СОДЕРЖАНИЕ

Том 498, 2021

ФИЗИКА

МЕХАНИКА

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

CONTENTS

Volume 498, 2021

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 498, с. 3–6

ФИЗИКА

УДК 535.372, 632.08

УЛЬТРАКОМПАКТНЫЙ ФЛУОРЕСЦЕНТНЫЙ ЛИДАР НА БАЗЕ ДИОДНОГО ЛАЗЕРА (405 нм, 150 мВт) ДЛЯ ЗОНДИРОВАНИЯ АКВАТОРИЙ И ПОДСТИЛАЮЩЕЙ С КВАДРОКОПТЕРА

© 2021 г. М. Я. Гришин[1,*], В. Н. Леднёв[1], С. М. Першин[1], П. О. Капралов[2]

Представлено академиком РАН И.А. Щербаковым 22.03.2021 г.
Поступило 25.03.2021 г.
После доработки 25.03.2021 г.
Принято к публикации 31.03.2021 г.

Разработан ультракомпактный (~300 г) флуоресцентный лидар на базе диодного лазера (405 нм, 150 мВт) и дифракционного миниспектрометра с линейкой фотодиодов. Натурный эксперимент по зондированию растительности с квадрокоптера показал перспективность автономного мониторинга больших площадей для раннего обнаружения очагов поражения посевных угодий.

Ключевые слова: лидар, флуоресценция, дистанционное зондирование, квадрокоптер

DOI: 10.31857/S2686740021030093

Известно, что лидары являются одним из эффективных инструментов дистанционного зондирования при использовании лазеров в широком спектральном диапазоне от УФ до ИК с энергией импульсов несколько Дж [1, 2]. Однако опасность поражения глаз излучением лазера ограничивает их применение для зондирования среды обитания при плотности энергии в пучке лазера, например, для видимого диапазона более 1 мкДж/см^2 [3]. Принимая этот фактор во внимание, мы предложили и разработали новый принцип зондирования среды обитания лидарами на диодных лазерах [4–6] и однофотонных приемниках – лавинных фотодиодах. Недавно [7] таким лидаром с плотностью энергии импульса <0.01 мкДж/см^2 было проведено зондирование над ледником Гарабаши аэрозольных слоев у вершины вулкана Эльбрус на удалении более 4000 м. Высокая эффективность, малая масса, низкое энергопотребление, помехоустойчивость цифровых цепей и работа диодного лазера в широком диапазоне температур от −100 до +20°C [8] позволили нам выиграть конкурс НАСА (США) среди лидаров других стран для зондирования атмосферы Марса. Впервые российский прибор был включен в состав миссии НАСА “Mars Polar Lander-99” и как первый лидар (лидар РАН) был доставлен к Марсу 3 декабря 1999 г. [9]. Эта версия бортового лидара для космических миссий и мониторинга среды обитания с высокой частотой повторения импульсов (до сотен кГц) [6] явилась экспериментальным обоснованием использования предложенной нами концепции для лидарной навигации беспилотных автомобилей и других подвижных платформ [10].

Несомненно, что прогресс в разработке диодных лазеров синего и УФ-диапазонов открыл возможность создания компактных флуоресцентных лидаров на их основе. Так, флуоресцентный лидар [11] с непрерывным диодным лазером (длина волны 445 нм, мощность 1.5 Вт, диаметр антенны 50 мм, масса 3.2 кг), установленный на октокоптер, обеспечил регистрацию сигнала флуоресценции травяного покрова и кроны деревьев в ночное время. Заметим, что при диаметре пятна пучка лазера (3 см) плотность мощности лазерного излучения на объекте зондирования составляет более 200 мВт/см^2 [11], что на два порядка превышает безопасный для глаз уровень [3] в дневное время. Эта пороговая величина повреждения глаз кратно снижается в ночное время из-за расширения диаметра зрачка глаза. Оставалась неясной возможность флуоресцентного зондирования растительности лидаром с безопасным уровнем плотности мощности (в 10 раз ниже использованного в работе [11]) с борта квадрокоптера, что и являлось целью данной работы.

Схема лидара приведена на рис. 1. Основными компонентами лидара являются полупроводни-

[1] *Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *ООО “Международный центр квантовой оптики и квантовых технологий”, Москва, Россия*
**E-mail: mikhail.grishin@kapella.gpi.ru*

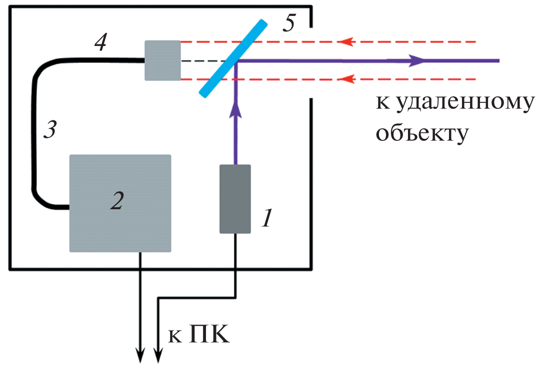

Рис. 1. Схема ультракомпактного флуоресцентного лидара: *1* – полупроводниковый лазер непрерывного действия, *2* – дифракционный миниспектрометр, *3* – оптическое волокно, *4* – волоконный конденсор, *5* – интерференционное зеркало.

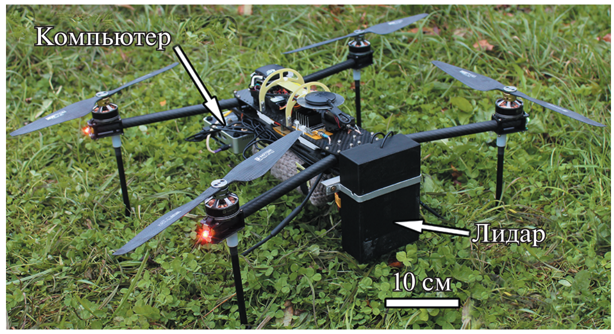

Рис. 2. Общий вид легкого квадрокоптера с установленным флуоресцентным лидаром (справа) и управляющим компьютером (слева).

ковый лазер непрерывного действия (*1*) (405 нм, 150 мВт) и дифракционный миниспектрометр (*2*) Ocean Optics STS-VIS (анализ спектра в диапазоне 330–820 нм обеспечивается диодной линейкой на 1024 ячейки с размерами отдельного пиксела 7.8 × × 125 мкм).

Интерференционное зеркало (*5*) (DMLP425, Thorlabs Inc.) направляет лазерный пучок к удаленному исследуемому объекту, где происходит упругое рассеяние (без изменения длины волны излучения), а также возбуждение флуоресценции. Конденсор (*4*) собирает рассеянное назад излучение (пунктир на рис. 1) и фокусирует его на вход оптического волокна (*3*), соединенного с входной щелью спектрометра. В состав спектрометра входило две сменных щели размером 10 и 200 мкм для вариации разрешающей способности в зависимости от ширины полосы сигнала флуоресценции. Так, разрешающая способность составляла 1 и 12 нм для щели 10 и 200 мкм соответственно. Управление лазером (*1*) и считывание данных с диодной линейки спектрометра осуществляется компактным одноплатным компьютером (Intel NUC), установленным на борту квадрокоптера, с помощью программного обеспечения, разработанного в среде National Instruments LabVIEW. Заметим, что лидар допускает работу в двух режимах: 1) автономно по заданной программе, 2) в режиме диалогового обмена командами и данными с удаленным компьютером оператора по радиоканалу Wi-Fi.

Габариты лидара составляют 10 × 15 × 5 см (масса 310 г), габариты компьютера 11 × 11 × 3 см (масса 600 г), напряжение питания 12 В, энергопотребление всей системы не более 40 Вт. Разделение лидара на две части (оптический блок и компьютер) позволяет оптимизировать его размещение на летающей платформе для сохранения положения центра масс.

Поскольку лидар был разработан для применения на легких беспилотных авианосителях, были проведены испытания в условиях натурного эксперимента, приближенных к реальной эксплуатации. Лидар был установлен на легкий квадрокоптер, имеющий грузоподъемность 2 кг и время автономного полета до 30 мин. На рис. 2 приведена фотография квадрокоптера с установленным лидаром.

В версии диалогового обмена связь с лидаром осуществляли дистанционно (до 300 м) с отдельного портативного компьютера (ноутбука) по каналу Wi-Fi на частоте 2.4 ГГц с использованием протокола Remote Desktop.

В натурном эксперименте квадрокоптер зависал неподвижно над травяным покровом, и лидар проводил измерения направлением в надир (к поверхности) по следующему протоколу: спектрометр регистрировал фоновый спектр (без подсветки лазером) в течение заданного времени экспозиции (0.5 с), далее включался лазер, и спектрометр регистрировал спектр с такой же экспозицией 0.5 с. Затем фон программно вычитали из сигнала и получали спектр флуоресценции. Для достижения заданного отношения сигнал/шум задавали число (10–20–50) повторных измерений в режиме накопления сигнала.

Интерференционное зеркало (*5*) со спектром пропускания в виде ступеньки (рис. 3а) отражает излучение с длиной волны <425 нм и направляет лазерный пучок (405 нм) к объекту зондирования. Одновременно это зеркало существенно ослабляет упруго рассеянное излучение лазера на щели спектрометра. На рис. 3б показан пример спектра флуоресценции травяного покрова, полученного с помощью лидара в натурных экспериментах (щель 10 мкм, высота 50 см). На рис. 3в приведены спектры листьев растения, полученные в лаборатории (щель 200 мкм) с удаления 3 м при зондировании верхней стороны листа (линия *1*) и нижней стороны (штриховая линия *2*).

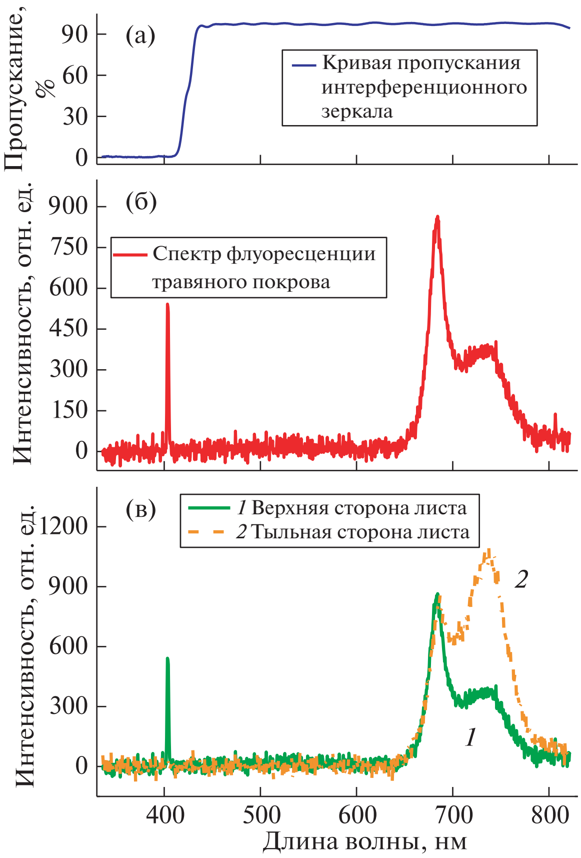

Рис. 3. Кривая пропускания интерференционного зеркала (а), примеры спектров флуоресценции: (б) травяной покров (щель 10 мкм, высота 50 см), (в) верхняя поверхность листа дерева (сплошная линия *1*) и тыльная поверхность (штриховая линия *2*) (щель 200 мкм, дальность 3 м).

Как видно из рис. 3б, 3в, спектр состоит из линии лазерного излучения, соответствующей упругому рассеянию (405 нм), и полосы флуоресценции хлорофилла растительности (~650–780 нм). Из рисунков видно, что для верхней поверхности листьев (сплошная линия *1* на рис. 3в) большую интенсивность имеет компонента хлорофилла *a* ~ ~ 685 нм, а при зондировании нижней поверхности листьев (штриховая линия *2* на рис. 3в) доминирует компонента хлорофилла *b* ~ 730 нм. Предполагается [12], что флуоресценция на длине волны ~685 нм обусловлена хлорофиллом фотосистемы 2, а на длине волны ~730 нм – фотосистемы 1 (фотосистемы 1 и 2 – элементы фотосинтетического аппарата растений, различающиеся по составу белков, пигментов и оптическим свойствам).

В настоящей работе была продемонстрирована возможность зондирования флуоресценции растений с борта легкого беспилотного летательного аппарата с помощью ультракомпактного лидара-флуориметра с безопасным для глаз уровнем излучения. Высокая эффективность регистрации сигнала флуоресценции обусловлена, в том числе, совпадением длины волны возбуждающего лазерного излучения (405 нм) с полосой поглощения хлорофилла *a* [13].

Несомненно, что перспективой развития данного метода является повышение отношения сигнал/шум и дальности зондирования, что может быть обеспечено применением в качестве детектора спектра флуоресценции линейки лавинных однофотонных диодов с внутренним усилением и возможностью стробирования, как в случае зондирования многослойных облаков у вершины вулкана Эльбрус [7].

Особый интерес здесь представляет использование в этом лидаре выносной приемо-передающей антенны с синтезированной апертурой большой суммарной площади, защищенной патентом России № 2 692 121. Принимая во внимание волоконный ввод сигнала в спектрометр, а также транспорт излучения лазера по волокну, такая антенна допускает снижение на волоконном фидере от платформы носителя с целью повышения отношения сигнал/шум, а также исключения возмущения поверхности (растения, акватории) зондирования воздушным потоком от винтов.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана грантом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации на создание и развитие научных центров мирового уровня “Центр фотоники” (№ 075-15-2020-912).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bunkin A., Voliak K.* Laser Remote Sensing of the Ocean: Methods and Applications. N.Y.: Wiley&Sons, 2001.
2. *Cecchi G., Bazzani M., Pantani L., Mazzinghi P., Raimondi V.* Fluorescence lidar remote sensing of vegetation // Proc. SPIE Remote Sensing for Agriculture, Forestry, and Natural Resources. 1995. V. 2585. P. 48–56.
3. *Sliney D., Wolbarsht M.* Safety with lasers and other optical sources: a comprehensive handbook. N.Y.: Springer, 2013. 1035 p.
4. *Першин С.М.* Лидар / Большая российская энциклопедия. М.: Большая российская энциклопедия. Т. 17. 2011. С. 451–452.
5. *Pershin S., Linkin V., Makarov V., Prochazka I., Hamal K.* Spaceborn laser altimeter based on the single photon diode receiver and semiconductor laser transmitter // Proc. Conference on Lasers and Electro-Optics (CLEO). OSA Technical Digest. 1999. V. 10. P. CFI1.
6. *Pershin S.* A new generation of the portable backscatter Lidar with eye-safe energy level for environmental sensing // Proc. International Symposium «Aerospace Sensing». SPIE’s. 1994. V. 2222. P. 392. Orlando, Apr. 4.

7. *Pershin S.M., Grishin M.Ya., Zavozin V.A., Lednev V.N., Lukyanchenko V.A., and Makarov V.S.* Aerosol layers sensing by an eye-safe lidar near the Elbrus summit // Laser Phys. Lett. 2020. V. 17 (2). 026003.
8. *Pershin S.M.* Astrophysica, detector a laser, escolhido em concurso internacional esturdara a atmosfera marsiana: Aparelho russo integra sonda da NASA // Sciencia Hoje. 1999. № 12. P. 71–74.
9. https://mars.nasa.gov/internal_resources/818/
10. *Hecht J.* Lidar for self-driving cars // Opt. Photon. News. 2018. V. 29 (1). P. 26–33.
11. *Wang X., Duan Z., Brydegaard M., Svanberg S., Zhao G.* Drone-based area scanning of vegetation fluorescence height profiles using a miniaturized hyperspectral lidar system // Applied Physics B. 2018. V. 124. P. 207.
12. *Кочубей С.М.* Организация пигментов фотосинтетических мембран как основа энергообеспечения фотосинтеза. Киев: Наук. думка, 1986. 188 с.
13. *Jacobs E.E., Holt A.S.* The absorption spectrum of chlorophyll a crystals // J. Chem. Phys. 1954. V. 22 (1). P. 142.

ULTRACOMPACT FLUORESCENCE LIDAR BASED ON A DIODE LASER (405 nm, 150 mW) FOR REMOTE SENSING OF WATERBODIES AND UNDERLYING SURFACE FROM UNMANNED AERIAL VEHICLES

M. Ya. Grishin[a], V. N. Lednev[a], S. M. Pershin[a], and P. O. Kapralov[b]

[a] *Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[b] *Russian Quantum Center, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS I.A. Shcherbakov

We report on developing an ultracompact (~300 g) fluorescence lidar based on a diode laser (405 nm, 150 mW) and a diffraction spectrometer equipped with a linear photodiode array. Field tests have been performed on remote sensing of vegetation from a quadcopter. The field tests have shown the prospects of autonomous lidar monitoring for early crop disease detection.

Keywords: lidar, fluorescence, remote sensing, unmanned aerial vehicles

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 498, с. 7–10

ФИЗИКА

УДК 537.84

ДИСКОВЫЕ ВЗРЫВОМАГНИТНЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ НОВОГО ПОКОЛЕНИЯ

© 2021 г. П. В. Дудай[1], А. А. Зименков[1], А. В. Ивановский[1,2,*], К. Н. Климушкин[1], А. И. Краев[1], В. Б. Куделькин[1], В. И. Мамышев[1], С. М. Полюшко[1], З. С. Цибиков[1], Е. В. Шаповалов[1]

Представлено академиком РАН С.Г. Гараниным 09.03.2021 г.
Поступило 09.03.2021 г.
После доработки 09.03.2021 г.
Принято к публикации 14.03.2021 г.

Одним из ярких примеров реализации принципа магнитной кумуляции явилось создание в 1980-х годах под руководством В.К. Чернышева уникальных устройств – дисковых взрывомагнитных генераторов, генерирующих рекордные токи до 300 МА. Попытки реализации их аналогов за рубежом до сих пор не увенчались успехом. В работе представлены результаты исследований, завершившихся созданием нового поколения дисковых взрывомагнитных генераторов малого класса с эффективностью преобразования энергии взрывчатого вещества в энергию магнитного поля, более чем в два раза превышающую ранее достигнутый уровень.

Ключевые слова: магнитная кумуляция, дисковый взрывомагнитный генератор, профилированные дисковые элементы, плоские дисковые элементы, электровзрывной размыкатель тока, индуктивная нагрузка

DOI: 10.31857/S2686740021030081

Для исследований свойств веществ и моделирования физических процессов при высоких плотностях энергии, а также для термоядерных исследований, необходимы источники электромагнитной энергии в десятки МДж. В качестве таких источников могут использоваться взрывомагнитные генераторы (ВМГ) [1]. А.Д. Сахаров в 1951 г. высказал идею о переводе энергии взрывчатого вещества в энергию магнитного поля путем быстрой деформации токового контура. Явление было названо магнитной кумуляцией.

ВМГ работают на принципе сохранения магнитного потока $\Phi = LJ$, где J – ток, L – индуктивность токового контура. При деформации контура взрывчатым веществом (ВВ) с сохранением потока его индуктивность падает, ток увеличивается. Одновременно растет и магнитная энергия W:

$$J = \frac{\Phi}{L} = \frac{L_0}{L} J_0, \quad W = \frac{\Phi^2}{2L} = \frac{L_0}{L} W_0, \tag{1}$$

где L_0, J_0, W_0 – начальные значения индуктивности, тока и магнитной энергии.

Существуют два основных ограничения, накладываемых на скорость сжатия. Во-первых, для минимизации диффузионных потерь потока магнитного поля сжатие должно быть достаточно быстрым или $\frac{dL}{dt} \gg R$, где R – сопротивление контура. Во-вторых, поскольку при быстром изменении потока Φ появляется высокое электрическое напряжение $U = -\frac{LdI}{dt}$, необходимо обеспечить достаточно прочную электрическую изоляцию, предохраняющую от электрических пробоев. Отсюда видно, что для эффективной работы генератора желательно поддерживать напряжение постоянным на максимально допустимой величине. При отсутствии потерь потока это достигается при экспоненциальном законе вывода индуктивности.

В дисковых взрывомагнитных генераторах (ДВМГ) деформируемый контур (рис. 1) образован двумя токопроводами: наружным цилиндрическим и внутренним, выполненным в виде последовательно соединенных тонкостенных медных дисков. Внизу диски попарно соединяются медными цилиндрическими перемычками. Пространство под перемычками заполнено ВВ. Все заряды в ДВМГ инициируются одновременно. Под действием продуктов взрыва соседние диски

[1] *Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики (РФЯЦ-ВНИИЭФ), Саров, Нижегородская обл., Россия*
[2] *Саровский физико-технический институт НИЯУ МИФИ, Саров, Нижегородская обл., Россия*
**E-mail: ivanovsky@elph.vniief.ru*

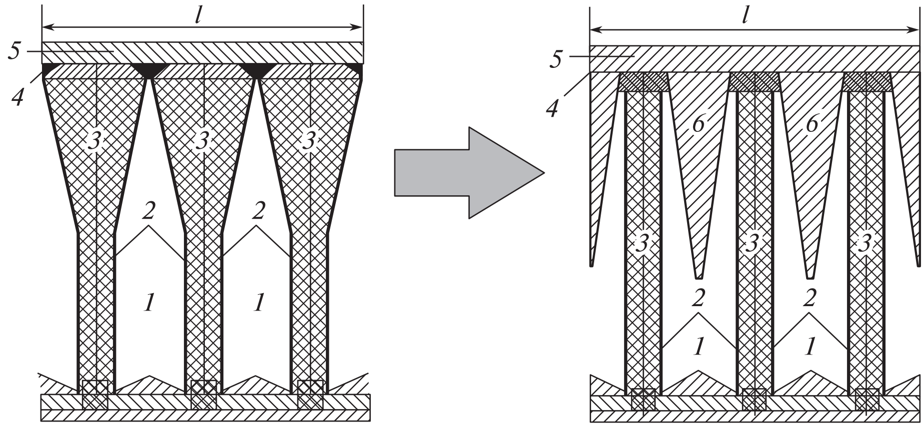

Рис. 1. Эскизы ДВМГ с профилированными и плоскими дисковыми элементами: *1* – полости сжатия; *2* – медные диски; *3* – заряды ВВ; *4* – волновая линия; *5* – обратный токопровод; *6* – металлические инертные вставки.

схлопываются, выводя магнитный поток в коаксиальную передающую линию и нагрузку. Для создания начального потока в ДВМГ применяют спиральные ВМГ(СВМГ) [1].

Быстрый вывод индуктивности в ДВМГ реализуется сжатием токового контура вдоль оси встречным движением поверхностей медных дисков. При этом близкий к экспоненциальному закон вывода индуктивности обеспечивается профилированием дисковых элементов.

ДВМГ были предложены В.К. Чернышевым в 1961 г. Им же и сотрудниками была экспериментально подтверждена их работоспособность [2] – в пятиэлементном генераторе диаметром 400 мм начальный ток в 6.5 МА был увеличен до 90 МА за время ~5 мкс; магнитная энергия в нагрузке составила ~10 МДж. Возможность увеличения энергии путем наращивания числа элементов была проверена в эксперименте с десятимодульным ДВМГ диаметром 400 мм, в котором амплитуда импульса тока достигла 108 МА, энергии магнитного поля 27.5 МДж.

Исследования 1970–1980-х годов завершились созданием ДВМГ семейства "Поток" с зарядами ВВ диаметром 250, 400 и 1000 мм [3]. Эти генераторы создают токи от 60 до 300 МА за время от 4 до 10 мкс при выходной энергии от 20 до 200 МДж.

Дальнейшее развитие ДВМГ велось по пути упрощения (удешевления) конструкции и увеличения эффективности преобразования энергии ВВ в энергию магнитного поля [4]. Для этих целей предложено перейти от профилированных к плоским дисковым элементам (см. рис. 1) с обеспечением близкого к экспоненциальному закону вывода индуктивности путем помещения в полость сжатия металлических инертных вставок [5].

Ниже представлены результаты первого этапа исследований, направленных на разработку ДВМГ нового поколения, который завершился разработкой ДВМГ малого класса (диаметр 250 мм).

Экспериментальная отработка конструкции генераторов проводилась с ДВМГ малого класса в составе трех элементов. Начальный поток создавался СВМГ диаметром 100 мм. Результаты эксперимента с оптимизированной конструкцией генератора, работающего на жесткую нагрузку с индуктивностью $L \approx 1.2$ нГн, представлены на рис. 2. Там же приведен результат расчетного прогноза. Видно, что начальный ток генератора ≈5.8 МА был усилен до $J \approx 56$ МА за характерное время ≈4 мкс (полное время работы генератора ≈13.5 мкс). Полная энергия, переданная в нагрузку, составила $LJ^2/2 \approx 1.9$ МДж. С учетом массы ВВ в дисковом элементе 0.75 кг эффективность преобразования энергии ВВ в энергию магнитного поля составила $\eta \approx 0.84$ МДж/(кг ВВ). В ДВМГ семейства "Поток" малого и среднего класса величина $\eta \leq 0.4$ МДж/(кг ВВ).

Возможность увеличения энергии путем наращивания числа дисковых элементов была проверена в эксперименте с 30-модульным ДВМГ диаметром 250 мм (рис. 3), в котором при работе на индуктивность ≈10 нГн амплитуда импульса тока достигла 63 МА, энергии магнитного поля ≈20 МДж, эффективность преобразования энергии ВВ в магнитное поле ≈18%. Начальный поток в генераторе, равный ~1 Вебер (ток ~5.5 МА), создавался специально разработанным для этих целей быстродействующим СВМГ диаметром 400 мм. Для реализации ДВМГ, работающего в составе 30 модулей, была создана новая система инициирования. Ранее генераторы семейства "Поток" эксплуатировались в составе не более 15 элементов.

Пусть начальная кинетическая энергия тарелей дисковых элементов E_k составляет долю η_{ex} от энергии ВВ $E_{ex} - E_k = \eta_{ex} \cdot E_{ex}$. При отсутствии потерь потока и полном переводе кинетической

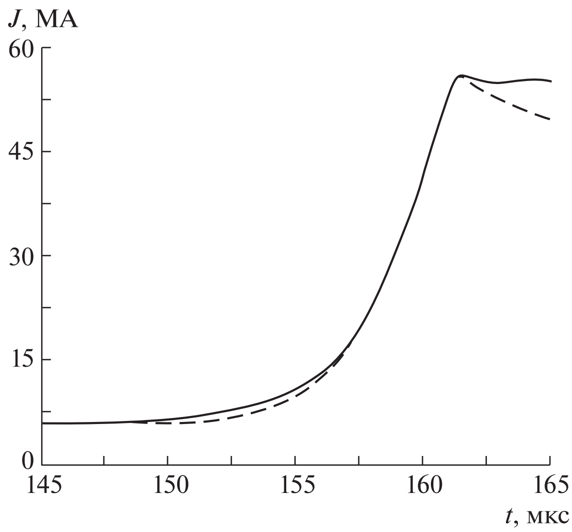

Рис. 2. Зависимости тока от времени в эксперименте с трехэлементным ДВМГ малого класса – сплошная кривая, расчет – штриховая линия.

Рис. 3. Внешний вид 30-модульного ДВМГ диаметром 250 мм.

энергии E_k в энергию магнитного поля E_M получаем $E_M = \frac{1}{2}\cdot\frac{\Phi_0^2}{L_k} = \eta_{ex}\cdot E_{ex}$, где Φ_0 – поток, L_k – конечная индуктивность контура ДВМГ. В случае сохранения доли η от начального потока $E_M = \frac{1}{2}\cdot\eta^2\cdot\frac{\Phi_0^2}{L_k}$ или с учетом предыдущего – $\frac{E_M}{E_{ex}} = \eta_{ex}\eta^2$. Для ДВМГ малого и среднего классов величина $\eta \approx 0.6$.

Согласно формуле Е.И. Забабахина [6], при ускорении ВВ максимальная скорость движения несжимаемой жидкой оболочки W_{sh} связана со скоростью волны детонации D соотношением

$$\frac{W_{sh}}{D} = 1 + \frac{27}{16\alpha}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{32\alpha}{27}}\right),$$

где α – отношение масс единицы площади ВВ (m_{ex}) и оболочки (m_{sh}).

Исходя из этого, эффективность преобразования энергии ВВ в кинетическую энергию тарелей дискового элемента ДВМГ оценивается из

$$\eta_{ex} = 2\cdot\frac{m_{sh}\cdot W_{sh}^2/2}{m_{ex}\cdot D^2/16} = \frac{16}{\alpha}\cdot\left[1 + \frac{27}{16\alpha}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{32\alpha}{27}}\right)\right]^2.$$

Величина η_{ex} достигает максимального значения $\eta_m \approx 70\%$ при $\alpha = \frac{81}{32}\left(W_{sh} = \frac{D}{3}\right)$.

Таким образом, реализованная эффективность преобразования энергии ВВ в энергию магнитного поля $g \approx 18\%$ близка к теоретическому пределу $\frac{E_M}{E_{ex}} = \eta_m\,\eta^2 \approx 25\%$. Дальнейшее совершенствование ДВМГ по этому критерию, по-видимому, бессмысленно.

Для сокращения времени нарастания тока в ДВМГ нового поколения применяются малоиндуктивные электровзрывные размыкатели тока, выполненные в виде “змейки” [7]. На рис. 4 приведены результаты испытания ДВМГ нового поколения в составе 30 элементов, оснащенного электровзрывным размыкателем тока. Ток в нагрузке с индуктивностью ≈4 нГн составил ≈40 МА при времени нарастания ≈2 мкс. Время нарастания тока может быть сокращено до ≈1 мкс путем подбора момента срабатывания взрывного замы-

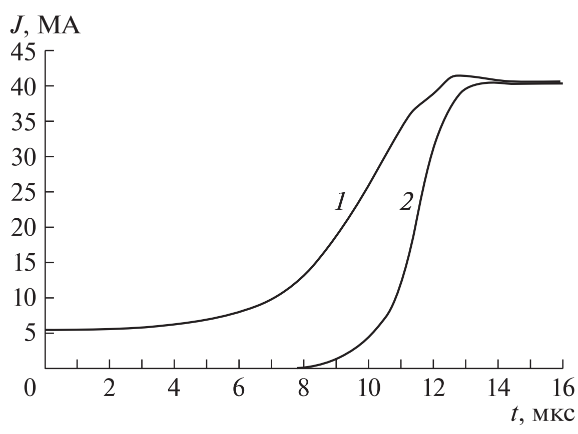

Рис. 4. Зависимости токов в цепи генератора (*1*) и в нагрузке (*2*) от времени.

кающего ключа, размещенного за размыкателем тока, или использованием вместо него разрядника-обострителя. В опыте взрывной замыкающий ключ сработал при напряжении на электровзрывном размыкателе тока ≈20 кВ.

Таким образом, создан ДВМГ малого класса нового поколения с эффективностью преобразования энергии ВВ в энергию магнитного поля, более чем в два раза превышающую ранее достигнутый уровень. В дальнейшем предполагается реализовать ДВМГ среднего класса (диаметр 400 мм). Простая конструкция и развитые расчетные методы ставят задачу проектирования ДВМГ без предварительной экспериментальной отработки с оптимальным для заданной нагрузки диаметром дисковых элементов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гриневич Б.Е., Демидов В.А., Ивановский А.В., Селемир В.Д.* // Успехи физических наук. 2011. Т. 181. № 4. С. 422–427.
2. *Чернышев В.К., Протасов М.С., Шевцов В.А.* / Сверхсильные магнитные поля. Физика. Техника. Применение. Труды Мегагаусс-III / Под ред. В.М. Титова, Г.А. Швецова. М.: Наука, 1984. С. 23–25.
3. *Чернышев В.К., Протасов М.С., Шевцов В.А. и др.* // Вопросы атомной науки и техники (ВАНТ). Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1992. № 4. С. 33–41.
4. *Чернышев В.К.* // Труды международного семинара. Гидродинамика высоких плотностей энергии / Под ред. Г.А. Швецова. Новосибирск, 2004. С. 12–23.
5. *Чернышев В.К., Вахрушев В.В., Мамышев В.И.* // Труды междунар. семинара. Гидродинамика высоких плотностей энергии / Под ред. Г.А. Швецова. Новосибирск, 2004. С. 224–228.
6. *Забабахин Е.И.* Некоторые вопросы газодинамики взрыва. Снежинск: РФЯЦ-ВНИИТФ, 1997. С. 110.
7. *Chernyshev V.K., Kucherov A.I., Mezhevov A.I., Vakhrushev V.V.* / In: Proc. 11th IEEE Int. Pulsed Power Conf. Baltimore, Maryland, USA. 1997. Ed. G. Cooperstein, I. Vitkovitsky, Omnipress. P. 1208–1212.

NEW GENERATION OF DISK EXPLOSIVE MAGNETIC GENERATORS

P. V. Duday[a], A. A. Zimenkov[a], A. V. Ivanovskiy[a,b], K. N. Klimushkin[a], A. I. Krayev[a], V. B. Kudel'kin[a], V. I. Mamyshev[a], S. M. Polyushko[a], Z. S. Tsibikov[a], and E.V. Shapovalov[a]

[a] *Russia Research Institute of Experimental Physics (RFNC-VNIIEF), Sarov, Nizhnii Novgorod Region, Russian Federation*

[b] *Sarov Physicotechnical Institute NRNU MEPhI, Sarov, Nizhnii Novgorod Region, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS S.G. Garanin

One of the striking examples of implementation of the magnetic cumulation principle was a creation under V.K. Chernyshev's leadership in the 80s of the last century of the unique devices, i.e. disk explosive magnetic generators (DEMG) producing record currents up to 300 MA. The attempts to realize their analogues abroad have not been a success so far. The paper presents the results of the studies that culminated in the creation of a new generation of small class DEMGs with the efficiency of HE energy conversion into magnetic field energy more than twice the previously achieved level.

Keywords: magnetic cumulation, disk explosive magnetic generator, profiled disk elements, flat disk elements, electrically exploded current opening switch, inductive load

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 498, с. 11–16

ФИЗИКА

УДК 537.2

ОБОБЩЕННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ МАКСВЕЛЛА ГАРНЕТТА ДЛЯ ТЕКСТУРИРОВАННЫХ МАТРИЧНЫХ КОМПОЗИТОВ С ВКЛЮЧЕНИЯМИ В ОБОЛОЧКЕ

© 2021 г. Академик РАН В. И. Колесников[1,*], И. В. Лавров[2], В. В. Бардушкин[2], А. П. Сычев[1,3,], В. Б. Яковлев[2,4]**

Поступило 30.03.2021 г.
После доработки 30.03.2021 г.
Принято к публикации 07.04.2021 г.

Предложено обобщение приближения Максвелла Гарнетта для текстурированного матричного композита, состоящего из эллипсоидальных включений с оболочкой. С помощью указанного обобщенного приближения получено выражение для тензора эффективной диэлектрической проницаемости рассматриваемой среды. Показано, что в случае матричного композита со сферическими включениями в оболочке данное выражение совпадает с формулой, полученной в обобщенном приближении эффективного поля с выбором матрицы в качестве среды сравнения.

Ключевые слова: приближение Максвелла Гарнетта, эффективная диэлектрическая проницаемость, обобщенное приближение эффективного поля, матричный композит, включение с оболочкой

DOI: 10.31857/S268674002103010X

Приближение Максвелла Гарнетта (МГ) [1] широко используется для вычисления эффективных электрофизических характеристик неоднородных сред матричного типа, в том числе для прогнозирования их оптических свойств [2–4]. В [5] было установлено, что в случае, когда металлические частицы в материале изолированы друг от друга диэлектрической прослойкой (матрицей), оптические свойства пленки из такого материала качественно хорошо прогнозируются с помощью приближения МГ и его обобщений. Первоначально приближение МГ было получено Дж.К. Максвеллом Гарнеттом [1] для объяснения оптических свойств стекла с мельчайшими металлическими частицами сферической формы. В дальнейшем были получены обобщения формулы МГ для различных вариантов структуры матричных композитов с однородными включениями эллипсоидальной формы [2, 3, 6, 7]. Ключевым моментом этих обобщений являлся выбор среднего поля в матрице в качестве действующего [8]. Имеются также обобщения МГ на частные варианты сред с неоднородными включениями: со сферическими включениями с однослойной [9, 10] или многослойной [11] оболочкой, с непрерывной радиальной зависимостью диэлектрической проницаемости [11]. Тем не менее, учитывая большой практический интерес к композитам с неоднородными включениями [12, 13], имеется необходимость обобщений приближения МГ для указанных сред, позволяющих учитывать такие особенности структуры среды, как несферическая форма включений, вероятностное распределение их ориентаций и форм, а также наличие нескольких видов включений.

