
Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 85. Iss. 4

EDITORIAL BOARD

- I.G. Goryacheva** (editor-in-chief, Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)
- V.G. Baydulov** (executive secretary, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)
- J. Awrejcewicz** (Professor, Politechnika Łódzka, Lodz, Poland),
N.N. Bolotnik (Professor, Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
F.M. Borodich (Professor, Cardiff University, Cardiff, United Kingdom),
A.B. Freidin (Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),
A.M. Gaifullin (Professor, Corresponding RAS member, Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Zhukovsky, Russia),
M.L. Kachanov (Professor, Tufts University, Medford, MA, USA),
Ju.D. Kaplunov (Professor, Keele University, Staffordshire, United Kingdom),
A.V. Karapetyan (Professor, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia),
A.A. Korobkin (Professor, University of East Anglia, Norwich, United Kingdom),
A.M. Kovalev (Professor, NASU member, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Ukraine),
V.V. Kozlov (Professor, RAS member, Vice-President RAS, Moscow, Russia),
A.M. Krivtsov (Professor, Corresponding RAS member, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),
A.G. Kulikovskii (Professor, RAS member, Steklov Institute of Mathematics, RAS, Moscow, Russia),
Yu.Yu. Makhovskaya (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
N.F. Morozov (Professor, RAS member, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia),
T.J. Pedley (Professor, FRS member, University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom),
F. Pfeiffer (Professor, FRS, Foreign RAS member, Technische Universität München, Munich, Germany),
V.V. Pukhnachev (Professor, Corresponding RAS member, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics RAS, Novosibirsk, Russia),
G. Rega (Professor, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy),
S.A. Reshmin (Professor, Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
V.A. Sabelnikov (Professor, The French Aerospace Lab ONERA, Paris, France),
Ye.I. Shifrin (Professor, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
F.E. Udvardia (Professor, University of Southern California, Los Angeles, CA, USA),
S.E. Yakush (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
V.F. Zhuravlev (Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
K. Zimmermann (Professor, Technische Universität Ilmenau, Ilmenau, Germany)
- Editorial advisory board: N.I. Amelkin, I.M. Anan'evskii, A.S. Andreev, V.A. Babeshko, A.M. Formalskii, Yu.P. Gupalo, A.P. Ivanov, A.N. Kraiko, A.P. Markeev, S.A. Nazarov, V.S. Patsko, A.G. Petrov, N.N. Rogacheva, V.V. Sazonov, A.P. Seyranian, I.A. Soldatenkov, S.Ya. Stepanov, G.A. Tirsksii, V.N. Tkhai

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

July–August

Учредитель: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Редакция:

В.Г. Байдулов – отв. секретарь

Е.В. Есина – зав. редакцией

Адрес редакции: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245

Телефон редакции: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

На сайте Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала "Прикладная математика и механика" в каталоге Роспечати 70706

ISSN 0032-8235

Founder: Russian Academy of Sciences

The Editorial Staff:

V.G. Baydulov – executive secretary

E.V. Esina – head of Editorial office (manager editor)

The Editorial Board Adress: 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia

Phone: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL : <http://pmm.ipmnet.ru>

The subscription index in Rospechat catalogue 70706

ISSN 0021-8928

СО Д Е Р Ж А Н И Е

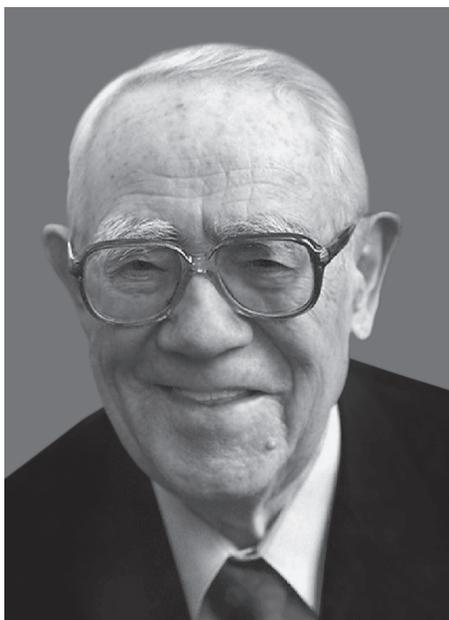
Валентин Витальевич Румянцев (к столетию со дня рождения)	411
Управление плоскими движениями тела при помощи подвижной массы <i>Ф. Л. Черноусько</i>	414
Особенности динамики систем с упругими элементами и сухим трением <i>М. З. Досаев, В. А. Самсонов</i>	426
О стабилизации регулярных прецессий спутника при помощи магнитных моментов <i>В. М. Морозов, В. И. Каленова, М. Г. Рак</i>	436
О конструкции “Триада” <i>Й. Виттенбург</i>	454
Обобщенные диаграммы Смейла для диссипативных систем с симметрией <i>А. В. Карапетян</i>	461
Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с бесконечным запаздыванием <i>А. С. Андреев, О. А. Перегудова</i>	469
Осциллятор с сухим трением и упругим ограничителем <i>М. Паскаль</i>	494
Об устойчивости лагранжевых решений в пространственной близкой к круговой ограниченной задаче трех тел <i>А. П. Маркеев</i>	503
Об устойчивости равноускоренного движения упругого цилиндра по наклонному основанию <i>А. А. Зобова, И. Г. Горячева</i>	516
Движение массивной точки по поверхности однородного шара со сферической полостью <i>А. А. Буров, В. И. Никонов, Е. С. Шалимова</i>	528
Информация для авторов и читателей журнала ПММ	544

C O N T E N T S

Control of plane movements of a body by means of a movable mass <i>F. L. Chernousko</i>	414
Peculiarities of dynamics of systems with elastic elements and dry friction <i>M. Z. Dosaev, V. A. Samsonov</i>	426
On stabilization of satellite regular precessions by means of magnetic moments <i>V. M. Morozov, V. I. Kalenova, M. G. Rak</i>	436
The structure called TRIADE <i>J. Wittenburg</i>	454
Generalized Smale diagrams for dissipative systems with symmetry <i>A. V. Karapetyan</i>	461
Lyapunov functional method in the stability problem of volterra integro-differential equations with infinite delay <i>A. S. Andreev, O. A. Peregudova</i>	469
Dry friction oscillator with elastic stop <i>M. Pascal</i>	494
On the stability of Lagrange solutions in spatial near-circular restricted three-body problem <i>A. P. Markeev</i>	503
Stability of the accelerated motion of elastic cylinder along inclined foundation <i>A. A. Zobova, I. G. Goryacheva</i>	516
On the motion of a point particle on a homogeneous gravitating ball with a spherical cavity in the presence of dry friction <i>A. A. Burov, V. I. Nikonov, E. S. Shalimova</i>	528

ВАЛЕНТИН ВИТАЛЬЕВИЧ РУМЯНЦЕВ
(к столетию со дня рождения)

DOI: 10.31857/S0032823521040159



Валентин Витальевич Румянцев родился 19 июля 1921 года в селе Новая Скатовка Саратовской области. Закончив школу, В.В. Румянцев в 1940 году поступил в Ленинградский кораблестроительный институт, по окончании первого курса которого перевелся (в связи с началом войны) в Саратовский университет на физико-математический факультет.

Закончив университет, в 1945 году он поступил в аспирантуру Института механики АН СССР к Н.Г. Четаеву, который оказал решающее влияние на его становление как ученого и педагога. После расформирования Института механики АН СССР в 1965 году В.В. Румянцев перешел в Вычислительный центр АН СССР, где организовал и возглавил лабораторию теории устойчивости и механики управляемых систем. Позднее эта лаборатория была преобразована в сектор отдела механики, а В.В. Румянцев стал руководителем отдела. В последние годы своей жизни В.В. Румянцев перешел в ранг советника при президиуме РАН. В 1970 году В.В. Румянцев был избран членом-корреспондентом АН СССР, а в 1992 году – действительным членом РАН.

Педагогическую деятельность в МГУ им. М.В. Ломоносова В.В. Румянцев начал в 1953 году, став по совместительству доцентом, а с 1956 года – профессором кафедры теоретической механики. В.В. Румянцев читал общий курс теоретической механики и специальный курс по теории устойчивости (с 1959 года). Кроме того, в 1959 году В.В. Ру-

мянцев возглавил научный семинар по аналитической механике и теории устойчивости, организованный ранее Н.Г. Четаевым, который сначала проходил в Институте механики АН СССР, а с 1968 года – в МГУ. В.В. Румянцев подготовил более 60 кандидатов наук, почти половина из которых позднее стали докторами наук. В работе с молодежью В.В. Румянцева отличала крайне редкая в настоящее время научная щедрость: бескорыстно делаясь со своими учениками идеями по постановке и методам решения новых задач.

В.В. Румянцев опубликовал более 200 научных работ и 7 монографий. Ему принадлежат основополагающие результаты по динамике тел с полостями, содержащими жидкость, и, в частности, общая теория устойчивости движения тел с жидким наполнением. Успех построения такой теории обусловлен необыкновенно удачным определением устойчивости движения таких систем: В.В. Румянцев предложил изучать устойчивость движения тел с полостями, содержащими жидкость, по отношению к переменным, характеризующим движение твердого тела, и тем или иным переменным, интегральным образом характеризующим движение жидкости. Результаты В.В. Румянцева об устойчивости движения тел с жидким наполнением в 1980 году были удостоены Государственной премии СССР.

Поистине мировую известность В.В. Румянцеву принесла созданная им теория устойчивости и стабилизации движения по отношению к части переменных. Основы этой теории, по существу, были заложены в его исследованиях по динамике тел с полостями, содержащими жидкость. За цикл работ по устойчивости движения В.В. Румянцев был удостоен в 2004 году Золотой медали имени А.М. Ляпунова РАН.

Значительное место в научном наследии В.В. Румянцева занимают его работы по динамике твердых тел и гиростатов (тело с неподвижной точкой, тело в центральном гравитационном поле, тело на струне, тело на плоскости и т.д.). В частности, В.В. Румянцев дал полное исследование задачи о вековой устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела с неподвижной точкой и наглядное представление полученных им результатов, указав на пересечении конуса Штауде со сферой Пуассона области устойчивости перманентных вращений. Эти результаты В.В. Румянцева были удостоены в 1958 году премии имени С.А. Чаплыгина АН СССР.

Фундаментальные результаты были получены В.В. Румянцевым в задаче о движении твердого тела, подвешенного к неподвижной точке с помощью струны или стержня. В частности, он отметил существенное значение способа крепления струны или стержня к телу, а также, со своим учеником В.Н. Рубановским, дал исчерпывающий анализ задачи о существовании, устойчивости и ветвлении стационарных движений тела на стержне. Эти результаты были удостоены в 1996 году Государственной премии РФ.

В работах В.В. Румянцева по аналитической механике были даны развитие и различные модификации вариационных принципов и групповых методов механики. Он распространил принцип Гаусса на системы с неидеальными связями, доказал вариационный принцип Четаева, исследовал возможность распространения вариационных принципов Гамильтона, Лагранжа и Якоби на системы с дифференциальными связями. В.В. Румянцев распространил уравнения Пуанкаре–Четаева на случай незамкнутой системы операторов виртуальных перемещений, что позволило ему получить наиболее общие уравнения динамики, пригодные для описания как голономных, так и неголономных систем, как в обобщенных координатах, так и в квазиординатах, в том числе, и в избыточных переменных.

Научные идеи В.В. Румянцева активно развиваются в МГУ им. М.В. Ломоносова, Вычислительном центре им. А.А. Дородницына РАН, Ульяновском государственном университете и других научных и учебных институтах. В МГУ по-прежнему работает семинар по аналитической механике и теории устойчивости, который теперь носит имя В.В. Румянцева. Ученики В.В. Румянцева успешно продолжают подготовку научных кадров высшей квалификации в области аналитической механики и теории

устойчивости, в частности, В.А. Самсонов, В.М. Морозов, А.В. Карапетян (все – МГУ) и А.С. Андреев (УлГУ) подготовили более 70 кандидатов наук и несколько докторов наук.

Научное наследие В.В. Румянцева по-прежнему актуально, о чем свидетельствуют многочисленные ссылки на его работы в статьях его учеников и последователей, в том числе, и в этом, посвященном столетию со дня рождения В.В. Румянцева, выпуске журнала “Прикладная математика и механика”, главным редактором которого В.В. Румянцев был на протяжении трех десятилетий.

СПИСОК работ В.В. Румянцева,
опубликованных в 2002–2007 годах
(список работ, опубликованных до 2002 года см. ПММ, 2001, т. 65, вып. 4)

1. Об обобщенных уравнениях Рауса и вариационных принципах в переменных Пуанкаре и Четаева // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 6. С. 914–921.
2. Н.Г. Четаев (К столетию со дня рождения) // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 6. С. 899–907.
3. О вариационных принципах для систем с неустойчивыми связями // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 6. С. 902–914.
4. О стабилизации движения нестационарной управляемой системы. Доклады РАН. 2007. Т. 416. № 5. С. 627–629 (совм. с А.С. Андреевым).
5. О стабилизации движения нестационарной управляемой системы // Автоматика и телемех. 2007. № 8. С. 18–31 (совм. с А.С. Андреевым).
6. Об устойчивости стационарных движений спутников. 2-е изд. М.; Ижевск: ИИКИ. 2010. 141 с.

УДК 517.977

УПРАВЛЕНИЕ ПЛОСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ ТЕЛА ПРИ ПОМОЩИ ПОДВИЖНОЙ МАССЫ

© 2021 г. Ф. Л. Черноусько^{1,*}¹ *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия***e-mail: chern@ipmnet.ru*

Поступила в редакцию 10.09.2020 г.

После доработки 26.10.2020 г.

Принята к публикации 30.10.2020 г.

Рассматриваются управляемые движения твердого тела вдоль горизонтальной плоскости при наличии сил сухого трения между телом и плоскостью. Управление осуществляется посредством вспомогательной точечной массы, снабженной актюатором и способной перемещаться относительно тела. Показано, что при определенных условиях общего вида система вполне управляема и можем быть переведена из произвольного начального состояния в любое заданное терминальное состояние. Рассматриваемая ситуация моделирует динамику поворотных движений мобильных капсульных роботов.

Ключевые слова: твердое тело, динамика, мобильный робот, сухое трение, управляемость

DOI: 10.31857/S0032823521040044

1. Введение. В последние годы значительный интерес вызывают мобильные роботы, управляемые при помощи вспомогательных подвижных масс, снабженных актюаторами и способными перемещаться относительно корпуса робота [1–9]. Такие роботы, называемые капсульными, не имеют внешних подвижных элементов и могут быть герметичными. Они способны передвигаться в различных средах, включая агрессивные и ранимые среды, в сложной обстановке, в трубах, внутри живых организмов и выполнять операции доставки, мониторинга, диагностики и др. Большинство работ по динамике капсульных роботов посвящено одномерным поступательным движениям по прямой. Построены оптимальные законы движения, при которых достигается максимальная средняя скорость перемещения [1, 3].

Двумерные управляемые движения тела с внутренними массами вдоль горизонтальной плоскости исследованы в работах [10–15]. Здесь предполагается, что внутренние массы имеют две степени свободы относительно тела и состоят либо из двух осцилляторов [10, 14, 15], либо из ротора и подвижной материальной точки [11–13]. Случай одной внутренней точечной массы с двумя степенями свободы рассмотрен кратко в [13].

В данной работе также рассмотрен случай одной подвижной точечной массы, с помощью которой управляется движение твердого тела по горизонтальной плоскости при наличии сил сухого трения между телом и плоскостью. Установлено, что если подвижная точка может развивать достаточно большое ускорение относительно несущего тела, то система вполне управляема. Она может быть переведена из любого начального состояния покоя в произвольное терминальное состояние покоя в плоскости за

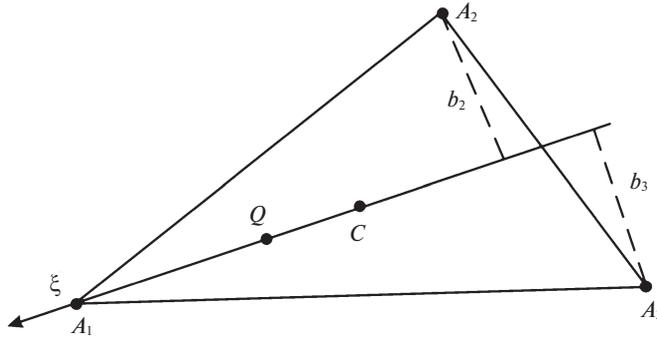


Рис. 1. Механическая система.

конечное время. Описан способ управления и показано, что он может быть реализован в том случае, когда подвижная точка может двигаться по некоторой кривой относительно твердого тела, то есть имеет лишь одну степень свободы относительно тела.

Отметим, что двумерные плоские движения важны для реализации поворотов мобильного робота при его движении по плоскости.

2. Уравнения движения. Рассматриваемая система состоит из твердого тела P массы M и материальной точки Q массы m (рис. 1). Тело P может скользить по неподвижной горизонтальной плоскости OXY в поле тяжести, опираясь на эту плоскость в трех точках опоры A_i , $i = 1, 2, 3$. Как известно, в случае трех точек опоры твердое тело является статически определимой системой, и поэтому нормальные реакции N_i в точках A_i определяются однозначно.

Обозначим через C центр масс тела P и предположим, что проекция точки C на плоскость OXY лежит внутри треугольника $A_1A_2A_3$. Предполагаем также, что вертикальная ось, проходящая через точку C , является одной из главных центральных осей инерции тела P .

Материальная точка Q снабжена актюатором и может перемещаться относительно тела P вдоль горизонтальной плоскости, параллельной неподвижной плоскости OXY . Точка Q взаимодействует с телом P , но не взаимодействует с неподвижной плоскостью OXY . Таким образом, единственными внешними силами, действующими на систему $P + Q$, являются силы тяжести и реакции в точках опоры A_i .

Для упрощения предполагаем, что расстояние от центра масс C до неподвижной плоскости OXY , а также расстояние от точки Q до этой же плоскости малы по сравнению с линейными размерами тела P в горизонтальной плоскости. Тогда можно считать, что центр масс C и точка Q движутся в плоскости OXY , причем обе точки C и Q лежат внутри треугольника $A_1A_2A_3$. При сделанных предположениях нормальные реакции N_i положительны, и “опрокидывание” тела P исключается.

Предполагаем, что касательные реакции F_i в точках опоры подчиняются закону сухого трения Кулона с коэффициентом трения f . Они удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} F_i &= -fN_i v_i / |v_i| \quad \text{при} \quad v_i = |v_i| > 0 \\ |F_i| &\leq fN_i \quad \text{при} \quad v_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где v_i — скорость точки опоры A_i .

Составим уравнение движения системы $P + Q$. Обозначим через v_C и v_Q скорости точек C и Q относительно неподвижной плоскости OXY , а через F — силу, развиваемую

актюатором и приложенную к точке Q . Следовательно, к телу P в точке Q приложена сила $(-\mathbf{F})$. Уравнение движения центра масс C тела P имеет вид

$$M\dot{\mathbf{v}}_C = \sum_{i=1}^3 \mathbf{F}_i - \mathbf{F}, \quad (2.2)$$

где силы \mathbf{F}_i определены равенствами (2.1). Точками обозначаются производные по времени t .

Уравнение движения точки Q

$$m\dot{\mathbf{v}}_Q = \mathbf{F} \quad (2.3)$$

запишем, представляя абсолютное ускорение $\dot{\mathbf{v}}_Q$ как сумму переносного, кориолисова и относительного ускорений.

Обозначим через $\mathbf{r} = \overline{CQ}$ радиус-вектор точки Q относительно центра масс C тела P , через \mathbf{v} и \mathbf{w} – скорость и ускорение точки Q , соответственно, относительно тела P , через $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$ угловую скорость тела P , где \mathbf{k} – единичный вектор, направленный вертикально вверх. В развернутом виде уравнение (2.3) запишется так:

$$m[\dot{\mathbf{v}}_C + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{w}] = \mathbf{F} \quad (2.4)$$

Обозначая через J момент инерции тела P относительно вертикальной оси, проходящей через его центр масс C , запишем уравнение моментов для тела P относительно этой оси:

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} = \left(\sum_{i=1}^3 \overline{CA_i} \times \mathbf{F}_i - \mathbf{r} \times \mathbf{F} \right) \mathbf{k} \quad (2.5)$$

Уравнения динамики системы $P + Q$ заданы в виде (2.2), (2.4) и (2.5). В этих уравнениях в качестве управляющих воздействий можно рассматривать либо силу \mathbf{F} , либо относительное ускорение \mathbf{w} в зависимости от того, какие характеристики поддерживает принятая модель актюатора: силовые или кинематические. Если же ограничений на управление не налагается, то оба подхода эквивалентны, так как векторы \mathbf{F} и \mathbf{w} связаны уравнением (2.4).

Ниже для определенности относительное ускорение \mathbf{w} рассматривается в качестве управляющего воздействия, причем предполагается, что вектор \mathbf{w} может быть произволен по направлению в плоскости OXY и достаточно большим по величине.

Будут исследованы некоторые простые движения системы $P + Q$, при помощи которых будет установлена ее управляемость, то есть возможность ее перемещения из любого начального положения в произвольное заданное терминальное положение.

3. Типы движений. Рассмотрим некоторые простые возможные типы движений системы $P + Q$, при помощи которых будет установлена ее управляемость.

Медленные движения. Пусть точка Q движется относительно тела P внутри треугольника $A_1A_2A_3$ с достаточно малым по величине относительным ускорением. Тогда силы трения могут удерживать тело P в состоянии покоя, если оно было в этом состоянии в начале движения. Медленными движениями можно пользоваться для того, чтобы переместить точку Q из начального состояния покоя в произвольное терминальное положение относительно тела P , не изменяя его состояние покоя.

Остаточное движение. Пусть точка Q неподвижна относительно тела P , а само тело движется. Тогда систему $P + Q$ можно рассматривать как твердое тело массы $M + m$, которое находится под действием сил трения. Так как эти силы конечны по величине, то система $P + Q$ придет в состояние покоя за конечное время.

Прямолинейные движения. Пусть в начальный момент $t = 0$ вся система покоится, а точка Q находится на одной из прямых CA_i , $i = 1, 2, 3$. Если точка Q будет двигаться по

этой прямой, то тело P будет двигаться прямолинейно и поступательно вдоль этой прямой.

Вращение. Пусть в начальный момент $t = 0$ вся система покоится, а точка Q находится на окружности S радиуса a с центром в точке C . Если точка Q будет двигаться по этой окружности относительно тела P , то само тело будет вращаться относительно неподвижной плоскости OXY .

Рассмотрим подробнее последние два типа движений.

4. Прямолинейные движения. Не нарушая общности, примем, что точка Q в начальный момент времени находится на прямой CA_1 (рис. 1). Обозначим через ξ ее смещение вдоль этой прямой, отсчитанное от ее начального положения. Покажем, что при движении точки Q по прямой CA_1 тело P совершает поступательное движение вдоль этой прямой. Для этого достаточно убедиться, что все уравнения (2.2), (2.4) и (2.5) удовлетворяются при таком движении.

Скорости v_i всех точек опоры A_i , $i = 1, 2, 3$, при поступательном движении тела P равны v_C и параллельны прямой CA_1 . Согласно уравнениям (2.1), все силы трения F_i также параллельны прямой CA_1 и направлены против скорости v_C . Следовательно, векторное уравнение (2.2) приводится к скалярному уравнению

$$M\dot{v}_C = -f \sum_{i=1}^3 N_i q(v_C) - F, \quad (4.1)$$

где введено следующее обозначение, выражающее закон Кулона (2.1):

$$\begin{aligned} q(v_C) &= \operatorname{sgn} v_C \quad \text{при} \quad v_C \neq 0 \\ |q(v_C)| &\leq 1 \quad \text{при} \quad v_C = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Сумма всех нормальных реакций равна весу системы $P + Q$. Имеем

$$N_1 + N_2 + N_3 = (M + m)g, \quad (4.3)$$

где g – ускорение силы тяжести. Уравнение (4.1) с учетом равенства (4.3) примет вид

$$M\dot{v}_C = -f(M + m)gq(v_C) - F \quad (4.4)$$

Уравнение (2.4) для поступательного движения тела P , при котором $\omega = 0$, сводится к скалярному уравнению

$$m(\dot{v}_C + w) = F \quad (4.5)$$

Исключая F из уравнений (4.4) и (4.5) и вводя обозначение

$$\mu = m/(M + m), \quad (4.6)$$

получим

$$\dot{v}_C = -\mu w - fgq(v_C) \quad (4.7)$$

Рассмотрим теперь уравнение (2.5). Согласно уравнению моментов для тела P относительно оси CA_1 , имеет место равенство

$$N_2 b_2 = N_3 b_3, \quad (4.8)$$

где b_2 и b_3 – расстояния от точек опоры A_2 и A_3 , соответственно, до прямой CA_1 (рис. 1). Так как силы трения F_2 и F_3 направлены параллельно прямой CA_1 , то их моменты относительно точки C уравновешивают друг друга в силу равенства

$$F_2 b_2 = F_3 b_3,$$

вытекающего из (2.1) и (4.8). Моменты относительно точки C сил F_1 и F , направленных по прямой CA_1 , равны нулю. Поэтому правая часть уравнения (2.5) равна нулю,

как и его левая часть при $\omega = 0$. Таким образом, все уравнения динамики (2.2), (2.4) и (2.5) удовлетворяются в случае прямолинейного движения точки Q вдоль прямой CA_1 и поступательного движения тела P вдоль этой же прямой. Эти уравнения сводятся к скалярному уравнению (4.7), к которому нужно добавить следующие кинематические соотношения:

$$\dot{\xi} = v, \quad \dot{v} = w, \quad \dot{x} = v_C, \quad (4.9)$$

где x — абсолютное смещение центра масс C тела P вдоль направления CA_1 .

Для уравнений (4.7) и (4.9) имеют место следующие начальные условия:

$$\xi(0) = v(0) = x(0) = v_C(0) = 0 \quad (4.10)$$

Ниже предлагается простой способ управления, при котором реализуется заданное абсолютное перемещение центра масс C вдоль направления CA_1 при ограниченном относительном перемещении точки Q по прямой CA_1 . Зададим относительное ускорение $w(t)$ точки Q , которое играет роль управления, в виде кусочно-постоянной функции времени:

$$\begin{aligned} w(t) &= w_1 & \text{при } t \in (0, t_1) \\ w(t) &= -w_2 & \text{при } t \in (t_1, t_2), \quad 0 < t_1 < t_2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Здесь t_1 и t_2 — некоторые моменты времени, а постоянные w_1 и w_2 удовлетворяют ограничениям:

$$w_1 > fg\mu^{-1}, \quad 0 < w_2 \leq fg\mu^{-1} \quad (4.12)$$

Интегрируя второе уравнение (4.9) при $w(t)$, определяемом соотношениями (4.11), при начальных условиях (4.10), получим

$$\begin{aligned} v(t) &= w_1 t & \text{при } t \in (0, t_1) \\ v(t) &= w_1 t_1 - w_2(t - t_1) & \text{при } t \in (t_1, t_2) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Потребуем, чтобы относительная скорость $v(t)$ точки Q из (4.13) обращалась в нуль в момент $t = t_2$. Найдем

$$t_2 = (w_1 + w_2)t_1/w_2 \quad (4.14)$$

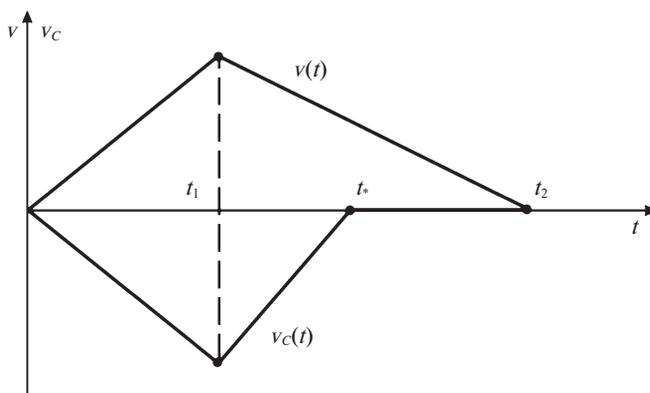
Проинтегрируем теперь первое уравнение (4.9) при $v(t)$, определяемом соотношениями (4.13), при начальных условиях (4.10). Получим

$$\begin{aligned} \xi(t) &= w_1 t^2/2 & \text{при } t \in (0, t_1) \\ \xi(t) &= w_1 t_1^2/2 + w_1 t_1(t - t_1) - w_2(t - t_1)^2/2 & \text{при } t \in (t_1, t_2) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Подставляя $t = t_2$ из (4.14) в соотношения (4.15), найдем полное относительное смещение точки Q за время t_2 :

$$\Delta\xi = \xi(t_2) = w_1(w_1 + w_2)t_1^2/(2w_2) \quad (4.16)$$

Обратимся к уравнению (4.7). В силу первого неравенства (4.12) имеем $\dot{v}_C < 0$ на интервале $t \in (0, t_1)$. Согласно начальному условию $v_C(0) = 0$ из (4.10), получим $v_C < 0$ на интервале $t \in (0, t_1)$ и в начале интервала $t \in (t_1, t_2)$. Будем исходить из того, что неравенство $v_C \leq 0$ выполняется на всем интервале $t \in (0, t_2)$. Построенное ниже решение удовлетворяет этому условию.


 Рис. 2. Скорости $v(t)$ и $v_C(t)$.

Интегрируя уравнение (4.7) при $w(t)$, определяемом равенствами (4.11), при начальных условиях (4.10), получим

$$\begin{aligned} v_C(t) &= -(\mu w_1 - fg)t \quad \text{при } t \in (0, t_1) \\ v_C(t) &= -(\mu w_1 - fg)t_1 + (\mu w_2 + fg)(t - t_1) \quad \text{при } t > t_1 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Из последнего равенства (4.17) следует, что $v_C(t)$ обращается в нуль при $t = t_*$, где

$$t_* = \mu(w_1 + w_2)(\mu w_2 + fg)^{-1} t_1 \quad (4.18)$$

Сравнивая равенства (4.14) и (4.18), нетрудно убедиться в том, что

$$t_1 < t_* < t_2$$

Заметим, что если в какой-то момент времени t_* выполнено условие $v_C(t_*) = 0$, а относительное ускорение $w(t)$ точки Q при $t > t_*$ удовлетворяет неравенству

$$|w(t)| \leq fg\mu^{-1}, \quad (4.19)$$

то тело P при $t > t_*$ будет оставаться в покое, и $v_C(t) = 0$ при $t > t_*$. Это следует из того, что второе слагаемое в правой части уравнения (4.7) в силу соотношения (4.2) компенсирует первое слагаемое. Другими словами, силы трения удерживают тело P в состоянии покоя на некотором интервале времени при выполнении условия (4.19), если $v_C = 0$ в начале этого интервала. Следовательно, имеем $v_C = 0$ на интервале $t \in (t_*, t_2)$.

Зависимости $v(t)$ и $v_C(t)$ на интервале $t \in (0, t_2)$ показаны на рис. 2.

Определим еще перемещение тела P , для чего в третье уравнение (4.9) подставим $v_C(t)$ из (4.17). Принимая во внимание начальные условия (4.10), получим после интегрирования:

$$\begin{aligned} x(t) &= -(\mu w_1 - fg)t^2/2 \quad \text{при } t \in (0, t_1) \\ x(t) &= (\mu w_1 - fg)(t_1 - 2t)t_1/2 + (\mu w_2 + fg)(t - t_1)^2/2 \quad \text{при } t \in (t_1, t_2) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Полное перемещение тела P найдем, подставляя $t = t_*$ из (4.18) во второе соотношение (4.20):

$$\Delta x = x(t_*) = -\mu(w_1 + w_2)(\mu w_1 - fg)(\mu w_2 + fg)^{-1} t_1^2/2 \quad (4.21)$$

Таким образом, управление $w(t)$, заданное соотношениями (4.11) и (4.12), обеспечивает относительное перемещение точки Q по прямой CA_1 и одновременно поступательное перемещение тела P вдоль этого же направления по плоскости OXY . В начале и в конце этого маневра тело P и точка Q находятся в состоянии покоя. Время маневра t_2 определяется соотношением (4.14) и зависит от трех параметров: w_1 , w_2 и t_1 , причем ускорения w_1 и w_2 должны удовлетворять неравенствам (4.12), а величина t_1 может быть сколь угодно малой. Полное относительное перемещение $\Delta\xi$ точки Q и полное абсолютное перемещение Δx тела P определены соотношениями (4.16) и (4.21), соответственно. Эти перемещения противоположны по знаку и пропорциональны квадрату длины интервала t_1 . Отсюда следует, что эти перемещения могут быть сделаны как угодно малыми.

После окончания описанного маневра перемещения, то есть при $t > t_2$, точка Q может быть при помощи медленного движения с ускорением $w(t)$, удовлетворяющим неравенству (4.19), переведена в начальную точку $\xi = 0$. При этом тело P останется неподвижным. Повторяя описанный маневр нужное число раз и выбирая каждый раз его параметры w_1 , w_2 и t_1 , можно осуществить перемещение тела P на произвольное заданное расстояние вдоль направления CA_1 за конечное время. При этом точка Q будет совершать перемещения внутри любого сколь угодно малого отрезка прямой CA_1 , а в конце движения она будет переведена в любое заданное положение на этой прямой при нулевой относительной скорости в конце движения.

Выше изложен один возможный способ управления совместным движением точки Q и тела P . Задачи оптимизации подобных движений применительно к уравнению типа (4.7), в котором участвуют силы сухого трения, рассмотрены и решены в работах [1, 3], где построены оптимальные движения, отвечающие максимальной средней скорости перемещения.

5. Вращение. Преобразуем уравнения движения (2.2), (2.4) и (2.5). Сначала выразим \dot{v}_C из уравнения (2.2) и подставим его в (2.4). Получим

$$\mathbf{F} = \mu \sum_{i=1}^3 \mathbf{F}_i + \mu M [\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{w}] \quad (5.1)$$

Здесь μ введено соотношением (4.6). Подставим выражение (5.1) для \mathbf{F} в уравнение (2.5) и примем во внимание равенство $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$. Имеем

$$J \dot{\boldsymbol{\omega}} = \left[\sum_{i=1}^3 (\overline{CA_i} - \mu \mathbf{r}) \times \mathbf{F}_i \right] \mathbf{k} - \mu M \left\{ \dot{\omega} r^2 + [2\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \mathbf{w}] \mathbf{k} \right\} \quad (5.2)$$

В рассматриваемом вращательном движении точка Q движется относительно тела P по окружности S радиуса a с центром в точке C . Обозначим через ϕ угловую координату точки Q при этом движении, отсчитанную от некоторого начального положения этой точки, а через $\Omega = \dot{\phi}$ угловую скорость точки Q относительно тела P (рис. 3). Относительная скорость \mathbf{v} точки Q в рассматриваемом движении равна по величине $v = a\Omega$ и перпендикулярна радиусу-вектору $\mathbf{r} = \overline{CQ}$. Так как справедливы равенства $\mathbf{r}\mathbf{v} = 0$, $\boldsymbol{\omega}\mathbf{r} = 0$, то имеем

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}\mathbf{v}) - \mathbf{v}(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}) = 0 \quad (5.3)$$

Относительное ускорение \mathbf{w} точки Q состоит из касательного ускорения $\dot{v} = a\dot{\Omega}$, направленного перпендикулярно вектору \mathbf{r} , и из нормального ускорения, равного v^2/a и направленного против вектора \mathbf{r} . Поэтому получим

$$\mathbf{r} \times \mathbf{w} = a\dot{v}\mathbf{k} = a^2\dot{\Omega}\mathbf{k} \quad (5.4)$$

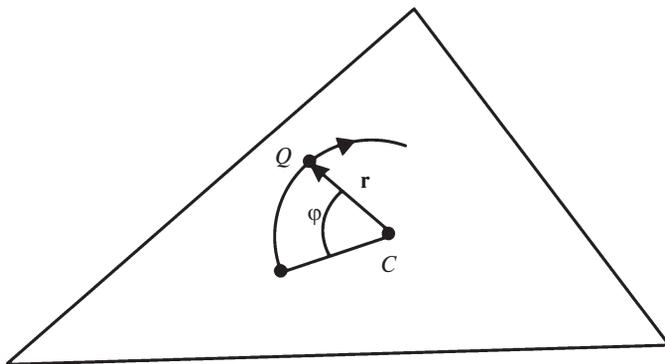


Рис. 3. Вращение.

На основании равенств (5.3) и (5.4) уравнение (5.2) упрощается и приводится к виду

$$\dot{\omega} = -\mu_1 z + R, \quad (5.5)$$

где угловое ускорение z точки Q , равно

$$z = \dot{\Omega} = \ddot{\varphi} \quad (5.6)$$

играет роль управляющего воздействия, и введены обозначения

$$\mu_1 = \frac{\mu M a^2}{J + \mu M a^2}, \quad R = \frac{\left[\sum_{i=1}^3 (\overline{CA}_i - \mu \mathbf{r}) \times \mathbf{F}_i \right] \mathbf{k}}{J + \mu M a^2} \quad (5.7)$$

Оценим сверху величину нормализованного момента сил трения R из (5.7). Вводя обозначение

$$l = \max_i CA_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

получим

$$|R| < \sum_{i=1}^3 (CA_i + \mu a) F_i (J + \mu M a^2)^{-1} \leq (l + \mu a) (J + \mu M a^2)^{-1} \sum_{i=1}^3 F_i$$

Пользуясь соотношениями (2.1) и равенством (4.3), получим оценку

$$|R| < (l + \mu a) (J + \mu M^2)^{-1} fg (M + m) = R_0 \quad (5.8)$$

Из оценки (5.8) следует, что размерность величины R_0 обратна квадрату времени. Поэтому можно ввести следующую характерную величину размерности времени:

$$T = R_0^{-1/2} \quad (5.9)$$

Обозначим через ψ угол поворота тела P относительно неподвижной плоскости OXY и составим кинематические уравнения для вращений точки Q и тела P :

$$\dot{\varphi} = \Omega, \quad \dot{\Omega} = z, \quad \dot{\psi} = \omega \quad (5.10)$$

Так как точка Q и тело P начинают движение из состояния покоя, имеем начальные условия для уравнений (5.5) и (5.10):

$$\varphi(0) = \Omega(0) = \psi(0) = \omega(0) = 0 \quad (5.11)$$

Уравнения (5.5) и (5.10) вместе с начальными условиями (5.11) подобны уравнениям (4.7) и (4.9), соответственно, и начальным условиям (4.10) для прямолинейного движения.

Однако в рассматриваемом случае вращательных движений выражение R из (5.7) для момента сил трения более сложное, чем выражение для сил трения при прямолинейном движении. Поэтому здесь будет сделано более сильное предположение о величине управляющего воздействия z в уравнении (5.5). А именно, пусть функция $z(t)$ задана в виде:

$$\begin{aligned} z(t) &= Z \quad \text{при } t \in (0, \tau) \\ z(t) &= -Z \quad \text{при } t \in (\tau, 2\tau) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Здесь положительная постоянная Z и интервал времени τ таковы, что выполнены условия

$$\mu_1 Z / R_0 \sim \varepsilon^{-2}, \quad \tau / T \sim \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (5.13)$$

где постоянные R_0 и T введены соотношениями (5.8) и (5.9), а ε – малый параметр.

При условиях (5.13) можно, с точностью $O(\varepsilon^2)$, на интервале $t \in (0, 2\tau)$ пренебречь слагаемым R по сравнению с первым слагаемым в правой части уравнения (5.5). Тогда уравнения (5.5) и (5.6) приводятся к виду

$$\dot{\omega} + \mu_1 \Omega = 0$$

Интегрируя это уравнение при начальных условиях (5.11), найдем

$$\omega(t) + \mu_1 \Omega(t) = 0 \quad (5.14)$$

Подставляя $z(t)$ из (5.12) в уравнения (5.10) и интегрируя эти уравнения при начальных условиях (5.11), найдем последовательно

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= Zt \quad \text{при } t \in (0, \tau) \\ \Omega(t) &= Z(2\tau - t) \quad \text{при } t \in (\tau, 2\tau) \\ \varphi(t) &= Zt^2/2 \quad \text{при } t \in (0, \tau) \\ \varphi(t) &= Z(4\tau t - 2\tau^2 - t^2)/2 \quad \text{при } t \in (\tau, 2\tau) \\ \psi(t) &= -\mu_1 \varphi(t), \quad \text{при } t \in (0, 2\tau) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Последнее соотношение (5.15) следует непосредственно из уравнения (5.14) и начальных условий (5.11).

Полные угловые перемещения точки Q и тела P за время маневра 2τ определяются равенствами, вытекающими из (5.15):

$$\Delta\varphi = \varphi(2\tau) = Z\tau^2, \quad \Delta\psi = \psi(2\tau) = -\mu_1 Z\tau^2 \quad (5.16)$$

Принимая во внимание (5.13) оценки, заключаем, что угловые перемещения (5.16) конечны при $\varepsilon \rightarrow 0$, пропорциональны друг другу и противоположны по знаку. За счет выбора интервала τ (при фиксированном Z) они могут быть сделаны сколь угодно малыми. Выполняя описанный маневр нужное число раз и выбирая каждый раз параметр τ , можно осуществить поворот тела P на заданный угол относительно неподвижной плоскости OXY . При этом движение точки Q по окружности S может быть заключено в заданных пределах, что также может регулироваться за счет выбора малого τ . После завершения описанного маневра, то есть при $t = 2\tau$, вращение тела P и движение точки Q относительно тела останавливаются, что следует из формул (5.15). Однако поступательное движение тела P может продолжаться, и будет иметь место остаточное движение, рассмотренное выше в разд. 2. Это движение завершается остановкой всей системы за конечное время. Затем точка Q может быть переведена в любое положение

на окружности S при помощи медленного движения, после чего описанные вращательные движения могут быть продолжены. И так, при помощи последовательности вращательных движений, чередующихся с остаточными и медленными движениями, можно за конечное время осуществить поворот тела P на заданный угол относительно неподвижной плоскости OXY . При этом точка Q будет двигаться относительно тела P по некоторой, в принципе любой, дуге окружности S с центром в точке C .

6. Управляемость. Покажем, как при помощи рассмотренных выше движений перевести систему, состоящую из твердого тела P и подвижной точки Q , из произвольного начального состояния покоя в заданное терминальное состояние покоя.

1) Сначала при помощи медленного движения переместим точку Q из начальной точки в произвольную точку на окружности S радиуса a с центром в точке C . Состояние покоя тела P и его положение на неподвижной плоскости OXY при этом не изменятся. Начальная и конечная скорости точки Q (как относительные, так и абсолютные) при этом равны нулю.

2) При помощи ряда описанных выше вращательных движений осуществим поворот тела P относительно неподвижной плоскости OXY так, чтобы его ориентация совпала с заданной терминальной ориентацией. Для этого может потребоваться несколько вращательных маневров, которые могут чередоваться с остаточными движениями и медленными движениями точки Q по окружности S . В конце этих движений система $P + Q$ придет в состояние покоя, причем тело P будет иметь заданную ориентацию, а точка Q будет находиться на окружности S .

3) Не изменяя ориентации тела P , при помощи поступательных движений по двум направлениям переведем тело P в заданное положение. Для этого используем прямолинейные движения по любым двум из трех возможных направлений CA_i , $i = 1, 2, 3$. Точку Q при помощи медленного движения сначала переместим с окружности S на одну из прямых CA_i , например, на CA_1 . После окончания прямолинейных движений по прямой CA_1 переместим точку Q по дуге окружности S на другую прямую, например, на CA_2 . После окончания прямолинейных движений по прямой CA_2 точку Q можно с помощью медленного движения переместить в любую заданную точку относительно тела P .

В результате, заданное перемещение системы $P + Q$ будет осуществлено за конечное время.

Для реализации данного перемещения, то есть для управляемости системы, достаточно, как показывает приведенный выше анализ, выполнения двух условий.

Во-первых, точка Q должна иметь возможность перемещаться относительно тела P с относительным ускорением, произвольным по величине и направлению.

Во-вторых, точка Q должна иметь возможность двигаться относительно тела P по некоторой (произвольной) дуге окружности S радиуса a с центром в точке C и по двум произвольным отрезкам каких-либо двух прямых CA_i .

Для выполнения второго условия достаточно предположить, что точка Q может двигаться относительно тела P по кривой $L_1L_2L_3L_4$ (рис. 4), состоящей из отрезка L_1L_2 прямой CA_1 , дуги L_2L_3 окружности S и отрезка L_3L_4 прямой CA_2 . В этом случае точка Q имеет одну степень свободы относительно тела P .

Таким образом, если точка Q обладает достаточно большим относительным ускорением и имеет две или даже одну степень свободы относительно тела P , то система вполне управляема.

