
СОДЕРЖАНИЕ

Том 62, номер 12, 2022 год

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

- Конформное отображение L -образной области в аналитическом виде
В. И. Власов, С. Л. Скороходов 1943
- L^2 -диссипативность линеаризованной явной схемы на разнесенных сетках
для уравнений 1D баротропной газовой динамики с регуляризацией
А. А. Злотник, Т. А. Ломоносов 1981
- Численное исследование свойств остаточного члена в проблеме круга
Д. А. Попов, Д. В. Сушко 2002
-

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

- Численный алгоритм решения класса экстремальных задач с ограничением
в виде подмножества точек гладкой поверхности
Ю. А. Черняев 2018
-

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- К интегрированию уравнения Матье с затуханием в монографии Н.Н. Боголюбова
и Ю.А. Митропольского “Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний”
А. Ф. Курин 2026
- Аналитико-численный метод для анализа малых возмущений
океанских геострофических течений с параболическим
вертикальным профилем скорости общего вида
С. Л. Скороходов, Н. П. Кузьмина 2043
-

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

- Формулы для вычисления функции Лауричеллы в ситуации кроудинга переменных
С. И. Безродных 2054
- Об аналитическом продолжении конформного отображения кругового треугольника
С. В. Пикулин 2077
- Multizonal Boundary and Internal Layers in the Singularly Perturbed Problems
for a Stationary Equation of Reaction-Advection-Diusion Type with Weak
and Discontinuous Nonlinearity
Q. Yang, M. Ni 2089
-

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

- Структуры бездиссипативных разрывов и уединенные волны в решениях уравнений
двухжидкостной плазмы в приближении электромагнитной гидродинамики
И. Б. Бахолдин 2090
- О приближении двумя шарами твердого тела, близкого к динамически симметричному
А. А. Буров, В. И. Никонов 2105
- A Novel Numerical Approach for Fredholm Integro-Differential Equations
Н. G. Cakir, F. Cakir, M. Cakir 2112
-
-

**ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ
МЕТОДЫ**

УДК 517.95

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ L -ОБРАЗНОЙ ОБЛАСТИ В АНАЛИТИЧЕСКОМ ВИДЕ¹⁾

© 2022 г. В. И. Власов^{1, 2, *}, С. Л. Скороходов^{1, **}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

² 119991 Москва, Воробьевы горы, 1, МГУ им. М.В.Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Россия

*e-mail: vlasov@ccas.ru

**e-mail: sskorokhodov@gmail.com

Поступила в редакцию 11.03.2022 г.
Переработанный вариант 08.05.2022 г.
Принята к публикации 14.06.2022 г.

Проблема параметров интеграла Кристоффеля–Шварца для конформного отображения f канонической области на L -образную решена в аналитическом виде при произвольных геометрических параметрах области. Неизвестный прообраз представлен в виде ряда по степеням малого параметра с явно выписанными коэффициентами, для которых получена оценка их модуля. Найдены асимптотики для эффекта кроудинга (сгущивания прообразов), ярко выраженного для удлиненной области. Для вычисления отображения f и обратного к нему f^{-1} даны ряды с явными коэффициентами, области сходимости которых в совокупности покрывают всю (замкнутую) отображаемую область. Сочетание f с дробно-линейными отображениями и эллиптическим синусом позволило получить отображение полуплоскости, круга и прямоугольника на L -образную область. Численная реализация построенных отображений показала высокую эффективность применяемых методов. Библ. 50. Фиг. 13. Табл. 3.

Ключевые слова: L -образная область с произвольными параметрами, интеграл Кристоффеля–Шварца, проблема параметров, кроудинг, аналитические методы, асимптотики при удлинении области.

DOI: 10.31857/S0044466922120146

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Вводные замечания

Как известно, основной трудностью, возникающей при использовании интеграла Кристоффеля–Шварца для построения конформного отображения канонической области на многоугольник, является проблема параметров этого интеграла (об этом см., например, [1]–[8]).

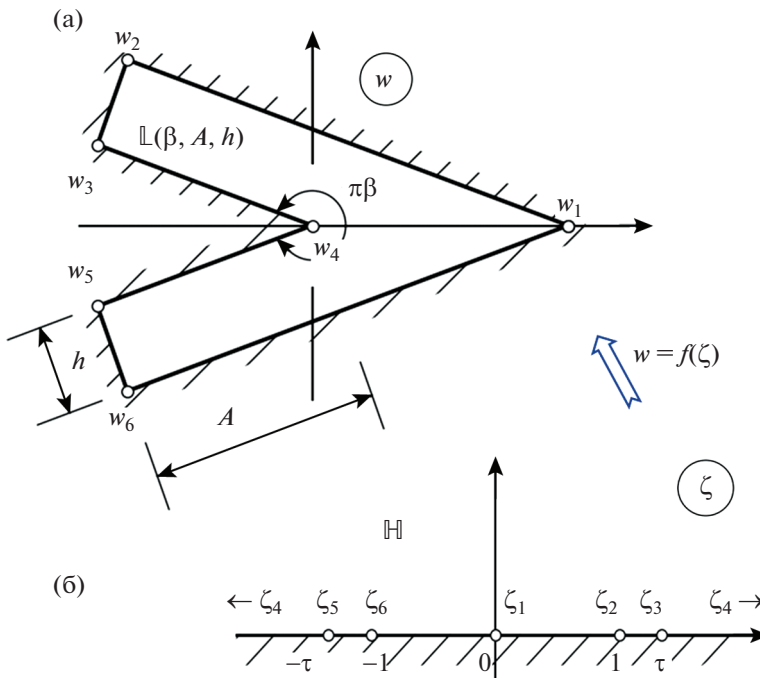
Для рассматриваемого в работе отображения $w = f(\zeta)$ полуплоскости $\mathbb{H} := \{\text{Im } \zeta > 0\}$ на симметричную L -образную область (на фиг. 1 заштриховано дополнение к областям) с соответствием точек

$$f(\zeta_k) = w_k, \quad k = \overline{1, 6}, \quad (1)$$

данную проблему, по существу, составляет нахождение только одного параметра – прообраза ζ_3 вершины w_3 , обозначенного через τ . Прообразы остальных вершин, фигурирующие в интеграле Кристоффеля–Шварца для рассматриваемой области $\mathbb{L}(\beta, A, h)$, определяемой параметрами

$$\beta \in (1, 2), \quad A \in (0, \infty), \quad h > 0, \quad (2)$$

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.



Фиг. 1

заданы так, как показано на фиг. 1. Такое отображение, эквивалентное отображению первого квадранта $\{\zeta : \text{Re } \zeta > 0, \text{Im } \zeta > 0\}$ на четырехугольник $\mathbb{L}(\beta, A, h) \cap \{\text{Im } w > 0\}$ с переводом точек $0, 1, \infty$ соответственно в вершины w_1, w_2, w_4 существует и единственно.

Уравнение, связывающее величину τ с геометрическими параметрами области $\mathbb{L}(\beta, A, h)$, составляемое, как обычно [2], [3], на основе (осуществляемого отображением f) соответствия между точками плоскостей ζ и w , записывается в виде

$$\frac{f(1) - f(0)}{f(\tau) - f(1)} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_2} \tag{3}$$

с подстановкой сюда отображения $f(\zeta)$, выраженного через интеграл Кристоффеля–Шварца. После некоторых преобразований (см. п. 2.5) и введения вместо τ и относительной длины

$$A/h = |w_4 - w_3|/|w_3 - w_2| \tag{4}$$

(см. фиг. 1a) новых переменных – соответственно ε и W – по формулам

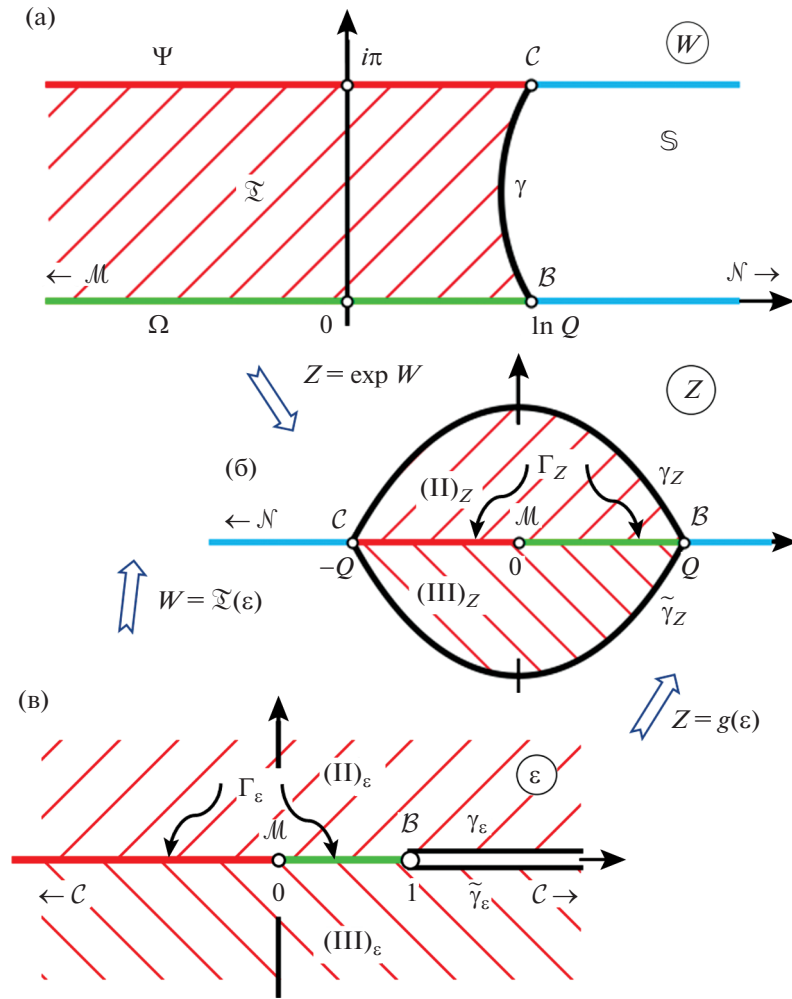
$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{\tau^2}, \quad W = \ln Q - \pi \frac{A}{h}, \tag{5}$$

где Q явным образом определяется через β (см. п. 2.4), уравнение (3) преобразуется к виду

$$\mathcal{F}(\varepsilon) = W, \tag{6}$$

в котором \mathcal{F} выражается через гипергеометрическую функцию Гаусса (об этой специальной функции см. [9], [10], а о более общих гипергеометрических функциях см. [11]). Величину ε будем называть модифицированным преобразованием.

Замечательный факт, служащий ключом к получению аналитического решения уравнения (6), состоит в том, что если переменным ε и W придавать комплексные значения, то функция $W = \mathcal{F}(\varepsilon)$ будет осуществлять конформное отображение полуплоскости \mathbb{H} на некоторый круговой треугольник (этот факт для интеграла Кристоффеля–Шварца, соответствующего произвольному четырехугольнику, установлен в [3]). Для нашего случая такой круговой треугольник на плоскости W , обозначенный через \mathfrak{T} , на фиг. 2a заштрихован.



Фиг. 2

Поскольку область \mathfrak{L} , очевидно, представляет собой деформированную полосу

$$\mathbb{S} := \{\text{Im } W \in (0, \pi)\}, \tag{7}$$

а отображение полуплоскости на полосу осуществляет $\ln \varepsilon$, то согласно результатам о конформном отображении сингулярно деформированных областей [12], [13], отображение $W = \mathcal{F}(\varepsilon)$ может быть представлено в виде суперпозиции логарифма и ряда Тейлора:

$$\mathcal{F}(\varepsilon) = \ln \left(\varepsilon + \sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k \varepsilon^k \right), \tag{8}$$

где коэффициенты λ_k определяются только через показатель β по явным формулам, получаемым из упомянутого выше представления отображения $\mathcal{F}(\varepsilon)$ через гипергеометрическую функцию. Обращая зависимость (8), получаем для обратного отображения $\varepsilon = \mathcal{F}^{-1}(W)$ ряд по натуральным степеням переменной e^W . Записывая эту переменную с помощью второй формулы (5) через Q и параметр

$$\delta := \exp \left(-\pi \frac{A}{h} \right) \in (0, 1) \tag{9}$$

в виде $e^W = Q\delta$, получаем функцию $\varepsilon = G(\delta) := \mathcal{F}^{-1} \circ \ln(Q\delta)$, выражающую искомый модифицированный прообраз ε через геометрические параметры области $\mathbb{L}(\beta, A, h)$ в виде следующего ряда:

$$\varepsilon = G(\delta) = Q \left(\delta + \sum_{k=2}^{\infty} B_k \delta^k \right) \quad (10)$$

по степеням параметра δ с коэффициентами B_k , зависящими только от показателя β (так называют величину угла, деленную на π).

Параметр δ , как видно из его определения (9), быстро убывает при возрастании величины A/h — относительной длины полки области $\mathbb{L}(\beta, A, h)$; полкой называют вписанный в область $\mathbb{L}(\beta, A, h)$ прямоугольник с вершинами w_2, w_3, w_4 и четвертой, лежащей на стороне $\widehat{w_1 w_2}$, см. фиг. 1а. В разд. 2 установлено, что ряд (10) сходится при всех значениях $\beta \in (1, 2)$ и всех значениях относительной длины $A/h \in (0, \infty)$, а его вещественные коэффициенты B_k выражаются через β по явным формулам.

Это и дает аналитическое решение проблемы параметров для рассматриваемого интеграла Кристоффеля—Шварца. Такой способ отличается от известных подходов, предлагающих находить требуемые параметры либо из нелинейных трансцендентных уравнений, аналогичных (6), применяя к ним итерационные методы типа Ньютона [2]–[8], [14]–[16], либо из системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений [17]–[19] с помощью численных методов.

1.2. Проблема кроудинга

С проблемой параметров интеграла Кристоффеля—Шварца тесно связано явление кроудинга (от английского “to crowd” — толпиться, сгущаться), т.е. чрезвычайно близкое расположение соседних прообразов. Его исследованию и преодолению вызываемых им вычислительных трудностей посвящены многие работы (см., например, [5]–[8], [11], [15], [20]–[24] и приведенную там библиографию).

Для отображения $w = f(\zeta)$, определенного в п. 1.1, это явление заключается в том, что при возрастании относительной длины A/h полки резко сокращается расстояние $\tau - 1$ между прообразами ζ_3 и ζ_2 (см. фиг. 1б). Этот факт находит отражение в виде следующей асимптотики:

$$\tau - 1 = \frac{Q}{2} \delta + \frac{Q^2}{8} \delta^2 + \mathcal{O}(\delta^3), \quad \delta \rightarrow 0, \quad (11)$$

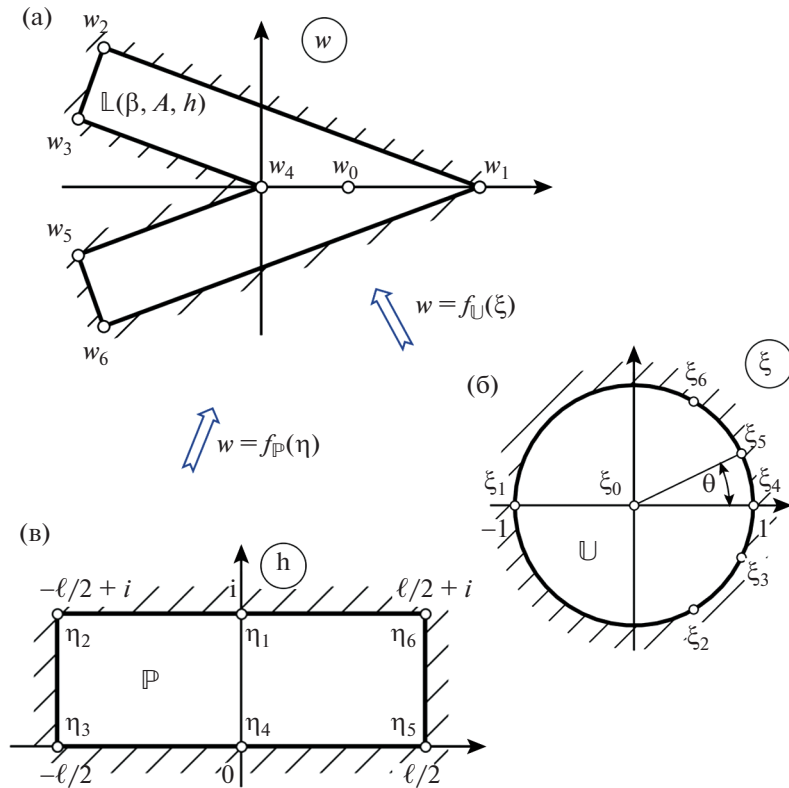
согласующейся с (10) и первой формулой (5). Здесь параметр δ , определяемый формулой (9), быстро уменьшается с ростом относительной длины A/h ; действительно, $\delta = 4.32 \times 10^{-2}$ при $A = h$ и $\delta = 1.51 \times 10^{-7}$ при $A = 5h$, а зависимость асимптотики (11) от показателя входящего угла β осуществляется через параметр Q , значение которого для наиболее часто встречающегося показателя $\beta = 3/2$ составляет $Q = 6.65$.

Если же рассмотреть отображение $w = f_{\mathbb{U}}(\xi)$ другой канонической области, единичного круга $\mathbb{U} := \{|\xi| < 1\}$, на область $\mathbb{L}(\beta, A, h)$ с однозначно определяющей его нормировкой (см. фиг. 3б, 3в),

$$f_{\mathbb{U}}(0) = w_0 := \frac{h}{2} \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi\beta}{2}\right), \quad f'_{\mathbb{U}}(0) < 0, \quad (12)$$

(w_0 лежит на середине отрезка $\widehat{w_4 w_1}$), то для такого отображения кроудинг возникает не только при увеличении, но и при укорочении относительной длины A/h . Последний проявляется в быстром приближении прообраза $\xi_5 := f_{\mathbb{U}}^{-1}(w_5) = e^{i\theta}$ к прообразу $\xi_4 := f_{\mathbb{U}}^{-1}(w_4) = 1$ при $A/h \rightarrow 0$ (одновременно симметрично приближается к точке ξ_4 и прообраз $\xi_3 = e^{-i\theta}$), что описывается следующей асимптотикой для углового расстояния θ между ξ_5 (или ξ_3) и прообразом ξ_4 , см. фиг. 3б:

$$\theta = \mathcal{P}_1 \left(\frac{A}{h} \right)^{1/(\beta-1)} [1 + \mathcal{O}(A/h)], \quad A/h \rightarrow 0; \quad (13)$$



Фиг. 3. Конформное отображение на круг и прямоугольник.

выражение для фигурирующего здесь коэффициента \mathcal{P}_1 , зависящего только от β , дано в разд. 4. Его значение для наиболее часто встречающегося показателя $\beta = 3/2$ составляет $\mathcal{P}_1 = 9.5785359$.

1.3. Численная реализация

В работе осуществлена численная реализация отображения полуплоскости на L -образную область, т.е. $\tilde{f}_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{L}(\beta, A, h)$, с модифицированной по сравнению с приведенной в п. 1.1 нормировкой:

$$\tilde{f}_{\mathbb{H}}(0) = w_0, \quad \tilde{f}_{\mathbb{H}}(1) = w_6, \quad \tilde{f}_{\mathbb{H}}(\infty) = w_{\infty}, \tag{14}$$

где точки w_0, w_6, w_{∞} указаны на фиг. 4. Результаты численной реализации построенного отображения $\tilde{f}_{\mathbb{H}}(\zeta)$ представлены в виде образа декартовой сетки полуплоскости, изображенного на фиг. 4; более подробный вид фрагмента этого образа в окрестности вершины входящего угла дан на фиг. 5.

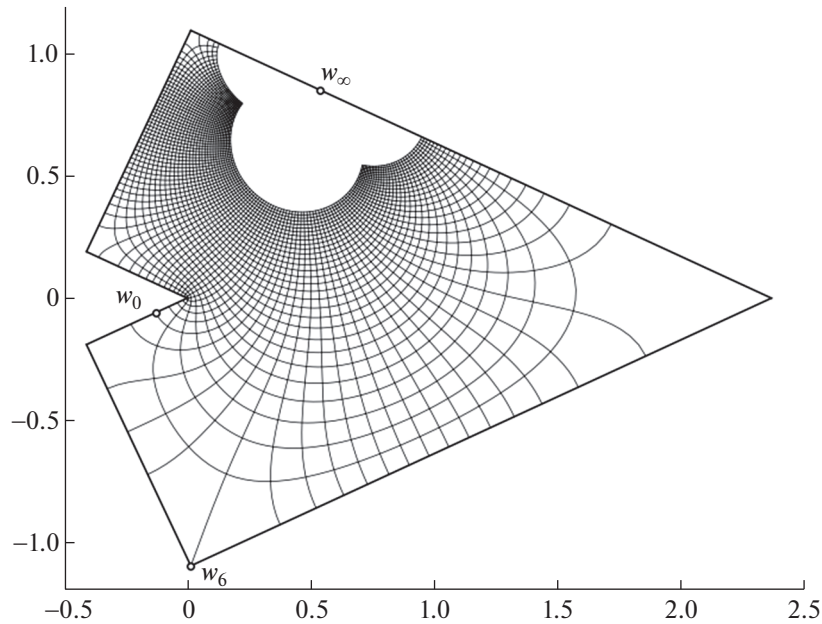
Построено также отображение круга на L -образную область, т.е. $\tilde{f}_{\mathbb{U}} : \mathbb{U} \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{L}(\beta, A, h)$, переводящее центр круга $\xi = 0$ в w_0 , а граничную точку $\xi = 1$ в w_1 . На фиг. 6 представлена численная реализация этого отображения в виде образа полярной сетки для случая несимметричного расположения точки w_0 . Сама полярная сетка в \mathbb{U} изображена на фиг. 7.

В работе рассмотрено отображение $w = f_{\mathbb{P}}(\eta)$ еще одной области, прямоугольника

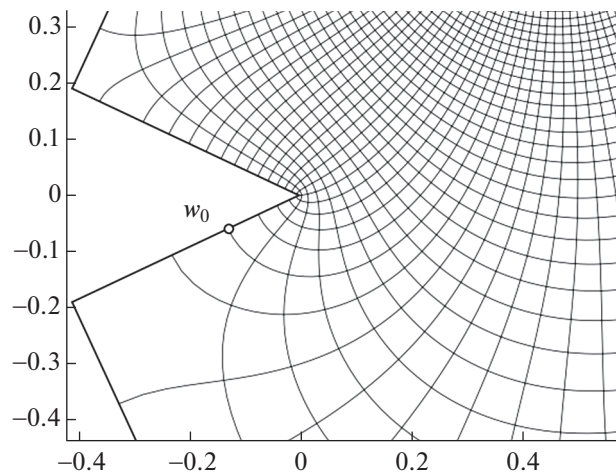
$$\mathbb{P} := \{\eta : \text{Re } \eta \in (-l/2, l/2), \text{Im } \eta \in (0, 1)\}$$

на область $\mathbb{L}(\beta, A, h)$ со следующим соответствием граничных точек (легко усматриваемым из фиг. 3а, 3в):

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{P}}(\eta_2) &= w_2, & f_{\mathbb{P}}(\eta_3) &= w_3, & f_{\mathbb{P}}(\eta_5) &= w_5, & f_{\mathbb{P}}(\eta_6) &= w_6, \\ \eta_2 &= -l/2 + i, & \eta_3 &= -l/2, & \eta_5 &= l/2, & \eta_6 &= l/2 + i, \end{aligned} \tag{15}$$



Фиг. 4. Образ декартовой сетки полуплоскости в L -образной области.

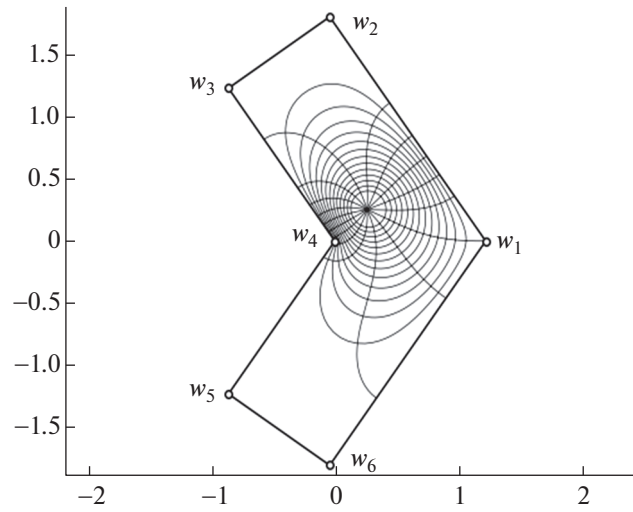


Фиг. 5. Образ декартовой сетки в окрестности входящего угла.

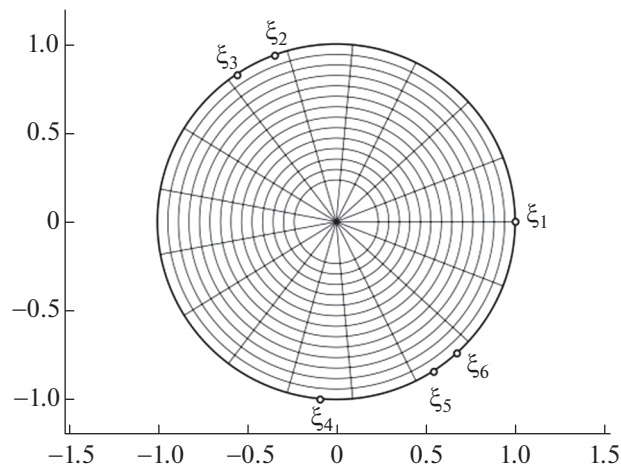
где w_k — вершины шестиугольника $\mathbb{L}(\beta, A, h)$. При этом ширина полки (как и в других примерах) полагалась равной $h = 1$, а заранее неизвестная длина A полки L -образной области находилась из трансцендентного уравнения, указанного в разд. 4. Численная реализация этого отображения продемонстрирована на фиг. 8 в виде образа декартовой сетки прямоугольника, изображенной на фиг. 9; более подробный вид фрагмента этого образа в окрестности вершины входящего угла дан на фиг. 10.

Развернутое описание численных результатов приведено в разд. 4.

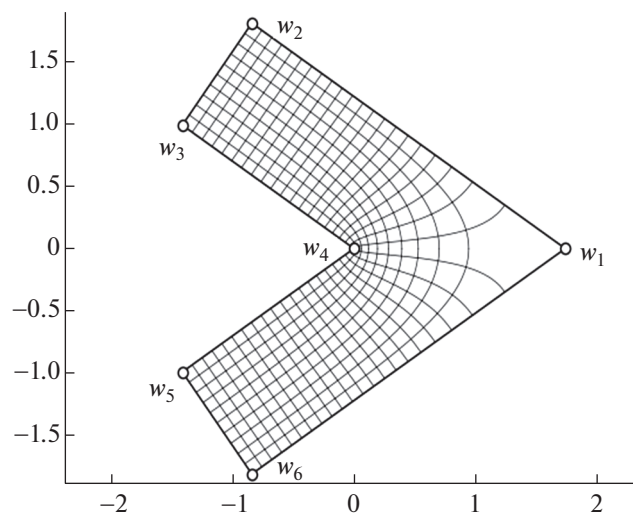
Необходимо отметить, что, в отличие от традиционного подхода (как, например, в [5]–[8], [16], [22] для вычисления интеграла Кристоффеля–Шварца в настоящей работе не использовались квадратурные формулы. Расчет этого интеграла осуществлялся на основе полученного для него набора разложений (по степеням некоторых функций) вблизи некоторых граничных точек или отрезков границы. Коэффициенты разложений выписаны явно, а сами разложения допускают обращение, что дает представления для обратных отображений вблизи некоторых вершин



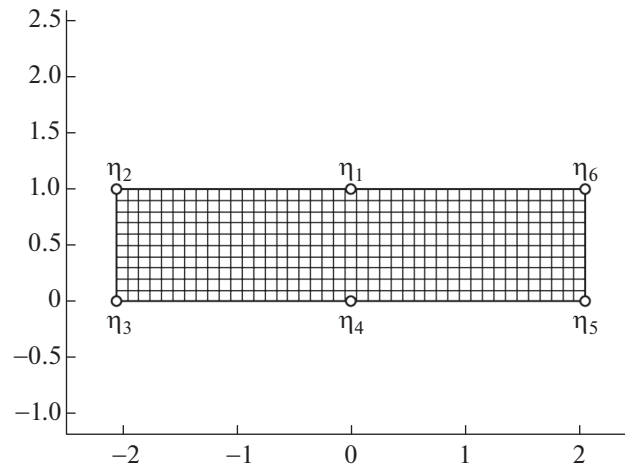
Фиг. 6. Образ полярной сетки в L -образной области.



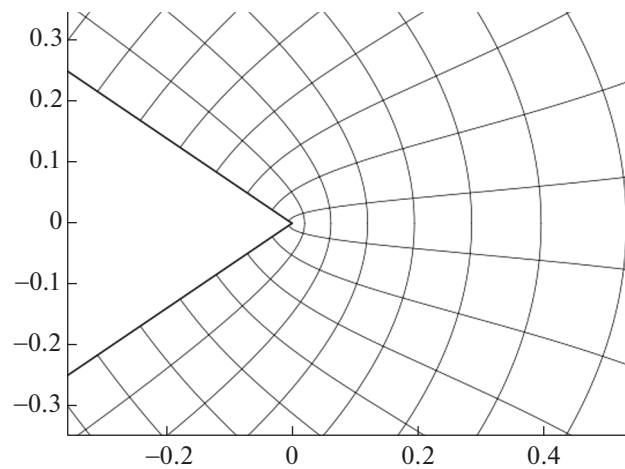
Фиг. 7. Полярная сетка в круге.



Фиг. 8. Образ декартовой сетки прямоугольника в L -образной области.



Фиг. 9. Декартова сетка прямоугольника.



Фиг. 10. Образ декартовой сетки прямоугольника в окрестности входящего угла.

многоугольника и торцов его полок. При этом множества сходимости представлений для отображения полуплоскости на многоугольник покрывают в совокупности замыкание полуплоскости, а множества сходимости представлений для обратного отображения покрывают замыкание всего многоугольника.

1.4. Заключительные замечания

Некоторые использованные в работе подходы и отдельные результаты были в краткой форме изложены в работах [23], [25] с приложением к проблемам физики плазмы, а также в работах [26]–[28], где они были применены – в сочетании с аналитическим методом Треффца [29], [30] – к решению задачи о кручении призматических стержней с полигональным поперечным сечением, включая получение явных аналитических формул для коэффициентов интенсивности во входящих углах сечения.

Следует отметить, что развернутые исследования вычислительных аспектов конформного отображения многоугольников продолжаются, в том числе и в связи с расширяющимся кругом их приложений к различным проблемам прикладной и вычислительной математики, механики и других предметных областей [24], [31]–[36].

2. ИНТЕГРАЛ КРИСТОФФЕЛЯ–ШВАРЦА И ЕГО ПАРАМЕТРЫ

2.1. *Отображение на L -образную область*

Рассматриваемая L -образная область $\mathbb{L}(\beta, A, h)$ задается на комплексной плоскости w как симметричный (относительно вещественной оси) шестиугольник, изображенный на фиг. 1а, с вершинами

$$\begin{aligned} w_1 &= h \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi\beta}{2}\right), & w_2 &= (A - ih) \exp\left(i\frac{\pi\beta}{2}\right), & w_3 &= A \exp\left(i\frac{\pi\beta}{2}\right), \\ w_4 &= 0, & w_5 &= A \exp\left(-i\frac{\pi\beta}{2}\right), & w_6 &= (A + ih) \exp\left(-i\frac{\pi\beta}{2}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Углы в вершинах w_1 и w_4 равны соответственно $\pi(2 - \beta)$ и $\pi\beta$, где показатель β входящего угла рассматриваемой области подчинен включению

$$\beta \in (1, 2), \tag{17}$$

а в остальных вершинах углы прямые.

Конформное отображение $w = f(\zeta)$ верхней полуплоскости $\mathbb{H} := \{\operatorname{Im} \zeta > 0\}$ на область $\mathbb{L}(\beta, A, h)$, которое строится в работе, подчинено нормировке (1), где прообразы ζ_k вершин w_k указаны на фиг. 1, причем прообраз τ вершины w_3 заранее неизвестен (это отмечалось в п. 1.1); согласно принципу соответствия границ [37], он удовлетворяет неравенству

$$\tau > 1. \tag{18}$$

Указанная нормировка отображения $w = f(\zeta)$ с учетом симметричности области, принципа симметрии Римана–Шварца [37] и следующего из него равенства

$$f(\zeta) = \overline{f(-\bar{\zeta})} \quad \forall \zeta \in \mathbb{H} \tag{19}$$

обеспечивает существование и единственность этого отображения.

В соответствии с теорией конформного отображения многоугольников [3], [6], [37] записываем рассматриваемое отображение в виде интеграла Кристоффеля–Шварца

$$f(\zeta) = -\exp\left(i\frac{\pi\beta}{2}\right) \mathcal{K} h \int_0^\zeta \frac{x^{1-\beta} dx}{[(x^2 - 1)(x^2 - \tau^2)]^{1/2}} + h \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi\beta}{2}\right), \tag{20}$$

где, кроме прообраза τ , неизвестным и подлежащим нахождению является еще коэффициент $\mathcal{K} > 0$.

2.2. *Параметры отображения*

Для вычисления величин τ и \mathcal{K} составим с помощью традиционного подхода (изложенного, например, в [2]–[4], [6], [37]) систему уравнений, приравнивая заданные стороны многоугольника $\mathbb{L}(\beta, A, h)$, рассматриваемые как векторы, их выражениям через интеграл (20). Для сторон $\overline{w_1 w_2}$ и $\overline{w_2 w_3}$ имеем (порядок букв в обозначении граничных дуг соответствует такому направлению обхода области, когда она остается слева):

$$f(1) - f(0) = \left(A - h\frac{\pi\beta}{2}\right) \exp\left(i\frac{\pi\beta}{2}\right), \tag{21}$$

$$f(\tau) - f(1) = h \exp\left(i\frac{\pi + \pi\beta}{2}\right). \tag{22}$$

Подставляя в (21), (22) представление (20) для $f(\zeta)$, получаем систему

$$\mathcal{K} \int_0^1 \frac{x^{1-\beta} dx}{(1-x^2)^{1/2}(\tau^2-x^2)^{1/2}} = \frac{A}{h} - \operatorname{ctg} \frac{\pi\beta}{2}, \quad \mathcal{K} \int_1^\tau \frac{x^{1-\beta} dx}{(x^2-1)^{1/2}(\tau^2-x^2)^{1/2}} = 1. \tag{23}$$

Проведя в первом из этих интегралов замену переменной $x^2 = t$, а во втором – замену $x^2 = 1 + (\tau^2 - 1)t$, $t \in [0, 1]$, и воспользовавшись интегральным представлением Эйлера [9] для гипергеометрической функции Гаусса $F(a, b; c; z)$,

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a} dt, \quad c > b > 0, \quad (24)$$

выразим через нее интегралы в системе (23). В результате она приобретет вид

$$\frac{\mathcal{K}}{2\tau} \frac{\Gamma\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-\beta}{2}\right)} F\left(\frac{1}{2}, 1-\frac{\beta}{2}; \frac{3-\beta}{2}; \frac{1}{\tau^2}\right) = \frac{A}{h} - \operatorname{ctg} \frac{\pi\beta}{2}, \quad (25)$$

$$\frac{\mathcal{K}}{2} \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) F\left(\frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1-\tau^2\right) = 1. \quad (26)$$

Перейдем далее вместо τ к переменной

$$\varepsilon := 1 - \tau^{-2}, \quad (27)$$

а для гипергеометрической функции в уравнении (26) поменяем местами первый и второй параметры (что допустимо), а также выполним аналитическое продолжение функции Гаусса по формуле (6) из [9, с. 116], имеющей вид:

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{-a} F\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right). \quad (28)$$

Тогда система (25), (26) переписывается следующим образом:

$$\frac{\mathcal{K}}{2\tau} \frac{\Gamma\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-\beta}{2}\right)} F\left(\frac{1}{2}, 1-\frac{\beta}{2}; \frac{3-\beta}{2}; 1-\varepsilon\right) = \frac{A}{h} - \operatorname{ctg} \frac{\pi\beta}{2}, \quad (29)$$

$$\frac{\mathcal{K}}{2\tau} \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) F\left(\frac{1}{2}, 1-\frac{\beta}{2}; 1; \varepsilon\right) = 1, \quad (30)$$

а из неравенства (18) находим, что областью определения искомого прообраза ε является интервал

$$\varepsilon \in (0, 1). \quad (31)$$

Деля левые части уравнений (29), (30) друг на друга, и учитывая известное равенство $\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$, получим уравнение, содержащее только одну искомую величину ε ; после умножения на (-1) оно примет вид:

$$-\frac{\Gamma\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) F\left(\frac{1}{2}, 1-\frac{\beta}{2}; \frac{3-\beta}{2}; 1-\varepsilon\right)}{\Gamma\left(\frac{3-\beta}{2}\right) F\left(\frac{1}{2}, 1-\frac{\beta}{2}; 1; \varepsilon\right)} = \pi \operatorname{ctg} \frac{\pi\beta}{2} - \pi \frac{A}{h}. \quad (32)$$

Если решение ε этого уравнения найдено, то прообраз τ находится по формуле

$$\tau = (1-\varepsilon)^{-1/2}, \quad (33)$$

следующей из равенства (27), а второй неизвестный параметр интеграла (20) – величина \mathcal{K} – по формуле

$$\mathcal{K} = \frac{2}{\pi} \frac{(1-\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}}{F\left(\frac{1}{2}, 1-\frac{\beta}{2}; 1; \varepsilon\right)}, \quad (34)$$

легко следующей из равенства (27) и уравнения (30).

Таким образом, проблему параметров интеграла Кристоффеля–Шварца для рассматриваемого отображения $w = f(\zeta)$, как это и говорилось в п. 1.1, по существу, составляет получение только одного параметра – прообраза τ , что в силу (27) эквивалентно нахождению величины ε .

2.3. Преобразование функции Гаусса

Проведем преобразования уравнения (32) с помощью известных положений теории гипергеометрической функции Гаусса, изложенных, например, в [9], [10].

Заметим, что функции $F(a, b; c; z)$ и $F(a, b; a + b + 1 - c; 1 - z)$ также называют решениями Куммера $u_1(z)$ и $u_2(z)$ гипергеометрического уравнения

$$z(1 - z) \frac{d^2 u}{dz^2} + [c - (a + b + 1)z] \frac{du}{dz} - abu = 0 \tag{35}$$

или рядами Куммера (они линейно независимы).

Принимая функцию Гаусса в знаменателе левой части (32) в качестве $u_1(\epsilon)$, а функцию Гаусса в числителе – в качестве $u_2(\epsilon)$, видим, что значения параметров a, b, c в нашем случае суть

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = 1 - \frac{\beta}{2}, \quad c = 1. \tag{36}$$

Так как функция $u_1(\epsilon)$ отвечает условию $c \neq 0, -1, -2, \dots$, то она с учетом (36) представляется в окрестности точки $\epsilon = 0$ в виде гипергеометрического ряда

$$u_1(\epsilon) = F\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{\beta}{2}; 1; \epsilon\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)_k}{(k!)^2} \epsilon^k, \tag{37}$$

где $(a)_k$ – символ Похгаммера [9], выражаемый в виде произведений

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_k = a(a + 1) \dots (a + k - 1), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (a \neq 0, -1, -2, \dots)$$

или через гамма-функцию $\Gamma(a)$ по формуле $(a)_k := \Gamma(a + k)/\Gamma(a)$.

Чтобы найти в окрестности той же точки $\epsilon = 0$ аналогичное представление для функции $u_2(\epsilon)$, фигурирующей в числителе (32), учтем, что для нее имеет место логарифмический случай (поскольку у нее третий параметр равен сумме первых двух), и воспользуемся формулой аналитического продолжения функции $F(a, b; a + b; z)$ в окрестность точки $z = 1$, т.е. формулой (14) из [9], с. 117. После подстановки в эту формулу значений параметров a и b из (36) и замены $z = 1 - \epsilon$ получаем искомое представление для $u_2(\epsilon)$ в окрестности начала координат:

$$u_2(\epsilon) = F\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{\beta}{2}, \frac{3 - \beta}{2}; 1 - \epsilon\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3 - \beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)_k}{(k!)^2} (q_k - \ln \epsilon) \epsilon^k, \tag{38}$$

где берется ветвь логарифма $\ln \epsilon$, принимающая вещественные значения при положительных значениях аргумента ϵ , т.е.

$$\text{Im} \ln \epsilon = 0, \quad \epsilon \in \{\text{Im} \epsilon = 0, \text{Re} \epsilon > 0\}. \tag{39}$$

Коэффициенты q_k в формуле (38) определяются через логарифмическую производную $\psi(\alpha) = \Gamma'(\alpha)/\Gamma(\alpha)$ гамма-функции следующим образом:

$$q_k := 2\psi(k + 1) - \psi\left(\frac{1}{2} + k\right) - \psi\left(1 - \frac{\beta}{2} + k\right). \tag{40}$$

В частности, коэффициент q_0 дается равенством

$$q_0 = 2\psi(1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(1 - \frac{\beta}{2}\right); \tag{41}$$

отметим, что при $\beta = 3/2$ он составляет $q_0 = \pi/2 + 5 \ln 2$. Остальные q_k , соответствующие $k = 1, 2, \dots$, могут быть вычислены с помощью (41) и рекуррентных соотношений

$$q_k = q_{k-1} - \frac{2(k\beta + k - \beta)}{k(2k - 1)(2k - \beta)}, \tag{42}$$

легко следующих из равенства $\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}$ для пси-функции (см. [9]).

Заменяя в числителе уравнения (32) функцию Гаусса на $u_2(\varepsilon)$ из (38), а в знаменателе — на $u_1(\varepsilon)$ из (37), прибавляя к обеим частям уравнения величину q_0 и используя соотношения для пси-функции из [9]:

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\mathbf{c} - 2 \ln 2, \quad \psi(1-z) = \psi(z) + \pi \operatorname{ctg} \pi z,$$

где $\mathbf{c} = -\psi(1) = 0.57721\dots$ — постоянная Эйлера, приводим уравнение (32) к виду

$$q_0 - \frac{\Gamma\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)u_2(\varepsilon)}{\Gamma\left(\frac{3-\beta}{2}\right)u_1(\varepsilon)} = 2 \ln 2 - \mathbf{c} - \psi\left(\frac{\beta}{2}\right) - \pi \frac{A}{h}. \quad (43)$$

2.4. Проблема параметров и отображение кругового треугольника

Уравнение (43) определяет некоторую связь между модифицированным прообразом ε и геометрическими параметрами β и $\frac{A}{h}$ области $\mathbb{L}(\beta, A, h)$. Для выяснения смысла этой связи как конформного отображения, о чем говорилось в п. 1.1, будем использовать некоторые известные результаты теории аналитических функций, приведенные в [9], [38], [39].

Как установил Г.А. Шварц [40], отношение $\Phi(z)$ двух линейно независимых решений гипергеометрического уравнения (35), например, $u_1(z)/u_2(z)$, — или комбинация этого отношения с любой дробно-линейной функцией — осуществляет конформное отображение полуплоскости \mathbb{H} на некоторый круговой треугольник. Его вершины представляют собой образы при отображении $\Phi(z)$ особых точек $0, 1, \infty$ уравнения (35), а углы в этих вершинах (с точностью до знака) соответственно равны $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \pi\alpha_3$, где

$$\alpha_1 = 1 - c, \quad \alpha_2 = c - a - b, \quad \alpha_3 = b - a. \quad (44)$$

Сама же отображающая функция $\Phi(z)$ удовлетворяет уравнению Шварца

$$\frac{\Phi'''}{\Phi'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\Phi''}{\Phi'} \right)^2 = \frac{1 - \alpha_1^2}{2z^2} + \frac{1 - \alpha_2^2}{2(1-z)^2} + \frac{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{2z(1-z)}. \quad (45)$$

Его левая часть, называемая шварцианом и обозначаемая через $\{\Phi, z\}$, как известно, инвариантна относительно дробно-линейных преобразований, т.е.

$$\{\Phi, z\} = \left\{ \frac{\sigma_1\Phi + \sigma_2}{\sigma_3\Phi + \sigma_4}, z \right\}, \quad \sigma_1\sigma_4 - \sigma_2\sigma_3 = 1, \quad (46)$$

($\sigma_l, l = \overline{1, 4}$, — постоянные). Правая же часть уравнения (45) не изменяется при замене некоторых α_m на $-\alpha_m$, поскольку они входят в это уравнение в квадратах. Знаки показателей α_m выбираются так, чтобы в конечных вершинах углы были неотрицательны, а в бесконечных — неположительны.

Возвращаясь к рассматриваемому уравнению (43), обозначим его левую часть через

$$\mathcal{F}(\varepsilon) := q_0 - \frac{\Gamma\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)u_2(\varepsilon)}{\Gamma\left(\frac{3-\beta}{2}\right)u_1(\varepsilon)}, \quad (47)$$

а правую — через

$$W := \ln(Q\delta), \quad (48)$$

где величина δ определена по формуле (9), а величина Q – по следующей формуле:

$$Q := \exp\left(2 \ln 2 - c - \psi\left(\frac{\beta}{2}\right)\right), \tag{49}$$

где, напомним, через $\psi(x)$ обозначена пси-функция, а через c – постоянная Эйлера. Величина Q зависит только от показателя β , причем при его изменении в заданном диапазоне (2), т.е. при возрастании β от 1 до 2, величина Q монотонно убывает от 16 до 4; отметим, что для важного случая $\beta = 3/2$ она составляет $Q = \exp(5 \ln 2 - \pi/2) = 6.652146443\dots$

Таким образом, уравнение (43) переписывается в виде $W = \mathcal{F}(\varepsilon)$. Для отыскания его решения будем (как уже говорилось выше) придавать входящим в него переменным ε и W комплексные значения, а функцию $\mathcal{F}(\varepsilon)$ рассматривать как конформное отображение.

Обратимся для этого к выражению (47) для \mathcal{F} . Фигурирующие в нем ряды Куммера $u_1(\varepsilon)$ и $u_2(\varepsilon)$, определяемые соответственно равенствами (37) и (38), составляют, как известно, пару линейно независимых решений гипергеометрического уравнения (35) с подставленными в него значениями параметров (36) и заменой z на ε . Отсюда с учетом изложенного в данном пункте материала следует, что функция $W = \mathcal{F}(\varepsilon)$, отличающаяся от отношения $u_1(\varepsilon)/u_2(\varepsilon)$, как видно из (47), лишь на дробно-линейное преобразование, осуществляет конформное отображение полуплоскости \mathbb{H} на некоторый круговой треугольник \mathfrak{T} , расположенный на плоскости W ; его вид установлен в п. 2.5.

Вершины этого треугольника, являющиеся образами – при рассматриваемом отображении $W = \mathcal{F}(\varepsilon)$ – особых точек $\varepsilon = 0, 1, \infty$ уравнения (35), обозначим соответственно через

$$\mathcal{M} = \mathcal{F}(0), \quad \mathcal{B} = \mathcal{F}(1), \quad \mathcal{C} = \mathcal{F}(\infty). \tag{50}$$

Прообразы этих вершин будем обозначать теми же буквами, что и сами вершины.

Углы в вершинах $\mathcal{M}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ обозначаем, как и выше, соответственно через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, где согласно (36) и (44), показатели углов (с точностью до знака) равны

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \pm \frac{\beta - 1}{2}, \quad \alpha_3 = \pm \frac{1 - \beta}{2}. \tag{51}$$

Знаки в этих формулах выберем после вычисления (в п. 2.5) координат этих вершин в зависимости от того, является ли вершина конечной или бесконечной.

2.5. Вид кругового треугольника

Выясним вид кругового треугольника \mathfrak{T} на плоскости W . Подставив разложения (37) и (38) соответственно для $u_1(\varepsilon)$ и $u_2(\varepsilon)$ в выражение (47) для отображающей функции $W = \mathcal{F}(\varepsilon)$ и выполнив деление, приходим к следующему представлению для $\mathcal{F}(\varepsilon)$ вблизи точки $\varepsilon = 0$, являющейся прообразом вершины \mathcal{M} треугольника \mathfrak{T} :

$$\mathcal{F}(\varepsilon) = \ln \varepsilon + q_0 - \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)_k}{(k!)^2} q_k \varepsilon^k \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)_k}{(k!)^2} \varepsilon^k \right]^{-1}, \tag{52}$$

где берется ветвь логарифма, отвечающая условию (39). Отсюда с учетом равенства

$$q_0 - q_1 = 2/(2 - \beta),$$

получаемого из (42), вытекает асимптотика

$$\mathcal{F}(\varepsilon) = \ln \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \tag{53}$$

означающая, что вершина \mathcal{M} расположена в бесконечности,

$$\mathcal{M} = \mathcal{F}(0) = \infty, \tag{54}$$

а значит, выходящие из нее стороны $\widehat{M\mathcal{B}}$ и $\widehat{C\mathcal{M}}$ треугольника \mathfrak{T} должны быть прямолинейными лучами, причем, поскольку они являются образами соответственно интервалов $(0, 1)$ и $(-\infty, 0)$ вещественной оси на плоскости W , то из (53) следует, что эти стороны определяются формулами

$$\widehat{M\mathcal{B}} = \{W : \text{Im } W = 0, \text{Re } W \in (-\infty, \sigma_5)\}, \tag{55}$$

$$\widehat{C\mathcal{M}} = \{W : \text{Im } W = \pi, \text{Re } W \in (-\infty, \sigma_6)\}, \tag{56}$$

где σ_5 и σ_6 – некоторые вещественные числа, определяемые ниже.

Вычислим координату вершины \mathcal{B} – образа точки $\varepsilon = 1$ при отображении $W = \mathfrak{F}(\varepsilon)$. Для этого найдем значение решений Куммера $u_1(\varepsilon)$ и $u_2(\varepsilon)$, входящих в представление (47), при $\varepsilon = 1$. Из равенства (38) получаем

$$u_2(1) = F\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{\beta}{2}; \frac{3 - \beta}{2}; 0\right) = 1. \tag{57}$$

Для вычисления значения $u_1(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 1$ воспользуемся формулой (46) из [9], с. 112:

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a)\Gamma(c - b)}. \tag{58}$$

Заметим, что для функции $u_1(\varepsilon)$, представляемой равенством (37), выполняются требуемые для состоятельности этой формулы условия $c \neq 0, -1, -2, \dots$ и $\text{Re } c > \text{Re}(a + b)$; последнее неравенство вытекает из выражений для параметров (36) и условия $\beta > 1$, см. (17). Тогда из (37) и (58) находим:

$$u_1(1) = F\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{\beta}{2}; 1; 1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{\beta - 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}. \tag{59}$$

Подставляя величины (57) и (59) в представление (47), устанавливаем

$$\mathcal{B} = \mathfrak{F}(1) = -\pi \text{ctg} \frac{\pi\beta}{2} - \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta - 1}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{\beta - 1}{2}\right)}. \tag{60}$$

Используя, наконец, равенство $\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$ и свойство Γ -функции (см. [9, с. 18])

$$\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \tag{61}$$

получаем из (60), что требуемая координата вершины \mathcal{B} (очевидно, совпадающая с σ_5 из (55)) дается формулой $\mathcal{B} = \mathfrak{F}(1) = q_0 + \pi \text{ctg}(\pi\beta/2)$, которая с учетом (49) переписывается в виде

$$\mathcal{B} = \mathfrak{F}(1) = \sigma_5 = \ln Q; \tag{62}$$

отметим, что для $\beta = 3/2$ имеем $\mathcal{B} = 5 \ln 2 - \frac{\pi}{2} = 1.894939576$.

Найдем теперь координату вершины \mathcal{C} треугольника \mathfrak{T} , являющейся образом точки $\varepsilon = \infty$ при рассматриваемом отображении $W = \mathfrak{F}(\varepsilon)$. Для аналитического продолжения гипергеометрической функции нам понадобится формула (34) из [9, с. 115], вида

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b - a)}{\Gamma(c - a)\Gamma(b)} u_3(z) + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a - b)}{\Gamma(c - b)\Gamma(a)} u_4(z) \tag{63}$$

(справедливая для всех значений a, b, c , для которых Γ -множители в числителях конечны), где $u_3(z)$ и $u_4(z)$ определяются равенствами

$$u_3(z) = (-z)^{-a} F(a, a + 1 - c; a + 1 - b; 1/z), \quad u_4(z) = (-z)^{-b} F(b + 1 - c, b; b + 1 - a; 1/z). \tag{64}$$

Заменив в формуле (63) переменную z на $1 - \varepsilon$, применим формулу (63) к функции $u_2(\varepsilon)$ из числителя (47), определяемой равенством (38),

$$u_2(\varepsilon) = F\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{\beta}{2}; \frac{3-\beta}{2}; 1 - \varepsilon\right) = (\varepsilon - 1)^{-1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{3-\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\beta}{2}\right)}{\Gamma^2\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)} F\left(\frac{1}{2}, \frac{\beta}{2}; \frac{1+\beta}{2}; (1 - \varepsilon)^{-1}\right) +$$

$$+ (\varepsilon - 1)^{\beta/2-1} \frac{\Gamma\left(\frac{3-\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta-1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)} F\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{\beta}{2}; \frac{3-\beta}{2}; (1 - \varepsilon)^{-1}\right), \tag{65}$$

и устремим $\varepsilon \rightarrow \infty$ при условии $\text{Im } \varepsilon > 0$. Поскольку для рассматриваемой области $\mathbb{L}(\beta, A, h)$ выполняется неравенство $\beta > 1$, то для множителей при гипергеометрических функциях в правой части (65) справедливо соотношение

$$|\varepsilon - 1|^{-1/2} = \alpha|\varepsilon - 1|^{\beta/2-1}, \quad \varepsilon \rightarrow \infty. \tag{66}$$

Отсюда, учитывая, что гипергеометрические функции в правой части равенства (65) стремятся к единице при $\varepsilon \rightarrow \infty$, получаем из этого равенства следующую оценку:

$$F\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{\beta}{2}; \frac{3-\beta}{2}; 1 - \varepsilon\right) = (\varepsilon - 1)^{\frac{\beta-2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3-\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta-1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1-\beta}{\varepsilon^2}\right)\right], \quad \varepsilon \rightarrow \infty. \tag{67}$$

Применив теперь формулу (63) к функции $u_1(\varepsilon) = F\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{\beta}{2}; 1; \varepsilon\right)$ из знаменателя (47), находим

$$F\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{\beta}{2}; 1; \varepsilon\right) = (-\varepsilon)^{-1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1-\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1+\beta}{2}; \varepsilon^{-1}\right) +$$

$$+ (-\varepsilon)^{\beta/2-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\beta-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)} F\left(1 - \frac{\beta}{2}, 1 - \frac{\beta}{2}; \frac{3-\beta}{2}; \varepsilon^{-1}\right). \tag{68}$$

Аналогично предыдущему, учитывая неравенство $\beta > 1$, убеждаемся, что множители при гипергеометрических функциях в правой части (68) отвечают при $\varepsilon \rightarrow \infty$ оценке

$$|\varepsilon|^{-1/2} = \alpha|\varepsilon|^{\beta/2-1}, \quad \varepsilon \rightarrow \infty, \tag{69}$$

а сами эти функции стремятся к единице. Отсюда получаем асимптотику

$$F\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{\beta}{2}; 1; \varepsilon\right) = (-\varepsilon)^{\frac{\beta-2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\beta-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1-\beta}{\varepsilon^2}\right)\right], \quad \varepsilon \rightarrow \infty. \tag{70}$$

Подставим полученные асимптотики (67) и (70) в представление (47) для отображения $W = \mathcal{F}(\varepsilon)$ и устремим $\varepsilon \rightarrow \infty$ при $\text{Im } \varepsilon > 0$, учитывая при этом формулу (61), равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{(\varepsilon - 1)^{\frac{\beta-2}{2}}}{(-\varepsilon)^{\frac{\beta-2}{2}}} = e^{\pi i \left(\frac{\beta-2}{2}\right)} = -\cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi\beta}{2}\right)$$

и выражение (49). Тогда получаем искомую координату третьей вершины треугольника \mathcal{Z} ,

$$\mathcal{C} = \mathcal{F}(\infty) = \ln Q + i\pi; \tag{71}$$

тогда для величины σ_6 из (56) получаем

$$\sigma_6 = \ln Q. \tag{72}$$

Поскольку вершины \mathcal{B} и \mathcal{C} , согласно равенствам (62), (71), конечны, то выбирая в формуле (51) положительные знаки в соответствии с замечанием, сделанным после этой формулы, находим значения показателей углов в вершинах области \mathfrak{T} ,

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha, \quad \alpha := \frac{\beta - 1}{2}, \tag{73}$$

причем для α выполняется включение

$$\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \tag{74}$$

вытекающее из заданного в (2) условия $\beta \in (1, 2)$.

Тогда из формул (54)–(56), (62), (71)–(73) следует вид кругового треугольника \mathfrak{T} , изображенного на фиг. 2а.

2.6. Представления для основных функций

Таким образом, установлено, что функция \mathcal{F} , фигурирующая в уравнении для ε ,

$$\mathcal{F}(\varepsilon) = W, \tag{75}$$

выполняет отображение

$$\mathcal{F} : \mathbb{H} \xrightarrow{\text{conf}} \mathfrak{T}, \tag{76}$$

где \mathfrak{T} – круговой треугольник, построенный в п. 2.5.

Подставляя в уравнение (75) формулу (48) для W , получаем соотношение $\mathcal{F}(\varepsilon) = \ln(Q\delta)$, где δ и Q выражаются через β и A/h по формулам (9) и (49). Обращая указанное соотношение, видим, что искомую зависимость величины δ от геометрических параметров β и A/h области $\mathbb{L}(\beta, A, h)$ осуществляет функция

$$\varepsilon = G(\delta) := \mathcal{F}^{-1} \circ \ln(Q\delta). \tag{77}$$

Построение этой функции дает в итоге решение проблемы параметров интеграла Кристоффеля–Шварца для исходного отображения $w = f(\zeta)$ полуплоскости на область $\mathbb{L}(\beta, A, h)$.

В приводимой ниже теореме 1 даны представления для отображения (76) и для искомой функции $\varepsilon = G(\delta)$; в ней также установлена связь между коэффициентами этих представлений и получены оценки для коэффициентов.

Отметим, что обратное отображение $\mathcal{F}^{-1} : \mathfrak{T} \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{H}$ обеспечивает соответствие

$$\varepsilon = \mathcal{F}^{-1}(W) : \mathfrak{T} \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{H}, \quad \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{M}) = 0, \quad \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{B}) = 1, \quad \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{C}) = \infty, \tag{78}$$

вытекающие из равенств (54), (62), (71) и фиг. 2а, 2в.

Введем для сторон треугольника \mathfrak{T} обозначения:

$$\widehat{\mathcal{B}\mathcal{C}} =: \gamma, \quad \widehat{\mathcal{C}\mathcal{M}} =: \Psi, \quad \widehat{\mathcal{M}\mathcal{B}} =: \Omega, \tag{79}$$

а для объединения двух последних сторон – обозначение $\Gamma := \Psi \cup \Omega = \widehat{\mathcal{C}\mathcal{M}\mathcal{B}}$; таким образом, $\partial\mathfrak{T} = \Gamma \cup \gamma$. Введем еще обозначения для круга

$$\mathbb{U}(R) := \{\varepsilon : |\varepsilon| < R\}, \quad \mathbb{U} := \mathbb{U}(1), \tag{80}$$

полукруга,

$$\mathbb{U}_+(R) := \{\varepsilon : |\varepsilon| < R, \text{Im } \varepsilon \geq 0\}, \quad \mathbb{U}_+ := \mathbb{U}_+(1), \tag{81}$$

и для полуполосы,

$$\mathbb{S}_+(R) := \{W : \text{Im } W \in [0, \pi], \text{Re } W \in (-\infty, R)\}, \tag{82}$$

а также напомним, что полоса \mathbb{S} определяется равенством (7), а функция

$$Z = \exp(W) \tag{83}$$

осуществляет ее отображение со следующим соответствием точек:

$$\exp(W) : \mathbb{S} \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{H}, \quad \exp(\mathcal{M}) = 0, \quad \exp(\mathcal{B}) = Q, \quad \exp(\mathcal{C}) = -Q \tag{84}$$

(см. фиг. 2а, 2б), где учтены выражения (62), (71) для \mathcal{B} и \mathcal{C} . Напомним еще, что β – показатель входящего угла исходной области $\mathbb{L}(\beta, A, h)$, связанный с показателем α углов треугольника \mathfrak{T} формулой (73). Дугу \mathcal{L} без концевых точек обозначаем через $\text{int}\mathcal{L}$, а комплексную плоскость – через \mathbb{C} .

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. Для отображения (76) имеет место представление

$$\mathcal{F}(\varepsilon) = \ln \left(\varepsilon + \sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k \varepsilon^k \right), \tag{85}$$

где выбрана ветвь логарифма, принимающая вещественные значения при положительных значениях аргумента; в представлении (85) ряд сходится в полукруге \mathbb{U}_+ , а его коэффициенты λ_k вещественны и отвечают оценке

$$|\lambda_k| \leq k. \tag{86}$$

2. Для функции $\varepsilon = G(\delta)$, определяемой равенством (77), справедливо представление

$$G(\delta) = Q \left(\delta + \sum_{m=2}^{\infty} B_m \delta^m \right), \tag{87}$$

где ряд с вещественными коэффициентами B_m сходится в единичном круге \mathbb{U} при всех $\beta \in (1, 2)$, а величина Q дается формулой (49).

3. При $\beta \in [3/2, 2)$ коэффициенты ряда (87) удовлетворяют оценке

$$|B_m| \leq m + \frac{Q}{24} m(m^2 - 1), \quad m = 2, 3, \dots \tag{88}$$

4. Коэффициенты B_m выражаются через коэффициенты λ_k ряда (85) по формуле

$$B_m = \frac{Q^{m-1}}{m!} \sum_{\mathfrak{P}(m-1)} \frac{(m+n-1)!}{n_1! n_2! \dots n_{(m-1)}!} \prod_{k=1}^{m-1} (-\lambda_{k+1})^{n_k}, \tag{89}$$

где сумма берется по всем разбиениям $\mathfrak{P}(m-1)$ числа $(m-1)$, т.е. по всем решениям $(n_1, n_2, \dots, n_{(m-1)})$ в неотрицательных целых числах уравнения

$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots + (m-1)n_{(m-1)} = m-1, \tag{90}$$

а число n равно $n = n_1 + n_2 + \dots + n_{(m-1)}$.

Доказательство. 1. Из фиг. 2а видно, что треугольник \mathfrak{T} представляет собой подобласть полосы \mathbb{S} , а $\Gamma := \Psi \cup \Omega$ является общей дугой границ $\partial\mathfrak{T}$ и $\partial\mathbb{S}$. Тогда, принимая во внимание соотношения (84), а также принципы сохранения области и соответствия границ [41], находим, что образом треугольника \mathfrak{T} при отображении $Z = \exp(W)$ служит область

$$(\Pi)_Z := \exp(\mathfrak{T}) \subset \mathbb{H} \tag{91}$$

(см. фиг. 2б) с границей, состоящей из двух дуг,

$$\partial(\Pi)_Z = \Gamma_Z \cup \gamma_Z, \quad \Gamma_Z := \exp(\Gamma) = [-Q, Q], \quad \gamma_Z := \exp(\gamma), \tag{92}$$

первой из которых является отрезок Γ_Z вещественной оси, а вторая, γ_Z , расположена (кроме концевых точек) в верхней полуплоскости; на фиг. 2а, 2б для областей \mathfrak{T} и $(\Pi)_Z$ дана штриховка с наклоном вправо. Таким образом,

$$\exp(W) : \mathfrak{T} \xrightarrow{\text{conf}} (\Pi)_Z. \tag{93}$$

Исходя из соотношений (78) для отображения $\varepsilon = \mathcal{F}^{-1}(W)$, видим, что образом треугольника \mathfrak{Z} при этом отображении будет верхняя полуплоскость \mathbb{H} , которую переобозначим через $(\Pi)_\varepsilon$; для нее на фиг. 2в также дана штриховка с наклоном вправо. Ее граница состоит из двух отрезков вещественной оси, $\partial(\Pi)_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon \cup \gamma_\varepsilon$, где

$$\Gamma_\varepsilon := \mathcal{F}^{-1}(\Gamma) = (-\infty, 1], \quad \gamma_\varepsilon := \mathcal{F}^{-1}(\gamma) = [1, +\infty). \tag{94}$$

Таким образом,

$$\mathcal{F} : (\Pi)_\varepsilon \xrightarrow{\text{conf}} \mathfrak{Z}. \tag{95}$$

Тогда из выражений (93), (95) следует, что функция $Z = g(\varepsilon)$, определенная в виде суперпозиции

$$g(\varepsilon) := \text{exp} \circ \mathcal{F}(\varepsilon), \tag{96}$$

осуществляет (однолистное) отображение

$$g : (\Pi)_\varepsilon \xrightarrow{\text{conf}} (\Pi)_Z, \tag{97}$$

переводящее согласно (92), (94) отрезок Γ_ε в отрезок Γ_Z и оставляющее на месте начало координат,

$$g(0) = 0; \tag{98}$$

последнее равенство следует из вторых формул (78) и (84).

Поэтому, согласно принципу симметрии Римана–Шварца [41], функция (96) может быть аналитически продолжена через Γ_ε с помощью инверсии относительно этого отрезка, т.е. по правилу (об инверсии, симметрии или зеркальном отражении см. [6], [37], [41])

$$g(\bar{\varepsilon}) = \bar{g}(\varepsilon), \tag{99}$$

в нижнюю полуплоскость $(\text{III})_\varepsilon = \{\text{Im } \varepsilon < 0\}$, см. фиг. 2б, 2в. Продолженная функция конформно отображает $(\text{III})_\varepsilon$ на область $(\text{III})_Z$, симметричную области $(\text{II})_Z$ относительно Γ_Z , с границей $\partial(\text{III})_Z = \Gamma_Z \cup \tilde{\gamma}_Z$, где $\tilde{\gamma}_Z$ – зеркальный образ дуги γ_Z (отметим, что для областей $(\text{III})_\varepsilon$ и $(\text{III})_Z$ на фиг. 2б, 2в дана штриховка с наклоном влево). Тогда, введя обозначения

$$(\text{II}, \text{III})_\varepsilon := (\text{II})_\varepsilon \cup \text{int } \Gamma_\varepsilon \cup (\text{III})_\varepsilon, \quad (\text{II}, \text{III})_Z := (\text{II})_Z \cup \text{int } \Gamma_Z \cup (\text{III})_Z, \tag{100}$$

видим, что функция (96) вместе с ее продолжением осуществляет отображение

$$g : (\text{II}, \text{III})_\varepsilon \xrightarrow{\text{conf}} (\text{II}, \text{III})_Z, \tag{101}$$

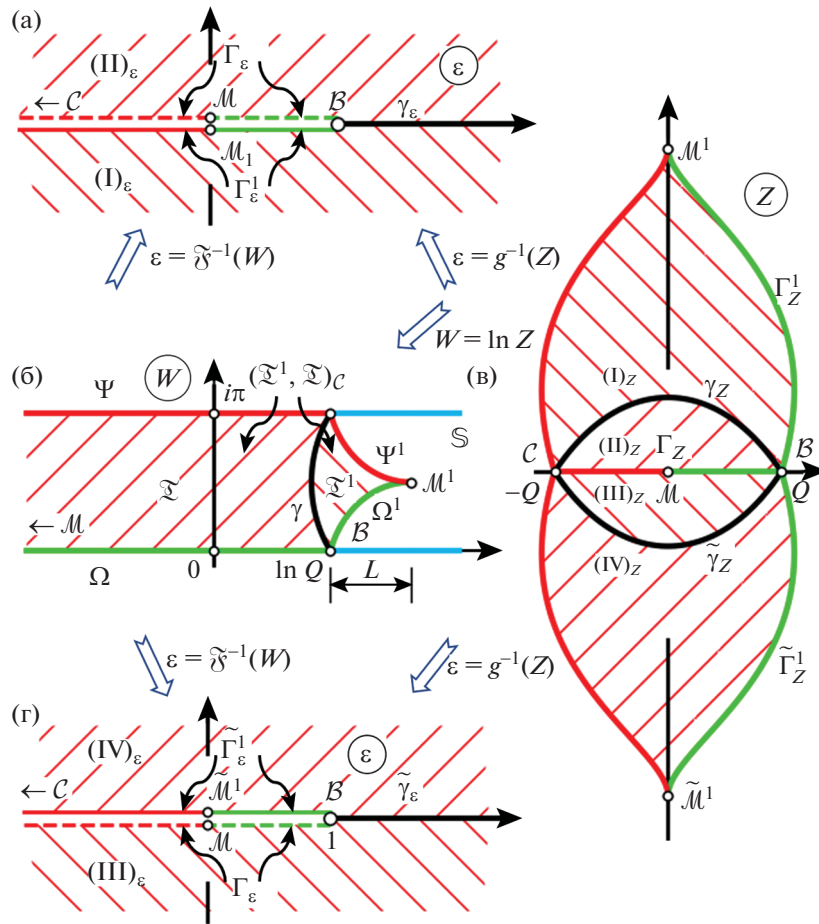
являющееся однолистным в силу условия (99) его построения и однолистности исходного отображения (97).

Поскольку область $(\text{II}, \text{III})_\varepsilon$ представляет собой плоскость с разрезом $[1, +\infty)$ по вещественной оси, то эта область содержит единичный круг \mathbb{U} , в котором функция $Z = g(\varepsilon)$ регулярна и однолистка, а значит, представима сходящимся в нем рядом Тейлора по степеням ε^k с коэффициентами λ_k , причем $\lambda_0 = 0$ в силу равенства (98), а $\lambda_1 = 1$ в силу соотношений (53), (96). Функцию с такими свойствами называют (см. [38], [42]) принадлежавшей классу \mathcal{S} . Для нашей функции $g(\varepsilon)$, кроме того, коэффициенты λ_k вещественны в силу соотношения (99). Тогда требуемое неравенство (86) представляет собой установленную в работах [43], [44], [45] оценку для функций класса \mathcal{S} с вещественными коэффициентами Тейлора. (Заметим, что эта оценка составляет широко известную гипотезу Бибераха (см. [6], [38], [42], [46]), доказанную Луи де Бранжем [47] для не обязательно вещественных коэффициентов Тейлора).

Таким образом, продолженная функция $Z = g(\varepsilon)$ представима в круге \mathbb{U} в виде сходящегося разложения

$$g(\varepsilon) = \varepsilon + \sum_{k=2}^{\infty} \lambda_k \varepsilon^k, \tag{102}$$

а значит, отображение (97) представимо в полукруге \mathbb{U}_+ в виде этого разложения. Понимая левую часть равенства (102) как такое отображение и учитывая вид (96) представления для $g(\varepsilon)$, действуем на обе части равенства (102) функцией $\ln Z$, у которой выбрана ветвь, указанная в форму-



Фиг. 11. Связь конформных отображений между плоскостями ε , W и Z .

лировке теоремы; эта ветвь логарифма однозначно определена в области $(II)_Z$, изображенной на фиг. 26. В результате получим представление (85), где ряд сходится в \mathbb{U}_+ , а коэффициенты λ_k вещественны и удовлетворяют оценке (86). Первое утверждение теоремы доказано.

2. Обратимся к доказательству второго утверждения теоремы. Образ множества на плоскости W при его инверсии относительно дуги γ , Ψ или Ω будем обозначать тем же символом, добавляя к нему соответственно верхний индекс 1, 2 или 3. Те же индексы приписываются и при инверсии относительно зеркальных отражений указанных дуг, а также при многократном отражении, так что может возникать индекс из нескольких указанных цифр.

Поскольку функция $\varepsilon = \mathcal{F}^{-1}(W)$, отображающая треугольник \mathfrak{T} на верхнюю полуплоскость $(II)_\varepsilon$ (обе области на фиг. 11а и фиг. 11б заштрихованы с наклоном вправо), переводит дугу окружности γ в прямолинейный отрезок γ_ε , определяемый из (94), то по принципу симметрии эта функция может быть аналитически продолжена через γ в симметричный круговой треугольник \mathfrak{T}^1 .

Две вершины нового треугольника расположены в тех же точках $\mathcal{B} = \ln Q$ и $\mathcal{C} = \ln Q + i\pi$, что и у исходного \mathfrak{T} , с тем же показателем углов α , т.к. преобразование инверсии сохраняет углы, а третья вершина M^1 , симметричная $M = \infty$ относительно γ и имеющая (как и M) нулевой угол, дается формулой, получаемой с использованием (62):

$$M^1 = \ln Q + L + i\frac{\pi}{2}, \quad L := \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \pi\alpha. \tag{103}$$

Сторонами треугольника \mathfrak{Z}^1 , кроме γ , являются еще Ψ^1 и Ω^1 , симметричные соответственно лучам Ψ и Ω относительно γ (см. фиг. 11б). Обозначим $\Gamma^1 := \Psi^1 \cup \Omega^1$.

Продолженная функция $\varepsilon = \mathcal{F}^{-1}(W)$ отображает \mathfrak{Z}^1 на нижнюю полуплоскость $(I)_\varepsilon$. Она является другим, отличным от $(III)_\varepsilon$, экземпляром полуплоскости (см. фиг. 11а), поскольку последняя получена отражением $(II)_\varepsilon$ относительно Γ_ε , а $(I)_\varepsilon$ – отражением $(II)_\varepsilon$ относительно γ_ε (на фиг. 11а и фиг. 11б области \mathfrak{Z}^1 и $(I)_\varepsilon$ заштрихованы с наклоном влево).

По принципу симметрии функция $\varepsilon = \mathcal{F}^{-1}(W)$ вместе с продолжением отображает область

$$(\mathfrak{Z}^1, \mathfrak{Z}) := \mathfrak{Z}^1 \cup \text{int } \gamma \cup \mathfrak{Z}, \tag{104}$$

являющуюся круговым четырехугольником с границей $\partial(\mathfrak{Z}^1, \mathfrak{Z}) = \Gamma \cup \Gamma^1$, на область

$$(I, II)_\varepsilon := (I)_\varepsilon \cup \text{int } \gamma_\varepsilon \cup (II)_\varepsilon, \tag{105}$$

представляющую собой плоскость с разрезом $(-\infty, 1]$ (см. фиг. 11а и фиг. 11б), т.е.

$$\mathcal{F}^{-1} : (\mathfrak{Z}^1, \mathfrak{Z}) \xrightarrow{\text{conf}} (I, II)_\varepsilon, \quad \mathcal{F}^{-1}(\Gamma) = \Gamma_\varepsilon, \quad \mathcal{F}^{-1}(\Gamma^1) = \Gamma^1_\varepsilon, \tag{106}$$

где Γ_ε – верхний, а Γ^1_ε – нижний берег указанного разреза (см. фиг. 11а). Образы вершин \mathcal{M} и \mathcal{M}^1 четырехугольника при этом отображении будут (геометрически) расположены в одной и той же точке $\varepsilon = 0$, но на разных – верхнем и нижнем – берегах указанного разреза. (Более точно, \mathcal{M} и \mathcal{M}^1 являются разными простыми концами (см. [38], [41], [48]) области $(I, II)_\varepsilon$).

Показатели углов в вершинах \mathcal{B} и \mathcal{C} четырехугольника (104) равны 2α . Поэтому, если выполняется условие

$$\alpha \in [1/4, 1/2), \tag{107}$$

которое, согласно (73), соответствует включению $\beta \in [3/2, 2)$ для показателя входящего угла области $\mathbb{L}(\beta, A, h)$, то четырехугольник (104) содержит полуполосу $\mathbb{S}_+(\ln Q)$, определенную по формуле (82), и сам содержится в полосе \mathbb{S} . Тем самым, доказано

Предложение 1. При условии $\beta \in [3/2, 2)$ функция $\varepsilon = \mathcal{F}^{-1}(W)$ может быть аналитически продолжена в четырехугольник $(\mathfrak{Z}^1, \mathfrak{Z})$, отвечающий соотношениям

$$\mathbb{S}_+(\ln Q) \subset (\mathfrak{Z}^1, \mathfrak{Z}) \subset \mathbb{S}, \tag{108}$$

и осуществляет отображение (106).

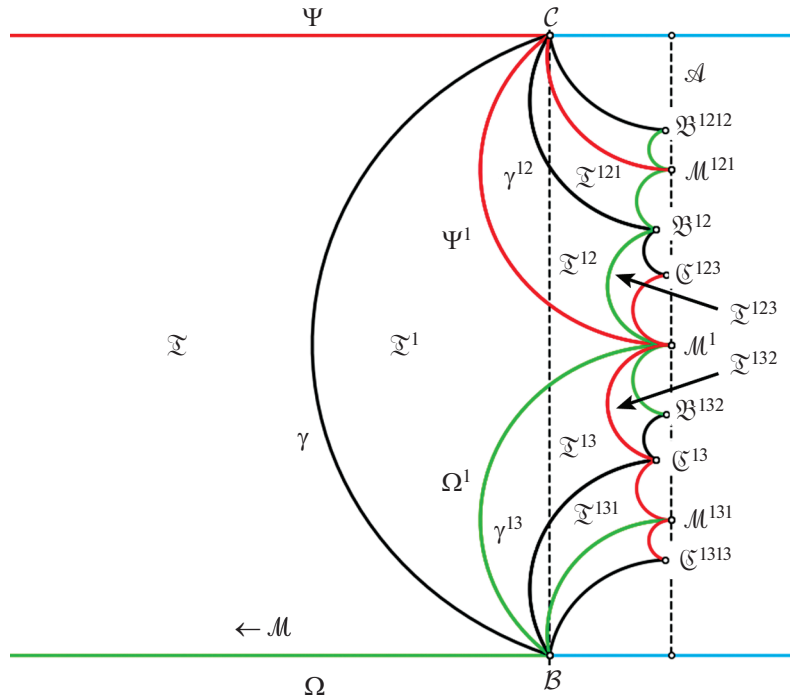
Если же α лежит в дополнительном к (107) диапазоне, т.е. выполняется включение

$$\alpha \in (0, 1/4), \tag{109}$$

соответствующее значениям $\beta \in (1, 3/2)$ показателя входящего угла, то в этом случае углы четырехугольника $(\mathfrak{Z}^1, \mathfrak{Z})$ в вершинах \mathcal{B} и \mathcal{C} оказываются меньшими $\pi/2$, вследствие чего стороны Ψ^1 и Ω^1 пересекают торец полуполосы $\mathbb{S}_+(\ln Q)$, и, таким образом, она не содержится целиком в нашем четырехугольнике (см. фиг. 11б).

Тем не менее и в случае (109) можно построить область аналитичности функции $\varepsilon = \mathcal{F}^{-1}(W)$, охватывающую всю полуполосу $\mathbb{S}_+(\ln Q)$.

Для этого, применяя принцип симметрии, расширим построенную область аналитичности $(\mathfrak{Z}^1, \mathfrak{Z})$, присоединив к ней новые треугольники \mathfrak{Z}^{12} и \mathfrak{Z}^{13} , симметричные \mathfrak{Z}^1 , а также открытые дуги $\text{int } \Psi^1$, $\text{int } \Omega^1$, лежащие между $(\mathfrak{Z}^1, \mathfrak{Z})$ и новыми треугольниками, затем – присоединив симметричные им треугольники \mathfrak{Z}^{121} , \mathfrak{Z}^{123} , \mathfrak{Z}^{131} , \mathfrak{Z}^{132} и соответствующие открытые дуги, далее продолжая подобный процесс (см. фиг. 12). В результате мы получим область аналитичности продолженной функции $\varepsilon = \mathcal{F}^{-1}(W)$ в виде некоторого кругового многоугольника \mathfrak{M} , причем $\partial\mathfrak{M} \supset \Gamma$.



Фиг. 12. Многоугольник \mathcal{M} , полученный зеркальными отражениями треугольника \mathcal{T} .

Образом многоугольника \mathcal{M} при отображении \mathcal{F}^{-1} является риманова поверхность \mathcal{R} , которую получаем путем последовательного присоединения к первоначальной полуплоскости $(\Pi)_\varepsilon$ полуплоскостей, являющихся образами присоединяемых треугольников, и интервалов вещественной оси – образов открытых дуг, через которые выполняется присоединение. При этом дуга Γ границы $\partial\mathcal{M}$ переходит в дугу Γ_ε , представляющую собой отрезок $[-\infty, 1]$ вещественной оси, лежащий на границе римановой поверхности \mathcal{R} .

Для любого из присоединяемых треугольников два его угла будут равны $\pi\alpha$, а третий – нулю. Сторонами треугольников являются дуги окружностей, причем их центры лежат на вертикальной прямой

$$\mathcal{A} := \{W : \operatorname{Re} W = \ln Q + L\}, \tag{110}$$

проходящей через точку M^1 . Это утверждение вытекает из того, что, во-первых, центры дуг γ , Ψ^1 , Ω^1 , очевидно (см. фиг. 12), лежат на \mathcal{A} , во-вторых, все стороны новых треугольников получаются отражением дуг γ , Ψ^1 , Ω^1 друг от друга (либо от их зеркальных образов), а в-третьих, это следует из того общего положения, что центр зеркального образа одной окружности относительно другой всегда лежит на прямой, соединяющей центры первых двух. Из установленного утверждения следует еще, что для всех присоединяемых треугольников вершины с нулевыми углами лежат на прямой \mathcal{A} .

Рассмотрим теперь вершины треугольников с углами $\pi\alpha$. Каждая такая вершина получена из вершины с углом $\pi\alpha$, принадлежащей некоторому треугольнику с предыдущего шага процесса, путем инверсии относительно противоположащей дуги, имеющей центр на \mathcal{A} , причем вершина-прообраз находится снаружи от окружности инверсии, а вершина-образ – внутри нее и, тем самым, расположена ближе к прямой \mathcal{A} . Поскольку каждая из рассматриваемых вершин получена через цепочку инверсий из \mathcal{B} или из \mathcal{C} , то все они лежат не дальше от \mathcal{A} , чем точки \mathcal{B} и \mathcal{C} , т.е. принадлежат прямоугольнику

$$\Pi := \{W : \operatorname{Re} W \in (\ln Q, \ln Q + L), \operatorname{Im} W \in (0, \pi)\}.$$

На первом шаге описываемого процесса мы к исходной области $(\mathfrak{D}^1, \mathfrak{D})$ присоединяем множество $\{\mathfrak{D}^{12}, \mathfrak{D}^{121}, \mathfrak{D}^{1212}, \dots\}$, состоящее из

$$N := \left\lceil \frac{1}{2\alpha} \right\rceil - 2 \tag{111}$$

треугольников (символ $\lceil a \rceil$ означает наименьшее целое число, большее или равное a) с общей вершиной \mathfrak{B} , и множество $\{\mathfrak{D}^{13}, \mathfrak{D}^{131}, \mathfrak{D}^{1313}, \dots\}$ из N треугольников с общей вершиной \mathfrak{C} , а также множество из $2N$ открытых круговых дуг, каждая из которых является общей стороной пары смежных треугольников, симметричных относительно этой дуги и содержащихся в указанных множествах.

В результате мы получаем область аналитичности продолженной функции $\varepsilon = \mathcal{F}^{-1}(W)$ в виде некоторого кругового многоугольника \mathfrak{M}_1 . Углы в его вершинах \mathfrak{B} и \mathfrak{C} равны $\pi\alpha_0$, где величина

$$\alpha_0 := \left\lceil \frac{1}{2\alpha} \right\rceil \alpha, \tag{112}$$

больше или равна $1/2$, а выходящие из них стороны многоугольника \mathfrak{M}_1 выпуклы внутрь него. Отсюда следует, что этот многоугольник покрывает некоторые окрестности точек \mathfrak{B} и \mathfrak{C} в полуполосе $\mathbb{S}_+(\ln Q)$, но при этом не выходит за пределы полосы \mathbb{S} .

Вместе с тем многоугольник \mathfrak{M}_1 не обязательно содержит в себе всю полуполосу $\mathbb{S}_+(\ln Q)$, поскольку его стороны, т.е. дуги, соединяющие соседние вершины, могут не принадлежать целиком прямоугольнику Π , даже если оба конца лежат внутри Π . В то же время все эти дуги выпуклы внутрь многоугольника, что позволяет продолжить описанный процесс аналитического продолжения, получая на j -м шаге область аналитичности функции $\mathcal{F}^{-1}(W)$ в виде кругового многоугольника \mathfrak{M}_j , причем $\mathfrak{M}_j \supset \mathfrak{M}_{j-1}$, но вместе с тем $\mathfrak{M}_j \subset \mathbb{S}$. Через некоторое конечное число описанных шагов мы получим область аналитичности \mathfrak{M} , которая содержит всю полуполосу $\mathbb{S}_+(\ln Q)$; сама же она содержится в полосе \mathbb{S} . При этом допускается любое $\alpha \in (0, 1/4)$, что эквивалентно $\beta \in (1, 3/2)$.

Учитывая еще предложение 1, устанавливаем

Предложение 2. Для любого $\beta \in (1, 2)$ существует круговой многоугольник \mathfrak{M} , отвечающий соотношению

$$\mathbb{S}_+(\ln Q) \subset \mathfrak{M} \subset \mathbb{S}, \tag{113}$$

а функция $\varepsilon = \mathcal{F}^{-1}(W)$ осуществляет его отображение

$$\mathcal{F}^{-1} : \mathfrak{M} \xrightarrow{\text{conf}} \mathfrak{R}, \tag{114}$$

причем дуга $\Gamma \subset \partial\mathfrak{M}$ переходит в отрезок $\Gamma_\varepsilon = [-\infty, 1]$ границы $\partial\mathfrak{R}$.