[1] *Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростов-на-Дону, Россия*
[2] *Национальный исследовательский университет "Московский институт электронной техники", Москва, Россия*
[3] *Федеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Россия*
[4] *Институт нанотехнологий микроэлектроники Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: kvi@rgups.ru*
***E-mail: alekc_sap@mail.ru*

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ В ОБОБЩЕННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ МАКСВЕЛЛА ГАРНЕТТА

Рассмотрим образец объемом V статистически однородного композита, состоящего из однородной изотропной матрицы с погруженными в нее неоднородными включениями общим количеством N, каждое из которых представляет собой однородное анизотропное эллипсоидальное ядро с однородной анизотропной оболочкой, внешняя граница которой так же, как и внутренняя, является эллипсоидальной. Диэлектрические проницаемости матрицы, оболочки и ядра k-го включения обозначим ε_m, $\boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Полуоси внешней $S_1^{(k)}$ и внутренней $S_2^{(k)}$ границ оболочки k-го включения обозначим $a_{11}^{(k)}, a_{12}^{(k)}, a_{13}^{(k)}$ и $a_{21}^{(k)}, a_{22}^{(k)}, a_{23}^{(k)}$ соответственно, объемную долю ядра в нем – v_k, объем всего k-го включения – V_k, объемную долю всех включений в образце – f. Очевидно, что

$$v_k = \frac{a_{21}^{(k)} a_{22}^{(k)} a_{23}^{(k)}}{a_{11}^{(k)} a_{12}^{(k)} a_{13}^{(k)}}, \quad V_k = \frac{4\pi}{3} a_{11}^{(k)} a_{12}^{(k)} a_{13}^{(k)},$$
$$k = 1, 2, \ldots, N.$$

Пусть к границе S данного образца приложено постоянное электрическое поле напряженностью $\mathbf{E}_0$. Тензор $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ эффективных диэлектрических характеристик образца данного композита связывает средние по объему образца векторы электрической индукции и напряженности электрического поля:

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \boldsymbol{\varepsilon}^* \langle \mathbf{E} \rangle.$$

Для $\langle \mathbf{E} \rangle$ при отсутствии в нем двойных поляризационных слоев можно написать выражение

$$\begin{gathered} \langle \mathbf{E} \rangle = (1-f)\langle \mathbf{E}^{(m)} \rangle + f(V_{inc})^{-1} \times \\ \times \sum_{k=1}^{N} V_k((1-v_k)\langle \mathbf{E}_1^{(k)} \rangle + v_k \langle \mathbf{E}_2^{(k)} \rangle), \end{gathered} \tag{1}$$

где $\langle \mathbf{E}^{(m)} \rangle$, $\langle \mathbf{E}_1^{(k)} \rangle$ и $\langle \mathbf{E}_2^{(k)} \rangle$ – средние напряженности поля в матрице, в оболочке и ядре k-го включения соответственно; $V_{inc} = fV$ – объем всех включений в образце. Аналогично (1), для средней поляризации образца имеем

$$\begin{gathered} \langle \mathbf{P} \rangle = (1-f)\langle \mathbf{P}^{(m)} \rangle + f(V_{inc})^{-1} \times \\ \times \sum_{k=1}^{N} V_k((1-v_k)\langle \mathbf{P}_1^{(k)} \rangle + v_k \langle \mathbf{P}_2^{(k)} \rangle). \end{gathered} \tag{2}$$

Векторы поляризации и напряженности электрического поля в матрице, в оболочке и ядре k-го включения связаны материальными уравнениями

$$\begin{gathered} \mathbf{P}^{(m)}(\mathbf{x}) = \chi_m \mathbf{E}^{(m)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{P}_1^{(k)}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\chi}_1^{(k)} \mathbf{E}_1^{(k)}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{P}_2^{(k)}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\chi}_2^{(k)} \mathbf{E}_2^{(k)}(\mathbf{x}), \end{gathered} \tag{3}$$

где $\chi_m = (4\pi)^{-1}(\varepsilon_m - 1)$, $\boldsymbol{\chi}_1^{(k)} = (4\pi)^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)} - \mathbf{I})$, $\boldsymbol{\chi}_2^{(k)} = (4\pi)^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)} - \mathbf{I})$ – восприимчивости матрицы, оболочки и ядра k-го включения соответственно. Тензор эффективной восприимчивости образца композита $\boldsymbol{\chi}^*$, определяемый уравнением

$$\langle \mathbf{P} \rangle = \boldsymbol{\chi}^* \langle \mathbf{E} \rangle, \tag{4}$$

связан с $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ соотношением

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{I} + 4\pi \boldsymbol{\chi}^*. \tag{5}$$

Подставляя (3), (4), (1) в (2) и упрощая, получим уравнение

$$\begin{gathered} (1-f)(\boldsymbol{\chi}^* - \chi_m \mathbf{I})\langle \mathbf{E}^{(m)} \rangle = \\ = \frac{f}{V_{inc}} \sum_{k=1}^{N} V_k \Big((1-v_k)(\boldsymbol{\chi}_1^{(k)} - \boldsymbol{\chi}^*)\langle \mathbf{E}_1^{(k)} \rangle + \\ + v_k(\boldsymbol{\chi}_2^{(k)} - \boldsymbol{\chi}^*)\langle \mathbf{E}_2^{(k)} \rangle \Big). \end{gathered} \tag{6}$$

Следуя [8], определим обобщение приближения МГ на матричный композит с включениями в оболочке как приближение, при котором средние значения напряженности электрического поля в оболочке и ядре конкретного включения с номером k связаны со средней напряженностью поля в матрице так же, как и в таком же уединенном включении в бесконечной матрице с однородным приложенным полем, т.е.

$$\langle \mathbf{E}_1^{(k)} \rangle = \boldsymbol{\lambda}_1^{(k)} \langle \mathbf{E}^{(m)} \rangle, \quad \langle \mathbf{E}_2^{(k)} \rangle = \boldsymbol{\lambda}_2^{(k)} \langle \mathbf{E}^{(m)} \rangle, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{\lambda}_1^{(k)}$ и $\boldsymbol{\lambda}_2^{(k)}$ – тензоры 2-го ранга, зависящие от геометрической формы включений и от их материальных свойств, а также от материальных свойств матрицы; их конкретный вид будет найден позже.

Подставляя (7) в (6) и выражая $\boldsymbol{\chi}^*$ из (5) через $\boldsymbol{\varepsilon}^*$, получим

$$\begin{gathered} (1-f)(\boldsymbol{\varepsilon}^* - \varepsilon_m \mathbf{I})\langle \mathbf{E}^{(m)} \rangle = \\ = \sum_{k=1}^{N} w_k((1-v_k)(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^*)\boldsymbol{\lambda}_1^{(k)} + \\ + v_k(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}^*)\boldsymbol{\lambda}_2^{(k)})\langle \mathbf{E}^{(m)} \rangle, \end{gathered} \tag{8}$$

где $w_k = V_k / V$ – объемная доля k-го включения в образце. Уравнение (8) должно выполняться при любом значении $\langle \mathbf{E}^{(m)} \rangle$, зависящем непрерывно от $\mathbf{E}_0$, поэтому (8) влечет за собой тензорное равенство, выражая из которого $\boldsymbol{\varepsilon}^*$, имеем

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\varepsilon}^* = \left[(1-f)\varepsilon_m \mathbf{I} + \sum_{k=1}^{N} w_k((1-v_k)\boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)}\boldsymbol{\lambda}_1^{(k)} + v_k \boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)}\boldsymbol{\lambda}_2^{(k)}) \right] \times \\ \times \left[(1-f)\mathbf{I} + \sum_{k=1}^{N} w_k((1-v_k)\boldsymbol{\lambda}_1^{(k)} + v_k \boldsymbol{\lambda}_2^{(k)}) \right]^{-1}. \end{gathered} \tag{9}$$

Введем обозначения:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\lambda}^{(k)} = (1-v_k)\boldsymbol{\lambda}_1^{(k)} + v_k \boldsymbol{\lambda}_2^{(k)}, \\ \boldsymbol{\kappa}^{(k)} = (1-v_k)\boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)}\boldsymbol{\lambda}_1^{(k)} + v_k \boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)}\boldsymbol{\lambda}_2^{(k)}, \\ k = 1, 2, \ldots, N. \end{gathered} \tag{10}$$

Вводя средние значения тензоров $\boldsymbol{\lambda}^{(k)}$ и $\boldsymbol{\kappa}^{(k)}$ по всем включениям

$$\langle \boldsymbol{\lambda} \rangle = \frac{1}{f}\sum_{k=1}^{N} w_k \boldsymbol{\lambda}^{(k)}, \quad \langle \boldsymbol{\kappa} \rangle = \frac{1}{f}\sum_{k=1}^{N} w_k \boldsymbol{\kappa}^{(k)}, \tag{11}$$

перепишем (9) в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \left[(1-f)\varepsilon_m \mathbf{I} + f\langle\boldsymbol{\kappa}\rangle\right]\left[(1-f)\mathbf{I} + f\langle\boldsymbol{\lambda}\rangle\right]^{-1}, \tag{12}$$

аналогичном соотношению для тензора эффективной диэлектрической проницаемости матричного композита с однородными анизотропными эллипсоидальными включениями, полученном в [7], только в данном случае тензоры $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\kappa}$, усредняемые по всем включениям, имеют более сложный вид.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕНЗОРОВ, СВЯЗЫВАЮЩИХ СРЕДНИЕ НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ

Пусть уединенное k-е включение погружено в бесконечную матрицу с приложенным однородным электрическим полем напряженностью $\mathbf{E}_0$. Аналогично предположениям, принятым в [14], будем считать, что внутренняя $S_2^{(k)}$ и внешняя $S_1^{(k)}$ границы оболочки становятся софокусными эллипсоидами после линейного неортогонального преобразования

$$\mathbf{r} = \mathbf{T}_k \mathbf{r}'_k, \tag{13}$$

устраняющего анизотропию диэлектрических свойств оболочки k-го включения. Здесь $\mathbf{r} = (x^1\ x^2\ x^3)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{r}'_k = (x_k^{1'}\ x_k^{2'}\ x_k^{3'})^{\mathrm{T}}$ — векторы-столбцы координат текущей точки в исходной системе координат $x^1x^2x^3$ и системе $x_k^{1'}x_k^{2'}x_k^{3'}$, полученной из нее преобразованием (13). Связь матрицы преобразования (13) с тензором диэлектрической проницаемости оболочки включения имеет вид [14]

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)} = \mathbf{T}_k\left(\mathbf{T}_k\right)^{\mathrm{T}}. \tag{14}$$

При преобразовании (13) поверхности-эллипсоиды $S_1^{(k)}$, $S_2^{(k)}$ трансформируются соответственно в софокусные поверхности-эллипсоиды $S_1'^{(k)}$, $S_2'^{(k)}$, полуоси которых обозначим как $a_{11'}^{(k)}$, $a_{12'}^{(k)}$, $a_{13'}^{(k)}$ и $a_{21'}^{(k)}$, $a_{22'}^{(k)}$, $a_{23'}^{(k)}$. Условие (14) определяет преобразование (13) с точностью до поворота, поэтому можно считать, что оси системы $x_k^{1'}x_k^{2'}x_k^{3'}$ направлены вдоль геометрических осей поверхностей-эллипсоидов $S_1'^{(k)}$, $S_2'^{(k)}$.

В данных условиях электрическое поле в ядре включения — однородное с напряженностью [14]

$$\mathbf{E}_2^{(k)} = \boldsymbol{\lambda}_{20}^{(k)}\mathbf{E}_0, \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}_{20}^{(k)} = {} & [(\mathbf{I} + (\varepsilon_m)^{-1}\mathbf{L}_1^{(k)}(\boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)} - \varepsilon_m\mathbf{I}))\times \\ & \times(\mathbf{I} + (\mathbf{L}_{2,0}'^{(k)} - v_k\mathbf{L}_{1,0}'^{(k)})(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)})) + \\ & + v_k(\varepsilon_m)^{-1}\mathbf{L}_1^{(k)}(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)})]^{-1};\end{aligned} \tag{16}$$

$\mathbf{L}_1^{(k)}$ — тензор геометрических факторов эллипсоида с поверхностью $S_1^{(k)}$, его главные компоненты [14]

$$L_{1i}^{(k)} = \frac{a_{11}^{(k)}a_{12}^{(k)}a_{13}^{(k)}}{2}\int_0^{+\infty}\frac{du}{[u + (a_{1i}^{(k)})^2]R_1^{(k)}(u)}, \quad i = 1,2,3; \tag{17}$$

$$R_1^{(k)}(u) = [(u + (a_{11}^{(k)})^2)(u + (a_{12}^{(k)})^2)(u + (a_{13}^{(k)})^2)]^{1/2}, \quad k = 1,2,\ldots,N;$$

$\mathbf{L}_{1,0}'^{(k)}$, $\mathbf{L}_{2,0}'^{(k)}$ — тензоры обобщенных геометрических факторов эллипсоидов с внешними границами $S_1^{(k)}$, $S_2^{(k)}$ соответственно с учетом анизотропии оболочки k-го включения в системе координат $x^1x^2x^3$, определяемые формулами [14]

$$\mathbf{L}_{j,0}'^{(k)} = (\mathbf{T}_k^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{L}_j'^{(k)}\mathbf{T}_k^{-1}, \quad j = 1,2,$$

где тензоры $\mathbf{L}_1'^{(k)}$, $\mathbf{L}_2'^{(k)}$ — диагональные с главными компонентами

$$L_{ji'}'^{(k)} = \frac{a_{j1'}^{(k)}a_{j2'}^{(k)}a_{j3'}^{(k)}}{2}\int_0^{+\infty}\frac{du}{[u + (a_{ji'}^{(k)})]^2\tilde{R}_j^{(k)}(u)}, \quad i' = 1', 2', 3'; \quad j = 1, 2,$$

$$\tilde{R}_j^{(k)}(u) = [(u + (a_{j1'}^{(k)})^2)(u + (a_{j2'}^{(k)})^2)(u + (a_{j3'}^{(k)})^2)]^{1/2}.$$

Из (15) вытекает, что средняя по объему напряженность поля в ядре равна

$$\left\langle \mathbf{E}_2^{(k)} \right\rangle = \boldsymbol{\lambda}_{20}^{(k)}\mathbf{E}_0. \tag{18}$$

Найдем среднюю по объему напряженность электрического поля в оболочке включения. Потенциал электрического поля в оболочке имеет выражение [14]

$$\varphi_1^{(k)} = ((\boldsymbol{\beta}_1^{(k)} + \mathbf{N}_0'^{(k)}(\xi')\boldsymbol{\alpha}_1^{(k)})\mathbf{E}_0, \mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V_1^{(k)}, \quad 0 \le \xi' \le t', \tag{19}$$

где $V_1^{(k)}$ — объем, занимаемый оболочкой k-го включения;

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_1^{(k)} &= (\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)})\boldsymbol{\lambda}_{20}^{(k)}, \\ \boldsymbol{\beta}_1^{(k)} &= -(\mathbf{I} + \mathbf{L}_{2,0}'^{(k)}(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)}))\boldsymbol{\lambda}_{20}^{(k)},\end{aligned} \tag{20}$$

$\mathbf{N}_0'^{(k)}(\xi')$ — тензорная функция, определяемая формулой

$$\mathbf{N}_0'^{(k)}(\xi') = (\mathbf{T}_k^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{N}'^{(k)}(\xi')\mathbf{T}_k^{-1},$$

где тензорная функция $\mathbf{N}'^{(k)}(\xi')$ – диагональная с главными компонентами

$$N'^{(k)}_{i'}(\xi') = \frac{a^{(k)}_{21'}a^{(k)}_{22'}a^{(k)}_{23'}}{2}\int\limits_{\xi'}^{+\infty}\frac{du}{[u + (a^{(k)}_{2i'})^2]\tilde{R}^{(k)}_u},$$

$$i' = 1', 2', 3'; \quad 0 \le \xi' \le t';$$

$$\tilde{R}^{(k)}_u = [(u + (a^{(k)}_{21'})^2)(u + (a^{(k)}_{22'})^2)(u + (a^{(k)}_{23'})^2)]^{1/2};$$

t' – "шаг софокусности" эллипсоидов $S'^{(k)}_1$, $S'^{(k)}_2$:

$$t' = (a^{(k)}_{1i'})^2 - (a^{(k)}_{2i'})^2, \quad i' = 1', 2', 3'.$$

Для средней напряженности поля в оболочке имеем

$$\left\langle \mathbf{E}^{(k)}_1 \right\rangle = (V^{(k)}_1)^{-1}\iiint\limits_{V^{(k)}_1}\mathbf{E}^{(k)}_1 dV = = (V^{(k)}_1)^{-1}\iiint\limits_{V^{(k)}_1}(-\nabla\varphi^{(k)}_1)dV. \tag{21}$$

Поскольку в системе координат $x^1x^2x^3$ тензоры квадратичных форм поверхностей-эллипсоидов $S^{(k)}_1$ и $S^{(k)}_2$, ограничивающих объем $V^{(k)}_1$, вообще говоря, не диагональны, целесообразно в (21) перейти в систему $x^{1'}_k x^{2'}_k x^{3'}_k$, сделав замену (13). Учтя правило преобразования градиента [14], а также то, что якобиан преобразования (13) $\det\mathbf{T}_k$ = const, получим

$$\left\langle \mathbf{E}^{(k)}_1 \right\rangle = (V^{(k)}_1)^{-1}(\mathbf{T}^{-1}_k)^{\mathrm{T}}\det\mathbf{T}_k\iiint\limits_{V'^{(k)}_1}(-\nabla'\varphi^{(k)}_1)dV', \tag{22}$$

где $\nabla'\varphi^{(k)}_1$ – градиент потенциала в оболочке в системе координат $x^{1'}_k x^{2'}_k x^{3'}_k$, $V'^{(k)}_1$ – образ области $V^{(k)}_1$ при преобразовании (13). Переходя в (22) от объемного интеграла к поверхностным, получим

$$\left\langle \mathbf{E}^{(k)}_1 \right\rangle = (V^{(k)}_1)^{-1}(\mathbf{T}^{-1}_k)^{\mathrm{T}}\det\mathbf{T}_k \times \left[-\oiint\limits_{S'^{(k)}_1}\varphi^{(k)}_1\mathbf{n}'_1 dS' + \oiint\limits_{S'^{(k)}_2}\varphi^{(k)}_1\mathbf{n}'_2 dS'\right], \tag{23}$$

где $\mathbf{n}'_1$, $\mathbf{n}'_2$ – внешние единичные нормали к поверхностям $S'^{(k)}_1$, $S'^{(k)}_2$. С учетом (13) перепишем (19) в виде

$$\varphi^{(k)}_1 = ((\mathbf{T}_k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}^{(k)}_1 + \mathbf{N}'^{(k)}_0(\xi')\boldsymbol{\alpha}^{(k)}_1)\mathbf{E}_0, \mathbf{r}'),$$

$$\mathbf{r}' \in V'^{(k)}_1; \quad 0 \le \xi' \le t'.$$

На поверхности $S'^{(k)}_2$ имеем $\xi' = 0$, $\mathbf{N}'^{(k)}_0(0) = \mathbf{L}'^{(k)}_{2,0}$ [14], поэтому $\varphi^{(k)}_1$ на $S'^{(k)}_2$ имеет вид

$$\varphi^{(k)}_1\Big|_{S'^{(k)}_2} = ((\mathbf{T}_k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}^{(k)}_1 + \mathbf{L}'^{(k)}_{2,0}\boldsymbol{\alpha}^{(k)}_1)\mathbf{E}_0, \mathbf{r}'|_{S'^{(k)}_2}). \tag{24}$$

Аналогично на поверхности $S'^{(k)}_1$ имеем $\xi' = t'$, $\mathbf{N}'^{(k)}_0(t') = v_k\mathbf{L}'^{(k)}_{1,0}$, поэтому

$$\varphi^{(k)}_1\Big|_{S'^{(k)}_1} = ((\mathbf{T}_k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}^{(k)}_1 + v_k\mathbf{L}'^{(k)}_{1,0}\boldsymbol{\alpha}^{(k)}_1)\mathbf{E}_0, \mathbf{r}'|_{S'^{(k)}_1}). \tag{25}$$

Подставим (25) в интеграл по поверхности $S'^{(k)}_1$ в (23):

$$\oiint\limits_{S'^{(k)}_1}\varphi^{(k)}_1\mathbf{n}'_1 dS' = \left((\mathbf{T}_k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}^{(k)}_1 + v_k\mathbf{L}'^{(k)}_{1,0}\boldsymbol{\alpha}^{(k)}_1)\mathbf{E}_0, \oiint\limits_{S'^{(k)}_1}\mathbf{r}'\otimes\mathbf{n}'_1 dS'\right).$$

Вычисляя поверхностный интеграл, получим

$$\oiint\limits_{S'^{(k)}_1}\mathbf{r}'\otimes\mathbf{n}'_1 dS' = \frac{4\pi}{3}a^{(k)}_{11'}a^{(k)}_{12'}a^{(k)}_{13'}\mathbf{I}.$$

Таким образом,

$$\oiint\limits_{S'^{(k)}_1}\varphi^{(k)}_1\mathbf{n}'_1 dS' = \frac{4\pi}{3}a^{(k)}_{11'}a^{(k)}_{12'}a^{(k)}_{13'} \times \times (\mathbf{T}_k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}^{(k)}_1 + v_k\mathbf{L}'^{(k)}_{1,0}\boldsymbol{\alpha}^{(k)}_1)\mathbf{E}_0. \tag{26}$$

Аналогично с учетом (24) для интеграла по поверхности $S'^{(k)}_2$ имеем

$$\oiint\limits_{S'^{(k)}_2}\varphi^{(k)}_1\mathbf{n}'_2 dS' = = \frac{4\pi}{3}a^{(k)}_{21'}a^{(k)}_{22'}a^{(k)}_{23'}(\mathbf{T}_k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}^{(k)}_1 + \mathbf{L}'^{(k)}_{2,0}\boldsymbol{\alpha}^{(k)}_1)\mathbf{E}_0. \tag{27}$$

Подставляя (26), (27) в (23), получим

$$\langle\mathbf{E}^{(k)}_1\rangle = (V^{(k)}_1)^{-1}[-V^{(k)}_1\boldsymbol{\beta}^{(k)}_1 + V^{(k)}_2(\mathbf{L}'^{(k)}_{2,0} - \mathbf{L}'^{(k)}_{1,0})\boldsymbol{\alpha}^{(k)}_1]\mathbf{E}_0, \tag{28}$$

где $V^{(k)}_2 = \dfrac{4\pi}{3}a^{(k)}_{21}a^{(k)}_{22}a^{(k)}_{23}$ – объем ядра k-го включения.

С учетом (20) перепишем (28) в виде

$$\left\langle \mathbf{E}^{(k)}_1 \right\rangle = \frac{1}{1 - v_k}((1 - v_k)\mathbf{I} + + (\mathbf{L}'^{(k)}_{2,0} - v_k\mathbf{L}'^{(k)}_{1,0})(\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}_1))\boldsymbol{\lambda}^{(k)}_{20}\mathbf{E}_0. \tag{29}$$

Поскольку средняя напряженность поля в матрице при наличии в ней единственного включения равна $\mathbf{E}_0$, из (29) следует вид тензора $\boldsymbol{\lambda}^{(k)}_1$:

$$\boldsymbol{\lambda}^{(k)}_1 = \frac{1}{1 - v_k}((1 - v_k)\mathbf{I} + + (\mathbf{L}'^{(k)}_{2,0} - v_k\mathbf{L}'^{(k)}_{1,0})(\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}_1))\boldsymbol{\lambda}^{(k)}_{20}, \tag{30}$$

где $\boldsymbol{\lambda}_{20}^{(k)}$ определяется из (16). Аналогично из (18) следует вид тензора $\boldsymbol{\lambda}_{2}^{(k)}$:

$$\boldsymbol{\lambda}_2^{(k)} = \boldsymbol{\lambda}_{20}^{(k)}. \tag{31}$$

Таким образом, обобщенным приближением МГ для матричного композита с эллипсоидальными включениями с эллипсоидальной оболочкой можно считать формулу (12), где используемые в нем тензорные величины определяются выражениями (10), (11), (30), (31).

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ МАКСВЕЛЛА ГАРНЕТТА

1. Непосредственно проверяется, что в предельных случаях композита с однородными включениями, т.е. при отсутствии ядра либо оболочки у всех включений, либо при совпадающих материальных характеристиках ядер и оболочек, результат по формулам (12), (10), (11), (30), (31) совпадает с результатом, полученным в [7] для композита с однородными эллипсоидальными включениями.

2. Рассмотрим случай, когда оболочки всех включений изотропные, т.е. $\boldsymbol{\varepsilon}_1^{(k)} = \varepsilon_1^{(k)}\mathbf{I}$, и главные оси тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)}$ всех включений совпадают с осями их ядер. Тогда $S_2^{(k)}$ и $S_1^{(k)}$ – софокусные эллипсоиды, их оси совпадают с главными осями тензора $\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)}$. В этом случае [14]

$$\mathbf{L}'^{(k)}_{1,0} = (\varepsilon_1^{(k)})^{-1}\mathbf{L}_1^{(k)},$$
$$\mathbf{L}'^{(k)}_{2,0} = (\varepsilon_1^{(k)})^{-1}\mathbf{L}_2^{(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

где главные значения тензора $\mathbf{L}_2^{(k)}$ имеют выражения, аналогичные (17), с заменой полуосей $S_1^{(k)}$ на полуоси $S_2^{(k)}$. Для тензоров $\boldsymbol{\lambda}_{20}^{(k)}$, $\boldsymbol{\lambda}_1^{(k)}$, $\boldsymbol{\lambda}^{(k)}$, $\boldsymbol{\kappa}^{(k)}$ имеем

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\lambda}_{20}^{(k)} = [(\mathbf{I} + (\varepsilon_m)^{-1}\mathbf{L}_1^{(k)}(\varepsilon_1^{(k)} - \varepsilon_m)) \times \\
\times (\mathbf{I} + (\varepsilon_1^{(k)})^{-1}(\mathbf{L}_2^{(k)} - v_k\mathbf{L}_1^{(k)})(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)} - \varepsilon_1^{(k)}\mathbf{I})) + \\
+ v_k(\varepsilon_m)^{-1}\mathbf{L}_1^{(k)}(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)} - \varepsilon_1^{(k)}\mathbf{I})]^{-1}, \\
\boldsymbol{\lambda}_1^{(k)} = \frac{1}{1 - v_k}((1 - v_k)\mathbf{I} + (\varepsilon_1^{(k)})^{-1}) \times \\
\times (\mathbf{L}_2^{(k)} - v_k\mathbf{L}_1^{(k)})(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)} - \varepsilon_1^{(k)}\mathbf{I}))\boldsymbol{\lambda}_{20}^{(k)}, \\
\boldsymbol{\lambda}^{(k)} = (\mathbf{I} + (\varepsilon_1^{(k)})^{-1}(\mathbf{L}_2^{(k)} - v_k\mathbf{L}_1^{(k)})(\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)} - \varepsilon_1^{(k)}\mathbf{I}))\boldsymbol{\lambda}_{20}^{(k)}, \\
\boldsymbol{\kappa}^{(k)} = [\varepsilon_1^{(k)}\mathbf{I} + (v_k\mathbf{I} + (\mathbf{L}_2^{(k)} - v_k\mathbf{L}_1^{(k)})) \times \\
\times (\boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)} - \varepsilon_1^{(k)}\mathbf{I})]\boldsymbol{\lambda}_{20}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots, N.
\end{gathered} \tag{32}$$

Если все включения имеют одинаковую форму, материальные свойства и ориентацию, то номер включения в (32) можно опустить, а операцию усреднения в (12) снять. Тогда

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \left[(1 - f)\varepsilon_m\mathbf{I} + f\boldsymbol{\kappa}\right]\left[(1 - f)\mathbf{I} + f\boldsymbol{\lambda}\right]^{-1},$$

где $\boldsymbol{\lambda}_{20}$, $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\kappa}$ определяются формулами, аналогичными (32).

3. Рассмотрим композит с одинаковыми включениями с шарообразным анизотропным ядром в сферической изотропной оболочке. В этом случае

$$v_k = v, \quad \varepsilon_1^{(k)} = \varepsilon_1, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2^{(k)} = \boldsymbol{\varepsilon}_2,$$
$$\mathbf{L}_1^{(k)} = \mathbf{L}_2^{(k)} = \frac{1}{3}\mathbf{I}, \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

и для $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ в итоге по формулам (32), (12) получим

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\varepsilon}^* = \varepsilon_m\left[(1 - f)\mathbf{I} + 3f\varepsilon_1\left\langle[(2\varepsilon_1\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_2) + 2v(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})]\times\right.\right. \\
\times\left.\left[(2\varepsilon_m + \varepsilon_1)(2\varepsilon_1\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_2) + 2v(\varepsilon_1 - \varepsilon_m)(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\right]^{-1}\right\rangle]\times \\
\times[(1 - f)\mathbf{I} + 3\varepsilon_m f\langle((2\varepsilon_1\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_2) - v(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})) \times \\
\times\left.\left[(2\varepsilon_m + \varepsilon_1)(2\varepsilon_1\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}_2) + 2v(\varepsilon_1 - \varepsilon_m)(\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \varepsilon_1\mathbf{I})\right]^{-1}\right\rangle]^{-1}.
\end{gathered} \tag{33}$$

Усреднение в (33) производится по всем ориентациям кристаллографических осей ядер включений, которое может быть проведено, как в [7], с использованием теории представлений группы вращений. Заметим, что (33) формально может быть получена как частный случай обобщенного приближения эффективного поля для данного композита, если в качестве среды сравнения взять матрицу ([15, формула (33)]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом настоящей работы являются формулы (12), (10), (11), (30), (31), в совокупности представляющие обобщенное приближение Максвелла Гарнетта для вычисления эффективных диэлектрических характеристик матричного композита с эллипсоидальными включениями с оболочкой. Данное приближение позволяет естественным образом учитывать такие структурные особенности композита, как наличие нескольких видов включений, а также вероятностные распределения их форм и ориентаций.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проекты 19-08-00111-а, 20-08-00155-а) и в рамках реализации ГЗ ЮНЦ РАН (проект АААА-А16-116012610052-3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Maxwell Garnett J.C.* // Phil. Trans. R. Soc. London. 1904. V. 203. P. 385–420.
2. *Bragg W.L., Pippard A.B.* // Acta Cryst. 1953. V. 6. № 11–12. P. 865–867.

3. *Levy O., Stroud D.* // Phys. Rev. B. 1997. V. 56. № 13. P. 8035–8046.
4. *Ораевский А.Н., Проценко И.Е.* // Квантовая электроника. 2001. Т. 31. № 3. С. 252–256.
5. *Gittleman J.I., Abeles B.* // Phys. Rev. B. 1977. V. 15. № 6. P. 3273–3275.
6. *Fricke H.* // Phys. Rev. 1924. V. 24. P. 575–587.
7. *Лавров И.В.* // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2009. № 1. С. 52–58.
8. *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 660 с.
9. *Kerner E.H.* // Proc. Phys. Soc. B. 1956. V. 69. P. 802–807.
10. *Апресян Л.А., Власов Д.В., Задорин Д.А., Красовский В.И.* // ЖТФ. 2017. Т. 87. Вып. 1. С. 10–17. https://doi.org/10.21883/JTF.2017.01.44011.1841
11. *Sihvola A.* Electromagnetic Mixing Formulas and Applications. London: The Institution of Electrical Engineers, 1999. 296 p.
12. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю.* // Радиооптика. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2016. № 3. С. 29–46. https://doi.org/10.7463/rdopt.0316.0846170
13. *Bowler N.* // IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul. 2006. V. 13. № 4. P. 703–711.
14. *Лавров И.В., Яковлев В.Б.* // ЖТФ. 2017. Т. 87. Вып. 7. С. 963–972. https://doi.org/10.21883/JTF.2017.07.44663.1964
15. *Колесников В.И., Бардушкин В.В., Лавров И.В., Сычев А.П., Яковлев В.Б.* // ДАН. 2017. Т. 476. № 3. С. 280–284. https://doi.org/10.7868/S0869565217270081

GENERALIZED MAXWELL GARNETT APPROXIMATION FOR TEXTURED MATRIX COMPOSITES WITH COATED INCLUSIONS

Academician of the RAS V. I. Kolesnikov[a], V. V. Bardushkin[b], I. V. Lavrov[b], A. P. Sychev[a,c], and V. B. Yakovlev[b,d]

[a] *Rostov State Transport University, Rostov-on-Don, Russian Federation*

[b] *National Research University of Electronic Technology, Moscow, Russian Federation*

[c] *Federal Research Centre the Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation*

[d] *Institute of Nanotechnology of Microelectronics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

A generalization of the Maxwell Garnett approximation for a textured matrix composite consisting of ellipsoidal inclusions with a shell is proposed; using it, an expression for an effective permittivity tensor of a given medium is obtained. It is shown that in the case of a matrix composite with spherical inclusions in the shell, this expression coincides with the formula obtained in the generalized effective-field approximation, if the matrix is taken as the comparison medium.

Keywords: Maxwell Garnett approximation, effective permittivity, generalized effective-field approximation, matrix composite, inclusion with a shell

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 498, с. 17–21

ФИЗИКА

УДК 538.9537.874

О ЛАЗЕРЕ С ПЕРЕСТРАИВАЕМОЙ ЧАСТОТОЙ НА ТОНКИХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ КВАНТОВЫХ КОЛЬЦАХ

© 2021 г. А. М. Мандель[1,*], В. Б. Ошурко[1,2,], С. М. Першин[2,***], Е. Е. Карпова[1,****], Д. Г. Артёмова[2,*****]**

Представлено академиком РАН В.И. Коновым 15.04.2021 г.
Поступило 17.04.2021 г.
После доработки 17.04.2021 г.
Принято к публикации 27.04.2021 г.

Установлено, что тонкие полупроводниковые квантовые кольца во внешнем магнитном поле могут обладать уникальными селекционными свойствами: подбирая тип гетероструктуры и геометрические параметры кольца, можно свести его энергетический спектр к единственному одноэлектронному состоянию с заранее определенной энергией связи и орбитальным и спиновым моментом. Во внешнем магнитном поле можно дискретно менять эту энергию связи, изменяя величину поля. Обсуждается идея создания эффективного лазера с активной средой на тонких полупроводников квантовых кольцах с дискретно перестраиваемой частотой.

Ключевые слова: полупроводниковые квантовые кольца, правила отбора, лазер с дискретно перестраиваемой частотой

DOI: 10.31857/S2686740021030147

Активно растущий в последнее время интерес к полупроводниковым квантовым кольцам (тонким закольцованным квантовым нитям диаметром до нескольких десятков нм) связан в основном с двумя причинами [1–10]. Во-первых, это существование в кольцах незатухающего квантового тока (persistent currents) и связанных с ним явлений (управляемого эффекта Ааронова–Бома, дробного квантования магнитного потока и т.д.), что очень важно для задач наноэлектроники, квантового компьютинга и спинтроники [1, 2, 4–6]. Во-вторых, в простой геометрии квантовых колец точно решается задача многих тел, причем даже для взаимодействующих частиц [1, 2, 8–10]. Однако большое число работ в этих двух направлениях пока не затронуло вопроса о правилах отбора для энергетического спектра квантовых колец, которые, как оказалось, имеют нетривиальный характер. Две неэквивалентные гетерограницы, на которых необходимо сшивать волновые функции локализованных в кольце электронов, превращают такое кольцо в фильтр, “вырезающий” в спектре единственное электронное состояние с любыми требуемыми характеристиками.

Нетрудно понять, насколько это обстоятельство важно для квантовой электроники. Почему это свойство колец не было отмечено ранее? Дело в том, что чаще всего радиальный удерживающий потенциал кольца не рассматривают вовсе, постулируя, что и бесконечно тонкое кольцо удержит неограниченное число электронов ([1, 2, 10] и т.д.). Реже используют модельный потенциал кольцевой δ-ямы [12], а “реалистическими” считаются потенциалы с неограниченно растущей асимптотикой [1, 2, 7, 8], приводящие к полному конфайменту электронов.

Ситуация кардинально меняется, если моделировать радиальный удерживающий потенциал кольца ямой конечной глубины и размеров. Мы использовали простейший прямоугольный потенциал такого рода

$$U(r,\varphi) = \begin{cases} 0, & r < R_1,\ r < R_2, \\ -\Delta E_c, & R_1 < r < R_2, \end{cases}$$

[1] *Московский государственный технологический университет “СТАНКИН”, Москва, Россия*
[2] *Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: arkadimandel@mail.ru*
***E-mail: vbo08@yandex.ru*
**** E-mail: pershin@kapella.gpi.ru*
***** E-mail: ekarpova1@yandex.ru*
******E-mail: artyomova_diana@mail.ru*

где ΔE_c – скачок дна зоны проводимости на гетерогранице, r и φ – полярные координаты в 2D, R_1 и R_2 – соответственно внутренний и внешний радиусы кольца. Везде в дальнейшем используются естественные единицы длины $r_0 \equiv \hbar/\sqrt{2m^*\Delta E_c}$ (m^* – эффективная масса матричного электрона) и энергии $\varepsilon = \dfrac{E}{|\Delta E_c|}$. Фактически r_0 – дебройлевская длина электрона на дне зоны проводимости матрицы с энергией, равной глубине потенциальной ямы кольца, ε – энергия в "долях" от глубины ямы. Отметим, что кольцо предполагается настолько тонким ($R_2 - R_1 \ll R_1$), что зонная структура в нем "не успела" сформироваться, так что оно не стало еще фрагментом соответствующего полупроводника. Электрон, даже когда он локализован на кольце, большую часть времени проводит в матрице, так что его эффективные свойства фактически не меняются[1].

В таких единицах наша модель описывается уравнением типа Шрёдингера (точнее, это пространственная часть уравнения Паули, соответствующая двум электронным компонентам 8-столбцового тетраспинора (k–p)-теории Кейна)

$$\begin{gathered} -\Delta^{(2)}\psi(r,\varphi) - i\frac{e\hbar B}{2m^*\Delta E_c}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \left(\frac{eBr}{2\hbar}\right)^2\psi(r,\varphi) = \\ = \left(\begin{cases}0\\1\end{cases} - \varepsilon \pm \frac{g^*\mu_B B}{2\Delta E_c}\right)\psi(r,\varphi) \end{gathered} \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered} \frac{\partial\psi}{\partial r}(0,\varphi) = 0; \\ \psi(r,\varphi) \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $\Delta^{(2)}$ – двухмерный лапласиан, B – индукция внешнего однородного магнитного поля, e – элементарный заряд, ε – энергия связи электрона в кольце, верхний индекс в фигурных скобках в правой части соответствует области матрицы (как обычно, энергия отсчитывается от дна зоны проводимости матрицы), нижний индекс – области внутри кольца, g^* – эффективный фактор Ланде для матричного электрона, μ_B – магнетон Бора. Весь последний член в правой части – энергия взаимодействия спина электрона с магнитным полем; верхний знак соответствует направлению спина вдоль поля, нижний – соответственно против (основное состояние).

Видно, что здесь пока не учитываем спин-орбитальное взаимодействие. Это вполне можно сделать в духе [5], причем как в варианте Рашбы, так и Дрессельхауза. Однако ясно, что оно, значительно усложнив угловую часть и сам незатухающий ток, слабо затронет интересующие нас радиальные условия удержания электрона в кольце. Отметим, что для функции Грина в однородном магнитном поле целесообразно использовать интегральное представление, а не разложение по уровням Ландау [14, 15].

После разделения переменных и решения уравнения для угловой части (в отсутствие спин-орбитальных поправок это довольно просто), получаем уравнение для радиальной волновой функции

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi_{nq}}{dr}\right) + \left(\begin{cases}0\\1\end{cases} - \varepsilon_{nq} + \frac{q^2}{r^2}\right)\psi_{nq}(r) = 0, \tag{3}$$

где

$$q^2 = \left(l - \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 \pm \frac{g^*}{2}\frac{\Phi}{\Phi_0}; \tag{4}$$

l – орбитальное квантовое число электрона, Φ – магнитный поток через кольцо, $\Phi_0 = 2\pi\hbar/e$ – его квант (напомним, что у нас в кольце не куперовская пара, а уединенный электрон). Решение этого уравнения с граничными условиями (2)

$$\psi_{nq}(r) = \begin{cases} AI_q(\sqrt{\varepsilon_{nq}}r), & r < R_1, \\ BJ_{nq}(\sqrt{1-\varepsilon_{nq}}r), & R_1 < r < R_2, \\ DK_q(\sqrt{\varepsilon_{nq}}r), & R_2 < r, \end{cases} \tag{5}$$

где I, J, K – цилиндрические функции соответственно Инфельда, Бесселя и Макдональда, нормировочные постоянные A, B и D значения не имеют, а n – номер экстремума функции Бесселя, описывающего волновую функцию внутри кольца. При этом толщина кольца позволяет "вместить" окрестность только одного экстремума.

Кроме того, решение (5) должно удовлетворять трем дополнительным условиям: двум условиям непрерывности логарифмической производной на двух гетерограницах кольца

$$\begin{gathered} \sqrt{\varepsilon_{nq}}J_{nq}(\sqrt{1-\varepsilon_{nq}}R_1)\frac{dI_q}{dr} = \\ = -\sqrt{1-\varepsilon_{nq}}I_q(\sqrt{\varepsilon_{nq}}R_1)\frac{dJ_{nq}}{dr}, \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \sqrt{\varepsilon_{nq}}J_{nq}(\sqrt{1-\varepsilon_{nq}}R_2)\frac{dK_q}{dr} = \\ = \sqrt{1-\varepsilon_{nq}}K_q(\sqrt{\varepsilon_{nq}}R_2)\frac{dJ_{nq}}{dr}, \end{gathered} \tag{7}$$

а также условию того, что экстремум функции Бесселя лежит внутри кольца

$$\frac{dJ_{nq}(\sqrt{1-\varepsilon_{nq}}r_0)}{dr} = 0 \quad \text{при} \quad R_1 < r_0 < R_2. \tag{8}$$

[1] О том, как рассчитать в такой ситуации поправки к эффективной массе и g-фактору электрона в рамках модифицированной теории Кейна, см. [13].

