 0$, можем заключить, что $\mu_1(u_2 - p) < 0$. Это означает, что существует такое $v^* \in (0,1)$, при котором знаменатель (8) обращается в ноль, а значит, и числитель (8) должен обращаться в ноль:

$$\mu_1 q \rho_1 u_2(v^*)(\rho_1 - 1)v^* + (1 - \rho_1 u_2(v^*))\mu_2 u_2(v^*)(1-v^*)p_{0,0} = 0,$$

откуда с учетом $0 < u_2(v) < 1$ получаем, что

$$p_{0,0} = \frac{\lambda_1 q(1-\rho_1)v^*}{\mu_2(1-\rho_1 u_2(v^*))(1-v^*)}. \tag{9}$$

Зная $p_{0,0}$, можем вычислить все стационарные вероятности и характеристики системы.

Теперь покажем, что поведение $p_{0,0}$ на обеих границах отрезка $p \in [0,1]$ соответствует результатам, полученным ранее в [39, 41].

Случай 1. Пусть $p \to 0$, тогда необходимо доказать, что

$$p_{0,0} \to p_{0,0}^{(0)} = \frac{\lambda_1(1-\rho_1)}{\mu_2}\frac{z_2}{1-z_2}, \quad v^* \to z_2, u_2 \to 0,$$

где выражение для z_2 имеет вид [41]:

$$z_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 - \sqrt{(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)^2 - 4\lambda_2\mu_2}}{2\lambda_2}. \tag{10}$$

При $p \to 0$ для любого значения v выполняется $u_2 \to 0$. Поэтому чтобы найти v^*, получим асимптотическое разложение выражения для u_2 с помощью формулы Тейлора при $p \to 0$

$$u_2 = \frac{\mu_1}{\lambda_1 + \lambda_2(1-v) + \mu_1}p + o(p), \tag{11}$$

тогда

$$p - u_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2(1-v)}{\lambda_1 + \lambda_2(1-v) + \mu_1}p + o(p). \tag{12}$$

Далее приравниваем знаменатель в (8) к нулю и получаем

$$\frac{v}{1-v} = \frac{\mu_2 u_2}{\mu_1(p - u_2)}. \tag{13}$$

В правую часть полученного равенства подставляем асимптотические выражения (11) и (12), откуда

$$\frac{v}{1-v} = \frac{\mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2(1-v)} + o(1), \tag{14}$$

в результате после перехода к пределу при $p \to 0$ получаем уравнение

$$\lambda_2 v^2 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)v + \mu_2 = 0,$$

которое в точности соответствует уравнению из [41] для вычисления $0 < z_2 < 1$. Таким образом, из $v^* \to z_2$, $u_2 \to 0$ сходимость $p_{0,0}$ к $p_{0,0}^{(0)}$ следует автоматически.

Случай 2. Положим $\rho_1 + \rho_2 < 1$. Пусть $p \to 1$, тогда необходимо доказать, что

$$p_{0,0} \to p_{0,0}^{(1)} = 1 - \rho_1 - \rho_2, \quad v^* \to 1, u_2 \to 1,$$

где выражение для $p_{0,0}^{(1)}$ из [39]. Из того что $p \to 1$ следует, что $v^* \to 1$ и $u_2 \to 1$. Введем обозначение $\varepsilon = 1 - v$, тогда $\varepsilon \to 0$, $q \to 0$. Далее, воспользовавшись аналогичным образом асимптотическим разложением u_2 с помощью формулы Тейлора, можем записать, что

$$u_2 = 1 - \frac{\lambda_2}{\mu_1 - \lambda_1}\varepsilon - \frac{\mu_1}{\mu_1 - \lambda_1}q + o(\varepsilon) + o(q).$$

Тогда

$$p - u_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_1 - \lambda_1}\varepsilon + \frac{\lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1}q + o(\varepsilon) + o(q).$$

Из равенства (13) при $v \to 1$, $u_2 \to 1$, $p \to 1$ получаем, что

$$1 - v \sim \frac{\mu_1}{\mu_2}(p - u_2),$$

т.е. при $\varepsilon, q \to 0$

$$\varepsilon \sim \frac{\mu_1}{\mu_2}\left(\frac{\lambda_2}{\mu_1 - \lambda_1}\varepsilon + \frac{\lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1}q\right),$$

следовательно,

$$\varepsilon \sim \frac{\lambda_1\mu_1}{\mu_1\mu_1 - \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1}q.$$

Тогда

$$p_{0,0} \sim \frac{\lambda_1 q}{\mu_2 \varepsilon} \to \frac{\mu_1\mu_2 - \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1}{\mu_1\mu_2} = 1 - \rho_1 - \rho_2 = p_{0,0}^{(1)},$$

что соответствует классическому результату [39].

4. Среднее число заявок 2-го типа в системе

Среднее число неприоритетных заявок в системе равно

$$N_2 = \sum_{j=0}^{\infty} j p_{\cdot,j} = \left.\frac{\partial B(1,v)}{\partial v}\right|_{v=1}.$$

После соответствующих преобразований получим

$$\left.\frac{\partial B(1,v)}{\partial v}\right|_{v=1} = \left.\frac{\partial B(0,v)}{\partial v}\right|_{v=1} + \frac{\lambda_2\mu_1 + \lambda_1\mu_2 - \mu_1\mu_2(1-p_{0,0})}{\mu_1^2 q},$$

где

$$\left.\frac{\partial B(0,v)}{\partial v}\right|_{v=1} =$$

$$= \frac{u_2^{'}(1)\lambda_1 q(1-\rho_1) + \lambda_1 u_2(1) q(1-\rho_1) + \mu_2 u_2(1)(1-\rho_1 u_2(1))p_{0,0}}{\mu_1(1-\rho_1 u_2(1))(p-u_2(1))} -$$

$$- \frac{\lambda_1 u_2(1) q(1-\rho_1)[\mu_1(p-u_2(1)) + \mu_2 u_2(1) - u_2^{'}(1)\mu_1]}{\mu_1^2(1-\rho_1 u_2(1))(p-u_2(1))^2} +$$

$$+ \frac{u_2^{'}(1)\lambda_1^2 u_2(1) q(1-\rho_1)}{\mu_1^2(1-\rho_1 u_2(1))^2(p-u_2(1))},$$

$$u_2(1) = \frac{\lambda_1 + \mu_1 - \sqrt{(\lambda_1+\mu_1)^2 - 4\lambda_1\mu_1 p}}{2\lambda_1},$$

$$u_2^{'}(1) = \left.\frac{\partial u_2(v)}{\partial v}\right|_{v=1} = \frac{1}{2\lambda_1}\left(\frac{\lambda_2(\lambda_1+\mu_1)}{\sqrt{(\lambda_1+\mu_1)^2 - 4\lambda_1\mu_1 p}} - \lambda_2\right).$$

Среднее время пребывания в системе неприоритетной заявки можно вычислить с помощью формулы Литтла, т.е. справедливо, что

$$N_2 = \lambda_2 v_2,$$

где v_2 — среднее время пребывания заявки 2-го типа в системе, тогда

$$v_2 = \frac{N_2}{\lambda_2} = w_2 + \frac{1}{\mu_2},$$

откуда среднее время пребывания неприоритетной заявки в очереди равно

$$w_2 = v_2 - \frac{1}{\mu_2}.$$

Среднее число приоритетных заявок в системе, среднее время пребывания приоритетных заявок в очереди и в системе определяется с помощью известных формул для СМО $M|M|1$ из-за отсутствия влияния на них заявок второго типа.

5. Вероятность обслуживания заявки 2-го типа

Теперь определим вероятность обслуживания неприоритетной заявки. Отметим, что это непростая задача, поскольку судьба заявки зависит не только от состояния системы в момент ее поступления, но и от дальнейшего развития событий.

Для этого введем величину $s_{i,j}$ – вероятность того, что заявка второго типа будет обслужена, если перед ней в очереди (с учетом заявки на приборе) находится i приоритетных и j неприоритетных заявок.

Возможны следующие ситуации (рис. 3):

1) если в системе перед неприоритетной заявкой находятся i заявок первого и j заявок второго типа, то с вероятностью $\lambda_1/(\lambda_1+\mu_1)$ в систему может поступить новая приоритетная заявка и занять место перед рассматриваемой неприоритетной (не обязательно непосредственно перед ней), т.е. приоритетных заявок станет $(i+1)$, либо с вероятностью $\mu_1/(\lambda_1+\mu_1)$ может обслужиться заявка первого типа и при этом с вероятностью p просто покинет систему, не сбрасывая неприоритетные заявки, тогда перед заявкой второго типа станет $(i-1)$ приоритетных заявок (рис. 3,*а*);
2) если в системе перед неприоритетной заявкой находятся только j заявок второго типа, то с вероятностью $\lambda_1/(\lambda_1+\mu_2)$ в систему может поступить приоритетная заявка и занять место перед рассматриваемой неприоритетной, либо с вероятностью $\mu_2/(\lambda_1+\mu_2)$ может обслужиться заявка второго типа (рис. 3,*б*);
3) если в системе перед неприоритетной заявкой нет других заявок, то с вероятностью $\lambda_1/(\lambda_1+\mu_2)$ в систему может поступить приоритетная заявка и занять место перед рассматриваемой неприоритетной, либо с вероятностью $\mu_2/(\lambda_1+\mu_2)$ заявка второго типа успеет успешно обслужиться.

Заметим, что поступления новых неприоритетных заявок в систему никак не влияют на обслуживание неприоритетных заявок, уже находящихся в систе-

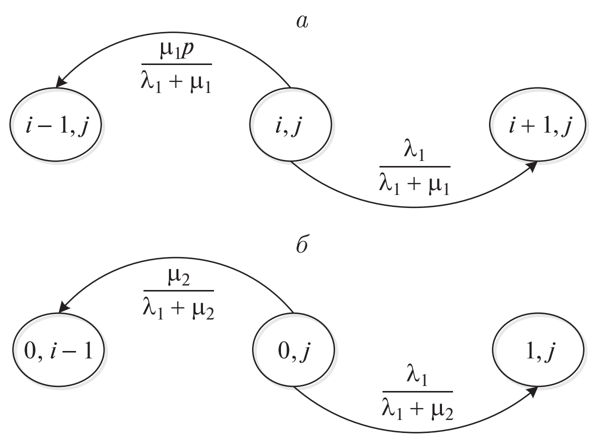


Рис. 3. Возможные изменения состояний СМО в условиях ожидания неприоритетной заявки.

ме, поэтому эти события нигде не учитываются. Составим систему уравнений

$$s_{i,j} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1}s_{i+1,j} + \frac{\mu_1 p}{\lambda_1+\mu_1}s_{i-1,j}, \quad i \geqslant 1, j \geqslant 0, \tag{15}$$

$$s_{0,j} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_2}s_{1,j} + \frac{\mu_2}{\lambda_1+\mu_2}s_{0,j-1}, \quad j \geqslant 1, \tag{16}$$

$$s_{0,0} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_2}s_{1,0} + \frac{\mu_2}{\lambda_1+\mu_2}. \tag{17}$$

Будем искать решение (15) в виде

$$s_{i,j} = \gamma^i s_{0,j}, \quad i \geqslant 1, j \geqslant 0, \tag{18}$$

тогда при подстановке (18) в (15) при $i = 1$ можем записать, что

$$\gamma = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1}\gamma^2 + \frac{\mu_1 p}{\lambda_1+\mu_1},$$

т.е. получаем квадратное уравнение относительно переменной γ

$$\lambda_1\gamma^2 - (\lambda_1+\mu_1)\gamma + \mu_1 p = 0.$$

Решением уравнения является

$$\gamma_{1,2} = \frac{\lambda_1+\mu_1 \pm \sqrt{(\lambda_1+\mu_1)^2 - 4\lambda_1\mu_1 p}}{2\lambda_1}.$$

Выбираем корень, лежащий в интервале от 0 до 1, т.е. γ_2. Таким образом, получаем, что

$$s_{i,j} = \gamma_2^i s_{0,j}, \quad j \geqslant 0. \tag{19}$$

Теперь подставляем полученное решение для $s_{i,j}$ в (16), откуда можем выразить $s_{0,j}$ в виде:

$$s_{0,j} = \frac{\mu_2}{\lambda_1(1-\gamma_2)+\mu_2}s_{0,j-1}, \quad j \geqslant 1.$$

Далее подставим (19) при $i = 1$ и $j = 0$ в (17), что позволит выразить вероятность $s_{0,0}$ в явном виде:

$$s_{0,0} = \frac{\mu_2}{\lambda_1(1-\gamma_2)+\mu_2}.$$

Следовательно,

$$s_{0,j} = \delta^{j+1}, \quad j \geqslant 0, \tag{20}$$

где

$$\delta = \frac{\mu_2}{\lambda_1(1-\gamma_2)+\mu_2}.$$

Таким образом, получаем формулу для искомых вероятностей

$$s_{i,j} = \gamma_2^i \delta^{j+1}, \quad i, j \geqslant 0.$$

Теперь, определив величины $s_{i,j}$, можем выразить вероятность обслуживания неприоритетной заявки

$$p^{(serv)} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} s_{i,j} = \delta \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} \gamma_2^i \delta^j = \delta B(\gamma_2, \delta),$$

где $B(\gamma_2, \delta)$ определяется выражением для производящей функции (5).

Заметим, что при $p \to 1$ имеем $\gamma_2 \to 1$, $\delta \to 1$ и $p^{(serv)} \to 1$, что согласуется с $p^{(serv)} = 1$ в классической системе [39]. С другой стороны, при $p \to 0$ имеем $\gamma_2 \to 0$, $\delta \to \mu_2/(\lambda_1 + \mu_2)$ и

$$p^{(serv)} \to \frac{\mu_2}{\lambda_1 + \mu_2} B\left(0, \frac{\mu_2}{\lambda_1 + \mu_2}\right),$$

что представляет собой правильный результат в специальном случае $q = 1$ (детерминированного сброса), рассмотренном в [41].

6. Численный пример

Проиллюстрируем поведение среднего числа неприоритетных заявок в системе и вероятности их обслуживания, а также вероятности простоя в зависимости от значения вероятности p. Положим $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 4$.

Значения $p_{0,0}$, N_2 и $p^{(serv)}$ в зависимости от вероятности p; $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 4$

№ п/п	p	$p_{0,0}$	N_2	$p^{(serv)}$
1	0,00001	0,42692456	0,72138505	0,44783943
2	0,0001	0,42691639	0,72142797	0,44785372
3	0,001	0,42683463	0,72185751	0,44799666
4	0,01	0,42601289	0,72618609	0,44943427
5	0,05	0,42226759	0,74618419	0,45601022
6	0,1	0,41735867	0,77308223	0,46468915
7	0,2	0,40668331	0,83441279	0,48380588
8	0,3	0,39464575	0,90860175	0,50577935
9	0,4	0,38089405	1,00059049	0,53145181
10	0,5	0,36491803	1,11839002	0,56207704
11	0,6	0,34593336	1,27603001	0,59963204
12	0,7	0,32262946	1,50090229	0,64748988
13	0,8	0,29251571	1,85620264	0,71212093
14	0,9	0,24962267	2,53878264	0,80873235
15	0,95	0,21798769	3,23966558	0,88200599
16	0,97	0,20130170	3,70732327	0,92074722
17	0,99	0,18016569	4,43379884	0,96939467
18	0,999	0,16814903	4,93317210	0,99666168
19	0,9999	0,16681649	4,99318955	0,99966287
20	0,99999	0,16668166	4,99931765	0,99996625

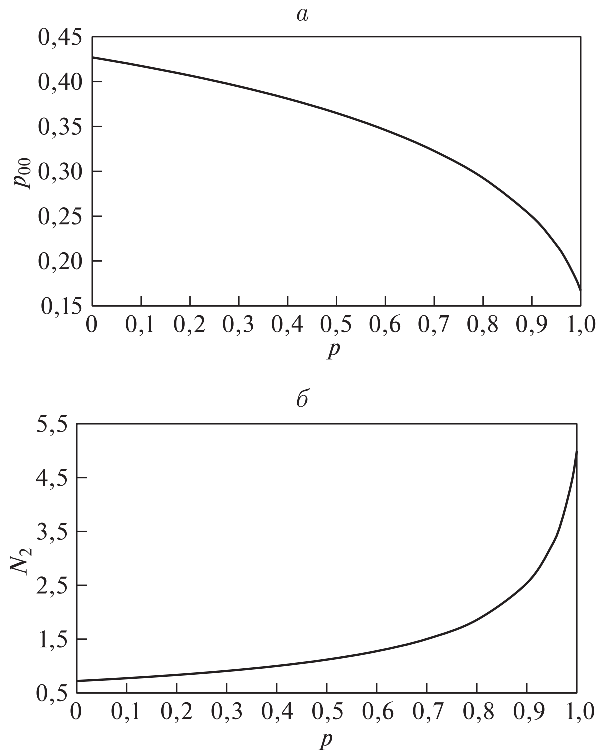


Рис. 4. Зависимости: *а* — вероятности простоя системы от вероятности p; *б* — среднего числа неприоритетных заявок в системе от вероятности p; $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 4$.

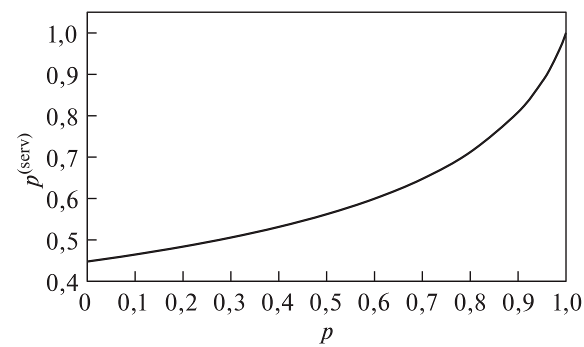


Рис. 5. Зависимость вероятности обслуживания неприоритетной заявки $p^{(serv)}$ от вероятности p; $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 4$.

Как видно из графиков (рис. 4) и таблицы среднее число неприоритетных заявок в системе с увеличением p растет, а сама вероятность $p_{0,0}$ при этом убывает. Причем заметим, что вероятность простоя в классической СМО без возможности сброса неприоритетных заявок, вычисляемая по формуле из [39]

$$p_{0,0}^{(1)} = 1 - \rho_1 - \rho_2, \quad \rho_i = \lambda_i/\mu_i, \quad i = 1, 2,$$

равна 0,16667 (или 1/6), а среднее число неприоритетных заявок в той же классической системе, описываемое формулой из [39]

$$N_2^{(1)} = \frac{\lambda_2(\mu_1(\mu_1 - \lambda_1) + \lambda_1\mu_2)}{(\mu_1 - \lambda_1)(\mu_1\mu_2 - \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)} = \frac{\rho_2}{1 - \rho_1 - \rho_2}\left(1 + \frac{\mu_2\rho_1}{\mu_1(1 - \rho_1)}\right),$$

в точности равно 5. Таким образом, значения N_2 и $p_{0,0}$ с приближением вероятности сброса заявок второго типа q к нулю стремятся к соответствующим значениям $N_2^{(1)}$ и $p_{0,0}^{(1)}$ для классической системы с отсутствием возможности такого сброса, чего и следовало ожидать. С другой стороны, из [41] известна вероятность простоя при $p = 0$, которая оказывается равна $p_{0,0}^{(0)} \approx 0{,}426925$, что также согласуется с таблицей. Что касается вероятности обслуживания заявок второго типа $p^{(serv)}$, то она, что естественно, с ростом p стремится к единице (рис. 5).