Продолжим доказательство утверждения 2 теоремы. Используя включение (113) и свойства (84) отображения $Z = \exp(W)$, находим, что образом многоугольника \mathfrak{M} при этом отображении является подобласть $\mathfrak{M}_Z = \exp(\mathfrak{M})$ верхней полуплоскости \mathbb{H} , содержащая полукруг $\mathbb{U}_+(Q)$, т.е.

$$\mathbb{U}_+(Q) \subset \mathfrak{M}_Z \subset \mathbb{H}, \tag{115}$$

причем дуга $\Gamma \subset \partial\mathfrak{M}$ переходит в отрезок $\Gamma_Z = [-Q, Q]$ границы $\partial\mathfrak{M}_Z$. Отсюда для обратного отображения получаем

$$\ln(Z) : \mathfrak{M}_Z \xrightarrow{\text{conf}} \mathfrak{M}, \quad \ln(\Gamma_Z) = \Gamma. \tag{116}$$

Введя по формуле

$$\varepsilon = g^{-1}(Z) := \mathcal{F}^{-1} \circ \ln(Z), \tag{117}$$

функцию, обратную к (96), убеждаемся с помощью соотношений (114), (116), что она осуществляет отображение

$$g^{-1} : \mathfrak{M}_Z \xrightarrow{\text{conf}} \mathfrak{R}, \tag{118}$$

переводящее отрезок Γ_Z в отрезок Γ_ε границы $\partial\mathfrak{A}$. Тогда по принципу симметрии функция (117) может быть аналитически продолжена через отрезок Γ_Z по правилу

$$g^{-1}(\bar{Z}) = \overline{g^{-1}(Z)}. \tag{119}$$

Определив область $\widehat{\mathfrak{M}}_Z$ по формуле

$$\widehat{\mathfrak{M}}_Z := \mathfrak{M}_Z \cup \text{int } \Gamma_Z \cup \widetilde{\mathfrak{M}}_Z, \tag{120}$$

где $\widetilde{\mathfrak{M}}_Z$ – многоугольник, симметричный \mathfrak{M}_Z относительно Γ_Z , а также определив область $\widehat{\mathfrak{X}}$ по формуле

$$\widehat{\mathfrak{X}} := \mathfrak{X} \cup \text{int } \Gamma_\varepsilon \cup \widetilde{\mathfrak{X}}, \tag{121}$$

где $\widetilde{\mathfrak{X}}$ – область, симметричная \mathfrak{X} относительно Γ_ε , находим, что функция $\varepsilon = \mathcal{F}^{-1}(W)$ вместе с продолжением осуществляет отображение

$$g^{-1} : \widehat{\mathfrak{M}}_Z \xrightarrow{\text{conf}} \widehat{\mathfrak{X}}. \tag{122}$$

Согласно соотношению (115) область \mathfrak{M}_Z содержит полукруг $\mathbb{U}_+(Q)$, поэтому построенная по формулам (119), (120) область $\widehat{\mathfrak{M}}_Z$ содержит круг $\mathbb{U}(Q)$. В нем (продолженная) функция $\varepsilon = \mathcal{F}^{-1}(W)$ аналитична, поэтому представима сходящимся в нем рядом Тейлора по степеням Z . Коэффициенты Λ_m этого ряда вещественны в силу соотношения (119), нулевой коэффициент $\Lambda_0 = 0$ в силу равенства (98), а первый коэффициент $\Lambda_1 = 1$, поскольку единице равен первый коэффициент λ_1 ряда Тейлора (102) для обратной функции, а эти коэффициенты связаны формулой $\Lambda_1 = 1/\lambda_1$. Таким образом, для функции $\varepsilon = g^{-1}(Z)$ имеем сходящийся в $\mathbb{U}(Q)$ ряд:

$$g^{-1}(Z) = Z + \sum_{m=2}^{\infty} \Lambda_m Z^m. \tag{123}$$

Применяя здесь вытекающую из (77) и (117) связь $G(\delta) = g^{-1}(Q\delta)$ и производя замены

$$Z = Q\delta, \quad B_m = \Lambda_m Q^{m-1}, \tag{124}$$

соответствующие выражениям (48), (83), получаем из разложения (123) требуемое представление (87) для функции $\varepsilon = G(\delta)$, где ряд с вещественными коэффициентами B_k сходится в единичном круге \mathbb{U} . Утверждение 2 теоремы доказано.

3. Докажем теперь третье утверждение теоремы, полагая, что выполняется условие (107), указанное в предложении 1; при этом мы частично будем переносить приведенные выше рассуждения на более узкий случай, соответствующий замене \mathfrak{M} на $(\mathfrak{X}^1, \mathfrak{X})$ и другим аналогичным заменам, вытекающим из условия (107).

Используя соотношение (108) и свойства (84) отображения $Z = \exp(W)$, находим, что образом четырехугольника $(\mathfrak{X}^1, \mathfrak{X})$ при данном отображении служит область

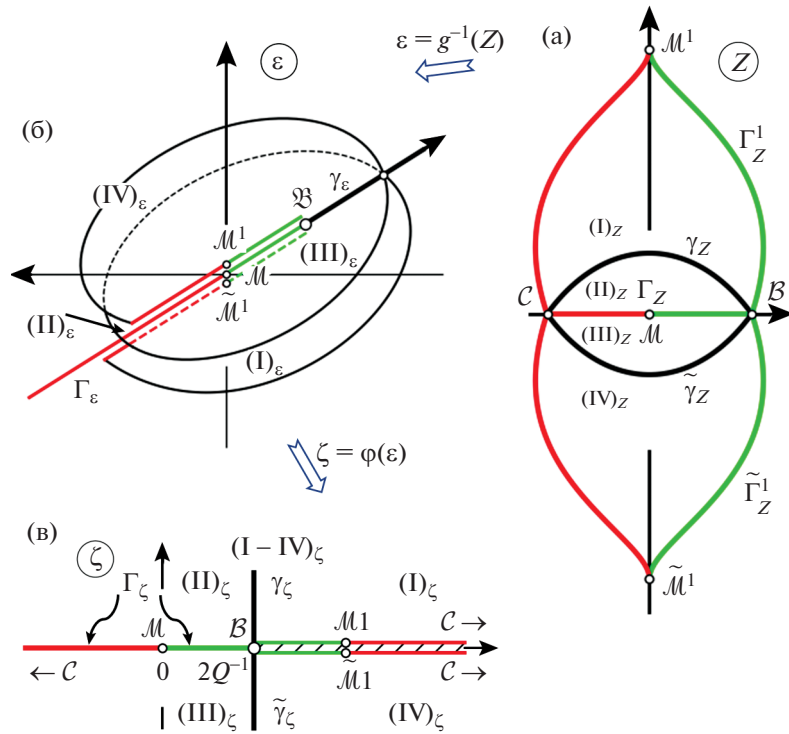
$$(I, II)_Z := (I)_Z \cup \text{int } \gamma_Z \cup (II)_Z \subset \mathbb{H} \tag{125}$$

с границей $\partial(I, II)_Z = \Gamma_Z \cup \Gamma_Z^1$. Здесь область $(II)_Z$ и дуги Γ_Z, γ_Z определены в (91), (92), область $(I)_Z := \exp(\mathfrak{X}^1)$, а дуга $\Gamma_Z^1 := \exp(\Gamma^1)$ лежит, кроме концевых точек, в \mathbb{H} . При этом выполняется включение

$$\mathbb{U}_+(Q) \subset (I, II)_Z \subset \mathbb{H} \tag{126}$$

(для областей $\mathfrak{X}^1, (I)_\varepsilon$ и $(I)_Z$ на фиг. 11б, фиг. 11а, фиг. 11в дана штриховка с наклоном влево). Таким образом,

$$\ln(Z) : (I, II)_Z \xrightarrow{\text{conf}} (\mathfrak{X}^1, \mathfrak{X}), \quad \ln(\Gamma_Z) = \Gamma. \tag{127}$$



Фиг. 13. Конформные отображения между многостранный областью на плоскости ϵ и областями на ζ - и Z -плоскостях.

Из соотношений (106) и (127) следует, что определенная по формуле (117) функция $\epsilon = g^{-1}(Z)$ осуществляет отображение

$$g^{-1} : (I, II)_Z \xrightarrow{\text{conf}} (I, II)_\epsilon, \tag{128}$$

переводящее отрезок Γ_Z в отрезок Γ_ϵ (см. фиг. 11в, фиг. 11а). Тогда, согласно принципу симметрии, функция (117) может быть аналитически продолжена через отрезок Γ_Z по правилу (119) в область

$$(III, IV)_Z := (III)_Z \cup \text{int } \tilde{\gamma}_Z \cup (IV)_Z,$$

где $(III)_Z, (IV)_Z$ и $\text{int } \tilde{\gamma}_Z$ симметричны соответственно областям $(II)_Z, (I)_Z$ и (открытой) дуге $\text{int } \gamma_Z$; дуга $\tilde{\Gamma}_Z^1$ и точка \tilde{M}^1 суть зеркальные образы соответственно Γ_Z^1 и M^1 относительно Γ_Z (см. фиг. 11в).

Продолженная функция $\epsilon = g^{-1}(Z)$ отображает $(III, IV)_Z$ на область $(III, IV)_\epsilon$, симметричную области $(I, II)_\epsilon$ относительно Γ_ϵ , т.е. представляющую собой плоскость с разрезом $[-\infty, 1]$ по вещественной оси (см. фиг. 11г). Она получена соединением нижней полуплоскости $(II)_\epsilon$ с верхней $(IV)_\epsilon$ через интервал $(1, +\infty)$; подчеркнем, что $(IV)_\epsilon$ представляет собой иной, нежели $(II)_\epsilon$ экземпляр верхней полуплоскости (для областей $(IV)_\epsilon$ и $(IV)_Z$ на фиг. 11в, фиг. 11г дана штриховка с наклоном вправо).

Обозначим через

$$(I - IV)_Z := (I, II)_Z \cup \text{int } \Gamma_Z \cup (III, IV)_Z \tag{129}$$

область, изображенную на фиг. 11в и фиг. 13а. Затем, соединив два экземпляра, $(I, II)_\epsilon$ и $(III, IV)_\epsilon$, плоскости с разрезом $(-\infty, 1]$ путем склейки верхнего берега первой области с нижним берегом второй (на фиг. 11а, фиг. 11г эти берега изображены штриховыми линиями), образуем двулист-

ную риманову поверхность $(I-IV)_\varepsilon$; ее схематическое изображение дано на фиг. 13б. Тогда видим, что функция (117) вместе с ее продолжением осуществляет отображение

$$g^{-1} : (I-IV)_Z \xrightarrow{\text{conf}} (I-IV)_\varepsilon. \tag{130}$$

Поскольку, согласно (126), область $(I, II)_Z$ содержит полукруг $\mathbb{U}_+(Q)$, то область $(I-IV)_Z$ содержит круг $\mathbb{U}(Q)$, т.е.

$$(I-IV)_Z \supset \mathbb{U}(Q). \tag{131}$$

Продолженная функция $\varepsilon = g^{-1}(Z)$ в нем регулярна, а значит, как и было установлено аналогичным образом в более общем случае (при доказательстве утверждения 2), она представима в $\mathbb{U}(Q)$ сходящимся рядом (123) с вещественными коэффициентами Λ_m , откуда (как и в упомянутом доказательстве) для функции $\varepsilon = G(\delta)$ следует представление (87), где ряд с вещественными коэффициентами B_m сходится в единичном круге \mathbb{U} .

Запишем представление (87) для функции $\varepsilon = G(\delta)$ в следующем виде:

$$G(\delta) = Q \sum_{m=1}^{\infty} B_m \delta^m, \quad B_1 = 1. \tag{132}$$

Заметим, что функция

$$\zeta = \varphi(\varepsilon) := \frac{2}{Q} (1 - \sqrt{1 - \varepsilon}), \tag{133}$$

отвечает условиям

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\bar{\varepsilon}) = \overline{\varphi(\varepsilon)}, \quad \varphi(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{Q} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{134}$$

и конформно отображает риманову поверхность $(I-IV)_\varepsilon$ на область

$$(I-IV)_\zeta := \mathbb{C} \setminus [2Q^{-1}, +\infty), \tag{135}$$

представляющую собой внешность разреза $[2Q^{-1}, +\infty)$ по вещественной оси (см. фиг. 13в), т.е.

$$\varphi : (I-IV)_\varepsilon \xrightarrow{\text{conf}} (I-IV)_\zeta. \tag{136}$$

Отсюда и из (130) получаем, что суперпозиция $\zeta = \varphi \circ g^{-1}(Z)$ функций (117) и (133) однолистно отображает область $(I-IV)_Z$, определенную в (129), на внешность разреза, задаваемую формулой (135). При этом подобласти $(I)_Z, (II)_Z, (III)_Z$ и $(IV)_Z$, составляющие область $(I-IV)_Z$, переходят соответственно в подобласти $(I)_\zeta, (II)_\zeta, (III)_\zeta$ и $(IV)_\zeta$ области $(I-IV)_\zeta$, т.е. на первую, вторую, третью и четвертую четверти (квадранты), на которые прямые $\{\text{Im } \zeta = 0\}$ и $\{\text{Re } \zeta = 2Q^{-1}\}$ разбивают область $(I-IV)_\zeta$, а также и саму плоскость ζ (см. фиг. 13в).

Из сказанного вытекает, что функция

$$\zeta = \Phi(\delta) := \varphi \circ G(\delta) \tag{137}$$

регулярна и, с учетом (131), однолистка в единичном круге \mathbb{U} , а значит, представима в нем рядом Тейлора по степеням δ с коэффициентами D_k . Из разложения (132) для $\varepsilon = G(\delta)$ и свойств (134) функции $\zeta = \varphi(\varepsilon)$ следует, что коэффициенты D_k этого ряда вещественны, причем $D_0 = 0$, а $D_1 = 1$. Таким образом, функция (137) разлагается в ряд

$$\Phi(\delta) := \sum_{k=1}^{\infty} D_k \delta^k, \quad D_1 = 1, \tag{138}$$

и принадлежит классу \mathcal{S} с вещественными коэффициентами (о котором сказано выше при доказательстве утверждения 1 теоремы), а значит, коэффициенты этого ряда удовлетворяют неравенству

$$|D_k| \leq k. \tag{139}$$

Чтобы получить требуемую оценку для коэффициентов B_k из разложения (132), подставим выражение (133) и формулу $\varepsilon = G(\delta)$ в представление (137). Тогда после простых выкладок найдем

$$1 - \frac{Q}{2}\Phi(\delta) = \sqrt{1 - G(\delta)};$$

возводя обе части этого равенства в квадрат, подставляя представление (132) вместо $G(\delta)$ и разложение (138) вместо $\Phi(\delta)$, получим после возвышения последнего ряда в квадрат и упрощений следующее равенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \delta^k = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \delta^k - \frac{Q}{4} \sum_{k=2}^{\infty} \delta^k \sum_{l=1}^{k-1} D_l D_{k-l}. \tag{140}$$

Приравнявая здесь коэффициенты при одинаковых степенях δ^k , находим следующую связь между B_k и D_k :

$$B_1 = D_1 = 1, \quad B_k = D_k - \frac{Q}{4} \sum_{l=1}^{k-1} D_l D_{k-l}, \quad k = 2, 3, \dots \tag{141}$$

Оценивая B_k по модулю на основе (141) с использованием неравенства (139) и формул

$$\sum_{l=1}^{k-1} l = \frac{k(k-1)}{2}, \quad \sum_{l=1}^{k-1} l^2 = \frac{k(k-1)(2k-1)}{6},$$

получаем

$$|B_k| \leq |D_k| + \frac{Q}{4} \sum_{l=1}^{k-1} |D_l| |D_{k-l}| \leq k + \frac{Qk}{4} \sum_{l=1}^{k-1} l(k-l) = k + \frac{Q}{24} k(k-1)(k+1)$$

и окончательно

$$|B_k| \leq k + \frac{Q}{24} k(k^2 - 1), \quad k = 1, 2, \dots \tag{142}$$

Таким образом, установлено, что при условии $\beta \in [3/2, 2)$ коэффициенты B_k ряда (87) для функции $\varepsilon = G(\delta)$ удовлетворяют оценке (88). Третье утверждение теоремы доказано.

4. Докажем четвертое утверждение теоремы. Для этого прежде всего заметим, что связь между коэффициентами λ_k и Λ_m соответственно рядов (102) и (123), представляющих взаимно обратные функции $g(\varepsilon)$ и $g^{-1}(Z)$, может быть найдена с помощью формулы Бюрмана–Лагранжа [10], [37]:

$$\Lambda_m = \frac{1}{m!} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left[\frac{t}{g(t)} \right]^m. \tag{143}$$

Запишем функцию в квадратных скобках в (143), обозначив ее через $A(t)$, в виде суперпозиции

$$\left[\frac{t}{g(t)} \right]^m =: A(t) := b \circ a(t), \quad A(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{l!} t^l, \tag{144}$$

функций $a(t)$ и $b(u)$, которые определим в соответствии с (102), (144), а последнюю разложим в биномиальный ряд по формулам

$$u = a(t) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k, \quad a_k = -\lambda_{k+1}, \tag{145}$$

$$b(u) := (1 - u)^{-m}, \quad b(u) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n; \quad b_n = \binom{m+n-1}{n}. \tag{146}$$

Тогда из (143) видим, что коэффициент Λ_m выражается через производную A_{m-1} функции $A(t)$ в виде $\Lambda_m = (1/m!)A_{m-1}$, а учитывая связь (124) между Λ_m и B_m , выводим для последнего выражение

$$B_m = \frac{Q^{m-1}}{m!} A_{m-1}. \tag{147}$$

Применяя для нахождения фигурирующей здесь A_{m-1} формулу Фаа ди Бруно [49], [50] для производной сложной функции, находим

$$A_{m-1} = \sum_{\mathfrak{S}(m-1)} \frac{(m-1)!n!b_n}{n_1!n_2!\dots n_{m-1}!} \prod_{k=1}^{m-1} (a_k)^{n_k}, \tag{148}$$

где $n = n_1 + n_2 + \dots + n_{(m-1)}$, а суммирование выполняется по всем разбиениям $\mathfrak{S}(m-1)$ числа $(m-1)$, т.е. всем решениям $(n_1, n_2, \dots, n_{(m-1)})$ в неотрицательных целых числа уравнения (90). Подставляя в полученное выражение (148) значения a_k из (145) и b_n из (146), а результат – в равенство (147), получаем после простых выкладок выражение (89) для B_m через коэффициенты λ_k . Четвертое утверждение и теорема в целом доказаны.

2.7. Получение коэффициентов λ_k в представлении для $\mathcal{F}(\varepsilon)$

Итак, коэффициенты B_m разложения (87) функции $G(\delta)$ выражены в виде формулы (89) через коэффициенты λ_k представления (85) функции $\mathcal{F}(\varepsilon)$. Остается найти выражение для λ_k .

Для этого, разделив друг на друга ряды, помещенные в квадратные скобки в выражении (52) для функции $\mathcal{F}(\varepsilon)$, приведем эту функцию к виду

$$\mathcal{F}(\varepsilon) = \ln \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda'_k \varepsilon^k, \tag{149}$$

с коэффициентами λ'_k , вычисляемыми по следующим рекуррентным формулам:

$$\lambda'_k = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)_k}{(k!)^2} q_k - \sum_{n=1}^k \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)_n}{(n!)^2} \lambda'_{k-n} \quad k = 1, 2, \dots; \quad \lambda'_0 = q_0. \tag{150}$$

Чтобы преобразовать (149) к виду (85), приравняем эти представления друг другу, а результат пропотенцируем; тогда после упрощений получим соотношение

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{k+1} \varepsilon^k = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda'_k \varepsilon^k\right), \quad \lambda_1 = 1; \tag{151}$$

здесь левую часть первого равенства будем рассматривать как некоторую функцию $A(\varepsilon)$, а сумму ряда в скобках в его правой части – как функцию, обозначаемую через $b(\varepsilon)$. Тогда коэффициент λ_k будет представлять собой $(k-1)$ -ю производную при $\varepsilon = 0$ функции $A(\varepsilon) = \exp \circ b(\varepsilon)$, деленную на $(k-1)!$. Вычисляя эту производную с помощью формулы Фаа ди Бруно (которая уже использовалась выше), находим

$$\lambda_k = \sum_{\mathfrak{S}(k-1)} \frac{1}{j_1!j_2!\dots j_{k-1}!} \prod_{n=1}^{k-1} (\lambda'_n)^{j_n}, \tag{152}$$

где суммирование выполняется по всем разбиениям $\mathfrak{S}(k-1)$ числа $(k-1)$, т.е. всем решениям $(j_1, j_2, \dots, j_{(k-1)})$ в неотрицательных целых числах уравнения $j_1 + 2j_2 + \dots + (k-1)j_{(k-1)} = k-1$.

Таким образом, чтобы прийти к итоговым формулам для коэффициентов B_m , нужно в равенство (89), представляющее B_m через λ_k , подставить формулу (152), выражающую λ_k через коэффициенты λ'_k , предварительно получив последние из рекуррентных соотношений (150).

Таблица 1. Значение величины δ для различных A/h

A/h	0.5	1	2	3	4	5
δ	2.07880×10^{-1}	4.32139×10^{-2}	1.86744×10^{-3}	8.06995×10^{-5}	3.48734×10^{-6}	1.50702×10^{-7}

2.8. Аналитическое решение проблемы параметров

Описанный метод дает коэффициенты B_m разложения (87) функции $\varepsilon = G(\delta)$ в виде аналитических формул, выражающих B_m в явном виде через показатель β входящего угла области $\mathbb{L}(\beta, A, h)$. В частности, для нескольких первых коэффициентов разложения (87) получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 B_2 &= -\frac{Q}{2}, & B_3 &= \frac{Q^2}{64}(\beta^2 - 2\beta + 12), & B_4 &= -\frac{Q^3}{64}(\beta^2 - 2\beta + 4), \\
 B_5 &= \frac{Q^4}{32768}(15\beta^4 - 60\beta^3 + 356\beta^2 - 592\beta + 640), \\
 B_6 &= -\frac{Q^5}{32768}(19\beta^4 - 76\beta^3 + 212\beta^2 - 272\beta + 192), \\
 B_7 &= \frac{Q^6}{56623104}(911\beta^6 - 5466\beta^5 + 34448\beta^4 - 101352\beta^3 + 188624\beta^2 - 189120\beta + 96768), \\
 B_8 &= -\frac{Q^7}{14155776}(329\beta^6 - 1974\beta^5 + 7208\beta^4 - 15672\beta^3 + 21776\beta^2 - 17472\beta + 6912),
 \end{aligned} \tag{153}$$

где (напомним) величина Q определяется через β по формуле (49). Вывод подобных выражений для B_m осуществлялся (на основе указанных выше формул) с помощью программы символьных преобразований, входящей в пакет компьютерной алгебры Maple-18.

Для нахождения таким способом первых 50 коэффициентов B_m на процессоре средней производительности Intel Core i3 потребовалось время порядка 10^{-3} с. Получив эти формулы один раз и подставив их в ряд (87) для функции $\varepsilon = G(\delta)$, можно использовать его для вычисления модифицированного прообраза ε при различных значениях геометрических параметров β и δ области $\mathbb{L}(\beta, A, h)$.

Поскольку ряд (87) сходится практически с экспоненциальной скоростью, то погрешность вычисления на его основе величины ε равна по порядку величины первому отброшенному члену, равному δ^{K+1} , где K — длина используемой частичной суммы ряда (87). Для удобства в табл. 1 приведены численные значения параметра δ при различных значениях относительной длины полки A/h .

Отметим, что была также проведена проверка соответствия формул для B_m оценке (88) путем непосредственного сопоставления с ней численных значений коэффициентов B_m , вычисленных по формулам типа (153) для различных значений показателя β . Сопоставление показало, что для $\beta \in [3/2, 2)$ неравенство (88) выполняется, тогда как для $\beta < 3/2$ оно нарушается. Этот численный эксперимент подтвердил утверждение 3 теоремы 1.

Очевидно, что для описанного метода вычисления ε сравнительно неблагоприятным является случай короткой полки, т.е. когда $A < h$, например, $A/h = 0.5$. Но и в этом случае метод оказывается достаточно эффективным. Действительно, чтобы для случая $A/h = 0.5$ обеспечить вычисления ε с относительной точностью 10^{-20} , необходимо, согласно указанной выше оценке, использовать частичную сумму ряда (87) длиной 29 членов. Такое вычисление на указанном процессоре заняло около 10^{-3} с, что и подтверждает высокую эффективность изложенного метода вычисления величины ε .

Если модифицированный прообраз ε известен, то искомые параметры рассматриваемого интеграла (20), т.е. прообраз τ и предынтегральный множитель \mathcal{H} выражаются через ε соответственно по формулам (34) и (27). Это и дает явное аналитическое решение проблемы параметров интеграла Кристоффеля—Шварца (20).

Таблица значений прообраза τ для некоторых величин показателя β входящего угла и относительной длины полки A/h приведена в разд. 4. Заметим, что ширина полки h области $\mathbb{L}(\beta, A, h)$ фигурирует в качестве множителя в выражении (20) для отображения $f(\zeta)$.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ПРЯМОГО И ОБРАТНОГО ОТОБРАЖЕНИЙ

3.1. Предварительные замечания

Численная реализация функции $w = f(\zeta)$, дающей конформное отображение

$$f : \mathbb{H} \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{L}(\beta, A, h) \tag{154}$$

(см. фиг. 1) и записанной в виде интеграла Кристоффеля–Шварца (20), выполнена в работе с помощью набора из четырех разложений, представляющих эту функцию вблизи точек $\zeta_1 = 0$ и $\zeta_4 = \infty$, а также вблизи отрезков $[1, \tau]$ и $[-\tau, -1]$ вещественной оси $\{\text{Im } \zeta = 0\}$. Области сходимости этих разложений покрывают в совокупности множество $\bar{\mathbb{H}}$, т.е. всю замкнутую верхнюю полу-плоскость.

С помощью обращения этих разложений получены четыре представления для обратной функции $\zeta = f^{-1}(w)$. Области их сходимости покрывают в совокупности всю замкнутую область, т.е. $\bar{\mathbb{L}}(\beta, A, h)$. Вид областей сходимости получаемых представлений для прямого $w = f(\zeta)$ и обратного $\zeta = f^{-1}(w)$ отображений вытекает из теории конформного отображения сингулярно деформируемых областей [12], [13].

3.2. Представление для отображения $f(\zeta)$ вблизи прообраза $\zeta_1 = 0$

Переписывая интеграл (20) в виде

$$f(\zeta) = \exp\left(i \frac{\pi\beta}{2}\right) \frac{\mathcal{K}h}{\tau} \int_0^\zeta x^{1-\beta} (1-x^2)^{-1/2} \left(1 - \frac{x^2}{\tau^2}\right)^{-1/2} dx + w_1, \tag{155}$$

и подставляя в него вместо биномов их биномиальные разложения, перемножая их и интегрируя результат, получаем

$$f(\zeta) = \exp\left(i \frac{\pi\beta}{2}\right) \frac{\mathcal{K}h}{\tau(2-\beta)} \zeta^{2-\beta} \sum_{n=0}^\infty c'_n \zeta^{2n} + w_1, \tag{156}$$

$$c'_n = \frac{2-\beta}{2(n+1)-\beta} \sum_{k=0}^n \binom{k-1/2}{k} \binom{n-k-1/2}{n-k} \tau^{2(k-n)}, \quad c'_0 = 1. \tag{157}$$

Приведем это представление к виду

$$f(\zeta) = \exp\left(i \frac{\pi\beta}{2}\right) \frac{\mathcal{K}h}{\tau(2-\beta)} \left(\zeta + \sum_{j=1}^\infty c_j \zeta^{2j+1} \right)^{2-\beta} + w_1. \tag{158}$$

Для этого, приравнявая (156) и (158) и возвышая получаемое равенство после упрощений в степень $1/(2-\beta)$, приходим к соотношению:

$$\left(1 + \sum_{n=1}^\infty c'_n \zeta^{2n} \right)^{1/(2-\beta)} = 1 + \sum_{j=1}^\infty c_j \zeta^{2j}.$$

Рассматривая его правую часть как некоторую функцию $A(\zeta)$, а сумму ряда в скобках в его левой части – как функцию $b(\zeta)$, видим, что коэффициент c_j представляет собой деленную на $(2j)!$ производную $(2j)$ -го порядка функции

$$A(\zeta) = [1 + b(\zeta)]^{1/(2-\beta)}$$

при $\zeta = 0$. Вычисляя эту производную с помощью формулы Фаа ди Бруно с учетом разложения

$$(1+x)^{1/(2-\beta)} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{1}{2-\beta}^p x^p,$$

находим коэффициенты c_j :

$$c_j = \Gamma\left(\frac{3-\beta}{2-\beta}\right) \sum_{\mathfrak{P}(j)} \frac{1}{p! \Gamma\left(\frac{3-\beta}{2-\beta} - p\right) p_1! p_2! \dots p_j!} \prod_{k=1}^j (c'_k)^{p_k}, \tag{159}$$

где $p = p_1 + p_2 + \dots + p_j$, а суммирование выполняется по всем разбиениям $\mathfrak{P}(j)$ числа (j) , т.е. всем решениям (p_1, p_2, \dots, p_j) в неотрицательных целых числах уравнения

$$p_1 + 2p_2 + \dots + (j)p_j = j.$$

Таким образом, построено искомое представление (158) для отображения (154) с коэффициентами (159), сходящееся в полукруге \mathbb{U}_+ .

3.3. Представление для обратного отображения $f^{-1}(w)$ вблизи вершины w_1

Вводя вспомогательную переменную

$$V_1(w) = \left[(w - w_1) \exp\left(-i \frac{\pi\beta}{2}\right) \frac{\tau(2-\beta)}{\mathcal{K}h} \right]^{1/(2-\beta)}, \tag{160}$$

приводим представление (158) к виду

$$V_1 = \xi(\zeta) := \zeta + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \zeta^{2j+1}. \tag{161}$$

Тогда для обратной к $V_1 = \xi(\zeta)$ функции $\zeta = \Xi(V_1)$ записываем разложение

$$\zeta = \Xi(V_1) := V_1 + \sum_{m=1}^{\infty} C_m V_1^{2m+1}, \tag{162}$$

где коэффициенты C_m выражаются через функцию $\xi(\zeta)$ согласно формуле Бюрмана–Лагранжа (уже использовавшейся выше):

$$C_m = \frac{1}{(2m+1)!} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{d^{2m}}{d\zeta^{2m}} \left[\frac{\zeta}{h(\zeta)} \right]^{2m+1}. \tag{163}$$

Повторяя приемы, использованные при выводе формул (144)–(148), находим

$$C_m = \frac{1}{(2m)!} \sum_{\mathfrak{P}(2m+1)} \frac{(2m+k)!}{k_1! k_2! \dots k_{2m+1}!} \prod_{q=1}^{2m+1} (-c_q)^{k_q}, \tag{164}$$

где суммирование выполняется по всем разбиениям $\mathfrak{P}(2m+1)$ числа $(2m+1)$, т.е. всем решениям $(k_1, k_2, \dots, k_{2m+1})$ в неотрицательных целых числах уравнения $k_1 + 2k_2 + \dots + (2m+1)k_{2m+1} = 2m+1$.

Подставляя в правую часть разложения (162) формулу $\zeta = f^{-1}(w)$, а в левую $V_1 = V_1(w)$, получим искомое представление для обратного отображения:

$$\zeta = f^{-1}(w) = V_1(w) + \sum_{m=1}^{\infty} C_m [V_1(w)]^{2m+1}. \tag{165}$$

Здесь $V_1(w)$ дается формулой (160), а коэффициенты C_m – формулой (164); это представление сходится в секторе

$$\{w : |w - w_1| < R, \arg[(w - w_1)e^{i\pi}] \in [-\varphi, \varphi]\}, \quad R = \min(|w_1 - w_4|, |w_1 - w_2|), \quad \varphi = \pi\left(1 - \frac{\beta}{2}\right).$$

3.4. Представление для отображения $f(\zeta)$ вблизи прообраза $\zeta_4 = \infty$

Перепишывая интеграл (20) в виде

$$f(\zeta) = -\exp\left(i\frac{\pi\beta}{2}\right) \mathfrak{H}h \int_{\infty}^{\zeta} x^{-1-\beta} (1-x^{-2})^{-1/2} (1-\tau^2 x^{-2})^{-1/2} dx, \tag{166}$$

и подставляя для множителей внутри интеграла их разложения, перемножая их и интегрируя, получаем

$$f(\zeta) = \exp\left(i\frac{\pi\beta}{2}\right) \frac{\mathfrak{H}h}{\beta} \zeta^{-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} e'_n \zeta^{-2n}, \tag{167}$$

$$e'_n = \frac{\beta}{\beta + 2n} \sum_{k=0}^n \binom{k-1/2}{k} \binom{n-k-1/2}{n-k} \tau^{2(n-k)}, \quad e'_0 = 1. \tag{168}$$

Действуя аналогично п. 3.2, приводим это представление к виду

$$f(\zeta) = \exp\left(i\frac{\pi\beta}{2}\right) \frac{\mathfrak{H}h}{\beta} \left(\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} e_n \zeta^{1-2n}\right)^{-\beta}, \tag{169}$$

где коэффициенты e_n даются формулой

$$e_n = (-1)^n \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{\beta}\right) \sum_{\mathfrak{F}(n)} \frac{\Gamma(\frac{1}{\beta} + p)}{p_1! p_2! \dots p_n!} \prod_{m=1}^n (-e'_m)^{p_m}. \tag{170}$$

Здесь индексы p, p_1, p_2, \dots, p_n , возникающие при использовании разбиения, определены аналогично вышеприведенному.

Таким образом, получено требуемое представление (169) для отображения $w = f(\zeta)$ с коэффициентами (170); это представление сходится на множестве $\mathbb{H} \setminus \mathbb{U}_+(\tau)$, т.е. в замкнутой полуплоскости с выброшенным полукругом.

3.5. Представление для обратного отображения $f^{-1}(w)$ вблизи вершины w_4

Вводя переменную

$$V_4(w) = \left[w \exp\left(-i\frac{\pi\beta}{2}\right) \frac{\beta}{\mathfrak{H}h} \right]^{-1/\beta}, \tag{171}$$

приводим представление (169) к виду

$$V_4 = \omega(\zeta) := \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} e_n \zeta^{1-2n}. \tag{172}$$

Тогда для обратной к $V_4 = \omega(\zeta)$ функции $\zeta = \Omega(V_4)$ записываем разложение

$$\zeta = \Omega(V_4) := V_4 + \sum_{m=1}^{\infty} E_m V_4^{1-2m}, \tag{173}$$

где коэффициенты E_m выражаются через функцию $\omega(\zeta)$ согласно формуле типа Бюрмана–Лагранжа [13]:

$$E_m = \frac{-1}{m(m+1)!} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} e_n t^{2n} \right)^m. \tag{174}$$

Повторяя приемы, использованные при выводе формул (144)–(148), находим

$$E_m = \sum_{\mathfrak{S}(m)} \frac{(m-1)!}{(m-1-k)!k_1!k_2!\dots k_m!} \prod_{q=1}^m (e_q)^{k_q}, \tag{175}$$

где суммирование выполняется по всем разбиениям $\mathfrak{S}(m)$ числа m , т.е. по всем решениям (k_1, k_2, \dots, k_m) в неотрицательных целых числах уравнения $k_1 + 2k_2 + \dots + mk_m = m$.

Таким образом, получено представление (173) для $f^{-1}(w)$, где $V_4(w)$ дается формулой (171), а коэффициенты E_m – формулой (175); это представление сходится в секторе

$$\{w : |w| < R, \arg w \in [-\varphi, \varphi]\}, \quad R = \min(|w_1|, |w_3|), \quad \varphi = \frac{\pi\beta}{2}.$$

3.6. Представление для отображения $f(\zeta)$ вблизи отрезка $\zeta \in [1, \tau]$

Выполнив преобразование полуплоскости на себя,

$$\zeta = v(u) := \frac{\tau+1}{2} + \frac{\tau-1}{2}u, \tag{176}$$

проведя замену переменной (176) в интеграле Кристоффеля–Шварца (20) и обозначив модифицированный интеграл через $\hat{f}(u) := f \circ v(u)$, получим для него представление

$$\hat{f}(u) = -i\tilde{\mathcal{K}} \int_0^u \left(1 + \frac{\tau-1}{\tau+1}\xi \right)^{1-\beta} \left(1 + \frac{\tau-1}{\tau+3}\xi \right)^{-1/2} \left(1 + \frac{\tau-1}{3\tau+1}\xi \right)^{-1/2} (1-\xi^2)^{-1/2} d\xi + w_*, \tag{177}$$

$$\tilde{\mathcal{K}} = -\exp\left(i\frac{\pi\beta}{2}\right) \mathcal{K}h\left(\frac{\tau+1}{2}\right)^{1-\beta} \left(\frac{\tau+3}{2}\right)^{-1/2} \left(\frac{3\tau+1}{2}\right)^{-1/2}, \quad w_* := f\left(\frac{\tau+1}{2}\right). \tag{178}$$

Разложив содержащиеся под знаком интеграла (177) биномы в биномиальные ряды по степеням ξ , перемножив их и проинтегрировав полученное разложение, приходим к следующему представлению для отображения $w = \hat{f}(u)$:

$$\hat{f}(u) = -i\tilde{\mathcal{K}} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{s}_n u^n + w_*, \quad \hat{s}_1 = 1; \tag{179}$$

выражение для коэффициентов \hat{s}_n , получаемое указанным стандартным способом, здесь опущено ввиду его громоздкости.

Приведем представление (179) к виду

$$w = \hat{f}(u) = \tilde{\mathcal{K}} \left[\operatorname{arcch} \left(u + \sum_{k=2}^{\infty} s_k u^k \right) - \frac{i\pi}{2} \right] + w_*. \tag{180}$$

Для этого, приравнявая соотношения (179) и (180), а также проводя простые преобразования, приходим к соотношению:

$$\operatorname{arcch} \left(u + \sum_{k=2}^{\infty} s_k u^k \right) = \frac{i\pi}{2} - i \left(u + \sum_{n=2}^{\infty} \hat{s}_n u^n \right). \tag{181}$$

Поддействовав теперь на обе части этого равенства функцией ch и использовав свойства

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{ch} \frac{i\pi}{2} = 0, \quad \operatorname{sh} \frac{i\pi}{2} = i, \quad \sin(iz) = i \operatorname{sh}(z),$$

приведем его к виду

$$u + \sum_{k=2}^{\infty} s_k u^k = \sin \left(u + \sum_{n=2}^{\infty} \hat{s}_n u^n \right). \tag{182}$$

С помощью приемов, использованных в п. 3.2, включая формулу Фаа ди Бруно, выводим выражение для коэффициентов s_k :

$$s_k = \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{S}(k)} \frac{i^{n+1}((-1)^n - 1)}{n_1! n_2! \dots n_k!} \prod_{q=1}^k (\hat{s}_{n_q})^{n_q}. \tag{183}$$

Фигурирующие здесь индексы n, n_1, n_2, \dots, n_k связаны с разбиваемым номером k по правилам, применявшимся выше.

Возвращаясь к исходному отображению $f(\zeta)$ с помощью обратной к (176) замены

$$u = v^{-1}(\zeta) = \frac{2\zeta - \tau - 1}{\tau - 1}, \tag{184}$$

получаем для отображения $f(\zeta)$ искомое представление вблизи отрезка $\zeta \in [1, \tau]$, имеющее вид $f(\zeta) = \hat{f} \circ v^{-1}(\zeta)$, где \hat{f} дается формулой (180) с коэффициентами (183), а $v^{-1}(\zeta)$ – формулой (184).

Используя соотношение

$$f(\zeta) = \hat{f} \circ v^{-1}(\zeta),$$

получаем из равенства (180) искомое представление для отображения (154):

$$w = f(\zeta) = \widetilde{\mathcal{H}} \left[\operatorname{arccch} \left(v^{-1}(\zeta) + \sum_{k=2}^{\infty} s_k [v^{-1}(\zeta)]^k \right) - \frac{i\pi}{2} \right] + w_*, \tag{185}$$

где $v^{-1}(\zeta)$ дается формулой (184), а коэффициенты s_k – формулой (183); это представление сходится в полукруге

$$\left\{ \zeta : \left| \zeta - \frac{1+\tau}{2} \right| < \frac{1+\tau}{2}, \quad \operatorname{Im} \zeta \geq 0 \right\}.$$

3.7. Представление для обратного отображения $f^{-1}(w)$ вблизи торца $\widehat{w_2 w_3}$

Выполнив сдвиг и поворот плоскости w ,

$$v = \mu(w) := \frac{w - w_*}{\widetilde{\mathcal{H}}} + \frac{i\pi}{2} \tag{186}$$

и проведя замену переменной (186) в соотношении (180), получим из него следующее представление для функции $v = \mu \circ \hat{f}(u)$

$$\mu \circ \hat{f}(u) = \operatorname{arccch} \left(u + \sum_{k=2}^{\infty} s_k u^k \right). \tag{187}$$

Подействовав на обе части равенства (187) функцией ch и обозначив $\Phi = \operatorname{ch}(v)$, получаем для функции $\Phi = \mathfrak{Z}(u) := \operatorname{ch} \circ \mu \circ \hat{f}(u)$ разложение

$$\Phi = \mathfrak{Z}(u) = u + \sum_{k=2}^{\infty} s_k u^k. \tag{188}$$

Тогда разложение для обратной функции записывается как

$$u = \mathfrak{Z}^{-1}(\Phi) = \Phi + \sum_{m=2}^{\infty} S_m \Phi^m, \tag{189}$$

где коэффициенты S_m выражаются через функцию \mathfrak{Z} по формуле Бюрмана–Лагранжа, указанной выше. Повторяя приемы, использованные при выводе формул (144)–(148), находим:

$$S_m = \frac{1}{m!} \sum_{\mathfrak{Z}(m-1)} \frac{(m+k-1)!}{k_1!k_2!\dots k_{m-1}!} \prod_{q=1}^{m-1} (-s_{k_q+1})^{k_q}, \tag{190}$$

где суммирование выполняется по всем разбиениям $\mathfrak{Z}(m-1)$ числа $(m-1)$, т.е. по всем решениям $(k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$ в неотрицательных целых числах уравнения

$$k_1 + 2k_2 + \dots + (m-1)k_{m-1} = m-1.$$

Для того чтобы вывести искомое представление для обратного отображения $\zeta = f^{-1}(w)$, подставим $\Phi = \mathfrak{Z}(u) := \text{ch} \circ \mu(w)$ в разложение (189) и подействуем на обе части получаемого равенства функцией $\zeta = v(u)$. В результате получим требуемое представление

$$\zeta = f^{-1}(w) = v \left(\text{ch}(\mu(w)) + \sum_{m=2}^{\infty} S_m \text{ch}^m(\mu(w)) \right), \tag{191}$$

где $v(u)$ и $\mu(w)$ – линейные преобразования (176) и (186), а коэффициенты S_m определяются из (190). Это представление сходится в области

$$\left\{ w : \text{Re} \left(w \exp \left(i\pi - \frac{i\pi\beta}{2} \right) \right) \in [-A, 0), \text{Im} \left(w \exp \left(i\pi - \frac{i\pi\beta}{2} \right) \right) \in [0, h] \right\},$$

являющейся полкой отображаемой L -образной области.

4. КРОУДИНГ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

4.1. Асимптотика расстояния между прообразами при длинной и короткой полке

Во введении было отмечено, что при удлинении или укорочении относительной длины полки (величины A/h) расстояния между некоторыми прообразами быстро сокращаются. Явление сгущивания прообразов вершин (или других характерных точек отображаемых областей), называемое кроудингом, носит довольно общий характер и часто возникает при конформном отображении (см., например, [5]–[8], [20]–[23]).

Для рассматриваемого в работе отображения $f : \mathbb{H} \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{L}(\beta, A, h)$ с нормировкой (1) при увеличении относительной длины полки A/h резко сокращается расстояние $\tau - 1$ между прообразами вершин w_3 и w_2 . Для получения асимптотики расстояния $\tau - 1$ при $A/h \rightarrow \infty$, т.е. при $\delta = \exp \left(-\pi \frac{A}{h} \right) \rightarrow 0$, подставим разложение (87) в биномиальный ряд для $\tau = (1 - \varepsilon)^{-1/2}$ с учетом формул (153); в результате получим

$$\tau - 1 = \frac{Q}{2} \delta + \frac{Q^2}{8} \delta^2 + \frac{Q^3}{128} (\beta^2 - 2\beta + 4) \delta^3 + \frac{Q^4}{256} (\beta^2 - 2\beta + 2) \delta^4 + \mathcal{O}(\delta^5), \quad \delta \rightarrow 0. \tag{192}$$

Для отображения другой канонической области, круга \mathbb{U} на L -образную область, т.е. для отображения $f_{\mathbb{U}}(\xi) : \mathbb{U} \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{L}(\beta, A, h)$ с нормировкой (12) возникает сближение прообразов ξ_3 и ξ_5 к прообразу ξ_4 (см. фиг. 3б) при укорочении полки, т.е. при $A/h \rightarrow 0$.

Чтобы получить соответствующую асимптотику, прежде всего представим это отображение в виде суперпозиции $f_{\mathbb{U}}(\xi) = f \circ \Upsilon(\xi)$. Здесь $w = f(\zeta)$ – исходное отображение, а $\zeta = \Upsilon(\xi)$ – отображение круга на полуплоскость

$$\Upsilon(\xi) = \zeta_0 \frac{1 + \xi}{1 - \xi}, \tag{193}$$

где (чисто мнимая величина) ζ_0 – прообраз точки w_0 при отображении $w = f(\zeta)$.

Используя интегральное представление (20) для отображения $w = f(\zeta)$, получим уравнения для длин h и A области $\mathbb{L}(\beta, A, h)$, проинтегрировав в этом представлении соответственно от $\zeta = 1$ до $\zeta = \tau$ и от $\zeta = \tau$ до $\zeta = \infty$. В результате получим систему уравнений для \mathcal{H} и τ . Разделив второе

уравнение на первое, находим (после анализа, аналогичного проведенному в п. 2.2) асимптотики для τ и \mathcal{K} при $A/h \rightarrow 0$:

$$\tau = \left[\frac{\Gamma^2(\beta/2)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta-1}{2}\right)} \right]^{\frac{1}{\beta-1}} \left(\frac{A}{h}\right)^{\frac{-1}{\beta-1}} (1 + o(A/h)), \quad A/h \rightarrow 0, \quad (194)$$

$$\mathcal{K} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma^{\frac{\beta+1}{2}}(\beta/2)}{\Gamma^{\frac{1}{\beta-1}}\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\Gamma^{\frac{\beta}{\beta-1}}\left(\frac{\beta-1}{2}\right)} \left(\frac{A}{h}\right)^{\frac{-1}{\beta-1}} (1 + o(A/h)), \quad A/h \rightarrow 0. \quad (195)$$

Для получения прообраза ζ_0 проинтегрируем (20) от $\zeta = 0$ до $\zeta = \zeta_0$ и приравняем результат к $-h \operatorname{cosec}(\pi\beta/2)/2$. Подставив найденную ζ_0 и асимптотику (194) для τ в выражение (193) для функции $\Upsilon^{-1}(-\tau)$, найдем асимптотику для $\xi_5 = e^{i\theta}$. Это дает

$$\theta = \mathcal{P}_1 \left(\frac{A}{h}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} (1 + o(A/h)), \quad A/h \rightarrow 0, \quad \mathcal{P}_1 = \frac{2\zeta_0}{i} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta-1}{2}\right)}{\Gamma^2(\beta/2)} \right]^{\frac{1}{\beta-1}}. \quad (196)$$

Для частного случая $\beta = 3/2$ эта асимптотика принимает вид:

$$\theta = \mathcal{P}_1 \left(\frac{A}{h}\right)^2 (1 + o(A/h)), \quad A/h \rightarrow 0, \quad \mathcal{P}_1 = \frac{\Gamma^8(1/4)}{32\pi^4} = 9.5785359. \quad (197)$$

4.2. Численные результаты

Для вычисления искомых параметров τ и \mathcal{K} интеграла Кристоффеля–Шварца (20) вначале находится модифицированный прообраз ε с помощью ряда (87) по степеням δ . Коэффициенты B_m этого ряда получаются по формулам (89), (150), (152), а величина Q – по формуле (49). Значения величины Q для некоторых β приведены в табл. 3, а значения параметра δ для некоторых A/h – в табл. 1.

В п. 2.8 была отмечена высокая эффективность численной реализации такого способа вычисления величины ε : для ее получения с относительной точностью 10^{-20} на процессоре средней производительности Intel Core i3 потребовалось время порядка 10^{-3} с.

По найденному ε искомый прообраз τ и множитель \mathcal{K} вычисляются с помощью равенств (33), (34). Значения прообраза τ для некоторых β и A/h даны в табл. 2.

Необходимо подчеркнуть высокую вычислительную эффективность изложенного в разд. 3 метода построения отображений $w = f(\zeta)$ и $\zeta = f^{-1}(w)$. Так, для вычисления функции $f(\zeta)$ в лю-

Таблица 2. Значения прообраза τ для различных β и A/h

$\pi\beta$	210°	240°	270°	300°	330°
A/h					
0.5	3.3047332727	2.4380821194	2.0214099682	1.7825416519	1.6298923836
1.0	1.2729054659	1.1990116761	1.1547005384	1.1256190355	1.1052692244
1.5	1.0513750431	1.0384161999	1.0303309448	1.0248876899	1.0210113413
2.0	1.0104683821	1.0078668537	1.0062305899	1.0051232466	1.0043318150
2.5	1.0021671913	1.0016302840	1.0012920263	1.0010628626	1.0008989539
3.0	1.0004501285	1.0003386841	1.0002684485	1.0002208545	1.0001868076

Таблица 3. Значения величины Q для различных β

$\pi\beta$	210°	240°	270°	300°	330°
Q	11.1531585929	8.3922873546	6.6521464432	5.4728970907	4.6292766499

бой точке полуплоскости \mathbb{H} или функции $f^{-1}(w)$ в любой точке области $\mathbb{L}(\beta, A, h)$ с относительной точностью 10^{-10} на процессоре Intel Core i3 требовалось время порядка 10^{-3} с.

Численная реализация отображения $w = f(\zeta)$ полуплоскости на область $\mathbb{L}(\beta, A, h)$ была продемонстрирована на примерах ее сочетания с дробно-линейным отображением либо с эллиптическим синусом. Отметим, что во всех примерах полка L -образной области бралась единичной ширины, поэтому мы полагали $h = 1$.

1. В качестве первого примера рассмотрена область $\mathbb{L}(\beta, A, 1)$ с параметрами $\pi\beta = 310^\circ$, $A = 0.45$, а в качестве отображения взята суперпозиция

$$f \circ \tilde{Y}(\tilde{\zeta}) =: \tilde{f}_{\mathbb{H}}(\tilde{\zeta}) = w \tag{198}$$

функции f с дробно-линейной функцией \tilde{Y} ,

$$\zeta = \tilde{Y}(\tilde{\zeta}) := \frac{(1 + \zeta_0)\zeta_\infty\tilde{\zeta} - \zeta_0(1 + \zeta_\infty)}{(1 + \zeta_0)\tilde{\zeta} - (1 + \zeta_\infty)}, \tag{199}$$

выполняющей автоморфизм верхней полуплоскости. Суперпозиция (198) осуществляет отображение $\tilde{f}_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{L}(\beta, A, 1)$ и обеспечивает нормировку (14). Фигурирующие в этой нормировке точки w_0 и w_∞ заданы соответственно на сторонах $\widehat{w_4w_5}$ и $\widehat{w_1w_2}$, а их прообразы $f(\zeta_0)$ и $f(\zeta_\infty)$, присутствующие в (198), находятся по формулам

$$\zeta_0 = f^{-1}(w_0), \quad \zeta_\infty = f^{-1}(w_\infty); \tag{200}$$

алгоритм вычисления используемой здесь функции $\zeta = f^{-1}(w)$ приведен в разд. 3. На фиг. 4 даны результаты численной реализации отображения $w = \tilde{f}_{\mathbb{H}}(\tilde{\zeta})$ в виде образа декартовой сетки полуплоскости $\tilde{\zeta}$. Картина этой сетки в увеличенном масштабе вблизи вершины входящего угла приведена на фиг. 5.

2. В качестве второго примера рассмотрена область $\mathbb{L}(\beta, A, 1)$ с параметрами $\pi\beta = 250^\circ$, $A = 1.5$, а в качестве отображения взята суперпозиция

$$f \circ \Phi(\xi) =: \tilde{f}_{\mathbb{U}}(\xi) = w \tag{201}$$

функции f с дробно-линейной функцией Φ ,

$$\zeta = \Phi(\xi) := |\zeta_0|^2 \frac{(1 - \xi)}{\bar{\zeta}_0 - \zeta_0\xi}, \tag{202}$$

выполняющей отображение единичного круга на верхнюю полуплоскость. Суперпозиция (201) осуществляет отображение $\tilde{f}_{\mathbb{U}} : \mathbb{U} \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{L}(\beta, A, 1)$ и обеспечивает нормировку

$$\tilde{f}_{\mathbb{U}}(0) = w_0, \quad \tilde{f}_{\mathbb{U}}(1) = w_1.$$

Здесь прообраз ζ_0 на плоскости ζ точки w_0 , заданной в области $\mathbb{L}(\beta, A, 1)$, находится по формуле $\zeta_0 = f^{-1}(w_0)$, где функция $f^{-1}(w)$, как и в предыдущем примере, строится с помощью метода, изложенного в разд. 3. На фиг. 6 построен образ полярной сетки круга, а сама полярная сетка дана на фиг. 7.

3. В качестве третьего примера рассмотрено отображение прямоугольника

$$\mathbb{P} := \{\eta : \text{Re } \eta \in (-l/2, l/2), \text{Im } \eta \in (0, 1)\},$$

единичной ширины и длины $l = 4.1$ на область $\mathbb{L}(\beta, A, 1)$ со входящим углом $\pi\beta = 290^\circ$ и с полкой такой длины A , что выполняются условия нормировки (15). Введем полные эллиптические ин-

тегралы $K(k)$ и $K'(k)$, соответствующие модулю k эллиптического синуса $\operatorname{sn}(z; k)$ (см. [14], [37]) и выразим их через функцию Гаусса:

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right), \quad (203)$$

$$K'(k) = \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} = \frac{\pi}{2k} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \frac{k^2-1}{k^2}\right). \quad (204)$$

Тогда, как можно убедиться, требуемое отображение $f_{\mathbb{P}}(\eta) : \mathbb{P} \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{L}(\beta, A, 1)$, обеспечивающее предписанную нормировку (15), представляется в виде суперпозиции

$$f \circ \Xi(\eta) =: f_{\mathbb{P}}(\eta) = w \quad (205)$$

исходной функции f с функцией, выражающейся через эллиптический синус

$$\zeta = \Xi(\eta) := -\frac{1}{k \operatorname{sn}(\eta; k)}. \quad (206)$$

При этом модуль k находится из уравнения

$$2 \frac{K(k)}{K'(k)} = l.$$

Тогда, подставив $\tau = 1/k$ в (27), а найденное ε в формулу (32), получаем из нее искомую длину полки A . Для рассматриваемого примера вычисления дали $A = 1.7281235849$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Weinstein A.* Der Continuitätsbeweis des Abbildungssatzes für Polygone // *Mathem. Zeitschr.* 1924. V. 19. P. 72–84.
2. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. Л.: Физматгиз., 1962.
3. *Коппенфельс В., Штальман Ф.* Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
4. *Gaier D.* Konstruktive Methoden der konformen Abbildung. Springer Tracts in Natural Philosophy. Berlin: Springer-Verlag, 1964. V. 3.
5. *Trefethen L.N., Ed.* Numerical Conformal Mapping. Amsterdam: North-Holland, 1986.
6. *Henrici P.* Applied and computational complex analysis. N.-Y.–London, Sidney, Toronto: Jonh Willey & Sons, 1991. V. 3.
7. *Driscoll T.A., Trefethen L.N.* Schwarz–Christoffel mapping. Cambridge Monographs on Applied and Comput. Math. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. V. 8.
8. *Wegmann R.* Methods for numerical conformal mapping. – In: Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory. V. 2. Ed. by *R. Kühnau*. Amsterdam: Elsevier., 2005. P. 351–477.
9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973.
10. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Т. 2. М.: Эдиториал УРСС, 2002.
11. *Безродных С.И.* Гипергеометрическая функция Лауричеллы $F_D^{(N)}$ и некоторые приложения // *Успехи матем. наук.* 2018. Т. 73. Вып. 6(444). С. 3–94.
12. *Власов В.И.* О вариации отображающей функции при деформировании области // *Докл. АН СССР.* 1984. Т. 275. № 6. С. 1299–1302.
13. *Власов В.И.* Краевые задачи в областях с криволинейной границей. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1987.
14. *Bowman F.* Introduction to Elliptic Functions with Applications. New York: Dover Publications, 1961.
15. *Trefethen L.N.* Numerical computation of the Schwarz–Christoffel transformation // *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1980. V. 1. P. 82–102.
16. *Driscoll T.A.* A MATLAB toolbox for Schwarz–Christoffel mapping // *ACM Trans. Math. Soft.* 1996. V. 22. P. 168–186.
17. *Куфарев П. П.* Об одном методе численного определения параметров в интеграле Шварца–Кристоффеля // *Докл. АН СССР.* 1947. Т. 57. № 6. С. 535–537.
18. *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.

19. *Накипов Н.Н., Насыров С.Р.* Параметрический метод нахождения аксессуарных параметров в обобщенных интегралах Кристоффеля–Шварца // Уч. записки Казанского ун-та. Серия физ.-матем науки. 2016. Т. 158. № 2. С. 201–220.
20. *Gaier D.* Ermittlung des konformen Moduls von Vierecken mit Differenzenmethoden // Numer. Math. 1972. V. 19. P. 179–194.
21. *Wegmann R.* An estimate for crowding in conformal mapping to elongated regions // Complex Variables. 1992. V. 18. P. 193–199.
22. *DeLillo T.K.* The accuracy of numerical conformal mapping methods: a survey of examples and results // SIAM J. Numer. Anal. 1994. V. 31. № 2. P. 788–812.
23. *Безродных С.И., Власов В.И.* Задача Римана–Гильберта в сложной области для модели магнитного пересоединения в плазме // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 3. С. 277–312.
24. *Bezrodnykh S., Bogatyrev A., Goreinov S., Grigor'ev O., Hakula H., Vuorinen M.* On capacity computation for symmetric polygonal condensers // J. Computat. Appl. Mathematics. 2019. V. 631. P. 272–282.
25. *Bezrodnykh S.I., Vlasov V.I.* Asymptotics of the Riemann–Hilbert problem for the Somov magnetic reconnection model for long shock waves // Mathematical Notes. 2021. V. 110. № 5–6. P. 1702–1717.
26. *Власов В.И., Скороходов С.Л.* Аналитическое решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в одном классе полигональных областей // Сообщения по прикл. матем. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1988. 9 с.
27. *Власов В.И., Скороходов С.Л.* О развитии метода Треффца // Докл. АН. 1994. Т. 337. № 6. С. 713–717.
28. *Vlasov V.I., Skorokhodov S.L.* A generalization and development of the Trefftz method // Zeitschr. Angew. Math. Mech. 1996. V. 76. Suppl. 1. P. 547–548.
29. *Trefftz E.* Über die Torsion prismatischer Stäbe von polygonalen Querschnitt // Math. Ann. 1921. B. 82. H. 1/2. S. 97–112.
30. *Франк Ф., Музес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.–Л.: ОНТИ, 1937.
31. *Trefethen L.N., Williams R.J.* Conformal mapping solution of Laplace's equation on a polygon with oblique derivative boundary condition // J. Comput. Appl. Math. 1986. V. 14. P. 227–249.
32. *Schinzinger R., Layra P.A.A.* Conformal Mapping. Methods and Applications. Mineola, New York: Dover Publications, 1991.
33. *Gaier D.* Conformal modules and their computation. — In: Computational Methods and Function Theory 1994 (Peneng), Vol. 5 of Ser. Approx. Decompos., World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1995, p. 159–171.
34. *Li Z.C., Lu T.T.* Singularities and treatment of elliptic boundary value problems // Mathem. Computer Modelling. 2000. V. 31. P. 97–145.
35. *Parantichael N., Stylianopoulos N.S.* Numerical conformal mapping: domain decomposition and the mapping of quadrilaterals. New Jersey–London–Singapore: World Scientific, 2010.
36. *Алгазин С.Д.* Вычислительные эксперименты в задаче на собственные значения для оператора Лапласа в многоугольной области // Матем. моделирование. 2011. Т. 23. № 7. С. 88–96.
37. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
38. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
39. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
40. *Schwarz H.A.* Über die jenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt // J. reine angew. Math. 1873. B. 75. S. 292–335; // Gesammelte mathematische Abhandlungen. Berlin, 1890. B. 2. S. 211–259.
41. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Т. I. Начала теории. М.: Наука, 1967; т. 2. Дальнейшее построение теории. М.: Наука, 1968.
42. *Лебедев Н.А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. М.: Наука, 1975.
43. *Dieudonne J.* Sur les fonctions univalentes // Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris). 1931. V. 192. P. 1148–1150.
44. *Rogosinski W.W.* Über positive harmonische Entwicklungen und typisch–reelle Potenzreihen // Math. Zeitschr. 1932. B. 32. № 1. S. 93–121.
45. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1938.
46. *Милин И.М.* Однолистные функции и ортонормированные системы. М.: Наука, 1971.
47. *de Branges L.* A proof of the Bieberbach conjecture // Acta Mathematica. 1985. V. 154. № 1. P. 137–152.
48. *Caratheodory C.* Über die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der Konformer Abbildung des Innern einer Jordanschen Kurve auf einer Kreis // Math. Ann. 1913. V. 73. S. 305–320. № 1. P. 137–152.
49. *Риордан Дж.* Введение в комбинаторный анализ. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
50. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. Изд. Московского университета. М.: Дрофа, 2004.

**ОБЩИЕ
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

УДК 519.634

 **L^2 -ДИССИПАТИВНОСТЬ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЯВНОЙ СХЕМЫ
НА РАЗНЕСЕННЫХ СЕТКАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ 1D БАРОТРОПНОЙ
ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ¹⁾**© 2022 г. А. А. Злотник^{1, 2, *}, Т. А. Ломоносов^{1, **}¹ 109028 Москва, Покровский б-р, 11, НИУ Высшая школа экономики, Россия² 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия

*e-mail: azlotnik@hse.ru

**e-mail: tlomonosov@hse.ru

Поступила в редакцию 23.03.2022 г.
Переработанный вариант 23.03.2022 г.
Принята к публикации 07.07.2022 г.

Изучается явная двухслойная симметричная по пространству схема на разнесенных сетках с квазигидродинамической регуляризацией для 1D баротропных систем уравнений движения газа. Выводятся как необходимые условия, так и близкие к ним достаточные условия L^2 -диссипативности решений задачи Коши для ее линеаризации на постоянном решении при произвольном фоновом числе Маха M . Применяется спектральный подход и анализируются матричные неравенства, содержащие символы симметричных матриц конвективных и регуляризирующих слагаемых. Рассматриваются случаи с использованием как только искусственной, так и только физической вязкости. Дается сравнение со спектральным условием устойчивости фон Неймана при $M = 0$. Библ. 30. Фиг. 9.

Ключевые слова: диссипативность, линеаризованная разностная схема, разнесенные сетки, регуляризация, 1D баротропные уравнения газовой динамики.

DOI: 10.31857/S0044466922110163

ВВЕДЕНИЕ

Численные методы решения задач газовой динамики относятся к основным в вычислительной математике. Им посвящена обширная литература (см. [1]–[4] и цитированную там литературу). Большой теоретический и прикладной интерес представляют условия устойчивости таких методов, в том числе явных по времени.

Среди этих численных методов существует класс методов, основанных на предварительной регуляризации уравнений газовой динамики. К ним относятся явные методы с симметричной аппроксимацией по пространству, основанные на так называемых квазигазодинамической и квазигидродинамической (КГидД) регуляризациях, которые были успешно использованы для решения широкого круга прикладных задач (см. [5]–[8]). В том числе такие методы применялись для разнообразных задач в баротропной постановке (см., например, [9]–[12]). При этом всегда использовались схемы на неразнесенных сетках, где основные искомые функции определены на одной и той же сетке по пространству. Анализ условий L^2 -диссипативности таких схем в линеаризованной баротропной постановке был недавно выполнен в [13]–[16]. Отметим, что в последние годы развито немало других подходов к построению численных методов решения уравнений газовой динамики, основанных на их различных регуляризациях (см. в том числе [17]–[20]).

Схемы на разнесенных сетках также хорошо известны в вычислительной гидродинамике (см. [21]), и спектральный анализ устойчивости, включая условие фон Неймана, для подобных схем был дан в [22]–[24]. Недавно в [25] впервые была построена и успешно апробирована явная схема на разнесенных сетках с КГидД регуляризацией для 3D уравнений Навье–Стокса–Кана–

¹⁾ Теоретические результаты получены при поддержке Российского научного фонда (проект 19-01-00169). Численные эксперименты выполнены в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2022 г.

Хилларда. Позже в [26] выведен в том числе критерий (необходимое и достаточное условие) L^2 -диссипативности такой схемы, линейризованной на постоянном решении в случае 1D баротропных уравнений Эйлера и Навье–Стокса сжимаемого газа при нулевом фоновом числе Маха $M = 0$. Однако этот результат применим на практике только при малых M .

В настоящей работе изучается L^2 -диссипативность линейризованной на постоянном решении схемы на разнесенных сетках из [25] для указанных 1D систем уравнений, но в существенно более сложном случае любого M . Используется спектральный метод (см., например, [3], [27]), но анализируются не собственные значения несамосопряженной матрицы-символа соответствующего оператора перехода со слоя на слой, а матричные неравенства, содержащие символы симметричных матриц конвективных и регуляризирующих слагаемых. Критерий L^2 -диссипативности выглядит слишком громоздко, и основное внимание уделяется выводу более простых близких друг к другу необходимых условий и достаточных условий (отличающихся не более чем в 4 и ровно в 2 раза). Возможность получения не только достаточных, но и необходимых условий является важным достоинством спектрального метода. При этом как вывод результатов, так и их формулировки оказываются заметно более сложными, чем в случае схем на неразнесенных сетках (см. [14], [15]). Выполненный анализ дает указание на выбор параметров схемы, позволяющий брать максимальный шаг по времени. Для случая уравнений Навье–Стокса (без использования искусственной вязкости) впервые указаны формулы для выбора шага по времени при $M \neq 0$. Существенно, что разработанная техника анализа достаточно общая и применима и в случае регуляризации другого типа (в качестве примера см. [28]).

Естественность анализа именно свойства L^2 -диссипативности схемы связана с тем, что оно соответствует важному с точки зрения качества КГидД регуляризации свойству, доказанному в линейризованной дифференциальной постановке [29], и его выполнение обеспечивает не только устойчивость в L^2 -норме, но и лучшее качество численного решения. Спектральное условие устойчивости фон Неймана служит для этого свойства лишь необходимым условием и само по себе не гарантирует устойчивости в какой-либо норме. В работе выясняется, что оно заметно грубее критерия L^2 -диссипативности уже в случае $M = 0$. К тому же выполненные численные эксперименты в исходной нелинейной постановке показывают, что L^2 -диссипативность является более тонким инструментом по сравнению с условием фон Неймана для того, чтобы добиться устранения или существенного уменьшения осцилляций решения.

1. РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ И РАЗНОСТНАЯ СХЕМА НА РАЗНЕСЕННЫХ СЕТКАХ

КГидД 1D баротропная система уравнений движения вязкого сжимаемого газа без учета внешних сил состоит из следующих уравнений баланса массы и импульса:

$$\partial_t \rho + \partial_x j = 0, \quad \partial_t(\rho u) + \partial_x(ju) + \partial_x p(\rho) = \partial_x \Pi, \quad (1)$$

где $\rho > 0$ и u – искомые плотность и скорость газа, зависящие от (x, t) , $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, а $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x = \partial/\partial x$. Также $p(\rho)$ – давление, $p(\rho) \in C^2(0, +\infty)$, $p'(\rho) > 0$.

Регуляризованный поток массы j , регуляризирующая скорость \hat{w} и вязкое напряжение Π задаются формулами

$$j = \rho(u - \hat{w}), \quad \hat{w} = \tau \left[u \partial_x u + \frac{1}{\rho} \partial_x p(\rho) \right], \quad \Pi = \mu \partial_x u + \Pi^\tau, \quad \Pi^\tau = \rho u \hat{w}. \quad (2)$$

Здесь $\mu \partial_x u$ и Π^τ – вязкие типа Навье–Стокса и регуляризирующее напряжения, $\tau = \tau(\rho, u) > 0$ – параметр регуляризации, $\mu = \mu_{ph} + \mu_{art}$, μ_{ph} и $\mu_{art} = \tau \alpha_s \rho p'(\rho)$ – соответственно коэффициенты полной, физической (суммарной динамической и объемной) и искусственной вязкости, которые могут зависеть от ρ и u . Кроме того, $\alpha_s \geq 0$ – число Шмидта; его можно использовать и как параметр численного метода. Пусть $\nu = \mu/\rho = \nu_{ph} + \tau \alpha_s p'(\rho)$ и $\nu_{ph} = \mu_{ph}/\rho$ – соответствующие коэффициенты кинематической вязкости.

Введем сетку ω_h с узлами $x_k = kh$ и сдвинутую сетку ω_h^* с узлами $x_{k-1/2} = (k - 1/2)h$, $k \in \mathbb{Z}$, с шагом $h > 0$, а также сетку $\bar{\omega}^{\Delta t}$ с узлами $t_m = m\Delta t$, $m \geq 0$ и шагом $\Delta t > 0$.

Введем операторы на функциях v , w , y , заданных на сетках ω_h , ω_h^* , $\bar{\omega}^{\Delta t}$ соответственно:

$$sv_{k-1/2} = \frac{v_{k-1} + v_k}{2}, \quad \delta v_{k-1/2} = \frac{v_k - v_{k-1}}{h}, \quad \overset{\circ}{\delta} v_k = \frac{v_{k+1} - v_{k-1}}{2h},$$

$$s^*w_k = \frac{w_{k-1/2} + w_{k+1/2}}{2}, \quad \delta^*w_k = \frac{w_{k+1/2} - w_{k-1/2}}{h}, \quad \overset{\circ}{\delta}^*w_{k-1/2} = \frac{w_{k+1/2} - w_{k-3/2}}{2h},$$

$$\delta_t y = \frac{y^+ - y}{\Delta t}, \quad y^{+,m} = y^{m+1},$$

где $v_k = v(x_k)$, $w_{k-1/2} = w(x_{k-1/2})$, $y^m = y(t_m)$. Отметим, что $\overset{\circ}{\delta} = \delta^*s = s^*\delta$ и $\overset{\circ}{\delta}^* = \delta s^* = s\delta^*$.

Введем известную первообразную функцию – энтальпию:

$$P_1(\rho) := \int_{r_0}^{\rho} \frac{p'(r)}{r} dr, \quad \rho > 0,$$

где $r_0 > 0$ (см. ее подробное обсуждение в [30]). В [25] была построена явная двухслойная по времени 3D разностная схема с КГидД регуляризацией на разнесенных сетках, принимающая в 1D постановке (1), (2) вид

$$\delta_t \rho + \delta j = 0 \quad \text{на} \quad \omega_h^*, \quad \delta_t[(s^*\rho)u] + \delta^*[(sj)su] + (s^*\rho)\delta^*P_1(\rho) = \delta^*\Pi \quad \text{на} \quad \omega_h, \quad (3)$$

$$j = (s^*\rho)(u - \hat{w}), \quad \hat{w} = \tau[us^*\delta u + \delta^*P_1(\rho)] \quad \text{на} \quad \omega_h, \quad (4)$$

$$\Pi = \mu\delta u + \Pi^\tau, \quad \Pi^\tau = s[u(s^*\rho)\hat{w}] \quad \text{на} \quad \omega_h^*, \quad (5)$$

на $\bar{\omega}^{\Delta t}$. Здесь ρ и u заданы по пространству на разнесенных сетках ω_h^* и ω_h соответственно. Отметим, что нестандартная аппроксимация типа $\partial_x p(\rho) \approx (s^*\rho)\delta^*P_1(\rho)$ была предложена в [30, с. 62] для неразнесенных сеток. В данной схеме пространственная дискретизация неконсервативна по импульсу, зато диссипативна по полной энергии (см. [25]).

2. КРИТЕРИЙ L^2 -ДИССИПАТИВНОСТИ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СХЕМЫ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Выписанную схему линеаризуем на постоянном решении $\rho_* = \text{const} > 0$, $u_* = \text{const}$. Для этого запишем ее решение в виде $\rho = \rho_* + \rho_*\tilde{\rho}$, $u = u_* + c_*\tilde{u}$, подставим в уравнения схемы, отбросим слагаемые второго порядка малости по отношению к обезразмеренным возмущениям $\tilde{\rho}$, \tilde{u} и получим линеаризованную схему

$$\delta_t \tilde{\rho} + u_* \overset{\circ}{\delta}^* \tilde{\rho} + c_* \delta \tilde{u} - \tau_* c_*^2 \delta \delta^* \tilde{\rho} - \tau_* u_* c_* \delta \delta \tilde{u} = 0, \quad (6)$$

$$\delta_t \tilde{u} + c_* \delta^* \tilde{\rho} + u_* \overset{\circ}{\delta} \tilde{u} - \tau_* c_*^2 u_* \delta^* \overset{\circ}{\delta} \tilde{\rho} - \tau_* u_*^2 \delta^2 \tilde{u} - v_* \delta^* \delta \tilde{u} = 0, \quad (7)$$

где $\tau_* = \tau_*(\rho_*, u_*)$, $c_* = \sqrt{p'(\rho_*)}$, $v_* = v_{ph*} + \tau_* \alpha_* c_*^2$ и v_{ph*} – фоновые параметр регуляризации, скорость звука и кинематические вязкости. Заметим, что линеаризованная схема не меняется при замене слагаемого $\delta^*P_1(\rho)$ на более стандартное $(s^*\rho)^{-1}\delta^*p(\rho)$ в (3), (4). Ниже тильды над возмущениями $\tilde{\rho}$, \tilde{u} отбросим для упрощения обозначений.

Пусть $H(\omega)$ – гильбертово пространство комплекснозначных функций, определенных и суммируемых в квадрате на сетке ω . Введем также гильбертово пространство пар функций $(\rho, u) \in \mathbf{H} := H(\omega_h^*) \times H(\omega_h)$ с обычными скалярным произведением и нормой

$$((\rho, u), (\tilde{\rho}, \tilde{u}))_{\mathbf{H}} = h \sum_{k \in \mathbb{Z}} \rho_k \tilde{\rho}_k^* + h \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{k-1/2} \tilde{u}_{k-1/2}^*, \quad \|(\rho, u)\|_{\mathbf{H}} = \sqrt{(\rho, \rho)_{h^*} + (u, u)_h},$$

где $*$ означает комплексное сопряжение.

Перепишем схему (6), (7) в рекуррентном виде

$$\rho^+ = \rho - \Delta t c_* (M \overset{\circ}{\delta}^* \rho + \delta u) + \Delta t \tau_* c_*^2 (\delta \delta^* \rho + M \delta \overset{\circ}{\delta} u), \tag{8}$$

$$u^+ = u - \Delta t c_* (\delta^* \rho + M \overset{\circ}{\delta} u) + \Delta t \tau_* c_*^2 (M \delta^* \overset{\circ}{\delta}^* \rho + M^2 \overset{\circ}{\delta}^2 u + \tilde{v}_* \delta^* \delta u) \tag{9}$$

с безразмерными величинами $M := u_*/c_*$ и $\tilde{v}_* := v_*/(\tau_* c_*^2) = v_{ph^*}/(\tau_* c_*^2) + \alpha_s$; при этом $|M|$ – фоновое число Маха.

Поставим вопрос об условиях выполнения для решения схемы (8), (9) оценки

$$\sup_{m \geq 0} \|(\rho^m, u^m)\|_{\mathbf{H}} \leq \|(\rho^0, u^0)\|_{\mathbf{H}} \quad \forall (\rho^0, u^0) \in \mathbf{H}. \tag{10}$$

Изучать их достаточно естественно, поскольку соответствующая оценка доказана для решения задачи Коши для линеаризованной системы уравнений (1) (см. [29]). Более того, напомним, что оценка (10) означает, что $\sup_{m \geq 0} \|\mathbf{G}^m\|_{\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}} \leq 1$, где $\mathbf{G} = \mathbf{I} - \Delta t c_* \mathbf{B} + \Delta t \tau_* c_*^2 \mathbf{A}$ – оператор перехода со слоя на слой с действующими в \mathbf{H} единичным оператором \mathbf{I} и операторами конвективных и вязких слагаемых \mathbf{B} и \mathbf{A} такими, что

$$\mathbf{B}(\rho, u) = (M \overset{\circ}{\delta}^* \rho + \delta u, \delta^* \rho + M \overset{\circ}{\delta} u), \quad \mathbf{A}(\rho, u) = (\delta \delta^* \rho + M \delta \overset{\circ}{\delta} u, M \delta^* \overset{\circ}{\delta}^* \rho + M^2 \overset{\circ}{\delta}^2 u + \tilde{v}_* \delta^* \delta u).$$

Эквивалентно, $\|\mathbf{G}\|_{\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}} \leq 1$. Поэтому, в свою очередь, оценка (10) эквивалентна важному свойству L^2 -диссипативности схемы

$$\|(\rho^m, u^m)\|_{\mathbf{H}} \leq \|(\rho^{m-1}, u^{m-1})\|_{\mathbf{H}} \leq \dots \leq \|(\rho^0, u^0)\|_{\mathbf{H}} \quad \forall (\rho^0, u^0) \in \mathbf{H}, \quad m \geq 1.$$

Замечание 1. Для более полного анализа устойчивости нетрудно рассмотреть неоднородный вариант схемы (6), (7) с заменой нулей в ее правых частях на заданные функции f_ρ, f_u соответственно. А именно, при $\|\mathbf{G}\|_{\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}} \leq 1$ верна оценка

$$\max_{0 \leq m \leq \bar{m}} \|(\rho^m, u^m)\|_{\mathbf{H}} \leq \|(\rho^0, u^0)\|_{\mathbf{H}} + \Delta t \sum_{0 \leq m \leq \bar{m}-1} \|(f_\rho^m, f_u^m)\|_{\mathbf{H}} \quad \forall \bar{m} \geq 1.$$

Пусть Δt и τ_* задаются стандартными формулами (см. [6], [7]):

$$\Delta t = \frac{\beta h}{c_*}, \quad \tau_* = \frac{\alpha h}{c_*} \tag{11}$$

с параметрами $\beta > 0$ и $\alpha > 0$. В данном разделе дается необходимое и достаточное условие на β в зависимости от α для выполнения оценки (10) в случае $\mu_{ph} = 0$.

Для этого в соответствии со спектральным подходом (см., например, [3], [27]) подставим в уравнения (8), (9) частное решение вида

$$\rho_{k-1/2}^m(\xi) = e^{i(k-1/2)\xi} w_\rho^m(\xi), \quad u_k^m(\xi) = e^{ik\xi} w_u^m(\xi), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad m \geq 0,$$

где \mathbf{i} – мнимая единица и $\xi \in [0, 2\pi]$ – параметр. Функция $e^{ik\xi}$ является собственной для операторов $\overset{\circ}{\delta}$ и $-\delta^* \delta$, а $e^{i(k-1/2)\xi}$ – операторов $\overset{\circ}{\delta}^*$ и $-\delta \delta^*$, и они отвечают соответственно одним и тем же собственным значениям $\mathbf{i} h^{-1} \sin \xi = \mathbf{i} 2h^{-1} s_\xi c_\xi$ и $4h^{-2} s_\xi^2$, где $s_\xi = \sin(\xi/2)$ и $c_\xi = \cos(\xi/2)$. Кроме того, имеем

$$\delta e^{ik\xi} = \mathbf{i} \frac{2}{h} s_\xi e^{i(k-1/2)\xi}, \quad \delta^* e^{i(k-1/2)\xi} = \mathbf{i} \frac{2}{h} s_\xi e^{ik\xi}.$$

Используя эти формулы и (11), получим рекуррентные формулы

$$w_\rho^+ = w_\rho - \beta [2\mathbf{i} s_\xi (M c_\xi w_\rho + w_u) + 4\alpha s_\xi^2 (w_\rho + M c_\xi w_u)],$$

$$w_u^+ = w_u - \beta \{ 2\mathbf{i} s_\xi (w_\rho + M c_\xi w_u) + 4\alpha s_\xi^2 [M c_\xi w_\rho + (M^2 c_\xi^2 + \tilde{v}_*) w_u] \}.$$

Введем вектор-столбец $\mathbf{w} = (w_p, w_u)^T$ и перейдем к матричной форме записи

$$\mathbf{w}^+ = \mathbf{w} - \beta \left[2i s_\xi \begin{pmatrix} M c_\xi & 1 \\ 1 & M c_\xi \end{pmatrix} + 4\alpha s_\xi^2 \begin{pmatrix} 1 & M c_\xi \\ M c_\xi & M^2 c_\xi^2 + \alpha_s \end{pmatrix} \right] \mathbf{w}$$

при $\mu_{ph} = 0$. Ее удобно переписать в компактном виде:

$$\mathbf{w}^+ = G(q)\mathbf{w}$$

с использованием 2×2 матриц

$$G(q) = I - \beta F(q), \quad F(q) = 2i\sqrt{\sigma}B(q) + 4\alpha\sigma A(q), \tag{12}$$

$$B(q) = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{q} & 1 \\ 1 & \pm\sqrt{q} \end{pmatrix}, \quad A(q) = \begin{pmatrix} 1 & \pm\sqrt{q} \\ \pm\sqrt{q} & q + \alpha_s \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $G(q)$ – символ оператора \mathbf{G} , $B(q)$ и $A(q)$ пропорциональны символам операторов \mathbf{B} и \mathbf{A} , I – единичная матрица 2-го порядка, $q = q(\xi) = M^2 \cos^2(\xi/2)$, $\sigma = \sin^2(\xi/2)$, причем $\sigma = 1 - q/M^2$ при $M \neq 0$, а $\pm = (\text{sgn } M) \text{sgn } \cos(\xi/2)$.

Теорема 1. Пусть $\mu_{ph} = 0$ и $M \neq 0$. Для L^2 -диссипативности схемы (6), (7) необходимо и достаточно выполнение матричного неравенства

$$\frac{1}{\beta} A(q) \geq Q(q) := 2\alpha\sigma A^2(q) + \frac{1}{2\alpha} B^2(q) + i\sqrt{\sigma}[A(q), B(q)] \tag{14}$$

для всех $0 \leq q \leq M^2$, где $Q(q)$ – эрмитова матрица, $Q(q) \geq 0$ при $0 \leq q \leq M^2$, а $[A, B] = AB - BA$. При $M = 0$ (т.е. $u_* = 0$) результат сохраняет силу с заменой параметра $0 \leq q \leq M^2$ на $0 \leq \sigma \leq 1$.

Доказательство. Согласно [26, лемма 1], свойство диссипативности (10) эквивалентно спектральной оценке

$$\max_{0 \leq q \leq M^2} \lambda_{\max}(G^*(q)G(q)) \leq 1, \tag{15}$$

где $\lambda_{\max}(C)$ – максимальное собственное значение эрмитовой матрицы C .

Подобно [15, теорема 1], эта оценка эквивалентна матричному неравенству $G^*G \leq I$, т.е. неравенству $\beta F^*F \leq F + F^*$, при всех $0 \leq q \leq M^2$. Для $F = F_R + iF_I$ с эрмитовыми матрицами $F_R = 4\alpha\sigma A(q)$ и $F_I = 2\sqrt{\sigma}B(q)$ оно принимает вид

$$\beta(F_R^2 + F_I^2 + i[F_R, F_I]) \leq 2F_R \quad \forall 0 \leq q \leq M^2$$

и после сокращения на $8\alpha\sigma$ при $\sigma \neq 0$ (т.е. $q \neq M^2$) переходит в (14) с $Q = (8\alpha\sigma)^{-1}F^*F \geq 0$. По непрерывности (14) выполняется и при $q = M^2$.

В случае $M = 0$ имеем $q = 0$, и за параметр следует взять $0 \leq \sigma \leq 1$.

Укажем для дальнейшего, что верны формулы

$$A^2 = \begin{pmatrix} q+1 & \pm\sqrt{q}(q + \alpha_s + 1) \\ \pm\sqrt{q}(q + \alpha_s + 1) & q + (q + \alpha_s)^2 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} q+1 & \pm 2\sqrt{q} \\ \pm 2\sqrt{q} & q+1 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$i[A, B] = i(q + \alpha_s - 1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

По свойствам спектральной нормы матриц имеем

$$\lambda_{\max}(G^*(q)G(q)) = \max_{\mathbf{w} \in \mathbb{C}^2, \mathbf{w} \neq 0} \frac{\|G(q)\mathbf{w}\|_{\mathbb{C}^2}^2}{\|\mathbf{w}\|_{\mathbb{C}^2}^2} = \|G(q)\|_2^2.$$

Поскольку $|\lambda(G)| \leq \|G\|_2$ для собственных значений $\lambda(G)$ любой матрицы G , то *спектральное условие устойчивости фон Неймана*

$$|\lambda(G(q))| \leq 1 \quad \forall \lambda(G(q)), \quad 0 \leq q \leq M^2, \tag{18}$$

следует из спектральной оценки (15) и поэтому служит лишь необходимым условием L^2 -диссипативности. При этом оно не гарантирует устойчивость схемы в какой-либо норме. Хотя условия типа (18) широко используются в литературе (см. в том числе для разнесенных сеток [22], [24]), убедимся, что здесь оно оказывается слишком грубым в сравнении с (15) даже в относительно простом частном случае $M = 0$.

Теорема 2. Пусть $\mu_{\text{ph}} = 0$ и $M = 0$. Спектральное условие устойчивости фон Неймана (18) для схемы (6), (7) выполнено, если и только если

$$\beta \leq \beta_{vN} := \begin{cases} \frac{(\alpha_s + 1)\alpha}{4\alpha_s\alpha^2 + 1} & \text{при } |\alpha_s - 1|\alpha \leq 1, \\ \frac{(\alpha_s + 1)\alpha - \sqrt{(\alpha_s - 1)^2\alpha^2 - 1}}{4\alpha_s\alpha^2 + 1} = \frac{1}{(\alpha_s + 1)\alpha + \sqrt{(\alpha_s - 1)^2\alpha^2 - 1}} & \text{иначе.} \end{cases} \tag{19}$$

Доказательство. В условиях теоремы $q = 0$ и согласно формулам (12), (13) матрицу G можно записать в виде

$$G = \begin{pmatrix} 1 - \omega_1 & i\omega_2 \\ i\omega_2 & 1 - \alpha_s\omega_1 \end{pmatrix}, \quad \omega_1 := 4\alpha\sigma\beta, \quad \omega_2 := 2\sqrt{\sigma}\beta.$$

Аналогичная матрица изучалась в [14, теорема 1], где показано, что при $\alpha_s\omega_1^2 + \omega_2^2 > 0$ условие (18) для нее сводится к выполнению двух неравенств:

$$\alpha_s\omega_1^2 + \omega_2^2 - (\alpha_s + 1)\omega_1 \leq 0, \quad \alpha_s\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2(\alpha_s + 1)\omega_1 + 4 \geq 0.$$

Если же $\alpha_s\omega_1^2 + \omega_2^2 = 0$, то $\omega_2 = 0$, $\sigma = 0$, $\omega_1 = 0$, и тогда $G = I$, а последние неравенства выполнены. Таким образом, должны выполняться неравенства

$$4\beta\sigma[4\alpha_s\alpha^2\sigma + 1]\beta - (\alpha_s + 1)\alpha \leq 0 \quad \forall 0 \leq \sigma \leq 1, \tag{20}$$

$$r_2(\sigma) := 4\alpha_s\alpha^2\beta^2\sigma^2 - \beta[2(\alpha_s + 1)\alpha - \beta]\sigma + 1 \geq 0 \quad \forall 0 \leq \sigma \leq 1. \tag{21}$$

Неравенство (20) приводит к условию

$$\beta \leq \frac{(\alpha_s + 1)\alpha}{4\alpha_s\alpha^2 + 1}. \tag{22}$$

В случае $\alpha_s > 0$ в неравенстве (21) вершина квадратного трехчлена $r_2(\sigma)$ такова:

$$\sigma_v = \frac{2(\alpha_s + 1)\alpha - \beta}{8\alpha_s\alpha^2\beta}.$$

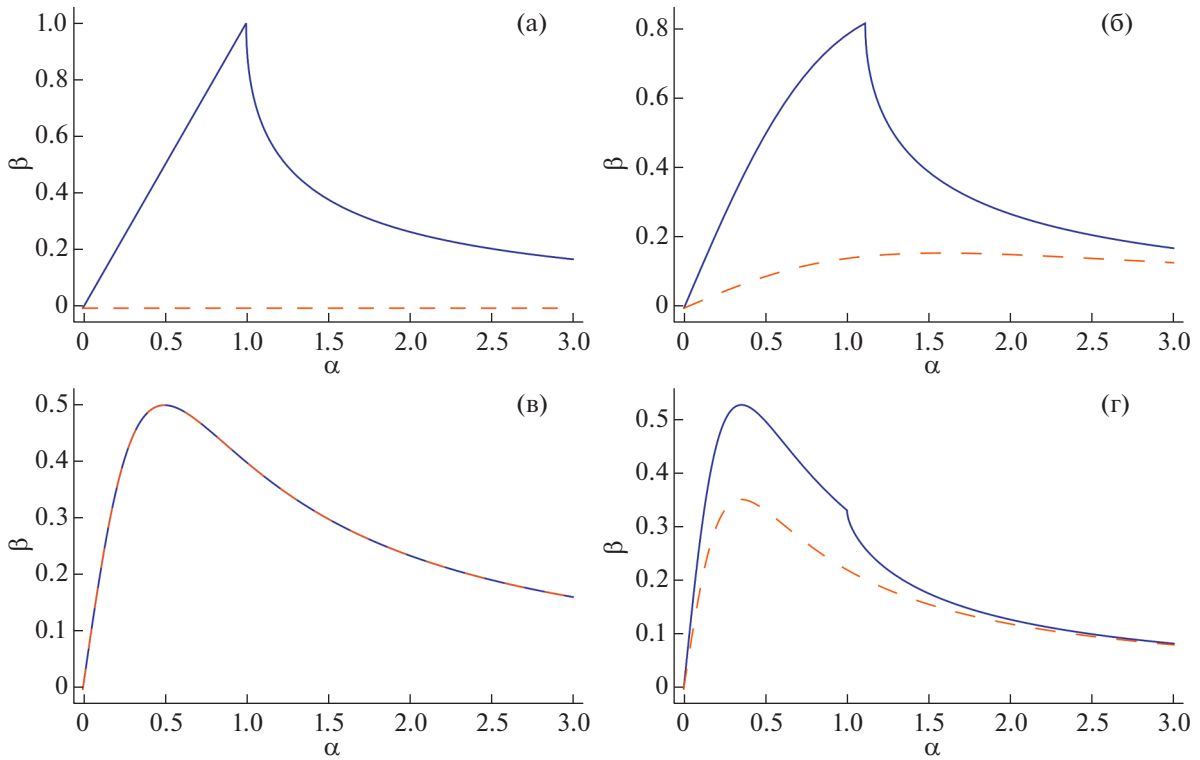
Свойство $\sigma_v > 1$ эквивалентно неравенству $\beta < (\alpha_s + 1)\alpha / (4\alpha_s\alpha^2 + 0.5)$, выполненному в силу (22). Поэтому $r_2(\sigma)$ убывает на $[0, 1]$, и неравенство (21) сводится к неравенству

$$r_2(1) = (4\alpha_s\alpha^2 + 1)\beta^2 - 2(\alpha_s + 1)\alpha\beta + 1 \geq 0. \tag{23}$$

В случае $\alpha_s = 0$ неравенство (21) упрощается до $\beta(2\alpha - \beta)\sigma \leq 1$ для всех $0 \leq \sigma \leq 1$, а поскольку здесь $\beta \leq \alpha$ в силу (22), то и до неравенства $\beta(2\alpha - \beta) \leq 1$, совпадающего с (23) при $\alpha_s = 0$.