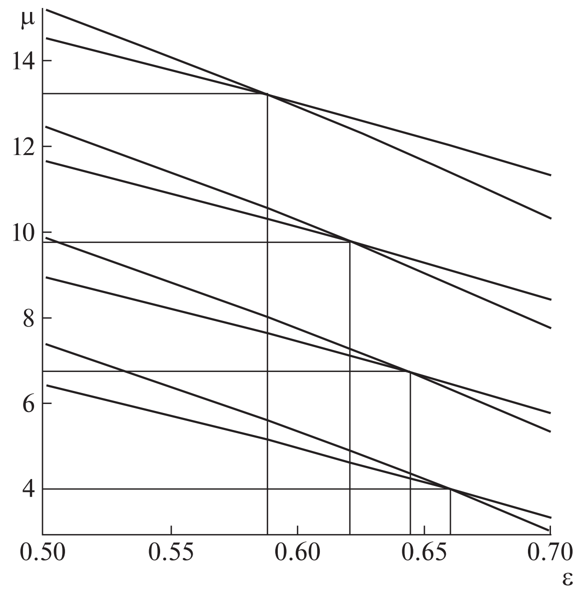

Рис. 1. Связь спектральных линий тонкого кольца ε_{nq} (вертикальные прямые) с величиной магнитного потока через кольцо $\mu = \frac{\Phi}{\Phi_0}$ (горизонтальные прямые). Наклонные отрезки кривых – численное решение уравнений (6) и (7) с учетом условия (8).

Как легко убедиться, условия (6)–(8) для двух наугад выбранных близких радиусов кольца R_1 и R_2 при фиксированном орбитальном моменте l обычно противоречивы. Они выполняются только при определенных значениях Φ, причем каждое соответствует единственному значению n и ε_{nq}. Другими словами, спектр тонкого квантового кольца, как правило, "пуст"; уединенный уровень появляется в нем лишь при строго определенных значениях магнитного поля и полностью этим полем определяется. Описанную ситуацию иллюстрирует рис. 1. Только в точках пересечения наклонных кривых (численные решения уравнений, соответствующих граничным условиям (6) и (7)) в кольце может локализоваться электрон со строго определенной энергией связи ε_{nq}. При этом ориентация его спина и орбитального момента $l\hbar$ относительно магнитного поля также однозначно определены. Крайне маловероятно "случайное попадание" в тонкое кольцо с теми же радиусами при том же значении магнитного поля электронного состояния с другими параметрами. Поэтому мы вообще не рассматриваем дырочные уровни: масса дырки обычно значительно отличается от массы электрона, что сразу сказывается на условиях (6)–(8). Важно, что в весьма распространенном приближении кольцевой δ-ямы описанный эффект пропадает, так как две неэквивалентные гетерограницы стягиваются в одну. Соответственно, вместо двух условий (6), (7) мы получаем одно условие, определяющее "излом" (скачок производной) радиальной функции. По этой же причине подробно изученное в ряде обзоров (например, [1, 2]) бесконечно тонкое кольцо с неограниченным числом электронных состояний, скорее, на наш взгляд, математическая абстракция, чем практически реализуемая гетероструктура.

Обсудим теперь возможность лазерной генерации в среде, активными элементами которой являются ориентированные квантовые кольца. Во-первых, внешняя накачка излучающего уровня, очевидно, не требуется, так как инверсия населенности создается автоматически: излучательными будут переходы электронов из сплошного спектра у дна зоны проводимости матрицы на единственный стабильный уровень в кольце, а инверсия населенности возникает при отключении магнитного поля, когда единственный уровень в кольце исчезает. При этом электрон быстро возвращается на уровни зоны проводимости матрицы, ибо проводит именно там большую часть времени. Во-вторых, и это главное преимущество предложенной схемы – возможность дискретно менять частоту перехода простым изменением величины индукции внешнего поля.

Важным преимуществом является тот факт, что направление орбитального момента и спина электрона в кольце определяется осевой симметрией колец. Поскольку электрон в кольце – конечное состояние излучательного перехода, дифференциальное сечение этого процесса как функция угла рассеивания матричного электрона будет иметь резкий пик в направлении нормали к кольцу. Фактически рассеивание матричных электронов на кольцах будет происходить только вперед. В такой геометрии, во-первых, вероятность индуцированного перехода может превысить вероятность спонтанного, несмотря на известное соотношение Эйнштейна. Во-вторых, импульс излучаемых фотонов также будет естественным образом ориентирован нормально кольцу. Это должно значительно снизить потери в резонаторах. Само время жизни “возбужденного” состояния можно регулировать, меняя орбитальный момент уровня в кольце l, все тем же изменением магнитного поля. В (k–p)-теории считается, что электрон на дне зоны проводимости матрицы находится обычно в S-состоянии. Поэтому самым коротким излучаемый импульс будет при $l = 1$. Увеличивая его, мы, тем самым, повышаем степень запрета перехода и, соответственно, увеличиваем длительность импульса. Таким образом, возможностей повышения эффективности такого лазера, как и возможностей управления процессом и характеристиками излучения, здесь достаточно много.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-07-01044 А) и Министерства высшего образования и науки РФ (грант 0707-2020-0025).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Viefers S., Koskinen P., Singha Deo P., Manninen M.* Quantum rings for beginners: energy spectra and persistent currents // Physica E. 2004. V. 21. № 1. P. 1–35. https://doi.org/10.1016/j.physe.2003.08.076
2. *Manninen M., Viefers S., Reimann S.M.* Quantum rings for beginners II: Bosons versus fermions // Physica E. 2012. V. 46. P. 119–132. https://doi.org/10.1016/j.physe.2012.09.013
3. *Kammermeier M., Seith A., Wenk P., Schliemann J.* Persistent spin textures and currents in wurtzite nanowire-based quantum structures. 2020. //arXiv: 2001.06571v2 8 May 2020 [cond-mat.mes-hall] https://doi.org/10.1103/PhysRevB.101.195418 (2020); https://arxiv.org/pdf/2001.06571.pdf
4. *Li B., Magnus W., Peeters F.M.* Tunable exciton Aharonov-Bohm effect oin a quantum ring // J. of Physics: Conferens Series 2010. V. 210. In: 11th International Conference on Optics of Excitons in Confined Systems (OECS11) 7–11 September 2009, Madrid, Spain. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/210/1/012030/meta
5. *Lia J.M., Tamborenea P.I.* Narrow quantum rings with general Rashba and Dresselhaus spin-orbit interaction // Physica E. 2020. V. 126. P. 114419–114431. https://doi.org/10.1016/j.physe.2020.114419
6. *Kozin V.K., Iorsh I.V., Kibis O.V., Shelykh I.A.* Periodic array of quantum rings strongly coupled to circularly polarized light as a topological insulator // Phys. Rev. B. 2018. V. 97. P. 035416–035423. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.97.035416
7. *Tan W.-C., Inkson J.* Electron states in a two-dimensional ring – an exactly soluble model. // Semiconductor Science and Technology. 1996. V. 11. № 11. P. 1635–1649. https://doi.org/10.1088/0268-1242/11/11/001
8. *Zipper E., Kurpas M., Sadowski J., Maska M.* Semiconductor quantum rings as a solid-state spin qubit // arXiv: 1011.2540v1. [cond-mat.mes-hall] 11 Nov 2010 https://www.academia.edu/34947381/Semiconductor_quantum_ring_as_a_solid_state_spin_qubit
9. *Loos P.-F., Gill P.* Exact Wave Function of Two-Electron Quantum Rings // Phys. Rev. Lett. 2012. V. 108. P. 083002–083006. https://doi.org/10.1103/physrevlett.108.083002
10. *Говоров А.О., Чаплик А.В., Вендлер Л., Фомин В.М.* Зависит ли незатухающий ток в квантовых кольцах от межэлектронного взаимодействия // Письма в ЖЭТФ. 1994. Т. 60. № 9. С. 633–636. http://www.jetpletters.ac.ru/cgi-bin/articles/download.cgi/1351/article_20409.pdf
11. *Hubbard J.* Electron correlations in narrow energy bands // Proc. Roy. Soc. London A. 1963. V. 276. P. 238–257. https://doi.org/10.1098/rspa.1963.0204
12. *Meijer F.E., Morpurgo A.F., Klapwijk T.M.* One-dimensional ring in the presense of Rashba spin-orbit interection: Derivation of the correct Hamiltonian // Phys. Rev. B. 2002. V. 66. 033107. https://doi.org/10.1103/PhysRevB.66.033107
13. *Мандель А.М., Ошурко В.Б., Карпова Е.Е.* Механизм перенормировки фактора Ланде и эффективной массы в малых сферических квантовых точках // Радиотехника и электроника. 2019. Т. 64. № 10. С. 1010. https://doi.org/10.1134/S1064226919100085
14. *Родионов В.Н., Кравцова Г.А., Мандель А.М.* Отсутствие стабилизации квазистационарных состояний электрона в сильном магнитном поле // ДАН. 2002. Т. 386. № 6. С. 753–755.
15. *Родионов В.Н., Кравцова Г.А., Мандель А.М.* Волновая функция и распределение токов вероятности связанного электрона, движущегося в однородном магнитном поле // ТМФ. 2010. Т. 164. № 1. С. 157–171.

LASING ON THIN SEMICONDUCTOR QUANTUM RINGS WITH TUNABLE FREQUENCY

A. M. Mandel[a], V. B. Oshurko[a,b], S. M. Pershin[b], E. E. Karpova[a], and D. G. Artemova[b]

[a] *MSTU "STANKIN", Moscow, Russian Federation*

[b] *Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.I. Konov

For the first time, as far as we know, it has been established that thin semiconductor quantum rings in an external magnetic field have unique selection properties. It is possible to reduce the spectrum of the ring to a single one-electron state with a predetermined binding energy and orbital and spin moment. This binding energy is controlled by the value of the external magnetic field. The idea of creating an economical discretely tunable frequency laser based on thin quantum rings as active elements is discussed.

Keywords: semiconductor quantum rings, selection rules, discretely tunable frequency lasing

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 498, с. 22–26

ФИЗИКА

УДК 532.5

ГРУППЫ БРЫЗГ ИМПАКТА КАПЛИ ВОДЫ, СВОБОДНО ПАДАЮЩЕЙ В РАСПЛАВЛЕННЫЙ МЕТАЛЛ

© 2021 г. Ю. Д. Чашечкин[1,*], С. Е. Якуш[1,], А. Ю. Ильиных[1,***]**

Представлено академиком РАН Д.М. Климовым 15.03.2021 г.
Поступило 17.03.2021 г.
После доработки 17.03.2021 г.
Принято к публикации 24.03.2021 г.

Изменения состава групп капелек (брызг), вылетающих при падении в тигель с расплавом металла (сплав Розе при температуре 200°C) капли воды диаметром $D = 0.42$ см со скоростью $U = 3.3$ м/с, впервые прослежены методами фото- и видеорегистрации. В режиме образования всплеска группы мелких капелек воды последовательно выбрасываются с вершин шипов на пелене вокруг области первичного контакта, затем с шипов на кромке слоя растекания воды. Далее капельки воды вылетают вертикально и наклонно с вершин коротких струек – стримеров. Группы мелких капелек образуются при разрыве крупных пузырей. После формирования всплеска и отрыва его вершины с взвешенными газовыми пузырьками наблюдается выброс капель воды и составных капель, состоящих из металлического ядра и водной оболочки. На последней стадии наряду со струйками воды наблюдаются более редкие стримеры, состоящие из расплава, с вершин которых вылетают капельки металла. Прослежена геометрия каверны и слоя вскипающей воды растекающейся капли.

Ключевые слова: капля воды, тигель, расплав металла, брызги воды, пелена, шипы, всплеск, стримеры, капельки металла

DOI: 10.31857/S268674002103007X

Изучение динамики брызг (мелких капелек) – одного из компонентов процесса слияния капли с принимающей жидкостью, визуализированных уже в первых опытах [1], активно проводится с применением рентгеновской, световой и инфракрасной подсветки [2], гидрофонов и микрофонов [3], быстрых видеокамер [4]. Интерес обусловлен научной содержательностью явления и многообразием технических приложений в наземных и космических технологиях.

Картина течения в целом [5], динамика и траектории капелек, скорость которых на начальном этапе парадоксальным образом превышает скорость сливающейся капли [6], зависят от многих параметров – состава, термодинамических и кинетических свойств контактирующих сред, а также размеров, скорости и наклона траектории движения капли. Заметное влияние на образование брызг [6] и дискретное распределение вещества капли в принимающей жидкости оказывают и быстрые, и медленные процессы конверсии и передачи энергии [7, 8]. Картина течения усложняется при падении капель воды в перегретое масло. Брызги воды выносят мелкие капельки масла, образуя легко воспламеняющийся туман [9].

Научный интерес представляет изучение влияния большой разности плотностей контактирующих сред на картину капельных течений. Общая геометрия каверны и всплеска, образующихся при падении капель металлов в ртуть и другие жидкие при комнатной температуре сплавы, наблюдаемая и рассчитанная в [10], подобна традиционной [5]. Влияние толщины оксидной пленки, которая образуется на поверхности металла в воздухе, на картину течения изучалось в [11, 12]. Анизотропия каверны и венца при импакте капли жидкого металла в горизонтальном магнитном поле прослежена в [13].

Интерес представляет изучение течения, образующегося при слиянии капли жидкости с расплавом металла, нагретым выше температуры ее кипения. Эволюция картины течения при падении капель и коротких вертикальных струек воды в расплав прослежена в [14]. В данной работе впервые визуализированы различные системы мелких капелек (брызг), последовательно образующихся при контакте свободно падающей капли воды с расплавленным металлом (сплавом Розе).

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: chakin@ipmnet.ru*
***E-mail: yakush@ipmnet.ru*
****E-mail: ilynykh@ipmnet.ru*

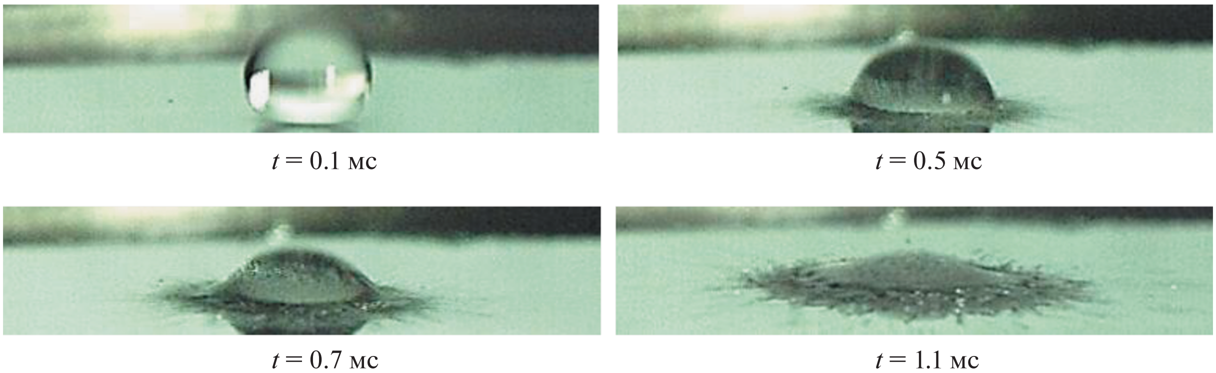

Рис. 1. Картина течения, вызванного падением капли воды на поверхность расплава металла: $D = 0.42$ см, $U = 3.3$ м/с, $T_d = 20°C$, $T_m = 200°C$, $E_d = 211$ мкДж, $E_\sigma = 4$ мкДж, $\mathrm{Re} = 14000$, $\mathrm{Fr} = 265$, $\mathrm{Bo} = 2.39$, $\mathrm{Oh} = 0.0018$, $\mathrm{We} = 630$.

В опытах, выполненных на стендах УИУ "ГФК ИПМех РАН" [15], капли воды диаметром $D = 0.42$ см падали с высоты $H = 58$ см на поверхность жидкого сплава Розе (25% Sn, 25% Pb, 50% Bi) при температуре $T = 200°C$, находящегося в тигле диаметром $D_t = 8.5$ см и глубиной $h = 2$ см, установленном на электрическом нагревателе мощностью 2 кВт. Течение, подсвеченное софитом ReyLab Xenos RH-1000 мощностью 1 кВт и светодиодами Optronis MultiLED, регистрировалось видеокамерой Optronis CR3000x2, скорость съемки составляла 5000 кадр/с. Более подробно методика приведена в [14]. Всего проведено 10 одинаковых опытов с каплями диаметром $D = 0.42$ см и скоростью в момент контакта $U = 3.3$ м/с. Для улучшения качества изображения в опытах изменялись положение и яркость осветителей.

Свойства сред и условия опытов, определяющие эволюцию структуры течения, характеризуются физическими параметрами или безразмерными числами Рейнольдса, Фруда, Бонда, Вебера, Онезорге [8, 14], дополненными отношениями плотностей расплава, принимающего каплю воды $\tilde{\rho} = \frac{\rho_m}{\rho_w} = 9.4$, а также кинетической энергии капли E_k к доступной потенциальной поверхностной E_σ.

Разнообразие форм капель воды в момент контакта, влияющих на картину течения, определяет модальный состав колебаний Рэлея и групп капиллярных волн, образующихся при их отрыве. При первичном контакте симметричной капли воды (соотношение сторон 0.95, $t = 0.1$ мс, рис. 1) формируется тонкий диск, пронизанный струйками – шипами, выступающими с его кромки. С вершин шипов срываются последовательности мелких капелек, летящих под углами до 8° к горизонту, как и при контакте капли воды с водой [6].

При большой разности температур жидкого металла $T_m = 200°C$ и воды $T_d = 20°C$, вследствие конвективного и радиационного прогрева, мелкие капли быстро испаряются, длина их траекторий не превышает $l_f < 4.3$ мм ($t = 0.5$ мс, рис. 1). Погружающаяся капля (высота остатка $h_d = 2.1$ мм) формирует мелкий венец и ассиметрично растекается ($t = 0.7$ мс, рис. 1), ширина пятна воды справа и слева от каверны диаметром $d_c = 5.5$ мм составляет $\Delta r = 2.5$ и 2.2 мм. На внешней кромке воды в диапазоне углов от 4° до 8° выделяются быстрые тонкие струйки диаметром $d_s = 0.06–0.07$ мм и длиной – $l_s < 1.4$ мм, вылетающие со скоростью $u_s = 6.2$ м/с, и более толстые медленные струйки, на вершинах которых находятся капельки диаметром $d_s = 0.08$ мм.

Ширина каверны растет по мере погружения капли и достигает $d_c = 7.6$ мм при $t = 1.1$ мс. Капля заполняет всю каверну и частично перетекает через венец, образуя слой воды шириной $\Delta r = 2.47$ мм справа и 2.44 мм слева. Толщину слоя воды увеличивают пузырьки в толще и на передней кромке диаметром до $d_b = 0.2$ мм. С вершин шипов на внешней кромке слоя воды длиной $l_s = 1.2$ мм в диапазоне углов $4° < \varphi < 8°$ продолжают вылетать тонкие быстро испаряющиеся капли. Здесь группа быстрых капелек (штрихов), летящих со скоростью $u_s = 6$ м/с, оторвалась от кромки слоя воды.

Постепенно картина течения усложняется, и при $t = 1.6$ мс (рис. 2) каверна диаметром $d_c = 13.4$ мм окружена небольшим венцом высотой $h_c = 0.54$ мм и слоем воды шириной $\Delta r = 3.35$ мм с отдельными газовыми пузырьками. Брызги продолжают вылетать настильно под углом менее 11° к горизонту. Над каверной появляются отдельные капельки воды диаметром $0.16 < d_s < 0.18$ мм. Брызги истончаются и испаряются в течение 1–2 мс, а

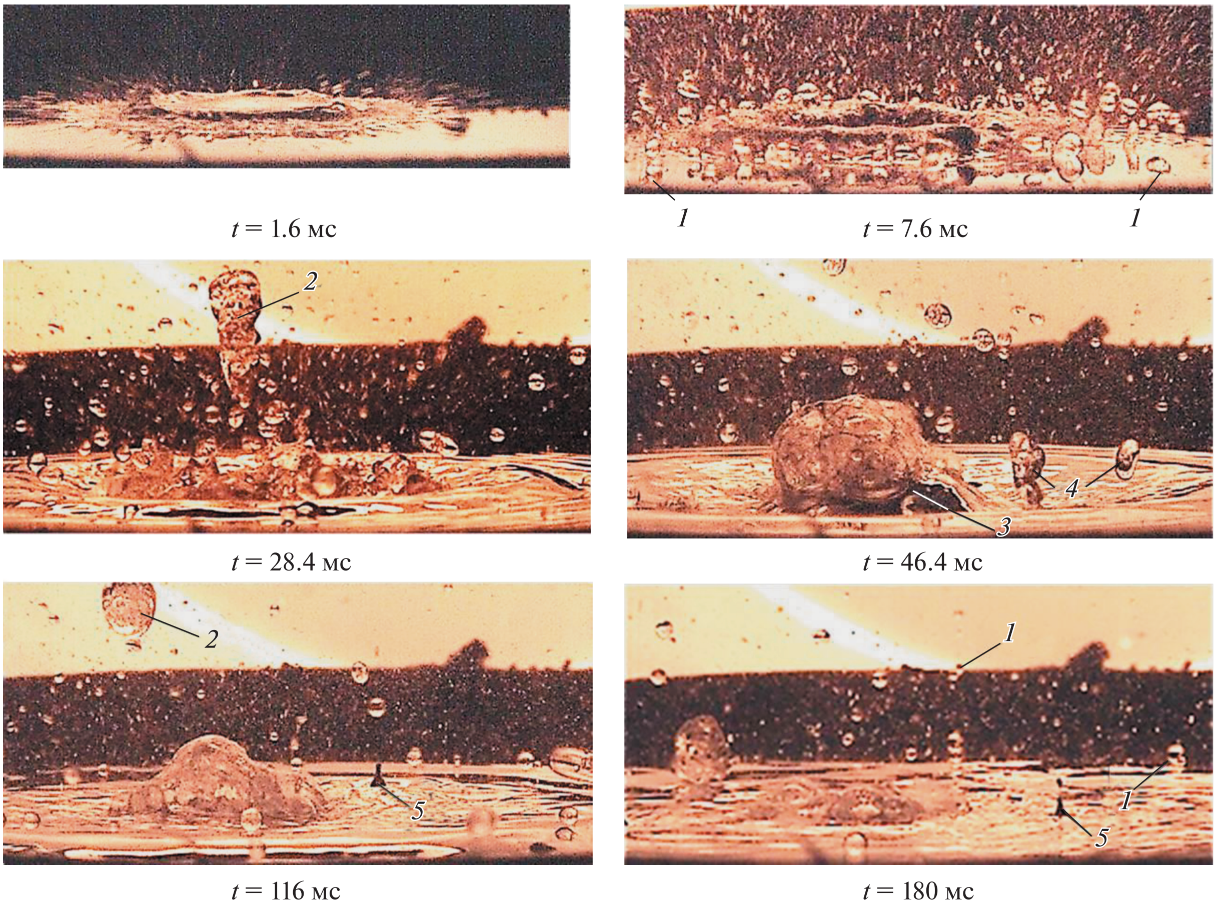

Рис. 2. Эволюция картины течения, вызванного падением капли воды на поверхность расплава металла (условия опыта – как и на рис. 1): *1* – последовательности капель с вершины стримера; *2* – отрывающийся оголовок всплеска воды с множественными пузырьками, частично распадающийся на капли; *3* – вершина всплеска расплава металла; *4* – составные капли – жидкометаллическое ядро в водной оболочке, *5* – металлические стримеры, выбрасывающие мелкие капли металла.

крупные капли, как и слой воды с пузырьками, отделенный от металла газопаровой прослойкой, существуют дольше.

Рассмотрение видеофильма показывает, что при $t \approx 4.8$ мс картина течения меняется, число выброшенных капель резко возрастает. Мелкие капли летят во всех направлениях, крупные капли последовательно выбрасываются вертикально и наклонно (в диапазоне углов ±40°). Несколько мелких капель располагаются над каверной при $t = 7.6$ мс (рис. 2). Основные брызги диаметром $0.27 < d_s < 1.0$ мм последовательно вылетают вертикально со скоростью $0.3 < u_s < 0.5$ м/с из слоя воды вокруг венца и сохраняющихся на поверхности расплава остатков капелек. Мелкие капли $0.2 < d_s < 0.3$ мм разлетаются со скоростью $1.4 < u_s < 2.2$ в широком диапазоне углов. Вертикальные струйки (стримеры), выбрасывающие капли, спонтанно появляются, хаотически движутся и вертикально осциллируют, порождая короткие капиллярные волны и течения, деформирующие поверхность расплава металла.

Испарение и рост числа пузырьков приводят к распаду слоя воды на глобулы, между которыми видны участки поверхности металла. Область эжекции капель (около 16.5 мм в диаметре) окружают кольцевые капиллярные волны длиной $\lambda_c \sim 0.15$ мм. Высота покрытого водой венца продолжает расти и достигает $h_c = 1.07$ мм.

С уменьшением площади слоя воды основным источником брызг становится область остатка каверны, в которой выражены отдельные толстые “пляшущие” струйки конической формы диаметром $d_s \sim 0.5$ мм и высотой $2.0 < h_c < 3.1$ мм, с вершин которых выбрасываются крупные капли диаметром $0.4 < d_s < 1.6$ мм со скоростью $u_s \sim 0.3$ м/с ($t = 28.4$ мс, рис. 2).

При этом в общей структуре картины течения сохраняются элементы, типичные для процесса погружения капли в воду – брызги, каверна, ве-

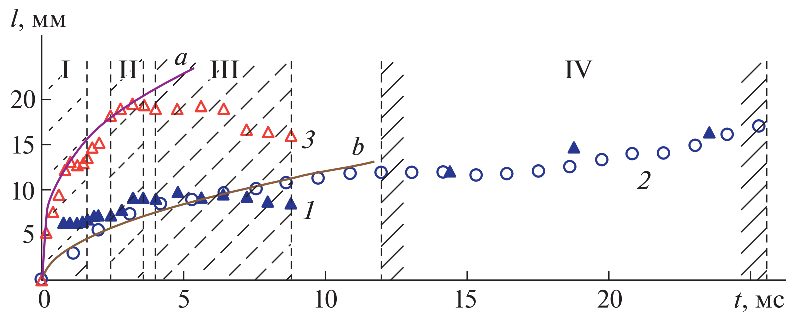

Рис. 3. Геометрия каверны и остатка капли – слоя воды (условия опыта – как и на рис. 1): *1*, *2* – диаметр каверны в жидком металле и в воде, *3* – ширина слоя воды.

нец, всплеск [1, 3, 5, 6]. Центральный всплеск (наклонная кумулятивная струя воды диаметром $d_c = 1.9$ мм с вкраплениями газопаровых пузырьков диаметром $d_v = 0.4$ мм) появляется при $t = 28.4$ мс. Верхняя часть струи, движущаяся со скоростью $u_v = 0.35$ м/с, отрывается от основания. Образовавшийся разрыв частично заполняют брызги диаметрами до 1 мм. Вершина кумулятивной струи при $t = 46.4$ мс покидает поле зрения.

Вода в центре каверны осциллирует, последовательно растекается и стягивается в компактный объем, насыщенный пузырьками. Подвижна и поверхность расплава металла, которая вспучивается в центре и образует всплеск высотой $h_p = 2$ мм с диаметром пьедестала $d_p = 8$ мм ($t = 46.4$ мс, рис. 2). Компактный объем, который дополняют отдельные капли воды диаметром $0.1 < d_s < 0.16$ мм, хаотически перемещается по наклонной боковой поверхности всплеска металла в центре течения.

Вода в центре каверны, отделенная газопаровой прослойкой, длительное время сохраняется над поверхностью металла, кипит и пузырится. Разрывающиеся крупные пузыри порождают большое число мелких брызг. Одновременно капли последовательно вылетают с вершин коротких осциллирующих струек воды – стримеров, ориентированных вертикально или наклонно. Осциллирующие стримеры порождают большое число коротких капиллярных кольцевых волн, создающих “волновую толчею”. Однако по мере испарения воды общее число капель заметно уменьшается.

На заключительном этапе вертикальные струйки воды дополняют струйки металла – темные конические выступы *5* с диаметром основания $d_s^m = 0.93$ мм и высотой $h_s^m = 1.1$ мм, окруженные кольцом капиллярных волн ($t = 116$ и 180 мс, рис. 2). Капля металла ($d_m = 0.1$ мм) над стримером *5* летит со скоростью $u_m = 1.5$ м/с. Здесь в левой части рисунка появляется стянутая в единый объем капля, выброшенная с вершины всплеска при $t = 28.4$ мс. Она касается поверхности металла со скоростью $U_d^s = 0.38$ м/с при $t = 180$ мс. Из области контакта капли вылетает радиальная система тонких брызг, как и при погружении первичной капли на рис. 1, а также формируется группа кольцевых капиллярных волн.

Немонотонные изменения диаметров каверны импакта капли воды в расплаве (кривая *1* на рис. 3) и ширины окружающего слоя воды (или газопаровой эмульсии) от времени свидетельствуют о сложном характере протекающих процессов, которые включают деформацию поверхности металла, проникновение части капли воды в толщу расплава, растекание постепенно вскипающего слоя воды вокруг каверны. Начальные участки данных *2* и *3* интерполируются кривыми $l_2 = 3.8\sqrt{t}$ и $l_3 = 13\sqrt[3]{t}$, $[l]$ = мм, $[t]$ = мс.

Вначале, при $t < 1$ мс, горизонтальный размер каверны в металле (кривая *1*) растет быстрее, чем при падении капли воды в воду (кривая *2*). При $t = 2.5$ мс размеры каверны в воде и в металле сравниваются и до $t = 25$ мс растут практически синхронно. При $9 < t < 12$ мс стенки каверны покрыты слоем кипящей воды, затрудняющей идентификацию их положения. Ускоренный рост каверны на начальной стадии обусловлен дополнительным влиянием быстрого переноса импульса в горизонтальном направлении, связанным с высвобождением потенциальной энергии и кипением жидкости, создающим дополнительные горизонтальные градиенты давления.

Размеры слоя воды немонотонно растут на этапах I и II, достигают максимума при $t = 3.6$ мс, далее размер слоя стабилизируется и медленно убывает из-за капиллярного стягивания пятна жидкости и испарения воды. Возмущения более выражены на кривой *2*, где представлены и выпуклые, и вогнутые участки. Выделяются четыре осцилляции длительностями 0.8, 2.4, 3.2 мс (вогнутый участок) и 2.4 мс.

Штрихами отмечены интервалы образования тонких настильных брызг I; капелек, вылетающих с вершин наклонных шипов II; мелких и крупных капелек с вершин водных стримеров III; образования всплеска слоя воды, отрыва вершины всплеска, формирования крупных стримеров IV. При $t > 12$ мс появляется большое число капель с газопаровыми пузырьками, при $t > 25$ мс растут размеры взрывающихся газовых пузырей, разбрасывающих мелкие капли. При $t > 45$ мс остатки воды стягиваются в газопаровую сферу над осциллирующей поверхностью металла. Одновременно формируются крупные составные капли с металлическим ядром и водной оболочкой. При $t > 116$ мс основным источником капель становятся вертикальные струйки воды и металла, механизмы формирования которых требуют дальнейшего изучения.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект 19-19-00598 (Ю.Д.Ч. – обсуждение постановки, планирование и организация эксперимента, анализ результатов, редактирование текста; А.Ю.И. – подготовка стенда, проведение опытов, обработка данных, подготовка текста); 18-19-00289 (С.Е.Я. – обсуждения постановки, методики, результатов, редактирование текста рукописи). Опыты проведены на стендах УИУ "ГФК ИПМех РАН".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Worthington A.* The splash of the drop. N.Y.: E. & J.B. Young & Co, 1895.
2. *Liang G., Mudawar I.* // Intern. J. Heat Mass Trans. 2016. V. 101. P. 577–519.
3. *Prosperetti A., Oguz H.N.* // Annu. Rev. Fluid Mech. 1993. V. 25. P. 577–602.
4. *Thoroddsen S.T., Etoh T.G., Takehara K.* // Annu. Rev. Fluid Mech. 2008. V. 40. P. 257–285.
5. *Ray B., Biswas G., Sharma A.* // J. Fluid Mech. 2015. V. 768. P. 492–523.
6. *Чашечкин Ю.Д., Ильиных А.Ю.* // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2020. Т. 494. С. 42–46.
7. *Ma H., Liu C., Li H., Huang H., Dong J.* // Phys. Fluids. 2019. V. 31. 062108.
8. *Чашечкин Ю.Д.* // Изв. РАН. Физ. атм. океана. 2019. Т. 55. № 3. С. 67–77.
9. *Wang H.-S., Zhao X.-D., Zhang Y.* // J. Fire Sci. 2009. V. 27. Iss. 6. P. 545–559.
10. *Kaudze M.Z., Lielauses O.A.* // Mag. Gidrodin. 1984. V. 1. P. 37–43.
11. *Li H., Mei S., Wang L., Gao Y., Liu J.* // J. Heat Fluid Flow. 2014. V. 47. P. 1–8.
12. *Xu Q., Brown E., Jaeger H.M.* // Phys. Rev. 2013. № 87(4–1). 043012.
13. *Ren D. W., Wu S., Yang J.C., Ni M.J.* // Phys. Fluids. 2020. V. 32. 053311.
14. *Yakush S.E., Chashechkin Y.D., Ilinykh A.Y., Usanov V.A.* // Appl. Sci. 2021. V. 1. Iss. 3. 909.
15. УИУ "ГФК ИПМех РАН": http://www.ipmnet.ru/uniqequip/gfk/#equip.

GROUPS OF SPRAYS OF A WATER DROP FREE FALLING INTO THE MELTED METAL IMPACT

Yu. D. Chashechkin[a], S. E. Yakush[a], and A. Yu. Ilinykh[a]

[a] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS D.M. Klimov

Changes in the composition of groups of droplets (sprays) emitted by a drop of water $D = 0.42$ cm in diameter at a velocity of $U = 3.3$ m/s falling into a crucible with a metal melt (Rose alloy at a temperature of 200°C) were traced by photo and video recording for the first time. In the splash formation mode, groups of small water droplets are subsequently ejected from the tops of the spikes on the veil around the primary contact area, then from the spikes at the rim of the spreading layer. Further, water droplets fly out vertically and obliquely from the tops of short jets – streamers. Groups of small droplets are formed when large bubbles burst. After the formation of a splash and the detachment of its top with suspended gas bubbles, an emission of compound droplets consisting of a metal core and a water shell is observed. At the last stage, along with water streamers, more rare streamers consisting of melt alloy are observed, from the tops of which metal droplets fly out. The geometry of the cavity and the layer of boiling water of the spreading drop is traced.

Keywords: water drop, crucible, metal melt, water spray, shroud, spikes, splash, streamers, metal droplets

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 498, с. 27–32

МЕХАНИКА

УДК 519.6

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ КИНЕТИЧЕСКОГО ТИПА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ COVID-19

© 2021 г. В. В. Аристов[1,*], А. В. Строганов[2,], А. Д. Ястребов[2,***]**

Представлено академиком РАН Ю.Г. Евтушенко 04.03.2021 г.
Поступило 17.03.2021 г.
После доработки 17.03.2021 г.
Принято к публикации 30.03.2021 г.

Предлагается одномерная модель на основе уравнения кинетического типа для изучения динамической плотности распределения носителей вируса во времени и пространстве с учетом их миграции из выделенного центра. Данная модель является новой и принципиально отличается от известных моделей типа диффузия-реакции. Строится аналитическое решение; для получения серии расчетов применяются и численные методы. Производится сравнение модельных и реальных данных в Италии, России и Чили. Помимо скорости заражения, вводится в рассмотрение "скорость выздоровления". При прохождении волны выздоровления по территории с большей частью населения страны делается вывод о начале глобального выздоровления, что соответствует реальным данным. Предсказания оказываются точными и для второй волны пандемии в России. Ожидается, что модель способна адекватно описать не только развитие COVID-19, но и последующих эпидемий.

Ключевые слова: математическое моделирование, пандемия COVID-19, уравнение кинетического типа

DOI: 10.31857/S2686740021030020

1. Над изучением пандемии COVID-2019 работают научные группы во всем мире с применением различных математических методов, включая весьма сложные, требующие мощных вычислительных устройств. Но и простые модели, способные выявить характерные черты нынешней эпидемии, могут обнаруживать закономерности, ускользающие за многочисленными данными. Это позволило бы делать некоторые предсказания и, возможно, предотвратить более опасные сценарии распространения эпидемии. В статьях, основанных на известной модели SIR и ее модификаций с большим количеством параметров, решения строятся, как правило, для изучения развития болезни только по времени [1–3]. Пространственное распространение вирусов обычно изучают с помощью модели диффузия-реакции [4–7], см. также [8]. Такой подход применяется при исследовании сложных автоволновых процессов, см. [9]. Но можно использовать и кинетические уравнения, которые, по сути, основаны на другой физической и математической модели: в [10] такие методы применяются для описания транспортных потоков, в [11, 12] – для моделирования социоисторических процессов (модель агрессии).

Настоящая работа сходна с [11, 12], но в силу линейности уравнения модель оказалась более простой. Подчеркнем, что здесь принципиальное отличие от моделей с диффузией, где всегда происходит передвижение инфицированных из области с большим заражением в область с меньшим заражением. Представима ситуация, когда из области с меньшим заражением на транспорте передвигаются в область с большим, где объявлен карантин и выезд закрыт.

Используется неоднородное уравнение переноса с кинетической правой частью. В уравнении фигурируют два параметра. Первый отвечает осредненной (по различным транспортным средствам) скорости продвижения эпидемии. Второй – величине "сопротивления" распространению но-

[1] *Вычислительный центр им. А.А. Дородницына, Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Россия*
**E-mail: aristovvl@yandex.ru*
***E-mail: savthe@gmail.com*
****E-mail: andr.yast711@gmail.com*

сителей вирусов, это моделируется кинетическим членом, описывающим убывание инфицированных пассажиров, что связано с возвращением их в места проживания или в места временного пребывания для покидающих очаг заражения.

Выделялись две фазы распространения инфекции: переносная и контактная, первая фаза закладывает основы для контактной фазы. В нашей работе изучается переносный механизм, связанный с миграцией инфицированных носителей из центра заражения. Контактный механизм является вторичным: после появления инфицированных носителей происходят заражения на местах. Наложение двух факторов дает сумму всех инфицированных. Контактные заражения отчетливо проявляются при введении мер карантинной изоляции отдельных регионов. Предположения об изоляции и протекании болезни в таких областях за примерно один и тот же период времени позволяют показать, что процесс выздоровления “симметричен” процессу заражения: выздоровление начинается раньше в местах, где раньше произошло заражение.