7. Заключение

В статье рассмотрена СМО с абсолютным приоритетом заявок первого типа над заявками второго типа и стохастическим сбросом. Представлены выражения для вычисления стационарных вероятностей системы, вероятности простоя, вероятности обслуживания неприоритетной заявки (в терминах производящей функции), а также формула для среднего числа заявок второго типа. Проведено сравнение с ранее известными результатами для крайних случаев и показано, что они получаются соответствующими предельными переходами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gelenbe E., Glynn P., Sigman K.* Queues with Negative Arrivals // J. Appl. Prob. 1991. V. 28. No. 1. P. 245–250.
2. *Do T.V.* Bibliography on G-networks, Negative Customers and Applications // Math. Comput. Model. 2011. V. 53. P. 205–212.
3. *Caglayan M.* G-Networks and their Applications to Machine Learning, Energy Packet Networks and Routing: Introduction to the Special Issue // Prob. Eng. Inform. Sci. 2017. V. 31. No. 4. P. 381–395.
4. *Малинковский Ю.В., Бородин Н.Н.* Сети массового обслуживания с конечным числом потоков отрицательных заявок и с ограниченным временем пребывания // Пробл. физики, математики и техники. 2017. № 1. С. 64–68.
5. *Малинковский Ю.В.* Стационарное распределение вероятностей состояний G-сетей с ограниченным временем пребывания // АиТ. 2017. № 10. С. 155–167.

   Malinkovskii Y.V. Stationary Probability Distribution for States of G-Networks with Constrained Sojourn Time // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 10. P. 1857–1866.
6. *Dimitriou I.* A Mixed Priority Retrial Queue with Negative Arrivals, Unreliable Server and Multiple Vacations // Appl. Math. Model. 2013. V. 37. P. 1295–1309.
7. *Rajkumar M.* An (s, S) Retrial Inventory System with Impatient and Negative Customers // Int. J. Math. Oper. Res. 2014. V. 6. P. 106–122.

8. *Farkhadov M., Fedorova E.* Asymptotic Analysis of Retrial Queue $M|M|1$ with Negative Calls Under Heavy Load Condition // Distributed Comput. Commun. Networks. 2017. P. 470–475.
9. *Farkhadov M., Fedorova E.* Retrial Queue $M|M|1$ with Negative Calls Under Heavy Load Condition // Commun. Comput. Inform. Sci. 2017. V. 700. P. 406–416.
10. *Zidani N., Spiteri P., Djellab N.* Numerical Solution for the Performance Characteristics of the $M|M|C|K$ Retrial Queue with Negative Customers and Exponential Abandonments by Using Value Extrapolation Method // RAIRO-Oper. Res. 2019. V. 53. P. 767–786.
11. *Kyung C. Chae, Hyun M. Park, Won S. Yang.* A $GI|Geo|1$ Queue with Negative and Positive Customers // Appl. Math. Model. 2010. V. 34. P. 1662–1671.
12. *Wang J., Huang Y., Dai Z.* A Discrete-Time On-Off Source Queueing System with Negative Customers // Comput. Ind. Eng. 2011. V. 61. P. 1226–1232.
13. *Gao Sh., Wang J., Zhang D.* Discrete-Time $GI^X|Geo|1|N$ Queue with Negative Customers and Multiple Working Vacations // J. Korean Stat. Soc. 2013. V. 42. P. 515–528.
14. *Wang J., Huang Y., Do T.* A Single-Server Discrete-Time Queue with Correlated Positive and Negative Customer Arrivals // Appl. Math. Model. 2013. V. 37. P. 6212–6224.
15. *Lee D.H., Kim K.* Analysis of Repairable $Geo|G|1$ Queues with Negative Customers // Appl. Math. Model. 2014. Article ID 350621, 10 P.
16. *Senthil Vadivu A., Arumuganathan R., Senthil Kumar M.* Analysis of Discrete-Time Queues with Correlated Arrivals, Negative Customers and Server Interruption // RAIRO-Oper. Res. 2016. V. 50. P. 67–81.
17. *Klimenok V.I., Dudin A.N.* A $BMAP|PH|N$ Queue with Negative Customers and Partial Protection of Service // Commun. Statist. Simulat. Comput. 2012. V. 41. No. 7. P. 1062–1082.
18. *Rajadurai P., Chandrasekaran M., Saravanarajan M.C.* Steady State Analysis of Batch Arrival Feedback Retrial Queue with Two Phases of Service, Negative Customers, Bernoulli Vacation and Server Breakdown // Int. J. Math. Oper. Res. 2015. V. 7. P. 519–546.
19. *Singh C.J., Jain M., Kaur S., Meena R.K.* Retrial Bulk Queue with State Dependent Arrival and Negative Customers // Proc. Sixth Int. Conf. on Soft Computing for Problem Solving. Advances in Intelligent Systems and Computing. 2017. V. 547. P. 290–301.
20. *Ayyappan G., Thamizhselvi P.* Transient Analysis of $M^{[X_1]}, M^{[X_2]}/G_1, G_2/1$ Retrial Queueing System with Priority Services, Working Vacations and Vacation Interruption, Emergency Vacation, Negative Arrival and Delayed Repair // Int. J. Appl. Comput. Math. 2018. V. 4. Article number: 77. 35 P.
21. *Матальцкий М.А.* Прогнозирование ожидаемых доходов в марковских сетях с положительными и отрицательными заявками // АиТ. 2017. № 5. С. 56–70.

    Matalytski M.A. Forecasting Anticipated Incomes in the Markov Networks with Positive and Negative Customers // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 5. P. 815–825.
22. *Lee D.H.* Optimal Pricing Strategies and Customers' Equilibrium Behavior in an Unobservable $M|M|1$ Queueing System with Negative Customers and Repair // Math. Probl. Eng. 2017. Article ID 8910819. 11 P.
23. *Matalytski M.* Finding Expected Revenues in G-network with Multiple Classes of Positive and Negative Customers Probability in the Engineering and Informational Sciences // Prob. Eng. Inform. Sci. 2019. V. 33. No. 1. P. 105–120.

24. *Matalytski M.* Analysis of the Network with Multiple Classes of Positive and Negative Customers at a Transient Regime // Prob. Eng. Inform. Sci. 2019. V. 33, No. 2. P. 172–185.
25. *Sun K., Wang J.* Equilibrium Joining Strategies in the Single Server Queues with Negative Customers // Int. J. Comput. Math. 2019. V. 96. No. 6. P. 1169–1191.
26. *Xu Xiu-li, Wang Xian-ying, Song Xiao-feng, Li Xiao-qing.* Fluid Model Modulated by an $M|M|1$ Working Vacation Queue with Negative Customer // Acta. Math. Appl. Sin.-E. 2018. V. 34. No. 2. P. 404–415.
27. *Chin C.H., Koh S.K., Tan Y.F., Pooi A.H., Goh Y.K.* Stationary Queue Length Distribution of A Continuous-Time Queueing System with Negative Arrival // J. Phy. Conf. 2018. V. 1132. Article ID 012057.
28. *Peng Y.* The MAP/G/1 G-queue with Unreliable Server and Multiple Vacations // Informatica. 2019. V. 43. No. 4. P. 545–550.
29. *Gupta U., Kumar N., Barbhuiya F.* A Queueing System with Batch Renewal Input and Negative Arrivals // 2020. arXiv:2002.08209v1.
30. *Kreinin A.* Queueing Systems with Renovation // J. Appl. Math. Stoch. Anal. 1997. V. 10. No. 4. P. 431–443.
31. *Бочаров П.П., Зарядов И.С.* Стационарное распределение вероятностей в системах массового обслуживания с обновлением // Вест. Росс. ун-та дружбы народов. Сер. “Математика. Информатика. Физика”. 2007. № 1–2. С. 14–23.
32. *Зарядов И.С., Печинкин А.В.* Стационарные временные характеристики системы $GI|M|n|\infty$ с некоторыми вариантами дисциплины обобщенного обновления // АиТ. 2009. № 12. С. 161–174;

    Zaryadov I.S., Pechinkin A.V. Stationary Time Characteristics of the $GI|M|n|\infty$ System with Some Variants of the Generalized Renovation Discipline // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 12. P. 2085–2097.
33. *Зарядов И.С.* Система массового обслуживания $GI|M|n|\infty$ с обобщенным обновлением // АиТ. 2010. № 4. Р 130–139.

    Zaryadov I.S. The $GI|M|n|\infty$ Queuing System with Generalized Renovation // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 4. P. 663–671.
34. *Гришунина Ю.Б.* Оптимальное управление очередью в системе $M|G|1|\infty$ с возможностью ограничения приема заявок // АиТ. 2015. № 3. С. 79–93.

    Grishunina Y.B. Optimal Control of Queue in the $M|G|1|\infty$ System with Possibility of Customer Admission Restriction // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 3. P. 433–445.
35. *Агаларов Я.М., Шоргин В.С.* Об одной задаче максимизации дохода СМО типа $G|M|1$ с пороговым управлением очередью // Информатика и ее применения. 2017. Т. 11. Вып. 4. С. 55–64.
36. *Konovalov M.G., Razumchik R.V.* Comparison of Two Active Queue Management Schemes through the $M|D|1|N$ Queue // Inform. Appl. 2018. V. 12. No. 4. P. 9–15.
37. *Adams R.* Active Queue Management: A Survey // IEEE Commun. Surveys Tutorials. 2013. V. 15. No. 3. P. 1425–1476.
38. *Anup Sh., Ashok B.* A Survey on Active Queue Management Techniques // Int. J. Eng. Comput. Sci. 2016. V. 5. P. 18993–18997.
39. *White H., Christie Lee S.* Queuing with Preemptive Priorities or with Breakdown // Oper. Res. 1958. V. 6. No. 1. P. 79–95.
40. *Зарядов И.С., Горбунова А.В.* Анализ характеристик системы массового обслуживания с двумя входящими потоками, относительным приоритетом и сбросом // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2014. № 10. С. 388–393.

41. *Zaryadov I.S., Gorbunova A.V.* The Analysis of Queueing System with Two Input Flows and Stochastic Drop Mechanism // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Informatics. Physics". 2015. No. 2. P. 33–37.

42. *Зарядов И.С., Королькова А.В.* Применение модели с обобщенным обновлением к анализу характеристик систем активного управления очередями типа Random Early Detection (RED) // T-Comm – Телекоммуникации и транспорт. 2011. № 7. С. 84–88.

43. *Chydzinski A., Mrozowski P.* Queues with Dropping Functions and General Arrival Processes // PLoS ONE. 2016. V. 11. Article ID 0150702.

44. *Wang Y., Lin Ch., Li Q.-L., Fang Y.* A Queueing Analysis for the Denial of Service (DoS) Attacks in Computer Networks // Computer Networks. 2007. V. 51. P. 3564–3573.

45. *Imamverdiyev Y., Nabiyev B.* Queuing Model for Information Security Monitoring Systems // PIT. 2016. V. 07. No. 1. P. 28–32.

46. *Kammas P., Komninos T., Stamatiou Y.C.* Queuing Theory Based Models for Studying Intrusion Evolution and Elimination in Computer Networks // Fourth Int. Conf. on Information Assurance and Security. 2008. P. 167–171.

47. *Ariba Y., Gouaisbaut F., Rahme S., Labit Y.* Traffic Monitoring in Transmission Control Protocol/Active Queue Management Networks through a Time-Delay Observer // IET Control Theory A. 2012. V. 6. No. 2. P. 506–517.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.М. Вишневским.

Поступила в редакцию 26.12.2019

После доработки 27.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020

С.Н. СТЕПАНОВ, д-р техн. наук (stpnvsrg@gmail.com),
М.С. СТЕПАНОВ, канд. техн. наук (mihstep@yandex.ru)
(Московский технический университет связи и информатики)

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ НЕОБХОДИМОГО ОБЪЕМА РЕСУРСА МУЛЬТИСЕРВИСНЫХ УЗЛОВ ДОСТУПА

Построена и исследована математическая модель распределения ресурса передачи информации мультисервисного узла доступа. В модели рассматривается произвольное число потоков мультимедийного трафика, которые различаются интенсивностью поступления заявок, величиной ресурса, используемого для обслуживания одной заявки, и временем занятия ресурса. Интервалы времени между поступлением заявок имеют экспоненциальное распределение с параметром, зависящим от числа заявок рассматриваемого потока, находящихся на обслуживании. Построен рекурсивный алгоритм оценки характеристик. Установлены соотношения между интегральными и потоковыми характеристиками качества обслуживания заявок. Построен эффективный алгоритм оценки объема ресурса, требуемого для обслуживания заданных потоков трафика с необходимым качеством. Эффективность расчетной процедуры достигается в результате организации рекурсии по объему ресурса и использования нормированных значений вероятностей состояний. Рассмотрено решение задачи оценки необходимого объема ресурса для модели мультисервисного узла, допускающего использование механизмов резервирования ресурса и его динамического распределения при обслуживании эластичного трафика. Приведены численные примеры, иллюстрирующие особенности реализации построенных расчетных процедур.

Ключевые слова: мультисервисный узел доступа, марковские модели, система уравнений равновесия, рекурсивные алгоритмы, резервирование, эластичный трафик.

DOI: 10.31857/S0005231020120089

1. Введение

Одной из основных задач моделирования сетей и систем связи является разработка научно обоснованных средств оценки необходимого объема ресурса передачи информации [1–8]. Результаты моделирования также играют существенную роль в обосновании действий оператора, направленных на повышение эффективности работы сети и улучшение качества обслуживания пользователей [5–8]. К таким действиям относятся: дифференцированное обслуживание пользователей, резервирование ресурса, динамическое распределение ресурса и т.д. Особенно важно найти решение перечисленных задач для мультисервисных узлов доступа, реализующих функцию концентрации возникающих информационных потоков. Оцениваемый ресурс определим через величину скорости передачи информационного потока, необходимой для обеспечения заказанного сервиса. В сетях фиксированной связи использование этого определения не вызывает особых затруднений [9–13]. В сетях беспроводной связи битовая скорость является функцией технологии и условий передачи информации, в частности расстояния до базовой станции, играющей роль мультисервисного узла доступа [14–16]. На уровне поступления заявок распределение ресурса для обоих видов связи исследуется схожими методами, поэтому для простоты далее будем предполагать, что рассматривается фиксированная связь. Разработка методов оценки объема ресурса включает в себя решение ряда задач, возникающих из-за необходимости учета специфики формирования и обслуживания мультисервисных информационных потоков. Обсудим их и дадим им более точную формулировку.

В мультисервисных сетях по определению рассматривается процесс совместного обслуживания нескольких потоков трафика. Наличие большого числа потоков с разными характеристиками усложняет задачу планирования необходимого объема ресурса из-за неопределенности в выборе нормативных показателей. Для этих целей обычно рассматривают значения интегральных характеристик. В их числе: максимальная доля потерянных заявок, доля потерянного трафика и т.д. При этом качество обслуживания отдельных потоков не оценивается. Возникающие трудности можно устранить, если найти зависимость между интегральными характеристиками и характеристиками обслуживания отдельных потоков. Решение этой задачи служит основанием для выбора и использования метрики при оценке достаточности ресурса.

Следующая задача относится к построению эффективного алгоритма оценки величины ресурса. Эффективность в данном контексте означает достижение минимальных затрат вычислительных ресурсов на реализацию алгоритма и его стабильность. Все эти требования необходимы для применения алгоритма в программно-аналитических продуктах типа калькуляторов сетевой инфраструктуры. Этого результата можно добиться, если организовать рекурсию по объему ресурса и при проведении вычислений использовать только нормированные значения вероятностей состояний.

Результаты исследований [5–8] показывают, что совместное занятие ресурса несколькими информационными потоками, с одной стороны, может привести к его перераспределению и ухудшению качества обслуживания отдельных потоков, а с другой стороны, может быть использовано для повышения эффективности его занятия, например при пересылке эластичного трафика. Отмеченные положительные и отрицательные стороны совместного обслуживания трафика должны быть учтены при построении модели мультисервисного узла доступа и в дальнейшем приняты во внимание при разработке методов оценки необходимого объема ресурса.

Решения перечисленных задач будут рассмотрены в настоящей работе на примере модели мультисервисного узла доступа, в которой интервалы времени между поступлением заявок зависят от числа заявок рассматриваемого потока, находящихся на обслуживании. Помимо базового варианта модели будут рассмотрены ее обобщения, допускающие использование механизмов резервирования ресурса и его динамического распределения при пересылке эластичного трафика. Решение отдельных задач исследовалось в более ранних публикациях в основном для модели с пуассоновскими потоками заявок. Так, рекурсивные алгоритмы оценки характеристик рассматривались в [1–4], вопросы планирования ресурса исследовались в [9–13], использование механизмов резервирования анализировались в [5, 8, 16], особенности обслуживания эластичного трафика изучались в [8, 10, 11], совместная передача трафика реального времени и данных представлена в [8, 11,4–18]. Здесь эти результаты будут получены в более общей постановке и более эффективными средствами.

Работа имеет следующую структуру. В разделах 2 и 3 построены соответственно функциональная и математическая модели мультисервисного узла доступа. В следующем разделе сформулированы определения основных характеристик качества обслуживания поступающих потоков заявок. Рекурсивный алгоритм их оценки рассмотрен в разделе 5. Там же установлены соотношения между интегральными и потоковыми характеристиками качества обслуживания заявок, которые упрощают выбор метрики при решении задач планирования ресурса узла доступа. Эффективный алгоритм оценки требуемого числа каналов передачи информации построен в разделе 6. Эффективность расчетной процедуры достигается в результате организации рекурсии по объему ресурса и использовании нормированных значений вероятностей состояний. В разделе 7 решение задачи оценки необходимого числа каналов рассмотрено для модели мультисервисного узла, допускающего использование механизмов резервирования ресурса и его динамического распределения при пересылке эластичного трафика.

2. Функциональная модель

Мультисервисный узел доступа реализует функции агрегации и передачи данных от разнообразных источников информационной нагрузки. К таковым можно отнести абонентские терминалы, мультимедийные компьютеры, видеооборудование и т.д. По запросу пользователя устанавливается виртуальное соединение (ВС) и осуществляется передача данных в виде последовательности пакетов. В большинстве случаев эта последовательность представляет локально периодический поток. За периодом генерации пакетов, обычно происходящей с максимальной для рассматриваемого источника скоростью, следует период времени, когда пакеты не поступают. Такая структура потока позволяет реализовать принцип статистического мультиплексирования и уменьшить потребности в ресурсе передачи информации. Виртуальное соединение выполняет пересылку информационных потоков, относящихся к некоторому конечному набору сервисов. Сюда входят передача речи и разных форм видео, обмен файлами и т.д. Будем предполагать, если это не оговаривается особо, что рассматриваются коммуникационные сервисы реального времени, требующие для своего обслуживания фиксированную скорость передачи информации.