Заключение. Твердое тело, движущееся вдоль горизонтальной плоскости при наличии сил сухого трения между телом и плоскостью и управляемое при помощи вспомогательной подвижной точечной массы, может быть переведено из произвольного начального состояния в заданное конечное состояние покоя. Предложен способ управления подвижной массой, реализующей заданное перемещение. Управляемость

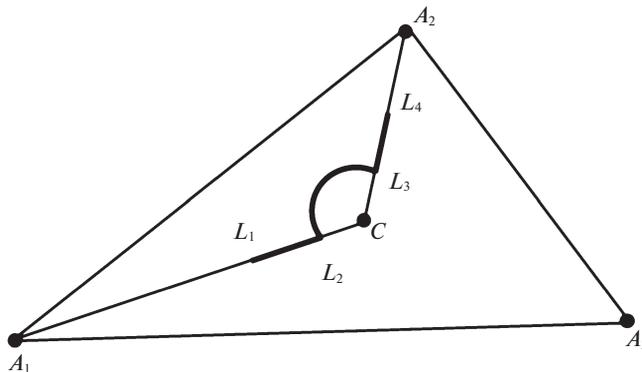


Рис. 4. Кривая $L_1L_2L_3L_4$.

системы имеет место, если подвижная масса может двигаться относительно тела по некоторой кривой с достаточно большим относительным ускорением.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 20-01-00378 и 21-51-12004).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л. Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // ПММ. 2006. Т. 70. № 6. С. 915–941.
2. Li H., Furuta K., Chernousko F.L. Motion generation of the capsbot using internal force and static friction // in: Proc. 45th IEEE Conference on Decision and Control. 2006. P. 6575–6580.
3. Черноусько Ф.Л. Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // ПММ. 2008. Т. 72. № 2. С. 202–215.
4. Zimmermann K., Zeidis I., Bolotnik N., Pivovarov M. Dynamics of a two-module vibration-driven system moving along a rough horizontal plane // Multibody Syst. Dyn. 2009. V. 22. P. 199–219.
5. Fang H.B., Xu J. Dynamic analysis and optimization of a three-phase control mode of a mobile system with an internal mass // J. Vibr.&Control. 2011. V. 74. № 4. P. 443–451.
6. Иванов А.П., Сахаров А.В. Динамика твердого тела с подвижными внутренними массами и ротором на шероховатой плоскости // Нелин. дин. 2012. Т. 8. № 4. С. 763–772.
7. Huda M.N., Yu H. Trajectory tracking control of an underactuated capsbot // Autonom. Robots. 2015. V. 39. № 2. P. 183–198.
8. Болотник Н.Н., Нунупаров А.М., Чащухин В.Г. Капсульный вибрационный робот с электромагнитным приводом и возвратной пружиной: динамика и управление движением // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 6. С. 146–160.
9. Liu Y., Pavlovskaya E., Wiercigroch M. Experimental verification of the vibro-impact capsule model // Nonlin. Dyn. 2016. V. 83. P. 1029–1041.
10. Huda M.N., Yu H., Cang S. Behavior-based control approach for the trajectory tracking of an underactuated planar capsule robot // IET Control Theory&Appl. 2015. V. 9. P. 163–175.
11. Черноусько Ф.Л. Движение тела по плоскости под влиянием подвижных внутренних масс // Доклады АН. 2016. Т. 470. № 4. С. 406–410.
12. Chernousko F.L. Two-dimensional motions of a body containing internal moving masses // Meccanica. 2016. V. 51. № 12. P. 3203–3209.
13. Chernousko F.L. Optimal motions of bodies controlled by internal moving masses // IFAC Paper-Online 51–32. 2018. P. 1–6.
14. Zhan X., Xu J., Fang H. A vibration-driven planar locomotion robot – Shell // Robotica. 2018. V. 36. № 9. P. 1402–1420.
15. Xu J., Fang H. Improving performance: recent progress on vibration-driven locomotion systems // Nonlin. Dyn. 2019. V. 98. № 4. P. 2651–2669.

Control of Plane Movements of a Body by Means of a Movable Mass**F. L. Chernousko^{a,#}**^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*[#] *e-mail: chern@ipmnet.ru*

Controlled movements of a rigid body along a horizontal plane are considered in the presence of dry friction forces acting between the body and the plane. The control is implemented by means of an auxiliary point mass equipped with an actuator and moving relative to the body. It is shown that, under certain general conditions, the system is completely controllable and can be transferred from an arbitrary initial state to the any prescribed terminal state. The situation under consideration is a model for the dynamics of rotational motions of mobile capsule robots.

Keywords: rigid body, dynamics, mobile robot, dry friction, controllability

REFERENCES

1. *Chernous'ko F.L.* Analysis and optimization of the motion of a body controlled by means of a movable internal mass // JAMM, 2006, vol. 70, iss. 6, pp. 819–842.
2. *Li H., Furuta K., Chernousko F.L.* Motion generation of the capsobot using internal force and static friction // in: Proc. 45th IEEE Conference on Decision and Control. 2006, pp. 6575–6580.
3. *Chernous'ko F.L.* The optimal periodic motions of a two-mass system in a resistant medium // JAMM, 2008, vol. 72, iss. 2, pp. 116–125.
4. *Zimmermann K., Zeidis I., Bolotnik N., Pivovarov M.* Dynamics of a two-module vibration-driven system moving along a rough horizontal plane // Multibody Syst. Dyn., 2009, vol. 22, pp. 199–219.
5. *Fang H.B., Xu J.* Dynamic analysis and optimization of a three-phase control mode of a mobile system with an internal mass // J. Vibr.&Control, 2011, vol. 74, no. 4, pp. 443–451.
6. *Ivanov A.P., Sakharov A.V.* Dynamics of rigid body, carrying moving masses and rotor, on a rough plane // Nelin. Dinam., 2012, vol. 8, no. 4, pp. 763–772.
7. *Huda M.N., Yu H.* Trajectory tracking control of an underactuated capsobot // Autonom. Robots, 2015, vol. 39, no. 2, pp. 183–198.
8. *Bolotnik N.N., Nunuparov A.M., Chashchukhin V.G.* Capsule-type vibration-driven robot with an electromagnetic actuator and an opposing spring: Dynamics and control of motion // J. Comput.&Syst. Sci. Int., 2016, vol. 55, no. 6, pp. 986–1000.
9. *Liu Y., Pavlovskaya E., Wiercigroch M.* Experimental verification of the vibro-impact capsule model // Nonlin. Dyn., 2016, vol. 83, pp. 1029–1041.
10. *Huda M.N., Yu H., Cang S.* Behavior-based control approach for the trajectory tracking of an underactuated planar capsule robot // IET Control Theory&Appl., 2015, vol. 9, pp. 163–175.
11. *Chernousko F.L.* Motion of a body along a plane under the influence of movable internal masses // Dokl. Phys., 2016, vol. 61, pp. 494–498.
12. *Chernousko F.L.* Two-dimensional motions of a body containing internal moving masses // Meccanica, 2016, vol. 51, no. 12, pp. 3203–3209.
13. *Chernousko F.L.* Optimal motions of bodies controlled by internal moving masses // IFAC Paper-OnLine 51–32, 2018, pp. 1–6.
14. *Zhan X., Xu J., Fang H.* A vibration-driven planar locomotion robot – Shell // Robotica, 2018, vol. 36, no. 9, pp. 1402–1420.
15. *Xu J., Fang H.* Improving performance: recent progress on vibration-driven locomotion systems // Nonlin. Dyn., 2019, vol. 98, no. 4, pp. 2651–2669.

УДК 531.36

**ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ СИСТЕМ С УПРУГИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ
И СУХИМ ТРЕНИЕМ**© 2021 г. М. З. Досаев^{1,*}, В. А. Самсонов¹¹ НИИ механики МГУ, Москва, Россия

*e-mail: dosayev@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 10.12.2020 г.

После доработки 31.01.2021 г.

Принята к публикации 11.02.2021 г.

Обсуждаются некоторые особенности поведения тела с двумя упругими опорами на плоскости с сухим трением. Уравнения движения представляют собой динамическую систему переменной структуры. Выявлен парадокс, состоящий в том, что в определенном положении, казалось бы, очевидного равновесия, условия равновесия не выполняются. Сила сухого трения не в состоянии удержать тело в этом положении. Описано движение, в процессе которого происходит скольжение одной или обеих опор в зависимости от величины коэффициента трения.

Ключевые слова: упругая сила, сухое трение, динамическая система переменной структуры

DOI: 10.31857/S0032823521040056

1. Введение. При подготовке кандидатского минимума в 1963-м году Валентин Витальевич Румянцев обратил внимание старшего из соавторов на раздел № 375 книги [1] под названием “О трудностях, возникающих при приложении обычно принимаемых эмпирических законов трения. Исследования Пенлеве.” После некоторых изысканий, которые поддерживал Валентин Витальевич, возникла задача о динамике тормозной колодки, вошедшая в брошюру [2], в которой обосновано явление “удара трением”, как и в [3]. В [4] для “смягчения удара” введены упругие элементы в зону контакта и обнаружены некоторые особенности функционирования тормоза в условиях “удара”. В [5] описано поведение колодки после одноразового удара. Затем эта задача обсуждалась в рамках двух грантов РНФ [6, 7]. В [6], в частности, экспериментально подтверждены некоторые качественные выводы работы [5]. Но модель с упругими элементами [8] оказалась более богатой на эффекты. Динамическая система, описывающая взаимодействие силы упругости с силой трения, имеет переменную структуру. Изменчивость структуры даже после линеаризации уравнений придает системе свойства, характерные для нелинейных систем. В таких системах, в зависимости от режима движения, есть несколько особых точек. В частности, в [8] были обнаружены два характерных типа движения: демпфирование колебаний колодки после остановки колеса и колебания колодки с увеличением амплитуды и одновременное “дребезжание” колеса с постоянной амплитудой и частотой. Показано, что из-за сухого трения при наличии крутящего момента колодка начинает колебаться даже из предыдущего положения статического равновесия. Интерес к проявлению подобных свойств побудил авторов провести более детальный анализ взаимодействия сухого

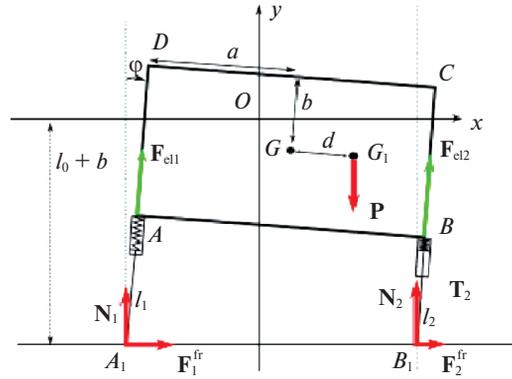


Рис. 1. Механическая система.

трения и упругих элементов конструкции в типовой задаче теоретической механики, частично описанных в [9] и дополненных в настоящей работе.

2. Объект исследования. Пусть тяжелое тело (рис. 1) массой m , для простоты, прямоугольной формы $ABCD$ ($AB = 2a$, $AD = 2b$), с двумя одинаковыми телескопическими пружинными опорами AA_1 и BB_1 совершает плоско-параллельное движение, опираясь на горизонтальную шероховатую плоскость. Когда опоры не напряжены, их длина $AA_1 = BB_1 = l_0$. Центр тяжести G_1 прямоугольника смещен от центра прямоугольника G вдоль прямой DC на расстояние d . Пружины действуют на тело силами $F_{el1} = -k(l_1 - l_0) - h\dot{l}_1$, $F_{el2} = -k(l_2 - l_0) - h\dot{l}_2$, где k – коэффициент жесткости, h – коэффициент демпфирования пружин.

На систему кроме силы тяжести $m\mathbf{g}$ (\mathbf{g} – ускорение свободного падения), действуют нормальные N_1 , N_2 и тангенциальные F_{fr1} , F_{fr2} реакции опор, которые в случае скольжения опорных ног связаны между собой по закону Кулона:

$$F_{fr1} = -\mu \operatorname{sign}(V_{x_A}) |N_1|, \quad F_{fr2} = -\mu \operatorname{sign}(V_{x_B}) |N_2| \quad (2.1)$$

В случае, если опорная нога находится в покое, значение соответствующей тангенциальной реакции $F_{fr1} = F_{fr1stat}$, $F_{fr2} = F_{fr2stat}$ определяется из других характеристик движения.

Введем систему отчета Oxy : ось Ox параллельна плоскости опоры и находится от нее на расстоянии $l_0 + b$, ось Oy – вертикальна.

В качестве обобщенных координат выберем координаты центра масс x_{G_1} , y_{G_1} и угол φ между вертикалью и боковыми сторонами прямоугольника. Отметим, что координата x_{G_1} , очевидно, циклическая.

Исследуем возможные типы поведения системы.

Рассматриваемая система – система переменной структуры. В общем случае, при скольжении обеих ног, у нее три степени свободы. При этом у системы есть две колебательные координаты y_{G_1} , φ . Как минимум, система – двухчастотная. В условиях сильно разнесенных частот возможны разные типы переходов движения, в частности, угловые колебания могут затухнуть быстрее, чем продольные. При этом точки опоры тела начинают совершать быстрые колебания с изменением направления скорости, тело начинает “пританцовывать”.

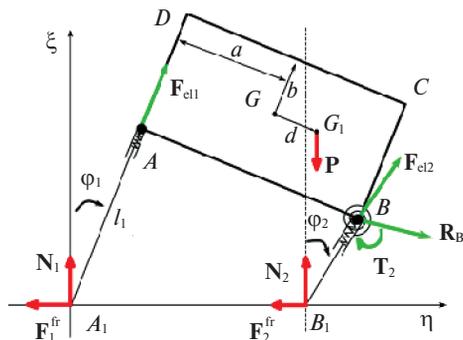


Рис. 2. Моделирование податливости правой опоры на поворот.

В промежутки времени, когда одна из опор не скользит, у системы две степени свободы. Это эквивалентно наложению связи $x_{A_1} = \text{const}$ или $x_{B_1} = \text{const}$. Вторая опора останавливается только в те моменты времени, когда угловая скорость обратится в нуль.

Когда обе ноги не скользят, система имеет одну степень свободы, тело может перемещаться только поступательно вдоль линии AA_1 (BB_1). При этом $\varphi = \text{const}$, а координаты центра масс связаны между собой через эту постоянную угла наклона.

2.1. *Первая особенность.* Рассмотрим следующее положение тела:

$$\varphi = 0, \quad (x_{G_1}, y_{G_1}) = (d, -mg/2k) \quad (2.2)$$

Пусть пружины уравновешены силой тяжести. При $d = 0$ система симметрична и положение (2.2) является равновесием. Имеем $N_1 = N_2 = mg/2$, $F_{\text{fr}1} + F_{\text{fr}2} = 0$. Система статически неопределима.

Однако, если $d \neq 0$, то условия равновесия, очевидно, не выполняются ни при каком y_{G_1} . Это обстоятельство при большом желании можно считать парадоксом. И для разрешения этого “парадокса”, следуя [9], введем податливость правой опоры на поворот. Предположим, что направляющая правой опоры крепится к корпусу с помощью цилиндрического шарнира, оснащенного спиральной пружиной (рис. 2) жесткости c , которую мы будем считать *большим* параметром, так как нас интересует предельный переход $c \rightarrow \infty$.

В этом случае число степеней свободы вырастает на единицу. Введем дополнительные координаты: $x = l_0 - l_1$ — удлинение левого опорного стержня, и угол φ_2 между вертикалью и правым стержнем BB_1 : $\varphi_2 = \arctg\left(\frac{2a(\cos \varphi - 1) + (l_0 - x)\sin \varphi}{(l_0 - x)\cos \varphi - 2a\sin \varphi}\right) \approx \varphi + a\varphi^2/l_0 + \dots$ Длина правого стержня при этом:

$$l_2 = \sqrt{(2a(\cos \varphi - 1) + (l_0 - x)\sin \varphi)^2 + ((l_0 - x)\cos \varphi - 2a\sin \varphi)^2}$$

Величина внутреннего крутящего момента T_2 спиральной пружины зависит от разности углов ориентации опорных стержней: $T_2 = c(\varphi_2 - \varphi) \approx ca\varphi^2/l_0 + o(\varphi^2)$.

Рассмотрим вновь равновесие тела. Выпишем потенциальную энергию системы:

$$\Pi = mgy_{G_1}(\varphi, x) + \frac{c(\varphi_2(\varphi, x) - \varphi)^2}{2} + \frac{kx^2}{2} + \frac{k(l_2(\varphi, x) - l_0)^2}{2}$$

Заметим, что *потенциальная энергия спиральной пружины зависит от угла φ в четвертой степени, поэтому традиционная процедура линеаризации уравнений равновесия здесь бесполезна даже при малых значениях параметра d , т.к. “большой” параметр не войдет в линейные уравнения.*

Представим решение уравнений равновесия $\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0$; $\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0$ в виде ряда по степеням $c^{-1/3}$:

$$\varphi^* = 0.5mga^{-2}l_0^2c^{-1/3}d + o(c^{-1/3}), \quad x^* = mg/2k + O(c^{-1/3}) \quad (2.3)$$

Теперь определим реакции опор в положении равновесия из уравнений:

$$\begin{aligned} N_2 &= mg - N_1 \\ F_{\text{тр}1} + F_{\text{тр}2} &= 0 \\ F_{\text{тр}2}l_2 \cos \varphi_2 + N_2l_2 \sin \varphi_2 &= T_2 \\ N_1 \cos \varphi^* - F_{\text{ел}1} - F_{\text{тр}1} \sin \varphi^* &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из (2.4) получим выражение для тангенциальной реакции правой опоры:

$$F_{\text{тр}2} = \cos \varphi^* [c(\varphi_2 - \varphi^*)/l_2 - (mg - kx^*/\cos \varphi^*) \sin \varphi_2] / \cos(\varphi_2 - \varphi^*) \quad (2.5)$$

Подставив решение (2.3) в (2.4), получим следующее приближение для силы $F_{\text{тр}2}$:

$$F_{\text{тр}2} = a^2\varphi^{*2}c/l_0^2 + O(\varphi, x) \approx 0.25m^2g^2a^{-2}l_0^2c^{1/3}d^2$$

Очевидно, что при стремлении коэффициента c к бесконечности, величины тангенциальных реакций также стремятся к бесконечности. Действительно, пара бесконечных сил даже с нулевым плечом может создать момент, необходимый для равновесия системы при $\varphi = 0$ и $d \neq 0$. Во всяком случае, эти реакции *не реализуемы* силами сухого трения, и хотя бы одна из ног вынуждена начать скольжение.

Отметим, что в случае $\mu = 0$ скользить будут обе ноги. Из положения покоя (2.2) тело наклонится, а его центр масс опустится строго по вертикали.

2.2. Вторая особенность. Вернемся к исходной задаче ($c = \infty$). Положение равновесия $\{\varphi^*, y_{G_1}^*\}$ системы не зависит от наличия тангенциальных реакций и может быть получено из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} y_{G_1}^* &= -mg \cos^2 \varphi / (2k) + (b + l_0)(\cos \varphi - 1) - d \sin \varphi \\ mg(mg \sin \varphi - 2dk) \cos^4 \varphi - 2mgk(b + l_0) \cos^3 \varphi \sin \varphi + 4a^2k^2 \sin \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Очевидно, что при любом заданном φ^* величина d определяется однозначно. Причем в области малых значений φ^* эти значения практически линейно зависят от d :

$$\begin{aligned} y_{G_1}^* &\approx -mg/(2k) - d\varphi \\ \varphi^* &\approx 2dkmg/(m^2g^2 - 2mgk(b + l_0) + 4a^2k^2), \end{aligned}$$

вследствие чего, в этой области зависимости $\varphi^*(d)$, $y_{G_1}^*(d)$ однозначные. Отметим, что у механической системы не существует другого положения равновесия, кроме положений (2.6), найденных для случая гладкой плоскости. В отличие от других задач с сухим трением, положение равновесия – изолированное! В этой задаче *не существует привычной для задач с сухим трением “зоны застоя”* по наклону!

3. Динамика системы.

3.1. Уравнения движения при скольжении обеих ног. Очевидно, если трение отсутствует или достаточно мало, то в процессе движения скользят обе точки опоры. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}_{G_1} &= F_{fr1} + F_{fr2} \\
m\ddot{y}_{G_1} &= -mg + N_1 + N_2 \\
J\ddot{\varphi} &= N_1((l_1 + b) \sin \varphi + (a + d) \cos \varphi) - N_2(-(l_2 + b) \sin \varphi + \\
&\quad + (a - d) \cos \varphi) - (F_{fr1} + F_{fr2})(l_0 + b + y_{G_1})
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь J – центральный момент инерции тела, l_1 – длина левого опорного стержня AA_1 , l_2 – длина правого опорного стержня BB_1 .

Величины нормальных реакций в точках опор определяем из следующих соотношений:

$$N_1 = F_{el1} \cos \varphi, \quad N_2 = F_{el2} \cos \varphi$$

3.2. Скольжение одной ноги. Предположим, что скорость правой точки опоры оказалась равной нулю. Если в дальнейшие мгновения точка B_1 будет неподвижна, то число степеней свободы уменьшилось на единицу, динамическая система должна содержать два уравнения второго порядка. В качестве обобщенных переменных оставим вертикальную координату центра масс y_{G_1} и угол φ . Уравнения движения принимают вид:

$$\begin{aligned}
m\ddot{y}_{G_1} &= -mg + N_1 + N_2 \\
\ddot{\varphi} &= (2aN_1/\cos \varphi - mg(-(l_2 + b) \sin \varphi + (a - d) \cos \varphi) - \dot{J}_{B_1}\dot{\varphi})/J_{B_1},
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где J_{B_1} – момент инерции тела относительно точки B_1 .

Отметим, что при таком “вращении” системы вокруг точки B_1 скорость точки A_1 может быть равной нулю, только одновременно с равенством нулю угловой скорости $\dot{\varphi}$.

Теперь необходимо определить горизонтальную реакцию в точке B_1 . Положение центра масс можно определить из следующего геометрического соотношения:

$$x_{G_1} = x_{B_1} + (l_2 + b) \sin \varphi - (a - d) \cos \varphi \tag{3.3}$$

Дважды дифференцируя (3.3), получим зависимость ускорения центра масс:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_{G_1} &= -\dot{\varphi}^2 ((l_2 + b) \sin \varphi - (a - d) \cos \varphi) + \ddot{\varphi} ((l_2 + b) \cos \varphi + (a - d) \sin \varphi) + \\
&\quad + \frac{dl_2}{dt} \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{d^2 l_2}{dt^2} \sin \varphi
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Из первого уравнения (2.6) определим значение горизонтальной реакции в правой точке: $F_{fr2stat} = m\ddot{x} - F_{fr1} = m\ddot{x} + \mu \operatorname{sign}(V_{x_{A1}}) |N_1|$.

Вычислим знак разности $\Delta = \mu N_2 - \operatorname{abs}(F_{fr2stat})$. Если выполнено:

$$\Delta \geq 0, \tag{3.5}$$

то опорная точка находится в конусе трения и останется неподвижной в течение некоторого промежутка времени. В противном случае скорость опорной точки меняет знак, и она продолжит движение в противоположную предыдущему движению сторону.

Выберем в качестве начальных условий для движения положение (2.2) с нулевыми скоростями:

$$\varphi = 0, \quad (x_{G_1}, y_{G_1}) = (d, -mg/2k), \quad \dot{\varphi} = 0, \quad \dot{x}_{G_1} = 0, \quad \dot{y}_{G_1} = 0 \tag{3.6}$$

Тогда неравенство (3.5) примет следующий вид:

$$\mu > \mu_2 = 2 |md(l_0 - 0.5mg/k + b)| / (J + m((a - d)^2 + (l_0 + b - 0.5mg/k)^2) \tag{3.7}$$

В этом случае правая опора не начнет скользить. Для $\mu < \mu_2$ обе ноги с самого начала начнут скольжение. Аналогичные рассуждения возможно провести и в случае остановки левой точки A_1 .

4. Численный счет. В силу жесткости механической системы при малых скоростях и углах вблизи положения равновесия могут возникать быстрые переключения действия сил (например, при изменении направления скорости опорной точки, движении опорных точек в разные стороны и т.д.). Эти переключения трудно контролировать при численном счете. Сказываются довольно случайные процессы, такие как ошибки счета, и всякие округления. Например, при расчете ускорения центра масс (соответственно и скоростей точек опоры) возникают нерегулярные, почти мгновенные отклонения (всплески, дергания) расчетных величин от основной расчетной траектории. Причем, при расчете методом Рунге–Кутта высокого порядка эти всплески ускорения могут быть абсолютно незаметны на поведении скорости и координаты центра масс, представляющие собой довольно гладкие функции времени.

Результаты численного счета продемонстрируем на следующем наборе параметров:

$$b = 100, \quad a = 2b, \quad l_0 = 0.05b, \quad m = 0.1, \quad k = 1, \quad g = 10 \\ c = 0, \quad J = 1, \quad d = a/20$$

Решив систему (2.5), определим положения равновесия для выбранного набора параметров:

$$\{\varphi^*, y_{G_1}^*\} = \{0.000125163, -0.5012524495\} \quad (4.1)$$

Выберем (3.6) в качестве начальных условий. Начальные координаты центра масс системы следующие: $(x_{G_1 0}, y_{G_1 0}) = (d, -mg/2k) = (10, -0.5)$. Система при ненулевом трении будет совершать переход из начального положения в равновесное (4.1). Так как $d > 0$, правая опора более нагружена, чем левая. Поэтому следует ожидать, что после старта системы первой остановится правая опорная точка B_1 .

Определим значение коэффициента трения, при котором для выбранных начальных условий правая точка опоры не начинает скольжение:

$$\mu_2 \approx 0.04444 \quad (\text{для правой опоры}) \quad (4.2)$$

Численный расчет движения системы проведен для нескольких значений коэффициента демпфирования в широком диапазоне значений коэффициента трения μ .

4.1. Расчет для малого трения. Для начала рассмотрим поведение системы при нулевом значении коэффициента демпфирования h и малых коэффициентов трения μ . На рис. 3 изображены полученные колебания (красные кривые $\mu = 0$, зеленые кривые $\mu = 0.001$, синие кривые $\mu = 0.002$).

В отсутствие демпфирования и трения система консервативна и ее центр масс может двигаться только по вертикали. При этом тело совершает незатухающие угловые колебания около равновесного значения φ^* . Точки опоры колеблются с такой же частотой около некоторого их положения. При введении малого трения амплитуда этих колебаний убывает. Центр масс системы постоянно, хотя и неравномерно смещается вправо. Его горизонтальная скорость $V_{x_{G_1}}$, отслеживая колебания опорных точек, “дребезжит”, чередуя участки практически линейного роста и линейного уменьшения. Разделяет эти участки кратковременное движение с почти постоянной скоростью $V_{x_{G_1}}$. Это связано с тем, что опоры на этом интервале скользят в разные стороны. С увеличением трения амплитуда колебаний угла наклона уменьшается, амплитуда дребезга скорости центра масс увеличивается.

4.2. Влияние демпфирования. В случае гладкой опоры ($\mu = 0$) с увеличением коэффициента демпфирования система ведет себя как обычная колебательная система. Значение коэффициента демпфирования $h = h^* = 2\sqrt{2mk}$, назовем критическим. При h^* затухание колебаний происходит аperiодически (и быстрее, чем для любых других значений h). Для выбранного набора параметров $h^* = 0.89443$.

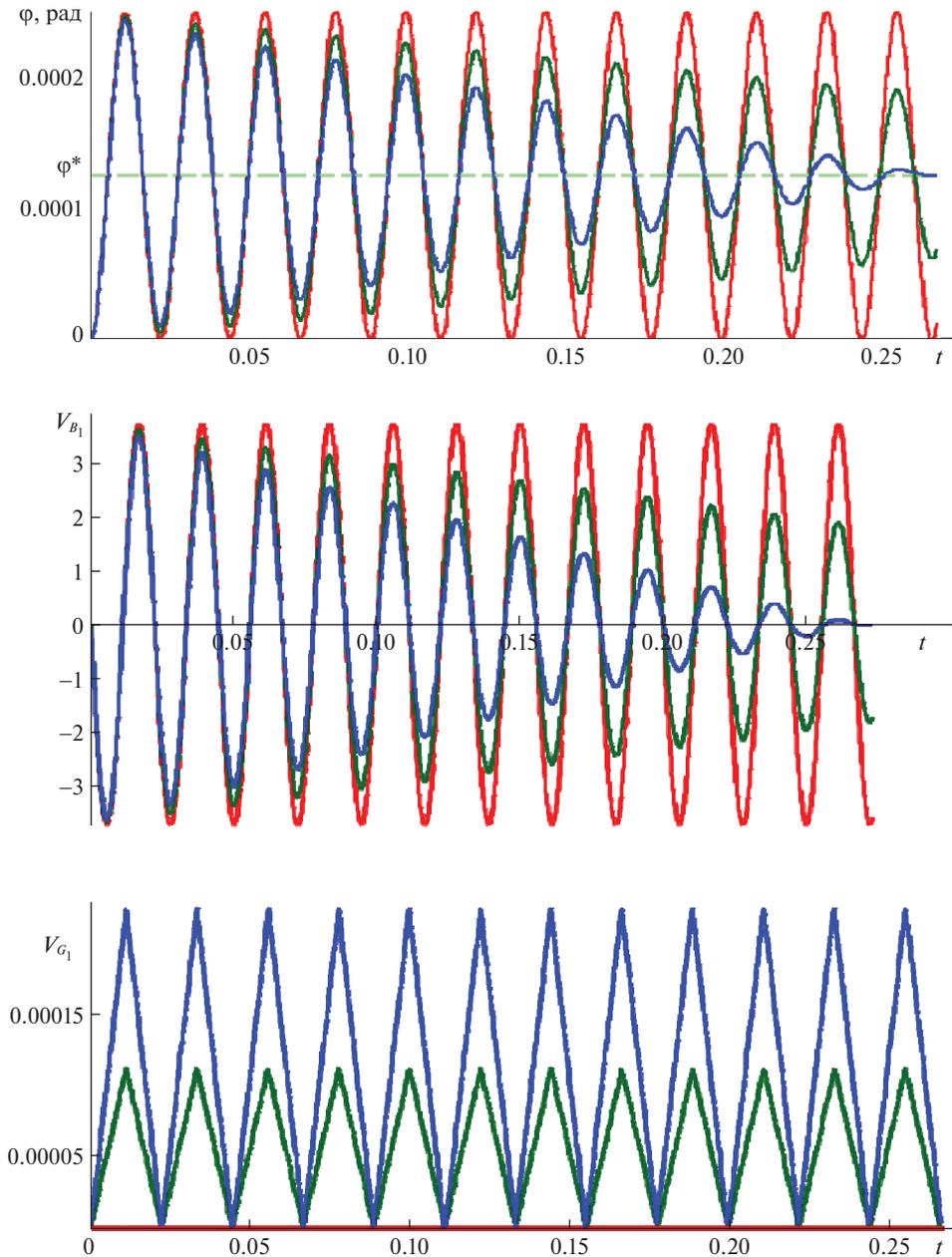


Рис. 3. Колебания при нулевом демпфировании и малом трении (красные кривые $\mu = 0$; зеленые кривые $\mu = 0.001$; синие кривые $\mu = 0.002$).

4.3. Влияние сухого трения. Рассмотрим эволюцию переходного движения с дальнейшим ростом коэффициента трения μ . На рис. 4 показан результат расчета с учетом возможных остановок точек опоры при $h = 0.0001$ для $\mu = 0.02$ и $\mu = 0.05$ цветными кривыми (розовые кривые – расчет системы (3.1), синие кривые – расчет системы (3.2))

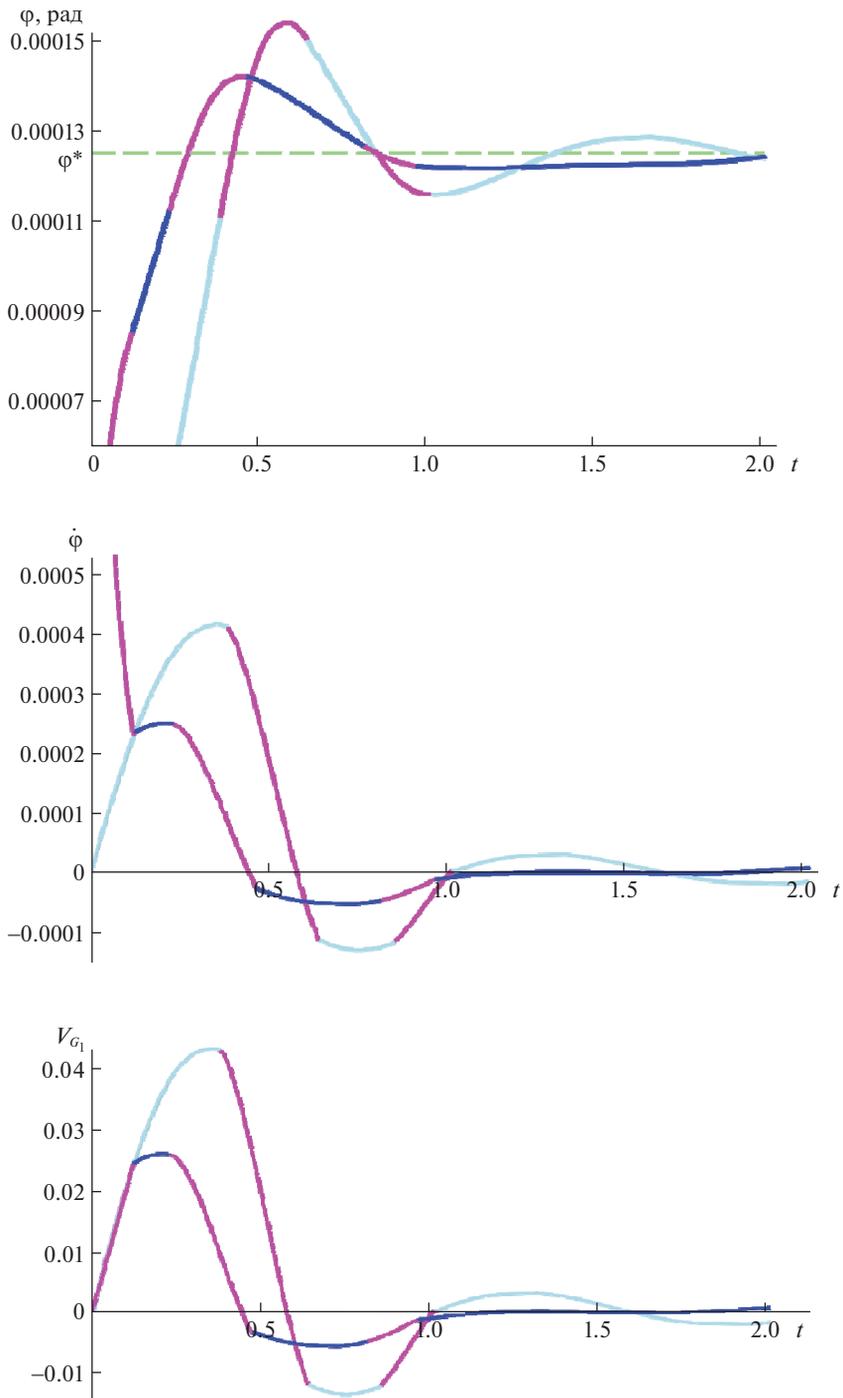


Рис. 4. Колебания при малом демпфировании и малом трении (розовые кривые – правая опора скользит; синие ($\mu = 0.02$) и голубые ($\mu = 0.05$) кривые – правая опора покоится).

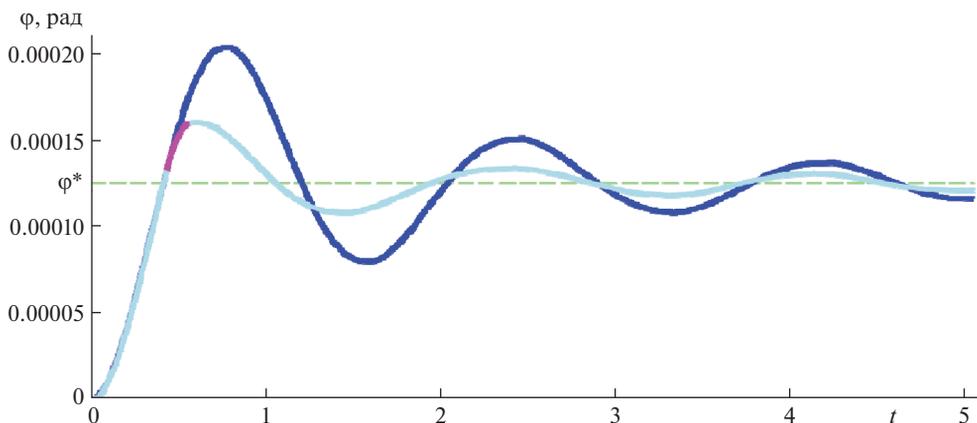


Рис. 5. Зависимость угла φ от времени для $\mu = 0.1$ (голубая кривая – правая нога покоится и розовая кривая – правая опора скользит) и $\mu = 0.25$ (синяя кривая).

($\mu = 0.02$), голубые кривые – расчет системы (3.2)) ($\mu = 0.05$). Оба этих значения далеки от критического значения коэффициента трения для левой точки. При этом $\mu = 0.02$ почти в 2 раза меньше, а $\mu = 0.05$ чуть больше критического значения μ_2 коэффициента трения (4.2) для правой точки.

При $\mu = 0.02$ правая опора в начальный момент начинает скольжение. Однако в некоторых фазах качания тела эта опора останавливается. Происходит чередование режимов покоя и скольжения точки B_1 .

При $\mu = 0.05$, наоборот, правая опора сначала покоится, но потом в некоторых фазах качания тела она начинает проскальзывать.

4.4. Коэффициент трения, при котором правая опора не начинает скольжение. Представляет интерес оценить значение коэффициента трения, при котором правая опора так и не начнет скольжение. Для получения такой оценки проведена серия расчетов. С ростом μ промежуток времени, на котором правая опора может скользить, уменьшается. Начиная с некоторого значения μ , правая опора не будет скользить во все время переходного процесса. Мы не ставили задачу точного определения такого значения. Ниже (рис. 5) представлены графики расчета переходного процесса для значений $\mu = 0.1$ и $\mu = 0.25$.

В отличие от случая $\mu = 0.1$, при $\mu = 0.25$ правая опора покоится все время переходного периода.

Заключение. Рассмотрена задача о поведении тела с упругими опорами на плоскости с сухим трением. Показано, что введение податливости лишь по части связей может вызвать внутренний “конфликт” со связями, которые остались твердыми, приводящий к резкому увеличению их необходимых реакций и практически к отсутствию возможности реализации этих связей.

Даже простейшее переходное движение тела из некоторого состояния покоя в положение равновесия сопровождается проскальзыванием одной или обеих опор в зависимости от величины коэффициента трения. Отличие между гладкой и шероховатой опорными плоскостями проявляется в том, что для последней центр масс тела имеет тенденцию смещения вправо при $d > 0$ (влево при $d < 0$).

Для коэффициента трения есть несколько областей значений, при которых процесс перехода к положению равновесия происходит качественно по-разному.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. Динамика системы. Аналитическая механика. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1960.
2. *Самсонов В.А.* Очерки о механике: некоторые задачи, явления и парадоксы. М.: Физматлит, 1980. 63 с.
3. *Болотов Е.А.* О движении плоской фигуры, стесненной связями с трением // Моск. мат. об-во, Матем. сб. 1906. Т. 25. №. 4. С. 562–708.
4. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Парадоксы Пэнлеве и динамика тормозной колодки // ПММ. 1995. Т. 59. № 3. С. 366–375.
5. *Самсонов В.А.* Динамика тормозной колодки и удар трением // ПММ. 2005. Т. 69. № 6. С. 912–921.
6. *Иванова Т.Б., Ердакова Н.Н., Караваяев Ю.Л.* Экспериментальное исследование динамики тормозной колодки // Доклады АН. 2016. Т. 471. № 4. С. 421–424.
7. *Журавлев В.Ф.* О “парадоксе” тормозной колодки // Доклады АН. 2017. Т. 474. № 3. С. 301–302.
8. *Dosaev M.* Features of interaction of a brake shoe with a wheel // Appl. Math. Model. 2021. V. 91. P. 959–972.
9. *Dosaev M., Samsonov V., Klimina L., Lokshin B., Hwang S.S., Selyutskiy Y.* Braking of a solid body supported by two supports on a horizontal rough plane // in: ROMANSY 23 – Robot Design, Dynamics and Control. ROMANSY 2020. CISM Int. Centre for Mech. Sci. (Courses and Lectures) V. 601. / Ed. by *Venture G. et al.* Cham: Springer, 2021.

Peculiarities of Dynamics of Systems with Elastic Elements and Dry Friction

M. Z. Dosaev^{a,#} and V. A. Samsonov^a

^a *Institute of Mechanics of LMSU, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: dosayev@imec.msu.ru*

Some features of the behavior of a body with two elastic supports on a plane with dry friction are discussed. The equations of motion constitute a dynamic system with variable structure. The paradox is revealed that in a certain position of a seemingly obvious equilibrium, the equilibrium conditions are not met. A dry friction force is unable to keep the body in this position. The body motion is described, during which one or both supports slide depending on the value of the coefficient of friction.

Keywords: elastic force, dry friction, dynamic system with variable structure

REFERENCES

1. *Appell P.* Traité de mécanique rationnelle. Vol. 2. Paris: Gauthier-Villars, 1926-1932.
2. *Samsonov V.A.* Essays on Mechanics: Some Problems, Phenomena and Paradoxes. Moscow: Fizmatlit, 1980. 63 p.
3. *Bolotov E.A.* On the motion of a plane figure constrained by frictional constraints // Mosk. Mat. Soc. Mat. Sb., 1906, vol. 25, no. 4. pp. 562–708. (in Russian)
4. *Neimark Yu.I., Fufayev N.A.* The Painlevé paradoxes and the dynamics of a brake shoe // JAMM, 1995, vol. 59, no. 3, pp. 343–352.
5. *Samsonov V.A.* The dynamics of a brake shoe and “impact generated by friction” // JAMM, 2005, vol. 59, no. 6, pp. 816–824.
6. *Ivanova T.B., Erdakova N.N., Karavaev Y.L.* Experimental investigation of the dynamics of a brake shoe // Dokl. Phys., 2016, vol. 61, no. 12, pp. 611–614.
7. *Zhuravlev V.P.* The “paradox” of a brake pad // Dokl. Phys., 2017, vol. 62, no. 5, pp. 271–272.
8. *Dosaev M.* Features of interaction of a brake shoe with a wheel // Appl. Math. Model., 2021, vol. 91, pp. 959–972.
9. *Dosaev M., Samsonov V., Klimina L., Lokshin B., Hwang S.S., Selyutskiy Y.* Braking of a solid body supported by two supports on a horizontal rough plane // in: ROMANSY 23 – Robot Design, Dynamics and Control. ROMANSY 2020. CISM Int. Centre for Mech. Sci. (Courses and Lectures) V. 601 / Ed. by *Venture G. et al.* Cham: Springer, 2021.

УДК 629.7.052

**О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕГУЛЯРНЫХ ПРЕЦЕССИЙ СПУТНИКА
ПРИ ПОМОЩИ МАГНИТНЫХ МОМЕНТОВ**© 2021 г. В. М. Морозов^{1,*}, В. И. Каленова^{1,**}, М. Г. Рак²¹ НИИ механики МГУ, Москва, Россия² МГУ, Москва, Россия

*e-mail: moroz@imec.msu.ru

**e-mail: kalenova44@mail.ru

Поступила в редакцию 08.02.2021 г.

После доработки 25.02.2021 г.

Принята к публикации 03.03.2021 г.

Рассматривается стабилизация регулярных прецессий динамически симметричного спутника, центр масс которого движется по круговой орбите в гравитационном и магнитном полях Земли. Управляющие моменты формируются за счет взаимодействия собственного дипольного момента спутника с магнитным полем Земли. Линеаризованные в окрестности регулярных прецессий уравнения движения представляют собой линейные нестационарные системы. Для решения задач стабилизации предлагается и развивается подход, основанный на приведении к стационарным системам большего, чем исходная система, порядков. Исследуется управляемость и строятся эффективные алгоритмы стабилизации.