Изучались процессы в России, Италии и Чили, где главные источники эпидемии были связаны со столичными центрами (Москвой, Миланом – столицей Ломбардии, Сантьяго), в которые приезжали пассажиры из других стран, где эпидемия уже началась. Распространение инфекции происходило преимущественно в одном направлении, чему способствовала географическая протяженность стран, что позволяет рассматривать одномерное уравнение (учитывалось отсутствие проникновения инфекции с “боковых границ”: где находятся Тирренское и Адриатическое моря, Тихий океан и Анды, северные и южные граничные малонаселенные территории в России – рассматривались области только к востоку от Москвы. Данные о заражениях брались из [13–16].

2. По аналогии с [12] для определения плотности инфицированных пассажиров, высаживающихся в определенном месте в некоторый момент времени, применяется следующее неоднородное уравнение переноса:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + U\frac{\partial n}{\partial x} = -\sigma n(t,x), \tag{1}$$

где t – время, x – расстояние, $n(t,x)$ – плотность перемещающихся носителей вируса в транспортном средстве, U – скорость транспортного средства, σ – коэффициент “сопротивления” движению инфицированных элементов (в основном за счет высаживания пассажиров в местах проживания), имеющий размерность частоты. Начальное условие для задачи Коши принимается в виде

$$n_0(x) = H(-x),$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда. Такая постановка задачи означает, что фактически в исследуемую область $x > 0$ через границу $x = 0$ поступают носители вируса. С использованием стандартных методов решения линейного уравнения в частных производных получаем следующее решение:

$$n(t,x) = n_0(x - Ut)\cdot e^{-\sigma\frac{x}{U}}. \tag{2}$$

Будем обозначать плотность высадившихся в данной точке носителей вируса через $n_M(t,x)$. Ясно, что эта плотность растет также, как убывает $n(t,x)$, следовательно, можно записать

$$\frac{dn}{dt} + \frac{dn_M}{dt} = 0;$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n}{\partial t} + U\frac{\partial n}{\partial x};$$

$$\frac{dn_M}{dt} = \frac{\partial n_M}{\partial t}.$$

С учетом (1) уравнение для $n_M(t,x)$ принимает следующий вид:

$$\frac{\partial n_M}{\partial t} = \sigma n. \tag{3}$$

Решение данного уравнения записывается так:

$$n_M(t,x) = n_{M0}(x) + \int_0^t \sigma n(\tau,x)\,d\tau.$$

Подстановка выражения (2) и начальных условий $n_{M0}(x) = 0$ и $n_0(x) = H(-x)$ позволяет получить выражение для $n_M(t,x)$:

$$n_M(t,x) = \frac{\sigma}{U}\cdot(Ut - x)\cdot H(Ut - x)\cdot e^{-\sigma\frac{x}{U}}. \tag{4}$$

Параметр σ может зависеть от t и x (U также может быть зависимой величиной, но мы полагали ее постоянной). Один из вариантов зависимости σ от координаты может быть получен с помощью учета плотности населения

$$\sigma(x) = \sigma_1\rho(x), \tag{5}$$

где $\rho(x)$ – линейная плотность населения, имеющая размерность 1/км, а σ_1 – некоторая константа, имеющая размерность км/дн.

Подставляя (5) в формулу (2), получаем следующее выражение:

$$n(t,x) = n_0(x - Ut)\cdot e^{-\frac{\sigma_1}{U}\int_0^x \rho(z)\,dz}.$$

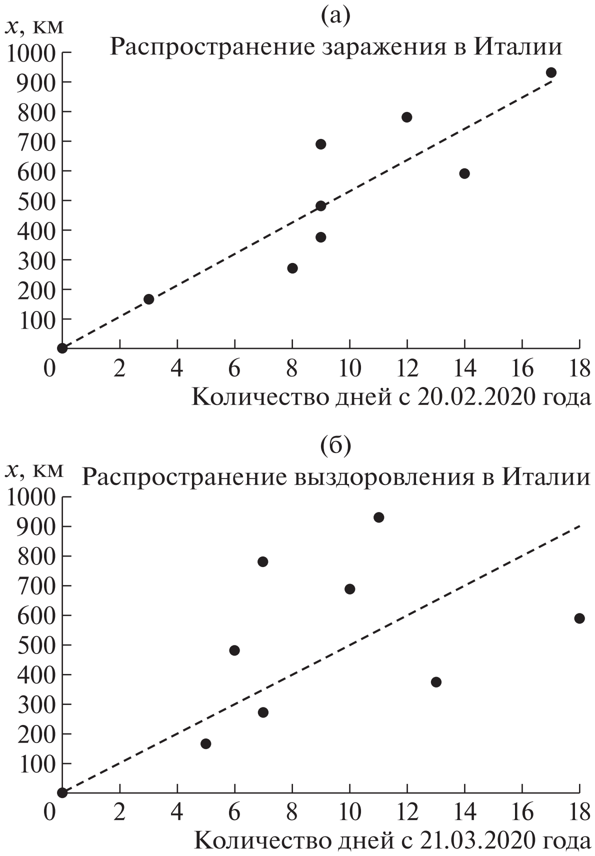

Рис. 1. Графики распространения заболевания (а) и выздоровления (б) в Италии.

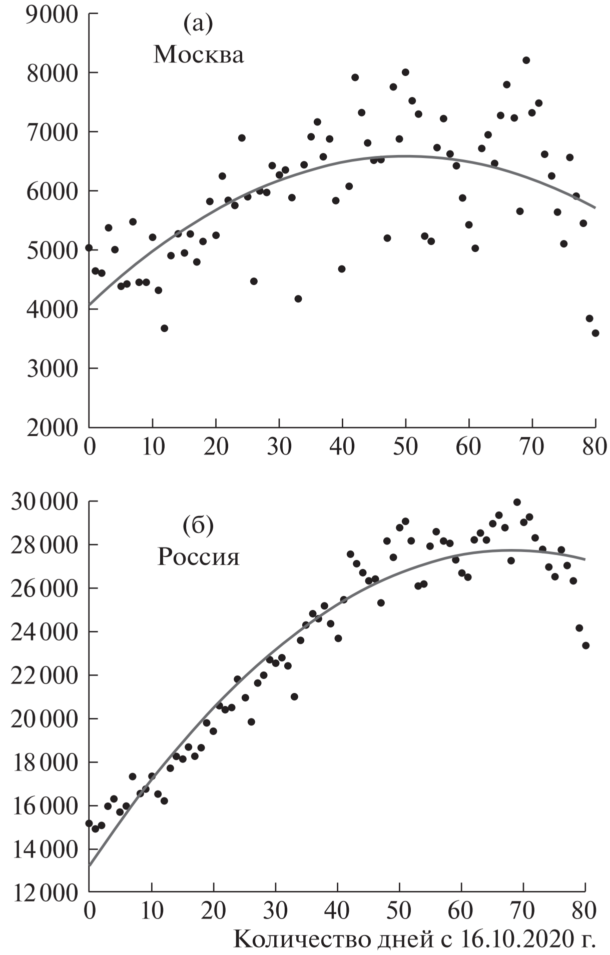

Рис. 2. Графики с реальными данными количества заражений в день в Москве и России на 30.12.2020 г.

Аналогичная подстановка в формулу (4) в результате дает

$$n_M(t,x) = \frac{\sigma_1 \cdot \rho(x)}{U} \cdot (Ut - x) \cdot H(Ut - x) \cdot e^{-\frac{\sigma_1}{U}\int\limits_0^x \rho(z)dz}. \tag{6}$$

Параметр σ_1 определяется так: фиксируется t в формуле (6) и подставляются известные данные для двух значений x.

Вдоль выделенного направления распространения инфекции территория страны разбивается на полосы. Для аппроксимации сведений по известным источникам в выделенных полосах мы суммировали значения в регионах, вошедших в полосу, с соответствующими весами.

3. В Италии территория страны была поделена на 9 полос. Параметр U, определяющий скорость распространения вируса, можно оценить по данным о первых заражениях в каждой полосе. Мы фиксировали первый день, в который было не менее 5 заболевших. Задавая точки, соответствующие этим дням, по методу наименьших квадратов строим соответствующую прямую. По тангенсу угла наклона этой прямой на верхнем графике рис. 1 находим U. Нижний график на рис. 1 соответствует распространению выздоровления. Начало выздоровления для выбранной полосы определялось по достижению максимума заражений в день. Использовался метод наименьших квадратов с приближением многочленом второго порядка. Для каждой параболы определялся максимум, который принимался за дату начала выздоровления для этой полосы. Пример применения метода наименьших квадратов продемонстрирован на рис. 2 для России. Для Италии скорость заражения оказалась равна 53 км/дн, а скорость выздоровления 50 км/дн.

В России территория была поделена на 7 полос на восток от Москвы, и аналогичными методами были найдены скорость заражения, равная 87 км/дн, и скорость выздоровления, равная 52 км/дн.

В Чили территория была поделена на 4 полосы к северу от Сантьяго и 3 полосы к югу от столицы. Эти два направления рассматривались независимо друг от друга. Для Чили скорости заражения

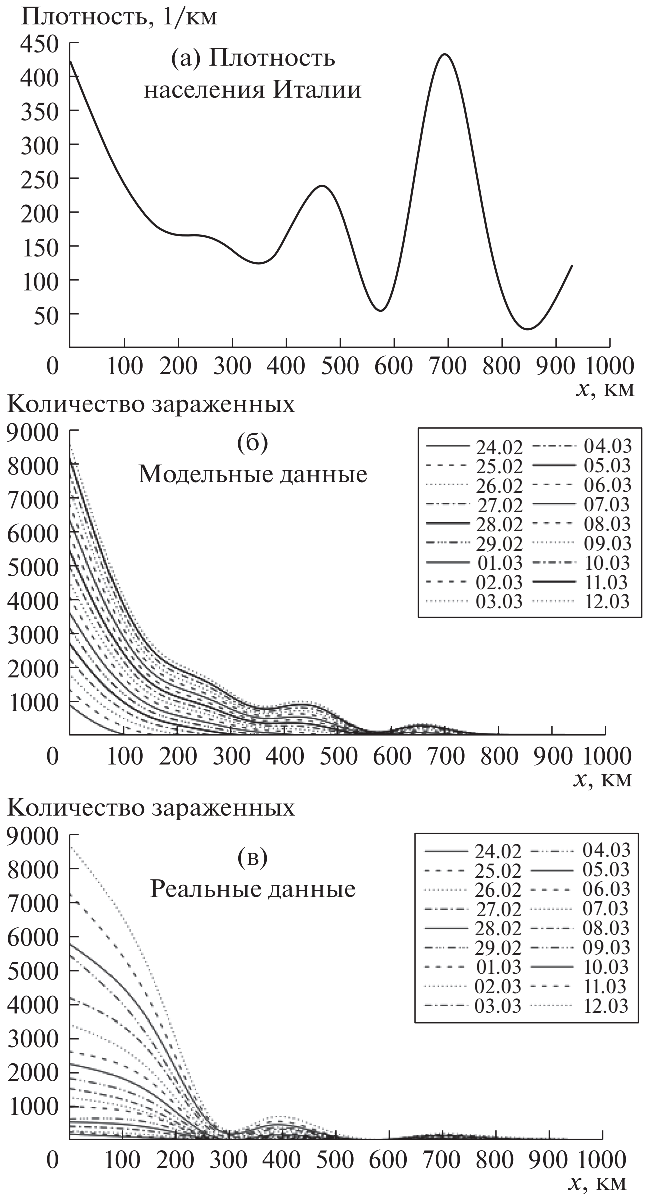

Рис. 3. Плотность населения в Италии (а), модельные данные для 18 дней, начиная со второго дня, (б) и реальные данные за 18 дней с 24.02.2021 г. для Италии (в).

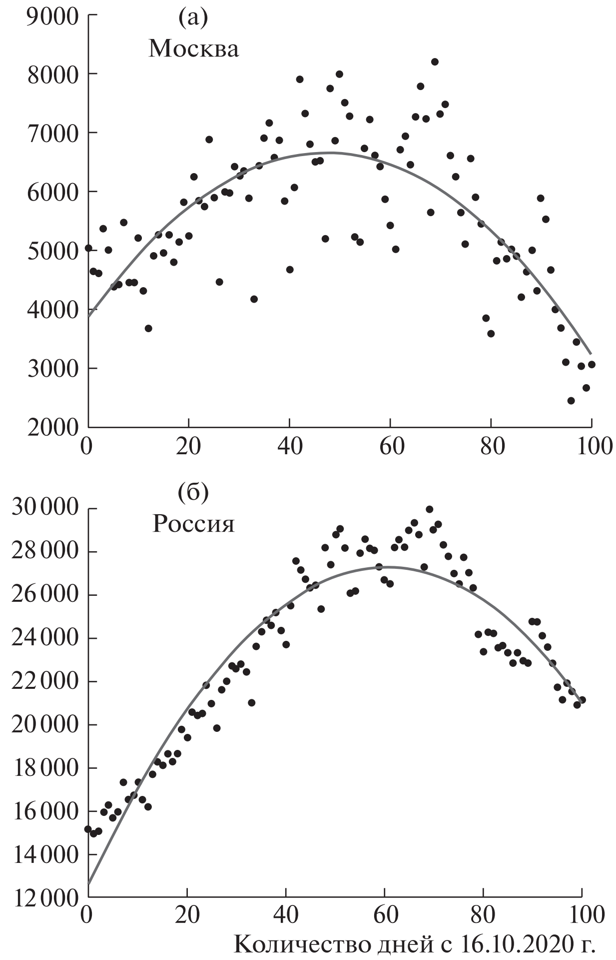

Рис. 4. Графики с реальными данными количества заражений в день в Москве и России на 30.01.2020 г.

оказались равны 44 и 97 км/дн для севера и юга соответственно. Скорости выздоровления равны 23 и 96 км/дн.

Сравнение решения по уравнениям модели (нижний график на рис. 3) с реальными данными (верхний график на рис. 3) представлено для первых 18 дней наблюдений (начиная с 24 февраля). Видно, что характер реального и теоретического распределений схож, но значения реальных данных находятся выше теоретических, поскольку важную роль начинает играть второй – контактный фактор. Причем, хотя положения максимумов количества инфицированных по расчетным и реальным данным примерно соответствуют положениям локальных максимумов плотности населения (средний график на рис. 3), вторые максимумы зараженных меньше первых (а для плотности второй максимум больше). Это показывает, что модель отражает реальность: в Италии быстрое убывание по пространству связано как с тем, что многие стремились покинуть Ломбардию, так и с карантинными барьерами. В дальнейшем с влиянием плотности населения на контактные заражения второй максимум становится постепенно выше первого (эти данные после 18 дней заражения не приводятся).

Близость значений скоростей распространения и выздоровления (эта близость оказалась с некоторой погрешностью верна и для России, и Чили) позволяет делать предсказания о достижении максимума заражений в день по стране с помощью сведений о максимуме заражений в центре распространения эпидемии. Так, на основе данных первой волны COVID-19 в России было установлено, что максимум заражений в России достигается через две-три недели после достижения аналогичного максимума в Москве.

4. В настоящее время продолжается новая волна пандемии, и столь ясных условий развития и распространения COVID-19 уже не наблюдается. Осенняя волна пандемии имеет более сложный характер, чему способствовало много факторов, в частности, не было такой строгой изоляции, как весной. Но все же для России, ситуация в которой представляет для нас наибольший интерес, можно предположить, что Москва являлась основным центром распространения вируса на восток. Поэтому максимум заражения в Москве будет достигнут примерно на две–три недели раньше, чем во всей России. Предсказания, сделанные в конце декабря, см. рис. 2, подтвердились с учетом реальных данных в конце января, см. рис. 4. На рис. 2 и рис. 4 верхние графики отвечает характеру заражения в Москве и России в целом соответственно. На рис. 2, где приведены данные на 30 декабря, максимум для Москвы соответствует 10–12 декабря, для России он достигнут примерно к 28–30 декабря. Можно ожидать, что с этого момента времени по России начнется спад заболеваемости. Данные, полученные на конец января, подтвердили это предсказание модели. Построенные графики на рис. 4 показывают отмеченную выше величину запаздывания в России по сравнению с Москвой. Правда, в согласии с принятым методом определения максимумов произошло некоторое смещение их к несколько более ранним датам, но сохраняется указанная разность примерно в две недели. На рис. 4 для Москвы максимум соответствует 4–5 декабря, для России – это 20–21 декабря.

Полученные результаты могут иметь предсказательные возможности для ожидаемых последующих волн пандемии, в частности, связанных с появлением новых штаммов вируса. Для использования в дальнейшем более подробной двумерной модели со многими центрами заражения надо будет проводить более сложные численные расчеты.

Авторы подтверждают отсутствие конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kermack W.O., McKendrick A.G.* A contribution to the mathematical theory of epidemics. // Proc. R. Soc. Lond. A. 1927. V. 115. P. 700–721. https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118
2. *Ivorra B., Ferrández M.R., Vela-Pérez M., Ramos A.M.* Mathematical modeling of the spread of the coronavirus disease 2019 (COVID-19) taking into account the undetected infections. The case of China // Commun Nonlinear Sci Numer Simul. 2020 Sep; 88: 105303. Published online 2020 Apr 30. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105303
3. *Bailey N.T.J.* Mathematical Theory of Epidemics. Griffin. 1st ed. 1957. 202 p.
4. *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме // Бюлл. МГУ. Сер. А. Математика и механика. 1937. Т. 1. С. 1–25.
5. *Noble J.V.* Geographic and temporal development of plagues // Nature. 1974. V. 250. P. 726–729. https://doi.org/10.1038/250726a0
6. *Gross B., Zheng Z., Liu S., Chen X., Sela A., Li J., Li D., Havlin S.* Spatio-temporal propagation of COVID-19 pandemics // EPL (Europhysics Letters). 2020. V. 131. № 5. https://doi.org/10.1209/0295-5075/131/58003
7. *Ramaswamy H., Oberai A.A., Yortsos Ya.C.* A comprehensive spatial-temporal infection model // hem Eng Sci. 2021. Apr 6. 233:116347. Epub 2021 Jan 6. https://doi.org/10.1016/j.ces.2020.116347
8. *Пастухова С.Е., Евсеева О.А.* Асимптотика решения уравнения диффузии в периодической среде на больших временах и ее применение к оценкам усреднения // Рос. технол. журн. 2017. Т. 5 (5). С. 60–69. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2017-5-5-60-69
9. *Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г.* Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987.
10. *Prigogine I., Herman R.* Kinetic Theory of Vehicular Traffic. N.Y.: American Elsevier, 1971. 100 p.
11. *Аристов В.В., Ильин О.В.* Модель агрессии на основе кинетических уравнений // Компьютерные исследования и моделирование. 2014. Т. 6. № 5. С. 165–174. https://doi.org/10.20537/2076-7633-2014-6-5-829-838
12. *Aristov V.V., Ilyin O.V.* Kinetic Models for Historical Processes of Fast Invasion and Aggression // Phys. Rev. E. 2015. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.042806
13. Карта распространения коронавируса в России и мире // https://yandex.ru/web-maps/covid19
14. Coronavirus in Italia, i dati e la mappa // lab24.ilsole24ore.com/coronavirus
15. Роспотребнадзор. О подтвержденных случаях новой короновирусной инфекции COVID-2019 в России // https://www.rospotrebnadzor.ru/about/info/news/news_details.php?ELEMENT_ID=16253&sphrase_id=2989389
16. Ministerio de Salud. Casos confirmados en Chile COVID-19 // https://www.minsal.cl/nuevo-coronavirus-2019-ncov/casos-confirmados-en-chile-covid-19/

APPLICATION OF THE KINETIC-TYPE MODEL TO STUDY SPATIAL SPREAD OF COVID-19

V. V. Aristov[a], A. V. Stroganov[b], and A. D. Yastrebov[b]

[a] *Dorodnicyn Computing Centre, Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[b] *Federal State Budget Educational Institution of Higher Education "MIREA – Russian Technological University", Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS Yu.G. Evtushenko

A one-dimensional model is proposed based on a kinetic-type equation for studying the dynamic distribution density of virus carriers in time and spatial representation, taking into account their distribution from a dedicated center. This model is new and is fundamentally different from the known models of the diffusion-reaction type. An analytical solution is being built; numerical methods are also used to obtain a series of calculations. A comparison of the model and real data in Italy, Russia, and Chile is made. In addition to the rate of infection, the consideration of "rate of recovery" is introduced. When the wave of recovery passes through the territory the bigger part of a population lives, a conclusion is made about the beginning of a global recovery, which corresponds to real data. Predictions are also accurate for the second wave of the pandemic in Russia. The model is expected to be able to adequately describe not only the development of COVID-19 but also subsequent epidemics.

Keywords: mathematical modeling, COVID-19 pandemic, kinetic type equation

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 498, с. 33–39

МЕХАНИКА

УДК 539.3

БЛОЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ И ФИЗИКИ В НЕКЛАССИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

© 2021 г. Академик РАН В. А. Бабешко[1,2,*], О. В. Евдокимова[1], О. М. Бабешко[2]

Поступило 16.03.2021 г.
После доработки 09.04.2021 г.
Принято к публикации 12.04.2021 г.

В настоящей работе развивается новый, строго обоснованный подход, позволяющий значительно расширить класс граничных задач для линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами в неклассических областях, которые можно точно решать методом блочного элемента. Разработанный в методе блочного элемента новый, координатный, дополняющий интегродифференциальный, метод удовлетворения граничных условий завершает построение точных решений исходных граничных задач, разложенных по блочным элементам. Подход охватывает многие системы уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами механики деформируемого твердого тела, гидромеханики, электромагнитных полей и других наук, для которых можно строить точные решения граничных задач в неклассических областях. Приводятся примеры реализации подхода.

Ключевые слова: метод блочного элемента, граничные задачи, системы дифференциальных уравнений, термоупругость, преобразование Галёркина, уравнения Ламе

DOI: 10.31857/S2686740021030032

В более ранней работе авторов развит интегродифференциальный метод решения некоторых граничных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных, основанный на блочных элементах. В работе [1] построено решение векторной граничной задачи, разложенное по упакованным блочным элементам, которые являются решениями скалярных граничных задач для потенциальной и векторной составляющих уравнения Ламе в первом квадранте. Решения ряда векторных дифференциальных уравнений в частных производных механики сплошных сред, электромагнитных явлений, теории поля допускают более общие представления в виде разложений по решениям скалярных уравнений, чем описанное представление. В его основе лежит преобразование Галёркина [2]. Этот подход удобен и использовался при решении задач во всем пространстве и в ряде классических областей. К ним относятся такие области, как полупространство, шар, цилиндр, а также в некоторых областях, получаемых в результате представлений групп преобразований пространства [3–5]. В то же время для ряда важных областей, отличных от классических, например, клиновидных, прямоугольных, в форме полуполос и полуплит, построение точных решений этим подходом пока не удавалось осуществить. Исследованию граничных задач для уравнения Ламе посвящено огромное количество работ, содержащих как аналитические, так и численные исследования, выполненные более чем за полтора века. Все публикации в этой области невозможно охватить. Отметим те из них, где удавалось построить точные аналитические решения некоторых типов граничных задач для векторных уравнений Ламе в неклассических областях. Опустим из рассмотрения многочисленные работы, посвященные граничным задачам в полупространстве и слоистой среде, где преобразование Фурье решает проблему. В сферических, цилиндрических областях следует отметить работы, посвященные построению собственных векторных функций [6–8]. Этот подход развивался для применения в цилиндрических, эллиптических, клиновидных, конических областях. Основная сложность при решении граничных задач этим подходом в неклассических областях состоит в трудности удовлетворения граничных условий.

[1] *Федеральный исследовательский центр Южный научный центр Российской академии наук, Ростов-на-Дону, Россия*
[2] *Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия*
**E-mail: babeshko41@mail.ru*

В то же время построение точных решений граничных задач в практических применениях позволяет выявлять свойства и явления, которые оказывались упущенными при использовании различных приближенных подходов. Так, разработанный недавно метод блочного элемента позволил выявить условия возникновения некоторых типов землетрясений [9, 10]. Этот же метод дал возможность обнаружить существование нового типа трещин, дополняющих трещины Гриффитса [11].

В работе авторов [1] разложение решения векторной граничной задачи с помощью скалярных было построено интегродифференциальным методом. В работе [12] развит иной подход, названный координатным, также основанный на методе блочного элемента. Он применен к уравнениям Ламе в четверти плоскости, опираясь на представление решения в виде потенциальной и вихревой составляющих. В указанной работе построено доступное для дальнейшего анализа точное решение в первом квадранте двумерной граничной задачи для динамических уравнений Ламе при произвольных граничных условиях в дополнение к [1]. Однако представление решения граничной задачи в виде потенциальной и вихревой составляющих ограничивает применение метода блочного элемента к граничным задачам для других систем дифференциальных уравнений. В работе [13] эта сложность преодолевается применением к изучаемым системам дифференциальных уравнений преобразований Галёркина, позволяющих представлять решения векторных граничных задач в форме не связанных отдельных скалярных уравнений. В настоящей работе дается строгое обоснование применения этого метода в граничных задачах, опираясь на теорему Боджно [14].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1. В публикации авторов [1] рассматривалась двумерная граничная задача первого рода в первом квадранте Ω для системы уравнений Ламе в предположении гармонических во времени воздействий на границе.

Для удовлетворения граничных условий при ее исследовании блочными элементами был разработан интегродифференциальный метод. Ее уравнения имеют вид

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_1}+\mu\Delta u_1=0, \quad \theta=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2},$$
$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_2}+\mu\Delta u_2=0, \quad x_1,x_2\in\Omega,$$
$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Здесь $u_n(x_1,x_2)$ – компоненты векторов перемещений в точке x_1, x_2, Ω – область первого квадранта $x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$, λ, μ – параметры Ламе. В задаче типа Дирихле на границе первого квадранта задаются компоненты векторов перемещения $u_1(x_1,0)$, $u_2(x_1,0)$ и $u_1(0,x_2)$, $u_2(0,x_2)$. Для удовлетворения граничных условий при ее исследовании блочными элементами был разработан интегродифференциальный метод. Решение граничной задачи для системы уравнений Ламе разлагалось на потенциальную и вихревую составляющие.

Ниже приводится другой, более общий метод исследования и решения граничных задач для систем дифференциальных уравнений в неклассических областях, опирающийся на преобразование Галёркина. Метод демонстрируется на примерах как рассмотренной ранее граничной задаче для уравнений Ламе, так и более сложной граничной задаче для системы дифференциальных уравнений термоупругости. Продемонстрируем применение преобразования Галёркина на примере ранее рассмотренных уравнений Ламе. Для удобства применения преобразования Галёркина запишем трехмерные уравнения Ламе в следующей форме [3]:

$$\mu\Delta\mathbf{u}+(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}=0.$$

Следуя [3], введем обозначения

$$L_{mn}(u_n)=0, \quad L_{mn}=\delta_{mn}\Delta+\sigma\partial_m^2\partial_n^2, \quad m,n=1,2,3,$$
$$\sigma=\mu^{-1}(\lambda+\mu), \quad \partial_m^h=\frac{\partial^h}{\partial x_m^h}, \tag{1}$$

δ_{ij} – символ Кронекера.

Осуществим преобразование Галёркина, положив

$$u_1=\begin{vmatrix}\chi_1 & L_{12} & L_{13}\\ \chi_2 & L_{22} & L_{23}\\ \chi_3 & L_{32} & L_{33}\end{vmatrix}, \quad u_2=\begin{vmatrix}L_{11} & \chi_1 & L_{13}\\ L_{21} & \chi_2 & L_{23}\\ L_{21} & \chi_3 & L_{33}\end{vmatrix},$$
$$u_3=\begin{vmatrix}L_{11} & L_{12} & \chi_1\\ L_{21} & L_{22} & \chi_2\\ L_{21} & L_{32} & \chi_3\end{vmatrix}$$

и затем внесем эти определители в систему уравнений. Обозначим $T_i=\Delta\chi_i$ и осуществим упрощения. В результате приводим систему к бигармоническим уравнениям, имеющим вид $\Delta\Delta T_i=0$, которые составлены относительно функций Галёркина T_i. Здесь Δ – двумерный оператор Лапласа.

Дополнительным исследованием определяются граничные условия для функций T_i, исходя из первоначальных, заданных для системы уравнений.

Аналогичным преобразованием Галёркина строятся скалярные, т.е. не связанные, отдельные дифференциальные уравнения для практически всех систем уравнений механики деформируемого твердого тела и гидромеханики, электромагнитных эффектов, теории поля и других наук. В излагаемом подходе, при применении преобразований Галёркина, требуется построить граничные условия для функций полученных скалярных уравнений. Они должны вытекать из первоначально заданных граничных условий. Кроме этого, возможно наличие некоторых зависимостей между функциями Галёркина. С этими проблемами встречаются исследователи, применяющие как аналитические, так и численные методы. Метод блочного элемента позволяет решать эти проблемы.

2. Динамическая задача о температурных напряжениях при гармонических воздействиях на границе [4]. В форме, аналогичной использованной выше, четыре уравнения термоупругости, составленные относительно перемещений u_n, $n = 1,2,3$, и температуры θ, имеют вид

$$\begin{gathered} L_{mn}(u_n) + L_{m4}(\theta) = 0, \quad L_{4n}(u_n) + L_{44}(\theta) = 0, \\ L_{mn} = \delta_{mn}\square_2^2 + (\lambda + 2\mu)\mu^{-1}\partial_m^2\partial_n^2, \\ m = 1,2,3,4, \quad n = 1,2,3, \\ \partial_m^h = \frac{\partial^h}{\partial x_m^h}, \quad L_{m4} = -\gamma\mu^{-1}\partial_m^1, \quad L_{4n} = -\eta\partial_t^1\partial_n^1, \\ \partial_t^h = \frac{\partial^h}{\partial t^h}, \quad L_{44} = \square_3^2, \quad \square_p^2 \equiv \Delta - \left(\frac{1}{c_p^2}\right)\partial_t^2, \quad p = 1,2, \\ \square_3^2 \equiv \Delta - \left(\frac{1}{c_3^2}\right)\partial_t^1, \quad c_3^2 = \frac{\lambda_0}{c_\varepsilon}. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь Δ – оператор Лапласа. Остальные введенные параметры являются постоянными характеристиками деформационных и тепловых процессов в рассматриваемом теле, их значения объяснены в [4].

Применим преобразование Галёркина. Для этого введем новые неизвестные с помощью определителей

$$\begin{gathered} u_1 = |\boldsymbol{\chi}, \mathbf{K}_{12}, \mathbf{K}_{13}, \mathbf{K}_{14}|, \quad u_2 = |\mathbf{K}_{11}, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{K}_{13}, \mathbf{K}_{14}|, \\ u_3 = |\mathbf{K}_{11}, \mathbf{K}_{12}, \boldsymbol{\chi}, \mathbf{K}_{14}|, \quad u_4 = |\mathbf{K}_{11}, \mathbf{K}_{12}, \mathbf{K}_{13}, \boldsymbol{\chi}|, \end{gathered}$$

Столбцами определителей являются векторы

$$\boldsymbol{\chi} = \chi_n, \quad \mathbf{K}_{1n} = L_{mn}, \quad m,n = 1, 2, 3, 4.$$

Получаем четыре независимых уравнения, которые имеют вид

$$|L_{mn}|\chi_n = 0.$$

Участвующий в этом уравнении определитель представляет, после его раскрытия, дифференциальные уравнения. Введя новые функции, обозначив $\varphi_n = \square_2^2\chi_n$, $n = 1, 2, 3$, $\psi = \square_2^2\chi_4$, приходим к системе независимых скалярных уравнений

$$\begin{gathered} \square_2^2[\square_1^2\square_3^2 - \eta\partial_t^1\Delta]\varphi_m = 0, \quad m = 1,2,3, \\ [\square_1^2\square_3^2 - m\eta\partial_t^1\Delta]\psi = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Граничные условия для новых функций формируются на основе применения формул перехода от старых неизвестных к новым на границе.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

1. В работе [13] изложены три различных подхода к решению скалярных граничных задач методом блочного элемента. Они были названы “прямой метод”, “метод расщепления операторов” и “метод подстановок”. В зависимости от исходных целей исследования рассматриваемой граничной задачи может приниматься любой из трех подходов. Прямой метод дает решение граничной задачи наиболее компактными формулами. Однако они оказываются достаточно сложными для анализа решения.

Метод расщепления операторов представляет решение граничной задачи для системы уравнений разложенным по решениям некоторых граничных задач, которые требуют дополнительных преобразований граничных условий.

Наиболее простым в представлении решения исходной граничной задачи является метод подстановок, восходящий к теореме Боджно [14], которая утверждает, что самым общим решением уравнения

$$D_1D_2 \ldots D_{n-1}D_n\varphi = 0,$$

где D_k, $k = 1,2,\ldots,n$, – некоторые операторы, является функция

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{n-1} + \varphi_n,$$

если функции φ_m удовлетворяют уравнениям

$$D_m\varphi_m = 0, \quad m = 1,2, \ldots, n.$$

2. В качестве примера рассмотрим решение одной из двумерных граничных задач для одного из уравнений (3) в предположении гармонических, описываемых временной функцией $e^{-i\omega t}$ воздействий на границы первого квадранта. Исключая в уравнениях и граничных условиях временной множитель, получим уравнение вида

$$[\square_1^2\square_3^2 + i\omega m\eta\Delta]\psi = 0. \tag{4}$$

В результате упрощения уравнения (4) получаем следующее его представление в форме произведения операторов Гельмгольца D_1 и D_2:

$$D_1 D_2 \psi = 0,$$
$$D_1 = \Delta + p_1^2, \quad D_2 = \Delta + p_2^2,$$
$$p_1^2 = b_1 - \sqrt{b_1^2 - b_2}, \quad p_2^2 = b_1 + \sqrt{b_1^2 - b_2},$$
$$2b_1 = \omega^2\left(\frac{1}{c_1^2}\right) + i\omega\left[\left(\frac{1}{c_3^2}\right) + m\eta\right],$$
$$b_2 = i\omega^3\left(\frac{1}{c_3^2}\right)\left(\frac{1}{c_1^2}\right).$$

Таким образом, в соответствии с теоремой Боджно необходимо построить решения граничных задач $D_m\psi_m = 0$, $m = 1, 2$.

Рассмотрим случай, когда для функции $\psi(x_1, x_2)$ на границе первого квадранта поставлены следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} &\psi(0,x_2) = u(0,x_2), \quad \partial_1\psi(0,x_2) = \partial_1 u(0,x_2); \\ &\psi(x_1,0) = u(x_1,0), \quad \partial_2\psi(x_1,0) = \partial_2 u(x_1,0). \end{aligned} \tag{5}$$

Следуя теореме Боджно, сформулируем две граничные задачи в первом квадранте для уравнений с операторами D_1 и D_2. Ниже за каждым из уравнений следуют граничные условия, описываемые произвольными функциями:

$$\begin{aligned} &D_1\psi_1(x_1,x_2) = 0, \quad \psi_1(0,x_2), \quad \psi_1(x_1,0), \\ &D_2\psi_2(x_1,x_2) = 0, \quad \psi_2(0,x_2), \quad \psi_2(x_1,0). \end{aligned}$$

Решения этих граничных задач можно представить в форме упакованных блочных элементов, имеющих вид [1]

$$\begin{aligned} \psi_k(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{R^2} \frac{\omega_k(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - p_k^2)} \times \\ \times e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} i d\alpha_1 d\alpha_2, \end{aligned} \tag{6}$$
$$\begin{aligned} \omega_k(\alpha_1,\alpha_2) = \langle[\Psi_k(\alpha_{1k+},0) - \Psi_k(\alpha_1,0)](\alpha_2 - \alpha_{2k+}) + \\ + [\Psi_k(0,\alpha_{2k+}) - \Psi_k(0,\alpha_2)](\alpha_1 - \alpha_{1k+})\rangle. \end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения

$$\alpha_{11+} = i\sqrt{\alpha_2^2 - p_1^2}, \quad \alpha_{21+} = i\sqrt{\alpha_1^2 - p_1^2},$$
$$\alpha_{12+} = i\sqrt{\alpha_2^2 - p_2^2}, \quad \alpha_{22+} = i\sqrt{\alpha_1^2 - p_2^2},$$
$$w(x_1,0) = \psi_k(x_1,0) \quad w(0,x_2) = \psi_k(0,x_2),$$
$$\Psi_k(\alpha_1,0) = \int_0^\infty \psi_k(x_1,0) e^{i(\alpha_1 x_1)} dx_1,$$
$$\Psi_k(0,\alpha_2) = \int_0^\infty \psi_k(0,x_2) e^{i(\alpha_2 x_2)} dx_2.$$

Тогда решение $\psi(x_1, x_2)$ исходной граничной задачи будет иметь представление, разложенное по блочным элементам

$$\psi(x_1,x_2) = \psi_1(x_1,x_2) + \psi_2(x_1,x_2).$$

Для удовлетворения граничным условиям воспользуемся координатными формулами асимптотического поведения упакованных блочных элементов вблизи их границ [12, 13]:

$$\begin{aligned} &\psi_k(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_k(0,\alpha_2) e^{i(\alpha_{1k+} x_1)} e^{-i\alpha_2 x_2} d\alpha_2, \\ &\qquad 0 < x_1 \ll 1; \\ &\psi_k(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_k(\alpha_1,0) e^{i(\alpha_{2k+} x_2)} e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1, \\ &\qquad 0 < x_2 \ll 1. \end{aligned} \tag{7}$$

Используем соотношения граничных условий (5), они имеют вид

$$\begin{aligned} u(0,x_2) &= \psi_1(0,x_2) + \psi_2(0,x_2), \\ \partial_1 u(0,x_2) &= \partial_1\psi_1(0,x_2) + \partial_1\psi_2(0,x_2), \\ u(x_1,0) &= \psi_1(x_1,0) + \psi_2(x_1,0), \\ \partial_2 u(x_1,0) &= \partial_2\psi_1(x_1,0) + \partial_2\psi_2(x_1,0). \end{aligned} \tag{8}$$

Применив преобразования Фурье к соотношениям (7) и (8), вычислив предельные выражения на границах области Ω, получим две системы уравнений, решения которых имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi_1(0,\alpha_2) &= \Delta_1^{-1}[i\alpha_{12+}U(0,\alpha_2) - \partial_1 U(0,\alpha_2)], \\ \Psi_2(0,\alpha_2) &= \Delta_1^{-1}[\partial_1 U(0,\alpha_2) - i\alpha_{11+}U(0,\alpha_2)], \\ \Psi_1(\alpha_1,0) &= \Delta_2^{-1}[i\alpha_{22+}U(\alpha_1,0) - \partial_2 U(\alpha_1,0)], \\ \Psi_2(\alpha_1,0) &= \Delta_2^{-1}[\partial_2 U(\alpha_1,0) - i\alpha_{21+}U(\alpha_1,0)], \\ \Delta_1 = i\alpha_{12+} &- i\alpha_{11+}, \quad \Delta_2 = i\alpha_{22+} - i\alpha_{21+}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$U(\alpha_1,0) = \int_0^\infty u(x_1,0) e^{i(\alpha_1 x_1)} dx_1,$$
$$\partial_2 U(\alpha_1,0) = \int_0^\infty \partial_2 u(x_1,0) e^{i(\alpha_1 x_1)} dx_1,$$
$$U(0,\alpha_2) = \int_0^\infty u(0,x_2) e^{i(\alpha_2 x_2)} dx_2,$$
$$\partial_1 U(0,\alpha_2) = \int_0^\infty \partial_1 u(0,x_2) e^{i(\alpha_2 x_2)} dx_2.$$

Найденные значения вносятся в выражение для $\psi(x_1, x_2)$, во внешние формы (6) и дают точное решение граничной задачи для уравнения (4) с граничными условиями (5). Несложно убедиться, используя формулы (6), (7), что построенное решение $\psi(x_1, x_2)$ при $x_1 \to 0$ и $x_2 \to 0$ удовлетворяет заданным граничным условиям (5).