Важными составными частями мультисервисного узла доступа являются: процедура контроля доступа (CAC — Call Admission Control), буфер и высокоскоростная линия концентрации трафика. Процедура CAC может быть реализована с использованием протокола RSVP (Resource reSerVation Protocol) в рамках архитектуры управления ресурсами IntServ (Integrated Ser-

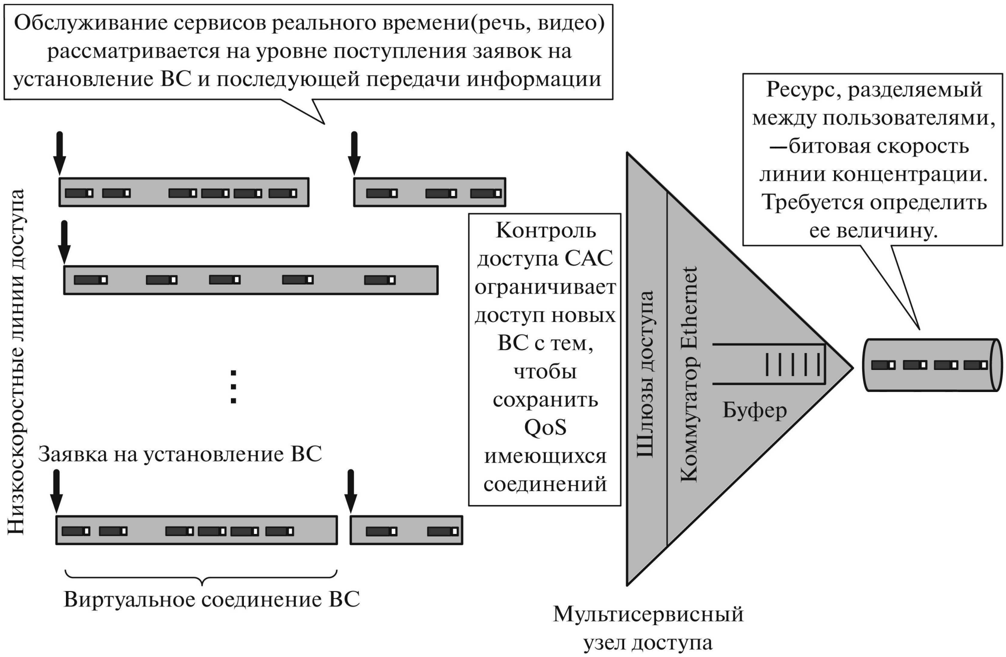


Рис. 1. Функциональная модель мультисервисного узла доступа.

vices). Формализованное описание CAC основано на введении дескриптора трафика, который задает потребность в ресурсе передачи информации у поступившей заявки, и сравнимого дескриптора, оценивающего свободный ресурс [19]. Решение о приеме заявки принимается после сравнения значений обоих показателей. В качестве дескриптора трафика можно взять значение пиковой интенсивности поступления информации в потоке, ассоциированном с обслуживанием заявки. Это решение отличается простотой, однако существенно переоценивает потребности в ресурсе, не учитывает возможности статистического мультиплексирования трафика на уровне пакетов и поэтому неэффективно. Эти недостатки отчасти устраняет использование в качестве дескриптора понятия эффективной скорости передачи информации [20]. Ее величина лежит между средней и пиковой скоростями передачи информации анализируемого потока и учитывает свойство статистического мультиплексирования. Заявка принимается, если сумма значений используемого ресурса r_o и ресурса, требуемого для обслуживания поступившей заявки r_n, не превосходит имеющегося ресурса C. Таким образом, для приема заявки необходимо выполнение неравенства: $r_o + r_n < C$. Буфер получает пакеты из установленных соединений и передает их один за другим по линии. Он служит интерфейсом между поступающими потоками пакетов и высокоскоростной линией и сглаживает всплески информационной нагрузки. Функциональная модель мультисервисного узла доступа показана на рис. 1.

Построенная функциональная модель мультисервисного узла в упрощенной форме описывает процесс занятия и использования ресурса передачи информации. Она освобождена от конкретики технологий и протоколов. Их влияние переводится с микро- на макроуровень в форме параметров, зависящих от состояния сети и действия разного рода механизмов, управляющих процессом обслуживания абонентов. Она служит своего рода интерфейсом между исследуемой системой связи и моделью, с помощью которой далее будут найдены показатели качества обслуживания заявок, используемые для оценки требуемой по нагрузке скорости линии. Отметим, что могут применяться и более сложные модели формализованного описания условий приема заявок в соответствии с процедурой CAC. Часть из них, основанная на применении процедуры резервирования ресурса, будет рассмотрена в разделе 7.

3. Математическая модель

Обозначим через C скорость передачи информации, выраженную в битах в секунду, обеспечиваемую линией концентрации абонентского трафика (см. рис. 1). Назовем единицей ресурса u минимальное требование к скорости от поступающих заявок (скорость одного виртуального канала). Предположим, что значение C нацело делится на u, и обозначим через $v = \frac{C}{u}$ скорость передачи линии, выраженную в виртуальных каналах. Линия используется для обслуживания n потоков заявок на передачу трафика сервисов реального времени. Интервал времени между последовательным поступлением заявок k-го потока имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda_k(i_k) = \alpha_k + i_k\beta_k$, $k = 1, \ldots, n$, где i_k — число заявок k-го потока, находящихся на обслуживании. Для допуска заявки k-го потока требуются b_k виртуальных каналов, которые резервируются на случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром μ_k, и используются для передачи информационного потока, ассоциированного с рассматриваемой заявкой.

В литературе [4, 6–8] рассмотренная модель входного потока заявок носит название *поток BPP* (Bernoulli-Poisson-Pascal) по трем известным частным случаям. Для потока Бернулли $\lambda_k(i_k) = (s_k - i_k)\zeta_k$, где s_k — число пользователей, создающих k-й поток заявок, а ζ_k — параметр экспоненциального распределения времени между последовательными поступлениями заявок от одного пользователя. Для пуассоновского потока $\lambda_k(i_k) = \lambda_k$ и значение λ_k не зависит от числа абонентов, находящихся на обслуживании. Для потока Паскаля $\lambda_k(i_k) = (s_k + i_k)\zeta_k$, где s_k — положительное целое число и $\zeta_k > 0$.

Наличие двух параметров в модели входного потока дает возможность с большей точностью аппроксимировать поступление заявок. Процесс поступления заявок зависит от числа пользователей, находящихся на обслуживании. Тем самым учитывается зависимость поступления заявок от загрузки линии связи. Рассмотренную модель рекомендуется использовать в тех ситуациях, когда необходимо выделить небольшие группы так называемых *тяжелых* абонентов, создающих существенный объем потенциального трафика. Необходимость учета этой особенности формирования входного потока особенно актуальна для перспективных сетей подвижной связи. Эти системы работают в диапазоне высоких частот. Здесь размеры соты невелики, и число активных абонентов влияет на величину интенсивности поступающего потока заявок. Аналогичная ситуация наблюдается в местах городской застройки при обслуживании небольших территорий (офисы, отдельные здания), где используются малые соты (фемтосоты, пикосоты, метросоты и т.д.) с предельно малым (до нескольких десятков) числом абонентов. В дальнейшем, не теряя общности изложения материала, ограничимся рассмотрением модели входного потока Бернулли. По аналогии с моносервисным случаем эта модель называется мультисервисной моделью Энгсета.

4. Характеристики обслуживания заявок

Достаточность ресурса линии оценим долей потерянных заявок, а эффективность его использования — средним числом занятых единиц ресурса. Для оценки этих характеристик достаточно знать долю времени пребывания линии в состоянии с известным числом заявок каждого потока, находящихся на обслуживании. Выбор характеристик определяет состояние модели в виде вектора $(i_1, \ldots, i_n)$, где i_k — число обслуживаемых заявок k-го потока. Значения i_k ограничены пропускной способностью линии $\sum_{k=1}^{n} i_k b_k \le v$ и числом абонентов в каждой группе $i_k \le s_k$, $k = 1, \ldots, n$. Векторы $(i_1, \ldots, i_n)$, удовлетворяющие приведенным неравенствам, определяют пространство S состояний модели.

Динамика изменения состояний модели во времени описывается случайным марковским процессом $r(t) = (i_1(t), \ldots, i_n(t))$, где $i_k(t)$ — число заявок k-го потока, находящихся в момент t на обслуживании. Пусть U_k — множество состояний $(i_1, \ldots, i_n) \in S$, удовлетворяющих условию $i_1 b_1 + \ldots + i_n b_n + b_k > v$. В каждом из состояний U_k поступившая заявка k-го потока получает отказ. Обозначим через $p(i_1, \ldots, i_n)$ стационарную вероятность состояния $(i_1, \ldots, i_n)$. Она имеет интерпретацию доли времени пребывания $r(t)$ в $(i_1, \ldots, i_n)$, что позволяет использовать $p(i_1, \ldots, i_n)$ для оценки характеристик модели.

Из обратимости марковского процесса $r(t)$ следует свойство мультипликативности. Для всех $(i_1, \ldots, i_n) \in S$

$$p(i_1, \ldots, i_n) = \frac{1}{N} \times \frac{\prod\limits_{j=0}^{i_1-1} (s_1 - j)\gamma_1^{i_1}}{i_1!} \cdots \frac{\prod\limits_{j=0}^{i_n-1} (s_n - j)\gamma_n^{i_n}}{i_n!}, \tag{1}$$

где $\gamma_k = \zeta_k / \mu_k$ — среднее число заявок, поступающих от одного абонента k-го потока за среднее время обслуживания заявки $1/\mu_k$. Далее это время будет принято за единицу и отдельно в модели не рассматривается, а N — нормировочная константа

$$N = \sum_{(i_1, \ldots, i_n) \in S} \frac{\prod\limits_{j=0}^{i_1-1} (s_1 - j)\gamma_1^{i_1}}{i_1!} \cdots \frac{\prod\limits_{j=0}^{i_n-1} (s_n - j)\gamma_n^{i_n}}{i_n!}.$$

Мультипликативное соотношение и алгоритмы, полученные на его основе, не зависят от вида функции распределения времени обслуживания заявки и функции распределения времени между поступлением заявок от одного абонента [21—23]. Требуется только, чтобы соответствующие времена не зависели друг от друга. Это существенно расширяет область применения полученных расчетных выражений.

Качество обслуживания заявок k-го потока оценим долей времени недоступности ресурса передачи $\pi_{t,k}$; долей потерянных заявок $\pi_{c,k}$; средним числом потенциальных соединений $a_k = \frac{s_k\,\gamma_k}{1+\gamma_k}$ (среднее число соединений в отсутствие потерь); средним числом занятых единиц ресурса m_k; средним числом обслуживаемых заявок $y_k = m_k/b_k$; долей потерянных соединений $\pi_{\ell,k} = (a_k - y_k)/a_k$ и интенсивностью входного потока заявок $\Lambda_k = (s_k - y_k)\gamma_k$:

$$\pi_{t,k} = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in U_k} p(i_1,\ldots,i_n); \tag{2}$$

$$\pi_{c,k} = \frac{\sum\limits_{(i_1,\ldots,i_n)\in U_k} p(i_1,\ldots,i_n)(s_k - i_k)}{\sum\limits_{(i_1,\ldots,i_n)\in S} p(i_1,\ldots,i_n)(s_k - i_k)};$$

$$m_k = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in S} p(i_1,\ldots,i_n) i_k b_k.$$

Из формулы Литтла следует $y_k = \Lambda_k(1 - \pi_{c,k})$. Из определений характеристик получаем $\pi_{c,k} = \pi_{\ell,k}\,(1+\gamma_k)/(1+\pi_{\ell,k}\,\gamma_k)$. Если для k-го потока заявок известно значение одной из введенных ранее характеристик y_k, m_k, $\pi_{c,k}$, $\pi_{\ell,k}$, Λ_k и величины входных параметров s_k, a_k (или s_k, γ_k), то, используя приведенные выше выражения, можно найти значения оставшихся характеристик. Величина a_k определяет потенциальное число соединений и будет далее использоваться при описании входных параметров модели в процессе проведения вычислений. Предположим, что в результате измерений или расчетов стали известны значения $\pi_{c,k}$, s_k, a_k. Величины оставшихся характеристик могут быть найдены из выражений:

$$\gamma_k = \frac{a_k}{s_k - a_k}; \quad \pi_{\ell,k} = \frac{\pi_{c,k}(s_k - a_k)}{s_k - a_k\pi_{c,k}}; \quad y_k = \frac{a_k s_k(1-\pi_{c,k})}{s_k - a_k\pi_{c,k}}; \tag{3}$$
$$m_k = \frac{a_k b_k s_k(1-\pi_{c,k})}{s_k - a_k\pi_{c,k}}; \quad \Lambda_k = \frac{a_k s_k}{s_k - a_k\pi_{c,k}}.$$

5. Оценка характеристик и их свойства

Алгоритм оценки характеристик модели основан на использовании показателей пребывания $r(t)$ во множестве агрегированных состояний модели S_i, $i = 0, 1, \ldots, v$, в которое включены состояния $(i_1,\ldots,i_n)\in S$, удовлетворяющие условию $i_1\,b_1 + \ldots + i_n\,b_n = i$. Пусть $p(i)$ — вероятность занятости i единиц ресурса, а $y_k(i)$ — среднее число заявок k-го потока, находящихся на обслуживании в ситуации, когда заняты i единиц ресурса

$$p(i) = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in S_i} p(i_1,\ldots,i_n), \quad y_k(i) = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in S_i} p(i_1,\ldots,i_n)\, i_k. \tag{4}$$

Используя $p(i)$ и $y_k(i)$, можно оценить все введенные ранее характеристики модели. Из определений $\pi_{t,k}$ и $\pi_{c,k}$ следует

$$\pi_{t,k} = \sum_{i=v-b_k+1}^{v} p(i); \quad \pi_{c,k} = \frac{\sum\limits_{i=v-b_k+1}^{v} \big(p(i)\, s_k - y_k(i)\big)}{\sum\limits_{i=0}^{v} \big(p(i)\, s_k - y_k(i)\big)}. \tag{5}$$

Значения y_k, m_k, $\pi_{\ell,k}$, Λ_k находятся с помощью полученных ранее формул (3) их косвенной оценки через значения $\pi_{t,k}, \pi_{c,k}$ и величины s_k, a_k. Построим рекурсивный алгоритм оценки $p(i)$ и $y_k(i)$, $i = 0, 1, \ldots, v$. Из обратимости $r(t)$ для $(i_1, \ldots, i_n) \in S$ следует соотношение детального баланса

$$p(i_1, \ldots, i_k - 1, \ldots, i_n)\big(s_k - i_k + 1\big)\gamma_k = p(i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_n)\, i_k.$$

Просуммируем полученное выражение по всем $(i_1, \ldots, i_n) \in S_i$. Используя определения S_i, $p(i)$, $y_k(i)$, находим искомую рекурсию

$$\begin{gathered} Y_k(i) = P(i - b_k)\, s_k\, \gamma_k - Y_k(i - b_k)\, \gamma_k, \quad k = 1, \ldots, n; \\ P(i) = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{n} b_k\, Y_k(i). \end{gathered} \tag{6}$$

Положим значение[1] $P(0) = 1$. По определению $Y_k(0) = 0$, $k = 1, \ldots, n$. Выразим значения $Y_k(i)$, $k = 1, \ldots, n$, $P(i)$ через $P(0)$, используя рекурсию (6) и последовательно увеличивая i от 1 до v. Находим величину нормировочной константы $N = \sum_{i=0}^{v} P(i)$, нормированные значения вероятностей $p(i) = P(i)/N$ и вспомогательных функций $y_k(i) = Y_k(i)/N$, $i = 0, 1, \ldots, v$. Рассчитываем значения характеристик с помощью (5), определения и формулы (3). При реализации рекурсии для больших значений v может теряться точность вычислений. Это происходит из-за наличия отрицательного слагаемого в (6). В данной ситуации для расчета характеристик рекомендуется использовать алгоритм свертки [7].

Воспользуемся разработанными алгоритмами для анализа зависимости характеристик качества обслуживания заявок от параметров возникающих информационных потоков и условий допуска заявок к занятию ресурса. Обозначим через $\rho = \frac{1}{v} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ потенциальную загрузку одного виртуального канала (в.к.). Будем предполагать, что b_k занумерованы в порядке возрастания их значений. Рассмотрим модель узла для следующих значений входных параметров: $v = 100$; $n = 4$; $b_1 = 1$; $b_2 = 5$; $b_3 = 10$; $b_4 = 20$. Величины v и b_k выражены в виртуальных каналах. Примем, что $a_k = v\rho/nb_k$, $s_k = \lfloor a_k \rfloor + 10$, $k = 1, 2, 3, 4$. Отсюда следует, что $\gamma_k = \frac{a_k}{s_k - a_k}$ и потенциальная загрузка ресурса $a_k b_k$ у всех потоков одинакова и равна $v\rho/n$. На рис. 2 показана зависимость $\pi'_{c,k} = \pi_{c,k}/b_k$ от увеличения ρ.

В ситуации, когда $\rho \approx 1$, выполняется соотношение $\pi_{c,i}/b_i \approx \pi_{c,j}/b_j$. Кроме этого, если $\rho < 1$ и $b_i > b_j$, то $\pi_{c,i}/b_i > \pi_{c,j}/b_j$, если $\rho > 1$ и $b_i > b_j$, то

[1] Здесь и далее прописные буквы используются для обозначения ненормированных величин вероятностей и характеристик, а строчные — для нормированных.

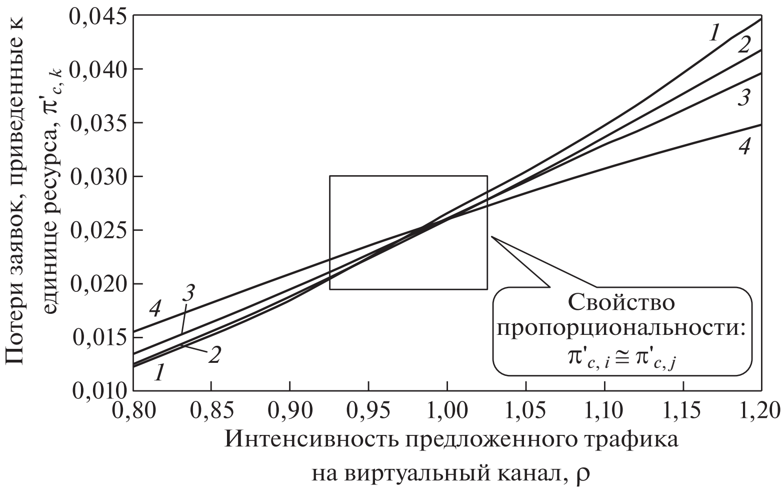


Рис. 2. Зависимость потерь заявок, приведенных к единице ресурса, от потенциальной загрузки единицы ресурса.

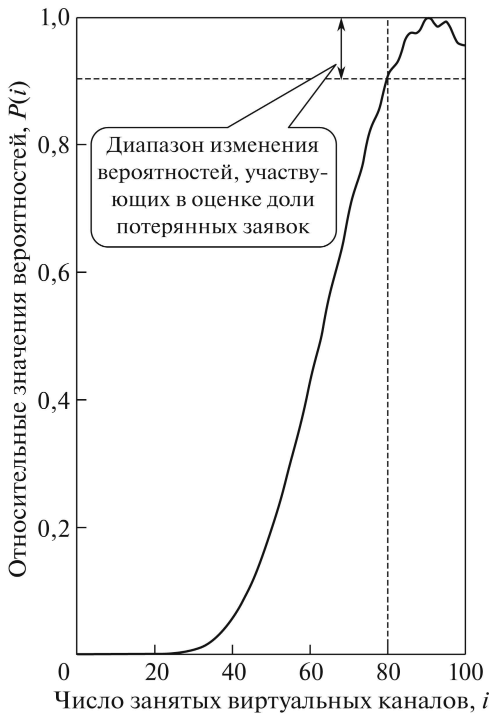


Рис. 3. Зависимость относительных значений $P(i)$ от i при $\rho = 1$.

$\pi_{c,i}/b_i < \pi_{c,j}/b_j$. Дадим пояснение этим результатам. Используя формулу мультипликативности и определение $\pi_{c,k}$, можно показать, что величина характеристики совпадает со значением $\pi_{t,k}$ доли времени недоступности ресурса передачи для заявок k-го потока, рассчитанным для тех же параметров,

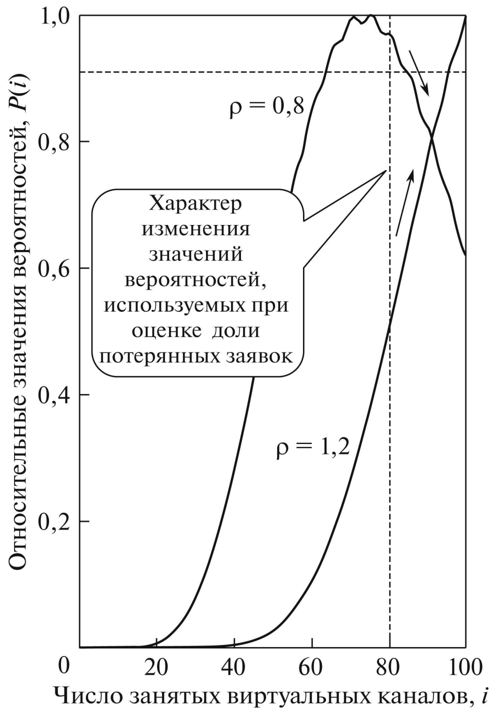


Рис. 4. Зависимость относительных значений $P(i)$ от i при $\rho = 0{,}8$ и $\rho = 1{,}2$.