Ключевые слова: стабилизация, регулярная прецессия, линейная нестационарная система, приводимость, управляемость, алгоритмы стабилизации

DOI: 10.31857/S003282352104010X

1. Введение. Электродинамическое взаимодействие спутника с магнитным полем Земли оказывает существенное влияние на динамику вращательного движения спутника вокруг центра масс и может быть использовано как для пассивной, так и для активной стабилизации. Особый интерес для этих задач представляют стационарные движения спутника (положения относительного равновесия и регулярные прецессии) при его движении по круговой орбите. Устойчивость этих стационарных движений в гравитационном поле подробно исследована в [1–9]. Влияние гравитационных, магнитных и аэродинамических моментов на устойчивость стационарных движений рассмотрено в [10–13]. Характер устойчивости не является асимптотическим, и вопрос о стабилизации этих движений тем или иным способом представляет практический интерес. Одним из таких способов является стабилизация при помощи магнитных систем, принцип действия которых основан на взаимодействии собственного магнитного момента спутника с внешним магнитным полем. Особенно много публикаций посвящено вопросам стабилизации положения относительного равновесия спутника. Обзор работ этого направления содержится в [14–19].

Работ, в которых рассматривается стабилизация вращательных движений динамически симметричного спутника при помощи магнитных моментов немного. В [20, 21] рассматривается задача стабилизации при помощи магнитных и лоренцевых моментов программного движения спутника, при котором ось симметрии расположена

вдоль местной вертикали или отклонена от нее на некоторый фиксированный угол, а сам спутник совершает медленное движение вокруг этой оси. Предполагается, что орбита – круговая экваториальная. Аналогичная задача рассматривается в [22]. Стабилизация при помощи магнитных моментов движения симметричного спутника вокруг оси, ортогональной плоскости круговой орбиты, рассмотрена в [23, 24].

Особенностью рассматриваемой задачи является то, что линеаризованные модели исследуемых задач представляют линейные нестационарные системы (ЛНС), так как управляющий момент является функцией геомагнитного поля, которое изменяется во время движения спутника по орбите вокруг Земли. Здесь, как и в большинстве работ этого направления, предполагается, что это изменение носит периодический характер, если орбита спутника – круговая. (Как отмечено в [18], это предположение вполне оправдано). Поэтому математическая модель рассматриваемых задач представляет собой систему дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Это обстоятельство вносит существенные трудности как в изучение управляемости системы, так и в разработку эффективных алгоритмов стабилизации.

Цель предлагаемой статьи – представить строгий аналитический подход к изучению рассматриваемой задачи стабилизации регулярных прецессий симметричного спутника при помощи магнитных моментов. Этот подход, заключающийся в приведении исходной нестационарной системы к стационарной системе большей размерности, был развит для ЛНС определенного класса и ранее применялся для решения ряда прикладных задач [25–29], в том числе для задачи стабилизации относительного равновесия спутника при использовании магнитных моментов [19, 30] и при использовании моментов лоренцевых сил [31].

Свойство приводимости системы к стационарной эффективно используется как при анализе управляемости, так и при построении алгоритмов стабилизации. При наличии свойства управляемости приведенной стационарной системы для нее строится оптимальный алгоритм стабилизации, основанный на LQR-методе на бесконечном интервале времени, который позволяет построить управление в виде обратной связи с постоянными коэффициентами, обеспечивающее асимптотическую устойчивость стационарной системы. Построенное стабилизирующее управление вводится в исходную нестационарную систему при помощи дополнительных переменных и соответствующего ограниченного преобразования, при этом коэффициенты обратной связи оказываются переменными. Исходная система, замкнутая таким управлением, также асимптотически устойчива.

Следует подчеркнуть, что выбор коэффициентов обратной связи, имеющий важное и принципиальное значение, при указанном подходе хорошо алгоритмизован и состоит из определения коэффициентов для стационарной системы при помощи стандартной процедуры LQR (при этом требуется задать лишь параметры функционалов) и преобразования к исходным переменным, которое строится конструктивным способом.

В работе получены линеаризованные уравнения управляемого движения для каждого типа прецессии при использовании магнитных моментов. Полученные нестационарные системы, относящиеся к классу приводимых систем, преобразуются к стационарным системам большей размерности, чем исходная система. Проведен анализ управляемости как для полученных стационарных систем, так и для исходных нестационарных систем. Для приведенных стационарных систем предложены оптимальные алгоритмы стабилизации, основанные на LQR-методе. Построенные управления при помощи конструктивного преобразования вводятся в исходные нестационарные системы. Работоспособность и эффективность предложенных алгоритмов подтверждается математическим моделированием.

2. Постановка задачи. Рассматривается движение динамически симметричного спутника около центра масс в гравитационном и магнитном полях Земли. Предполагается, что центр масс спутника движется по круговой орбите.

2.1. Системы координат и уравнения движения. Используются две правые системы координат:

$OXYZ$ – орбитальная система координат с началом в центре масс спутника: ось OZ направлена по радиус-вектору центра масс относительно притягивающего центра (центра Земли); OY – по нормали к плоскости орбиты, OX дополняет систему до правой тройки;

$Oxyz$ – полусвязная система координат (не участвующая в собственном вращении): ось Oz направлена по оси симметрии спутника. Переход от системы $OXYZ$ к системе $Oxyz$ осуществляется двумя поворотами. Первый поворот на угол α вокруг оси OX приводит к системе координат $Ox'y'z'$. Второй поворот на угол β вокруг оси Oy' приводит к системе $Oxyz$. Положение оси симметрии спутника задается двумя углами α, β . Третий угол ϕ – угол собственного вращения. Ориентация системы $Oxyz$ относительно орбитальной системы координат $OXYZ$ определяется таблицей направляющих косинусов [32]

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{e}_\tau & \mathbf{e}_n & \mathbf{e}_r \\ x & \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta \\ y & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ z & \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{array}$$

Здесь $\mathbf{e}_\tau, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_r$ – единичные векторы по направлениям касательной, нормали и радиус-вектора орбитальной системы координат.

Компоненты абсолютной угловой скорости спутника $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_c + \phi \mathbf{k}$ (\mathbf{k} – единичный вектор оси симметрии, $\boldsymbol{\omega}_c$ – угловая скорость системы координат $Oxyz$) в проекциях на оси $Oxyz$ имеют вид

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\alpha} \cos \beta + \omega_0 \sin \alpha \sin \beta, & \omega_y &= \dot{\beta} + \omega_0 \cos \alpha \\ \omega_z &= \dot{\alpha} \sin \beta - \omega_0 \sin \alpha \cos \beta + \dot{\phi}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где ω_0 – угловая скорость орбитального движения.

Динамические уравнения движения спутника около центра масс имеют вид [5]

$$J\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}_c \times J\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_g + \mathbf{M} \quad (2.2)$$

Здесь $J = \text{diag}(J_1, J_1, J_3)$, ($J_1 \neq J_3$), J_j – главные центральные моменты инерции спутника, $\mathbf{M}_g = 3\omega_0^2(\mathbf{e}_r \times J\mathbf{e}_r)$ – гравитационный момент, \mathbf{M} – управляющий момент, который создается за счет взаимодействия собственного дипольного момента, формируемого магнитными катушками, с магнитным полем Земли: $\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{b}(t)$, $\mathbf{m} = (m_1 \ m_2 \ m_3)^T$ – магнитный дипольный момент спутника, $\mathbf{b}(t)$ – вектор индукции геомагнитного поля, которое описывается прямым магнитным диполем в орбитальной системе координат [33]

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\mu_E}{R^3} \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t \sin I \\ -\cos I \\ 2 \sin \omega_0 t \sin I \end{bmatrix} = \frac{\mu_E}{R^3} (b_1 \mathbf{e}_\tau + b_2 \mathbf{e}_n + b_3 \mathbf{e}_r),$$

где $b_1 = \sin I \cos \omega_0 t$, $b_2 = -\cos I$, $b_3 = 2 \sin I \cos \omega_0 t$, I – угол наклона плоскости орбиты спутника к плоскости экватора; μ_E – постоянная магнитного поля Земли, R – радиус орбиты центра масс спутника.

В полусвязной системе координат вектор индукции имеет вид

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\mu_E}{R^3} (B_1 \ B_2 \ B_3)^T,$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= b_1 \cos \beta + b_2 \sin \alpha \sin \beta - b_3 \cos \alpha \sin \beta \\ B_2 &= b_2 \cos \alpha + b_3 \sin \alpha \\ B_3 &= b_1 \sin \beta - b_2 \sin \alpha \cos \beta + b_3 \cos \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

Далее будем считать, что собственный магнитный момент направлен по оси симметрии спутника, т.е. $\mathbf{m} = (0 \ 0 \ m)^T$.

Компоненты гравитационного \mathbf{M}_g и управляющего момента \mathbf{M} в системе координат $Oxuz$ имеют вид

$$\begin{aligned} M_{g1} &= 3\omega_0^2(J_3 - J_1) \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta \\ M_{g2} &= 3\omega_0^2(J_3 - J_1) \cos^2 \alpha \sin \beta \cos \beta \\ M_{g3} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= -B_2 m = \frac{\mu E}{R^3} (\cos I \cos \alpha - 2 \sin I \sin \alpha \sin \omega_0 t) m \\ M_2 &= B_1 m = \frac{\mu E}{R^3} (\sin I \cos \beta \cos \omega_0 t - \cos I \sin \alpha \sin \beta - 2 \sin I \cos \alpha \sin \beta \sin \omega_0 t) m \\ M_3 &= 0 \end{aligned}$$

Уравнения движения (2.2) с учетом полученных выражений для моментов представляются в виде

$$\begin{aligned} &J_1(\ddot{\alpha}c\beta - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}s\beta) + (2J_1\omega_0s\alpha c\beta + J_3r_0)\dot{\beta} + J_3\omega_0r_0c\alpha + \\ &+ (4J_1 - 3J_3)\omega_0^2s\alpha c\alpha c\beta = \frac{\mu E}{R^3}(cIc\alpha - 2sIs\alpha \sin \omega_0 t)m \\ &J_1\ddot{\beta} + J_1\dot{\alpha}^2s\beta c\beta - 2J_1\omega_0\dot{\alpha}s\alpha c^2\beta - J_1\omega_0^2s^2\alpha s\beta c\beta - J_3r_0(\dot{\alpha}c\beta + \omega_0s\alpha s\beta) - \\ &- 3\omega_0^2(J_3 - J_1)c^2\alpha s\beta c\beta = \frac{\mu E}{R^3}(sIc\beta \cos \omega_0 t - cIs\alpha s\beta - 2sIc\alpha s\beta \sin \omega_0 t)m \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь $r_0 = \dot{\alpha} s \beta + \dot{\phi} - \omega_0 s \alpha c \beta = \text{const}$. Для краткости записи введены обозначения

$$sI = \sin I, \quad cI = \cos I, \quad s\alpha = \sin \alpha, \quad c\alpha = \cos \alpha, \quad s\beta = \sin \beta, \quad c\beta = \cos \beta$$

Переходя в уравнениях (2.3) к безразмерным переменным, вводя обозначения $\tau = \omega_0 t$, $\mu_0 = \frac{\mu E}{R^3 \omega_0^2 J_1}$, $a = \frac{r_0}{\omega_0}$, $b = \frac{J_3}{J_1}$ и при этом, сохраняя старые обозначения для дифференцирования по τ , получим

$$\begin{aligned} &c\beta\ddot{\alpha} - 2s\beta\dot{\alpha}\dot{\beta} + (2s\alpha c\beta + ab)\dot{\beta} + abc\alpha + (4 - 3b)s\alpha c\alpha c\beta = \\ &= \mu_0(cIc\alpha - 2sIs\alpha \sin \tau)m \\ &\dot{\beta} + s\beta c\beta \dot{\alpha}^2 - 2s\alpha c^2\beta \dot{\alpha} - s^2\alpha s\beta c\beta - abc\beta \dot{\alpha} - abs\alpha s\beta - 3(b - 1)c^2\alpha s\beta c\beta = \\ &= \mu_0(sIc\beta \cos \tau - cIs\alpha s\beta - 2sIc\alpha s\beta \sin \tau)m \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.2. *Стационарные движения.* В отсутствии управляющих моментов ($m = 0$) уравнения (2.4) допускают стационарные решения (регулярные прецессии)

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0, \quad \dot{\alpha} = 0, \quad \dot{\beta} = 0, \quad \dot{\phi} = \Omega = \text{const}$$

Уравнения стационарных движений

$$\begin{aligned} c\alpha_0 [ab + (4 - 3b)s\alpha_0 c\beta_0] &= 0 \\ s\beta_0 [s^2\alpha_0 c\beta_0 + abs\alpha_0 + 3(b - 1)c^2\alpha_0 c\beta_0] &= 0 \end{aligned}$$

имеют известные решения, которые называют [4, 5] цилиндрической, гиперболоидальной и конической прецессиями:

1) $c\alpha_0 = 0, s\beta_0 = 0$ ($\alpha_0 = \frac{\pi}{2}, \beta_0 = 0$) ось симметрии перпендикулярна плоскости орбиты;

2) $c\alpha_0 = 0, \left(\alpha_0 = \frac{\pi}{2}\right), c\beta_0 = -ab$ ось симметрии перпендикулярна радиус-вектору;

3) $s\alpha_0 = \frac{ab}{3b - 4}, s\beta_0 = 0$ ($\beta_0 = 0$) ось симметрии перпендикулярна касательной к орбите.

3. Стабилизация стационарных движений. Требуется построить управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость стационарных движений, основываясь на линеаризованных для каждого стационарного движения уравнениях, которые являются нестационарными. Управляющий момент следует формировать в виде обратной связи по компонентам вектора состояния $\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$.

Заметим, что при линеаризации уравнений в окрестности стационарных движений, очевидно, линеаризуются выражения для управляющих моментов.

В соответствии с указанным во введении подходом к исследованию такого типа задач для каждого стационарного движения рассматриваются линеаризованные уравнения возмущенного движения. Эти уравнения приводятся к стационарным системам большего порядка. Управляемость в рассматриваемых задачах можно исследовать как исходя из нестационарных систем, так и анализируя приведенные стационарные системы. Исследование управляемости стационарной системы необходимо для построения корректных алгоритмов стабилизации, основанных на этих системах. Как уже указывалось, стационарная система является избыточной по отношению к исходной нестационарной системе. Если стационарная система управляема, то управляема и исходная система. Однако неуправляемость стационарной системы может и не повлечь неуправляемость исходной системы. Управляемость стационарных систем можно исследовать, выявляя условия существования в системе линейных интегралов, не зависящих от управления. А затем можно проверить управляемость исходных нестационарных систем в полученных критических случаях.

3.1. Линеаризация. Преобразование к стационарным системам. Управляемость. Цилиндрическая прецессия ($\alpha_0 = \frac{\pi}{2}, \beta_0 = 0$). В возмущенном движении положим

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + x_1, \quad \beta = x_2$$

Линеаризованные уравнения управляемого движения имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + k_1\dot{x}_2 - k_2x_1 &= -2sI \sin \tau u \\ \ddot{x}_2 - k_1\dot{x}_1 - k_3x_2 &= sI \cos \tau u \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $k_1 = 2 + ab, k_2 = 4 + ab - 3b, k_3 = 1 + ab, u = \mu_0 m$

Согласно [25], введем новые переменные y_j ($j = 1, \dots, 4$) по формулам

$$x_1 = y_1 \cos \tau + y_3 \sin \tau, \quad x_2 = y_2 \cos \tau + y_4 \sin \tau \quad (3.2)$$

Дважды дифференцируя эти соотношения, подставляя их в систему (3.1) и приравнявая коэффициенты при функциях $\cos \tau$, $\sin \tau$, получим стационарную систему

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + k_1 \dot{y}_2 + 2\dot{y}_3 - \bar{k}_2 y_1 + k_1 y_4 &= 0 \\ \ddot{y}_2 - k_1 \dot{y}_1 + 2\dot{y}_4 - \bar{k}_3 y_2 - k_1 y_3 &= sIu \\ \ddot{y}_3 - 2\dot{y}_1 + k_1 \dot{y}_4 - k_1 y_2 - \bar{k}_2 y_3 &= -2sIu \\ \ddot{y}_4 - 2\dot{y}_2 - k_1 \dot{y}_3 + k_1 y_1 - \bar{k}_3 y_4 &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь $\bar{k}_2 = k_2 + 1$, $\bar{k}_3 = k_3 + 1$.

На экваториальной орбите ($\sin I = 0$) система (3.1), очевидно, неуправляема.

Как известно [34], необходимым и достаточным условием управляемости стационарной системы второго порядка

$$\ddot{x} + G\dot{x} + Kx = Bu, \quad x(n \times 1)$$

является условие

$$\begin{aligned} \text{rank } U &= n, \quad U = [\lambda^2 E_n + G\lambda + R_2 : B] \\ \forall \lambda \in \Lambda, \quad \Lambda &= \det(\lambda^2 + G\lambda + K) = 0 \end{aligned}$$

Достаточные условия неуправляемости можно получить, если стационарная система (3.3) имеет линейный интеграл, не зависящий от управления. Определим условия наличия такого интеграла.

Умножим первое и четвертое уравнения системы (3.3) на постоянные величины α_1 и α_2 соответственно и сложим. Полученное соотношение не должно содержать слагаемых, зависящих от y_1, y_4 , т.е. должно выполняться:

$$\alpha_1(-\bar{k}_2 y_1 + k_1 y_4) + \alpha_2(k_1 y_1 - \bar{k}_3 y_4) = 0$$

Отсюда

$$-\alpha_1 \bar{k}_2 + \alpha_2 k_1 = 0, \quad \alpha_1 k_1 - \alpha_2 \bar{k}_3 = 0$$

Величины α_1 и α_2 не равны нулю, если

$$k_1^2 - \bar{k}_2 \bar{k}_3 = 0 \quad \text{или} \quad 3(2 + ab)(b - 1) = 0 \quad (3.4)$$

Возможны два случая: 1) $ab = -2$ и 2) $b = 1$.

При выполнении указанных условий линейный интеграл имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{y}_4 - 2y_3 &= \text{const} \quad \text{при} \quad ab = -2 \quad (k_1 = 0, \bar{k}_3 = 0) \\ \dot{y}_1 + \dot{y}_4 + a(y_2 - y_3) &= \text{const} \quad \text{при} \quad b = 1 \quad (k_1 = 2 + a, \bar{k}_2 = \bar{k}_3 = a + 2) \end{aligned}$$

Если умножить второе уравнение системы (3.3) на 2 и сложить с третьим, то новых условий существования интегралов не появится.

Условия (3.4) являются достаточными условиями неуправляемости стационарной системы (3.3). Используя критерий Красовского [34] можно показать, что исходная нестационарная система (3.1) неуправляема, если выполняются оба условия (3.4), т.е. при $b = 1$, $a = -2$. Это означает, что система неуправляема при $\Omega = -\omega_0$, т.е. угловая скорость собственного вращения равна и противоположна по знаку орбитальной угловой скорости.

Гиперболоидальная прецессия. $\left(\alpha_0 = \frac{\pi}{2}, \beta_0 \neq 0, \frac{\pi}{2} \right)$

В возмущенном движении положим

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + x_1, \quad \beta = \beta_0 + x_2, \quad c\beta_0 = -ab$$

В этом случае линеаризованные уравнения управляемого движения имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \dot{x}_2 + kx_1 &= d_1 \sin \tau u \\ \ddot{x}_2 - c^2\beta_0\dot{x}_1 + s^2\beta_0x_2 &= (d_2 \cos \tau - d_3)u \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь $k = 3(b-1)$, $d_1 = -2\frac{sI}{c\beta_0}$, $d_2 = sIc\beta_0$, $d_3 = cIs\beta_0$

Согласно [25], введем новые переменные y_j ($j = 1, \dots, 6$) по формулам

$$x_1 = y_1 \cos \tau + y_3 \sin \tau + y_5, \quad x_2 = y_2 \cos \tau + y_4 \sin \tau + y_6 \quad (3.6)$$

Новые переменные удовлетворяют стационарной системе

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \dot{y}_2 + 2\dot{y}_3 + ly_1 + y_4 &= 0, \quad l = k - 1; \\ \ddot{y}_2 - c^2\beta_0\dot{y}_1 + 2\dot{y}_4 - c^2\beta_0y_2 - c^2\beta_0y_3 &= d_2u \\ \dot{y}_3 - 2\dot{y}_1 + \dot{y}_4 - y_2 + ly_3 &= d_1u \\ \ddot{y}_4 - 2\dot{y}_2 - c^2\beta_0\dot{y}_3 + c^2\beta_0y_1 - c^2\beta_0y_4 &= 0 \\ \ddot{y}_5 + \dot{y}_6 + ky_5 &= 0 \\ \ddot{y}_6 - c^2\beta_0\dot{y}_5 + s^2\beta_0y_6 &= -d_3u \end{aligned} \quad (3.7)$$

Рассмотрим управляемость нестационарной системы (3.5) и стационарной системы (3.7), (3.8). Если орбита экваториальная, то система (3.5) становится стационарной, и ее условие неуправляемости $\sin \beta_0 = 0$, т.е. $\bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega_0} = \pm \frac{b-1}{b}$. В частности, при $b = 1$ собственное вращение спутника отсутствует.

Если орбита полярная ($\cos I = 0$), то $d_3 = 0$, и вводить переменные y_5, y_6 не требуется. Если $\cos I \neq 0$, то система (3.7) неуправляема, если $b = 1$. Это же условие является достаточным условием неуправляемости системы (3.7), так как в этом случае система (3.7) имеет линейный интеграл, не зависящий от управления

$$(\dot{y}_1 + y_2 + y_3) \cos^2 \beta_0 + \dot{y}_4 - 2y_2 = \text{const}$$

Пусть $\sin I \neq 0$. Используя двойственную к системе (3.4) систему с наблюдением, можно показать, что при $b = 1$ она наблюдаема и, следовательно, в силу принципа двойственности исходная нестационарная система (3.5) управляема.

Коническая прецессия ($\alpha = \alpha_0, \beta_0 = 0$)

В возмущенном движении положим

$$\alpha = \alpha_0 + x_1, \quad \beta = x_2, \quad s\alpha_0 = \frac{ab}{3b-4}$$

В этом случае линеаризованные уравнения управляемого движения имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + n_1\dot{x}_2 + n_2x_1 &= (\delta_1 - \delta_2 \sin \tau)u \\ \ddot{x}_2 - n_1\dot{x}_1 + n_3x_2 &= \delta_3 \cos \tau u \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} n_1 &= (3b-2)s\alpha_0, \quad n_2 = (4-3b)c^2\alpha_0, \quad n_3 = 3(1-b), \\ \delta_1 &= cIc\alpha_0, \quad \delta_2 = 2sIs\alpha_0, \quad \delta_3 = sI \end{aligned}$$

Как и выше, согласно [25], по формулам (3.6) введем новые переменные y_j ($j = 1, \dots, 6$), которые в данном случае удовлетворяют стационарной системе

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 + n_1 \dot{y}_2 + 2\dot{y}_3 + \bar{n}_2 y_1 + n_1 y_4 &= 0 \\ \dot{y}_2 - n_1 \dot{y}_1 + 2\dot{y}_4 + \bar{n}_3 y_2 - n_1 y_3 &= \delta_3 u \\ \dot{y}_3 - 2\dot{y}_1 + n_1 \dot{y}_4 - n_1 y_2 + \bar{n}_2 y_3 &= -\delta_2 u \\ \dot{y}_4 - 2\dot{y}_2 - n_1 \dot{y}_3 + n_1 y_1 + \bar{n}_3 y_4 &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_5 + n_1 \dot{y}_6 + n_2 y_5 &= \delta_1 u \\ \dot{y}_6 - n_1 \dot{y}_5 + n_3 y_6 &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Здесь $\bar{n}_2 = n_2 - 1$, $\bar{n}_3 = n_3 - 1$.

На экваториальной орбите система (3.9) становится стационарной. Необходимые и достаточные условия ее неуправляемости имеют вид

$$1) \bar{\Omega} = \pm 4 \frac{b-1}{b} \left(\alpha_0 = \frac{\pi}{2} \right); \quad 2) b = 1; \quad 3) b = \frac{2}{3}$$

Система (3.10) является неуправляемой, если 1) $b = 1$; 2) $b = 2/3$; 3) $s\alpha_0 = 0$, т.е. $a = r_0/\omega_0 = 0$, откуда следует $r_0 = \Omega - \omega_0 s\alpha_0 = 0$, т.е. $\Omega = 0$, что означает, что собственное вращение отсутствует (коническая прецессия переходит в относительное равновесие, при котором ось симметрии спутника расположена по радиус-вектору ($\alpha_0 = 0$)).

Определим условия существования в системе (3.10) линейных интегралов, не зависящих от управления. Так же, как и для случая цилиндрической прецессии, умножив первое и четвертое уравнения системы (3.10) на постоянные величины α_1 и α_2 и складывая, получим соотношение, которое при выполнении условий

$$\alpha_1 \bar{n}_2 + \alpha_2 n_1 = 0, \quad \alpha_1 n_1 + \alpha_2 \bar{n}_3 = 0$$

не зависит от переменных y_j . Условие $n_1^2 - \bar{n}_2 \bar{n}_3 = 0$ существования неравных нулю величин α_1 и α_2 в данном случае имеет вид

$$(1-b)(2-3b)(1-2s^2\alpha_0) = 0$$

Итак, в системе (3.10) существует линейный интеграл, не зависящий от управления, в следующих случаях

$$1) b = 1; \quad 2) b = \frac{2}{3}; \quad 3) s^2\alpha_0 = \frac{1}{2} \left(\bar{\Omega} = \pm 2\sqrt{2} \frac{b-1}{b} \right) \quad (3.12)$$

Умножив второе уравнение системы (3.10) на δ_2 , а третье на δ_3 и сложив их, получим выражение, которое при выполнении условий

$$\delta_2 \bar{n}_3 - \delta_3 n_1 = 0, \quad -\delta_2 n_1 + \delta_3 \bar{n}_2 = 0$$

не зависит от переменных y_2, y_3 . Условия существования решения этой системы приводят к выражениям $b = 2/3$; $s^2\alpha_0 = 1/2$, которые совпадают с выражениями 2) и 3) условий (3.12). Таким образом, новых условий существования интегралов в системе (3.15) не возникает.

Если орбита полярная, то $\delta_1 = 0$, то переменные y_5, y_6 не требуется вводить.

Используя критерий Красовского [35], можно показать, что на полярной орбите при выполнении условий $b = 2/3$ и $s^2\alpha_0 = 1/2$ исходная нестационарная система (3.9) является неуправляемой. Если же орбита не является полярной, то при этих условиях система управляема.

4. Построение стабилизирующего управления

4.1. *Способ построения алгоритма стабилизации.* Поведение вектора $x = [x_1 \ x_2]^T$ исходной системы описывается нестационарными системами (3.1), (3.5) и (3.9) соответственно для каждого варианта прецессий. Для построения алгоритмов стабилизации эти системы должны быть представлены в форме Коши

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A_x X + B_x(\tau)u, \quad X(4 \times 1), X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \quad B_x(\tau)(4 \times 1) \\ A_x &= \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ a_{11}^{(j)} & 0 & 0 & a_{14}^{(j)} \\ 0 & a_{22}^{(j)} & a_{23}^{(j)} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_x(\tau) = \begin{bmatrix} O_{21} \\ b_1^{(j)}(\tau) \\ b_2^{(j)}(\tau) \end{bmatrix}, \quad (j = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для цилиндрической прецессии

$$a_{11}^{(1)} = k_2, \quad a_{22}^{(1)} = k_3, \quad a_{14}^{(1)} = -k_1, \quad a_{23}^{(1)} = k_1; \quad b_1^{(1)} = -2sI \sin \tau, \quad b_2^{(1)} = sI \cos \tau$$

Для гиперболоидальной прецессии

$$\begin{aligned} a_{11}^{(2)} &= -k, \quad a_{22}^{(2)} = -s^2 \beta_0, \quad a_{14}^{(2)} = -1, \quad a_{23}^{(2)} = c^2 \beta_0 \\ b_1^{(2)} &= d_1 \sin \tau, \quad b_2^{(2)} = d_2 \cos \tau - d_3 \end{aligned}$$

Для конической прецессии

$$\begin{aligned} a_{11}^{(3)} &= -n_2, \quad a_{22}^{(3)} = -n_3, \quad a_{14}^{(3)} = -n_1, \quad a_{23}^{(3)} = n_1 \\ b_1^{(3)} &= \delta_1 - \delta_2 \sin \tau, \quad b_2^{(3)} = \delta_3 \cos \tau \end{aligned}$$

Одна из основных идей предлагаемого метода состоит в использовании построенных стационарных систем для выбора стабилизирующего управления. Это алгоритмизированный, устойчивый в работе способ удобный для применения (см. [19, 29–31]).

Задача стабилизации состоит в том, чтобы построить управление, обеспечивающее при $\tau \rightarrow \infty$ стремление к нулю компонент вектора состояния Y системы, полученной из указанных стационарных систем

$$\dot{Y} = A_y Y + B_y u, \quad Y(2n \times 1), \quad Y = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \quad B_y(2n \times 1) \quad (4.2)$$

(Заметим, что в рассматриваемых случаях $n = 4, 6$).

Предполагается, что пара A_y, B_y управляема.

Матрицу коэффициентов управления можно выбрать из условия минимума квадратичного функционала

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [Y^T(\tau) Q Y(\tau) + \gamma u^2(\tau)] d\tau, \quad (4.3)$$

где Q – неотрицательно определенная постоянная матрица соответствующей размерности, $\gamma > 0$. Оптимальное управление имеет вид [36]

$$u(\tau) = -K_y Y(\tau), \quad K_y = \frac{1}{\gamma} B_y^T P \quad (4.4)$$

Матрица P размерности $2n \times 2n$ является решением дифференциального матричного уравнения Риккати. Система стационарна и управляема, поэтому это уравнение имеет положительно определенное стационарное решение, совпадающее с единственным решением алгебраического уравнения Риккати

$$PA_y + A_y^T P - \frac{1}{\gamma} PB_y B_y^T P + Q = 0 \quad (4.5)$$

Синтезированное на основе расширенной стационарной системы управляющее воздействие является функцией переменных $Y(\tau)$ стационарной системы более высокого порядка, чем исходная нестационарная система.

Для введения управления непосредственно в исходную систему следует выразить вектор $Y(2n \times 1)$ ($n = 4, 6$) через вектор $x(2 \times 1)$ исходной системы, дополненный некоторым вектором $x'(N \times 1)$ ($N = 2, 4$), и их производные.

Вектор $\xi = \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}$ и вектор y связаны соотношением

$$\xi = T_y y, \quad T_y = \begin{bmatrix} F(\tau) \\ D(\tau) \end{bmatrix}, \quad x = F(\tau)y, \quad x' = D(\tau)y \quad (4.6)$$

Матрица $F(\tau)$ определена согласно формулам (3.2) и (3.4) соответственно для $n = 2$ и $n = 6$.

Дополнительный вектор x' вводится таким образом, чтобы квадратные матрицы T_y и \dot{T}_y были невырожденными.

Введем вектор $\eta = \begin{bmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}$. Вектора Y и η связаны преобразованием

$$Y = T(\tau)\eta, \quad T(\tau) = \begin{bmatrix} T_y^{-1} & O_n \\ \dot{T}_y^{-1} & T_y^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Тогда управление (4.4) может быть записано в виде

$$u(\tau) = -K_y T(\tau)\eta(\tau) \quad (4.8)$$

Уравнения для дополнительного вектора $X' = \begin{bmatrix} x' \\ \dot{x}' \end{bmatrix}$ имеют вид

$$\dot{X}' = A' X' + B'(\tau)u \quad (4.9)$$

Матрицы A' , $B'(\tau)$ для конкретных случаев выписаны ниже.

Расширенная нестационарная система для построения алгоритма стабилизации состоит из исходной системы (4.1) и системы (4.9), где управление формируется согласно (4.8) с учетом формул (4.6).

Решения этой расширенной нестационарной системы, замкнутой управлением (4.8) стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$, в силу выбора матрицы K_y , так как компоненты вектора ξ связаны с компонентами вектора y ограниченным преобразованием (4.6).

4.2. Алгоритм стабилизации регулярных прецессий. Оптимальные стабилизирующие управления строятся для соответствующих стационарных систем.

Для случая цилиндрической прецессии: система стационарных уравнений (4.2), соответствующая системе (3.3), имеет 8-й порядок. Матрицы расширенной нестационарной системы (4.1), (4.9) имеют вид

$$B_x = \begin{bmatrix} O_{21} \\ -2sI\sigma\tau \\ sI\sigma\tau \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} O_{21} \\ -2sI\sigma\tau \\ -sI\sigma\tau \end{bmatrix}, \quad A_x = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ k_2 & 0 & 0 & -k_1 \\ 0 & k_3 & k_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A' = A_y$$

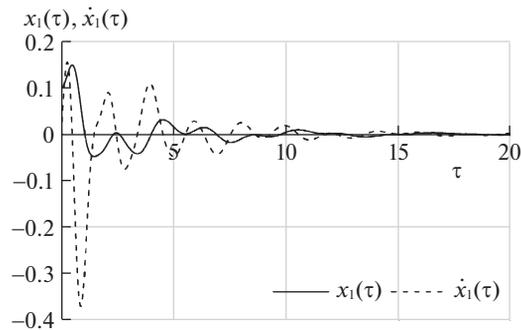


Рис. 1. Цилиндрическая прецессия: $x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)$, $a = +10.0$.

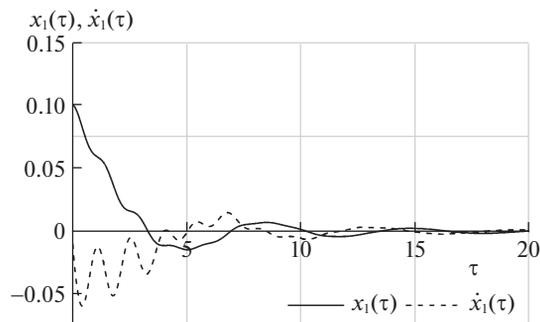


Рис. 2. Цилиндрическая прецессия: $x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)$, $a = -10.0$.

ния расширенной нестационарной системы, содержащей исходную нестационарную систему (4.1) и уравнения для вспомогательных переменных (4.9).

5. Моделирование. Цель приведенных ниже результатов моделирования – показать принципиальную применимость предложенных алгоритмов и продемонстрировать их работоспособность.

Моделирование проводилось при помощи стандартного пакета Wolfram mathematica v11.0. Коэффициенты управления выбирались при помощи стандартной программы LQR для стационарных систем (4.2).

Наклон орбиты движения спутника $I = \pi/6$. Начальные отклонения по углам $x_1(0) = x_2(0) = 0.1$; по скоростям $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0.0$.

Параметр спутника $b = 0.5$; параметр $a = \pm 10.0$ для цилиндрической прецессии, $a = 1.0$ для гиперболической и конической прецессий

Параметры функционала (4.3): $Q = 100.0 \cdot E_k$ ($k = 8, 12$); $\gamma = 1$.

На рис. 1–4 представлено поведение переменных $x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)$ и $x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)$ для случая цилиндрической прецессии.

На рис. 5 и 6 представлено поведение переменных $x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)$ и $x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)$ для случая гиперболоидальной прецессии.

На рисунках 7 и 8 представлено поведение переменных $x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)$ и $x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)$ для случая конической прецессии.

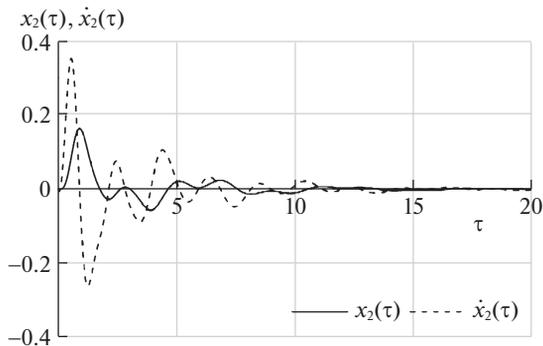


Рис. 3. Цилиндрическая прецессия: $x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)$, $a = +10.0$.

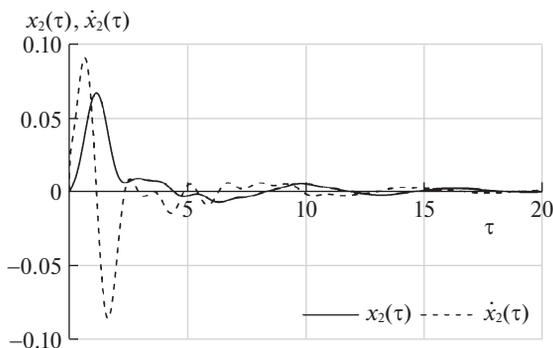


Рис. 4. Цилиндрическая прецессия: $x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)$, $a = -10.0$.

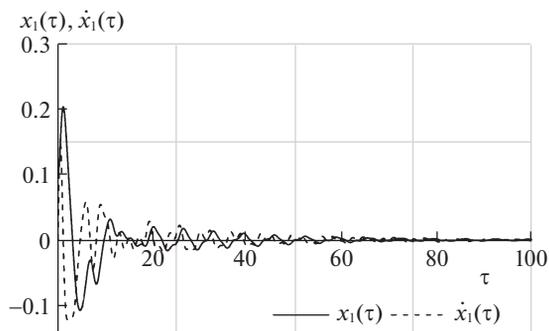


Рис. 5. Гиперболидоидальная прецессия: $x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)$, $a = 1.0$.

Таким образом, представленные результаты моделирования подтверждают работоспособность предложенных алгоритмов стабилизации спутника в окрестности регулярных прецессий.

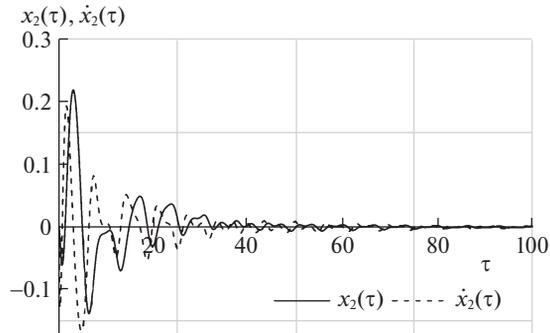


Рис. 6. Гиперboloидальная прецессия: $x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau), a = 1.0$.

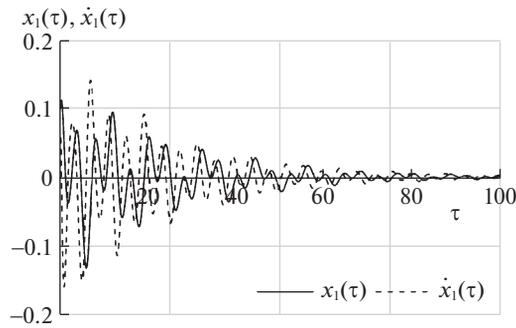


Рис. 7. Коническая прецессия: $x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau), a = 1.0$.

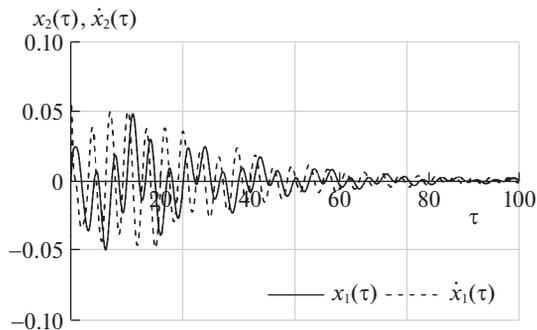


Рис. 8. Коническая прецессия: $x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau), a = 1.0$.

Заключение. Представлен строгий аналитический подход к изучению задачи стабилизации регулярных прецессий симметричного спутника при помощи магнитных моментов. Линеаризованные системы уравнений движений являются линейными нестационарными системами, приводимыми к стационарным. Для трех типов регулярных

прецессий эти системы приведены к стационарным системам большей размерности. В каждом случае исследована управляемость. Алгоритмы оптимальной стабилизации построены для полученных стационарных систем системы при помощи стандартной процедуры LQR. Указаны преобразования, позволяющие вводить управления в исходные нестационарные системы. Работоспособность и эффективность предложенных алгоритмов подтверждена результатами математического моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубошин Г.Н. О вращательном движении искусственных небесных тел // Бюлл. ИТА АН СССР. 1960. Т. 7. № 7. С. 511–520.
2. Кондурарь В.Т. Частные решения общей задачи о поступательно-вращательном движении сфероида под действием притяжения шара // Астрон. ж. 1960. Т. 3. № 5. С. 890–901.
3. Черноусько Ф.Л. Об устойчивости регулярных прецессий спутника // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 1. С. 155–157.
4. Likins P.W. Stability of a symmetrical satellite in attitudes fixed in an orbiting reference frame // J. Astronaut. Sci. 1965. V. 12. № 1. С. 18–24.
5. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
6. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975. 105 с.
7. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: Выч. центр АН СССР, 1967. 141 с.
8. Морозов В.М. Устойчивость движения космических аппаратов // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. ВИНТИ. 1971. С. 1–83.
9. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники. ВИНТИ. 1978. Т. 11. 233 с.
10. Морозов В.М. Об устойчивости движения гиростата под действием гравитационных магнитных и аэродинамических моментов // Космич. исслед. 1967. Т. 5. № 5. С. 727–732.
11. Морозов В.М. Об устойчивости относительного равновесия спутника при действии гравитационного, магнитного и аэродинамического моментов // Космич. исслед. 1969. Т. 7. № 3. С. 395–401.
12. Хентов А.А. Движение около центра масс экваториального спутника на круговой орбите при взаимодействии магнитного и гравитационного полей Земли // ПММ. 1967. Т. 31. № 5.
13. Белецкий В.В., Хентов А.А. Вращательное движение намагниченного спутника. М.: Наука, 1985. 288 с.
14. Сарычев В.А., Овчинников М.Ю. Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли // Итоги науки и техники. Сер. Исследование космического пространства. ВИНТИ. 1985. 106 с.
15. Silani E., Lovera M. Magnetic spacecraft attitude control: a survey and some new results // Control Engng. Pract. 2005. V. 13. P. 357–371.
16. Sofyali A., Jafarov E.M., Wisniewski R. Robust and global attitude stabilization of magnetically actuated spacecraft through sliding mode // Aerosp. Sci. Technol. 2018. V. 76. P. 91–104.
17. Ovchinnikov M. Yu., Roldugin D.S. A survey on active magnetic attitude control algorithms for small satellites // Progress in Aerospace Sciences. 2019.
18. Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С. Современные алгоритмы активной магнитной ориентации спутников // Космич. аппараты и технол. 2019. Т. 3. № 2 (28). С. 73–86.
19. Морозов В.М., Каленова В.И. Управление спутником при помощи магнитных моментов: управляемость и алгоритмы стабилизации // Космич. исслед. 2020. Т. 58. № 3. С. 199–207.
20. Александров А.Ю., Тихонов А.А. Электродинамическая стабилизация программного вращения ИСЗ в орбитальной системе координат // Вестн. СПб унив. Сер. I: Математика, механика, астрономия. 2012. № 2. С. 79–90.
21. Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova, E. B., Tikhonov A. A. Stabilization of a programmed rotation mode for a satellite with electrodynamic attitude control system // Adv. in Space Res. 2018. V. 62. P. 142–151.

22. Сазонов В.В., Чебуков С.Ю., Кузнецова Е.Ю. Двухосная закрутка спутника в плоскости орбиты // Космич. исслед. 2000. Т. 38. № 3. С. 296–306.
23. Cubas J., Farrahi A., Pindado S. Magnetic attitude control for satellites in polar or sun synchronous orbits // J. Guid. Control Dyn. 2015. V. 38. P. 1947–1958.
24. Cubas J., de Ruiter A. Magnetic control without attitude determination for spinning spacecraft // Acta Astron. 2020. V. 169. P. 108–123.
25. Каленова В.И., Морозов В.М. Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. М.: Физматлит, 2010. 208 с.
26. Каленова В.И., Морозов В.М. Приводимость линейных нестационарных систем второго порядка с управлением и наблюдением // ПММ. 2012. Т. 76. № 4. С. 576–588.
27. Каленова В.И., Морозов В.М. Об управлении линейными нестационарными системами специального вида // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. № 3. С. 6–15.
28. Каленова В.И., Морозов В.М. Приводимость линейных нестационарных систем специального вида с управлением и наблюдением // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 3. С. 3–12.
29. Morozov V.M., Kalenova V.I. Linear time-varying systems and their applications to cosmic problems // AIP Conf. Proc. The Eighth Polyakhov's Reading: Proc. of the Int. Sci. Conf. on Mechanics. 2018. V. 1959. P. 020003–020003.
30. Морозов В.М., Каленова В.И. Управление с помощью магнитных моментов ориентацией спутника, движущегося по полярной орбите // Инж. ж. Наука и иннов. 2018. Т. 81 (9). С. 8–14.
31. Kalenova V.I., Morozov V.M. Novel approach to attitude stabilization of satellite using geomagnetic Lorentz forces // Aerosp. Sci. Technol. 2020. V. 106.
32. Лурье А.А. Аналитическая механика. М.: ГИФМЛ, 1961. 824 с.
33. Wertz J. Spacecraft Attitude Determination and Control. Dordrecht: D. Reidel Publ. Co., 1978. 876 p.
34. Laub A.J., Arnold W.F. Controllability and observability criteria for multivariable linear second order models // IEEE Trans. Automat. Control. 1984. V. AC-29. № 2. P. 163–165.
35. Красовский Н.Н. Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 476 с.
36. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. М.: Наука, 1978. 396 с.