3. Для иллюстрации применения метода произведем вычисления для случая

$$u(x_1,0) = H_1 e^{-h_1 x_1}, \quad \partial_2 u(x_1,0) = H_2 e^{-h_2 x_1},$$
$$u(0,x_2) = G_1 e^{-g_1 x_2}, \quad \partial_1 u(0,x_2) = G_2 e^{-g_2 x_2},$$
$$h_k > 0, \quad g_k > 0, \quad k = 1,2.$$

Здесь H_k, G_k – постоянные. В соответствии с построенными формулами (9) имеем после вычисления интегралов

$$U(\alpha_1,0) = \frac{iH_1}{\alpha_1 + ih_1}, \quad \partial_2 U(\alpha_1,0) = \frac{iH_2}{\alpha_1 + ih_2},$$
$$U(0,\alpha_2) = \frac{iG_1}{\alpha_2 + ig_1}, \quad \partial_1 U(0,\alpha_2) = \frac{iG_2}{\alpha_2 + ig_2}.$$

В результате получаем формулы (9) в виде

$$\Psi_1(0,\alpha_2) = \frac{1}{i\alpha_{12+} - i\alpha_{11+}} \times$$
$$\times \left[i\alpha_{12+} \frac{iG_1}{\alpha_2 + ig_1} - \frac{iG_2}{\alpha_2 + ig_2} \right],$$

$$\Psi_2(0,\alpha_2) = \frac{1}{i\alpha_{12+} - i\alpha_{11+}} \times$$
$$\times \left[-i\alpha_{11+} \frac{iG_1}{\alpha_2 + ig_1} + \frac{iG_2}{\alpha_2 + ig_2} \right],$$

$$\Psi_1(\alpha_1,0) = \frac{1}{i\alpha_{22+} - i\alpha_{21+}} \times$$
$$\times \left[i\alpha_{22+} \frac{iH_1}{\alpha_1 + ih_1} - \frac{iH_2}{\alpha_1 + ih_2} \right],$$

$$\Psi_2(\alpha_1,0) = \frac{1}{i\alpha_{22+} - i\alpha_{21+}} \times$$
$$\times \left[-i\alpha_{21+} \frac{iH_1}{\alpha_1 + ih_1} + \frac{iH_2}{\alpha_1 + ih_2} \right].$$

Нормализовав обобщенные функции и вычислив обращения Фурье, будем иметь выражения для граничных условий блочных элементов посредством заданных граничных условий в виде классических функций

$$\psi_1(0,x_2) = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + p^2 \right) \times$$
$$\times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi_1(0,\alpha_2)}{(\alpha_2^2 + p^2)} e^{-i\alpha_2 x_2} d\alpha_2 =$$
$$= \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + p^2 \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_2^2 + p^2)(i\alpha_{12+} - i\alpha_{11+})} \times$$
$$\times \left[i\alpha_{12+} \frac{iG_1}{\alpha_2 + ig_1} - \frac{iG_2}{\alpha_2 + ig_2} \right] e^{-i\alpha_2 x_2} d\alpha_2,$$

$$\psi_2(0,x_2) = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + p^2 \right) \times$$
$$\times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi_2(0,\alpha_2)}{(\alpha_2^2 + p^2)} e^{-i\alpha_2 x_2} d\alpha_2 =$$
$$= \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + p^2 \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_2^2 + p^2)(i\alpha_{12+} - i\alpha_{11+})} \times$$
$$\times \left[-i\alpha_{11+} \frac{iG_1}{\alpha_2 + ig_1} + \frac{iG_2}{\alpha_2 + ig_2} \right] e^{-i\alpha_2 x_2} d\alpha_2,$$

$$\psi_1(x_1,0) = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + p^2 \right) \times$$
$$\times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi_1(\alpha_1,0)}{(\alpha_1^2 + p^2)} e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1 =$$
$$= \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + p^2 \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_1^2 + p^2)(i\alpha_{22+} - i\alpha_{21+})} \times$$
$$\times \left[i\alpha_{22+} \frac{iH_1}{\alpha_1 + ih_1} - \frac{iH_2}{\alpha_1 + ih_2} \right] e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1,$$

$$\psi_2(x_1,0) = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + p^2 \right) \times$$
$$\times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi_2(\alpha_1,0)}{(\alpha_1^2 + p^2)} e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1 =$$
$$= \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + p^2 \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_1^2 + p^2)(i\alpha_{22+} - i\alpha_{21+})} \times$$
$$\times \left[-i\alpha_{21+} \frac{iH_1}{\alpha_1 + ih_1} + \frac{iH_2}{\alpha_1 + ih_2} \right] e^{-i\alpha_1 x_1} d\alpha_1.$$

Легко видеть, что

$$\psi_1(0,x_2)+\psi_2(0,x_2)=\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+p^2\right)\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{iG_1}{(\alpha_2^2+p^2)(\alpha_2+ig_1)}e^{-i\alpha_2x_2}d\alpha_2=G_1e^{-g_1x_2},$$

$$\psi_1(x_1,0)+\psi_2(x_1,0)=\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+p^2\right)\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{iH_1}{(\alpha_1^2+p^2)(\alpha_1+ih_1)}e^{-i\alpha_1x_1}d\alpha_1=H_1e^{-h_1x_1}.$$

Для проверки условий

$$\partial_1\psi_1(0,x_2)+\partial_1\psi_2(0,x_2)=G_2e^{-g_2x_2},$$
$$\partial_2\psi_1(x_1,0)+\partial_2\psi_2(x_1,0)=H_2e^{-h_2x_1}$$

нужно воспользоваться представлениями (7), для вычисления под интегралом производных, а затем выполнить проверку, как и выше.

Появление обобщенных функций при задании в граничных условиях компонент производных связано с возникновением, в этом случае, сингулярных концентраций напряжений в угловой точке для уравнений Ламе, которые блочные элементы также должны описывать.

ВЫВОД

В работе [15] показано, что множество блочных элементов, граничных задач для уравнения Гельмгольца, порождает дискретное топологическое пространство. Результаты настоящей работы показывают, что множество граничных задач, порождаемых уравнениями Гельмгольца, гомеоморфизмом индуцируют дискретное топологическое пространство уже для граничных задач сложной реологии, к системам уравнений которых применимо преобразование Галёркина. Таким образом, изменением топологий пространств, дроблением или объединением носителей, остающихся дискретными пространствами, можно получать решения граничных задач для систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в сложных неклассических областях.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания Минобрнауки на 2021 г. (проект FZEN-2020-0020), ЮНЦ РАН (проект 00-20-13, № госрегистрации 01201354241) и при поддержке РФФИ (проекты 19-41-230003, 19-41-230004, 19-48-230014, 18-05-80008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Метод блочного элемента в разложении решений сложных граничных задач механики // ДАН. 2020. Т. 495. С. 34–38. https://doi.org/10.31857/S2686740020060048
2. *Galerkin B.G.* Contribution a la solution generale du probleme de la theorie de lelastisitecas de troisdimensions // C.R. Acad. Sci. 1930. V. 190. P. 1047–1048; 1931. V. 193. P. 568–571.
3. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
4. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
5. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 162 с.
6. *Улитко А.Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 262 с.
7. *Головчан В.Т., Кубенко В.Д., Шульга Н.А., Гуз А.Н., Гринченко В.Т.* Динамика упругих тел. Киев: Наук. думка, 1986. 288 с.
8. *Гельфанд И.М., Минлос З.А., Шапиро З.Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М.: Физматлит, 1958. 368 с.
9. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach // Acta Mechanica. 2018. V. 229. № 5. P. 2163–2175.
10. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On a mechanical approach to the prediction of earthquakes during horizontal motion of litospheric plates // Acta Mechanica. 2018. V. 229. № 11. P. 4727–4739.
11. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* About earthquakes in subduction zones with the potential to cause a tsunami // J. Appllied and Computational Mechanics. 2020. https://doi.org/10.22055/JACM
12. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Об одном методе решения граничных задач динамической теории упругости в четверть плоскости // ПММ. 2021. № 3 (в печати).
13. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О разложении решений скалярных граничных задач по блочным элементам // МТТ. 2021. Т. 85. № 3. С. 275–282. https://doi.org/10.31857/S0032823521030024
14. *Boggio T.* Sull integrazioedi alcuno equatoini linerary alle derivate parziale //Ann. Mat. Ser. III. 1903. V. 8. P. 181.
15. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Бушуева О.А.* Топологическая дискретизация решений граничных задач механики сплошной среды // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2020. Т. 16. № 3. С. 65–71. https://doi.org/10.31429/vestnik-17-3-65-71

BLOCK ELEMENTS IN BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MECHANICS AND PHYSICS IN NON-CLASSICAL DOMAINS

Academician of the RAS V. A. Babeshko[a,b], O. V. Evdokimova[a], and O. M. Babeshko[b]

[a] *Federal Research Centre The Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation*

[b] *Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation*

In an earlier paper, the authors developed an integro-differential method for solving some boundary value problems for systems of differential equations based on block elements. In particular, it is applied to the boundary value problem for a system of two-dimensional Lame equations. Below we develop a new, strictly grounded approach that allows us to significantly expand the class of boundary value problems in non-classical domains that can be precisely solved by the block element method. This is achieved in two stages. At the first stage, the boundary value problem for a system of differential equations, called a vector problem, is reduced by the Galerkin transformation to a system of scalar, i.e., separate, unrelated, partial differential equations. In the second stage, scalar boundary value problems, without factorization of matrix functions, but only functions, are precisely solved by the block element method. The new coordinate method developed in the block element method, which complements the integro-differential method for satisfying boundary conditions, completes the construction of an exact solution to the original boundary problem, decomposed into block elements. The approach covers almost all of the specified properties of a system of partial differential equations with constant coefficients of deformable solid mechanics, hydromechanics, electromagnetic fields, and other sciences, for which it is possible to construct exact solutions to boundary value problems in non-classical domains. Examples of the implementation of the approach are given.

Keywords: block element method, boundary value problems, systems of differential equations, thermoelasticity, Galerkin transform, Lame equations

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 498, с. 40–45

МЕХАНИКА

УДК 629.7.036: 629.438

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ДВИЖЕНИЯ И УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ КОНСТРУКЦИЙ ОТДЕЛЯЕМЫХ СТВОРОК ОБТЕКАТЕЛЕЙ РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2021 г. В. Н. Бакулин[1,*], С. В. Борзых[2,]**

Представлено академиком РАН А.М. Липановым 03.03.2021 г.
Поступило 29.03.2021 г.
После доработки 29.03.2021 г.
Принято к публикации 02.04.2021 г.

Получены уравнения и построена модель для исследования динамики процесса отделения створок обтекателей ракетно-космических систем. На основе предположения о малости угловой скорости вращения створок в процессе отделения по сравнению с низшими частотами их собственных колебаний получены две независимые группы аналитических соотношений, одна из которых описывает пространственное движение створок как целого относительно ракеты-носителя, а вторая – упругие колебания на участке разворота относительно осей, зафиксированных на носителе. На основании полученных соотношений первой группы строятся траектории движения створок в процессе отделения. Во второй группе уравнений исследованы зависимости уровня возбуждения колебаний створок от разновременности включения двигателей отделения и/или разброса характеристик толкателей.

Ключевые слова: ракета-носитель, створки обтекателя, процесс отделения, колебания

DOI: 10.31857/S2686740021030044

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Некоторые вопросы моделирования динамики элементов ракетно-космических систем (РКС) по тематике представленной статьи рассматривались, например, в работах [1–4]. Процессы механической трансформации РКС, сопровождающиеся изменением их структуры и/или конфигурации – критически важные операции, отказ или нештатное функционирование которых практически всегда означает невыполнение задач миссии [5–8].

Отделение отработавших элементов ракетно-космических систем – характерный пример такого рода процессов, поэтому к обеспечению безопасности отделения и обоснованности выбора характеристик средств отделения (СО) предъявляются высокие требования. В то же время при наземной экспериментальной отработке не удается воспроизвести реальные полетные условия. Поэтому основным средством подтверждения правильности принятых технических решений является математическое моделирование с максимальным учетом характерных особенностей процессов отделения [9–12].

Одним из наиболее ответственных является процесс отделения защитных створок обтекателей полезного груза. Обтекатель предназначен для защиты аппарата от ветра, пыли на стартовом столе, от интенсивных нагрузок (акустических, тепловых и т.д.) на участке выведения. После прохождения атмосферного участка его защитная функция перестает быть необходимой, и он отделяется от ракеты-носителя. Обтекатель включает несколько раздельно сбрасываемых створок (рис. 1). В первой фазе отделения для обеспечения организованного движения створки разворачиваются относительно осей вращения, размещенных на носителе. Затем, после достижения определенного угла разворота, связь с носителем разрывается, и начинается участок автономного движения створки.

Конструктивно обтекатель представляет собой, как правило, комбинацию оболочек вращения – цилиндров, конусов, сфер. Под ним с некоторым зазором находится зона конструкции космического аппарата. Величина зазора определяется в основном амплитудой упругих колебаний створок обтекателя в процессе отделения. Недостаточный зазор может привести к соударению створок с конструкцией аппарата и вызвать повреждения.

[1] *Институт прикладной механики Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *ПАО РКК "Энергия" им. С.П. Королева, Королев, Московская область, Россия*
**E-mail: vbak@yandex.ru*
***E-mail: rigidbor@gmail.com*

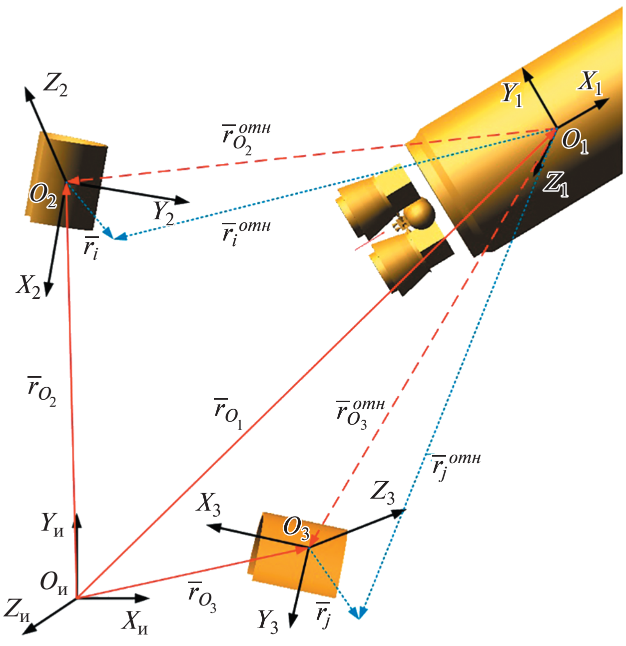

Рис. 1. Относительное движение створок и ракеты-носителя.

Избыточно большой зазор (“везем воздух”) увеличивает диаметр обтекателя, что влечет за собой увеличение веса, аэродинамического сопротивления, нагрузок на конструкцию.

Створки обладают большими массами и моментами инерции относительно осей вращения. Разворот створок происходят под действием значительных сосредоточенных сил, создаваемых специальными средствами отделения, установленными в нескольких точках конструкции. Существующие подходы к расчету динамики отделения обтекателей обычно базировались на моделях створок как абсолютно твердых тел [1]. В такой постановке определялось движение отделившихся створок относителя, чтобы убедиться в отсутствии соударений с ним в дальнейшем относительном движении. Скорость створок после срабатывания средств отделения и траектории относительного движения хорошо согласовывались с твердой моделью, а достаточность необходимой величины зазора, определяемой уровнем колебаний, подтверждалась на наземных экспериментальных установках для отработки процесса отделения. Для оптимального выбора требуемой величины зазора уже на этапе предварительного проектирования требуется прогнозный расчет уровня упругих колебаний створок при отделении.

В самой общей постановке изучение отделения и направленного перемещения упругих конструкций является сложной задачей, так как такие движения описываются громоздкими “гибридными” системами, включающими как уравнения в частных производных, так и обыкновенные дифференциальные уравнения [13]. Исходя из конструктивных особенностей разделяемых тел и опыта технической реализации процессов разделения можно сделать предположение о малости упругих деформаций по сравнению с характерными линейными размерами створок, которые могут достигать нескольких десятков метров. Таким образом, задача об упругих деформациях может решаться в линейной постановке. Поэтому представляется целесообразным подход, использующий разложение движения упругого тела на естественные составляющие: движение створки как твердого тела (описываемое в общем случае нелинейными уравнениями) и малые линейные упругие колебания около порождающего движения, представленные в модальном виде, т.е. в виде разложения по собственным формам колебаний, методы определения которых описаны, например, в [14]. В практических расчетах может использоваться конечное число низших форм, так как частотный спектр створок, как правило, разряженный, и вклад каждой частной формы в общую деформацию быстро падает с увеличением номера формы.

Как отмечалось выше, “твердые” модели достаточно точно позволяют рассчитывать относительное движение носителя и створок после их отделения, что является отражением того факта, что силы инерции, обусловленные движением створок как целого, практически не влияют на их колебательное движение. В связи с этим уравнения движения как целого (по твердым формам) и малые упругие колебания можно анализировать независимо.

ДВИЖЕНИЯ СТВОРОК КАК ТВЕРДОГО ЦЕЛОГО ОТНОСИТЕЛЬНО РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ

Анализ безопасности отделения створок базируется на изучении траекторий и скоростей относительного движения створок как твердого целого и носителя (рис. 1).

Для каждого тела системы записываются законы изменения количества движения и кинетического момента:

$$m_i \frac{d^2 r_{0i}}{dt^2} = \sum \mathbf{F}_i^{(e)}, \tag{1}$$

$$[I_{0i}]\frac{\boldsymbol{\omega}_i}{dt} + \boldsymbol{\omega}_i \times ([I_{0i}]\,\boldsymbol{\omega}_i) = \sum \mathbf{M}_{0i}(\mathbf{F}^{(e)}), \tag{2}$$

где m_i, $[I_{0i}]$, $\boldsymbol{\omega}_i$, $\sum \mathbf{F}_i^{(e)}$, $\sum \mathbf{M}_{0i}(\mathbf{F}^{(e)})$ – массы, тензоры инерции, угловые скорости, главные вектора и главные моменты внешних сил ракеты-носителя и створок обтекателя.

Ниже приведены аналитические кинематические соотношения, позволяющие определить радиусы-векторы скорости и ускорения центров масс створок в системе координат ракеты-носителя:

$$\begin{gathered}
\mathbf{r}_{0_2}^{отн} = [M_{ин\to 1}](\mathbf{r}_{0_2} - \mathbf{r}_{0_1}),\\
\tilde{\mathbf{V}}_{0_2}^{отн} = [M_{ин\to 1}]\left(\frac{d\mathbf{r}_{0_2}}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_{0_1}}{dt}\right) - \boldsymbol{\omega}_1 \times\\
\times [M_{ин\to 1}](\mathbf{r}_{0_2} - \mathbf{r}_{0_1}),\\
\tilde{\mathbf{a}}_{0_2}^{отн} = [M_{ин\to 1}]\left(\frac{d^2\mathbf{r}_{0_2}}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{r}_{0_1}}{dt^2}\right) -\\
- \boldsymbol{\varepsilon}_1 \times [M_{ин\to 1}](\mathbf{r}_{0_2} - \mathbf{r}_{0_1}) -\\
- \boldsymbol{\omega}_1 \times \left\{\tilde{\mathbf{V}}_{0_2}^{отн}[M_{ин\to 1}]\left(\frac{d^2\mathbf{r}_{0_2}}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{r}_{0_1}}{dt^2}\right)\right\}.
\end{gathered} \tag{3}$$

Аналогичные параметры некоторой характерной “опасной” (в смысле возможного соударения с ракетой-носителем) точки конструкции створок определяются зависимостями

$$\begin{gathered}
\mathbf{r}_i^{отн} = [M_{ин\to 1}](\mathbf{r}_{0_2} - \mathbf{r}_{0_1}) + [M_{2\to 1}]\mathbf{r}_i,\\
\tilde{\mathbf{V}}_i^{отн} = [M_{ин\to 1}]\left(\frac{d\mathbf{r}_{0_2}}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_{0_1}}{dt}\right) + [M_{2\to 1}](\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_i) -\\
- \boldsymbol{\omega}_1 \times \{[M_{ин\to 1}](\mathbf{r}_{0_2} - \mathbf{r}_{0_1}) + [M_{2\to 1}]\mathbf{r}_i\},\\
\tilde{\mathbf{a}}_i^{отн} = [M_{ин\to 1}]\left(\frac{d^2\mathbf{r}_{0_2}}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{r}_{0_1}}{dt^2}\right) +\\
+ [M_{2\to 1}]\{\boldsymbol{\varepsilon}_2 \times \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_i)\} -\\
- \boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \mathbf{r}_i^{отн} - \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_i^{отн}) - 2\boldsymbol{\omega}_1 \times \tilde{\mathbf{V}}_i^{отн}.
\end{gathered}$$

Входящие в приведенные выше соотношения матрицы перехода между системами координат находятся традиционными способами [1, 13].

Движение створки относительно носителя может быть сразу описано в его подвижной системе координат:

$$m_2 \frac{d^2\mathbf{r}_{0_2}^{отн}}{dt^2} = \sum \mathbf{F}_2^{(e)} + \boldsymbol{\Phi}_{2_e} + \boldsymbol{\Phi}_{кор},$$

где силы инерции переносного движения и силы инерции Кориолиса определяются следующим образом:

$$\boldsymbol{\Phi}_{2_e} = -m_2[\boldsymbol{\omega}_2 \times (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{0_2}^{отн}) + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \times \mathbf{r}_{0_2}^{отн}],$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{кор} = -m_2\mathbf{a}_{2_{кор}} = -2m_2\boldsymbol{\omega}_2 \times \tilde{\mathbf{V}}_{0_2}^{отн}.$$

Векторы $\mathbf{r}_{0_2}^{отн}$ и $\tilde{\mathbf{V}}_{0_2}^{отн}$ определяются выражениями (3).

Процесс отделения створок считается безопасным при отсутствии соударений любой точки конструкции створок с носителем в их относительном движении.

УПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСТРУКЦИИ СТВОРОК

Интенсивные колебания створок возникают под действием сил, создаваемых специальными средствами отделения – толкателями (пружинными, пиротехническими, пневматическими), твердотопливными двигателями. Малые упругие колебания могут быть представлены в модальном виде, т.е. в виде разложения в ряд по собственным формам колебаний [14, 15]. Предполагается, что выполняется свойство ортогональности форм и вклад каждой частной формы в общую деформацию не зависит от вклада по другим формам.

Тогда отдельные уравнения по каждому тону колебаний (элементарного осциллятора)

$$\ddot{S}_n + \omega_n^2 S_n = \sum_i [F_i^x f_{ni}^x + F_i^y f_{ni}^z f_{ni}^z]$$

будут независимы, и в этом случае они решаются аналитически:

$$\begin{gathered}
S_n(t) = S_{n0}\cos\omega_n t + \frac{\dot{S}_{n0}}{\omega_n}\sin\omega_n t +\\
+\frac{1}{\omega_n}\int_0^t \sum_i [F_i^x f_{ni}^x + F_i^y f_{ni}^y + F_i^z f_{ni}^z]\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau,
\end{gathered} \tag{4}$$

где S_{n0}, $\dot{S}_{n0}$ – начальные условия, F_i – компоненты силы i-го средства отделения, а формы f_{ni} ортонормированы.

Силы в правых частях уравнения (4) создаются, как правило, либо толкателями, либо твердотопливными ракетными двигателями (РДТТ). Зависимость тяги РДТТ от времени близка к постоянной. То же самое можно сказать и об изменении силы толкателей, особенно в начальной, наиболее опасной фазе процесса отделения. Тогда в (4) проекции сил могут быть вынесены из-под знака интеграла.

С точки зрения уменьшения возмущений при разделении и снижения нагрузок на узлы связи предпочтительными являются симметричные схемы процесса, когда плоскость отделения совпадает с плоскостью симметрии отделяемой конструкции, при этом средства отделения установлены попарно симметрично [1, 2]. Отделение створок обтекателей выполнено именно по такой схеме (рис. 2).

Пусть для нее $F_1^x = F_2^x$; $F_1^y = F_2^y$; $F_1^z = F_2^z$ (ось x продольная). Тогда $f_{n1}^x = f_{n2}^x$; $f_{n1}^y = -f_{n2}^y$; $f_{n1}^z = f_{n2}^z$ для симметричных форм и $f_{n1}^x = -f_{n2}^x$; $f_{n1}^y = f_{n2}^y$; $f_{n1}^z = -f_{n2}^z$ для кососимметричных.

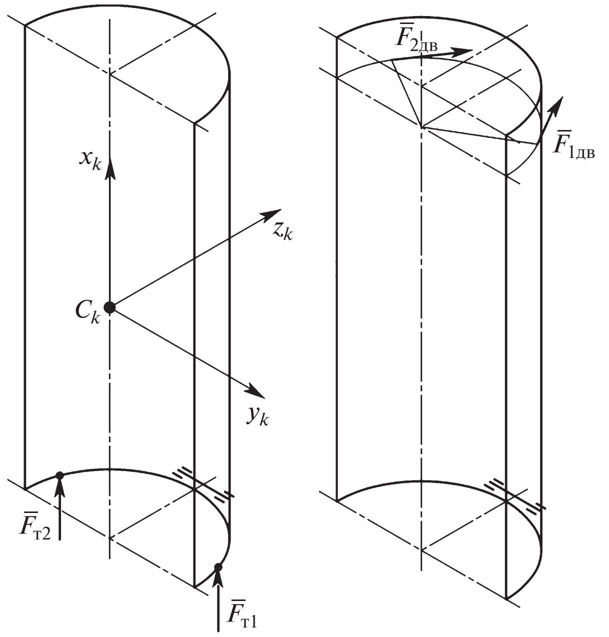

Рис. 2. Схема расположения средств отделения створок.

РДТТ могут иметь задержку включения по времени друг относительно друга. Возможен также разброс сил, развиваемых отдельными толкателями. Из (4) видно, что кососимметричные формы будут возбуждаться только при наличии задержки Δt включения одного из РДТТ (или разнице сил толкателей), иначе возбуждение охватывает только симметричные формы. В этом случае при $\Delta t = 0$ для симметричных форм в период действия силы из (4) получим

$$S_n(t) = \frac{2[F_1^x U_{n1}^x + F_1^y U_{n1}^y + F_1^z U_{n1}^z]}{\omega_n^2}\psi_n(t);$$
$$\psi_n(t) = \begin{cases} 0, \quad t \le 0, \\ 1 - \cos\omega_n t, \quad 0 < t \le T, \\ \cos\omega_n(t - T) - \cos\omega_n t, \quad t \ge T, \end{cases} \tag{5}$$

где T – время работы РДТТ. В период работы РДТТ колебания происходят около смещенного положения:

$$S_n = \frac{2[F_1^x f_{n1}^x + F_1^y f_{n1}^y + F_1^z f_{n1}^z]}{\omega_n^2}, \tag{6}$$

а после окончания работы средств отделения сохраняются остаточные колебания около нулевого значения $S_n = 0$ (рис. 3).

Упругая деформация в произвольной точке створки

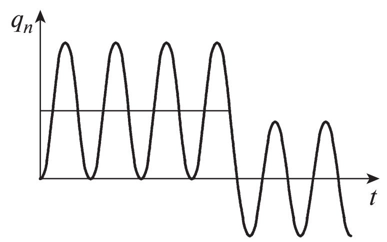

Рис. 3. Характер колебательного процесса при отсутствии задержки включения.

$$\begin{Bmatrix} u_i^x \\ u_i^y \\ u_i^z \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{n_k} S_n(t) \begin{Bmatrix} U_{ni}^x \\ U_{ni}^y \\ U_{ni}^z \end{Bmatrix}, \tag{7}$$

где U_{ni}^x, U_{ni}^y, U_{ni}^z – компоненты вектора собственных форм в этой точке, а суммирование ведется только по симметричным формам.

Поскольку вклад в упругую деформацию высших форм быстро падает с ростом номера формы, в реальных расчетах учитывается ограниченное их число. Максимальное значение упругой деформации, как видно из рис. 2, получается удвоением (6).

Рассмотрим влияние задержки включения одного из двигателей на характер процесса. Предположим, что задержка включения Δt заметно меньше времени работы двигателя: $t \ll T$, что имеет место в действительности. Тогда для симметричных форм в течение работы двигателя $\Delta t < t < T$, интегрируя (4), получим

$$S_n(t) = \frac{2[F_1^x U_{n1}^x + F_1^y U_{n1}^y + F_1^z U_{n1}^z]}{\omega_n^2} \times \\ \times \left[1 - \cos\left(\omega_n \frac{\Delta t}{2}\right)\cos\omega_n\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)\right]; \tag{8}$$

для кососимметричных форм

$$S_n(t) = \frac{2[F_1^x U_{n1}^x + F_1^y U_{n1}^y + F_1^z U_{n1}^z]}{\omega_n^2} \times \\ \times \sin\left(\omega_n \frac{\Delta t}{2}\right)\sin\omega_n\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right). \tag{9}$$

Выражение (8), так же как и (5), описывает колебания около смещенного положения, определяемого соотношением (6). Однако, в отличие от (5), амплитуда этих колебаний зависит от времени задержки Δt. Амплитуда максимальна и равна амплитуде колебаний (5), когда время задержки кратно периоду колебаний на данной частоте $\Delta t = \frac{2\pi a}{\omega_n}$. Если время задержки отличается от кратного

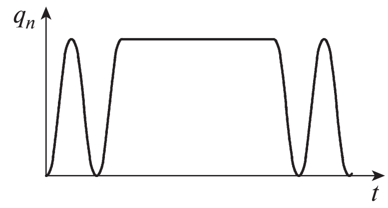

Рис. 4. Характер колебательного процесса для времени задержки, отличающегося от кратного на полпериода.

на полпериода $\Delta t = \dfrac{2\pi a + \pi}{\omega_n}$, колебания около среднего положения отсутствуют (рис. 4). Сохраняет силу и оценка (6) средних значений упругих деформаций, вызванных возбуждением симметричных форм колебаний, а также оценка их максимальных значений, как удвоенного значения (6).

Оценим вклад кососимметричных форм в упругую деформацию створок. Как видно из (9), колебания на кососимметричных формах происходят около невозмущенного значения $q_n = 0$. При этом амплитуда колебаний зависит от времени задержки Δt. Амплитуда равна нулю, когда время задержки кратно периоду колебаний на данной частоте $\Delta t = \dfrac{2\pi a}{\omega_n}$. Амплитуда достигает максимума, когда время задержки отличается от кратного на полпериода колебаний на данной частоте $\Delta t = \dfrac{2\pi a + \pi}{\omega_n}$. Суммарный вклад кососимметричных форм оценивается рядом

$$\begin{Bmatrix} |u_i^x| \\ |u_i^y| \\ |u_i^z| \end{Bmatrix} \le \sum_{n=1}^{n_k} 2\left|[F_1^x U_{n1}^x + F_1^y U_{n1}^y + F_1^z U_{n1}^z]\omega_n^{-2} \sin\left(\omega_n \frac{\Delta t}{2}\right)\right| \begin{Bmatrix} |U_{ni}^x| \\ |U_{ni}^y| \\ |U_{ni}^z| \end{Bmatrix}, \tag{10}$$

где суммирование ведется только по кососимметричным формам. При условии малости задержки включения одного из РДТТ по сравнению с периодом колебаний на низших частотах $\omega_n \dfrac{\Delta t}{2} \ll 1$ можно положить $\sin\left(\omega_n \dfrac{\Delta t}{2}\right) \approx \omega_n \dfrac{\Delta t}{2}$. Таким образом, в указанных пределах возбуждение кососимметричных форм колебаний происходит тем сильнее, чем значительнее время задержки Δt, при нулевой задержке $\Delta t = 0$ кососимметричные формы вообще не возбуждаются.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Введение упрощающих предположений позволило рассмотреть отдельные уравнения колебаний как независимые и получить аналитические оценки (4)–(10). Предполагалось, в частности, что колебания створок являются малыми, линейными, а угловая скорость створок в процессе их разворота как минимум на порядок меньше собственных частот колебаний даже на низших формах. Это позволило учитывать вклад в упругую деформацию только значительных по величине сил, создаваемых средствами отделения.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПРИМ РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колесников К.С., Козлов В.И., Кокушкин В.В.* Разделение ступеней летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1977. 223 с.
2. *Бакулин В.Н., Борзых С.В., Решетников М.Н.* Моделирование относительного движения возвращаемой капсулы и транспортного корабля при их разделении // Вестник МАИ. 2011. Т. 18. № 3. С. 287–294.
3. *Бакулин В.Н., Борзых С.В., Ильясова И.Р.* Математическое моделирование процесса раскрытия многозвенных солнечных батарей // Вестник МАИ. 2011. Т. 18. № 3. С. 295–302.
4. *Бакулин В.Н., Борзых С.В., Богомолов Н.В.* Алгоритм отделения транспортного пилотируемого корабля “Союз” от нестабилизированной Международной космической станции // Известия вузов. Авиационная техника. 2019. № 4. С. 48–54.
5. *Береговой Г.Т., Ярополов В.И., Баранецкий И.И. и др.* Справочник по безопасности космических полетов. М.: Машиностроение, 1989. 336 с.
6. *Bergez G. et al.* Separation and Departure Strategy from Uncontrolled International Space Station // Proc. of the 18th International Symposium on Space Flight Dynamics. Oct. 11–15, 2004. Munich, Germany. P. 85–90.
7. *Bakulin V.N., Borzykh S.V., Voronin V.V.* Space vehicle landing dynamics at failure of landing gear // Russian Aeronautics. 2016. V. 59. № 1. P. 23–28. https://doi.org/10.3103/S1068799816010049
8. *Зимин В.Н., Бей Н.А.* Трансформируемые антенны больших размеров для геостационарных космических аппаратов // Антенны. 2005. № 10. С. 24–27.
9. *Юдинцев В.В.* Моделирование процессов раскрытия многоэлементных конструкций космических аппаратов // Полет. 2012. № 5. С. 28–33.
10. *Бакулин В.Н., Борзых С.В.* Моделирование динамики процесса раскрытия крупногабаритных трансформируемых космических конструкций // Известия вузов. Авиационная техника. 2020. № 4. С. 50–56.

11. *Ильясова И.Р.* Динамика процесса раскрытия многозвенных солнечных батарей //Вестник Самарского государственного аэрокосмического ун-та им. С.П. Королева. 2012. Т. 35. № 4. С. 88–93.
12. *Aslanov V., Kruglov G., Yudintsev V.* Newton–Euler equations of multibody systems with changing structures for space applications // Acta Astronautica. 2011. V. 68. № 11–12. P. 2080–2087. https://doi.org/10.1016/j.actaastro
13. *Докучаев Л.В.* Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. М.: Машиностроение, 1987. 232 с.
14. *Бидерман В.Л.* Прикладная теория механических колебаний. М.: Машиностроение, 1980. 405 с.
15. *Ильин М.М., Колесников К.С., Саратов Ю.С.* Теория колебаний. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 271 с.

ANALYTICAL ESTIMATES OF THE MOVEMENT AND ELASTIC VIBRATIONS OF THE STRUCTURES OF SEPARATED FAIRINGS DOORS OF ROCKET AND SPACE SYSTEMS

V. N. Bakulin[a] and S. V. Borzykh[b]

[a] *Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*
[b] *S.P. Korolev Rocket and Space Corporation Energia, Korolev, Moscow Region, Russian Federation*
Presented by Academician of the RAS A.M. Lipanov

Equations are obtained and a model is constructed for studying the dynamics of separation fairings doors of rocket and space systems. Based on the assumption that the angular velocity of rotation of the fairings doors during separation is small compared to the lower frequencies of their natural vibrations, two independent groups of analytical relations are obtained, one of which describes the spatial movement of the fairings doors as a whole relative to the launch vehicle, and the second-elastic vibrations in the turn section relative to the axes fixed on the carrier. Based on the obtained ratios of the first group, the trajectories of the movement of the fairings doors in the process of separation are constructed. In the second group of equations, the dependences of the level of excitation of the fairings doors vibrations on the different times of switching on the separation engines and/or the spread of the characteristics of the pushers are studied. The considered mathematical model significantly expands the range of problems to be solved and allows for the first time to analyze the simultaneous influence of both types of movement – the spatial movement of the fairings doors as a whole and elastic relative vibrations – on the safety of the separation process, which means the guaranteed exclusion of their collisions with both the launch vehicle and the payload. A number of relevant analytical estimates are obtained for calculating the relative motion and the level of vibrations of the flaps during their separation.

Keywords: launch vehicle, fairings doors, separation process, vibrations, movement, analytical estimates

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 498, с. 46–52

МЕХАНИКА

УДК 621.454.3.01:539.371

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ КОЛЬЦЕВЫМИ РЕБРАМИ И ПУСТОТЕЛЫМ ЦИЛИНДРОМ, ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНЕШНЕГО ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ДАВЛЕНИЯ

© 2021 г. **В. Н. Бакулин**[1,*], **А. Я. Недбай**[2]

Представлено академиком РАН А.М. Липановым 07.03.2021 г.
Поступило 07.03.2021 г.
После доработки 11.03.2021 г.
Принято к публикации 16.03.2021 г.

Предложена модель для исследования динамической устойчивости трехслойной цилиндрической оболочки с несимметричным пакетом композитных несущих слоев и легким заполнителем, подкрепленной кольцевыми ребрами и упругим пустотелым цилиндром, при действии осевых сил и внешнего пульсирующего давления. Впервые получены уравнения и рассмотрены основные этапы решения задачи с помощью предложенной комбинации методов. Для произвольно расположенных неодинаковых ребер задача сводится к решению системы уравнений относительно амплитудных значений двух окружных и радиального перемещений оболочки в местах установки ребер. При равномерно расположенных одинаковых ребрах характеристическое уравнение для определения критических частот представляет систему трех алгебраических уравнений. Впервые построены зависимости критических частот главных областей неустойчивости и исследовано влияние на них параметров цилиндра и ребер. Разработанная оригинальная математическая модель позволяет впервые провести анализ одновременного влияния ребер и цилиндра на границы областей неустойчивости и определить возникновение параметрического резонанса, приводящего к разрушению корпуса двигателя летательного аппарата.