Детерминант квадратного трехчлена относительно β в левой части неравенства (23) равен $4[(\alpha_s - 1)^2\alpha^2 - 1]$, а его вершина совпадает с правой частью (22). Поэтому с учетом условия (22) неравенство (23) означает, что

$$\beta \leq \frac{(\alpha_s + 1)\alpha - \sqrt{(\alpha_s - 1)^2\alpha^2 - 1}}{4\alpha_s\alpha^2 + 1} \quad \text{при } |\alpha_s - 1|\alpha > 1.$$



Фиг. 1. Графики β_{vN} (сплошная) и β_{cr} (штриховая) в зависимости от α при: (а) $\alpha_s = 0$, (б) $\alpha_s = 1/10$, (в) $\alpha_s = 1$, (г) $\alpha_s = 2$.

В сочетании с (22) это приводит к условию (19).

Проанализировав максимумы каждой из функций в (19), можно показать, что $\beta_{vN} \leq 1$.

При $M = 0$ в [26] был дан критерий L^2 -диссипативности схемы (6), (7), имеющий вид

$$\beta \leq \beta_{cr} := \frac{2 \min\{\alpha_s, 1\} \alpha}{4\alpha_s \alpha^2 + 1}. \tag{24}$$

Учитывая, что $(\alpha_s + 1) - |\alpha_s - 1| = 2 \min\{\alpha_s, 1\}$, легко видеть, что $\beta_{cr} < \beta_{vN}$ при всех $\alpha_s \geq 0$, $\alpha_s \neq 1$ либо $\beta_{cr} = \beta_{vN}$ при $\alpha_s = 1$ (для всех $\alpha > 0$) (см. также фиг. 1). В том числе при $\alpha_s = 0$ имеем $\beta_{cr} = 0$ и L^2 -диссипативность отсутствует, тогда как $\beta_{vN} = \alpha - \sqrt{\max\{\alpha^2 - 1, 0\}} > 0$. Для схем с регуляризациями на неразнесенных сетках различие между условиями, соответствующими (19) и (24), было установлено в (14). Однако здесь для схемы на разнесенных сетках оно более существенно, а поведение β_{vN} заметно сложнее.

Указанное совпадение при $\alpha_s = 1$ не случайно. В этом частном случае матрица $G = G(q)$ обладает свойством $G^*G = GG^*$, т.е. является нормальной, поэтому она унитарно подобна диагональной матрице, и максимальный из $|\lambda(G)|$ равен $\|G\|_2$. Свойство $G^*G = GG^*$ эквивалентно свойству $F^*F = F^*$ и далее $[A, B] = AB - BA = 0$ (при $\sigma \neq 0$) (см. (17)).

Пусть $|A|$ – детерминант матрицы A , а $z = z_R + iz_I$ – стандартная запись числа $z \in \mathbb{C}$. Ниже для применения теоремы 1 существен следующий алгебраический критерий.

Лемма 1. Рассмотрим произвольные вещественную симметричную и комплексную эрмитову матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a \\ a & a_2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 & q \\ q^* & q_2 \end{pmatrix}$$

с любым $q \in \mathbb{C}$. Пусть также $A > 0, Q \geq 0$. Неравенство $\zeta A \geq Q$ с параметром $\zeta \geq 0$ выполнено, если и только если

$$\zeta \geq \frac{b + \sqrt{b^2 - 4|A||Q|}}{2|A|}, \tag{25}$$

где $b := a_1q_2 + a_2q_1 - 2aq_R$. В этом неравенстве $b^2 \geq 4|A||Q|$, $a b > 0$ при $Q \neq 0$.

Доказательство. По критериям Сильвестра положительной определенности и неотрицательной определенности матриц имеем

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad |A| > 0, \quad q_1 \geq 0, \quad q_2 \geq 0, \quad |Q| = q_1q_2 - |q|^2 \geq 0.$$

При $Q = 0$ неравенство (25) просто означает, что $\zeta \geq 0$. Пусть ниже $Q \neq 0$, тогда $q_1 > 0$ либо $q_2 > 0$.

По второму из упомянутых критериев неравенство $\zeta A - Q \geq 0$ эквивалентно системе неравенств

$$\zeta a_1 - q_1 \geq 0, \quad \zeta a_2 - q_2 \geq 0, \quad |\zeta A - Q| \geq 0.$$

С использованием введенной выше величины b их можно переписать в виде

$$\zeta \geq \frac{q_1}{a_1}, \quad \zeta \geq \frac{q_2}{a_2}, \tag{26}$$

$$p_2(\zeta) := |\zeta A - Q| = (\zeta a_1 - q_1)(\zeta a_2 - q_2) - (\zeta a - q)(\zeta a - q^*) = |A|\zeta^2 - b\zeta + |Q| \geq 0. \tag{27}$$

Вычислим величину

$$\begin{aligned} p_2\left(\frac{q_1}{a_1}\right) &= (a_1a_2 - a^2)\left(\frac{q_1}{a_1}\right)^2 - (a_1q_2 + a_2q_1 - 2aq_R)\frac{q_1}{a_1} + q_1q_2 - |q|^2 = \\ &= -q_1^2 \left[\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{|q|}{q_1}\right)^2 - 2\frac{a}{a_1}\frac{q_R}{q_1} \right] = -q_1^2 \left[\left(\frac{a}{a_1} - \frac{q_R}{q_1}\right)^2 + \left(\frac{q_I}{q_1}\right)^2 \right] \leq 0 \end{aligned} \tag{28}$$

при $q_1 > 0$. Аналогично проверяется формула

$$p_2\left(\frac{q_2}{a_2}\right) = -q_2^2 \left[\left(\frac{a}{a_2} - \frac{q_R}{q_2}\right)^2 + \left(\frac{q_I}{q_2}\right)^2 \right] \leq 0 \tag{29}$$

при $q_2 > 0$. Отсюда следует, что квадратный трехчлен $p_2(\zeta)$ имеет корень $\zeta_1 > 0$, и поэтому его детерминант $b^2 - 4|A||Q| \geq 0$. Более того, второй корень ζ_2 тоже положителен при $|Q| > 0$ либо равен 0 при $|Q| = 0$ (так как $|A|\zeta_1\zeta_2 = |Q|$). Тем самым $b = |A|(\zeta_1 + \zeta_2) > 0$.

Теперь квадратное неравенство (27) в сочетании с (26) приводит к условию (25), где справа стоит больший из корней ζ_1, ζ_2 .

Замечание 2. Как правило, $\Delta := b^2 - 4|A||Q| > 0$ при $Q \neq 0$, за исключением специального случая. А именно, $\Delta = 0$ при $Q \neq 0$ означает, что $\zeta_1 = \zeta_2$. Тогда при $q_1 = 0$ либо $q_2 = 0$ имеем $\Delta = b^2 > 0$, откуда $q_1 > 0$ и $q_2 > 0$. Тогда в силу (28) имеем $p_2(q_1/a_1) = 0$, и поэтому $a/a_1 = q_R/q_1$ и $q_I = 0$. Аналогично, в силу (29) имеем $a/a_2 = q_R/q_2$, и далее $q_R(a_1/q_1 - a_2/q_2) = 0$. Если $q_R \neq 0$, то $a_1/q_1 - a_2/q_2 = 0$. Если $q_R = 0$, то $a = 0$ и $\Delta = (a_1q_2 + a_2q_1)^2 - 4a_1a_2q_1q_2 = (a_1q_2 - a_2q_1)^2$, и при $\Delta = 0$ опять $a_1/q_1 - a_2/q_2 = 0$. Эквивалентно, $a_2/a_1 = q_2/q_1 = \theta > 0$. Таким образом, приходим к матрицам

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a \\ a & \theta a_1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 & q \\ q & \theta q_1 \end{pmatrix}, \quad a = \frac{a_1}{q_1}q, \quad q_1 > 0, \quad q \in \mathbb{R}$$

(здесь $A > 0$ и $Q \geq 0$ при $a_1 > 0, \theta > 0, |q| < \sqrt{\theta}q_1$). Для таких матриц имеем

$$\Delta = (2\theta a_1q_1 - 2aq)^2 - 4(\theta a_1^2 - a^2)(\theta q_1^2 - q^2) = 4\theta(aq_1 - a_1q)^2 = 0.$$

Следствие 1. В условиях леммы 1 для выполнения неравенства $\zeta A \geq Q$ с $\zeta \geq 0$ необходимо, чтобы $\zeta \geq b/(2|A|)$, и достаточно, чтобы $\zeta \geq b/|A|$. В эти условия не входит $|Q|$.

В самом деле, в силу свойств $b^2 - 4|A||Q| \geq 0$, $|A||Q| \geq 0$ и $b \geq 0$ результат следует из оценок $b \leq b + \sqrt{b^2 - 4|A||Q|} \leq 2b$.

3. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ L^2 -ДИССИПАТИВНОСТИ

Следующий результат можно считать основным в данной работе.

Теорема 3. Пусть $\mu_{ph} = 0$, $\alpha_s > 0$ и $M \neq 0$. Для L^2 -диссипативности схемы (6), (7) необходимо выполнение неравенства

$$\frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{\beta_{\text{нec}}} := \max \left\{ \bar{b}_1 \alpha, \frac{\bar{b}_2}{4\alpha_s \alpha} \right\} \quad (30)$$

и достаточно выполнение неравенства

$$\frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{\beta_{\text{сuf}}} := 2\bar{b}_1 \alpha + \frac{\bar{b}_2}{2\alpha_s \alpha}, \quad (31)$$

где

$$\bar{b}_1 = \bar{b}_1(\alpha_s, M^2) := \begin{cases} \alpha_s + 1 & \text{при } M^2 \leq \alpha_s + 1, \\ \frac{1}{4M^2} (M^2 + \alpha_s + 1)^2 & \text{при } M^2 \geq \alpha_s + 1, \end{cases} \quad (32)$$

$$\bar{b}_2 = \bar{b}_2(\alpha_s, M^2) := \begin{cases} \alpha_s + 1 & \text{при } \alpha_s \leq 2, \quad M^2 \leq 2 - \alpha_s, \\ (M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1) & \text{иначе.} \end{cases} \quad (33)$$

Доказательство. В силу теоремы 1 и леммы 1 в применении к матрицам $A(q)$ и $Q(q)$, введенным в (13) и (14), для L^2 -диссипативности схемы (6), (7) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{2\alpha_s} \max_{0 \leq q \leq M^2} (b + \sqrt{b^2 - 4\alpha_s |Q(q)|}), \quad (34)$$

где $b = a_{11}q_{22} + a_{22}q_{11} - 2a_{12}q_{12R}$ и учтено, что $|A(q)| = \alpha_s$.

Из формул (13) и (16) следует, что

$$\begin{aligned} b &= 2\alpha\sigma[q + (q + \alpha_s)^2] + \frac{1}{2\alpha}(q + 1) + (q + \alpha_s) \left[2\alpha\sigma(q + 1) + \frac{1}{2\alpha}(q + 1) \right] - \\ &- 2\sqrt{q} \left[2\alpha\sigma\sqrt{q}(q + \alpha_s + 1) + \frac{1}{2\alpha}2\sqrt{q} \right] = 2\alpha\{\sigma[q + (q + \alpha_s)^2 + (q + \alpha_s)(q + 1) - \\ &- 2q(q + \alpha_s + 1)]\} + \frac{1}{2\alpha}[(q + 1)(q + \alpha_s + 1) - 4q] = 2\alpha\alpha_s b_1(q) + \frac{1}{2\alpha} b_2(q) \end{aligned}$$

с квадратными трехчленами относительно q (зависящими также от α_s и M)

$$b_1(q) = \sigma(q + \alpha_s + 1) = \left(1 - \frac{q}{M^2} \right) (q + \alpha_s + 1), \quad b_2(q) = (q - 1)^2 + \alpha_s(q + 1).$$

По следствию 1 необходимым условием выполнения критерия (34) служат неравенства

$$\frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{2\alpha_s} \max_{0 \leq q \leq M^2} b \geq \max \left\{ \alpha \bar{b}_1, \frac{1}{4\alpha_s \alpha} \bar{b}_2 \right\} \quad \text{с} \quad \bar{b}_k := \max_{0 \leq q \leq M^2} b_k(q), \quad k = 1, 2.$$

Корнями квадратного трехчлена $b_1(q)$ являются $q = -\alpha_s - 1$ и $q = M^2$. Он является вогнутой функцией по q и $b_1(0) = \alpha_s + 1$. Его вершиной является $q_{1v} = 0.5M^2[1 - (\alpha_s + 1)/M^2]$, и

$$b_1(q_{1v}) = \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha_s + 1}{M^2} \right) \right] \left(\frac{M^2}{2} - \frac{\alpha_s + 1}{2} + \alpha_s + 1 \right) = \frac{1}{4M^2} (M^2 + \alpha_s + 1)^2.$$

Поскольку $q_{1v} \geq 0$ при $M^2 \geq \alpha_s + 1$, то верна формула (32).

Имеем $b_2(q) = q^2 + (\alpha_s - 2)q + (\alpha_s + 1)$. Его вершиной служит $q_{2v} = 1 - \alpha_s/2$. В случае $\alpha_s \geq 2$ данный $b_2(q)$ возрастает по $q \geq 0$, и поэтому $\bar{b}_2 = b_2(M^2) = (M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)$. В случае $\alpha_s < 2$ имеем $q_{2v} > 0$, и тем самым $\bar{b}_2 = b_2(0) = \alpha_s + 1$ при $M^2 \leq 2q_{2v}$ либо $\bar{b}_2 = b_2(M^2)$ при $M^2 \geq 2q_{2v}$. В итоге это приводит к формуле (33).

Достаточное условие (31) выполнения критерия (34) вытекает из следствия 1 и оценки $\max_{0 \leq q \leq M^2} b/\alpha_s \leq 2\bar{b}_1\alpha + \bar{b}_2/(2\alpha_s\alpha)$.

Замечание 3. При $M = 0$ имеем $q = 0$ и $b_1 = \sigma(\alpha_s + 1)$ и $b_2 = \alpha_s + 1$. В этом случае следует брать максимум по $0 \leq \sigma \leq 1$, и теорема сохраняет силу, более того, необходимое условие можно усилить до

$$\frac{1}{\beta} \geq \bar{b}_1\alpha + \frac{\bar{b}_2}{4\alpha_s\alpha} = (\alpha_s + 1) \left(\alpha + \frac{1}{4\alpha_s\alpha} \right).$$

Функции $\beta_{\text{нec}}$ и β_{suf} непрерывны в октанте $\alpha > 0$, $\alpha_s \geq 0$, $M^2 \geq 0$, не возрастают по M^2 (так как по определению \bar{b}_1 и \bar{b}_2 не убывают по M^2) и стремятся к 0 при $\alpha \rightarrow +0$ и $\alpha \rightarrow +\infty$. Существенно, что в силу указанного невозрастания выполнение условий (30) или (31) при некотором $M = M_0 > 0$ влечет их выполнение при всех $0 \leq |M| \leq M_0$ (при фиксированных α и α_s). Обратим внимание на то, что $0.25\beta_{\text{нec}} \leq \beta_{\text{suf}} \leq 0.5\beta_{\text{нec}}$.

На фиг. 2 даны типичные графики $\beta_{\text{нec}}$ и β_{suf} в зависимости от α и $|M|$ при трех характерных значениях α_s .

Выполненные численные эксперименты в целом неплохо соотносятся с приведенным выше теоретическим анализом. Для линейаризованной задачи при $M = 0$ уже простые эксперименты показывают, что даже небольшое нарушение условия устойчивости фон Неймана обычно приводит к разрушению численного решения. С другой стороны, они подтверждают, что это условие не обеспечивает L^2 -диссипативности, как и предсказывает теория (детали для краткости опускаем). Последнее не столь критично для линейаризованной задачи. Тем не менее выполнение этого свойства оказывается важным в исходной нелинейной постановке для обеспечения лучшего качества численных решений с целью устранения или существенного уменьшения численных осцилляций, хотя обычно лишь достаточно сильные из них приводят к полному разрушению решений.

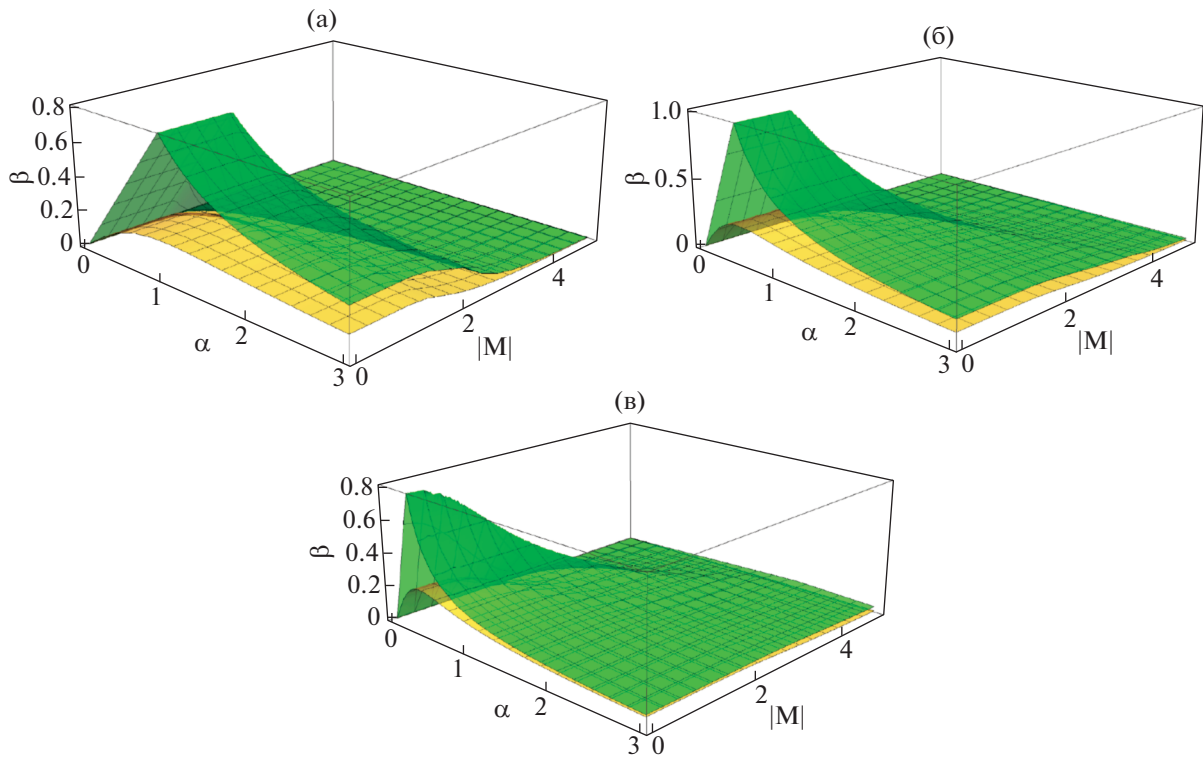
В нелинейной постановке возьмем $p(\rho) = \rho^\gamma$ с $\gamma = 1.4$. Пусть

$$\Delta t = \frac{\hat{\beta}h}{\max_{k \in \mathbb{Z}} (c_k + |u_k|)}, \quad \tau = \frac{\alpha h}{c}, \quad c = \sqrt{p'(s^*\rho)},$$

подобно (11). Рассмотрим две задачи Римана. В примере 1 выберем начальные данные

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 1.4, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}, \quad u_0(x) = 0,$$

и численно решим задачу до момента времени $t_{\text{fin}} = 0.04$. Тогда число Маха $|M|$ варьируется от 0 до ≈ 0.1777 и тем самым невелико.



Фиг. 2. Графики $\beta_{\text{нес}}$ (верхний) и β_{suf} (нижний) в зависимости от α и $|M|$ при: (а) $\alpha_s = 1/4$, (б) $\alpha_s = 1$, (в) $\alpha_s = 4$.

Возьмем $\alpha = 0.25$, $\hat{\beta} = 0.05$ и $h = 1/150$. На фиг. 3 даны графики решения ρ и u по пространству при $t = t_{\text{fin}}$ и график по времени его полной пространственной вариации

$$V(\rho, u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\rho_{k+1/2} - \rho_{k-1/2}| + |u_k - u_{k-1}|.$$

При $\alpha_s = 1$ численное решение не имеет видимых осцилляций, а $V(\rho, u)$ является лишь слабо не-монотонной и стремится к пределу. Отметим, что в этом случае $\beta_{\text{suf}} = 0.2$. Но при $\alpha_s = 0$ осцилляции $\rho, u, V(\rho, u)$ заметны, и несмотря на то, что $\hat{\beta} = 0.05$ много меньше $\beta_{VN} = 0.25$ (см. (19)), качество численного решения низкое.

В примере 2 используем другие начальные данные:

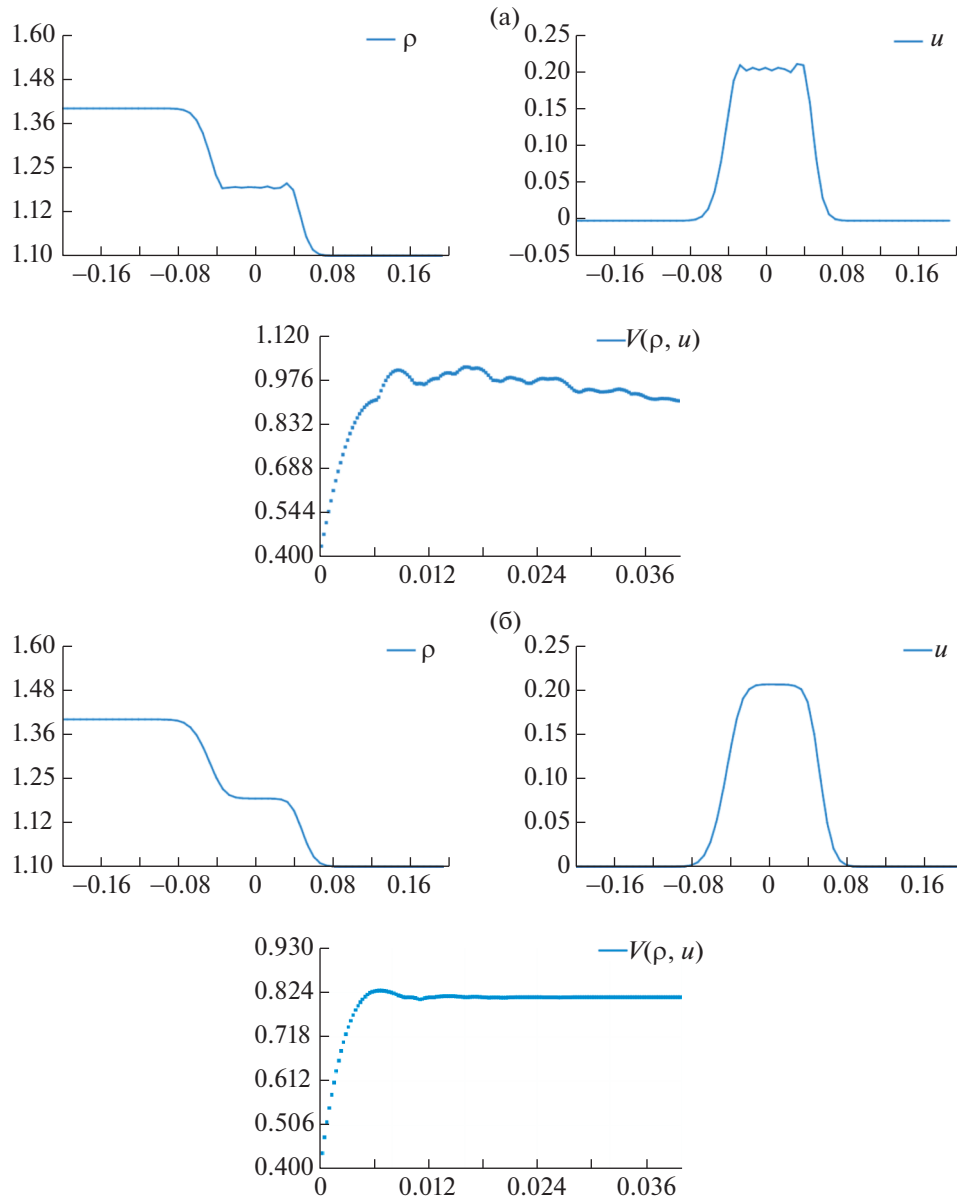
$$\rho_0(x) = \begin{cases} \rho_L = 1, & x < 0, \\ \rho_R = 1.1, & x > 0, \end{cases} \quad u_0(x) = \begin{cases} -0.5\sqrt{p'(\rho_L)} \approx -0.5916, & x < 0, \\ 0.5\sqrt{p'(\rho_R)} \approx 0.6021, & x > 0, \end{cases}$$

и прежде t_{fin} . Здесь в расчете число Маха варьируется от 0 до 0.5 и уже не мало.

Возьмем прежние α_s, h , а $\hat{\beta} = 0.3$. На фиг. 4б при $\alpha_s = 1$ у ρ, u нет осцилляций, а $V(\rho, u)$ возрастает и стремится к пределу. Напротив, на фиг. 4а при $\alpha_s = 0$ все величины $\rho, u, V(\rho, u)$ осциллируют, и поэтому этот выбор α_s намного хуже, что и предсказывает данный выше анализ диссипативности в контрасте с условием фон Неймана (см. фиг. 1а).

Также в ряде численных экспериментов с ударными волнами нами было отмечено, что значение $\beta = \beta_{\text{suf}}$ позволяет неплохо разделять слабо- или неосциллирующие решения от осциллирующих; детали для краткости опускаем.

В доказательстве теоремы 3 можно было найти $\max_{0 \leq q \leq M^2} b$ и тем самым несколько уточнить результат, сблизив необходимое и достаточное условия подобно [15]. Однако соответствующее вы-

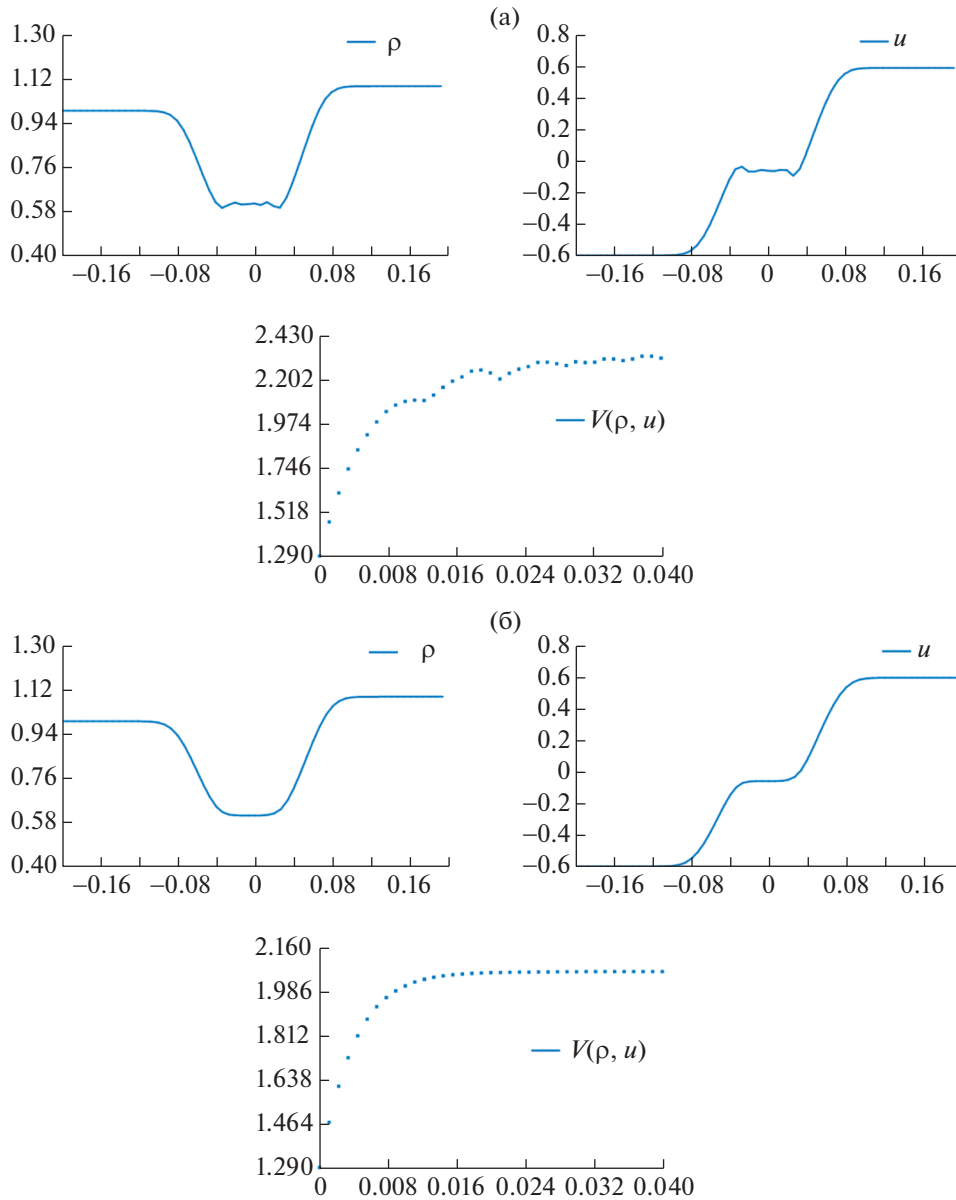


Фиг. 3. Пример 1. Численное решение по пространству для $t = 0.04$ и его полная вариация по времени для $\alpha = 0.25, \hat{\beta} = 0.05, h = 1/150$: (а) $\alpha_s = 0$, (б) $\alpha_s = 1$.

ражение зависит от α более сложным образом, и приводимая ниже теорема оказывается более громоздкой.

Теорема 4. Пусть $\mu_{ph} = 0, \alpha_s > 0$ и $M \neq 0$. Для L^2 -диссипативности схемы (6), (7) необходимо, чтобы $\beta \leq \beta_{\text{нес}}^{(0)}$, и достаточно, чтобы $\beta \leq \beta_{\text{suf}}^{(0)} := 0.5\beta_{\text{нес}}^{(0)}$, где

$$\frac{1}{\beta_{\text{нес}}^{(0)}} := \begin{cases} (\alpha_s + 1) \left(\alpha + \frac{1}{4\alpha_s \alpha} \right) & \text{в } D_I, \\ \frac{(M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)}{4\alpha_s \alpha} & \text{в } D_{II}, \\ (\alpha_s + 1) \left(\alpha + \frac{1}{4\alpha_s \alpha} \right) + \frac{1}{16\alpha_s \alpha (\alpha \alpha^2 - 1)} [(M^2 - \alpha_s - 1)\alpha \alpha^2 + \alpha_s - 2]^2 & \text{в } D_{III}, \end{cases} \quad (35)$$

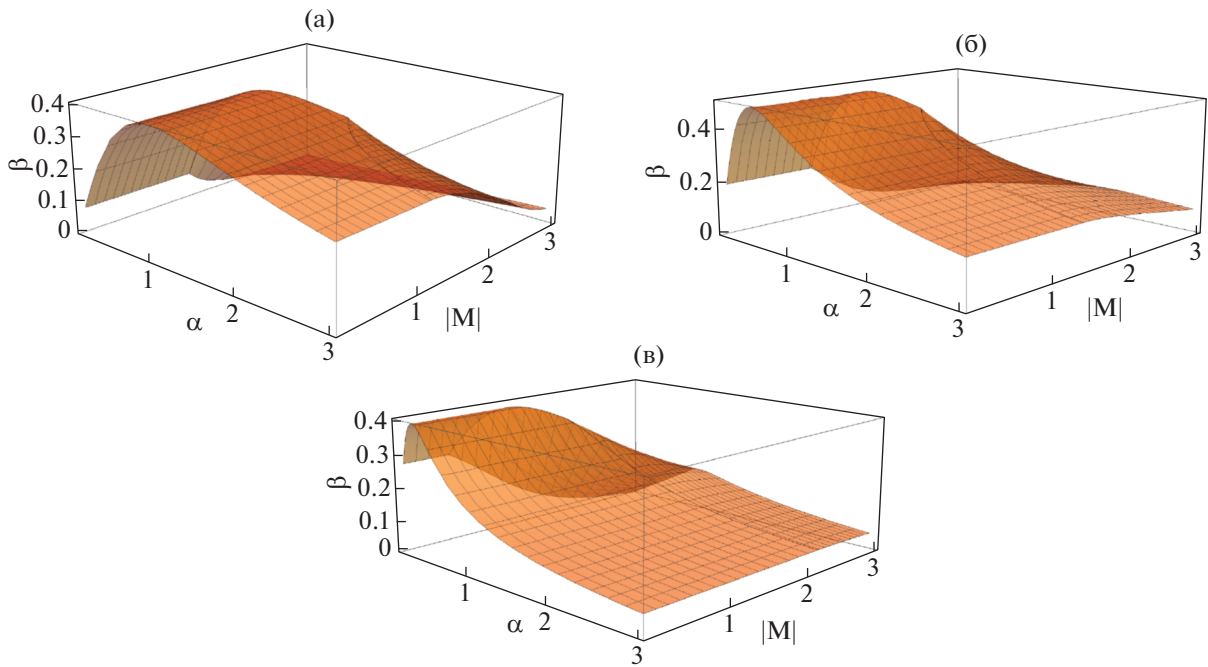


Фиг. 4. Пример 2. Численное решение по пространству для $t = 0.04$ и его полная вариация по времени при $\alpha = 0.25, \hat{\beta} = 0.3, h = 1/150$: (а) $\alpha_s = 0$, (б) $\alpha_s = 1$.

с $\varkappa := 4\alpha_s/M^2$. Множества $D_I - D_{III}$ включают точки с положительными координатами $(\alpha^2, \alpha_s, M^2)$. В D_I это: 1) $\varkappa\alpha^2 < 1, (M^2 - \alpha_s - 1)\varkappa\alpha^2 + \alpha_s - 2 < 0$ и $(\alpha_s + 1)\varkappa\alpha^2 \geq M^2 + \alpha_s - 2$; 2) $\varkappa\alpha^2 = 1$ и $M^2 \leq 3$; 3) $\varkappa\alpha^2 > 1$ и $(M^2 - \alpha_s - 1)\varkappa\alpha^2 + \alpha_s - 2 \leq 0$.

В D_{II} это: 1) $\varkappa\alpha^2 < 1$ и $(M^2 - \alpha_s - 1)\varkappa\alpha^2 + \alpha_s - 2 \geq 0$; 2) $\varkappa\alpha^2 < 1, (M^2 - \alpha_s - 1)\varkappa\alpha^2 + \alpha_s - 2 < 0$ и $(\alpha_s + 1)\varkappa\alpha^2 \leq M^2 + \alpha_s - 2$; 3) $\varkappa\alpha^2 = 1$ и $M^2 \geq 3$; 4) $\varkappa\alpha^2 > 1, (M^2 - \alpha_s - 1)\varkappa\alpha^2 + \alpha_s - 2 > 0$ и $(M^2 + \alpha_s + 1)\varkappa\alpha^2 \leq 2M^2 + \alpha_s - 2$.

В D_{III} это $\varkappa\alpha^2 > 1, (M^2 - \alpha_s - 1)\varkappa\alpha^2 + \alpha_s - 2 > 0$ и $(M^2 + \alpha_s + 1)\varkappa\alpha^2 \geq 2M^2 + \alpha_s - 2$.



Фиг. 5. Графики $\beta_{\text{нес}}^{(0)}$ в зависимости от α и $|M|$ при: (а) $\alpha_s = 1/4$, (б) $\alpha_s = 1$, (в) $\alpha_s = 4$.

Доказательство. Вернемся к началу доказательства теоремы 3. Верны формулы

$$s_2(q) := \frac{1}{2\alpha_s} b = a_0 q^2 + a_1 q + a_2, \quad a_0 = \frac{1}{4\alpha_s \alpha} (1 - \varkappa \alpha^2),$$

$$a_1 = \frac{1}{4\alpha_s \alpha} [(M^2 - \alpha_s - 1)\varkappa \alpha^2 + \alpha_s - 2], \quad a_2 = (\alpha_s + 1) \left(\alpha + \frac{1}{4\alpha_s \alpha} \right).$$

Обозначим через q_* (любую) точку максимума $s_2(q)$ на $[0, M^2]$. При $\varkappa \alpha^2 \neq 1$ ясно, что $s_2(q)$ – квадратный трехчлен с вершиной $q_v = -a_1/(2a)$.

В случае $\varkappa \alpha^2 < 1$ имеем $a_0 > 0$, и при $a_1 \geq 0$ получаем, что $q_v \leq 0$ и $s_2(q)$ возрастает при $q \geq 0$, и поэтому $q_* = M^2$. При $a_1 < 0$ имеем $q_v > 0$, и поэтому $q_* = 0$ для $M^2 \leq 2q_v$ (эквивалентно, $(\alpha_s + 1)\varkappa \alpha^2 \geq M^2 + \alpha_s - 2$) либо $q_* = M^2$ для $M^2 \geq 2q_v$.

В случае $\varkappa \alpha^2 = 1$ имеем $a_0 = 0$, $s_2(q)$ – аффинная функция, поэтому $q_* = 0$ при $a_1 \leq 0$ (эквивалентно, $M^2 \leq 3$) либо $q_* = M^2$ для $M^2 \geq 3$.

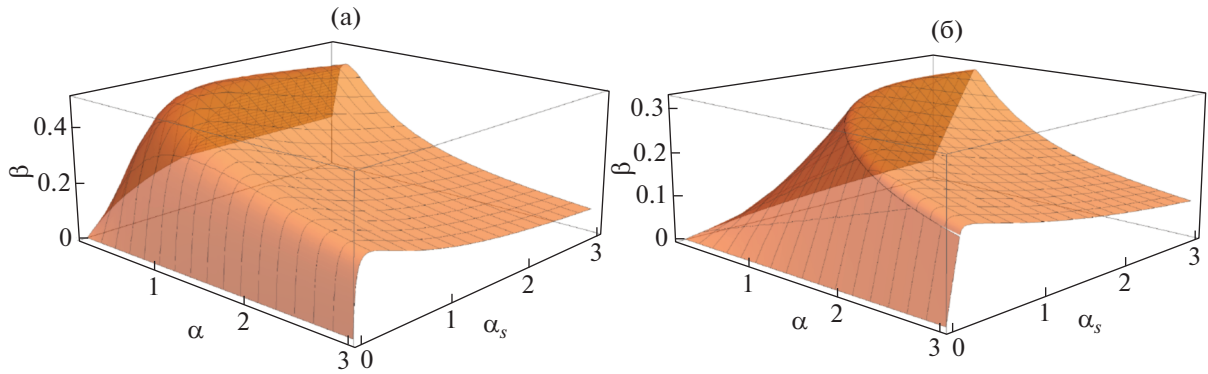
В случае $\varkappa \alpha^2 > 1$ имеем $a_0 < 0$, и при $a_1 \leq 0$ получаем, что $s_2(q)$ убывает при $q \geq 0$, и поэтому $q_* = 0$. При $a_1 > 0$ имеем $q_v > 0$, и поэтому $q_* = M^2$ для $M^2 \leq q_v$ (эквивалентно, $(M^2 + \alpha_s + 1)\varkappa \alpha^2 \leq 2M^2 + \alpha_s - 2$) либо $q_* = q_v$ для $M^2 \geq q_v$.

При этом верны формулы

$$s_2(0) = a_2, \quad s_2(M^2) = \frac{(M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)}{4\alpha_s \alpha}, \quad s_2(q_v) = a_2 - \frac{a_1^2}{4a_0}.$$

Переупорядочив результаты согласно этим значениям, завершим доказательство.

Функция $\beta_{\text{нес}}^{(0)}$ непрерывна в октанте $\alpha > 0, \alpha_s > 0, M^2 > 0$, не возрастает по M^2 и, как нетрудно проверить, стремится к 0 при $\alpha \rightarrow +0$ и $\alpha \rightarrow +\infty$. Кроме того, она не зависит от M на D_1 и воз-



Фиг. 6. Графики $\beta_{\text{нec}}^{(0)}$ в зависимости от α и α_s при: (а) $|M| = 1$, (б) $|M| = 2$.

растает по α на D_{II} . На фиг. 5 представлены графики $\beta_{\text{нec}}^{(0)}$ в зависимости от α и $|M|$ при трех характерных значениях α_s . На всех трех графиках имеются участки, относящиеся ко всем множествам $D_1 - D_{III}$, и они помечены разной штриховкой.

На фиг. 6 даны графики $\beta_{\text{нec}}^{(0)}$ в зависимости от α и α_s при двух характерных значениях $|M| = 1$ и 2. В силу указанного свойства невозрастания выполнение условий теоремы с $\beta_{\text{нec}}^{(0)}$ при некотором $M = M_0 > 0$ влечет их выполнение при всех $0 \leq |M| \leq M_0$ (при фиксированных α и α_s), тем самым график на фиг. 6а представляет интерес для всей дозвуковой области $|M| \leq 1$, а график на фиг. 6б – также и для транс- и сверхзвуковых областей $|M| \leq 2$. На них фигурируют участки, относящиеся только ко множествам D_1 и D_{II} .

Вернемся к теореме 3. Оптимальное значение α , при котором достигаются максимальные значения $\beta_{\text{нec}}$ и β_{suf} (это происходит одновременно) и тем самым – максимальный шаг по времени, определяется из простого уравнения $\bar{b}_1 \alpha = \bar{b}_2 / (4\alpha_s \alpha)$. Эти значения α , $\beta_{\text{нec}}$ и β_{suf} даются формулами

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{b}_2}{\alpha_s \bar{b}_1}}, \quad \bar{\beta}_{\text{нec}} = 4\bar{\beta}_{\text{suf}} = 2\sqrt{\frac{\alpha_s}{\bar{b}_1 \bar{b}_2}}.$$

Конкретизируем их. Неравенства на α_s и M^2 , входящие в выражения для \bar{b}_1 и \bar{b}_2 , порождают разбиение квадранта параметров (α_s, M^2) на четыре подобласти (фиг. 7). В области Ω_1 имеем $M^2 \leq \min\{\alpha_s + 1, 2 - \alpha_s\}$ (здесь $0 < \alpha_s \leq 2$), и необходимое условие (30) принимает вид

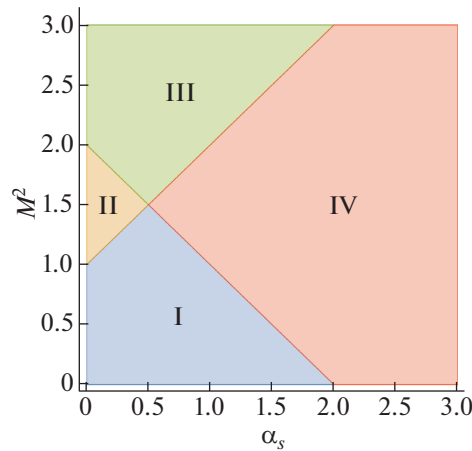
$$\frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{\beta_{\text{нec}}} = (\alpha_s + 1) \max \left\{ \alpha, \frac{1}{4\alpha_s \alpha} \right\}. \tag{36}$$

Только в ней оптимальные значения α и $\beta_{\text{нec}}$ задаются формулами, не зависящими от M :

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_s}}, \quad \bar{\beta}_{\text{нec}} = \frac{2\sqrt{\alpha_s}}{\alpha_s + 1}. \tag{37}$$

Максимум $\bar{\beta}_{\text{нec}}$ достигается при $\alpha_s = 1$ и равен 1.

Как нетрудно убедиться, сечения D_1 любой плоскостью $\alpha^2 = \text{const} > 0$ содержат Ω_1 . Поэтому теорема 4 позволяет в (36) и (37) улучшить $1/\beta_{\text{нec}}$ и $\bar{\beta}_{\text{нec}}$ до соответственно $(\alpha_s + 1)[\alpha + 1/(4\alpha_s \alpha)] = 1/(2\bar{\beta}_{\text{suf}})$ и $\sqrt{\alpha_s}/(\alpha_s + 1)$.



Фиг. 7. Подобласти разбиения квадранта параметров (α_s, M^2) , $\alpha_s > 0$ в теореме 3.

В Ω_{II} имеем $\alpha_s + 1 \leq M^2 \leq 2 - \alpha_s$ (здесь $0 < \alpha_s \leq 0.5$), и необходимое условие можно записать в виде

$$\frac{1}{\beta} \geq \max \left\{ \frac{1}{4} \left(|M| + \frac{\alpha_s + 1}{|M|} \right)^2 \alpha, \frac{\alpha_s + 1}{4\alpha_s \alpha} \right\}.$$

Оптимальные значения α и $\beta_{\text{нec}}$ задаются формулами

$$\alpha_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{\alpha_s + 1}{\alpha_s}} \frac{|M|}{M^2 + \alpha_s + 1}, \quad \bar{\beta}_{\text{нec}} = \sqrt{\frac{\alpha_s}{\alpha_s + 1}} \frac{4|M|}{M^2 + \alpha_s + 1}.$$

В Ω_{III} имеем $\max\{\alpha_s + 1, 2 - \alpha_s\} \leq M^2$, и необходимое условие принимает вид

$$\frac{1}{\beta} \geq \max \left\{ \frac{1}{4} \left(|M| + \frac{\alpha_s + 1}{|M|} \right)^2 \alpha, \frac{(M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)}{4\alpha_s \alpha} \right\}.$$

Оптимальные значения α и $\beta_{\text{нec}}$ задаются формулами

$$\alpha_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{(M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)}{\alpha_s}} \frac{|M|}{M^2 + \alpha_s + 1} \sim \frac{|M|}{\sqrt{\alpha_s}},$$

$$\bar{\beta}_{\text{нec}} = \frac{4\sqrt{\alpha_s}|M|}{(M^2 + \alpha_s + 1)\sqrt{(M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)}} \leq \frac{4\sqrt{\alpha_s}}{|M||M^2 - 1|} = O\left(\frac{1}{|M|^3}\right),$$

где асимптотическое поведение указано при $|M| \rightarrow \infty$ и фиксированном α_s . Отметим линейный рост α_{opt} и, к сожалению, быстрое убывание $\bar{\beta}_{\text{нec}}$ с ростом $|M|$.

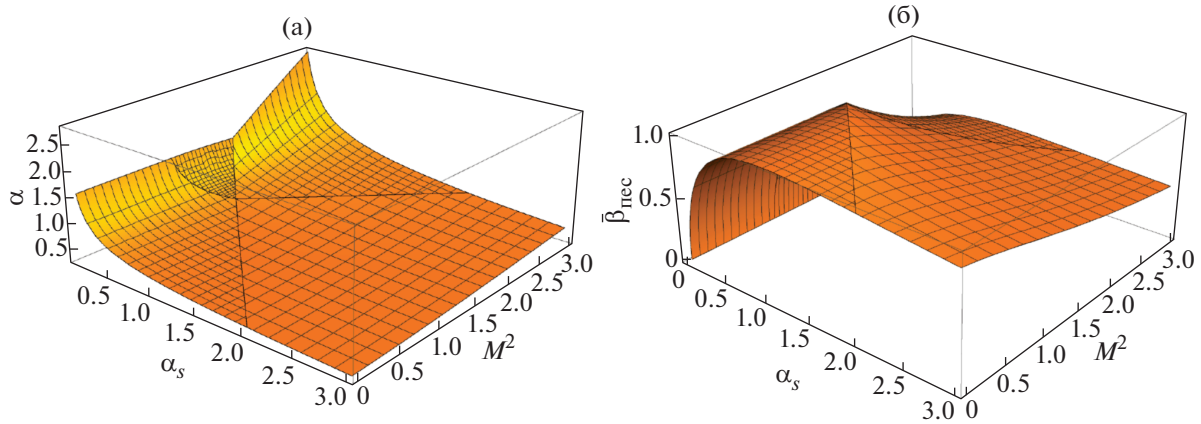
В Ω_{IV} имеем $2 - \alpha_s \leq M^2 \leq \alpha_s + 1$ (здесь $\alpha_s \geq 0.5$), и необходимое условие таково:

$$\frac{1}{\beta} \geq \max \left\{ (\alpha_s + 1)\alpha, \frac{(M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)}{4\alpha_s \alpha} \right\}.$$

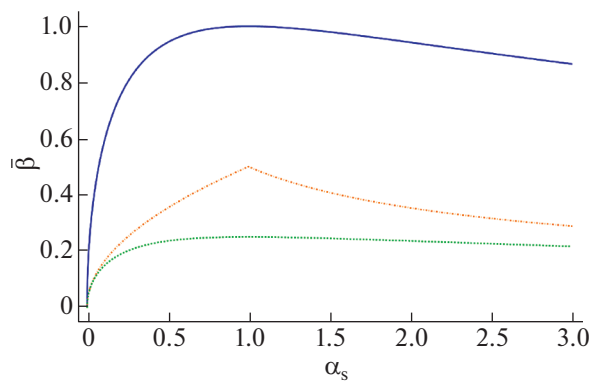
Оптимальные значения α и $\beta_{\text{нec}}$ задаются формулами

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)}{\alpha_s(\alpha_s + 1)}}, \tag{38}$$

$$\bar{\beta}_{\text{нec}} = 2 \frac{\sqrt{\alpha_s}}{\sqrt{(\alpha_s + 1)[(M^2 - 1)^2 + \alpha_s(M^2 + 1)]}} = \frac{1}{(\alpha_s + 1)\alpha_{\text{opt}}}. \tag{39}$$



Фиг. 8. Графики: (а) α_{opt} и (б) $\bar{\beta}_{\text{нec}}$ в зависимости от α_s и M^2 .



Фиг. 9. Графики $\bar{\beta}_{\text{нec}}$ (сплошная), $\bar{\beta}_{\text{cr}}$ (штрихпунктир) и $\bar{\beta}_{\text{suf}}$ (пунктир) в зависимости от α_s при $M = 0$.

На фиг. 8 представлены графики α_{opt} и $\bar{\beta}_{\text{нec}}$ в зависимости от $\alpha_s, M^2 \in (0, 3]$. На них разной штриховкой отмечены участки, относящиеся к разным областям $\Omega_1 - \Omega_{IV}$.

При $M = 0$ формулы (38), (39) переходят в (37). Для сравнения отметим, что согласно критерию (24) значение α_{opt} такое же, как в (37), а оптимальное значение $\bar{\beta}_{\text{cr}}$ следующее:

$$\bar{\beta}_{\text{suf}} = \frac{\sqrt{\alpha_s}}{2(\alpha_s + 1)} \leq \bar{\beta}_{\text{cr}} = \frac{\min\{\alpha_s, 1\}}{2\sqrt{\alpha_s}} \leq \bar{\beta}_{\text{нec}} = \frac{2\sqrt{\alpha_s}}{\alpha_s + 1}.$$

При этом асимптотическое поведение $\bar{\beta}_{\text{cr}}$ и $\bar{\beta}_{\text{suf}}$ (но не $\bar{\beta}_{\text{нec}}$) при $\alpha_s \rightarrow +0$ и $+\infty$ одинаковое. Графики трех величин из последних неравенств даны на фиг. 9.

4. СЛУЧАЙ КГИДД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА БЕЗ ИСКУССТВЕННОГО КОЭФФИЦИЕНТА ВЯЗКОСТИ

Рассмотрим теперь бегло другой важный на практике случай, когда $\mu_{\text{art}} = 0$ (т.е. $\alpha_s = 0$), а $\mu_{\text{ph}} > 0$, использованный в том числе в [10], [12], [25]. Он существенно отличается от предыдущего, поскольку теперь используется регуляризация баротропных уравнений Навье–Стокса, а не Эйлера, и уравнение импульса относительно u имеет уже параболический тип вместо гиперболического 1-го порядка. При этом весьма важно то, что благодаря рассмотрению выше любых значений $\alpha_s > 0$, новый анализ не требуется, ибо его можно свести к уже выполненному посредством замен

$$\alpha_s = \frac{d}{\tau_*}, \quad d := \frac{v_{\text{ph}*}}{c_*^2}, \quad \alpha = \frac{c_* \tau_*}{h},$$

где параметр d имеет размерность времени. Следуя [26], теперь формулы (11) не используются и работа идет непосредственно с τ_* и Δt ; это связано и с тем, что выбор τ здесь априори не очевиден, и более того, его желательно выяснить в ходе анализа устойчивости. Ниже для краткости опускаем индекс $*$ у v_{ph} и τ_* .

Указанные замены в теореме 3 приводят к следующему результату.

Теорема 5. Пусть $\mu_{art} = 0$ и $d > 0$. Для L^2 -диссипативности схемы (6), (7) необходимо выполнение неравенства

$$\Delta t \leq \Delta t_{nec} := \min \left\{ \frac{h^2}{c_*^2 \bar{b}_1 \tau}, \frac{4d}{\bar{b}_2} \right\} \tag{40}$$

и достаточно выполнение неравенства

$$\Delta t \leq \Delta t_{suf} := \frac{2h^2}{4c_*^2 \bar{b}_1 \tau + d^{-1} \bar{b}_2 h^2}, \tag{41}$$

где

$$\bar{b}_1 = \bar{b}_1 \left(\frac{d}{\tau}, M^2 \right) = \begin{cases} 1 + \frac{d}{\tau} & \text{при } M^2 \leq 1 + \frac{d}{\tau}, \\ \frac{1}{4} \left[|M| + \left(\frac{d}{\tau} + 1 \right) \frac{1}{|M|} \right]^2 & \text{при } M^2 \geq 1 + \frac{d}{\tau}, \end{cases}$$

$$\bar{b}_2 = \bar{b}_2 \left(\frac{d}{\tau}, M^2 \right) = \begin{cases} 1 + \frac{d}{\tau} & \text{при } \frac{d}{\tau} \leq 2, \quad M^2 \leq 2 - \frac{d}{\tau}, \\ (M^2 - 1)^2 + \frac{d}{\tau} (M^2 + 1) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Переформулировка теоремы 4 выполняется аналогично; для краткости ее опускаем.

Введем безразмерный параметр $\theta_h = c_* h / v_{ph}$. В области Ω_1 , где $M^2 \leq \min\{\tau^{-1}d + 1, 2 - \tau^{-1}d\}$ (здесь $0 < \tau^{-1}d \leq 2$, а $M^2 \leq 3/2$), необходимое условие (40) с учетом теоремы 4, как указано в предыдущем разделе, можно уточнить как

$$\Delta t \leq \Delta t_{nec}^{(0)} := \frac{4h^2}{4c_*^2(d + \tau) + (d^{-1} + \tau^{-1})h^2}, \tag{42}$$

а достаточное условие (41) принимает вид $\Delta t \leq \Delta t_{suf} = 0.5 \Delta t_{nec}^{(0)}$. Верны двусторонние оценки

$$\frac{1}{2} \min\{d, \tau\} \leq \frac{d\tau}{d + \tau} \leq \Delta t_{suf}^{(0)} \leq 2 \frac{d\tau}{d + \tau} \leq 2 \min\{d, \tau\} \quad \text{при } h^2 \geq 4c_*^2 d\tau, \tag{43}$$

$$\frac{h^2}{4c_*^2(d + \tau)} \leq \Delta t_{suf}^{(0)} \leq \frac{h^2}{2c_*^2(d + \tau)} \quad \text{при } h^2 \leq 4c_*^2 d\tau. \tag{44}$$

Соответствующее оптимальное значение параметра τ , при котором как необходимое, так и достаточное условия на Δt наиболее широкие, таково:

$$\tau_{opt} = \begin{cases} \frac{d}{M^2 - 1} & \text{при } \frac{2}{\theta_h} \leq M^2 - 1, \quad |M| > 1, \\ \frac{h}{2c_*} = \frac{1}{2} d \theta_h & \text{при } \max\{M^2 - 1, 0\} \leq \frac{2}{\theta_h} \leq 2 - M^2, \\ \frac{d}{2 - M^2} & \text{при } \frac{2}{\theta_h} \geq 2 - M^2. \end{cases} \tag{45}$$

Обратим внимание на то, что τ_{opt} в двух из трех указанных случаев не зависит от h , что принципиально отличается от предыдущей формулы (11) для τ ; подобное относится и к оценкам (43), а

также имеет место ниже и в случае областей $\Omega_{II}-\Omega_{IV}$. В оставшемся третьем случае τ_{opt} совпадает с (11) при $\alpha = 0.5$ и не зависит от M . Расчеты в [25] были выполнены с параметрами, попадающими в последний случай и в основном с таким τ_{opt} , при малых числах Маха. Для них $\Delta t_{nec}^{(0)} \approx 4d$ в формуле (42), что достаточно хорошо согласуется с Δt , найденным экспериментально в [25]. Подчеркнем, что до сих пор никаких формул типа (42) для выбора Δt для схем на разнесенных или неразнесенных сетках с регуляризацией при $\mu_{art} = 0$ в литературе предложено не было (исключая [26] при $M = 0$).

Отметим, что при $2/\theta_h \leq M^2 - 1$ и $|M| \rightarrow 1 + 0$ имеем $\tau_{opt} \rightarrow +\infty$; это является признаком того, что данная регуляризация при таких параметрах едва ли удовлетворительна. Подобное наблюдается при $|M| \rightarrow 1$ или $|M| \rightarrow \sqrt{2}$ и в аналогичных формулах ниже.

Замечание 4. В теореме 5 необходимое условие (40) в Ω_I

$$\Delta t \leq \min \left\{ \frac{h^2}{c_*^2(d + \tau)}, 4 \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{d} \right)^{-1} \right\}$$

не очень существенно отличается от (42). Однако оно приводит к другой формуле для оптимального значения τ , которая представляется менее адекватной:

$$\tilde{\tau}_{opt} = \begin{cases} \frac{d}{M^2 - 1} & \text{при } \frac{2}{\theta_h} \leq \sqrt{M^2 - 1}, \quad |M| > 1, \\ \frac{h^2}{4v_{ph}} = \frac{1}{4} d \theta_h^2 & \text{при } \sqrt{\max\{M^2 - 1, 0\}} \leq \frac{2}{\theta_h} \leq \sqrt{2 - M^2}, \\ \frac{d}{2 - M^2} & \text{при } \frac{2}{\theta_h} \geq \sqrt{2 - M^2}. \end{cases}$$

Для сравнения отметим, что в Ω_I при $M = 0$ получаем

$$\tau_{opt} = \max \left\{ \frac{h}{2c_*}, \frac{d}{2} \right\}, \quad \tilde{\tau}_{opt} = \max \left\{ \frac{h^2}{4v_{ph}}, \frac{d}{2} \right\}, \quad \tau_{opt,cr} = d,$$

где значение $\tau_{opt,cr} = d$ получено на основе критерия (24) (см. [26]).

В области Ω_{II} , где $1 + \tau^{-1}d \leq M^2 \leq 2 - \tau^{-1}d$ (здесь $0 < \tau^{-1}d \leq 0.5$, а $1 < M^2 < 2$), достаточное условие (41) таково:

$$\Delta t \leq \Delta t_{suf} = \frac{2h^2}{c_*^2 \left[|M| + \left(\frac{d}{\tau} + 1 \right) \frac{1}{|M|} \right]^2 \tau + \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{\tau} \right) h^2},$$

и оно приводит к следующему оптимальному значению τ :

$$\tau_{opt} = \begin{cases} \frac{d}{M^2 + 1} \sqrt{1 + M^2 \theta_h^2} & \text{при } \frac{M^2 + 1}{\sqrt{1 + M^2 \theta_h^2}} \leq \min\{M^2 - 1, 2 - M^2\}, \\ \frac{d}{\min\{M^2 - 1, 2 - M^2\}} & \text{иначе.} \end{cases}$$

В области Ω_{III} , где $\max\{\tau^{-1}d + 1, 2 - \tau^{-1}d\} \leq M^2$ (здесь $M^2 \geq 3/2$), достаточное условие (41) имеет вид

$$\Delta t \leq \Delta t_{suf} = \frac{2h^2}{c_*^2 \left[|M| + \left(\frac{d}{\tau} + 1 \right) \frac{1}{|M|} \right]^2 \tau + \left[\frac{1}{d} (M^2 - 1)^2 + \frac{1}{\tau} (M^2 + 1) \right] h^2}$$

и приводит к следующему оптимальному значению τ :

$$\tau_{\text{opt}} = \begin{cases} \frac{d}{2 - M^2} & \text{при } r(M, \theta_h) \leq 2 - M^2, \quad M^2 < 2, \\ \frac{d}{r(M, \theta_h)} & \text{при } \max\{2 - M^2, 0\} \leq r(M, \theta_h) \leq M^2 - 1, \\ \frac{d}{M^2 - 1} & \text{при } r(M, \theta_h) \geq M^2 - 1, \end{cases}$$

где $r(M, \theta_h) := (M^2 + 1)/\sqrt{1 + (M^2 + 1)M^2\theta_h^2}$.

В области Ω_{IV} , где $2 - \tau^{-1}d \leq M^2 \leq \tau^{-1}d + 1$ (здесь $\tau^{-1}d > 0.5$), достаточное условие (41) таково:

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{suf}} = \frac{2h^2}{4c_*^2(d + \tau) + \left[\frac{1}{d}(M^2 - 1)^2 + \frac{1}{\tau}(M^2 + 1) \right] h^2},$$

и оно приводит к следующему оптимальному значению τ :

$$\tau_{\text{opt}} = \begin{cases} \frac{d}{\max\{2 - M^2, M^2 - 1\}} & \text{при } \frac{2}{\theta_h} \leq \sqrt{M^2 + 1} \max\{2 - M^2, M^2 - 1\}, \\ \sqrt{M^2 + 1} \frac{h}{2c_*} & \text{иначе.} \end{cases}$$

В случае $M^2 \leq 1 - \varepsilon$ с $0 < \varepsilon < 1$ справедливы аналогичные (43), (44) оценки

$$\frac{1}{4} \min\{d, \tau\} \leq \Delta t_{\text{suf}}^{(0)} \leq \frac{2}{\varepsilon^2} \min\{d, \tau\} \quad \text{при } h^2 \geq 4c_*^2 d \tau,$$

$$\frac{h^2}{8c_*^2(d + \tau)} \leq \Delta t_{\text{suf}}^{(0)} \leq \frac{h^2}{2\varepsilon^2 c_*^2(d + \tau)} \quad \text{при } h^2 \leq 4c_*^2 d \tau.$$

При $M = 0$ в Ω_{IV} получаем $\tau_{\text{opt}} = \min\{h/(2c_*), d/2\}$ и по-прежнему $\tau_{\text{opt,cr}} = d$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. 2-е изд. М.: Физматлит, 2012.
2. LeVeque R.J. Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
3. Wesseling P. Principles of computational fluid dynamics. Berlin: Springer, 2009.
4. Abgrall R., Shu C.-W., eds. Handbook of numerical methods for hyperbolic problems: basic and fundamental issues. Handbook of Numerical Analysis. V. 17. Amsterdam: North Holland, 2016.
5. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
6. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
7. Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М.—Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009.
8. Елизарова Т.Г., Широков И.А. Регуляризованные уравнения и примеры их использования при моделировании газодинамических течений. М.: МАКС Пресс, 2017.
9. Булатов О.В., Елизарова Т.Г. Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах // Ж. вычисл. матем. матем. физ. 2011. Т. 51. № 1. С. 170–184.
10. Balashov V., Zlotnik A., Savenkov E. Analysis of a regularized model for the isothermal two-component mixture with the diffuse interface // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2017. V. 32. № 6. P. 347–358.
11. Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Истомина М.А. Гидродинамические аспекты формирования спирально-вихревых структур во вращающихся газовых дисках // Астрономический ж. 2018. Т. 95. № 1. С. 11–21.
12. Balashov V., Zlotnik A. An energy dissipative spatial discretization for the regularized compressible Navier-Stokes-Cahn-Hilliard system of equations // Math. Model. Anal. 2020. V. 25. № 1. P. 110–129.

13. Сухомозгий А.А., Шеретов Ю.В. Анализ устойчивости одной разностной схемы решения уравнений Сен–Венана в теории мелкой воды // В сб.: Прилож. функц. анализа в теории приближений. Тверь: ТвГУ. 2013. С. 48–60.
14. Zlotnik A., Lomonosov T. On conditions for weak conservativeness of regularized explicit finite-difference schemes for 1D barotropic gas dynamics equations // In: Differential and Difference Equations with Applications. Springer Proc. in Math. and Stat. 2018. V. 230. P. 635–647.
15. Злотник А.А., Ломоносов Т.А. Условия L^2 -диссипативности линеаризованных явных разностных схем с регуляризацией для уравнений 1D баротропной газовой динамики // Ж. вычисл. матем. матем. физ. 2019. Т. 59. № 3. С. 481–493.
16. Zlotnik A. On conditions for L^2 -dissipativity of an explicit finite-difference scheme for linearized 2D and 3D barotropic gas dynamics system of equations with regularizations // Symmetry. 2021. V. 13. № 11. Article 2184. P. 1–17.
17. Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. М.: Красанд, 2015.
18. Guermont J.-L., Popov B., Tomov V. Entropy–viscosity method for the single material Euler equations in Lagrangian frame // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 2016. V. 300. P. 402–426.
19. Feireisl E., Lukáčová-Medvidová M., Mizerová H. A finite volume scheme for the Euler system inspired by the two velocities approach // Numer. Math. 2020. V. 144. № 1. P. 89–132.
20. Dolejší V., Svárd M. Numerical study of two models for viscous compressible fluid flows // J. Comput. Phys. 2021. V. 427. Article 110068. P. 1–26.
21. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
22. Van der Heul D.R., Vuik C., Wesseling P. Stability analysis of segregated solution methods for compressible flow // Appl. Num. Math. 2001. V. 38. P. 257–274.
23. Bauer A.L., Loubere R., Wendroff B. On stability of staggered schemes // SIAM J. Numer. Anal. 2008. V. 46. № 2. P. 996–1011.
24. Konangi S., Palakurthi N.K., Ghia U. Von Neumann stability analysis of first-order accurate discretization schemes for one-dimensional (1D) and two-dimensional (2D) fluid flow equations // Comput. Math. Appl. 2018. V. 75. P. 643–665.
25. Balashov V., Zlotnik A. An energy dissipative semi-discrete finite-difference method on staggered meshes for the 3D compressible isothermal Navier–Stokes–Cahn–Hilliard equations // J. Comput. Dynamics. 2020. V. 7. № 2. P. 291–312.
26. Злотник А.А., Ломоносов Т.А. L^2 -диссипативность разностных схем для регуляризованных 1D баротропных уравнений движения газа при малых числах Маха // Матем. моделирование. 2021. Т. 33. № 5. С. 16–34.
27. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
28. Ломоносов Т.А. Критерии L^2 -диссипативности линеаризованных явных разностных схем для регуляризации одномерных уравнений газовой динамики // Пробл. матем. анализа. 2019. № 101. С. 97–102.
29. Злотник А.А. О параболичности квазигидродинамической системы уравнений и устойчивости малых возмущений для нее // Матем. заметки. 2008. Т. 83. № 5. С. 667–682.
30. Злотник А.А. Пространственная дискретизация одномерной баротропной квазигазодинамической системы уравнений и уравнение энергетического баланса // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 10. С. 51–64.

**ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ
МЕТОДЫ**

УДК 511.338

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В ПРОБЛЕМЕ КРУГА

© 2022 г. Д. А. Попов^{1, *}, Д. В. Сушко^{2, **}¹ 119992 Москва, Ленинские горы, 1, стр. 40, НИИ ФХБ им. А.Н. Белозерского, Россия² 119333 Москва, Вавилова, 44, кор. 2, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: popov-kupavna@yandex.ru

**e-mail: dsushko@ipiran.ru

Поступила в редакцию 22.04.2022 г.
Переработанный вариант 22.04.2022 г.
Принята к публикации 04.06.2022 г.

Приводятся результаты численного эксперимента по исследованию свойств остаточного члена в задаче о числе целых точек в круге. Сформирована картина поведения больших отклонений величины остаточного члена от нуля. Получено численное подтверждение гипотезы о ширине максимумов, согласно которой все большие локальные максимумы остаточного члена являются достаточно широкими, и построена гипотетическая оценка величины остаточного члена. Приведено доказательство теоремы, позволяющей связать высоту (значение) максимума остаточного члена с шириной этого максимума. Библ. 19. Фиг. 3. Табл. 7.

Ключевые слова: проблема круга, остаточный член, связь высоты и ширины максимума, численный эксперимент, формула Ландау.

DOI: 10.31857/S0044466922120122

1. ВВЕДЕНИЕ

Остаточный член в проблеме круга (в проблеме Гаусса) определяется равенством

$$P(x) = R(x) - \pi x, \quad (1)$$

где $R(x)$ – число целых точек в круге радиуса \sqrt{x} . Функция $P(x)$ – кусочно-линейная функция с разрывами I рода в ряде целых точек, где она непрерывна справа.

Проблема круга заключается в доказательстве оценки

$$P(x) = O(x^{1/4+\varepsilon}), \quad x \rightarrow \infty, \quad (2)$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Доказательству оценок вида

$$P(x) = O(x^{\theta+\varepsilon}), \quad x \rightarrow \infty, \quad (3)$$

посвящено большое количество работ (см. [1], [2]). В настоящее время оценка (3) доказана при $\theta = 517/1648 = 0.31371\dots$ (см. [3]).

Кроме асимптотических оценок вида (3) представляют интерес и другие свойства функции $P(x)$. Это связано, в частности, с тем, что задача о числе целых точек в круге имеет спектральную интерпретацию. С точки зрения спектральной теории величина $P(x)$ – это второй член в формуле Вейля для функции распределения собственных значений оператора Лапласа на плоском торе, и свойства $P(x)$ интересны в связи с теорией “квантового хаоса”. Обзор теоретических работ, посвященных исследованию свойств $P(x)$, представлен в [4].

Функция $P(x)$ исследовалась также и численно [5]–[9]. В [5] рассматривался вопрос об определении величины θ , такой что

$$\ln |P(x)| \leq \theta \ln x \quad \text{при} \quad x \leq x_{\max},$$

и было показано, что $\theta \leq 0.35$ при $x_{\max} \leq 10^{10}$. Этот результат был усилен в [8], где было показано, что $\theta \leq 0.28$ также при $x_{\max} \leq 10^{10}$. В [9] утверждалось, что

$$\begin{aligned} |P(x)| &\leq C_- x^{1/4} (\ln x)^{\lambda_-}, & P(x) < 0, & \quad x \leq 1.3 \times 10^8, \\ |P(x)| &\leq C_+ x^{1/4} (\ln x)^{\lambda_+}, & P(x) > 0, & \quad x \leq 3.6 \times 10^{10}, \end{aligned}$$

где $\lambda_- = 0.6 \pm 0.1$, $\lambda_+ = 0.3 \pm 0.1$, C_{\pm} – некоторые константы. Представленные результаты получены путем вычисления значений функции $P(x)$ в целых точках ($x \in \mathbb{Z}^+$) и построения последовательности “истинных максимумов”, т.е. такой последовательности пар $\{x_k, P(x_k)\}$, что $|P(x)| < |P(x_k)|$ для всех $x < x_k$ (в [9] “истинные максимумы” строились отдельно для положительных и отрицательных значений $P(x)$). Отметим, что в [9] также численно исследовалась функция распределения значений величины $P(x)x^{-1/4}$.

Из теоретических результатов (см. разд. 2) следует, что в интервале $[T, 2T]$, $T \gg 1$, существуют непересекающиеся интервалы длины $\sim T^{1/2} (\ln T)^{-3}$, в каждом из которых

$$C_1 T^{1/4} < |P(x)| < C_2 T^{1/4} (\ln T)^{3/2}.$$

Таким образом, на объединении этих интервалов $W \subset [T, 2T]$ гипотеза круга (оценка (2)) доказана. Однако мера Лебега $\mu\{W\} \geq CT$, $C < 1$, и вопрос об оценке величины $|P(x)|$ на дополнении $\overline{W} \subset [T, 2T] \setminus W$ остается открытым.

Выше и везде далее символы C, C_1, C_2, \dots используются для обозначения абсолютных (не зависящих от параметров) положительных констант, которые могут быть разными в разных формулах. Если такие константы входят в условия применимости некоторого утверждения или в его формулировку, то это означает, что они существуют и могут быть указаны явно.

Рассмотрим максимум (точную верхнюю грань) функции $|P(x)|$ в интервале $X_\alpha \subset [T, 2T]$, $T \gg 1$. Пусть h_α – высота (значение) максимума:

$$h_\alpha = \sup_{x \in X_\alpha} |P(x)|,$$

x_α – точка максимума, т.е.

$$h_\alpha = \max\{|P(x_\alpha + 0)|, |P(x_\alpha - 0)|\}.$$

Определим ширину максимума u_α как размер наибольшей полуокрестности $U_\alpha \subseteq X_\alpha$ точки x_α (левой или правой), такой что $|P(x)| \geq h_\alpha/2$, $x \in U_\alpha$. Связь между шириной максимума и его высотой была установлена в работе [10]. Подробное доказательство соответствующего общего результата приведено в Приложении. Из этого результата следует, что если ширина максимума удовлетворяет неравенству

$$u_\alpha \geq T^{1/2} (\ln T)^{-\rho}, \tag{4}$$

где $\rho > 0$, то для высоты максимума справедливо неравенство

$$h_\alpha \leq CT^{1/4} (\ln T)^{\rho/2}. \tag{5}$$

В [4], [10] была выдвинута гипотеза о ширине максимумов, согласно которой все большие максимумы являются достаточно широкими, именно, существует $\rho > 0$ такое, что неравенство (4) выполнено для всех максимумов, таких что $h_\alpha \geq \eta T^{1/4}$, $\eta > 0$. Доказательство этой гипотезы означает решение проблемы круга.

Задача численного эксперимента состояла в исследовании характера поведения функции $P(x)$ в области больших отклонений этой функции от нуля ($|P(x)| \geq 2x^{1/4}$, $x \gg 1$) и, в частности, в проверке сформулированной выше гипотезы. Для этого во всех целых точках x некоторого множества $I^\cup : [10^7, 3.2 \times 10^8] \subset I^\cup \subset [10^7, 10^{12} + 10^8]$ были вычислены значения функции $P(x)$, найдены области больших отклонений $P(x)$ от нуля, вычислены ширины максимумов u_α и ряд других величин, характеризующих поведение $P(x)$. Полученные результаты позволяют составить

достаточно полную картину поведения функции $P(x)$ в указанных областях. В части ширины максимумов результаты показывают, что для самых высоких максимумов оценка (4) имеет место с $\rho = 1.2$. Отсюда следует, что

$$|P(x)| \leq Cx^{1/4}(\ln x)^{0.6}, \quad x \in I^{\cup}.$$

Кроме того, для всех максимумов, таких что $h_{\alpha} \geq \eta T^{1/4}$, $\eta = 3$, оценка (4) имеет место с $\rho = 2$. Это подтверждает гипотезу о ширине максимумов и дает гипотетическую оценку

$$|P(x)| \leq Cx^{1/4}(\ln x), \quad x \gg 1.$$

Отметим, что, насколько нам известно, ширины максимумов ранее не исследовались.

Работа имеет следующую структуру. В разд. 2 приведены теоретические результаты, определяющие постановку вопросов и характер величин, рассматриваемых в численном эксперименте. В разд. 3 дано описание численного эксперимента и приведены полученные результаты. В разд. 4 представлены соответствующие выводы относительно поведения функции $P(x)$ в области больших отклонений от нуля. Доказательство теоремы, следствием которой является связь между шириной и высотой максимума, приведено в Приложении.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Число целых точек $R(x)$ в круге радиуса \sqrt{x} , $x \geq 0$, может быть представлено в виде

$$R(x) = \sum_{0 \leq n \leq x} r(n), \quad (6)$$

где $r(n)$ – число представлений целого числа n в виде суммы квадратов двух целых чисел. Заметим, что если $r(n) \neq 0$, то $r(n) \geq 4 > \pi$. Асимптотика величин $r(n)$ имеет вид [11]

$$r(n) \leq \exp \left\{ \ln 2 \frac{\ln n}{\ln \ln n} + O \left(\frac{\ln n \cdot \ln \ln \ln n}{(\ln \ln n)^2} \right) \right\}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

В [5] доказано, что

$$R(x) = 1 + 4[\sqrt{x}] + 4[\sqrt{x/2}]^2 + 8 \sum_{i=[\sqrt{x/2}]+1}^{[\sqrt{x}]} [\sqrt{x-i^2}]; \quad (8)$$

здесь и далее $[\cdot]$ – целая часть вещественного числа. Последняя формула используется в численном эксперименте для подсчета числа целых точек в круге.

Из представления (6) следует, что определенная формулой (1) функция P есть кусочно-линейная функция с разрывами I рода в целых точках $x = n$ таких, что $r(n) \neq 0$. В точках разрыва функция P непрерывна справа, $P(x+0) = P(x)$, $P(x-0) = P(x-1) - \pi$. В точках непрерывности $P'(x) = -\pi$. Для любого x справедливо равенство $P(x) = P([x]) - \pi(x - [x])$, поэтому вычисление функции P в некотором интервале сводится к вычислению этой функции в целых точках этого интервала.

Ω -оценки. Напомним определение символов Харди Ω , Ω_+ :

$$\begin{aligned} f(x) = \Omega(g(x)) \quad (x \rightarrow \infty) &\Leftrightarrow \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} > 0; \\ f(x) = \Omega_+(g(x)) \quad (x \rightarrow \infty) &\Leftrightarrow \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} > 0, \end{aligned}$$

где $g(x) > 0$. Доказано (см., например, [12], [13]), что

$$P(x) = \Omega((x \ln x)^{1/4}). \quad (9)$$

Неизвестно, верна ли оценка

$$P(x) = \Omega_+(x^{1/4}(\ln x)^\lambda), \quad \lambda > 0.$$

Перемены знака с выходом за барьер. Уточняя результаты работы [14], нетрудно доказать, что функция $P(x) \pm ax^{1/4}$ по крайней мере один раз меняет знак в любом интервале $[x, x + \Delta x]$ ($x \gg 1$) при $\Delta x \geq 2b\sqrt{x}$ для любых a, b таких, что

$$4a + \frac{S}{\pi^2 b^2} < \frac{2}{\pi}, \tag{10}$$

где

$$S = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{r(n)}{n^{3/4}} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2(\sqrt{n}-1)^2} + \frac{1}{2(\sqrt{n}+1)^2} \right).$$

Так как $S \leq 13.1$, то условие (10) выполняется, например, при $a = 0.1, b = 2.4$.

Большие отклонения функции $|P|$ от нуля. Используя метод работы [14], можно доказать, что в интервале $[T, 2T], T \gg 1$, существуют непересекающиеся интервалы W_{α}^{\pm} длины

$$w_{\alpha}^{\pm} \doteq |W_{\alpha}^{\pm}| = C \frac{\sqrt{T}}{(\ln T)^3},$$

такие что

$$P(x_{\alpha}^{+}) > C_{+} T^{1/4}, \quad P(x_{\alpha}^{-}) < -C_{-} T^{1/4}, \quad |P(x) - P(x_{\alpha}^{\pm})| < \frac{1}{2} |P(x_{\alpha}^{\pm})| \quad (x \in W_{\alpha}^{\pm}), \tag{11}$$

где x_{α}^{\pm} – точка максимума величины $|P(x)|$ в интервале W_{α}^{\pm} , т.е.

$$\max\{|P(x_{\alpha}^{\pm} + 0)|, |P(x_{\alpha}^{\pm} - 0)|\} = \sup_{x \in W_{\alpha}^{\pm}} |P(x)|,$$

и при этом

$$\mu \left\{ \bigcup_{\alpha} W_{\alpha}^{\pm} \right\} > C^{\pm} T, \quad C^{\pm} < \frac{1}{2}. \tag{12}$$

Здесь и далее $\mu\{\cdot\}$ – мера Лебега.

Распределение значений величины $P(x)x^{-1/4}$. В работе [15] доказано, что величина $Q(x) = P(x)x^{-1/4}$ имеет функцию распределения F с плотностью f :

$$F(s) = \int_{-\infty}^s f(\xi) d\xi.$$

Это означает, что имеет место равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \mu\{x \in [1, T], Q(x) \in [a, b]\} = \int_a^b f(\xi) d\xi. \tag{13}$$

В работе [16] показано, что вместо (13) можно написать

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Delta T^{-1} \mu\{x \in [T, T + \Delta T], Q(x) \in [a, b]\} = \int_a^b f(\xi) d\xi$$

для любого $\Delta T \geq CT^{1/2+\varepsilon}, \varepsilon > 0$. В работе [9] доказано, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \xi_0 = \xi_0(\varepsilon)$:

$$f(\xi) \leq \exp(-|\xi|^{4-\varepsilon}), \quad |\xi| \geq \xi_0.$$

Пики (большие отклонения) функции P . Дадим ряд необходимых определений. Рассмотрим функцию P в интервале $[T, 2T], T \gg 1$. Множество X точек x , в которых $|P(x)| \geq T^{1/4}$, представляет собой объединение конечного числа непересекающихся интервалов:

$$X \doteq \{x : |P(x)| \geq T^{1/4}\} = \bigcup_{\alpha \in A} X_{\alpha}.$$

Если для некоторого интервала X_α выполнено условие

$$h_\alpha \doteq \sup_{x \in X_\alpha} |P(x)| \geq 2T^{1/4}, \tag{14}$$

то график сужения функции P на этот интервал назовем *пиком с основанием* X_α и будем обозначать через \mathcal{P}_α . Величину $h_\alpha \equiv h(\mathcal{P}_\alpha)$ назовем *высотой пика*.

Пусть $\overline{\mathcal{P}}_\alpha$ – замыкание графика \mathcal{P}_α . Множество $\{(x, p) \in \overline{\mathcal{P}}_\alpha : p = h_\alpha\}$ содержит конечное число точек (как правило, одну точку). *Вершиной* пика назовем ту точку указанного множества, координата x которой минимальна, т.е.

$$v(\mathcal{P}_\alpha) \equiv (x_\alpha, h_\alpha) = \min_x \{(x, p) \in \overline{\mathcal{P}}_\alpha : p = h_\alpha\},$$

при этом $x_\alpha \equiv x(\mathcal{P}_\alpha)$ – координата вершины.

Пусть $U_\alpha \subset X_\alpha$ – наибольшая полуокрестность (левая или правая) координаты вершины пика x_α , такая что $|P(x)| \geq h_\alpha/2$, $x \in U_\alpha$. Определим *ширину* пика $u_\alpha \equiv u(\mathcal{P}_\alpha)$ (одностороннюю ширину) как размер этой окрестности: $u_\alpha \doteq |U_\alpha|$.

Пусть $W_\alpha \subset X_\alpha$ – наибольший интервал, содержащий координату вершины пика x_α , такой что $|P(x)| \geq h_\alpha/2$, $x \in W_\alpha$. Определим *полную ширину* пика $w_\alpha \equiv w(\mathcal{P}_\alpha)$ (двустороннюю ширину пика) как длину этого интервала: $w_\alpha \doteq |W_\alpha|$.

Определим *знак* пика \mathcal{P}_α следующим образом: $\text{sgn}(\mathcal{P}_\alpha) = 1$, если $P(x) \geq T^{1/4}$, $x \in X_\alpha$, и $\text{sgn}(\mathcal{P}_\alpha) = -1$, если $P(x) \leq -T^{1/4}$, $x \in X_\alpha$. В зависимости от знака будем называть пики *положительными* и *отрицательными*.

Расстоянием $D(\mathcal{P}_{\alpha_1}, \mathcal{P}_{\alpha_2})$ между пиками \mathcal{P}_{α_1} и \mathcal{P}_{α_2} будем считать расстояние между координатами их вершин: $D(\mathcal{P}_{\alpha_1}, \mathcal{P}_{\alpha_2}) \doteq |x(\mathcal{P}_{\alpha_1}) - x(\mathcal{P}_{\alpha_2})|$.

Используем обозначение \mathfrak{P}_T для множества всех пиков в интервале $[T, 2T]$, $T \gg 1$.

Связь высот и ширин пиков. Рассмотрим некоторый пик $\mathcal{P}_\alpha \in \mathfrak{P}_T$. С учетом данных выше определений результат работы [10], устанавливающий связь высоты и ширины максимума, можно сформулировать следующим образом: если ширина пика достаточно велика, т.е. выполнено неравенство

$$u_\alpha \geq T^{1/2} (\ln T)^{-\rho}, \tag{15}$$

где $\rho = \rho(\alpha, T) > 0$, то для высоты пика справедливо неравенство

$$h_\alpha \leq CT^{1/4} (\ln T)^{\rho/2}. \tag{16}$$

Из приведенных в Приложении результатов вытекает, что для константы C в (16) имеет место следующая оценка сверху: $C \leq \overline{C} = 20$.