но с числом абонентов, формирующих k-й поток, равным $s_k - 1$, т.е. на единицу меньшим, чем в анализируемой модели. Отмеченное изменение числа абонентов не сказывается сильно на свойствах и величине $\pi_{c,k}$. По этой причине зависимость поведения $\pi_{c,k}$ от ρ можно исследовать на примере зависимости $\pi_{t,k}$ от ρ. По определению $\pi_{t,k} = p(v) + p(v-1) + \ldots + p(v - b_k + 1)$. В этой сумме представлены b_k значений вероятностей состояний с максимальным занятым ресурсом. Зависимость $P(i)$, отнормированных по максимальному значению $P(i)$, показана на рис. 3 ($\rho = 1$) и рис. 4 ($\rho = 0{,}8$ и $\rho = 1{,}2$).

Из результатов расчетов видно, что в области $\rho \approx 1$ величины $P(i)$, участвующие в определении $\pi_{t,k}$, примерно равны, а для ρ, больших или меньших единицы, выполняются свойства монотонного убывания (для $\rho < 1$) и возрастания (для $\rho > 1$). Эти свойства и определяют характер поведения $\pi'_{c,k}$, отмеченный на рис. 2.

Рассмотрим, какие практические приложения имеет полученный результат. При обслуживании потоков мультисервисного трафика возникают проблемы с выбором метрик для оценки достаточности ресурса. Трудности связаны с тем, что обычно нормируются интегральные характеристики качества обслуживания заявок, например, такие, как максимальная доля потерь заявок, а какие при этом величины потерь у отдельных потоков, остается неясным. Воспользуемся отмеченными выше свойствами совместного обслуживания заявок и покажем, что существуют простые соотношения, которые могут помочь решить сформулированную проблему.

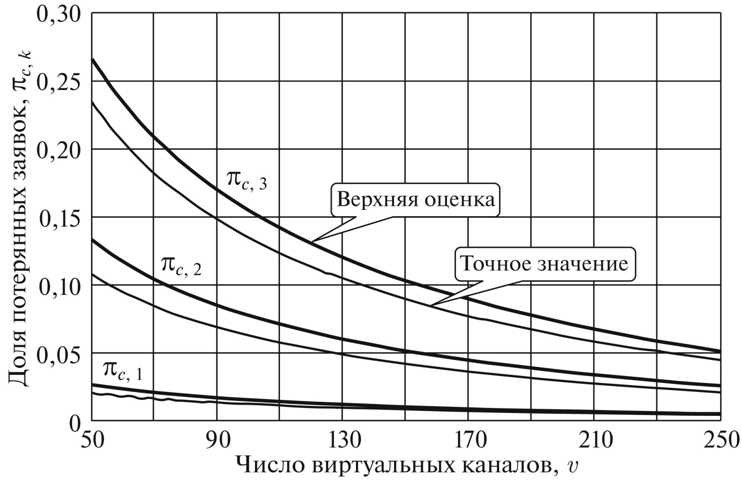


Рис. 5. Точные и приближенные значения потерь в зависимости от v.

Обычно в задачах планирования $\rho \lesssim 1$. Примем далее это допущение. Предположим, что достаточность ресурса планируется исходя из ограничения на максимальную долю потерянных заявок $\max\limits_k \pi_{c,k} = \pi_{c,n} \leq \pi$. Из свойства пропорциональности для $\rho \lesssim 1$ находим оценки сверху для потерь заявок всех потоков

$$\pi_{c,k} \lesssim \pi_{c,n} \frac{b_k}{b_n} = \pi \frac{b_k}{b_n}. \tag{7}$$

На рис. 5 показаны результаты анализа погрешности приближенного расчета потерь при заданном значении максимальной доли потерянных заявок. Исходные данные те же, что были использованы при вычислении данных, представленных на рис. 3, за исключением v, которое менялось от 50 до 300. Нагрузка на канал $\rho = 0{,}8$. Приближенные значения $\pi_{c,k}$ найдены из соотно-

Анализ погрешности приближенного расчета потерь исходя из известного значения максимальной доли потерянных заявок

v	π_1		π_2		π_3	
ед.рес.	Точно	Прибл.	Точно	Прибл.	Точно	Прибл.
50	0,032887	0,034599	0,170260	0,172995	0,348522	0,345990
75	0,029118	0,029235	0,144857	0,146175	0,293293	0,292350
100	0,026561	0,026081	0,129868	0,130405	0,260794	0,260809
125	0,024229	0,023859	0,118881	0,119296	0,238268	0,238592
150	0,022739	0,022160	0,111309	0,110798	0,222043	0,221596
175	0,021829	0,020960	0,105821	0,104798	0,209939	0,209596
200	0,020937	0,019936	0,101177	0,099679	0,200654	0,199357
225	0,019929	0,019057	0,096631	0,095287	0,191666	0,190574
250	0,019425	0,018426	0,093898	0,092132	0,185390	0,184264
275	0,018968	0,017774	0,091270	0,088869	0,179780	0,177738
300	0,018323	0,017197	0,088150	0,085986	0,173754	0,171971

шений (7) и выделены на рисунке жирной линией. Полученные приближенные значения потерь отличаются высокой точностью особенно для больших значений ресурса передачи информации.

Особенно высокую точность оценки (7) имеют в области $\rho \approx 1$. Соответствующие результаты приведены в таблице для тех же значений параметров, что использовались для рис. 5.

6. Эффективный алгоритм оценки объема ресурса

Рассмотрим использование рекурсии (6) для оценки v скорости линии концентрации мультисервисного трафика, требуемой для обслуживания заданных потоков трафика с требуемым качеством. Предложенный трафик характеризуется величинами a_k, b_k, s_k, фиксированными на время решения задачи. Достаточность ресурса оценивается из достижения требуемых значений $\pi = \max\limits_k \pi_{c,k}$. Понятно, что сформулированная задача может быть решена методом перебора. Этот подход имеет два существенных недостатка. Во-первых, для каждого промежуточного значения объема ресурса r вычисляются все ненормированные вероятности состояний $P(i)$, $i = 0, 1, \ldots, r$, которые затем нормируются. Хотя для оценки π достаточно знать только $b = \max\limits_k b_k$ нормированных вероятностей состояний с максимальным занятым ресурсом. Тем самым значительно увеличивается объем вычислительной работы при определении v. Во-вторых, реализация рекурсии (6) может привести к вычислительным сложностям из-за применения в (6) относительных значений $P(i)$, выраженных через $P(0)$. Значение $p(0)$ быстро стремится к нулю с ростом v. Эта характеристика (6) затрудняет реализацию рекурсии в программно-аналитических продуктах типа калькуляторов сетевой инфраструктуры.

Построим алгоритм оценки v, свободный от перечисленных недостатков. Рекурсия будет вестись по объему имеющегося ресурса r, и при ее реализации будут использоваться только b нормированных вероятностей состояний модели с максимальным числом занятых каналов. Обозначим через r переменное значение ресурса линии, а через $p_r(i)$, $y_{k,r}(i)$ обозначим зависимость от r для вероятностей состояний $p(i)$ и вспомогательных функций $y_k(i)$. Аналогично через $y_k(r)$ и $\pi_{c,k}(r)$ обозначим зависимость от r для среднего числа обслуживаемых заявок y_k и доли потерянных заявок $\pi_{c,k}$. Реализация алгоритма включает в себя следующие шаги.

1. Положим $p_0(0) = 1$. Из (4) следуют соотношения $y_{k,0}(0) = 0$, $k = 1, \ldots, n$.
2. Для каждого фиксированного $r = 1, 2, \ldots$ находим $\min(b, r+1)$ нормированных вероятностей $p_r(i)$, $i = r, r-1, \ldots, \max(r-b+1, 0)$ и значений вспомогательных функций $y_{k,r}(i)$, $k = 1, \ldots, n$, $i = r, r-1, \ldots, \max(r-b+1, 0)$ с максимальным занятым ресурсом. Для этого используются аналогичные вероятности и вспомогательные функции, полученные на предыдущем шаге. Вначале находится нормировочная константа

$$1 + \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{n} \Big\{ p_{r-1}(r-b_k)\, s_k - y_{k,r-1}(r-b_k) \Big\}\, b_k\, \gamma_k = 1 + S_{r-1},$$

затем нормированные значения вероятностей

$$p_r(r) = \frac{S_{r-1}}{1+S_{r-1}}, \quad i = r;$$

$$p_r(i) = \frac{p_{r-1}(i)}{1+S_{r-1}}, \quad i = r-1,\, r-2,\, \ldots, \max(r-b+1, 0)$$

и вспомогательных функций

$$y_{k,r}(i) = \frac{y_{k,r-1}(i)}{1+S_{r-1}}, \quad k = 1, \ldots, n; \quad i = r,\, r-1,\, \ldots, \max(r-b+1, 0);$$

$$y_k(r) = \frac{y_k(r-1)}{1+S_{r-1}} + y_{k,r}(r), \quad k = 1, \ldots, n.$$

3. Далее рассчитывается значение функционала, используемого для оценки достаточности ресурса. В рассматриваемом случае таковым является $\pi = \max\limits_k \pi_{c,k}$. Выражение для потерь заявок k-го потока для объема ресурса r находится с использованием соотношения (5) и имеет вид

$$\pi_{c,k}(r) = \frac{\sum\limits_{i=r-b_k+1}^{r} \big(p_r(i)\, s_k - y_{k,r}(i)\big)}{s_k - y_k(r)}.$$

   Величина π сравнивается с его нормативным значением, и если требуемый уровень потерь не достигнут, то число виртуальных каналов увеличивается на единицу и расчеты повторяются начиная с п. 2.

Для расчета характеристик и выполнения следующего шага достаточно знать b вероятностей состояний и соответствующее число значений вспомогательных функций с максимальным числом занятых каналов. Количество используемых параметров не зависит от объема ресурса. При проведении вычислений не возникает проблем с переполнением или исчезновением порядка, поскольку расчеты выполняются только с нормированными значениями вероятностей состояний модели с максимальным числом занятых каналов. По условиям анализа модели они имеют наибольшие относительные значения. По сравнению с традиционным методом оптимизированный алгоритм сокращает расчетную работу при оценке требуемого числа каналов мультисервисного узла доступа примерно в $v/(2+\frac{b}{n})$ раз.

7. Оценка ресурса в условиях дифференцированного обслуживания

В исследуемой модели мультисервисного узла доступа все потоки имеют одинаковые условия использования ресурса передачи информации. Встроим в модель узла процедуры дифференцированного обслуживания потоков трафика и воспользуемся появляющимися возможностями для решения следующих двух задач. Первая из них связана с устранением отрицательных последствий неконтролируемого перераспределения ресурса в пользу отдельных потоков. Вторая — относится к анализу процедур управления ресурсом, направленных на повышения эффективности его занятия. Рассмотрим, как в этих условиях решается задача оценки объема ресурса, необходимого по нагрузке и качеству обслуживания пользователей услуг связи, а также как происходит выбор параметров управления ресурсом.

Начнем с первой задачи. Необходимость ее решения возникает при совместной передаче неоднородного трафика в единой транспортной среде. Заявки с малыми требованиями к ресурсу вытесняют из процесса обслуживания заявки, имеющие существенные требования к скорости передачи. Самый простой способ выравнивания показателей обслуживания или в предоставлении преимущества в занятии ресурса заключается в использовании механизмов его резервирования для выделенной группы потоков. Интерес представляют те способы, которые допускают возможность относительно простой реализации и оценки эффективности применения. Этими качествами обладает процедура резервирования, основанная на фильтрации поступающих потоков заявок, зависящей от номера потока и степени загрузки ресурса.

Вернемся к математическому описанию модели мультисервисного узла доступа, изложенному в разделе 3, и внесем в него изменения, относящиеся к реализации процедуры резервирования. Обозначим через $\varphi_k(i)$ вероятностную функцию, которая будет применяться для фильтрации процесса доступа поступающих заявок к ресурсу в зависимости от значений k номера потока и i общего числа занятых единиц ресурса. Заявка k-го потока, поступившая в момент занятости i единиц ресурса, принимается к обслуживанию с вероятностью $1-\varphi_k(i)$, а с противоположной вероятностью $\varphi_k(i)$ заявка получает отказ и не возобновляется. В остальном схема функционирования узла не меняется. Сохраним для параметров и характеристик обобщенной модели те же обозначения, что были использованы в разделе 3.

Динамика изменения состояний $(i_1,\ldots,i_n)$ описывается многомерным марковским процессом $r(t)=(i_1(t),\ldots,i_n(t))$ с компонентами, введенными в разделе 4, и изменениями в пространстве состояний S, вытекающими из применения функций $\varphi_k(i)$. Значения $p(i_1,\ldots,i_n)$ стационарных вероятностей $r(t)$ связаны системой уравнений равновесия, имеющей вид

$$
\begin{aligned}
(8)\qquad & P(i_1,\ldots,i_n)\sum_{k=1}^{n}\Big((s_k-i_k)\zeta_k\left(1-\varphi_k(i)\right)+i_k\,\mu_k\,I(i_k>0)\Big)=\\
&=\sum_{k=1}^{n}P(i_1,\ldots,i_k-1,\ldots,i_n)\,(s_k-i_k+1)\zeta_k\left(1-\varphi_k(i-b_k)\right)I(i_k>0)+\\
&\quad+\sum_{k=1}^{n}P(i_1,\ldots,i_k+1,\ldots,i_n)\,(i_k+1)\,\mu_k\,I(i_k+1\le s_k,\,i+b_k\le v),\\
&\qquad (i_1,\ldots,i_n)\in S.
\end{aligned}
$$

В (8) для состояния $(i_1,\ldots,i_n)\in S$ значение i определяет величину занятого ресурса $i=i_1b_1+\ldots+i_nb_n$, а $I(\cdot)$ — индикаторная функция события. Найденные значения $P(i_1,\ldots,i_n)$ необходимо нормировать.

Характеристики качества обслуживания заявок определяются по аналогии с (2). Приведем несколько определений:

$$\pi_{t,k} = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in S} p(i_1,\ldots,i_n)\,\varphi_k(i); \tag{9}$$

$$m_k = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in S} p(i_1,\ldots,i_n)\,i_k\,b_k; \quad y_k = m_k/b_k;$$

$$\pi_{c,k} = \frac{\sum\limits_{(i_1,\ldots,i_n)\in S} p(i_1,\ldots,i_n)\,(s_k - i_k)\,\varphi_k(i)}{\sum\limits_{(i_1,\ldots,i_n)\in S} p(i_1,\ldots,i_n)\,(s_k - i_k)}; \quad \pi_{\ell,k} = (a_k - y_k)/a_k.$$

Для оценки объема ресурса и выбора параметров его резервирования необходимо решить систему уравнений (8). Сделать это можно итерационным методом Гаусса–Зейделя. Для оценки характеристик можно также использовать и достаточно обоснованные приближенные методы.

Результаты расчетов показывают, что при совместной передаче неоднородного трафика в единой транспортной среде заявки с малыми требованиями к ресурсу имеют существенно меньшие потери и ограничивают тем самым допуск к ресурсу для других заявок. Наличие механизма резервирования дает возможность выравнять потери заявок при обслуживании неоднородного трафика, а также создать условия для использования определенного объема ресурса только заявками выделенной группы потоков. Покажем это. Для решения первой задачи достаточно выбрать значения функций фильтрации из соотношений (предполагается, что b_k занумерованы в порядке возрастания значений):

$$\varphi_k(i) = 1, \quad i = v - b_n + 1, v - b_n + 2, \ldots, v; \quad k = 1,\ldots,n. \tag{10}$$

В этой ситуации доли времени занятости ресурса для всех потоков будут одинаковыми, поскольку выполняется соотношение

$$\pi_{t,k} = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in S} p(i_1,\ldots,i_n)\varphi_k(i) = \sum_{i=v-b_n+1}^{v} p(i), \quad k = 1,\ldots,n. \tag{11}$$

Допустим, ставится задача предоставить в эксклюзивное пользование z виртуальных каналов потокам заявок с номерами $2,3,\ldots,n$. В этой ситуации функцию фильтрации заявок выберем из соотношений

$$\begin{aligned} &\varphi_k(i) = 1, \quad i = v - b_1 - z + 1, v - b_1 - z + 2, \ldots, v; \quad k = 1; \\ &\varphi_k(i) = 1, \quad i = v - b_k + 1, v - b_k + 2, \ldots, v; \quad k = 2,3,\ldots,n. \end{aligned} \tag{12}$$

В результате такого выбора функций блокировки заявки потоков с номерами $k \geq 2$ используют все доступные каналы узла. Причем z каналов из v имеющихся могут использоваться только этими потоками. Заявки 1-го потока не могут занять более $v - z$ каналов. Увеличивая значение z, можно

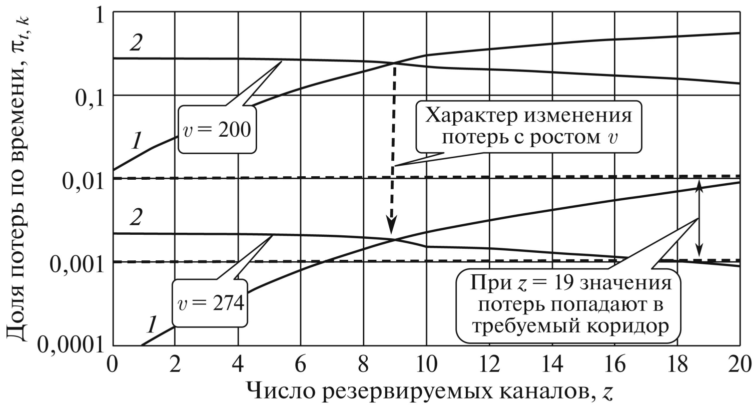


Рис. 6. Оценка величин ресурса и уровня резервирования, обеспечивающих заданные характеристики обслуживания заявок мультисервисного узла доступа.

уменьшить потери потоков с номерами $k \geq 2$ до требуемых величин. Правда, этот результат достигается за счет ухудшения качества обслуживания заявок 1-го потока. По этой причине наряду с использованием резервирования для выравнивания потерь заявок необходимо также увеличивать и общий объем ресурса с тем, чтобы качество обслуживания всех потоков было в пределах нормы.

Рассмотрим такую постановку задачи. Предположим, что требуется найти значения v и z такие, чтобы потери «легкого» трафика (1-й поток) были менее π_1, а потери «тяжелого» трафика (потоки с номерами $k \geq 2$) — менее π_2. Для решения задачи поступим следующим образом. После выравнивания потерь только «тяжелых» заявок с использованием правила (10) для них определяется число z резервируемых каналов, обеспечивающее требуемое соотношение потерь для всех потоков трафика. Если значение z с такими свойствами не находится, то v увеличивается на единицу и расчеты повторяются. Поскольку можно ожидать, что с ростом v при фиксированном z потери уменьшаются, а с увеличением z при фиксированном v потери «легкого» трафика увеличиваются, «тяжелого» — падают, то всегда можно найти требуемое решение. Иллюстрацией этого подхода служат данные, приведенные на рис. 6, где показаны зависимости потерь заявок $\pi_{t,k}$ от увеличения v и z.

Характеристики найдены для следующих значений входных параметров: $v = 200$; $n = 3$; $b_1 = 1$; $\mu_1 = 1$; $b_2 = 5$; $\mu_2 = 1$; $b_3 = 10$; $\mu_3 = 1$. Величины v, b_k и z выражены в виртуальных каналах. Примем, что $a_k = v\rho/nb_k$, $s_k = \lfloor a_k \rfloor + 10$, $k = 1, 2, 3$. Здесь ρ — потенциальная нагрузка одного в.к., $\zeta_k = \frac{a_k}{s_k - a_k}$. Требуемые уровни потерь $\pi_1 = 0{,}01$; $\pi_2 = 0{,}001$. Цифрой 1 обозначена доля потерь по времени для 1-го потока, цифрой 2 — для 2-го и 3-го потоков (значения потерь равны в соответствии с (10)). Начальное значение объема ресурса $v = 200$. Последовательное увеличение v, использование процедуры резервирования и проверка условия попадания значений потерь в требуемый коридор $\pi_{t,1} \leq 0{,}01$; $\pi_{t,2} = \pi_{t,3} \leq 0{,}001$ приводят к следующим значениям: $v = 374$, $z = 19$. При данном выборе объема ресурса и параметров резервирования выполняются соотношения: $\pi_{t,1} = 0{,}007929 \leq 0{,}01$ и $\pi_{t,2} = \pi_{t,3} = 0{,}000969 \leq 0{,}001$.