Ключевые слова: динамическая устойчивость, внешнее пульсирующее давление, критические частоты, области неустойчивости, трехслойная цилиндрическая оболочка, характеристическое уравнение, несимметричный пакет слоев, несущие слои, легкий заполнитель, кольцевые ребра

DOI: 10.31857/S2686740021030056

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Во время полета на корпус твердотопливного двигателя, являющегося одним из наиболее нагруженных и важных элементов летательного аппарата (ЛА) [1], помимо аэродинамических и инерционных нагрузок действуют различные тепловые излучения и частицы [2]. Одной из функций корпуса является предотвращение попадания внутрь внешнего тепла, поэтому его оптимальной конструкцией является трехслойная оболочка. Наружный слой такой оболочки, часто более прочный, служит для защиты двигателя от внешних механических и частично тепловых факторов. Внутренний слой, более толстый, удерживает внутреннее давление газов при работе двигателя. Заполнитель между слоями обычно имеет низкие значения коэффициента теплопроводности и модуля упругости и защищает внутренний слой от воздействия тепла. Для повышения устойчивости корпуса от действия внешнего давления оболочку подкрепляют кольцевыми ребрами (шпангоутами).

При полете ЛА на внешней поверхности корпуса происходит пульсация давления, обусловленная турбулентностью атмосферы, бафтингом [3, 4], неравномерностью сгорания топлива, вибрациями, а также изменениями углов атаки и рысканья. При определенных условиях эти пульсации способны привести к возникновению параметрического резонанса [3, 5, 6] и разрушению корпуса.

Анализу динамической и аэроупругой устойчивости оболочек посвящены работы [7–10]. Однако поведение трехслойных оболочек, подкреп-

[1] *Институт прикладной механики Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *АО Корпорация “Московский институт теплотехники”, Москва, Россия*
**E-mail: vbak@yandex.ru*

ленных ребрами жесткости, остается практически не исследованным [11–13].

В представленной статье предложена модель для исследования динамической устойчивости трехслойной цилиндрической оболочки с несимметричным пакетом композитных несущих слоев и легким заполнителем, подкрепленной кольцевыми ребрами и пустотелым цилиндром, при действии осевых сил и внешнего пульсирующего давления. Подкрепляющее действие цилиндра учитывается в виде упругого основания, коэффициент постели которого определяется из уравнений трехмерной теории упругости. Впервые получены уравнения и рассмотрены основные этапы решения задачи с помощью предложенной комбинации методов. Решение уравнений ищется в виде тригонометрического ряда по осевой координате. Полученная бесконечная система неоднородных дифференциальных уравнений типа Матье–Хилла решается с помощью тригонометрического ряда по временной координате. Для произвольно расположенных неодинаковых ребер задача сводится к решению системы алгебраических уравнений относительно амплитудных значений двух окружных и радиального перемещений оболочки в местах расстановки ребер, число неизвестных равно утроенному количеству ребер. При равномерно расположенных одинаковых ребрах характеристическое уравнение для определения критических частот представляет систему трех алгебраических уравнений. На числовом примере впервые построены зависимости критических частот главных областей неустойчивости и исследовано влияние на них радиуса канала цилиндра, количества и высоты ребер. Разработанная оригинальная математическая модель значительно расширяет круг решаемых задач и позволяет впервые провести анализ одновременного влияния кольцевых ребер и цилиндра на границы областей неустойчивости и определить возникновение параметрического резонанса, приводящего к разрушению корпуса двигателя ЛА.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим трехслойную цилиндрическую оболочку с несимметричными ортотропными композитными несущими слоями и легким заполнителем, подкрепленную кольцевыми ребрами и упругим пустотелым цилиндром, при действии на поверхности внешнего давления, изменяющегося во времени по гармоническому закону. Торцы оболочки шарнирно оперты и нагружены постоянными осевыми силами. Будем считать, что ребра расположены сравнительно редко. При этом взаимным влиянием тангенциальных контактных усилий и радиальных инерционных сил можно пренебречь. Цилиндр представляется упругим основанием Винклера, коэффициент постели которого определяется из уравнений трехмерной теории упругости [14].

Введем безразмерную систему цилиндрических координат, в которой за координатную поверхность принята срединная поверхность заполнителя. Тогда уравнения движения оболочки можно представить в виде [14]

$$\begin{gathered}L_{j1}u_\alpha + L_{j2}v_\alpha + L_{j3}w + L_{j4}u_\beta + L_{j5}v_\beta + \\ +(\delta_{j2}+\delta_{j3}+\delta_{j5})\times \\ \times\sum_{i=1}^{M}[l_{j2}^{(i)}v_{\alpha i} + l_{j3}^{(i)}w_i + l_{j5}^{(i)}v_{\beta i}]\delta(\alpha-\alpha_i) = 0 \\ (j = 1, 2, \ldots, 5),\end{gathered} \tag{1}$$

где L_{ji}, l_{ji} – дифференциальные операторы, имеющие вид (вид других операторов аналогичен работе [14])

$$\begin{gathered}L_{33} = \frac{D_{11}}{R^2}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + \frac{2(D_{12}+D_{33})}{R^2}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \\ + \frac{D_{22}}{R^2}\frac{\partial^4}{\partial\beta^4} - \frac{h_0^2}{h}\left(G_{13}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + G_{23}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right) + \\ + T_\alpha\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + (P_0 + P_1\cos\omega t)R\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + \\ + \Pi R^2 + B_{22} + F_0R^2\frac{\partial^2}{\partial t^2};\end{gathered}$$

$$L_{34} = L_{43} = \left(\overline{B}_{12} - 2\frac{Rh_0}{h}G_{13}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha};$$

$$L_{35} = L_{53} = \left(\overline{B}_{22} - 2\frac{Rh_0}{h}G_{23}\right)\frac{\partial}{\partial\beta};$$

$$l_{33}^{(i)} = \frac{1}{R}\left(E_iF_i - a_i\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right) + \rho_iF_iR\frac{\partial^2}{\partial t^2};$$

$$l_{25}^{(i)} = l_{52}^{(i)} = -2\frac{\varepsilon_iE_iF_i}{Rh_0}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2};$$

$$l_{35}^{(i)} = l_{53}^{(i)} = -\frac{2}{Rh_0}(\varepsilon_iE_iF_i + Ra_i)\frac{\partial}{\partial\beta};$$

$$l_{55}^{(i)} = -\frac{4}{Rh_0^2}\left[a_iR^2 - E_i(\varepsilon_i^2F_i + I_i)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right];$$

$$F_0 = \rho_Bh_1 + \rho_Hh_2 + h\rho_C;$$

$$B_{ss} = B_s^B + B_s^H;\quad \overline{B}_{ss} = B_s^B - B_s^H;$$

$$B_{12} = B_1^B\nu_2^B + B_1^H\nu_2^H \qquad (s = 1, 2, 3);$$

$$\overline{B}_{12} = B_1^B\nu_2^B - B_1^H\nu_2^H;\quad B_1^B = E_1^Bh_1/\eta^B;$$

$$B_2^B = E_2^Bh_1/\eta^B;\quad B_3^B = G_{12}^Bh_1;$$

$$D_{12} = D_1^B\nu_2^B + D_1^H\nu_2^H;\quad D_1^B = E_1^Bh_1^3/12\eta^B;$$

$$D_2^B = E_2^B h_1^3/12\eta^B; \quad D_3^B = G_{12}^B h_1^3/6; \quad z_0 = R_0/R;$$
$$\eta^B = 1 - \nu_1^B \nu_2^B; \quad h_0 = h + (h_1 + h_2)/2;$$
$$2\varepsilon_i = r_i^B + r_i^H; \quad a_i = 5G_iF_i/6,$$

α, β – безразмерные координаты вдоль образующей и в окружном направлении срединной поверхности заполнителя, принятой за координатную поверхность; w, u_α, u_β, v_α, v_β – нормальное и приведенные осевые и тангенциальные перемещения соответственно верхнего и нижнего несущих слоев [14]; R, R_0 – радиус срединной поверхности заполнителя и внутренний радиус цилиндра (радиус канала цилиндра) соответственно; h_1, h_2, h – соответственно толщина верхнего, нижнего и среднего слоев; E_1^B, E_2^B, G_{12}^B, v_1^B, v_2^B – соответственно осевой и окружной модули упругости, модуль сдвига и коэффициенты Пуассона верхнего слоя (обозначения для нижнего слоя с индексом "H" имеют аналогичный смысл); G_{13}, G_{23} – модули поперечного сдвига заполнителя; ρ_B, ρ_H, ρ_C – плотности материалов верхнего, нижнего и среднего слоев; E_i, G_i, ρ_i – модуль упругости, модуль сдвига и плотность материала i-го ребра; F_i, I_i – площадь и момент инерции ребра; M – количество ребер; Π – коэффициент постели; T_α – начальное осевое усилие; $\delta(\alpha)$ – дельта-функция; δ_{kj} – символ Кронекера; r_i^B, r_i^H – соответственно расстояния от оси ребра до срединной поверхности верхнего и нижнего слоев, причем эта величина считается положительной, если ось ребра лежит ниже срединной поверхности несущего слоя.

Решение уравнений (1) будем искать в виде

$$\{u_\alpha, u_\beta\} = \cos n\beta \sum_{m=1}^{\infty} \{f_{1m}(t), f_{4m}(t)\} \cos \gamma_m \alpha;$$
$$\{v_\alpha, v_\beta\} = \sin n\beta \sum_{m=1}^{\infty} \{f_{2m}(t), f_{5m}(t)\} \sin \gamma_m \alpha; \quad (2)$$
$$w = \cos n\beta \sum_{m=1}^{\infty} f_{3m}(t) \sin \gamma_m \alpha,$$

где $\gamma_m = \dfrac{m\pi}{\alpha_0}$; $\alpha_0 = \dfrac{L}{R}$; L – длина оболочки; $f_{jm}(t)$ – неизвестные функции времени (в дальнейшем аргумент t опускается); m – количество полуволн в осевом направлении; n – количество волн в окружном направлении.

Раскладывая дельта-функцию в тригонометрический ряд и подставляя (2) в (1), получим неоднородную систему дифференциальных уравнений типа Матье–Хилла

$$a_{11}f_{1m} + a_{12}f_{2m} + a_{13}f_{3m} + a_{14}f_{4m} + a_{15}f_{5m} = 0;$$
$$a_{21}f_{1m} + a_{22}f_{2m} + a_{23}f_{3m} + a_{24}f_{4m} + a_{25}f_{5m} =$$
$$= -\frac{2}{\alpha_0}\sum_{i=1}^{M}\left(b_{22}f_{2i} + b_{23}f_{3i} + b_{25}f_{5i}\right)\sin\gamma_m\alpha_i;$$
$$a_{31}f_{1m} + a_{32}f_{2m} +$$
$$+\left(R^2F_0\frac{d^2}{dt^2} - RP_1n^2\cos\omega t + a_{33}^0\right)f_{3m} +$$
$$+ a_{34}f_{4m} + a_{35}f_{5m} = \quad (3)$$
$$= -\frac{2}{\alpha_0}\sum_{i=1}^{M}\left[b_{32}f_{2i} + \left(R\rho_iF_i\frac{d^2}{dt^2} + b_{33}^0\right)f_{3i} + b_{35}f_{5i}\right]\sin\gamma_m\alpha_i;$$
$$a_{41}f_{1m} + a_{42}f_{2m} + a_{43}f_{3m} + a_{44}f_{4m} + a_{45}f_{5m} = 0;$$
$$a_{51}f_{1m} + a_{52}f_{2m} + a_{53}f_{3m} + a_{54}f_{4m} + a_{55}f_{5m} =$$
$$= -\frac{2}{\alpha_0}\sum_{i=1}^{M}\left(b_{52}f_{2i} + b_{53}f_{3i} + b_{55}f_{5i}\right)\sin\gamma_m\alpha_i,$$

где $a_{11} = -B_{11}\gamma_m^2 - B_{33}n^2$;

$$a_{12} = a_{21} = (B_{12} + B_{33})\gamma_m n;$$
$$a_{13} = -a_{31} = B_{12}\gamma_m; \quad a_{14} = a_{41} = -\bar{B}_{11}\gamma_m^2 - \bar{B}_{33}n^2;$$
$$a_{15} = a_{51} = (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{33})\gamma_m n;$$
$$a_{22} = -B_{33}\gamma_m^2 - B_{22}n^2; \quad a_{23} = -B_{22}n;$$
$$a_{24} = a_{42} = (\bar{B}_{12} + \bar{B}_{33})\gamma_m n;$$
$$a_{25} = a_{52} = -\bar{B}_{33}\gamma_m^2 - \bar{B}_{22}n^2;$$
$$a_{32} = B_{22}n;$$
$$a_{33}^0 = \frac{D_{11}}{R^2}\gamma_m^4 + \frac{2(D_{12} + D_{33})}{R^2}\gamma_m^2n^2 +$$
$$+ \frac{D_{22}}{R^2}n^4 + \frac{h_0^2}{h}(G_{13}\gamma_m^2 + G_{23}n^2) -$$
$$- T_\alpha\gamma_m^2 + B_{22} + R^2\Pi - RP_0n^2;$$
$$a_{34} = -a_{43} = -\left(\bar{B}_{12} - \frac{2Rh_0}{h}G_{13}\right)\gamma_m;$$
$$a_{35} = \left(\bar{B}_{22} - \frac{2Rh_0}{h}G_{23}\right)n;$$
$$a_{44} = -B_{11}\gamma_m^2 - B_{33}n^2 - \frac{4R^2}{h}G_{13};$$
$$a_{45} = a_{54} = (B_{12} + B_{33})\gamma_m n;$$
$$a_{53} = -\left(\bar{B}_{22} - \frac{2Rh_0}{h}G_{23}\right)n;$$
$$a_{55} = -B_{33}\gamma_m^2 - B_{22}n^2 - \frac{4R^2}{h}G_{23};$$
$$b_{22} = -\frac{E_iF_in^2}{R}; \quad b_{23} = -b_{32} = \frac{-E_iF_in}{R};$$

$$b_{25} = b_{52} = \frac{2\varepsilon_i E_i F_i n^2}{R h_0};$$

$$b_{33}^0 = \frac{E_i F_i + a_i n^2}{R_i};$$

$$b_{35} = -b_{53} = -\frac{2n(\varepsilon_i E_i F + R a_i)}{R h_0};$$

$$b_{55} = -4\frac{[R^2 a_i + E_i(\varepsilon_i^2 F_i + I_i) n^2]}{R h_0^2}.$$

Коэффициент постели Π будет иметь вид

$$\Pi = \frac{2\mu}{R}\frac{\Delta}{\psi}; \quad \psi = \sum_{j=1}^{6} \Phi_j D_{6j}; \quad \xi = \gamma_m; \quad x = z_0 \gamma_m;$$

$$\Phi_1 = -\frac{n^2}{\xi} I_n(\xi);$$

$$\Phi_3 = -\frac{(\lambda+\mu)}{2(\lambda+2\mu)}\xi\left(\frac{n^2}{\xi^2}+1\right) I_n(\xi); \quad \Phi_5 = -I_n'(\xi);$$

D_{6j}, Δ – соответственно дополнение и определитель матрицы, элементы которой имеют вид (вид других элементов аналогичен работе [14])

$$C_{11} = \frac{n^2}{x} I_n(x);$$

$$C_{13} = -I_n'(x) - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{n^2}{x^2}+1\right) x I_n(x);$$

$$C_{15} = 2I_n'(x);$$

$$C_{63} = \frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)} \times$$
$$\times \xi\left[\left(\frac{n^2}{\xi^2}+1\right)\xi I_n'(\xi) - \left(\frac{n^2}{\xi^2} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right) I_n(\xi)\right];$$

$$C_{65} = \xi\left[\frac{1}{\xi} I_n'(\xi) - \left(\frac{n^2}{\xi^2}+1\right) I_n(\xi)\right];$$

$$\mu = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)}; \quad \lambda = \frac{E_0 \nu_0}{(1+\nu_0)(1-2\nu_0)},$$

где E_0, ν_0 – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала цилиндра; штрихом обозначена производная по соответствующему аргументу.

Для получения четных столбцов матрицы C_{ij} и Φ_j необходимо в предыдущих элементах заменить функцию $I_n(x)$ на модифицированную функцию Бесселя $K_n(x)$ с тем же аргументом.

Решение уравнений (3) будем искать в виде

$$\{f_{1m}, f_{2m}, f_{3m}, f_{4m}, f_{5m}; f_{2i}, f_{3i}, f_{5i}\} = \tag{4}$$
$$= \sum_{q=1,3\ldots}^{\infty} \left\{[A_{1m}^{(q)}, A_{2m}^{(q)}, A_{3m}^{(q)}, A_{4m}^{(q)}, A_{5m}^{(q)}; A_{2i}^{(q)}, A_{3i}^{(q)}, A_{5i}^{(q)}]\sin\frac{q\omega t}{2}\right\} +$$
$$+ \sum_{q=1,3\ldots}^{\infty} \left\{[B_{1m}^{(q)}, B_{2m}^{(q)}, B_{3m}^{(q)}, B_{4m}^{(q)}, B_{5m}^{(q)}; B_{2i}^{(q)}, B_{3i}^{(q)}, B_{5i}^{(q)}]\cos\frac{q\omega t}{2}\right\}.$$

Подставляя первую сумму из (4) в (3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых $\sin\frac{q\omega t}{2}$, получим систему неоднородных алгебраических уравнений. Ограничимся первым членом ряда $q = 1$, который определяет границу главной области неустойчивости и, согласно [15], в большинстве случаев его достаточно для практических расчетов. В результате получим (индекс q в дальнейшем опускается)

$$\sum_{j=1}^{5} a_{1j} A_{jm} = 0; \quad \sum_{j=1}^{5} a_{4j} A_{jm} = 0;$$

$$\sum_{j=1}^{5} a_{2j} A_{jm} = -\frac{2}{\alpha_0}\sum_{i=1}^{M}(b_{22}A_{2i} + b_{23}A_{3i} + b_{25}A_{5i})\sin\gamma_m\alpha_i; \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{5} a_{3j} A_{jm} = -\frac{2}{\alpha_0}\sum_{i=1}^{M}(b_{32}A_{2i} + b_{33}A_{3i} + b_{35}A_{5i})\sin\gamma_m\alpha_i;$$

$$\sum_{j=1}^{5} a_{5j} A_{jm} = -\frac{2}{\alpha_0}\sum_{i=1}^{M}(b_{52}A_{2i} + b_{53}A_{3i} + b_{55}A_{5i})\sin\gamma_m\alpha_i;$$

где $a_{33} = a_{33}^0 - \frac{R^2 F_0 \omega^2}{4} \mp \frac{R P_1 n^2}{2}$; $b_{33} = b_{33}^0 - \frac{R\rho_i F_i \omega^2}{4}$.

Решая систему (5), получим

$$A_{km} = -\frac{2}{\alpha_0}\sum_{i=1}^{M}(B_{k1}A_{2i} + B_{k2}A_{3i} + B_{k3}A_{5i})\sin\gamma_m\alpha_i, \quad k = 1, 2, \ldots 5, \tag{6}$$

где

$$B_{k1} = \frac{b_{22}D_{2k} + b_{32}D_{3k} + b_{52}D_{5k}}{\Delta_1};$$

$$B_{k2} = \frac{b_{23}D_{2k} + b_{33}D_{3k} + b_{53}D_{5k}}{\Delta_1};$$

$$B_{k3} = \frac{b_{25}D_{2k} + b_{35}D_{3k} + b_{55}D_{5k}}{\Delta_1};$$

Δ_1, D_{jk} – определитель и дополнение элемента a_{jk} матрицы (5).

Так как в местах расположения ребер справедливы соотношения

$$(A_{2r}, A_{3r}, A_{5r}) = \sum_{m=1}^{\infty}(A_{2m}, A_{3m}, A_{5m})\sin\gamma_m\alpha_r,$$

то подставив в них выражения (6), получим систему $3M$ уравнений относительно A_{ij}

$$
\begin{gathered}
A_{2r} = -\frac{2}{\alpha_0}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{M}\left(B_{12}A_{2i} + B_{22}A_{3i} + B_{32}A_{5i}\right)\times \\
\times \sin\gamma_m\alpha_i \sin\gamma_m\alpha_r; \\
A_{3r} = -\frac{2}{\alpha_0}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{M}\left(B_{13}A_{2i} + B_{23}A_{3i} + B_{33}A_{5i}\right)\times \\
\times \sin\gamma_m\alpha_i \sin\gamma_m\alpha_r; \\
A_{5r} = -\frac{2}{\alpha_0}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{M}\left(B_{15}A_{2i} + B_{25}A_{3i} + B_{35}A_{5i}\right)\times \\
\times \sin\gamma_m\alpha_i \sin\gamma_m\alpha_r; \\
(r = 1, 2, \ldots M).
\end{gathered} \tag{7}
$$

Равенство нулю определителя системы (7) представляет характеристическое уравнение критических частот.

Подставляя вторую сумму из (4) в (3), получим характеристическое уравнение типа (7), в котором коэффициенты A_{jr} необходимо заменить на B_{jr} соответственно, а в коэффициенте a_{33} принять знак “+”.

Для случая равномерно расположенных ребер $\left(\alpha_i = \dfrac{i\alpha_0}{M+1}\right)$ коэффициенты перед A_{ki} не будут зависеть от индекса i и решение системы (7) можно представить в виде

$$
\{A_{2i}, A_{3i}, A_{5i}\} = \{A_2, A_3, A_5\}\sin\frac{\pi N\alpha_i}{\alpha_0},\ 1 \le N \le M, \tag{8}
$$

где N – целое число, характеризующее форму потери устойчивости; A_2, A_3, A_5 – постоянные.

Подставляя (8) в уравнение (7), получим однородную систему трех алгебраических уравнений

$$
\begin{gathered}
\frac{M+1}{\alpha_0}\sum_{m}\left(B_{1j}A_2 + B_{2j}A_3 + B_{3j}A_5\right)A_j = 0; \\
j = 2, 3, 5, \\
m = N, \quad 2s(M+1) \pm N, \quad s = 1, 2, 3, \ldots
\end{gathered} \tag{9}
$$

Характеристическое уравнение будет представлять равенство нулю определителя системы (9). Придавая n и N различные целочисленные значения, находим значения критических частот.

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Исследуем динамическую устойчивость трехслойной цилиндрической оболочки с композитными несущими слоями и легким заполнителем, подкрепленной одним и тремя кольцевыми ребрами и пустотелым цилиндром, при действии осевой сжимающей силы и внешнего давления, гармонически изменяющегося во времени:

$$
\begin{gathered}
L/R = 6; \quad h_1/R = 0.002; \\
h_2/R = 0.006; \quad h/R = 0.008; \\
(E_1^B, E_1^H)/E_0 = 1.5\times10^4; \\
(E_2^B, E_2^H, E_i)/E_0 = 2.3\times10^4; \\
(G_{12}^B, G_{12}^H, G_i)/E_0 = 2.4\times10^3; \\
(G_{13}, G_{23})/E_0 = 30; \\
\nu_1^B = \nu_1^H = 0.15; \quad \nu_2^B = \nu_2^H = 0.23; \\
F_i/R^2 = 8\times10^{-4}; \quad H/R = 0.04; \\
I/FR^2 = 1.33\times10^{-4}; \\
R_0/R = 0.6; \quad P_0/E_0 = 0.05; \\
T_\alpha/E_0R = 0.5T_{кр} = 2; \\
r_i^B/R = 0.01; \quad r_i^H/R = 0.02; \\
(\rho_B, \rho_H, \rho_i)/\rho_C = 5; \quad \nu_0 = 0.49;
\end{gathered}
$$

$T_{кр}$ – критическое усилие потери устойчивости неподкрепленной трехслойной оболочки; H – высота ребра.

На рис. 1 показаны области неустойчивости (заштрихованная часть) оболочки с одним ребром при различных значениях радиуса канала цилиндра. Штриховой линией представлена оболочка без цилиндра. Здесь $Y = \omega/\omega_0$ – отношение критической частоты пульсаций к собственной частоте неподкрепленной оболочки, $X = p_1/p_0$ – отношение амплитуды переменной составляющей внешнего давления к постоянной, величина которой равна 0.8 критического давления потери устойчивости неподкрепленной оболочки.

На рис. 2 приведены области неустойчивости для оболочки с тремя ребрами при различных значениях безразмерной высоты H/R ребер.

Из приведенного примера следует, что:

увеличение толщины внутреннего цилиндра в 2 раза повышает границы критических частот примерно в 3 раза и уменьшает площадь области неустойчивости примерно в 2.7 раза;

для оболочки с одним ребром наличие 20% толщины свода внутреннего цилиндра уменьшает площадь области неустойчивости в 2 раза;

для оболочки без цилиндра увеличение числа ребер с одного до трех повышает границы критических частот примерно на 40% и уменьшает площадь области неустойчивости примерно в 2.1 раза, но при наличии цилиндра ($z_0 = 0.6$) параметры области неустойчивости становятся одинаковыми;

увеличение высоты ребер в 2 раза повышает границы критических частот примерно в 1.8 раза и уменьшает площадь области неустойчивости примерно в 2 раза.

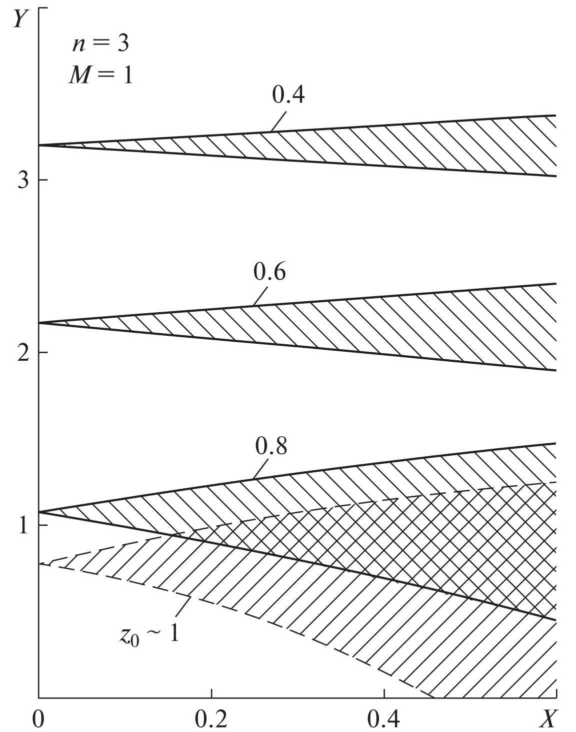

Рис. 1. Области неустойчивости оболочек с различными радиусами канала (M – количество ребер, n – количество кольцевых волн, $z_0 = R_0/R$).

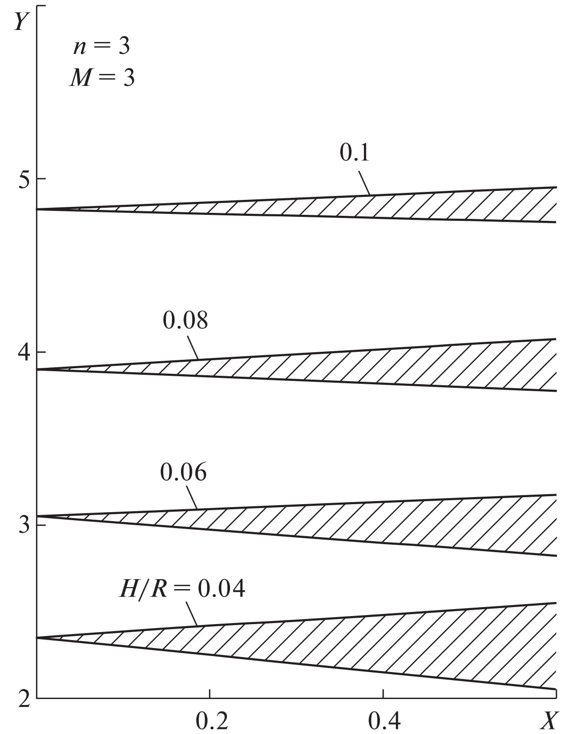

Рис. 2. Области неустойчивости оболочек при различной высоте ребер (H – высота ребра).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленном сообщении впервые получены уравнения и построена новая модель для анализа динамической устойчивости трехслойной цилиндрической оболочки с несимметричными ортотропными несущими слоями, подкрепленной кольцевыми ребрами и пустотелым изотропным цилиндром, при действии осевой нагрузки и внешнего пульсирующего давления. Рассмотрены основные этапы решения указанной задачи с помощью предложенной комбинации методов. Разработаны алгоритмы решения для произвольно расположенных неодинаковых ребер и для равномерно расположенных одинаковых ребер, в последнем случае характеристическое уравнение для определения критических частот значительно упрощается и представляет собой систему трех алгебраических уравнений.

На численном примере впервые построены зависимости критических частот главных областей неустойчивости и исследовано влияние на них радиуса канала цилиндра, количества и высоты ребер. Разработанная оригинальная математическая модель значительно расширяет круг решаемых задач и позволяет впервые провести анализ одновременного влияния кольцевых ребер и цилиндра на границы областей неустойчивости трехслойной цилиндрической оболочки с несимметричным пакетом ортотропных несущих слоев и легким заполнителем.

Получены приоритетные научные результаты, заключающиеся в разработке новой модели для исследования динамической устойчивости трехслойных цилиндрических оболочек и впервые построенных с помощью этой модели зависимостей, определяющих возникновение параметрического резонанса, приводящего к разрушению корпуса двигателя летательного аппарата.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПРИМ РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Липанов А.М., Алиев А.В.* Проектирование РДТТ. М.: Машиностроение, 1995. 397 с.
2. *Бакулин В.Н., Образцов И.Ф., Потопахин В.А.* Динамические задачи нелинейной теории многослойных оболочек: Действие интенсивных термосиловых нагрузок, концентрированных потоков энергии. М.: Физматлит, 1998. 464 с.
3. *Вольмир А.С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. М.: Физматлит, 1976. 416 с.
4. *Липанов А.М., Карсканов С.А., Чернышев С.Л., Липатов И.И.* Теоретическое исследование условий возникновения скоростного бафтинга // Вестн.

Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2019. Т. 29. № 3. С. 382–395.

5. *Огибалов П.М., Колтунов М.А.* Оболочки и пластины. М.: ГИТТЛ, 1971. 696 с.

6. *Майлыбаев А.А., Сейранян А.П.* Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике. М.: Физматлит, 2009. 400 с.

7. *Бакулин В.Н., Волков Е.Н., Симонов А.И.* Динамическая устойчивость цилиндрической оболочки при действии переменного по оси внешнего давления // Изв. вузов. Авиационная техника. 2017. № 4. С. 11–17.

8. *Бакулин В.Н., Волков Е.Н., Недбай А.Я.* Флаттер слоистой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами и нагруженной осевыми силами // ДАН. 2015. Т. 463. № 4. С. 414–417.

9. *Бакулин В.Н., Конопельчев М.А., Недбай А.Я.* Аэроупругая устойчивость композитной цилиндрической оболочки линейно-переменной толщины // ДАН. 2019. Т. 488. № 1. С. 595–601.

10. *Бакулин В.Н., Недбай А.Я.* Динамическая устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной продольными ребрами кусочно-постоянной толщины, при действии осевой нагрузки // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2020. Т. 495. С. 39–45.

11. *Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Поспелов А.А.* Динамическая устойчивость трехслойной цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами, при действии внешнего давления // Сб. матер. Всерос. науч. конф. М.: ИПРИМ РАН, 2015. С. 290–292.

12. *Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Конопельчев М.А.* Устойчивость трехслойной оболочки с кольцевыми ребрами в сверхзвуковом потоке газа // Материалы XX Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС`2017). 24–31 мая 2017. Алушта. М.: Изд-во МАИ, 2017. С. 321–323.

13. *Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Конопельчев М.А.* Устойчивость трехслойной оболочки с кольцевыми ребрами в сверхзвуковом потоке газа // Механика композиционных материалов и конструкций. 2017. Т. 23. № 3. С. 435–443.

14. *Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрюшин В.А.* Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. М.: Физматлит, 2014. 408 с.

15. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М.: ГИТТЛ, 1956. 600 с.

THE DYNAMIC STABILITY OF THREE-LAYERED CYLINDRICAL SHELL, REINFORCED RING RIBS AND HOLLOW CYLINDER UNDER EXTERNAL PRESSURE PULSING

V. N. Bakulin[a] and A. Ya. Nedbay[b]

[a] *Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[b] *Corporation Moscow Institute of Heat Technology, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.M. Lipanov

A model is proposed for studying the dynamic stability of a three-layer cylindrical shell with an asymmetric package of composite bearing layers and a light filler, supported by annular ribs and an elastic hollow cylinder, under the action of axial forces and external pulsating pressure. For the first time, the equations are obtained and the main stages of solving the problem are considered using the proposed combination of methods. For arbitrarily arranged unequal edges, the problem is reduced to solving a system of equations with respect to the amplitude values of the two circumferential and radial displacements of the shell at the locations of the edges. For evenly spaced identical edges, the characteristic equation for determining the critical frequencies is a system of three algebraic equations. For the first time, the dependences of the critical frequencies of the main instability regions are constructed and the influence of the cylinder and ribs parameters on them is investigated. The developed original mathematical model makes it possible for the first time to analyze the simultaneous influence of the edges and the cylinder on the boundaries of the instability regions and to determine the occurrence of a parametric resonance that leads to the destruction of the aircraft engine body.

Keywords: dynamic stability, external pulsating pressure, critical frequencies, areas of instability, three-layer cylindrical shell, the characteristic equation, an asymmetrical layer package, load-bearing layers, easy placeholder, ring ribs

МЕХАНИКА

УДК 531.26,521.14,514.85

ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ КОМПОНЕНТ ТЕНЗОРА ЭЙЛЕРА–ПУАНСО

© 2021 г. А. А. Буров[1,2,*], Е. А. Никонова[2,**]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 29.03.2021 г.
Поступило 01.04.2021 г.
После доработки 16.04.2021 г.
Принято к публикации 16.04.2021 г.

В работе вводятся функции, позволяющие вычислять компоненты тензора Эйлера–Пуансо с помощью дифференцирования. Роль этих функций аналогична роли производящих функций в математической статистике, позволяющих вычислять статистические моменты любого порядка. Обсуждаются свойства этих функций.

Ключевые слова: тензор Эйлера–Пуансо, момент инерции произвольного порядка, статистические моменты, производящая функция

DOI: 10.31857/S2686740021030068

1. ОСНОВНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ

Из математической статистики хорошо известно (см., например, [1]) понятие производящей функции, позволяющей вычислять статистические моменты любого порядка с помощью дифференцирования. Пусть $\mathcal{G}$ – твердое тело, $Ox_1x_2x_3$ – прямоугольная правая система координат, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\text{т}}$ – координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OP}$ точки $P \in \mathcal{G}$, $\rho(\mathbf{x})$ – плотность тела в точке P. Напомним, что тензор Эйлера–Пуансо k-го порядка задается своими компонентами

$$I_{k_1k_2k_3} = \iiint_{\mathcal{G}} x_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3}\rho(\mathbf{x})dx_1dx_2dx_3,\quad k_1 + k_2 + k_3 = k. \tag{1}$$

Введем функцию

$$F(\mathbf{t}) = \iiint_{\mathcal{G}} e^{(\mathbf{t},\mathbf{x})}\rho(\mathbf{x})dx_1dx_2dx_3,\quad \mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)^{\text{т}},\quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\text{т}}. \tag{2}$$

У т в е р ж д е н и е.

$$I_{k_1k_2k_3} = \frac{\partial^k F(0,0,0)}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}\partial t_3^{k_3}}. \tag{3}$$

В справедливости утверждения можно убедиться непосредственно, опираясь на теорему о дифференцировании по параметру под знаком интеграла (см., например, [2, с. 141, п. 297]), условия которой предполагаются выполненными.

Будем называть функцию (2) производящей функцией тензора Эйлера–Пуансо.

2. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ

С в о й с т в о 1. Пусть $O'x_1'x_2'x_3'$ – прямоугольная правая система координат, оси которой параллельны соответствующим осям системы координат $Ox_1x_2x_3$, а $\overrightarrow{OO'} = \mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^{\text{т}}$. Тогда для таким образом введенных осей производящая функция $F(\mathbf{t};\mathbf{f})$ такова, что

$$F'(\mathbf{t};\mathbf{f}) = \iiint_{\mathcal{G}} e^{(\mathbf{t},x')}\rho(x')dx_1'dx_2'dx_3' = e^{-(\mathbf{t},\mathbf{f})}F(\mathbf{t}). \tag{4}$$

Это свойство доказывается непосредственным вычислением, опирающимся на подстановку $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{f}$. Оно аналогично хорошо известной из механики теореме Гюйгенса–Штейнера (см., например, [3]), согласно которой момент инерции твердого тела относительно любой оси равен моменту инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела и параллельной данной оси,

[1] *Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия*
**E-mail: jtm@yandex.ru*
***E-mail: nikonova.ekaterina.a@gmail.com*

сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями.

Свойство 2. Пусть $Ox_1''x_2''x_3''$ — прямоугольная правая система координат, полученная поворотом из системы координат $Ox_1x_2x_3$ так, что координаты радиус-вектора одной и той же точки в этих двух системах связаны соотношением $\mathbf{x}'' = \mathbf{S}\mathbf{x}$, где $\mathbf{S}$ — ортогональная матрица поворота. Тогда производящая функция $F''(\mathbf{t};\mathbf{S})$ в системе координат $Ox_1''x_2''x_3''$ имеет вид

$$\begin{aligned} F''(\mathbf{t};\mathbf{S}) &= \iiint\limits_{\mathscr{G}B} e^{(\mathbf{t},\mathbf{x}'')}\rho(\mathbf{x}'')dx_1''dx_2''dx_3'' = \\ &= \iiint\limits_{\mathscr{G}} e^{(\mathbf{t},\mathbf{S}\mathbf{x})}\rho(\mathbf{x})\det(\mathbf{S})dx_1dx_2dx_3 = \\ &= \iiint\limits_{\mathscr{G}} e^{(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{t},\mathbf{x})}\rho(\mathbf{x})dx_1dx_2dx_3 = F(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}). \end{aligned} \quad (5)$$

Замечание 1. Непосредственное преобразование компонент тензора Эйлера—Пуансо при таких заменах систем координат задается несложными, но весьма громоздкими выражениями.

3. ПРИМЕРЫ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ

Вычисление производящих функций для некоторых однородных тел приводит к следующим результатам.