Пусть $\mathfrak{P}_{\eta, T} \subseteq \mathfrak{P}_T$, $\eta \geq 2$, множество пиков, таких что $h_\alpha \geq \eta T^{1/4}$, $\mathcal{P}_\alpha \in \mathfrak{P}_{\eta, T}$. В случае $\eta = 2$ имеем все множество пиков ($\mathfrak{P}_{2, T} = \mathfrak{P}_T$), поскольку по определению высота любого пика удовлетворяет неравенству $h_\alpha \geq 2T^{1/4}$. В случае $\eta = \sup_{x \in [T, 2T]} |P(x)| T^{-1/4}$ множество $\mathfrak{P}_{\eta, T}$ состоит из одного самого высокого пика.

Рассмотрим множество $\mathfrak{P}_{\eta, T}$. Если это множество не пустое и существует $\rho = \rho(\eta, T) > 0$, такое что неравенство (15) выполняется для всех пиков $\mathcal{P}_\alpha \in \mathfrak{P}_{\eta, T}$, то для всех пиков выполняется неравенство (16) и, следовательно, имеет место оценка

$$|P(x)| \leq Cx^{1/4} (\ln x)^{\rho(\eta, T)/2}, \quad x \in [T, 2T]. \tag{17}$$

Очевидно, что $\rho(\eta_2, T) \leq \rho(\eta_1, T)$ при $\eta_2 \geq \eta_1$, т.е. увеличение параметра η позволяет улучшить оценку (17).

Если $\rho_h(T) > 0$ такое, что неравенство (15) выполняется для самого высокого пика, то для этого пика выполняется и неравенство (16) и, следовательно, имеет место оценка

$$|P(x)| \leq Cx^{1/4}(\ln x)^{\rho_h(T)/2}, \quad x \in [T, 2T]. \quad (18)$$

Гипотеза о ширинах максимумов. Выдвинутая в [4], [10] гипотеза о ширинах максимумов может быть переформулирована в терминах пиков следующим образом: существуют константы $\eta \geq 2$ и $\rho > 0$, такие что для любого $T \gg 1$ ширины всех пиков $\mathcal{P}_\alpha \in \mathfrak{P}_{\eta,T}$ удовлетворяют неравенству (15), т.е. все достаточно высокие пики являются достаточно широкими. Если гипотеза справедлива, то из (17) следует

$$|P(x)| \leq Cx^{1/4}(\ln x)^{\rho/2}, \quad x \gg 1, \quad (19)$$

т.е. решение проблемы круга. Отметим, что из Ω -оценки (9) следует, что $\rho > 1/2$.

3. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Значения функции $R(x)$ (число целых точек в круге радиуса \sqrt{x}) вычислялись для всех целых значений $x = n$ в интервалах $I^i, i = 0, 1, \dots, 13$, где

$$\begin{aligned} I^0 &= [1, 10^7], & I^1 &= [10^7, 2 \times 10^7], & I^2 &= [2 \times 10^7, 4 \times 10^7], & I^3 &= [4 \times 10^7, 8 \times 10^7], \\ I^4 &= [8 \times 10^7, 1.6 \times 10^8], & I^5 &= [1.6 \times 10^8, 3.2 \times 10^8], & I^6 &= [5 \times 10^8, 5 \times 10^8 + 10^8], \\ I^7 &= [10^9, 10^9 + 10^8], & I^8 &= [5 \times 10^9, 5 \times 10^9 + 10^8], & I^9 &= [10^{10}, 10^{10} + 10^8], \\ I^{10} &= [5 \times 10^{10}, 5 \times 10^{10} + 10^8], & I^{11} &= [10^{11}, 10^{11} + 10^8], \\ I^{12} &= [5 \times 10^{11}, 5 \times 10^{11} + 10^8], & I^{13} &= [10^{12}, 10^{12} + 10^8]. \end{aligned}$$

Интервалы I^1, \dots, I^5 имеют вид $[T, 2T]$. Интервалы I^6, \dots, I^{13} имеют вид $[T, T']$, $T' = T + 10^8$; для этих интервалов $T + 100\sqrt{T} \leq T' < 2T$. Будем использовать следующие обозначения: $I^\cup = \bigcup_{1 \leq i \leq 13} I^i$, $\mathcal{I} = \{I^1, \dots, I^{13}\}$.

Вычисление значений функции $R(x)$ осуществлялось по формуле (8) с использованием 64-разрядной плавающей и целой арифметики, что обеспечивает получение точных значений. Для каждого интервала результат представляет собой массив 64-разрядных целых чисел. Соответствующие значения функции $P(x)$ вычислялись по формуле (1) с использованием 64-разрядной плавающей арифметики. Результат представляет собой массив 64-разрядных плавающих чисел. Погрешность вычислений для используемых значений аргумента ($x \leq 10^{12}$) заведомо не превышает 10^{-3} , что вполне достаточно для решения всех задач численного эксперимента.

Для каждого интервала $I \in \mathcal{I}$ по значениям $R(n)$ во всех целых точках n интервала, исключая начальную точку, вычислялись величины $r(n)$ (см. (6)). В табл. 1 для каждого интервала приведено значение величины $\bar{r} = \max_{n \in I} \{r(n)\}$, значение \tilde{r} , вычисленное для конечной точки интервала с использованием главного члена асимптотической формулы (7), а также значения величины $T^{1/4}$, играющей роль порога в определении пиков. Сравнение величин \bar{r} и \tilde{r} показывает, что величина $r(n)$ не выходит на асимптотику даже при максимальных используемых значениях $n \sim 10^{12}$.

Для каждого из интервалов $I \in \mathcal{I}$ по массиву значений $P(n), n \in I$, строится множество пиков \mathfrak{P}_T функции P , точнее, описание пиков этого множества. Каждый пик $\mathcal{P}_\alpha \in \mathfrak{P}_T$, описывается следующими величинами: x_α^b – начало пика, x_α^e – конец пика, x_α – координата вершины пика, h_α – высота пика, u_α – ширина пика, w_α – полная ширина пика, s_α – знак пика. Перечисленные величины определены в разд. 2.

Алгоритм построения множества пиков достаточно прямолинеен. Выполняется просмотр последовательности значений $P(n), n \in I$, и выделение таких участков последовательности

Таблица 1. Величины \bar{r} , \tilde{r} и $T^{1/4}$ для интервалов $I \in \mathcal{I}$

I	I^1	I^2	I^3	I^4	I^5	I^6	I^7	I^8	I^9	I^{10}	I^{11}	I^{12}	I^{13}
\bar{r}	192	256	288	320	384	384	384	512	640	768	768	1024	1024
\tilde{r}	62.1	69.3	77.3	86.1	95.9	105.7	116.0	146.5	162.4	206.3	228.7	289.8	320.7
$T^{1/4}$	56.2	66.9	79.5	94.6	112.5	149.5	177.8	265.9	316.2	472.9	562.3	840.9	1000.0

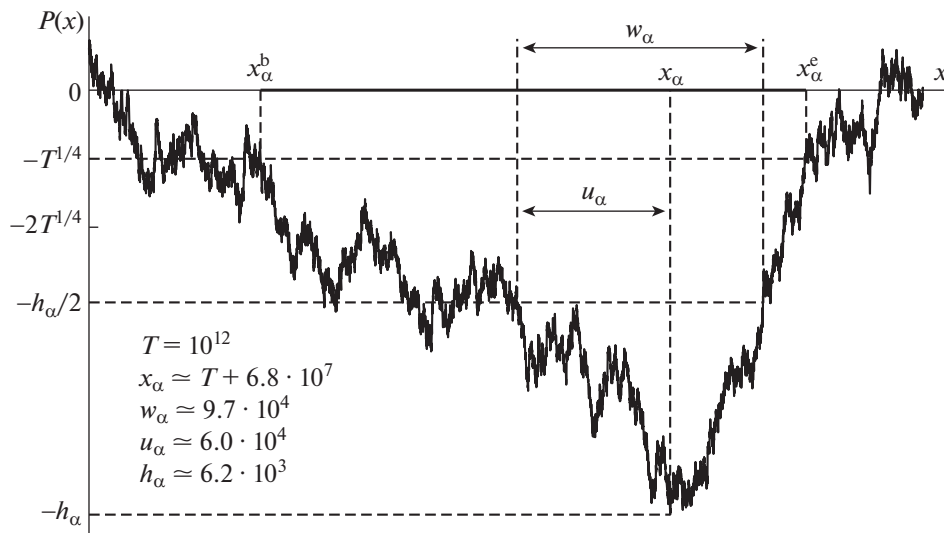
$X_\alpha = \{x_\alpha^b, x_\alpha^b + 1, \dots, x_\alpha^e\}$, что $|P(n)| \geq T^{1/4}$, $n \in X_\alpha$. Если $h_\alpha \doteq \max_{n \in X_\alpha} \{|P(n)|\} \geq 2T^{1/4}$ для данного участка, то такой участок последовательности представляет пик, начало и конец участка – это начало и конец пика, h_α – высота пика. Точка x_α , такая что $|P(x_\alpha)| = h_\alpha$, – координата вершины пика (если таких точек несколько, то координатой вершины считается самая левая из них). Далее выполняется последовательный просмотр значений $P(n)$, $n \in X_\alpha$, вправо и влево, начиная от координаты вершины x_α , и находятся крайние точки x_α^+ и x_α^- , в которых выполняется неравенство $|P(x_\alpha^\pm)| \geq h_\alpha/2$, после чего полагается

$$u_\alpha = \max\{(x_\alpha^+ - x_\alpha + 1), (x_\alpha - x_\alpha^- + 1)\}, \quad w_\alpha = x_\alpha^+ - x_\alpha^- + 1.$$

Наконец, $s_\alpha = \text{sgn}(P(x_\alpha))$. Величины x_α^b , x_α^e , x_α , h_α , u_α , w_α изображены на фиг. 1, $s_\alpha = -1$.

В результате применения описанного алгоритма мы получаем конечную последовательность наборов чисел $\{x_\alpha^b, x_\alpha^e, x_\alpha, h_\alpha, u_\alpha, w_\alpha, s_\alpha\}$, $\alpha \in A_I = \{0, \dots, N_I - 1\}$, которая представляет (описывает) множество пиков \mathfrak{P}_T , при этом каждый набор представляет (описывает) отдельный пик \mathcal{P}_α . Количество наборов $N_I \doteq |A_I| \equiv |\mathfrak{P}_T|$ в последовательности есть число пиков в интервале I . Наборы нумеруются слева направо, так что $x_{\alpha_1}^e < x_{\alpha_2}^b$ при $\alpha_1 < \alpha_2$.

Везде далее набор чисел, представляющий пик \mathcal{P}_α , и совокупность таких наборов, представляющую множество пиков \mathfrak{P}_T , мы также будем называть *пиком и множеством пиков* и использовать те же обозначения, что не должно вызывать недоразумений. Как и ранее (см. разд. 2), будем использовать обозначение $\mathfrak{P}_{\eta,T} \subseteq \mathfrak{P}_T$, $\eta \geq 2$, для множества пиков интервала I , таких что $h_\alpha \geq \eta T^{1/4}$ (при этом $\mathfrak{P}_{2,T} = \mathfrak{P}_T$).



Фиг. 1. Отрицательный пик \mathcal{P}_α и описывающие его величины x_α^b , x_α^e , x_α , h_α , u_α , w_α .

Таблица 2. Число пиков в интервалах $I \in \mathcal{F}$

I	I^1	I^2	I^3	I^4	I^5	I^6	I^7	I^8	I^9	I^{10}	I^{11}	I^{12}	I^{13}
N_I	19938	29308	42818	62606	91233	33498	24102	11082	8108	3745	2603	1171	859
$N_{3,I}$	6640	9746	13857	19929	28786	9593	6796	3077	2134	1010	696	322	224
$N_{4,I}$	2390	3344	4932	6961	9987	2960	2019	867	634	273	201	98	60
$N_{5,I}$	724	983	1482	2147	3069	766	540	222	162	63	59	25	17
$N_{6,I}$	179	277	393	569	829	169	132	55	36	16	12	5	1

Таблица 3. Величина \bar{C} для интервалов $I \in \mathcal{F}$

I	I^1	I^2	I^3	I^4	I^5	I^6	I^7	I^8	I^9	I^{10}	I^{11}	I^{12}	I^{13}
\bar{C}	3.031	3.185	3.473	3.331	3.493	2.647	2.626	2.381	2.508	2.369	2.470	1.992	1.830

В табл. 2 представлено число пиков N_I , вычисленное для всех интервалов $I \in \mathcal{F}$. Кроме того, в таблице представлены величины $N_{\eta,I} \doteq |\mathfrak{P}_{\eta,T}|$ – число пиков $\mathcal{P}_\alpha \in \mathfrak{P}_{\eta,T}$ в интервале I – для значений $\eta = 3, 4, 5, 6$.

Получим экспериментальную оценку константы C в формуле (16), определив для пиков \mathcal{P}_α , $\alpha \in A_I$, интервала I величины $C(\alpha, T)$ из условия

$$h_\alpha = C(\alpha, T)T^{1/4}(\ln T)^{\rho(\alpha, T)/2},$$

в котором величина $\rho(\alpha, T)$ определяется равенством

$$u_\alpha = T^{1/2}(\ln T)^{-\rho(\alpha, T)}.$$

В табл. 3 представлены вычисленные значения величины $\bar{C} = \bar{C}(T) = \max_{\alpha \in A_I} \{C(\alpha, T)\}$ для всех интервалов $I \in \mathcal{F}$. Отметим, что полученные значения величины \bar{C} значительно меньше представленной в разд. 2 теоретической верхней оценки.

Имея множество пиков \mathfrak{P}_T в интервале I , можно вычислить значение показателя $\rho(\eta, T)$ для подмножества пиков, таких что $h_\alpha \geq \eta T^{1/4}$, из условия

$$u_{\min} = T^{1/2}(\ln T)^{-\rho(\eta, T)},$$

где

$$u_{\min} = \min_{\mathcal{P}_\alpha \in \mathfrak{P}_{\eta, T}} \{u_\alpha\},$$

а также показателя $\rho_h(T)$ для самого высокого пика интервала I из условия

$$u_h = T^{1/2}(\ln T)^{-\rho_h(T)},$$

где u_h – ширина самого высокого пика. Значения показателей ρ , вычисленные для всех интервалов $I \in \mathcal{F}$, $\eta = 2, 3, 4, 5, 6$ и самых высоких пиков представлены в табл. 4.

Из неравенства (18) следует, что

$$|P(x)| \leq Cx^{1/4}(\ln x)^\lambda, \quad x \in I^\cup, \tag{20}$$

где

$$\lambda = \max_{I \in \mathcal{F}} \{\rho_h(T)\}/2.$$

Таким образом (см. последнюю строку табл. 4), мы получаем для показателя степени логарифма в (20) верхнюю оценку $\lambda \leq 0.6$, что соответствует утверждению работы [9].

Рассмотрим зависимость числа пиков от ширины. Пусть $\tilde{N}_{\eta, I}(\rho)$ – число пиков $P_\alpha \in \mathfrak{P}_{\eta, T}$ в интервале I , таких что $u_\alpha < T^{1/2}(\ln T)^{-\rho}$, $\bar{N}_{\eta, I}(\rho)$ – число пиков $P_\alpha \in \mathfrak{P}_{\eta, T}$ в интервале I , таких что

Таблица 4. Значение показателей $\rho(\eta, T)$, $\rho_h(T)$ для интервалов $I \in \mathcal{F}$

I	I^1	I^2	I^3	I^4	I^5	I^6	I^7	I^8	I^9	I^{10}	I^{11}	I^{12}	I^{13}
$\rho(2, T)$	1.859	1.883	1.919	1.953	1.995	2.023	2.012	2.030	1.973	1.955	2.023	1.934	1.951
$\rho(3, T)$	1.700	1.729	1.760	1.761	1.788	1.761	1.765	1.875	1.815	1.624	1.693	1.567	1.618
$\rho(4, T)$	1.581	1.578	1.605	1.643	1.672	1.688	1.648	1.641	1.502	1.501	1.410	1.375	1.259
$\rho(5, T)$	1.397	1.453	1.459	1.466	1.505	1.484	1.478	1.451	1.328	1.279	1.174	1.277	1.123
$\rho(6, T)$	1.284	1.380	1.339	1.358	1.364	1.362	1.285	1.186	1.231	1.200	1.008	0.959	0.846
$\rho_h(T)$	0.856	0.923	0.875	1.007	1.085	0.895	0.848	1.186	0.758	0.782	0.966	0.950	0.846

Таблица 5. Число пиков в зависимости от ширины в интервалах $I \in \mathcal{F}$

I	I^1	I^2	I^3	I^4	I^5	I^6	I^7	I^8	I^9	I^{10}	I^{11}	I^{12}	I^{13}
$\tilde{N}_{3,I}(2)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\tilde{N}_{3,I}(3/2)$	383	576	846	1214	1713	505	326	128	78	28	16	3	3
$\tilde{N}_{3,I}(1)$	5499	8117	11489	16372	23607	7990	5656	2494	1686	783	554	248	170
$\bar{N}_{3,I}(1)$	1141	1629	2368	3557	5179	1603	1140	583	448	227	142	74	54
$\bar{N}_{3,I}(3/4)$	94	137	218	298	478	125	81	39	32	11	9	8	2
$\bar{N}_{3,I}(1/2)$	1	0	0	4	2	0	0	0	0	0	1	0	0

$u_\alpha \geq T^{1/2}(\ln T)^{-\rho}$. В табл. 5 приведены значения величин $\tilde{N}_{\eta,I}(\rho)$, $\eta = 3$, $\rho = 2, 3/2, 1$, и $\bar{N}_{\eta,I}(\rho)$, $\eta = 3$, $\rho = 1, 3/4, 1/2$, вычисленные для каждого из интервалов $I \in \mathcal{F}$.

Данные первой строки табл. 5 означают, что на множестве $x \in I^\cup$ гипотеза о ширинах максимумов справедлива при $\eta = 3$, $\rho = 2$. Отсюда следует, что

$$|P(x)| \leq Cx^{1/4} \ln x, \quad x \in I^\cup.$$

Последняя строка таблицы показывает, что пики шире $T^{1/2}(\ln T)^{-1/2}$ встречаются крайне редко, что согласуется с Ω -оценкой (9).

Для каждого из интервалов $I \in \mathcal{F}$ были вычислены сумма длин оснований всех пиков S_X , суммы длин оснований положительных и отрицательных пиков S_X^\pm по отдельности, сумма полных (двусторонних) ширин всех пиков S_W и суммы полных (двусторонних) ширин положительных и отрицательных пиков S_W^\pm по отдельности:

$$S_X = \sum_\alpha (x_\alpha^c - x_\alpha^b + 1), \quad S_X^\pm = \sum_{\alpha: s_\alpha = \pm 1} (x_\alpha^c - x_\alpha^b + 1), \quad S_W = \sum_\alpha w_\alpha, \quad S_W^\pm = \sum_{\alpha: s_\alpha = \pm 1} w_\alpha.$$

В табл. 6 представлены отношения указанных величин к длине интервала $|I|$.

Значения $S_W^\pm/|I|$ суть экспериментальные оценки сверху для констант C^\pm в (12) при условии, что в (11) $C_\pm = 2$. Отметим, что представленные отношения слабо зависят от интервала I , для которого они вычислены, хотя некоторая тенденция к уменьшению этих величин при увеличении T наблюдается.

Рассмотрим вопрос перемены знаков s_α в последовательности пиков $\{\mathcal{P}_\alpha\}$, $\alpha \in A_I$, интервала I . Выберем из исходной последовательности $\{\mathcal{P}_\alpha\}$ подпоследовательность пиков с чередующимися знаками $\{\mathcal{P}_{\alpha_k}^{\text{alt}}\}$, $\alpha_k \in A_I^{\text{alt}} = \{\alpha_0, \dots, \alpha_{K-1}\} \subseteq A_I$, используя следующую рекуррентную формулу:

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_k = \min\{\alpha' \in A_I : \alpha' > \alpha_{k-1}, s_{\alpha'} = -s_{\alpha_{k-1}}\},$$

Таблица 6. Отношения сумм длин оснований и ширин пиков к длине интервала $|I|$, $I \in \mathcal{F}$

I	I^1	I^2	I^3	I^4	I^5	I^6	I^7	I^8	I^9	I^{10}	I^{11}	I^{12}	I^{13}
$\frac{S_X}{ I }$	0.449	0.450	0.447	0.448	0.447	0.410	0.403	0.398	0.399	0.399	0.398	0.390	0.401
$\frac{S_X^+}{ I }$	0.236	0.236	0.233	0.234	0.232	0.211	0.207	0.203	0.204	0.203	0.201	0.200	0.205
$\frac{S_X^-}{ I }$	0.213	0.214	0.214	0.215	0.215	0.199	0.196	0.195	0.195	0.196	0.197	0.190	0.195
$\frac{S_W}{ I }$	0.230	0.226	0.224	0.222	0.221	0.209	0.207	0.203	0.203	0.203	0.198	0.194	0.193
$\frac{S_W^+}{ I }$	0.123	0.121	0.119	0.119	0.118	0.111	0.110	0.107	0.108	0.107	0.106	0.103	0.101
$\frac{S_W^-}{ I }$	0.108	0.105	0.105	0.104	0.103	0.098	0.097	0.096	0.095	0.096	0.092	0.091	0.092

Таблица 7. Значение величин v , \bar{d} и d_{\max} для интервалов $I \in \mathcal{F}$

I	I^1	I^2	I^3	I^4	I^5	I^6	I^7	I^8	I^9	I^{10}	I^{11}	I^{12}	I^{13}
v	0.25	0.24	0.23	0.23	0.23	0.23	0.22	0.22	0.22	0.21	0.22	0.21	0.21
\bar{d}	0.634	0.634	0.630	0.626	0.615	0.586	0.584	0.580	0.554	0.574	0.546	0.566	0.557
d_{\max}	2.376	2.509	2.449	2.259	2.223	1.882	1.849	1.765	1.624	1.581	1.644	1.437	1.651

и вычислим расстояния D_k между соседними пиками подпоследовательности $\{\mathcal{P}_{\alpha_k}^{\text{alt}}\}$:

$$D_k = D(\mathcal{P}_{\alpha_{k+1}}, \mathcal{P}_{\alpha_k}) \doteq x_{\alpha_{k+1}} - x_{\alpha_k}, \quad k = 0, \dots, K - 2.$$

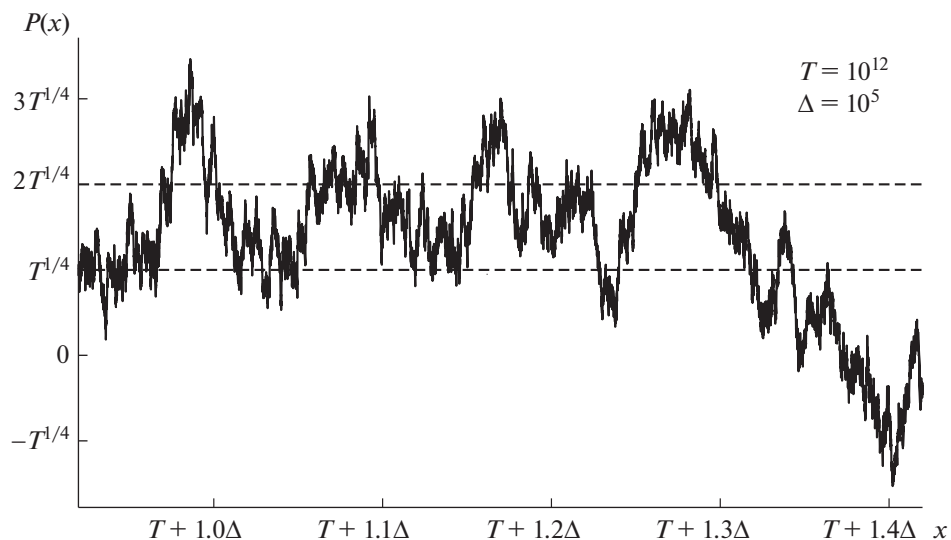
Перемены знака функции $P(x)$ в интервале I с выходом за барьер $\pm 2T^{1/4}$ могут быть охарактеризованы следующими величинами: $v \doteq (K - 1)/N_I$ (относительная частота перемены знака), $\bar{d} \doteq \bar{D}T^{-1/2}$, где $\bar{D} = (K - 1)^{-1} \sum_k D_k$ – среднее расстояние, и $d_{\max} \doteq D_{\max}T^{-1/2}$, где $D_{\max} = \max_k \{D_k\}$ – максимальное расстояние.

Массив расстояний D был построен для каждого из интервалов $I \in \mathcal{F}$. Результаты вычисления величин v , \bar{d} и d_{\max} приведены в табл. 7.

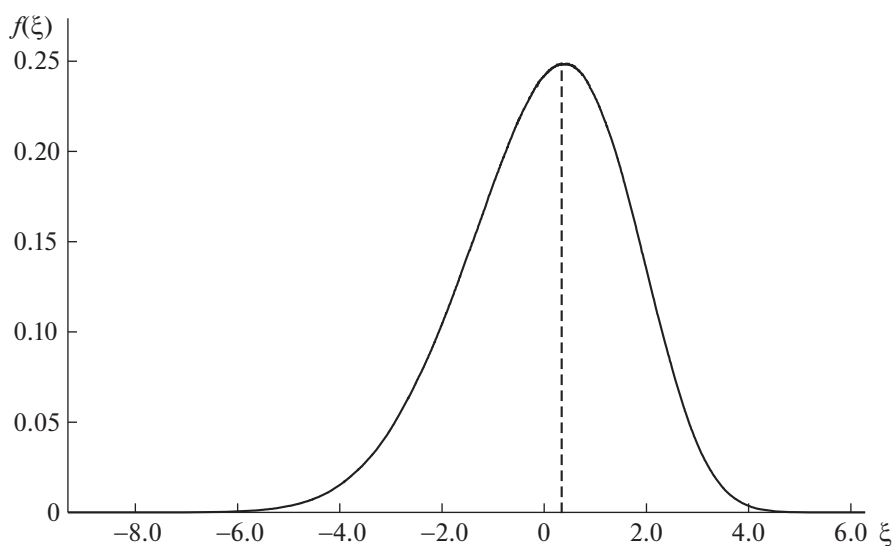
Относительная частота перемены знака v изменяется в пределах от 0.21 до 0.25. Это означает, что в последовательностях пиков должны встречаться длинные (≥ 4) серии подряд идущих пиков одного знака. Пример такой серии положительных пиков представлен на фиг. 2, где изображен график функции $P(x)$ на части интервала I^{13} ($T = 10^{12}$) длиной 5×10^4 . Штриховыми горизонтальными линиями на рисунке проведены пороговые значения, используемые в процессе построения положительных пиков функции $P(x)$.

На фиг. 3 представлена построенная гистограмма распределения значений функции $Q(x) = P(x)x^{-1/4}$ в целых точках интервала $\bigcup_{0 \leq i \leq 6} I^i = [1, 3.2 \times 10^8]$, которая представляет собой приближение определенной в (13) плотности распределения $f(\xi)$ значений функции $Q(x)$.

Минимальное и максимальное значения Q в интервале равны -9.324 и 6.283 соответственно. Гистограмма построена с использованием 2000 ячеек, размер ячейки равен 0.008. Максимальное значение гистограммы равно 0.249 и достигается в ячейке, центр которой имеет координату $\xi_{\max} = 0.341$.



Фиг. 2. Серия из 4 подряд идущих положительных пиков, $T = 10^{12}$.



Фиг. 3. Гистограмма распределения значений функции $Q(x) = P(x)x^{-1/4}$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы относительно поведения функции $P(x)$, $x \in I^\cup$, в области больших отклонений от нуля, вытекающие из результатов численного эксперимента.

Все достаточно высокие максимумы являются широкими и гипотеза о ширинах максимумов справедлива при $\eta = 3$ ($h_\alpha \geq 3T^{1/4}$), $\rho = 2$. Очень широкие максимумы (такие, что $u_\alpha \geq T^{1/2}(\ln T)^{-1/2}$) встречаются редко, что согласуется с Ω -оценкой.

Имеет место оценка

$$|P(x)| \leq Cx^{1/4}(\ln x)^{0.6}, \quad x \in I^\cup.$$

Суммарная длина интервалов $X_\alpha \subset [T, T + \Delta T]$, $T \gg 1$, $1 \ll \Delta T \leq T$, в которых имеют место большие отклонения функции $P(x)$ от нуля, именно $|P(x)| \geq T^{1/4}$, $x \in X_\alpha$, и $\sup_{x \in X_\alpha} |P(x)| \geq 2T^{1/4}$, составляет 40–45% длины общего интервала $[T, T + \Delta T]$. Соседние большие отклонения в одну сторону (положительные и отрицательные) формируют группы; среднее число отклонений в группе составляет 4–5. Знаки соседних групп чередуются, и среднее расстояние между соседними группами составляет $\sim 0.6T^{1/2}$.

Анализ приведенных в табл. 4 величин $\rho(\eta, T)$ при любом фиксированном значении η показывает, что эти величины слабо зависят от интервала I , для которого они вычислены, и тенденция к увеличению $\rho(\eta, T)$ при увеличении T не наблюдается. Это можно считать экспериментальным подтверждением гипотезы о ширинах максимумов в целом. Кроме того, данные табл. 4 дают основание полагать, что неравенство (19) выполняется в случае $\rho = 2$ (по крайней мере, при $\eta \geq 3$). Таким образом, гипотетически

$$|P(x)| \leq Cx^{1/4}(\ln x), \quad x \gg 1.$$

Авторы благодарят М.А. Королёва за помощь и полезные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В этом приложении доказана общая теорема, позволяющая, в частности, связать высоту и ширину максимумов функции $|P(x)|$. Схема доказательства этой теоремы (без указания констант) была дана в [10].

Теорема. Пусть $P(x)$ — остаточный член в проблеме круга. Пусть T , u — вещественные числа, $1 \leq u < T$, λ — вещественное число, $0 < \lambda < 1$. Тогда если при всех x , $T \leq x \leq T + u$, выполнено неравенство

$$|P(x) - P(T)| \leq \lambda |P(T)|, \tag{21}$$

то существует и может быть явно указана абсолютная константа B_1 , такая что

$$|P(T)| \leq \frac{B_1}{1 - \lambda} \frac{T^{3/4}}{u}. \tag{22}$$

Если, кроме того, выполнено условие $u < \sqrt{T}$, то существует и может быть явно указана абсолютная константа B_2 , такая что

$$|P(T)| \leq \frac{B_2}{1 - \lambda} \sqrt{\frac{T}{u}}. \tag{23}$$

Доказательство. Рассмотрим величину

$$A = \frac{1}{u} \int_T^{T+u} P(x) dx.$$

Имеет место очевидное тождество

$$P(T) = A + \frac{1}{u} \int_T^{T+u} (P(T) - P(x)) dx.$$

Так как в силу условия теоремы для всех x , $T \leq x \leq T + u$ выполнено неравенство (21), то справедливо неравенство

$$|P(T)| \leq |A| + \lambda |P(T)|,$$

и, следовательно, справедливо неравенство

$$|P(T)| \leq \frac{1}{1 - \lambda} |A|. \tag{24}$$

Поэтому для получения оценок (22), (23) достаточно оценить величину A .

Запишем величину A в виде

$$A = \frac{1}{u} \int_0^{T+u} P(x) dx - \frac{1}{u} \int_0^T P(x) dx. \quad (25)$$

Используем формулу Ландау [17], согласно которой

$$\int_0^x P(y) dy = \frac{x}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n} J_2(2\pi\sqrt{nx}), \quad (26)$$

где $J_2(\cdot)$ – функция Бесселя, а ряд в правой части (26) сходится абсолютно. Применяя (26) к обоим членам в правой части (25), получаем

$$A = A_0 + \Delta A,$$

где

$$A_0 = \frac{1}{\pi u} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n} (J_2(2\pi\sqrt{n(T+u)}) - J_2(2\pi\sqrt{nT})), \quad \Delta A = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n} J_2(2\pi\sqrt{n(T+u)}).$$

Известно, что асимптотический ряд для функции Бесселя является обертывающим при $x > 1$ [18], поэтому

$$J_2(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \pi/4) + \Delta J_2(x), \quad (27)$$

причем

$$|\Delta J_2(x)| \leq \frac{15}{8} \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-3/2}. \quad (28)$$

Используя (27), (28), получаем для величины ΔA следующую оценку:

$$|\Delta A| \leq C_1 T^{-1/4} + C_2 T^{-3/4}, \quad (29)$$

где

$$C_1 = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^{5/4}}, \quad C_2 = \frac{15}{16} \frac{1}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^{7/4}}. \quad (30)$$

Подставляя (27) в выражение для A_0 , используя (28) и учитывая, что при $u < T$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{T^{1/4}} - \frac{1}{(T+u)^{1/4}} \leq \frac{1}{4} \frac{u}{T} \frac{1}{T^{1/4}},$$

получаем

$$A_0 = A_{00} + \Delta A_0,$$

где

$$A_{00} = \frac{1}{\pi^2} \frac{T}{u} \frac{1}{T^{1/4}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^{5/4}} (\cos(2\pi\sqrt{nT} - \pi/4) - \cos(2\pi\sqrt{n(T+u)} - \pi/4))$$

и

$$|\Delta A_0| \leq \frac{1}{4} C_1 T^{-1/4} + 2C_2 \frac{T^{1/4}}{u}. \quad (31)$$

Очевидная оценка для A_{00} имеет вид

$$|A_{00}| \leq 2C_1 \frac{T^{3/4}}{u},$$

и, следовательно,

$$|A| \leq \frac{T^{3/4}}{u} (2C_1 + 2C_2 T^{-1/2} + \frac{5}{4} C_1 u T^{-1} + C_2 u T^{-3/2}).$$

Учитывая неравенство (24), легко имеем из последнего неравенства первое утверждение теоремы (формулу (22)).

Докажем второе утверждение теоремы (формулу (23)), для чего оценим величину A_{00} в случае $u < T^{1/2}$ более аккуратно. Запишем величину A_{00} в виде

$$A_{00} = \frac{1}{\pi^2} \frac{T^{3/4}}{u} S, \tag{32}$$

где

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^{5/4}} (\cos(2\pi\sqrt{nT} - \pi/4) - \cos(2\pi\sqrt{n(T+u)} - \pi/4)).$$

Ясно, что

$$|S| \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^{5/4}} |\sin(\pi\sqrt{n}(\sqrt{T+u} - \sqrt{T}))|.$$

Используя неравенства

$$|\sin x| \leq x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2, \quad |\sin x| \leq 1, \quad x > \pi/2, \\ \sqrt{T+u} - \sqrt{T} \leq \frac{1}{2} \frac{u}{\sqrt{T}}, \quad u < \sqrt{T},$$

получаем

$$|S| \leq \pi \frac{u}{\sqrt{T}} S_1 + 2S_2, \tag{33}$$

где

$$S_1 = \sum_{1 \leq n \leq x} \frac{r(n)}{n^{3/4}}, \quad S_2 = \sum_{n > x} \frac{r(n)}{n^{5/4}}, \quad x = T/u^2.$$

Оценим суммы S_1 и S_2 , используя формулу частичного суммирования Абеля [19]. Для суммы S_1 формула Абеля дает

$$S_1 = \sum_{1 \leq n \leq x} r(n) x^{-3/4} + \frac{3}{4} \int_1^x \sum_{1 \leq n \leq y} r(n) y^{-7/4} dy.$$

Для входящих в последнюю формулу сумм используем следующую грубую оценку:

$$\sum_{1 \leq n \leq x} r(n) < R(x) < \pi(x + 2\sqrt{x} + 1).$$

В результате элементарных вычислений получаем

$$S_1 \leq 4\pi x^{1/4} + 4\pi. \tag{34}$$

Для суммы S_2 формула Абеля дает

$$S_2 = \frac{5}{4} \int_x^{\infty} \sum_{x < n \leq y} r(n) y^{-9/4} dy.$$

Для входящей в последнюю формулу суммы снова используем грубую оценку:

$$\sum_{x < n \leq y} r(n) < R(y) < \pi(y + 2\sqrt{y} + 1).$$

В результате элементарных вычислений получаем

$$S_2 \leq 5\pi x^{-1/4} + \frac{10\pi}{3} x^{-3/4} + \pi x^{-5/4}. \quad (35)$$

Подставляя (34), (35) в (33) и делая замену $x = T/u^2$, имеем

$$|S| \leq (4\pi^2 + 10\pi) \frac{u^{1/2}}{T^{1/4}} + 4\pi^2 \frac{u}{T^{1/2}} + \frac{20\pi}{3} \frac{u^{3/2}}{T^{3/4}} + 2\pi \frac{u^{5/2}}{T^{5/4}}. \quad (36)$$

Подставляя теперь (36) в (32), получаем искомую оценку для A_{00} :

$$|A_{00}| \leq \left(4 + \frac{10}{\pi}\right) \frac{T^{1/2}}{u^{1/2}} + 4T^{1/4} + \frac{20}{3\pi} u^{1/2} + \frac{2}{\pi} \frac{u^{3/2}}{T^{1/2}}. \quad (37)$$

Собирая вместе оценки (29), (31) и (37) (напомним, что $|A| \leq |A_{00}| + |\Delta A_0| + |\Delta A|$), имеем окончательно

$$|A| \leq \frac{T^{1/2}}{u^{1/2}} \left(\left(4 + \frac{10}{\pi}\right) + 4 \frac{u^{1/2}}{T^{1/4}} + \frac{20}{3\pi} \frac{u}{T^{1/2}} + \frac{2u^2}{\pi T} + \frac{5}{4} C_1 \frac{u^{1/2}}{T^{3/4}} + 2C_2 \frac{1}{T^{1/4} u^{1/2}} + C_2 \frac{u^{1/2}}{T^{5/4}} \right). \quad (38)$$

Учитывая неравенство (24), легко имеем из неравенства (38) второе утверждение теоремы (формулу (23)). Теорема полностью доказана.

Сделаем следующие замечания.

Утверждения теоремы остаются справедливыми в том случае, если неравенство (21) выполняется при всех x , $T - u \leq x \leq T$. Доказательство может быть проведено аналогично, константы несколько изменятся.

Как указал М.А. Королёв, суммы рядов, входящих в определение констант C_1 и C_2 (формула (30)), равны

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^{5/4}} = 15.2383229\dots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^{7/4}} = 7.0100360\dots$$

Если выбрать $u = T^{1/2}(\ln T)^{-q}$, $q > 0$, и положить $\lambda = 1/2$, то из (24) и (38) получим следующее неравенство:

$$|P(T)| \leq 2T^{1/4}(\ln T)^{q/2} \left(\left(4 + \frac{10}{\pi}\right) + 4(\ln T)^{-q/2} + \frac{20}{3\pi} (\ln T)^{-q} + \frac{2}{\pi} (\ln T)^{-2q} + 2C_2 \frac{(\ln T)^{q/2}}{T^{1/2}} + \frac{5}{4} C_1 \frac{(\ln T)^{-q/2}}{T^{1/2}} + C_2 \frac{(\ln T)^{-q/2}}{T} \right). \quad (39)$$

При $T \geq 10^7$ и $1/2 \leq q \leq 2$ из (39) следует

$$|P(T)| \leq 20T^{1/4}(\ln T)^{q/2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Krätzel E. Lattice Points. Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1988. 320 p.
2. Huxley M.N. Area, Lattice Points, and Exponential Sums. Oxford: Clarendon Press, 1996. xii+494 P.
3. Bourgain J., Watt N. Mean Square of Zeta Function, Circle Problem, and Divisor Problem. arXiv: 1709.04340.
4. Попов Д.А. Проблема круга и спектр оператора Лапласа на замкнутых двумерных многообразиях // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74. В. 5. С. 146–162.
5. Frazer W., Botlibie C.C. A Calculation of Number of Lattice Points in the Circle and Sphere // Math. Comp. 1962. V. 16. P. 282–290.
6. Keller H.B., Swenson J.R. Experiments on the Lattice Problem of Gauss // Math. Comp. 1963. V. 17. P. 223–230.
7. Mitchell W.C. The Number of Lattice Points in a k -dimensional Hypersphere // Math. Comp. 1966. V. 20. P. 300–310.

8. *Keller H.B.* Numerical Studies of the Gauss Lattice Problem. Technical Report. Pasadena, CA: California Institute of Technology, 1997. 11 P.
9. *Bleher P.M., Cheng Z., Dyson F.J., Lebowitz J.L.* Distribution of the Error Term for the Number of Lattice Points Inside a Shifted Circle // *Comm. Math. Phys.* 1993. V. 154. № 3. P. 433–469.
10. *Попов Д.А.* Оценки и поведение величин, на коротких интервалах // *Изв. РАН.* 2016. Т. 80. № 6. С. 230–246.
11. *Постников А.Г.* Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука, 1971. 416 С.
12. *Gangadharan K.S.* Two Classical Lattice Point Problems // *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 1961. V. 57. P. 699–721.
13. *Soundararajan K.* Omega Results for Divisor and Circle Problems // *IMRN.* 2003. N 36. P. 1987–1998.
14. *Heath-Brown D.R., Tsang K.* Sign changes of $E(T)$, $\Delta(x)$, and $P(x)$ // *J. Numb. Theory.* 1994. V. 49. P. 73–83.
15. *Heath-Brown D.R.* The Distribution and Moments of the Error Term in the Dirichlet Divisor Problem // *Acta Arith.* 1992. V. 60. N. 4. P. 389–415.
16. *Lan V.-K., Tsang K.-M.* Moments of Short Intervals // *Arch. Math.* 2005. V. 84. N. 3. P. 249–257.
17. *Landau E.* Vorlesungen über Zahlentheorie, v. 2. Leipzig: S. Hirzel, 1927. vii+308 S.
18. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций, часть 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 798 с.
19. *Карацуба А.А.* Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983. 240 с.

**ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ**

УДК 519.658

**ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ КЛАССА
ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ОГРАНИЧЕНИЕМ В ВИДЕ
ПОДМНОЖЕСТВА ТОЧЕК ГЛАДКОЙ ПОВЕРХНОСТИ**© 2022 г. Ю. А. Черняев¹, *¹ 420111 Казань, ул. К. Маркса, 10, Казанский национальный исследовательский
технический университет им. А.Н. Туполева, Россия

*e-mail: chernyuri@mail.ru

Поступила в редакцию 27.05.2021 г.
Переработанный вариант 11.07.2022 г.
Принята к публикации 04.08.2022 г.

Предлагается численный алгоритм минимизации выпуклой функции на теоретико-множественной разности множества точек гладкой поверхности и объединения конечного числа выпуклых открытых множеств в n -мерном евклидовом пространстве. Идея алгоритма состоит в сведении исходной задачи к последовательности задач выпуклого программирования. Исследуются необходимые условия экстремума и вопросы сходимости рассматриваемого алгоритма. Библ. 18.

Ключевые слова: гладкая поверхность, выпуклое открытое множество, задача выпуклого программирования, необходимые условия локального минимума, сходимость алгоритма.

DOI: 10.31857/S0044466922120080**ВВЕДЕНИЕ**

Один из подходов к решению задачи вида $\varphi(x) \rightarrow \min, x \in X \subset E^n$, в случае выпуклой негладкой функции $\varphi(x)$ и невыпуклого замкнутого множества X состоит в сведении исходной задачи минимизации к последовательности задач выпуклого программирования. В [1] был рассмотрен случай, когда X представляет собой гладкую поверхность произвольного вида, а в [2] – пересечение гладкой поверхности с выпуклым компактом. При реализации алгоритмов, предлагаемых в указанных работах, на каждой итерации решается задача минимизации $\varphi(x)$ на выпуклом компактном подмножестве точек некоторой вспомогательной гиперплоскости. Сходимость алгоритмов не зависит от выбора метода решения вспомогательных задач выпуклого программирования, поэтому удачный выбор соответствующего метода может повысить эффективность вычислений.

При реализации ряда методов решения вычислительных задач, особенно при поиске экстремумов функций, существенно используется аппарат проектирования точки на множество. Среди работ, посвященных таким методам, можно отметить, например, [3]–[14]. В тех ситуациях, когда поиск проекций не удается осуществлять точными методами, используются итерационные процедуры. Последнее обстоятельство существенно снижает эффективность метода решения исходной вычислительной задачи, однако на практике такой подход иногда оказывается наиболее целесообразным, поскольку методы непроекционного типа могут иметь свои существенные недостатки и ограничения в использовании.

В настоящей работе изучается задача минимизации выпуклой негладкой функции $\varphi(x)$ на множестве $X \subset E^n$, представимом в виде теоретико-множественной разности множества точек гладкой поверхности S и объединения конечного числа выпуклых открытых множеств $\text{int } G_i$, $i = 1, 2, \dots, l$, где каждое из замкнутых множеств G_i в любой своей граничной точке имеет единственную опорную гиперплоскость.

В процессе использования алгоритма на каждой итерации приходится находить решение $z(x_k)$ вспомогательной задачи минимизации $\varphi(x)$ на компактном пересечении конечного числа

замкнутых полупространств, содержащих точку x_k , и касательной гиперплоскости к поверхности S , построенной в точке x_k . В силу выпуклости гиперплоскости, полупространств и функции $\varphi(x)$, эта задача может быть приближенно решена с помощью одного из итерационных методов выпуклого программирования. При использовании метода проекции субградиента, рассмотренного в [15, с. 281–287], на каждой итерации необходимо вычислять произвольный субградиент функции $\varphi(x)$ в точке x_k и находить проекцию некоторой точки на соответствующее выпуклое множество. Поскольку это множество задается линейными неравенствами и линейным равенством, то задача проектирования точки на него сводится к задаче квадратичного программирования и может быть решена с помощью конечношаговых алгоритмов. Отметим, что число неравенств с ростом n и l возрастает; при малых значениях n и l (например, при $n = 2$ и $l = 1$) оно становится небольшим, и тогда для поиска проекции вместо решения задачи квадратичного программирования возможно использование более простых частных приемов.

Наиболее сложной при реализации предлагаемого алгоритма является вспомогательная задача нахождения проекции точки на пересечение гладкой поверхности S и l полупространств, которое в общем случае является невыпуклым. В работе [16] и библиографии к ней предлагаются итерационные алгоритмы нахождения проекции точки на множество вида $\{x \in A : g(x) = 0\}$, где A – выпуклый компакт, а $g(x)$ удовлетворяет тому или иному условию подчинения. Одним из таких условий является липшицевость $g(x)$ на A . При реализации метода, предлагаемого в настоящей работе, на каждой итерации требуется проектировать различные точки отрезка $[x_k, z(x_k)]$, при этом расстояние от проектируемой точки до ее проекции не может превосходить величину $\|x_k - z(x_k)\|$, поэтому в качестве A можно брать соответствующее пересечение l полупространств и замкнутого шара с центром в проектируемой точке и радиусом, не меньшим величины $\|x_k - z(x_k)\|$. Поскольку гладкая поверхность может быть задана в виде $S = \{x \in E^n : g(x) = 0\}$, где $g(x) \in C^1(E^n)$, то $g(x)$ на любом компакте, очевидно, является липшицевой.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМ

Рассмотрим задачу вида $\varphi(x) \rightarrow \min, x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \in X \subset E^n$, в которой $\varphi(x)$ выпукла и непрерывна на E^n , а X непусто и представляет собой теоретико-множественную разность множества точек поверхности $S = \{x \in E^n : g(x) = 0\}$ и множества $\bigcup_{i=1}^l \text{int } G_i$, где $g(x) \in C^1(E^n)$, и при любом $x \in S$ имеет место $\|g'(x)\| \neq 0$, а $G_i, i = \overline{1, l}$, выпуклы и замкнуты и $\text{int } G_i, i = \overline{1, l}$, непусты. Пусть каждое из $G_i, i = \overline{1, l}$, в любой своей граничной точке x имеет единственную опорную гиперплоскость, нормаль которой считается внешней, т.е. для всех $y \in G_i$ орт $n^i(x)$ нормали удовлетворяет условию $\langle n^i(x), y - x \rangle \leq 0$. Тогда при каждом i орт $n^i(x)$ является непрерывной вектор-функцией на границе ∂G_i множества G_i .

Введем обозначения: $n(x) = g'(x) / \|g'(x)\|$ – орт нормали касательной гиперплоскости к поверхности S в точке $x \in S$; $\Lambda(x) = \{y \in E^n : \langle n(x), y - x \rangle = 0\}$ – касательная гиперплоскость к S в точке $x \in S$. В силу гладкости и невырожденности $g(x)$, гиперплоскость $\Lambda(x)$ существует для любого $x \in S$ и вектор-функция $n(x)$ непрерывна на S .

Считая $x \in X$, введем следующие обозначения: $s^i(x)$ – проекция точки x на множество G_i (в силу выпуклости и замкнутости G_i последняя существует и единственна), $n^i(x)$ – орт нормали опорной гиперплоскости к G_i в точке $s^i(x)$, $\Gamma^i(x) = \{e \in E^n : \langle n^i(s^i(x)), e - s^i(x) \rangle \geq 0\}$,

$$P(x) = \Gamma^1(x) \cap \Gamma^2(x) \cap \dots \cap \Gamma^l(x); \quad T(x) = \{y \in E^n : |y^{(s)} - x^{(s)}| \leq d_0 / \sqrt{n}, s = 1, 2, \dots, n\},$$

где d_0 – произвольное положительное число. Поскольку каждое из $G_i, i = \overline{1, l}$, в любой своей граничной точке x имеет только одну опорную гиперплоскость, то векторы $n^i(x)$, а значит, и полупространства $\Gamma^i(x), i = 1, 2, \dots, l$, определяются единственным образом для любого $x \in X$. По-

сколькx по построению $x \in \Lambda(x)$ и $x \in T(x)$, а при каждом $i = 1, 2, \dots, l$ имеет место $x \in \Gamma^i(x)$, то всегда $x \in \Lambda(x) \cap P(x) \cap T(x)$.

Через $z(x)$ будем обозначать произвольную точку минимума $\varphi(\cdot)$ на $\Lambda(x) \cap P(x) \cap T(x)$. В силу замкнутости $\Lambda(x)$ и $\Gamma^i(x)$, $i = 1, 2, \dots, l$, компактности $T(x)$ и непрерывности $\varphi(\cdot)$, точка $z(x)$ при любом $x \in X$ существует.

Для решения поставленной задачи предлагается использовать следующий алгоритм построения последовательных приближений.

Шаг 0. Задается $d_0 > 0$ и полагается $k = 0$.

Шаг 1. Пусть $x_k \in X$ есть k -е приближение.

Шаг 2. Строятся гиперплоскость $\Lambda(x_k)$, проекции $s^i(x_k)$, $i = 1, 2, \dots, l$, полупространства $\Gamma^i(x_k)$, $i = 1, 2, \dots, l$, и куб $T(x_k)$.

Шаг 3. Определяется точка $z(x_k)$ – решение задачи $\varphi(x) \rightarrow \min, x \in \Lambda(x_k) \cap P(x_k) \cap T(x_k)$.

Шаг 4. Если $\varphi(x_k) = \varphi(z(x_k))$, то вычисления заканчиваются, иначе осуществляется переход к шагу 5.

Шаг 5. Задается $\alpha_k \in (0; 1]$.

Шаг 6. Пусть x_{k+1} – проекция точки $x_k + \alpha_k(z(x_k) - x_k)$ на $S \cap P(x_k)$.

Шаг 7. Полагается $k := k + 1$ и осуществляется переход к шагу 1.

В [10] изучена задача минимизации гладкой функции на множестве X рассматриваемого вида и показано, что вспомогательная задача проектирования точки на $S \cap P(x_k)$ всегда имеет решение. Ниже будет показано, что выполнение равенства $\varphi(x_k) = \varphi(z(x_k))$ при некотором конечном k означает, что x_k удовлетворяет необходимому условию локального минимума $\varphi(x)$ на X . Это равенство может не выполняться ни при каком k , тогда алгоритм становится итерационным.

Будем считать, что при выбранном начальном приближении $x_0 \in X$ выполняются условия:

1) множество $M(x_0) = \{x \in X : \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}$ ограничено;

2) для любого $x \in M(x_0)$ гиперплоскость $\Lambda(x)$ и множество внутренних точек $P(x)$ имеют непустое пересечение.

В [10] указаны некоторые частные случаи, когда для любого $x \in M(x_0)$ пересечение $\Lambda(x)$ и $\text{int } P(x)$ заведомо непусто. В силу непрерывности $\varphi(x)$ и замкнутости X , вытекающей из замкнутости S и открытости $\text{int } G_i$, $i = \overline{1, l}$, множество $M(x_0)$ компактно, при этом для любого $x \in M(x_0)$ имеем $\|x - z(x)\| \leq d_0$.

Пусть $D(x) = \{y \in R^n : \|x - y\| \leq 2d_0\}$ – шар радиуса $2d_0$ с центром в точке x , а Y – такое выпуклое компактное множество, что для любого $x \in M(x_0)$ справедливо включение $D(x) \subset Y$. В силу компактности Y и замкнутости S пересечение этих множеств является компактным, поэтому существует $K = \min_{x \in S \cap Y} \|g'(x)\| > 0$, так как $g(x) \in C^1(E^n)$ и $\|g'(x)\| \neq 0$ при любом $x \in S$. Заметим, что если $x \in M(x_0)$, то при любом $\alpha \in (0; 1]$ произвольная проекция точки $x + \alpha(z(x) - x)$ на множество $S \cap P(x)$ лежит в Y , поскольку

$$\begin{aligned} \|x - \text{Pr}_{S \cap P(x)}(x + \alpha(z(x) - x))\| &\leq \|x - (x + \alpha(z(x) - x))\| + \\ &+ \|(x + \alpha(z(x) - x)) - \text{Pr}_{S \cap P(x)}(x + \alpha(z(x) - x))\|, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где первое слагаемое в правой части неравенства равно $\alpha\|z(x) - x\|$ и не превосходит d_0 , а второе слагаемое не больше первого, так как $x \in S \cap P(x)$.

Будем полагать, что $g(x) \in C^{1,1}(Y)$, т.е. существует такая положительная константа Q , что для всех $x, y \in Y$ справедливо неравенство $\|g'(x) - g'(y)\| \leq Q\|x - y\|$. Тогда из показанного в [1] следует, что при $N = Q/K$ для всех $x, y \in S \cap Y$ имеет место $\|n(x) - n(y)\| \leq N\|x - y\|$.

В силу замкнутости $P(x)$ и компактности Y их пересечение компактно. Поскольку касательная гиперплоскость к S , построенная в произвольной точке $x \in M(x_0)$, имеет непустое пересече-

ние с $\text{int } P(x)$, то она имеет непустое пересечение и с $\text{int } P(x) \cap \text{int } Y$. Действительно, пусть $x \in M(x_0)$ и $h \in \text{int } P(x) \cap \Lambda(x)$, тогда $(x; h] \subset \text{int } P(x) \cap \Lambda(x)$, так как $\text{int } P(x)$ и $\Lambda(x)$ выпуклы и по построению $x \in P(x)$ и $x \in \Lambda(x)$. Из определения множества Y следует, что любая точка из $(x; h] \cap \text{int } D(x)$ лежит одновременно в $\Lambda(x)$, в $\text{int } P(x)$ и в $\text{int } Y$. Отсюда вытекает справедливость требуемого утверждения.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Справедливо следующее утверждение, доказательство которого приводится в [10].

Лемма 1. *Функции $\psi_1(x) = \max_{y \in P(x) \cap Y} \langle n(x), y - x \rangle$ и $\psi_2(x) = \min_{y \in P(x) \cap Y} \langle n(x), y - x \rangle$ непрерывны на $S \cap Y$.*

Замечание 1. Поскольку касательная гиперплоскость к S , построенная в произвольной точке x множества $M(x_0)$, имеет непустое пересечение с $\text{int } P(x) \cap \text{int } Y$, то при любом фиксированном $x \in M(x_0)$ имеет место $\psi_1(x) > 0$ и $\psi_2(x) < 0$, поэтому в силу компактности $M(x_0)$ существуют положительные константы $\varepsilon_1 = \min_{x \in M(x_0)} \psi_1(x)$ и $\varepsilon_2 = -\max_{x \in M(x_0)} \psi_2(x)$.

В силу компактности Y существует $d = \max_{x, y \in Y} \|x - y\| < \infty$. Обозначим $\varepsilon = 0.5 \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

Лемма 2. *Существует такое $\gamma > 0$, что при любом $x \in S \cap Y$, для которого $\min_{y \in M(x_0)} \|x - y\| \leq \gamma$, имеет место $\psi_1(x) \geq \varepsilon$, $\psi_2(x) \leq -\varepsilon$.*

Доказательство. Из компактности множества $S \cap Y$ и леммы 1 следует, что функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ равномерно непрерывны на $S \cap Y$. Это означает, что найдутся $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 > 0$, при которых для любых $x, y \in S \cap Y$ из неравенств $\|x - y\| \leq \gamma_1$ и $\|x - y\| \leq \gamma_2$ вытекают соответственно неравенства $|\psi_1(x) - \psi_1(y)| \leq \varepsilon$ и $|\psi_2(x) - \psi_2(y)| \leq \varepsilon$. Положим $\gamma = \min \{\gamma_1, \gamma_2\}$, тогда с учетом включения $M(x_0) \subset (S \cap Y)$ из сказанного вытекает справедливость утверждения леммы 2.

Замечание 2. Из неравенства (1.1) следует, что если $x_* \in M(x_0)$, то $\|x_* - \text{Pr}_S(x_* + 2^{-s}(z(x_*) - x_*))\| \leq 2d_0/2^s$, $s = 0, 1, \dots$. Решая относительно s неравенство $2d_0/2^s \leq \gamma$, получим $s \geq \log_2 2d_0/\gamma$. Отсюда и из леммы 2 следует, что при целых $s \geq \bar{s}_1$, где \bar{s}_1 – наименьший из номеров $s = 0, 1, \dots$, при котором выполняется указанное неравенство, имеет место

$$\psi_1(\text{Pr}_S(x_* + 2^{-s}(z(x_*) - x_*))) \geq \varepsilon, \quad \psi_2(\text{Pr}_S(x_* + 2^{-s}(z(x_*) - x_*))) \leq -\varepsilon.$$

Считая $x \in X$, введем обозначения: $y_s(x) = x + 2^{-s}(z(x) - x)$, $s = 0, 1, \dots$; $u_s(x)$ – проекция точки $y_s(x)$ на поверхность S ; $p_s(x)$ – проекция точки $y_s(x)$ на множество $S \cap P(x)$; $c_s(x)$ – решение задачи $\langle n(u_s(x)), y - u_s(x) \rangle \rightarrow \min, y \in P(x) \cap Y$, при $\langle n(u_s(x)), y_s(x) - u_s(x) \rangle \geq 0$ и задачи $\langle n(u_s(x)), y - u_s(x) \rangle \rightarrow \max, y \in P(x) \cap Y$, при $\langle n(u_s(x)), y_s(x) - u_s(x) \rangle < 0$. Отметим, что при фиксированных $x \in X$ и $s \in \{0, 1, \dots\}$ проекции $u_s(x)$ и $p_s(x)$ в общем случае определяются не однозначно, так как множества S и $S \cap P(x)$, вообще говоря, не являются выпуклыми. Точка $c_s(x)$ при выбранной проекции $u_s(x)$ тоже может определяться не однозначно, так как она есть точка минимума или максимума линейной функции, не являющейся строго выпуклой или строго вогнутой.

Пусть x_* – произвольная точка множества $M(x_0)$, которая не совпадает с $z(x_*)$. Введем обозначения: $L_s(x_*)$ – прямая, проходящая через точку $y_s(x_*)$ перпендикулярно $\Lambda(u_s(x_*))$ (в силу показанного в [1] она проходит и через точку $u_s(x_*)$); $\tilde{L}_s(x_*)$ – луч, начинающийся в точке $y_s(x_*)$ и проходящий через точку $c_s(x_*)$. Справедливо следующее утверждение, доказательство которого проводится аналогично доказательству соответствующего утверждения из [9].

Лемма 3. *Пусть $x_* \in M(x_0)$, $s \in \{0, 1, \dots\}$, v – произвольная точка множества Y , а δ и $\bar{\delta}$ – расстояния от точки v соответственно до гиперплоскости $\Lambda(u_s(x_*))$ и до прямой $L_s(x_*)$. Тогда, если v лежит на поверхности S , то при $0 < \delta < 2K/Q$ имеет место $\bar{\delta} \geq \sqrt{\delta(2K/Q - \delta)}$.*

С учетом справедливости леммы 3 аналогично тому, как это было сделано в [9], доказываются приведенные ниже утверждения. В проводимых при доказательстве рассуждениях множество F при фиксированном $x_* \in M(x_0)$ заменяется на $P(x_*) \cap T(x_*)$.

Лемма 4. Если $x_* \in M(x_0)$, то при всех целых $s \geq \max\{\bar{s}_1, \bar{s}_2\}$, где \bar{s}_1 и \bar{s}_2 – некоторые номера из множества $\{0, 1, \dots\}$, справедливо утверждение: если точка $y_s(x_*)$ не лежит на поверхности S , то на отрезке $[y_s(x_*); c_s(x_*)]$ существует точка, в которой $g(x)$ имеет знак, противоположный знаку $g(y_s(x_*))$.

Замечание 3. В данной формулировке \bar{s}_1 имеет тот же смысл, что и в замечании 2, а \bar{s}_2 – наименьший из номеров $s = 0, 1, \dots$, удовлетворяющий условию $s \geq \log_2 2\sqrt{3}Ndd_0/\varepsilon$, если $\varepsilon \geq K/Q$, и условиям $s \geq \log_2 2\sqrt{3}Ndd_0/\varepsilon$ и $s \geq \log_2 2d_0\sqrt{N(K-Q\varepsilon)}/\sqrt{K\varepsilon}$ одновременно, если $\varepsilon < K/Q$.

Лемма 5. Если $x_* \in M(x_0)$ и $\varphi(z(x_*)) < \varphi(x_*)$, то существует такая положительная константа M_0 , что при всех целых $s \geq \bar{s}$, где \bar{s} – некоторый номер из множества $\{0, 1, \dots\}$, имеет место

$$\|y_s(x_*) - p_s(x_*)\| \leq M_0 \|y_s(x_*) - u_s(x_*)\|.$$

Замечание 4. В данной формулировке $\bar{s} = \max\{\bar{s}_1, \bar{s}_2\}$, где \bar{s}_1 и \bar{s}_2 имеют тот же смысл, что и в замечаниях 2 и 3.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА

В этом разделе будут получены необходимые условия локального минимума $\varphi(x)$ на X и доказано предложение о сходимости алгоритма.

Лемма 6. Для того чтобы $x_* \in M(x_0)$ являлась точкой локального минимума функции $\varphi(x)$ на множестве X , необходимо выполнение равенства $\varphi(z(x_*)) = \varphi(x_*)$.

Доказательство. Пусть $x_* \in M(x_0)$ – произвольная точка локального минимума $\varphi(x)$ на X . Предположим, что $\varphi(z(x_*))$ не совпадает с $\varphi(x_*)$. Тогда поскольку $x_* \in \Lambda(x_*) \cap P(x_*) \cap T(x_*)$ и $z(x_*)$ – точка минимума $\varphi(x)$ на $\Lambda(x_*) \cap P(x_*) \cap T(x_*)$, то $\varphi(z(x_*)) < \varphi(x_*)$. В силу выпуклости $\varphi(x)$ это означает, что вектор $h_* = z(x_*) - x_*$ является направлением убывания $\varphi(x)$ в точке x_* . Тогда, повторяя рассуждения, проведенные в доказательстве соответствующей леммы из [9], получим, что x_* не является точкой локального минимума $\varphi(x)$ на X . Из этого противоречия вытекает справедливость утверждения данной леммы.

Утверждение леммы 6 означает, что произвольная точка $x \in M(x_0)$, доставляющая наименьшее значение $\varphi(\cdot)$ на $\Lambda(x) \cap P(x) \cap T(x)$, является стационарной, т.е. удовлетворяет необходимому (но, вообще говоря, не достаточному) условию локального минимума $\varphi(\cdot)$ на X . В частности, если при некотором k точка $x_k \in M(x_0)$ доставляет наименьшее значение $\varphi(\cdot)$ на $\Lambda(x_k) \cap P(x_k) \cap T(x_k)$, т.е. имеет место $\varphi(x_k) = \varphi(z(x_k))$, то x_k стационарна в смысле утверждения леммы 6. Если же равенство $\varphi(x_k) = \varphi(z(x_k))$ не выполняется ни при каком k , то алгоритм становится итерационным, однако ниже будет показано, что при некоторых условиях любая предельная точка $\{x_k\}$ является стационарной в смысле того же утверждения.

Отметим, что если $\varphi(x)$ не является строго выпуклой, то из справедливости равенства $\varphi(x_*) = \varphi(z(x_*))$ не следует, что точка $z(x_*)$ совпадает с x_* . Кроме того, выполнение данного равенства в общем случае не означает, что точка x_* доставляет локальный (а тем более, глобальный) минимум $\varphi(x)$ на X . Данное замечание относится и к необходимым условиям экстремума в задачах, рассмотренных в [1], [2], [9], [10].

Заметим, что множество X может быть задано с помощью функциональных ограничений в форме $X = \{x \in E^n : f_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, l; g(x) = 0\}$, где $g(x)$ является гладкой, а $f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, l$, – вогнутыми и гладкими на E^n , и для каждого $i = 1, 2, \dots, l$ существует такая точка \tilde{x}_i , что $f_i(\tilde{x}_i) > 0$. Тогда $G_i = \{x \in E^n : f_i(x) \geq 0\}$, $i = 1, 2, \dots, l$, и для любого $x_* \in X$ имеет место представление

$\Gamma^i(x_*) = \{x \in E^n : \langle f_i'(s^i(x_*)), x - s^i(x_*) \rangle \leq 0\}$, $i = 1, 2, \dots, l$. Вводя обозначения $F_i = \{x \in E^n : f_i(x) \leq 0\}$ и $F = \bigcap_{i=1}^l F_i$, получим, что $X = \{x \in F : g(x) = 0\}$, при этом конусы внутренних направлений (в смысле определения из [15, с. 244]) множеств F_i и $\Gamma^i(x_*)$ для каждого i в произвольной точке $x_* \in X$ совпадают.

Введем обозначения: $K(F_i)$ и $K(F)$ – конусы внутренних направлений множеств F_i , $i = 1, 2, \dots, l$, и F в точке $x_* \in X$; $K(\Gamma^i(x_*))$, $K(P(x_*))$ и $K(T(x_*))$ – конусы внутренних направлений множеств $\Gamma^i(x_*)$, $i = 1, 2, \dots, l$, $P(x_*)$ и $T(x_*)$ в точке x_* ; $K(S)$ – конус касательных направлений множества S в точке x_* , $K(\varphi)$ – конус направлений убывания функции $\varphi(x)$ в точке x_* . Поскольку $F = \bigcap_{i=1}^l F_i$ и $P(x_*) = \bigcap_{i=1}^l \Gamma^i(x_*)$, то в силу показанного в [17, с. 14] имеет место $K(F) = \bigcap_{i=1}^l K(F_i)$, $K(P(x_*)) = \bigcap_{i=1}^l K(\Gamma^i(x_*))$. Отсюда и из сказанного выше следует, что $K(F) = K(P(x_*))$, а поскольку $x_* \in \text{int } T(x_*)$, то $K(T(x_*))$ есть множество всех ненулевых векторов из E^n .

Лемма 7. Если точка $x_* \in M(x_0)$ такова, что $\varphi(x_*) = \varphi(z(x_*))$, то существуют вектор $\mathbf{c} \in \partial\varphi(x_*)$ и числа $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, l$, и $\lambda_0, \lambda_{l+1} \in \mathbb{R}$, не все равные нулю, при которых справедливы равенства

$$\lambda_0 \mathbf{c} + \sum_{i=1}^l \lambda_i f_i'(x_*) + \lambda_{l+1} g'(x_*) = \mathbf{0}; \quad \lambda_i f_i(x_*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l; \quad \lambda_{l+1} g(x_*) = 0. \quad (3.1)$$

Доказательство. Если $x_* \in M(x_0)$ и $\mathbf{0} \in \partial\varphi(x_*)$, то положив $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, l + 1$, получим требуемое равенство.

Пусть теперь $x_* \in M(x_0)$ и $\mathbf{0} \notin \partial\varphi(x_*)$. Предположим, что существует ненулевой вектор $h_* \in K(\varphi) \cap K(P(x_*)) \cap K(T(x_*)) \cap K(S)$. Тогда найдется такое $\alpha_0 > 0$, что при $\alpha \in (0; \alpha_0)$ точка $x_* + \alpha h_*$ лежит в $\Lambda(x_*) \cap P(x_*) \cap T(x_*)$ и при этом $\varphi(x_* + \alpha h_*) < \varphi(x_*)$. Но выполнение равенства $\varphi(x_*) = \varphi(z(x_*))$ означает, что для любого $x \in \Lambda(x_*) \cap P(x_*) \cap T(x_*)$ имеет место $\varphi(x) \geq \varphi(x_*)$; полученное противоречие показывает, что сделанное предположение неверно, т.е.

$$K(\varphi) \cap K(P(x_*)) \cap K(T(x_*)) \cap K(S) = K(\varphi) \cap K(F) \cap K(S) = K(\varphi) \cap K(F_1) \cap K(F_2) \cap \dots \cap K(F_l) \cap K(S) = \emptyset.$$

Отсюда и из показанного в [15, с. 205, 249, 251, 256] вытекает существование вектора $\mathbf{c} \in \partial\varphi(x_*)$ и чисел $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, l$, и $\lambda_0, \lambda_{l+1} \in \mathbb{R}$, не равных нулю одновременно, при которых справедливо (3.1). Утверждение леммы доказано.

Поскольку Y выпукло и компактно, то в силу показанного в [18, с. 62] существует такая константа $L > 0$, что для любых $x, y \in Y$ имеет место $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L \|x - y\|$, т.е. $\varphi(x)$ является липшицевой на Y .

Введем обозначения: $z_k = z(x_k)$, $y_{k,s} = y_s(x_k)$, $u_{k,s} = u_s(x_k)$, $p_{k,s} = p_s(x_k)$. Рассмотрим способ выбора чисел α_k , $k = 0, 1, \dots$, состоящий в том, что величина α_k при каждом k полагается равной 2^{-s_k} , где s_k – первый из номеров $s = 0, 1, \dots$, при котором имеет место

$$\varphi(x_k) - \varphi(p_{k,s}) \geq 0.5 \times 2^{-s} (\varphi(x_k) - \varphi(z_k)).$$

Аналогично тому, как это было сделано в [2], можно показать, что выбор α_k из указанного условия всегда возможен.

Лемма 8. При выборе чисел α_k , $k = 0, 1, \dots$, согласно указанному способу, имеет место $\varphi(x_k) - \varphi(z_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Доказательство полностью совпадает с доказательством соответствующего утверждения из [2].

Предложение. Если последовательность $\{x_k\}$ построена по изложенному алгоритму при выборе $\alpha_k, k = 0, 1, 2, \dots$, согласно указанному способу, то любая ее предельная точка x_* удовлетворяет условию $\varphi(x_*) = \varphi(z(x_*))$.

Доказательство. Последовательность $\{x_k\}$ лежит в ограниченном множестве $M(x_0)$, а значит, имеет хотя бы одну предельную точку. Пусть x_* – произвольная предельная точка, а $\{x_{k_m}\}$ – соответствующая ей подпоследовательность. В силу непрерывности $\varphi(x)$, множество $M(x_0)$ замкнуто, поэтому $x_* \in M(x_0)$. Покажем, что точка x_* удовлетворяет условию $\varphi(x_*) = \varphi(z(x_*))$.

Предположим, что при некотором $\eta > 0$ имеет место $\varphi(z(x_*)) = \varphi(x_*) - 2\eta$. Поскольку $\varphi(x)$ непрерывна и $x_* \in \text{int } T(x_*)$, то существуют такие окрестности $U_\delta(x_*)$ и $U_\varepsilon(z(x_*))$, что для любых $x \in U_\delta(x_*)$ и $y \in U_\varepsilon(z(x_*))$ имеет место $\varphi(y) < \varphi(x) - \eta$ и при этом $U_\delta(x_*) \subset \text{int } T(x_*)$. Пусть \bar{x} – произвольная точка из $\Lambda(x_*) \cap \text{int } P(x_*)$ (в силу выполнения условия, приведенного после изложения алгоритма, такая точка существует), тогда, учитывая, что $\Lambda(x_*)$ и $P(x_*)$ выпуклы и $x_* \in \Lambda(x_*) \cap P(x_*)$, получим $[\bar{x}; x_*] \subset \Lambda(x_*) \cap \text{int } P(x_*)$, а значит, любая точка из $[\bar{x}; x_*] \cap U_\delta(x_*)$ лежит в $\Lambda(x_*) \cap \text{int } P(x_*) \cap \text{int } T(x_*)$.

Пусть теперь \tilde{x} – произвольная точка, лежащая в $[\bar{x}; x_*] \cap U_\delta(x_*)$, тогда, поскольку $T(x_*)$ выпукло и $z(x_*) \in \Lambda(x_*) \cap P(x_*) \cap T(x_*)$, имеем $[\tilde{x}; z(x_*)] \subset \Lambda(x_*) \cap \text{int } P(x_*) \cap \text{int } T(x_*)$. Возьмем произвольную точку $h \in [\tilde{x}; z(x_*)] \cap U_\varepsilon(z(x_*))$, тогда $h \in \Lambda(x_*) \cap \text{int } P(x_*) \cap \text{int } T(x_*)$ и $\varphi(h) < \varphi(x) - \eta$ для любого $x \in U_\delta(x_*)$. Обозначив через h_k проекцию точки h на гиперплоскость $\Lambda(x_k)$, получим

$$\langle n(x_{k_m}), h - x_{k_m} \rangle = \langle n(x_{k_m}), h - h_{k_m} \rangle + \langle n(x_{k_m}), h_{k_m} - x_{k_m} \rangle,$$

где второе слагаемое справа равно нулю, так как $h_{k_m} \in \Lambda(x_{k_m})$, а модуль первого слагаемого есть расстояние от точки h до гиперплоскости $\Lambda(x_{k_m})$, так как векторы $n(x_{k_m})$ и $h - x_{k_m}$ имеют одинаковое или противоположное направления и $\|n(x_{k_m})\| = 1$.

Поскольку $\langle n(x_*) , h - x_* \rangle = 0$, так как $h \in \Lambda(x_*)$, а $\{x_{k_m}\}$ сходится к x_* , и $n(x)$ является непрерывной вектор-функцией на S , то из сказанного выше следует, что $\|h - h_{k_m}\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. Кроме этого, существует окрестность $U_\gamma(h)$, целиком лежащая в $U_\varepsilon(z(x_*)) \cap \text{int } P(x_*) \cap \text{int } T(x_*)$, так как $h \in \text{int } U_\varepsilon(z(x_*))$ и $h \in \text{int } P(x_*) \cap \text{int } T(x_*)$, при этом найдется такое $m_0 \in N$, что при всех $m \geq m_0$ имеет место $\|h - h_{k_m}\| < \gamma$. Для произвольного $x \in U_\gamma(h)$, очевидно, справедливы неравенства

$$\langle n^i(s^i(x_*)), x - s^i(x_*) \rangle > 0, \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad \text{и} \quad |x^{(s)} - x_*^{(s)}| < d_0/\sqrt{n}, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

В силу сходимости $\{s^i(x_{k_m})\} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} s^i(x_*)$, вытекающей из сходимости $\{x_{k_m}\} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x_*$, и сжимающего свойства оператора проектирования на выпуклые множества $G_i, i = 1, 2, \dots, l$, найдется такое $m_1 \in N$, что при всех $m \geq m_1$ справедливы неравенства

$$\langle n^i(s^i(x_{k_m})), x - s^i(x_{k_m}) \rangle > 0, \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad \text{и} \quad |x^{(s)} - x_{k_m}^{(s)}| < d_0/\sqrt{n}, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда при $m \geq \max\{m_0, m_1\}$ получим, что $h_{k_m} \in U_\gamma(h)$ и $U_\gamma(h) \subset P(x_{k_m}) \cap T(x_{k_m})$. Поскольку $\{x_{k_m}\} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x_*$, то найдется такое $m_2 \in N$, что при всех $m \geq m_2$ имеет место $x_{k_m} \in U_\delta(x_*)$. Следовательно, при $m \geq \max\{m_0, m_1, m_2\}$ точки $h_{k_m} \in \Lambda(x_{k_m}) \cap P(x_{k_m}) \cap T(x_{k_m})$ удовлетворяют условию $\varphi(h_{k_m}) < \varphi(x_{k_m}) - \eta$, или $\varphi(x_{k_m}) - \varphi(h_{k_m}) > \eta$.

Однако в силу утверждения леммы 8, имеет место $\varphi(x_k) - \min_{x \in \Lambda(x_k) \cap P(x_k) \cap T(x_k)} \varphi(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Из полученного противоречия следует, что сделанное предположение о выполнении равенства $\varphi(z(x_*)) = \varphi(x_*) - 2\eta$ при некотором $\eta > 0$ неверно, а значит, x_* удовлетворяет условию

$\varphi(x_*) = \varphi(z(x_*))$. В силу произвольности рассмотренной предельной точки x_* последовательности $\{x_k\}$, утверждение предложения доказано.

Из данного предложения и леммы 7 следует, что если X задано с помощью функциональных ограничений, то любая предельная точка x_* последовательности $\{x_k\}$, построенной по изложенному алгоритму при указанном способе выбора α_k , $k = 0, 1, \dots$, удовлетворяет необходимому условию экстремума в форме Лагранжа, использующей субградиенты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черняев Ю.А. Численный алгоритм решения задачи математического программирования с ограничением в виде гладкой поверхности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 3. С. 387–393.
2. Черняев Ю.А. Численный алгоритм минимизации выпуклой функции на пересечении гладкой поверхности и выпуклого компакта // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 7. С. 1151–1157.
3. Васильев Ф.П., Недич А., Ячимович М. Двухшаговый регуляризованный метод минерализации для решения задач минимизации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. № 5. С. 9–19.
4. Антипин А.С., Будак Б.А., Васильев Ф.П. Регуляризованный непрерывный экстраградиентный метод первого порядка с переменной метрикой для решения задач равновесного программирования // Дифференц. ур-ния. 2002. Т. 38. № 12. С. 1587–1595.
5. Мияйлович Н., Ячимович М. Некоторые непрерывные методы для решения квазивариационных неравенств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 2. С. 202–208.
6. Кокурин М.Ю. О решении некорректных невыпуклых экстремальных задач с точностью, пропорциональной погрешности в исходных данных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 11. С. 1815–1828.
7. Балашов М.В. Метод проекции градиента на матричных многообразиях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 9. С. 1453–1461.
8. Балашов М.В. О методе проекции градиента для слабо выпуклой функции на проксимально гладком множестве // Матем. заметки. 2020. Т. 108. № 5. С. 657–668.
9. Черняев Ю.А. Метод проекции градиента для экстремальных задач с ограничением в виде пересечения гладкой поверхности и выпуклого замкнутого множества // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 1. С. 37–49.
10. Черняев Ю.А. Метод проекции градиента для класса экстремальных задач с ограничением в виде подмножества точек гладкой поверхности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 3. С. 391–399.
11. Sun Q., Sang Z. Generalized memory gradient projection method for non-linear programming with non-linear equality and in-equality constraints // J. Appl. Math. Comput. 2011. V. 36. № 1. P. 347–366.
12. Chen P., Gui C. Linear convergence analysis of the use of gradient projection methods on total variation problems // Comput. Opt. Appl. 2013. V. 54. № 2. P. 283–315.
13. Kokurin M.Y. Stable gradient projection method for nonlinear conditionally well-posed inverse problems // J. Inverse and Ill-Posed Probl. 2016. V. 24. № 3. P. 323–332.
14. Balashov M.V., Polyak B.T., Tremba A.A. Gradient projection and conditional gradient methods for constrained nonconvex minimization // Numer. Funct. Anal. Opt. 2020. V. 41. № 7. P. 822–849.
15. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.
16. Арутюнова Н.К., Дуллиев А.М., Заботин В.И. Алгоритмы проектирования точки на поверхность уровня непрерывной на компакте функции // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 9. С. 1448–1454.
17. Лоран П.Ж. Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975.
18. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.

**ОБЫКНОВЕННЫЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

УДК 519.624.2

**К ИНТЕГРИРОВАНИЮ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ С ЗАТУХАНИЕМ
В МОНОГРАФИИ Н.Н. БОГОЛЮБОВА И Ю.А. МИТРОПОЛЬСКОГО
“АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ
НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ”**© 2022 г. А. Ф. Курин¹. *¹ 394006 Воронеж, Университетская пл., 1, Воронежский гос. ун-т, физ. ф-т, Россия

*e-mail: afkurin@mail.ru

Поступила в редакцию 01.03.2021 г.
Переработанный вариант 23.06.2022 г.
Принята к публикации 04.08.2022 г.

Асимптотическим методом, изложенным в монографии, указанной в заглавии статьи, получены выражения, определяющие границы трех областей параметрического резонанса однородного уравнения Матье с затуханием. Формулы для границ второй и третьей областей, справедливость которых подтверждает также численное решение уравнения, существенно отличаются от известных, полученных в монографии. Показано, что само существование областей резонанса зависит от выбора порядков малости трех малых параметров задачи. Библ. 11. Фиг. 3.

Ключевые слова: уравнение Матье, асимптотический метод, параметрический резонанс.**DOI:** 10.31857/S0044466922120109**ВВЕДЕНИЕ**

В монографии [1], посвященной приближенным асимптотическим методам решения задач теории нелинейных колебаний, рассмотрено, в частности, уравнение Матье с затуханием, для которого на плоскости параметров уравнения вычислены границы трех областей параметрического резонанса (формулы (17.62)–(17.64) в [1]). При этом авторы ограничивались тем приближением асимптотического метода, в котором появляется та или иная область резонанса: указанные три формулы получены в первом, втором и третьем приближениях соответственно. Отметим, что в [1] отсутствуют какие-либо подробности вывода формул.

В настоящей работе уравнение Матье интегрируется подробно асимптотическим методом, принятым в монографии [1], сохранены также обозначения величин. Амплитуда и фаза колебаний имеет вид разложения по степеням малого параметра ϵ . Однако теперь предусмотрена возможность в полученных выражениях устанавливать порядок малости параметров, входящих в уравнение, поскольку, как показал анализ, для существования каждой области параметрических колебаний требуется своя комбинация порядков малости трех параметров. Справедливость полученных выражений для границ второй и третьей областей резонанса (формулы (38), (48) настоящей работы) подтверждается численным решением уравнения Матье с затуханием. Эти выражения не совпадают с формулами (17.63), (17.64) в [1]. Количественные результаты различаются существенно.

Правильность формул (38), (48) статьи подтверждается еще и тем, что вычисленные из этих формул границы для уравнения Матье с затуханием в другой часто используемой записи (см. разд. 5) совпали с границами, установленными ранее для такого уравнения в статье [2] известным асимптотическим методом усреднения для систем с многими быстрыми фазами [3], [4]. Отметим, что метод усреднения использовался также для уравнения Матье без затухания [4]–[6].

Далее, формулы для границ областей резонанса (38), (48) получаются и методом И.З. Штокало [7]. Дальнейшее развитие метода изложено в статье Ю.С. Колесова и В.В. Майорова [8]. Таким образом, в случае уравнения Матье три метода дают одинаковый результат.

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ

В обозначениях работы [1] запишем уравнение Матъе с затуханием (см. (17.61) в [1])

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta \frac{dx}{dt} + \omega^2 [1 - h \cos(vt)]x = 0. \tag{1}$$

Рассматриваются резонансы, когда близки частоты ω и pv/q . Здесь p и q – взаимно простые числа. Частоты связаны соотношением

$$\omega^2 = \left(\frac{pv}{q}\right)^2 + \varepsilon \Delta_1 + \varepsilon^2 \Delta_2 + \varepsilon^3 \Delta_3 + \dots, \tag{2}$$

где ε – малый параметр. Малыми величинами являются также затухание

$$\delta = \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \varepsilon^3 \delta_3 + \dots \tag{3}$$

и параметр

$$h = \varepsilon h_1. \tag{4}$$

В отличие от [1] представление частотной расстройки и коэффициента затухания рядом по степеням ε позволяет выбирать порядок малости этих величин при анализе полученных формул.

Представим уравнение (1) в виде разложения по степеням малого параметра ε .

Для этого, следуя асимптотическому методу, изложенному в [1], с учетом (2)–(4) перепишем уравнение (1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{pv}{q}\right)^2 x = \varepsilon \left[\left(\frac{pv}{q}\right)^2 h_1 \cos(vt)x - \Delta_1 x - \delta_1 \frac{dx}{dt} \right] + \\ + \varepsilon^2 \left[\Delta_1 h_1 \cos(vt)x - \Delta_2 x - \delta_2 \frac{dx}{dt} \right] + \varepsilon^3 \left[\Delta_2 h_1 \cos(vt)x - \Delta_3 x - \delta_3 \frac{dx}{dt} \right] + \dots = F. \end{aligned} \tag{5}$$

Согласно [1] решение ищем в виде ряда

$$x = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, t, \theta) + \varepsilon^2 u_2(a, t, \theta) + \varepsilon^3 u_3(a, t, \theta) + \dots, \tag{6}$$

в котором

$$\psi = \frac{pv}{q}t + \theta \tag{7}$$

есть быстрая фаза, а медленные амплитуда a и фаза θ определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a, \theta) + \varepsilon^2 A_2(a, \theta) + \varepsilon^3 A_3(a, \theta) + \dots, \\ \frac{d\theta}{dt} = \varepsilon B_1(a, \theta) + \varepsilon^2 B_2(a, \theta) + \varepsilon^3 B_3(a, \theta) + \dots. \end{aligned} \tag{8}$$

Функции $A_{1,2,3,\dots}$, $B_{1,2,3,\dots}$, $u_{1,2,3,\dots}$ подлежат вычислению.

Представим правую и левую части в виде разложения по степеням ε . Здесь x – выражение (6). Вычислим производную

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt} \cos \psi - a \sin \psi \frac{d\psi}{dt} + \sum_{n=1} \varepsilon^n \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{\partial u_n}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial u_n}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} \right) = \\ = \frac{da}{dt} \left(\cos \psi + \sum_{n=1} \varepsilon^n \frac{\partial u_n}{\partial a} \right) + \frac{d\theta}{dt} \left(-a \sin \psi + \sum_{n=1} \varepsilon^n \frac{\partial u_n}{\partial \theta} \right) - \frac{apv}{q} \sin \psi + \sum_{n=1} \varepsilon^n \frac{\partial u_n}{\partial t}, \end{aligned} \tag{9}$$

где da/dt и $d\theta/dt$ определяются формулами (8).