On Stabilization of Satellite Regular Precessions by Means of Magnetic Moments

V. M. Morozov^{a,#}, V. I. Kalenova^{a,##}, and M. G. Rak^b

^a Institute of Mechanics MSU, Moscow, Russia

^b MSU, Moscow, Russia

[#]e-mail: moroz@imec.msu.ru

^{##}e-mail: kalenova44@mail.ru

The stabilization of regular precessions of a dynamically symmetric satellite, the center of mass of which moves in a circular orbit in the gravitational and magnetic fields of the Earth, is considered. The control moments are formed due to the interaction of the satellite's own dipole moment with the Earth's magnetic field. Equations of motion linearized in the vicinity of regular precessions are linear nonstationary systems. To solve stabilization problems, an approach is proposed and developed based on the reduction to stationary systems of orders greater than the original system. Controllability is investigated and effective stabilization algorithms are constructed.

Keywords: stabilization, regular precession, linear non-stationary system, reducibility, controllability, stabilization algorithms

REFERENCES

1. Duboshin G.N. On the rotational motion of artificial celestial bodies // Byull. ITA AS USSR, 1960, vol. 7, no. 7, pp. 511–520. (in Russian)
2. Kondurav V.T. Particular solutions of the general problem of the translational-rotational motion of a spheroid attracted by a sphere // Sov. Astron., 1960, vol. 3, no. 5, pp. 863–875.

3. *Chernous'ko F.L.* On the stability of regular precession of a satellite // JAMM, 1964, vol. 28, iss. 1, pp. 181–184.
4. *Likins P.W.* Stability of a symmetrical satellite in attitudes fixed in an orbiting reference frame // J. Astronaut. Sci., 1965, vol. 12, no. 1, pp. 18–24.
5. *Beletsky V.V.* The Movement of an Artificial Satellite Relative to the Center of Mass. Moscow: Nauka, 1965. 416 p. (in Russian)
6. *Beletsky V.V.* Satellite Motion Relative to the Center of Mass in a Gravitational Field. Moscow: MSU, 1975. 105 p. (in Russian)
7. *Rumyantsev V.V.* On the Stability of Stationary Motions of Satellites. Moscow: Vych. Center of the USSR Acad. Sci., 1967. 141 p. (in Russian)
8. *Morozov V.M.* Stability of spacecraft motion // Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Gen. Mech. VINITI, 1971, pp. 1–83.
9. *Sarychev V.A.* Orientation issues of artificial satellites // Itogi Nauki i Tekhniki. VINITI, 1978, vol. 11. 233 c.
10. *Morozov V.M.* Stability of the motion of a gyrostat under the action of gravitational, magnetic and aerodynamic forces // Cosmic Res., 1967, vol. 5, no. 5, pp. 620–624.
11. *Morozov V.M.* Stability of the relative equilibrium of a satellite under the action of gravitational, magnetic and aerodynamic forces // Cosmic Res., 1969, vol. 7, no. 3.
12. *Khentov A.A.* Motion of a magnetized equatorial satellite about its center of mass in a circular orbit with interaction of the Earth's magnetic and gravitational fields // JAMM, 1967, vol. 31, no. 5, pp. 962–966.
13. *Beletskiy V.V., Khentov A.A.* Rotational Motion of a Magnetized Satellite. Moscow: Nauka, 1985. 288 p. (in Russian)
14. *Sarychev V.A., Ovchinnikov M.Yu.* Magnetic attitude control systems for artificial earth satellites // Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Space Exploration. VINITI, 1985, 106 p.
15. *Silani E., Lovera M.* Magnetic spacecraft attitude control: a survey and some new results // Control Engng. Pract. 2005. vol. 13. pp. 357–371.
16. *Sofyali A., Jafarov E.M., Wisniewski R.* Robust and global attitude stabilization of magnetically actuated spacecraft through sliding mode // Aerosp. Sci. Technol., 2018, vol. 76, pp. 91–104.
17. *Ovchinnikov M.Yu., Roldugin D.S.* A survey on active magnetic attitude control algorithms for small satellites // Progress in Aerospace Sciences, 2019.
18. *Ovchinnikov M.Yu., Roldugin D.S.* Recent advances in the active magnetic control of satellites // Spacecrafts&Techn., 2019, vol. 3, no. 2, pp. 73–86.
19. *Morozov V.M., Kalenova V.I.* Satellite control using magnetic moments: controllability and stabilization algorithms // Cosmic Res., 2020, vol. 58, pp. 158–166.
20. *Aleksandrov A.Yu., Tikhonov A.A.* Electrodynamic stabilization of program satellite rotation in the orbital coordinate system // Vestn. S.-Peterburg. Univ., Ser. 1, 2012, no. 2, pp. 79–90.
21. *Aleksandrov A.Yu., Aleksandrova, E.B., Tikhonov A.A.* Stabilization of a programmed rotation mode for a satellite with electrodynamic attitude control system // Adv. in Space Res., 2018, vol. 62, pp. 142–151.
22. *Sazonov V.V., Chebukov S.Yu., Kuznetsova E.Yu.* Biaxial rotations of a satellite in the plane of its orbit // Cosmic Res., 2000, vol. 38, no. 3, pp. 279–288.
23. *Cubas J., Farrahi A., Pindado S.* Magnetic attitude control for satellites in polar or sun synchronous orbits // J. Guid. Control Dyn., 2015, vol. 38, pp. 1947–1958.
24. *Cubas J., de Ruiter A.* Magnetic control without attitude determination for spinning spacecraft // Acta Astron., 2020, vol. 169, pp. 108–123.
25. *Kalenova V.I., Morozov V.M.* Linear Nonstationary Systems and Their Applications to Problems in Mechanics. Moscow: Fizmatlit, 2010. 208 p. (in Russian)
26. *Kalenova V.I., Morozov V.M.* The reducibility of linear second-order time-varying systems with control and observation // JAMM, 2012, vol. 76, iss. 4, pp. 413–422.
27. *Kalenova V.I., Morozov V.M.* On the control of linear time-varying systems of a special form // J. Comput. Syst. Sci. Int., 2013, vol. 52, pp. 333–341.
28. *Kalenova V.I., Morozov V.M.* Reducibility of linear time-varying systems of special form with control and measurements // J. Comput. Syst. Sci. Int., 2019, vol. 58, pp. 1–11.

-
29. *Morozov V.M., Kalenova V.I.* Linear time-varying systems and their applications to cosmic problems // AIP Conf. Proc. The Eighth Polyakhov's Reading: Proc. of the Int. Sci. Conf. on Mechanics. 2018, vol. 1959, pp. 020003–020003.
 30. *Morozov V.M., Kalenova V.I.* Controlling the orientation of a polar-orbiting satellite by means of magnetic moments // Engng. J.: Sci.&Innov., 2018, vol. 81 (9).
 31. *Kalenova V.I., Morozov V.M.* Novel approach to attitude stabilization of satellite using geomagnetic Lorentz forces // Aerosp. Sci. Technol., 2020, vol. 106.
 32. *Lurie A.A.* Analytical Mechanics. Moscow: GIFML, 1961. 824 p. (in Russian)
 33. *Wertz J.* Spacecraft Attitude Determination and Control. Dordrecht: D. Reidel Publ. Co., 1978. 876 p.
 34. *Laub A.J., Arnold W.F.* Controllability and observability criteria for multivariable linear second order models // IEEE Trans. Automat. Control, 1984, vol. AC-29, no. 2, pp. 163–165.
 35. *Krasovskiy N.N.* Motion Control Theory. Linear Systems. Moscow: Nauka, 1968. 476 p. (in Russian)
 36. *Roytenberg Ya.N.* Automatic Control. Moscow: Nauka, 1978. 396 p. (in Russian)

УДК 514.851

О КОНСТРУКЦИИ “ТРИАДА”

© 2021 г. Й. Виттенбург^{1,*}¹ Институт технологии, Карлсруе, Германия

*e-mail: jens.wittenburg@kit.edu

Поступила в редакцию 11.01.2021 г.

После доработки 31.01.2021 г.

Принята к публикации 03.03.2021 г.

Рассмотрена конструкция из трех одинаковых абсолютно твердых плоских или пространственных квадратных рам. В работе доказано существование определенного угла между плоскостями рам, при котором конструкция может быть реализована и обладает жесткостью.

Ключевые слова: абсолютно твердое тело, квадратная рама, условие контакта, натурная композиция

DOI: 10.31857/S0032823521040147

1. Введение. Описана [1] конструкция, состоящая из трех одинаковых плоских квадратных рам, имеющих форму, показанную на рис. 1. Диагональ d внутреннего квадрата равна стороне a внешнего квадрата. В терминах ширины b полос, из которых сделаны рамы, это условие имеет вид $(a - 2b)\sqrt{2} = a$, или

$$a = 2(2 + \sqrt{2})b \approx 6.828b \quad (1.1)$$

При таком *условии контакта* рама 1 может быть вставлена наполовину в раму 3, как показано на рис. 2. В этом положении рама 1 может свободно поворачиваться вокруг линии, соединяющей две точки контакта.

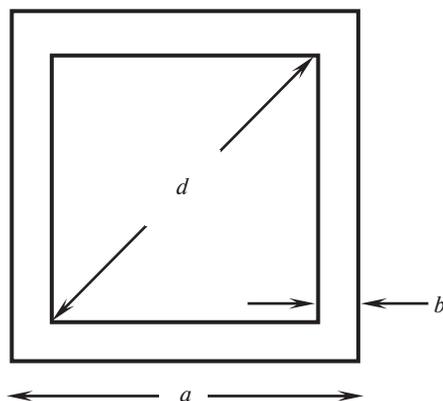


Рис. 1. Плоская квадратная рамка.

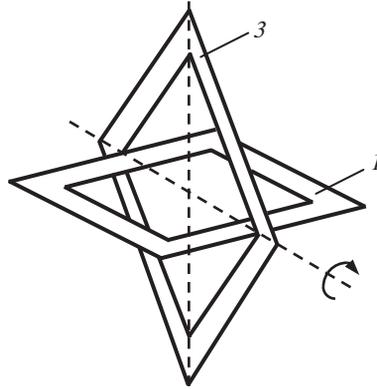


Рис. 2. Рамка 1, вставленная в рамку 3.

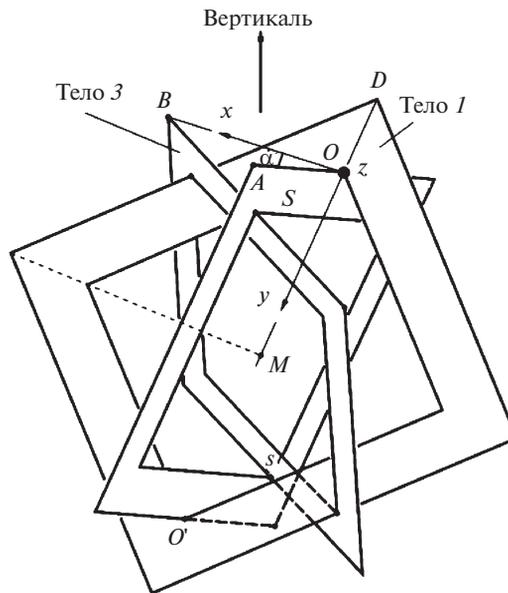


Рис. 3. Конструкция в сборе.

При надлежащем выборе угла α между двумя рамами рама 2 может быть вставлена так, чтобы одним и тем же образом каждая рама была охвачена другой и содержала в себе следующую раму. Это показано на рис. 3 (перед установкой из рамы 2 временно должна быть демонтирована одна из сторон, так что рама принимает вид буквы U). Полученная конструкция с одинаковыми углами α между каждой парой рам является жесткой. В разд. 2 показано, что сборка возможна с однозначно определенным углом α . В разд. 3 исследуются конструкции с неплоскими рамами.

2. Вычисление α . Пусть с рамой 1 связана декартова система координат x, y, z , показанная на рис. 3. Ось y направлена вдоль диагонали, ось z – перпендикулярно раме. Ось x проходит через точку B . В точке S пересекаются прямые MA и BC .

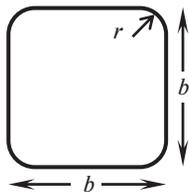


Рис. 4. Поперечное сечение полос.

Векторы \overline{OM} , \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OD} , \overline{OC} имеют координаты: $\overline{OM} = \frac{a}{2}(0, 1, 0)$, $\overline{OA} = \frac{a}{2}(\cos \alpha, 1, \sin \alpha)$, $\overline{OB} = \frac{a}{2}(1, 0, 0)$, $\overline{OD} = \frac{a}{2}(0, 1 - \sqrt{2}, 0)$, $\overline{OC} = \frac{a}{2}(-\cos \alpha, 1 - \cos \alpha, \sqrt{2} \sin \alpha)$.

Прямые MA и BC запишем в параметрической форме:

$$\begin{aligned} \overline{OM} + \lambda_1(\overline{OA} - \overline{OM}) &= \frac{a}{2}(\lambda_1 \cos \alpha, 1 - \lambda_1, \lambda_1 \sin \alpha) \\ \overline{OB} + \lambda_2(\overline{OC} - \overline{OB}) &= \frac{a}{2}(1 - \lambda_2(1 + \cos \alpha), \lambda_2(1 - \cos \alpha), \lambda_2 \sqrt{2} \sin \alpha) \end{aligned}$$

Точка пересечения S определяется уравнениями $\lambda_1 \cos \alpha = 1 - \lambda_2(1 + \cos \alpha)$, $1 - \lambda_1 = \lambda_2(1 - \cos \alpha)$, $\lambda_1 = \lambda_2 \sqrt{2}$, которые дают

$$\cos \alpha = \sqrt{2} - 1, \quad \sin \alpha = \sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}, \quad \alpha \approx 65.53^\circ \quad (2.1)$$

Это доказывает, что три рамы могут быть собраны в единственно определенную конфигурацию. Треугольник (ABD) равносторонний, поскольку векторы

$$\overline{AB} = \frac{a}{2}(\cos \alpha - 1, 0, \sin \alpha), \quad \overline{BD} = \frac{a}{2}(1, \sqrt{2} - 1, 0), \quad \overline{DA} = \frac{a}{2}(\cos \alpha, \sqrt{2} - 1, \sin \alpha)$$

имеют равные длины.

Произведение $\overline{AB} \times \overline{BD}$ определяет единичный вектор \vec{n} , перпендикулярный к плоскости треугольника (вертикаль на рис. 3): $\vec{n} = (1/\sqrt{3})[\sqrt{\sqrt{2} - 1}, \sqrt{\sqrt{2} - 1}, \sqrt{2} - 1]$. Угол между \vec{n} и \overline{MA} , \overline{MB} , \overline{MD} равен $\arccos[3/\sqrt{\sqrt{2} - 1}]$. Отражения точек A , B и D относительно центра M являются вершинами углов другого равностороннего треугольника с той же нормалью \vec{n} . В направлении, противоположном вектору \vec{n} , эти два треугольника видны повернутыми на 30° друг относительно друга.

3. Неплоские квадратные рамы. Конструкция, изображенная на рис. 3, может быть собрана с тем же углом α между парами рам, если плоские полосы, из которых сделаны рамы заменить профильными трубами с поперечным сечением, показанным на рис. 5. Ширина b и радиус r – свободные параметры. Исследование включает частные случаи $r = 0$ (квадратное сечение) и $2r = b$ (круглое поперечное сечение). Как и раньше, длина стороны внешнего квадрата обозначается a . Угол α отсчитывается в средних плоскостях рам. Сборка конструкции возможна, если условие контакта (1.1) заменить условием контакта по параметрам a , b и r .

Плоскость x, y на рис. 3, теперь расположена в средней плоскости рамы I . Вблизи начала координат O одна сторона рамы 2 находится в контакте с рамой I в двух точках на противоположных плоскостях рамы I . Всего существует двенадцать точек контакта.

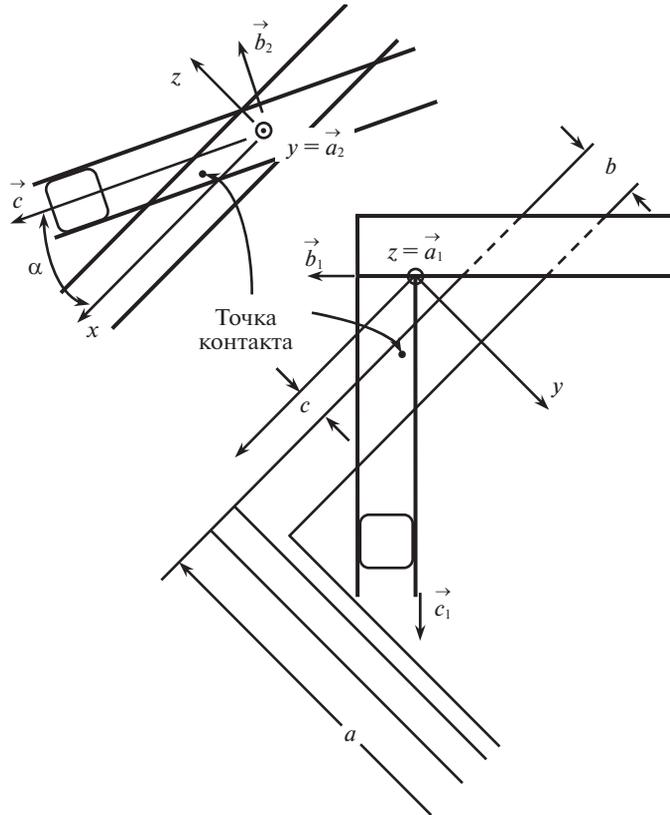


Рис. 5. Точка контакта рамок 1 и 2.

Из соображений симметрии условие контакта можно получить, исследуя единственную точку контакта. На рис. 6 точка контакта показана в двух проекциях около начала координат в области $x, y, z > 0$. Вспомогательная величина c связана с a и b уравнением $a + 2c = (a - 2b)\sqrt{2}$, или

$$a = 2(\sqrt{2} + 1)(b\sqrt{2} + c) \tag{3.1}$$

В точке контакта поверхности представляют собой круглые цилиндры радиуса r . В обозначениях, показанных на рис. 7, оба цилиндра имеют параметрическое представление

$$\vec{z}_i = \vec{P}_i + r(\vec{a}_i \cos \varphi_i + \vec{b}_i \sin \varphi_i) + \lambda_i \vec{c}_i \quad (i = 1, 2)$$

P_i – произвольно выбранная точка на оси цилиндра. \vec{a}_i, \vec{b}_i и \vec{c}_i – взаимно перпендикулярные единичные векторы, а φ_i, λ_i – координаты. Единичные нормальные векторы в точке φ_i, λ_i равны $\vec{n}_i = \vec{a}_i \cos \varphi_i + \vec{b}_i \sin \varphi_i$ ($i = 1, 2$).

Цилиндры находятся в контакте, если (а) $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$ и (б) $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$. Условие (б) записывается так:

$$\vec{a}_2 \cos \varphi_2 + \vec{b}_2 \sin \varphi_2 = -(\vec{a}_1 \cos \varphi_1 + \vec{b}_1 \sin \varphi_1) \tag{3.2}$$

С учетом этого соотношения условие (а) принимает вид

$$\vec{P}_1 - \vec{P}_2 + \vec{c}_1 \lambda_1 - \vec{c}_2 \lambda_2 + 2r(\vec{a}_1 \cos \varphi_1 + \vec{b}_1 \sin \varphi_1) = 0 \tag{3.3}$$

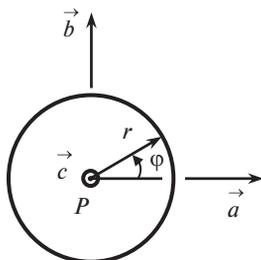


Рис. 6. Векторы и координаты точек на цилиндре радиуса r .

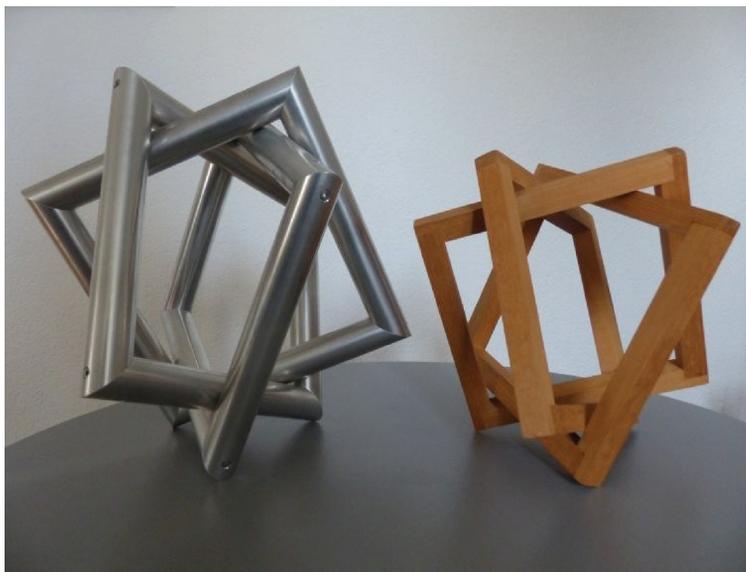


Рис. 7. Две физические модели триады.

Для цилиндров на рис. 6 векторы \vec{a}_i , \vec{b}_i , \vec{c}_i и \vec{P}_i ($i = 1, 2$) имеют следующие x, y, z – координаты:

$$\vec{a}_1 = (0, 0, 1), \quad \vec{a}_2 = (0, 1, 0)$$

$$\vec{b}_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), \quad \vec{b}_2 = (-\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$$

$$\vec{c}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), \quad \vec{c}_2 = (\cos \alpha, 0, \sin \alpha)$$

$$\vec{P}_1 = (r/\sqrt{2}, -r/\sqrt{2}, b/2 - r)$$

$$\vec{P}_2 = (0, c + r, 0) - (b/2 - r)\vec{b}_2 = [(b/2 - r)\sin \alpha, c + r, -(b/2 - r)\cos \alpha]$$

Отсюда с помощью уравнений (3.2), (3.3) получаем

$$\sin \varphi_1 - \sqrt{2} \sin \alpha \sin \varphi_2 = 0 \quad (3.4)$$

$$-\sin \varphi_1 + \sqrt{2} \cos \alpha \sin \varphi_2 = 0 \quad (3.5)$$

$$\cos \varphi_1 + \cos \alpha \sin \varphi_2 = 0 \quad (3.6)$$

$$r - \sqrt{2}(b/2 - r) \sin \alpha + \lambda_1 - \sqrt{2}\lambda_2 \cos \alpha + 2r \sin \varphi_1 = 0 \quad (3.7)$$

$$-r - \sqrt{2}(c + r) + \lambda_1 - 2r \sin \varphi_1 = 0 \quad (3.8)$$

$$(b/2 - r)(1 + \cos \alpha) - \lambda_2 \sin \alpha + 2r \cos \varphi_1 = 0 \quad (3.9)$$

Из этих шести уравнений для φ_1 , λ_1 , φ_2 , λ_2 и c только пять являются линейно независимыми, поскольку левая и правая части уравнения (3.2) являются единичными векторами. Сумма уравнений (3.4) и (3.5) дает

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = 1/\sin \alpha, \quad \sin \varphi_2 = -1/\sqrt{1 + \sin^2 \alpha} \quad (3.10)$$

Знак минус в выражении для $\sin \varphi_2$ выбран с учетом, что $\pi < \varphi_2 < 3\pi/2$ (см. рис. 6). Из уравнений (3.4) и (3.6) следует, что

$$\sin \varphi_1 = \sqrt{2} \sin \alpha \sin \varphi_2, \quad \cos \varphi_1 = -\cos \alpha \sin \varphi_2 \quad (3.11)$$

Уравнения (3.7)–(3.9) линейны по λ_1 , λ_2 и c . Решение для c имеет вид

$$c = \frac{1}{\sin \alpha} \left\{ \frac{b}{2} (1 + \cos \alpha) + r \left[-1 - \cos \alpha + 2 \cos \varphi_1 \cos \alpha - (\sqrt{2} + 1) \sin \alpha - 2\sqrt{2} \sin \varphi_1 \sin \alpha \right] \right\}$$

После подстановки в выражения (3.10), (3.11) и (2.1) значений величин $\sin \varphi_1$, $\cos \varphi_1$, $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ найдем, что

$$c = (b/2)\sqrt{1 + \sqrt{2}} - r \left(1 + \sqrt{2} + \sqrt{1 + \sqrt{2}} - \sqrt{2(3 + \sqrt{2})} \right)$$

Подстановка в равенство (3.1) дает требуемое условие контакта

$$a = b \left(4 + 2\sqrt{2} + \sqrt{7 + 5\sqrt{2}} \right) - 2r \left(3 + 2\sqrt{2} + \sqrt{7 + 5\sqrt{2}} - \sqrt{9(1 + \sqrt{2})^2 - 1} \right) \approx 10.580b - 4.813r \quad (3.12)$$

$$r = 0 \quad (\text{квадратное поперечное сечение}): \quad a \approx 10.580b$$

$$2r = b \quad (\text{круглое поперечное сечение}): \quad a = b \left(1 + \sqrt{9(1 + \sqrt{2})^2 - 1} \right) \approx 8.173b$$

Фото на рис. 7 демонстрирует модели, выполненные из алюминия и дерева с круглым и квадратным сечением соответственно.

Уравнение (3.12) показывает, что параметр a очень чувствителен к изменениям параметра r . Следствием этого является обстоятельство, что жесткая конструкция квадратного сечения с полосами практически невозможна. В результате малейшего износа острой кромки (углов квадрата) длина a , выбранная в предположении $r = 0$, оказывается слишком большой. Следствием этого является подвижность конструкции, в результате которой в точках, где требуется контакт, возникают большие зазоры. С другой стороны, если величина a слишком мала, сборка конструкции невозможна. Коммерчески доступны трубы круглого сечения высокоточных размеров.

В 2004 г. стальная конструкция из труб диаметром $2r = 40.5$ см была установлена в городе 26406 Витмунд в Остфрисланде, а в 2006 г. конструкция из труб, изготовленных из нержавеющей стали, диаметром $2r = 30$ см – в кампусе Технологического института Карлсруэ (Эта статья была написана в 1992 году. Она ранее не публиковалась, по требованиям сохранения коммерческой тайны). Эти конструкции получили название ТРИАДА. Обе, а точнее их тени, можно увидеть, увеличив масштаб в известном

приложении Google Earth (На сайте <http://itm-serv.itm.uni-karlsruhe.de/ITM/Personal/Wittenburg/TRIADE/start.html> имеется фотография монумента и анимация “Триада – виртуальный тур”).

4. Нереализуемая конструкция. Представьте себе трехмерное пространство, заполненное решеткой из кубов. Каждая грань, общая для двух кубов, есть рама с параметрами a , b и r , которые удовлетворяют соотношению (3.12). Теперь представьте, что на всех трех гранях конструкции, исследуемой в разд. 3, возведена заполняющая пространство решетка из кубов. Можно ли собрать эту конструкцию без натяга полос? Ответ отрицательный. На каждой из трех рам только в одну ее сторону можно вставить куб.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brown R., Robinson J.* Borromean circles // Amer. Math. Monthly. 1992. V. 99. № 4. P. 376–377.

The Structure Called TRIADE

J. Wittenburg^{a,#}

^a *Karlsruher Institut für Technologie, Karlsruhe, Germany*

[#]*e-mail: jens.wittenburg@kit.edu*

The structure of three identical absolutely solid flat or spatial square frames is considered. The work proved the existence of a certain angle between the planes of the frames, at which the structure can be realized and has rigidity.

Keywords: absolutely rigid body, square frame, contact condition, full-scale composition

REFERENCES

1. *Brown R., Robinson J.* Borromean circles // Amer. Math. Monthly, 1992, vol. 99, no. 4, pp. 376–377.

УДК 531.36

**ОБОБЩЕННЫЕ ДИАГРАММЫ СМЕЙЛА
ДЛЯ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ С СИММЕТРИЕЙ**© 2021 г. **А. В. Карапетян**^{1,*}¹ *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия***e-mail: avkarapetyan@yandex.ru*

Поступила в редакцию 23.11.2020 г.

После доработки 22.12.2020 г.

Принята к публикации 15.01.2021 г.

Обсуждается проблема глобального качественного анализа динамики диссипативных систем с симметрией на основе обобщенных диаграмм Смейла. Общие положения иллюстрируются на примере задачи о движении волчка с вязким наполнителем.

Ключевые слова: диаграммы Смейла, диссипативные системы с симметрией, инвариантные множества

DOI: 10.31857/S003282352104007X

Классические диаграммы Смейла [1] для консервативных механических систем с симметрией представляет собой в пространстве постоянных интеграла энергии $H = h$ и интегралов Нётер $\mathbf{K} = \mathbf{k}$ множество S поверхностей $h = h(\mathbf{k})$, на котором эти интегралы зависимы. Множество S называется бифуркационным по Смейлу: на нем происходят перестройки топологического типа областей возможности движения системы в конфигурационном пространстве. Каждой точке множества S соответствует инвариантное в фазовом пространстве множество системы (в частности, стационарное движение).

Методика Смейла с небольшими изменениями и дополнениями распространяется [2–4] на случай диссипативных механических систем с симметрией при условии, что диссипативные силы обладают частичной диссипацией и не разрушают интегралы Нётер. При этом полная механическая энергия H не возрастает вдоль движений системы, сохраняет свое начальное значение h на инвариантных множествах, а обобщенные диаграммы Смейла по-прежнему представляет собой множество S , на котором невозрастающая функция H и интегралы Нётер $\mathbf{K} = \mathbf{k}$ зависимы.

Существенное отличие обобщенных диаграмм от классических состоит в следующем: в консервативном случае все точки пространства $(\mathbf{k}; h)$ инвариантны относительно фазового потока системы, а в диссипативном случае инвариантны только точки, лежащих на множестве S , а остальные точки этого пространства эволюционируют вдоль прямых $\mathbf{k} = \text{const}$ в сторону уменьшения h и стремятся к одной из точек множества S , соответствующей значению функции H , которое меньше начального. Таким образом, обобщенные диаграммы Смейла позволяют находить предельные движения системы только по начальному значению полной энергии и значениям постоянных интегралов Нётер.

1. Обобщенные диаграммы Смейла. Рассмотрим механическую систему с n степенями свободы, находящуюся под действием потенциальных и диссипативных сил с ча-

стичной диссипацией и допускающую m -параметрическую ($m < n$) группу симметрий. Пусть полная механическая энергия H и интегралы Нётер \mathbf{K} имеют вид

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{A}(\mathbf{r})\mathbf{v}, \mathbf{v}) + V(\mathbf{r}) \leq h \quad (1.1)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{B}(\mathbf{r})\mathbf{v} = \mathbf{k} \quad (1.2)$$

Здесь $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ – квазискорости системы, $\mathbf{r} \in \Sigma$ – переменные (в общем случае – зависящие), от которых зависят положительно-определенная $n \times n$ матрица \mathbf{A} кинетической энергии, $m \times n$ – матрица \mathbf{B} интегралов Нётер и потенциальная энергия V системы, h – начальное значение полной энергии, \mathbf{k} – постоянные интегралов Нётер. Эти интегралы предполагаются независимыми, т.е. $\text{rank } \mathbf{B} = m$ при $\mathbf{r} \in \Sigma$.

Согласно модифицированной теории Рауса [2–4] критические уровни полной энергии на фиксированных уровнях интегралов Нётер соответствуют инвариантным множествам системы. Учитывая структуру функций H и \mathbf{K} , задачу поиска инвариантных множеств можно решать в два этапа. На первом этапе находится единственная критическая точка (точка минимума) функции H по переменным \mathbf{v} на линейном многообразии $\mathbf{K} = \mathbf{k}$ (при этом переменные \mathbf{r} рассматриваются как параметры). Нетрудно показать, что

$$\min_{\mathbf{v}} H \Big|_{\mathbf{K}=\mathbf{k}} = H(\mathbf{v}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \mathbf{r}) = V_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (1.3)$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{k}} = \left(\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T \right)^{-1} \mathbf{k}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T$$

$$V_{\mathbf{k}} = V + \frac{1}{2} \left(\left(\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^T \right)^{-1} \mathbf{k}, \mathbf{k} \right) \quad (1.4)$$

Функция $V_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ называется приведенным или эффективным потенциалом.

На втором этапе находятся критические множества (в частности, точки) эффективного потенциала, удовлетворяющие уравнению

$$\delta V_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r} \in \Sigma} = 0 \quad (1.5)$$

Пусть $\gamma_1(\mathbf{k}), \gamma_2(\mathbf{k}), \dots$ – все решения уравнения (1.5). Критические множества $\gamma_j(\mathbf{k})$ ($j = 1; 2; \dots$) могут иметь различную размерность (в том числе, нулевую) и пересекаться при некоторых значениях \mathbf{k}_0 :

$$\gamma_i(\mathbf{k}_0) = \gamma_j(\mathbf{k}_0) = \gamma_0 \quad (i, j = 1; 2; \dots; i \neq j)$$

Значения \mathbf{k}_0 и соответствующие множества γ_0 называются бифуркационными по Пуанкаре–Четаеву.

Критическим множествам $\gamma_j(\mathbf{k}) \in \Sigma$ соответствуют инвариантные в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n \times \Sigma$ множества

$$\Gamma_j(\mathbf{k}) = \{ \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}); \mathbf{r} \in \gamma_j(\mathbf{k}) \} \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (1.6)$$

Полная механическая энергия H сохраняет свое начальное значение на всех множествах (1.6). Будем называть объединение инвариантных множеств (1.6) полным, если функция H убывает на всех других движениях системы.

Зафиксируем постоянные интегралов Нётер $\mathbf{k} = \mathbf{c}$. Справедливы следующие утверждения [2–4].

Теорема 1. Если множество $\gamma_j(\mathbf{c})$ компактно и доставляет эффективному потенциалу строго минимальное значение, то инвариантное множество $\Gamma_j(\mathbf{c})$ устойчиво, если, кроме того, объединение инвариантных множеств (1.6) является полным, а значения \mathbf{c}

постоянных интегралов Нётер не являются бифуркационными, то любое возмущенное движение системы, близкое к движениям на множестве $\Gamma_j(\mathbf{c})$, стремится при $t \rightarrow \infty$ к инвариантному множеству $\Gamma_j(\mathbf{k})$, соответствующему возмущенным значениям $\mathbf{k} = \mathbf{c} + \delta\mathbf{c}$ постоянных интегралов Нётер.

Теорема 2. Если критическое множество $\gamma_j(\mathbf{c})$ компактно, не доставляет эффективному потенциалу даже нестрого минимальное значение, объединение инвариантных множеств (1.6) является полным, а значения \mathbf{c} постоянных интегралов Нётер не являются бифуркационными, то инвариантное множество $\Gamma_j(\mathbf{c})$ неустойчиво.

Обобщенные диаграммы Смейла представляют собой в пространстве $(\mathbf{k}; h)$ множество S поверхностей

$$h = h_j(\mathbf{k}) = V_{\mathbf{k}}(\gamma_j(\mathbf{k})) \quad (j = 1, 2, \dots)$$

Все точки, лежащие на множестве S инвариантны относительно фазового потока системы. Если объединение инвариантных множеств (1.6) является полным, то все точки $(\mathbf{k}; h)$, не лежащие на множестве S , эволюционируют вдоль прямых $\mathbf{k} = \text{const}$ в сторону уменьшения h и стремятся к одной из точек $(\mathbf{k}, h_i(\mathbf{k}))$, удовлетворяющей условию $h_i(\mathbf{k}) < h$. При этом, если есть только одна точка $h_s(\mathbf{k}) < h$, соответствующая минимуму эффективного потенциала на множестве $\gamma_s(\mathbf{k})$ (в данном случае – глобальному на уровне $\mathbf{K} = \mathbf{k}$), то $h \rightarrow h_s(\mathbf{k})$ либо всегда (при условии, что на уровне $\mathbf{K} = \mathbf{k}$ нет никаких других точек $(\mathbf{k}, h_i(\mathbf{k}))$, удовлетворяющих неравенству $h_i(\mathbf{k}) < h, i \neq s$), либо с вероятностью 1 (если иные точки есть, но они соответствуют не минимальным значениям эффективного потенциала на множествах $\gamma_i(\mathbf{k})$). Если же при значениях функции H , меньших начального, есть несколько точек, $(\mathbf{k}, h_{s_1}(\mathbf{k})), (\mathbf{k}, h_{s_2}(\mathbf{k})), \dots$, которые соответствуют минимальным значениям эффективного потенциала на множествах $\gamma_{s_1}(\mathbf{k}), \gamma_{s_2}(\mathbf{k}), \dots$ (одна глобальному, а остальные – локальным), то h может стремиться к $h_{s_1}(\mathbf{k}), h_{s_2}(\mathbf{k})$, с ненулевой вероятностью, причем сумма этих вероятностей равна 1. Здесь вероятность понимается как отношение меры множества начальных значений фазовых переменных задачи, для которых имеет место соответствующий предел h , к полной мере всех начальных значений.

Таким образом, обобщенные диаграммы Смейла позволяют определять предельные движения системы только по значениям постоянных интегралов Нётер и начальному значению полной механической энергии, причем в ряде случаев однозначно или с вероятностью 1.

2. Волчок с вязким наполнителем. Рассмотрим задачу о движении тяжелого твердого тела с полостью, целиком заполненной однородной жидкостью. Предположим, что тело динамически симметрично, а полость представляет собой эллипсоид вращения, ось симметрии которого совпадает с осью симметрии тела, на которой расположен центр масс тела. Кроме того, предположим, что жидкость совершает простое [5] движение, причем взаимодействие жидкости со стенками полости описывается вязким трением, линейным по разности угловых скорости тела и половины вектора вихря жидкости.

Уравнения движения системы имеют вид [6]

$$\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{A}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Omega}] = \left[\boldsymbol{\gamma}, \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \right] \quad (2.1)$$

$$\mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\Omega}} + [\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{B}_* \boldsymbol{\Omega}] = -\mathbf{D}(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \quad (2.2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}] = 0 \quad (2.3)$$

Здесь

$$\mathbf{A} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_* = \text{diag}(A_1, A_1, A_3), \quad \mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{J}_* = \text{diag}(B_1, B_1, B_3)$$

$$\mathbf{B}_* = B_1 \text{diag}(1, 1, 2a_1^2(a_1^2 + a_3^2)^{-1}), \quad \mathbf{D} = \text{diag}(D_1, D_1, D_3),$$

ω – угловая скорость тела, Ω – половина вектора вихря жидкости, γ – единичный вектор восходящей вертикали, $V = mgs\gamma_3$ – потенциальная энергия (m – масса всей системы, g – ускорение свободного падения, s – расстояние от неподвижной точки до центра масс системы), \mathbf{J} – тензор инерции тела для неподвижной точки, \mathbf{J}_* – тензор инерции эквивалентного [5] тела, \mathbf{I} – центральный тензор инерции жидкости, тензор \mathbf{D} характеризует интенсивность внутреннего трения ($D_1 > 0$, $D_3 > 0$), $a_1, a_2 = a_1$ и a_3 – полуоси полости; все тензоры и векторы задаются в главных осях инерции тела для неподвижной точки.

Уравнения движения системы (2.1)–(2.3) допускают невозрастающую вдоль решений этой системы функцию

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\omega, \omega) + \frac{1}{2}(\mathbf{B}\Omega, \Omega) + V(\gamma) \leq h \quad (\dot{H} = -(\mathbf{D}(\Omega - \omega), (\Omega - \omega)) \leq 0) \quad (2.4)$$

интеграл

$$K = (\mathbf{A}\omega + \mathbf{B}\Omega, \gamma) = k \quad (2.5)$$

и геометрический интеграл

$$(\gamma, \gamma) = 1 \quad (2.6)$$

Последний определяет пространство положений вектора γ . Минимум функции (2.4) по ω и Ω на линейном многообразии (2.5) достигается при

$$\omega = \Omega = \frac{k}{C(\gamma)} \gamma \quad (2.7)$$

и определяет эффективный потенциал

$$V_k(\gamma) = mgs\gamma_3 + \frac{k^2}{2C(\gamma)} \quad (2.8)$$

Здесь $C(\gamma) = C_1(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + C_3\gamma_3^2$, $C_1 = A_1 + B_1 = J_1 + I_1$, $C_3 = A_3 + B_3 = J_3 + I_3$.

Критическим точкам эффективного потенциала (2.8) на сфере (2.6) соответствуют равномерные вращения системы как твердого тела вокруг вертикали (см. (2.7)) при вертикальном (если $\gamma_3^2 = 1$) или наклонном (если $\gamma_3^2 < 1$) положении оси симметрии тела, причем при $\gamma_3 = -1$ центр масс системы занимает наинизшее, а при $\gamma_3 = +1$ – наивысшее положение.

Сужение эффективного потенциала (2.8) на сферу (2.6) задается соотношением $V_k = mgsf(x)$, где

$$f(x) = x + \frac{1}{2} \frac{p}{x^2 + c(1 - x^2)}$$

$$(x = \gamma_3 \in [-1; 1], \quad c = C_1/C_3 > 1/2, \quad p = k^2/C_3 mgs \geq 0)$$

Функция $f(x)$ при любых значениях параметров c и p имеет критические точки $x = \pm 1$, которым соответствуют равномерные вращения системы вокруг вертикально расположенной оси симметрии. Внутренние критические точки функции $f(x)$ определяются из уравнения $f'(x) = df/dx = 0$, где

$$f'(x) = \frac{\varphi(x) - p}{\varphi(x)}, \quad \varphi(x) = \frac{[c + (1 - c)x^2]^2}{x(1 - c)}$$

Таким образом, внутренние критические точки удовлетворяют уравнению $\varphi(x) = p > 0$ и существует либо при $c > 1$ (при этом $x \in (-1, 0)$), либо при $c \in (1/2, 1)$ (при этом $x \in (0, 1)$).

Точки $x = \pm 1$ доставляют функции $f(x)$ минимальное (максимальное) значение, если $f'(1) < 0$ (> 0), $f'(-1) > 0$ (< 0), а внутренние критические точки — если $f''(x)|_{p=\varphi(x)} > 0$ (< 0), т.е. если $\varphi'(x)|_{p=\varphi(x)} > 0$ (< 0)

Нетрудно показать, что функция $\varphi(x)$

а) при $c > 1$ монотонно возрастает от p_0 до $+\infty$ при $x \in (-1, 0)$;

б) при $c \in [3/4, 1)$ монотонно убывает от $+\infty$ до p_0 при $x \in (0, 1)$;

в) при $c \in (1/2, 3/4)$ монотонно убывает от $+\infty$ до p_* при $x \in (0, x_*)$ и монотонно возрастает от p_* до p_0 при $x \in (x_*, 1)$.

Здесь

$$x_* = \sqrt{\frac{c}{3(1-c)}}, \quad p_0 = \frac{1}{|c-1|}, \quad p_* = \frac{16c\sqrt{c}}{3\sqrt{3}\sqrt{1-c}}$$

Следовательно, точка $x = -1$ доставляет функции $f(x)$ минимальное значение при любых p , если $c < 1$, и только при $p \leq p_0$, если $c > 1$, а точка $x = +1$ доставляет функции $f(x)$ минимальное значение только при $c < 1$ и $p > p_0$ (а также при $p = p_0$, если $c < 3/4$). Внутренние критические точки доставляют функции $f(x)$ минимальное значение при $c > 1$, если $p > p_0$, и при $c \in (1/2, 3/4)$, если $p \in (p_*, p_0)$.