В заключение отметим следующее. Если функция внутренней блокировки равна единице, то осуществляется процедура «жесткого» контроля за допуском заявок. Она дает возможность создать условия для их дифференцированного обслуживания. Однако это происходит за счет некоторого уменьшения коэффициента использования канала. Отрицательные последствия этого эффекта можно ослабить, если выполнить допуск заявок с вероятностью, меньшей единицы. В этом случае можно увеличить коэффициент использования канала за счет некоторого изменения условий дифференцированного обслуживания заявок. Понятно, что в такой постановке выбор значений функции внутренней блокировки зависит от экономических условий обслуживания заявок. Исследование этой проблемы в данной работе не рассматривается.

Теперь обратимся к решению второй из сформулированных в начале раздела задач. Информационные потоки, обладающие свойством эластичности[2], можно передавать с большей скоростью, используя для этих целей ресурс, оставшийся свободным от обслуживания трафика реального времени. Вернемся к математическому описанию модели мультисервисного узла доступа, изложенному в разделе 3, и внесем в нее изменения, относящиеся к ускоренной передаче данных.

Предположим, что свойством эластичности обладает дополнительный $(n+1)$-й поток и его параметры не зависят от номера потока. Заявки на передачу данных (файлов) поступают от конечной группы абонентов. Обозначим через s их число. Заявки от одного абонента поступают через случайное время, имеющее экспоненциальное распределение с параметром ζ. Для простоты предположим, что для обслуживания заявки требуется как минимум один виртуальный канал. Время обслуживания заявки одним каналом имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. Таким образом, объем файла имеет экспоненциальное распределение со средним значением $F = u/\mu$, выраженным в битах.

Построим процедуру динамического распределения ресурса при организации пересылки файлов. Допустим, что на обслуживании находятся d заявок на передачу данных и для этого используются $(v-i)$ виртуальных каналов, оставшихся свободными от обслуживания трафика реального времени. Пусть $g = \lfloor \frac{v-i}{d} \rfloor$ — целая часть от деления $(v-i)$ на d. Разделим d заявок на две группы $d = d_1 + d_2$, где $d_1 = v - i - g\,d$, а $d_2 = (g+1)\,d - (v-i)$. Для обслуживания заявок из групп d_1 и d_2 используются соответственно $(g+1)$ и g виртуальных каналов. При выбранном распределении ресурса все $(v-i)$ свободных каналов занимаются на обслуживание d принятых заявок на передачу данных, а время до освобождения первой из d заявок имеет экспоненциальное распределение с параметром $(v-i)\mu$. Понятно, что в рассматриваемых условиях скорость передачи каждого файла возрастает с появлением свободных

[2] К ним относятся передача файлов и других подобных им данных, допускающая небольшую задержку без потери качества обслуживания.

каналов и, наоборот, уменьшается при их сокращении, не становясь при этом меньше скорости, обеспечиваемой одним виртуальным каналом. В остальном схема функционирования узла не меняется. Сохраним для параметров и характеристик обобщенной модели те же обозначения, что были использованы в разделе 3.

Пусть $i_k(t)$ — число заявок k-го потока на передачу трафика реального времени, обслуживаемых в момент времени t, а $d(t)$ — число заявок на передачу файлов, обслуживаемых в момент времени t. Динамика изменения состояний модели описывается марковским процессом $r(t) = \big(i_1(t), \ldots, i_n(t), d(t)\big)$, определенным на пространстве состояний S и состоящем из векторов $(i_1, \ldots, i_n, d)$ с компонентами

$$i_1 = 0, 1, \ldots, \min\left\{s_1, \left\lfloor \frac{v}{b_1} \right\rfloor\right\};$$

$$i_n = 0, 1, \ldots, \min\left\{s_n, \left\lfloor \frac{v - i_1\, b_1 - \ldots - i_{n-1}\, b_{n-1}}{b_n} \right\rfloor\right\}; \ldots;$$

$$d = 0, 1, \ldots, v - i_1\, b_1 - \ldots - i_n\, b_n.$$

Значения $p(i_1, \ldots, i_n, d)$ стационарных вероятностей $r(t)$ связаны системой уравнений равновесия, имеющей вид

$$\text{(13)} \qquad P(i_1, \ldots, i_n, d) \sum_{k=1}^{n} \Big(\big((s_k - i_k)\zeta_k I(i + d + b_k \le v) + i_k\, \mu_k\, I(i_k > 0) \big) +$$

$$+ (s - d)\zeta I(i + d + 1 \le v) + (v - i)\mu I(d > 0) \Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(i_1, \ldots, i_k - 1, \ldots, i_n, d)\, (s_k - i_k + 1)\zeta_k\, I(i_k > 0) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} P(i_1, \ldots, i_k + 1, \ldots, i_n, d)\, (i_k + 1)\, \mu_k\, I(i_k + 1 \le s_k, i + d + b_k \le v) +$$

$$+ P(i_1, \ldots, i_n, d - 1)\, (s - d + 1)\zeta\, I(d > 0) +$$

$$+ P(i_1, \ldots, i_n, d + 1)\, (v - i)\, \mu\, I(d + 1 \le s, i + d + 1 \le v),$$

$$(i_1, \ldots, i_n, d) \in S.$$

В (13) для состояния $(i_1, \ldots, i_n, d) \in S$ значение i определяет величину ресурса, занятого трафиком сервисов реального времени, $i = i_1 b_1 + \ldots + i_n b_n$, а $I(\cdot)$ — индикаторная функция события. Найденные значения $P(i_1, \ldots, i_n)$ необходимо нормировать.

Характеристики качества обслуживания заявок на передачу трафика реального времени определяются по аналогии с (2). Показатели обслуживания эластичного трафика оценим долей времени недоступности ресурса передачи π_t; долей потерянных заявок π_c; средним числом обслуживаемых заявок y;

средним временем доставки файла t_d; средним числом виртуальных каналов, используемых для передачи одного файла b_f:

$$\pi_t = \sum_{(i_1,\ldots,i_n,d)\in S | i+d+1>v} p(i_1,\ldots,i_n,d); \tag{14}$$

$$\pi_c = \frac{\sum\limits_{(i_1,\ldots,i_n,d)\in S | i+d+1>v} p(i_1,\ldots,i_n,d)(s-d)}{\sum\limits_{(i_1,\ldots,i_n,d)\in S} p(i_1,\ldots,i_n,d)(s-d)};$$

$$y = \sum_{(i_1,\ldots,i_n,d)\in S} p(i_1,\ldots,i_n,d)d; \quad t_d = \frac{y}{(s-y)\zeta(1-\pi_c)};$$

$$b_f = \frac{1}{y}\sum_{(i_1,\ldots,i_n,d)\in S | d>0} p(i_1,\ldots,i_n,d)(v-i) = \frac{1}{t_d\mu}.$$

Для определения объема необходимого ресурса и оценки введенных показателей эффективности использования каналов при обслуживании эластичного трафика необходимо решить систему уравнений (13). Сделать это можно итерационным методом Гаусса–Зейделя. Для оценки характеристик можно также применять приближенные алгоритмы. Построим соответствующую процедуру. Воспользуемся тем, что требуемый объем ресурса соответствует области малых потерь заявок. В этой ситуации совместное обслуживание трафика реального времени и эластичного трафика данных обладает свойствами, упрощающими оценку характеристик. Рассмотрим момент поступления заявки на передачу файла. Обозначим через i число каналов, занятых в этот момент на обслуживание трафика реального времени. Оставшиеся $v-i$ каналов используются для передачи файлов. Применим технику декомпозиции и оценим по отдельности процесс обслуживания трафика реального времени и данных. Пусть $p(i)$ — вероятность занятости i каналов на передачу трафика реального времени в условиях, когда трафик данных не поступает, $i = 0, 1, \ldots, v$. Величины $p(i)$ находятся из рекурсивных соотношений (6). Предположим теперь, что в модели рассматривается обслуживание только заявок на передачу файлов. Обозначим через $y(v-i)$ и $t_d(v-i)$ соответственно среднее число заявок на передачу файлов и среднее время передачи файла при числе виртуальных каналов, равном $(v-i)$. Несложно показать, что значения введенных характеристик рассчитываются из выражений:

$$y(v-i) = \sum_{d=0}^{v-i} p_d(d)d; \quad t_d(v-i) = \frac{y(v-i)}{\sum\limits_{d=0}^{v-i-1} p_d(d)(s-d)\zeta}, \tag{15}$$

где вероятности $p_d(d)$ находятся из рекурсивных соотношений

$$p_d(d+1)(v-i)\mu = p_d(d)(s-d)\zeta, \quad d = 0, 1, \ldots, v-i-1$$

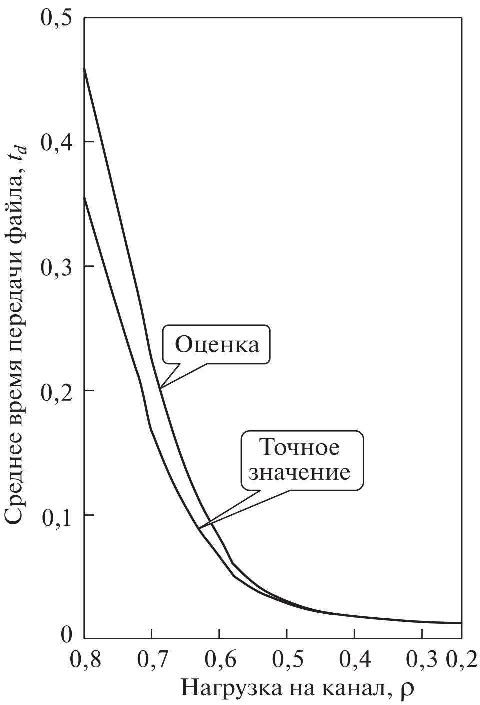


Рис. 7. Точная и приближенная оценки t_d.

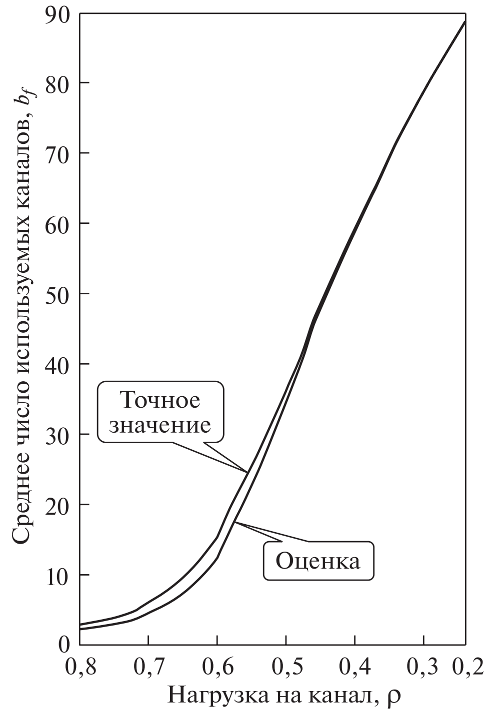


Рис. 8. Точная и приближенная оценки b_f.

с последующей их нормировкой. Обозначим получаемые оценки характеристик передачи эластичного трафика теми же символами, что применялись в исследуемой модели. Для их расчета используются соотношения

$$y = \sum_{i=0}^{v-1} p(i)y(v-i), \qquad t_d = \sum_{i=0}^{v-1} p(i)t_d(v-i), \qquad b_f = \frac{1}{t_d\mu}. \tag{16}$$

Оценим погрешность приближенного алгоритма расчета характеристик передачи эластичного трафика. Рассмотрим процесс совместного обслуживания трафика реального времени и эластичных данных для модели узла доступа со следующими фиксированными значениями входных параметров: $v = 100$; $n = 2$; $b_1 = 5$; $\mu_1 = 1$; $b_2 = 10$; $\mu_2 = 1$. Величины v, b_1 и b_2 выражены в виртуальных каналах. Примем, что $a_1 = v\rho/3b_1$, $a_2 = v\rho/3b_2$, $s_k = \lfloor a_k \rfloor + 10$, $k = 1, 2$. Здесь ρ — потенциальная нагрузка одного в.к., а $\zeta_k = \frac{a_k}{s_k - a_k}$. Параметры эластичного трафика $a = v\rho/3$, $s = \lfloor a \rfloor + 10$, $\zeta = \frac{a}{s-a}$, $\mu = 1$. Точные и приближенные значения t_d и b_f в зависимости от величины ρ приведены соответственно на рис. 7 и рис. 8. Точные величины характеристик находились в результате решения системы уравнений (13) итерационным методом Гаусса–Зейделя, а приближенные — с использованием выражений (16).

Анализ погрешности вычислений позволяет сделать вывод о хорошей точности расчетов особенно в области малых потерь, характерных для решения задач планирования требуемого объема ресурса. Сформулируем последова-

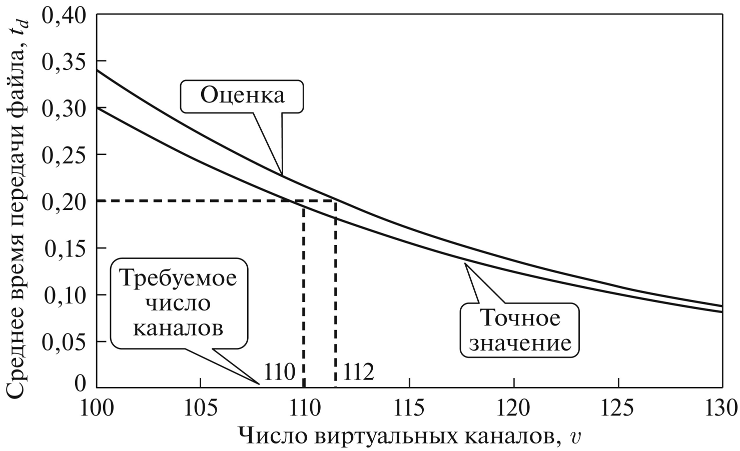


Рис. 9. Оценка требуемого объема ресурса при передаче эластичного трафика.

тельность действий, которую можно использовать для решения этой задачи. Предположим, что заданы параметры трафика реального времени n, s_k, ζ_k, b_k, μ_k и эластичных данных s, ζ, μ. Требуется определить число каналов v, обеспечивающее выполнение ограничений на долю потерянных заявок

$$\max(\pi_1, \ldots, \pi_n, \pi_c) < \pi \tag{17}$$

и среднее время передачи файла

$$t_d \leq t. \tag{18}$$

Если вести передачу эластичного трафика на условиях трафика реального времени, то это приведет к увеличению доли потерянных заявок и даст возможность получить обоснованную оценку числа каналов v_1 в смысле выполнения неравенства (17). Для решения этой задачи используется либо рекурсия (6), либо алгоритм, рассмотренный в разделе 6. Далее при последовательном увеличении v_1 определяется величина ресурса v, обеспечивающая выполнение неравенства (18). Приведем пример реализации сформулированного алгоритма.

Рассмотрим потоки трафика со следующими значениями входных параметров: $n = 2$; $b_1 = 3$; $b_2 = 5$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1$. Величины v, b_1 и b_2 выражены в виртуальных каналах. Примем, что $a_1 = 75\rho/3b_1$, $a_2 = 75\rho/3b_2$, $s_k = \lfloor a_k \rfloor + 10$, $k = 1, 2$. Здесь ρ — потенциальная нагрузка одного в.к., $\zeta_k = \frac{a_k}{s_k - a_k}$. Параметры эластичного трафика $a = 75\rho/3$, $s = \lfloor a \rfloor + 10$, $\zeta = \frac{a}{s-a}$, $\mu = 1$. Контрольные значения параметров $\pi = 0{,}03$, $t = 0{,}2$. После выполнения 1-го этапа получаем $v_1 = 99$. Результаты реализации 2-го этапа представлены на рис. 9, где показана зависимость t_d от v. Приведены данные приближенного вычисления t_d с использованием (16) и точные величины, полученные с помощью решения (13). Для $t = 0{,}2$ приближенный расчет дает ответ $v = 112$, а точный $v = 110$. Результаты вычислений отличаются хорошей точностью, приемлемой для практических приложений.

В заключение отметим следующее. Выбор экспоненциального распределения для описания времени обслуживания заявок упрощает моделирование мультисервисного узла доступа. Если положить равными нулю трафик реального времени или эластичный трафик, то расчетные формулы и алгоритмы перестанут зависеть от функции распределения времени обслуживания заявок [10, 21]. Это свойство дает основание ожидать слабую зависимость полученных результатов от выбора соответствующей функции и для модели совместного обслуживания заявок. Отмеченное свойство нуждается в численном анализе средствами имитационного моделирования и здесь не исследуется.

8. Заключение

Построена и исследована математическая модель распределения ресурса передачи информации мультисервисного узла доступа. В модели рассматривается произвольное число потоков мультимедийного трафика, которые различаются интенсивностью поступления заявок, величиной ресурса, используемого для обслуживания одной заявки, и временем занятия ресурса. Интервалы времени между поступлением заявок имеют экспоненциальное распределение с параметром, зависящим от числа заявок рассматриваемого потока, находящихся на обслуживании. Построен рекурсивный алгоритм оценки характеристик. Установлены соотношения между интегральными и потоковыми характеристиками качества обслуживания заявок, которые упрощают выбор метрики при решении задач планирования ресурса узла доступа. Построен эффективный алгоритм оценки объема ресурса, требуемого для обслуживания заданных потоков трафика с необходимым качеством. Эффективность расчетной процедуры достигается в результате организации рекурсии по объему ресурса и использовании нормированных значений вероятностей состояний. Рассмотрено решение задачи оценки необходимого объема ресурса для модели мультисервисного узла, допускающего использование механизмов резервирования ресурса и его динамического распределения при обслуживании эластичного трафика. Приведены численные примеры, иллюстрирующие особенности реализации построенных расчетных процедур. Построенную модель и методы ее расчета можно обобщить на случаи, когда поступление заявок носит групповой характер.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fortet R., Grandjean Ch.* Congestion in a Loss System When Some Calls Want Several Devices Simultaneously // Electr. Communicat. 1964. V. 39. No. 4. P. 513–526.
2. *Kaufman J.S.* Blocking in a shared resource environment // IEEE Transact. Communicat. 1981. V. 29. No. 1. P. 1474–1481.
3. *Roberts J.W.* A service system with heterogenous user requirements application to multi-service telecommunications systems / Performance of Data Communication Systems and their Applications. Pujolle G. (ed.). North Holland, 1981. P. 423–431.
4. *Delbrouck L.E.N.* On the Steady-State Distribution in a Service Facility Carrying Mixtures of Traffic with Different Peakedness Factor and Capacity Requirements // IEEE Transactions on Communications. 1983. V. COM–31. P. 1209–1211.

5. Broadband network traffic. Performance evaluation and design of broadband multiservice networks. Final report of action COST 242 / James Roberts (ed). Lecture notes in computer sciences. Springer, 1996.

6. *Ross K.W.* Multiservice loss models for broadband telecommunication networks. London: Springer, 1995.

7. *Iversen V.B.* Teletraffic Engineering and Network Planning. Technical University of Denmark, May. 2010.

8. *Степанов С.Н.* Теория телетрафика: концепции, модели, приложения. М.: Горячая линия – Телеком, 2015.

9. *Степанов С.Н., Степанов М.С.* Планирование ресурса передачи информации соединительных линий мультисервисных иерархических сетей доступа // АиТ. 2018. № 8. С. 66–80.

   Stepanov S.N., Stepanov M.S. Planning the Resource of Information Transmission for Connection Lines of Multiservice Hierarchical Access Networks // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 8. P. 1422–1433.