Прямоугольный параллелепипед. Пусть тело $\mathscr{G}$ — прямоугольный параллелепипед с ребрами $2a_1$, $2a_2$, $2a_3$. В осях $Ox_1x_2x_3$, параллельных ребрам параллелепипеда и проходящих через его центр масс, производящая функция принимает вид

$$F(\mathbf{t};a_1,a_2,a_3) = 8\frac{\mathrm{sh}(a_1t_1)\mathrm{sh}(a_2t_2)\mathrm{sh}(a_3t_3)}{t_1t_2t_3}. \quad (6)$$

В частности, для куба с ребром $2a$

$$F(\mathbf{t};a) = 8\frac{\mathrm{sh}(at_1)\mathrm{sh}(at_2)\mathrm{sh}(at_3)}{t_1t_2t_3}.$$

Равногранный тетраэдр. Пусть тело $\mathscr{G}$ — равногранный тетраэдр (относительно определения и основных свойств см. [4]) с бимедианами $2a_1$, $2a_2$, $2a_3$. Рассмотрим оси $Ox_1x_2x_3$, направленные вдоль бимедиан и проходящие через центр масс — точку их пересечения. Если в этих осях координаты вершин тетраэдра (a_1; $-a_2$; $-a_3$), ($-a_1$; $-a_2$; a_3), ($-a_1$; a_2; $-a_3$), (a_1; a_2; a_3), то производящая функция принимает вид

$$\begin{aligned} F(\mathbf{t};a_1,a_2,a_3) &= 4a_1a_2a_3 \times \\ \times \sum_{(1,2,3)} &\frac{e^{a_1t_1}\mathrm{ch}(a_2t_2+a_3t_3) - e^{-a_1t_1}\mathrm{ch}(a_2t_2-a_3t_3)}{(a_1^2t_1^2-a_2^2t_2^2)(a_3^2t_3^2-a_1^2t_1^2)}a_1t_1. \end{aligned} \quad (7)$$

В частном случае правильного тетраэдра с бимедианой $2a$ эта функция записывается как

$$F(\mathbf{t};a) = 4\sum_{(1,2,3)}\frac{e^{at_1}\mathrm{ch}((t_2+t_3)a) - e^{-at_1}\mathrm{ch}((t_2-t_3)a)}{(t_1^2-t_2^2)(t_3^2-t_1^2)}t_1.$$

Октаэдр. Пусть тело $\mathscr{G}$ — октаэдр, ребра которого соединяют середины соседних граней прямоугольного параллелепипеда с ребрами $2a_1$, $2a_2$, $2a_3$. В осях $Ox_1x_2x_3$, соединяющих его противоположные вершины и проходящих через центр октаэдра, производящая функция записывается как

$$\begin{aligned} F(\mathbf{t};a_1,a_2,a_3) &= 8a_1a_2a_3e^{-a_3t_3} \times \\ &\times \sum_{(1,2,3)}\frac{a_1t_1\mathrm{sh}(a_1t_1)}{(a_1^2t_1^2-a_3^2t_3^2)(a_1^2t_1^2-a_2^2t_2^2)}. \end{aligned} \quad (8)$$

В частном случае правильного октаэдра, вписанного в куб с ребром $2a$, производящая функция записывается как

$$F(\mathbf{t};a) = 8\sum_{(1,2,3)}\frac{t_1\mathrm{sh}(at_1)}{(t_1^2-t_3^2)(t_1^2-t_2^2)}.$$

Цилиндр. Пусть тело $\mathscr{G}$ — прямой круговой цилиндр с радиусом основания R высотой $2h$. Пусть $Ox_1x_2x_3$ — система координат, начало которой совпадает с центром симметрии цилиндра, а ось Ox_3 — с его осью симметрии. Тогда выражение для производящей функции имеет вид

$$\begin{aligned} F(\mathbf{t};R,h) &= 2\pi R^2\frac{\mathrm{sh}(t_3h)}{t_3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t_1^2+t_2^2)^nR^{2n}}{2^{2n}n!(n+1)!} = \\ &= 4\pi R\frac{\mathrm{sh}(t_3h)}{t_3\sqrt{t_1^2+t_2^2}}J_1(\sqrt{t_1^2+t_2^2}R), \end{aligned} \quad (9)$$

где $J_1(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка 1 (см., например, [5, с. 13, п. 7.2.2]) с аргументом $\sqrt{t_1^2+t_2^2}R$.

Конус. Пусть тело $\mathscr{G}$ — прямой круговой конус с радиусом основания R и высотой h. В проходящих через центр масс конуса осях $Ox_1x_2x_3$, с осью Ox_3, направленной вдоль высоты, выражение для производящей функции имеет вид

$$F(\mathbf{t}) = \frac{\pi R^2}{h^2t_3^3}e^{3t_3h/4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t_1^2+t_2^2)^n}{2^{2n}n!(n+1)!}\left(\frac{R}{ht_3}\right)^{2n}\gamma(2n+3,ht_3), \quad (10)$$

где

$$\gamma(2n+3,ht_3) = \int_0^{ht_3}e^{-t}t^{2n+2}dt$$

есть нижняя неполная гамма-функция.

Трехосный эллипсоид. Пусть тело $\mathscr{G}$ — трехосный эллипсоид с полуосями a_1, a_2 и a_3. В проходящих через центр масс эллипсоида осях $Ox_1x_2x_3$, совпадающих с его главными осями инерции, выражение для производящей функции имеет вид

$$F(\mathbf{t}) = \frac{4\pi a_1 a_2 a_3}{\mathcal{T}^2}\left(\operatorname{ch}\mathcal{T} - \frac{\operatorname{sh}\mathcal{T}}{\mathcal{T}}\right),$$
$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{t}) = \sqrt{a_1^2t_1^2 + a_2^2t_2^2 + a_3^2t_3^2}. \tag{11}$$

В случае однородного эллипсоида значение интеграла (1) при произвольных k_1, k_2, k_3 было найдено Леженом Дирихле в гамма-функциях (см., например, [6, с. 396, п. 676, пример 6]).

Полагая $a_1 = a_2 = a_3 = a$, приходим к производящей функции для шара радиуса a, выражение которой имеет вид

$$F(\mathbf{t}) = \frac{4\pi a^3}{\mathcal{T}^2}\left(\operatorname{ch}\mathcal{T} - \frac{\operatorname{sh}\mathcal{T}}{\mathcal{T}}\right), \quad \mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{t}) = a\sqrt{(\mathbf{t},\mathbf{t})}.$$

4. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ И КОМПОНЕНТ ТЕНЗОРА ЭЙЛЕРА–ПУАНСО

Как известно (см., например, [7, 8]), тензор инерции $\mathbf{J}$ тела и тензор Эйлера–Пуансо второго порядка $\mathbf{I}_2$ связаны соотношениями

$$\mathbf{J} = \operatorname{Tr}(\mathbf{I}_2)\mathbf{E} - \mathbf{I}_2, \quad \mathbf{I}_2 = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\mathbf{J})\mathbf{E} - \mathbf{J},$$
$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} I_{200} & I_{110} & I_{101} \\ I_{110} & I_{020} & I_{011} \\ I_{101} & I_{011} & I_{002} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица 3×3. У этих тензоров общие собственные векторы, а вместе с ними – и главные оси инерции.

Ц и л и н д р. Для рассмотренного цилиндра массы m в выбранных осях тензоры $\mathbf{I}_2$ и $\mathbf{J}$ имеют вид (ср. [9])

$$\mathbf{I}_2 = m \cdot \operatorname{diag}\left(\frac{R^2}{4}, \frac{R^2}{4}, \frac{h^2}{3}\right),$$
$$\mathbf{J} = m \cdot \operatorname{diag}\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3}, \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3}, \frac{R^2}{2}\right).$$

В случае, когда $h = \frac{\sqrt{3}}{2}R$, центральный тензор инерции $\mathbf{J}$ шаровой (ср. [10, 11]). Для цилиндра в силу симметрии тензор $\mathbf{I}_3$ нулевой, а ненулевые компоненты тензора $\mathbf{I}_4$ имеют вид

$$I_{400} = I_{040} = m\frac{R^4}{8}, \quad I_{004} = m\frac{R^4}{5},$$
$$I_{220} = m\frac{R^4}{24}, \quad I_{022} = I_{202} = m\frac{R^2h^2}{12}.$$

К о н у с. Для рассмотренного конуса массы m в выбранных осях тензоры $\mathbf{I}_2$ и $\mathbf{J}$ имеют вид (ср. [9])

$$\mathbf{I}_2 = m \cdot \operatorname{diag}\left(\frac{3R^2}{20}, \frac{3R^2}{20}, \frac{3h^2}{80}\right),$$
$$\mathbf{J} = \frac{3}{20}m \cdot \operatorname{diag}\left(R^2 + \frac{h^2}{4}, R^2 + \frac{h^2}{4}, 2R^2\right).$$

В случае, когда $h = 2R$, центральный тензор инерции $\mathbf{J}$ шаровой (ср. [10, 11]). Ненулевые компоненты тензоров $\mathbf{I}_3$ и $\mathbf{I}_4$ имеют вид

$$\mathbf{I}_3\colon\ I_{003} = m\frac{h^3}{160}, \quad I_{021} = I_{201} = -m\frac{R^2h}{80},$$

$$\mathbf{I}_4\colon\ I_{400} = I_{040} = m\frac{3R^4}{56}, \quad I_{004} = m\frac{39h^4}{8960},$$
$$I_{220} = m\frac{R^4}{56}, \quad I_{022} = I_{202} = m\frac{9R^2h^2}{2240}$$

соответственно.

З а м е ч а н и е 2. Компоненты тензора Эйлера–Пуансо присутствуют в разложениях гравитационного потенциала в ряд по гармоническим многочленам (см., например, [7]). Исследованию их роли в динамике твердого тела посвящены работы Р.С. Суликашвили [10, 11], в которых такая роль изучалась для однородных конуса и цилиндра, а также для тел, обладающих симметриями правильных многогранников [12]. Для ряда малых небесных тел компоненты тензора Эйлера–Пуансо вычислялись в [13–16] вплоть до компонент тензоров четвертого порядка.

З а м е ч а н и е 3. В математической статистике изучаются моменты для непостоянных плотностей распределений вероятностей (см., например, [17]), как правило, нетипичных для теоретической механики. Формы компактных носителей, на которых в математической статистике рассматриваются постоянные плотности распределения, в общем случае, за исключением иллюстрационных примеров, тоже нетипичны для теоретической механики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уилкс С.* Математическая статистика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. 632 с.
2. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. Т. 2. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. 464 с.
3. *Четаев Н.Г.* Теоретическая механика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 368 с.
4. *Шарыгин И.Ф.* Задачи по геометрии. Стереометрия. Сер. Библиотечка Квант. Вып. 31. М.: Наука, 1984. 160 с.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. 296 с.
6. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1956. 656 с.

7. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. 800 с.

8. *Dobrovolskis A.R.* Inertia of Any Polyhedron // Icarus. 1996. V. 124. № 2. P. 698–704.

9. *Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р.* Курс теоретической механики. Т. 2. Динамика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. 544 с.

10. *Суликашвили Р.С.* Влияние моментов инерции высших порядков на динамику твердого тела с неподвижной точкой // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1985. С. 90–104.

11. *Суликашвили Р.С.* О влиянии моментов инерции третьего и четвертого порядков на движение твердого тела // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 268–274.

12. *Суликашвили Р.С.* Стационарные движения тел, допускающих группу симметрии правильных многогранников в ньютоновском поле сил // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 582–586.

13. *Burov A.A., Nikonov V.I.* Inertial characteristics of higher orders and dynamics in a proximity of a small celestial body // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2020. V. 16. № 2. P. 259–273.

14. *Буров А.А., Никонов В.И.* Вычисление потенциала притяжения астероида (433) Эрос с точностью до членов четвертого порядка // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2020. Т. 492. С. 58–62.

15. *Буров А.А., Никонов В.И.* Чувствительность значений компонент тензоров Эйлера–Пуансо к выбору триангуляционной сетки поверхности тела // ЖВМиМФ. 2020. Т. 60. № 10. С. 1764–1776.

16. *Никонов В. И.* Гравитационные поля малых небесных тел. М.: Белый ветер, 2020. 68 с.

17. *Triantafyllopoulos K.* On the central moments of the multidimensional Gaussian distribution // Math. Scientist. 2003. V. 28. Is. 2. P. 125–128.

THE GENERATING FUNCTION FOR THE COMPONENTS OF THE EULER-POINSOT TENSOR

A. A. Burov[a,b] and E. A. Nikonova[b]

[a] *Federal Research Center "Computing Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[b] *National Research University "Higher School of Economics", Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov

The generating functions enable to calculate the components of the Euler–Poinsot tensor using differentiation are introduced. The role of these functions is similar to the role of generating functions in mathematical statistics, enabling one to calculate statistical moments of any order. The properties of these functions are discussed.

Keywords: Euler–Poinsot tensor, inertia moments of arbitrary order, statistical moments, generating function

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 498, с. 57–61

МЕХАНИКА

УДК 517.958; 539.3(5); 517.956.226

О СУЩНОСТИ “ЧЕРНЫХ ДЫР” ДЛЯ УПРУГИХ ВОЛН В ТЕЛАХ С ПИКООБРАЗНЫМИ ЗАОСТРЕНИЯМИ

© 2021 г. С. А. Назаров[1,*]

Представлено академиком РАН Н.Ф. Морозовым 08.02.2021 г.
Поступило 25.03.2021 г.
После доработки 31.03.2021 г.
Принято к публикации 31.03.2021 г.

Эффект “черной дыры” для упругих волн, обнаруженный М.А. Мироновым и детально изученный последователями, обычно связывается с распространением упругих волн вдоль пикообразного заострения деформируемого тела, т.е. пик абсорбирует энергию упругих колебаний и не возвращает ее в массивную часть тела. Вместе с тем идеальный пик изготовить невозможно, и в реальных конструкциях его кончик затуплен. Сглаживание заострения коренным образом изменяет строение спектра: уничтожает непрерывную его компоненту, но провоцирует концентрацию частот собственных колебаний в среднечастотном диапазоне. В сообщении указаны асимптотические формулы для собственных чисел балки Кирхгофа с истончающимся концом, и на их основе разъяснен новый, фактический, механизм действия “черной дыры”, а именно, затупленный пик, в котором длительное распространение волн невозможно, производит захват волн на “почти всех” частотах в достаточно широком диапазоне спектра. Улучшение качества заострения способствует усилению концентрации собственных чисел и увеличению зоны ее проявления.

Ключевые слова: “черные дыры” для упругих волн, затупленное пикообразное заострение, концентрация частот собственных колебаний, захват волн, асимптотика собственных чисел

DOI: 10.31857/S2686740021030123

1. Мотивировка. В отличие от краевых задач для уравнения Гельмгольца, описывающих колебательные процессы в акустике, теплопроводности и электродинамике, в спектральных задачах для упругих тел и пластин Кирхгофа обнаруживаются разнообразные, зачастую вполне неожиданные, явления. К последним следует отнести так называемые “черные дыры” для упругих и акустических волн, возникающие при наличии пикообразных заострений, описанные впервые М.А. Мироновым [1] в рамках одномерной модели балки, истончающейся к концу, и реализованные в конкретных устройствах из пластика и металла. Эти разработки получили развитие как в инженерном плане (см. публикации [2–5] и др.), так и в математическом. В частности, в работах [6–8] и др. исследованы непрерывный и точечный спектры операторов плоской и пространственной задач теории упругости, осуществлена постановка энергетических условий излучения в вершине пика и, кроме того, введена унитарная и симметричная матрица рассеяния. Все это позволило дать строгое обоснование эффекту “черной дыры” [1] в рамках спектральной теории самосопряженных операторов: колебания массивной части тела возбуждают волны, распространяющиеся вдоль утончающегося пика с затухающей при приближении к его вершине скоростью, т.е. волны проникают в пик, но не возвращаются из него. Иными словами, упругое пикообразное заострение вбирает в себя кинетическую энергию, превращая ее в конце концов, например, в тепловую.

В настоящем сообщении на основе публикаций автора [9–11] сформулирован совершенно другой механизм поглощения энергии пикообразным заострением, которому в реальности нельзя придать идеальную форму – на самом деле кончик пика всегда оказывается затупленным, что коренным образом изменяет строение спектра упругого тела, в частности, уничтожает непрерывный спектр и тем самым запрещает распространение волн к вершине.

2. Спектр. Как и в работе [1], примем простейшую одномерную модель балки с острым краем (см. рис. 1 и [12, § 33])

$$B(x,\partial_x)u^\varepsilon(x) := \partial_x^2 x^6 \partial_x^2 u^\varepsilon(x) = \lambda x^2 u^\varepsilon(x),\ x \in (\varepsilon,1), \quad (1)$$

$$u^\varepsilon(1) = 0, \quad \partial_x u^\varepsilon(1) = 0, \quad (2)$$

[1] *Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия*
**E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk*

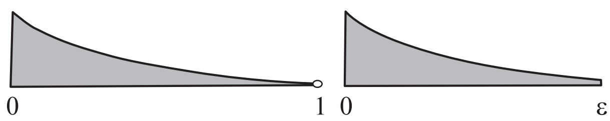

Рис. 1. Балки с острым (а) и затупленным (б) правыми концами.

$$\partial_x x^6 \partial_x^2 u^\varepsilon(x) = 0, \ x^6 \partial_x^2 u^\varepsilon(x) = 0 \quad \text{при} \quad x = \varepsilon. \quad (3)$$

Здесь u^ε – прогиб балки, $\lambda = D^{-1}\rho H^{-2}\omega^2$ – спектральный параметр, $\omega > 0$ – частота гармонических во времени колебаний, а $D > 0$ и $\rho > 0$ – приведенная цилиндрическая жесткость и плотность балки (постоянные). Кроме того, Hx^2 – приведенная толщина балки, исчезающая при приближении к концу $x = 0$, причем произведено масштабирование и коэффициент $H > 0$ устранен из дифференциального оператора $B(x, \partial_x)$. Условия Дирихле (2) означают, что массивный торец балки жестко защемлен, а случаю $\varepsilon = 0$ отвечает балка с пикообразным заострением, для которого краевые условия (3) в вершине пика не нужны (см., например, [12, § 33]), а случаю $\varepsilon > 0$ – затупленный пик, кончик которого свободен от внешних воздействий согласно условиям Неймана (3). Процесс изготовления идеального пика сымитируем посредством предельного перехода $\varepsilon \to +0$.

При $\varepsilon > 0$ задача (1)–(3) обладает дискретным спектром σ_d^ε, образующим неограниченную монотонную положительную последовательность

$$\lambda_1^\varepsilon \le \lambda_2^\varepsilon \le \ldots \le \lambda_n^\varepsilon \le \ldots \to +\infty. \quad (4)$$

По понятным причинам кратность каждого собственного числа не превосходит двух. Если же $\varepsilon = 0$ и уравнение (1) вырожденное, то у задачи (1), (2) возникает непрерывный спектр $[\lambda_\dagger, +\infty)$. Этот факт проверяется путем несложных вычислений, поскольку (1) – обыкновенное дифференциальное уравнение эйлеровского типа. Так, в случае

$$\lambda > \lambda_\dagger = \frac{225}{16} \quad (5)$$

у уравнения (1) есть четыре решения

$$w_\pm^{im}(x) = x^{\pm i A_-(\lambda) - 3/2}, \quad w_\pm^{re}(x) = x^{\pm A_+(\lambda) - 3/2}, \quad (6)$$

где

$$A_\pm(\lambda) = \sqrt{\sqrt{4 + \lambda} \pm \frac{17}{4}}. \quad (7)$$

При этом выше ($\rho > 0$) порога непрерывного спектра верны соотношения

$$A_-(\lambda_\dagger + p) = \sqrt{\frac{2}{17}}\sqrt{\rho}(1 + O(\rho)),$$
$$A_+(\lambda_\dagger + \rho) = \sqrt{\frac{17}{2}}\left(1 + \frac{2\rho}{289} + O(\rho^2)\right). \quad (8)$$

Только для решения w_+^{re} из списка (6) сходятся интегралы упругой и кинетической энергий

$$\int_0^1 x^6 \left|\partial_x^2 w(x)\right|^2 dx \quad \text{и} \quad \int_0^1 x^2 \left|w(x)\right|^2 dx. \quad (9)$$

Для функций $w_\pm^{im}$ эти интегралы характеризуются логарифмической скоростью расходимости, а для функции w_-^{re} – степенной. При $\lambda < \lambda_\dagger$ уравнение (1) имеет в точности два линейно независимых решения с конечными интегралами (9). Эти обстоятельства и определяют положение непрерывного спектра задачи (1), (2) при $\varepsilon = 0$. Кроме того, у нее отсутствует точечный спектр, в частности, ниже точки отсечки $\lambda_\dagger$ у обсуждаемой задачи нет изолированных собственных чисел. Наконец, укажем ее решение, порожденное "приходящей" от точки $x = 0$ волной

$$Z(x; \lambda) = w_-^{im}(x) + S(\lambda) w_+^{im}(x) + Q(\lambda) w_+^{re}(x). \quad (10)$$

Коэффициент $Q(\lambda)$ востребован не будет, и

$$S(\lambda) = -\frac{A_+(\lambda) + i A_-(\lambda)}{A_+(\lambda) - i A_-(\lambda)}, \quad |S(\lambda)| = 1. \quad (11)$$

3. Асимптотика собственных чисел (4). Следуя [9–11], примем следующий асимптотический анзац для собственной функции задачи (1)–(3) при $\varepsilon > 0$ для фиксированного спектрального параметра (5):

$$u^\varepsilon(x) = Z(x) + \varepsilon^{A_+(\lambda)} K(\lambda) w_-^{re}(x) + \ldots \quad (12)$$

Здесь и далее многоточие заменяет младшие члены асимптотики, не существенные для предпринимаемого анализа. Благодаря множителю $\varepsilon^{A_+(\lambda)}$ с положительным показателем из (7) при иррегулярном члене w_-^{re} невязки в краевых условиях Дирихле (2) в точке $x = 1$ оказались малыми. Найдем условия, при которых подбор коэффициента $K(\lambda)$ позволит добиться малости невязок в краевых условиях Неймана в точке $x = \varepsilon > 0$. Подставив анзац (12) в два равенства (3), пренебрежем слагаемыми $o(\varepsilon^{3/2})$ и $o(\varepsilon^{5/2})$ соответственно, а затем исключим коэффициент $K(\lambda)$ из полученной системы двух линейных алгебраических уравнений и при учете формулы (11) для коэффициента $S(\lambda)$ в решении (10) получим соотношение

$$e^{2iA_-(\lambda)\ln\varepsilon} = T(\lambda), \tag{13}$$

где

$$T(\lambda) := \frac{(A_+(\lambda) - iA_-(\lambda))^2}{(A_+(\lambda) + iA_-(\lambda))^2} \times \\ \times \frac{3 + 2iA_-(\lambda)}{3 - 2iA_-(\lambda)} \frac{5 + 2iA_-(\lambda)}{5 - 2iA_-(\lambda)} \Rightarrow T(\lambda) = e^{2it(\lambda)}. \tag{14}$$

Итак, для тех (малых и положительных) значений параметра ε, при которых соблюдено равенство (13), отделенные члены асимптотики (12) удовлетворяют уравнению (1) и оставляют малые невязки в краевых условиях (2) и (3). Следовательно, общие результаты [13] теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве доказывают существование в $c(\lambda)\varepsilon^{A_+(\lambda)}$-окрестности точки λ собственного числа задачи (1)—(3) из последовательности (4).

4. Мигающие и планирующие собственные числа. Сначала зафиксируем спектральный параметр (5) и устремим размер ε к нулю. При учете формулы (14) получаем, что равенство (13) выполнено для бесконечно малой последовательности

$$\varepsilon_n = e^{-A_-(\lambda)^{-1}(\pi n - t(\lambda))}, \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}. \tag{15}$$

В результате обнаруживаем вблизи точки λ члены $\lambda_{N_n}^{\varepsilon_n}$ последовательностей (4) с $\varepsilon = \varepsilon_n$. Более того, благодаря понятной непрерывной зависимости спектра от переменной $\varepsilon > 0$ заключаем, что для почти периодической в логарифмическом масштабе бесконечно малой монотонной положительной последовательности $\{\varepsilon_n^\bullet\}_{n\in\mathbb{N}}$ с близкими к (15) членами произвольно выбранная точка $\lambda > \lambda_\dagger$ становится собственным числом задачи (1)—(3) с $\varepsilon = \varepsilon_n^\bullet$. Наконец, при $\varepsilon \in (\varepsilon_{n+1}^\bullet, \varepsilon_n^\bullet)$ точка λ выпадает из спектра σ_d^ε, а значит, ее можно охарактеризовать как “мигающее” собственное число семейства рассматриваемых задач.

Продифференцируем соотношение (13) по переменной ε и пренебрежем младшими асимптотическими членами. В итоге приходим к следующей упрощенной формуле для собственного числа λ_n^ε с зафиксированным номером $n \in \mathbb{N}$ в последовательности (4):

$$\frac{d\lambda_n^\varepsilon}{d\varepsilon} = \frac{R(\lambda_n^\varepsilon)}{\varepsilon|\ln\varepsilon|} + \ldots := \\ := \frac{1}{4}\left(1 - \frac{17}{4}(4 + \lambda_n^\varepsilon)^{-1/2}\right)\frac{1}{\varepsilon|\ln\varepsilon|} + \ldots \tag{16}$$

Итак, члены последовательности с большой скоростью $O(R(\lambda_n^\varepsilon)\varepsilon^{-1}|\ln\varepsilon|^{-1})$ ниспадают вдоль вещественной оси, но, поскольку $R(\lambda_\dagger) = 0$ (см. формулы (5) и (16)), их скорость уменьшается до нуля при $\lambda_n^\varepsilon \to \lambda_\dagger + 0$, т.е. они плавно “садятся” на точку отсечки непрерывного спектра. Подчеркнем, что на интервале $(0, \lambda_\dagger)$, свободном от дискретного спектра σ_d^0 задачи (1)—(3) при $\varepsilon = 0$, применима классическая теория возмущений самосопряженных операторов [13, гл. 9], и поэтому при малом $\varepsilon > 0$ пересечение $(0, \lambda_\dagger) \cap \sigma_d^\varepsilon$ пусто, т.е. $\lambda_1^\varepsilon \geq \lambda_\dagger$ в последовательности (4). Такое поведение — быстрое снижение и посадка с замедлением — свойственно планирующим летальным аппаратам, что и объясняет термин, вынесенный в заголовок раздела.

5. Концентрация спектра. Описанное поведение собственных чисел задачи (1)—(3) при $\varepsilon \to +0$ подразумевает насыщение спектром σ_d^ε любого конечного интервала выше точки отсечки $\lambda_\dagger$. Приведем асимптотические представления членов $\lambda_1^\varepsilon, \ldots, \lambda_{N^\varepsilon}^\varepsilon$ последовательности (4), расположенных в малой окрестности точки $\lambda_\dagger$. Отыскивая собственные числа λ_k^ε в виде $\lambda_\dagger + \mu_k^\varepsilon$, воспользуемся формулами (8), (14) и после несложных вычислений получим, что

$$\mu_k^\varepsilon = \pi^2 k^2 \left(\sqrt{\frac{2}{17}}|\ln\varepsilon| + t_0\right)^{-2} + \ldots, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

где $t_0 \in \mathbb{R}$ — легко вычисляемый, но не играющий существенной роли показатель из следующего представления величины (14):

$$T(\lambda_\dagger + \rho) = e^{2it(\lambda_\dagger + \rho)} = e^{2i\left(t_0\sqrt{\rho} + O(\rho)\right)}.$$

Подчеркнем, что соотношения (16) и (17) не вступают в противоречие, так как по определению $\Lambda(\lambda_\dagger + \mu_k^\varepsilon) = O(\mu_k^\varepsilon)$.

6. Выводы и замечания. Поскольку распространение волн вдоль пикообразного заострения с затупленным кончиком невозможно (непрерывного спектра нет), обнаруженный [1]

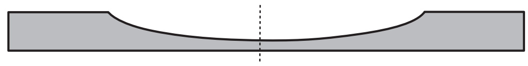

Рис. 2. Балка с глубокой выемкой. Штрихпунктирная линия отмечает плоскость симметрии.

эффект “черной дыры” реализуется по иному сценарию. Именно, в балке с близким к идеальному пиком (размер $\varepsilon > 0$ мал) выше точки отсечки $\lambda_\dagger$ наблюдается концентрация частот собственных колебаний, т.е. на “почти всех” частотах происходит захват упругой волны, а вовсе не ее пробег к вершине пика. Иными словами, за обсуждаемый эффект отвечают резонансные явления.

Феномен концентрации спектра сужающейся балки на рис. 1б не зависит от типа краевых условий в ее конце $x = \varepsilon$. Например, при замене условий Неймана (3) условиями Дирихле

$$u^\varepsilon(x) = 0, \quad \partial_x u^\varepsilon(x) = 0 \quad \text{при} \quad x = \varepsilon$$

полученные асимптотические формулы сохраняются в целом и только изменяются коэффициенты (14). Кроме того, постановка других групп краевых условий

$$u^\varepsilon(x) = 0, \quad H^\varepsilon(x)\partial_x^2 u^\varepsilon(x) = 0 \quad \text{или}$$
$$\partial_x u^\varepsilon(x) = 0, \quad \partial_x H^\varepsilon(x)\partial_x^2 u^\varepsilon(x) = 0 \text{ при } x = \varepsilon,$$

смешанных и допускающих соответственно нечетное или четное продолжение функции u^ε через точку $x = \varepsilon$, позволяют без особого труда вывести аналогичные изложенным выше результаты для балки с глубокой выемкой (рис. 2), приведенная толщина которой имеет вид

$$H^\varepsilon(x) = \min\left\{1, \varepsilon + \frac{x^2}{2}\right\}, \quad x \in [-1, 1].$$

Одномерная модель балки Кирхгофа переменной толщины не в состоянии предоставить все разнообразие аномалий строения спектра векторных задач теории упругости для пикообразных тел. Так, в трехмерных задачах помимо планирующих появляются малоподвижные собственные числа, порожденные точечным спектром предельной ($\varepsilon = 0$) задачи (см. [6]). В плоских и пространственных задачах непрерывный спектр приобретает две точки отсечки (см. статью [8]) и выше второй из них наблюдается хаотичное движение собственных чисел при $\varepsilon \to +0$ (“блуждание” дискретного спектра). Все эти явления описаны в публикациях [9–11], где сформулирован ранее неизвестный способ образования непрерывного спектра из дискретных спектров допредельных задач путем накопления собственных чисел около каждой точки на полуоси.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01003).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Миронов М.А.* Распространение изгибной волны в пластине, толщина которой плавно уменьшается до нуля на конечном интервале // Акустический журнал. 1988. Т. 34. № 3. С. 546–547.
2. *Krylov V.V.* New type of vibration dampers utilising the effect of acoustic “black holes” // Acta Acustica united with Acustica. 2004. V. 90. № 5. P. 830–837.
3. *Krylov V.V., Tilman F.J.B.S.* Acoustic “black holes” for flexural waves as effective vibration dampers // J. Sound Vibration. 2004. V. 274. P. 605–619.
4. *Миронов М.А.* Точные решения уравнений поперечных колебаний стержня со специальным законом изменения поперечного сечения // Акустический журнал. 2017. Т. 63. № 1. С. 3–8.
5. *Pelat A., Gautier F., Conlon S., Semperlotti F.* The acoustic black hole: A review of theory and applications // J. Sound and Vibration. 2020. V. 476. 115316.
6. *Назаров С.А.* О спектре задачи теории упругости для тела пикообразной формы // Сибирск. матем. журнал. 2008. Т. 49. № 5. С. 1105–1127.
7. *Kozlov V., Nazarov S.A.* On the spectrum of an elastic solid with cusps // Adv. Differential Equations. 2016. V. 21. № 9/10. P. 887–944.
8. *Kozlov V.A., Nazarov S.A.* Waves and radiation conditions in a cuspidal sharpening of elastic bodies // J. Elasticity. 2018. V. 132. P. 103–140.
9. *Назаров С.А.* “Блуждающие” собственные частоты двумерного упругого тела с обломанным пиком // Доклады РАН. 2017. Т. 477. № 2. С. 163–167.
10. *Назаров С.А.* Странное поведение частот собственных колебаний упругого тела с затупленным пиком // Прикладная матем. и механика. 2019. Т. 83. № 2. С. 265–281.
11. *Назаров С.А.* “Мигающие” и “планирующие” частоты собственных колебаний упругих тел с обломанным пикообразным заострением // Матем. сборник. 2019. Т. 210. № 11. С. 129–158.
12. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
13. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.

ON THE ESSENCE OF “BLACK HOLES” FOR ELASTIC WAVES IN SOLIDS WITH CUSPIDAL SHARPENINGS

S. A. Nazarov[a]

[a] *Saint-Petersburg State University, Saint Petersburg, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS N.F. Morozov

The effect of “black hole” for elastic waves discovered by V.A. Mironov and examined in detail by followers, is usually associated with propagation of elastic waves along the cuspidal sharpening of a solid, i.e., the cusp absorbs energy of elastic vibrations and does not return it to the massive part of the body. At the same time, an ideal cusp is not possible for creation and in real constructions its tip is blunted. Smoothing of the sharpening crucially changes the structure of the spectrum: the continuous component disappears but concentration of natural frequencies occurs in the med-frequency range. This note provides asymptotic formulas for eigenvalues of the Kirchhoff beam with thinning end and on their basis describes a new, effectual, mechanism of action of the “black hole” where the propagation of waves becomes impossible but trapping of wave occurs at “almost all” frequencies inside a wide range of the spectrum. Improvement of cusp’s quality leads to strengthening of concentration of eigenvalues and enlarging of its zone.

Keywords: “black holes” for elastic waves, blunted cuspidal sharpening, concentration of eigenfrequencies, trapping waves, asymptotics

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 498, с. 62–66

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 534.34; 534.231.1

ЛИНИИ РАВНЫХ ФАЗ ЗВУКОВОГО ДАВЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕННО-ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ ГИДРОАКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

© 2021 г. Г. Н. Кузнецов[1,]*, А. Н. Степанов[1,2]

Представлено академиком РАН И.А. Щербаковым 02.03.2021 г.
Поступило 02.03.2021 г.
После доработки 02.03.2021 г.
Принято к публикации 10.03.2021 г.

Впервые показано существование линий равных фаз в пространственно-частотной области и получено дифференциальное уравнение для их расчета применительно к комплексным спектрам звуковых сигналов в волноводе. Показано, что такие линии связаны с фазовым инвариантом, аналогичным известному интерференционному инварианту Чупрова, но имеющему иной физический смысл: они рассчитываются на фазовой плоскости, а не с использованием поля интенсивности. Эти линии постоянной фазы устойчивы, слабо зависят от условий распространения сигналов и позволяют выполнять оптимизированную обработку слабых сигналов для их обнаружения на фоне помех.

Ключевые слова: частотно-пространственная фазовая область, дифференциальное уравнение для расчета линий равной фазы, помехоустойчивая обработка в волноводе

DOI: 10.31857/S2686740021030111

В регулярных волноводах любой физической природы наблюдается интерференция сигналов, пришедших по разным лучам или модам. Конструктивная интерференционная структура формируется при движении источника или приемника и когерентном суммировании сигналов, распространяющихся в воздушных или водных волноводах. Наиболее рельефно проявляется интерференция при распространении в волноводах широкополосных сигналов – в этом случае в частотно-пространственной области образуются "гребни", представляющие собой зоны интерференционных максимумов, расположенные на поле интенсивности в виде веерных структур (рис. 1а) [1, 2]. Характерной особенностью этих структур является их предсказуемость (описание с использованием инвариантов) и робастность (устойчивость к вариации условий распространения и координат) [1, 2].

К настоящему времени сформировался большой класс практически важных задач, которые решаются с опорой на экспериментально и теоретически обоснованную устойчивость пространственно-частотной интерференционной структуры акустических полей в широкой полосе частот и расстояний. Теоретически и экспериментально показано, что накопление мощности сигнала вдоль линий гребней интерференционной структуры может быть использовано для повышения эффективности обнаружения слабых сигналов, оценки расстояния и радиальной компоненты скорости движения [3, 4]. Отметим, что теоретические построения, описывающие свойства обсуждаемой интерференционной структуры, основаны на анализе поля интенсивности широкополосных или тональных сигналов, в которых, как известно, фазовая информация отсутствует. Вместе с тем естественно предположить, что эффективное накопление мощности сигнала в процессе его обработки можно было бы осуществить, используя для этого линии равных фаз поля звукового давления, вычисленные на фазовой плоскости. В случае существования таких "особых линий" окажется возможным дополнительное и эффективное накопление мощности слабых сигналов совместно с алгоритмами, предложенными и исследованными в [3, 4]. Такая обработка может способствовать повышению помехоустойчивости обнаружения и оценки параметров слабых сигна-

[1] *Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук, Москва, Россия*
[2] *Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия*
**E-mail: skbmortex@mail.ru*

лов, поскольку в поле гидроакустических помех такие закономерности отсутствуют.

Рассмотрим в общем виде эту задачу в трехмерном пространстве (ω, r, φ), где ω – частота источника, r – расстояние до источника, φ – интегральная фаза давления. На линиях равных фаз $\varphi(\omega, r) = \text{const}$, выбранных на этой поверхности, полный дифференциал должен быть равен нулю, откуда может быть получено обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, решением которого являются функции $\varphi(\omega, r)$. Задавая некоторое начальное условие для t_0, в любом волноводе в водной или воздушной среде можно поставить задачу Коши для выделения конкретных линий, на которых фазы постоянные, например, кратны π: $\varphi_1(r_1, \omega_1) = n\pi$. Решим этим путем задачу применительно к волноводу Пекериса, в котором на достаточно больших расстояниях поле звукового давления P может быть описано известным выражением [2]:

$$P(\omega, r, z_0, z, t) = \frac{\omega\rho_0}{h}\sqrt{\frac{8\pi}{kr}}\sum_{l=1}^{N} p_l \exp\left[i\varphi_l(\omega, r)\right], \quad (1)$$

где z_0 и z – глубины источника и приемника соответственно, ρ_0 – плотность воды, h – толщина волновода, N – количество нормальных волн, $p_l = \sin\left(\frac{l\pi z_0}{H}\right)\sin\left(\frac{l\pi z}{H}\right)$, $l = 1, 2, \ldots, N$ – коэффициенты их возбуждения, $H = h + \frac{m}{k\nu_0}$ – эффективная толщина волновода, $m = \frac{\rho_1}{\rho_0}$, ρ_1 – плотность среды, $\nu_0^2 = 1 - n_0^2$, $n_0 = \frac{c_0}{c_1} < 1$, c_1 – скорость звука в подстилающем полупространстве, $\varphi_l(\omega, r) = k_l r - \omega t - \frac{\pi}{4}$ – фаза и $k_l = k\cos\left(\frac{\pi l}{kH}\right)$ – волновое число l-й нормальной волны. В этих соотношениях частоту ω и расстояние r будем считать аргументами, а время t – параметром. Выделим в выражении для давления

$$P(\omega, r) = |P(\omega, r)|\exp[i\varphi(\omega, r)]$$

вещественную и мнимую части:

$$\operatorname{Re} P(\omega, r) = \frac{\omega\rho_0}{h}\sqrt{\frac{8\pi}{kr}}\sum_{l=1}^{N} p_l \cos\left[\varphi_l(\omega, r)\right],$$
$$\operatorname{Im} P(\omega, r) = \frac{\omega\rho_0}{h}\sqrt{\frac{8\pi}{kr}}\sum_{l=1}^{N} p_l \sin\left[\varphi_l(\omega, r)\right] \quad (2)$$

(здесь и далее глубины z_0, z и время t в обозначениях функций для краткости опускаются). Отсюда находим фазу звукового давления:

$$\varphi(\omega, r) = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im} P(\omega, r)}{\operatorname{Re} P(\omega, r)} = \operatorname{arctg}\frac{A(\omega, r)}{B(\omega, r)},$$

где

$$A(\omega, r) = \sum_{l=1}^{N} p_l \sin[\varphi_l(\omega, r)],$$
$$B(\omega, r) = \sum_{l=1}^{N} p_l \cos[\varphi_l(\omega, r)].$$

Выпишем полный дифференциал функции $\varphi(\omega, r)$ и, приравняв его к нулю, получим уравнение для описания линии равных фаз в рассматриваемом волноводе:

$$\frac{dr}{d\omega} = -\frac{A_\omega(\omega, r)B(\omega, r) - B_\omega(\omega, r)A(\omega, r)}{A_r(\omega, r)B(\omega, r) - B_r(\omega, r)A(\omega, r)}, \quad (3)$$

где $A_\omega(\omega, r)$, $A_r(\omega, r)$, $B_\omega(\omega, r)$ и $B_r(\omega, r)$ – частные производные по соответствующим аргументам ω и r. Вычисляя все эти производные, будем считать, что рассматривается частотная область, в пределах которой изменение количества нормальных волн N невелико и вкладом от такого изменения можно пренебречь. Подставляя их в (3), получим окончательный вид дифференциального уравнения, описывающего линии равных фаз давления в рассматриваемом волноводе:

$$\frac{dr}{d\omega} = -\frac{[r(1 + \pi hC/kH^2) + tc_0 D]}{\omega} = \frac{(\beta_\varphi r - tc_0 D)}{\omega}, \quad (4)$$

где $C = \frac{S_1}{S}$, $D = \frac{S_2}{S}$,

$$S = \sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} p_l p_m \cos\frac{m\pi}{kH}\cos(\varphi_l - \varphi_m),$$
$$S_2 = \sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} p_l p_m \cos(\varphi_l - \varphi_m),$$
$$S_1 = \sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} m p_l p_m \sin\frac{m\pi}{kH}\cos(\varphi_l - \varphi_m).$$

Дополнительный анализ и вычислительные эксперименты показывают, что параметр β_φ из уравнения (4) в достаточно широких пределах не зависит от расстояния r и частоты ω. Аналогичным свойством обладает и параметр D этого же уравнения, что дает возможность преобразовать (4):

$$\frac{dr}{d\omega} = \frac{\beta_\varphi(r - At)}{\omega},$$

где $A = \frac{Dc}{\beta_\varphi}$ – практически не зависящий от частоты и расстояния параметр. Следовательно, после замены переменной $r' = r - At$ уравнение (4) принимает вид $\frac{dr'}{d\omega} = \frac{\beta_\varphi r'}{\omega}$. Выполненная замена переменной фактически представляет собой происходящий во времени параллельный перенос вдоль оси расстояний всей совокупности линий равных фаз и, следовательно, всей структуры фазового поля в целом. Очевидно, что такой перенос эквивалентен движению в указанном направлении источника или приемника со скоростью, определяемой параметром A.