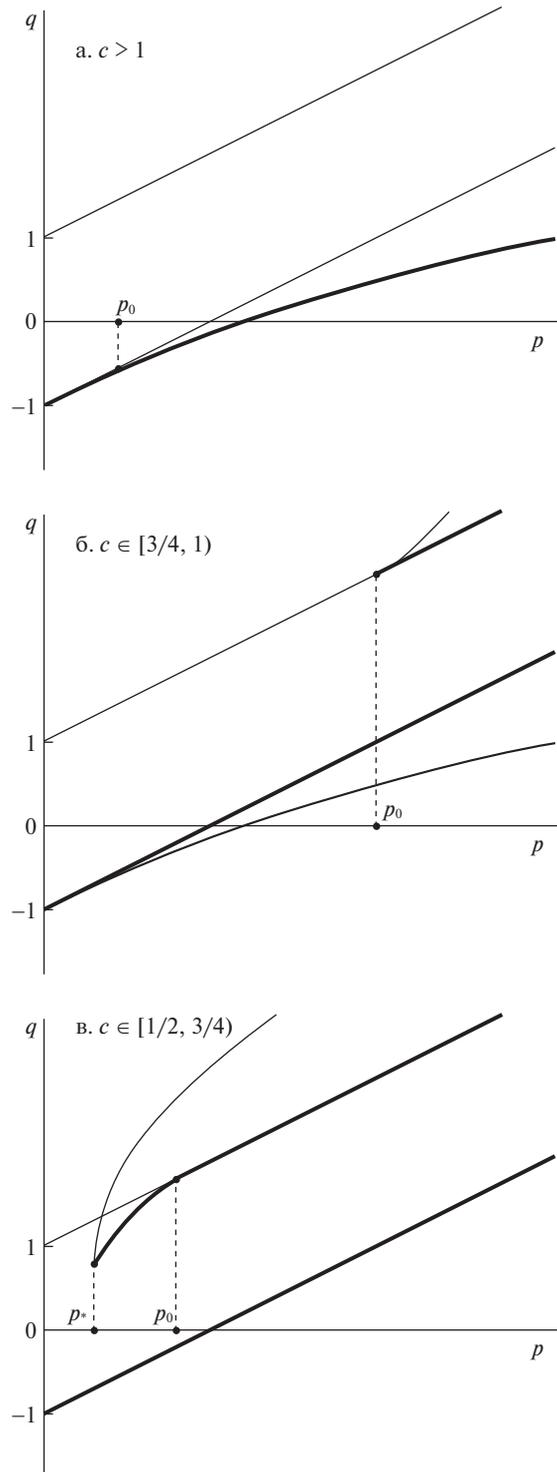
Таким образом, атлас обобщенных диаграмм Смейла состоит из трех карт (см. рис. 1). На этом рисунке $q = h/mgs$ — безразмерное начальное значение полной энергии, прямые $q = \pm 1 + p/2$ соответствуют критическим точкам $x = \pm 1$, а кривые $q = q(p)$ задаются параметрически соотношениями

$$q = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi(x)}{x^2 + c(1 - x^2)}, \quad p = \varphi(x) \tag{2.9}$$

— внутренним критическим точкам функции $f(x)$, полужирные линии соответствуют устойчивым движениям системы. Бифуркационное по Смейлу множество S представляет собой совокупность всех этих кривых и прямых.

Нетрудно показать, (см. уравнения (2.1)–(2.3)), что функция H сохраняет свое начальное значение только на равномерных вращениях системы как твердого тела вокруг вертикали. Следовательно, любая точка плоскости (p, q) , удовлетворяющая условию $q > q_{\min}$, где $q_{\min} = \min f(x)$ (при $q < q_{\min}$ движение невозможно) и не лежащая на множестве S , движется под действием фазового потока системы (2.1)–(2.3) вдоль прямой $p = \text{const}$ сверху вниз, асимптотически приближаясь к точке $(p; q_\infty)$, принадлежащей множеству S .

Пусть, например, $c \in [3/4, 1)$ (см. рисунок (б)). Если $p < p_0$ и $q < 1 + p/2$ ($q > 1 + p/2$), то однозначно (с вероятностью 1) предельным движением системы будет вращение вокруг вертикально расположенной оси симметрии при наименьшем расположении центра масс. Если $q < 1 + p/2$, то аналогичное утверждение справедливо при $p \geq p_0$. Если же $p > p_0$ и $q > 1 + p/2$, то предельными движениями систе-



мы с ненулевой вероятностью могут быть равномерные вращения вокруг вертикально расположенной оси симметрии как при наимизшем, так и при наивысшем положении центра масс. В случае $c > 1$ и $c \in (1/2, 3/4)$ предельными движениями могут быть равномерные вращения системы и при наклонном положении оси симметрии. В первом случае (см. рисунок (а)) при $p > p_0$ либо однозначно (если $q < -1 + p/2$), либо с вероятностью 1 (если $q > -1 + p/2$), а во втором случае (см. рисунок (в)) при $p \in (p_*, p_0)$ только с ненулевой вероятностью и только при $q > q(p)$, где $q(p)$ определяется соотношением (2.9) для $x \in (x_*, 1)$.

Заключительные замечания. Приведенные в разд. 1 результаты очевидным образом распространяются на случай, когда функции H и \mathbf{K} (см. (1.1) и (1.2)) содержат дополнительные слагаемые $(\mathbf{a}(\mathbf{r}), \mathbf{v})$ и $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ соответственно ($\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$). При этом усложняются формулы (1.3) и (1.4), а все утверждения разд. 1 сохраняют справедливость.

Кроме того, приведенные в разд. 1 результаты могут быть использованы для качественного анализа диаграмм систем с полной диссипацией, если диссипативные силы зависят от малого параметра и при нулевом его значении обладают только частичной диссипацией и допускают линейные по квазискоростям интегралы. Следовательно, при нулевом значении малого параметра можно построить обобщенные диаграммы Смейла. При ненулевом значении малого параметра разрушаются как первые интегралы, так и все инвариантные множества, кроме тривиальных, соответствующих состояниям равновесия системы. Первые интегралы переходят в медленно меняющиеся (по сравнению с полной механической энергией) функции, а нетривиальные инвариантные множества — в квазиинвариантные множества. Пусть (\mathbf{k}, h) — произвольная точка начальных значений функций (1.1) и (1.2). Под действием фазового потока системы эта точка начинает “быстро” двигаться в сторону уменьшения h в окрестности прямой $\mathbf{k} = \text{const}$ и за конечное время оказывается в окрестности бифуркационного (для нулевого значения малого параметра) множества S . Затем эта точка “медленно” движется в сторону уменьшения h в окрестности множества S и в пределе стремится к одному из состояний равновесия системы (с нулевой вероятностью — к неустойчивому и с ненулевой — к устойчивому).

Этот метод качественного анализа диссипативных систем неоднократно применялся в задаче о движении волчка тип-топ для различных видов трения в точке контакта волчка с опорной плоскостью (см. [7–12]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований № 19-01-00140.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smale S. Topology and mechanics // Invent. Math. 1970. V. 10. P. 305–311; 1970. V. 11. P. 45–64.
2. Карпетян А.В. Первые интегралы инвариантные множества и бифуркации в диссипативных системах // РХД. 1997. Т. 2. № 1. С. 75–80.
3. Karapetyan A.V. Invariant sets of mechanical systems // in: Modern Methods of Analytical Mechanics and their Applications. Wien; New York: Springer, 1998. P. 153–210.
4. Карпетян А.В. Устойчивость и бифуркация движений. М.: МГУ, 2020.
5. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тел с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965.
6. Карпетян А.В., Самсонов В.А., Сумин Т.С. Об устойчивости и ветвлении перманентных вращений твердого тела с жидким наполнителем // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 6. С. 994–998.
7. Карпетян А.В. Глобальный качественный анализ динамики волчка тип-топ // Изв. РАН МТТ. 2008. № 3. С. 33–41.

8. Зобова А.А., Карапetyан А.В. Анализ стационарных движений волчка тип-топ // ПММ. 2009. Т. 73. № 6. С. 867–877.
9. Зобова А.А. Различие модели трения в динамике двусферического волчка // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 2. С. 21–28
10. Зобова А.А. Обзор моделей распределенного сухого трения // ПММ. 2016. Т. 80. № 2. С. 194–206.
11. Karapetyan A.V., Zobova A.A. Tippe-top on visco-elastic plane: steady-state motions, generalized Smale diagrams and overturns // Lobachevskii J. Math. 2017. V. 38. № 6. P. 1007–1013.
12. Мунициына М.А. Переходные процессы в динамике волчка тип-топ // ПММ. 2020. Т. 84. Вып. 4. С. 426–434.

Generalized Smale Diagrams for Dissipative Systems with Symmetry

A.V. Karapetyan^{*,#}

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: avkarapetyan@yandex.ru*

The problem of a global qualitative analysis of the dynamics of dissipative systems with symmetry based on generalized Smale diagrams is discussed. The general statements are illustrated by the example of the problem of the motion of a top with a viscous filler.

Keywords: Smale diagrams, dissipative systems with symmetry, invariant sets

REFERENCES

1. Smale S. Topology and mechanics // *Invent. Math.*, 1970, vol. 10, pp. 305–311; 1970, vol. 11, pp. 45–64.
2. Karapetyan A.V. First integrals, invariant sets and bifurcations in dissipative systems // *R&C Dyn.*, 1997, vol. 2, no. 1, pp. 75–80.
3. Karapetyan A.V. Invariant sets of mechanical systems // in: *Modern Methods of Analytical Mechanics and their Applications*. Wien; N.Y.: Springer, 1998. pp. 153–210.
4. Karapetyan A.V. *Stability and Bifurcation of Movements*. Moscow: MSU, 2020. (in Russian)
5. Moiseev N.N., Rumyantsev V.V. *Dynamics of Bodies with Cavities Containing Fluid*. Moscow: Nauka, 1965.
6. Karapetyan A.V., Samsonov V.A., Sumin T.S. The stability and branching of the permanent rotations of a rigid body with a fluid filling // *JAMM*, 2004, vol. 68, iss. 6, pp. 893–897.
7. Karapetyan A.V. Global qualitative analysis of tippe top dynamics // *Mech. Solids*, 2008, vol. 43, no. 3, pp. 342–348.
8. Zobova A.A., Karapetyan A.V. Analysis of the steady motions of the tippe top // *JAMM*, 2009, vol. 73, iss. 6, pp. 623–630.
9. Zobova A.A. Various Friction Models in Two-Sphere Top Dynamics // *Mech. Solids*, 2013, vol. 48, no. 2, pp. 134–139.
10. Zobova A.A. A review of models of distributed dry friction // *JAMM*, 2016, vol. 80, iss. 2, pp. 141–148.
11. Karapetyan A.V., Zobova A.A. Tippe-top on visco-elastic plane: steady-state motions, generalized Smale diagrams and overturns // *Lobachevskii J. Math.*, 2017, vol. 38, no. 6, pp. 1007–1013.
12. Munitsyna M.A. Transition Processes in Tippe-Top Dynamics // *Mech. Solids*, 2020, vol. 55, pp. 1178–1184.

УДК 531.36:62-50

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛОВ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С БЕСКОНЕЧНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2021 г. А. С. Андреев^{1,*}, О. А. Перегудова^{1,**}

¹ Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия

* e-mail: asa5208@mail.ru

** e-mail: peregudovaoa@gmail.com

Поступила в редакцию 27.02.2021 г.

После доработки 08.03.2021 г.

Принята к публикации 19.03.2021 г.

В работе рассмотрена задача об устойчивости неавтономного нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра с бесконечным запаздыванием. Проведено развитие метода функционалов Ляпунова в исследовании предельного поведения ограниченного решения, асимптотической устойчивости нулевого решения по всем и части переменных в предположении существования соответствующего функционала Ляпунова, имеющего знакопостоянную производную. Решены задачи о предельных свойствах движения механической системы с линейной эрдитарностью, о стабилизации установившихся движений манипулятора с вязкоупругими цилиндрическим и сферическим шарнирами. Решена задача управления пятизвенным манипулятором с учетом вязкоупругости его шарниров.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра, устойчивость, функционал Ляпунова, механическая система с вязкоупругими элементами, манипулятор, управление

DOI: 10.31857/S0032823521040020

1. Введение. Интенсивное развитие науки и техники стимулировало в начале 50-х годов резкое усиление интереса к теории дифференциальных уравнений с запаздыванием. Принято считать, что основу этой теории составили опубликованные ранее работы В. Вольтерра [1, 2], в которых было предложено учитывать влияние непрерывной последовательности предшествующих состояний системы или процесса на их дальнейшее изменение посредством интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Развитию теории в значительной степени способствовал прогресс математического и функционального анализа, других областей математики. Значимой в этом развитии явилась монография [3], в которой предложено использовать для анализа системы функциональное пространство, как более наглядное и удобное в исследовании соответствующих задач.

Вначале преимущественное развитие получила теория функционально-дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием. Теория таких уравнений с неограниченным запаздыванием лишь постепенно оформилась как ветвь современного математического анализа со своими специфическими проблемами и приложениями [4, 5]. Усилия многих исследователей в этой области были направлены на разработку основ общей теории, начиная с проблемы определения фазового пространства и правой части уравнения с неограниченным запаздыванием, решением соответствующей

проблемы существования, единственности, непрерывной зависимости и продолжительности решений. Из многочисленных исследований по этой проблеме можно выделить работы [6–18]. В работах [9–15, 17, 18] дано аксиоматическое построение фазовых пространств, позволяющее решать указанную проблему для любых конкретных фазовых пространств и правых частей уравнений, удовлетворяющих введенным аксиомам. Как указано в [16], некоторые из этих аксиом являются трудно проверяемыми. Предложены иные условия решения проблемы в рамках функционального пространства ограниченных непрерывных функций.

Многочисленные приложения стимулировали интенсивные исследования проблемы устойчивости как для линейных, так и для нелинейных уравнений с неограниченным запаздыванием. Выделим основные на наш взгляд известные результаты, относящиеся к изучению устойчивости прямым методом Ляпунова в направлении данной работы.

Важным элементом определения устойчивости или оценки решения является выбор между нормами исходного банахова пространства (евклидовой нормы в случае конечномерного пространства) и нормой функционального пространства. Не всегда из свойства устойчивости в евклидовом пространстве следует аналогичное свойство в функциональном пространстве [4, 5]. Указанное выше аксиоматическое описание фазовых пространств позволило определить связь между определениями устойчивости в нормах конечномерного и фазового пространства [9, 10, 12, 13].

Как и в случае функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием [19–26], развитие прямого метода Ляпунова в исследовании устойчивости уравнений с неограниченным запаздыванием делится в основном на два направления: на основе функционалов и функций Ляпунова.

Для развития метода функционалов Ляпунова по отношению к соответствующей теории вводится знакоопределенность и свойство бесконечно малого высшего предела с использованием оценок как через норму как конечномерного пространства, так и через норму функционального пространства [4, 5].

В работах [27, 28] доказываются теоремы об асимптотической устойчивости, обобщающие теоремы типа Матросова, Руша, Красовского. В [14, 28] доказаны теоремы об экспоненциальной устойчивости и их обращении типа Красовского и Йошизавы. В [29] получены теоремы о предельном поведении и асимптотической устойчивости, развивающие предыдущие результаты автора этой работы. В [30, 31] доказаны теоремы об устойчивости на основе оценок сравнительного анализа для функционалов Ляпунова.

Динамическое свойство инвариантности положительного предельного множества ограниченного решения автономного уравнения [7, 9] позволило обобщить для такого уравнения теоремы типа Ла-Салля и Красовского о притяжении решений и асимптотической устойчивости [7].

В работе Вольтерра [1, 2] исследовались непосредственно интегро-дифференциальные уравнения. Качественные свойства этих уравнений по отношению к свойствам общих систем уравнений с запаздыванием имеют целый ряд особенностей, позволяющих построить их более глубокую качественную теорию [4, 5, 32–38], решить важные прикладные задачи [19, 39–42].

Интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра разделяют на уравнения с конечным, неограниченным и бесконечным запаздыванием. Сам В. Вольтерра ограничивался, в основном, изучением уравнений первого типа. Качественные свойства решений, включая устойчивость, достаточно эффективно используются, если в качестве фазового пространства решений рассматривать исходное конечномерное пространство [34, 35, 38, 43–47]. При этом достигается решение важных прикладных задач [48–51].

Исследования уравнений третьего типа сопровождаются построением соответствующего фазового функционального пространства, как правило, с использованием методов общей теории уравнений с неограниченным запаздыванием [4, 5].

В первых двух разделах данной работы в рамках подхода [32, 33] для неавтономного нелинейного интегро-дифференциального уравнения с бесконечным запаздыванием выводятся качественные свойства решений, позволяющие решить задачи о локализации положительного предельного множества ограниченного решения, об асимптотической устойчивости нулевого решения на основе существования функционала Ляпунова, имеющего знакопостоянную производную.

Работы В.В. Румянцева [52, 53] явились основой для теории устойчивости по части переменных, имеющей многочисленные практические применения [54, 55]. Результаты исследований устойчивости относительно части переменных для функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием с решением задач механики представлены в работах [24, 26, 55]. Проблема устойчивости по части переменных для функционально-дифференциальных уравнений с неограниченным запаздыванием является малоизученной и весьма перспективной в решении прикладных задач. Некоторые результаты в этом направлении получены в разделе 4.

Классические результаты по устойчивости и стабилизации положений равновесия и стационарных движений механических систем [56–61] получают широкое применение в управлении робототехническими системами. В разделе 5 данной работы изучается задача о влиянии наследственных свойств механической системы на устойчивость ее положений равновесия. В разделе 6 исследована задача о стабилизации установившихся движений манипуляторов с вязкоупругими цилиндрическими и сферическими шарнирами. В разделе 7 в качестве примера представлена модель управления пятизвенного манипулятора с вязкоупругими цилиндрическими и призматическим шарнирами.

2. Предварительные построения. Пусть R^p – линейное действительное пространство p -векторов x с некоторой нормой $\|x\|$, R – действительная ось, C_∞ – счетно-нормированное пространство всех непрерывных функций $\varphi : R^- \rightarrow R^p$ с полунормами

$$\|\varphi\|_l = \max(\|\varphi(s)\|, -l \leq s \leq 0), \quad l = 1, 2, \dots$$

Пусть $\beta = \text{const}$. Для непрерывной функции $x : (-\infty, \beta) \rightarrow R^p$ и каждого $t < \beta$ функцию $x_t \in C_\infty$ определим равенством $x_t(s) = x(t + s)$, $s \in R^-$, под $\dot{x}(t)$ будем понимать правостороннюю производную.

Рассмотрим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \int_{-\infty}^t g(t, s, x(s)) ds), \quad (2.1)$$

где $f : R \times R^p \times R^p \rightarrow R^p$ и $g : S \times R^p \rightarrow R^p$, есть некоторые непрерывные функции, $S = \{(t, s) : R \in R, s \leq t\}$.

Решением уравнения (2.1), удовлетворяющим условию $x_\alpha = \varphi$, $(\alpha, \varphi) \in R \times C_\infty$, называется функция $x = x(t)$, $t \in (-\infty, \beta)$, $(\beta > \alpha)$, такая, что $x_\alpha(s) = \varphi(s)$, обращающая это уравнение в тождество при всех $t \in [\alpha, \beta)$.

Предположим, что функции f и g удовлетворяют условиям

$$\|f(t, x, g)\| \leq m_1(H_1, H_2) \quad \forall (t, x, g) \in R \times D_1 \times D_2$$

$$D_j = D_j(H_j) = \{x \in R^p : \|x\| \leq H_j\}, \quad j = 1, 2$$

$$\|f(t_2, x^{(2)}, g^{(2)}) - f(t_1, x^{(1)}, g^{(1)})\| \leq L_1 |t_2 - t_1| + L_2 \|x^{(2)} - x^{(1)}\| + L_3 \|g^{(2)} - g^{(1)}\| \quad (2.2)$$

$$L_j = L_j(H_1, H_2), \quad j = 1, 2, 3$$

$$\forall(t_1, x^{(1)}, g^{(1)}), (t_2, x^{(2)}, g^{(2)}) \in R \times D_1 \times D_2$$

$$\|g(t, s, x)\| \leq m_2(H_1) \quad \forall(t, s, x) \in S \times D_1$$

$$\|g(t_2, s_2, x^{(2)}) - g(t_1, s_1, x^{(1)})\| \leq L_4 |t_2 - t_1| + L_5 \|s_2 - s_1\| + L_6 \|x^{(2)} - x^{(1)}\| \quad (2.3)$$

$$L_j = L_j(H_1), \quad j = 4, 5, 6 \quad \forall(t_1, s_1, x^{(1)}), (t_2, s_2, x^{(2)}) \in S \times D_1$$

Кроме того, предположим, что

$$\|g(t, s, x)\| \leq m_3(s - t, H_1) \quad \forall(t, s, x) \in S \times D_1(H_1) \quad (2.4)$$

$$\int_{-\infty}^0 m_3(v, H_1) dv \leq m_{30}(H_1)$$

В пространстве C_∞ введем метрику

$$\rho(\varphi^{(2)}, \varphi^{(1)}) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} \frac{\|\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}\|_l}{\|\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}\|_l} \quad (2.5)$$

Согласно [20, 32, 33] имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть функции f и g удовлетворяют условиям (2.2)–(2.4) (в том числе, при $L_1 = L_4 = L_5 = 0$). Тогда для каждой точки $(\alpha, \varphi) \in R \times \{\varphi \in C_\infty : \|\varphi(s)\| \leq H\}$ существует единственное решение $x = x(t, \alpha, \varphi)$, $x_\alpha = \varphi$, определенное при $t \in (-\infty, \beta)$, $\beta > \alpha$, непрерывно зависящее от $(\alpha, \varphi) \in R \times C_\infty$.

Введем пространства B_f и B_g непрерывных функций $f : R \times R^p \times R^p \rightarrow R^p$ и $g : S \times R^p \rightarrow R^p$ соответственно, удовлетворяющих условиям (2.2)–(2.4). Определим сходимость в B_f и B_g согласно открыто-компактной топологии [62].

Аналогично построениям из [44, 45] уравнению (2.1) можно сопоставить семейство предельных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = f^*(t, x(t)), \quad \int_{-\infty}^t g^*(t, s, x(s)) ds, \quad (f^*, g^*) \in B_f \times B_g \quad (2.6)$$

Определение 2.1. Пусть $x = x(t, \alpha, \varphi)$ есть решение уравнения (2.1), ограниченное при всех $t \in R$, $\|x(t, \alpha, \varphi)\| \leq H \quad \forall t \in R$. Функция $\varphi^* \in C_\infty$ называется предельной для этого решения, если $\exists t_n \rightarrow \infty$, такая, что соответствующая последовательность

$$x_t^{(n)}(\alpha, \varphi) = x(t_n + s, \alpha, \varphi)$$

сходится к φ^* в C_∞ при $n \rightarrow \infty$, или $\rho(x_t^{(n)}(\alpha, \varphi), \varphi^*) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Множество $\Omega^+(\alpha, \varphi)$ всех таких функций образует в C_∞ положительное предельное множество данного решения $x = x(t, \alpha, \varphi)$. Покажем, что это множество имеет следующее свойство квазиинвариантности.

Теорема 2.2. Пусть $x = x(t, \alpha, \varphi)$ есть решение уравнения (2.1), ограниченное при всех $t \in R$, $\|x(t, \alpha, \varphi)\| \leq H_1 \quad \forall t \in R$. Тогда множество $\Omega^+(\alpha, \varphi)$ непусто, компактно, связно и квазиинвариантно.

Доказательство. Как и в [44], из условий (2.2) и (2.4) можно найти, что каждое ограниченное решение $x = x(t, \alpha, \varphi)$ равномерно непрерывно по $t \geq \alpha$

$$|x(t_2, \alpha, \varphi) - x(t_1, \alpha, \varphi)| \leq m_1(H_1, m_{30}(H_1)) \quad \forall t_1, t_2 \geq \alpha \tag{2.7}$$

Покажем, что множество $\Omega^+(\alpha, \varphi)$ решения $x = x(t, \alpha, \varphi)$ является непустым.

Пусть $t_n \rightarrow \infty$ – произвольная последовательность. Для последовательности функций $x^{(n)}(t) = x(t_n + t, \alpha, \varphi)$ при всех $t_1, t_2 \in [\alpha - t_n, 0]$ имеет место оценка (2.7). Отсюда выводим существование подпоследовательности $\{t_n^{(k)}\} \subset \{t_n\}$ и функции $\varphi^* \in C_\infty$, таких, что $\{x^{(k)}(t)\}$ сходится к $x = \varphi^*(t)$ равномерно по $t \in [-T, 0]$ при каждом $T > 0$. И, значит, $\rho(x_t^{(k)}, \varphi^*) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Таким образом, $\Omega^+(\alpha, \varphi)$ непусто.

Стандартным подходом, как и для функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием [24, 26], можно показать, что $\Omega^+(\alpha, \varphi)$ связно, а именно, это множество нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся непустых замкнутых множеств, и оно компактно. Очевидно, что оно является компактным.

Покажем, что множество $\Omega^+(\alpha, \varphi)$ является квазиинвариантным, а именно, для любой функции $\varphi^* \in \Omega^+(\alpha, \varphi)$ существуют предельное уравнение (2.6) и его решение $x = x(t, 0, \varphi^*)$ такие, что $x_t(\alpha, \varphi^*) \in \Omega^+(\alpha, \varphi)$ для всех $t \in R$.

Без ограничения общности, можем принять, что для последовательности $t_n \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} f^{(n)}(t, x) &= f(t_n + t, x) \rightarrow f^*(t, x), & f^* &\in B_f \\ g^{(n)}(t, x) &= g(t_n + t, x) \rightarrow g^*(t, x), & g^* &\in B_g \end{aligned}$$

Из того, что $x = x(t) = x(t, \alpha, \varphi)$ есть решение уравнения (2.1), последовательно имеем

$$x(t) = x(\alpha) + \int_{\alpha}^t f(\tau, x(\tau), \int_{-\infty}^{\alpha} g(\tau, s, x(s))ds) + \int_{\alpha}^{\tau} g(\tau, s, x(s))ds d\tau$$

для всех $t \geq \alpha$,

$$\begin{aligned} x(t_n + t) &= x(t_n) + \int_{t_n}^{t_n+t} f(\tau, x(\tau), \int_{-\infty}^0 g(\tau, \alpha + s, x(\alpha + s))ds) + \int_{\alpha}^{\tau} g(\tau, s, x(s))ds d\tau \\ x^{(n)}(t) &= x^{(n)}(0) + \int_0^t f^{(n)}(\tau, x^{(n)}(\tau), \int_{-\infty}^0 g(t_n + \tau, \alpha + s, \varphi(s))ds) + \int_{\alpha-t_n}^{\tau} g^{(n)}(\tau, s, x^{(n)}(s))ds d\tau \end{aligned} \tag{2.8}$$

для всех $t \in [\alpha - t_n, +\infty)$.

Согласно условию (2.4) имеем следующие оценки

$$\left\| \int_{-\infty}^0 g(t_n + \tau, \alpha + s, \varphi(s))ds \right\| \leq \int_{-\infty}^0 m_3(s + \alpha - t_n - \tau, H_1)ds = \int_{-\infty}^{-t_n+\alpha-\tau} m_3(v, H_1)dv \rightarrow 0 \tag{2.9}$$

при $n \rightarrow \infty$.

$$\left\| \int_{t_0-t_n}^{\tau} g^{(n)}(\tau, s, x^{(n)}(s))ds \right\| \leq \int_{-\infty}^0 m_3(v, H_1)dv \leq m_{30}(H_1) \tag{2.10}$$

Отсюда, переходя в равенстве (2.8) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$x^*(t) = x^*(0) + \int_0^t f^*(\tau, x^*(\tau), \int_{-\infty}^{\tau} g^*(\tau, s, x^*(s)) ds) d\tau \quad (2.11)$$

при всех $t \in R$, при этом по построению $x_0^*(s) = \varphi^*(s)$, $s \in R^-$.

Дифференцируя равенство (2.11) по $t \in R$, имеем требуемое доказательство.

3. Принцип квазиинвариантности. Введем следующие пространства скалярных функций:

1) пространство B_V^1 функций $V_1 \in C^1(R \times R^p \times R \rightarrow R)$;

2) B_V^{11} – подпространство B_V^1 функций $V_1(t, x, v)$, удовлетворяющих условиям вида (2.2);

3) пространство B_V^2 функций $V_2 \in C^1(S \times R^p \rightarrow R)$, удовлетворяющих условиям вида (2.3), имеющих производную $\partial V_2(t, s, x) / \partial t \in C(S \times R^p \rightarrow R)$, при этом

$$\begin{aligned} |V_2(t, s, x)| &\leq v(s - t, H_1), \quad \left| \frac{\partial V_2}{\partial t}(t, s, x) \right| \leq v(s - t, H_1) \\ \forall (t, s, x) &\in S \times \{x \in R^p : \|x\| \leq H_1\} \\ \int_{-\infty}^0 v(v, H_1) dv &\leq v_0(H_1) < \infty \end{aligned} \quad (3.1)$$

4) пространство B_W^1 функций $W_1 \in C(R \times R^p \times R \rightarrow R^+)$, удовлетворяющих условиям вида (2.2);

5) пространство B_W^2 функций $W_2 \in C(S \times R^p \rightarrow R)$, удовлетворяющих условиям вида (2.4) и (2.6).

Для функционала $V = V(t, \varphi)$, определяемого равенством

$$V(t, \varphi) = V_1(t, \varphi(0), v_2(t, \varphi)), \quad v_2(t, \varphi) = \int_{-\infty}^0 V_2(t, t + s, \varphi(s)) ds, \quad \varphi \in C_\infty \quad (3.2)$$

вдоль заданного решения $x = x(t) = x(t, \alpha, \varphi)$, $(\alpha, \varphi) \in R^+ \times C_\infty$ при $t \in [\alpha, \beta]$, $(\beta > \alpha)$ можно определить функцию

$$V(t) = V(t, x_t) = V_1(t, x(t, \alpha, \varphi), v_2(t, x_t(\alpha, \varphi))); \quad v_2(t, x_t) = \int_{-\infty}^t V_2(t, s, x(s, \alpha, \varphi)) ds \quad (3.3)$$

и ее производную

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{V}(t, x_t(\alpha, \varphi)) = \\ &= \left(\frac{\partial V_1(t, x(t), v_2)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V_1(t, x(t), v_2)}{\partial x} \right) f(t, x(t), y) \right) \Big|_y = \int_{-\infty}^t g(t, \tau, x(\tau)) d\tau + \\ &+ \left(\frac{\partial V_1(t, x(t), v_2)}{\partial v} \right) \left(V_2(t, t, x(t)) + \int_{-\infty}^t \frac{\partial V_2(t, \tau, x(\tau))}{\partial t} d\tau \right) \Big|_{v_2} = \int_{-\infty}^t V_2(t, \tau, x(\tau)) d\tau, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $(\cdot)'$ – операция транспонирования.

Введем соответствующий функционал $\dot{V}(t, \varphi)$, называемый в дальнейшем производной от V , и предположим, что производная $\dot{V}(t, \varphi)$ для некоторых $W_1 \in B_W^1$ и $W_2 \in B_W^2$ удовлетворяет следующему неравенству

$$\dot{V}(t, \varphi) \leq -W_1 \left(t, \varphi(0), \int_{-\infty}^t W_2(t, t+s, \varphi(s)) ds \right) \leq 0 \tag{3.5}$$

Пусть $V_1 \in B_V^1$, $V_2 \in B_V^2$, $W_1 \in B_W^1$, $W_2 \in B_W^2$. Аналогично определению (f^*, g^*) могут быть определены семейства соответствующих предельных функций $\{V_1^*\}$, $\{V_2^*\}$, $\{W_1^*\}$, $\{W_2^*\}$. Может быть введена предельная совокупность $(f^*, g^*, V_1^*, V_2^*, W_1^*, W_2^*)$, задаваемая единой для предельных функций последовательностью $t_n \rightarrow \infty$.

Имеет место следующая теорема типа принципа квазиинвариантности.

Теорема 3.1. Предположим, что:

1) может быть найден функционал $V = V(t, \varphi)$, производная которого $\dot{V}(t, \varphi)$ удовлетворяет неравенству (3.5);

2) решение $x = x(t, \alpha, \varphi)$ уравнения (2.1) ограничено при всех $t \in R$, $\|x(t, \alpha, \varphi)\| \leq H_1 \forall t \in R$.

Тогда при некотором $c = c_0 \geq m(H_1)$ для каждой точки $\varphi^* \in \Omega^+(\alpha, \varphi)$ найдется предельная совокупность $(f^*, g^*, V_1^*, V_2^*, W_1^*, W_2^*)$ такая, что для соответствующего решения $x = x(t, 0, \varphi^*)$ предельного уравнения (2.6) имеют место включения

$$\begin{aligned} \{x_t(0, \varphi^*), t \in R\} &\subset \Omega^+(\alpha, \varphi) \\ x_t(0, \varphi^*) \in \{V^*(t, \varphi) = c_0\} \cap \{W^*(t, \varphi) = 0\} &\quad \forall t \in R \end{aligned}$$

Доказательство.

Из условий 1 и 2 теоремы следует существование постоянной $c_0 = \text{const} \geq m(H_1)$ такой, что функция $V(t) = V(t, x_t(\alpha, \varphi)) \searrow c_0$ при $t \rightarrow \infty$.

Пусть $\varphi^* \in \Omega^+(\alpha, \varphi)$ есть предельная функция, задаваемая последовательностью $t_n \rightarrow \infty$. Будем считать, что $(f^*, g^*, V_1^*, V_2^*, W_1^*, W_2^*)$ есть предельная совокупность, определяемая этой же последовательностью. Аналогично представлению (2.8) согласно (3.3) и (3.4) имеем

$$\begin{aligned} V(t_n + t, x^{(n)}(t)) &= V_1^{(n)}(t, x^{(n)}(t)) \\ &+ \int_{-\infty}^0 V_2(t_n + t, t_0 + s, \varphi(s)) ds + \int_{t_0 - t_n}^t V_2^{(n)}(t, s, x^{(n)}(s)) ds \\ V(t_n + t) - V(t_n) &\leq - \int_0^t W_1^{(n)}(\tau, x^{(n)}(\tau), \int_{-\infty}^0 W_2(t_n + t, t_0 + s, \varphi(s)) ds + \\ &+ \int_{t_0 - t_n}^t W^{(n)}(\tau, s, x^{(n)}(s)) ds) d\tau \leq 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

В силу условия (3.1) для этих соотношений имеют место оценки вида (2.9). Соответственно из (3.6), переходя к пределу при $t_n \rightarrow \infty$, получаем искомые соотношения

$$V_1^*(t, x^*(t, 0, \varphi^*), \int_{-\infty}^t V_2^*(t, s, x^*(s, 0, \varphi^*)) ds) = c_0$$

$$W_1^*(t, x^*(t, 0, \varphi^*), \int_{-\infty}^t W_2^*(t, s, x^*(s, 0, \varphi^*)) ds) = c_0$$

Теорема доказана.

4. Устойчивость нулевого решения. Предположим, что $f(t, 0, 0) = g(t, 0, 0) \equiv 0$, так что уравнение (2.1) имеет нулевое решение $x(t, \alpha, 0) \equiv 0$, непрерывно зависящее от $(\alpha, \varphi) \in R \times C_\infty$.

Введем класс \mathcal{H}_1 функций $a_1 : R^+ \rightarrow R^+$ типа Хана [63] и класс \mathcal{H}_2 функций $a_2 : R^+ \times R^+ \rightarrow R^+$, таких, что $a_2(\alpha, v) \in \mathcal{H}_1$ при фиксированном $\alpha \in R^+$. Будем полагать, что для оценки (3.1) $v_0 \in \mathcal{H}_1$.

Примем следующее определение устойчивости в R^n [4, 27, 28], обозначив через $\|\varphi\| = \sup(\|\varphi\|_l, l \in N) = \sup(\|\varphi(s)\|, s \in R^-)$.

Определение 4.1. Решение $x = 0$ уравнения (2.1) является устойчивым, если $(\forall \varepsilon > 0) (\forall \alpha \in R^+) (\exists \delta = \delta(\varepsilon, \alpha) > 0) (\forall \varphi \in C_\infty : \|\varphi\| < \delta) (\forall t \geq \alpha) \|x(t, \alpha, \varphi)\| < \varepsilon$. Равномерная устойчивость означает, что $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

Определение 4.2. Решение $x = 0$ уравнения (2.1) является слабо асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчиво и $(\forall \alpha \in R^+) (\exists \delta_0 = \delta_0(\alpha) > 0) (\forall \varphi \in C_\infty : \|\varphi\| < \delta_0) \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, \alpha, \varphi) = 0$.

Определение 4.3. Решение $x = 0$ уравнения (2.1) является равномерно асимптотически устойчивым относительно компакта $K \subset C_\infty$, если оно равномерно устойчиво и $(\exists \delta_0 > 0) (\forall \varepsilon > 0) (\exists T = T(\varepsilon) > 0) (\forall \alpha > 0) (\forall \varphi \in \{ \|\varphi\| < \delta_0 \} \cap K) (\forall t \geq \alpha + T) \|x(t, \alpha, \varphi)\| < \varepsilon$.

Теорема 4.1. Предположим, что:

1) можно найти функционал $V = V(t, \varphi)$ вида (3.3) такой, что

$$a_1(\|x\|) \leq V_1(t, x, v) \leq a_2(t, \|x\| + |v|), \quad a_1 \in \mathcal{H}_1, \quad a_2 \in \mathcal{H}_2,$$

производная которого удовлетворяет неравенству (3.5);

2) для каждой предельной совокупности (f^*, g^*, W_1^*, W_2^*) множество $\{W^*(t, \varphi) = 0\}$ не содержит решений соответствующего предельного уравнения (2.6), кроме $x^*(t, 0, 0) \equiv 0$.

Тогда решение $x = 0$ уравнения (2.1) асимптотически устойчиво.

Доказательство.

Для решения $x = x(t, \alpha, \varphi)$ уравнения (2.1) из условия 1 теоремы при $t \in [\alpha, \beta)$, $(\beta > \alpha)$ имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} a_1(\|x(t, \alpha, \varphi)\|) &\leq V_1(t, x(t, \alpha, \varphi), V_2(t, x_t(\alpha, \varphi))) \leq V(\alpha, x(\alpha, \alpha, \varphi), V_2(\alpha, x_\alpha(\alpha, \varphi))) = \\ &= V(\alpha, \varphi(0), V_2(\alpha, \varphi)) \leq a_2(\alpha, \|\varphi(0)\| + v_0(\|\varphi\|)) < a_1(\varepsilon), \end{aligned} \quad (4.1)$$

если $\|\varphi\| + v_0(\|\varphi\|) < a_2^{-1}(\alpha, a_1(\varepsilon)) = \delta(\alpha, \varepsilon)$.

И, значит, $\|x(t, \alpha, \varphi)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq \alpha$.

Условие 2 теоремы означает, что для каждого решения $x = x^*(t, 0, \varphi^*)$, $\varphi^* \neq 0$, предельного уравнения (2.6) найдется $\beta \geq 0$, такое, что

$$W^*(\beta, x_\beta^*(0, \varphi^*)) \neq 0$$

В силу теоремы 2.1 и условия 2 данной теоремы для каждой предельной точки $\varphi^* \in \Omega^+(\alpha, \varphi)$ ограниченного решения $x = x(t, \alpha, \varphi)$ имеем $W^*(\beta, x_\beta^*(0, \varphi^*)) \equiv 0$. Таким образом, находим, что $\varphi^* = 0 \forall \varphi^* \in \Omega^+(\alpha, \varphi)$ и, значит, $x(t, \alpha, \varphi) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

Теорема 4.2. Предположим, что:

1) условие 1 теоремы 3.1 выполнено для функционала $V = V(t, \varphi)$ вида (3.3) и функции $a_2 \in \mathcal{H}_1$;

2) для каждой предельной совокупности $(f^*, g^*, V_1^*, V_2^*, W_1^*, W_2^*)$ множество $\{V^*(t, \varphi) = c_0 = \text{const} > 0\} \cap \{W^*(t, \varphi) = 0\}$ не содержит решений соответствующего предельного уравнения (2.6).

Тогда решение $x = 0$ уравнения (2.1) равномерно асимптотически устойчиво относительно компакта $K \subset C_\infty$.

Доказательство.

Равномерная устойчивость $x = 0$ следует из условия 1 и (4.1) с учетом того, что $a_2 = a_2(v)$. При этом находим, что для каждого ограниченного при всех $t \geq \alpha$ решения $x(t, \alpha, \varphi)$ уравнения (2.1) функция $V(t, x_t(\alpha, \varphi)) \searrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Далее, аналогично [24, 26], доказывается, что это свойство имеет место равномерно по $(\alpha, \varphi) \in R^+ \times K$.

5. Устойчивость по части переменных для случая конечного запаздывания. Рассмотрим задачу об устойчивости нулевого решения $x = 0$ по части переменных x_1, x_2, \dots, x_l ($0 < l < p$). Для удобства переобозначим эти переменные через $y_i = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, l$), а остальные – через $z_j = x_{m+j}$ ($j = 1, 2, \dots, r = p - l$). Соответственно, $x' = (x_1, x_2, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, x_p) = (y', z')$, $y \in R^l$ есть вектор l -мерного действительного пространства с некоторой нормой $\|y\|$, $z \in R^{p-l}$ есть вектор $(p - l)$ -мерного действительного пространства с некоторой нормой $\|z\|$, $\|x\| = \|y\| + \|z\|$.

Функцию $x = \varphi(s)$, $s \in R^-$, будем представлять через соответствующие составляющие $\psi(s)$ и $\theta(s)$

$$x' = \varphi'(s) = (\psi'(s), \theta'(s)) = (y', z')$$

В дополнение к условиям (2.2)–(2.4) будем полагать также z – продолжимость решений уравнения (2.1) [24, 26, 54]. Это означает, что если какое-либо решение $x = x(t, \alpha, \varphi)$ определено лишь при $t \in (-\infty, \beta)$, $\alpha < \beta < +\infty$, то $\|y(t, \alpha, \varphi)\| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

Будем использовать соответствующие определения устойчивости по части переменных y с введенной нормой $\|y\|$.

Теорема 5.1. Предположим, что:

1) каждое решение $x = x(t, \alpha, \varphi)$, $(\alpha, \varphi) \in R^+ \times \{\varphi \in C_\infty : \|\varphi\| \leq H_0\}$ уравнения (2.1) ограничено по z , $\|z(t, \alpha, \varphi)\| \leq H_1(\alpha, \varphi) \forall t \geq \alpha$;

2) можно найти функционал $V = V(t, \varphi)$ вида (3.3), удовлетворяющий условиям

$$a_1(\|y\|) \leq V_2(t, x, v) \leq a_2(t, \|x\| + |v|), \quad a_1 \in K_1, \quad a_2 \in K_2$$

производная которого удовлетворяет неравенству (3.5);

3) для каждой предельной совокупности (f^*, g^*, W_1^*, W_2^*) максимальное квазиинвариантное подмножество M множества $\{W^*(t, \varphi) = 0\}$ содержится в множестве $\{\varphi \in C_\infty : \psi(s) \equiv 0 \forall s \in R^-\}$.

Тогда решение $x = 0$ уравнения (2.1) асимптотически устойчиво по y .

Доказательство.

Из условия 2 теоремы аналогично выводу соотношений (4.1) имеем оценки

$$a_1(\|y(t, \alpha, \varphi)\|) \leq a_2(\alpha, \|\varphi(0)\| + v_0(\|\varphi\|))$$

$$\|y(t, \alpha, \varphi)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq \alpha, \quad \text{если}$$

$$\|\varphi\| + v_0(\|\varphi\|) \leq a_2^{-1}(\alpha, a_1(\varepsilon)) = \delta(\alpha, \varepsilon)$$

Учитывая условие 1 теоремы, находим, что каждое решение $x = x(t, \alpha, \varphi)$, $(\alpha, \varphi) \in R^+ \times \{\varphi \in C_\infty : \|\varphi\| < \inf(H_0, \delta)\}$ определено и ограничено при всех $t \in R^-$.

Согласно теореме 2.1 для каждого такого решения функция $\varphi^* = ((\psi^*), (\theta^*)) \in \Omega^+(\alpha, \varphi)$, если только $\psi^* = 0$. Отсюда следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t, \alpha, \varphi) = 0$$

Теорема доказана.

Можно вывести также следующую теорему.

Теорема 5.2. Предположим, что:

1) существует некоторое $H_0 > 0$ такое, что решения $x = x(t, \alpha, \varphi)$, $(\alpha, \varphi) \in R^+ \times \{\varphi \in C_\infty : \|\varphi\| \leq H_0\}$ уравнения (2.1) равномерно ограничены по z , $\|z(t, \alpha, \varphi)\| \leq H_1 = \text{const} \quad \forall t \geq \alpha$;

2) можно найти функционал $V = V(t, \varphi)$ вида (3.3), удовлетворяющий условию 2 теоремы 4.1 при $a_2 \in K_1$;

3) для каждой предельной совокупности $(f^*, g^*, V_1^*, V_2^*, W_1^*, W_2^*)$ множество

$$\{V(t, \varphi) = c_0 = \text{const} > 0\} \cap \{W^*(t, \varphi) = 0\}$$

не содержит решений $x = x^*(t, 0, \varphi^*)$ любого предельного уравнения (2.6).