Подставляя выражения (6) и (9) в правую часть уравнения (5), получаем

$$\begin{aligned}
 F = & \varepsilon \left[a \left(\frac{pV}{q} \right)^2 h_1 \cos(vt) \cos \psi - a \Delta_1 \cos \psi + a \frac{pV}{q} \delta_1 \sin \psi \right] + \\
 & + \varepsilon^2 \left[\left(\frac{pV}{q} \right)^2 h_1 u_1 \cos(vt) - \Delta_1 u_1 - \delta_1 \left(A_1 \cos \psi - a B_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + a h_1 \Delta_1 \cos(vt) \cos \psi - a \Delta_2 \cos \psi + a \frac{pV}{q} \delta_2 \sin \psi \right] + \\
 & + \varepsilon^3 \left[\left(\frac{pV}{q} \right)^2 h_1 u_2 \cos(vt) - \Delta_1 u_2 - \delta_1 \left(A_2 \cos \psi - a B_2 \sin \psi + A_1 \frac{\partial u_1}{\partial a} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + B_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial t} \right) + h_1 \Delta_1 u_1 \cos(vt) - \Delta_2 u_1 - \delta_2 \left(A_1 \cos \psi - a B_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + a h_1 \Delta_2 \cos(vt) \cos \psi - a \Delta_3 \cos \psi + a \frac{pV}{q} \delta_3 \sin \psi \right] + \dots
 \end{aligned} \tag{10}$$

Вторую производную d^2x/dt^2 в левой части уравнения (5) получаем дифференцированием (9). При этом используем выражения (8), а также

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{da}{dt} \right)^2 &= \varepsilon^2 A_1^2 + 2\varepsilon^3 A_1 A_2 + \dots, \\
 \frac{d^2a}{dt^2} &= \varepsilon^2 \left(A_1 \frac{\partial A_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \right) + \varepsilon^3 \left(A_1 \frac{\partial A_2}{\partial a} + B_1 \frac{\partial A_2}{\partial \theta} + A_2 \frac{\partial A_1}{\partial a} + B_2 \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \right) + \dots, \\
 \frac{da}{dt} \frac{d\theta}{dt} &= \varepsilon^2 A_1 B_1 + \varepsilon^3 (A_1 B_2 + A_2 B_1) + \dots, \\
 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 &= \varepsilon^2 B_1^2 + 2\varepsilon^3 B_1 B_2 + \dots, \\
 \frac{d^2\theta}{dt^2} &= \varepsilon^2 \left(A_1 \frac{\partial B_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial B_1}{\partial \theta} \right) + \varepsilon^3 \left(A_1 \frac{\partial B_2}{\partial a} + A_2 \frac{\partial B_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial B_2}{\partial \theta} + B_2 \frac{\partial B_1}{\partial \theta} \right) + \dots.
 \end{aligned}$$

После простых вычислений для левой части (5) получаем разложение

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{pV}{q} \right)^2 x = & \varepsilon \left[-2 \frac{pV}{q} A_1 \sin \psi - 2a \frac{pV}{q} B_1 \cos \psi + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(\frac{pV}{q} \right)^2 u_1 \right] + \\
 & + \varepsilon^2 \left[\left(A_1 \frac{\partial A_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - a B_1^2 - 2a \frac{pV}{q} B_2 \right) \cos \psi + \right. \\
 & \left. + \left(-a A_1 \frac{\partial B_1}{\partial a} - a B_1 \frac{\partial B_1}{\partial \theta} - 2A_1 B_1 - 2 \frac{pV}{q} A_2 \right) \sin \psi + 2A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} + 2B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta \partial t} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(\frac{pV}{q} \right)^2 u_2 \right] + \\
 & + \varepsilon^3 \left[\left(A_1 \frac{\partial A_2}{\partial a} + B_1 \frac{\partial A_2}{\partial \theta} + A_2 \frac{\partial A_1}{\partial a} + B_2 \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - 2a B_1 B_2 - 2a \frac{pV}{q} B_3 \right) \cos \psi + \right. \\
 & \left. + \left(-a A_1 \frac{\partial B_2}{\partial a} - a A_2 \frac{\partial B_1}{\partial a} - a B_1 \frac{\partial B_2}{\partial \theta} - a B_2 \frac{\partial B_1}{\partial \theta} - 2A_1 B_2 - 2A_2 B_1 - 2 \frac{pV}{q} A_3 \right) \sin \psi + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial u_1}{\partial a} \left(A_1 \frac{\partial A_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \right) + A_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2} + 2A_1 B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \theta} + 2A_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} + 2A_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a \partial t} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \left(A_1 \frac{\partial B_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial B_1}{\partial \theta} \right) + B_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + 2B_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta \partial t} + 2B_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta \partial t} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \left(\frac{pV}{q} \right)^2 u_3 \right].
 \end{aligned} \tag{11}$$

Если отбросить члены с ϵ^3 , приходим к выражению (4.10) в [1].

2. РЕЗОНАНС $\omega \approx \frac{\nu}{2}$

Выведем формулы для границы первой области параметрического резонанса в первом и во втором (формула (27)) приближениях асимптотического метода.

Формулы первого приближения получим из равенства выражений с ϵ в (11) и (10) при $p = 1$, $q = 2$;

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\nu^2}{4} u_1 - \nu A_1 \sin \psi - \nu B_1 \cos \psi = \frac{\nu^2 h_1}{4} \cos(\nu t) \cos \psi - a \Delta_1 \cos \psi + \frac{\nu \delta_1}{2} \sin \psi.$$

Решение u_1 этого дифференциального уравнения не должно содержать колебаний основной частоты $\nu/2$ [1]. Это требование означает отсутствие в уравнении слагаемых с $\sin \psi$ и $\cos \psi$. Поэтому с учетом формулы

$$\cos(\nu t) \cos \psi = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{3\nu}{2} t + \theta\right) + \sin(2\theta) \sin \psi + \cos(2\theta) \cos \psi \right] \quad (12)$$

приравняем нулю выражения с $\sin \psi$ и $\cos \psi$. Получаем

$$\nu A_1 + \frac{\nu \delta_1}{2} + \frac{\nu^2 h_1}{8} \sin(2\theta) = 0, \quad \nu B_1 - \Delta_1 + \frac{\nu^2 h_1}{8} \cos(2\theta) = 0,$$

откуда

$$A_1 = -\frac{\nu \delta_1}{2} - \frac{\nu h_1}{8} \sin(2\theta), \quad B_1 = \frac{\Delta_1}{\nu} - \frac{h_1}{8} \cos(2\theta). \quad (13)$$

Для функции u_1 получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\nu^2}{4} u_1 = \frac{\nu^2 h_1}{8} \cos\left(\frac{3\nu}{2} t + \theta\right),$$

которое имеет общее решение

$$u_1 = C_1 \cos\left(\frac{\nu}{2} t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\nu}{2} t\right) - \frac{ah_1}{16} \cos\left(\frac{3\nu}{2} t + \theta\right).$$

Полагаем $C_1 = C_2 = 0$, чтобы исключить в u_1 колебания с основной частотой $\nu/2$. Окончательно,

$$u_1 = -\frac{ah_1}{16} \cos\left(\frac{3\nu}{2} t + \theta\right). \quad (14)$$

Приравняем теперь выражения с ϵ^2 в разложениях (11) и (10)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{\nu^2}{4} u_2 + \left(-2A_1 B_1 - aA_1 \frac{\partial B_1}{\partial a} - aB_1 \frac{\partial B_1}{\partial \theta} - \nu A_2\right) \sin \psi + \left(-aB_1^2 + A_1 \frac{\partial A_1}{\partial a} + \right. \\ & \left. + B_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - \nu B_2\right) \cos \psi + 2A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} + 2B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta \partial t} = \frac{\nu^2 h_1}{4} u_1 \cos(\nu t) - \Delta_1 u_1 - \\ & - \delta_1 \left(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial t}\right) + ah_1 \Delta_1 \cos(\nu t) \cos \psi - a\Delta_2 \cos \psi + \frac{\nu \delta_2}{2} \sin \psi. \end{aligned} \quad (15)$$

Это – дифференциальное уравнение относительно u_2 . Функции A_1 , B_1 , u_1 определяются формулами первого приближения (13), (14). Чтобы избежать появления в u_2 колебаний с частотой $\nu/2$, приравняем нулю выражения с $\sin \psi$ и $\cos \psi$, учитывая формулы (7), (12) и

$$u_1 \cos(\nu t) = -\frac{ah_1}{32} \left[\cos\left(\frac{5\nu}{2} t + \theta\right) + \cos \psi \right]. \quad (16)$$

Получаем

$$\begin{aligned} vA_2 &= -2A_1B_1 - aA_1 \frac{\partial B_1}{\partial a} - aB_1 \frac{\partial B_1}{\partial \theta} - a\delta_1 B_1 - \frac{ah_1\Delta_1}{2} \sin(2\theta) - \frac{av\delta_2}{2}, \\ avB_2 &= A_1 \frac{\partial A_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - aB_1^2 + \frac{av^2h_1^2}{128} + \delta_1 A_1 - \frac{ah_1\Delta_1}{2} \cos(2\theta) + a\Delta_2, \end{aligned}$$

откуда после вычислений следуют выражения

$$A_2 = -\frac{a\delta_2}{2} - \frac{ah_1\Delta_1}{2v} \sin(2\theta), \quad B_2 = \frac{\Delta_2}{v} - \frac{\Delta_1^2}{v^3} - \frac{\delta_1^2}{4v} + \frac{3vh_1^2}{128} - \frac{h_1\Delta_1}{2v} \cos(2\theta). \quad (17)$$

Если в решении уравнения (1) ограничиться вторым приближением метода, вычисление u_2 не требуется [1].

Далее вместо системы уравнений (8) будем использовать систему для a и 2θ , которая во втором приближении имеет вид

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2, \quad \frac{d(2\theta)}{dt} = \varepsilon 2B_1 + \varepsilon^2 2B_2.$$

Подставим выражения (13), (17), получаем систему

$$\frac{da}{dt} = \frac{a}{2}[-\delta + r \sin(2\theta)], \quad \frac{d(2\theta)}{dt} = s + r \cos(2\theta), \quad (18)$$

где в коэффициентах, имеющих вид разложения по степеням ε

$$\delta = \varepsilon\delta_1 + \varepsilon^2\delta_2, \quad r = \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2, \quad s = \varepsilon s_1 + \varepsilon^2 s_2,$$

составляющие равны

$$r_1 = -\frac{vh_1}{4}, \quad r_2 = -\frac{h_1\Delta_1}{v}, \quad s_1 = \frac{2\Delta_1}{v}, \quad s_2 = \frac{2\Delta_2}{v} - \frac{2\Delta_1^2}{v^3} - \frac{\delta_1^2}{2v} + \frac{3vh_1^2}{64}. \quad (19)$$

Как в [1], систему (18) сведем к линейной однородной системе с постоянными коэффициентами с помощью замены переменных

$$P = a \sin \theta, \quad R = a \cos \theta. \quad (20)$$

Дифференцируем

$$\frac{dP}{dt} = \frac{da}{dt} \sin \theta + a \cos \theta \frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{dR}{dt} = \frac{da}{dt} \cos \theta - a \sin \theta \frac{d\theta}{dt}.$$

Подставляем сюда выражения da/dt , $d\theta/dt = 0$, $5d(2\theta/dt)$ (18). С учетом формул (20) получаем систему

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\delta}{2} P + \frac{r+s}{2} R, \quad \frac{dR}{dt} = -\frac{\delta}{2} R + \frac{r-s}{2} P. \quad (21)$$

Исключая, например, R , приходим к уравнению осциллятора относительно P

$$\frac{d^2 P}{dt^2} + \delta \frac{dP}{dt} + \frac{s^2 - r^2 + \delta^2}{4} P = 0,$$

характеристическое уравнение которого имеет корни

$$k_{1,2} = \frac{-\delta \pm \sqrt{r^2 - s^2}}{2}.$$

При $D = r^2 - s^2 \geq 0$ корни вещественные. Оба они отрицательные, пока $D < \delta^2$. Функция $P(t)$ и, следовательно, амплитуда $a(t)$ экспоненциально затухают, не совершая колебаний. Этот режим описан в [9], [2].

Если $D > \delta^2$ корень $k_1 > 0$. В этом случае функция $P(t)$ имеет экспоненциально возрастающую составляющую, что указывает на параметрический резонанс.

При $k_1 = 0$, ($D = \delta^2$) получаем уравнение, связывающее параметры уравнения (1) и определяющее границу области резонанса

$$s^2 + \delta^2 = r^2. \tag{22}$$

При $D = r^2 - s^2 < 0$ корни $k_{1,2}$ комплексно-сопряженные. Функция $P(t)$ и, следовательно, амплитуда $a(t)$ экспоненциально затухают, совершая медленные колебания с частотой $\sqrt{s^2 - r^2}/2$.

Используя формулы (19), запишем уравнение (22) в первом приближении

$$\varepsilon^2 \frac{4\Delta_1^2}{v^2} + \varepsilon^2 \delta_1^2 = \varepsilon^2 \frac{v^2 h_1^2}{16}. \tag{23}$$

В работе [1] граница построена на плоскости параметров $((2\omega/v)^2, h)$. После подстановки выражения

$$\varepsilon \Delta_1 = \omega^2 - \frac{v^2}{4}, \tag{24}$$

которое следует из (2) при $p = 1$, $q = 2$, в формулу (23), и умножения на $4/v^2$ находим

$$\left(\frac{2\omega}{v}\right)^2 = 1 \pm \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{4\delta^2}{v^2}},$$

т.е. выражение, определяющее границу области параметрического резонанса, которое получено в [1].

Дополним этот результат. Вычислим границу во втором приближении, считая $\Delta \sim \varepsilon$, $\delta \sim \varepsilon$, т.е. полагая в формулах (19) $\Delta_2 = 0$.

Согласно (24) параметр $(2\omega/v)^2$ выражается через частотную расстройку Δ_1 , которая присутствует в $r_2, s_{1,2}$. Поэтому (22) является алгебраическим уравнением относительно $(2\omega/v)^2$.

Запишем это уравнение. Для удобства введем

$$y = \left(\frac{2\omega}{v}\right)^2 - 1, \tag{25}$$

тогда из (24) следует

$$\varepsilon \Delta_1 = \frac{v^2}{4} y.$$

Подставим это выражение в r_2, s_1, s_2 (19) и запишем (22) в виде

$$y^4 - 8y^3 + \left(16 - \frac{19h^2}{4} + \frac{8\delta^2}{v^2}\right)y^2 - \left(5h^2 + \frac{32\delta^2}{v^2}\right)y + \frac{9h^4}{64} - 4h^2 - \frac{3h^2\delta^2}{v^2} + \frac{64\delta^2}{v^2} + \frac{16\delta^4}{v^4} = 0.$$

Решение уравнения ищем в виде разложения по степеням ε

$$y = \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots \tag{26}$$

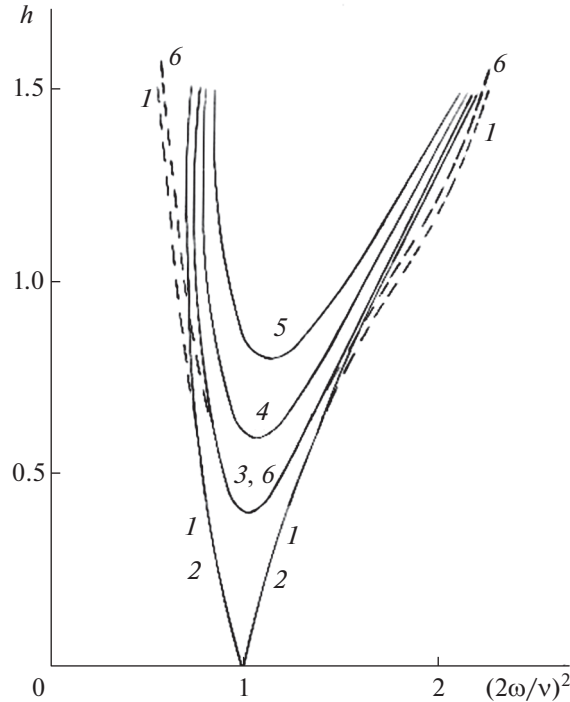
с использованием формул

$$y^2 = \varepsilon^2 y_1^2 + 2\varepsilon^3 y_1 y_2 + \dots, \quad y^3 = \varepsilon^3 y_1^3 + \dots.$$

Подставим в уравнение, учитывая оценки $h, \delta \sim \varepsilon$, приравняем нулю коэффициенты при степенях ε

$$\varepsilon^2: 16y_1^2 - 4h_1^2 + \frac{64\delta_1^2}{v^2} = 0,$$

$$\varepsilon^3: -8y_1^3 + 32y_1 y_2 - \left(5h_1^2 + \frac{32\delta_1^2}{v^2}\right)y_1 = 0.$$



Фиг. 1

В полученной системе уравнений относительно $y_{1,2}$ первое уравнение имеет решение

$$y_1 = \pm \sqrt{\frac{h_1^2}{4} - \frac{4\delta_1^2}{v^2}}.$$

Используя (25), получаем границу области параметрического резонанса в первом приближении.

Подставим y_1 во второе уравнение и выразим y_2 :

$$y_2 = \frac{7h_1^2}{32}.$$

Формулы для $y_{1,2}$ позволяют с использованием (25) записать y (26) – границу области параметрического резонанса во втором приближении асимптотического метода

$$\left(\frac{2\omega}{v}\right)^2 = 1 \pm \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{4\delta^2}{v^2}} + \frac{7h^2}{32}. \tag{27}$$

На фиг. 1 показаны границы первой области резонанса во втором приближении для трех значений $\delta/v = 0.1, 0.15, 0.2$ (кривые 3, 4, 5 соответственно). Линия 2 – граница (27) при отсутствии затухания ($\delta/v = 0$). Штриховые линии получены численным решением уравнения Матье: кривая 1 – из уравнения без затухания, кривая 2 – из уравнения с затуханием в случае $\delta/v = 0.1$. При численном интегрировании уравнения Матье (1) делением на v^2 приводилось к виду

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{\delta}{v} \frac{dx}{d\tau} + \frac{1}{4} \left(\frac{2\omega}{v}\right)^2 (1 - h \cos \tau) x = 0, \quad \tau = vt. \tag{28}$$

3. РЕЗОНАНС $\omega \approx v$

Выведем формулы для границы второй области параметрического резонанса во втором и третьем приближениях асимптотического метода (формула (38)). Результат сравним с [1].

Теперь $p = 1$, $q = 1$ и $\psi = vt + \theta$. Из равенства выражений с ε в (11) и (10) следует уравнение

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + v^2 u_1 - 2vA_1 \sin \psi - 2avB_1 \cos \psi = ah_1 v^2 \cos(vt) \cos \psi - a\Delta_1 \cos \psi + av\delta_1 \sin \psi.$$

Чтобы устранить в решении u_1 колебания с основной частотой v , приравняем нулю выражения с $\sin \psi$ и $\cos \psi$. Учитывая тригонометрическую формулу

$$\cos(vt) \cos \psi = \frac{1}{2} [\cos(2vt + \theta) + \cos \theta], \tag{29}$$

не содержащую колебаний с частотой v , получаем

$$2vA_1 + av\delta_1 = 0, \quad 2avB_1 - a\Delta_1 = 0.$$

Отсюда

$$A_1 = -\frac{a\delta_1}{2}, \quad B_1 = \frac{\Delta_1}{2v}. \tag{30}$$

Уравнение для u_1

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + v^2 u_1 = \frac{av^2 h_1}{2} [\cos(2vt + \theta) + \cos \theta]$$

имеет общее решение

$$u_1 = C_1 \cos(vt) + C_2 \sin(vt) - \frac{ah_1}{6} \cos(2vt + \theta) + \frac{ah_1}{2} \cos \theta. \tag{31}$$

Далее полагаем $C_1 = C_2 = 0$.

Формулы второго приближения найдем из равенства выражений с ε^2 в (11) и (10) (при $p = q = 1$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + v^2 u_2 + \left(-2A_1 B_1 - aA_1 \frac{\partial B_1}{\partial a} - aB_1 \frac{\partial B_1}{\partial \theta} - 2vA_2 \right) \sin \psi + \left(-aB_1^2 + A_1 \frac{\partial A_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - 2avB_2 \right) \cos \psi + \\ + 2A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} + 2B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta \partial t} = v^2 h_1 u_1 \cos(vt) - \Delta_1 u_1 - \delta_1 \left(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + \\ + ah_1 \Delta_1 \cos(vt) \cos \psi - a\Delta_2 \cos \psi + av\delta_2 \sin \psi. \end{aligned}$$

Здесь присутствуют тригонометрические выражения $\cos(vt) \cos \psi$ (29) и

$$u_1 \cos(vt) = -\frac{ah_1}{12} \cos(3vt + \theta) + \frac{ah_1}{4} \sin(2\theta) \sin \psi + \left[\frac{ah_1}{6} + \frac{ah_1}{4} \cos(2\theta) \right] \cos \psi, \tag{32}$$

которое получаем с использованием (31).

В функции u_2 будут отсутствовать колебания с основной частотой v , если приравняем нулю выражения с $\sin \psi$ и $\cos \psi$

$$\begin{aligned} 2vA_2 = -2A_1 B_1 - aA_1 \frac{\partial B_1}{\partial a} - aB_1 \frac{\partial B_1}{\partial \theta} - a\delta_1 B_1 - \frac{av^2 h_1^2}{4} \sin(2\theta) - av\delta_2, \\ 2avB_2 = A_1 \frac{\partial A_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - aB_1^2 - \frac{av^2 h_1^2}{6} + \delta_1 A_1 - \frac{av^2 h_1^2}{4} \cos(2\theta) + a\Delta_2. \end{aligned}$$

Отсюда после простых вычислений с использованием формул (30) получаем

$$A_2 = -\frac{a\delta_2}{2} - \frac{avh_1^2}{8} \sin(2\theta), \quad B_2 = \frac{\Delta_2}{2v} - \frac{\Delta_1^2}{8v^3} - \frac{\delta_1^2}{8v} - \frac{vh_1^2}{12} - \frac{vh_1^2}{8} \cos(2\theta). \tag{33}$$

Дифференциальное уравнение относительно u_2 приобретает вид

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + v^2 u_2 = \frac{ah_1 \Delta_1}{3} \cos(2vt + \theta) - \frac{av^2 h_1^2}{12} \cos(3vt + \theta).$$

Оно имеет общее решение

$$u_2 = C_1 \cos(vt) + C_2 \sin(vt) - \frac{ah_1\Delta_1}{9v^2} \cos(2vt + \theta) + \frac{ah_1^2}{96} \cos(3vt + \theta). \quad (34)$$

Далее полагаем $C_1 = C_2 = 0$.

Приравняем выражения с ε^3 в (11) и (10), считая $p = q = 1$. Получаем дифференциальное уравнение относительно u_3 :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + v^2 u_3 + \left(-aA_1 \frac{\partial B_2}{\partial a} - aA_2 \frac{\partial B_1}{\partial a} - aB_1 \frac{\partial B_2}{\partial \theta} - aB_2 \frac{\partial B_1}{\partial \theta} - 2A_1 B_2 - 2A_2 B_1 - 2vA_3 \right) \sin \psi + \\ & + \left(A_1 \frac{\partial A_2}{\partial a} + B_1 \frac{\partial A_2}{\partial \theta} + A_2 \frac{\partial A_1}{\partial a} + B_2 \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - 2aB_1 B_2 - 2avB_3 \right) \cos \psi + \frac{\partial u_1}{\partial a} \left(A_1 \frac{\partial A_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \right) + A_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2} + \\ & + 2A_1 B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \theta} + 2A_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} + 2A_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a \partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \left(A_1 \frac{\partial B_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial B_1}{\partial \theta} \right) + B_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + 2B_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta \partial t} + 2B_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta \partial t} = \\ & = v^2 h_1 u_2 \cos(vt) - \Delta_1 u_2 - \delta_1 \left(A_2 \cos \psi - aB_2 \sin \psi + A_1 \frac{\partial u_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial t} \right) + h_1 \Delta_1 u_1 \cos(vt) - \\ & - \Delta_2 u_1 - \delta_2 \left(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + ah_1 \Delta_2 \cos(vt) \cos \psi - a\Delta_3 \cos \psi + av\delta_3 \sin \psi, \end{aligned}$$

где присутствуют тригонометрические выражения $u_1 \cos(vt)$ (32), $\cos(vt) \cos \psi$ (29) и

$$u_2 \cos(vt) = -\frac{ah_1\Delta_1}{18v^2} [\cos(3vt + \theta) + \cos \psi] + \frac{ah_1^2}{192} [\cos(4vt + \theta) + \cos(2vt + \theta)],$$

которое вычислено с использованием формулы (34).

Приравняем нулю выражения с $\sin \psi$ и $\cos \psi$

$$\begin{aligned} & 2vA_3 + aA_1 \frac{\partial B_2}{\partial a} + aA_2 \frac{\partial B_1}{\partial a} + aB_1 \frac{\partial B_2}{\partial \theta} + aB_2 \frac{\partial B_1}{\partial \theta} + 2A_1 B_2 + 2A_2 B_1 + \frac{ah_1^2\Delta_1}{4} \sin(2\theta) + \\ & + a\delta_1 B_2 + a\delta_2 B_1 + av\delta_3 = 0, \\ & 2avB_3 - A_1 \frac{\partial A_2}{\partial a} - B_1 \frac{\partial A_2}{\partial \theta} - A_2 \frac{\partial A_1}{\partial a} - B_2 \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + 2aB_1 B_2 + \frac{ah_1^2\Delta_1}{9} + \\ & + \frac{ah_1^2\Delta_1}{4} \cos(2\theta) - \delta_1 A_2 - \delta_2 A_1 - a\Delta_3 = 0. \end{aligned}$$

Здесь A_1, B_1 определяются формулами (30), A_2, B_2 – (33). В результате простых вычислений получаем

$$A_3 = -\frac{a\delta_3}{2} - \frac{ah_1^2\Delta_1}{8v} \sin(2\theta), \quad B_3 = \frac{\Delta_3}{2v} + \frac{\Delta_1^3}{16v^5} - \frac{\Delta_1\Delta_2}{4v^3} + \frac{\Delta_1\delta_1^2}{16v^3} - \frac{\delta_1\delta_2}{4v} - \frac{h_1^2\Delta_1}{72v} - \frac{h_1^2\Delta_1}{8v} \cos(2\theta). \quad (35)$$

Используя формулы (30), (33), (35), записываем систему (8) в виде (18), где в коэффициентах, имеющих вид разложения по степеням ε

$$\delta = \varepsilon\delta_1 + \varepsilon^2\delta_2 + \varepsilon^3\delta_3, \quad r = \varepsilon^2r_2 + \varepsilon^3r_3, \quad s = \varepsilon s_1 + \varepsilon^2s_2 + \varepsilon^3s_3,$$

составляющие равны

$$\begin{aligned} r_2 &= -\frac{vh_1^2}{4}, \quad r_3 = -\frac{h_1^2\Delta_1}{4v}, \quad s_1 = \frac{\Delta_1}{v}, \\ s_2 &= \frac{\Delta_2}{v} - \frac{\Delta_1^2}{4v^3} - \frac{\delta_1^2}{4v} - \frac{vh_1^2}{6}, \quad s_3 = \frac{\Delta_3}{v} + \frac{\Delta_1^3}{8v^5} - \frac{\Delta_1\Delta_2}{2v^3} + \frac{\Delta_1\delta_1^2}{8v^3} - \frac{\delta_1\delta_2}{2v} - \frac{h_1^2\Delta_1}{36v}. \end{aligned} \quad (36)$$

Замена переменных (20) приводит к системе (21) и, как следствие, к уравнению (22), определяющему границу области параметрического резонанса. С учетом формул (36) запишем (22) подробно

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(s_1^2 + \delta_1^2) + \varepsilon^3(2s_1s_2 + 2\delta_1\delta_2) + \varepsilon^4(s_2^2 + 2s_1s_3 + \delta_2^2 + 2\delta_1\delta_3) + \varepsilon^5(2s_2s_3 + 2\delta_2\delta_3) + \\ + \varepsilon^6(s_3^2 + \delta_3^2) = \varepsilon^4r_2^2 + \varepsilon^52r_2r_3 + \varepsilon^6r_3^2. \end{aligned}$$

Приравнявая выражения с одинаковыми степенями ε в левой и правой частях, получаем систему равенств

$$\begin{aligned} s_1^2 + \delta_1^2 = 0, \quad s_1s_2 + \delta_1\delta_2 = 0, \quad s_2^2 + 2s_1s_3 + \delta_2^2 + 2\delta_1\delta_3 = r_2^2, \\ s_2s_3 + \delta_2\delta_3 = r_2r_3, \quad s_3^2 + \delta_3^2 = r_3^2. \end{aligned} \tag{37}$$

Сначала найдем границу области параметрического резонанса во втором приближении, как в [1]. Для этого положим $\delta_3 = r_3 = s_3 = 0$. Получаем

$$s_1^2 + \delta_1^2 = 0, \quad s_1s_2 + \delta_1\delta_2 = 0, \quad s_2^2 + \delta_2^2 = r_2^2.$$

Первое и второе равенства выполняются, если $s_1 = \delta_1 = 0$, т.е. согласно (36) при $\Delta_1 = \delta_1 = 0$. В этом случае частотная расстройка $\Delta \sim \varepsilon^2$ и коэффициент затухания $\delta \sim \varepsilon^2$. Далее, из (36) следуют выражения

$$s_2 = \frac{\Delta_2}{v} - \frac{vh_1^2}{6}, \quad r_2 = -\frac{vh_1^2}{4},$$

которые подставим в третье равенство

$$\left(\frac{\Delta_2}{v} - \frac{vh_1^2}{6}\right)^2 = \frac{v^2h_1^4}{16} - \delta_2^2.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta_2}{v} = \frac{vh_1^2}{6} \pm \sqrt{\frac{v^2h_1^4}{16} - \delta_2^2}.$$

Умножим на ε^2

$$\frac{\varepsilon^2\Delta_2}{v} = \frac{vh^2}{6} \pm \sqrt{\frac{v^2h^4}{16} - \delta^2}$$

и подставим частотную расстройку

$$\varepsilon^2\Delta_2 = \omega^2 - v^2,$$

которая следует из формулы (2) при $\Delta_1 = 0, p = q = 1$. Приходим к выражению

$$\frac{\omega^2 - v^2}{v} = \frac{vh^2}{6} \pm \sqrt{\frac{v^2h^4}{16} - \delta^2},$$

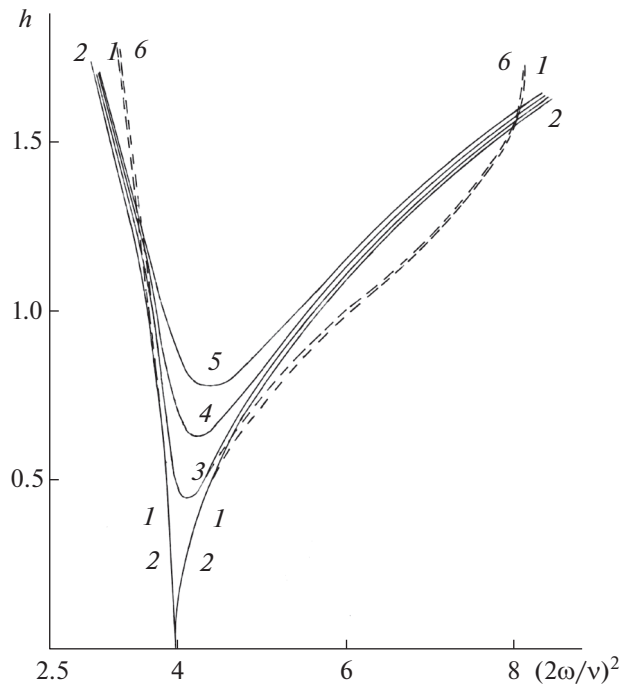
которое умножаем на $4/v$. В результате получаем границу области параметрического резонанса на плоскости параметров $((2\omega / v)^2, h)$ (как в работе [1])

$$\left(\frac{2\omega}{v}\right)^2 = 4 + \frac{2h^2}{3} \pm \sqrt{h^4 - \frac{16\delta^2}{v^2}}. \tag{38}$$

Эта формула отличается от формулы (17.63) в [1] числовым множителем при δ^2 . Там вместо 16 стоит 64.

В третьем приближении используем оценки $\Delta, \delta \sim \varepsilon^2$. Тогда $\Delta_1 = \delta_1 = \Delta_3 = \delta_3 = 0$, и по формулам (36) получаем

$$s_2 = \frac{\Delta_2}{v} - \frac{vh_1^2}{6}, \quad r_2 = -\frac{vh_1^2}{4}, \quad s_3 = r_3 = 0,$$



Фиг. 2

как во втором приближении. В результате граница области параметрического резонанса в третьем приближении совпадает с границей (38) во втором приближении.

На фиг. 2 показана граница, вычисленная по формуле (38) для трех значений $\delta/\nu = 0.05; 0.1; 0.15$ (линии 3, 4, 5 соответственно). Кривая 2 – граница, которая следует из (38) при отсутствии затухания ($\delta/\nu = 0$). Эта граница, вычисленная численным интегрированием уравнения Матье (28), изображена штриховой линией 1. Штриховая линия 6 – граница области параметрического резонанса при затухании $\delta/\nu = 0.05$ получена также численным интегрированием.

4. РЕЗОНАНС $\omega \approx \frac{3}{2}\nu$

Получим формулу для границы третьей области параметрического резонанса (формула (48)). Результат сравним с [1].

Из равенства выражений с ϵ в (11) и (10) при $p = 3, q = 2$ следует дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{9\nu^2}{4} u_1 - 3\nu A_1 \sin \psi - 3a\nu B_1 \cos \psi = \frac{9a\nu^2 h_1}{4} \cos(\nu t) \cos \psi - a\Delta_1 \cos \psi + \frac{3a\nu\delta_1}{2} \sin \psi.$$

Здесь

$$\psi = \frac{3\nu}{2}t + \theta$$

и

$$\cos(\nu t) \cos \psi = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{5\nu}{2}t + \theta\right) + \cos\left(\frac{\nu}{2}t + \theta\right) \right]. \tag{39}$$

Приравняем нулю выражения, содержащие $\sin \psi$ и $\cos \psi$

$$3\nu A_1 + \frac{3a\nu\delta_1}{2} = 0, \quad 3a\nu B_1 - a\Delta_1 = 0,$$

откуда

$$A_1 = -\frac{a\delta_1}{2}, \quad B_1 = \frac{\Delta_1}{3v}. \quad (40)$$

Дифференциальное уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{9v^2}{4} u_1 = \frac{9av^2 h_1}{8} \cos\left(\frac{v}{2}t + \theta\right) + \frac{9av^2 h_1}{8} \cos\left(\frac{5v}{2}t + \theta\right).$$

Оно имеет общее решение

$$u_1 = C_1 \cos\left(\frac{3v}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{3v}{2}t\right) + \frac{9ah_1}{16} \cos\left(\frac{v}{2}t + \theta\right) - \frac{9ah_1}{32} \cos\left(\frac{5v}{2}t + \theta\right), \quad (41)$$

в котором далее полагаем $C_1 = C_2 = 0$.

Приравняем теперь выражения с ε^2 в (11) и (10) с $p = 3, q = 2$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{9v^2}{4} u_2 + \left(-2A_1 B_1 - aA_1 \frac{\partial B_1}{\partial a} - aB_1 \frac{\partial B_1}{\partial \theta} - 3vA_2\right) \sin \psi + \\ & + \left(-aB_1^2 + A_1 \frac{\partial A_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - 3avB_2\right) \cos \psi + 2A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} + 2B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta \partial t} = \frac{9v^2 h_1}{4} u_1 \cos(vt) - \Delta_1 u_1 - \\ & - \delta_1 \left(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial t}\right) + ah_1 \Delta_1 \cos(vt) \cos \psi - a\Delta_2 \cos \psi + \frac{3av\delta_2}{2} \sin \psi. \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь присутствуют тригонометрические выражения (39) и

$$u_1 \cos(vt) = \frac{9ah_1}{32} \cos\left(\frac{v}{2}t - \theta\right) - \frac{9ah_1}{64} \cos\left(\frac{7v}{2}t + \theta\right) + \frac{9ah_1}{64} \cos \psi, \quad (43)$$

которое вычислено с учетом (41).

Приравняем нулю выражения с $\sin \psi$ и $\cos \psi$

$$\begin{aligned} & 3vA_2 + 2A_1 B_1 + aA_1 \frac{\partial B_1}{\partial a} + aB_1 \frac{\partial B_1}{\partial \theta} + a\delta_1 B_1 + \frac{3av\delta_2}{2} = 0, \\ & 3avB_2 - A_1 \frac{\partial A_1}{\partial a} - B_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + aB_1^2 + \frac{81av^2 h_1^2}{256} - \delta_1 A_1 - a\Delta_2 = 0. \end{aligned}$$

Используя формулы (40), получаем

$$A_2 = -\frac{a\delta_2}{2}, \quad B_2 = \frac{\Delta_2}{3v} - \frac{\Delta_1^2}{27v^3} - \frac{\delta_1^2}{12v} - \frac{27vh_1^2}{256}. \quad (44)$$

Дифференциальное уравнение (42) относительно u_2 принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{9v^2}{4} u_2 = \frac{81av^2 h_1^2}{128} \cos\left(\frac{v}{2}t - \theta\right) + \frac{ah_1 \Delta_1}{8} \cos\left(\frac{v}{2}t + \theta\right) + \\ & + \frac{5ah_1 \Delta_1}{16} \cos\left(\frac{5v}{2}t + \theta\right) - \frac{81av^2 h_1^2}{256} \cos\left(\frac{7v}{2}t + \theta\right). \end{aligned}$$

Оно имеет общее решение

$$\begin{aligned} u_2 = & C_1 \cos\left(\frac{3v}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{3v}{2}t\right) + \frac{81ah_1^2}{256} \cos\left(\frac{v}{2}t - \theta\right) + \frac{ah_1 \Delta_1}{16v^2} \cos\left(\frac{v}{2}t + \theta\right) - \\ & - \frac{5ah_1 \Delta_1}{64v^2} \cos\left(\frac{5v}{2}t + \theta\right) + \frac{81ah_1^2}{2560} \cos\left(\frac{7v}{2}t + \theta\right). \end{aligned} \quad (45)$$

Далее полагаем $C_1 = C_2 = 0$.

Формулы третьего приближения получим из равенства выражений с ε^3 в (11) и (10) при $p = 3, q = 2$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \frac{9v^2}{4} u_3 + \left(-aA_1 \frac{\partial B_2}{\partial a} - aA_2 \frac{\partial B_1}{\partial a} - aB_1 \frac{\partial B_2}{\partial \theta} - aB_2 \frac{\partial B_1}{\partial \theta} - 2A_1 B_2 - 2A_2 B_1 - 3vA_3 \right) \sin \psi + \\ & + \left(A_1 \frac{\partial A_2}{\partial a} + B_1 \frac{\partial A_2}{\partial \theta} + A_2 \frac{\partial A_1}{\partial a} + B_2 \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - 2aB_1 B_2 - 3avB_3 \right) \cos \psi + \frac{\partial u_1}{\partial a} \left(A_1 \frac{\partial A_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \right) + A_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2} + \\ & + 2A_1 B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \theta} + 2A_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial t} + 2A_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial a \partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \left(A_1 \frac{\partial B_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial B_1}{\partial \theta} \right) + B_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta^2} + 2B_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \theta \partial t} + 2B_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \theta \partial t} = \\ & = \frac{9v^2 h_1}{4} u_2 \cos(vt) - \Delta_1 u_2 - \delta_1 \left(A_2 \cos \psi - aB_2 \sin \psi + A_1 \frac{\partial u_1}{\partial a} + B_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u_2}{\partial t} \right) + h_1 \Delta_1 u_1 \cos(vt) - \\ & - \Delta_2 u_1 - \delta_2 \left(A_1 \cos \psi - aB_1 \sin \psi + \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + ah_1 \Delta_2 \cos(vt) \cos \psi - a\Delta_3 \cos \psi + \frac{3av\delta_3}{2} \sin \psi. \end{aligned}$$

Здесь присутствуют тригонометрические выражения (39), (43) и

$$\begin{aligned} u_2 \cos(vt) &= \frac{81ah_1^2}{512} [\cos(2\theta) \cos \psi + \sin(2\theta) \sin \psi] - \frac{ah_1 \Delta_1}{128v^2} \cos \psi + \frac{ah_1 \Delta_1}{32v^2} \cos\left(\frac{v}{2}t - \theta\right) + \\ & + \frac{81ah_1^2}{512} \cos\left(\frac{v}{2}t + \theta\right) + \frac{81ah_1^2}{5120} \cos\left(\frac{5v}{2}t + \theta\right) - \frac{5ah_1 \Delta_1}{128v^2} \cos\left(\frac{7v}{2}t + \theta\right) + \frac{81ah_1^2}{5120} \cos\left(\frac{9v}{2}t + \theta\right), \end{aligned}$$

которое получаем с использованием u_2 (45).

Приравняем нулю выражения с $\sin \psi$ и $\cos \psi$

$$\begin{aligned} & 3vA_3 + aA_1 \frac{\partial B_2}{\partial a} + aA_2 \frac{\partial B_1}{\partial a} + aB_1 \frac{\partial B_2}{\partial \theta} + aB_2 \frac{\partial B_1}{\partial \theta} + 2A_1 B_2 + 2A_2 B_1 + \\ & + \frac{729av^2 h_1^3}{2048} \sin(2\theta) + a\delta_1 B_2 + a\delta_2 B_1 + \frac{3av\delta_3}{2} = 0, \\ & 3avB_3 - A_1 \frac{\partial A_2}{\partial a} - B_1 \frac{\partial A_2}{\partial \theta} - A_2 \frac{\partial A_1}{\partial a} - B_2 \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + 2aB_1 B_2 + \\ & + \frac{63ah_1^2 \Delta_1}{512} + \frac{729av^2 h_1^3}{2048} \cos(2\theta) - \delta_1 A_2 - \delta_2 A_1 - a\Delta_3 = 0. \end{aligned}$$

Учитывая формулы (40), (44), после простых вычислений получаем

$$\begin{aligned} A_3 &= -\frac{a\delta_3}{2} - \frac{243avh_1^3}{2048} \sin(2\theta), \\ B_3 &= \frac{\Delta_3}{3v} + \frac{2\Delta_1^3}{243v^5} - \frac{2\Delta_1 \Delta_2}{27v^3} + \frac{\Delta_1 \delta_1^2}{54v^3} - \frac{\delta_1 \delta_2}{6v} - \frac{9h_1^2 \Delta_1}{512v} - \frac{243vh_1^3}{2048} \cos(2\theta). \end{aligned}$$

Эти формулы, а также (40) и (44) позволяют записать систему дифференциальных уравнений (8) в виде (18) с коэффициентами

$$\delta = \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \varepsilon^3 \delta_3, \quad r = \varepsilon^3 r_3, \quad s = \varepsilon s_1 + \varepsilon^2 s_2 + \varepsilon^3 s_3, \quad (46)$$

в которых

$$\begin{aligned} r_3 &= -\frac{243vh_1^3}{1024}, \quad s_1 = \frac{2\Delta_1}{3v}, \quad s_2 = \frac{2\Delta_2}{3v} - \frac{2\Delta_1^2}{27v^3} - \frac{\delta_1^2}{6v} - \frac{27vh_1^2}{128}, \\ s_3 &= \frac{2\Delta_3}{3v} - \frac{4\Delta_1 \Delta_2}{27v^3} + \frac{4\Delta_1^3}{243v^5} + \frac{\Delta_1 \delta_1^2}{27v^3} - \frac{\delta_1 \delta_2}{3v} - \frac{9\Delta_1 h_1^2}{256v}. \end{aligned} \quad (47)$$

Подстановка (20) приводит систему (18) к системе (21) и далее к равенству (22), определяющему границу области параметрического резонанса. При подстановке разложений (46) в (22) приходим к системе равенств

$$\begin{aligned} s_1^2 + \delta_1^2 = 0, \quad s_1 s_2 + \delta_1 \delta_2 = 0, \quad s_2^2 + 2s_1 s_3 + \delta_2^2 + 2\delta_1 \delta_3 = 0, \\ s_2 s_3 + \delta_2 \delta_3 = 0, \quad s_3^2 + \delta_3^2 = r_3^2. \end{aligned}$$

Из первого следует $s_1 = \delta_1 = 0$. При этих значениях справедливо второе равенство. Третье принимает вид $s_2^2 + \delta_2^2 = 0$, откуда получаем $s_2 = \delta_2 = 0$, и, значит, справедливо четвертое равенство. Граница области параметрического резонанса определяется пятым равенством

$$s_3^2 + \delta_3^2 = r_3^2.$$

Уточним формулы для s_2 и s_3 (47). При $s_1 = 0$ имеем $\Delta_1 = 0$. Тогда с учетом значения $\delta_1 = 0$ получаем

$$s_2 = \frac{2\Delta_2}{3\nu} - \frac{27\nu h_1^2}{128}, \quad s_3 = \frac{2\Delta_3}{3\nu}.$$

Из условия $s_2 = 0$ следует

$$\Delta_2 = \frac{81\nu^2 h_1^2}{256}.$$

Теперь запишем подробно пятое равенство, умножая его на ϵ^6 :

$$\frac{4(\epsilon^3 \Delta_3)^2}{9\nu^2} + (\epsilon^3 \delta_3)^2 = \left(\frac{243}{1024}\right)^2 \nu^2 (\epsilon h)^6.$$

Подставим выражение

$$\epsilon^3 \Delta_3 = \omega^2 - \frac{9\nu^2}{4} - \epsilon^2 \Delta_2,$$

полученное из формулы (2):

$$\frac{4}{9\nu^2} \left(\omega^2 - \frac{9\nu^2}{4} - \epsilon^2 \Delta_2 \right)^2 = \left(\frac{243}{1024}\right)^2 \nu^2 h^6 - \delta^2.$$

Подставим сюда Δ_2 :

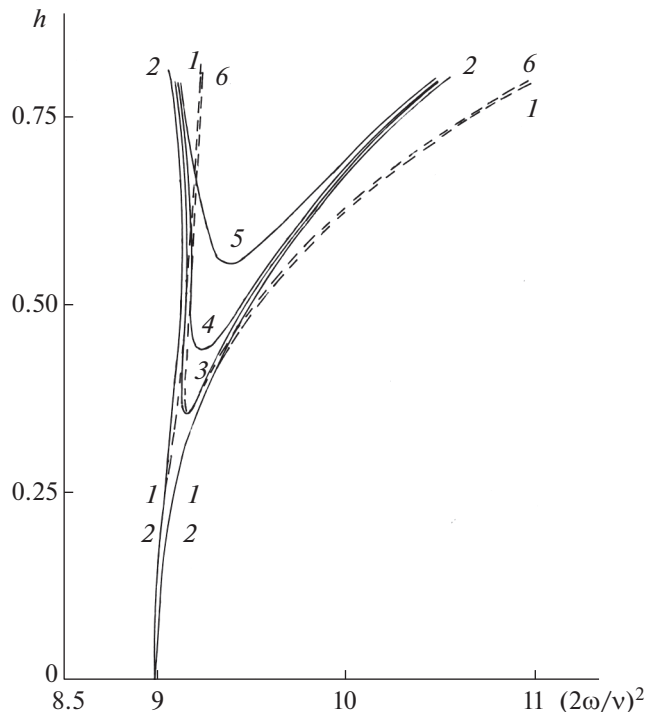
$$\frac{4}{9\nu^2} \left(\omega^2 - \frac{9\nu^2}{4} - \frac{81\nu^2 h^2}{256} \right)^2 = \left(\frac{243}{1024}\right)^2 \nu^2 h^6 - \delta^2.$$

Выразим $(2\omega/\nu)^2$. Для этого умножаем на $36/\nu^2$ и извлекаем квадратный корень. В результате получаем границу области параметрического резонанса на плоскости параметров $((2\omega/\nu)^2, h)$

$$\left(\frac{2\omega}{\nu}\right)^2 = 9 + \frac{81h^2}{64} \pm \sqrt{\left(\frac{81}{64}\right)^3 h^6 - \frac{36\delta^2}{\nu^2}}. \tag{48}$$

В [1] под корнем при δ^2 стоит множитель 324 (см. формулу (17.64)).

На фиг. 3 показана граница (48) третьей области параметрического резонанса при значениях затуханий $\delta/\nu = 0, 0.01; 0.02; 0.04$ (кривые 2, 3, 4, 5 соответственно). При значении $\delta/\nu = 0.01$ изображена также граница б (штриховая линия), полученная численным интегрированием уравнения Матье (28). Штриховая линия 1 – граница при отсутствии затухания – также результат численного интегрирования.



Фиг. 3

5. ГРАНИЦЫ ОБЛАСТЕЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА
 ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $\ddot{x} + \delta\dot{x} + [a + q \cos(2t)]x = 0$

Уравнение Матье в такой записи часто встречается в литературе (см., например, [4], [2]). Для него из формул (27), (38), (48), полученных из уравнения (1), выведем формулы, описывающие границы трех областей параметрического резонанса на плоскости параметров (a, q) .

Из сравнения уравнений следуют соотношения

$$\omega^2 = a, \quad h = -\frac{q}{a} \sim \varepsilon, \quad \nu = 2. \tag{49}$$

Формула (27), справедливая в случае резонанса $\omega \approx \nu/2 = 1$, приобретает вид

$$a = 1 \pm \sqrt{\frac{q^2}{4a^2} - \delta^2} + \frac{7q^2}{32a^2}.$$

Поскольку параметры q и δ имеют одинаковый порядок малости ($\sim \varepsilon$), положим $\delta = kq$, где $k \sim 1$, и перепишем это выражение

$$a = 1 \pm q \sqrt{\frac{1}{4a^2} - k^2} + \frac{7q^2}{32a^2}. \tag{50}$$

Корни a уравнения будем искать в виде разложения по степеням q

$$a = 1 + qa_1 + q^2a_2 + q^3a_3 + \dots \tag{51}$$

Сделаем разложение во втором слагаемом правой части (50)

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{4a^2} - k^2} &= \sqrt{\frac{1}{4} - k^2} + \left(\sqrt{\frac{1}{4a^2} - k^2} \right)'_{a=1} (qa_1 + q^2a_2 + \dots) + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{4a^2} - k^2} \right)''_{a=1} (qa_1 + \dots)^2 + \dots = \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} - k^2} - \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{4} - k^2}} (qa_1 + q^2a_2 + \dots) + \frac{1 - 6k^2}{16\left(\frac{1}{4} - k^2\right)^{3/2}} (q^2a_1^2 + \dots), \end{aligned}$$

в третьем слагаемом –

$$\frac{1}{a^2} = 1 - 2qa_1 + \dots$$

Подставим эти разложения и (51) в уравнение (50), приравняем выражения с одинаковыми степенями q в левой и правой частях:

$$q: a_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{4} - k^2}; \quad q^2: a_2 = \mp\frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{4} - k^2}}a_1 + \frac{7}{32}.$$

Отсюда

$$a_2 = -\frac{1}{32}.$$

Подставляя $a_{1,2}$ в (51) и учитывая формулу $k = \delta/q$, получаем выражение, описывающее границу области параметрического резонанса $a \approx 1$ на плоскости параметров (a, q)

$$a = 1 \pm \frac{\sqrt{q^2 - 4\delta^2}}{2} - \frac{q^2}{32}. \tag{52}$$

При резонансе $\omega \approx \nu = 2$ с использованием формул (49) запишем выражение (38) для границы области параметрического резонанса

$$a = 4 + \frac{2q^2}{3a^2} \pm \sqrt{\frac{q^4}{a^4} - 4\delta^2}.$$

Ищем решение этого уравнения, зависящего от a , в виде

$$a = 4 + qa_1 + q^2a_2 + q^3a_3 + \dots$$

Учитывая оценку $\delta \sim q^2$ и полагая $\delta = kq^2$, разлагая функции по степеням q и приравнивая выражения с одинаковыми степенями q в левой и правой частях уравнения, находим

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{24} \pm \sqrt{\frac{1}{256} - 4k^2}, \quad a_3 = 0.$$

Таким образом, сохраняя точность третьего приближения, получаем границу области параметрического резонанса на плоскости параметров (a, q)

$$a = 4 + \frac{q^2}{24} \pm \sqrt{\frac{q^4}{256} - 4\delta^2}. \tag{53}$$

В случае $\omega \approx 3\nu/2 = 3$ с использованием формул (49) и $\delta = kq^3$ запишем выражение (48) для границы области параметрического резонанса

$$a = 9 + \frac{81q^2}{64a^2} \pm q^3 \sqrt{\frac{81^3}{64^3 a^6} - 9k^2}.$$

Ищем решение a в виде разложения

$$a = 9 + qa_1 + q^2a_2 + q^3a_3 + \dots$$

Тогда во втором слагаемом в правой части

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{81} - \frac{2q}{729}a_1 + \dots$$

Из сравнения коэффициентов при одинаковых степенях q получаем

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{64}, \quad a_3 = \pm\sqrt{\frac{1}{64^3} - 9k^2}.$$

Окончательно имеем

$$a = 9 + \frac{q^2}{64} \pm \sqrt{\left(\frac{q^3}{512}\right)^2 - 9\delta^2}. \quad (54)$$

Формулы (52)–(54) получены асимптотическим методом усреднения [3], [4] в статье [2]. При этом уравнение Матье с параметрами a и q приводилось к системе уравнений, содержащей несколько быстрых фаз, как это делалось для уравнений Матье в [4]–[6], а также уравнения Хилла без затухания в [10] и с затуханием в [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
2. Беломытцева Е.Г., Курин А.Ф., Туленко Е.Б. Задача Коши для уравнения Матье с затуханием при параметрическом резонансе // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. 2018. № 3. С. 105–125.
3. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981.
4. Гребеников Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах. М.: Наука, 1986.
5. Курин А.Ф. Задача Коши для уравнения Матье при параметрическом резонансе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 4. С. 633–650.
6. Курин А.Ф. Задача Коши для уравнения Матье вдали от параметрического резонанса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 8. С. 1419–1433.
7. Штокало И.З. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Киев: Изд-во АН Украинской ССР, 1960.
8. Колесов Ю.С., Майоров В.В. Новый метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 10. С. 1778–1788.
9. Горелик Г. Резонансные явления в линейных системах с периодически меняющимися параметрами // Ж. теор. физ. 1935. Т. 5. № 3. С. 489–517.
10. Курин А.Ф. Спектральный критерий устойчивости и задача Коши для уравнения Хилла при параметрическом резонансе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49. № 3. С. 498–511.
11. Беломытцева Е.Г., Курин А.Ф., Туленко Е.Б. Спектральный критерий устойчивости и задача Коши для уравнения Хилла с затуханием при параметрическом резонансе // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. 2019. № 1. С. 69–90.

**ОБЫКНОВЕННЫЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

УДК 517.63

**АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ АНАЛИЗА МАЛЫХ
ВОЗМУЩЕНИЙ ОКЕАНСКИХ ГЕОСТРОФИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ
С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ ВЕРТИКАЛЬНЫМ ПРОФИЛЕМ
СКОРОСТИ ОБЩЕГО ВИДА¹⁾**© 2022 г. С. Л. Скороходов¹, *, Н. П. Кузьмина², **¹ 119991 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия² 117997 Москва, Нахимовский пр-т, 36, Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Россия

*e-mail: sskorokhodov@gmail.com

**e-mail: kuzmina@ocean.ru

Поступила в редакцию 24.04.2022 г.
Переработанный вариант 27.05.2022 г.
Принята к публикации 21.06.2022 г.

Разработан аналитико-численный метод для решения задачи, основанной на уравнении эволюции потенциального вихря в квазигеострофическом приближении с учетом вертикальной диффузии массы и импульса, с целью анализа малых возмущений океанских течений конечного поперечного масштаба с параболическим вертикальным профилем скорости общего вида. Для возникающей спектральной несамосопряженной задачи построены асимптотики собственных функций и собственных значений при малых значениях волнового числа k и показано, что при малых k существуют два ограниченных и счетное множество неограниченно растущих собственных значений. Рассчитаны траектории собственных значений для различных безразмерных параметров задачи при изменении волнового числа k , что показало существенную зависимость скорости роста неустойчивых возмущений от физических параметров модели. Библ. 11. Фиг. 6.

Ключевые слова: спектральная несамосопряженная задача, асимптотические разложения, метод продолжения по параметру.

DOI: 10.31857/S0044466922120134

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1]–[9] представлены результаты исследования устойчивых и неустойчивых малых возмущений геострофических течений с линейным и параболическим вертикальными профилями скорости. Модели основывались на уравнении эволюции потенциального вихря в квазигеострофическом приближении с учетом вертикальной диффузии массы и импульса. Вывод основных уравнений модели подробно представлен в [1]–[4]. Анализ проводился для течений с боковыми границами в конечных по вертикали слоях. Для течения с параболическим вертикальным профилем скорости были рассмотрены два частных случая: а) максимум скорости течения расположен в середине слоя (см. [1]–[5]); б) максимум скорости течения достигался на верхней или нижней границах слоя (см. [9]). Однако в океане наблюдаются течения с максимумом скорости внутри слоя, а не только на его границах или в центре слоя. В связи с этим исследование динамики такого течения, т.е. течения с вертикальным параболическим профилем скорости общего вида, является актуальным. Данная работа посвящена разработке аналитико-численного метода для решения задачи динамики геострофического течения с параболическим профилем общего вида. Представлены расчеты траекторий собственных значений (СЗ) для различных параметров модели.

¹⁾Работа выполнена при участии Н.П. Кузьминой при поддержке бюджетного финансирования Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН (тема FMWE -2021-0001).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Область, в которой исследуется модельное течение, является бесконечным (вдоль направления течения) горизонтальным слоем толщины $2H$ с верхней и нижней границами $z_1 = H$ и $z_0 = -H$ и боковыми границами $y_0 = 0$ и $y_1 = L$. Декартовы координаты внутри такого слоя следующие: вертикальная переменная $z \in [-H, H]$, поперечная переменная $y \in [0, L]$ и продольная переменная x направлена вдоль течения, $x \in (-\infty, \infty)$.

В соответствии с методами исследования неустойчивости течений (см. работы [1]–[5]) представим отклонения безразмерного давления в виде бегущей вдоль оси x волны:

$$p(x, y, z; t) = \sin\left(\pi n \frac{y}{L}\right) e^{ik(x-ct)} F\left(\frac{z}{H}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (0.1)$$

где k – волновое число возмущения вдоль координаты x , L/n – масштаб возмущения в поперечном направлении y , c – комплексная фазовая скорость волны, а $F(z/H)$ – искомый вертикальный профиль возмущения давления.

В безразмерных переменных задача исследования неустойчивости течения с параболическим вертикальным профилем скорости общего вида сводится к решению спектральной задачи на отрезке $z \in [-1, 1]$. (Подробное описание введения безразмерных переменных для аналогичных задач можно найти, например в [3], [4].) Отметим, что вертикальный профиль течения в безразмерном виде в этом случае будет иметь вид

$$U(z) = 1 - \alpha z^2 + \beta z, \quad (0.2)$$

где параметры α и β неотрицательны. Из стандартного условия равенства нулю скорости основного течения на нижней границе слоя следует, что

$$\alpha + \beta = 1. \quad (0.3)$$

Постановка задачи исследования устойчивости малых возмущений течения с вертикальным профилем скорости $U(z)$ проводится аналогично задачам в [3]–[9] и может быть записана в виде следующей спектральной задачи на отрезке $z \in [-1, 1]$.

Задача. Найти комплекснозначные собственные функции (СФ) $F = F(z)$ и СЗ " c ", удовлетворяющие на отрезке $z \in [-1, 1]$ уравнению

$$\frac{1}{ikR} (F^{(IV)} - \text{Bu Pr}(k^2 + \pi^2 n^2) F''') = (1 - \alpha z^2 + \beta z - c)(F''' - \text{Bu}(k^2 + \pi^2 n^2) F) + 2\alpha F \quad (0.4)$$

с краевыми условиями

$$\frac{1}{ikR} F'''(1) = (1 - \alpha + \beta - c)F'(1) - (\beta - 2\alpha)F(1), \quad F''(1) = 0, \quad (0.5)$$

$$\frac{1}{ikR} F'''(-1) = -cF'(-1) - (\beta + 2\alpha)F(-1), \quad F''(-1) = 0, \quad (0.6)$$

причем неотрицательные параметры α и β удовлетворяют условию (0.3).

Здесь введены следующие обозначения: $R = \text{Re } H/L$, где Re – число Пекле (аналог числа Рейнольдса), n – число полуволн в поперечном направлении ($n = 1, 2, \dots$), Pr – число Прандтля, Bu – число Бургера, i – мнимая единица.

Краевые условия в (0.5), (0.6) с участием третьих производных задают непротекание на горизонтальных границах слоя, а условия для вторых производных задают равенство нулю потоков плавучести.

Поставленная задача является несамосопряженной, сингулярно возмущенной (для реальных течений величина kR может быть очень большой), а спектральный параметр c входит в уравнение и в краевые условия. Задача будет иметь счетное множество СФ и соответствующих им СЗ. Неустойчивые по времени возмущения давления $p(x, y, z; t)$ возникают для тех СФ, которым соответствуют СЗ c_m с положительной мнимой частью $\text{Im}(c) > 0$, что следует из представления (0.1).

1. МЕТОД РАСЧЕТА СФ И СЗ

Анализ уравнения (0.4) показывает, что СФ $F(z)$ являются целыми функциями, а их степенные разложения будут сходиться при любых конечных значениях аргумента z . Метод расчета СФ и соответствующих СЗ был разработан ранее в [5], [6] и показал свою высокую точность и быстродействие. Суть этого подхода состоит в построении степенных разложений $F(z)$ в граничных точках $z = -1$ и $z = 1$ и их гладкой сшивке в некоторой точке $z_* \in (-1, 1)$.

Зафиксируем спектральный параметр c и решение $F(c; z)$ уравнения (0.4) представим в виде двух разложений в точках $z = 1$ и $z = -1$:

$$F(c; z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(c)(z - 1)^m, \quad F(c; z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(c)(z + 1)^m, \tag{1.1}$$

сходящихся при любых $z, |z| < \infty$, где коэффициенты $a_m(c)$ и $b_m(c)$ зависят от параметра c . Подставляя представления (1.1) в уравнение (0.4), получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов a_m и b_m :

$$a_{m+4} = \{(m + 1)(m + 2)[\text{Pr Bu}(\pi^2 n^2 + k^2) + (1 - \alpha + \beta - c)ikR]a_{m+2} + ikR(\beta - 2\alpha)m(m + 1)a_{m+1} + ikR[2\alpha - \text{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)(1 - \alpha + \beta - c) - \alpha m(m - 1)]a_m - ikR\text{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)(\beta - 2\alpha)a_{m-1} + ikR\alpha\text{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)a_{m-2}\}[(m + 1)(m + 2)(m + 3)(m + 4)]^{-1}, \tag{1.2}$$

$$b_{m+4} = \{(m + 1)(m + 2)[\text{Pr Bu}(\pi^2 n^2 + k^2) - ikRc]b_{m+2} + ikRm(m + 1)(2\alpha + \beta)b_{m+1} + ikR[2\alpha - \alpha m(m - 1) + \text{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)c]b_m - ikR\text{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)(2\alpha + \beta)b_{m-1} + ikR\alpha\text{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)b_{m-2}\}[(m + 1)(m + 2)(m + 3)(m + 4)]^{-1}. \tag{1.3}$$

Асимптотическое поведение коэффициентов a_m и b_m с ростом номера m может быть исследовано на основе теории Пуанкаре–Перрона анализа полученных рекуррентных уравнений (1.2) и (1.3) (см. [10]). Для наиболее медленно убывающих решений коэффициентов a_m и b_m это асимптотическое поведение зависит от параметра α следующим образом:

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} \sim \frac{t}{\sqrt{m}}, \quad \frac{b_{m+1}}{b_m} \sim \frac{t}{\sqrt{m}}, \quad m \rightarrow \infty, \quad t = (-ikR\alpha)^{1/4}, \quad \alpha \neq 0,$$

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} \sim \frac{t}{m^{2/3}}, \quad \frac{b_{m+1}}{b_m} \sim \frac{t}{m^{2/3}}, \quad m \rightarrow \infty, \quad t = (ikR)^{1/3}, \quad \alpha = 0.$$

Такая скорость убывания коэффициентов a_m и b_m обеспечивает быструю сходимость используемых разложений (1.1) на всем отрезке $z \in [-1, 1]$.

Теперь учтем краевые условия (0.5) и (0.6), дающие связь коэффициентов a_m и $b_m, m = 0, 1, 2, 3$:

$$a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{ikR}{6}[(1 - \alpha + \beta - c)a_1 - (\beta - 2\alpha)a_0], \tag{1.4}$$

$$b_2 = 0, \quad b_3 = -\frac{ikR}{6}[cb_1 + (\beta + 2\alpha)b_0]. \tag{1.5}$$

Далее построим два независимых решения $F_1(c; z)$ и $F_2(c; z)$ в виде разложений (1.1) в точке $z = 1$. Для этого зададим коэффициенты $a_0^{(1)}$ и $a_1^{(1)}$ решения $F_1(c; z)$ следующими:

$$a_0^{(1)} = 1, \quad a_1^{(1)} = 0,$$

величины $a_2^{(1)}$ и $a_3^{(1)}$ определим по (1.4), а все последующие $a_m^{(1)}$ вычислим по рекурсии (1.2), где полагаем $a_{-1}^{(1)} = a_{-2}^{(1)} = 0$.

Для второго решения $F_2(c; z)$ коэффициенты $a_0^{(2)}$ и $a_1^{(2)}$ зададим следующими:

$$a_0^{(2)} = 0, \quad a_1^{(2)} = 1,$$

а все последующие $a_m^{(2)}$ вычислим аналогично предыдущему. Два разложения $F_1(c; z)$ и $F_2(c; z)$ в точке $z = 1$ построены.

Линейная комбинация $F_1(c; z)$ и $F_2(c; z)$ является общим решением $F(c; z)$ уравнения (0.4) с краевыми условиями (0.5) в точке $z = 1$:

$$F(c; z) = t_1 F_1(c; z) + t_2 F_2(c; z), \quad (1.6)$$

где t_1 и t_2 — произвольные весовые коэффициенты.

Теперь построим две функции $F_3(c; z)$ и $F_4(c; z)$ в виде разложений в точке $z = -1$, задав коэффициенты $b_0^{(1)}$, $b_1^{(1)}$ и $b_0^{(2)}$, $b_1^{(2)}$ следующими:

$$b_0^{(1)} = 1, \quad b_1^{(1)} = 0, \quad b_0^{(2)} = 0, \quad b_1^{(2)} = 1,$$

положив b_2 и b_3 в соответствии с (1.5), а все последующие коэффициенты b_m для обоих разложений вычислив из соотношения (1.3).

Линейная комбинация $F_3(c; z)$ и $F_4(c; z)$ является общим решением $F(c; z)$ уравнения (0.4) с краевыми условиями (0.6) в точке $z = -1$,

$$F(c; z) = t_3 F_3(c; z) + t_4 F_4(c; z) \quad (1.7)$$

с произвольными весовыми коэффициентами t_3 и t_4 .

Задача построения СФ и вычисления искомого СЗ теперь сводится к гладкой сшивке в некоторой точке $z_* \in (-1, 1)$ комбинаций (1.6) и (1.7):

$$t_1 F_1^{(p)}(c; z_*) + t_2 F_2^{(p)}(c; z_*) - t_3 F_3^{(p)}(c; z_*) - t_4 F_4^{(p)}(c; z_*) = 0, \quad p = 0, 1, 2, 3. \quad (1.8)$$

Нетривиальное решение системы (1.8) требует равенства нулю вронскиана $W(F_1, F_2, F_3, F_4)$:

$$W(F_1, F_2, F_3, F_4; c; z_*) = 0. \quad (1.9)$$

Решая это уравнение относительно величины c , получаем искомое СЗ — комплексную скорость бегущей волны, зависящую от всех параметров задачи (0.4)–(0.6). Найденные при этом весовые коэффициенты t_1, t_2, t_3, t_4 позволяют (с точностью до произвольного множителя) найти соответствующую СФ $F(c; z)$ в виде комбинаций (1.6) и (1.7) в точках $z = 1$ и $z = -1$ соответственно.

Решение уравнения (1.9) будем строить с помощью итерационного метода Ньютона:

$$c^{(q+1)} = c^{(q)} - W(\dots; c^{(q)}; z_*) \left[\frac{\partial W(\dots; c^{(q)}; z_*)}{\partial c} \right]^{-1}, \quad q = 0, 1, \dots, \quad (1.10)$$

а начальные приближения $c^{(0)}$ будем брать на основе метода продолжения по параметру k и из полученных далее асимптотических разложений при $k \rightarrow 0$.

Необходимая для метода Ньютона производная $\partial W(\dots; c; z_*)/\partial c$ от вронскиана (1.9) системы (1.8) находилась с помощью явного дифференцирования по спектральному параметру c разложений для всех производных $F_1^{(p)}(c; z_*)$, $F_2^{(p)}(c; z_*)$, $F_3^{(p)}(c; z_*)$, $F_4^{(p)}(c; z_*)$ при $p = 0, 1, 2, 3$, что позволило избежать использования конечно-разностной производной $\Delta W(\dots; c; z_*)/\Delta c$ и связанной с ней потери точности при малых $|\Delta c|$.

2. АСИМПТОТИКА СФ И СЗ ПРИ $k \rightarrow 0$

Построим при $k \rightarrow 0$ асимптотическое разложение СФ и СЗ при ненулевых параметрах R , V_n , P_n и $n \in \mathbb{N}$. Метод такого построения описан, например, в [11].

Как и ранее в частном случае спектральной задачи [9], здесь будут возникать ограниченные и неограниченные СЗ, которые рассмотрим отдельно.

2.1. Ограниченные СЗ

Полагая, что асимптотическое разложение СЗ при $k \rightarrow 0$ имеет конечный предел c_0 , запишем представление для СФ $F(k; z)$ и СЗ $c(k)$ в виде ряда по степеням $(ikR)^m$

$$F(k; z) = \varphi_0(z) + ikR\varphi_1(z) + (ikR)^2\varphi_2(z) + \dots, \tag{2.1}$$

$$c(k) = c_0 + ikRc_1 + (ikR)^2c_2 + \dots, \quad k \rightarrow 0. \tag{2.2}$$

Подстановка разложений (2.1) и (2.2) в исходное уравнение (0.4) и краевые условия (0.5), (0.6) приводит к цепочке краевых задач для функций $\varphi_m(z)$ и значений $c_m, m = 0, 1, \dots$. Первая задача для $\varphi_0(z)$ имеет вид

$$\varphi_0''''(z) - \text{Pr Bu } \pi^2 n^2 \varphi_0''(z) = 0, \quad z \in [-1, 1], \tag{2.3}$$

$$\varphi_0'''(-1) = \varphi_0''(-1) = 0, \quad \varphi_0'''(1) = \varphi_0''(1) = 0. \tag{2.4}$$

Решением (2.3), (2.4) является линейная функция

$$\varphi_0(z) = A_0 + B_0 z \quad \forall A_0, B_0. \tag{2.5}$$

Для следующей функции $\varphi_1(z)$ и величины c_0 возникает задача

$$\varphi_1''''(z) - \text{Pr Bu } \pi^2 n^2 \varphi_1''(z) = [(\alpha z^2 - \beta z - 1 + c_0) \text{Bu } \pi^2 n^2 + 2\alpha] \varphi_0(z) \tag{2.6}$$

с краевыми условиями

$$\varphi_1'''(-1) = -c_0 \varphi_0'(-1) - (\beta + 2\alpha) \varphi_0(-1), \quad \varphi_1''(-1) = 0, \tag{2.7}$$

$$\varphi_1'''(1) = (1 - \alpha + \beta - c_0) \varphi_0'(1) - (\beta - 2\alpha) \varphi_0(1), \quad \varphi_1''(1) = 0. \tag{2.8}$$

Решение $\varphi_1(z)$ уравнения (2.6) ищем в виде суммы $\varphi_h(z) + \varphi_{nh}(z)$ решений однородного и неоднородного уравнений соответственно.

Учитывая вид (2.5) функции $\varphi_0(z)$ и замечая, что в правой части (2.6) стоит полином степени 3, записываем представление для функции $\varphi_{nh}(z)$ в виде полинома степени 5:

$$\varphi_{nh}(z) = D_2 z^2 + D_3 z^3 + D_4 z^4 + D_5 z^5, \tag{2.9}$$

где для коэффициентов D_m после подстановки (2.9) в уравнение (2.6), получаем

$$D_2 = -\left(\frac{\alpha}{\lambda^2 \text{Pr}} + \frac{\alpha}{\lambda^2} + \frac{c_0 - 1}{2\text{Pr}}\right) A_0 + \frac{\beta}{\lambda^2 \text{Pr}} B_0, \quad D_3 = \frac{\beta}{6\text{Pr}} A_0 - \left(\frac{\alpha}{\lambda^2 \text{Pr}} + \frac{\alpha}{3\lambda^2} + \frac{c_0 - 1}{6\text{Pr}}\right) B_0, \tag{2.10}$$

$$D_4 = \frac{-\alpha}{12\text{Pr}} A_0 + \frac{\beta}{12\text{Pr}} B_0, \quad D_5 = \frac{-\alpha}{20\text{Pr}} B_0,$$

а для величины λ введено обозначение

$$\lambda = \pi n \sqrt{\text{Pr Bu}}. \tag{2.11}$$

Решение $\varphi_h(z)$ однородного уравнения запишем в форме

$$\varphi_h(z) = E_1 \text{sh } \lambda z + E_2 \text{ch } \lambda z + A_1 + B_1 z, \tag{2.12}$$

а неизвестные постоянные найдем далее. Подставляя решение $\varphi_1 = \varphi_h + \varphi_{nh}$ сначала в краевые условия (2.7), (2.8) для вторых производных, получим коэффициенты E_1 и E_2 :

$$E_1 = -\frac{20D_5}{\lambda^2 \text{sh } \lambda} - \frac{6D_3}{\lambda^2 \text{sh } \lambda}, \quad E_2 = -\frac{12D_4}{\lambda^2 \text{ch } \lambda} - \frac{2D_2}{\lambda^2 \text{ch } \lambda}. \tag{2.13}$$

Теперь подставим решение $\varphi_1(z)$ в краевые условия (2.7), (2.8) для третьих производных, а затем запишем сумму и разность полученных уравнений:

$$E_1 \lambda^3 \text{ch } \lambda + 60D_5 + 6D_3 = -\beta A_0 + (\alpha + 1 - c_0) B_0, \quad E_2 \lambda^3 \text{sh } \lambda + 24D_4 = 2\alpha A_0. \tag{2.14}$$

Подставляя сюда значения E_1 и E_2 из (2.13), а затем соотношения (2.10) для коэффициентов D_m , получаем окончательную систему двух уравнений для величин A_0 и B_0 :

$$[\text{th } \lambda(2\alpha + 2\alpha \text{Pr} + (c_0 - 1)\lambda^2) - 2\alpha\lambda(\text{Pr} + 1) + \alpha\lambda^2 \text{th } \lambda]A_0 + \beta[2\lambda - (\lambda^2 + 2)\text{th } \lambda]B_0 = 0, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} & \beta\lambda^2[\text{Pr} + 1 - \lambda \text{cth } \lambda]A_0 + [(\lambda \text{cth } \lambda - 1)(6\alpha + 2\alpha \text{Pr} + \lambda^2(c_0 - 1)) - \\ & - \alpha\lambda^2(\text{Pr} + 3 - \lambda \text{cth } \lambda) + (c_0 - 1)\text{Pr}\lambda^2]B_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Для разрешимости системы (2.15), (2.16) необходимо равенство нулю ее детерминанта, что даст уравнение для искомой величины c_0 . Запишем его в виде квадратного уравнения относительно $(c_0 - 1)$:

$$Q_2(c_0 - 1)^2 + Q_1(c_0 - 1) + Q_0 = 0, \quad (2.17)$$

где обозначено

$$Q_2 = \lambda^5 + \lambda^4 \text{th } \lambda(\text{Pr} - 1),$$

$$\begin{aligned} Q_1 = & \lambda^2\{\text{th } \lambda[(\lambda \text{cth } \lambda - 1)(6\alpha + 2\alpha \text{Pr}) - \alpha\lambda^2(3 + \text{Pr} - \lambda \text{cth } \lambda)] + \\ & + (\lambda \text{cth } \lambda + \text{Pr} - 1)[\text{th } \lambda(2\alpha + 2\alpha \text{Pr}) - \alpha\lambda(2\text{Pr} + 2 - \lambda \text{th } \lambda)]\}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$Q_0 = [\text{th } \lambda(2\alpha + 2\alpha \text{Pr}) - \alpha\lambda(2\text{Pr} + 2 - \lambda \text{th } \lambda)] \times$$

$$\times [(\lambda \text{cth } \lambda - 1)(6\alpha + 2\alpha \text{Pr}) - \alpha\lambda^2(3 + \text{Pr} - \lambda \text{cth } \lambda)] - \beta^2\lambda^2(2\lambda - \lambda^2 \text{th } \lambda - 2 \text{th } \lambda)(\text{Pr} + 1 - \lambda \text{cth } \lambda).$$

Два корня c_{0_1} и c_{0_2} уравнения (2.17) следующие:

$$c_{0_{1,2}} = 1 + \frac{-Q_1 \pm \sqrt{Q_1^2 - 4Q_0Q_2}}{2Q_2}. \quad (2.19)$$

Для реальных течений в океане величина $\lambda = \pi n \sqrt{\text{Pr} \text{Vu}}$ (см. (2.11)) может изменяться от малых до больших значений. Например, для широких течений при $\lambda \ll 1$ выражения для СЗ c_{0_1} и c_{0_2} можно представить в виде разложения по малому параметру λ , что дает

$$\begin{aligned} c_{0_1} = & 1 + \frac{\alpha \text{Pr} + \sqrt{\alpha^2(\text{Pr} - 1)^2 - 3\beta^2}}{3} - \\ & - \left[\frac{\alpha^2(\text{Pr} - 1)(\text{Pr}^2 + 2\text{Pr} - 7) + 3\beta^2(\text{Pr} - 5)}{45\text{Pr}\sqrt{\alpha^2(\text{Pr} - 1)^2 - 3\beta^2}} + \frac{\alpha(\text{Pr}^2 + 7)}{45\text{Pr}} \right] \lambda^2 + O(\lambda^3), \quad \lambda \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} c_{0_2} = & 1 + \frac{\alpha \text{Pr} - \sqrt{\alpha^2(\text{Pr} - 1)^2 - 3\beta^2}}{3} + \\ & + \left[\frac{\alpha^2(\text{Pr} - 1)(\text{Pr}^2 + 2\text{Pr} - 7) + 3\beta^2(\text{Pr} - 5)}{45\text{Pr}\sqrt{\alpha^2(\text{Pr} - 1)^2 - 3\beta^2}} - \frac{\alpha(\text{Pr}^2 + 7)}{45\text{Pr}} \right] \lambda^2 + O(\lambda^3), \quad \lambda \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Из этих разложений видно, что при условии

$$\alpha|\text{Pr} - 1| < \sqrt{3}\beta, \quad \alpha + \beta = 1, \quad (2.22)$$

подкоренное выражение отрицательно, корни становятся комплексно-сопряженными, что свидетельствует о неустойчивости длинноволновых возмущений для широких течений при $\lambda \ll 1$.

2.2. Неограниченные СЗ

Построение асимптотического разложения при $k \rightarrow 0$ для СФ и неограниченно растущих СЗ задачи (0.4)–(0.6) проводится так же, как это было сделано в [6], поэтому изложим лишь схему такого анализа и дадим результат.

Полагая величину R фиксированной, представим искомую СФ $F(z)$ и СЗ c в виде следующих разложений по степеням параметра ikR :

$$F(z) = \varphi_0(z) + ikR\varphi_1(z) + \dots, \quad c = \frac{\chi_{-1}}{ikR} + \chi_0 + ikR\chi_1 + \dots, \quad k \rightarrow 0. \quad (2.23)$$

Это приводит к цепочке краевых задач для функций $\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots$. Первая из них, для $\varphi_0(z)$ и χ_{-1} , имеет вид

$$\varphi_0''''(z) + (\chi_{-1} - \lambda^2)\varphi_0''(z) - \chi_{-1} \frac{\lambda^2}{Pr} \varphi_0(z) = 0, \quad (2.24)$$

$$\varphi_0'''(-1) = -\chi_{-1}\varphi_0'(-1), \quad \varphi_0''(-1) = 0, \quad \varphi_0'''(1) = -\chi_{-1}\varphi_0'(1), \quad \varphi_0''(1) = 0, \quad (2.25)$$

где величина λ определена в (2.11). Представляя решение уравнения (2.24) в виде

$$\varphi_0(z) = A \cos(\omega z) + B \sin(\omega z), \quad (2.26)$$

получаем для ω характеристическое уравнение

$$\omega^4 - (\chi_{-1} - \lambda^2)\omega^2 - \chi_{-1} \frac{\lambda^2}{Pr} = 0. \quad (2.27)$$

Некратные корни ω_1^2 и ω_2^2 этого уравнения возникают при условии неравенства нулю его дискриминанта, т.е.

$$(\chi_{-1} - \lambda^2)^2 + 4\chi_{-1} \frac{\lambda^2}{Pr} \neq 0; \quad (2.28)$$

в дальнейшем рассмотрении ограничимся только этим условием.

Решение уравнения (2.27) запишем относительно величин ω_1^2 и ω_2^2 :

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\chi_{-1} - \lambda^2 \pm \sqrt{(\chi_{-1} - \lambda^2)^2 + 4\chi_{-1} \frac{\lambda^2}{Pr}} \right]. \quad (2.29)$$

Последующее исследование задачи (2.24), (2.25) включает поиск решения $\varphi_0(z)$ в виде четной или нечетной функции, поэтому рассмотрим два соответствующих случая.

2.2.1. Решения вида $\cos(\omega z)$. Представляя решение $\varphi_0(z)$ уравнения (2.24) в виде

$$\varphi_0(z) = A_1 \cos(\omega_1 z) + A_2 \cos(\omega_2 z) \quad (2.30)$$

и удовлетворяя граничным условиям (2.25), получаем для χ_{-1} трансцендентное уравнение

$$\omega_2(\omega_1^2 - \chi_{-1}) \sin \omega_1 \cos \omega_2 = \omega_1(\omega_2^2 - \chi_{-1}) \sin \omega_2 \cos \omega_1. \quad (2.31)$$

Решая (2.31) и проверяя условие некратности корней (2.28), получаем счетное множество искоемых коэффициентов χ_{-1} в представлении (2.23).

В частном случае $Pr = 1$ уравнение (2.31) имеет явные решения $\chi_{-1,m} = \pi^2 \left(\frac{1}{2} + m \right)^2, m = 0, 1, \dots$, что дает для счетного множества СЗ следующую асимптотику:

$$c_m = -i \frac{\pi^2}{kR} \left(\frac{1}{2} + m \right)^2 + O(1), \quad k \rightarrow 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.32)$$

2.2.2. Решения вида $\sin(\omega z)$. Представляя решение $\varphi_0(z)$ уравнения (2.24) в виде

$$\varphi_0(z) = B_1 \sin(\omega_1 z) + B_2 \sin(\omega_2 z) \quad (2.33)$$

и удовлетворяя граничным условиям (2.25), получаем для χ_{-1} трансцендентное уравнение:

$$\omega_2(\omega_1^2 - \chi_{-1}) \sin \omega_2 \cos \omega_1 = \omega_1(\omega_2^2 - \chi_{-1}) \sin \omega_1 \cos \omega_2. \quad (2.34)$$

Решая (2.34) и проверяя условие некратности корней (2.28), получаем счетное множество иско- мых коэффициентов χ_{-1} в представлении (2.23).

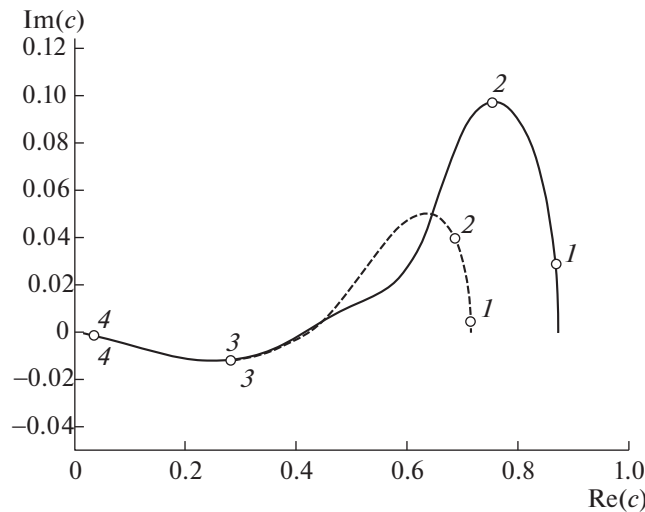
В частном случае $Pr = 1$ уравнение (2.34) имеет явные решения $\chi_{-1,m} = \pi^2 m^2$, $m = 1, 2, \dots$, что дает для счетного множества СЗ следующую асимптотику:

$$c_m = -i \frac{\pi^2}{kR} m^2 + O(1), \quad k \rightarrow 0, \quad m = 1, 2, \dots \tag{2.35}$$

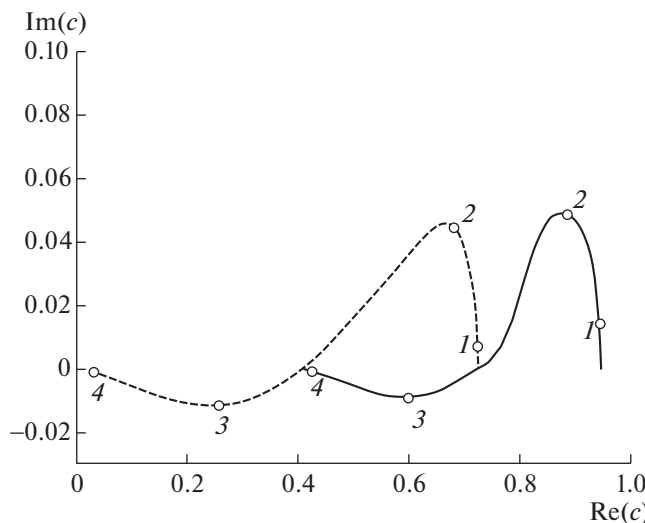
Завершая рассмотрение неограниченно растущих СЗ при $k \rightarrow 0$, отметим, что полученные асимптотики (2.32) и (2.35) имеют большие отрицательные мнимые части СЗ и соответствуют устойчивости соответствующих длинноволновых возмущений, т.е. при малых k .

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

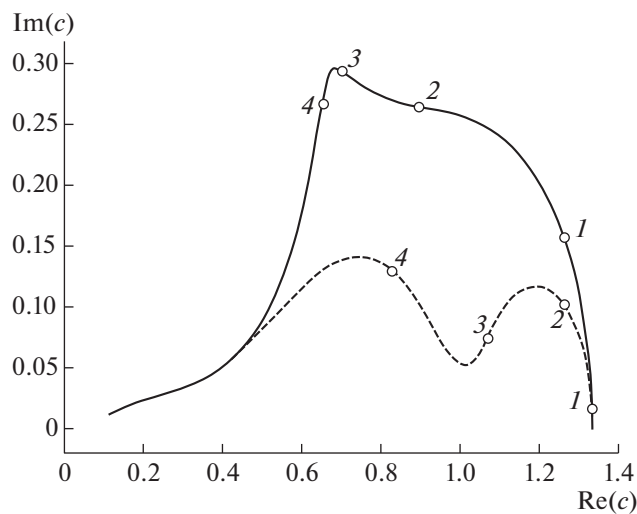
На основе полученных асимптотических разложений при $k \rightarrow 0$ для ограниченных и неограни- ченно растущих СЗ был разработан и тестирован алгоритм расчета с высокой точностью СЗ c_m для заданного номера m . Расчет траектории $c_m(k)$ при изменении k начинался при малых числах k , за- тем при непрерывном возрастании волнового числа k использовался метод продолжения по k .