10. *Bonald T., Virtamo J.* A recursive formula for multirate systems with elastic traffic // IEEE Communicat. Lett. 2005. V. 9. No. 8. P. 753–755.

11. *Степанов С.Н., Степанов М.С.* Планирование ресурса передачи при совместном обслуживании мультисервисного трафика реального времени и эластичного трафика данных // АиТ. 2017. № 11. С. 79–93.

    Stepanov S.N., Stepanov M.S. Planning Transmission Resource at Joint Servicing of the Multiservice Real Time and Elastic Data Traffics // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 11. P. 2004–2015.

12. *Iversen V.B., Stepanov S.N.* The optimal dimensioning of multi-service links // Proc. COST-285 Mid-term Symposium. Munchen, September 8–10, 2005. Chapter 7 (pp. 151–178) in A. Nejat Ince & Ercan Topuz (editors): Modeling and simulation tools for emerging telecommunication networks. Springer, 2006.

13. *Berezner S.A., Krzesinski A.E.* An Efficient Stable Recursion to Compute Multiservice Blocking Probabilities // Performance Evaluation. 2001. V. 43. P. 151–164.

14. *Begishev V., Petrov V., Samuylov A., Moltchanov D., Andreev S., Koucheryavy Y., Samouylov K.* Resource Allocation and Sharing for Heterogeneous Data Collection over Conventional 3GPP LTE and Emerging NB-IoT Technologies // Comput. Communicat. 2018. V. 120. No. 2. P. 93–101.

15. *Shorgin S., Samouylov K., Gaidamaka Y., Chukarin A., Buturlin I., Begishev V.* Modeling Radio Resource Allocation Scheme with Fixed Transmission Zones for Multiservice M2M Communications in Wireless IoT Infrastructure // Lecture Notes Comput. Scie., Springer, Cham. 2015. V. 9012. P. 473–483.

16. *Степанов С.Н., Степанов М.С.* Эффективный алгоритм оценки требуемого объема ресурса беспроводных систем связи при совместном обслуживании гетерогенного трафика устройств интернета вещей // АиТ. 2019. № 11. С. 108–126.

    Stepanov S.N., Stepanov M.S. Efficient Algorithm for Evaluating the Required Volume of Resource in Wireless Communication Systems under Joint Servicing of Heterogeneous Traffic for the Internet of Things // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 11. P. 2017–2032.

17. *Степанов С.Н.* Модель совместного обслуживания трафика сервисов реального времени и данных. I // АиТ. 2011. № 4. С. 121–132.

    Stepanov S.N. Model of Joint Servicing of Real-Time Service Traffic and Data Traffic. I // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 4. P. 787–797.

18. *Степанов С.Н.* Модель совместного обслуживания трафика сервисов реального времени и данных. II // АиТ. 2011. № 5. С. 139–147.

Stepanov S.N. Model of Joint Servicing of Real-Time Service Traffic and Data Traffic. II // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 5. P. 1028–1035.

19. *Evans J., Filsfils C.* Deploying IP and MPLS QOS for Multiservice Networks. Theory and Practice / The Morgan Kaufmann Series in Networking. Elsevier Ltd, 2007.

20. *Kelly F.P.* Notes on effective bandwidths. In: F. Kelly, S. Zachary and I. Ziedinis (Eds.), Stochastic Networks: Theory and Applications Telecommunications Networks. Volume 4 of Royal Statistical Society Lecture Notes Series, Oxford. 1996. P. 141–168. Oxford University Press.

21. *Bonald T., Feuillet M.* Network Performance Analysis. United Kingdom, London: Wiley, 2011.

22. *Bonald T., Comte C.* The multi-source model for dimensioning data networks // Computer Networks, 2016 (10.1016/j.comnet.2016.03.019. hal-01314992).

23. *Башарин Г.П.* Лекции по математической теории телетрафика: Учеб. пособие. Изд. 3-е исправ. и доп. М.: Изд-во РУДН, 2009.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Ляховым.

Поступила в редакцию 17.03.2000

После доработки 15.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

© 2020 г. А.В. ГЛАЗКОВА, канд. техн. наук (a.v.glazkova@utmn.ru)
(Тюменский государственный университет)

ТЕМАТИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ТЕКСТОВЫХ ФРАГМЕНТОВ С УЧЕТОМ ИХ БЛИЖАЙШЕГО КОНТЕКСТА[1]

Описывается подход к проведению тематической классификации отрывков биографического текста, учитывающий ближайший контекст классифицируемых фрагментов, с помощью нейронной сети с несколькими входами. Выбор архитектуры модели обоснован предположением о том, что, поскольку тексты, написанные на естественном языке, отличаются логичностью и связностью, контекст отрывка может быть использован в качестве дополнительных входных данных. Модель обучена и протестирована на корпусе биографических текстов, составленном автором работы. Результаты, полученные с использованием предложенного подхода, превзошли результаты моделей, не учитывающих контекст отрывка.

Ключевые слова: классификация предложений, интеллектуальный анализ данных, рекуррентные нейронные сети, обработка естественного языка, биографический текст, контекст, корпус текстов, биографическое исследование, Word2Vec, BERT.

DOI: 10.31857/S0005231020120090

1. Введение

Интерпретация неструктурированной информации, представленной в виде текста на естественном языке, является одной из ключевых задач интеллектуального анализа данных и информационного поиска. Частной задачей информационного поиска является поиск биографической информации, актуальной при проведении биографических исследований, сборе историко-генеалогических данных и биографических фактов из жизни индивидуума. Спецификой данной задачи является, во-первых, жанровое многообразие источников биографической информации (автобиографии, заметки, очерки и т.д.), и, во-вторых, многоплановость биографической информации, включающей в себя разнообразные аспекты жизни человека: политический, личный, общественный, культурный.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-37-00272).

Развитие методов поиска биографической информации осуществляется в основном в двух направлениях [1]:

1) предметный или «косвенный» поиск, когда пользователь поисковой системы формулирует запросы, основываясь на известных ему биографических фактах о некоторой персоне и пытаясь на их основе найти недостающую информацию;

2) свободный поиск, при котором пользователь не имеет начальных сведений об интересующей его персоне. Свободный поиск подразумевает просмотр биографических текстов, посвященных персоне, в целях обнаружения конкретной биографической информации, релевантной требованиям пользователя (например, информации о профессиональной деятельности или о личной жизни).

Во втором случае пользователь вынужден просматривать большие объемы текстов. Сократить затраты временных ресурсов при свободном поиске биографической информации мог бы помочь инструмент автоматической обработки биографических текстов, извлекающий из них фрагменты, связанные с тем или иным типом биографической информации. Такой инструмент может быть реализован на основе методов автоматической классификации текстов. В этом случае текст, предварительно разделенный на фрагменты, подается на вход классификатора, определяющего тематику каждого фрагмента.

Различные тексты в зависимости от жанра могут иметь стандартизированную структуру (к таким текстам относятся, например, документы официально-делового стиля) или обладать структурированностью, заложенной не в расположении структурных частей, а в логическом единстве [2]. Биографические тексты могут послужить примером второго типа текстов за счет того, что информация в них, как правило, изложена в хронологическом порядке, и знание тематики отрывка такого текста позволяет предположить, какой фрагмент ему предшествует и какой располагается после. Эта особенность позволяет предположить, что принятие во внимание логики изложения биографических текстов и учет ближайшего контекста фрагментов даст возможность улучшить качество тематической классификации отрывков.

В данной работе предлагается подход к тематической классификации фрагментов биографического текста на основе их ближайшего контекста. В качестве фрагмента рассматривается предложение, так как данная языковая единица представляет собой грамматически организованное соединение слов (или слово), обладающее смысловой законченностью [3]. В статье приводится сравнение нескольких моделей машинного обучения для классификации фрагментов биографических текстов с учетом ближайшего контекста и без него. Эксперименты проводятся на корпусе биографических текстов, собранном автором работы.

2. Работы по близкой тематике

Тематика работы в основном затрагивает две задачи обработки естественного языка:

1) извлечение биографической информации (биографических фактов);

2) тематическая классификация предложений.

Существующие работы, посвященные решению указанных задач, преследуют различные практические цели и используют разные подходы. Однако в целом в литературе по данной тематике извлечение информации и классификацию текстов определяют как слабоформализуемые задачи, а применяемые для их решения методы — как зависящие от специфики обрабатываемых текстов [4, 5]. Методы поиска и извлечения биографической информации развиваются преимущественно в трех направлениях: детерминированные подходы, основанные на применении шаблонов и правил; подходы, основанные на применении методов машинного обучения (в частности, нейронных сетей); гибридные подходы. Детерминированные подходы показывают достаточно высокую результативность во многих задачах, однако требуют разработки большого количества признаков, отражающих структурные, семантические и лексические особенности текстов. К преимуществам подходов, основанных на машинном обучении, можно отнести автоматическую настройку параметров моделей с помощью множества примеров, а также возможность не только соотносить результаты обработки текстов с их отдельными характеристиками, но и выявлять более сложные скрытые зависимости и закономерности [6]. Однако реализация подходов, использующих методы машинного обучения, требует построения обучающих выборок текстов, сопровождающихся качественной разметкой, что также бывает сложно осуществимо в реальных условиях. Одним из трендов обработки естественного языка являются предобученные модели на основе глубоких нейронных сетей (transfer learning) [7, 8], когда заранее обученная модель дообучается для решения специфических задач [9].

К детерминированным подходам к извлечению биографической информации можно отнести работу [1], в которой описана технология, представляющая биографический факт в виде древовидной структуры, корнем которой является тип факта (например, “рождение”), а листьями – связанные с фактом сущности. В [10] предлагается подход к извлечению биографических событий на основе трафика Википедии. В [11] описывается набор правил для извлечения биографической информации для текстов на русском языке. В [12] проводится сравнение нескольких подходов, основанных на правилах, а также предлагается таксономия биографических фактов, включающая в себя семь типов отношений. Существует достаточно много работ, авторы которых применяли различные методы машинного обучения для классификации фрагментов биографических текстов или извлечения биографических фактов. Так, в [13] используется наивный байесовский классификатор, в [14] – метод опорных векторов и деревья решений, в [15, 16] — нейронные сети. В [17] проводилось сравнение подходов, основанных на правилах, с методом опорных векторов на примере бинарной классификации фраз, содержащих и не содержащих биографическую информацию, в результате которого метод опорных векторов продемонстрировал значительно более высокое качество. В [18] сравнивались различные типы машинного обучения для извлечения отношений в биографических текстах (по сути извлечения фактов) на примере португальского языка. Среди гибридных подходов могут быть названы [19, 20].

Во многих работах, связанных с поиском биографической информации, эксперименты проводились на текстах Википедии (в частности, [21–26]). Это связано с тем, что Википедия содержит в себе богатый и разнообразный материал для исследований, представленный тем не менее в стандартизованном виде.

Особенностями задачи классификации предложений являются, во-первых, сравнительно небольшая длина классифицируемых текстов и, во-вторых, наличие контекста у предложений, который также может приниматься во внимание алгоритмами классификации. Будет ли во время классификации учитываться контекст, зависит от специфики решаемой задачи и данных, имеющихся для проведения исследования. Многие существующие системы для классификации коротких текстов используют алгоритмы, построенные на использовании вероятностных и статистических методов: байесовского классификатора [27], условных случайных полей [28], скрытых марковских моделей [29], логистической регрессии [30]. Для решения задач классификации текстов широко применяются рекуррентные нейронные сети, обученные с помощью векторных представлений символов и слов. В частности, подходы к обработке естественного языка, основанные на применении рекуррентных нейронных сетей, представлены в [31–35]. В последние годы высокие результаты в классификации коротких текстов демонстрируют инструменты, использующие модели ELMo и BERT (в частности, [36–38]).

Среди исследований, связанных с использованием контекста, можно назвать работу [39], где была предложена архитектура нейронной сети для классификации реплик в диалоге. Описанная в указанной работе модель имела несколько входов, один из которых принимал текущую реплику, а другие – ее контекст, т.е. предшествующие фразы. Модель, построенная таким образом, продемонстрировала более высокое качество классификации в сравнении с обычной рекуррентной нейронной сетью на англоязычных диалоговых текстовых корпусах. В [40, 41] тем же коллективом автором были предложены нейросетевая модель для разбиения фрагментов аннотаций медицинских статей по пяти имеющимся классам: введение, обзор существующих работ, методология, результаты и выводы. В [42] описывается подход к классификации предложений по тональности с использованием ряда дискурсивных признаков.

3. Методы

В данной работе предлагается нейросетевая архитектура для классификации фрагментов биографических текстов, основанная на архитектуре для классификации реплик в диалоге, описанной в [39]. Предлагаемая модель включает в себя несколько входов, раздельно обрабатывающих текущий текстовый фрагмент, а также предыдущие и последующие фрагменты. Векторы, являющиеся результатами обработки фрагментов во входных блоках, объединяются в общий слой нейронной сети. Для оценки качества классификации используется корпус биографических текстов, собранный и размеченный автором работы в полуавтоматическом режиме [43]. В работе рассматриваются два варианта нейросетевой архитектуры, использующие разные типы представления предложений:

1) рекуррентная нейронная сеть. Текст представляется в виде последовательностей слов. В качестве матрицы векторных представлений слов (для слоя Embedding) используются предобученные вектора модели Word2Vec [44];

2) сеть прямого распространения, обученная на векторных представлениях предложений, полученных с помощью модели BERT [7].

3.1. Архитектура

Рекуррентная модель основана на использовании рекуррентных слоев долгой краткосрочной памяти (long short-term memory, LSTM), в которых в отличие от классических рекуррентных архитектур предусмотрен механизм хранения долгосрочных зависимостей, позволяющий избежать проблемы затухания градиента [45]. Структура ячейки LSTM-сети представлена на рис. 1 [46].

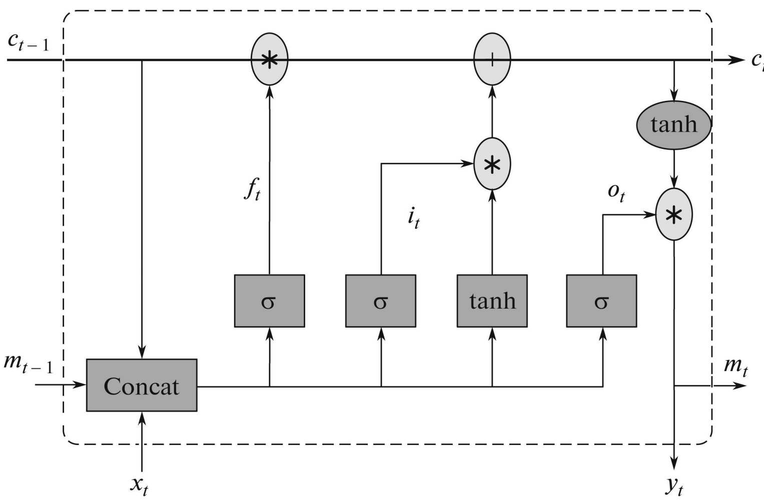


Рис. 1. Структура ячейки LSTM.

Пусть x_t и y_t – входной и выходной сигналы соответственно в момент времени t, а c_t и m_t – состояние ячейки и выхода в момент t. Преобразование входного сигнала в выходной при этом происходит следующим образом:

$$
\begin{gathered}
i_t = \sigma\big(W_{ix}x_t + W_{im}m_{t-1} + W_{ic}c_{i-1} + b_i\big),\\
f_t = \sigma\big(W_{fx}x_t + W_{fm}m_{t-1} + W_{fc}c_{i-1} + b_f\big),\\
o_t = \sigma\big(W_{ox}x_t + W_{om}m_{t-1} + W_{oc}c_{i-1} + b_o\big),\\
m_t = o_t \odot h(c_t),\\
y_t = \varphi\big(W_{ym}m_t + b_y\big),\\
c_t = f_t \odot c_{t-1} + i_t \odot g\big(W_{cx}x_t + W_{cm}m_{t-1} + b_c\big),
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где W_{cx}, W_{ix}, W_{fx}, W_{ox} – веса входов, W_{cm}, W_{im}, W_{fm}, W_{om} – веса состояний ячеек, b_o, b_i, b_f – смещения, W_{ic}, W_{fc}, W_{oc} – веса связей между ячейками и слоем выходного фильтра, W_{ym} и b_y – вес и смещение для выхода, σ, g, h представляют собой некоторые нелинейные функции.

В сети прямого распространения рекуррентные слои заменены слоями прямого распространения, т.е. слоями без рекуррентных связей, с функцией активации "гиперболический тангенс".

Входными данными моделей являются текущее предложение и его контекст, т.е. n предшествующих и n последующих предложений. Пусть s_j – предложение с порядковым номером j. Тогда входом служит множество предложений S:

$$S = \{s_{j-n}, \ldots, s_{j-1}, s_j, s_{j+1}, \ldots, s_{j+n}\}, \quad j \in [n+1, J-n], \tag{2}$$

J – количество предложений в тексте.

В том случае, когда $j < n+1$ или $j > J - n$, предложение контекста s_k, $k \in \{j-n, \ldots, j-1, j+1, \ldots, j+n\}$ подается на вход сети, если $1 \leqslant k \leqslant J$. В противном случае в качестве входных данных для соответствующей позиции подаются метки начала (для $k < 1$) или конца текста ($k > J$).

Каждому предложению из множества S соответствует отдельный вход сети. Таким образом, входными данными сети являются $2n+1$ предложений, а выходными данными входных блоков являются векторы, соответствующие входным предложениям.

3.2. Варианты учета контекста

Далее рассматривались три варианта архитектуры каждой модели:

1) в первом случае результат конкатенации выходных векторов входных блоков подается на слой прямого распространения. Результирующие величины поступают в выходной слой модели, также представляющий собой слой прямого распространения, имеющий размерность, равную количеству классов, и функцию активации softmax. Выходной слой сети возвращает распределение вероятностей между тематическими классами для предложения (рис. 2,*а*);

2) во втором варианте к каждому входному блоку добавляется по одному слою прямого распространения, после чего осуществляется конкатенация, результат которой подается на выходной слой. Таким образом, учет влияния контекста происходит на уровне последнего слоя модели (рис. 2,*б*);

3) третий вариант представляет собой комбинацию первых двух. Выполняется конкатенация выходных векторов входных блоков и обработка результата слоем прямого распространения. Одновременно с этим выходные векторы входных блоков, соответствующих предложениям контекста, подаются на вход слоев прямого распространения. Осуществляется конкатенация всех результирующих векторов, результат подается на выходной слой. Так, влияние контекста учитывается как на уровне выходных векторов рекуррентных блоков, так и на уровне последнего слоя модели (рис. 2,*в*).