Заметим, что в [1–4] используется полностью аналогичное дифференциальное уравнение вида $\frac{dr}{d\omega} = \frac{\beta r}{\omega}$, которым в пространственно-частотной области поля интенсивности описываются линии “гребней”. При этом во многих практически важных случаях коэффициент β оказывается близок к “+1”, в связи с чем его принято называть интерференционным инвариантом [1–4]. Вид решений уравнения (4) существенно зависит от знака параметра β_φ, который подобен инварианту β, но отличается количественно и по физическому смыслу: $\beta_\varphi = -\left[1 + \frac{\pi h C}{kH^2}\right]$. Если рассматривать волновод, частоты и расстояния, при которых $1 + \frac{\pi h C}{kH^2} > 0$, то решениями уравнения (4) являются функции вида $r(\omega) = \frac{a}{\omega^{|\beta_\varphi|}}$, и линии равных фаз оказываются подобны гиперболам. С физической точки зрения гиперболическая зависимость расстояния r от частоты ω на линиях равных фаз в волноводе Пекериса и в других реальных звуковых волноводах, как и в неограниченном пространстве, обосновывается тем, что в общем случае для достижения заданного значения интегральной фазы на бо́льшей частоте колебанию требуется меньшее расстояние, а для меньшей частоты – бо́льшее расстояние. Можно предположить, что такие зависимости будут обнаружены и в электромагнитных волноводах.

На рис. 1 приведены контурные графики, отображающие существенное отличие веерной структуры поля интенсивности (а) от структуры поля фазы (б) звукового давления в частотно-пространственной области. Расчеты выполнены в волноводе глубиной 200 м с параметрами дна $m = 2.7$ и $n_0 = 0.83$, скорости звука в воде 1500 м/с. Источник находится на глубине 20 м, прием осуществляется на глубине 100 м. Расчеты выполнены для диапазона частот 5–40 Гц и расстояний от 100–40 000 м. Видно, что линии равных фаз близки к гиперболам (рис. 1б), но на этих линиях присутствуют резкие скачки фазы, обусловленные наличием в волноводе полюсов – зон дислокации фаз, которые формируются в зонах интерференционных минимумов амплитуды давления. В этих зонах резко уменьшается отношение сигнал/помеха и, как показывают расчеты и эксперименты, формируются скачки фаз в вертикальной и горизонтальной плоскости [5]. Возникают разрывы монотонной зависимости $\varphi(\omega, r)$. В качестве примера, более подробно иллюстрирующего выполненный

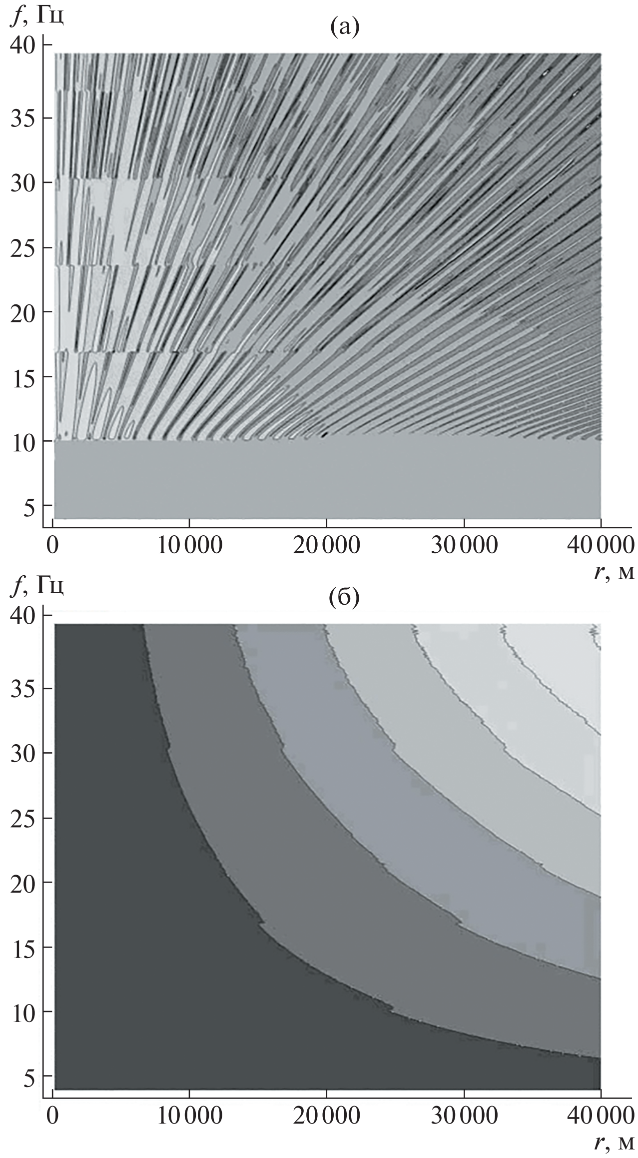

Рис. 1. Контурные графики полей интенсивности фаз давления в частотно-пространственной области.

анализ в описанном выше волноводе Пекериса, в диапазоне частот 100–120 Гц и на расстояниях 1000–2000 м выполнены расчеты фактической (численной) линий гребня и равных фаз, а также рассчитанной по уравнению (4) теоретической линии равных фаз. На рис. 2а представлены: выходящие из одной из точек локального максимума на частоте 100 Гц фактическая линия гребня (*1*), а также привязанные к этой точке начальным условием фактическая (*2*) и теоретическая (*3*) линии равных фаз.

Из совпадения кривых *2* и *3* следует, что уравнение (4) достаточно точно описывает линии равных фаз, поэтому это уравнение может быть использовано для прогноза таких линий в реальных ситуациях, в том числе, при анализе экспериментальных результатов.

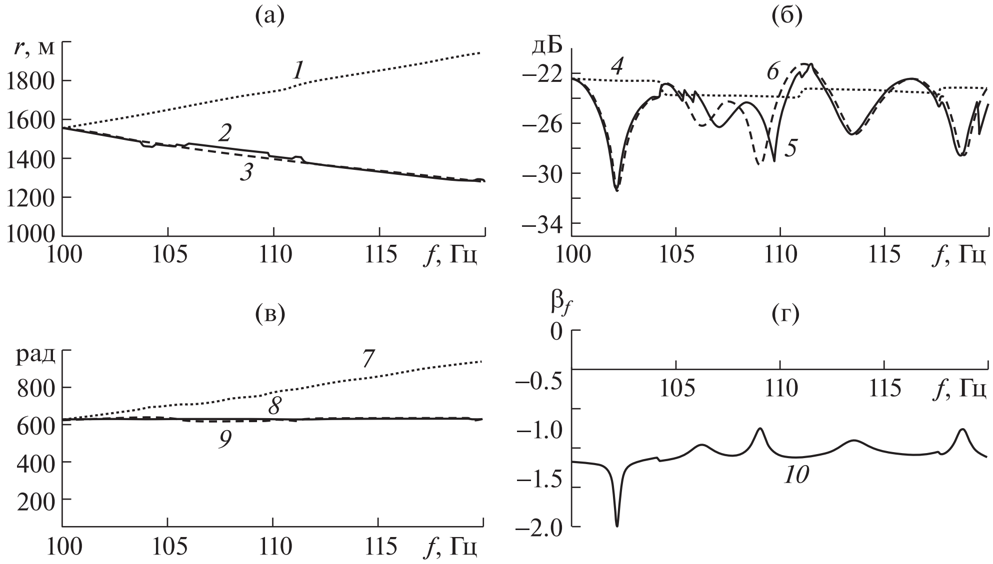

Рис. 2. Зависимости от частоты: линии гребня (*1*), фактической (*2*) и теоретической (*3*) линий равных фаз; амплитуды давления вдоль гребня (*4*, *б*) и вдоль фактической (5) и теоретической (6) линий равных фаз; фазы давления вдоль гребня (*7*) и вдоль теоретической (*8*) и фактической (*9*) линий равных фаз. Кривая *10* – зависимость от частоты β_φ (фазового инварианта).

Далее на обсуждаемых линиях для тех же частот были рассчитаны амплитуды (рис. 2б) и фазы (рис. 2в) звукового давления. На рис. 2б видно, что линия равных фаз может пересекать несколько соседних гребней и амплитуда давления на ней может быть близкой, меньше, а на отдельных участках даже больше (кривые *5*, *6*), чем амплитуда на линии гребня (кривая *4*). Фаза давления на линии гребня (кривая *7*) в соответствии с теоретическими представлениями не постоянная, а растет с некоторым градиентом. Фазы на линии равных фаз (кривые *8*, *9*) постоянные – они параллельны оси абсцисс. Зависимость фазового инварианта β_φ от частоты (кривая *10*) в среднем близка к “–1” и достаточно резко изменяется в зонах дислокаций – зонах с большими градиентами фазы. Расчеты, выполненные при различных условиях, показали стабильность инварианта β_φ. Таким образом, впервые установлено существование линий равных фаз и инварианта на фазовой плоскости, подобного интерференционному инварианту Чупрова, ранее полученному для описания полей интенсивности. Расчеты, выполненные для волноводов с различными параметрами, на различных частотах и расстояниях показали, что параметр β_φ из уравнения (4), так же как и параметр β, достаточно устойчив к вариации свойств среды и глубинам z и z_0. Это позволяет по аналогии с интерференционным инвариантом рассматривать β_φ как своеобразный фазовый инвариант. Вместе с тем инвариант Чупрова для поля интенсивности (будем его называть “энергетический инвариант”) для волновода Пекериса близок к “+1”, в то время как фазовый инвариант, построенный на фазовой плоскости, близок к “–1”.

Существование устойчивого фазового инварианта позволяет прогнозировать направления, по которым на фазовой плоскости возможны формирование линий постоянных фаз и сканирование с целью когерентного суммирования комплексных фурье-компонент. Как следствие, должно происходить увеличение отношения сигнал/помеха. Следует отметить, что в отличие от свободного пространства, где сканирование и накопление мощности возможны без ограничений – во всей рабочей полосе и во всем выбранном интервале расстояний – для волновода Пекериса зоны накопления мощности ограничены интервалами $\Delta\varphi(\omega, r)$ между двумя соседними дислокациями, так как в этих зонах монотонная зависимость $\varphi(\omega, r) = \text{const}$ прерывается, а фаза теряется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чупров С.Д.* Акустика океана: современное состояние. М.: Наука, 1982. С. 71–91.
2. *Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. М.: Наука, 2007.
3. *Kuznetsov G.N., Kuz'kin V.M., Pereselkov S.A.* Estimation of the velocity of underwater objects in the passive mode using frequency-shift data // Phys. Wave Phenom. 2014. V. 22. № 4. P. 306–311.
4. *Pereselkov S.A., Kuz'kin V.M., Kuznetsov G.N.* Acoustic interferometry in problems of the passive localization of sound sources, underwater communications, and the monitoring of oceanic inhomogeneities // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2020. V. 84. P. 648–652.
5. *Белова Н.И., Кузнецов Г.Н., Степанов А.Н.* Экспериментальное исследование интерференционной и фазовой структуры потока мощности от локальных источников в мелком море // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 3. С. 318–329.

LINES OF EQUAL PHASES OF SOUND PRESSURE IN THE SPACE-FREQUENCY DOMAIN OF THE HYDRO-ACOUSTIC FIELD

G. N. Kuznetsov[a] **and A. N. Stepanov**[a,b]

[a] *Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[b] *Korolev Samara State Aerospace University, Samara, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS I.A. Scherbakov

The existence of lines of equal phases in the space-frequency domain is shown for the first time, and a differential equation is obtained for their calculation in relation to the complex spectra of sound signals in a waveguide. It is shown that such lines are connected with a phase invariant similar to the well-known Chuprov interference invariant, but having a different physical meaning: they are calculated on the phase plane, and not using the intensity field. These constant-phase lines are stable, weakly dependent on signal propagation conditions, and allow optimized processing of weak signals to detect them against the background of interference.

Keywords: space-frequency phase domain, differential equation for calculating lines of equal phase, noise-proof processing in the waveguide

ДОКЛАДЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. ФИЗИКА, ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ, 2021, том 498, с. 67–72

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 534.222

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИАГНОСТИКА, АКУСТИЧЕСКОЕ ВЗВЕШИВАНИЕ, МОЛОТОЧЕК АНДРЕЕВА И ЗОНДОВЫЕ МИКРОСКОПЫ

Академик РАН О. В. Руденко[1,2,3,*]

Поступило 29.03.2021 г.
После доработки 29.03.2021 г.
Принято к публикации 31.03.2021 г.

Описан способ диагностики, базирующийся на “акустическом взвешивании” листовых материалов. Масса дефекта или дефицит массы определяют сдвиг частоты колеблющейся мембраны. Описан измерительный прибор академика Н.Н. Андреева, изобретенный им в 1925 г. и основанный на эффекте “дребезжания” за счет “подпрыгивания” небольшого груза, лежащего на телефонной мембране. Рассчитаны гармоники, появляющиеся при достаточно больших амплитудах колебаний. Показано, что гармоники могут возникать и при работе современных высокоточных приборов, например, туннельного и атомно-силового микроскопов.

Ключевые слова: мембрана, дефект, гармоники, бесконтактная диагностика, нелинейность, молоточек Андреева, зондовый микроскоп

DOI: 10.31857/S2686740021030135

Нелинейные методы акустической диагностики сегодня нашли широкое применение в промышленности, медицине, геофизике. Важное значение в последние годы приобретает изучение структуры метаматериалов, создаваемых искусственно. Описание заметных этапов развития этого направления и соответствующая литература даны в обзорах [1–3]. Здесь обсуждается еще один метод, основанный на эффекте генерации высших гармоник основной частоты колебаний листовых материалов при появлении на их поверхности свободно лежащего инородного микрообъекта.

Производство многих листовых материалов основано на непрерывном технологическом процессе. Примерами могут служить отливка бумажного полотна (см. рис. 1), прокат металлической фольги, формирование полимерных пленок и некоторых композитных структур. Движение материала в процессе его изготовления требует бесконтактных методов возбуждения и приема акустических волн, используемых для диагностики. Кроме того, бесконтактная диагностика необходима в условиях высоких температур или агрессивных сред, где контакт невозможен; она весьма желательна также при сканировании больших площадей, когда за короткое время требуется обнаружить небольшой дефект.

Несовершенства листовых материалов разнообразны. Они могут представлять собой участки с толщиной листа, меньшей или большей стандартной (наперед заданной). Внутри материала могут возникать полости, трещины, зоны пониженной прочности. Для композитных упаковочных материалов, используемых в пищевой инду-

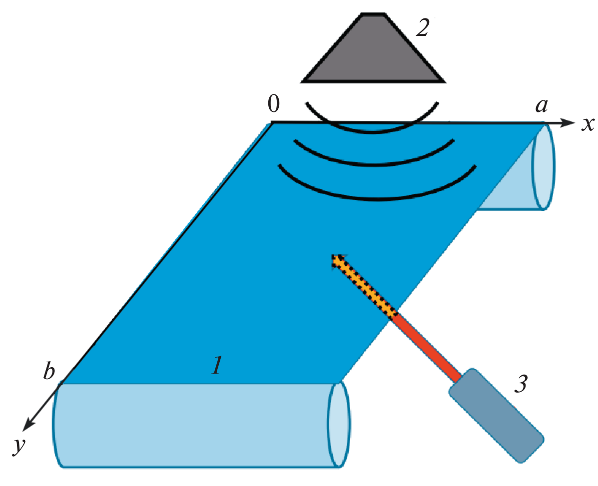

Рис. 1. Схема бесконтактной диагностики; *1* – листовой материал, *2* – источник звука, возбуждающий колебания, *3* – регистратор малых смещений.

[1]*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук, Москва, Россия*
[3] *Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта Российской академии наук, Москва, Россия*
**E-mail: rudenko@acs366.phys.msu.ru*

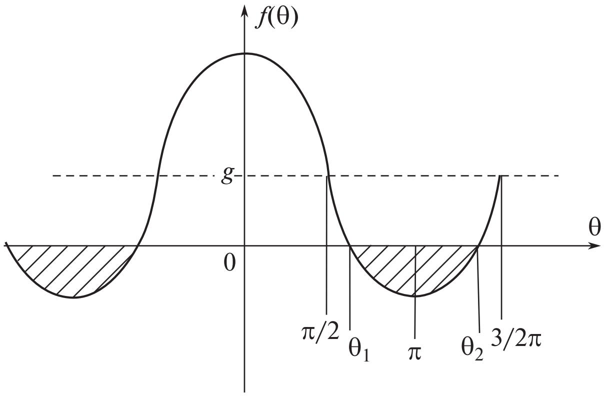

Рис. 2. Ускорение частицы на мембране. Контакт отсутствует в пределах временных интервалов, отмеченных штриховкой.

стрии (содержащих, например, слои водоотталкивающего картона, полиэтилена, алюминиевой фольги), важной проблемой является обнаружение участков непроклея и повреждений слоев на сгибах, нарушающих герметичность и приводящих к порче продуктов в результате ферментации.

Одна из возможных схем установки для бесконтактной диагностики приведена на рис. 2 в работе [4]. Там, как и на нашем рис. 1, листовой материал (например, движущееся бумажное полотно) помещен между зажимами растягивающего устройства. Статическое нагружение тонких листов придает им упругие свойства и позволяет совершать колебания подобно мембранам. Для ряда листовых материалов требуется учитывать их собственную упругость. Возбуждение колебаний может производиться, например, громкоговорителем, а прием — лазерным виброметром. Движущийся материал обычно растягивается вращающимися валиками, которые приводят ленту в движение.

СДВИГ ЧАСТОТЫ ПРИ НАЛИЧИИ ДЕФЕКТА

Колебания натянутой мембраны, обладающей собственной упругостью, описываются уравнением [5]

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - c^2 \Delta s + d^2 \Delta\Delta s = -\frac{p(x,y,t)}{\rho h}. \qquad (1)$$

Здесь $s(t,x,y)$ — смещение поверхности мембраны по нормали к плоскости (xy), совпадающей с ее равновесным положением (т.е. вдоль оси z), Δ — двумерный оператор Лапласа, c — скорость распространения изгибных волн при отсутствии собственной упругости материала, p — внешнее давление на поверхность мембраны. При этом [5]

$$c^2 = \frac{T}{\rho h}, \quad d^2 = \frac{Eh^2}{12\rho(1-\sigma^2)}. \qquad (2)$$

Константы имеют следующий смысл: T — сила натяжения на единицу длины края, ρ, E, σ, h — плотность, модуль Юнга, коэффициент Пуассона материала и толщина мембраны. Форма — прямоугольник со сторонами a и b.

Рассмотрим вначале колебания однородной ненагруженной мембраны, полагая правую часть уравнения (1) равной нулю. В соответствии с рис. 1 считаем границы $y = 0$, $y = b$ закрепленными, а $x = 0$, $x = a$ — свободными. Для малого вклада собственной упругости по сравнению с упругостью натяжения решение (1) можно представить в виде суммы “мембранных” мод:

$$s = \sum_{m,n=0}^{\infty} s_{mn} = \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{mn} \cos\left(m\pi\frac{x}{a}\right)\sin\left(n\pi\frac{y}{b}\right)\sin(\omega_{mn}t). \qquad (3)$$

Подставляя (3) в (1), найдем приближенные значения собственных частот:

$$\omega_{mn} = c\left[\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2\right]^{1/2} \times \left\{1 + \frac{d^2}{2c^2}\left[\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2\right]\right\}. \qquad (4)$$

Выражение (4) справедливо, когда второй член в фигурных скобках мал по сравнению с единицей. Используя формулы (2), запишем указанное условие в следующем виде:

$$\mu = \frac{\pi^2}{24}\frac{Eh^3}{(1-\sigma^2)Ta^2} \ll 1. \qquad (5)$$

Для алюминиевой фольги, например, имеем оценку $\mu \approx 3\times 10^{10} h^3/Fa$. Отсюда следует, что для фольги шириной $a = 0.1$ м, нагруженной силой $F = 10$ Н, условие (5) хорошо выполняется при толщине фольги $h = 0.1$ мм, но нарушается уже при толщине $h = 0.25$ мм. Итак, собственная упругость приводит к смещению частоты моды вверх по спектру. При этом относительная величина смещения равна

$$\frac{\omega_{mn} - \Omega_{mn}}{\Omega_{mn}} = \frac{d^2}{2c^4}\Omega_{mn}^2 \sim \mu, \quad \Omega_{mn} = c\left[\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2\right]^{1/2}. \qquad (6)$$

Сдвиг частоты (6) может измениться из-за деградации упругих свойств материала (например, при накоплении усталостных микродефектов), а также при наличии трещин или локальном изменении плотности или толщины листа.

Пусть к листу прикреплена масса m', размер которой мал по сравнению с характерной длиной изгибной волны. Масса колеблется по закону

$$m'\frac{d^2 s_1}{dt^2} = -S\,p(x,y,t). \quad (7)$$

Если при колебаниях масса от мембраны не отрывается, то $s_1 = s$. В свою очередь, масса давит на мембрану, в результате чего правая часть уравнения (1) примет вид

$$-\frac{m'}{\rho h S}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}\delta\left(\frac{x-x_0}{l_1}\right)\delta\left(\frac{y-y_0}{l_2}\right). \quad (8)$$

Здесь $S = l_1 l_2$ – площадь контакта; в силу ее малости распределение давления по мембране аппроксимировано дельта-функциями (8).

Подставляя формулу (8) в уравнение (1), найдем выражения для собственных частот:

$$\omega_{mn}^2 = \Omega_{mn}^2 \frac{1+\dfrac{d^2}{c^4}\Omega_{mn}^2}{1+2\beta_m\dfrac{m'}{M}\cos^2\left(\pi m\dfrac{x_0}{a}\right)\sin^2\left(\pi n\dfrac{y_0}{b}\right)}, \quad (9)$$

где $M = \rho hab$ – масса мембраны, $\beta_0 = 1$, $\beta_m = 2$ ($m > 1$). Видно, что локальная нагрузка смещает собственную частоту вниз. Смещение определяется отношением масс груза и мембраны m'/M. Это смещение проявляется лишь в том случае, если возбуждается мода, имеющая пучность в окрестности точки x_0, y_0 нахождения нагрузки. Очевидно, что грузик, находящийся в узле, частоту моды не смещает.

Измерение сдвига частоты проведено в работе [6]. Лента ($a = 3$ см, $b = 55$ см) тонкого ($h = 0.1$ мм) картона закреплялась в испытательной машине. Подавалось растягивающее усилие 16 Н. Лента возбуждалась на основной моде $m = 0$, $n = 1$. В качестве нагрузки использовался набор полосок из того же картона, которые последовательно приклеивались в середине ленты $y = b/2$ – там, где данная мода имеет пучность. Кривая зависимости сдвига частоты от m'/M хорошо соответствовала теории.

Аналогичным образом измеряется сдвиг частоты, отвечающий локальному дефициту массы (m' отрицательно). Сдвиг вызывается наличием внутренней полости или трещины в материале. Результаты соответствующих измерений описаны в работе [4].

Для упрощения последующих формул мы будем считать, что возбуждается мода, имеющая пучность в месте нахождения дефекта и опускать соответствующие индексы.

Рассмотрим дефект, поведение которого моделируется уравнением гармонического осциллятора:

$$m'\frac{d^2 s_1}{dt^2} + \eta\frac{ds_1}{dt} = -k(s_1 - s). \quad (10)$$

Здесь s_1 – смещение дефекта, s – смещение мембраны, k – коэффициент упругой связи дефекта с мембраной. Примером такого дефекта может служить слабо склеенный участок тяжелого слоя, находящегося внутри композита или на поверхности; очевидно, его смещение s_1 отличается от смещения s. Определяя из уравнения (10) силу, действующую локально на мембрану при гармонических колебаниях, можно найти соотношение, определяющее частоту:

$$\omega^2\left(1+2\beta\frac{m'}{M}\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2+i2\delta\omega}\right) = \Omega^2\left(1+\frac{d^2}{c^4}\Omega^2\right). \quad (11)$$

Здесь $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m'}$ – квадрат собственной частоты колебаний дефекта, $\delta = \dfrac{\eta}{2m'}$ – коэффициент затухания. Из формулы (11) следует, что при большой собственной частоте дефекта ω_0 частота колебаний мембраны ω сдвигается вниз по спектру. Если же дефект “мягкий”, сдвиг происходит в высокочастотную область.

АНГАРМОНИЗМ ПРИ ПОЯВЛЕНИИ СВОБОДНОГО ДЕФЕКТА

Рассмотрим теперь нелинейное поведение дефекта. Простейшим примером может служить движение частицы массой m', свободно лежащей на горизонтальной мембране и прижатой к ней силой тяжести. При малых амплитудах колебаний частица будет двигаться вместе с мембраной. Однако при больших амплитудах, когда колебательное ускорение превысит величину ускорения силы тяжести, частица отсоединится от мембраны и будет двигаться свободно в течение какой-то части периода. Затем частица вновь столкнется с мембраной и движение опять будет совместным.

Уравнение движения для такого дефекта будет иметь вид

$$m'\frac{d^2 s_1}{dt^2} = -m'g + Sp. \quad (12)$$

Здесь p – давление на грузик со стороны мембраны. При движении мембраны по гармоническому закону $s_1 = s_0\cos\omega t$ на нее со стороны грузика действует сила

$$F = -Sp = m'(g + s_0\omega^2\cos\omega t) = m'f(\theta = \omega t). \quad (13)$$

Функция $f(\theta)$ изображена на рис. 2. Когда амплитуда колебаний s_0 мембраны (при фиксиро-

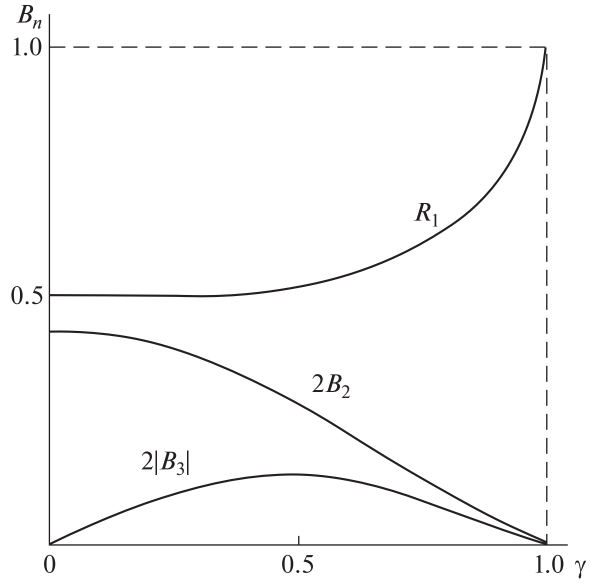

Рис. 3. Амплитуды гармоник в спектре ускорения частиц на колеблющейся мембране.

ванной частоте) возрастет настолько, что в некоторые промежутки времени функция $f(\theta)$ будет принимать отрицательные значения (на рис. 2 эти области заштрихованы), масса m' начнет “подпрыгивать”.

Описанное явление лежит в основе чувствительного метода измерения амплитуды колебаний телефонной мембраны и соответствующего прибора, известного как “молоточек Андреева” [7]. Он был создан родоначальником отечественной акустики Н.Н. Андреевым еще в 1925 г. [8]. Очень ясное описание “молоточка”, данное Л.И. Мандельштамом, полезно как с познавательной, так и с исторической точки зрения, поэтому целесообразно его процитировать (см. [7]):

“Будем постепенно увеличивать амплитуду колебаний мембраны. Пока она мала, грузик будет двигаться вместе с мембраной. Когда амплитуда возрастет настолько, что будет выполнено условие $s_0 \geq \frac{g}{\omega^2}$, масса начнет подпрыгивать. Если на телефонной мембране лежит шарик, то при малых токах все будет спокойно, но в определенный момент начнется дребезжание. Определив момент начала дребезжания, можно, зная ω, вычислить s_0. Например, при частоте 200 Гц дребезжание начнется при амплитуде смещения 0.006 мм. Получается очень чувствительный метод измерения амплитуды. ...Что здесь поучительно? Большая чувствительность достигается благодаря тому, что при колебательных процессах ускорение чрезвычайно быстро растет с частотой. ...При больших частотах это ведет к колоссальным ускорениям, даже при ничтожных смещениях. Например, пьезокварцевая пластинка колеблется с амплитудой смещения всего лишь 10^{-6} см, но с частотой 10^6 Гц. Получается максимальное ускорение $4 \times 10^4\, g$”.

Подобные колебания, сопровождающиеся соударениями [9] с препятствиями либо в присутствии ограничений (голономных связей) [10], относят к сильно нелинейным колебаниям.

Помимо акустической регистрации “дребезжания”, для обнаружения малой частицы полезно измерять амплитуды высших гармоник, которые неизбежно возникнут из-за ангармонического поведения функции $f(\theta)$ при больших амплитудах колебаний.

Пусть смещение происходит по гармоническому закону $s = s_0 \sin\theta$. Тогда в пределах одного периода, как видно из рис. 2, следует принять

$$\begin{aligned} f &= g + s_0\omega^2\cos\theta, \quad |\theta| < \theta_1; \\ f &= 0, \quad \theta_1 < |\theta| < \theta_2. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь обозначено

$$\theta_1 = \pi - \varphi, \quad \theta_2 = \pi + \varphi, \\ \varphi = \arccos\gamma, \quad \gamma = \frac{g}{s_0\omega^2}. \tag{15}$$

Разложение функции (14) в ряд по гармоникам имеет вид

$$f = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta, \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} A_n &= -\frac{2g}{\pi n}(-1)^n \sin n\varphi + \frac{s_0\omega^2}{\pi}(-1)^n \times \\ &\times \left[\frac{\sin(n+1)\varphi}{(n+1)} + \frac{\sin(n-1)\varphi}{(n-1)}\right]. \end{aligned} \tag{17}$$

В частности, для безразмерных амплитуд $B_n = \frac{A_n}{s_0\omega^2}$ гармоник с номерами $n = 1, 2, 3$ из общей формулы (17) получаем

$$B_1 = 1 - \frac{1}{\pi}\arccos\gamma + \frac{\gamma}{\pi}\sqrt{1-\gamma^2}, \\ B_2 = \frac{2}{3\pi}(1-\gamma^2)^{3/2}, \quad B_3 = -\frac{2}{3\pi}\gamma(1-\gamma^2)^{3/2}. \tag{18}$$

Выражения (17), (18) справедливы при $0 < \gamma < 1$. Модули безразмерных амплитуд (18) как функции параметра γ изображены на рис. 3.

Описанный расчет гармоник соответствует сильно упрощенной ситуации. Масса m' после отрыва от мембраны в реальных условиях начинает свободно двигаться в поле силы тяжести и приобретает некоторую скорость. Эта скорость, как и координата, не будут совпадать со скоростью и координатой мембраны в момент их следующей встречи. Нужно учитывать также характер соударения массы m' с мембраной, которое может быть как упругим, так и неупругим.

В учебном пособии [11] подробно рассмотрены упругие столкновения шарика поочередно с двумя параллельными стенками, одна из которых покоится, а вторая колеблется (задача 26, с. 494–496). Изменения скорости шарика после отскоков и промежутки времени между соударениями описываются точечным отображением Улама. В результате многих отскоков движение шарика может стать случайным, а его средняя скорость будет расти до некоторого максимального значения. Аналогичный механизм стохастического ускорения космических частиц (за счет множественных столкновений заряженных частиц с магнитными облаками) предложил Э. Ферми.

Применительно к “молоточку Андреева” это означает, что отскакивающий от мембраны упругий шарик (при больших амплитудах ее колебаний) будет в среднем подниматься все выше, достигая некоторого максимума.

Появление гармоник в присутствии нелинейных контактов [2] происходит не только в приборах типа “молоточка Андреева”, но и в таких современных высокоточных приборах, как зондовые микроскопы [12]. В туннельном микроскопе (за его изобретение присуждена Нобелевская премия по физике [13, 14]) измеряется ток, протекающий между металлическим зондом и проводящим образцом. Ток, возникающий в результате туннелирования электронов через узкий потенциальный барьер, сильно (экспоненциально) зависит от его ширины: $I = I_0 \exp(-\alpha z)$. Если наложить на зонд ультразвуковые колебания, туннельный ток будет таким:

$$I = I_0 \exp(-\alpha z - \alpha s_0 \cos \omega t) =$$
$$= I_0 \exp(-\alpha z) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta_n I_n(\alpha s_0) \cos n\omega t.$$

Амплитуды гармоник выражаются через модифицированные функции Бесселя. Здесь $\beta_0 = 1$; $\beta_n = 2$ ($n > 1$). Если наложены не гармонические, а случайные колебания с интенсивностью σ^2 (например, тепловой шум), получается такая формула:

$$I = I_0 \exp(-\alpha z + 0.5\alpha^2\sigma^2).$$

Аналогичные выражения для измеряемых величин нетрудно получить для атомного силового микроскопа и других зондовых приборов. Гармоники можно регистрировать с высокой точностью, как это делается в задачах нелинейной акустической диагностики [2].

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарен К. Хедбергу (C.M. Hedberg) и Ш. Као-Вальтер (S. Kao-Walter) за полезные обсуждения.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа поддержана грантом Российского научного фонда 19-12-00098.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rudenko O.V.* Nonlinear methods in acoustic diagnostics // Russian Journal of Nondestructive Testing. 1993. V. 29. № 8. P. 583–588.
2. *Rudenko O.V.* Giant nonlinearities in structurally inhomogeneous media and the fundamentals of nonlinear acoustic diagnostic techniques // Physics-Uspekhi (Adv. Phys. Sci.). 2006. V. 49. № 1. P. 69–87. https://doi.org/10.1070/PU2006v049n01ABEH005876
3. *Rudenko O.V.* Nonlinear Waves: some biomedical applications // Physics-Uspekhi (Adv. Phys. Sci.). 2007. V. 50. № 4. P. 359–367. https://doi.org/10.1070/PU2007v050n04ABEH006236
4. *Мфоумоу Е.М., Хедберг К., Као-Вальтер С.* Вибрационный анализ листовых материалов и обнаружение дефектов с помощью дистанционного возбуждения акустических колебаний // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 1. С. 147–155.
5. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Theory of Elasticity. 3rd edition. N.Y.: Pergamon, 1986.
6. *Mfoumou E.M., Rudenko O.V., Hedberg C.M., Kao-Walter S.* Acoustical measurement accompanying tensile test: new modality for nondestructive testing and characterization of sheet materials // The 13th International Congress on Sound and Vibration. Vienna, Austria, July 2–6. 2006.
7. *Мандельштам Л.И.* Лекции по колебаниям / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Изд. АН СССР, 1955. С. 215–218.
8. *Андреев Н.Н.* Технический амплитудометр // Журн. прикладной физики. 1925. Т. 2. № 3–4. С. 205–212.
9. *Babitsky V.I., Krupenin V.L.* Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems. B., Heidelberg: Springer, 2001.
10. *Rudenko O.V., Hedberg C.M.* Strong nonlinearity, anisotropy, and solitons in a lattice with holonomic constraints // Wave Motion. 2019. V. 89. June. P. 104–115. https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2019.01.001
11. *Карлов Н.В., Кириченко Н.А.* Колебания, волны, структуры. М.: Физматлит, 2003. 496 с.
12. *Миронов В.Л.* Основы сканирующей зондовой микроскопии. Н. Новгород: И-т физ. микроструктур РАН, 2004. 114 с.
13. *Binnig G., Rohrer H.* Scanning Tunneling Microscopy—From Birth to Adolescence: Nobel Lecture. Stockholm, December 8, 1986 / Nobel Lectures. Physics 1981–1990. Singapore: World Scientific, 1993.
14. *Бинниг Г., Рорер Г.* Сканирующая туннельная микроскопия – от рождения к юности // Успехи физ. наук. 1988. Т. 154. № 2. С. 261–278.

NONLINEAR DIAGNOSTICS, ACOUSTIC WEIGHING, ANDREEV'S HAMMER AND PROBE MICROSCOPES

Academician of the RAS O. V. Rudenko[a,b,c]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*
[b] *Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*
[c] *Institute of the Earth Physics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

A method of nonlinear diagnostics based on "acoustic weighing" of sheet materials is discussed. The defect mass or mass deficit determines the frequency shift of the vibrating membrane. The measuring device is described made by academician N.N. Andreev in 1925 and based on the effect of "rattling" due to the "bouncing" of a small load lying on the telephone membrane. The harmonics of oscillations that appear at sufficiently large amplitudes of oscillations are calculated. It is shown that harmonics can also appear during the operation of modern high-precision instruments, for example, tunneling and atomic force microscopes.