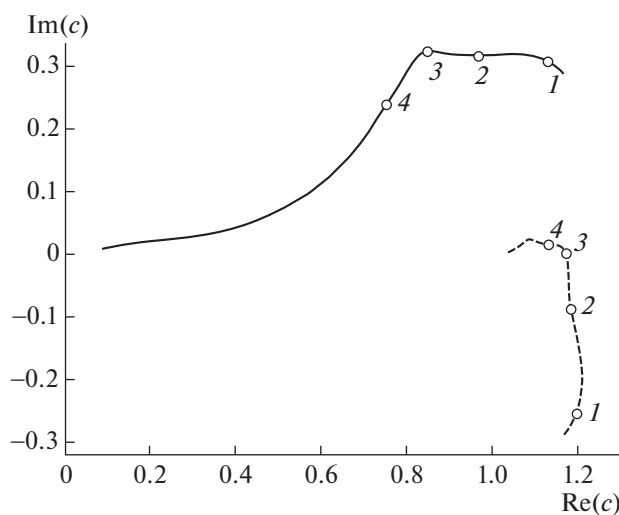
Фиг. 1. Траектории двух СЗ для параметров $Pr = 1$, $R = 10$, $Bu = 1$, $\alpha = 1$.



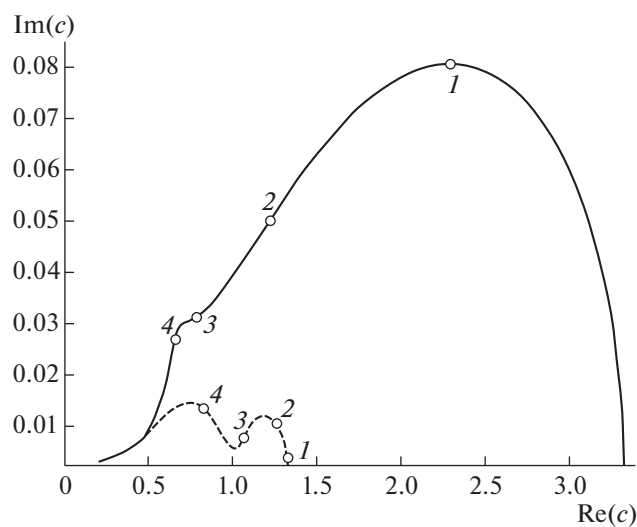
Фиг. 2. Траектории двух СЗ для параметров $Pr = 1$, $R = 10$, $Bu = 1$, $\alpha = 0.8$.



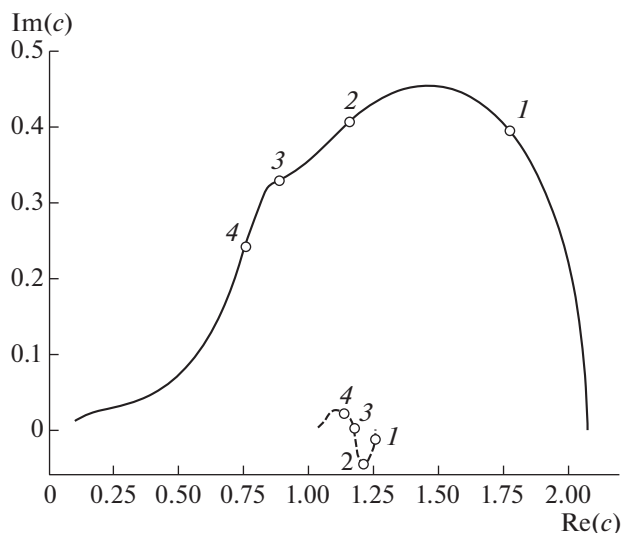
Фиг. 3. Траектории двух СЗ для параметров $Pr = 1$, $R = 10$, $Bu = 0.0001$, $\alpha = 1.0$.



Фиг. 4. Траектории двух СЗ для параметров $Pr = 1$, $R = 10$, $Bu = 0.0001$, $\alpha = 0.5$.



Фиг. 5. Траектории двух СЗ для параметров $Pr = 4$, $R = 10$, $Bu = 0.0001$, $\alpha = 1.0$.



Фиг. 6. Траектории двух СЗ для параметров $Pr = 4$, $R = 10$, $Bu = 0.0001$, $\alpha = 0.5$.

Некоторые результаты такого численного анализа приведены ниже. На фиг. 1–8 даны траектории первых двух СЗ $c_1(k)$ и $c_2(k)$ для различных физических параметров при непрерывном увеличении волнового числа $k \in (0, 1000]$. Сплошные линии соответствуют траекториям $c_1(k)$, а штриховые – траекториям $c_2(k)$. Отмеченные кружочками точки с цифрами 1 соответствуют значению $k = 0.1$, цифрами 2 – значению $k = 1$, цифрами 3 – значению $k = 10$, цифрами 4 – значению $k = 100$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан аналитико-численный метод для решения задачи, позволяющей описывать малые устойчивые и неустойчивые возмущения геострофического течения с вертикальным параболическим профилем скорости общего вида. Модель основана на уравнении потенциального вихря в квазигеострофическом приближении с учетом вертикальной диффузии массы и импульса. Построен алгоритм высокоточного расчета СФ и СЗ спектральной задачи с помощью степенных разложений решения в двух граничных точках и последующей сшивки. Предложенный метод позволяет решать задачу для любых масштабов возмущений вдоль и поперек течения и любых соотношений между линейным и постоянным вертикальными сдвигами скорости течения применительно к океану.

Получены асимптотики СФ и СЗ при малых значениях волнового числа k в зависимости от параметров задачи. Показано, что при $k \rightarrow +0$ существуют два ограниченных СЗ и счетное множество неограниченно растущих СЗ с отрицательной мнимой частью и с предельной точкой $-i\infty$.

Представлены расчеты траекторий СЗ, позволяющие судить о неустойчивости, как широких, так и узких течений при типичных для океана значениях параметров задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузьмина Н.П. Об одной гипотезе образования крупномасштабных интрузий в Арктическом бассейне // *Фундамент. и прикл. гидрофизика*. 2016. Т. 9. № 2. С. 15–26.
2. Kuzmina N.P. Generation of large-scale intrusions at baroclinic fronts: An analytical consideration with a reference to the Arctic ocean // *Ocean Sci.* 2016. V. 12. P. 1269–1277. <https://doi.org/10.5194/os-12-1269-2016>
3. Кузьмина Н.П., Скороходов С.Л., Журбас Н.В., Лыжков Д.А. О неустойчивости геострофического течения с линейным вертикальным сдвигом скорости на масштабах интрузионного расслоения // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2018. Т. 54. № 1. С. 54–63.

4. Кузьмина Н.П., Скороходов С.Л., Журбас Н.В., Лыжков Д.А. Описание возмущений океанских геострофических течений с линейным вертикальным сдвигом скорости с учетом трения и диффузии плавучести // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2019. Т. 55. № 2. С. 73–85.
5. Скороходов С.Л., Кузьмина Н.П. Аналитико-численный метод решения задачи типа Орра–Зоммерфельда для анализа неустойчивости течений в океане // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 6. С. 1022–1039.
6. Скороходов С.Л., Кузьмина Н.П. Спектральный анализ модельных течений типа Куэтта применительно к океану // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 5. С. 867–888.
7. Кузьмина Н.П., Скороходов С.Л., Журбас Н.В., Лыжков Д.А. О влиянии трения и диффузии плавучести на динамику геострофических океанских течений с линейным вертикальным профилем скорости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2020. Т. 56. № 6. С. 676–688.
8. Скороходов С.Л., Кузьмина Н.П. Эффективный метод решения модифицированной задачи Орра–Зоммерфельда для анализа неустойчивости течений в Арктическом бассейне // Таврический вестн. информат. и матем. 2016. № 3 (32). С. 88–97.
9. Скороходов С.Л., Кузьмина Н.П. Спектральный анализ малых возмущений геострофических течений с параболическим вертикальным профилем скорости применительно к океану // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 12. С. 2010–2023.
10. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.
11. Найфэ А. Методы возмущений. М.: Наука, 1976. 474 с.

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ЛАУРИЧЕЛЛЫ В СИТУАЦИИ КРОУДИНГА ПЕРЕМЕННЫХ¹⁾

© 2022 г. С. И. Безродных^{1, *}¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: sbezrodnykh@mail.ru

Поступила в редакцию 20.05.2022 г.

Переработанный вариант 23.06.2022 г.

Принята к публикации 12.07.2022 г.

Для функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$, представляющей собой гипергеометрическую функцию многих комплексных переменных z_1, \dots, z_N , построены формулы аналитического продолжения, соответствующие пересечению произвольного числа сингулярных гиперплоскостей, имеющих вид $\{z_j = z_l\}$, $j, l = \overline{1, N}$, $j \neq l$. Такие формулы дают выражение для рассматриваемой функции в виде линейных комбинаций гипергеометрических рядов Горна N переменных, удовлетворяющих той же системе уравнений с частными производными, что и исходный ряд, с помощью которого $F_D^{(N)}$ определяется в единичном поликруге. Найденные формулы позволяют эффективно (с помощью экспоненциально сходящихся рядов) вычислять функцию $F_D^{(N)}$ и выражаемые через нее интегралы типа Эйлера во всем комплексном пространстве \mathbb{C}^N в том числе в сложных случаях, когда переменные образуют одну или несколько групп “очень близких” величин. Такую ситуацию будем называть “кроудингом”, заимствуя этот термин из работ, посвященных практике конформных отображений. Библ. 37.

Ключевые слова: гипергеометрические функции многих переменных, функции Лауричеллы и Горна, аналитическое продолжение, эффект кроудинга.

DOI: 10.31857/S0044466922120043

1. ВВЕДЕНИЕ

1.2. Функция Лауричеллы $F_D^{(N)}$

Рассматриваемая в работе гипергеометрическая функция Лауричеллы $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ возникает при конструктивном решении многих актуальных задач прикладной математики (см., например, [1]–[12]). Эта функция, зависящая от N комплексных переменных $(z_1, \dots, z_N) =: \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ и комплексных параметров $(a_1, \dots, a_N) =: \mathbf{a} \in \mathbb{C}^N$, $b, c \in \mathbb{C}$, определяется в виде следующего N -кратного ряда (см. [13] и, например, [1], [3]):

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{|\mathbf{k}|} (\mathbf{a})_{\mathbf{k}}}{(c)_{|\mathbf{k}|} \mathbf{k}!} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \quad (1.1)$$

который сходится в единичном поликруге

$$\mathbb{U}^N := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |z_j| < 1, j = \overline{1, N}\}. \quad (1.2)$$

В формуле (1.1) суммирование ведется по мультииндексу $\mathbf{k} := (k_1, \dots, k_N)$ с неотрицательными целыми компонентами $k_j \geq 0$, $j = \overline{1, N}$, причем $|\mathbf{k}| := \sum_{j=1}^N k_j$, а для сокращенной записи произведений использованы традиционные обозначения:

$$\mathbf{k}! := k_1! \cdots k_N!, \quad (\mathbf{a})_{\mathbf{k}} := (a_1)_{k_1} \cdots (a_N)_{k_N}, \quad \mathbf{z}^{\mathbf{k}} := z_1^{k_1} \cdots z_N^{k_N}. \quad (1.3)$$

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 22-21-00727), <https://rscf.ru/project/22-21-00727/>

Фигурирующий в (1.3) символ Похгаммера $(a)_m$ определяется через гамма-функцию $\Gamma(s)$ по формуле (см. [1], [14])

$$(a)_m = (a, m) := \frac{\Gamma(a + m)}{\Gamma(a)}, \tag{1.4}$$

так что справедливы соотношения

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_m = \begin{cases} (a)_m = a(a + 1) \cdots (a + m - 1), & m = 1, 2, \dots, \\ (-1)^m [(1 - a)(2 - a) \cdots ((1 - a) - m - 1)]^{-1}, & m = -1, -2, \dots \end{cases} \tag{1.5}$$

Параметр c в формуле (1.1) не принимает целых неположительных значений, т.е. $c \notin \mathbb{Z}^-$.

Если векторный аргумент \mathbf{z} лежит вне единичного поликруга (1.2), то под функцией Лауричеллы понимается аналитическое продолжение (1.1), для которого естественно сохранить прежнее обозначение $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$. Такое продолжение в область

$$\mathbb{L}^N := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |\arg(1 - z_j)| < \pi, j = \overline{1, N}\} \tag{1.6}$$

дает следующий интеграл типа Эйлера (см. [1]):

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c - b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{\prod_{j=1}^N (1 - tz_j)^{a_j}} dt, \tag{1.7}$$

где предполагается, что $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ (указанное ограничение на параметры b и c может быть снято, если в (1.7) использовать интегрирование по петлеобразным контурам Похгаммера, см. [1]). В области (1.6) интеграл (1.7) является однозначной аналитической функцией переменных z_1, \dots, z_N , а в единичном поликруге $\mathbb{U}^N \subset \mathbb{L}^N$ он представим с помощью ряда (1.1); в этом нетрудно убедиться, разлагая подынтегральную функцию в ряд по степеням z_1, \dots, z_N и почленно интегрируя такое разложение. Поскольку именно в виде интеграла типа Эйлера функция Лауричеллы нередко возникает в приложениях, формулу (1.7) часто используют как альтернативное определение $F_D^{(N)}$.

Функция Лауричеллы, введенная в [13] как формальное обобщение функции Гаусса $F(a, b; c; z)$ на случай N переменных, оказалась одним из наиболее востребованных представителей семейства гипергеометрических функций многих переменных (см. об этом [8]). В связи с этим вопрос об эффективном вычислении этой функции, т.е. интеграла (1.7), во всем пространстве \mathbb{C}^N является весьма актуальной задачей.

В единичном поликруге для вычисления интеграла (1.7) можно использовать непосредственное суммирование ряда (1.1). Однако вне этого поликруга ряд (1.1) расходится и вычисление интеграла (1.7) является трудной задачей. Возникает естественный вопрос о том, можно ли представить аналитически продолженную функцию $F_D^{(N)}$ в виде обобщенных гипергеометрических рядов, экспоненциально сходящихся в соответствующих подобластях $\mathbb{C}^N \setminus \mathbb{U}^N$? Такие представления, в частности, позволили бы эффективно вычислять интегралы типа Эйлера (2.1). Ответ на этот вопрос может быть получен в рамках изучения системы дифференциальных уравнений для ряда (1.1), к рассмотрению которой переходим в следующем п. 1.2.

1.2. Проблема аналитического продолжения

Гипергеометрический ряд (1.1), рассматриваемый как функция переменных z_1, \dots, z_N , удовлетворяет следующей системе из N линейных уравнений второго порядка с частными производными по переменным z_j (см. [13], [1], [3], [4]):

$$\left(c + \sum_{m=1}^N \theta_m \right) (1 + \theta_j)(z_j^{-1} u(\mathbf{z})) = \left(b + \sum_{m=1}^N \theta_m \right) (a_j + \theta_j) u(\mathbf{z}), \quad j = \overline{1, N}, \tag{1.8}$$

где $\theta_s := z_s \partial / \partial z_s$, а величины a_j, b и c – параметры функции Лауричеллы. Голоморфный ранг системы (1.8) равен $N + 1$ и, таким образом, ее общее решение зависит от $(N + 1)$ -й произвольной комплексной постоянной (см. [13], [1]). Особым множеством \mathcal{M} системы (1.8) является объединение гиперплоскостей

$$\mathcal{M}_j^{(\tau)} := \{z \in \overline{\mathbb{C}}^N : z_j = \tau\}, \quad j = \overline{1, N}, \tag{1.9}$$

где $\tau \in S := \{0, 1, \infty\}$, и гиперплоскостей

$$\mathcal{M}_{j,l} := \{z \in \overline{\mathbb{C}}^N : z_j = z_l\}; \tag{1.10}$$

здесь индексы $j, l = \overline{1, N}$, $j \neq l$. В частности, особому множеству принадлежат такие точки z , у которых для всех компонент z_j выполняется включение $z_j \in S$, $j = \overline{1, N}$.

При дальнейшем рассмотрении будут играть важную роль точки особого множества \mathcal{M} , лежащие на пересечении двух или большего числа гиперплоскостей (1.9), (1.10). Будем использовать обозначение

$$z_{v,\mu}^{(1,\infty,0)} := (\underbrace{1, \dots, 1}_v, \underbrace{\infty, \dots, \infty}_\mu, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-v-\mu}) \tag{1.11}$$

для точек, у которых первые v компонент равны 1, следующие μ компонент равны ∞ , а остальные $N - v - \mu$ равны 0. Кроме того, будем писать

$$z_v^{(1,\infty)} := (\underbrace{1, \dots, 1}_v, \underbrace{\infty, \dots, \infty}_{N-v}). \tag{1.12}$$

Обозначаем через $z^{(1)} := (1, \dots, 1)$ и $z^{(\infty)} := (\infty, \dots, \infty)$ точки, у которых все N компонент z_j , $j = \overline{1, N}$, одинаковые и равны соответственно 1 или ∞ .

Одним из центральных вопросов в теории функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ является *проблема аналитического продолжения*, заключающаяся в нахождении формул следующего вида:

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{j=0}^N \lambda_j u_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \Omega \not\subset \mathbb{U}^N, \tag{1.13}$$

где набор функций $\{u_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})\}_{j=0}^N$, представимых в терминах гипергеометрических рядов N переменных, образует базис пространства решений системы (1.8), а $\lambda_j \in \mathbb{C}$ – некоторые коэффициенты, зависящие от параметров a_1, \dots, a_N, b, c . Предполагается, что область Ω , где ряды u_j одновременно сходятся, имеет непустое пересечение с дополнением к единичному поликругу \mathbb{U}^N , т.е. справедливо соотношение $\Omega \cap (\mathbb{C}^N \setminus \mathbb{U}^N) \neq \emptyset$. Представления вида (1.13) называют *формулами аналитического продолжения*.

Отметим, что представления вида (1.13) являются обобщением классических формул аналитического продолжения функции Гаусса одного переменного на случай N переменных, а фигурирующие в (1.13) функции $u_j(\mathbf{z})$ играют для систем (1.8) ту же роль, что и канонические решения Куммера (см. [1], [14], [15]) для гипергеометрического уравнения, которому удовлетворяет функция Гаусса. В [8], [16] при произвольном N был построен набор формул аналитического продолжения (1.13) функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$, области сходимости которых в совокупности покрывают \mathbb{C}^N за исключением гиперплоскостей $\mathcal{M}_{j,l}$, определенных равенством (1.10). Граница области сходимости каждой из таких формул содержит часть одной или нескольких гиперплоскостей $\mathcal{M}_{j,l}$, поэтому указанный набор формул адекватно представляет функцию $F_D^{(N)}$ и позволяет ее вычислять, когда аргумент z лежит достаточно далеко от $\mathcal{M}_{j,l}$.

В [17], [18] при произвольном N предложен способ построения формул аналитического продолжения нового типа, позволяющий для любого пересечения \mathcal{S} гиперплоскостей $\mathcal{M}_{j,l}$ указать представление вида (1.13), область сходимости которого имеет непустое пересечение с \mathcal{S} . При этом в отмеченных работах в явном виде были построены формулы для случаев, когда все пере-

менные одновременно или близки к единице, или велики по модулю, т.е. рассмотрено продолжение $F_D^{(N)}$ в окрестности точек $\mathbf{z}^{(1)}$ и $\mathbf{z}^{(\infty)}$.

1.3. Полученные результаты об аналитическом продолжении

В настоящей работе, продолжающей исследования [17], [18], для функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ построен набор формул аналитического продолжения, позволяющих в окрестностях $\mathbb{C}_{v,\mu}$ точек $z_{v,\mu}^{(1,\infty,0)}$ адекватно представить эту функцию вблизи множества $\mathcal{S}_{v,\mu} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$, где \mathcal{S}_1 – пересечение гиперплоскостей $\mathcal{M}_{j,l}$ с номерами $j, l = \overline{1, v}$, а \mathcal{S}_2 – пересечение гиперплоскостей $\mathcal{M}_{s,k}$ с номерами $s, k = \overline{v+1, v+\mu}$. Точнее, для любого $\mathcal{S}_{v,\mu}$ указанного вида найдена формула продолжения с областью сходимости Ω , удовлетворяющей соотношению $\Omega \cap \mathcal{S}_{v,\mu} \cap \mathbb{C}_{v,\mu} \neq \emptyset$.

Такой результат устанавливает теорема 2 (см. п. 2.4). В этой теореме рассмотрен случай произвольного числа N переменных функции Лауричеллы и продолжения в окрестность точек (1.11), с любыми $v, \mu \geq 0, v + \mu \leq N$, и произвольным множеством $\mathcal{S}_{v,\mu}$. В разд. 3, 4 даны примеры применения этой теоремы к построению аналитического продолжения в случае трех и четырех переменных. Утверждение теоремы 2 получено с помощью разложений интеграла типа Эйлера (1.7) в подходящие степенные ряды и применения приведенной в п. 2.1 теоремы 1 (см. также [8, теорема 5]).

Таким образом, построенные в работе формулы адекватно представляют функцию $F_D^{(N)}$ для случаев, когда ее переменные z_1, \dots, z_N делятся на группы близких величин. Такую ситуацию будем называть “кроудингом” (от английского слова “to crowd” – толпиться, сбиваться в кучу). Термин “кроудинг” употребляется в работах, посвященных практике построения конформного отображения прямолинейных многоугольников на основе интеграла Кристоффеля–Шварца (см. [19]–[26]), и применяется к ситуации резко неравномерного распределения значений параметров этого интеграла. Полученная в разд. 2 теорема 2 рассматривает случай, когда переменные “толпятся” вблизи сингулярных гиперплоскостей $\mathcal{M}_{s,k}$ и их пересечений $\mathcal{S}_{v,\mu}$. Отметим также, что применение формул аналитического продолжения функции Лауричеллы позволяет добиться существенного прогресса в решении вычислительных проблем, связанных с решением проблемы параметров интеграла Кристоффеля–Шварца и вычислением конформного отображения многоугольников (см. [8]).

Ниже во Введении приведена иллюстрация применения теорем 1 и 2 для аналитического продолжения функции $F_D^{(3)}$ в окрестность точки $(1, \infty, \infty)$, показывающая важное значение каждой из этих теорем для получения адекватных представлений функции Лауричеллы. Предположим, что переменная z_1 близка к единице, а z_2 и z_3 принимают большие по модулю значения. Применяя теорему 1 (см. п. 2.1 и [8]) для случая $N = 3, v = 1$ получаем, что аналитическое продолжение функции $F_D^{(3)}$ в область

$$\mathbb{V}^{3,1} := \{0 < |1 - z_1| < 1, |z_2| > |z_3| > 1 + |1 - z_1|, |\arg(1 - z_1)| < \pi, |\arg(-z_j)| < \pi, j = 2, 3\} \tag{1.14}$$

дается следующей формулой:

$$F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = \sum_{j=0}^3 A_j u_j(z_1, z_2, z_3), \tag{1.15}$$

где функции u_j определяются в виде гипергеометрических рядов

$$\begin{aligned} u_0(z_1, z_2, z_3) &= (-z_2)^{-a_2} (-z_3)^{-a_3} \sum_{k_1, k_2, k_3=0}^{\infty} \Lambda_0(\mathbf{k}) (z_1 - 1)^{k_1} z_2^{-k_2} z_3^{-k_3}, \\ u_1(z_1, z_2, z_3) &= (1 - z_1)^{c-a_1-b} (-z_2)^{-a_2} (-z_3)^{-a_3} \sum_{k_1, k_2, k_3=0}^{\infty} \Lambda_1(\mathbf{k}) (1 - z_1)^{k_1} z_2^{-k_2} z_3^{-k_3}, \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned}
 u_2(z_1, z_2, z_3) &= (-z_2)^{-b} \sum_{k_1, k_2, k_3=0}^{\infty} \Lambda_2(\mathbf{k}) \left(\frac{z_1-1}{z_2} \right)^{k_1} z_2^{-k_2} \left(\frac{z_3}{z_2} \right)^{k_3}, \\
 u_3(z_1, z_2, z_3) &= (-z_2)^{-a_2} (-z_3)^{a_2-b} \sum_{k_1, k_2, k_3=0}^{\infty} \Lambda_3(\mathbf{k}) \left(\frac{z_1-1}{z_3} \right)^{k_1} \left(\frac{z_3}{z_2} \right)^{k_2} z_3^{-k_3},
 \end{aligned}
 \tag{1.17}$$

коэффициенты Λ_j в этих разложениях имеют вид

$$\begin{aligned}
 \Lambda_0(\mathbf{k}) &:= \frac{(1+a_1+a_2+a_3)_{k_2+k_3} (a_1)_{k_1} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3}}{(1+a_1+b-c)_{k_1} (1+a_2+a_3-b)_{k_2+k_3-k_1} k_1! k_2! k_3!}, \\
 \Lambda_1(\mathbf{k}) &:= \frac{(c-b)_{k_1} (1+a_1+a_2+a_3-c)_{k_2+k_3} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3}}{(1+c-a_1-b)_{k_1} (1+a_1+a_2+a_3-c)_{k_2+k_3-k_1} k_1! k_2! k_3!}, \\
 \Lambda_2(\mathbf{k}) &:= \frac{(b)_{k_1+k_2+k_3} (1-c+a_1+b)_{k_1+k_2} (a_1)_{k_1} (a_3)_{k_3}}{(1+b-a_2)_{k_1+k_2+k_3} (1-c+a_1+b)_{k_1} k_1! k_2! k_3!}, \\
 \Lambda_3(\mathbf{k}) &:= \frac{(b-a_2)_{k_1-k_2+k_3} (1-c+a_1+b)_{k_1+k_3} (a_1)_{k_1} (a_2)_{k_2}}{(1+b-a_2-a_3)_{k_1-k_2+k_3} (1-c+a_1+b)_{k_1} k_1! k_2! k_3!},
 \end{aligned}
 \tag{1.18}$$

а величины A_j даются равенствами

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a_1-b)\Gamma(b-a_2-a_3)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a_1-a_2-a_3)\Gamma(c-b)}, & A_1 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_1+b-c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b)}, \\
 A_2 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_2-b)}{\Gamma(a_2)\Gamma(c-b)}, & A_3 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a_2)\Gamma(a_2+a_3-b)}{\Gamma(a_3)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}.
 \end{aligned}
 \tag{1.19}$$

Продолжение функции $F_D^{(3)}$ в область $\tilde{\mathbb{V}}^{3,1} := \{(z_1, z_2, z_3) : (z_1, z_3, z_2) \in \mathbb{V}^{3,1}\}$, симметричную по отношению к (1.14), дается формулой, получаемой заменами $(z_1, z_2, z_3) \rightarrow (z_1, z_3, z_2)$ и $(a_1, a_2, a_3) \rightarrow (a_1, a_3, a_2)$ в правой части (1.15)–(1.19).

Обратим внимание на то, что множество

$$\mathcal{M}^{(1,\infty)} := \mathcal{M}_{2,3} \cap \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |1-z_1| < 1, |z_j| > 1 + |1-z_1|, j = 1, 2\},$$

где $\mathcal{M}_{2,3} := \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_2 = z_3\}$, принадлежит границе области $\mathbb{V}^{3,1}$, в которой справедливо представление (1.15)–(1.19). При этом очевидно, что ряды (1.17), фигурирующие в формуле (1.15), сходятся тем медленнее, чем точка (z_1, z_2, z_3) ближе к $\mathcal{M}_{2,3}$. (Аналогичное замечание справедливо

и для упомянутого выше представления в области $\tilde{\mathbb{V}}^{3,1}$.) Поэтому в окрестности $(1, \infty, \infty)$ одного представления (1.15) недостаточно и необходимо получить такое представление, которое было бы адекватно особой гиперплоскости $\mathcal{M}_{2,3}$, в том смысле, что соответствующие ряды в точках множества $\mathcal{M}^{(1,\infty)}$ сходились бы экспоненциально.

Указанным свойством обладает следующее представление для $F_D^{(3)}$, которое вытекает из теоремы 2 (см. разд. 2) при $N = 3, v = 1, q = 2$:

$$F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = \sum_{j=0}^2 B_j v_j(z_1, z_2, z_3),
 \tag{1.20}$$

где функции v_j определяются в виде гипергеометрических рядов:

$$\begin{aligned}
 v_0(z_1, z_2, z_3) &= (-z_2)^{-a_2-a_3} \sum_{k_1, k_2, k_3=0}^{\infty} \Xi_0(\mathbf{k}) (z_1-1)^{k_1} z_2^{-k_2} \left(\frac{z_2-z_3}{z_2} \right)^{k_3}, \\
 v_1(z_1, z_2, z_3) &= (1-z_1)^{c-a_1-b} (-z_2)^{-a_2-a_3} \sum_{k_1, k_2, k_3=0}^{\infty} \Xi_1(\mathbf{k}) (1-z_1)^{k_1} z_2^{-k_2} \left(\frac{z_2-z_3}{z_2} \right)^{k_3}, \\
 v_2(z_1, z_2, z_3) &= (-z_2)^{-b} \sum_{k_1, k_2, k_3=0}^{\infty} \Xi_2(\mathbf{k}) \left(\frac{z_1-1}{z_2} \right)^{k_1} z_2^{-k_2} \left(\frac{z_2-z_3}{z_2} \right)^{k_3},
 \end{aligned}
 \tag{1.21}$$

коэффициенты Ξ_j в этих разложениях имеют вид

$$\begin{aligned} \Xi_0(\mathbf{k}) &= \frac{(1-c+a_1+a_2+a_3)_{k_2} (a_1)_{k_1} (a_2+a_3)_{k_2+k_3} (a_3)_{k_3}}{(1+a_1+b-c)_{k_1} (1-b+a_2+a_3)_{k_2-k_1} k_1! (a_2+a_3)_{k_3} k_2! k_3!}, \\ \Xi_1(\mathbf{k}) &= \frac{(c-b)_{k_1} (1+a_1+a_2+a_3-c)_{k_2} (a_2+a_3)_{k_2+k_3} (a_3)_{k_3}}{(1+c-a_1-b)_{k_1} (1+a_1+a_2+a_3-c)_{k_2-k_1} (a_2+a_3)_{k_3} k_1! k_2! k_3!}, \\ \Xi_2(\mathbf{k}) &= \frac{(b)_{k_1+k_2+k_3} (1-c+a_1+b)_{k_1+k_2} (a_1)_{k_1} (a_3)_{k_3}}{(1+b-a_2-a_3)_{k_1+k_2} (a_2+a_3)_{k_3} (1-c+a_1+b)_{k_1} k_1! k_2! k_3!}, \end{aligned} \tag{1.22}$$

а величины B_j даются равенствами

$$B_0 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a_1-b)\Gamma(b-a_2-a_3)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a_1-a_2-a_3)\Gamma(c-b)}, \quad B_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_1+b-c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b)}, \quad B_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_2+a_3-b)}{\Gamma(a_2+a_3)\Gamma(c-b)}. \tag{1.23}$$

Представление (1.20)–(1.23) справедливо в области

$$\{|1-z_1| < 1, |z_2| > 1 + |1-z_1| + |z_2-z_3|; |\arg(1-z_1)| < \pi, |\arg(-z_2)| < \pi\}. \tag{1.24}$$

Обратим внимание на то, что если зафиксировать, например, переменное z_2 , то ряды в формулах (1.21) сходятся тем быстрее, чем меньше величины $1/|z_2|$ и $|(z_2-z_3)/z_2|$. Вместе с тем ряды в (1.21) сходятся тем медленнее, чем величина $|(z_2-z_3)/z_2|$ ближе к единице. Однако в этом случае как раз и необходимо выбирать формулу продолжения (1.15)–(1.19). Таким образом, для представления функции $F_D^{(3)}$ в окрестности точки $(1, \infty, \infty)$ необходимы оба набора формул (1.15)–(1.19) и (1.15)–(1.19). Отметим еще, что указанные формулы позволяют эффективно вычислять интеграл (1.7) для случая $N = 3$ соответственно в областях (1.14) и (1.24).

Возвращаясь к случаю произвольного числа переменных, подчеркнем, что при всех $N \geq 2$ теоремы 1 и 2 дополняют друг друга и позволяют адекватно представить функцию Лауричеллы $F_D^{(N)}$ в окрестностях точек $\mathbf{z}^{(1, \infty, 0)}$ аналогично тому, как это было продемонстрировано выше на примере трех переменных.

1.4. Функции Горна

Рассматриваемый круг вопросов является вкладом в решение проблемы аналитического продолжения и вычисления гипергеометрических рядов Горна N переменных. Степенной $\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N} \Lambda(\mathbf{k}) \mathbf{z}^{\mathbf{k}}$ называют гипергеометрическим рядом Горна (см. [2]), [27], если отношению любых двух соседних коэффициентов $\Lambda(\mathbf{k}) = \Lambda(k_1, \dots, k_N)$ представляет собой рациональную функцию аргументов k_1, \dots, k_N , другими словами, справедливы соотношения

$$\frac{\Lambda(\mathbf{k} + \mathbf{e}_r)}{\Lambda(\mathbf{k})} = \frac{P_r(\mathbf{k})}{Q_r(\mathbf{k})}, \quad r = \overline{1, N}, \tag{1.25}$$

где $P_r(\mathbf{k})$ и $Q_r(\mathbf{k})$ – некоторые полиномы переменных (k_1, \dots, k_N) и $\mathbf{e}_r := (0, \dots, 1, \dots, 0)$ – вектор, r -я компонента которого равна 1, а остальные равны нулю. Общий подход к решению этой проблемы был предложен в [28], на основе найденных формул продолжения функции Фокса и Райта (см. [29], [30]), а его реализации для важных классов гипергеометрических рядов двух переменных дана в работах [31], [32]. Отметим, что исследование рядов Горна двух и большего числа переменных привлекает внимание многих исследователей (см., например, [27], [33]–[37]). С помощью результатов [28] можно эффективно конструировать базисы в пространстве решений гипергеометрических систем Горна в виде экспоненциально сходящихся рядов и находить формулы их аналитического продолжения, т.е. формулы перехода между базисами в различных подобластях \mathbb{C}^N .

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБЫХ ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ $\{z_j = z_m\}$ ВБЛИЗИ ТОЧЕК $\mathbf{z}_{\nu, \mu}^{(1, \infty, 0)}$

2.1. Формулы продолжения в окрестность $\mathbf{z}_\nu^{(1, \infty)}$

Приведем результаты, вытекающие из [8], теорема 5. Определим область $\mathbb{V}^{N, \nu}$ с помощью следующего равенства:

$$\mathbb{V}^{N, \nu} := \{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : 0 < |1 - z_1| < \dots < |1 - z_\nu| < 1, |\arg(1 - z_j)| < \pi, j = \overline{1, \nu}, |z_{\nu+1}| > \dots > |z_N| > 1, |\arg(-z_s)| < \pi, s = \overline{\nu + 1, N}, 1 + |1 - z_j| < |z_s|, j = \overline{1, \nu}, s = \overline{\nu + 1, N} \}. \tag{2.1}$$

Здесь целочисленный параметр ν принимает значения $\nu = \overline{0, N}$, причем, если $\nu = 0$, то в (2.1) отсутствуют ограничения для переменных $z_j, j = \overline{1, \nu}$, и

$$\mathbb{V}^N := \mathbb{V}^{N, 0} := \{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |z_1| > \dots > |z_N| > 1, |\arg(-z_s)| < \pi, s = \overline{1, N} \}, \tag{2.2}$$

а если $\nu = N$, то в определении (2.1) отсутствуют ограничения для переменных $z_j, j = \overline{\nu + 1, N}$, и

$$\mathbb{V}^N := \mathbb{V}^{N, N} := \{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : 0 < |1 - z_1| < \dots < |1 - z_N| < 1, |\arg(1 - z_s)| < \pi, s = \overline{1, N} \}. \tag{2.3}$$

Пусть S_N – группа перестановок множества из N элементов, а $\sigma(\mathbf{z})$ – результат действия некоторого элемента $\sigma \in S_N$ на вектор \mathbf{z} , т.е. вектор, получаемый перестановкой компонент \mathbf{z} . Определим конусные области, совпадающие с $\mathbb{V}^{N, \nu}$ с точностью до симметрий,

$$\mathbb{V}_\sigma^{N, \nu} := \{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sigma(\mathbf{z}) \in \mathbb{V}^{N, \nu} \}. \tag{2.4}$$

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения для частичных сумм векторов $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N), \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_N)$:

$$|\mathbf{a}_{s,l}| := \sum_{k=s}^l a_k, \quad |\mathbf{a}| := |\mathbf{a}_{1,N}|, \quad |\mathbf{k}_{s,l}| := \sum_{n=s}^l k_n, \quad |\mathbf{k}| := |\mathbf{k}_{1,N}|. \tag{2.5}$$

Напомним выражения для символа Похгаммера $(a)_k, k \in \mathbb{Z}$, в виде конечных произведений (1.5). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Если ни одно из чисел

$$\left(b - \sum_{s=\nu+1}^j a_s \right), \quad j = \overline{\nu + 1, N}, \quad \left(c - b - \sum_{s=1}^j a_s \right), \quad j = \overline{1, \nu}, \tag{2.6}$$

не является целым, то аналитическое продолжение ряда (1.1) в область $\mathbb{V}^{N, \nu}$, определяемую соотношениями (2.1)–(2.3), дается формулой

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{j=0}^N A_j \mathcal{U}_j^{(1, \infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \tag{2.7}$$

где функции $\mathcal{U}_0^{(1, \infty)}, \mathcal{U}_j^{(1, \infty)}$ определяются равенствами

$$\mathcal{U}_0^{(1, \infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \left(\prod_{l=\nu+1}^N (-z_l)^{-a_l} \right) \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \Lambda_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) \mathbf{Z}_0^{\mathbf{k}}, \tag{2.8}$$

$$\mathcal{U}_j^{(1, \infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (1 - z_j)^{c - |\mathbf{a}_{1, j-1}| - b} \left(\prod_{l=j+1}^{\nu} (1 - z_l)^{-a_l} \right) \left(\prod_{l=\nu+1}^N (-z_l)^{-a_l} \right) \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \Lambda_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) \mathbf{Z}_j^{\mathbf{k}}, \quad j = \overline{1, \nu}, \tag{2.9}$$

$$\mathcal{U}_j^{(1, \infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (-z_j)^{|\mathbf{a}_{\nu+1, j-1}| - b} \left(\prod_{l=\nu+1}^{j-1} (-z_l)^{-a_l} \right) \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \Lambda_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) \mathbf{Z}_j^{\mathbf{k}}, \quad j = \overline{\nu + 1, N}; \tag{2.10}$$

здесь коэффициенты $\Lambda_j(\mathbf{k})$ определяются следующими равенствами:

$$\Lambda_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) := \frac{(1 + |\mathbf{a}| - c, |\mathbf{k}_{v+1, N}|)}{(1 + |\mathbf{a}_{1, v}| + b - c, |\mathbf{k}_{1, v}|)(1 + |\mathbf{a}_{v+1, N}| - b, |\mathbf{k}_{v+1, N}| - |\mathbf{k}_{1, v}|)} \prod_{s=1}^N \frac{(a_s, k_s)}{k_s!}, \quad (2.11)$$

$$\Lambda_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) := \frac{(c - |\mathbf{a}_{1, j-1}| - b, |\mathbf{k}_{j, v}| - |\mathbf{k}_{1, j-1}|)}{(1 + c - |\mathbf{a}_{1, j}| - b, |\mathbf{k}_{j, v}| - |\mathbf{k}_{1, j-1}|)} \frac{(1 + |\mathbf{a}| - c, |\mathbf{k}_{v+1, N}|)}{(1 + |\mathbf{a}| - c, |\mathbf{k}_{v+1, N}| - k_j)k_j!} \prod_{s=1, s \neq j}^N \frac{(a_s, k_s)}{k_s!}, \quad j = \overline{1, v}, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) &:= \frac{(b - |\mathbf{a}_{v+1, j-1}|, |\mathbf{k}_{1, v}| - |\mathbf{k}_{v+1, j-1}| + |\mathbf{k}_{j, N}|)}{(1 + b - |\mathbf{a}_{v+1, j}|, |\mathbf{k}_{1, v}| - |\mathbf{k}_{v+1, j-1}| + |\mathbf{k}_{j, N}|)} \times \\ &\times \frac{(1 - c + |\mathbf{a}_{1, v}| + b, |\mathbf{k}_{1, v}| + k_j)}{(1 - c + |\mathbf{a}_{1, v}| + b, |\mathbf{k}_{1, v}|)k_j!} \prod_{s=1, s \neq j}^N \frac{(a_s, k_s)}{k_s!}, \quad j = \overline{v+1, N}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

В формулах (2.8)–(2.10) использовано обозначение $\mathbf{Z}_j^{\mathbf{k}} = \prod_{l=1}^N (\mathcal{Z}_{j,l})^{k_l}$, где числа $\mathcal{Z}_{j,l}$ – это элементы векторов $\mathcal{Z}_j = \{\mathcal{Z}_{j,1}, \dots, \mathcal{Z}_{j,N}\}$, $j = \overline{0, N}$, $l = \overline{1, N}$, определяемых при $j = \overline{0, v}$ равенствами

$$\mathcal{Z}_0 := \left(z_1 - 1, \dots, z_v - 1, \frac{1}{z_{v+1}}, \dots, \frac{1}{z_N} \right), \quad (2.14)$$

$$\mathcal{Z}_j := \left(\frac{1 - z_1}{1 - z_j}, \dots, \frac{1 - z_{j-1}}{1 - z_j}, 1 - z_j, \frac{1 - z_j}{1 - z_{j+1}}, \dots, \frac{1 - z_j}{1 - z_v}, \frac{1}{z_{v+1}}, \dots, \frac{1}{z_N} \right), \quad j = \overline{1, v}, \quad (2.15)$$

а для $j = \overline{v+1, N}$ – следующими равенствами:

$$\mathcal{Z}_j := \left(\frac{z_1 - 1}{z_j}, \dots, \frac{z_v - 1}{z_j}, \frac{z_j}{z_{v+1}}, \dots, \frac{z_j}{z_{j-1}}, \frac{1}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_N}{z_j} \right), \quad j = \overline{v+1, N}. \quad (2.16)$$

Коэффициенты A_j в формуле (2.6) имеют вид

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - |\mathbf{a}_{1, v}| - b)\Gamma(b - |\mathbf{a}_{v+1, N}|)}{\Gamma(b)\Gamma(c - |\mathbf{a}|)\Gamma(c - b)}, \\ A_j &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - |\mathbf{a}_{1, j-1}| - b)\Gamma(|\mathbf{a}_{1, j}| + b - c)}{\Gamma(a_j)\Gamma(b)\Gamma(c - b)}, \quad j = \overline{1, v}, \\ A_j &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b - |\mathbf{a}_{v+1, j-1}|)\Gamma(|\mathbf{a}_{v+1, j}| - b)}{\Gamma(a_j)\Gamma(b)\Gamma(c - b)}, \quad j = \overline{v+1, N}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

В области $\mathbb{V}^{N, v}$ функции (2.8)–(2.10) образуют базис в пространстве решений системы (1.8).

Из теоремы 1 с помощью несложных рассуждений могут быть найдены формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы в области $\mathbb{V}_\sigma^{N, v}$, определяемые равенством (2.12), для всех $v = \overline{0, N}$ и $\sigma \in S_N$, где, напомним, S_N – группа перестановок множества из N элементов. Действительно, учитывая равенство

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = F_D^{(N)}(\sigma(\mathbf{a}); b, c; \sigma(\mathbf{z})), \quad (2.18)$$

вытекающее непосредственно из определения (1.1), а также то, что включение $\mathbf{z} \in \mathbb{V}_\sigma^{N, v}$ влечет $\sigma(\mathbf{z}) \in \mathbb{V}^{N, v}$, получаем, что аналитическое продолжение функции $F_D^{(N)}$ в область $\mathbb{V}_\sigma^{N, v}$ осуществляется формулой (2.7) с заменой в ее правой части, т.е. в коэффициентах $A_j = A_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ и функциях $\mathcal{U}_j^{(1, \infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$, определяемых из (2.8)–(2.10), параметра \mathbf{a} на $\sigma(\mathbf{a})$ и аргумента \mathbf{z} на $\sigma(\mathbf{z})$. При этом функции $\mathcal{U}_{j, \sigma}^{(1, \infty)} := \mathcal{U}_j^{(1, \infty)}(\sigma(\mathbf{a}); b, c; \sigma(\mathbf{z}))$, получаемые из (2.8)–(2.10) действием перестановки $\sigma \in S_N$, являются базисом пространства решений системы (1.8) в области $\mathbb{V}_\sigma^{N, v}$.

2.2. Используемые обозначения

Полученные далее в п. 2.4 формулы аналитического продолжения соответствуют случаю, когда расстояния между некоторыми переменными достаточно малы (например, по сравнению с их модулями или с расстояниями до единицы). В связи с этим нам будет удобно модифицировать обозначения для переменных и параметров функции Лауричеллы.

Представим векторный аргумент $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)$ функции $F_D^{(N)}$ в виде объединения $q + 1 \leq N$ наборов $\mathbf{z}^{(s)}$, $s = \overline{1, q + 1}$:

$$\mathbf{z} = (\mathbf{z}^{(1)}, \dots, \mathbf{z}^{(q+1)}), \quad \mathbf{z}^{(s)} := (z_1^{(s)}, \dots, z_{p_s}^{(s)}), \quad s = \overline{1, q + 1}, \tag{2.19}$$

где набор $\mathbf{z}^{(s)}$ с номером s состоит из p_s элементов, так что $\sum_{s=1}^{q+1} p_s = N$. Несложно установить связь обозначений (2.19) с прежними, использованными в формуле (1.1):

$$z_j^{(s)} = z_m, \quad m = \sum_{l=1}^{s-1} p_l + j, \tag{2.20}$$

так что, например, $\mathbf{z}^{(1)} = (z_1, \dots, z_{p_1})$, $\mathbf{z}^{(2)} = (z_{p_1+1}, \dots, z_{p_1+p_2})$ и $\mathbf{z}^{(q+1)} = (z_{v+1}, \dots, z_N)$.

Будем считать, что компоненты вектора $\mathbf{z}^{(s)}$, т.е. переменные $z_j^{(s)}$ с одинаковым верхним индексом, являются “достаточно близкими” в смысле, который будет уточнен ниже в теореме 2 об аналитическом продолжении. Далее для определенности будем предполагать, что векторы $\mathbf{z}^{(s)}$ с номерами $s = \overline{1, v}$ содержат переменные, близкие к единице, векторы $\mathbf{z}^{(s)}$ с номерами $s = \overline{v + 1, q}$ составлены из больших по модулю переменных, а вектор переменные, образующие $\mathbf{z}^{(q+1)}$, по модулю меньше единицы, т.е. $\mathbf{z}^{(q+1)} \in \{|z_l^{(q+1)}| < 1, l = \overline{1, p_{q+1}}\}$.

Компоненты векторного параметра \mathbf{a} функции Лауричеллы и компоненты мультииндекса \mathbf{k} в формуле (1.1) переобозначим соответствующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(q+1)}), \quad \mathbf{a}^{(s)} := (a_1^{(s)}, \dots, a_{p_s}^{(s)}), \\ \mathbf{k} &= (\mathbf{k}^{(1)}, \dots, \mathbf{k}^{(q+1)}), \quad \mathbf{k}^{(s)} := (k_1^{(s)}, \dots, k_{p_s}^{(s)}), \end{aligned} \tag{2.21}$$

так что

$$a_j^{(s)} = a_m, \quad k_j^{(s)} = k_m, \quad m = \sum_{l=1}^{s-1} p_l + j. \tag{2.22}$$

Из формул (2.5) и (2.21) вытекают, например, соотношения

$$|\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| = \sum_{l=1}^{p_s} a_l^{(s)}, \quad |\mathbf{k}_{1,p_s}^{(s)}| = \sum_{l=1}^{p_s} k_l^{(s)}, \quad \sum_{s=1}^q |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| = |\mathbf{a}|, \quad \sum_{s=1}^q |\mathbf{k}_{1,p_s}^{(s)}| = |\mathbf{k}|, \tag{2.23}$$

которые потребуются в дальнейшем.

В данном разделе построены формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ в окрестность гиперплоскостей, определяемых по формуле (1.10), а также их пересечений, точнее, в новых обозначениях (2.19), формулы, справедливые вблизи множества

$$\bigcap_{s=1}^q \mathcal{M}_s, \quad \mathcal{M}_s := \{z_1^{(s)} = \dots = z_{p_s}^{(s)}\}, \quad s = \overline{1, q}; \tag{2.24}$$

при этом рассматриваем окрестности точек $z_v^{(1,\infty,0)}$ (см. п. 2.4).

2.3. Вспомогательное разложение функции $F_D^{(N)}$

Используя введенные обозначения (2.19)–(2.23) перепишем представление типа Эйлера (1.7) в следующем виде:

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1} (1-t)^{c-b-1}}{\prod_{s=1}^{q+1} \prod_{j=1}^{p_s} (1-tz_j^{(s)})^{a_j^{(s)}}} dt. \tag{2.25}$$

Напомним, что согласно сделанным предположениям переменные $z_j^{(s)}$ с одинаковым верхним индексом s близки по модулю, точнее,

$$z_j^{(s)} = z_1^{(s)} + \varepsilon_j^{(s)}, \quad s = \overline{1, q}, \quad j = \overline{2, p_s}, \tag{2.26}$$

где величины $\varepsilon_j^{(s)}$ предполагаются достаточно малыми. Используя равенства (2.26), преобразуем сомножители в знаменателе подынтегрального выражения, соответствующие номерам $s = \overline{1, q}$, к виду

$$(1-tz_j^{(s)})^{-a_j^{(s)}} = (1-t(z_1^{(s)} + \varepsilon_j^{(s)}))^{-a_j^{(s)}} = (1-tz_1^{(s)})^{-a_j^{(s)}} \left(1-t \frac{\varepsilon_j^{(s)}}{1-tz_1^{(s)}}\right)^{-a_j^{(s)}}, \quad s = \overline{1, q}, \tag{2.27}$$

а затем разложим эти выражения в ряды по целым степеням $\varepsilon_j^{(s)} = z_j^{(s)} - z_1^{(s)}$:

$$(1-tz_j^{(s)})^{-a_j^{(s)}} = (1-tz_1^{(s)})^{-a_j^{(s)}} \sum_{k_j^{(s)}=0}^{\infty} \frac{(a_j^{(s)}, k_j^{(s)})}{k_j^{(s)}!} \left(\frac{t}{1-tz_1^{(s)}}\right)^{k_j^{(s)}} (\varepsilon_j^{(s)})^{k_j^{(s)}}, \quad s = \overline{1, q}, \quad j = \overline{1, p_s}. \tag{2.28}$$

Оставшиеся сомножители $(1-tz_j^{(q+1)})^{-a_j^{(q+1)}}$ разложим в ряды по целым степеням $z_j^{(q+1)}$:

$$(1-tz_j^{(q+1)})^{-a_j^{(q+1)}} = \sum_{k_j^{(q+1)}=0}^{\infty} \frac{(a_j^{(q+1)}, k_j^{(q+1)})}{k_j^{(q+1)}!} (tz_j^{(q+1)})^{k_j^{(q+1)}}, \quad j = \overline{1, p_{q+1}}. \tag{2.29}$$

Подставляя (2.28) и (2.29) в знаменатель (2.25), находим для него следующее представление:

$$\prod_{s=1}^{q+1} \prod_{j=1}^{p_s} (1-tz_j^{(s)})^{-a_j^{(s)}} = \prod_{s=1}^q (1-tz_1^{(s)})^{-|\mathbf{k}_{1,p_s}^{(s)}|} \sum_{s=1}^q \sum_{k_2^{(s)}, \dots, k_{p_s}^{(s)}=0} \sum_{k_1^{(q+1)}, \dots, k_{p_{q+1}}^{(q+1)}=0} \left[\left(\prod_{r=1}^q \prod_{l=2}^{p_r} \frac{(a_l^{(r)}, k_l^{(r)})}{k_l^{(r)}!} (z_l^{(r)} - z_1^{(r)})^{k_l^{(r)}} \right) \times \right. \tag{2.30}$$

$$\left. \times \left(\prod_{l=1}^{p_{q+1}} \frac{(a_l^{(q+1)}, k_l^{(q+1)})}{k_l^{(q+1)}!} (z_l^{(q+1)})^{k_l^{(q+1)}} \right) \left(\prod_{r=1}^q (1-tz_r)^{-|\mathbf{k}_{2,p_r}^{(r)}|} \right) t^{\sum_{r=1}^q |\mathbf{k}_{2,p_r}^{(r)}| + |\mathbf{k}_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}|} \right];$$

здесь использованы обозначения $|\mathbf{k}_{2,p_r}^{(r)}| := \sum_{l=2}^{p_r} k_l^{(r)}$, $|\mathbf{k}_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}| := \sum_{l=1}^{p_{q+1}} k_l^{(q+1)}$, где $k_l^{(r)}$ – компоненты мультииндекса \mathbf{k} (см. (2.21), (2.22)); напомним, что выражение (a, k) означает символ Похгаммера (1.4). Подставляя (2.30) в интегральное представление типа Эйлера (2.25), меняя порядок суммирования и интегрирования, получаем следующее разложение функции Лауричеллы:

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{s=1}^q \sum_{k_2^{(s)}, \dots, k_{p_s}^{(s)}=0} \sum_{k_1^{(q+1)}, \dots, k_{p_{q+1}}^{(q+1)}=0} \left[\frac{\left(b, \sum_{s=1}^q |\mathbf{k}_{2,p_s}^{(s)}| + |\mathbf{k}_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}| \right)}{\left(c, \sum_{s=1}^q |\mathbf{k}_{2,p_s}^{(s)}| + |\mathbf{k}_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}| \right)} \left(\prod_{r=1}^q \prod_{l=2}^{p_r} \frac{(a_l^{(r)}, k_l^{(r)})}{k_l^{(r)}!} (z_l^{(r)} - z_1^{(r)})^{k_l^{(r)}} \right) \times \right. \tag{2.31}$$

$$\left. \times \left(\prod_{l=1}^{p_{q+1}} \frac{(a_l^{(q+1)}, k_l^{(q+1)})}{k_l^{(q+1)}!} (z_l^{(q+1)})^{k_l^{(q+1)}} \right) F_D^{(q)} \left(|\mathbf{a}_{1,p_1}^{(1)}| + |\mathbf{k}_{2,p_1}^{(1)}|, \dots, |\mathbf{a}_{1,p_q}^{(q)}| + |\mathbf{k}_{2,p_q}^{(q)}|; \right. \right.$$

$$\left. \left. b + \sum_{s=1}^q |\mathbf{k}_{2,p_s}^{(s)}| + |\mathbf{k}_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}|, c + \sum_{s=1}^q |\mathbf{k}_{2,p_s}^{(s)}| + |\mathbf{k}_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}|; z_1^{(1)}, \dots, z_1^{(q)} \right) \right];$$

здесь в соответствии с принятыми обозначениями (2.4) справедливы соотношения

$$|\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| = \sum_{l=1}^{p_s} a_l^{(s)}, \quad |\mathbf{k}_{2,p_s}^{(s)}| = \sum_{l=2}^{p_s} k_l^{(s)}, \quad s = \overline{1, q}, \quad |\mathbf{k}_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}| = \sum_{l=1}^{p_{q+1}} k_l^{(q+1)}, \quad (2.32)$$

где $a_l^{(r)}, k_l^{(r)}$ – компоненты векторного параметра \mathbf{a} и мультииндекса \mathbf{k} (см. (2.21)).

Для построения формул аналитического продолжения функции $F_D^{(N)}$ продолжим фигурирующие в представлении (2.31) функции $F_D^{(q)}$ по переменным $z_1^{(1)}, \dots, z_1^{(q)}$, применяя теорему 1 (см. п. 2.1).

2.4. Формулы продолжения в окрестность точки $\mathbf{z}_{\nu,\mu}^{(1,\infty,0)}$

Введем область $\mathbb{O}^{N,\nu} = \mathbb{O}^{N,\nu}(p_1, \dots, p_{q+1})$ как пересечение:

$$\mathbb{O}^{N,\nu} = \bigcap_{j=0}^q \mathbb{O}_j^{N,\nu}, \quad (2.33)$$

где области $\mathbb{O}_j^{N,\nu} = \mathbb{O}_j^{N,\nu}(p_1, \dots, p_{q+1})$ для $j = \overline{1, \nu}$ определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \mathbb{O}_j^{N,\nu} := \{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : & |l - z_1^{(m)}| + |z_1^{(m)} - z_n^{(m)}| + |z_l^{(s)} - z_1^{(s)}| < |l - z_1^{(s)}|, s = \overline{j, \nu}, l = \overline{1, p_s}; m = \overline{1, j-1}, \\ & n = \overline{2, p_m}; |l - z_1^{(j)}| + |z_1^{(j)} - z_l^{(j)}| + |z_n^{(q+1)}| < 1, l = \overline{1, p_j}, n = \overline{2, p_{q+1}}; |z_1^{(s)}| > |z_1^{(s)} - z_l^{(s)}| + |z_n^{(q+1)}|, \\ & l = \overline{1, p_s}, n = \overline{2, p_{q+1}}; |\arg(-z_1^{(s)})| < \pi, s = \overline{\nu+1, q} \}; \end{aligned} \quad (2.34)$$

для $j = \overline{\nu+1, q}$ задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbb{O}_j^{N,\nu} := \{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : & |z_1^{(j)}| > 1 + |z_1^{(s)} - 1| + |z_l^{(s)} - z_1^{(s)}| + |z_n^{(j)} - z_n^{(j)}|, s = \overline{1, \nu}, l = \overline{1, p_s}, n = \overline{2, p_m}; \\ & |z_1^{(s)}| > |z_1^{(j)}| + |z_1^{(j)} - z_n^{(j)}| + |z_l^{(s)} - z_l^{(s)}|, s = \overline{\nu+1, j-1}, l = \overline{1, p_s}, n = \overline{2, p_j}; \\ & |z_1^{(j)}| > |z_1^{(s)}| + |z_1^{(s)} - z_l^{(s)}| + |z_n^{(j)} - z_n^{(j)}|, s = \overline{j+1, q}, l = \overline{2, p_s}, n = \overline{2, p_j}; |\arg(-z_1^{(s)})| < \pi, s = \overline{\nu+1, q} \}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

а область $\mathbb{O}_0^{N,\nu}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbb{O}_0^{N,\nu} := \{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : & |z_1^{(s)}| > |z_1^{(s)} - z_l^{(s)}| + |z_n^{(q+1)}|, s = \overline{\nu+1, q}, l = \overline{1, p_n}, n = \overline{1, p_{q+1}}; \\ & |z_1^{(s)} - 1| + |z_l^{(s)} - z_1^{(s)}| + |z_n^{(q+1)}| < 1, s = \overline{1, \nu}, l = \overline{1, p_s}, n = \overline{1, p_{q+1}}; \\ & |z_n^{(q+1)}| < 1, n = \overline{1, p_{q+1}}; |\arg(-z_1^{(s)})| < \pi, s = \overline{\nu+1, q} \}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Применяя результат теоремы 1 к функциям

$$F_D^{(q)} \left(|\mathbf{a}_{1,p_1}^{(1)}| + |\mathbf{k}_{2,p_1}^{(1)}|, \dots, |\mathbf{a}_{1,p_q}^{(q)}| + |\mathbf{k}_{2,p_q}^{(q)}|; b + \sum_{s=1}^q |\mathbf{k}_{2,p_s}^{(s)}| + |\mathbf{k}_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}|, c + \sum_{s=1}^q |\mathbf{k}_{2,p_s}^{(s)}| + |\mathbf{k}_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}|; z_1^{(1)}, \dots, z_1^{(q)} \right), \quad (2.37)$$

фигурирующим в разложении (2.31), приходим к следующему утверждению, устанавливающему формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы, справедливые вблизи пересечения $\bigcap_{s=1}^q \mathcal{M}_s$ гиперплоскостей (2.24) и соответствующие близким к единице переменным $z_l^{(s)}$, $s = \overline{1, \nu}, l = \overline{1, p_s}$, и большим по модулю переменным $z_l^{(s)}$, $s = \overline{\nu+1, q}, l = \overline{1, p_s}$.

Теорема 2. Если ни одно из чисел

$$\left(b - \sum_{s=v+1}^j |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| \right), \quad j = \overline{v+1, q}, \quad \left(c - b - \sum_{s=1}^j |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| \right), \quad j = \overline{1, v}, \quad (2.38)$$

не является целым, то аналитическое продолжение ряда (1.1) в область $\mathbb{O}^{N,v}$, определяемую соотношениями (2.33)–(2.36), дается формулой

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{j=0}^q B_j \mathcal{U}_j^{(1,\infty,0)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad (2.39)$$

где функции $\mathcal{U}_0^{(1,\infty,0)}$, $\mathcal{U}_j^{(1,\infty,0)}$ определяются равенствами

$$\mathcal{U}_0^{(1,\infty,0)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \left(\prod_{s=v+1}^q (-z_1^{(s)})^{-|\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}|} \right) \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \Xi_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) \mathbf{Z}^{\mathbf{k}}, \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_j^{(1,\infty,0)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) &= (1 - z_1^{(j)})^{c - \sum_{s=1}^j |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| - b} \left(\prod_{s=j+1}^v (1 - z_1^{(s)})^{-|\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}|} \right) \left(\prod_{s=v+1}^q (-z_1^{(s)})^{-|\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}|} \right) \times \\ &\times \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \Xi_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) \mathbf{Z}^{\mathbf{k}}, \quad j = \overline{1, v}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\mathcal{U}_j^{(1,\infty,0)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (-z_1^{(j)})^{\sum_{s=v+1}^{j-1} |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| - b} \left(\prod_{s=v+1}^{j-1} (-z_1^{(s)})^{-|\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}|} \right) \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \Xi_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) \mathbf{Z}^{\mathbf{k}}, \quad j = \overline{v+1, q}, \quad (2.42)$$

здесь коэффициенты $\Xi_j(\mathbf{k})$ определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \Xi_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) &:= \frac{\left(1 - c + \sum_{s=1}^q |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| - \sum_{s=v+1}^q k_1^{(s)} - |\mathbf{k}_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}| \right)}{\left(1 + \sum_{s=1}^v |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| + b - c, \sum_{s=1}^v |\mathbf{k}_{1,p_s}^{(s)}| \right) \left(1 - b + \sum_{s=v+1}^q |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| - \sum_{s=v+1}^q k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^v |\mathbf{k}_{1,p_s}^{(s)}| - |\mathbf{k}_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}| \right)} \times \\ &\times \left(\prod_{s=1}^q \frac{(|\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| |\mathbf{k}_{1,p_s}^{(s)}|)}{(|\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| |\mathbf{k}_{2,p_s}^{(s)}|) k_1^{(s)}!} \right) \left(\prod_{s=1}^q \prod_{l=2}^{p_s} \frac{(a_l^{(s)}, k_l^{(s)})}{k_l^{(s)}!} \right) \left(\prod_{l=1}^{p_{q+1}} \frac{(a_l^{(q+1)}, k_l^{(q+1)})}{k_l^{(q+1)}!} \right), \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \Xi_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) &:= \frac{\left(c - \sum_{s=1}^{j-1} |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| - b, \sum_{s=j}^v k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{j-1} k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{j-1} |\mathbf{k}_{2,p_s}^{(s)}| \right)}{\left(1 + c - \sum_{s=1}^j |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| - b, \sum_{s=j}^v k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{j-1} k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^j |\mathbf{k}_{2,p_s}^{(s)}| \right) (|\mathbf{a}_{1,p_j}^{(j)}| |\mathbf{k}_{2,p_j}^{(j)}|)} \times \\ &\times \frac{\left(1 + \sum_{s=1}^q |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| - c, \sum_{s=v+1}^q k_1^{(s)} - |\mathbf{k}_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}| \right)}{\left(1 + \sum_{s=1}^q |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| - c, \sum_{s=v+1}^q k_1^{(s)} - |\mathbf{k}_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}| - k_1^{(j)} \right) k_1^{(j)}!} \prod_{s=1, s \neq j}^q \frac{(|\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| |\mathbf{k}_{1,p_s}^{(s)}|)}{(|\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| |\mathbf{k}_{2,p_s}^{(s)}|) k_1^{(s)}!} \times \\ &\times \left(\prod_{s=1}^q \prod_{l=2}^{p_s} \frac{(a_l^{(s)}, k_l^{(s)})}{k_l^{(s)}!} \right) \left(\prod_{l=1}^{p_{q+1}} \frac{(a_l^{(q+1)}, k_l^{(q+1)})}{k_l^{(q+1)}!} \right), \quad j = \overline{1, v}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\Xi_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) := \frac{\left(b - \sum_{s=\overline{v+1}}^{j-1} |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| \sum_{s=1}^v |\mathbf{k}_{1,p_s}^{(s)}| + \sum_{s=j}^q |\mathbf{k}_{1,p_s}^{(s)}| - \sum_{s=\overline{v+1}}^{j-1} k_1^{(s)} + |\mathbf{k}_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}| \right)}{\left(1 + b - \sum_{s=\overline{v+1}}^j |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| \sum_{s=1}^v |\mathbf{k}_{1,p_s}^{(s)}| + \sum_{s=j+1}^q |\mathbf{k}_{1,p_s}^{(s)}| - \sum_{s=\overline{v+1}}^{j-1} k_1^{(s)} + k_1^{(j)} + |\mathbf{k}_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}| \right)} \times (\mathbf{a}_{1,p_j}^{(j)} | \mathbf{k}_{2,p_j}^{(j)} |) \times \frac{\left(1 - c + \sum_{s=1}^v |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| + b, \sum_{s=1}^v |\mathbf{k}_{1,p_s}^{(s)}| + k_1^{(j)} \right)}{\left(1 - c + \sum_{s=1}^v |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| + b, \sum_{s=1}^v |\mathbf{k}_{1,p_s}^{(s)}| \right)} k_1^{(j)!} \prod_{s=1, s \neq j}^q \frac{(|\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| |\mathbf{k}_{1,p_s}^{(s)}|)}{(|\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| |\mathbf{k}_{2,p_s}^{(s)}|) k_1^{(s)!}} \times \left(\prod_{s=1}^q \prod_{l=2}^{p_s} \frac{(a_l^{(s)}, k_l^{(s)})}{k_l^{(s)!}} \right) \left(\prod_{l=1}^{p_{q+1}} \frac{(a_l^{(q+1)}, k_l^{(q+1)})}{k_l^{(q+1)!}} \right), \quad j = \overline{v+1, q}. \tag{2.45}$$

В формулах (2.40)–(2.42) использовано обозначение $\mathbf{Z}_j^k = \prod_{s=1}^{q+1} \prod_{l=1}^{p_s} (\mathcal{Z}_{j,l}^{(s)})^{k_l^{(s)}}$, где числа $\mathcal{Z}_{j,l}^{(s)}$ – это элементы векторов $\mathcal{Z}_j^{(s)} = \{\mathcal{Z}_{j,1}^{(s)}, \dots, \mathcal{Z}_{j,p_s}^{(s)}\}$, $j = \overline{0, N}$, $s = \overline{1, q+1}$, определяемых при $j = 0$ равенствами

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0^{(s)} &:= (z_1^{(s)} - 1, z_2^{(s)} - z_1^{(s)}, \dots, z_{p_s}^{(s)} - z_1^{(s)}), \quad s = \overline{1, v}, \\ \mathcal{Z}_0^{(s)} &:= \left(\frac{1}{z_1^{(s)}}, \frac{z_1^{(s)} - z_2^{(s)}}{z_1^{(s)}}, \dots, \frac{z_1^{(s)} - z_{p_s}^{(s)}}{z_1^{(s)}} \right), \quad s = \overline{v+1, q}, \\ \mathcal{Z}_0^{(q+1)} &:= (z_1^{(q+1)}, \dots, z_{p_{q+1}}^{(q+1)}), \end{aligned} \tag{2.46}$$

при $j = \overline{1, v}$ – равенствами

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_j^{(s)} &:= \left(\frac{1 - z_1^{(s)}}{1 - z_1^{(j)}}, \frac{z_1^{(s)} - z_2^{(s)}}{1 - z_1^{(j)}}, \dots, \frac{z_1^{(s)} - z_{p_s}^{(s)}}{1 - z_1^{(j)}} \right), \quad s = \overline{1, j-1}, \\ \mathcal{Z}_j^{(j)} &:= \left(1 - z_1^{(j)}, \frac{z_1^{(j)} - z_2^{(j)}}{1 - z_1^{(j)}}, \dots, \frac{z_1^{(j)} - z_{p_j}^{(j)}}{1 - z_1^{(j)}} \right), \\ \mathcal{Z}_j^{(s)} &:= \left(\frac{1 - z_1^{(j)}}{1 - z_1^{(s)}}, \frac{z_2^{(s)} - z_1^{(s)}}{1 - z_1^{(s)}}, \dots, \frac{z_{p_s}^{(s)} - z_1^{(s)}}{1 - z_1^{(s)}} \right), \quad s = \overline{j+1, v}, \\ \mathcal{Z}_j^{(s)} &:= \left(\frac{1}{z_1^{(s)}}, \frac{z_1^{(s)} - z_2^{(s)}}{z_1^{(s)}}, \dots, \frac{z_1^{(s)} - z_{p_s}^{(s)}}{z_1^{(s)}} \right), \quad s = \overline{v+1, q}, \\ \mathcal{Z}_j^{(q+1)} &:= (z_1^{(q+1)}, \dots, z_{p_{q+1}}^{(q+1)}), \end{aligned} \tag{2.47}$$

а для $j = \overline{v+1, q}$ – следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_j^{(s)} &:= \left(\frac{z_1^{(s)} - 1}{z_1^{(j)}}, \frac{z_2^{(s)} - z_1^{(s)}}{z_1^{(j)}}, \dots, \frac{z_{p_s}^{(s)} - z_1^{(s)}}{z_1^{(j)}} \right), \quad s = \overline{1, v}, \\ \mathcal{Z}_j^{(s)} &:= \left(\frac{z_1^{(j)}}{z_1^{(s)}}, \frac{z_1^{(s)} - z_2^{(s)}}{z_1^{(s)}}, \dots, \frac{z_1^{(s)} - z_{p_s}^{(s)}}{z_1^{(s)}} \right), \quad s = \overline{v+1, j-1}, \\ \mathcal{Z}_j^{(j)} &:= \left(\frac{1}{z_1^{(j)}}, \frac{z_1^{(j)} - z_2^{(j)}}{z_1^{(j)}}, \dots, \frac{z_1^{(j)} - z_{p_j}^{(j)}}{z_1^{(j)}} \right), \end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\mathcal{E}_j^{(s)} := \left(\frac{z_1^{(s)}}{z_1^{(j)}}, \frac{z_2^{(s)} - z_1^{(s)}}{z_1^{(s)}}, \dots, \frac{z_{p_s}^{(s)} - z_1^{(s)}}{z_1^{(s)}} \right), \quad s = \overline{j+1, q},$$

$$\mathcal{E}_j^{(q+1)} := \left(\frac{z_1^{(q+1)}}{z_1^{(j)}}, \dots, \frac{z_{p_{q+1}}^{(q+1)}}{z_1^{(j)}} \right).$$

Коэффициенты B_j в формуле (2.39) имеют вид

$$B_0 = \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(c - b - \sum_{s=1}^v |a_{1,p_s}^{(s)}|\right)\Gamma\left(b - \sum_{s=v+1}^q |a_{1,p_s}^{(s)}|\right)}{\Gamma(b)\Gamma\left(c - \sum_{s=1}^q |a_{1,p_s}^{(s)}|\right)\Gamma(c - b)},$$

$$B_j = \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(c - \sum_{s=1}^{j-1} |a_{1,p_s}^{(s)}| - b\right)\Gamma\left(\sum_{s=1}^j |a_{1,p_s}^{(s)}| + b - c\right)}{\Gamma(|a_{1,p_j}^{(j)}|)\Gamma(b)\Gamma(c - b)}, \quad j = \overline{1, v}, \tag{2.49}$$

$$B_j = \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(b - \sum_{s=v+1}^{j-1} |a_{1,p_s}^{(s)}|\right)\Gamma\left(\sum_{s=v+1}^j |a_{1,p_s}^{(s)}| - b\right)}{\Gamma(|a_{1,p_j}^{(j)}|)\Gamma(b)\Gamma(c - b)}, \quad j = \overline{v+1, q}.$$

В области $\mathbb{V}^{N, \nu}$ функции (2.40)–(2.42) являются линейно независимыми решениями системы (1.8), которой удовлетворяет исходный ряд (1.1).

Области сходимости представлений вида (2.39) для функции Лауричеллы установлены с помощью подхода [1]. В том, что функции $\mathcal{U}_j^{(1, \infty, 0)}$, $j = \overline{0, q}$, являются решениями системы (1.8), можно убедиться непосредственной подстановкой (2.40)–(2.42) в (1.8). Используя соотношение симметрии (2.18), несложно получить формулы аналитического продолжения в области, получаемые из (2.33) с помощью соответствующих симметрий.

Представления функции Лауричеллы в виде экспоненциально сходящихся рядов, которые устанавливают теоремы 1, 2, позволяют качественно исследовать и эффективно вычислять интегралы типа Эйлера (1.8) во всем пространстве \mathbb{C}^N , в том числе в сложных случаях “кроудинга” переменных, т.е. вблизи произвольных пересечений гиперплоскостей (2.24). Отметим еще, что возникающие в теоремах 1, 2 ряды (2.8)–(2.10) и (2.40)–(2.42), через которые выражаются решения системы (1.8), принадлежат классу Горна, поскольку, как нетрудно увидеть, соответствующие коэффициенты удовлетворяют свойству (1.25).

3. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ 2 ДЛЯ СЛУЧАЯ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

В данном разделе продемонстрировано применение теоремы 2 к функции $F_D^{(3)}$, определяемой в поликруге $\mathbb{U}^3 = \{|z_j| < 1, j = 1, 2, 3\}$ с помощью гипергеометрического ряда

$$F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = \sum_{k_1, k_2, k_3=0}^{\infty} \frac{(b)_{k_1+k_2+k_3} (a_1)_{k_1} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3}}{(c)_{k_1+k_2+k_3} k_1! k_2! k_3!} z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3} \tag{3.1}$$

и представимой в области $\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^N : |\arg(1 - z_j)| < \pi, j = \overline{1, 3}\}$ в виде интеграла типа Эйлера (см. [1])

$$F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c - b)} \int_0^1 t^{b-1} (1 - t)^{c-b-1} (1 - tz_1)^{-a_1} (1 - tz_2)^{-a_2} (1 - tz_3)^{-a_3} dt. \tag{3.2}$$

Далее будем использовать обозначения $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$, $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + k_3$.

Напомним, что формулы аналитического продолжения в окрестность точки $(1, \infty, \infty)$ были представлены во Введении. Далее в пп. 3.1, 3.2 будут построены формулы аналитического продолжения в окрестность точек $(1, 1, \infty)$, $(\infty, \infty, 0)$ и $(1, 1, 0)$, адекватно представляющие функцию (3.1) и позволяющие эффективно вычислять интеграл (3.2) вблизи гиперплоскостей вида $\{z_k = z_l\}$ и их пересечений.

3.1. Продолжение функции $F_D^{(3)}$ в окрестность точки $(1, 1, \infty)$, соответствующее $z_1 = z_2$

Предположим, что переменные z_1, z_2, z_3 функции Лауричеллы $F_D^{(3)}$ образуют две группы, в первую из которых входят z_1 и z_2 , а во вторую – только z_3 . Тогда согласно (2.19), (2.20) используемые в теореме 0 числа q, p_s , а также параметры и переменные функции Лауричеллы (3.1), (3.2) определяются следующими соотношениями:

$$q = 2, \quad v = 1, \quad p_1 = 2, \quad p_2 = 1, \quad p_3 = 0, \quad z_1^{(1)} = z_1, \quad z_2^{(1)} = z_2, \quad z_1^{(2)} = z_3, \quad (3.3)$$

$$a_1^{(1)} = a_1, \quad a_2^{(1)} = a_2, \quad a_1^{(2)} = a_3, \quad k_1^{(1)} = k_1, \quad k_2^{(1)} = k_2, \quad k_1^{(2)} = k_3.$$

Применяя теорему 2, построим формулу продолжения функции $F_D^{(3)}$ в окрестность гиперплоскости

$$\mathcal{M}_{1,2} := \{z_1 = z_2\} \quad (3.4)$$

для случая переменных z_1, z_2 , близких к единице, и больших по модулю переменных z_3 . Подставляя (3.3) в (2.43)–(2.45), находим выражения для коэффициентов рядов (2.40)–(2.42):

$$\Xi_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) = \frac{(1 - c + a_1 + a_2 + a_3)_{k_3} (a_1 + a_2)_{k_1+k_2} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3}}{(1 + a_1 + a_2 + b - c)_{k_1+k_2} (1 - b + a_3)_{k_3-k_1-k_2} (a_1 + a_2)_{k_2} k_1! k_2! k_3!}, \quad (3.5)$$

$$\Xi_1(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) = \frac{(c - b)_{k_1} (1 + a_1 + a_2 + a_3 - c)_{k_3} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3}}{(1 + c - a_1 - a_2 - b)_{k_1-k_2} (a_1 + a_2)_{k_2} (1 + a_1 + a_2 + a_3 - c)_{k_3-k_1} k_1! k_2! k_3!}. \quad (3.6)$$

$$\Xi_2(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) = \frac{(b)_{k_1+k_2+k_3} (1 - c + a_1 + a_2 + b)_{k_1+k_2+k_3} (a_1 + a_2)_{k_1+k_2} (a_2)_{k_2}}{(1 + b - a_3)_{k_1+k_2+k_3} (1 - c + a_1 + a_2 + b)_{k_1+k_2} (a_1 + a_2)_{k_2} k_1! k_2! k_3!}. \quad (3.7)$$

По формулам (2.46)–(2.48) находим

$$Z_0^{(1)} = (z_1 - 1, z_2 - z_1), \quad Z_0^{(2)} = \left(\frac{1}{z_3} \right), \quad Z_1^{(1)} = \left(1 - z_1, \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1} \right), \quad Z_1^{(2)} = \left(\frac{1}{z_3} \right), \quad (3.8)$$

$$Z_2^{(1)} = \left(\frac{z_1 - 1}{z_3}, \frac{z_2 - z_1}{z_3} \right), \quad Z_2^{(2)} = \left(\frac{1}{z_3} \right),$$

а согласно (2.49) выражения для коэффициентов B_0, B_1 и B_2 имеют вид

$$B_0 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - b - a_1 - a_2)\Gamma(b - a_3)}{\Gamma(b)\Gamma(c - a_1 - a_2 - a_3)\Gamma(c - b)}, \quad B_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_1 + a_2 + b - c)}{\Gamma(a_1 + a_2)\Gamma(b)}, \quad B_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_3 - b)}{\Gamma(a_1 + a_2)\Gamma(c - b)}. \quad (3.9)$$

Далее, учитывая соотношения (3.5)–(3.9), из теоремы 2 получаем следующее утверждение, позволяющее аналитически продолжить функцию Лауричеллы $F_D^{(3)}$ в окрестность особой гиперплоскости (3.4), т.е. в ситуации кроудинга переменных z_1, z_2 для случая, когда они близки к единице, а $|z_3|$ – достаточно большая величина.

Теорема 3. Если ни одно из чисел $c - b - a_1 - a_2$ и $b - a_3$ не является целым, то в области

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |z_1 - z_2| < |1 - z_1| < 1, |z_3| > 1 + |1 - z_1| + |z_1 - z_2|; |\arg(1 - z_1)| < \pi, |\arg(-z_3)| < \pi\} \quad (3.10)$$

функция Лауричеллы $F_D^{(3)}$ представима в следующем виде:

$$F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = B_0(-z_3)^{-a_3} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \Xi_0(\mathbf{k})(z_1 - 1)^{k_1} (z_2 - z_1)^{k_2} z_3^{-k_3} + B_1(1 - z_1)^{c-a_1-a_2-b} (-z_3)^{-a_3} \times \\ \times \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \Xi_1(\mathbf{k})(1 - z_1)^{k_1} \left(\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1}\right)^{k_2} z_3^{-k_3} + B_2(-z_3)^{-b} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \Xi_2(\mathbf{k}) \left(\frac{z_1 - 1}{z_3}\right)^{k_1} \left(\frac{z_2 - z_1}{z_3}\right)^{k_2} z_3^{-k_3},$$

где, напомним, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$, $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + k_3$, коэффициенты Ξ_0 , Ξ_1 и Ξ_2 определяются равенствами (3.5)–(3.7), а величины B_0 , B_1 и B_2 – равенствами (3.9).

3.2. Продолжение функции $F_D^{(3)}$ в окрестность точек $(\infty, \infty, 0)$ и $(1, 1, 0)$, соответствующее $z_1 = z_2$

Рассмотрим продолжение в окрестность точки $(\infty, \infty, 0)$ и предположим, что расстояние между переменными z_1, z_2 функции Лауричеллы $F_D^{(3)}$ мало по сравнению с величинами $|z_1|$ и $|z_2|$. Тогда согласно (2.19), (2.20) используемые в теореме 2 числа q, v, p_s , а также параметры и переменные функции Лауричеллы (3.1), (3.2) определяются равенствами

$$q = 1, \quad v = 0, \quad p_1 = 2, \quad p_2 = 1, \quad z_1^{(1)} = z_1, \quad z_2^{(1)} = z_2, \quad z_3^{(2)} = z_3, \\ a_1^{(1)} = a_1, \quad a_2^{(1)} = a_2, \quad a_3^{(2)} = a_3, \quad k_1^{(1)} = k_1, \quad k_2^{(1)} = k_2, \quad k_3^{(2)} = k_3. \tag{3.11}$$

Применяя теорему 2, построим формулу продолжения функции $F_D^{(3)}$ в окрестность точки $(\infty, \infty, 0)$, адекватно представляющую эту функцию вблизи гиперплоскости (3.4). Подставляя (3.11) в (2.43)–(2.45), находим выражения для коэффициентов рядов (2.40)–(2.42), а затем по формулам (2.49) находим величины B_j . Подставляя найденные выражения в (2.39), приходим к следующему утверждению, позволяющему аналитически продолжить функцию Лауричеллы $F_D^{(3)}$ в окрестность особой гиперплоскости (3.4), т.е. в ситуации кроудинга переменных z_1, z_2 для случая, когда они велики по модулю, а величина $|z_3|$ достаточно мала.

Теорема 4. Если число $a_1 + a_2 - b$ не является целым, то аналитическое продолжение ряда (3.1), определяющего функцию Лауричеллы $F_D^{(3)}$, в область

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |z_1| > 1 + |z_1 - z_2|, |z_3| < 1, |\arg(-z_1)| < \pi\} \tag{3.12}$$

дается формулой

$$F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = \\ = B_0(-z_1)^{-a_1-a_2} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b - a_1 - a_2)_{k_3-k_1} (a_1 + a_2)_{k_1+k_2} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3}}{(c - a_1 - a_2)_{k_3-k_1} (a_1 + a_2)_{k_2} k_1! k_2! k_3!} z_1^{-k_1} \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1}\right)^{k_2} z_3^{k_3} + \\ + B_1(-z_1)^{-b} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{k_1+k_2+k_3} (1 - c + b)_{k_1} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3}}{(1 + b - a_1 - a_2)_{k_1+k_3} (a_1 + a_2)_{k_2} k_1! k_2! k_3!} z_1^{-k_1} \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1}\right)^{k_2} \left(\frac{z_3}{z_1}\right)^{k_3},$$

где величины B_0 и B_1 определяются равенствами

$$B_0 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b - a_1 - a_2)}{\Gamma(b)\Gamma(c - a_1 - a_2)}, \quad B_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_1 + a_2 - b)}{\Gamma(a_1 + a_2)\Gamma(c - b)}.$$

Построим формулу продолжения в окрестность точки $(1, 1, 0)$ в предположении, что расстояние между переменными z_1, z_2 функции Лауричеллы $F_D^{(3)}$ достаточно мало. Согласно (2.19), (2.20) используемые в теореме 2 числа q, v, p_s , а также параметры и переменные функции Лауричеллы (3.1), (3.2) определяются равенствами

$$q = 1, \quad v = 1, \quad p_1 = 2, \quad p_2 = 1, \quad z_1^{(1)} = z_1, \quad z_2^{(1)} = z_2, \quad z_3^{(2)} = z_3, \\ a_1^{(1)} = a_1, \quad a_2^{(1)} = a_2, \quad a_3^{(2)} = a_3, \quad k_1^{(1)} = k_1, \quad k_2^{(1)} = k_2, \quad k_3^{(2)} = k_3. \tag{3.13}$$

Применяя теорему 2, построим формулу продолжения функции $F_D^{(3)}$ в окрестность точки $(\infty, \infty, 0)$, адекватно представляющую эту функцию вблизи гиперплоскости (3.4). Подставляя (3.11) в (2.43)–(2.45), находим выражения для коэффициентов рядов (2.40)–(2.42), а затем по формулам (2.49) находим величины B_j . Выполняя вычисления по формуле (2.39), приходим к следующему утверждению, позволяющему аналитически продолжить функцию Лауричеллы $F_D^{(3)}$ в окрестность особой гиперплоскости (3.4), т.е. в ситуации кроудинга переменных z_1, z_2 , когда эти переменные близки к единице, а $|z_3|$ – достаточно малая величина.

Теорема 5. *Если число $c - a_1 - a_2 - b$ не является целым, то аналитическое продолжение ряда (3.1), определяющего функцию Лауричеллы $F_D^{(3)}$, в область*

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |z_1 - z_2| < |1 - z_1|, |1 - z_1| + |z_1 - z_2| + |z_3| < 1, |\arg(1 - z_1)| < \pi\} \tag{3.14}$$

дается формулой

$$\begin{aligned} & F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = \\ & = B_0 \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(b)_{k_1+k_2+k_3} (a_1+a_2)_{k_1+k_2} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3}}{(1+a_1+a_2+b-c)_{k_1+k_2} (c-a_1-a_2)_{k_3} (a_1+a_2)_{k_2} k_1! k_2! k_3!} (1-z_1)^{k_1} (z_1-z_2)^{k_2} z_3^{k_3} + \\ & + B_1 (1-z_1)^{c-a_1-a_2-b} \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(c-a_1-a_2)_{k_1+k_3} (c-b)_{k_1} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3}}{(1+c-a_1-a_2-b)_{k_1-k_2} (a_1+a_2)_{k_2} (c-a_1-a_2)_{k_3} k_1! k_2! k_3!} (z_1-1)^{k_1} \left(\frac{z_1-z_2}{1-z_1}\right)^{k_2} z_3^{k_3}, \end{aligned}$$

где величины B_0 и B_1 определяются равенствами

$$B_0 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b-a_1-a_2)}{\Gamma(c-a_1-a_2)\Gamma(c-b)}, \quad B_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_1+a_2+b-c)}{\Gamma(a_1+a_2)\Gamma(b)}.$$

Представленные в теоремах 3–5 формулы позволяют аналитически продолжить ряд (3.1) соответственно в области (3.10), (3.12), (3.14) и дают эффективный алгоритм для вычисления интеграла (3.2), когда аргумент (z_1, z_2, z_3) принимает значения в этих областях.

4. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ 2 ДЛЯ СЛУЧАЯ ЧЕТЫРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

В данном разделе продемонстрировано применение теоремы 2 к функции $F_D^{(4)}$, определяемой в поликруге $\mathbb{U}^4 = \{|z_j| < 1, j = \overline{1,4}\}$ с помощью гипергеометрического ряда

$$F_D^{(4)}(a_1, \dots, a_4; b, c; z_1, \dots, z_4) = \sum_{k_1, k_2, k_3=0}^{\infty} \frac{(b)_{k_1+\dots+k_4} (a_1)_{k_1} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3} (a_4)_{k_4}}{(c)_{k_1+\dots+k_4} k_1! k_2! k_3! k_4!} z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3} z_4^{k_4}, \tag{4.1}$$

и представимой в области $\mathbb{L}^4 = \{(z_1, \dots, z_4) \in \mathbb{C}^N : |\arg(1 - z_j)| < \pi, j = \overline{1,4}\}$ в виде интеграла типа Эйлера (см. [1]):

$$F_D^{(4)}(a_1, \dots, a_4; b, c; z_1, \dots, z_4) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} \prod_{j=1}^4 (1-tz_j)^{-a_j} dt. \tag{4.2}$$

Ниже в данном разделе будем использовать обозначения $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_4)$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_4)$, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_4)$, $|\mathbf{k}| = \sum_{s=1}^4 k_s$. В следующих пп. 4.1–4.3 построены формулы аналитического продолжения в окрестность точек $(1, 1, \infty, \infty)$, $(1, 1, 1, \infty)$, $(1, \infty, \infty, \infty)$, адекватно представляющие функцию (4.1) и позволяющие эффективно вычислять интеграл (4.2) вблизи гиперплоскостей вида $\{z_k = z_j\}$ и их пересечений.

4.1. Продолжение функции $F_D^{(4)}$ в окрестность точки $(1, 1, \infty, \infty)$, соответствующее $z_1 = z_2$ и $z_3 = z_4$

Предположим, что переменные z_1, z_2, z_3, z_4 функции Лауричеллы $F_D^{(4)}$ образуют две группы, в первую из которых входят z_1 и z_2 , а во вторую — z_3 и z_4 . Тогда согласно (2.19), (2.20) используемые в теореме 2 числа q, p_s , а также параметры и переменные функции Лауричеллы (3.1), (3.2) определяются следующими соотношениями:

$$q = 2, \quad v = 1, \quad p_1 = p_2 = 2, \quad p_3 = 0, \quad z_1^{(1)} = z_1, \quad z_2^{(1)} = z_2, \quad z_1^{(2)} = z_3, \quad z_2^{(2)} = z_4, \quad (4.3)$$

$$a_1^{(1)} = a_1, \quad a_2^{(1)} = a_2, \quad a_1^{(2)} = a_3, \quad a_2^{(2)} = a_4, \quad k_1^{(1)} = k_1, \quad k_2^{(1)} = k_2, \quad k_1^{(2)} = k_3, \quad k_2^{(2)} = k_4.$$

Применяя теорему 2, построим формулу продолжения функции $F_D^{(3)}$, справедливую вблизи гиперплоскостей

$$\mathcal{M}_{1,2} := \{z_1 = z_2\}, \quad \mathcal{M}_{3,4} := \{z_3 = z_4\}, \quad (4.4)$$

для случая переменных z_1, z_2 , близких к единице, и больших по модулю переменных z_3, z_4 . Подставляя (4.3) в (2.43)–(2.45), находим выражения для коэффициентов рядов (2.40)–(2.42):

$$\Xi_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) = \frac{\left(1 - c + \sum_{s=1}^4 a_s\right)_{k_3} (a_1 + a_2)_{k_1+k_2} (a_3 + a_4)_{k_3+k_4} (a_2)_{k_2} (a_4)_{k_4}}{(1 + a_1 + a_2 + b - c)_{k_1+k_2} (1 - b + a_3 + a_4)_{k_3-k_1-k_2} (a_1 + a_2)_{k_2} (a_3 + a_4)_{k_4} k_1! k_2! k_3! k_4!}, \quad (4.5)$$

$$\Xi_1(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) = \frac{(c - b)_{k_1} \left(1 + \sum_{s=1}^4 a_s - c\right)_{k_3} (a_3 + a_4)_{k_3+k_4} (a_2)_{k_2} (a_4)_{k_4}}{\left(1 + c - a_1 - a_2 - b\right)_{k_1-k_2} (a_1 + a_2)_{k_2} \left(1 + \sum_{s=1}^4 a_s - c\right)_{k_3-k_1} k_1! k_2! k_3! k_4!}, \quad (4.6)$$

$$\Xi_2(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) = \frac{(b)_{\sum_{s=1}^4 k_s} (1 - c + a_1 + a_2 + b)_{k_1+k_2+k_3} (a_1 + a_2)_{k_1+k_2} (a_2)_{k_2} (a_4)_{k_4}}{(1 + b - a_3 - a_4)_{k_1+k_2+k_3} (a_3 + a_4)_{k_4} (1 - c + a_1 + a_2 + b)_{k_1+k_2} (a_1 + a_2)_{k_2} k_1! k_2! k_3! k_4!}. \quad (4.7)$$

По формулам (2.46)–(2.48) находим

$$Z_0^{(1)} = (z_1 - 1, z_2 - z_1), \quad Z_0^{(2)} = \left(\frac{1}{z_3}, \frac{z_3 - z_4}{z_3}\right), \quad Z_1^{(1)} = \left(1 - z_1, \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1}\right), \quad (4.8)$$

$$Z_1^{(2)} = \left(\frac{1}{z_3}, \frac{z_3 - z_4}{z_3}\right), \quad Z_2^{(1)} = \left(\frac{z_1 - 1}{z_3}, \frac{z_2 - z_1}{z_3}\right), \quad Z_2^{(2)} = \left(\frac{1}{z_3}, \frac{z_3 - z_4}{z_3}\right),$$

а согласно (2.49) выражения для коэффициентов B_0, B_1 и B_2 имеют вид

$$B_0 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - b - a_1 - a_2)\Gamma(b - a_3 - a_4)}{\Gamma(b)\Gamma(c - \sum_{s=1}^4 a_s)\Gamma(c - b)}, \quad (4.9)$$

$$B_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_1 + a_2 + b - c)}{\Gamma(a_1 + a_2)\Gamma(b)}, \quad B_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_3 + a_4 - b)}{\Gamma(a_3 + a_4)\Gamma(c - b)}.$$

Далее, учитывая соотношения (4.3)–(4.9), из теоремы 2 получаем следующее утверждение, позволяющее аналитически продолжить функцию Лауричеллы $F_D^{(3)}$ в окрестность пересечения особых гиперплоскостей (4.4), т.е. в ситуации кроудинга пар переменных z_1, z_2 и z_3, z_4 , для случая близких к единице z_1, z_2 и больших по модулю z_3, z_4 .

Теорема 6. Если ни одно из чисел $c - b - a_1 - a_2$ и $b - a_3 - a_4$ не является целым, то в области

$$\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^4 : |z_2 - z_1| < |1 - z_1| < 1, |z_3| > 1 + |1 - z_1| + |z_1 - z_2| + |z_3 - z_4|, |\arg(1 - z_1)| < \pi, |\arg(-z_3)| < \pi\}$$

функция Лауричеллы $F_D^{(4)}$ представима в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 F_D^{(4)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) &= B_0(-z_3)^{-a_3-a_4} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \Xi_0(\mathbf{k})(z_1-1)^{k_1}(z_2-z_1)^{k_2} z_3^{-k_3} \left(\frac{z_3-z_4}{z_4}\right)^{k_4} + \\
 &+ B_1(1-z_1)^{c-a_1-a_2-b} (-z_3)^{-a_3-a_4} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \Xi_1(\mathbf{k})(1-z_1)^{k_1} \left(\frac{z_1-z_2}{1-z_1}\right)^{k_2} z_3^{-k_3} \left(\frac{z_3-z_4}{z_4}\right)^{k_4} + \\
 &+ B_2(-z_3)^{-b} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \Xi_2(\mathbf{k}) \left(\frac{z_1-1}{z_3}\right)^{k_1} \left(\frac{z_2-z_1}{z_3}\right)^{k_2} z_3^{-k_3} \left(\frac{z_3-z_4}{z_4}\right)^{k_4},
 \end{aligned}$$

где, напомним, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_4)$, $|\mathbf{k}| = \sum_{s=1}^4 k_s$, коэффициенты Ξ_0 , Ξ_1 и Ξ_2 определяются равенствами (4.5)–(4.7), а величины B_0 , B_1 и B_2 – равенствами (4.9).

4.2. Продолжение функции $F_D^{(4)}$ в окрестность точки $(1, \infty, \infty, \infty)$, соответствующее $z_2 = z_3 = z_4$

Предположим, что переменные z_1, z_2, z_3, z_4 функции Лауричеллы $F_D^{(4)}$ образуют две группы, в первую из которых входит только z_1 , а во вторую – z_2, z_3 и z_4 . Тогда согласно (2.19), (2.20) используемые в теореме 2 числа q, p_s , а также параметры и переменные функции Лауричеллы (3.1), (3.2) определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
 q = 2, \quad v = 1, \quad p_1 = 1, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 0, \quad z_1^{(1)} = z_1, \quad z_1^{(2)} = z_2, \quad z_2^{(2)} = z_3, \quad z_3^{(2)} = z_4, \\
 a_1^{(1)} = a_1, \quad a_1^{(2)} = a_2, \quad a_2^{(2)} = a_3, \quad a_3^{(2)} = a_4, \quad k_1^{(1)} = k_1, \quad k_1^{(2)} = k_2, \quad k_2^{(2)} = k_3, \quad k_3^{(2)} = k_4.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Применяя теорему 2, построим формулу продолжения функции $F_D^{(4)}$, справедливую вблизи пересечения гиперплоскостей

$$\mathcal{M}_{2,3} := \{z_2 = z_3\}, \quad \mathcal{M}_{3,4} := \{z_3 = z_4\}, \tag{4.11}$$

для случая переменных z_1 , близких к единице, и больших по модулю переменных z_2, z_3, z_4 . Подставляя (4.3) в (2.43)–(2.45), находим выражения для коэффициентов рядов (2.40)–(2.42):

$$\Xi_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) = \frac{\left(1 - c + \sum_{s=1}^4 a_s\right)_{k_2} (a_1)_{k_1} (a_2 + a_3 + a_4)_{k_2+k_3+k_4} (a_3)_{k_3} (a_4)_{k_4}}{(1 + a_1 + b - c)_{k_1} (1 - b + a_2 + a_3 + a_4)_{k_2-k_1} (a_2 + a_3 + a_4)_{k_3+k_4} k_1! k_2! k_3! k_4!}, \tag{4.12}$$

$$\Xi_1(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) = \frac{(c - b)_{k_1} \left(1 + \sum_{s=1}^4 a_s - c\right)_{k_2} (a_2 + a_3 + a_4)_{k_2+k_3+k_4} (a_3)_{k_2} (a_4)_{k_4}}{(1 + c - a_1 - b)_{k_1} \left(1 + \sum_{s=1}^4 a_s - c\right)_{k_2-k_1} (a_2 + a_3 + a_4)_{k_3+k_4} k_1! k_2! k_3! k_4!}, \tag{4.13}$$

$$\Xi_2(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) = \frac{(b)_{|\mathbf{k}|} (1 - c + a_1 + b)_{k_1+k_2} (a_1)_{k_1} (a_3)_{k_3} (a_4)_{k_4}}{(1 + b - a_2 - a_3 - a_4)_{k_1+k_2} (a_2 + a_3 + a_4)_{k_3+k_4} (1 - c + a_1 + b)_{k_1} k_1! k_2! k_3! k_4!}. \tag{4.14}$$

По формулам (2.46)–(2.48) находим

$$\begin{aligned}
 Z_0^{(1)} = (z_1 - 1), \quad Z_0^{(2)} = \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_2 - z_3}{z_2}, \frac{z_2 - z_4}{z_2}\right), \quad Z_1^{(1)} = (1 - z_1), \quad Z_1^{(2)} = \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_2 - z_3}{z_2}, \frac{z_2 - z_4}{z_2}\right), \\
 Z_2^{(1)} = \left(\frac{z_1 - 1}{z_2}\right), \quad Z_2^{(2)} = \left(\frac{1}{z_2}, \frac{z_2 - z_3}{z_2}, \frac{z_2 - z_4}{z_2}\right),
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

а согласно (2.49) выражения для коэффициентов B_0, B_1 и B_2 имеют вид

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b-a_1)\Gamma(b-a_2-a_3-a_4)}{\Gamma(b)\Gamma\left(c-\sum_{s=1}^4 a_s\right)\Gamma(c-b)}, \\
 B_1 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_1+b-c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b)}, \quad B_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_2+a_3+a_4-b)}{\Gamma(a_2+a_3+a_4)\Gamma(c-b)}.
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

Далее, учитывая соотношения (4.3)–(4.9), из теоремы 2 получаем следующее утверждение, позволяющее аналитически продолжить функцию Лауричеллы $F_D^{(4)}$ в окрестность пересечения особых гиперплоскостей (4.11), т.е. в ситуации кроудинга переменных z_2, z_3 и z_4 , для случая близких к единице переменных z_1 и больших по модулю z_2, z_3, z_4 .

Теорема 7. *Если ни одно из чисел $c-b-a_1$ и $b-a_2-a_3-a_4$ не является целым, то в области*

$$\{z \in \mathbb{C}^4 : |1-z_1| < 1, |z_2| > 1 + |1-z_1| + |z_2-z_j|, j = 3, 4; |\arg(1-z_1)| < \pi, |\arg(-z_3)| < \pi\}$$

функция Лауричеллы $F_D^{(4)}$ представима в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 F_D^{(4)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) &= B_0(-z_2)^{-a_2-a_3-a_4} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \Xi_0(\mathbf{k})(z_1-1)^{k_1} z_2^{-k_2} \left(\frac{z_2-z_3}{z_2}\right)^{k_2} \left(\frac{z_2-z_4}{z_2}\right)^{k_4} + \\
 &+ B_1(1-z_1)^{c-a_1-b} (-z_2)^{-a_2-a_3-a_4} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \Xi_1(\mathbf{k})(1-z_1)^{k_1} z_2^{-k_2} \left(\frac{z_2-z_3}{z_2}\right)^{k_2} \left(\frac{z_2-z_4}{z_2}\right)^{k_4} + \\
 &+ B_2(-z_2)^{-b} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \Xi_2(\mathbf{k}) \left(\frac{z_1-1}{z_2}\right)^{k_1} z_2^{-k_2} \left(\frac{z_2-z_3}{z_2}\right)^{k_2} \left(\frac{z_2-z_4}{z_2}\right)^{k_4},
 \end{aligned}$$

где, напомним, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_4)$, $|\mathbf{k}| = \sum_{s=1}^4 k_s$, коэффициенты Ξ_0, Ξ_1 и Ξ_2 определяются равенствами (4.12)–(4.14), а величины B_0, B_1 и B_2 – равенствами (4.16).

4.3. Продолжение функции $F_D^{(4)}$ в окрестность точки $(1, 1, 1, \infty)$, соответствующее $z_1 = z_2 = z_3$

Предположим, что переменные z_1, z_2, z_3, z_4 функции Лауричеллы $F_D^{(4)}$ образуют две группы, в первую из которых входят z_1, z_2 и z_3 , а во вторую – только z_4 . Тогда согласно (2.19), (2.20) используемые в теореме 2 числа q, p_s , а также параметры и переменные функции Лауричеллы (3.1), (3.2) определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
 q = 2, \quad v = 1, \quad p_1 = 3, \quad p_2 = 1, \quad p_3 = 0, \quad z_1^{(1)} = z_1, \quad z_2^{(1)} = z_2, \quad z_3^{(1)} = z_3, \quad z_4^{(2)} = z_4, \\
 a_1^{(1)} = a_1, \quad a_2^{(1)} = a_2, \quad a_3^{(1)} = a_3, \quad a_4^{(2)} = a_4, \quad k_1^{(1)} = k_1, \quad k_2^{(1)} = k_2, \quad k_3^{(1)} = k_3, \quad k_4^{(2)} = k_4.
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

Применяя теорему 2, построим формулу продолжения функции $F_D^{(4)}$, справедливую вблизи пересечения гиперплоскостей

$$\mathcal{M}_{1,2} := \{z_1 = z_2\}, \quad \mathcal{M}_{2,3} := \{z_2 = z_3\},
 \tag{4.18}$$

для случая переменных z_1, z_2, z_3 , близких к единице, и больших по модулю переменных z_4 . Подставляя (4.3) в (2.43)–(2.45), находим выражения для коэффициентов рядов (2.40)–(2.42):

$$\Xi_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) = \frac{\left(1-c+\sum_{s=1}^4 a_s\right)_{k_4} (a_1+a_2+a_3)_{k_1+k_2+k_3} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3} (a_4)_{k_4}}{(1+a_1+a_2+a_3+b-c)_{k_1+k_2+k_3} (1-b+a_4)_{k_4-k_1-k_2-k_3} (a_1+a_2+a_3)_{k_2+k_3} k_1! k_2! k_3! k_4!},
 \tag{4.19}$$

$$\Xi_1(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) = \frac{(c - b)_{k_1} \left(1 + \sum_{s=1}^4 a_s - c \right)_{k_4} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3} (a_4)_{k_4}}{(1 + c - a_1 - a_2 - a_3 - b)_{k_1 - k_2 - k_3} (a_2 + a_3 + a_4)_{k_2 + k_3} \left(1 + \sum_{s=1}^4 a_s - c \right)_{k_4 - k_1} k_1! k_2! k_3! k_4!}, \quad (4.20)$$

$$\Xi_2(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) = \frac{(b)_{|\mathbf{k}|} (1 - c + a_1 + a_2 + a_3 + b)_{|\mathbf{k}|} (a_1 + a_2 + a_3)_{k_1 + k_2 + k_3} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3}}{(1 + b - a_4)_{|\mathbf{k}|} (1 - c + a_1 + a_2 + a_3 + b)_{k_1 + k_2 + k_3} (a_1 + a_2 + a_3)_{k_2 + k_3} k_1! k_2! k_3! k_4!}. \quad (4.21)$$

По формулам (2.46)–(2.48) находим

$$\begin{aligned} Z_0^{(1)} &= (z_1 - 1, z_2 - z_1, z_3 - z_1), & Z_0^{(2)} &= \left(\frac{1}{z_4} \right), & Z_1^{(1)} &= \left(1 - z_1, \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1}, \frac{z_1 - z_3}{1 - z_1} \right), & Z_1^{(2)} &= \left(\frac{1}{z_4} \right), \\ Z_2^{(1)} &= \left(\frac{1 - z_1}{z_4}, \frac{z_2 - z_1}{z_4}, \frac{z_3 - z_1}{z_4} \right), & Z_2^{(2)} &= \left(\frac{1}{z_4} \right), \end{aligned} \quad (4.22)$$

а согласно (2.49) выражения для коэффициентов B_0 , B_1 и B_2 имеют вид

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - b - a_1 - a_2 - a_3)\Gamma(b - a_4)}{\Gamma(b)\Gamma\left(c - \sum_{s=1}^4 a_s\right)\Gamma(c - b)}, \\ B_1 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_1 + a_2 + a_3 + b - c)}{\Gamma(a_1 + a_2 + a_3)\Gamma(b)}, & B_2 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_4 - b)}{\Gamma(a_4)\Gamma(c - b)}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Далее, учитывая соотношения (4.19)–(4.23), из теоремы 2 получаем следующее утверждение, позволяющее аналитически продолжить функцию Лауричеллы $F_D^{(4)}$ в окрестность пересечения особых гиперплоскостей (4.18), т.е. в ситуации кроудинга переменных z_1 , z_2 и z_3 , для случая, когда они близки к единице, а переменное z_4 имеет большой модуль.

Теорема 8. *Если ни одно из чисел $c - b - a_1 - a_2 - a_3$ и $b - a_4$ не является целым, то в области*

$$\{z \in \mathbb{C}^4 : |z_1 - z_j| < |1 - z_1| < 1, |z_4| > 1 + |1 - z_1| + |z_1 - z_j|, j = 2, 3; |\arg(1 - z_1)| < \pi, |\arg(-z_4)| < \pi\}$$

функция Лауричеллы $F_D^{(4)}$ представима в следующем виде:

$$\begin{aligned} F_D^{(4)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) &= B_0(-z_4)^{-a_4} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \Xi_0(\mathbf{k}) (z_1 - 1)^{k_1} (z_2 - z_1)^{k_2} (z_3 - z_1)^{k_3} z_4^{-k_4} + \\ &+ B_1(1 - z_1)^{c - a_1 - a_2 - a_3 - b} (-z_4)^{-a_4} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \Xi_1(\mathbf{k}) (1 - z_1)^{k_1} \left(\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1} \right)^{k_2} \left(\frac{z_1 - z_3}{1 - z_1} \right)^{k_3} z_4^{-k_4} + \\ &+ B_2(-z_4)^{-b} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \Xi_2(\mathbf{k}) \left(\frac{z_1 - 1}{z_4} \right)^{k_1} \left(\frac{z_2 - z_1}{z_4} \right)^{k_2} \left(\frac{z_3 - z_1}{z_4} \right)^{k_3} z_4^{-k_4}, \end{aligned}$$

где, напомним, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_4)$, $|\mathbf{k}| = \sum_{s=1}^4 k_s$, коэффициенты Ξ_0 , Ξ_1 и Ξ_2 определяются равенствами (4.19)–(4.21), а величины B_0 , B_1 и B_2 – равенствами (4.23).

Представления функций $F_D^{(3)}$ и $F_D^{(4)}$, найденные в теоремах 3–8, демонстрируют, что теоремы 1, 2 дают эффективный алгоритм для построения формул аналитического продолжения функции Лауричеллы (1.1). Полученные в результате применения теорем 1, 2 формулы дают эффективный алгоритм для вычисления интегралов типа Эйлера (1.7) вне области сходимости степенного ряда (1.1), которым она исходно определена. Таким образом, результаты настоящей работы могут быть востребованы при решении прикладных проблем, где возникают ряды вида (1.1), интегралы (1.7) или системы уравнений с частными производными (1.8). Одним из перспективных приложений, полученных в теоремах 2–8 представлений для функции Лаури-

челлы, является проблема “кроудинга” параметров интеграла Кристоффеля–Шварца, возникающая при построении конформного отображения многоугольников.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Exton H.* Multiple hypergeometric functions and application. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1976.
2. *Гельфанд И.М., Граев М.И., Ретак В.С.* Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа // Успехи матем. наук. 1992. Т. 47. Вып. 4(286). С. 3–82.
3. *Iwasaki K., Kimura H., Shimomura Sh., Yoshida M.* From Gauss to Painlevé: a modern theory of special functions. Aspects of Mathematics. Vol. E16. Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn, 1991.
4. *Aomoto K., Kita M.* Theory of Hypergeometric Functions. Springer monographs in mathematics. Tokyo, Dordrecht, Heidelberg: Springer, 2011.
5. *Akerblom N., Flohr M.* Explicit formulas for the scalar modes in Seiberg–Witten theory with an application to the Argyres–Douglas point. J. High Energy Phys. 2005. V. 2. № 057. P. 24.
6. *Holzapfel R.-P., Uludag A.M., Yoshida M.* Arithmetic and geometry around hypergeometric functions. Progr. Math. V. 260. Basel: Birkhäuser Verlag, 2007.
7. *Тарасов О.В.* Применение функциональных уравнений для вычисления фейнмановских интегралов // Теор. и матем. физ. 2019. Т. 200. № 2. С. 324–342.
8. *Безродных С.И.* Гипергеометрическая функция Лауричеллы $F_D^{(N)}$, задача Римана–Гильберта и некоторые приложения // Успехи матем. наук. 2018. Т. 73. № 6 (444). С. 3–94.
9. *Brychkov Yu.A., Savischenko N.V.* Application of hypergeometric functions of two variables in wireless communication theory // Lobachevskii J. of Math. 2019. V. 40. № 7. P. 938–953.
10. *Berge J., Massey R., Baghi Q., Touboul P.* Exponential shapelets: basis functions for data analysis of isolated feature // Month. Not. Royal Astron. Soc. 2019. V. 486. № 1. P. 544–559.
11. *Bezrodnykh S.I., Vlasov V.I.* Asymptotics of the Riemann–Hilbert problem for the Somov model of magnetic reconnection of long shock waves // Math. Not. 2021. V. 110. Iss. 6. P. 853–871.
12. *Власов В.И., Скороходов С.Л.* Аналитическое решение задачи о кавитационном обтекании клина. II // Ж. вычисл. мат. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 11. С. 1873–1893.
13. *Lauricella G.* Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili // Rendiconti Circ. Math. Palermo. 1893. V. 7. P. 111–158.
14. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973.
15. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Т. 2. М.: Эдиториал УРСС, 2002.
16. *Bezrodnykh S.I.* Analytic continuation of the Lauricella function $F_D^{(N)}$ with arbitrary number of variables. Integral Transforms and Special Functions. 2018. V. 29. № 1. P. 21–42.
17. *Bezrodnykh S.I.* Analytic continuation of Lauricella’s function $F_D^{(N)}$ for large in modulo variables near hyperplanes $\{z_j = z_j\}$ // Integral Transforms and Special Functions. 2021. Publ. online. <https://doi.org/10.1080/10652469.2021.1929206>
18. *Bezrodnykh S.I.* Analytic continuation of Lauricella’s function $F_D^{(N)}$ for variables close to unit near hyperplanes $\{z_j = z_j\}$ // Integral Transforms and Special Functions. 2021. Publ. online. <https://doi.org/10.1080/10652469.2021.1939329>
19. *Henrici P.* Applied and Computational Complex Analysis. Vol. 1–3. New York: John Wiley and Sons, 1991.
20. *Trefethen L.N.* Numerical construction of conformal maps Appendix to: E.B. Saff, A.D. Snider, “Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics, Science, and Engineering”. New York, Prentice Hall, 1993.
21. *Kythe P.K.* Computational conformal mapping. Birkhäuser, 1998.
22. *Власов В.И., Скороходов С.Л.* Метод мультиполей для задачи Дирихле в двусвязных областях сложной формы. I. Общее описание метода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 11. С. 1633–1647.
23. *Безродных С.И., Власов В.И.* Задача Римана–Гильберта в сложной области для модели магнитного пересоединения в плазме // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 3. С. 277–312.
24. *Trefethen L.N., Driscoll T.A.* Schwarz–Christoffel transformation. Cambridge: Cambridge Univer. Press, 2005.
25. *Banjai L.* Revisiting the crowding phenomenon in Schwarz–Christoffel mapping // SIAM J. Sci. Comput. 2008. V. 30. № 2. P. 618–636.
26. *Paramichael N., Stylianopoulos N.* Numerical conformal mapping. Domain decomposition and the mapping of quadrilaterals. Hackensack, NJ World Sci. Publ. Co. Pte. Ltd. 2010, xii+pp.
27. *Садыков Т.М., Цух А.К.* Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных. М.: Наука, 2014.
28. *Bezrodnykh S.I.* Analytic continuation of the Horn hypergeometric series with an arbitrary number of variables // Integral Transforms and Spec Functions. 2020. V. 31. № 10. P. 788–803.

29. *Fox F.* The asymptotic expansion of hypergeometric functions // Proc. London Math. Soc. 1928. V. 27. № 2. P. 389–400.
30. *Wright E.M.* The asymptotic expansion of hypergeometric functions // Proc. London Math. Soc. 1935. V. 10. № 4. P. 286–293.
31. *Bezrodnykh S.I.* Analytic continuation of the Kampé de Fériet function and the general double Horn series // Integral Transforms and Special Functions. 2022. <https://doi.org/10.1080/10652469.2022.2056601>
32. *Безродных С.И.* Формулы аналитического продолжения функций Горна двух переменных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 6. С. 912–932.
33. *Brychkov Yu.A., Savischenko N.V.* On some formulas for the Horn functions $H_5(a, b, c; w, z)$ and $H_5^c(a; c; w, z)$ // Integral Transforms and Special Functions. 2021. Publ. online. <https://doi.org/10.1080/10652469.2021.1938026>
34. *Brychkov Yu.A., Savischenko N.V.* On some formulas for the Horn functions $H_6(a, b, b', w, z)$ and $H_8^{(c)}(a, b; w, z)$ // Integral Transforms and Special Functions. 2021. Publ. online. <https://doi.org/10.1080/10652469.2021.2017427>
35. *Ananthanarayan B., Beraay S., Friot S., Marichev O., Pathak T.* On the evaluation of the Appell F_2 double hypergeometric function. 2021; arXiv:2111.05798v1
36. *Brychkov Yu.A., Savischenko N.V.* On some formulas for the Horn function $H_7(a, b, b'; c; w, z)$ // Integral Transforms and Special Functions. 2021. Publ. online. <https://doi.org/10.1080/10652469.2022.2056600>
37. *Kalmykov M., Bytev V., Kniehl B., Moch S.-O., Ward B., Yost S.* Hypergeometric functions and Feynman diagrams. In: *Blümlein J., Schneider C.* (eds) Anti-Differentiation and the Calculation of Feynman Amplitudes. Texts & Monographs in Symbolic Computation (A Series of the Research Institute for Symbolic Computation, Johannes Kepler University, Linz, Austria). Springer, Cham, 2021.

**УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

УДК 517.54

**ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ КОНФОРМНОГО
ОТОБРАЖЕНИЯ КРУГОВОГО ТРЕУГОЛЬНИКА**

© 2022 г. С. В. Пикулин¹, *¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: spikulin@gmail.com

Поступила в редакцию 13.05.2022 г.
 Переработанный вариант 17.06.2022 г.
 Принята к публикации 07.07.2022 г.

Показано, что конформное отображение на полуплоскость кругового треугольника, имеющего один нулевой угол в бесконечно удаленной точке и два равных между собой ненулевых угла, может быть продолжено в полуполосу на основании принципа симметрии Римана–Шварца. Задача об аналитическом продолжении такого отображения возникает в качестве вспомогательной при построении конформного отображения L -образной области на полуплоскость. Библ. 6. Фиг. 2.

Ключевые слова: круговой треугольник, аналитическое продолжение, принцип симметрии Римана–Шварца.

DOI: 10.31857/S0044466922120110

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим конформное отображение кругового треугольника T , изображенного на фиг. 1а (треугольник T заштрихован) на полуплоскость, осуществляемое аналитической функцией

$$w = \mathcal{F}(z) : T \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{H}^+, \quad (1)$$

которая переводит вершины A, B, C в точки $0, 1, \infty$ соответственно. Такое отображение существует и определено однозначно (см. [1], т. 2, гл. 1, § 2).

Возможно ли аналитически продолжить отображение (1) через граничную дугу \widehat{BC} треугольника T в полуполосу, ограниченную прямолинейным отрезком BC ? В этом заключается один из вопросов, возникающих при построении конформного отображения L -образного многоугольника на полуплоскость (см. [2]–[5]). Положительный ответ на этот вопрос дает теорема 1 настоящей работы.

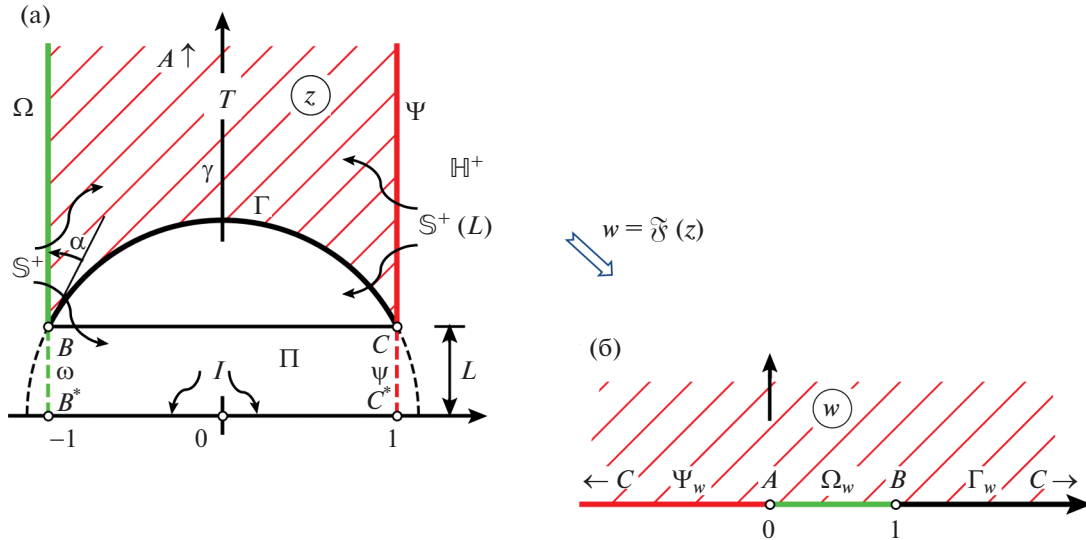
Треугольник $Tz \in \mathbb{C}$ обладает осевой симметрией относительно вертикальной полуоси γ , имеет нулевой угол при вершине A , расположенной в бесконечности, углы треугольника при вершинах B и C одинаковы и равны $\alpha \in (0, \pi/2)$. Введем для сторон этого треугольника следующие обозначения:

$$\Omega := \widehat{AB}, \quad \Gamma := \widehat{BC}, \quad \Psi := \widehat{CA}, \quad (2)$$

где Ω и Ψ являются вертикальными лучами, центр дуги Γ расположен в начале координат, которое будем обозначать через O . Вершины B и C имеют комплексные координаты $-1 + iL$ и $1 + iL$ соответственно, где $L = \text{tg } \alpha$. Введем следующие обозначения для полуполосы и полуплоскости:

$$\mathbb{S}^+(h) := \{\text{Re } z \in (-1, 1), \text{Im } z > h\}, \quad \mathbb{S}^+ := \mathbb{S}^+(0), \quad h \geq 0,$$

$$\mathbb{H}^+(h) := \{\text{Im } z > h\}, \quad \mathbb{H}^+ = \mathbb{H}^+(0).$$



Фиг. 1. Конформное отображение треугольника T на полуплоскость.

Теорема 1. Функция (1) может быть аналитически продолжена в полуплоску $S^+(L)$.

Доказательство теоремы 1 дано разд. 2.

Обозначим через B^* точку $z = -1$ и через C^* – точку $z = +1$, а также введем обозначения для замкнутого прямоугольника BB^*C^*C и его сторон:

$$\Pi := \{Re z \in [-1, 1], Im z \in [0, L]\}, \quad I := B^*C^*, \quad \omega := BB^*, \quad \psi := CC^*. \quad (3)$$

Внутренность плоской фигуры $X \subset \mathbb{C}$ будем обозначать через $int X$, дугу λ без конечных точек – через $int \lambda$. Через X^λ обозначим образ фигуры X под действием круговой симметрии (инверсии) относительно окружности, содержащей дугу λ .

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ПО ПРИНЦИПУ СИММЕТРИИ

2.1. Правильные круговые триангуляции

В качестве основного инструмента аналитического продолжения функции $\mathcal{F}(z)$ будем применять принцип симметрии Римана–Шварца (см. [6, ч. 3, гл. 4, § 5]), пользуясь тем, что стороны Ω, Γ, Ψ треугольника T переходят в соответствующие промежутки вещественной оси $\Omega_w := (0, 1), \Gamma_w := (1, +\infty)$ и $\Psi_w := (-\infty, 0)$.

Введем следующее понятие.

Определение 1. Правильной круговой триангуляцией односвязной непустой области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ назовем тройку $(\mathcal{D}, \Delta, \Lambda)$, где Δ – конечное или счетное множество круговых треугольников, Λ – конечное или счетное (возможно, пустое) множество круговых дуг, являющихся сторонами треугольников из Δ , если выполнены следующие условия:

1) различные треугольники $P_1, P_2 \in \Delta$ не пересекаются во внутренних точках:

$$int P_1 \cap int P_2 = \emptyset; \quad (4)$$

2) каждая дуга $\lambda \in \Lambda$ является стороной ровно двух треугольников из Δ , причем эти треугольники симметричны друг другу относительно λ ;

3) треугольники из Δ и дуги из Λ в совокупности исчерпывают область \mathcal{D} :

$$\mathcal{D} = \bigcup_{P \in \Delta} int P \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} int \lambda. \quad (5)$$

Подчеркнем, что множество дуг Λ , фигурирующее в определении 1, не обязательно совпадает со множеством всех граничных дуг треугольников из Δ , но лишь является его подмножеством. В Λ не входят дуги, лежащие на границе области \mathcal{D} .

Лемма 1. *Если для некоторой правильной круговой триангуляции $\mathcal{D} = (\mathcal{D}, \Delta, \Lambda)$ справедливо включение $T \in \Delta$, то функция (1) аналитически продолжается в область \mathcal{D} .*

Доказательство. Введем в рассмотрение правильную круговую триангуляцию $\mathcal{D}_1 = (\mathcal{D}_1, \Delta_1, \Lambda_1)$, отнеся к множеству Δ_1 треугольник T и все такие треугольники $P \in \Delta$, которые можно связать с T цепочкой элементов из Δ , имеющей конечную длину:

$$T, T_1, \dots, T_n = P, \quad T_j \in \Delta, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

где каждые два соседних треугольника граничат по некоторой общей дуге $\lambda_j \in \Lambda$ и, следовательно, симметричны друг другу относительно λ_j . Все такие дуги по всевозможным цепочкам вида (6) отнесем ко множеству Λ_1 . Покажем, что $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}$.

Рассмотрим дугу λ из $\Lambda \setminus \Lambda_1$ и покажем, что она не может являться стороной какого-либо треугольника $P \in \Delta_1$. В самом деле, в противном случае существовала бы цепочка

$$T, T_1, \dots, T_{n-1}, P, P^\lambda$$

вида (6), где последние два треугольника соединены через дугу λ , тогда $P^\lambda \in \Delta_1$ и $\lambda \in \Lambda_1$, что противоречит сделанному предположению. Следовательно, λ является общей стороной двух треугольников из $\Delta \setminus \Delta_1$, и, значит, множество $\mathcal{D}_2 := \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_1$ является открытым, т.е. содержащим вместе с каждой своей точкой и некоторую ее окрестность. Но поскольку область \mathcal{D} по определению связна, то она не может являться объединением двух непересекающихся открытых множеств, следовательно, $\mathcal{D}_2 = \emptyset$, и $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1$. Таким образом, для каждого треугольника $P \in \Delta$ существует цепочка вида (6).

Далее покажем от противного, что для каждого $P \in \Delta$ существует единственная цепочка (6), состоящая из попарно различных треугольников. Предположим, что для некоторого треугольника $P \in \Delta$ найдется две такие цепочки, отличные друг от друга:

$$T = T_0, T_1, \dots, T_m = Q, T_{m+1}, \dots, T_{n_1} = P, \\ T = T_0, T_1, \dots, T_m = Q, T'_{m+1}, \dots, T'_{n_2} = P, T_{m+1} \neq T'_{m+1},$$

где через Q обозначен их последний совпадающий элемент. Отбросив общее начало обеих цепочек до Q и обратив порядок во второй из них, соединим обе цепочки в одну новую, начинающуюся и заканчивающуюся треугольником Q :

$$Q, T_{m+1}, \dots, T_{n_1-1}, T_{n_1} = P = T'_{n_2}, T'_{n_2-1}, \dots, T'_{m+1}, Q, \quad (7)$$

где, по-прежнему, каждые два соседних элемента являются симметричными относительно общей стороны, принадлежащей Λ . Если в цепочке (7) найдется пара повторяющихся элементов (кроме пары, состоящей из первого и последнего элемента), то заменим ограничиваемый ими отрезок цепочки одним экземпляром дублирующегося элемента. Устраняя дубли таким образом и отождествляя первый элемент с последним, получаем из (7) циклическую цепочку, содержащую более одного элемента, в которой все треугольники попарно различны, и выполнено условие симметричности соседних треугольников относительно общей граничной дуги.

Проведем замкнутый жорданов контур через область, объединяющую треугольники построенной циклической цепочки и их общие стороны, таким образом, чтобы путь однократно пересекал по внутренней точке каждую из граничных дуг, разделяющих пары соседних треугольников. Тогда этот контур, во-первых, лежит целиком внутри области \mathcal{D} , а во-вторых, заключает внутри себя по крайней мере одну вершину треугольника Q . Но вершины треугольников из Δ не лежат внутри области \mathcal{D} согласно определению 1, — получаем противоречие с условием односвязности \mathcal{D} . Таким образом, цепочка попарно различных треугольников (6) для каждого $P \in \Delta$ определена однозначно.

С помощью индукции по длине цепочки устанавливаем, что функция $\mathcal{F}(z)$ допускает аналитическое продолжение по принципу симметрии в каждый из треугольников $P \in \Delta$, через какую-

либо из его сторон $\lambda_p \in \Lambda$, при этом каждая граничная дуга такого треугольника переходит в один из трех прямолинейных участков вещественной оси – Ω_w, Ψ_w либо Γ_w . Лемма доказана.

Определение 2. Правильные круговые триангуляции \mathfrak{D}_1 и \mathfrak{D}_2 двух не пересекающихся областей,

$$\mathfrak{D}_1 = (\mathfrak{D}_1, \Delta_1, \Lambda_1), \quad \mathfrak{D}_2 = (\mathfrak{D}_2, \Delta_2, \Lambda_2), \quad \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2 = \emptyset, \tag{8}$$

назовем *смежными по круговой дуге λ* , если тройка

$$\mathfrak{D}_1 \#_\lambda \mathfrak{D}_2 := (\mathfrak{D}_3, \Delta_3, \Lambda_3), \quad \mathfrak{D}_3 = \mathfrak{D}_1 \cup \mathfrak{D}_2 \cup \lambda, \quad \Delta_3 = \Delta_1 \cup \Delta_2, \quad \Lambda_3 = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \{\lambda\}, \tag{9}$$

является правильной круговой триангуляцией. Такую тройку будем называть соединением \mathfrak{D}_1 и \mathfrak{D}_2 по дуге λ .

Предложение 1. *Правильные круговые триангуляции (8) не пересекающихся областей являются смежными по дуге λ тогда и только тогда, когда найдется пара треугольников $P_1 \in \Delta_1, P_2 \in \Delta_2$, для которых λ является общей стороной и которые симметричны друг другу относительно λ .*

Доказательство. Если найдется пара треугольников $P_1 \in \Delta_1, P_2 \in \Delta_2$, симметричных друг другу относительно их общей стороны λ , то справедливость условий определения 1 для тройки (9) проверяется непосредственно.

Обратно, предположим, что тройка (9) представляет собой правильную круговую триангуляцию. Тогда найдутся треугольники $P_1, P_2 \in \Delta_3$, для которых λ является их общей стороной, причем они симметричны друг другу относительно λ . Если при этом оба треугольника P_1, P_2 принадлежат Δ_1 , то, во-первых, множество $\mathfrak{D}_1 \cup \text{int } \lambda$ является открытым, и, во-вторых, λ не пересекается с \mathfrak{D}_2 . Тогда множество \mathfrak{D}_3 распадается в объединение непустых непересекающихся открытых множеств $\mathfrak{D}_1 \cup \text{int } \lambda$ и \mathfrak{D}_2 , что противоречит требованию его связности. Следовательно, $P_1 \in \Delta_1, P_2 \in \Delta_2$. Предложение доказано.

Отметим, что всякое круговое преобразование, в том числе, симметрия относительно круговой дуги, а также любое евклидово движение плоскости \mathbb{C} , переводит правильную круговую триангуляцию также в правильную круговую триангуляцию.

Пусть $\mathfrak{D} = (\mathfrak{D}, \Delta, \Lambda)$ – некоторая правильная круговая триангуляция, содержащая треугольник T , область \mathfrak{D} которой лежит в полуполосе \mathbb{S}^+ , т.е.

$$T \subset \mathfrak{D} \subset \mathbb{S}^+, \quad T \in \Delta. \tag{10}$$

Рассмотрим образы \mathfrak{D} под действием преобразований S^n параллельного переноса вдоль горизонтальной оси на расстояние, кратное ширине полуполосы:

$$S^n : z \mapsto z + 2n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

$$\mathfrak{D}^n := (\mathfrak{D}^n, \Delta^n, \Lambda^n), \quad \mathfrak{D}^n = S^n \mathfrak{D}, \quad \Delta^n = S^n \Delta, \quad \Lambda^n = S^n \Lambda.$$

В силу того, что $S^j \mathbb{S}^+ \cap S^k \mathbb{S}^+ = \emptyset$ при $j \neq k$ и треугольники $S^n T$ и $S^{n+1} T$ симметричны относительно своей общей стороны – вертикального луча

$$\Phi^n := S^{n+1} \Omega = S^n \Psi,$$

пользуясь предложением 1, находим, что триангуляции \mathfrak{D}^n и \mathfrak{D}^{n+1} смежны по дуге Φ^n . Определим правильную круговую триангуляцию

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{D}} &= \dots \#_{\Phi^{-2}} \mathfrak{D}^{-1} \#_{\Omega} \mathfrak{D} \#_{\Psi} \mathfrak{D}^1 \#_{\Phi^1} \mathfrak{D}^2 \#_{\Phi^2} \dots := (\tilde{\mathfrak{D}}, \tilde{\Delta}, \tilde{\Lambda}), \\ \tilde{\mathfrak{D}} &= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (\text{int } \mathfrak{D}^n \cup \text{int } \Phi^n), \quad \tilde{\Delta} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Delta^n, \quad \tilde{\Lambda} = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Lambda^n \right) \cup \{\Phi^n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \end{aligned} \tag{12}$$

которую будем называть *периодическим продолжением* триангуляции \mathfrak{D} .

Подчеркнем, что наличие 2-периодической структуры в геометрическом расположении круговых треугольников триангуляции (12) не означает, что также и функция $\mathcal{F}(z)$, аналитически продолженная в область $\tilde{\mathfrak{D}}$ в соответствии с леммой 1, окажется 2-периодичной, поскольку дуги

Ω и Ψ переходят в различные промежутки вещественной оси плоскости w . Однако поскольку точки $z, (z + 4) \in \tilde{\mathcal{D}}$ получаются друг из друга композицией двух отражений относительно находящихся между ними вертикальных лучей Φ^j, Φ^{j+1} , образ каждого из которых под действием $\mathcal{F}(z)$ является промежутком вещественной прямой, то по принципу симметрии и в силу единственности аналитического продолжения в односвязную область имеем $\mathcal{F}(z) = \mathcal{F}(z + 4)$, т.е. функция $\mathcal{F}(z)$ является периодической в $\tilde{\mathcal{D}}$ с периодом 4.

Определение 3. Правильные круговые триангуляции $\mathcal{D}_1 = (\mathcal{D}_1, \Delta_1, \Lambda_1)$ и $\mathcal{D}_2 = (\mathcal{D}_2, \Delta_2, \Lambda_2)$ назовем *совместимыми*, если их объединение, заданное равенством

$$\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 := (\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2, \Delta_1 \cup \Delta_2, \Lambda_1 \cup \Lambda_2), \tag{13}$$

является правильной круговой триангуляцией.

По аналогии с объединением (13) определим пересечение $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ правильных круговых триангуляций, а также отношение включения \subset . Если $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2$, то справедливы равенства

$$\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2, \quad \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1,$$

следовательно, \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 являются совместимыми согласно определению 3.

Предложение 2. Если заданы правильные круговые триангуляции $\mathcal{D}_1 = (\mathcal{D}_1, \Delta_1, \Lambda_1)$ и $\mathcal{D}_2 = (\mathcal{D}_2, \Delta_2, \Lambda_2)$ пересекающихся областей \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 ,

$$\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \neq \emptyset, \tag{14}$$

при этом пересечение

$$\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 := (\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2, \Delta_1 \cap \Delta_2, \Lambda_1 \cap \Lambda_2) \tag{15}$$

есть правильная круговая триангуляция, то триангуляции \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 являются совместимыми.

Доказательство. Поскольку пересечение областей $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ обладает правильной круговой триангуляцией (15), то по определению 1 является односвязной областью. Из этого и из условия (14) следует, что объединение $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ также является односвязной областью.

Предположим, что найдутся два различных треугольника $P_1, P_2 \in \Delta_1 \cup \Delta_2$, пересекающихся по внутренней точке $z \in \text{int } P_1 \cap \text{int } P_2$. Тогда $P_1 \in \Delta_1, P_2 \in \Delta_2$, так как \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 являются правильными триангуляциями. Поскольку (15) также является правильной триангуляцией, то точка z является внутренней для некоторого элемента – треугольника или дуги, принадлежащего одновременно и к \mathcal{D}_1 , и к \mathcal{D}_2 , причем этот элемент должен совпадать одновременно и с P_1 , и с P_2 , так как в правильной круговой триангуляции каждая точка области принадлежит одному и только одному элементу триангуляции (дуге или треугольнику). Полученное противоречие показывает, что условие (4) выполнено для тройки (13).

Справедливость остальных требований определения 1 для тройки (13) следует из условий предложения непосредственно. Предложение 2 доказано.

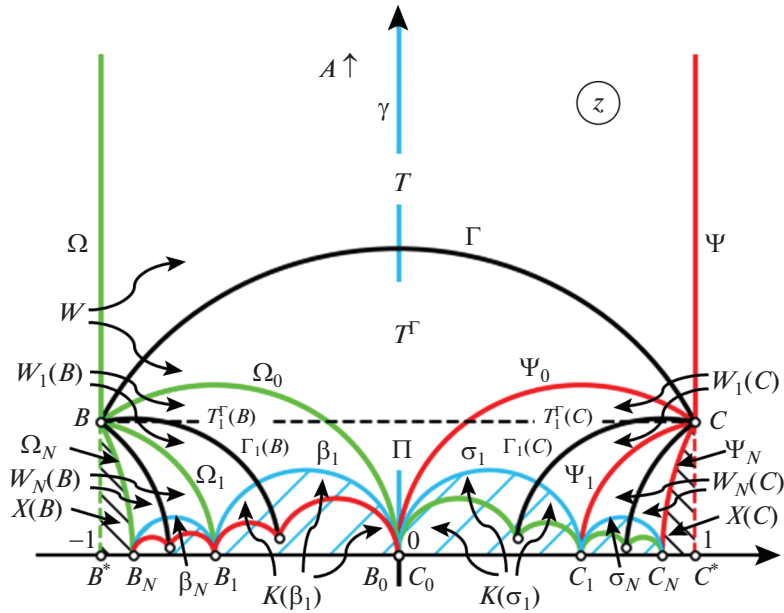
2.2. Построение области аналитичности функции $\mathcal{F}(z)$

Перейдем к построению односвязной области \mathcal{N} , содержащей полуполосу $\mathbb{S}^+(L)$ и допускающей аналитическое продолжение функции $\mathcal{F}(z)$. Для этого мы укажем правильную круговую триангуляцию $\mathfrak{A} = (\mathcal{N}, \Delta, \Lambda)$ вида (10), т.е.

$$T \subset \mathbb{S}^+(L) \subset \mathcal{N} \subset \mathbb{S}^+, \quad T \in \Delta, \tag{16}$$

тогда согласно лемме 1 отображение (1) окажется аналитически продолженным в область \mathcal{N} .

Присоединим к треугольнику T в составе минимальной содержащей его триангуляции $\mathfrak{T} := (T, \{T\}, \emptyset)$ смежную с ней по дуге Γ триангуляцию $\mathfrak{T}^\Gamma = (T^\Gamma, \{T^\Gamma\}, \emptyset)$, область которой суть симметричный T относительно Γ круговой треугольник $T^\Gamma = BCO$. В результате объединения по-



Фиг. 2. Объединение кругового многоугольника \mathcal{N}_0 , системы полукругов $K(\Xi_0)$ и замкнутого множества X_0 содержит полуполосу \mathbb{S}^+ .

лучим область в виде кругового четырехугольника W , снабженную правильной круговой триангуляцией

$$\mathfrak{W} = (W, \{T, T^\Gamma\}, \{\Gamma\}), \quad W := \text{int } T \cup \text{int } \Gamma \cup \text{int } T^\Gamma. \tag{17}$$

Четырехугольник W имеет нулевые углы при вершинах A и O , и углы $2\alpha \in (0, \pi)$ при вершинах B и C . Если значение α принадлежит диапазону $\alpha \in [\pi/4, \pi/2)$, то область W содержит полуполосу $\mathbb{S}^+(L)$, т.е. триангуляция (17) удовлетворяет условию (16), и теорема в этом случае доказана.

Рассмотрим теперь дополнительный промежуток значений угла α , т.е. $\alpha \in (0, \pi/4)$. Присоединим к триангуляции (17) смежную с ней по стороне $\Omega_0 := \Omega^\Gamma$ (см. фиг. 2) четырехугольника W триангуляцию

$$\mathfrak{W}_1(B) := \mathfrak{W}^{\Omega_0},$$

затем к результату присоединим триангуляцию $\mathfrak{W}_2(B)$, смежную с $\mathfrak{W}_1(B)$ по дуге $\Omega_1 := \Omega^{\Omega_0}$ и т.д. – проделаем эту операцию N раз, где

$$N := \left\lceil \frac{\pi}{2\alpha} \right\rceil - 1 \geq 1,$$

$$\mathfrak{W}_j(B) := \mathfrak{W}^{\Omega_0 \dots \Omega_{j-1}}, \quad \Omega_j = \Omega_{j-2}^{\Omega_{j-1}}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad \Omega_{-1} := \Omega,$$

каждая из дуг Ω_j выходит из точки B в полуполосу \mathbb{S}^+ под углом $(2\alpha j)$ к лучу Ω и заканчивается в некоторой точке $B_j \in I$, образуя прямой угол с вещественной осью. Составляющие триангуляцию $\mathfrak{W}_j(B)$ треугольники и их общую граничную дугу обозначим следующим образом:

$$\mathfrak{W}_j(B) = (W_j(B), \{T_j(B), T_j^\Gamma(B)\}, \{\Gamma_j(B)\}), \quad W_j(B) := W^{\Omega_0 \dots \Omega_{j-1}}, \tag{18}$$

$$T_j(B) := T^{\Omega_0 \dots \Omega_{j-1}}, \quad T_j^\Gamma(B) := T^{\Gamma \Omega_0 \dots \Omega_{j-1}}, \quad \Gamma_j(B) := \Gamma^{\Omega_0 \dots \Omega_{j-1}}. \tag{19}$$

По аналогии с триангуляциями четырехугольников (18) построим серию из N триангуляций $\mathfrak{W}_j(C)$ четырехугольных областей $W_j(C)$, имеющих на границе общую вершину C и получаемых из \mathfrak{W} последовательными отражениями относительно дуг

$$\Psi_0 := \Psi^\Gamma = \widehat{CC}_0, \quad \Psi_1 := \Psi^{\Psi_0} = \widehat{CC}_1, \quad \dots, \quad \Psi_{N-1} := (\Psi_{N-3})^{\Psi_{N-2}} = \widehat{CC}_{N-1},$$

образующих прямые углы с вещественной осью в концевых точках $C_j \in I, j = 0, 1, \dots, N$. Элементы триангуляций $\mathfrak{W}_j(C)$ находятся по формулам, аналогичным (19), с заменой B на C и Ω на Ψ .

Триангуляции $\mathfrak{W}_j(B), \mathfrak{W}, \mathfrak{W}_j(C)$ по построению являются смежными по граничным дугам Ω_j, Ψ_j . Соединяя их, получим симметричную относительно вертикальной оси правильную круговую триангуляцию

$$\mathfrak{N}_0 = (\mathcal{N}_0, \Delta_0, \Lambda_0) := \mathfrak{W}_N(B) \#_{\Omega_{N-1}} \dots \#_{\Omega_1} \mathfrak{W}_1(B) \#_{\Omega_0} \mathfrak{W} \#_{\Psi_0} \mathfrak{W}_1(C) \#_{\Psi_1} \dots \#_{\Psi_{N-1}} \mathfrak{W}_N(C), \quad (20)$$

область \mathcal{N}_0 которой является круговым многоугольником. Поскольку углы при вершинах B и C в этом многоугольнике имеют меру

$$\alpha_0 := 2\alpha \left[\frac{\pi}{2\alpha} \right],$$

превышающую $\pi/2$, то многоугольник \mathcal{N}_0 накрывает некоторую окрестность точек B и C в полуполосе $\mathbb{S}^+(L)$, однако может при этом не содержать всю эту полуполосу целиком.

Вертикальная полуось $\gamma = OA$ соединяет вершины двух нулевых углов четырехугольника W , лежит внутри него, $\text{int } \gamma \subset \text{int } W$, и служит осью симметрии как для самой области W , так и для содержащихся в ней треугольников $T, T^\Gamma \in \Delta_0$ и их общей стороны Γ .

Поскольку триангуляция $\mathfrak{W}_j(B)$ получена из \mathfrak{W} композицией последовательных круговых симметрий относительно дуг $\Omega_0, \dots, \Omega_{j-1}$, то составляющие ее элементы (19) и область $W_j(B)$ также обладают общей осью симметрии

$$\beta_j = \gamma^{\Omega_0 \dots \Omega_{j-1}} \subset \text{int } W_j(B),$$

соединяющей два нулевых угла B_{j-1} и B_j четырехугольника $W_j(B)$. Поскольку луч γ и все дуги Ω_k ортогональны вещественной оси, то и дуга β_j обладает этим свойством. Таким образом, β_j есть полуокружность, опирающаяся на отрезок $B_{j-1}B_j \subset I$ как на диаметр.

Открытый полукруг, стягиваемого полуокружностью ξ , обозначим через $K(\xi)$, а также введем обозначение

$$K(\Xi) := \bigcup_{\xi \in \Xi} K(\xi),$$

для объединения таких полукругов по некоторому множеству Ξ полуокружностей.

Также отметим, что полукруг $K(\beta_j)$ имеет непустое пересечение с треугольниками $T_j(B)$ и $T_j^\Gamma(B)$, но с другими треугольниками из множества Δ_0 не пересекается. Введем в связи с этим следующее понятие.

Определение 4. Полуокружность ξ назовем *совместимой с правильной круговой триангуляцией* $\mathfrak{D} = (\mathcal{D}, \Delta, \Lambda)$ области $\mathcal{D} \subset \mathbb{H}^+$, если ξ опирается на некоторый интервал $D(\xi)$ вещественной оси как на диаметр, стягиваемый ею полукруг $K(\xi)$ пересекает ровно два треугольника

$$P(\xi), P(\xi)^{\lambda(\xi)} \in \Delta, \quad (21)$$

граничащих по некоторой дуге $\lambda(\xi) \in \Lambda$, при этом дуга ξ полностью содержится в четырехугольной области

$$W(\xi) := (\text{int } P(\xi) \cup \text{int } P(\xi)^{\lambda(\xi)} \cup \text{int } \lambda(\xi)) \supset \text{int } \xi \quad (22)$$

и является общей осью круговой симметрии для $P(\xi), \lambda(\xi), P(\xi)^{\lambda(\xi)}$ и $W(\xi)$.

Проведенные выше построения показывают, что полуокружности $\beta_j, j = 1, 2, \dots, N$, являются совместимыми с правильной круговой триангуляцией \mathfrak{N}_0 . По аналогии с β_j построим полуокружности

$$\sigma_j = \gamma^{\Psi_0 \dots \Psi_{j-1}} \subset \text{int } W_j(C),$$

опирающиеся на интервалы $(C_{j-1}C_j)$ как на диаметры. Каждая из этих дуг является общей осью симметрии для соответствующей четырехугольной области $W_j(C)$ и для элементов, составляющих правильную круговую триангуляцию $\mathfrak{N}_j(C)$ этой области. Кроме того, дуги σ_j являются совместимыми с триангуляцией \mathfrak{N}_0 .

Отметим, что различные интервалы $(B_{j-1}B_j), (C_{k-1}C_k)$ попарно не пересекаются между собой, как и построенные на них как на диаметрах открытые полукруги $K(\beta_j), K(\sigma_k)$.

Определение 5. Множество Ξ полуокружностей назовем *совместимым с правильной круговой триангуляцией* $\mathfrak{D} = (\mathfrak{D}, \Delta, \Lambda)$, $\mathfrak{D} \subset \mathbb{H}^+$, если, во-первых, каждая дуга $\xi \in \Xi$ совместима с \mathfrak{D} в смысле определения 4 и, во-вторых, стягиваемые этими дугами полукруги $K(\xi)$ или, что эквивалентно, их диаметры $D(\xi)$, являющиеся интервалами вещественной оси, попарно не пересекаются между собой во внутренних точках.

Таким образом, система полуокружностей

$$\Xi_0 := \{\beta_1, \dots, \beta_N, \sigma_1, \dots, \sigma_N\} \tag{23}$$

является совместимой с триангуляцией \mathfrak{N}_0 в смысле определения 5. На фиг. 2 для объединения полукругов $K(\Xi_0)$ дана штриховка с наклоном вправо.

Отметим, что любое подмножество набора полуокружностей Ξ , удовлетворяющего определению 5, также является совместимым с триангуляцией \mathfrak{D} . Кроме того, если концы всех дуг $\xi \in \Xi$ лежат на отрезке I вещественной прямой, то их попарно не пересекающиеся диаметры $D(\xi)$ лежат внутри I , следовательно,

$$\sum_{\xi \in \Xi} \text{diam}(\xi) \leq |I|, \tag{24}$$

где $\text{diam}(\xi)$ – диаметр дуги ξ , $|I|$ – длина отрезка I . Свойством (24) по построению обладает набор полуокружностей (23).

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{D}_1 = (\mathfrak{D}_1, \Delta_1, \Lambda_1)$, $\mathfrak{D}_2 = (\mathfrak{D}_2, \Delta_2, \Lambda_2)$ – правильные круговые триангуляции областей $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \subset \mathbb{H}^+$, совместимые между собой, Ξ_1, Ξ_2 – два набора полуокружностей, причем множество Ξ_j является совместимым с триангуляцией $\mathfrak{D}_j, j = 1, 2$, и пусть $v \in \Xi_1 \cap \Xi_2$ – общая дуга этих наборов. Тогда

- 1) триангуляции \mathfrak{D}_1 и $(\mathfrak{D}_2)^v$ являются совместимыми;
- 2) множество дуг

$$\Xi_3 := \Xi_1 \cup (\Xi_2)^v \setminus \{v\} \tag{25}$$

является совместимым с объединенной триангуляцией $\mathfrak{D}_3 := \mathfrak{D}_1 \cup (\mathfrak{D}_2)^v$;

- 3) справедливо неравенство

$$\sup_{\xi \in (\Xi_2)^v} \text{diam}(\xi) \leq \frac{1}{2} \text{diam}(v). \tag{26}$$

Доказательство. Согласно определению 4 найдется пара симметричных друг другу относительно общей стороны $\lambda^{(1)} \in \Lambda_1$ треугольников $P_1^{(1)}, P_2^{(1)} \in \Delta_1$, для которых полуокружность v является общей осью симметрии и содержится внутри соответствующего четырехугольника (22), который обозначим через W . Существуют также треугольники $P_1^{(2)}, P_2^{(2)} \in \Delta_2$ и дуга $\lambda^{(2)} \in \Lambda_2$ с аналогичными свойствами.

Триангуляции \mathfrak{D}_1 и \mathfrak{D}_2 совместимы, следовательно, формулой (13) определена объединенная правильная круговая триангуляция $\mathfrak{D}_1 \cup \mathfrak{D}_2$. В силу представления (5) и условия (4), если два

элемента триангуляции пересекаются по внутренней точке, то они совпадают. В данном случае элементы $P_k^{(1)}, \lambda_k^{(1)}$ пересекаются с элементами $P_k^{(2)}, \lambda_k^{(2)}, k = 1, 2$, по точкам дуги v . Отсюда следует совпадение (с точностью до переобозначений) треугольников и дуг:

$$P_1^{(1)} = P_1^{(2)}, \quad P_2^{(1)} = P_2^{(2)}, \quad \lambda^{(1)} = \lambda^{(2)},$$

составляющих правильную круговую триангуляцию \mathfrak{W} области W , причем

$$\mathfrak{W} \subset \mathfrak{D}_1, \quad \mathfrak{W} \subset \mathfrak{D}_2.$$

Множество $\mathfrak{D}_1 \setminus W$ лежит целиком снаружи полукруга $K(v)$ согласно определению 4, а множество $(\mathfrak{D}_2)^v \setminus W = (\mathfrak{D}_2 \setminus W)^v$ лежит целиком внутри $K(v)$, т.е. эти множества не пересекаются. Таким образом, определено непустое пересечение правильных круговых триангуляций

$$\mathfrak{D}_1 \cap (\mathfrak{D}_2)^v = \mathfrak{W},$$

и согласно предложению 2 триангуляции \mathfrak{D}_1 и $(\mathfrak{D}_2)^v$ являются совместимыми. Пункт 1 леммы доказан.

Семейство полуокружностей (25) состоит из двух не пересекающихся частей: во-первых, из множества $\Xi_1 \setminus \{v\}$, совместимого с \mathfrak{D}_1 и лежащего за пределами полукруга $K(v)$, во-вторых, из множества

$$(\Xi_2)^v \setminus \{v\} = (\Xi_2 \setminus \{v\})^v,$$

лежащего внутри этого полукруга и совместимого с $(\mathfrak{D}_2)^v$. Поскольку

$$K(\xi_1) \cap K(\xi_2) = \emptyset, \quad \xi_1 \in \Xi_1 \setminus \{v\}, \quad \xi_2 \in (\Xi_2 \setminus \{v\})^v,$$

то заключаем, что множество (25) образует семейство полуокружностей, совместимое с объединением $\mathfrak{D}_1 \cup (\mathfrak{D}_2)^v$. Это доказывает п. 2 леммы.

Диаметр $D(\xi)$ полуокружности $\xi \in \Xi_2$ как интервал вещественной прямой не пересекается с интервалом $D(v)$ по условию леммы. При инверсии относительно v дуга ξ переходит в другую полуокружность ξ^v , диаметр которой $D(\xi^v)$ расположен на отрезке, соединяющем центр v с соответствующим концом диаметра $D(v)$, т.е. на радиусе v . Из этого вытекает утверждение п. 3. Лемма 2 доказана.

Обозначим через $X(B)$ замкнутый круговой треугольник BB^*B_N , ограниченный дугами ω, Ω_N и отрезком B^*B_N вещественной оси, а через $X(C)$ – аналогичный треугольник CC^*C_N , ограниченный дугами ψ, Ψ_N и отрезком C^*C_N . На фиг. 2 для этих треугольников дана штриховка с наклоном влево. Замкнутое множество

$$X_0 := X(B) \cup X(C) \supset (\omega \cup \psi), \tag{27}$$

в совокупности с открытыми множествами \mathcal{N}_0 и $K(\Xi_0)$, не пересекаясь с ними, покрывает полуполосу \mathbb{S}^+ , т.е. справедливы следующие соотношения:

$$\mathbb{S}^+(L) \subset (\mathcal{N}_0 \cup K(\Xi_0)) \subset \mathbb{S}^+ \subset (\mathcal{N}_0 \cup K(\Xi_0) \cup X_0), \quad X_0 \subset \overline{\mathbb{P}},$$

$$\mathcal{N}_0 \cap X_0 = K(\Xi_0) \cap X_0 = \emptyset.$$

Лемма 3. *Существует последовательность троек*

$$(\mathfrak{N}_n, \Xi_n, X_n), \quad n = 0, 1, \dots, \tag{28}$$

где \mathfrak{N}_n – правильная круговая триангуляция вида (10)

$$\mathfrak{N}_n = (\mathcal{N}_n, \Delta_n, \Lambda_n), \quad T \subset \mathcal{N}_n \subset \mathbb{S}_+, \quad T \in \Delta_n,$$

$X_n \subset \mathbb{C}$ – замкнутое множество, Ξ_n – конечное или счетное множество полуокружностей, совместимое с \mathfrak{N}_n , при этом

$$\omega \cup \psi \subset X_n \subset \overline{\mathbb{P}}, \tag{29}$$

$$K(\Xi_n) \subset \mathbb{S}^+ \subset \mathcal{N}_n \cup K(\Xi_n) \cup X_n, \tag{30}$$

$$\mathcal{N}_n \cap X_n = K(\Xi_n) \cap X_n = \emptyset, \tag{31}$$

и последовательность (28) удовлетворяет условиям

$$\mathfrak{N}_0 \subset \mathfrak{N}_1 \subset \dots, \quad X_0 \subset X_1 \subset \dots \quad K(\Xi_0) \supset K(\Xi_1) \supset \dots, \tag{32}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\xi \in \Xi_n} \text{diam}(\xi) = 0. \tag{33}$$

Доказательство. Будем строить последовательность (28), члены которой удовлетворяют свойствам (29)–(31), с помощью индукции. Базу индукции при $n = 0$ составляет тройка $(\mathfrak{N}_0, \Xi_0, X_0)$, определенная формулами (20), (23), (27).

Предположим, что тройка $(\mathfrak{N}_n, \Xi_n, X_n)$ построена для некоторого $n \geq 0$, построим тогда тройку $(\mathfrak{N}_{n+1}, \Xi_{n+1}, X_{n+1})$.

Поскольку триангуляция \mathfrak{N}_n имеет вид (10), то существует ее периодическое продолжение $\tilde{\mathfrak{N}}_n$, определенное формулами (12). Определим также множество дуг $\tilde{\Xi}_n$ и замкнутое множество $\tilde{X}_n \subset \mathbb{C}$ формулами

$$\tilde{\Xi}_n := \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} S^j \Xi_n, \quad \tilde{X}_n := \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} S^j X_n, \tag{34}$$

где S^j – преобразование параллельного переноса на расстояние $2j$ вдоль горизонтальной оси, определенное выше (см. (11)). Тогда в силу условий (29), (30) справедливо включение

$$\mathbb{H}^+ \subset \tilde{\mathfrak{N}}_n \cup K(\tilde{\Xi}_n) \cup \tilde{X}_n, \tag{35}$$

причем множество дуг $\tilde{\Xi}_n$ совместимо с триангуляцией $\tilde{\mathfrak{N}}_n$ в смысле определения 5.

Значения диаметров дуг $\xi \in \Xi_n$ ограничены сверху, так как их сумма не превосходит длины отрезка I . Выберем полуокружность $v \in \Xi_n \subset \tilde{\Xi}_n$, имеющую наибольший диаметр. Применяя лемму 2 к триангуляциям $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{N}_n$ и $\mathfrak{D}_2 = \tilde{\mathfrak{N}}_n$, а также к совместимым с ними множествам полуокружностей Ξ_n и $\tilde{\Xi}_n$ и их общей дуге v , получаем правильную круговую триангуляцию

$$\mathfrak{N}_{n+1} := \mathfrak{N}_n \cup (\tilde{\mathfrak{N}}_n)^v \tag{36}$$

и совместимую с ней систему дуг

$$\Xi_{n+1} := \Xi_n \cup (\tilde{\Xi}_n)^v \setminus \{v\}. \tag{37}$$

Положим также

$$X_{n+1} := X_n \cup (\tilde{X}_n)^v. \tag{38}$$

Поскольку множество \tilde{X}_n не пересекается с полукругом $K(v)$, то симметричное ему относительно v множество $(\tilde{X}_n)^v$ лежит в замыкании $\overline{K(v)} \subset \mathbb{S}^+$. При этом каждая точка $z \in \tilde{X}_n$ переходит при симметрии относительно v в точку z_1 , лежащую на одной прямой с z и с центром дуги v , находящимся на вещественной оси. Поэтому $\text{Im } z_1 \leq \text{Im } z \leq L$, откуда следует, что $(\tilde{X}_n)^v \subset \overline{\mathbb{P}}$. С учетом определения (38) это доказывает выполнение свойства (29) для X_{n+1} .

При инверсии относительно окружности, имеющей центр на вещественной прямой, часть верхней полуплоскости, лежащая снаружи этой окружности, переходит в полукруг, заключенный между окружностью и вещественной осью. Ввиду этого и поскольку дуги из множества $\tilde{\Xi}_n \setminus \{v\}$ лежат за пределами полукруга $K(v)$, то множество

$$K((\tilde{\Xi}_n \setminus \{v\})^v) \subset K(v) \subset \mathbb{S}^+, \tag{39}$$

следовательно, в силу определения (37) справедливо включение

$$K(\Xi_{n+1}) \subset \mathbb{S}^+. \tag{40}$$

Из включения (35) и из определения 4 следует, что

$$(\mathbb{H}^+ \setminus \overline{K(v)}) \subset (\tilde{\mathfrak{N}}_n \cup K(\tilde{\Xi}_n \setminus \{v\}) \cup \tilde{X}_n),$$

откуда, применяя симметрию относительно v , находим

$$K(v) \subset ((\tilde{\mathcal{N}}_n)^v \cup K((\tilde{\Xi}_n \setminus \{v\})^v)) \cup (\tilde{X}_n)^v. \tag{41}$$

Согласно определениям (36)–(38) с учетом предположения (30) и включения (41) находим

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{n+1} \cup K(\Xi_{n+1}) \cup X_{n+1} &= (\mathcal{N}_n \cup (\tilde{\mathcal{N}}_n)^v) \cup (K(\Xi_n \setminus \{v\}) \cup K((\tilde{\Xi}_n \setminus \{v\})^v)) \cup (X_n \cup (\tilde{X}_n)^v) \supset \\ &\supset ((\mathcal{N}_n \cup K(\Xi_n) \cup X_n) \setminus K(v)) \cup ((\tilde{\mathcal{N}}_n)^v \cup K((\tilde{\Xi}_n \setminus \{v\})^v)) \cup (\tilde{X}_n)^v \supset (\mathbb{S}^+ \setminus K(v)) \cup K(v) = \mathbb{S}^+, \end{aligned}$$

что вместе с формулой (40) доказывает свойство (30) для тройки (36)–(38).

Осталось показать справедливость условий (31) для данных $(n + 1)$ -го шага индукции.

Множество (38) состоит из двух частей: из множества $(\tilde{X}_n)^v$, лежащего внутри полукруга $\overline{K(v)}$, и из множества X_n , лежащего снаружи. Область \mathcal{N}_{n+1} , в свою очередь, состоит из трех частей: из кругового четырехугольника $W(v) \supset v$, из множества $(\tilde{\mathcal{N}}_n)^v \setminus W(v)$, лежащего внутри полукруга $\overline{K(v)}$, и из множества $\mathcal{N}_n \setminus W(v)$, лежащего вне этого полукруга.

Четырехугольник $W(v)$ не пересекается с X_n по предположению (31), так как $W(v) \subset \mathcal{N}_n$, и также не пересекается с \tilde{X}_n по построению последнего. Поскольку этот четырехугольник симметричен относительно v , то он также не пересекается и с $(\tilde{X}_n)^v$. Множество $(\tilde{\mathcal{N}}_n)^v$ не пересекается с $(\tilde{X}_n)^v$, так как $\tilde{\mathcal{N}}_n \cap \tilde{X}_n = \emptyset$ по построению периодического продолжения (11), (34) и по предположению (31). Наконец, область \mathcal{N}_n не пересекается с X_n также по предположению (31). Следовательно, справедливо равенство $\mathcal{N}_{n+1} \cap X_{n+1} = \emptyset$.

Объединение полукругов $K((\tilde{\Xi}_n \setminus \{v\})^v)$, лежащее внутри $K(v)$, не пересекается с $(\tilde{X}_n)^v$, поскольку $K(\tilde{\Xi}_n) \cap \tilde{X}_n = \emptyset$, и $K(\tilde{\Xi}_n)$ не пересекается с X_n по предположению (31). Следовательно, равенство $K(\Xi_{n+1}) \cap X_{n+1} = \emptyset$ выполнено.

Таким образом, справедливость условий (31) для тройки (36)–(38) установлена, обоснование индуктивного перехода завершено, и последовательность (28) построена.

Выполнение свойств (32) этой последовательности следует из определений (36)–(38) и включения (39).

Проведем обоснование свойства (33). Обозначим через $(\epsilon^{(n)})$ упорядоченную по убыванию последовательность диаметров $(\text{diam}(\xi))_{\xi \in \Xi_n}$, тогда из неравенства (24) получаем

$$\epsilon_1^{(n)} \geq \epsilon_2^{(n)} \geq \dots, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_j^{(n)} < |I| = 2. \tag{42}$$

Из алгоритма (36) построения множества Ξ_{n+1} , а также из неравенства (26) находим, что отличие в составе последовательностей $(\epsilon^{(n+1)})$ и $(\epsilon^{(n)})$ заключается в следующем: при переходе к $(\epsilon^{(n+1)})$ из $(\epsilon^{(n)})$ вычеркивается наибольший элемент $\epsilon_1^{(n)}$ и добавляется счетное множество новых элементов, не превосходящих $(\epsilon_1^{(n)})/2$, с сохранением ограничения (42) на сумму членов последовательности. Следовательно, для каждого номера $n \in \mathbb{N}$ существует такое число $n_1 \in \mathbb{N}$, что $\epsilon_1^{(n+n_1)} \leq (\epsilon_1^{(n)})/2$: n_1 равно количеству членов последовательности $(\epsilon^{(n)})$, превышающих $(\epsilon_1^{(n)})/2$. Из этого вытекает свойство (33), лемма 3 доказана.

В обозначениях леммы 3 положим

$$\mathfrak{N} = (\mathcal{N}, \Delta_{\infty}, \Lambda_{\infty}) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{N}_n, \quad \mathcal{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_n, \quad \mathfrak{X} := \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \subset \overline{\mathbb{P}}.$$

Из предельного равенства (33) и включений (30) находим

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K(\Xi_n) = \emptyset, \quad \mathbb{S}^+ \subset \mathcal{N} \cup \mathfrak{X}.$$

Тогда отображение (1) аналитически продолжается в область

$$\mathcal{N} \supset (\mathbb{S}^+ \setminus \mathcal{L}) \supset (\mathbb{S}^+ \setminus \bar{\Pi}) = \mathbb{S}^+(L),$$

что и требовалось доказать.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем некоторые следствия из теоремы 1, касающиеся области аналитичности функции (1).

Аналитически продолженная в полуполосу $\mathbb{S}^+(L)$ функция $w = \mathcal{F}(z)$ отображает стороны Ω и Ψ треугольника T в промежутки Ω_w и Ψ_w вещественной оси на плоскости w . Продолжая эту функцию на основании принципа симметрии в смежные полуполосы через лучи Ψ и Ω , затем через их образы при взаимном отражении Ψ^Ω и Ω^Ψ и т.д., получаем аналитическое продолжение отображения (1) в полуплоскость $\mathbb{H}^+(L)$.

Поскольку функция $\mathcal{F}(z)$ отображает сторону Γ треугольника T в луч Γ_w , то эту функцию можно по принципу симметрии далее продолжить через дугу Γ в область, получаемую инверсией из полуплоскости $\mathbb{H}^+(L)$ относительно этой дуги. Такой областью является внутренность круга, описанного вокруг треугольника BCO и касающегося вещественной оси в начале координат. Таким образом, в сегмент этого круга функция $\mathcal{F}(z)$ аналитически продолжается из полуполосы $\mathbb{S}^+(L)$ через прямолинейный отрезок BC .

Рассмотрим теперь произвольно расположенный на комплексной плоскости круговой треугольник V , имеющий углы $0, \alpha, \alpha$. Дробно-линейным преобразованием треугольник V может быть переведен в T . Прообразом прямой $\{\text{Im } z = L\}$ при этом является описанная вокруг V окружность, откуда получаем следующую переформулировку теоремы 1.

Теорема 1'. *Конформное отображение на полуплоскость кругового треугольника V , имеющего один нулевой угол и два равных между собой ненулевых угла, аналитически продолжается во внутренность круга, описанного вокруг V .*

В предельном случае $\alpha = 0$ аналитическое продолжение конформного отображения треугольника V на полуплоскость, даваемое теоремой 1', является модулярной функцией (см. [6, ч. 3, гл. 7, § 4]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т. I. Начала теории. М.: Наука, 1967; Дальнейшее построение теории. Т. 2. М.: Наука, 1968.
2. Власов В.И., Скороходов С.Л. Конформное отображение L -образной области в аналитическом виде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. 12. С. 1943–1980.
3. Vlasov V.I., Skorokhodov S.L. A generalization and development of the Trefftz method // Zeitschr. Angew. Math. Mech. 1996. V. 76. Suppl. 1. P. 547–548.
4. Власов В.И., Скороходов С.Л. О развитии метода Трэффца // Докл. АН. 1994. Т. 337. 6. С. 713–717.
5. Власов В.И., Скороходов С.Л. Аналитическое решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в одном классе полигональных областей // Сообщ. прикладн. матем. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1988.
6. Гурвиц А., Курант Г. Теория функций. М.: Наука, 1968.

**УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

УДК 519.63

**Multizonal Boundary and Internal Layers in the Singularly Perturbed Problems
for a Stationary Equation of Reaction-Advection-Diffusion Type
with Weak and Discontinuous Nonlinearity¹⁾**

© 2022 г. Q. Yang¹, M. Ni^{2,*}

¹ School of Mathematical Sciences, East China Normal University, Shanghai, 200062, PR China

² Shanghai Key Laboratory of Pure Mathematics and Mathematical Practice, Shanghai, 200062, PR China

*e-mail: xiaovikdo@163.com

Поступила в редакцию 02.09.2021 г.

Переработанный вариант 03.01.2022 г.

Принята к публикации 07.07.2022 г.

Внутренний переходный слой для стационарного уравнения реакция-диффузия-адвекция с разрывной нелинейностью при наличии кратных корней вырожденной задачи. Исследуется случай сингулярно возмущенной задачи с краевыми условиями Дирихле для нелинейного стационарного уравнения типа реакция-диффузия-адвекция. Особенностью данной работы является кратность корней вырожденного уравнения при изучении задач с разрывными адвективными и реактивными членами. Методами асимптотических дифференциальных неравенств и сшивания доказано существование контрастных структур и показаны качественные изменения асимптотического решения, вызванные кратными корнями.

Ключевые слова: задачи типа реакция-диффузия-адвекция, случай кратных корней вырожденного уравнения, трехзонный внутренний переходный слой.

DOI: 10.31857/S0044466922120158

¹⁾ Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА**

УДК 519.63

**СТРУКТУРЫ БЕЗДИССИПАТИВНЫХ РАЗРЫВОВ
И УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ В РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ
ДВУХЖИДКОСТНОЙ ПЛАЗМЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ**© 2022 г. И. Б. Бахолдин^{1,*}¹ 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, Россия*e-mail: ibbakh@yandex.ruПоступила в редакцию 12.05.2022 г.
Переработанный вариант 23.05.2022 г.
Принята к публикации 04.08.2022 г.

Описываются методы численного анализа и исследуются периодические волны, уединенные волны и структуры бездиссипативных разрывов для уравнений электромагнитной гидродинамики. Установлено, что амплитуда волн не может превышать некоторые значения, что ведет к опрокидыванию волн. Строятся структуры бездиссипативных разрывов как пределы последовательностей уединенных волн. Оценки максимальных амплитуд существования уединенных волн могут быть использованы для оценки максимально возможных амплитуд разрывов. Исследуется расположение ветвей периодических решений. Показано, что разрыв длинноволновой ветви быстрых магнитозвуковых волн не коррелирует с существованием перехода на короткую ветвь, чем обусловлено возникновение решений хаотического типа. Исследования медленных магнитозвуковых волн показали, что при малых и умеренных амплитудах есть решение, близкое к уединенной волне. Библ. 16. Фиг. 7.

Ключевые слова: двухжидкостная плазма, электромагнитная гидродинамика, дисперсия, уединенные волны, структуры разрывов, численные методы.

DOI: 10.31857/S004446692212002X**1. ВВЕДЕНИЕ**

Уравнения электромагнитной гидродинамики (ЭМГД) представляют собой обобщение классической магнитной гидродинамики (МГД) (см. [1]) посредством учета инерции электронов. В данной работе рассматривается вариант уравнений ЭМГД с неизвестными скоростью ионов и их концентрацией, предложенный в [2], [3], развитый и исследованный в [4], [5]. Существует и другой вариант уравнений с привязкой к средней массовой скорости ионов и электронов (см. [6]). Эти уравнения содержат дисперсионные члены. В случае их удаления они превращаются в классические уравнения МГД. В [4], [5] исследовались солитонные решения этих уравнений для быстрых и медленных магнитозвуковых волн. Найдены были решения в приближении, эквивалентном приближению уравнения Кортевега–де Вриза, и посредством метода нормальных форм доказывалось существование точных решений для обычных или $1 : 1$ уединенных волн (волн с затухающими колебаниями на бесконечности) или предполагалось наличие обобщенной уединенной волны вместо обычной (комбинации из обычной уединенной и периодической волн). Для исследования этих уравнений также применялась теория бездиссипативных разрывов (см. [7]–[9]), согласно которой при решении задачи о распаде произвольного разрыва возникают расширяющиеся со временем структуры разрывов солитонного типа, у которых на границе волновой зоны со временем первая волна стремится к уединенной, и структуры с разрывом с излучением, у которых на границе волновой зоны имеется локальная структура разрыва типа перехода между однородным и периодическим состояниями. Эти решения описываются автомодельными решениями усредненных уравнений. Кроме того, встречаются расширяющиеся структуры стохастического типа. Для ЭМГД такие исследования проводились в [7], [10], [5], [11]. В [12] детально исследовались математические свойства уравнений, и численно решалась задача о распаде произвольного разрыва. Для их расчета применялась новая численная схема с центральными пространственными разностями и применением метода Рунге–Кутты четвертого порядка для

аппроксимации временных производных. Эта схема обладает низкой схемной вязкостью. Было установлено, что классическое решение получается не при любых начальных данных. В частности, при недостаточном растяжении сглаженной начальной ступеньки в задаче о распаде производного разрыва в случае альвеновских данных возникало опрокидывание волны, приводящее к коррекции решения за счет дисперсионных свойств численной схемы или же к появлению структуры типа ударной волны, если включена слабая газодинамическая вязкость. Быстрые магнитозвуковые волны в случае большой амплитуды также опрокидываются, но численная схема корректирует этот дефект, включая схемную бездиссипативную структуру. Схемная структура включается и в случае классической МГД. Опрокидывание волн большой амплитуды связано с тем, что в рассматриваемой модели дисперсия коротких волн исчезает, эти волны движутся с конечной скоростью. Основной целью настоящей работы является исследование уединенных волн и структур разрывов с целью оценки границ применимости теории бездиссипативных разрывов для ЭМГД. Кроме того, полученные здесь решения в виде бегущих волн позволяют подтвердить правильность работы программы расчета уравнений ЭМГД.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Одномерные уравнения ЭМГД, записанные в форме законов сохранения, имеют вид (см. [7], [12])

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial nu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(nu^2 + \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} + b^2 n \right) &= 0, \\ \frac{\partial nv}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(nuv - B_x B_y + R_e^{-1} \frac{dB_z}{dt} \right) &= 0, \\ \frac{\partial nw}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(nuw - B_x B_z - R_e^{-1} \frac{dB_y}{dt} \right) &= 0, & (2.1) \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u B_y - B_x v - R_i^{-1} \frac{dw}{dt} \right) &= v_m \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u B_z - B_x w + R_i^{-1} \frac{dv}{dt} \right) &= v_m \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

где $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ – полная производная, n – плотность частиц (объемная концентрация) ионов или электронов, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ – напряженность магнитного поля, $\mathbf{v} = (u, v, w)$ – скорость ионов. Используются безразмерные величины, определяемые через физические: $x = \hat{x}/L$, $t = \hat{t}\omega_0$, $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}/V_A$, $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}}/|B_0|$, $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}}/|B_0|$, $n = \hat{n}/n_0$; L , $\omega_0 = V_A/L$, n_0 , $|\mathbf{B}_0|$, $V_A = |\mathbf{B}_0| [4\pi n_0 (m_e + m_i)]^{-1/2}$ – характерная длина, частота, плотность невозмущенной плазмы, модуль вектора невозмущенного магнитного поля, альвеновская скорость соответственно. Здесь m_i и m_e – массы ионов и электронов, v_m – коэффициент магнитной вязкости, связанной с ионно-электронным трением, b^2 – коэффициент сжимаемости электронного газа. Параметры дисперсии R_i и R_e даются формулами $R_i = \omega_{ic}/\omega_0$ и $R_e = \omega_{ec}/\omega_0$, где $\omega_{ic} = e|\mathbf{B}_0|/(m_i c)$ и $\omega_{ec} = e|\mathbf{B}_0|/(m_e c)$ – ионная и электронная циклотронные частоты соответственно, e – заряд электрона, c – скорость света. Для удобства расчета мы можем взять L таким, что $\omega_0 = \sqrt{\omega_{ic}\omega_{ec}}$, тогда $R_i = R_e^{-1} = \sqrt{m_i/m_e}$. В расчетах далее подразумевается водородная плазма, $R_e^{-1} = 0.02341352$. Для правильной постановки граничных условий при расчетах методом конечных разностей система приводится к виду, в котором временные производные в каждом уравнении есть только от одного неизвестного (см. [12]).