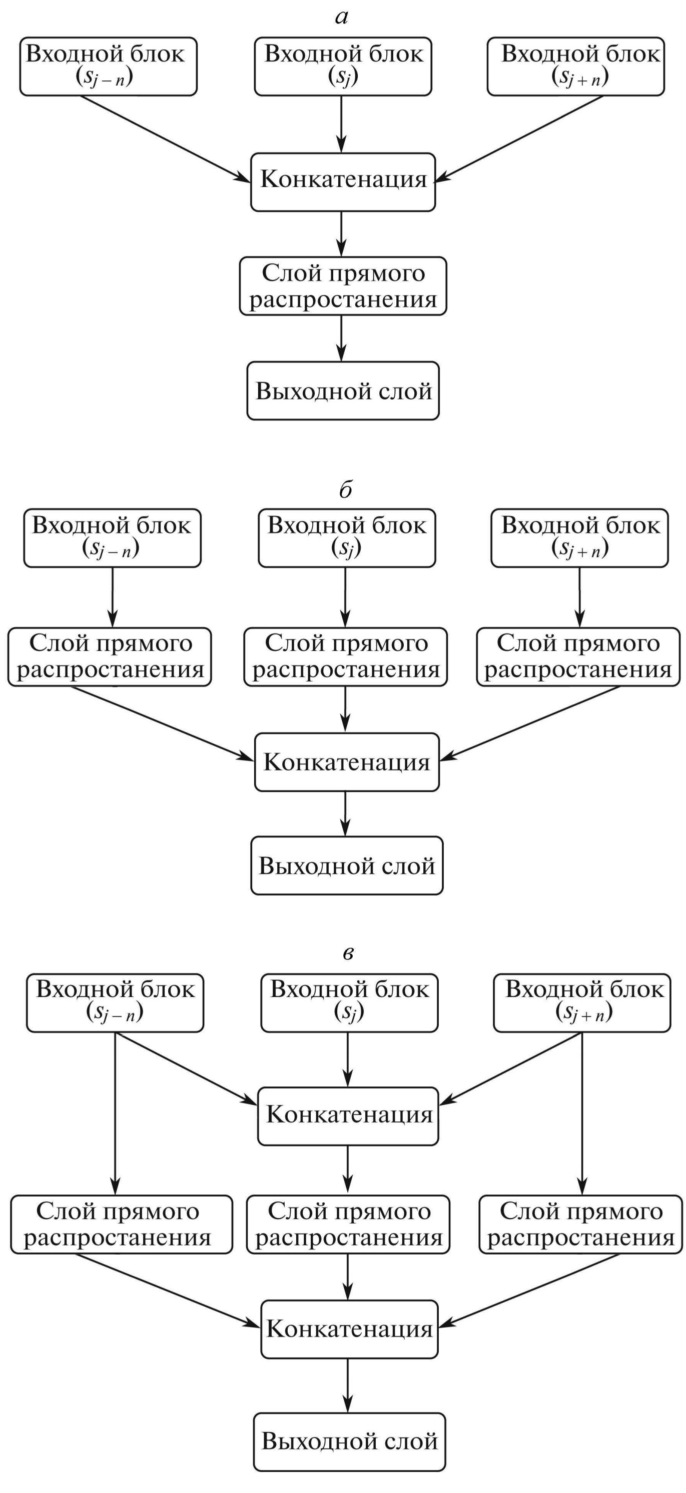


Рис. 2. Варианты архитектуры модели.

4. Эксперименты

4.1. Данные

Для обучения и тестирования моделей был составлен корпус биографических текстов. Он представляет собой коллекцию, содержащую биографические тексты из онлайн-энциклопедии Википедия, разбитые на предложения и снабженные тематической разметкой. В версии корпуса, использованной для экспериментов, содержатся 200 текстов, описывающих биографии людей, живших или живущих в XX–XXI вв. Корпус находится в свободном доступе на сайте [47].

Каждому предложению в корпусе биографических текстов сопоставлена метка класса, наиболее полно соответствующего его тематике: рождение, информация о родительской семье, место жительства, род занятий, место работы, семья, образование, личные события, профессиональные события, смерть. Некоторым предложениям в корпусе соответствуют два класса – основной и дополнительный. В данной работе при классификации таких предложений использовалась метка основного класса. Таким образом, каждый фрагмент соответствует одному из 10 классов. Характеристики корпуса представлены в табл. 1.

Для выравнивания количества примеров в классах был проведен простой оверсэмплинг, т.е. дублирование случайных элементов миноритарных классов. Общее количество элементов для обучения и валидации моделей после проведения оверсэмплинга – 8251, объем тестовой выборки, на которой оценивалось финальное качество моделей, – 177 предложений. Предварительная обработка данных включала в себя приведение текста к нижнему регистру, удаление специальных символов, стоп-слов и знаков препинания, а также приведение слов к начальной форме.

Таблица 1. Характеристики корпуса

Класс	Средняя длина предложения (в токенах)	Средний размер контекста для $n = 1$ (в токенах)	Количество примеров
Рождение	13,9	13,25	134
Информация о родительской семье	13,05	28,9	86
Место жительства	13,17	31,23	94
Род занятий	16,93	32,4	943
Место работы	14,4	32,27	113
Семья	11,83	24,25	48
Образование	15,73	30,04	374
Личные события	20,35	38,07	105
Профессиональные события	21,36	37,72	490
Смерть	10,56	22,15	111
Все предложения	**16,83**	**31,52**	**2498**

В случае отсутствия необходимого числа соседних предложений в тексте на вход моделей подавались специальные метки “begin” и “end” – для предшествующих $(s_{j-1}, s_{j-2}, \ldots, s_{j-n})$ и последующих $(s_{j+1}, s_{j+2}, \ldots, s_{j+n})$ предложений соответственно. Так, в случае $j = 1$ (порядковый номер предложения в тексте), $J = 3$ (количество предложений в тексте) и $n = 3$ (размер контекста) входные данные будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
s_{j-3} &= \text{“}\textit{begin}\text{”}, \\
s_{j-2} &= \text{“}\textit{begin}\text{”}, \\
s_{j-1} &= \text{“}\textit{begin}\text{”}, \\
s_{j} &= \text{“Текст предложения } s_j\text{”}, \\
s_{j+1} &= \text{“Текст предложения } s_{j+1}\text{”}, \\
s_{j+2} &= \text{“Текст предложения } s_{j+2}\text{”}, \\
s_{j+3} &= \text{“}\textit{end}\text{”}.
\end{aligned}$$

4.2. Реализация и обучение моделей

В ходе экспериментов было проведено сравнение моделей, учитывающих контекст, с нейронными сетями, основанными на transformer-архитектуре, а также с методом опорных векторов, испытанным на представлениях предложений в виде Bag-of-Words TF-IDF. В данной работе использовались две модели BERT:

1) mBERT (multilingual BERT), поддерживающая 104 языка [7];
2) RuBERT, модель BERT для русского языка, обученная на русскоязычной Википедии и текстах новостных порталов [48]. Для русскоязычных текстов данная модель на ряде задач показала качество, значительно превосходящее качество многоязычной модели BERT.

Таблица 2. Оптимизация параметров моделей

Параметр	Множество параметров	Выбранное значение
Функция активации на внутренних слоях (рекуррентная сеть)	гиперболический тангенс, relu	гиперболический тангенс
Функция активации на внутренних слоях (сеть прямого распространения)	гиперболический тангенс, relu	гиперболический тангенс
Размерность слоя LSTM (рекуррентная сеть)	степени 2 из диапазона [32;256]	64
Размерность слоя прямого распространения во входном блоке (сеть прямого распространения)	степени 2 из диапазона [64;512]	256
Размерность общего слоя прямого распространения (рекуррентная сеть)	степени 2 из диапазона [32;128]	32
Размерность общего слоя прямого распространения (сеть прямого распространения)	степени 2 из диапазона [32;128]	32

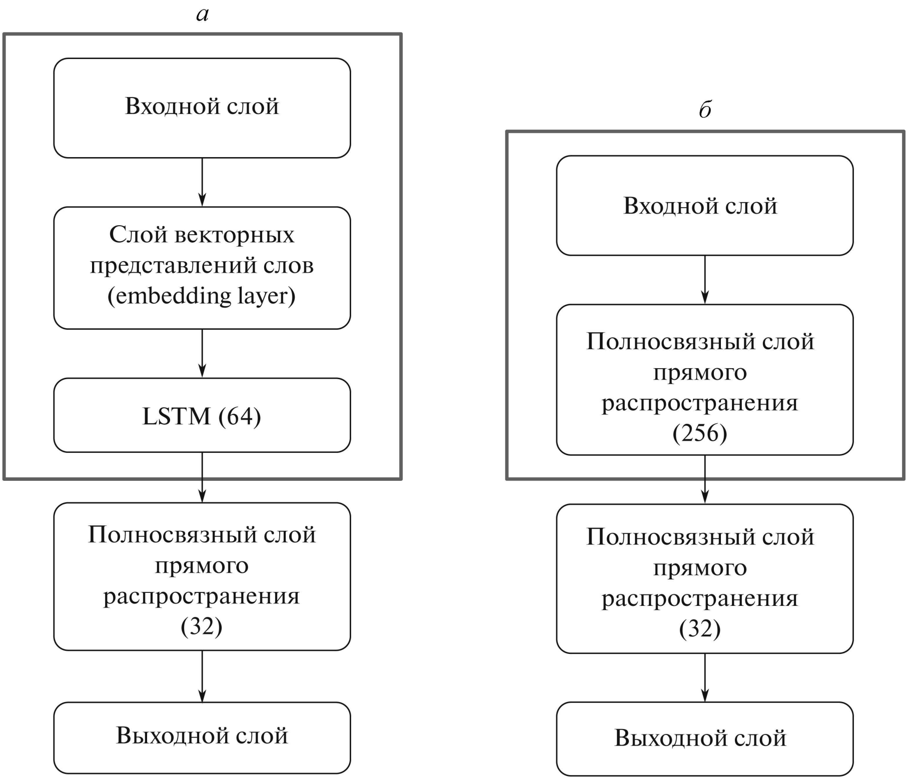


Рис. 3. Модели без учета контекста: *а* — рекуррентная сеть; *б* — сеть прямого распространения.

Реализация моделей, основанных на transformer-архитектуре, выполнена с помощью библиотек Transformers [49] и PyTorch [50] и языка программирования Python 3.6. В качестве элемента входных данных для модели BERT выступает предложение, заключенное в токены [CLS] и [SEP]. Предложение обрабатывается токенизатором, преобразующим токены в последовательности индексов в соответствии со словарем модели. Размерность элемента входной последовательности для BERT ограничена 512 токенами, размер батча – 8, количество эпох обучения – 3.

Метод опорных векторов реализован с помощью библиотеки Scikit-Learn (LinearSVC) [51]. В качестве входных данных использованы представления предложений по модели Bag-of-Words TF-IDF (матрица Bag-of-Words, где на пересечении строки и столбца располагается значение меры TF-IDF для данного слова в заданном документе). Размерность векторных представлений – 5000 признаков.

Реализация моделей, использующих контекст, выполнена с помощью средств библиотеки Keras [52] и языка программирования Python 3.6. Входные блоки рекуррентных сетей состоят из входного слоя, слоя матрицы весовых коэффициентов (embedding layer) и рекуррентного слоя LSTM. Размерность слоя LSTM составляет 64 нейрона, слоев прямого распространения –

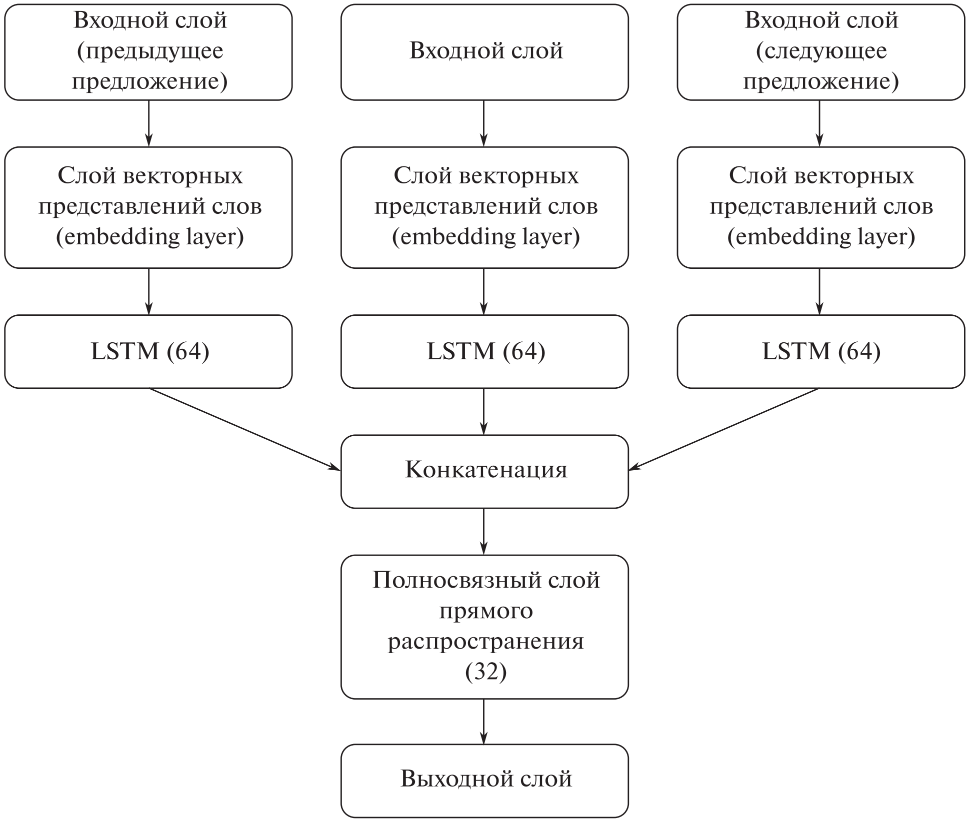


Рис. 4,*а*. Визуализация рекуррентных моделей при $n = 1$.

32 нейрона. Входные блоки сетей прямого распространения включают в себя входной слой и один слой прямого распространения. Размерность слоев прямого распространения во входных блоках составляет 256 нейронов, в общем слое – 32 нейрона. Функция активации для внутренних слоев – гиперболический тангенс, для выходного слоя – softmax. Оптимизация гиперпараметров моделей проводилась на примере моделей без учета контекста с помощью простого поиска по решетке (grid search). Список оптимизируемых параметров и их диапазонов приводится в табл. 2. В качестве оптимизационного алгоритма для всех моделей использован adaptive moment estimation (adam optimizer), в качестве функции ошибки – категориальная кросс-энтропия.

На рис. 3 изображены схемы рекуррентной модели и сети прямого распространения без учета контекста. Наклонным шрифтом выделены входные блоки. В моделях с учетом контекста (когда $n > 0$) каждому входному предложению из множества S соответствует отдельный входной блок. На рис. 4 в качестве примера представлена визуализация трех вариантов рекуррентной модели для $n = 1$. Модели для $n > 1$ имеют аналогичный вид при большем количестве входов.

Данные для обучения нейросетевых моделей были разделены на обучающую и валидационную выборки. Обучение проводилось с использованием

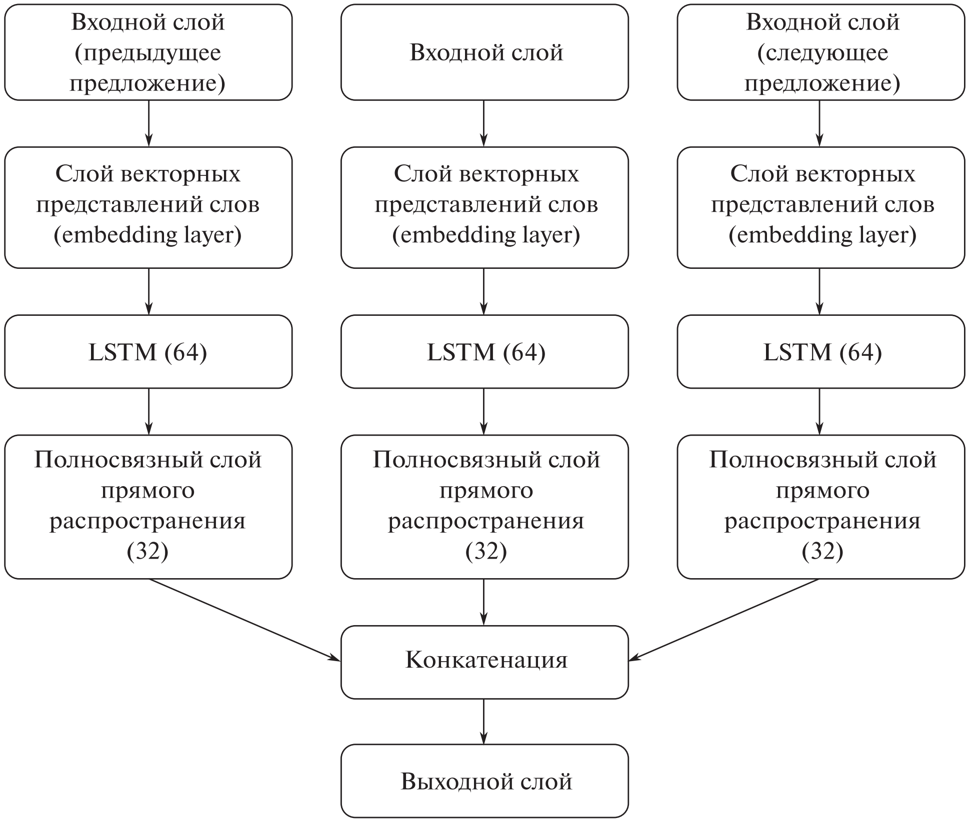


Рис. 4,*б*. Визуализация рекуррентных моделей при $n = 1$.

обучающей выборки, остановка обучения выполнялась согласно показателям модели на валидационной выборке. Финальное тестирование модели осуществлялось на независимой тестовой выборке, не участвовавшей в процессе обучения. Для рекуррентных сетей входные данные подавались в модели в виде последовательностей слов (sequences) на основе матрицы векторных представлений слов, составленной из векторов модели Word2Vec и множества лексем, представленных в обучающей выборке. В качестве модели Word2Vec использовалась модель, обученная на текстах русскоязычной Википедии и Национального корпуса русского языка за 2018 г. с использованием алгоритма обучения Skip-gram [53]. Размерность векторного представления слова в модели равна 300. Входные данные сетей прямого распространения выглядят как одномерный вектор размерностью 768, полученный для текущего фрагмента текста из модели RuBERT с помощью библиотеки DeepPavlov [54].

Исходный код всех моделей доступен по ссылке [55].

4.3. Результаты

Для оценки результатов использовалась F-мера (macro-averaging), которая определялась как средняя величина значений F-меры, рассчитанных для

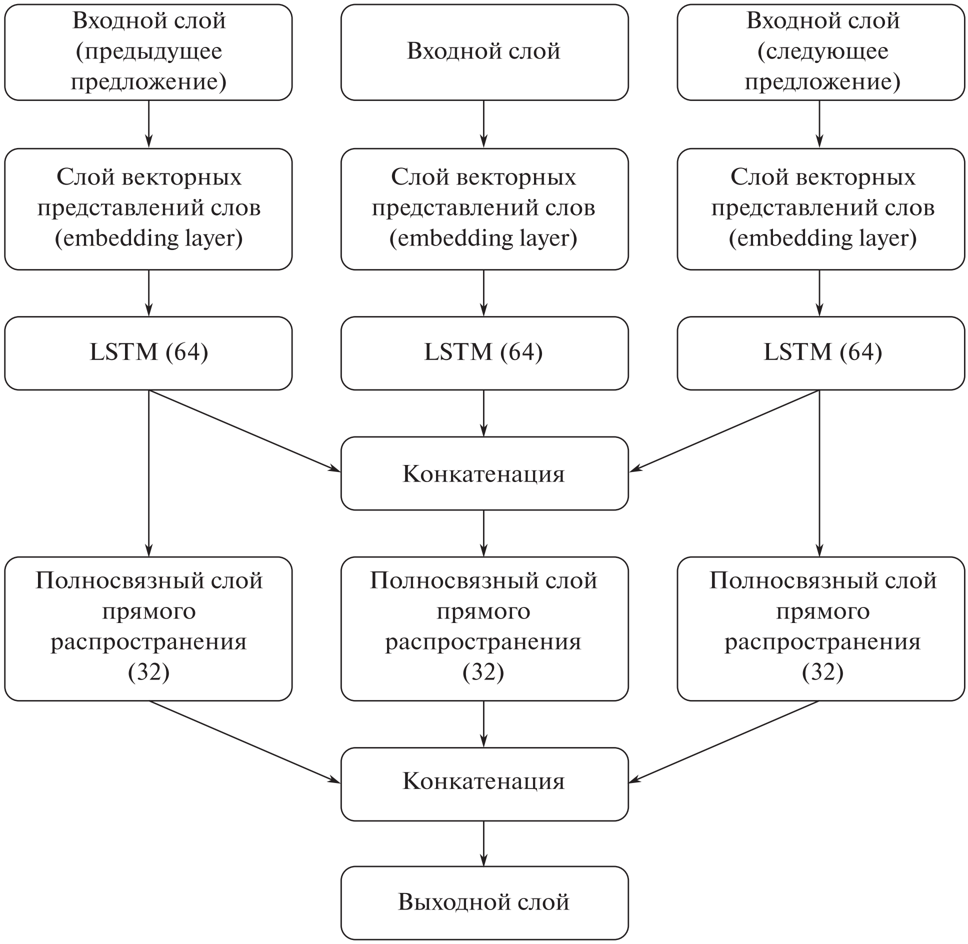


Рис. 4,*в*. Визуализация рекуррентных моделей при $n = 1$.