Тогда решение $x = 0$ уравнения (2.1) равномерно по $(\alpha, \varphi) \in R^+ \times K$ асимптотически устойчиво относительно y .

6. Устойчивость положений равновесия и стационарных движений механической системы с линейной эрeditarностью. Рассмотрим механическую систему с N материальными точками, положения которых определяются радиус-векторами $\bar{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \dots, \bar{r}_N = (x_N, y_N, z_N)$.

Допустим, что имеются вязкоупругие элементы с реакциями \bar{F}_{jk} ($j = 1, \dots, N$; $k = 1, 2, \dots, \mu_N$), приложенными к j -й точке.

$$\bar{F}_{jk} = F_{jk} \bar{e}_{jk}^0 = -(\rho_{jk}(t) l_{jk}(\bar{r}_j(t)) + \int_{-\infty}^t g_{jk}(t, s) l_{jk}(\bar{r}_j(s)) ds) \bar{e}_{jk}^0, \quad (6.1)$$

где l_{jk} — удлинение k -го элемента с учетом остаточной деформации при перемещении $\bar{r}_j(t)$, ρ_{jk} и g_{jk} — соответствующие коэффициенты жесткости и релаксации, \bar{e}_{jk}^0 — единичный вектор соответствующего направления.

Виртуальная работа этих реакций на элементарных перемещениях $\delta \bar{e}_{jk} = \delta e_{jk} \bar{e}_{jk}$ определяется равенствами

$$\delta' A = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{\mu_j} \bar{F}_{jk} \delta \bar{e}_{jk} = F' \delta L$$

$$\begin{aligned}
 F' &= (F_1, F_2, \dots, F_p) = (F_{11}, \dots, F_{\mu_1}, \dots, F_{N\mu_N}) \\
 L' &= (l_1, \dots, l_p) = (l_{11}, \dots, l_{\mu_1}, \dots, l_{N\mu_N}) \\
 p &= \sum_{j=1}^N \mu_j
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Пусть на систему наложены идеальные стационарные связи, так что ее положение определяется n обобщенными координатами q_1, q_2, \dots, q_n . Из (6.1) и (6.2) находим обобщенные силы, определяющие действие вязкоупругих элементов

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) F; \quad L = L(q), \quad \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial(L_1, L_2, \dots, L_p)}{\partial(q_1, q_2, \dots, q_n)} \\
 F &= -P(t)L(q(t)) - \int_{-\infty}^t G(t, s)L(q(s))ds \\
 P &= \text{diag}(\rho_{11}, \rho_{12}, \dots, \rho_p), \quad G = \text{diag}(g_{11}, g_{12}, \dots, g_p)
 \end{aligned}$$

Допустим, что на систему действуют также потенциальные и диссипативные силы

$$Q_2 = Q_2(t, q, \dot{q}), \quad Q_2(t, q, 0) \equiv 0; \quad \dot{q}'Q_2 \leq 0, \quad Q_3 = -\frac{\partial \Pi(t, q)}{\partial q},$$

где $\Pi(t, q)$ – потенциальная энергия.

Движение системы может быть описано уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q_1 + Q_2, \tag{6.3}$$

где $T = (\dot{q}'A(q)\dot{q})/2$ – кинетическая энергия, $A \in R^{n \times n}$ – положительно определенная при всех $q \in R^n$ матрица.

Будем полагать, что функции, входящие в (6.3), удовлетворяют условиям (2.2)–(2.4), равенству $L(q) = L_0$ при $\|q\| \leq H_0$ удовлетворяет конечное число значений.

Введем функционал, определяемый вдоль движения $(q(t), \dot{q}(t))$ системы (6.3) следующим равенством

$$V(t, q_t, \dot{q}(t)) = \frac{1}{2} \dot{q}'A(q)\dot{q} + \Pi_1(t, q) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t (L(q(t)) - L(q(s)))'G(t, s)(L(q(t)) - L(q(s)))ds,$$

где $\Pi_1(t, q)$ имеет вид

$$\Pi_1(t, q) = \Pi(t, q) + \frac{1}{2} L'(q)P(t)L(q) + \frac{1}{2} L'(q) \left(\int_{-\infty}^t G(t, s)ds \right) L(q)$$

Для производной функционала V согласно (3.4) в силу уравнений движения (6.3) находим оценку

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t, q_t, \dot{q}(t)) &= \frac{\partial \Pi_1(t, q)}{\partial t} + Q_2'(t, q, \dot{q})\dot{q} - W(t, q_t) \leq -W(t, q_t) \leq 0 \\
 W(t, q_t) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t (L(q(t)) - L(q(s)))' \frac{\partial G(t, s)}{\partial t} (L(q(t)) - L(q(s)))ds,
 \end{aligned}$$

если

$$\frac{\partial \Pi_1(t, q)}{\partial t} \leq 0, \quad \forall (t, q) \in R^+ \times R^n, \quad a' \frac{\partial G(t, s)}{\partial t} a \geq 0 \quad \forall (t, s) \in S, \quad \forall a \in R^n$$

Определим семейство функций $\{\Pi_1^*(t, q)\}$, предельных к функции $\Pi_1(t, q)$, и матриц $\{G_i^*(t, s)\}$, предельных к $\partial G(t, s)/\partial t$.

На основании теоремы 2.1 имеем следующее утверждение.

Утверждение 6.1. Пусть:

- 1) равенства $\partial \Pi^*(t, q)/\partial q = 0$ для всех предельных $\Pi_1^*(t, q)$ определяют одно и то же множество изолированных положений $M = \{q = q_0^{(k)}, k = 1, 2, \dots, l\}$;
- 2) для каждой матрицы $G_i^*(t, s)$ найдется пара значений $(t_0, s_0) \in S$, такая, что

$$\det G_i(t_0, s_0) = \prod_{j=1}^p g_j^*(t_0, s_0) \neq 0$$

Тогда каждое ограниченное движение системы (6.3) неограниченно приближается к одному из предельных положений равновесия $(\dot{q}, q) = (0, q_0^{(k)})$ при $t \rightarrow +\infty$.

Без ограничения общности, допустим, что при $q = 0$ имеют место равенства

$$\Pi(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q}(t, 0) = 0, \quad L(0) = 0$$

Тогда система (6.3) имеет положение равновесия $\dot{q} = q = 0$.

Согласно теореме 3.2 имеем следующее утверждение.

Утверждение 6.2. Допустим, что:

- 1) функция $\Pi_1(t, q)$ удовлетворяет условиям

$$a_1(\|q\|) \leq \Pi_1(t, q) \leq a_2(\|q\|), \quad a_1, a_2 \in K_1$$

$$\left\| \frac{\partial \Pi_1(t, q)}{\partial q} \right\| \geq a_3(\|q\|), \quad a_3 \in K_1;$$

- 2) выполнено условие 2 утверждения 6.1.

Тогда положение равновесия $\dot{q} = q = 0$ системы (6.3) асимптотически устойчиво равномерно по $K \subset C_\infty$.

Рассмотрим частный случай, когда

$$\Pi = \Pi(q), \quad \rho_p = \rho_p^0 = \text{const}, \quad g_j(t, s) = g_j(s - t)$$

В этом случае находим, что $g_j^*(t, s) = g_j(s - t)$

$$\Pi_1 = \Pi_1(q) = \Pi(q) + \frac{1}{2} L'(q) P L(q) + \frac{1}{2} L'(q) \left(\int_{-\infty}^0 G(v) dv \right) L(q)$$

Условия утверждения 5.2 будут выполнены, если

$$\Pi_1(q) \geq a_1(\|q\|), \quad \left\| \frac{\partial \Pi_1(q)}{\partial q} \right\| \neq 0; \quad g_j(v) \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p), \quad \prod_{j=1}^p g_j(v^*) \neq 0$$

при $q \neq 0$ и некотором $v^* \in R^-$.

По теореме 4.2 имеет место также следующее утверждение.

Утверждение 6.3. Допустим, что:

- 1) движения системы (6.3) из некоторой окрестности $\dot{q} = q = 0$ ограничены по q_{m+1}, \dots, q_n , например, эти переменные определяются по $\text{mod}(2\pi)$;

2) функция $\Pi_1(q) \geq a_1(\|q\|_m)$

$$\left\| \frac{\partial \Pi_1(q)}{\partial q} \right\| \neq 0 \quad \forall q \in \{\Pi_1(q) > 0\}$$

Тогда положение равновесия $\dot{q} = q = 0$ равномерно асимптотически устойчиво по $\dot{q}, q_1, q_2, \dots, q_m$.

7. О стабилизации установившихся движений манипуляторов с цилиндрическими и сферическими вязкоупругими шарнирами. Рассмотрим манипулятор, функционирующий в однородном поле тяжести, с указанными выше шарнирами, положение которого определяется n обобщенными координатами q_1, q_2, \dots, q_n .

Уравнения движения системы возьмем в форме (6.3) с тем изменением, что потенциальная энергия сил тяжести $\Pi = \Pi(q)$, вязкоупругое действие в шарнирах является линейным по координатам q_1, q_2, \dots, q_n таким образом, что

$$\begin{aligned} L &= (q - q_0), \quad P = P_0 = \text{diag}(\rho_1^0, \rho_2^0, \dots, \rho_n^0), \quad \rho_k^0 \geq 0 \\ G(t, s) &= G(s - t) = \text{diag}(g_1(s - t), g_2(s - t), \dots, g_n(s - t)) \\ g_k(v) &\leq 0, \quad g_k'(v) \geq 0, \end{aligned} \tag{7.1}$$

обобщенная сила Q_2 есть управление, $Q_2 = U$, подлежащее определению.

Пусть $\dot{q} = 0$, $q = q^{(0)}$ есть заданное положение манипулятора, создаваемое управлением

$$U^{(0)} = \frac{\partial \Pi}{\partial q}(q^{(0)}) + \left(P_0 + \int_{-\infty}^0 G(v) dv \right) (q^{(0)} - q_0) \tag{7.2}$$

Введем возмущения $x = q - q^{(0)}$ и рассмотрим задачу нахождения управляющих воздействий $U^{(1)} = U - U^{(0)}$ без измерения скоростей, обеспечивающих стабилизацию положения $\dot{x} = 0$, $x = 0$.

Уравнения возмущенного движения могут быть представлены в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q}(q^{(0)} + x) + \frac{\partial \Pi}{\partial q}(q^{(0)}) - P_0 x - \int_{-\infty}^r G(s - t)x(s) ds + U^{(1)} \tag{7.3}$$

Выберем управляющее воздействие в виде

$$U^{(1)} = - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) U^{(11)} f + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)' \int_0^t U^{(12)}(s - t) (f(x(t)) - f(x(s))) ds, \tag{7.4}$$

где $U^{(11)}, U^{(12)} \in R^{n \times n}$, $U^{(11)} = \text{const}$, $U^{(12)}(v) \geq 0$, $(U^{(12)})'(v) \leq 0$, $f : R^n \rightarrow R^n$ ($f(0) = 0$) есть обратимая функция, выбираемая из условия эффективности управления.

Введем функционал

$$\begin{aligned} V &= T(q_0 + x, \dot{x}) + \Pi_1(x) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t (x(t) - x(s))' G(s - t) (x(t) - x(s)) ds + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t (f(x(t)) - f(x(s)))' U^{(12)}(s - t) (f(x(t)) - f(x(s))) ds \end{aligned} \tag{7.5}$$

$$\Pi_1(x) = \Pi(q_0 + x) - x' \frac{\partial \Pi}{\partial q}(q_0) - \Pi(q_0) + \frac{1}{2} x' \left(P_0 + \int_{-\infty}^0 G(v) dv \right) x + \frac{1}{2} f'(x) U^{(11)} f(x) \tag{7.6}$$

Для производной функционала (7.5) в силу уравнений движения (7.3) имеем

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \frac{1}{2} \int_0^t (x(t) - x(s))' G_v(s-t)(x(t) - x(s)) ds - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^t (f(x(t)) - f(x(s)))' U_v^{(12)}(s-t)(f(x(t)) - f(x(s))) ds \leq 0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

В соответствии с теоремой имеем следующий результат.

Утверждение 7.1. Пусть управление (7.4) таково, что:

- 1) $y' G_v(v)y - z' U_v^{(12)}(v)z \leq 0$ ($\neq 0$ при $y^2 + z^2 \neq 0$);
- 2) функция $\Pi_1(x)$ является определенно-положительной, при этом

$$\left\| \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} \right\| \geq a_1(\|x\|)$$

Тогда управление (7.4) решает задачу о стабилизации заданного положения $\dot{q} = 0$, $q = q^{(0)}$ манипулятора.

Заметим, что потенциальная энергия $\Pi = \Pi(q)$ системы представляет собой функцию периодическую по q_1, q_2, \dots, q_n . Поэтому значения $\rho_1^0, \rho_2^0, \dots, \rho_n^0$ и функция $f = f(x)$ могут быть выбраны так, что $\Pi_1(x) \rightarrow \infty$ при $\|x\| \rightarrow \infty$. Соответственно, имеет место утверждение о глобальной равномерной стабилизации.

Пусть координаты q_1, q_2, \dots, q_m манипулятора являются позиционными, а $q_{m+1}, q_{m+2}, \dots, q_n$ — циклическими, так что кинетическая энергия T и потенциальная энергия не зависят явно от $q_{m+1}, q_{m+2}, \dots, q_n$, соответствующие обобщенные силы равны нулю.

Следуя [59], переобозначим координаты и введем импульсы, соответствующие циклическим координатам

$$\begin{aligned} r' &= (r_1, r_2, \dots, r_m) = (q_1, q_2, \dots, q_m) \\ s' &= (s_1, s_2, \dots, s_{n-m}) = (q_{m+1}, q_{m+2}, \dots, q_n) \\ p &= \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \end{aligned}$$

В обозначениях из [59] имеем следующие уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial R}{\partial r} = - \frac{\partial \Pi}{\partial r} + Q_1 + U_r, \quad \frac{dp}{dt} = U_s, \quad \dot{s} = - \frac{\partial R}{\partial p}, \quad (7.8)$$

где

$$\begin{aligned} 2R_2 &= \dot{r}' (A_{rr}(r) - A_{rs}(r)A_{ss}^{-1}(r)A_{sr}(r))\dot{r}, \quad R_1 = p' A_{ss}^{-1}(r)A_{sr}(r)\dot{r} \\ 2R_0 &= -p' A_{ss}^{-1}(r)p, \quad U' = (U_r', U_s') \end{aligned}$$

Из уравнений (7.8) находим, что при управлении

$$U_r = U_r^0 - \frac{\partial R_0}{\partial r}(p_0, r_0) + \frac{\partial \Pi}{\partial r}(r_0) + \left(P_0 + \int_{-\infty}^0 G(v)dv \right) (r^{(0)} - r_0); \quad U_s = U_s^0 = 0 \quad (7.9)$$

система имеет стационарное движение

$$\dot{r} = 0, \quad r = r^{(0)}, \quad p = p^{(0)}, \quad \dot{s} = \dot{s}_0^{(0)} - \frac{\partial R_0}{\partial p} \Big|_{r=r^{(0)}, p=p^{(0)}} \quad (7.10)$$

Введем возмущения $y = r - r_0$, $z = p - p^{(0)}$. Выберем управляющие воздействия в виде

$$U_r^{(1)} = U_r - U_r^0 = -\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) U^{(11)} f + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \int_0^t U^{(12)} (s-t) (f(x(t)) - f(x(s))) ds \quad (7.11)$$

$$U_s^{(1)} = U_s = -K(p - p^{(0)}),$$

где $U^{(11)}, U^{(12)} \in R^{m \times m}$, $U^{(11)} = \text{const}$, $U^{(12)}(v) \geq 0$, $U_v(v) > 0$; $f: R^m \rightarrow R^m$ ($f(0) = 0$) есть обратимая функция, $K \in R^{(n-m) \times (n-m)}$ – положительно определенная матрица.

Введем функционал

$$\begin{aligned} V = & R_2(y, y) + W_1(p_0, y) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t (y(t) - y(s))' G(s-t) (y(t) - y(s)) ds + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t (f(y(t)) - f(y(s)))' U^{(12)} (s-t) (f(y(t)) - f(y(s))) ds + \frac{1}{2} z' K z \\ & W_1(p_0, y) = \Pi(r_0 + y) - R_0(p_0, r_0 + y) - y' \frac{\partial \Pi(r_0)}{\partial r} + \\ & + y' \frac{\partial R_0(p_0, r_0)}{\partial r} - \Pi(r_0) + R_0(p_0, r_0) + \frac{1}{2} y' \left(P_0 + \int_{-\infty}^0 G(v) dv \right) y + \frac{1}{2} f'(y) U^{(11)} f(y) \end{aligned} \quad (7.12)$$

Для производной функционала (7.12) в силу уравнений движения (7.8) находим

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \frac{1}{2} \int_0^t (y(t) - y(s))' G_v(s-t) (y(t) - y(s)) ds - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^t (f(y(t)) - f(y(s)))' U(s-t) (f(y(t)) - f(y(s))) ds - \frac{1}{2} z' K z \leq 0 \end{aligned}$$

В соответствии с теоремой 4.2 имеем следующий результат.

Утверждение 7.2. Пусть управляющее и вязкоупругое воздействия (7.9) и (7.11) таково, что:

- 1) $f'(y) U_v^{(12)} f(y) - y' G_v y > 0$ при $y \neq 0$;
- 2) функция $W_1(p_0, y)$ является определенно положительной по y , при этом

$$\left\| \frac{\partial W_1(p_0, y)}{\partial y} \right\| \geq a_1 (\|y\|)$$

Тогда имеет место стабилизация заданного стационарного движения $\dot{r} = 0$, $r = r^{(0)}$, $p = p^{(0)}$ манипулятора. Подбором ρ_1^0 , ρ_2^0 , ρ_m^0 и функции $f = f(y)$ может быть достигнута глобальная равномерная стабилизация.

8. Стабилизация программного положения пятизвенового робота-манипулятора. В этом разделе представлено численное моделирование управляемого движения многозвенового робота-манипулятора с пятью степенями свободы (см. рис. 1). Робот имеет один призматический и четыре вращательных шарнира.

Каждое звено манипулятора представлено в виде твердого тела. Кинематические пары манипулятора считаются однозвенными, их геометрические центры обозначены символом O_k ($k = 1, 2, \dots, 5$). Центры масс C_k ($k = 1, 2, \dots, 5$) звеньев лежат на осях $O_k O_{k+1}$, оси $O_k O_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots, 5$) – оси симметрии звеньев. Первое базовое звено вертикальное, оно вращается вокруг $O_1 O_2$, угол поворота равен θ_1 . Вторая кинематическая

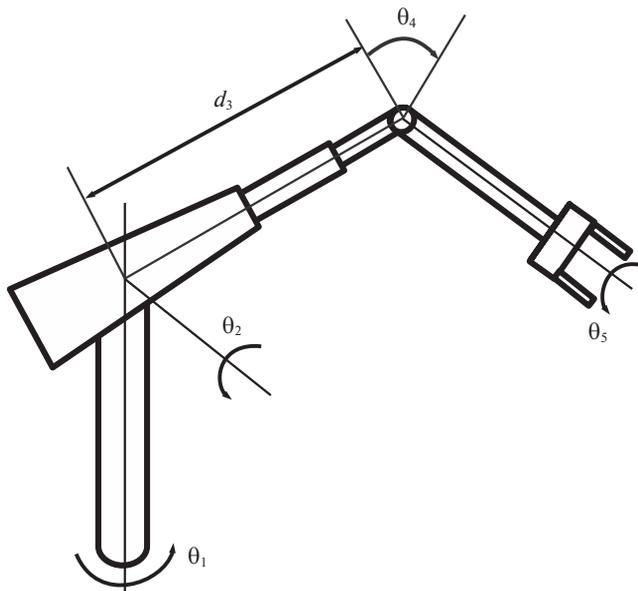


Рис. 1.

пара позволяет вращать второе звено вокруг горизонтальной оси, проходящей через O_2 . Третья кинематическая пара допускает прямолинейное движение третьего звена по линии O_2O_4 ($O_3 \in O_1O_4$). Введем обозначение смещения третьего звена $x = d_3 = O_1O_4$. Четвертое звено может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через O_4 , с углом поворота θ_4 . Пятое звено, моделирующее захват, может вращаться вокруг O_4O_5 , его угол поворота обозначается θ_5 . Будем считать, что центры масс C_k звеньев лежат на осях O_kO_{k+1} и эти оси являются осями симметрии соответствующих звеньев ($k = 1, 2, \dots, 5$). Введем главные центральные оси C_kx_k, C_ky_k, C_kz_k звеньев. Будем считать, что для звеньев 1 и 5 оси C_1z_1 и C_5z_5 являются осями симметрии. Для звеньев 2, 3 и 4 такими осями являются C_2x_2, C_3x_3 и C_4x_4 соответственно. Предположим, что оси C_2z_2, C_3z_3 и C_4z_4 горизонтальны. Массы звеньев обозначим через m_k ($k = 1, 2, \dots, 5$), а их основные центральные моменты инерции обозначим через $I_x^{(k)}, I_y^{(k)}$ и $I_z^{(k)}$. Соответственно, имеем $I_x^{(1)} = I_y^{(1)}, I_x^{(5)} = I_y^{(5)}, I_y^{(2)} = I_z^{(2)}, I_y^{(3)} = I_z^{(3)}, I_y^{(4)} = I_z^{(4)}$. Введем длины $O_2C_2 = l_2, C_3O_4 = l_3, O_4O_5 = 2O_4C_4 = 2l_4$ и $O_5C_5 = l_5$.

Используя теорему Кенига, можно найти кинетическую энергию T_i каждого звена $i = 1, 2, \dots, 5$ как кинетическую энергию абсолютно твердого тела.

$$T_1 = \frac{1}{2} I_z^{(1)} \dot{\theta}_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} m_2 l_2^2 (\sin^2 \theta_2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + \frac{1}{2} (I_x^{(2)} \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_2 + I_z^{(2)} (\dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_2 + \dot{\theta}_2^2))$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}^2 + (x - l_3)^2 \dot{\theta}_z^2 + (x - l_3) \sin^2 \theta_2 \dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2} (I_x^{(3)} \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_2 + I_z^{(3)} (\dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_2 + \dot{\theta}_2^2))$$

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 ((\dot{x} + l_4 \dot{\theta}_4 \sin \theta_4)^2 + (x \dot{\theta}_2 - l_4 \dot{\theta}_4 \cos \theta_4)^2 + (x \cos \theta_4 - l_4 \sin(\theta_2 + \theta_4))^2 \dot{\theta}_1^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}(I_x^{(4)}\dot{\theta}_1^2 \cos^2(\theta_2 + \theta_4) + I_z^{(4)}(\dot{\theta}_1^2 \sin^2(\theta_2 + \theta_4) + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4)^2)) \\
T_5 = & \frac{1}{2}m_5((\dot{x} + (2l_4 + l_5)\dot{\theta}_4 \sin \theta_4)^2 + (x\dot{\theta}_2 - (2l_4 + l_5)\dot{\theta}_4 \cos \theta_4)^2 + \\
& + (x \cos \theta - (2l_4 + l_5) \sin(\theta_2 + \theta_4))^2 \dot{\theta}_1^2 + \\
& + \frac{1}{2}I_x^{(5)}(\dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 + \theta_4) + \dot{\theta}_5)^2 + \frac{1}{2}I_z^{(5)}(\dot{\theta}_1^2 \cos^2(\theta_2 + \theta_4) + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4)^2)
\end{aligned}$$

Кинетическая энергия манипулятора имеет вид

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$$

Потенциальная энергия манипулятора выражается в виде

$$\begin{aligned}
\Pi = & -m_2gl_2 \cos \theta_2 - m_3g(x - l_3) \cos \theta_2 - m_4g(x \cos \theta_2 + l_4 \cos(\theta_2 + \theta_4)) - \\
& - m_5g(x \cos \theta_2 + (2l_4 + l_5) \cos(\theta_2 + \theta_4))
\end{aligned}$$

Массоинерционные параметры робота выбраны следующими

$$\begin{aligned}
m_2 = 5 \text{ кг}, \quad m_3 = m_4 = 3 \text{ кг}, \quad m_5 = 4 \text{ кг} \\
l_2 = 0.8 \text{ м}, \quad l_3 = l_4 = 0.4 \text{ м}, \quad l_5 = 0.5 \text{ м} \\
I_x^{(2)} = I_y^{(2)} = 0.25 \text{ кг м}^2, \quad I_z^{(2)} = 0.2 \text{ кг м}^2 \\
I_x^{(3)} = I_y^{(3)} = I_z^{(3)} = I_x^{(4)} = I_y^{(4)} = I_z^{(4)} = 0.1 \text{ кг м}^2 \\
I_x^{(5)} = I_y^{(5)} = 0.05 \text{ кг м}^2, \quad I_z^{(5)} = 0.2 \text{ кг м}^2
\end{aligned}$$

Программное положение робота выбрано следующим

$$\begin{aligned}
\theta_1^{(0)} = 0.5 \text{ рад}, \quad \theta_2^{(0)} = \pi/4 \text{ рад}, \quad d_3^{(0)} = 0.8 \text{ м} \\
\theta_4^{(0)} = -\pi/3 \text{ рад}, \quad \theta_5^{(0)} = \pi/2 \text{ рад}
\end{aligned} \tag{8.1}$$

Расчеты проведены при следующих начальных отклонениях от программного положения

$$\begin{aligned}
x_1(0) = x_5(0) = -0.1 \text{ рад}, \quad x_2(0) = -0.8 \text{ рад}, \quad x_3(0) = 0.05 \text{ м}, \quad x_4(0) = 0.5 \text{ рад} \\
\dot{x}_1(0) = \dot{x}_5(0) = -0.01 \text{ рад/с}, \quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_4(0) = -0.02 \text{ рад/с}, \quad \dot{x}_3(0) = 0.01 \text{ м/с}
\end{aligned} \tag{8.2}$$

На рис. 2–6 представлены результаты численного моделирования процесса управления манипулятором, показывающие зависимости от времени углов поворота и линейного смещения его звеньев.

Заключение. В работе проведено развитие метода функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости неавтономного нелинейного интегро-дифференциального уравнения с бесконечным запаздыванием. Выводятся качественные свойства решения такого уравнения типа свойства инвариантности положительного предельного множества решения динамической системы. Доказана теорема о локализации положительного предельного множества ограниченного решения в предположении существования функционала Ляпунова, имеющего знакопостоянную производную. Этот результат можно определить как принцип квазиинвариантности для исследуемого уравнения. Доказаны теоремы об асимптотической устойчивости нулевого решения по всем и части переменных при указанном выше предположении. Доказанные теоремы позволили определить достаточные условия предельных свойств движений гомомной механической системы с линейной эрeditарностью. Решена задача о стабилизации положений равновесия и стационарных движений манипулятора с цилин-

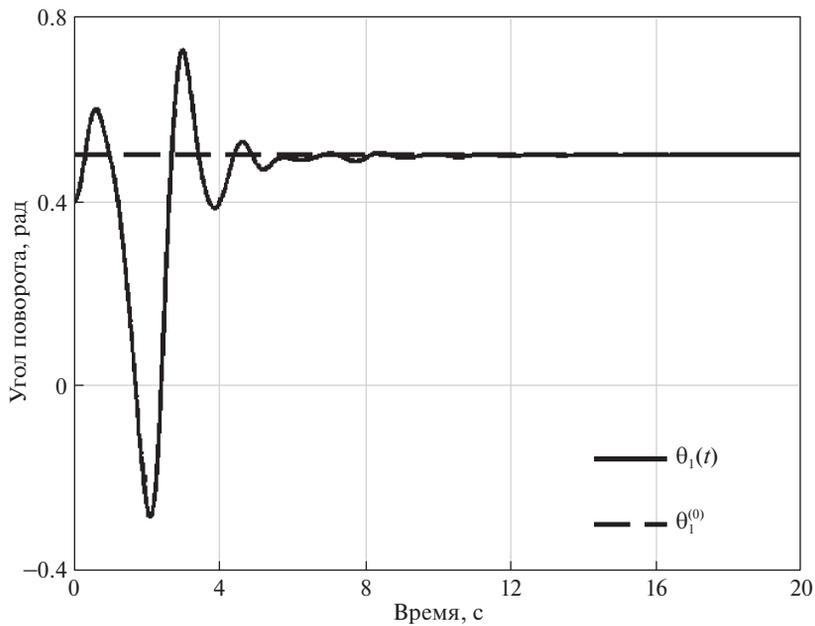


Рис. 2.

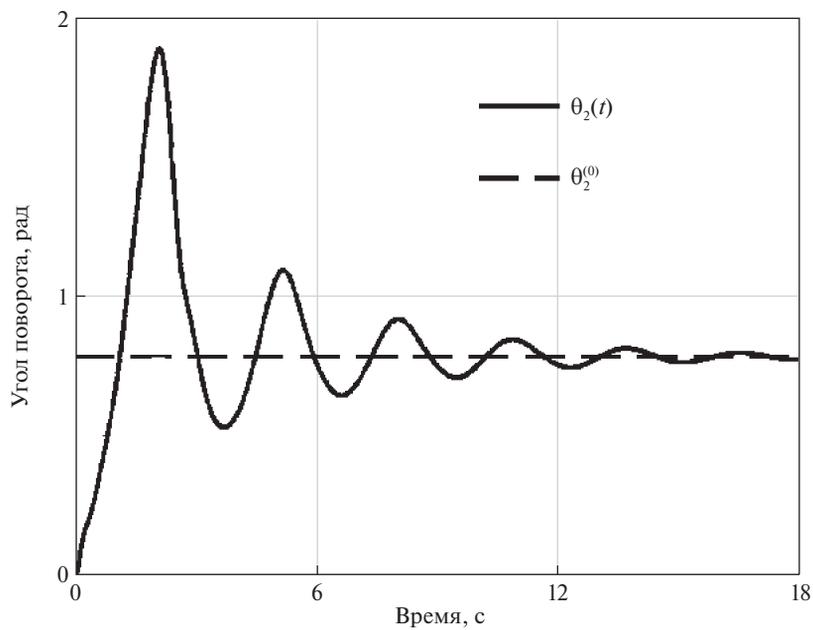


Рис. 3.

дрическим и сферическим шарнирами. Периодичность уравнений движения по обобщенным координатам позволяет вывести условия глобальной стабилизации.

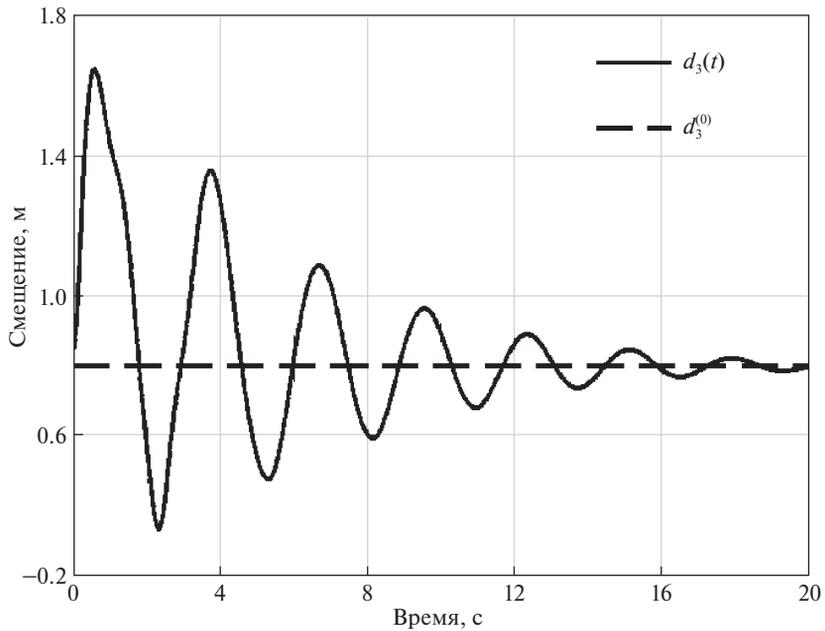


Рис. 4.

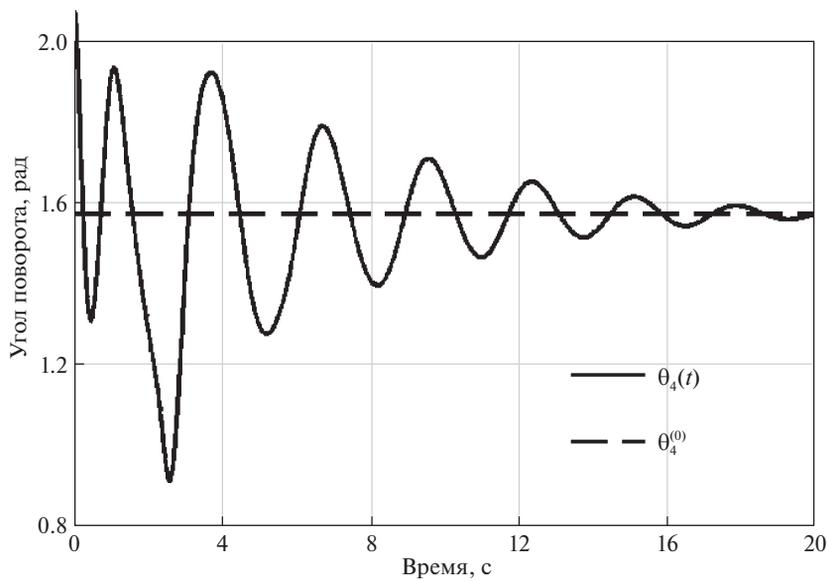


Рис. 5.

Решена задача о стабилизации заданного положения пятизвенного манипулятора с цилиндрическими и призматическим шарнирами. Представлены результаты численного моделирования процесса стабилизации.

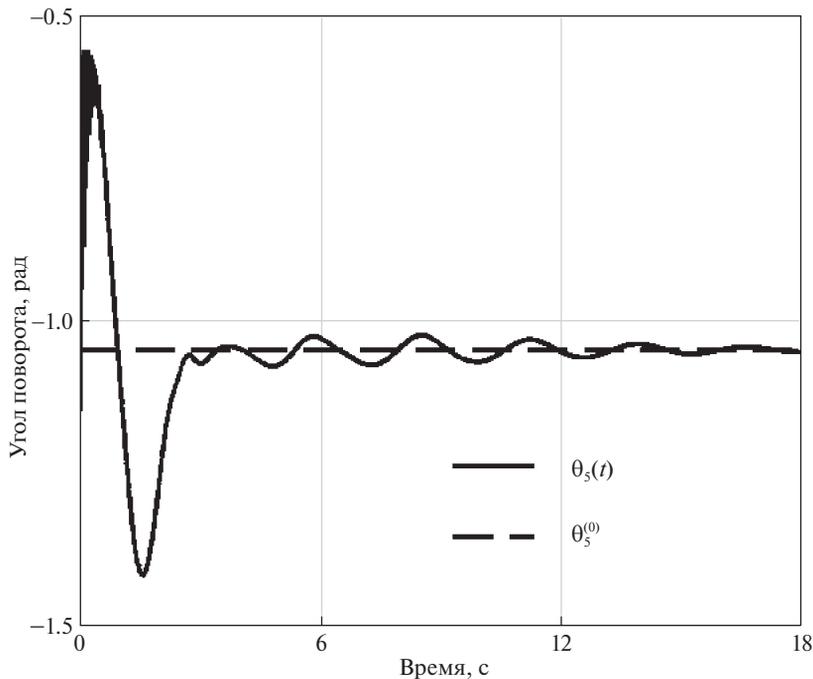


Рис. 6.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00791).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вольterra В.* Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 286 с.
2. *Вольterra В.* Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1980. 304 с.
3. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
4. *Corduneanu C., Lakshmikantham V.* Equations with unbounded delay: a survey // *Nonlin. Anal., Theory, Meth.&Appl.* 1980. V. 4. P. 831–877.
5. *Кордуняну К., Лакшмикантам В.* Уравнения с неограниченным запаздыванием // *Автом. и телемех.* 1985. Вып. 7. С. 5–44.
6. *Colleman B.D., Dill H.* On the stability of certain motions of incompressible materials with memory // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1968. V. 30. P. 197–224.
7. *Coleman B., Mizel V.* On the stability of solutions of functional differential equations // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1968. V. 30. P. 173–196.
8. *Colleman B.D., Owen D.R.* On the initial-value problem for a class of functional differential equations // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1974. V. 55. P. 275–299.
9. *Hale J., Kato J.* Phase space for retarded equations with infinite delay // *Fukcialaj Ekvacioj.* 1978. V. 21. P. 11–41.
10. *Hino Y.* Stability properties for functional differential equations with infinite delay // *Tohoku Math. J.* 1983. V. 35. P. 597–605.
11. *Hino Y., Murakami S., Naito T.* Functional Differential Equations with Infinite Delay // *Lect. Notes in Math.* 1991. V. 1473.

12. *Murakami S.* Perturbation theorems for functional differential equations with infinite delay via limiting equations // *J. Differ. Eqns.* 1985. V. 59. P. 314–335.
13. *Murakami S., Naito T.* Fading memory spaces and stability properties for functional differential equations with infinite delay // *Fukcialaj Ekvacioj.* 1989. V. 32. P. 91–105.
14. *Sawano K.* Exponential asymptotic stability for functional differential equations with infinite retardations // *Tohoku Math. J.* 1979. V. 31. P. 363–382.
15. *Sawano K.* Positively invariant sets for functional differential equations with infinite delay // *Tohoku Math. J.* 1980. V. 32. P. 557–566.
16. *Sawano K.* Some considerations on the fundamental theorems for functional differential equations with infinite retardations // *Fukcialaj Ekvacioj.* 1982. V. 25. P. 97–104.
17. *Schumacher K.* Existence and continuous dependence for functional-differential equations with unbounded delay // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1978. V. 67. P. 315.
18. *Atkinson F.V., Haddock J.R.* On determining phase spaces for functional differential equations // *Funkcialaj Ekvacioj.* 1988. V. 31. P. 331–347.
19. *Горяченко В.Д.* Методы исследования устойчивости ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1977. 286 с.
20. *Колмановский В.Б., Носов В.П.* Устойчивость и периодические режимы регулирования систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.
21. *Хейл Д.К.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
22. *Haddock J., Krisztin T., Terjeki J.* Invariance principles for autonomous functional differential equations // *J. Integral Eqns.* 1985. V. 10. P. 123–136.
23. *Разумихин Б.С.* Устойчивость эрдитарных систем. М.: Наука, 1988. 108 с.
24. *Андреев А.С.* Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. Ульяновск: УлГУ, 2005. 328 с.
25. *Перегудова О.А.* Развитие метода функций Ляпунова в задаче устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // *Диффер. уравн.* 2008. Т. 44. 12. С. 1638–1647.
26. *Андреев А.С.* Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // *Автом. и телемех.* 2009. 9. С. 4–55.
27. *Hino Y.* On stability of the solution of some functional differential equations // *Fukcialaj Ekvacioj.* 1971. V. 14. P. 47–60.
28. *Kato J.* Stability problems in functional differential equations with infinite delay // *Fukcialaj Ekvacioj.* 1978. V. 21. P. 63–80.
29. *Burton T.A.* Stability theory for delay equations // *Funkcialaj Ekvacioj.* 1979. V. 22. P. 67–76.
30. *Kato J.* Liapunov's second method in functional differential equations // *Tohoku Math. J.* 1980. V. 32. P. 487–497.
31. *Kato J.* Asymptotic behavior in functional differential equations with infinite delay // *Lect. Notes in Math.*, 1983. V. 1017. P. 300–312
32. *Тихонов А.Н.* О функциональных уравнениях и их применению к некоторым задачам математической физики // *Бюлл. Моск. ун-та. Сек. А*, 1938. Т. 1. № 8. С. 1–25.
33. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.
34. *Быков Я.В.* О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. Фрунзе: Изд-во Киргиз. ун-та, 1957. 327 с.
35. *Филатов А.Н.* Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Ташкент: ФАН, 1971. 180 с.
36. *Керимов М.К.* Библиография некоторых новых работ по интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям // В доп. к кн.: *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1980. 304 с.
37. *Burton T.A.* Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations. Orlando: Acad. Press. 1985. 337 p.
38. *Сергеев В.С.* Первый метод Ляпунова в исследовании систем, описываемых интегродифференциальными уравнениями типа Вольтерра. М.: ВЦ РАН, 2011. 193 с.
39. *Colleman B.D., Gurtin M.E., Ismael Herrera R., Truesdell C.* Wave Propagation in Dissipative Materials. Berlin: Springer, 1965.

40. Резван В. Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием. М.: Наука, 1980. 360 с.
41. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971. 767 с.
42. Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Красовский А.А., Новицкий В.В. Введение в аэроупругость. М.: Наука, 1980. 384 с.
43. Sergeev V.S. Stability of solutions of Volterra integrodifferential equations // Math.&Comput. Model., 2007. V. 45. P. 1376–1394.
44. Andreev A.S., Peregudova O.A. On the Stability and stabilization problems of Volterra integral-differential equations // Russ. J. Nonlin. Dyn. 2018. V. 14. № 3. P. 387–407.
45. Андреев А.С., Перегудова О.А. Нелинейные регуляторы в задаче о стабилизации положения голономной механической системы // ПММ. 2018. Т. 82. № 2. С. 156–176.
46. Андреев А.С., Перегудова О.А. О методе функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра // Ж. Средневожск. матем. об-ва. 2018. Т. 20. № 3. С. 260–272.
47. Andreev A., Peregudova O. Volterra equations in the control problem of mechanical systems // 2019. 23rd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC). P. 298–303.
48. Сергеев В.С. Об устойчивости равновесия крыла в нестационарном потоке // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 219–228.
49. Сергеев В.С. Об устойчивости равновесия вязкоупругой пластины // Автомат. и телемех. 2007. Вып. 9. С. 79–86.
50. Сергеев В.С. Устойчивость движения железнодорожной колесной пары в одном случае // Автомат. и телемех. 2009. Вып. 9. С. 157–161.
51. Andreev A., Peregudova O. Non-linear PI regulators in control problems for holonomic mechanical systems // Syst. Sci.&Control Engng. 2018. V. 6. № 1. P. 12–19.
52. Румянцев В.В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. Мат., Механ., Физ., Астрон., Хим. 1957. № 4. С. 9–16.
53. Румянцев В.В. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости по отношению к части переменных // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 1. С. 147–152.
54. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
55. Воротников В.И., Румянцев В.В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001. 320 с.
56. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 8. С. 922–933.
57. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений спутников. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2010. 156 с.
58. Каранетян А.В., Румянцев В.В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем. Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. Т. 6. М.: ВИНТИ, 1983.
59. Каранетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: УРСС, 1998. 168 с.
60. Каленова В.И., Каранетян А.В., Морозов В.М., Салмина М.А. Неголономные механические системы и стабилизация движения // Фундам. и прикл. матем. 2005. Т. 11. 7. С. 117–158.
61. Каранетян А.В., Кулешов А.С. Об устойчивости стационарных движений механических систем с неизвестными первыми интегралами // Динамич. системы. 2017. Т. 7 (35). № 1. С. 3–16.
62. Sell G. Topological Dynamics and Ordinary Differential Equations. New York: Van Nostrand Reinhold, 1971.
63. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод в теории устойчивости: учебник. М.: Мир, 1980. 300 с.

Lyapunov Functional Method in the Stability Problem of Volterra Integro-Differential I Equations with Infinite Delay

A. S. Andreev^{a,#} and O. A. Peregudova^{a,##}

^a *Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia*

[#] *e-mail: asa5208@mail.ru*

^{##} *e-mail: peregudovaoa@gmail.com*

The paper considers the stability problem for a non-autonomous nonlinear integro-differential equation of Volterra type with infinite delay. The development of the Lyapunov functional method is carried out in both the limiting behavior study of a bounded solution as well as the asymptotic stability of the zero solution in all and some of the variables under the assumption of the corresponding Lyapunov functional existence with a semidefinite time derivative. The problems on the study of the limiting properties of the motion for a mechanical system with linear heredity as well as the stationary motion stabilization of a manipulator with viscoelastic cylindrical and spherical joints are solved. The control problem of a five-link robot manipulator is solved taking into account the viscoelasticity of its joints.