Для дальнейшего также существенны магнитогидродинамические условия на разрыве (см. [12]):

$$\begin{aligned} -V[n] + [nu] &= 0, \\ -V[nu] + \left[nu^2 + \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} + b^2 n \right] &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-V[nv] + [nuv - B_x B_y] &= 0, \\
-V[nw] + [nuw - B_x B_z] &= 0, \\
-V[B_y] + [uB_y - B_x v] &= 0, \\
-V[B_z] + [uB_z - B_x w] &= 0.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь V – скорость разрыва, квадратные скобки обозначают разность величин по разные стороны разрыва.

Приведем дисперсионное соотношение в недиссипативном случае при $n = 1$, $|B| = 1$ (см. [4]):

$$\begin{aligned}
(r + k^2)^2 V_0^6 - \{r^2 + r^2 \cos^2 \theta + r[1 + \cos^2 \theta(\rho + 1)]k^2 + (r + k^2)^2 b^2\} V_0^4 + \\
+ \cos^2 \theta [r^2 + 2r^2 b^2 + r(\rho + 2)b^2 k^2] V_0^2 - r^2 \cos^4 \theta b^2 = 0, \\
r = R_i R_e, \quad V_0 = \omega/k - u, \quad \rho = [(R_e/R_i)^{1/2} - (R_i/R_e)^{1/2}]^2.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь θ – угол между вектором напряженности магнитного поля и осью Ox , ω – циклическая частота, k – волновое число. Имеются быстрая и медленная магнитозвуковые и альвеновская ветви дисперсионного соотношения $\omega = \omega(k)$. Графики дисперсионных кривых исследованы в [4]. Скорости распространения быстрых и медленных магнитозвуковых, а также альвеновских волн, для данных уравнений конечны при любых значениях длины волны ($k \in R$). При $k \rightarrow 0$ скорости распространения волн совпадают с соответствующими скоростями в МГД, при $k \rightarrow \infty$ скорости быстрых магнитозвуковых волн стремятся к $u \pm b$, а скорости медленных и альвеновских – к u .

3. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН И СТРУКТУР РАЗРЫВОВ

3.1. Прогнозируемые типы солитонных решений

Быстрая магнитозвуковая ветвь имеет точку перегиба при $k > 0$ в случае $\theta < \theta_c$ (см. [4]), $\theta \in [0, \pi/2]$, где $\theta = \arctg[(B_y^2 + B_z^2)^{1/2}/B_x]$, $\theta_c(b)$ – некоторое критическое значение, и пересечение при $k > 0$ с прямой касательной к этой ветви в начале координат. При $\theta > \theta_c$ точек перегиба и пересечения нет. В случае медленных магнитозвуковых волн всегда имеется аналогичное пересечение с альвеновской ветвью. В [4] методом исследования нормальных форм в случае отсутствия пересечения доказано существование солитонных решений с малой амплитудой волн. При наличии пересечения возможны обобщенные уединенные волны, т.е. комбинации уединенной и периодической волн. В обоих случаях для малых амплитуд волны могут быть описаны уравнением Кортевега–де Вриза. Может быть также получено приближенное решение типа уединенной волны в виде ряда. Аппроксимация по амплитуде волны при этом может быть достигнута выше любого алгебраического порядка. Для быстрых магнитозвуковых волн доказывалось существование так называемых 1 : 1 уединенных волн, наличие которых связано с существованием прямой, проходящей через начало координат и касающейся дисперсионной ветви при $k > 0$. Для медленных магнитозвуковых волн предполагается существование обобщенных уединенных волн. Отметим, что несовпадение точного решения (обобщенная уединенная волна) с приближенным (уединенная волна) по определению означает отсутствие сходимости приближения в виде ряда. Ниже будут описаны численные методики, корректные для нахождения симметричных уединенных волн в случае, когда прямая, соответствующая скорости волны, не пересекает дисперсионные ветви при $k > 0$, и для нахождения обобщенных уединенных волн в случае, когда имеется одно такое пересечение. Малости амплитуд волн при этом не предполагается. Под корректностью здесь понимается совпадение числа доступных варьируемых параметров с числом неизвестных, которые нужно приравнять к нулю для поиска решения. В случае наличия пересечения число варьируемых параметров меньше числа обнуляемых неизвестных, обычные и 1 : 1 уединенные волны могут быть только в специальных случаях.

Для полноты анализа солитонных решений исследуем альвеновские волны колебательного типа, описываемые дисперсионным соотношением (2.3). В зависимости от значений θ и b возможно пересечение касательной в начале координат с быстрой магнитозвуковой ветвью при $\theta < \theta_{cam}$, $b < 1$, отсутствие пересечений при $\theta_{cam} < \theta < \theta_{caa}$ или $\theta_{cam} < \theta$, $b^2 \rho < 1$, пересечение с альвеновской ветвью при $\theta > \theta_{caa}$ или $b > 1$. Здесь θ_{cam} и θ_{caa} – некоторые критические значения,

соответствующие возникновению пересечения с быстрой магнитозвуковой ветвью и пересечения с альвеновской ветвью при $k > 0$ (в соответствии с введенной здесь системой обозначений, упомянутое выше θ_c можно было бы обозначить через $\theta_{\text{смм}}$), определяемые формулами, получаемые исследованием соотношения (2.3):

$$\theta_{\text{саа}} = \arccos \frac{(b^2 \rho - 1)^{1/2}}{(\rho - 1)^{1/2}}, \quad \theta_{\text{сам}} = \arccos b.$$

В случае колебательных альвеновских волн численные расчеты показывают, что нет обычных или обобщенных уединенных волн, в том числе и приближенных, что связано с особенностями нелинейности (см. [12]). Можно при $\theta = 0$ рассматривать еще вращательные альвеновские волны с другим дисперсионным соотношением. В [6] для них приведены точные решения, описывающие периодические волны произвольной амплитуды, причем их скорость от этой амплитуды не зависит, что позволяет предположить, что этих уединенных волн тоже нет.

3.2. Уравнения бегущих волн

Рассматриваются уравнения волн, бегущих со скоростью V , в недиссипативном случае

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= (-B_z V + B_z u - B_x w - c_v) R_i (V - u)^{-1}, & \frac{dw}{dx} &= -(-B_y V + B_y u - B_x w - c_w) R_i (V - u)^{-1}, \\ \frac{dB_y}{dx} &= -(-nwV + nwu - B_x B_z - c_{By}) R_e (V - u)^{-1}, & \frac{dB_z}{dx} &= (-nvV + nvu - B_x B_y - c_{Bz}) R_e (V - u)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$c_n^2 + \left(c_n V + \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} - c_u \right) n + b^2 n^2 = c_u, \quad u = n^{-1} c_n + V,$$

$$c_w = B_{y0}(u_0 - V) - B_x v_0, \quad c_v = B_{z0}(u_0 - V) - B_x w_0, \quad (3.2)$$

$$c_n = n_0(u_0 - V), \quad c_u = n_0 u_0(u_0 - V) + \frac{B_{y0}^2 + B_{z0}^2}{2} + b^2 n_0.$$

Индексом 0 обозначены величины для состояния равновесия. При дальнейшем исследовании быстрых магнитозвуковых волн решается приведенное выше квадратное уравнение (3.2) для определения n , а затем u , при этом корень в соответствующей формуле в случае быстрых магнитозвуковых волн берется с отрицательным знаком, в случае медленных – с положительным. В матричной форме линеаризованный вариант уравнений (3.1) имеет вид

$$\mathbf{A} \mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{w} = (v', w', B'_y, B'_x)^T. \quad (3.3)$$

В случае $w_0 = 0$ и $B_{z0} = 0$, $v_0 = 0$ матрица \mathbf{A} имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} R_i^{-1}(u_0 - V) \frac{d}{dx} & -B_x & 0 & -V + u_0 \\ -B_x & R_i^{-1}(V - u_0) \frac{d}{dx} & -V + u_0 + \frac{B_{y0}^2}{n_0(V - u_0) - b^2 n_0/(V - u_0)} & 0 \\ 0 & -n_0 V + n_0 u_0 & R_e^{-1}(U - u_0) \frac{d}{dx} & -B_x \\ -n_0 V + n_0 u_0 & 0 & -B_x & R_e^{-1}(u_0 - V) \frac{d}{dx} \end{pmatrix}.$$

Подставим $(v', w', B'_y, B'_x)^T = \mathbf{k} \exp \lambda x$ и найдем собственные векторы $\mathbf{k}_{1,2,3,4}$ и собственные значения $\lambda_{1,2,3,4}$. В зависимости от угла θ и параметра скорости V может быть четыре действительных собственных значения: $\lambda_1 = -\lambda_3 > 0$, $\lambda_2 = -\lambda_4 > 0$, четыре комплексных: $\lambda_{1,2,3,4} = \pm r \pm is$, $r > 0$, два мнимых и два действительных: $\lambda_{1,3} = \pm r$, $\lambda_{2,4} = \pm is$. В последнем случае могут быть только решения типа обобщенной уединенной волны.

Метод 1. В случае действительных значений ищем классические (обычные) уединенные волны, используя начальные данные в виде

$$(v, w, b_y, B_z)^T = (v_0, w_0, b_{y0}, B_{z0})^T + \varepsilon(\mathbf{k}_1 \cos \varphi + \mathbf{k}_2 \sin \varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Здесь и далее ε — некоторая малая величина, φ — варьируемый параметр. С обычными уединенными волнами связаны бездиссипативные структуры солитонного типа, т.е. переходы между однородным и периодическим состояниями, в которых первая волна стремится к уединенной при $t \rightarrow \infty$.

Метод 2. В случае комплексных значений ищем 1 : 1 уединенные волны и мультисолитоны, используя начальные данные вида

$$(v, w, b_y, B_z)^T = (v_0, w_0, b_{y0}, B_{z0})^T + \varepsilon \operatorname{Re}(\mathbf{k}_1 \exp i\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Эти волны имеют колебания, затухающие на бесконечности. Имеются базовая волна и мультисолитоны, которые можно интерпретировать как сумму базовых волн, сдвинутых на некоторые расстояния относительно друг друга. Структуры разрывов с излучением, т.е. переходы между однородным и периодическим состояниями, можно найти как пределы последовательностей 1 : 1 уединенных волн.

Метод 3. В случае, когда амплитуда периодической компоненты обобщенной уединенной волны мала по сравнению с амплитудой солитонной части, начальные данные берутся такими:

$$(v, w, b_y, B_z)^T = (v_0, w_0, b_{y0}, B_{z0})^T + \varepsilon \mathbf{k}_1 + a \operatorname{Re}(\mathbf{k}_2 \exp i\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

где a — амплитуда периодической составляющей. Здесь также есть базовая волна и мультисолитоны. Структуры разрывов типа переходов между периодической и двоякопериодической волнами (они существуют, по крайней мере, как приближенное решение) можно найти как пределы последовательностей обобщенных уединенных волн. В случае использования этого метода при произвольных значениях амплитуды периодической составляющей обобщенных уединенных волн придется сначала находить численно нелинейное периодическое решение на периоде, линеаризовывать уравнения (3.1) относительно этого решения, а затем находить вектор, определяющий возмущение, порождающее растущую линейную волну (см. [7]), причем делать это придется для каждого значения x на периоде волны. В связи со сложностью этого процесса предпочтительнее искать обобщенные уединенные волны рассмотрением предельных решений последовательностей двоякопериодических волн (см. [8]) (метод 4).

При использовании методов 1–3 решаем численно уравнения (3.1) и выбираем все значения x_* , при которых $B_z = 0$. Здесь используется метод Рунге–Кутты второго порядка. Методы высокого порядка более шумные, при уменьшении шага вычислительный хаос за счет машинного округления начинается раньше. Получаем ветви некоторых кривых на плоскости (φ, w) . Затем, исследуя поточечные графики, выбираем значение φ так, чтобы $w = 0$. В связи с большим количеством таких значений и мультисолитонов при применении методов 2 и 3 лучше воздержаться от автоматического, программного определения таких значений, поскольку анализ графиков расположения ветвей дает возможность систематического анализа мультисолитонных решений. Симметризуя/антисимметризуя решение относительно точки x_* для $u, n, v, B_y/w, B_z$, получаем уединенную волну.

Метод 4. Периодические симметричные решения (однопериодные и двоякопериодические) ищем следующим образом. Находим состояние равновесия, выбираем симметризуемую возмущаемую величину, например, $B_y = B_{y0} + Z$. Выбираем x_{*p} такое, что антисимметризуемая величина, например w , обращается в нуль p раз. Далее варьируем другую величину, например, $v = v_0 + Y$ так, чтобы вторая антисимметризуемая величина B_z приняла значение нуль. Симметризуя/антисимметризуя решение относительно x_{*p} , находим периодическое решение на периоде. Заметим, что здесь симметричные и антисимметричные переменные могут быть определены и противоположным способом, наоборот, но при исследовании предельных солитонных решений предпочтительнее первый вариант. Назовем график $Z(Y)$ при заданном значении p ветвью периодического решения. Ветви желательно изображать разным цветом. Одно и то же решение может отображаться при разных значениях p , ищем для него минимальное значение p , обозначим его через q . Для этого вначале строятся графики с большим значением p , а затем — с меньшим. По этому значению можно судить об отношении периодов волн двоякопериодического ре-

шения. Для уточнения строятся графики решений для различных неизвестных, а также проводится анализ расположения ветвей линеаризованных решений с тем, чтобы выявить закономерности и продолжить их на нелинейные. Обычные 1 : 1 и обобщенные уединенные волны ищутся как предельные решения для периодических волн (см. [8]). Обычная уединенная волна находится как предельное решение на конце одноволновой ветви. Таким способом можно находить и приближенные решения типа уединенных волн, если точного решения не существует, а также находить решения в особом случае, когда уединенная волна существует, несмотря на наличие действительных и мнимых собственных значений. В случае 1 : 1 уединенных волн выявляются спиральные ветви, ищутся предельные решения, соответствующие центру спиралей, ему соответствует гребень 1 : 1 уединенной волны. В случае обобщенных уединенных волн рассматриваются последовательности ветвей, сходящиеся к некоторому участку одноволновой ветви. Анализ числа пересечений прямой $V = \omega/k$ с дисперсионными ветвями в данном методе не обязателен, при двух пересечениях ожидаются двоякопериодические решения, при одном пересечении – однопериодные (двоякопериодические возможны), но при отсутствии пересечений те и другие тоже могут быть.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Зафиксируем состояние равновесия: $n_0 = 1$, $u_0 = 0$, $w_{z0} = 0$, $B_x = \cos \theta$, $B_{y0} = \sin \theta$, $B_{z0} = 0$, назовем это *состоянием 1*; $b^2 = 0.5$, скорость волн $V = V^\pm(1 + \mu)$, V^\pm – скорость линейных быстрых/медленных магнитозвуковых волн, описываемая формулой (см. [4])

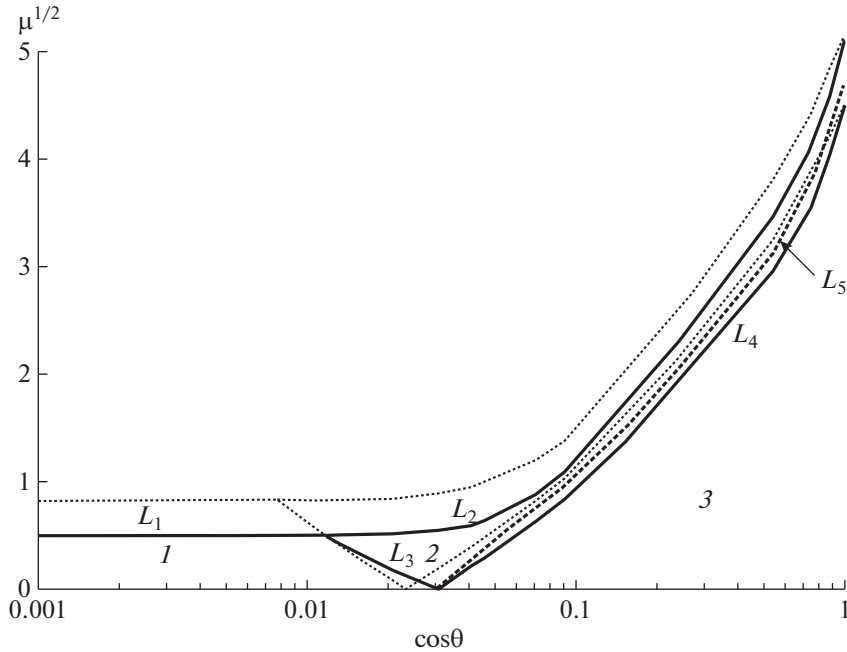
$$V^\pm = \sqrt{\left[1 + b^2 \pm \sqrt{(1 + b^2)^2 - 4 \cos^2 \theta b^2}\right]}/2.$$

4.1. Быстрые магнитозвуковые уединенные волны

На фиг. 1 показано расположение областей решений различных типов на плоскости $(\cos \theta, \mu^{1/2})$ при $b^2 = 0.5$, $0 < \theta < 1.57 \approx \pi/2$ в случае быстрых магнитозвуковых волн. Использовались методы 1–3. Дополнительно те же кривые показаны при $b^2 = 0.001$ пунктирной линией, т.е. фактически для холодной плазмы. Здесь 1 – область существования обычных уединенных волн, 2 – область существования 1 : 1 уединенных волн. В области 3 нет обычных или обобщенных уединенных волн, определяемых методами 1–3. Но обобщенные уединенные волны, определяемые методом 3, есть при $\mu < 0$, $\theta < \theta_c$. Выше кривой L_1 обычных уединенных волн нет. На кривой L_3 происходит переход от обычных уединенных волн к 1 : 1 уединенным волнам. Кривая L_4 соответствует появлению слабонелинейных 1 : 1 уединенных волн. Кривые L_3 и L_4 пересекаются при $\mu = 0$, $\theta = \theta_c$.

Кривые L_1 и L_2 соответствуют волне с острым гребнем. На фиг. 2а ($b^2 = 0.5$, $\theta = 1.55$, $\mu = 0.2675$) показана 1 : 1 уединенная волна, соответствующая кривой L_2 . Заметим, что волны на воде обладают аналогичным свойством. Когда увеличивается амплитуда уединенной волны, то образуется волна с острым гребнем, уединенных волн с большими амплитудами нет, значит, волны большой амплитуды опрокидываются.

Было обнаружено, что при $\theta > \theta_c$ вид 1 : 1 уединенной волны, соответствующей области 2, подобен виду обычных уединенных волн. Для (θ, μ) вблизи L_3 в области 2 $\text{Im } \lambda$ стремится к нулю, поэтому колебания не наблюдаемы из-за большой длины их волны в сравнении с длиной уединенной волны (обычно длина уединенной волны определяется на уровне половины ее амплитуды), ассоциированной со значением $\text{Re } \lambda$. Колебания экспоненциально убывают, и их амплитуда уменьшается при удалении от точки симметрии, они не видны. Для (θ, μ) вблизи L_2 амплитуда горба уединенной волны существенно больше амплитуды осцилляций, они также не наблюдаются. Для $\theta < \theta_c$ и μ чуть выше значения на L_4 1 : 1 уединенная волна аналогична солитону огибающей нелинейного уравнения Шрёдингера. На кривой L_4 фазовая скорость волн совпадает с групповой. В случае (θ, μ) далеко от L_4 такое приближение может применяться только формально, график прогнозируемого решения близок к обычной уединенной волне, поскольку длина волны солитона огибающей мала по сравнению с длиной волны осцилляций.

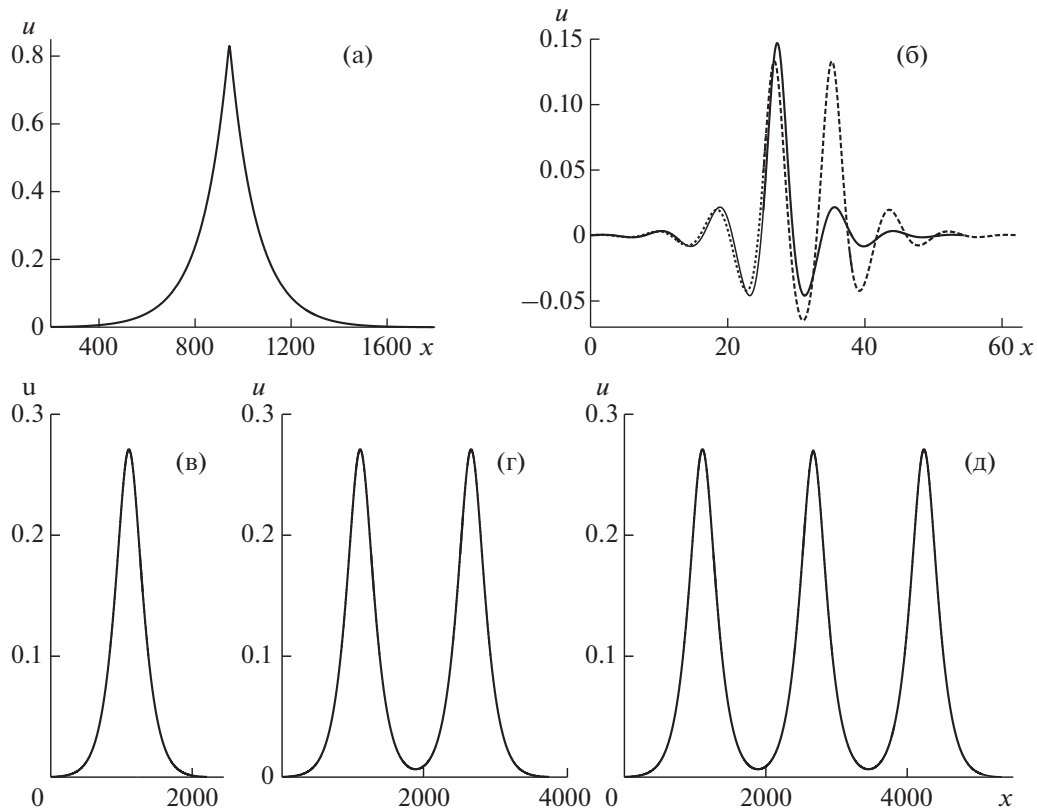


Фиг. 1

Ниже на фиг. 2б показаны 1 : 1 уединенные волны возвышения (сплошная линия) в точке симметрии и понижения (штриховая линия), похожие на решения нелинейного уравнения Шрёдингера и переходящие в них при приближении к L_4 ; $\theta = 1.52$, $\mu = 0.16$. Анализ бифуркаций ветвей мультисолитонных решений показывает, что волна понижения является 1 : 1 бисолитоном. Это также легко видеть на фиг. 2б. В окрестности кривой L_3 число мультисолитонов при одном и том же значении (θ, μ) стремится к бесконечности, а график первичной 1 : 1 уединенной волны качественно не отличается от графика обычной уединенной волны. В окрестности кривой L_4 есть только две уединенные волны: повышения и понижения, аналогичные показанным на фиг. 2б. Отметим, что утверждения о числе уединенных волн в окрестности кривых L_3 и L_4 основаны на исследовании системы бегущих волн уравнения Кортевега–де Вриза с производной пятого порядка (см. [13]) (это уравнение является модельным уравнением для быстрых магнитозвуковых волн, см. [3]). Наличие двух волн в окрестности L_4 следует также из [4], где исследовались решения для ЭМГД методом нормальных форм, позволяющим утверждать, что иных решений нет.

На фиг. 2в–д показаны несколько 1 : 1 уединенных волн, одновременно существующих при одних и тех же значениях θ и μ из области 2 ($\theta = 1.55$, $\mu = 0.1$). Это 1-солитон (в), 2-солитон (г), 3-солитон (д), образующие начальные элементы последовательности, стремящейся к структуре разрыва с излучением.

Обобщенные уединенные волны — это двухпараметрические решения, параметрами служат амплитуды солитонной и периодической составляющей (в некоторых работах обобщенной уединенной волной называются волны с минимально возможной амплитудой периодической составляющей, а волны с произвольной амплитудой названы волнами с рябью, см. [4]). Численный анализ с помощью метода 4 показал, что для фиксированного μ амплитуда периодической компоненты a может варьироваться в некотором интервале (a_{\min}, a_{\max}) , a_{\max} соответствует чисто периодической волне. Есть синфазные и противофазные решения в том смысле, что в одном случае максимум волн периодической составляющей совпадает с максимумом солитонной компоненты, а в другом случае максимум солитонной компоненты совпадает с минимумом периодической составляющей. Эти понятия вводятся по аналогии с линейными волнами в результате исследования двоякопериодических волн (см. п. 4.2). При достижении минимальной амплитуды периодической составляющей синфазное и противофазное решения совпадают. Можно предполагать, что, как и в случае уравнения Кортевега–де Вриза с производной пятого порядка



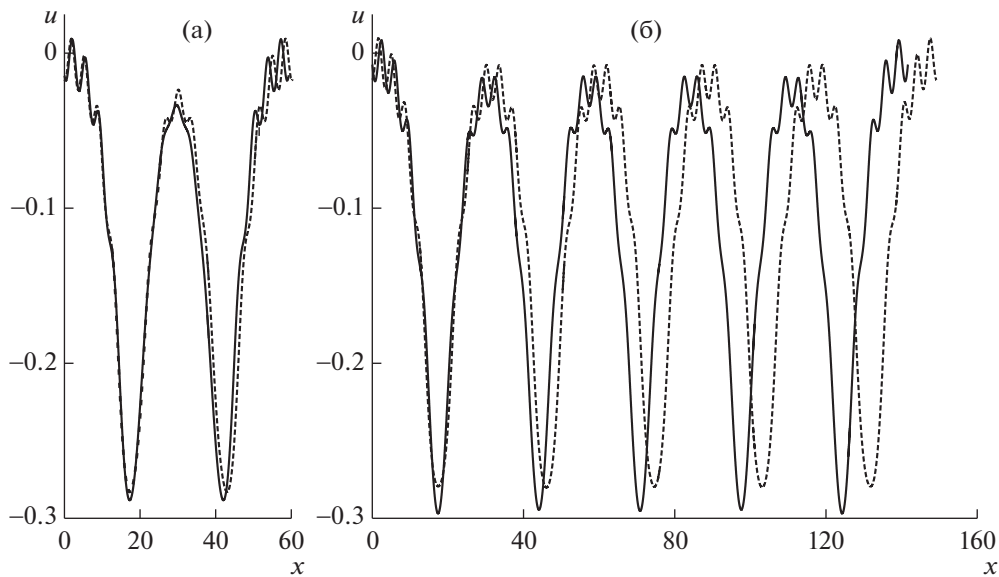
Фиг. 2

(см. [14]), a_{\min} экспоненциально мало по μ . Обнаруживаются также обобщенные мультисолитоны. Ниже на фиг. 3 ($\theta = 1.52$, $\mu = -0.1$) показаны двухсолитонные и пятисолитонные обобщенные уединенные волны, упорядоченного типа, т.е. с почти одинаковыми расстояниями между солитонными элементами, эти расстояния во всех решениях разные (анализ см. п. 4.2). Получены методом 3. Величина амплитуды периодической составляющей здесь равна $1.538a_{\min}$. Проводилось исследование на поиск 2-солитонов с минимальным числом периодов короткой волны между ними (см. п. 4.2) путем вариации параметра a , при дальнейшем его увеличении больше сблизить их не удастся.

Проблемы взаимодействия уединенных волн здесь не рассматриваются, понятия солитон и уединенная волна – синонимы.

Были проведены также расчеты решений уравнений (2.1), описывающие эволюцию локализованных начальных данных при $\theta > \theta_c$. Использовались данные в виде быстрой магнитозвуковой 1 : 1 уединенной волны, растянутой вдоль оси x в 10 раз. Амплитуда была взята близкой к максимально допустимой. Использовалась численная схема с центральными разностями для пространственных переменных и аппроксимацией временных производных методом Рунге–Кутты четвертого порядка. Эта схема была исследована в [12], было показано, что она сама способна устранить опрокидывание магнитозвуковых волн за счет схемной дисперсии. В расчете со временем происходили рост амплитуды и распад на последовательность уединенных волн. Амплитуда первой волны цуга волн оказалась больше максимально допустимой, т.е. опрокидывание устранено численной схемой. Амплитуды других волн допустимые, часть из них со временем соответствует 1 : 1 уединенным волнам, а часть – обычным. Принципиальных отличий в поведении этих двух типов уединенных волн в случае эволюции локализованных начальных данных не было. При уменьшении амплитуды начальных данных первая волна имела допустимую амплитуду.

Отметим, что скорость первой, схемной волны была заметно больше скорости последующих волн и она начинала отделяться от них. Это один из способов визуально выявить опрокидывание волны при численных расчетах с использованием данной численной схемы, не делая расчеты с



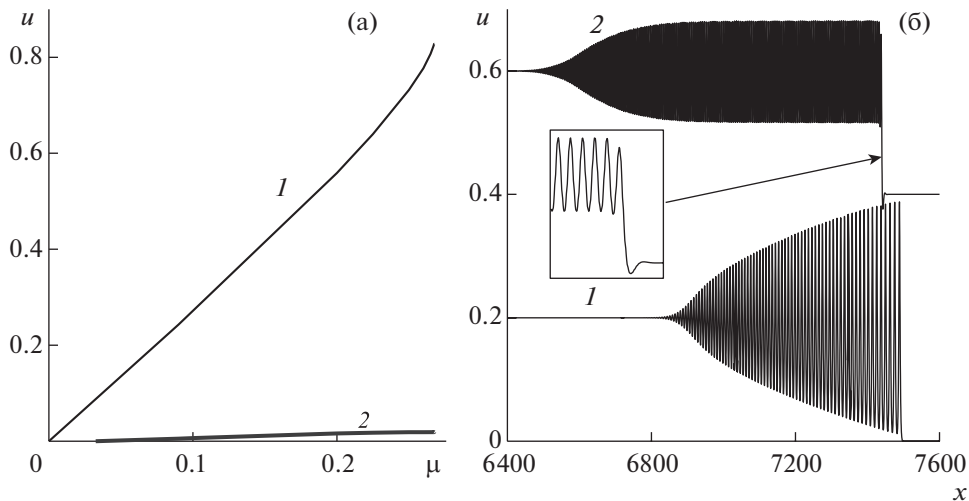
Фиг. 3

разным пространственным шагом (длина схемных волн коррелирует с пространственным шагом схемы). Поэтому при расчетах для систем с дисперсией задачи о распаде разрыва в случае расширяющихся структур солитонного типа при схемной коррекции опрокидывания может возникать огибающая волновых зон неестественного вида с уменьшением угла наклона вблизи границы за счет конкуренции схемной дисперсии и дисперсии уравнений, что также позволяет заподозрить опрокидывание.

4.2. Структуры разрывов быстрых магнитозвуковых волн

Основной задачей данной работы является анализ возможных бездиссипативных структур разрывов. Учитывая, что структуры разрывов можно получить как предельные последовательности уединенных волн, на фиг. 1 качественно можно ориентироваться и при оценке существования структур разрывов при условии, что правая часть этих структур в случае волн, бегущих вправо, ассоциирована с состоянием равновесия 1. Так, область 1 можно считать точной областью структур солитонного типа. Область 2 — приблизительно областью структур разрывов с излучением, но кривая L_3 определяет границу этой области точно. Структура с излучением возникает сразу в области выше кривой L_3 при $\theta > \theta_c$, поскольку при переходе через эту кривую возникает сразу бесконечно много 1 : 1 уединенных волн. В окрестности же кривой L_4 есть только две 1 : 1 уединенные волны, поэтому структура с излучением возникает при больших значениях μ , чем на этой кривой. На фиг. 1 условно показана кривая L_5 , ограничивающая область этих структур. Наличие таких структур подтверждается также расчетами задачи о распаде начального разрыва для исходных уравнений в частных производных, где эти структуры являются локальными элементами расширяющихся со временем бездиссипативных структур. В области 3, а также в области 2 вблизи кривой L_4 при расчетах исходных уравнений без диссипации возникает нестационарная хаотическая структура. При этом в случае включения диссипации в области 3 при не слишком больших значениях μ наблюдаются стационарные решения, которые можно интерпретировать как решения с внутренними структурами типа перехода между периодическим и двоякопериодическим состоянием.

При анализе методом 4 для заданного значения скорости разрыва можно рассматривать две равноценные точки равновесия, связанные соотношениями (2.2) (верно как в случае быстрого магнитозвукового разрыва, так и медленного). В связи с этим при $\theta < \theta_c$ и $\mu > 0$ можно выявить таким способом обобщенные быстрые магнитозвуковые уединенные волны и структуры разрывов с исходной точкой равновесия 1, ассоциированной с двухпериодными линейными волнами, а в случае $\mu < 0$ — с однопериодными. При использовании метода 3 непосредственно доступны



Фиг. 4

только обобщенные уединенные волны, у которых подошва ассоциирована с исходной точкой равновесия 1. Используя (2.2), можно найти и вторую точку равновесия, применить к ней метод 3 и найти соответствующие решения при $\mu > 0$. Именно они представляют интерес, когда рассматриваются расширяющиеся со временем бездиссипативные структуры быстрых магнитозвуковых волн, бегущих вправо, если правая сторона ассоциируется с точкой равновесия 1. Заметим также, что ориентируясь на вторую точку равновесия, можно найти методами 1–3 обычные и 1 : 1 уединенные волны при $\mu < 0$. В области $\mu < 0$ можно построить кривые L_{1-4} , аналогичные L_{1-4} , ограничивающие области 1'–3'. Причем при малых значениях $|\mu|$ их можно построить зеркальным отражением относительно оси θ .

Ранее было установлено (см. [7]), что так называемая бездиссипативная структура разрыва с излучением (переход между однородным и периодическим состояниями) может быть найдена как предельное решение последовательности мультисолитонных решений при увеличении числа солитонов. Три мультисолитонных решения из этой последовательности (односолитонное, двухсолитонное и трехсолитонное) показаны на фиг. 2в–д. Графики на фиг. 3 соответствуют односолитонному и двухсолитонному решениям из этой последовательности. Нет существенной разницы для максимального значения u для односолитонного, двухсолитонного и трехсолитонного решений. Нет также существенной разницы для минимального значения u в области между гребнями в случае двухсолитонного решения с близко расположенными гребнями и трехсолитонного решения (см. фиг. 2г). На фиг. 4а показана зависимость от μ амплитуды на гребне волны (кривая 1) в случае обычной или 1 : 1 уединенной волны и амплитуда в центре симметрии (кривая 2) для двухсолитонного решения с близко расположенными гребнями (см. фиг. 2в,г), $\theta = 1.55 > \theta_c$. Поэтому, используя фиг. 4а, мы можем определить зависимость от μ амплитуды уединенной волны в солитонной структуре на начальном интервале значений μ и зависимость от μ для максимального (кривая 1) и минимального (кривая 2) значений u для периодического состояния в случае структуры разрыва с излучением. Мы можем определить также максимальное значение μ , при котором такое решение существует. На фиг. 4б показаны расширяющиеся со временем бездиссипативные структуры с локальной структурой с излучением на границе волновой зоны при $\theta = 1.55$ (кривая 1) и $\theta = 1.53$ (кривая 2, смещена по вертикали), $t = 2500$. Начальные данные брались в виде сглаженной ступеньки. В первом случае структура близка к солитонной, поскольку минимальное значение u в периодическом состоянии, согласно фиг. 4а, невелико. Во втором случае четко виден однородный периодический участок и затухающие при увеличении x колебания справа. Эти колебания хорошо заметны для 1 : 1 мультисолитонов при $\theta < \theta_c$, пределом последовательности которых является данная структура.

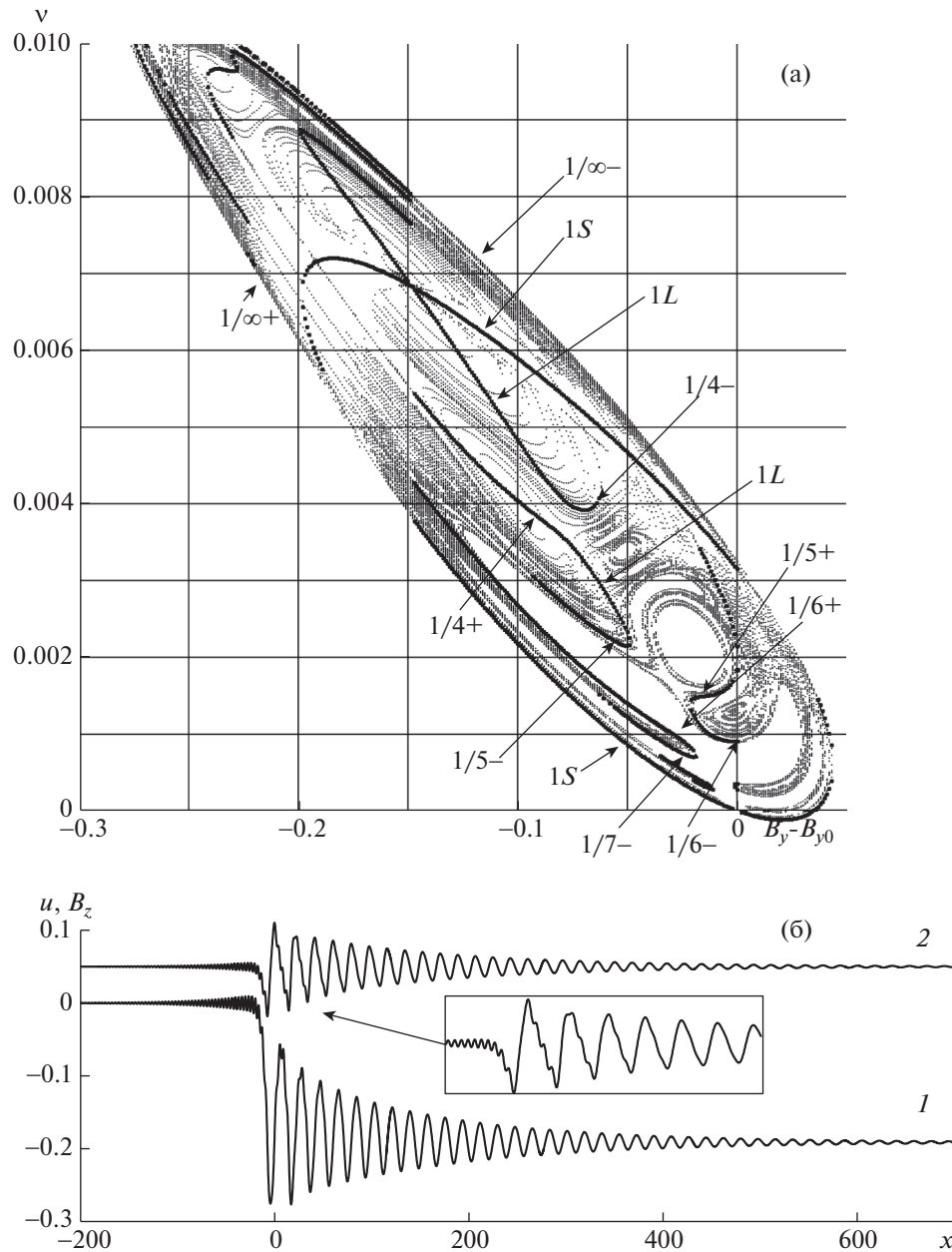
Как ясно из фиг. 1, структуры разрывов солитонного типа и с излучением существуют только для ограниченных значений μ . Эти результаты соответствуют результатам работы [12], где было обнаружено, что из-за исчезновения дисперсии для коротких волн ($\partial^2\omega/\partial k^2 \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$)

классическое решение рассматриваемых уравнений существует не при всех начальных данных, и может иметь место опрокидывание волны, требующее рассмотрения обобщенного решения или включения газодинамической или магнитной вязкостей.

В [8] детально исследовалось расположение ветвей периодических решений в случае уравнения Кортевега—де Вриза с производной пятого порядка, являющегося модельным для описания слабонелинейных быстрых магнитозвуковых волн вблизи θ_c . Исследования для ЭМГД подтвердили, что расположение ветвей аналогично их расположению в [8]. На фиг. 5а показан пример расположения ветвей периодических решений для $\theta = 1.52$, $\mu = -0.1$. Точки с $p = 1$ сделаны более жирными. Отрицательное значение μ взято для удобства применения метода 3 для получения обобщенных уединенных волн с малой амплитудой периодической компоненты, при положительном μ картина расположения ветвей аналогичная, только начало координат в другой точке равновесия. Решения в виде обобщенных уединенных волн при методе 4 получаются несколько смещенными относительно решений, получаемых методом 3 при одних и тех же значениях μ и θ , состоянию 1 соответствуют гребни или впадины периодических решений, но при малых амплитудах периодической компоненты это не существенно. На ветви различного типа указывают стрелки с обозначениями. Из точки равновесия выходят эллипсообразная коротковолновая (1S) и длинноволновая (1L) ветви. Длинноволновая состоит из нескольких частей, ее пересекают ветви с рациональным соотношением длин волн (резонансные ветви). Ветви с целым отношением периодов обозначены по образцу $1/n\pm$, n — целое число, обозначающее отношение длин волн, знак плюс обозначает, что расположение волн синфазное, а минус — противофазное, $1/\infty\pm$ — предельные ветви обобщенных уединенных волн. Длинноволновая ветвь может рваться при пересечении ее с ветвью с целым соотношением длин волн. При $\mu \rightarrow 0$ значение n для первого разрыва ветви стремится к бесконечности. При увеличении $|\mu|$, как и в случае уравнения Кортевега—де Вриза с производной пятого порядка (см. [8]), наступает момент, когда исчезает пересечение в точке равновесия 1L и 1S ветвей и возникают спиральные ветви, указывающие на наличие 1 : 1 уединенных волн.

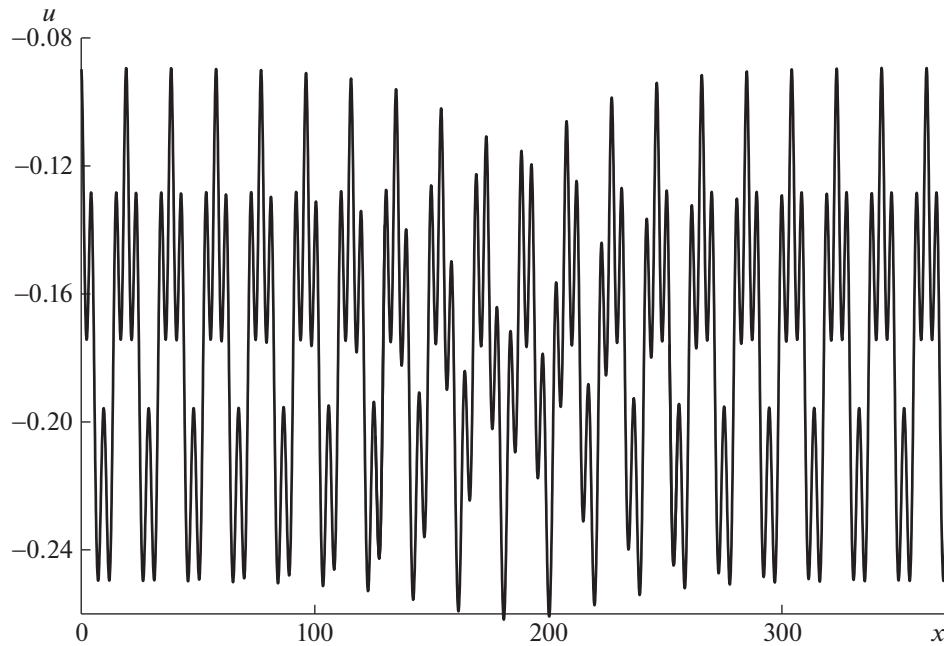
Можно допустить, что существует переход (структура разрыва) между ветвями с целым отношением длин волн и коротковолновой ветвью. Тогда, если такой переход существует в точке разрыва ветви, то как в диссипативном, так и слабодиссипативном случае можно построить решение усредненных уравнений, описывающее решение с длинноволновой и коротковолновой волновыми зонами. При включении слабой, но конечной диссипации в расчетах задачи о распаде разрыва действительно можно наблюдать такие структуры внутри слабодиссипативной стационарной структуры разрыва при расчете уравнений в частных производных. Переход в таких решениях соответствует точке сочленения длинноволновой ветви с коротковолновой с целым отношением периодов, поскольку графики решений, соответствующие длинноволновой ветви вблизи точки перехода к резонансной ветви выглядят как двоякопериодические. Поэтому внутри стационарной слабодиссипативной структуры может возникать бездиссипативная структура типа перехода между периодическим и двоякопериодическим состояниями с минимальным значением амплитуды периодического состояния. По мере уменьшения $|\mu|$ отношение периодов волн в двоякопериодическом состоянии увеличивается. При этом в зависимости от начальных данных могут наблюдаться структуры с разным отношением периодов. В случае отсутствия диссипации наблюдается решение стохастического типа. При уменьшении диссипации может наблюдаться промежуточное нестационарное решение с периодическими колебаниями.

Объясним, в чем причина такого поведения на примере расположения ветвей, показанного на фиг. 5а. Длинноволновая ветвь, исходящая из точки равновесия, рвется при резонансе $1/4-$, и переходит в резонансную противофазную двухволновую ветвь. Ветвь называется неустойчивой, если при небольшом возмущении начальных данных возможен значительный уход от периодического или двоякопериодического решений. Переход на коротковолновую ветвь возможен только для неустойчивых ветвей. Синфазная ветвь с резонансом $1/4-$ оказалась неустойчивой, $1/4+$ — устойчивой. Противофазная ветвь $1/5-$ неустойчивая, как и более удаленные ветви, но уединенных волн с участком, как-то аппроксимирующим волны этой ветви, обнаружено не было. Для синфазной ветви $1/5+$ и противофазной $1/6-$ выявлен только 2-солитон (фиг. 4а, сплошная и штриховая линии), у которого область между гребнями аппроксимирует волны этой ветви. А для синфазной $1/6+$ ветви и противофазной $1/7-$ выявлены уже 5-солитоны (2-, 3-, 4-солитоны тоже есть), аппроксимирующие структуры перехода между периодическим и двоякопериодическим состояниями (фиг. 4б, сплошная и штриховая линии). Можно предположить, что суще-



Фиг. 5

ствуют и точные решения для соответствующих структур разрывов. Таким образом, наличие разрыва длинноволновой ветви не согласовано с наличием соответствующей структуры перехода между длинноволновой и коротковолновой зонами. Наличие диссипации компенсирует это, возникает решение, в котором такая структура может рассматриваться лишь как приближенная. Соответственно в чисто бездиссипативном случае построить решение усредненных уравнений невозможно и возникает нестационарное решение. На фиг. 6б показаны графики u (кривая 1) и B_z (кривая 2, смещена по вертикали) для стационарного решения (2.1) при $\mu = 0.1$ и начальными данными, согласно (2.2), с использованием магнитной вязкости $\nu_m = 0.02$. Решение получено методом установления: скорость по обе стороны разрыва в начальных данных уменьшалась на величину V , на фиг. 5б скорость u увеличена на V по сравнению с расчетной. Соотношение длин волн на внутренней структуре разрыва здесь оценивается как $1/5-$. При меньших значениях вязкости становятся заметны периодические колебания амплитуды волны слева. Соотношение длин волн в нестационарном бездиссипативном решении близко к $1/6-$.

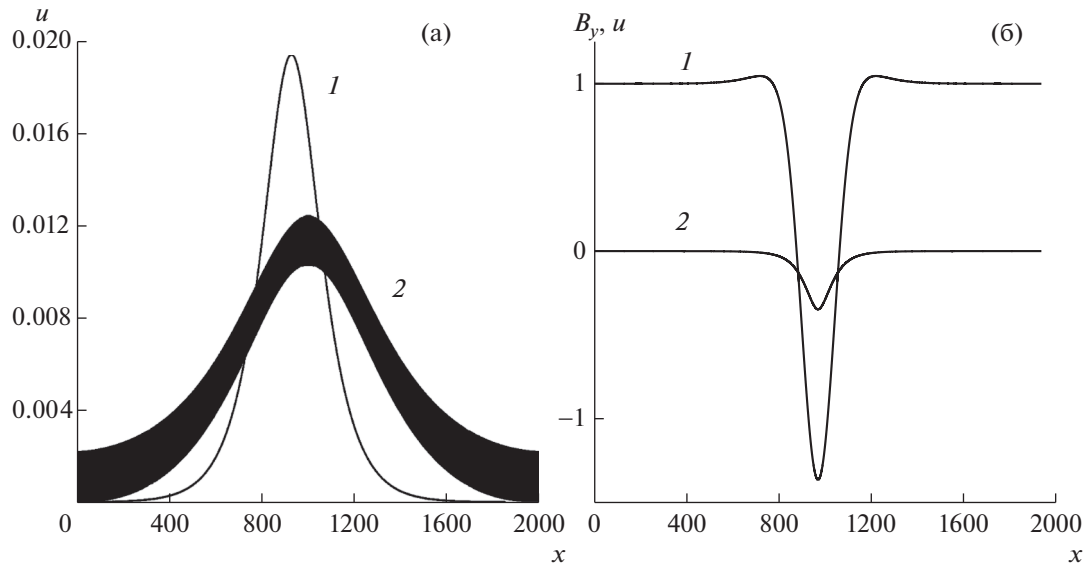


Фиг. 6

На фиг. 6 показан пример возникновения для ветви $1/4$ - уединенной волны огибающей фазовых колебаний двухволнового решения как результат развития неустойчивости, но возможен и уход к бесконечным значениям величин. Можно предположить, что существует и точное аналогичное солитонное решение (не солитон огибающей) подобно тому, как в окрестности кривой L_4 есть точные решения в виде $1 : 1$ солитонов, приближенно описываемые как уединенные волны огибающей нелинейного уравнения Шрёдингера. Отметим, что уединенные волны огибающей двухволновых решений с фазовыми колебаниями для обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривались ранее (см. [15]). В [16] для исследования резонансных двоякопериодических решений применялся метод усреднения, позволяющий утверждать, что среди таких решений возможны и структуры перехода между одним значением фазового сдвига к другому значению (среди решений усредненных уравнений есть переходы от одного гиперболического состояния равновесия к другому). Можно в принципе допустить по аналогии с обычными солитонными расширяющимися структурами и существование расширяющихся нестационарных структур фазовых колебаний солитонного типа или аналогичных стационарных слабодиссипативных решений.

4.3. Медленные магнитозвуковые и альвеновские колебательные волны

Для медленных магнитозвуковых волн можно допустить наличие обобщенных уединенных волн и структур разрывов типа переходов между периодическим и двоякопериодическим состояниями. В расчетах уравнений в частных производных они не наблюдались (см. [12]), не было также излучения коротких колебательных альвеновских волн на медленных магнитозвуковых разрывах. В случае медленных магнитозвуковых волн метод 3 показывает отсутствие обобщенных уединенных волн. Для уточнения было предпринято исследование методом 4. В процессе исследования проводились расчеты с постепенным увеличением значения μ , $\mu > 0$. Если имеется пересечение прямой, соответствующей фазовой скорости, с альвеновской дисперсионной ветвью, то выявляется наличие одноволновой ветви альвеновских колебательных волн, проходящей через точку равновесия. Амплитуда этих волн ограничена. На концах ветви не было обнаружено солитонных решений или заострения гребней волн. Тем не менее альвеновские колебательные волны нелинейные, поскольку ветвь все же отличается от прямой линии. Кроме того, имеются еще комбинированные двухволновые ветви, соответствующие резонансу медленных магнитозвуковых и альвеновских колебательных волн. Согласно проведенному исследованию, ветвь медленных магнитозвуковых волн практически доходит до точки равновесия при умерен-



Фиг. 7

ных значениях μ , поэтому можно получить решение, почти неотличимое от солитонного. При увеличении μ выявляется его критическое значение ($\mu_* \approx 0.73$ при $\theta = 1.525$), при котором медленных магнитозвуковых волн нет, остается только альвеновская ветвь. Только при значениях μ , близких к критическому значению, становится заметно, что вблизи точки равновесия есть только колебательная альвеновская ветвь, и одноволновая медленная магнитозвуковая ветвь отделена от альвеновской, а точка на медленной магнитозвуковой ветви, максимально приближенной к точке равновесия, соответствует двоякопериодическое решение, похожее на обобщенную уединенную волну. На фиг. 7а показаны соответствующие решения при $\mu = 0.65$ (кривая 1) и $\mu = 0.72$ (кривая 2), $\theta = 1.525$. Кривая 2 на самом деле состоит из множества коротких альвеновских колебаний, сливающихся в жирную линию, фактически видны только огибающие сверху и снизу. Каждое альвеновское колебание детально рассчитывалось, на него приходится порядка 150–300 пространственных шагов методом Рунге–Кутты второго порядка. При рассмотрении графика величины w (на графиках v и w колебаний практически нет) четко видно, что при $\mu = 0.72$ это не уединенная, а периодическая волна. Если допустить, что и при малых значениях μ медленная магнитозвуковая ветвь и резонансные ветви отделены от точки равновесия, то точного решения в виде обычной или обобщенной уединенной волны при малых значениях μ нет, если же обобщенная уединенных волн существует, то минимальная амплитуда ее периодической компоненты настолько мала, что ее невозможно определить численно.

Отметим также, что на некотором диапазоне значений μ , помимо приближенного медленно-го магнитозвукового солитонного решения, выявляется еще одно приближенное солитонное решение с нетипичным профилем (фиг. 8б), $\mu = 0.575$ (при меньших значениях μ такого решения нет, при увеличении μ решение принимает вид двоякопериодической волны, как и на фиг. 8а, кривая 2) на графике B_y два максимума и один минимум (кривая 1), график величины u (кривая 2) имеет вид солитон–яма, а не солитон–горб, как на фиг. 8а. Наличие двух солитонных решений с одним состоянием у подошвы одновременно возможно, если есть три точки равновесия, как, например, у модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза с кубической нелинейностью (см. [7]). В связи с тем, что такое решение наблюдалось только при большой нелинейности, соотносить его с какими-либо волнами, описываемыми линейным дисперсионным соотношением, невозможно, судя по длине волны, оно скорее имеет отношение к медленным магнитозвуковым волнам. Дополнительным аргументом в пользу этого утверждения может служить то, что анализ бифуркаций решений (2.2) при изменении μ показывает, что эта уединенная волна связана с состоянием равновесия, ответвляющимся при $\mu \approx 0.875$ от состояния, ассоциированного с медленными магнитозвуковыми разрывами в МГД. Вообще же выявляется до четырех состояний равновесия системы (3.1), не всегда они физически реальные, бывают и с $n < 0$.

Эти исследования показывают, что малое значение минимальной амплитуды коротковолновой периодической составляющей не обязательно связано с малой амплитудой солитонной или длинноволновой компоненты. Это связано с малым отношением длин. Длину уединенной волны можно определить по уровню половины от амплитуды. Но приближение к значениям амплитуды, при которых могло бы быть заострение гребня уединенной волны, приводит к росту коротковолновой составляющей в разложении Фурье для медленной магнитозвуковой компоненты и соответственно к увеличению минимальной амплитуды альвеновской составляющей.

В случае дальнейшего увеличения скорости, $V > V_a = \cos \theta$, и возникновения двукратного пересечения при $k > 0$ прямой, соответствующей фазовой скорости, с альвеновской дисперсионной ветвью, выявляются коротковолновая и длинноволновая, а также двоякопериодические резонансные ветви альвеновских колебательных волн, их амплитуда ограничена. После прохождения значения V , где $\omega/k = \partial\omega/\partial k$ при $k > 0$, альвеновские волны исчезают.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследовано существование различных типов уединенных волн и структур разрывов в зависимости от параметров угла наклона магнитного поля и фазовой скорости. Установлено, что структуры разрывов солитонного типа и с излучением существуют для ограниченных значений амплитуд разрывов. Это подтверждает ранее выявленный факт, что классические решения для уравнений электромагнитной гидродинамики существуют не при всех начальных данных, поскольку возникает опрокидывание волн (см. [12]). Установлено, что возникновение нестационарных структур стохастического типа для быстрых магнитозвуковых волн связано с отсутствием необходимой внутренней структуры перехода между короткими и длинными волнами. Установлено, что для медленных магнитозвуковых волн в случае малых и умеренных амплитуд существуют решения, практически неотличимые от солитонных, что подтверждают результаты работы [12], где наблюдались расширяющиеся структуры солитонного типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Логос, 2005. 328 с.
2. Kakutani T., Ono H., Taniuti T., Wei C. Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation. II. Application to hydromagnetic waves in a cold plasma // J. Phys. Soc. Japan. 1968. V. 24. P. 1159–1166.
3. Kakutani T., Ono H. Weak nonlinear hydromagnetic waves in a cold collision-free plasma // J. Phys. Soc. Japan. 1969. V. 26. P. 1305–1318.
4. Ильичев А.Т. Уединенные волны в моделях гидромеханики. М.: Физматлит, 2003. 256 с.
5. Бахолдин И.Б., Жарков А.А., Ильичев А.Т. Распад солитонов в изотермической бесстолкновительной квазинейтральной плазме с изотермическим давлением // ЖЭТФ. 2000. Т. 118. № 1. С. 125–141.
6. Гавриков М.Б. Двухжидкостная гидродинамика. М.: URSS КРАСАНД, 2018. 578 с.
7. Бахолдин И.Б. Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды. М.: Физматлит, 2004. 318 с.
8. Бахолдин И.Б. Стационарные и нестационарные структуры разрывов для моделей, описываемых обобщенным уравнением Кортевега–Бюргера // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 2. С. 271–302.
9. Бахолдин И.Б. Теория и классификация обратимых структур разрывов в моделях гидродинамического типа // ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 6. С. 833–852.
10. Бахолдин И.Б. Бездиссипативные разрывы для магнитозвуковой ветви холодной плазмы // Физ. плазмы. 2000. Т. 26. № 1. С. 1–8.
11. Bakholdin I.B. Magnetosonic solitary waves and jumps in a cold plasma. Advances in plasma physics research. V. 1. New York: Nova Sci. Publ., 2001. P. 97–106.
12. Бахолдин И.Б. Анализ уравнений двухжидкостной плазмы в приближении электромагнитной гидродинамики и структур разрывов в их решениях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 68. № 3. С. 458–474.
13. Buffoni B., Champneys A.R., Toland J.F. Bifurcation and coalescence of a plethora of homoclinic orbits for a Hamiltonian system // J. Dynam. Diff. Eq. 1993. V. 8. P. 221–281.
14. Lombardi E. Orbits homoclinic to exponentially small periodic orbits for a class of reversible systems // Arch. Rat. Mech. Anal. 1997. V. 137. 227–304.
15. Бахолдин И.Б. Нелинейные резонансы и волновые разрывы в средах с дисперсией высокого порядка // Изв. РАН Мех. жидк. и газов. 1996. № 4. С. 113–124.
16. Арнольд В.И. Математические методы классической механики, 3-е изд. М.: Наука, 1989, 472 с.

О ПРИБЛИЖЕНИИ ДВУМЯ ШАРАМИ ТВЕРДОГО ТЕЛА,
БЛИЗКОГО К ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОМУ¹⁾© 2022 г. А. А. Буров^{1, *}, В. И. Никонов^{1, **}¹ 119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: jtm@narod.ru

**e-mail: nikon_v@list.ru

Поступила в редакцию 22.05.2022 г.
Переработанный вариант 27.06.2022 г.
Принята к публикации 04.08.2022 г.

Рассматривается твердое тело, близкое к динамически симметричному. Исследуется вопрос о том, как приблизить это тело системой из двух однородных шаров, чтобы для исходного тела и его приближения совпали бы компоненты тензора Эйлера–Пуансо вплоть до третьего порядка, а моменты инерции тела были бы хорошо приближены моментами инерции системы из двух шаров. В качестве примера рассмотрены астероиды (1620) Географ и (25143) Итокава. Библ. 40. Табл. 1.

Ключевые слова: приближение поля притяжения, малые небесные тела, астероиды, массово-инерционные характеристики, тензоры инерции старших порядков.

DOI: 10.31857/S0044466922120055

Приближение потенциала притяжения динамически симметричного тела потенциалом притяжения пары точек представляет интерес благодаря тому, что задача о движении точки в поле двух неподвижных притягивающих центров вполне интегрируема. Идея приближения поля притяжения динамически симметричного твердого тела полем притяжения двух массивных точек восходит к работам М.Д. Кислика [1], [2], Е.П. Аксенова, Е.А. Гребеникова и В.Г. Демина [3], [4], J.P. Vinti [5] (см. также [6]–[9]). Было получено правило, позволяющее вычислять для такого приближения расстояния между такими точками, а также из массы. В частности, было установлено, что в зависимости от распределения масс тела концы возникающей в рамках такого рассмотрения гантели, могут оказаться разнесенными в комплексную область, а сосредоточенные в них массы могут оказаться комплексными.

Интегрирование уравнений движения точки в поле притяжения двух притягивающих центров методом разделения переменных выполнено Л.Эйлером [10]. Систематическое исследование зависимости движений от параметров задачи было выполнено В.М. Алексеевым [11]. Исследованию различных аспектов движения точки в поле притяжения равномерно вращающейся или прецессирующей гантели посвящен ряд работ В.В. Белецкого и А.В. Родникова [12]–[14].

1. ОСНОВОПОЛАГАЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Пусть \mathcal{B} – динамически симметричное твердое тело массой m с центром масс в точке O , осевой и экваториальными центральными моментами инерции которого равны I_a и I_e соответственно. Пусть $Oxyz$ – связанная с этим телом система координат, ось Oz которой направлена вдоль оси динамической симметрии. Как известно (см., например, [8]), разложение в ряд потенциала притяжения такого тела представимо в виде

$$U = -G \frac{m}{r} \left(1 + \sum_{k \geq 2} J_k \left(\frac{R}{r} \right)^k P_k(\sin \varphi) \right), \quad (1.1)$$

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 22-21-00297).

где G – гравитационная постоянная, m – масса тела, R – характерный размер тела, например, радиус шара, объем которого совпадает с объемом тела, r – расстояние от центра масс тела до изучаемой точки, φ – “географическая широта” изучаемой точки (отстоящей от центра масс тела на расстоянии r), J_k – безразмерные постоянные, $P_k(\cdot)$ – многочлены Лежандра.

Пусть теперь \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 – однородные шары массами m_1 и m_2 и радиусами r_1 и r_2 , центры которых во введенной системе координат задаются как $C_1 = (0, 0, c_1)$ и $C_2 = (0, 0, c_2)$. Так как поле притяжения однородного шара вне него совпадает с полем притяжения массивной точки, расположенной в его центре и имеющей ту же массу, что и сам шар, то для системы двух шаров разложение, аналогичное (1.1), имеет вид

$$U = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r} \left(1 + \sum_{k \geq 1} \frac{\gamma_k}{r^k} P_k(\sin \varphi) \right), \quad \gamma_k = \frac{m_1 c_1^k + m_2 c_2^k}{m_1 + m_2}. \quad (1.2)$$

Следуя перечисленным выше работам, потребуем совпадения первых четырех коэффициентов в разложениях (1.1) и (1.2). Соответствующие равенства примут вид:

$$m_1 + m_2 = m \quad (1.3)$$

(уравнение на совпадение масс);

$$m_1 c_1 + m_2 c_2 = 0 \quad (1.4)$$

(условие совпадения центров масс);

$$m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2 = m J_2 R^2, \quad (1.5)$$

$$m_1 c_1^3 + m_2 c_2^3 = m J_3 R^3 \quad (1.6)$$

(условия совпадения коэффициентов во втором и третьем слагаемых разложения потенциала).

Решение системы (1.3)–(1.6) имеет вид (ср., например, [8], [9])

$$c_1 = \left(\frac{J_3}{2J_2} + \sqrt{D} \right) \frac{R}{2}, \quad c_2 = \left(\frac{J_3}{2J_2} - \sqrt{D} \right) \frac{R}{2}, \quad D = \left(\frac{J_3}{2J_2} \right)^2 + 4J_2, \quad (1.7)$$

$$m_1 = \frac{m c_2}{c_2 - c_1} = \frac{m}{2\sqrt{D}} \left(\sqrt{D} - \frac{J_3}{2J_2} \right), \quad m_2 = -\frac{m c_1}{c_2 - c_1} = \frac{m}{2\sqrt{D}} \left(\sqrt{D} + \frac{J_3}{2J_2} \right). \quad (1.8)$$

Причем в зависимости от знака дискриминанта D найденные решения могут быть либо вещественными, либо комплексными. В рассмотренных в дальнейшем примерах дискриминант D оказался положительным, и поэтому детали теории для случая отрицательного D специально обсуждаться не будут.

Заметим, что система, образованная двумя массами, сосредоточенными в точках, неудовлетворительно приближает распределение масс реальных тел: для нее осевой момент инерции равен нулю. В случае, когда вместо точек рассматриваются однородные шары, это уже не так. Поэтому дополнительно потребуем совпадения осевых моментов рассматриваемого тела и системы из двух шаров:

$$\frac{2}{5} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) = I_a. \quad (1.9)$$

Остается подставить в соотношение (1.9) выражения для масс из (1.8) и каким-либо образом дополнить соотношение (1.9), которое будет рассматриваться как уравнение на радиусы шаров. Тому, как это можно сделать, посвятим следующий раздел.

Замечание 1. Если осевой момент инерции I_a системы двух шаров определен, то экваториальный момент инерции I_e определяется из соотношения

$$I_e = m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2 + I_a. \quad (1.10)$$

Заметим также, что в силу (1.9) и (1.10) получаем

$$I_e - I_a = m J_2 R^2. \quad (1.11)$$

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАДИУСОВ ШАРОВ, ПРИБЛИЖАЮЩИХ ТЕЛО

Согласно (1.7) расстояние между центрами шаров определяется из соотношения

$$|C_1 C_2| = |c_1 - c_2| = \sqrt{D} R. \quad (2.1)$$

В дальнейшем, если не сказано противоположное, ограничимся рассмотрением случая $D > 0$. Естественно предположить, что шары не пересекаются, т.е. выполнено условие

$$r_1 + r_2 \leq \sqrt{D} R. \quad (2.2)$$

Естественно рассматривать решение относительно (r_1, r_2) системы, образованной уравнением (1.9) и неравенством (2.2).

Ограничимся рассмотрением случая, когда шары касаются. В этом случае неравенство (2.2) обращается в равенство, из которого можно выразить одну из неизвестных, например,

$$r_1 = \sqrt{D} R - r_2. \quad (2.3)$$

Подстановка этого выражения в уравнение (1.9) дает

$$\frac{2}{5} \left(m_1 (\sqrt{D} R - r_2)^2 + m_2 r_2^2 \right) = I_a. \quad (2.4)$$

Приводя подобные члены, имеем

$$(m_1 + m_2) r_2^2 - 2m_1 \sqrt{D} R r_2 + m_1 D R^2 - \frac{5}{2} I_a = 0, \quad (2.5)$$

откуда после учета соотношений (1.7) и (1.8) имеем

$$r_2^\pm = \frac{1}{m} \left(\frac{m}{2} \left(\sqrt{D} - \frac{J_3}{2J_2} \right) R \pm \sqrt{D_1} \right), \quad D_1 = m^2 R^2 \left(\frac{5}{2} \frac{I_a}{m R^2} - J_2 \right). \quad (2.6)$$

Радиус для первого шара находится из соотношения (2.3), имеем

$$r_1^\pm = \frac{m_2 \sqrt{D} R \mp \sqrt{D_1}}{m} \frac{1}{m} \left(\frac{m}{2} \left(\sqrt{D} + \frac{J_3}{2J_2} \right) R \mp \sqrt{D_1} \right).$$

Может быть предложен и иной подход к вычислению радиусов шаров. Будем считать, что поверхность тела \mathcal{B} задана триангуляционной сеткой \mathcal{G} с вершинами $P_\ell \in \mathcal{G}$. В частности, такими сетками, построенными в результате анализа данных фотометрии, приближают поверхности малых небесных тел. Так как центры шаров определены однозначно, то можно выделить из сетки множество вершин \mathcal{G}_1 , которые ближе к центру C_1 , и множество вершин \mathcal{G}_2 , которые ближе к центру C_2 . Ясно, что $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$, и в общем случае множества \mathcal{G}_1 и \mathcal{G}_2 , содержащие n_1 и n_2 вершин соответственно, не пересекаются.

Найдем расстояния от центра C_1 до каждой из точек множества \mathcal{G}_1 и от центра C_2 до каждой из точек множества \mathcal{G}_2 . Вычисленные расстояния составляют множества \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 соответственно. Для каждого из множеств \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 найдем средние значения \bar{r}_1 и \bar{r}_2 таких расстояний. Будем считать, что величины \bar{r}_1 и \bar{r}_2 приближают радиусы шаров \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 .

Замечание 2. Наряду со средними значениями \bar{r}_1 и \bar{r}_2 в качестве приближений радиусов шаров \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 можно воспользоваться медианами \hat{r}_1 и \hat{r}_2 , вычисленными по множествам \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 соответственно.

Замечание 3. В [15], см. также [16], [17], в рамках т.н. метода K -средних, радиусы \tilde{r}_1 и \tilde{r}_2 в качестве приближений радиусов шаров \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 определялись из итерационной процедуры. Прежде всего по триангулированной поверхности, приближающей поверхность небесного тела, строилось его разбиение на множество тетраэдров с общей вершиной в центре масс. Для каждого из построенных таким образом тетраэдров определялся его центроид. Далее, на первом шаге итераций за концы гантели принимались две точки тела, наиболее удаленные друг от друга. На следующем шаге множество центроидов разбивалось на два подмножества, в зависимости от того, к какой из концевых точек оказывался ближе тот или иной центроид и вычислялись барицентры каждого из построенных подмножеств. Эти барицентры принимались за концы гантели для следующей итерации, и процедура повторялась. Останов процедуры происходил после того, как расстояния между соответствующими концами гантели на текущем и предыдущем шаге оказы-

вались меньше наперед заданного значения точности. Для подмножеств, построенных в результате последней итерации, определялись объемы отвечающих им многогранников. Наконец, вычислялись величины \tilde{r}_1 и \tilde{r}_2 – радиусы шаров, отвечающих объемам указанных многогранников.

Замечание 4. Величины \bar{r}_1 и \bar{r}_2 , \hat{r}_1 и \hat{r}_2 , \tilde{r}_1 и \tilde{r}_2 позволяют оценить плотности ρ_1 и ρ_2 шаров \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 , которые предполагаются однородными:

$$\bar{\rho}_k = \frac{3m_k}{4\pi\bar{r}_k^3}, \quad \hat{\rho}_k = \frac{3m_k}{4\pi\hat{r}_k^3}, \quad \tilde{\rho}_k = \frac{3m_k}{4\pi\tilde{r}_k^3}, \quad k = 1, 2.$$

3. ОСРЕДНЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ ТЕЛА, БЛИЗКОГО К ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОМУ

Гравитационный потенциал твердого тела в общем виде может быть представлен как (см. [18], ср. [19])

$$U = -G \sum_{a+b+c=d} I_{abc} \frac{(-1)^d}{a!b!c!} \frac{\partial^d}{\partial x^a \partial y^b \partial z^c} \left(\frac{1}{r} \right), \tag{3.1}$$

где a, b, c – целые числа, $d = 0, 1, 2$, и I_{abc} – компоненты тензора Эйлера–Пуансо порядка d (см., например, [20]–[26]). В общем случае соотношение (3.1) не может быть представлено в виде (1.1). Но в случае, когда тело близко к динамически симметричному, вместо потенциала (3.1) можно рассмотреть потенциал, полученный из (3.1) в результате следующей процедуры осреднения. Пусть

$$x = r \cos \varphi \cos \theta, \quad y = r \cos \varphi \sin \theta, \quad z = r \sin \varphi. \tag{3.2}$$

Тогда осредненный по углу θ потенциал

$$\bar{U} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U|_{(3.2)} d\theta = -G \frac{m}{r} \left(1 + \sum_{k=2,3,4} J_k \left(\frac{R}{r} \right)^k P_k(\sin \varphi) + \dots \right), \tag{3.3}$$

примет вид (1.1). Коэффициенты J_2 и J_3 в выражении (3.3) определяются из соотношений

$$J_2 = \frac{1}{2} \frac{2I_{002} - I_{020} - I_{200}}{I_{000} R^2}, \tag{3.4}$$

$$J_3 = \frac{1}{2} \frac{2I_{003} - 3I_{021} - 3I_{201}}{I_{000} R^3}. \tag{3.5}$$

Для тела, вытянутого вдоль оси Oz , величина $J_2 > 0$, и $I_{002} > (I_{200} + I_{020})/2 - I_e$, что влечет положительность величины D из (1.7). Принимая во внимание соотношения (3.4) и (3.5) и $I_a = I_{200} + I_{020}$, величина D_1 из (2.6) принимает вид

$$D_1 = m^2 R^2 \left(\frac{5}{2} \frac{I_a}{mR^2} - J_2 \right) = m(3(I_{200} + I_{020}) - I_{002}) \tag{3.6}$$

и является положительной, в случае, если $I_{002} < 6I_e$. Таким образом, при $I_e < I_{002} < 6I_e$ соотношение (2.6) позволяет определить две пары вещественных радиусов концевых шаров гантели.

Замечание 5. Указанное осреднение приводит к потенциалу динамически симметричного тела с осью динамической симметрии Oz . Циклическая перестановка величин x, y, z , а также индексов a, b, c коэффициентов I_{abc} с последующим осреднением по θ приводит к случаям, когда ось динамической симметрии – это ось Ox , а затем ось Oy .

Замечание 6. Осреднение становится осмысленным, если рассматриваемое тело мало отличается от динамически симметричного, но в строгом смысле не является таковым.

Замечание 7. [“let’s cut corners” (англоязычная идиома “to cut corners” \approx “делать что-либо быстро, но, возможно, в ущерб точности” [28])]. В публикации [27] предлагается “не срезать углы” при вычислении приближенного значения потенциала притяжения, что даже отражено в названии публикации. В настоящей работе мы, наоборот, “срезаем углы”, чтобы получить выражение, пригодное для применения описываемого подхода.

4. ПРИБЛИЖЕНИЯ МАЛЫХ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

Осуществим описанные выше вычисления для астероидов (1620) Географ [29], [30] и (25143) Итокава [31], [32] (см., также, [33]) в предположении, что их поверхности моделируются в рамках полиэдрального представления, а плотность заключенного в них вещества постоянна. Так, астероид (1620) Географ представляется многогранником с 4092 треугольными гранями и 2048 вершинами, а астероид (25143) Итокава – многогранник с 3688 треугольными гранями и 1846 вершинами.

Для этого нам понадобятся следующие данные, касающиеся изучаемых тел: массы m_k , средние значения плотностей ρ_k и главные моменты инерции $\mathcal{F}_i|_k/m_k, i = 1, 2, 3$, отнесенные к массам. Эти данные собраны в табл. 1.

Рассматриваемые астероиды можно приближенно рассматривать как динамически симметричные тела с осевым моментом инерции $I_a = \mathcal{F}_1$ и экваториальным моментом инерции $I_e = (\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3)/2$, так как они обладают ярко выраженной вытянутой формой, а величины $\delta_k = \frac{|\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_3|}{I_e}|_k$, служащие мерой динамической асимметрии тела, невелики (см., например, данные в приведенной ниже табл. 1).

Опираясь на вычисленные ранее (см. [34]) значения компонент тензора Эйлера-Пуансо вплоть до четвертого порядка, из соотношений (3.4) и (3.5) находим величины $J_i, i = 2, 3, 4$,

Таблица 1. Параметры изучаемых астероидов и эквивалентных им гантелеобразных тел

Параметры	1620 Географ	25143 Итокава
m , (кг)	1.7736×10^{13}	4.6495×10^{10}
ρ , (кг/м ³)	2000	1950
\mathcal{F}_1/m , (м ²)	3.667×10^5	7.78×10^3
\mathcal{F}_2/m , (м ²)	1.381×10^6	2.291×10^4
\mathcal{F}_3/m , (м ²)	1.366×10^6	2.395×10^4
δ	0.0399	0.1338
I_a/m , (м ²)	3.667×10^5	7.78×10^3
I_e/m , (м ²)	1.374×10^6	2.343×10^3
R , (м)	1284	178.6
J_2R^2 , (м ²)	1.007×10^6	1.565×10^4
J_3R^3 , (м ³)	2.779×10^8	-2.406×10^5
J_4R^4 , (м ⁴)	2.276×10^{12}	4.586×10^8
m_1 , (кг)	8.263×10^{12}	2.396×10^{10}
m_2 , (кг)	9.477×10^{12}	2.253×10^{10}
c_1 , (м)	1074.91	121.31
c_2 , (м)	-936.93	-129.01
ℓ , (м)	2011.84	250.33
r_1^+ , (м)	–	59.676
r_1^- , (м)	–	182.963
\bar{r}_1 , (м)	1008.008	148.266
\hat{r}_1 , (м)	953.364	148.187
r_2^+ , (м)	–	190.651
r_2^- , (м)	–	67.364
\bar{r}_2 , (м)	1055.201	144.590
\hat{r}_2 , (м)	1032.485	143.622

см. табл. 1. Далее, согласно формулам (1.8), (1.7), определяем координаты концов гантели и массы на ее концах, см. табл. 1.

Замечание 8. Согласно (3.6), для астероида (1620) Географ величина $D_1/m \approx -0.09 < 0$ отрицательная, и, как следствие, определить вещественные значения радиусов r_1^\pm и r_2^\pm невозможно. Получающиеся их комплексные значения $r_1^\pm = 1074.91 \mp 300.73i$ и $r_2^\pm = 936.93 \pm 300.73i$ требуют дальнейшего осмысления.

Замечание 9. Вычисления показывают, что в случае, когда в качестве приближений радиусов шаров \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 принимаются величины \bar{r}_1 и \bar{r}_2 , то для обоих астероидов имеет место пересечение шаров \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 .

Замечание 10. Радиусам \hat{r}_1 и \hat{r}_2 для астероида (1620) Географ отвечают непересекающиеся шары \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 , а для астероида (25143) Итокава шары \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 пересекаются.

В случае, когда в тех или иных предположениях шары пересекаются, возможно, применимы результаты, изложенные в [35]. Это обстоятельство требует дальнейшего исследования.

Замечание 11. Одним из возможных способов проверки качества представления астероида с помощью гантелеобразного тела является сравнение точек либрации, найденных с помощью точного выражения для потенциала и с помощью его гантелеобразного приближения. Так, точки либрации, в частности для астероидов (1620) Географ и (25143) Итокава, изучались, например, в [36], [37].

Замечание 12. В качестве примеров контактно-двойных малых небесных объектов, которые могут быть представлены в виде двух шаров, следует указать такие кометы, как 67P Чурюмова–Герасименко, Галлея, Туттля, Борелли, Хартли (см., например, [38]), а также транснептуновый объект 2014 MU₆₉ Аррокот (см., например, [39], [40]).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Естественно, что рассматриваемое приближение, применяемое для того, чтобы была возможность представить движение космических аппаратов около изучаемых тел в явном виде, сильно загроубляет задачу. Уточнение потенциала, опирающееся на использование не двух, а трех или четырех шаров, несомненно улучшает качество приближения, но происходит это за счет утраты возможности аналитического интегрирования уравнений движения космического аппарата в окрестности рассматриваемых вращающихся гравитирующих тел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кислик М.Д. Движение искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли // Искусственные спутники Земли. 1960. Вып. 4. С. 3–17.
2. Кислик М.Д. Анализ интегралов уравнений движения искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли // Искусственные спутники Земли. 1963. Вып. 13. С. 23–52.
3. Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г. Обобщенная задача двух неподвижных центров и ее применение в теории движения искусственных спутников Земли // *Астрономический ж.* 1963. Т. 40. Вып. 2. С. 363–372.
4. Демин В.Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. М.: Наука, 1968.
5. Vinti J.P. Theory of an accurate intermediary orbit for satellite astronomy // *J. Res. Nat. Bur. Standards.* 1961. V. B65. № 3. P. 169–201.
6. Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. Перевод с английского В.К. Абалакина. М.: Мир, 1964.
7. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964.
8. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. М.: Наука, 1972.
9. Демин В.Г., Косенко И.И., Красильников П.С., Фурта С.Д. Избранные задачи небесной механики. Ижевск: РХД, 1999.
10. Euler L. Problème. Un corps étant attiré en raison réciproque quarrée des distances vers deux points fixes donnés trouver les cas où la courbe décrite par ce corps sera algébrique // *Mémoires de l'Acad. de Berlin.* 1760. P. 228–249.
11. Алексеев В.М. Обобщенная пространственная задача двух неподвижных центров: Классификация движений // *Бюллетень ИТА.* 1965. Т. 10. № 4(117). С. 241–271.

12. *Белецкий В.В.* Обобщенная ограниченная круговая задача трех тел как модель динамики двойных астероидов // *Космические исследования*. 2007. Т. 45. № 6. С. 435–442.
13. *Белецкий В.В., Родников А.В.* Об устойчивости треугольных точек либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел // *Космические исследования*. 2008. Т. 46. № 1. С. 42–50.
14. *Родников А.В.* Треугольные точки либрации обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел в случае комплексно-сопряженных масс притягивающих центров // *Нелинейная динамика*. 2014. Т. 10. Вып. 2. С. 213–222.
15. *Буров А.А., Герман А.Д., Распопова Е.А., Никонов В.И.* О применении k -средних для определения распределения масс гантелеобразных небесных тел // *Нелинейная динамика*. 2018. Т. 14. № 1. С. 45–52.
16. *Буров А.А., Герман А.Д., Никонов В.И.* Использование метода K -средних для агрегирования масс продолговатых небесных тел // *Космические исследования*. 2019. Т. 57. № 4. С. 283–289.
17. *Burov A.A., Guerman A.D., Nikonova E.A., Nikonov V. I.* Approximation for attraction field of irregular celestial bodies using four massive points // *Acta Astronautica*. 2019. V. 157. P. 225–232.
18. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. школа, 1970.
19. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968.
20. *Soler T.* A new matrix development of the potential and attraction at exterior points as a function of the inertia tensors // *Celestial mechanics*. 1984. V. 32. № 3. P. 257–296.
21. *Dobrovolskis A.R.* Inertia of Any Polyhedron // *Icarus*. 1996. V. 124. № 2. P. 698–704.
22. *Mirtich B.* Fast and Accurate Computation of Polyhedral Mass Properties // *Journal of Graphics Tools*. 1996. V. 1. № 2. P. 31–50.
23. *Буров А.А., Никонов В.И.* Вычисление потенциала притяжения астероида (433) Эрос с точностью до членов четвертого порядка // *Докл. РАН. Физика, технические науки*. 2020. Т. 492. № 1. С. 58–62.
24. *Burov A.A., Nikonov V.I.* Inertial characteristics of higher orders and dynamics in a proximity of a small celestial body // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2020. V. 16. № 2. P. 259–273.
25. *Буров А.А., Никонов В.И.* Чувствительность значений компонент тензоров Эйлера–Пуансо к выбору триангуляционной сетки поверхности тела // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2020. Т. 60. № 10. С. 1764–1776.
26. *Буров А.А., Никонова Е.А.* Производящая функция компонент тензора Эйлера–Пуансо // *Докл. РАН. Физика, технические науки*. 2021. Т. 498. С. 53–56.
27. *Werner R.A.* The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 1994. V. 59. P. 253–278.
28. Cambridge Learner's Dictionary English-Russian. Cambridge: Cambridge University Press. 2011.
29. *Ostro S.J., Jurgens R.F., Rosema K.D. et al.* Radar observations of asteroid 1620 Geographos // *Icarus*. 1996. V. 121. № 1. P. 46–66.
30. *Hudson R.S., Ostro S.J.* Physical Model of Asteroid 1620 Geographos from Radar and Optical Data // *Icarus*. 1999. V. 140. № 2. P. 369–378.
31. *Abe S., Mukai T., Hirata N. et al.* Mass and local topography measurements of Itokawa by Hayabusa // *Science*. 2006. V. 312. № 5778. P. 1344–1347.
32. *Gaskell R., Saito J., Ishiguro M. et al.* Gaskell Itokawa Shape Model V1.0. HAY-A-AMICA-5-ITOKAWASHAPE-V1.0. NASA Planetary Data System, 2008.
33. *Lages J., Shepelyansky D.L., Shevchenko I.I.* Chaotic Zones around Rotating Small Bodies // *Astronomical Journal*. 2017. V. 153. № 6. ArtNo. 272.
34. *Никонов В.И.* Гравитационные поля малых небесных тел. М.: ООО Белый ветер, 2020.
35. *Буров А.А., Герман А.Д., Косенко И.И., Никонов В.И.* О притяжении гантелеобразных тел, представленных парой пересекающихся шаров // *Нелинейная динамика*. 2017. Т. 13. № 2. С. 243–256.
36. *Wang X., Jiang Y., Gong Sh.* Analysis of the potential field and equilibrium points of irregular-shaped minor celestial bodies // *Astrophysics and Space Science*. 2014. V. 353. № 1. P. 105–121.
37. *Zeng X., Jiang F., Li J., Baoyin H.* Study on the connection between the rotating mass dipole and natural elongated bodies // *Astrophysics and Space Science*. 2015. V. 356. P. 29–42.
38. *Lages J., Shevchenko I.I., Rollin G.* Chaotic dynamics around cometary nuclei // *Icarus*. 2018. V. 307. P. 391–399.
39. *Stern S.A. et al.* Initial results from the New Horizons exploration of 2014 MU₆₉, a small Kuiper Belt object // *Science*. 2019. V. 364. № 6441. ArtNo. eaaw9771.
40. *Rollin G., Shevchenko I.I., Lages J.* Dynamical environments of MU₆₉ and similar objects // *Icarus*. 2021. V. 357. ArtNo. 114178.

A Novel Numerical Approach for Fredholm Integro-Differential Equations¹⁾

© 2022 г. Н. Г. Cakir^{1, *}, Ф. Cakir^{2, **}, М. Cakir^{3, ***}

¹ Department of Mathematics, Adyaman Universitesi, Adyaman, TR

² Department of Mathematics, Batman – Universitesi, Batman, TR

³ Department of Mathematics, Yüzüncü Yıl Universitesi, Van, TR

*e-mail: hcakir@adiyaman.edu.tr

**e-mail: firat.cakir@hotmail.com

***e-mail: cakirmusa@hotmail.com

Поступила в редакцию 22.05.2022 г.

Переработанный вариант 22.05.2022 г.

Принята к публикации 04.08.2022 г.

Новый численный метод решения интегродифференциального уравнения Фредгольма. Рассматривается численный метод решения линейного интегродифференциального уравнения Фредгольма второго порядка. Вводятся равномерная сетка и базисные функции на ней с использованием квадратур высокого порядка. Дается оценка скорости падения погрешности и приводятся численные результаты, подтверждающие эффективность алгоритма.

Ключевые слова: интегродифференциальное уравнение Фредгольма, разностные схемы, оценка погрешности.

DOI: 10.31857/S0044466922120067

¹⁾ Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.