каждого класса по показателям точности (precision) и полноты (recall). Значения точности и полноты приведены в скобках после значения F-меры (первый показатель – precision, второй – recall).

В табл. 3 представлены показатели качества классификации. Поскольку ввиду случайной инициализации начальных параметров результаты классификации могут варьироваться при разных запусках моделей, каждая нейросетевая модель была запущена m раз, в таблице указаны средние значения. В данной работе $m = 5$. В экспериментах рассматривались значения для моделей, учитывающих контекст фрагмента в диапазоне $0 \leqslant n \leqslant 3$, так как дальнейшее увеличение величины n не давало роста качества классификации и отрицательно сказывалось на временной сложности модели.

Полужирным шрифтом в таблице выделены наиболее высокие значения F-меры среди всех рассмотренных моделей (рекуррентная – вариант 1, 94,77%) и среди моделей, не учитывающих контекст (RuBERT, 93,16%). Как показывают данные таблицы, в большинстве случаев добавление пред-

Таблица 3. Качество моделей (F-мера (Precision / Recall), значения указаны в %)

Архитектура	Значение n			
	0	1	2	3
Рекуррентная (вариант 1)	–	91,25 (90,31 / 92,15)	93,13 (91,23 / 94,13)	**94,77 (91,33 / 95,77)**
Рекуррентная (вариант 2)	–	92,54 (91,45 / 92,56)	93 (91,98 / 94,03)	92,9 (91,56 / 92,35)
Рекуррентная (вариант 3)	–	92,07 (92,01 / 91,87)	92,3 (92,12 / 91,96)	94,07 (91,4 / 95,88)
Прямого распространения (вариант 1)	–	86,23 (85,89 / 88,42)	87,14 (84,78 / 89,2)	87,45 (85,91 / 88,45)
Прямого распространения (вариант 2)	–	87,18 (86,56 / 89,12)	87,03 (86,22 / 88,14)	87,5 (87,02 / 88,49)
Прямого распространения (вариант 3)	–	87,35 (87,53 / 89,36)	87,56 (87,34 / 89,01)	87,14 (87,02 / 88,32)
Рекуррентная (без учета контекста)	89,46 (90,13 / 88,3)	–	–	–
Прямого распространения (без учета контекста)	86,83 (89,3 / 88,26)	–	–	–
LinearSVC	66,37 (64,39 / 77,44)			
mBERT	89,01 (92,11 / 88,12)	–	–	–
RuBERT	**93,16 (90,72 / 97,05)**	–	–	–

ложений контекста позволило улучшить качество классификации фрагментов. Причем для рекуррентных моделей наилучший результат был достигнут при $n = 3$, а для сетей прямого распространения – при $n = 2$. Наибольшие абсолютные показатели улучшения заметны для рекуррентных моделей (+5,31%).

В табл. 4 приводятся примеры предложений, ошибочно классифицированных рекуррентной моделью с использованием контекста и моделью RuBERT. В большинстве случаев ошибки связаны с фрагментами, тематически связанными более чем с одним классом. Многие из этих фрагментов имели в оригинальном корпусе метку дополнительного класса. Так, предложению из первого примера (фрагмент биографии художника Б.В. Эндера) разметчики корпуса сопоставили класс "Информация о родительской семье" в качестве основного и класс "Рождение" в качестве дополнительного. Выбор метки основного класса связан с тем, что предложение описывает происхождение персоны, а не конкретизирует факт рождения (дата, место). Обе сети отнесли данный отрывок к классу "Рождение". Второе предложение является примером, характеризующим сильные стороны модели с использованием контекста. Вероятно, фрагмент, описывающий профессио-

Таблица 4. Примеры ошибок моделей

Фрагмент	Разметка	Результат классификации (RuBERT)	Результат классификации (рекуррентная модель с использованием контекста)
1	2	3	4
s_{j-3}: “begin” s_{j-2}: “begin” s_{j-1}: “begin” s_j: “Родился в семье агронома, происходящего из рода обрусевших немцев.” s_{j+1}: “Две его младшие сестры – Ксения (1894–1955) и Мария (1897–1942) – также стали художницами.” s_{j+2}: “В 1905–1907 брал частные уроки рисования у И.Я. Билибина.” s_{j+3}: “В 1911 г. сблизился с М.В. Матюшиным и Е.Г. Гуро, часто бывал в их квартире в доме на Песочной улице.”	Информация о родительской семье	Рождение	Рождение
s_{j-3}: “begin” s_{j-2}: “begin” s_{j-1}: “Училась в школе №1, индустриальном техникуме.” s_j: “1935 – аэроклуб, после гражданская авиация в Грузии вместе с мужем.” s_{j+1}: “1941 – инструктор (200 курсантов).” s_{j+2}: “Апрель 1944 – Саранск, 3-е Военно-Морское летное училище (летчики-штурмовики).” s_{j+3}: “По окончании – назначение в 7 ГвПШАП ВВС КБФ (командир полка дважды Герой Советского Союза А.Е. Мазуренко).”	Род занятий	Семья	Род занятий

Таблица 4 (окончание)

1	2	3	4
s_{j-3}: "В 1918 г., после демобилизации, поступил в Петроградские Государственные свободные художественные мастерские, занимался у К.С. Петрова-Водкина, затем у Матюшина." s_{j-2}: "Завершив обучения в 1923 г., продолжил работать под началом Матюшина в Отделе органической культуры Инхука, вошел в созданную им группу «Зорвед»." s_{j-1}: "В 1920-е принимал активное участие в выставках «мастерской пространственного реализма»." s_j: "Познакомился с К.С. Малевичем, Н.М. Суетиным, И.Н. Харджиевым, И.Г. Эренбургом, поддерживал с ними постоянную переписку." s_{j+1}: "В 1927 г. переехал в Москву." s_{j+2}: "В 1930-х гг. много работал в области монументального искусства." s_{j+3}: "Принимал участие в оформлении павильона СССР на Международной выставке в Париже (1937)."	Личные события	Личные события	Профессиональные события

нальную деятельность советской летчицы Л.И. Шулайкиной и упоминающий ее супруга, верно отнесен к классу "Род занятий" за счет тематики контекста, в то время как модель RuBERT классифицировала этот фрагмент как элемент класса "Семья". Противоположный пример представляет собой третье предложение (фрагмент биографии Б.В. Эндера), которое отнесено разметчиками корпуса к классу "Личные события", так как описывает встречи и личные знакомства художника. Модель с учетом контекста классифицировала данный фрагмент как "Профессиональные события" (в корпусе данному классу соответствуют упоминания официальных встреч и наград). Возможно, полученный результат обусловлен "профессиональной" тематикой контекста.

5. Заключение

В работе представлен подход к выполнению тематической классификации отрывков текста, учитывающий их ближайший контекст. Модель апробирована на примере корпуса биографических текстов. Поскольку биографический текст отличается хронологической последовательностью изложения, все модели, принимающие в качестве входных данных контекст отрывка, показали лучшие результаты в сравнении с моделью без учета контекста.

Архитектура, предложенная в данной статье, может быть применена при решении сходных задач тематической классификации отрывков текстов, обладающих явной логической структурой и последовательностью изложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Адамович И.М., Волков О.И.* Система извлечения биографических фактов из текстов исторической направленности // Системы и средства информатики. 2015. № 3. С. 235–250. https://doi.org/10.14357/08696527150315.
2. *Голуб И.Б.* Стилистика русского языка: Учеб. пособие. М.: Рольф; Айрис-пресс, 1997.
3. *Валгина Н.С., Розенталь Д.Э., Фомина М.И.* Современный русский язык. Учебник. 6-е изд., перераб. и доп. М.: Логос, 2002.
4. *Manning C., Raghavan P., Schütze H.* Introduction to Information Retrieval. Cambridge University Press, 2008.
5. *Большакова Е.И., Воронцов К.В., Ефремова Н.Э. и др.* Автоматическая обработка текстов на естественном языке и анализ данных: учеб. пособие. М.: Изд-во НИУ ВШЭ, 2017.
6. *Захарова И.Г.* Big Data и управление образовательным процессом // Вестн. Тюмен. гос. ун-та. Гуманитарные исследования. Humanitates. 2017. Т. 3. № 1. С. 210–219. https://doi.org/10.21684/2411-197X-2017-3-1-210-219.
7. *Devlin J., Chang M.W., Lee K., et al.* Bert: Pre-training of deep bidirectional transformers for language understanding. arXiv preprint arXiv:1810.04805. 2018.
8. *Peters M.E., Neumann M., Iyyer M., et al.* Deep contextualized word representations // Proc. NAACL-HLT. V. 1. 2018. P. 2227–2237.
9. *Барахнин В.Б., Кожемякина О.Ю., Мухамедиев Р.И. и др.* Проектирование структуры программной системы обработки корпусов текстовых документов // Бизнес-информатика. 2019. Т. 13. № 4. С. 60–72.

   https://doi.org/10.17323/1998-0663.2019.4.60.72.
10. *Hogue A., Nothman J., Curran J.R.* Unsupervised biographical event extraction using wikipedia traffic // Proc. Australasian Language Technology Association Workshop. 2014. P. 41–49.
11. *Bonch-Osmolovskaya A., Kolbasov M.* Tolstoy Digital: Mining Biographical Data in Literary Heritage Editions // CEUR Workshop Proc. 1. BD 2015 – Proc. 1st Conf. on Biographical Data in a Digital World 2015. 2015. P. 48–52.
12. *Garera N., Yarowsky D.* Structural, transitive and latent models for biographic fact extraction // Proc. 12th Conf. of the Eur. Chapter of the ACL (EACL 2009). 2009. P. 300–308. https://doi.org/10.3115/1609067.1609100.
13. *Conway M.* Mining a corpus of biographical texts using keywords // Liter. Lingist. Comput. 2010. V. 25. No. 1. P. 23–35. https://doi.org/10.1093/llc/fqp035.

14. *Zhou L., Ticrea M., Hovy E.* Multi-document biography summarization // Proc. 2004 Conf. on Empirical Methods in Natural Language Processing. 2004. P. 434–441.
15. *Vempala A., Blanco E.* Extracting Biographical Spatial Timelines: Corpus and Experiments // IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing. 2020. https://doi.org/10.1109/taslp.2020.2988418/
16. *Chisholm A., Radford W., Hachey B.* Learning to generate one-sentence biographies from wikidata // Proc. 15th Conf. of the Eur. Chapter of the Association for Computational Linguistics: V. 1, Long Papers. 2017. P. 633–642. https://doi.org/10.18653/v1/e17-1060.
17. *Yu D., Ji H., Li S., et al.* Why read if you can scan? Trigger scoping strategy for biographical fact extraction // Proc. 2015 Conf. of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies. 2015. P. 1203–1208. https://doi.org/10.3115/v1/n15-1126.
18. *Garcia M., Gamallo P.* Exploring the effectiveness of linguistic knowledge for biographical relation extraction // Natural Language Engineering. 2015. V. 21. No. 4. P. 519–551. https://doi.org/10.1017/s1351324913000314.
19. *Jing H., Kambhatla N., Roukos S.* Extracting social networks and biographical facts from conversational speech transcripts // Proc. 45th Annual Meeting of the Association of Computational Linguistics. 2007. P. 1040–1047.
20. *Biadsy F., Hirschberg J., Filatova E.* An unsupervised approach to biography production using Wikipedia // Proc. ACL-08: HLT. 2008. P. 807–815.
21. *Gotti F., Langlais P.* From French Wikipedia to Erudit: A test case for cross-domain open information extraction // Computational Intelligence. 2018. V. 34. No. 2. P. 420–439. https://doi.org/10.1111/coin.12120.
22. *Menini S., Sprugnoli R., Moretti G. et al.* Ramble on: tracing movements of popular historical figures // Proc. Software Demonstrations of the 15th Conf. of the Eur. Chapter of the Association for Computational Linguistics. 2017. P. 77–80. https://doi.org/10.18653/v1/e17-3020/
23. *Russo I., Caselli T., Monachini M.* Extracting and Visualising Biographical Events from Wikipedia // BD. 2015. P. 111–115.
24. *Plum A., Zampieri M., Orasan C. et al.* Large-scale data harvesting for biographical data // Biographical Data in a Digital World. At: Varna, Bulgaria. 2019.
25. *Flekova L., Ferschke O., Gurevych I.* What makes a good biography? Multidimensional quality analysis based on Wikipedia article feedback data // Proc. 23rd Int. Conf. on World wide web. 2014. P. 855–866. https://doi.org/10.1145/2566486.2567972.
26. *Petrasova S., Khairova N., Lewoniewski W. et al.* Similar text fragments extraction for identifying common Wikipedia communities // Data. 2018. V. 3. No. 4. P. 66. https://doi.org/10.3390/data3040066.
27. *Huang K.C., Chiang I.J., Xiao F., et al.* PICO element detection in medical text without metadata: Are first sentences enough? // J. Biomed. Inform. 2013. No. 5. P. 940–946. https://doi.org/10.1016/j.jbi.2013.07.009.
28. *Yamamoto Y., Takagi T.* A sentence classification system for multi biomedical literature summarization // 21st Int. Conf. on Data Engineering Workshops (ICDEW'05). 2005. P. 1163–1163. https://doi.org/10.1109/icde.2005.170.
29. *Xu R., Supekar K., Huang Y. et al.* Combining text classification and Hidden Markov Modeling techniques for categorizing sentences in randomized clinical trial abstracts // Annual Symposium proceedings. AMIA Symposium. American Medical Informatics Association. 2006. P. 824–828.

30. *Mikhalkova E.V., Ganzherli N.V., Karyakin Y.E., et al.* Machine learning classification of user interests across languages and social networks // Komp. Lingvistika i Intel. Tehn. 2018. P. 501–511.
31. *Chen T., Xu R., He Y., et al.* Improving sentiment analysis via sentence type classification using BiLSTM-CRF and CNN // Expert Systems with Applications. 2017. V. 72. P. 221–230. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2016.10.065.
32. *Kim Y.* Convolutional Neural Networks for Sentence Classification // Proc. 2014 Conf. on Empirical Methods in Natural Language Processing (EMNLP). 2014. P. 1746–1751. https://doi.org/10.3115/v1/d14-1181.
33. *Wang J., Yu L.C., Lai K.R., et al.* Dimensional sentiment analysis using a regional CNN-LSTM model // Proc. 54th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (V. 2: Short Papers). 2016. P. 225–230. https://doi.org/10.18653/v1/p16-2037.
34. *Trofimovich J.* Comparison of neural network architectures for sentiment analysis of russian tweets // Computational Linguistics and Intellectual Technologies: Proc. Int. Conf. Dialogue. 2016. P. 50–59.
35. *Gordeev D.* Detecting state of aggression in sentences using CNN // Int. Conf. on Speech and Computer. Springer, Cham. 2016. P. 240–245. https://doi.org/10.1007/978-3-319-43958-7_28.
36. *Miftahutdinov Z., Alimova I., Tutubalina E.* KFU NLP Team at SMM4H 2019 Tasks: Want to Extract Adverse Drugs Reactions from Tweets? BERT to The Rescue // Proc. Fourth Social Media Mining for Health Applications (# SMM4H) Workshop & Shared Task. 2019. P. 52–57. https://doi.org/10.18653/v1/w19-3207.
37. *Mapes N., White A., Medury R., et al.* Divisive Language and Propaganda Detection using Multi-head Attention Transformers with Deep Learning BERT-based Language Models for Binary Classification // Proc. Second Workshop on Natural Language Processing for Internet Freedom: Censorship, Disinformation, and Propaganda. 2019. P. 103–106. https://doi.org/10.18653/v1/d19-5014.
38. *Peng Y., Yan S., Lu Z.* Transfer Learning in Biomedical Natural Language Processing: An Evaluation of BERT and ELMo on Ten Benchmarking Datasets // Proc. 18th BioNLP Workshop and Shared Task. 2019. P. 58–65. https://doi.org/10.18653/v1/w19-5006.
39. *Lee J.Y., Dernoncourt F.* Sequential Short-Text Classification with Recurrent and Convolutional Neural Networks // Proc. NAACL-HLT, 2016. P. 515–520. https://doi.org/10.18653/v1/n16-1062.
40. *Dernoncourt F., Lee J.Y., Szolovits P.* Neural Networks for Joint Sentence Classification in Medical Paper Abstracts // Proc. 15th Conf. of the Eur. Chapter of the Association for Computational Linguistics: V. 2, Short Papers. 2017. P. 694–700. https://doi.org/10.18653/v1/e17-2110.
41. *Jin D., Szolovits P.* Hierarchical Neural Networks for Sequential Sentence Classification in Medical Scientific Abstracts // Proc. 2018 Conf. on Empirical Methods in Natural Language Processing. 2018. P. 3100–3109. https://doi.org/10.18653/v1/d18-1349.
42. *Yang B., Cardie C.* Context-aware learning for sentence-level sentiment analysis with posterior regularization // Proc. 52nd Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics (V. 1: Long Papers). 2014. P. 325–335. https://doi.org/10.3115/v1/p14-1031.
43. *Глазкова А.В.* Автоматический поиск фрагментов, содержащих биографическую информацию, в тексте на естественном языке // Тр. ин-та сист. прогр. РАН. 2018. № 6. С. 221–236. https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2018-30(6)-12.

44. *Mikolov T., Chen K., Corrado G., et al.* Efficient estimation of word representations in vector space. arXiv preprint arXiv:1301.3781. 2013.
45. *Hochreiter S., Schmidhuber J.* Long Short-term Memory // Neural. Comput. 1997. No. 8. P. 1735–1780.
46. *Bai T., Dou H.J., Zhao W.X., et al.* An Experimental Study of Text Representation Methods for Cross-Site Purchase Preference Prediction Using the Social Text Data // J. Comput. Sci. Technol. 2017. No. 4. P. 828–842.

    https://doi.org/10.1007/s11390-017-1763-6.
47. Корпус биографических текстов. URL: https://sites.google.com/site/utcorpus. Дата доступа: 06.10.19.
48. *Kuratov Y., Arkhipov M.* Adaptation of deep bidirectional multilingual transformers for Russian language. arXiv preprint arXiv:1905.07213. 2019.
49. Transformers. URL: https://huggingface.co/transformers/. Дата доступа: 27.05.20.
50. PyTorch. URL: https://pytorch.org/. Дата доступа: 27.05.20.
51. Scikit-Learn. Machine Learning in Python.

    URL: https://scikit-learn.org/stable/index.html. Дата доступа: 29.05.20.
52. Keras: The Python Deep Learning library. URL: https://keras.io/. Дата доступа: 17.09.19.
53. *Kutuzov A., Kuzmenko E.* WebVectors: A Toolkit for Building Web Interfaces for Vector Semantic Models // Communicat. Comput. Inform. Sci. V. 661. P. 155–161. https://doi.org/10.1007/978-3-319-52920-2_15.
54. DeepPavlov: an open source conversational AI framework.

    URL: http://deeppavlov.ai/. Дата доступа: 27.05.20.
55. Тематическая классификация фрагментов биографии с учетом их ближайшего контекста. URL: https://github.com/oldaandozerskaya/ait. Дата доступа: 27.05.20.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.П. Кузнецовым.

Поступила в редакцию 08.10.2019

После доработки 30.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020

СОДЕРЖАНИЕ

Тематический выпуск (окончание)

Линейные системы

Стохастические системы

Интеллектуальные системы управления, анализ данных

C O N T E N T S

Topical issue (end)

Linear Systems

Stochastic Systems

Intellectual Control Systems, Data Analysis