Keywords: Volterra integro-differential equations, stability, Lyapunov functional, mechanical system with viscoelastic elements, manipulator, control

REFERENCES

1. *Volterra V.* Lecons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie. Paris: Gauthier-Villars. Reissued, 1990.
2. *Volterra V.* Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations. N.Y.: Dover Publ., 1959.
3. *Krasovskii N.N.* Nekotorye Zadachi Teorii Ustoichivosti Dvizheniya. Moscow: Fizmatgiz, 1959. 211 p. (in Russian).
4. *Corduneanu C., Lakshmikantham V.* Equations with unbounded delay: a survey // *Nonlin. Anal., Theory, Meth.&Appl.*, 1980, vol. 4, pp. 831–877.
5. *Corduneanu C., Lakshmikantham V.* Equations with unbounded delay // *Autom.* 1985. Iss. 7, pp. 5–44. (in Russian)
6. *Colleman B.D., Dill H.* On the stability of certain motions of incompressible materials with memory // *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1968, vol. 30, pp. 197–224.
7. *Coleman B., Mizel V.* On the stability of solutions of functional differential equations // *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1968, vol. 30, pp. 173–196.
8. *Colleman B.D., Owen D.R.* On the initial-value problem for a class of functional differential equations // *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1974, vol. 55, pp. 275–299.
9. *Hale J., Kato J.* Phase space for retarded equations with infinite delay // *Fukcialaj Ekvacioj*, 1978, vol. 21, pp. 11–41.
10. *Hino Y.* Stability properties for functional differential equations with infinite delay // *Tohoku Math. J.*, 1983, vol. 35, pp. 597–605.
11. *Hino Y., Murakami S., Naito T.* Functional differential equations with infinite delay // *Lect. Notes in Math.*, 1991, vol. 1473.
12. *Murakami S.* Perturbation theorems for functional differential equations with infinite delay via limiting equations // *J. Differ. Eqns.*, 1985, vol. 59, pp. 314–335.
13. *Murakami S., Naito T.* Fading memory spaces and stability properties for functional differential equations with infinite delay // *Fukcialaj Ekvacioj*, 1989, vol. 32, pp. 91–105.
14. *Sawano K.* Exponential asymptotic stability for functional differential equations with infinite retardations // *Tohoku Math. J.*, 1979, vol. 31, pp. 363–382.
15. *Sawano K.* Positively invariant sets for functional differential equations with infinite delay // *Tohoku Math. J.*, 1980, vol. 32, pp. 557–566.
16. *Sawano K.* Some considerations on the fundamental theorems for functional differential equations with infinite retardations // *Fukcialaj Ekvacioj*, 1982, vol. 25, pp. 97–104.

17. *Schumacher K.* Existence and continuous dependence for functional-differential equations with unbounded delay // Arch. Rat. Mech. Anal., 1978, vol. 67, pp. 315.
18. *Atkinson F.V., Haddock J.R.* On determining phase spaces for functional differential equations // Funkcialaj Ekvacioj, 1988, vol. 31, pp. 331–347.
19. *Goryachenko V.D.* Methods for Studying the Stability of Nuclear Reactors. Moscow: Atomizdat, 1977. 286 p. (in Russian)
20. *Kolmanovskiy V.B., Nosov V.R.* Stability and Periodic Control Modes of Systems with Aftereffect. Moscow: Nauka, 1981. 448 p. (in Russian)
21. *Hale J.* Theory of Functional Differential Equations. N.Y.: Springer, 1977. 366 p.
22. *Haddock J., Krisztin T., Terjeki J.* Invariance principles for autonomous functional differential equations // J. Integral Eqns., 1985, vol. 10, pp. 123–136.
23. *Razumikhin B.S.* Stability of Hereditary Systems. Moscow: Nauka, 1988. 108 p. (in Russian)
24. *Andreev A.S.* Stability of Non-Autonomous Functional Differential Equations. Ulyanovsk: UIGU, 2005. 328 p. (in Russian)
25. *Peregudova O.A.* Development of the Lyapunov function method in the stability problem for functional-differential equations // Differ. Equat., 2008, vol. 44, pp. 1701–1710.
26. *Andreev A.S.* The Lyapunov functionals method in stability problems for functional differential equations // Autom. Remote Control, 2009, vol. 70, no. 9, pp. 1438–1486.
27. *Hino Y.* On stability of the solution of some functional differential equations // Funkcialaj Ekvacioj, 1971, vol. 14, pp. 47–60.
28. *Kato J.* Stability problems in functional differential equations with infinite delay // Funkcialaj Ekvacioj, 1978, vol. 21, pp. 63–80.
29. *Burton T.A.* Stability theory for delay equations // Funkcialaj Ekvacioj, 1979, vol. 22, pp. 67–76.
30. *Kato J.* Liapunov's second method in functional differential equations // Tohoku Math. J., 1980, vol. 32, pp. 487–497.
31. *Kato J.* Asymptotic behavior in functional differential equations with infinite delay // Lect. Notes in Math., 1983, vol. 1017, pp. 300–312.
32. *Tikhonov A.N.* On functional equations of Volterra type and their applications to certain problems of mathematical physics // Bull. Moscow Univ. Ser. Internat. Sect. A, 1938, vol. 1, no. 8, pp. 1–25. (in Russian).
33. *Myshkis A.D.* Linear Differential Equations with Retarded Arguments. Moscow: Nauka, 1972. 352 p. (in Russian)
34. *Bykov Ya.V.* On Some Problems on Integro-differential Equations. Frunze: Kirghiz State Univ., 1957.
35. *Filatov A.N.* Averaging Methods for Differential and Integrodifferential Equations. Tashkent: FAN, 1971.
36. *Kerimov M.K.* Bibliography of some new works on integral and integro-differential equations // Suppl. to V. Volterra's book Theory of Functionals, Integral and Integro-Differential Equations. Moscow: Nauka, 1980. 304 p. (in Russian)
37. *Burton T.A.* Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations. Orlando: Acad. Press. 1985. 337 p.
38. *Sergeev V.S.* Lyapunov's First Method in the Study of Systems Described by Integro-Differential Equations of Volterra Type. Moscow: VTs RAS, 2011. 193 p. (in Russian)
39. *Colleman B.D., Gurtin M.E., Ismael Herrera R., Truesdell C.* Wave Propagation in Dissipative Materials. Berlin: Springer, 1965.
40. *Rezvan V.* Absolute Stability Automatic System with Delay. Moscow: Nauka, 1983. (in Russian)
41. *Belotserkovskiy S.M., Skripach B.K., Tabachnikov V.G.* The Wing in Unsteady Flow of Gas. Moscow: Nauka, 1971. 768 p. (in Russian)
42. *Belotserkovskiy S.M., Kochetkov Yu.A., Krasovskiy A.A., Novitskiy V.V.* Introduction to Aeroautoelasticity. Moscow: Nauka, 1980. 384 p. (in Russian)
43. *Sergeev V.S.* Stability of solutions of Volterra integrodifferential equations // Math.&Comput. Model., 2007, vol. 45, pp. 1376–1394.
44. *Andreev A.S., Peregudova O.A.* On the stability and stabilization problems of Volterra integral-differential equations // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2018, vol. 14, no. 3, pp. 387–407.

45. *Andreev A.S., Peregudova O.A.* Nonlinear regulators in the position stabilization problem of the holonomic mechanical system // *Mech. Solids*, 2018, vol. 53, Suppl. 3, pp. S22–S38.
46. *Andreev A.S., Peregudova O.A.* On the Lyapunov functionals method in the stability problem of Volterra integro-differential equations // *Middle Volga Math. Soc. J.*, 2018, vol. 20, no. 3, pp. 260–272.
47. *Andreev A., Peregudova O.* Volterra Equations in the Control Problem of Mechanical Systems // 2019 23rd Int. Conf. on System Theory, Control and Computing (ICSTCC), pp. 298–303.
48. *Sergeev V.S.* The stability of the equilibrium of a wing in an unsteady flow // *JAMM*, 2000, vol. 64, no. 2, pp. 219–228.
49. *Sergeev V.S.* On stability of viscoelastic plate equilibrium // *Autom. Remote Control*, 2007, vol. 68, no. 9, pp. 1544–1550.
50. *Sergeev V.S.* A case of motional stability of railway wheel pair // *Auton. Remote Control.*, 2009, vol. 70, pp. 1579–1583.
51. *Andreev A., Peregudova O.* Non-linear PI regulators in control problems for holonomic mechanical systems // *Syst. Sci.&Control Engng.*, 2018, vol. 6, no. 1, pp. 12–19.
52. *Rumyantsev V.V.* On motion's stability with respect to a part of variables // *Bull. of MSU*, 1957, no. 4.
53. *Rumyantsev V.V.* On asymptotic stability and instability of motion with respect to a part of the variables // *JAMM*, 1971, vol. 35, no. 1.
54. *Rumyantsev V.V., Osiraner A.S.* Stability and Stabilization of Motion with Respect to a Part of the Variables. Moscow: Nauka, 1987. 253 p.
55. *Vorotnikov V.I., Rumyantsev V.V.* Stability and Control in a Part of Coordinate of the Phase Vector of Dynamic Systems: Theory, Methods, and Applications. Moscow: Nauchnyi Mir, 2001. 320 p. (in Russian)
56. *Rumyantsev V.V.* On the stability of steady motions // *JAMM*, 1966, vol. 30, no. 5.
57. *Rumyantsev V.V.* On the stability of stationary motions of satellites. Moscow; Izhevsk: R&C Dyn., 2010. 156 p. (in Russian)
58. *Karapetyan A.V., Rumyantsev V.V.* Stability of conservative and dissipative systems // *Itogi Nauki i Tekhniki. General mechanics*. vol. 6. 129 p.
59. *Karapetyan A.V.* Stability of Stationary Motions. Moscow: URSS, 1998.
60. *Kalenova V.I., Karapetyan A.V., Morozov V.M., Salmina M.A.* Non-holonomic mechanical systems and stabilization of motion // *Fundam.&Appl. Math.*, 2005, vol. 11, no. 7, pp. 117– 158.
61. *Karapetyan A., Kuleshov A.* The Routh theorem for mechanical systems with unknown first integrals // *Theor.&Appl. Mech.*, 2017. vol. 44. no. 1.
62. *Sell G.* Topological Dynamics and Ordinary Differential Equations. N.Y.: Van Nostrand Reinhold, 1971.
63. *Rouche N., Habets P., Laloy M.* Stability Theory by Lyapunov's Direct Method. N.Y.: Springer, 1977.

УДК 531.011

ОСЦИЛЛЯТОР С СУХИМ ТРЕНИЕМ И УПРУГИМ ОГРАНИЧИТЕЛЕМ

© 2021 г. М. Паскаль^{1,*}¹ Университет Эври, Эври, Франция

*e-mail: stepsj@ya.ru

Поступила в редакцию 31.01.2021 г.

После доработки 02.03.2021 г.

Принята к публикации 15.03.2021 г.

Рассматривается осциллятор с двумя степенями свободы, возбуждаемый сухим трением. Система состоит из двух масс, соединенных линейными пружинами. Вторая масса контактирует с приводным ремнем, движущимся с постоянной скоростью, и может сталкиваться с упругим упором. Между этой массой и ремнем действуют силы трения с кулоновскими характеристиками. Обнаружено несколько периодических движений, включающих фазы прилипания, фазы скольжения и контакта с упором.

Ключевые слова: колебания, негладкие системы, двойной осциллятор, фрикционные колебания, упругие ограничители колебаний

DOI: 10.31857/S0032823521040123

1. Введение. В технических приложениях часто встречаются негладкие динамические системы, примерами которых являются осцилляторы с сухим трением или вибрационные системы с зазором между движущимися частями. Негладкие системы сложны, и их обычно моделируют как системы материальных точек, соединенных пружинами. Такие системы были предметом многих исследований, в основном, в случае систем с одной степенью свободы [1–4]. Для систем с несколькими степенями свободы, в основном, используются численные методы [5–7]. В [8] периодические движения для систем с двумя степенями свободы с упругим ограничителем, получены в аналитическом виде. В [9] приведено аналитическое исследование поведения двойного осциллятора с сухим трением. Данная работа является продолжением работы [10], в которой исследовался двойной осциллятор с сухим трением при наличии жесткого ограничителя. В этой статье предполагается мягкое столкновение с ограничителем. Найдено несколько периодических движений, в том числе с ударами об упругий ограничитель.

2. Постановка задачи. Система (рис. 1) состоит из двух масс (m_1, m_2), соединенных линейными пружинами (k_1, k_2). Вторая масса находится в контакте с приводным ремнем, движущимся с постоянной скоростью v_0 . Между массой m_2 и ремнем действует сила трения Ψ .

Перемещение x_2 второй массы ограничивается наличием упругого упора. Когда x_2 превышает зазор, происходит контакт массы с ограничителем и возникает восстанавливающая сила, пропорциональная жесткости пружины k_3 . Движение осциллятора с двумя степенями свободы описывается системой уравнений

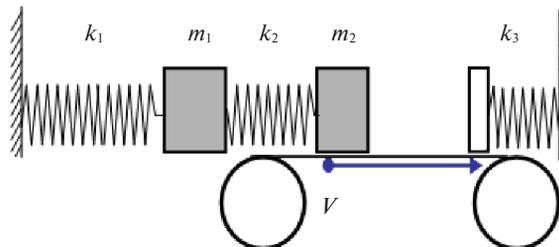


Рис. 1. Осциллятор с сухим трением.

$$\begin{aligned}
 x_1'' + x_1 - \chi x_2 &= 0 & x_2'' + \chi \eta (x_2 - x_1) &= \eta u + F \\
 \chi &= \frac{k_2}{k_1 + k_2}, & \eta &= \frac{m_1}{m_2}, & t &= \omega \tilde{t}, & \omega &= \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1}} \\
 (o)' &= \frac{d(o)}{dt}, & u &= \frac{\Psi}{k_1 + k_2}
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Здесь x_1, x_2 обозначают перемещения масс.

Восстанавливающая сила F определяется соотношениями

$$\begin{aligned}
 F &= 0 & \text{при } x_2 &\leq b \\
 F &= -\eta k(x_2 - b) & \text{при } x_2 &\geq b; & k &= \frac{k_3}{k_1 + k_2},
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

где b – величина зазора.

Сила трения u определяется из законов Кулона

$$\begin{aligned}
 x_2' \neq V & \quad u = u_s \operatorname{sign}(V - x_2'), \quad V = \frac{V_0}{\omega} \quad (\text{скольжение}) \\
 x_2' &= V \\
 u &= \begin{cases} \varepsilon u_s & \text{при } \varepsilon(\chi(x_2 - x_1) - F/\eta) > u_r, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (\text{фаза покоя}) \\ \chi(x_2 - x_1) - F/\eta & \text{при } |\chi(x_2 - x_1) - F/\eta| < u_r \quad (\text{фаза скольжения}) \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

где u_r – сила трения покоя, u_s – сила трения скольжения ($0 < u_s < u_r$).

Динамика такого осциллятора разнообразна и может включать фазы покоя и скольжения (stick–slip) без контакта с ограничителем (свободное движение) и с контактом с ограничителем (ограниченное движение). Для каждого вида движений можно получить решение в замкнутой форме.

3. Движения без контакта с ограничителем ($x_2 < b$). Движение с трением скольжения второй массы при $x_2' < V$. Решение получается из модального анализа уравнения (2.1), где $u = u_s, F = 0$:

$$\begin{aligned}
 Z(t) &= H(t)Z_0 \quad Z = \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix}, \quad Z_0 = Z(0), \quad z = X - d_0 \\
 X &= (x_1, x_2)' \quad H(t) = \begin{pmatrix} H_1(t) & H_2(t) \\ H_3(t) & H_4(t) \end{pmatrix},
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

(2×2) -матрицы $H_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) получаются в аналитическом виде [9]

$$\begin{aligned} d_0 &= (d_{01}, d_{02})^t \\ d_{01} &= \frac{u_s}{1 - \chi}, \quad d_{02} = \frac{d_{02}}{\chi} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Движение с трением скольжения второй массы при $x_2' > V$ (с превышением скорости ремня). Решение выводится из модального анализа уравнений (2.1), где $u = -u_s$:

$$\bar{Z}(t) = H(t)\bar{Z}_0 \quad \bar{Z} = \begin{pmatrix} X + d_0 \\ X' \end{pmatrix} \quad \bar{Z}_0 = \bar{Z}(0) \quad (3.3)$$

Движение с трением покоя второй массы, $x_2' = V$. Это движение определяется уравнениями

$$\begin{aligned} x_1'' + x_1 - \chi x_2 &= 0 \\ x_2'' &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Решение получено в аналитическом виде [9]:

$$Z(t) = \Gamma(t)Z_0 \quad Z_0 = Z(0), \quad \Gamma(t) = \begin{pmatrix} \Gamma_1(t) & \Gamma_2(t) \\ \Gamma_2(t) & \Gamma_1(t) \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

(2×2) -матрицы $\Gamma_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) получены из модального анализа (2.4). Более того, при всех такого рода колебаниях выполняется неравенство

$$\chi|x_2 - x_1| < u_r \quad (3.6)$$

4. Движения с контактом с ограничителем ($x_2 > b$). *Движение с трением скольжения второй массы при $x_2' < V$.* Решение выводится из модального анализа (2.1), где $u = u_s$, $F = -\eta k(x_2 - b)$:

$$\begin{aligned} Y(t) &= L(t)Y_0 \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, \quad Y_0 = Y(0), \quad y = X - \delta_0 \\ \delta_0 &= (\delta_{01}, \delta_{02})^t \\ \delta_{01} &= \frac{(u_s + kb)\chi}{(k + \chi - \chi^2)}, \quad \delta_{02} = \delta_{01}/\chi \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$X = (x_1, x_2)^t \quad L(t) = \begin{pmatrix} L_1(t) & L_2(t) \\ L_3(t) & L_1(t) \end{pmatrix},$$

(2×2) -матрицы $L_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) приведены в Приложении.

Движение с трением скольжения второй массы при $x_2' > V$ (с превышением скорости ремня). Решение выводится из модального анализа уравнений (2.1), где $u = -u_s$, $F = -\eta k(x_2 - b)$:

$$\begin{aligned} \bar{Y}(t) &= L(t)\bar{Y}_0 \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} X - \bar{\delta}_0 \\ X' \end{pmatrix} \\ \bar{Y}_0 &= \bar{Y}(0), \quad \bar{\delta}_0 = (\bar{\delta}_{01}, \bar{\delta}_{02})^t \\ \bar{\delta}_{01} &= \frac{(kb - u_s)\chi}{(k + \chi - \chi^2)}, \quad \bar{\delta}_{02} = \bar{\delta}_{01}/\chi \end{aligned} \quad (4.2)$$

Движение с трением покоя второй массы, $x'_2 = V$. Движение определяется уравнениями (3.4). Решение получается из (3.5). Во время покоя выполняется неравенство

$$|\chi(x_2 - x_1) + k(x_2 - b)| < u_r \tag{4.3}$$

Далее будет получено в аналитической форме несколько видов периодических движений с выходом на контакт с ограничителем и с фазами скольжения и покоя.

5. Движения первого вида с контактом с ограничителем. Предположим, что при $t = 0$

$$x_{20} = b, \quad 0 < x'_{20} < V \tag{5.1}$$

При $t = 0$ происходит удар, при $t > 0$ система совершает движение в силу уравнений (4.1), при $t = \tau$, $x_2(\tau) = b$, $x'_2(\tau) < 0$ и при $t > 0$, происходит движение без контакта с ограничителем, определяемое уравнением

$$Z(t) = H(t - \tau)Z_B, \quad Z_B = Z(\tau) \tag{5.2}$$

Периодическое движение с периодом $T = \tau + \tau_1$ получается, если

$$Z_0 = H(\tau_1)Z_B \tag{5.3}$$

Из (4.1) получим

$$\begin{aligned} Y_B &= Y(\tau) = L(\tau)Y_0 \\ Y_0 &= Z_0 + F_0, \quad Y_B = Z_B + F_0 \\ F_0 &= \begin{pmatrix} f_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_0 = d_0 - \delta_0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Из (5.3) следует

$$\begin{aligned} Z_B &= H(-\tau_1)Z_0, \quad H(-\tau_1) = \begin{pmatrix} H_1 & -H_2 \\ -H_3 & H_1 \end{pmatrix} \\ H_i &= H_i(\tau_1), \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Из (5.4) выводим

$$\begin{aligned} Z_B &= L(\tau)(Z_0 + F_0) - F_0 \\ L(\tau) &= \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_1 \end{pmatrix}, \quad L_i = L_i(\tau), \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{5.6}$$

Из (5.5) следует

$$\begin{aligned} z_B - z_0 &= (H_1 - I)z_0 - H_2z'_0 \\ z'_B + z'_0 &= -H_3z_0 + (H_1 + I)z'_0 \end{aligned} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

Принимая во внимание следующее свойство матриц H_i , ($i = 1, 2, 3$)

$$H_1^2 - I - H_2H_3 = 0, \quad H_iH_j = H_jH_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{5.8}$$

Из (5.7) получим

$$(H_1 + I)(z_B - z_0) + H_2(z'_B + z'_0) = 0 \tag{5.9}$$

Из (5.6) следует

$$\begin{aligned} z_B - z_0 &= (L_1 - I)(z_0 + f_0) + L_2z'_0 \\ z'_B + z'_0 &= L_3(z_0 + f_0) + (L_1 + I)z'_0 \end{aligned} \tag{5.10}$$

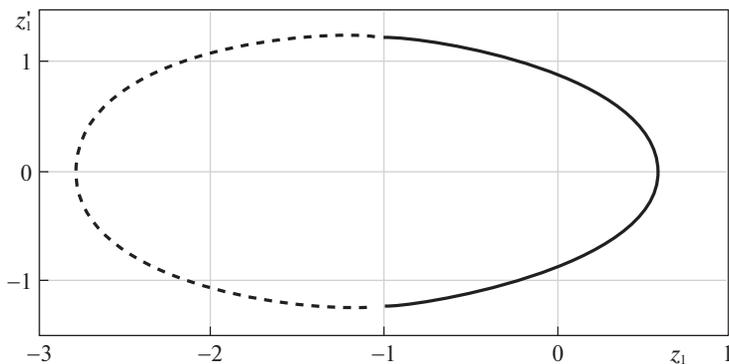


Рис. 2. Фазовый портрет не сталкивающейся массы.

Из того же свойства матриц L_i , ($i = 1, 2, 3$) (см. Приложение)

$$L_1^2 - I - L_2 L_3 = 0, \quad L_i L_j = L_j L_i, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (5.11)$$

получим

$$(L_1 + I)(z_B - z_0) - L_2(z'_B + z'_0) = 0 \quad (5.12)$$

Из (5.9), (5.12) следует

$$\text{if } \det \begin{vmatrix} H_1 + I & H_2 \\ L_1 + I & -L_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad z_B - z_0 = 0, \quad z'_B + z'_0 = 0 \quad (5.13)$$

Периодическое движение зависит от пяти параметров $(x_{01}, x'_{01}, x'_{02}, \tau, \tau_1)$, определяемых четырьмя скалярными уравнениями, которые выводятся из уравнений (5.7), (5.10), (5.13):

$$(H_1 - I)z_0 - H_2 z'_0 = 0 \quad (5.14)$$

$$(L_1 - I)(z_0 + f_0) + L_2 z'_0 = 0$$

Отсюда следует, что, как и в [10], три параметра $(x_{01}, x'_{01}, x'_{02})$ могут быть определены из (5.14) в зависимости от периода $T = \tau + \tau_1$.

Пример

Для $\eta = 1$, $k = 0.7$, $\chi = 0.3$, $u_s = 1$, $V = 4$, $b = 1$, получаем:

$$\tau = 4.2, \quad \tau_1 = 4.39$$

$$z_{10} = -0.9977, \quad z'_{10} = 1.2357$$

$$z_{20} = -3.7619, \quad z'_{20} = 1.8754$$

Фазовые портреты движения масс m_1, m_2 представлены на рис. 2, 3. Сплошная линия соответствует движению в контакте с ограничителем, точечная линия соответствует свободному движению без контакта с ограничителем.

6. Движения второго вида с контактом с ограничителем. Предположим, что при $t = 0$:

$$x_{20} < b, \quad x'_{20} = V \quad (6.1)$$

При $0 < t < \tau$, система совершает движение в силу уравнений (3.5) в фазе покоя второй массы без контакта с ограничителем ($x'_2 = V$, $x_2 < b$). Предположим, что

$$x_{2B} \equiv x_2(\tau) = b, \quad \chi |x_{2B} - x_{1B}| < u_r, \quad x_{1B} \equiv x_1(\tau) \quad (6.2)$$

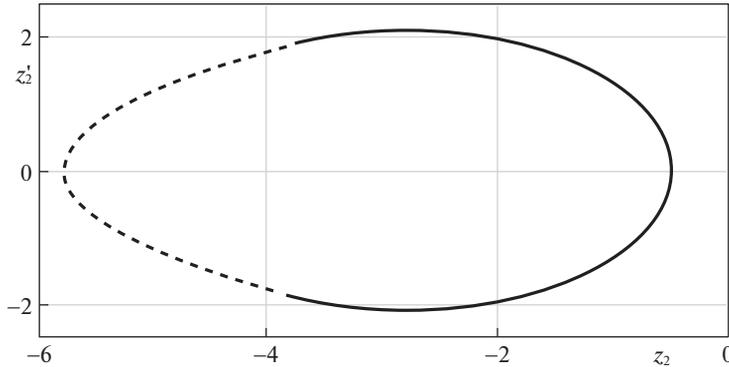


Рис. 3. Фазовый портрет сталкивающейся массы.

При $0 < t - \tau < \tau_1$, вторая масса покоится на ленте и находится в контакте с ограничителем. Движение определяется уравнением

$$Z(t) = \Gamma(t - \tau)Z_B, \quad Z_B = Z(\tau) \quad (6.3)$$

Во время этого движения выполняется неравенство

$$|\chi(x_2 - x_1) + k(x_2 - b)| < u_r \quad (6.4)$$

Фаза покоя прекращается, когда $t = \tau + \tau_1$, $\chi(x_2 - x_1) + k(x_2 - b) = u_r$ (4.5).

При $0 < t - T < \tau_2$ ($T = \tau + \tau_1$) имеем фазу скольжения с контактом второй массы с ограничителем ($x_2 > b$)

$$Y(t) = L(t - T)Y_c, \quad Y_c = Y(T) \quad (6.5)$$

Это движение заканчивается в момент $t = T + \tau_2$, при выполнении условий

$$x_{2D} \equiv x_2(T + \tau_2) = b, \quad x_{2D}' < 0 \quad (6.6)$$

При $0 < t - T - \tau_2 < \tau_3$, система находится в фазе скольжения без контакта с ограничителем ($x_2 < b$)

$$Z(t) = H(t - T - \tau_2)Z_D, \quad Z_D = Z(T + \tau_2) \quad (6.7)$$

Периодическое движение с периодом $\Theta = \tau + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ получается, если

$$Z_0 = H(\tau_3)Z_D \quad (6.8)$$

Это движение зависит от 7 параметров ($x_{10}, x_{10}', x_{20}, \tau, \tau_1, \tau_2, \tau_3$), определяемых 7 скалярными уравнениями, выводимыми из (6.1), (6.6), (4.8).

Пример

Для $\eta = 3$, $k = 0.3$, $\chi = 0.2$, $u_s = 1$, $V = 1$, $b = 2$, $u_r = 1.7695$, получим

$$\tau = 0.5441, \quad \tau_1 = 3.4559, \quad \tau_2 = 2.455, \quad \tau_3 = 1.38$$

$$z_{10} = -1.7093, \quad z_{10}' = -0.0779, \quad z_{20} = -4.7941$$

Из фазовых портретов движения масс m_1, m_2 , показанных на рис. 4, 5, видно, что ограничения (3.6) и (6.4) выполняются в процессе движения в фазе покоя.

Заключительные замечания. В данной работе найдено несколько периодических движений двойного осциллятора с сухим трением и упругим ограничителем. Эти движения включают несколько фаз трения скольжения и трения покоя. Другие движения

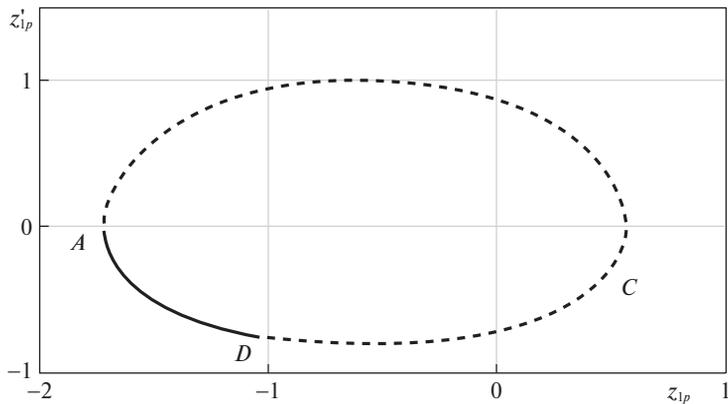


Рис. 4. Фазовый портрет первой массы.

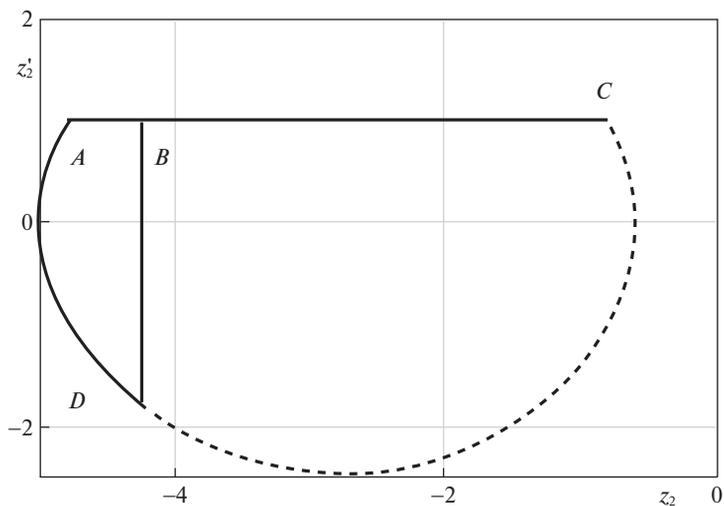


Рис. 5. Фазовый портрет второй массы.

с фазами превышения второй массой скорости приводного ремня с последующими фазами скольжения, покоя и контакта с ограничителем предполагается исследовать в следующих работах.

Приложение

$$L_i(t) = \Sigma A_i(t) \Sigma^{-1} \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$A_2(t) = \begin{pmatrix} S_1/\Omega_1 & 0 \\ 0 & S_2/\Omega_2 \end{pmatrix}, \quad S_j = \sin(\Omega_j t) \quad (j = 1, 2)$$

$$A_1(t) = A_2'(t), \quad A_3(t) = A_2''(t)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \Sigma_1 & \Sigma_2 \end{pmatrix}$$

Собственные частоты (Ω_1, Ω_2) являются корнями характеристического уравнения

$$D(s^2) \equiv \det(K - Is^2) = 0$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -\chi \\ -\eta\chi & \eta(\chi + k) \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Собственные векторы $\Phi_j = \begin{pmatrix} 1 \\ \Sigma_j \end{pmatrix}$ ($j = 1, 2$) определяются как $(K - I\Omega_j^2) \Phi_j = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shaw S.W., Holmes P.J.* A periodically forced piecewise linear oscillator // J. Sound&Vibr. 1983. V. 90. № 1. P. 129–155.
2. *Hindmarsh M.B., Jeffries D.J.* On the motions of the impact oscillator // J. Physics A. 1984. V. 17. P. 1791–1803.
3. *Hong H.K., Liu C.S.* Non-sticking formulae for Coulomb friction under harmonic loading // J. Sound&Vibr. 2001. V. 244. № 5. P. 883–898.
4. *Csernak G., Stepan G.* On the periodic response of a harmonically excited dry friction oscillator // J. Sound&Vibr. 2006. V. 295. № 4. P. 649–658.
5. *Valente A.X., McClamroch N.H., Mezie I.* Hybrid impact of two coupled oscillators that can impact a fixed stop // Int. J. Non-Linear Mech. 2003. V. 38. P. 677–689.
6. *Galvanetto U., Bishop S.R.* Stick-slip vibrations of a 2-degree-of-freedom geophysical fault model // Int. J. Mech. Sci. 1994. V. 36. № 8. P. 683–698.
7. *Khizgiyayev S.V.* Self-excited oscillations of a two-mass oscillator with dry “stick-slip” friction // JAMM. 2007. V. 71. P. 905–913.
8. *Pascal M.* Dynamics and stability of a two degree of freedom oscillator with an elastic stop // J. Comput.&Nonlin. Dyn. 2006. V. 1. № 1. P. 94–102.
9. *Pascal M.* Dynamics of coupled oscillators excited by dry friction // ASME J. Comput. Nonlin. Dyn. 2008. V. 3. № 3. P. 20–26.
10. *Pascal M.* A new model of dry friction oscillator colliding with a rigid obstacle // Nonlin. Dyn. 2018. V. 91. P. 2541–2550.

Dry Friction Oscillator with Elastic Stop

M. Pascal^{a, #}

^a *Universite d'Evry, Evry, France*

[#] *e-mail: stepsj@ya.ru*

A two-degrees of freedom oscillator excited by dry friction is considered. The system consists of two masses m_1, m_2 connected by linear springs. The second mass is in contact with a driving belt moving at a constant velocity and can collide with an elastic stop. Friction forces, with Coulomb's characteristics, act between the mass and the belt. Several periodic orbits including stick phases, slip phases and collision with the obstacle are found.

Keywords: oscillations, non smooth systems, two-degree-of-freedom oscillator, dry friction oscillations, oscillators with elastic stop

REFERENCES

1. *Shaw S.W., Holmes P.J.* A periodically forced piecewise linear oscillator // J. Sound&Vibr., 1983, vol. 90, no. 1, pp. 129–155.
2. *Hindmarsh M.B., Jeffries D.J.* On the motions of the impact oscillator // J. Physics A, 1984, vol. 17, pp. 1791–1803.

3. *Hong H.K., Liu C.S.* Non-sticking formulae for Coulomb friction under harmonic loading // *J. Sound&Vibr.*, 2001, vol. 244, no. 5, pp. 883–898.
4. *Csernak G., Stepan G.* On the periodic response of a harmonically excited dry friction oscillator // *J. Sound&Vibr.*, 2006, vol. 295, no. 4, pp. 649–658.
5. *Valente A.X., McClamroch N.H., Mezie I.* Hybrid impact of two coupled oscillators that can impact a fixed stop // *Int. J. Non-Lin. Mech.*, 2003, vol. 38, pp. 677–689.
6. *Galvanetto U., Bishop S.R.* Stick-slip vibrations of a 2-degree-of-freedom geophysical fault model // *Int. J. Mech. Sci.*, 1994, vol. 36, no. 8, pp. 683–698.
7. *Khizgiyayev S.V.* Self-excited oscillations of a two-mass oscillator with dry “stick-slip” friction // *JAMM*, 2007, vol. 71, pp. 905–913.
8. *Pascal M.* Dynamics and stability of a two degree of freedom oscillator with an elastic stop // *J. Comput.&Nonlin. Dyn.*, 2006, vol. 1, no. 1, pp. 94–102.
9. *Pascal M.* Dynamics of coupled oscillators excited by dry friction // *ASME J. Comput. Nonlin. Dyn.*, 2008, vol. 3, no. 3, pp. 20–26.
10. *Pascal M.* A new model of dry friction oscillator colliding with a rigid obstacle // *Nonlin. Dyn.*, 2018, vol. 91, pp. 2541–2550.

УДК 531.1:521.1

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛАГРАНЖЕВЫХ РЕШЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ БЛИЗКОЙ К КРУГОВОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ© 2021 г. А. П. Маркеев^{1,2,*}¹ *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*² *Московский авиационный институт (НИУ), Москва, Россия***e-mail: anat-markeev@mail.ru*

Поступила в редакцию 15.01.2021 г.

После доработки 11.03.2021 г.

Принята к публикации 15.03.2021 г.

Рассматривается ограниченная задача трех тел (материальных точек). Предполагается, что орбиты основных притягивающих тел представляют собой эллипсы малого эксцентриситета, а пассивно гравитирующее тело при своем движении может выйти из плоскости орбит основных тел (пространственная задача). Исследуется устойчивость движения этого тела, отвечающего треугольным лагранжевым точкам либрации. Характерной особенностью рассматриваемой пространственной задачи является наличие резонанса, обусловленного равенством периода кеплеровского движения основных тел и периода линейных колебаний пассивно гравитирующего тела по направлению, перпендикулярному плоскости их орбит. При помощи методов классической теории возмущений, КАМ-теории и алгоритмов компьютерной алгебры исследована нелинейная задача об устойчивости для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий и задача о формальной устойчивости (устойчивости в любом сколь угодно высоком конечном приближении относительно координат и импульсов возмущенного движения).

Ключевые слова: ограниченная задача трех тел, треугольные точки либрации, устойчивость

DOI: 10.31857/S0032823521040093

Уравнения движения ограниченной задачи трех тел допускают [1, 2] пять точных решений, для которых три тела либо располагаются вдоль одной прямой (прямолинейные точки либрации, открытые Л. Эйлером в 1757 г. [3]), либо образуют равносторонний треугольник, лежащий в плоскости орбит основных притягивающих тел (треугольные точки либрации, их существование показано Ж. Лагранжем в 1772 г. [4]).

Задаче об устойчивости точек либрации и о характере близких к ним движений посвящено очень много исследований. Достаточно подробно обсуждение полученных результатов содержится в публикациях [2, 5–11] и в приведенной в них библиографии.

К настоящему времени значительное развитие получили задача о решениях, аналогичным точкам либрации, в случае произвольного числа тел [12–15], а также задача о существовании и устойчивости точек либрации при учете светового давления [16–18].

Исследования о точках либрации представляют не только теоретический интерес. Существуют проекты запуска искусственных спутников в окрестности точек либрации Солнечной системы и, прежде всего, системы Земля–Луна, направленные на использование точек либрации для решения практических задач космических исследований. Ряд таких проектов уже осуществлен [19–21].

Цель статьи состоит в численно-аналитическом исследовании нелинейной задачи об устойчивости треугольных точек либрации в случае, когда эксцентриситет орбит основных тел мал, а пассивно гравитирующее тело может совершать произвольное пространственное движение вблизи точек либрации.

1. Введение. Рассмотрим три тела (материальные точки) P_1 , P_2 и P_3 , движущиеся под действием гравитационного притяжения по закону Ньютона. Считаем, что масса точки P_3 пренебрежимо мала по сравнению с массами m_1 и m_2 точек P_1 и P_2 , и, следовательно, движение точки P_2 относительно точки P_1 определяется из задачи двух тел (материальных точек). Пусть орбита точки P_2 в ее движении относительно точки P_1 является эллипсом с эксцентриситетом e .

Через X, Y, Z обозначим координаты точки P_3 в системе координат $OXYZ$ с началом в центре масс тел P_1 и P_2 и осью OX , направленной по прямой P_1P_2 в сторону точки P_2 ; направление кратчайшего поворота оси OX к оси OY совпадает с направлением вращения точки P_2 относительно P_1 . Пусть R – расстояние между точками P_1 и P_2 . Введем координаты Нехвилла $x = X/R$, $y = Y/R$, $z = Z/R$, а в качестве независимой переменной примем истинную аномалию v в эллиптическом движении точки P_2 . Дифференциальные уравнения движения точки P_3 можно получить [1, 2] в форме канонических уравнений с функцией Гамильтона Γ вида

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + p_x y - p_y x + \frac{e \cos v}{2(1 + e \cos v)}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{1 + e \cos v} \Pi \\ \Pi &= -\frac{1 - \mu}{R_1} - \frac{\mu}{R_2}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \left(0 < \mu \leq \frac{1}{2}\right) \\ R_1 &= \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2 + z^2}, \quad R_2 = \sqrt{(x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Соответствующие этой функции уравнения движения допускают следующее решение

$$x_0 = \frac{1 - 2\mu}{2}, \quad y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_0 = 0, \quad p_{x_0} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p_{y_0} = \frac{1 - 2\mu}{2}, \quad p_{z_0} = 0, \quad (1.2)$$

отвечающее треугольной точке либрации.

Введем возмущения u_j, v_j ($j = 1, 2, 3$), положив

$$x = x_0 + u_1, \quad y = y_0 + u_2, \quad z = u_3, \quad p_x = p_{x_0} + v_1, \quad p_y = p_{y_0} + v_2, \quad p_z = v_3$$

В переменных u_j, v_j невозмущенное движение (1.2) будет положением равновесия $u_j = v_j = 0$.

Линейным уравнениям возмущенного движения отвечает квадратичная часть Γ_2 в разложении функции Гамильтона (1.1) в ряд по степеням u_j, v_j

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \dots, \quad (1.3)$$

где Γ_m – форма степени m относительно u_j, v_j с 2π -периодическими по v коэффициентами. Не зависящее от u_j, v_j слагаемое в (1.3) отброшено.

В случае круговой задачи ($e = 0$) точки либрации устойчивы в первом приближении, если параметр μ лежит в интервале

$$0 < \mu < \mu_* = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} = 0.03852\dots$$

При малых e из точки $\mu = \mu_0$

$$\mu_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = 0.02860\dots$$

этого интервала исходит область неустойчивости (область параметрического резонанса) [1, 2]. Далее будем считать, что μ лежит в одном из интервалов

$$0 < \mu < \mu_0 \quad \text{или} \quad \mu_0 < \mu < \mu_* \tag{1.4}$$

Для таких значений μ треугольные точки либрации ограниченной эллиптической задачи трех тел устойчивы в первом (линейном) приближении, если эксцентриситет e достаточно мал. Для $\mu > \mu_*$ точки либрации при малых e неустойчивы по Ляпунову (не только в линейном приближении, но и в строгой нелинейной постановке задачи об устойчивости) [1, 2].

При $e = 0$ частоты малых колебаний в окрестности точек либрации равны ω_1, ω_2 и 1, причем ω_1 и ω_2 являются корнями уравнения

$$\omega^4 - \omega^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0 \tag{1.5}$$

В рассматриваемых областях (1.4) изменения параметра μ величины ω_1 и ω_2 удовлетворяют неравенствам

$$1 > \omega_1 > \sqrt{2}/2 > \omega_2 > 0, \quad \omega_2 \neq 1/2 \tag{1.6}$$

Для значений μ из промежутков (1.4) характеристические показатели, определяемые линейными уравнениями с 2π -периодическими коэффициентами, задаваемыми квадратичной частью Γ_2 функции Гамильтона возмущенного движения (1.3), будут при малых e чисто мнимыми величинами $\pm i\lambda_j$ ($j = 1, 2, 3$), где i – мнимая единица, а λ_j – вещественные числа любого знака (причем $|\lambda_3| = 1$ при любых μ и e). Если величины λ_j таковы, что

$$k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 = N, \tag{1.7}$$

где N, k_1, k_2, k_3 – целые числа, причем $|k_1| + |k_2| + |k_3| = k$, то в изучаемой системе реализуется резонанс порядка k . В задаче об устойчивости наиболее важными являются резонансы низких порядков (до четвертого порядка включительно).

Отметим, что изучаемая в данной статье пространственная задача при любых значениях параметров μ и e является резонансной, так как $|\lambda_3| = 1$. Для случая плоской задачи, когда пассивно гравитирующая точка P_3 во все время движения остается в плоскости орбит основных точек P_1 и P_2 , в резонансном соотношении (1.7) следует положить $k_3 = 0$ и оно принимает вид

$$k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = N \tag{1.8}$$

Для значений μ из промежутков (1.4) при достаточно малых e все шесть корней характеристического уравнения матрицы монодромии линейных уравнений возмущенного движения с функцией Гамильтона Γ_2 имеют модули, равные единице, а сама матрица приводится к диагональной форме. Поэтому [22] точки либрации устойчивы в первом (линейном) приближении. При строгом же решении вопроса об устойчивости необходим нелинейный анализ. Для его осуществления целесообразно сначала преобразовать квадратичную часть Γ_2 функции (1.3) к вещественной нормальной форме. Это можно сделать [23] при помощи линейной, аналитической по e канонической замены переменных $u_j, v_j \rightarrow y_j, Y_j$. Эта замена осуществляется в два этапа. Сна-

чала делается замена $u_j, v_j \rightarrow x_j, X_j$, приводящая функцию Γ_2 в случае круговой задачи (когда $e = 0$) к сумме гамильтонианов трех, не связанных один с другим, гармонических осцилляторов с частотами ω_1, ω_2 и 1. А затем при помощи метода Дебри–Хори теории возмущений [24, 25] делается линейная, 2π -периодическая по v каноническая замена переменных $x_j, X_j \rightarrow y_j, Y_j$, задаваемая сходящимися при малых e рядами. Преобразованная к нормальным координатам y_j, Y_j функция Γ_2 имеет вид [23]

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \lambda_j (y_j^2 + Y_j^2) \quad (1.9)$$

$$\lambda_1 = \omega_1 + O(e^2), \quad \lambda_2 = -\omega_2 + O(e^2), \quad \lambda_3 = 1, \quad (1.10)$$

где величины $O(e^2)$ – не зависящие от v функции параметров μ и e .

Далее исследуется нелинейная задача об устойчивости невозмущенного движения $u_j = v_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$). Будет рассмотрена устойчивость для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий $u_j(0), v_j(0)$ и формальная устойчивость (устойчивость при учете в разложении (1.3) форм Γ_m до сколь угодно высокой конечной степени).

2. Устойчивость для большинства начальных условий (см. [26–30]). В рассматриваемых интервалах (1.4) изменения параметра μ в случае плоской эллиптической задачи малого эксцентриситета возможны пять резонансов (1.8) третьего и восемь резонансов четвертого порядка ([2], стр. 155 и 156). Задача об устойчивости для большинства начальных условий в плоском случае при отсутствии этих резонансов рассмотрена в гл. 9 книги [2]. Обзор недавних исследований можно найти в работе [31].

Ниже исследуется вопрос об устойчивости для большинства начальных условий в случае пространственной эллиптической задачи при малых значениях эксцентриситета e . Предполагается, что значения параметров μ и e лежат вне кривых резонансов третьего и четвертого порядков.

2.1. О нормальной форме функции Гамильтона (1.3), вычисленной до членов четвертого порядка включительно. После линейного преобразования $u_j, v_j \rightarrow y_j, Y_j$, приводящего квадратичную часть функции (1.3) к нормальной форме (1.9), сделаем, следуя [2], близкое к тождественному 2π -периодическое по v , аналитическое относительно e и q_j, p_j нелинейное каноническое преобразование $y_j, Y_j \rightarrow q_j, p_j$. Это преобразование приводит функцию Гамильтона возмущенного движения к ее нормальной форме с точностью до членов четвертой степени включительно относительно q_j, p_j . Показано [2], что новым переменным отвечает функция Гамильтона вида

$$H = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + r_3 + f_{200} r_1^2 + f_{110} r_1 r_2 + f_{020} r_2^2 + (f_{101} r_1 + f_{011} r_2 + f_{002} r_3) r_3 + H' \quad (2.1)$$

Здесь φ_j, r_j – симплектические полярные координаты:

$$q_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j, \quad p_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j \quad (j = 1, 2, 3),$$

а $H' = O((r_1 + r_2 + r_3)^{5/2})$ – 2π -периодическая относительно φ_j и v функция. Коэффициенты $f_{200}, f_{110}, f_{020}$ не зависят от v , причем

$$f_{200} = c_{200}(\mu) + O(e^2), \quad f_{110} = c_{110}(\mu) + O(e^2), \quad f_{020} = c_{020}(\mu) + O(e^2) \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}
 c_{200} &= \frac{\omega_2^2(124\omega_1^4 - 696\omega_1^2 + 81)}{144(1 - 2\omega_1^2)^2(1 - 5\omega_1^2)} \\
 c_{110} &= -\frac{\omega_1\omega_2(64\omega_1^2\omega_2^2 + 43)}{6(1 - 2\omega_1^2)(1 - 2\omega_2^2)(1 - 5\omega_1^2)(1 - 5\omega_2^2)} \\
 c_{020} &= \frac{\omega_1^2(124\omega_2^4 - 696\omega_2^2 + 81)}{144(1 - 2\omega_2^2)^2(1 - 5\omega_2^2)}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Выражения (2.3) впервые получены в работе [32].

Остальные три коэффициента квадратичной относительно r_1, r_2, r_3 части функции (2.1) зависят от переменных v и φ_3 , от φ_1 и φ_2 они не зависят. Их структура такова:

$$\begin{aligned}
 f_{101} &= c_{101}(\mu) + x_{101} + y_{101} \sin 2\varphi + z_{101} \cos 2\varphi \\
 f_{002} &= c_{002}(\mu) + x_{002} + y_{002} \sin 2\varphi + z_{002} \cos 2\varphi + u_{002} \sin 4\varphi + v_{002} \cos 4\varphi \\
 f_{011} &= c_{011}(\mu) + x_{011} + y_{011} \sin 2\varphi + z_{011} \cos 2\varphi \quad \varphi = \varphi_3 - v
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Величины x, y, z, u, v с индексами – функции от μ и e . Все они имеют порядок e^2 , кроме u_{002} и v_{002} , которые имеют порядок e^4 . Величины c_{101}, c_{011} и c_{002} вычисляются по формулам из статьи [33]:

$$\begin{aligned}
 c_{101} &= -\frac{8\omega_1\omega_2^2}{3(1 - 2\omega_1^2)(4 - \omega_1^2)} \\
 c_{011} &= \frac{8\omega_1^2\omega_2}{3(1 - 2\omega_2^2)(4 - \omega_2^2)} \\
 c_{002} &= -\frac{\omega_1^2\omega_2^2}{3(4 - \omega_1^2)(4 - \omega_2^2)}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Функцию (2.1) можно упростить, сделав каноническую замену переменных

$$\varphi_1 \rightarrow \psi_1, \quad \varphi_2 \rightarrow \psi_2, \quad \varphi_3 \rightarrow v + \psi_3, \quad r_j \rightarrow r_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

Новая функция Гамильтона не будет содержать r_3 в ее линейной относительно r_j части, а в функциях $f_{101}, f_{011}, f_{002}$ величины $2(\varphi_3 - v)$ и $4(\varphi_3 - v)$ заменяются на $2\psi_3$ и $4\psi_3$, соответственно. Таким образом, получим преобразованную функцию Гамильтона

$$H = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + f_{200} r_1^2 + f_{110} r_1 r_2 + f_{020} r_2^2 + f_{101} r_1 r_3 + f_{011} r_2 r_3 + f_{002} r_3^2 + H'', \tag{2.6}$$

где $H'' = O((r_1 + r_2 + r_3)^{5/2}) - 2\pi$ -периодическая по $v, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ функция; коэффициенты $f_{101}, f_{011}, f_{002}$ в (2.6) зависят только от μ, e, ψ_3 , от v они не зависят.

Отбросив в (2.6) величину H'' , получим систему с укороченной функцией Гамильтона $h = H - H''$. При достаточно малых e равновесие $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ этой системы устойчиво по Ляпунову. Это легко усмотреть [2], так как при $e = 0$ имеем

$$f_{002} = c_{002}(\mu) = -\frac{3\mu(1 - \mu)}{16 + 9\mu(1 - \mu)} < 0 \tag{2.7}$$

При малых e движение, описываемое укороченным гамильтонианом имеет колебательный характер.

2.2. *Выражение укороченного гамильтониана через переменные действия.* При малых e введем переменные действия I_1, I_2, I_3 и запишем укороченный гамильтониан $H - H''$ через эти переменные.

Так как в укороченной системе углы ψ_1, ψ_2 циклические, то переменные I_1, I_2 – это соответствующие импульсы r_1, r_2 и из интеграла $H - H'' = h = \text{const}$ следует, что

$$f_{101}r_1r_3 + f_{011}r_2r_3 + f_{002}r_3^2 = \tilde{h} = \text{const} \quad (2.8)$$

$$\tilde{h} = h - (\lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + f_{200}I_1^2 + f_{110}I_1I_2 + f_{020}I_2^2) \quad (2.9)$$

Из (2.8) находим

$$r_3 = \sqrt{\frac{\tilde{h}}{f_{002}}} - \frac{1}{2f_{002}}(f_{101}I_1 + f_{011}I_2) + O((I_1 + I_2)^2) \quad (2.10)$$

Третья из переменных действие I_3 определяется равенством

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \oint r_3 d\psi_3, \quad (2.11)$$

где интеграл вычисляется по кривой, отвечающей колебательному движению в окрестности равновесия при заданных I_1, I_2 и h . Из (2.10), (2.11) и равенств (2.4) получаем

$$I_3 = \sqrt{\frac{\tilde{h}}{c_{002}}} - \frac{1}{2c_{002}}(c_{101}I_1 + c_{011}I_2) + O((I_1 + I_2)^2) + O(e^2) \quad (2.12)$$

Отсюда и из (2.9) (с учетом равенств (1.10) и (2.4)) получаем искомое выражение укороченного гамильтониана через переменные действия:

$$h = \omega_1 I_1 - \omega_2 I_2 + c_{200}I_1^2 + c_{110}I_1I_2 + c_{020}I_2^2 + c_{101}I_1I_3 + c_{011}I_2I_3 + c_{002}I_3^2 \quad (2.13)$$

В (2.13) отброшены члены выше второй степени относительно I_1, I_2, I_3 , а во всех коэффициентах отброшены слагаемые порядка e^2 и выше.

2.3. Устойчивость для большинства начальных условий. Достаточное условие устойчивости для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий записывается в виде следующего неравенства [29, 30]:

$$D_3 = \det \left\| \frac{\partial^2 h}{\partial I_i \partial I_j} \right\|_{i,j=1}^3 = \begin{vmatrix} 2c_{200} & c_{110} & c_{101} \\ c_{110} & 2c_{020} & c_{011} \\ c_{101} & c_{011} & 2c_{002} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.14)$$

Проведя некоторые преобразования, учитывающие выражения (2.3), (2.5) и уравнение (1.5), для определителя (2.14) можно получить такое представление:

$$D_3 = -\frac{f}{7776(u-4)^2(4u-25)^2(12u+1)^2}, \quad (2.15)$$

где

$$u = \frac{1}{\omega_1^2 \omega_2^2} = \frac{4}{27\mu(1-\mu)}, \quad (2.16)$$

а f – многочлен четвертой степени относительно u ,

$$f = 66\,258\,000u^4 - 637\,971\,912u^3 + 1253\,184\,093u^2 - 299\,701\,528u + 384\,400.$$

Корни u_s ($s = 1, 2, 3, 4$) этого многочлена таковы:

$$u_1 = 0.0012\dots, \quad u_2 = 0.2755\dots, \quad u_3 = 2.3222\dots, \quad u_4 = 7.0295\dots$$

Но в рассматриваемых промежутках (1.4) изменения параметра μ для величины u из (2.16) имеет место неравенство $u > 4$. Поэтому из четырех корней смысла задачи от-

вечает наибольший корень u_4 . Точное выражение для этого корня записывается через радикалы:

$$u_4 = \frac{\sqrt{\alpha - \gamma\sqrt{\beta} \sin(\chi + \pi / 6)} + \sqrt{\alpha + \gamma\sqrt{\beta} \sin(\chi - \pi / 6)} + \sqrt{\alpha + \gamma\sqrt{\beta} \cos \chi}}{3681000}$$

$$\alpha = 35799685470091, \quad \beta = 153175407602285586489, \quad \gamma = 2750$$

$$\chi = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3684223905679758932447679}{305225753078723\sqrt{\beta}} \right)$$

Найденному значению u_4 корня уравнения $D_3 = 0$ соответствует значение $\mu = \mu_{**}$, где

$$\mu_{**} = 0.02154\dots \tag{2.17}$$

Таким образом показано, что, если $\mu \neq \mu_{**} + O(e^2)$, то при достаточно малых значениях e условие устойчивости для большинства начальных условий выполнено.

Если параметры μ и e не лежат на кривой $\mu = \mu_{**} + O(e^2)$, на которой $D_3 = 0$, то большинство траекторий $u_j(v)$, $v_j(v)$ ($j = 1, 2, 3$) системы с функцией Гамильтона (1.3), удовлетворяющих в начальный момент $v = 0$ условию $I(0) = \sum_{j=1}^3 (u_j^2(0) + v_j^2(0)) < \varepsilon$, при всех v остается в малой окрестности невозмущенного движения $u_j = v_j = 0$. Множество начальных условий упомянутого “большинства” имеет относительную меру, не меньшую $1 - O(\varepsilon^{1/4})$.

Траектории начинающиеся в дополнении к множеству “большинства” начальных условий, могут, вообще говоря, уйти далеко от их начального положения. Но, как показано Н. Нехорошевым [34–36], при отсутствии резонансов (1.7) до некоторого достаточно высокого порядка, почти для всякой системы с функцией Гамильтона (1.3) существуют положительные числа a и b такие, что отклонение величины $I(v)$ от ее начального значения $I(0)$ не превосходит величину порядка ε^b при всех v , удовлетворяющих неравенству

$$0 \leq v \leq \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon^a}\right)$$

Функции, для которых эти оценки не имеют места, представляют собой очень редкое исключение: коэффициенты разложения в ряд этих функций должны удовлетворять бесконечному числу независимых алгебраических уравнений. Эти исключительные функции не удовлетворяют некоторым (довольно громоздко формулируемым) требованиям, названными в [34–36] условиями крутизны.

3. Формальная устойчивость (см. [37–44]). Понятие формальной устойчивости введено Ю. Мозером для гамильтоновых систем, обладающих знакоопределенным формальным интегралом, представляющим собой степенной ряд, возможно расходящийся. Это понятие является очень важным при исследовании устойчивости на конечном (но очень большом) интервале времени. Наличие формальной устойчивости означает, что неустойчивость по Ляпунову (если она в рассматриваемой задаче есть) не обнаруживается при учете в разложении функции Гамильтона членов до сколь угодно большого (но конечного) порядка относительно координат и импульсов возмущенного движения. При наличии формальной устойчивости, если и существуют траектории, уходящие далеко от невозмущенного движения, то движение по ним происходит крайне медленно. Соответствующие оценки получены Ю. Мозером [38, 39], К. Зиглем [41], Дж. Глиммом [42], Н. Нехорошевым [35, 36] и др. (см [30, 44]).

Формальная устойчивость лагранжевых решений плоской эллиптической задачи исследована ранее ([2], гл. 9). В этом разделе рассматривается пространственная задача.

Будем предполагать, что эксцентриситет e — малая величина и для любых целых k_1, k_2, N параметры μ и e лежат вне резонансных кривых (1.8); тогда в изучаемой системе возможен только один резонанс $\lambda_3 = 1$ (тождественный, существующий в пространственной задаче при всех μ и e). Покажем, что при сделанных предположениях лагранжевы решения формально устойчивы.

После описанной в разд. 1 линейной замены переменных $u_j, v_j \rightarrow y_j, Y_j$, приводящей квадратичную часть функции Гамильтона (1.3) к ее нормальной форме (1.9), сделаем близкое к тождественному нелинейное 2π -периодическое по v каноническое преобразование $y_j, Y_j \rightarrow \xi_j, \eta_j$, которое приводит функцию (1.3) к ее нормальной форме во всех порядках относительно новых переменных ξ_j, η_j . Это преобразование аналогично аналитическому преобразованию $y_j, Y_j \rightarrow q_j, p_j$ предыдущего раздела, но в отличие от него задается формальными (возможно, расходящимися) рядами. Не останавливаясь на подробностях, отметим только, что нормализованная функция Гамильтона не содержит форм нечетной степени относительно ξ_j, η_j ($j = 1, 2, 3$).

Нормальную форму удобно представить в симплектических полярных координатах θ_j, ρ_j

$$\xi_j = \sqrt{2\rho_j} \sin \theta_j, \quad \eta_j = \sqrt{2\rho_j} \cos \theta_j \quad (j = 1, 2, 3)$$

Несложно показать, что нормальная форма не зависит от углов θ_1, θ_2 , а от θ_3 она будет зависеть только через посредство комбинации $\theta_3 - v$. Эта комбинация содержится в нормальной форме в виде синусов и косинусов от величины $2p(\theta_3 - v)$, где $p = 0, 1, 2, 3, \dots$ Такая структура нормальной формы обусловлена наличием тождественного резонанса и тем, что сумма показателей степеней возмущений u_3 и v_3 в каждом члене разложения (1.3) является четным числом. Нормализованную функцию Гамильтона можно записать в следующем виде:

$$H = \lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2 + \rho_3 + \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{l+m+n=r} a_{lmn} \rho_1^l \rho_2^m \rho_3^n \quad (3.1)$$

Здесь a_{lmn} — функции от μ, e и $\theta_3 - v$, причем $a_{lm0} = d_{lm0}(\mu, e)$ зависит только от μ, e , а при $n \geq 1$

$$a_{lmn} = d_{lmn}(\mu, e) + \sum_{p=1}^n \left\{ c_{lmn}^{(p)}(\mu, e) \cos[2p(\theta_3 - v)] + s_{lmn}^{(p)}(\mu, e) \sin[2p(\theta_3 - v)] \right\} \quad (3.2)$$

При малых e справедливы равенства

$$d_{lm0} = c_{lm0}(\mu) + O(e^2), \quad d_{lmn} = c_{lmn}(\mu) + O(e^2), \quad c_{lmn}^{(p)} = O(e^{2p}), \quad s_{lmn}^{(p)} = O(e^{2p}) \quad (3.3)$$

Если вместо θ_3 ввести переменную $\theta + v$, а остальные переменные ρ_1, ρ_2, ρ_3 оставить без изменения, то в нормальной форме (3.1) исчезает ρ_3 из части, линейной относительно ρ_1, ρ_2, ρ_3 , а сама функция Гамильтона не будет содержать независимую переменную v :

$$H = \lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2 + \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{l+m+n=r} a_{lmn} \rho_1^l \rho_2^m \rho_3^n, \quad (3.4)$$

где по-прежнему $a_{lm0} = d_{lm0}(\mu, e)$, а при $n \geq 1$

$$a_{lmn} = d_{lmn} + \sum_{p=1}^n \left[c_{lmn}^{(p)} \cos 2p\theta + s_{lmn}^{(p)} \sin 2p\theta \right] \quad (3.5)$$

Система с функцией Гамильтона (3.4) имеет три формальных интеграла $\rho_1 = \text{const}$, $\rho_2 = \text{const}$ и $H = \text{const}$. Для доказательства формальной устойчивости рассмотрим функцию

$$V = \rho_1^2 + \rho_2^2 + (H - \lambda_1 \rho_1 - \lambda_2 \rho_2)^2$$

При малых ρ_1, ρ_2, ρ_3 ее можно записать в виде

$$V = \rho_1^2 + \rho_2^2 + \left[\sum_{l+m+n=2} a_{lmn} \rho_1^l \rho_2^m \rho_3^n + O((\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)^3) \right]^2 \quad (3.6)$$

При $\rho_1 = \rho_2 = 0$ выражение в квадратных скобках в правой части равенства (3.6) равно $a_{002} \rho_3^2 + O(\rho_3^3)$, где, согласно (3.2)–(3.5), $a_{002} = c_{002}(\mu) + O(e^2)$. Но, в соответствии с (2.7), величина $c_{002}(\mu) < 0$. Поэтому для каждого из рассматриваемых значений (1.4) параметра μ при достаточно малых e функция V неотрицательна, причем $V = 0$ только при $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$, то есть V – формальный определенно-положительный интеграл. Формальная устойчивость доказана.

Заключение. Исследована устойчивость треугольных лагранжевых решений пространственной слабоэллиптической ограниченной задачи трех тел для значений параметра μ , лежащих в областях (1.4) устойчивости в первом приближении.

1. Для значений параметров μ, e , лежащих вне кривых (1.8) резонансов третьего и четвертого порядков и не попадающих на кривую вырождения $\mu = \mu_{**} + O(e^2)$ нормальной формы (2.13) (μ_{**} задается равенством (2.17)), доказана устойчивость для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий. Вопрос об устойчивости на кривой вырождения должен решаться при учете в нормальной форме функции Гамильтона членов не ниже шестой степени относительно координат и импульсов возмущенного движения.

2. В предположении об отсутствии резонансов (1.8) плоской задачи до сколь угодно высокого порядка доказана формальная устойчивость.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00116) в Московском авиационном институте (Национальном исследовательском университете) и в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1978. 456 с.
2. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
3. Euler L. De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium // Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop. 1767. V. 11. P. 144–151.
4. Lagrange J.L. Essai sur le Problème des Trois Corps. Oeuvres de Lagrange. V. 6. Paris: Gauthier Villars, 1873. P. 229–324.
5. Ляпунов А.М. Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах. Собр. соч., Т. 1. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 327–401.
6. Danby J.M.A. Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies // Astron. J. 1964. V. 69. Iss. 2. P. 165–172.

7. *Giacaglia G.E.O.* Characteristics exponents at L_4 and L_5 in the elliptic restricted problem of three bodies // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.* 1971. V. 4. Iss. 3/4. P. 468–489.
8. *Nayfeh A.H., Kamel A.A.* Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies // *AIAA J.* 1970. V. 8. Iss. 2. P. 221–223.
9. *Юмагулов М.Г., Беликова О.Н.* Бифуркация 4π -периодических решений плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел // *Астрон. ж.* 2009. Т. 86. № 2. С. 170–174.
10. *Kovacs T.* Stability chart of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2013. V. 430. Iss. 4. P. 2755–2760.
11. *Исанбаева Н.Р.* О построении границ областей устойчивости треугольных точек либрации плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел // *Вестн. Башкирск. унив. Математика и механика.* 2017. Т. 22. № 1. С. 5–9.
12. *Симо К.* Периодические траектории плоской задачи N тел с равными массами и телами, движущимися по одной и той же траектории // *Сб. работ “Относительные равновесия. Периодические решения”.* М.; Ижевск: Инст. компьютер. исслед., 2006. С. 175–201.
13. *Whipple A.L., Szebehely V.* The restricted problem of $n + \nu$ bodies // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.* 1984. V. 32. Iss. 2. P. 137–144.
14. *Budzko D.A., Prokopenya A.N.* On the stability of equilibrium positions in the circular restricted four-body problem // in: *Computer Algebra in Scientific Computing. LNCS. V. 6885 / Ed. by Gerdt V.P. et al.* Heidelberg: Springer, 2011. P. 88–100.
15. *Гребеников Е.А.* Математические проблемы гомографической динамики. М.: Изд-во РУДН, 2011. 254 с.
16. *Куницын А.Л., Турешбаев А.Т.* Устойчивость треугольных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел // *Письма в Астрон. ж.* 1985. Т. 11. № 2. С. 145–148.
17. *Лукьянов Л.Г., Кочеткова А.Ю.* Об устойчивости лагранжевых точек либрации в ограниченной эллиптической фотогравитационной задаче трех тел // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.* 1996. № 5. С. 71–76.
18. *Зимовщиков А.С., Тхай В.Н.* Диаграммы устойчивости для гетерогенного ансамбля частиц в коллинеарных точках либрации фотогравитационной задачи трех тел // *ПММ.* 2010. Т. 74. Вып. 2. С. 221–229.
19. *Кононенко А.* Точки либрации системы Земля–Луна // *Авиация и космонавтика.* 1968. № 5. С. 71–73.
20. *Аверкиев Н.Ф., Васьков С.А., Салов В.В.* Баллистическое построение систем космических аппаратов связи и пассивной радиолокации лунной поверхности // *Изв. вузов. Приборостроение.* 2008. Т. 51. № 12. С. 66–72.
21. *Salazar F., Winter O., Macau E., Masdemont J., Gomez G.* Natural configuration for formation flying around triangular libration points for the elliptic and the bicircular problem in the Earth – Moon System // *The 65th Int. Astronautical Congress. Toronto, Canada. September 29–October 3,* 2014. 14 p.
22. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
23. *Маркеев А.П.* О нормальных координатах в окрестности лагранжевых точек либрации ограниченной эллиптической задачи трех тел // *Вестн. Удмурт. унив. Математика. Механика. Компьют. науки.* 2020. Т. 30. № 4. С. 657–671.
24. *Джакалья Г.Е.О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.
25. *Найфэ А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
26. *Колмогоров А.Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // *Докл. АН СССР.* 1954. Т. 98. № 4. С. 527–530.
27. *Арнольд В.И.* Доказательство теоремы А.Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // *УМН.* 1963. Т. 18. № 5. С. 13–40.
28. *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // *УМН.* 1963. Т. 18. № 6. С. 91–192.
29. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 408 с.

30. Арнольд В.И., Козлов В.В., Неёшатадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 414 с.
31. Lhotka Ch., Efthymiopoulos C., Dvorak R. Nekhoroshev stability at L_4 or L_5 in the elliptic-restricted three-body problem—application to Trojan asteroids // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2008. V. 384. P. 1165–1177.
32. Deprit A., Deprit-Bartholomé A. Stability of the triangular Lagrangian points // *Astron. J.* 1967. V. 72. № 2. P. 173–179.
33. Маркеев А.П. Об устойчивости треугольных лагранжевых решений пространственной круговой ограниченной задачи трех тел // *Астрон. ж.* 1971. Т. 48. № 4. С. 862–868.
34. Нехорошев Н.Н. О поведении гамильтоновых систем, близких к интегрируемым // *Функц. анализ и его прил.* 1971. Т. 5. № 4. С. 82–83.
35. Нехорошев Н.Н. Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым // *УМН.* 1977. Т. 32. № 6. С. 5–66.
36. Нехорошев Н.Н. Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым. II // *Тр. сем. им. И.Г. Петровского.* 1979. № 5. С. 5–50.
37. Moser J. New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems // *Comm. Pure Appl. Math.* 1958. V. 11. № 1. P. 81–114.
38. Moser J. Stabilitätsverhalten Kanonischer Differentialgleichungs Systeme // *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. IIa.* 1955. № 6. S. 87–120.
39. Moser J. On the elimination of the irrationality condition and Birkhoff's concept of complete stability // *Bol. Soc. Mat. Mexicana.* 1960. V. 5. P. 167–175.
40. Moser J. Stability of the asteroids // *Astron. J.* 1958. V. 63. № 10. P. 439–443.
41. Зигель К.Л. Лекции по небесной механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 300 с.
42. Glimm J. Formal stability of Hamiltonian systems // *Comm. Pure Appl. Math.* 1964. V. 17. № 4. P. 509–526.
43. Брюно А.Д. О формальной устойчивости систем Гамильтона // *Матем. заметки.* 1967. Т. 1. № 3. С. 325–330.
44. Брюно А.Д. Ограниченная задача трех тел. Плоские периодические орбиты. М.: Наука, 1990. 215 с.

On the Stability of Lagrange Solutions in Spatial Near-Circular Restricted Three-Body Problem

A. P. Markeev^{a,b,#}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

^b *Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: anat-markeev@mail.ru*

The restricted problem of three bodies (material points) is considered. The orbits of the main attracting bodies are assumed to be ellipses of small eccentricity, and the passively gravitating body during its motion can leave the plane of the orbits of the main bodies (spatial problem). The stability of the body motion corresponding to the triangular Lagrangian libration points is investigated. A characteristic feature of the spatial problem under study is the presence of resonance due to the equality of the Keplerian motion period of the main bodies and the linear oscillation period of the passively gravitating body in the direction perpendicular to the plane of their orbits. Using the methods of classical perturbation theory, KAM-theory and computer algebra algorithms, the nonlinear problem of stability for the most (in the Lebesgue measure sense) initial conditions and formal stability (stability in any arbitrarily high finite approximation with respect to the coordinates and impulses of the disturbed motion) are investigated.

Keywords: restricted three-body problem, triangular libration points, stability

REFERENCES

1. *Duboshin G.N.* Celestial mechanics. Analytical and Qualitative Methods. (Nebesnaya mekhanika. Analiticheskie i kachestvennyye metody) Moscow: Nauka, 1978. 456 p. (in Russian)
2. *Markeev A.P.* Libration Points in Celestial Mechanics and Cosmodynamics. (Tochki libratsii v nebesnoi mekhanike i kosmodinamike) Moscow: Nauka, 1978. 312 p. (in Russian)
3. *Euler L.* De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentum // Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop., 1767, vol. 11, pp. 144–151.
4. *Lagrange J.L.* Essai sur le Problème des Trois Corps. Oeuvres de Lagrange. V. 6. Paris: Gauthier Villars, 1873. pp. 229–324.
5. *Lyapunov A.M.* On the Stability of Motion in One Particular Case of the Three-Body Problem. Coll. works. Vol. 1. Moscow; Leningrad: USSR Acad. Sci. Publ., 1956. pp. 327–401.
6. *Danby J.M.A.* Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies // Astron. J., 1964, vol. 69, no. 2, pp. 165–172.
7. *Giacaglia G.E.O.* Characteristics exponents at L_4 and L_5 in the elliptic restricted problem of three bodies // Celest. Mech.&Dyn. Astron., 1971, vol. 4, no. 3/4, pp. 468–489.
8. *Nayfeh A.H., Kamel A.A.* Stability of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies // AIAA J., 1970, vol. 8, no. 2, pp. 221–223.
9. *Yumagulov M.G., Belikova O.N.* Bifurcation of 4π -periodic solutions of the planar, restricted, elliptical three-body problem // Astron. Rep., 2009, vol. 86, no. 2, pp. 148–152.
10. *Kovacs T.* Stability chart of the triangular points in the elliptic restricted problem of three bodies // Mon. Not. R. Astron. Soc., 2013, vol. 430, no. 4, pp. 2755–2760.
11. *Isanbaeva N.R.* On the construction of the boundaries of stability regions of triangular libration points of a planar bounded elliptic three-body problem // Vestn. Bashk. Univ. Matematika i Mekhanika, 2017, vol. 22, no. 1, pp. 5–9. (in Russian)
12. *Simo C.* Periodic orbits of the planar N -body problem with equal masses and all bodies on the same path // in: The Restless Universe. Applications of Gravitational N-Body Dynamics to Planetary, Stellar and Galactic Systems: Proc. Fifty Fourth Scottish Universities Summer School in Physics, Blair Atholl, 23 July–5 August 2000. N.Y.: CRC Press, 2001. pp. 265–284.
13. *Whipple A.L., Szebehely V.* The restricted problem of $n + v$ bodies // Celest. Mech.&Dyn. Astron., 1984, vol. 32, no. 2, pp. 137–144.
14. *Budzko D.A., Prokopenya A.N.* On the stability of equilibrium positions in the circular restricted four-body problem // in: Computer Algebra in Scientific Computing. LNCS. Vol. 6885 / Ed. by Gerdt V.P. et al. Heidelberg: Springer, 2011. pp. 88–100.
15. *Grebenikov E.A.* Mathematical Problems of Homographic Dynamics. (Matematicheskiye problemy gomograficheskoy dinamiki) Moscow: RUDN Publ., 2011, 254 p. (in Russian)
16. *Kunitsyn A.L., Turesbaev A.T.* Stability of triangular libration points of the photogravitational three-body problem // Pis'ma v Astron. zh., 1985, vol. 11, no. 2, pp. 145–148. (in Russian)
17. *Lukyanov L.G., Kochetkova A.Yu.* On the stability of Lagrangian libration points in a restricted elliptic photogravitational three-body problem // Vestn. Mosk. Univ. Ser 3. Fizika. Astronomiya, 1996, no. 5, pp. 71–76. (in Russian)
18. *Zimovshikov A.S., Tkhai V.N.* Stability diagrams for a heterogeneous ensemble of particles at the collinear libration points of the photogravitational three-body problem // JAMM, 2010, vol. 74, no. 2, pp. 158–163.
19. *Kononenko A.* Libration points of the Earth – Moon system // Aviatsiya i Kosmon., 1968, no. 5, pp. 71–73. (in Russian)
20. *Averkiev N.F., Vaskov S.A., Salov V.V.* Ballistic construction of communication spacecraft systems and passive radar of the lunar surface // Izv. Vuz. Priborostr., 2008, vol. 51, no. 12, pp. 66–72 (in Russian)
21. *Salazar F., Winter O., Macau E., Masdemont J., Gomez G.* Natural configuration for formation flying around triangular libration points for the elliptic and the bicircular problem in the Earth – Moon System // in: The 65th Int. Astronautical Congress. Toronto, Canada. September 29 – October 3, 2014. 14 p.
22. *Malkin I.G.* Theory of Stability of Motion. Washington D.C.: Office Techn. Inform., 1952. 456 p.

23. *Markeev A.P.* On normal coordinates in the vicinity of the Lagrangian libration points of the restricted elliptic three-body problem // *Vestn. Udmurt. Univ. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, no. 4, pp. 657 – 671. (in Russian)
24. *Giacaglia G.E.O.* *Perturbation Methods in Non-Linear Systems*. N.Y.: Springer, 1972. 369 p.
25. *Nayfeh A.X.* *Perturbation Methods*. N.Y.: Wiley, 1973. 425 p.
26. *Kolmogorov A.N.* Preservation of conditionally periodic movements with small change in the hamilton function // in: *Stochastic Behaviour in Classical and Quantum Hamiltonian Systems. Lect. Notes Phys. Monogr. Vol. 93/ Ed. by Casati G., Ford J.* Berlin: Springer, 1979. pp. 51–56.
27. *Arnol'd V.I.* Proof of a Theorem of A.N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian // *Russ. Math. Surv.*, 1963, vol. 18, no. 5, pp. 9–36.
28. *Arnol'd V.I.* Small Denominators and Problems of Stability of Motion in Classical and Celestial Mechanics // *Russ. Math. Surv.*, 1963, vol. 18, no. 6, pp. 85–191.
29. *Arnol'd V.I.* *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Grad. Texts in Math. Vol. 60. N.Y.: Springer, 1997.
30. *Arnol'd V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I.* *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*. Encyclopaedia Math. Sci. Vol. 3. Berlin: Springer, 2006. 505 p.
31. *Lhotka Ch., Efthymiopoulos C., Dvorak R.* Nekhoroshev stability at L_4 or L_5 in the elliptic-restricted three-body problem—application to Trojan asteroids // *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 2008, vol. 384, pp. 1165 – 1177.
32. *Deprit A., Deprit-Bartholomé A.* Stability of the triangular Lagrangian points // *Astron. J.*, 1967, vol. 72, no. 2, pp. 173–179.
33. *Markeev A.P.* On the stability of triangular Lagrangian solutions in the spatial circular restricted three-body problem // *Astron. zh.*, 1971, vol. 48, no. 4, pp. 862–868. (in Russian)
34. *Nekhoroshev N.N.* Behavior of Hamiltonian systems close to integrable // *Funct. Anal. Appl.*, 1971, vol. 5, no. 4, pp. 338–339.
35. *Nekhoroshev N.N.* An exponential estimate of the stability time of near-integrable Hamiltonian systems // *Russ. Math. Surveys*, 1977, vol. 32, no. 6, pp. 1–65.
36. *Nekhoroshev N.N.* An exponential estimate of the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems. II // in: *Topics in Modern Mathematics. Petrovskii Sem. No. 5 / Ed. by Oleinik O.A.* N.Y.: Consultant Bureau, 1985, pp. 1–58.
37. *Moser J.* New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1958, vol. 11, no. 1, pp. 81–114.
38. *Moser J.* Stabilitätsverhalten Kanonischer Differentialgleichungs Systeme // *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. IIa*, 1955, vol. 1955, pp. 87–120.
39. *Moser J.* On the elimination of the irrationality condition and Birkhoff's concept of complete stability // *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 1960, vol. 5, pp. 167–175.
40. *Moser J.* Stability of the Asteroids // *Astron. J.*, 1958, vol. 63, no. 10, pp. 439–443.
41. *Siegel C.L.* *Vorlesungen über Himmelsmechanik. Grundlehren Math. Wiss. Vol. 85.* Berlin: Springer, 1956. x+212 p.
42. *Glimm J.* Formal stability of Hamiltonian systems // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1964, vol. 17, no. 4, pp. 509–526.
43. *Bryuno A.D.* Formal stability of Hamiltonian systems // *Math. Notes*, 1967, vol. 1, no. 3, pp. 216–219.
44. *Bruno A.D.* *The Restricted 3-Body Problem: Plane Periodic Orbits.* de Gruyter Exp. Math. Vol. 17. Berlin: Walter de Gruyter & Co., 1994.

УДК 531.31

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОУСКОРЕННОГО ДВИЖЕНИЯ УПРУГОГО
ЦИЛИНДРА ПО НАКЛОННОМУ ОСНОВАНИЮ**© 2021 г. А. А. Зобова^{1,*}, И. Г. Горячева^{2,**}¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия²Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлinskого, Москва, Россия

*e-mail: alexandra.zobova@math.msu.ru

**e-mail: goryache@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 01.02.2021 г.

После доработки 01.03.2021 г.

Принята к публикации 15.03.2021 г.

Рассмотрена задача о качении с проскальзыванием бесконечного упругого цилиндра по плоскому основанию из того же материала в поле силы тяжести, ось цилиндра горизонтальна. Недеформированная граница основания составляет ненулевой угол с горизонтом. На основании решения соответствующей контактной задачи в квазистатической постановке, полученного Картером, определена реакция основания в динамических уравнениях. Показано, что если тангенс угла наклона не превышает произведения коэффициента трения на коэффициент, зависящий от упругих свойств материала и распределения масс, то существует движение с постоянным относительным проскальзыванием δ и постоянным ускорением центра масс, причем в области контактного взаимодействия существует участок сцепления материалов. Установлено, что это движение асимптотически устойчиво по переменной δ . Исследована зависимость ускорения оси цилиндра от механических параметров материала и коэффициента трения. Проведено сравнение результатов с вытекающими из классической постановки задачи о движении абсолютно жесткого диска по наклонной прямой.

Ключевые слова: качение с проскальзыванием, упругий цилиндр, сухое трение, устойчивость по части переменных, наклонное основание

DOI: 10.31857/S0032823521040160

1. Введение. Абсолютно твердое тело является одной из основных моделей теоретической механики, при этом считается, что при контакте выпуклых тел взаимодействие происходит в единственной точке. Кроме того, исходя из натуральных экспериментов, в задачах часто используется предположение об отсутствии в этой точке проскальзывания. Это условие сводится к дифференциальной связи, в общем случае неголономной [1]. Изучению неголономных систем, в частности, теории общих уравнений аналитической механики, устойчивости движений, применимости вариационных принципов посвящены многие работы В.В. Румянцева (см. [2–5]).

Во втором томе классического учебника П. Аппеля по теоретической механике [6], п. 370, рассмотрена следующая задача: “Однородный круглый тяжелый диск, находящийся в вертикальной плоскости, поставлен на неподвижную прямую Ox , наклоненную к горизонту под углом φ , и предоставлен самому себе без начальной скорости. Предполагается, что имеется трение и спрашивается, будет ли диск катиться или скользить”. Взаимодействие между диском и прямой описывается следующим обра-

зом: если происходит качение (то есть скорость точки диска, находящейся в контакте с прямой, равна нулю), то касательная реакция должна быть меньше, чем произведение коэффициента трения μ на нормальную реакцию P ; если это условие не выполняется, то “качение без скольжения невозможно; диск будет скользить, одновременно вращаясь”. В этом случае касательная реакция в точности равна произведению μP . Показано, что если $\operatorname{tg} \varphi \leq 3\mu$, то диск будет катиться без проскальзывания с постоянным ускорением центра диска

$$w_d = \frac{2}{3} g \sin \varphi, \quad (1.1)$$

где g – ускорение свободного падения. Если же $\operatorname{tg} \varphi > 3\mu$, то диск катится со скольжением, ускорение оси постоянно и равно $g(\sin \varphi - \mu \cos \varphi)$, а скорость скольжения линейно растет с течением времени. Таким образом, эта задача в классической постановке исследована полностью. (В кн. [6] угол наклона обозначен α , нормальная реакция N , а коэффициент трения f . Здесь обозначения изменены для удобства последующего изложения.)

Указанная схема описания реакции опоры (трение покоя Кулона при качении и трение скольжения μP при движении с проскальзыванием) является общепринятой при точечном контакте в рамках теоретической механики. Именно такая модель обычно используется при анализе экспериментов в учебном процессе (см., например, [7, 8]). Однако выпуклые тела при взаимодействии деформируются, и в области контактного взаимодействия действуют контактные напряжения, направленные по нормали и касательной к поверхности, которые могут существенно изменить динамику системы.

Изучение динамики качения со скольжением жесткого диска (цилиндра) в случае деформируемой опорной прямой (плоскости) проводится в работах [9, 10]: опорная прямая представляется в виде набора одномерных вязкоупругих элементов, описываемых моделями Максвелла или Кельвина–Фойгта, при деформации которых образуется область контактного взаимодействия. В работе [9] предполагается полное сцепление материалов и изучается влияние внешних сил (сопротивления воздуха, случайных возмущений) на устойчивость стационарного движения. В [10] исследуется качение диска с проскальзыванием: изучено движение в направлении, перпендикулярном основанию (в том числе прямой и косо́й удар диска и основания); показано, что при принятых предположениях о вязкоупругих свойствах основания, динамика в направлении, параллельном основанию, совпадает с классической постановкой.

Решения квазистатических задач механики контактных взаимодействий [12, 13] позволяют расширить спектр доступных моделей взаимодействия при изучении динамики твердых тел, установить границы применимости классических моделей и уточнить решения, полученные с их помощью. В предлагаемой статье изучение качения упругого цилиндра по наклонному основанию из того же материала проводится с использованием модели Картера [12]. Целью работы является исследование существования и устойчивости движения со сцеплением материалов в области контактного взаимодействия, а также сравнение полученного решения с классическим. Представленная работа продолжает исследование [14–18].

Структура работы следующая. Разд. 2–4 посвящены постановке задачи: составлены уравнения движения цилиндра; описана модель контактного взаимодействия упругих тел в условиях качения с проскальзыванием, предложенная Картером; введены безразмерные переменные задачи. В разд. 5 сформулирован основной результат работы о существовании и устойчивости стационарного решения динамических уравнений, которое соответствует движению оси цилиндра с постоянным ускорением, при этом в области контактного взаимодействия происходит частичное сцепление материалов. В разд. 6 проводится анализ полученного решения.

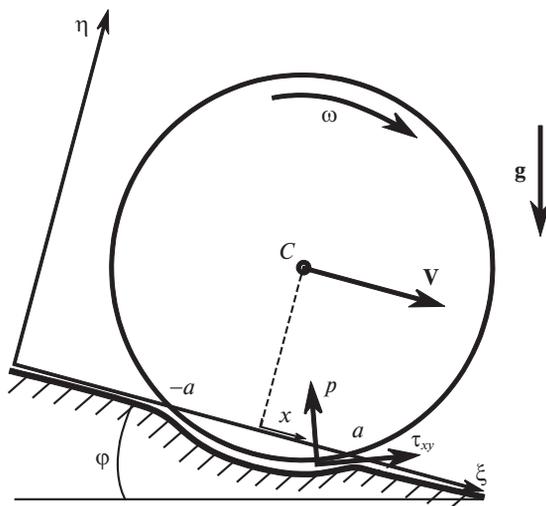


Рис. 1. Схема движения.

2. Динамические уравнения. Бесконечный упругий цилиндр с массой m на единицу длины и радиусом R движется плоскопараллельно по основанию из того же материала, недеформированная граница которого составляет угол φ с горизонтом. Введем инерциальную систему отсчета $O\xi\eta\zeta$, плоскость $O\xi\zeta$ является недеформированной границей основания, ось $O\eta$ направлена перпендикулярно ему, ось $O\xi$ перпендикулярна плоскости движения и сонаправлена с осью цилиндра. Распределение масс в цилиндре предполагается осесимметричным, так что центр масс каждого сечения цилиндра C лежит на его оси. Скорость оси цилиндра обозначим $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_\xi$, а угловую скорость обозначим $\boldsymbol{\omega} = -\omega\mathbf{e}_\zeta$. Положительное значение ω соответствует вращению по часовой стрелке, если смотреть с конца оси $O\xi$ (рис. 1).

Запишем динамические уравнения движения цилиндра:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + Q\mathbf{e}_\xi + P\mathbf{e}_\eta, \quad \frac{d\mathbf{K}_C}{dt} = \mathbf{M}_C \quad (2.1)$$

где \mathbf{a} — ускорение оси цилиндра, $\mathbf{K}_C = -J\boldsymbol{\omega}\mathbf{e}_\zeta$ — кинетический момент относительно центра масс, J — удельный момент инерции относительно оси цилиндра, \mathbf{g} — ускорение свободного падения, Q и P — проекции равнодействующей сил взаимодействия цилиндра и основания на оси $O\xi$ и $O\eta$ соответственно, $\mathbf{M}_C = -M_C\mathbf{e}_\zeta$ — момент этих сил относительно оси цилиндра.

В скалярной форме уравнения движения (2.1) имеют вид:

$$ma_\eta = P - mg \cos \varphi, \quad m\dot{V} = Q + mg \sin \varphi, \quad J\dot{\omega} = M_C \quad (2.2)$$

Будем считать, что проекция ускорения оси цилиндра на нормаль к основанию пренебрежимо мала (движение квазистатическое), откуда получим

$$P = mg \cos \varphi$$

Таким образом, прижимающая сила P обеспечивается силой тяжести и определяет угол наклона основания к горизонту φ .

Далее будем исследовать свойства некоторых решений задачи Коши для уравнений (2.2), при этом касательную силу Q и момент M_C будем определять из решения задачи теории упругости в квазистатической постановке, полученного Картером [12, 13].

Такой подход был применен при решении динамической задачи о движении цилиндра по горизонтальному основанию в [15]. Напомним далее постановку и основные результаты решения задачи Картера.

3. Определение сил и момента из решения задачи Картера. Модель Картера описывает взаимодействие упругого цилиндра с основанием из того же материала. Вследствие одинаковости механических характеристик контактирующих тел область контактного взаимодействия цилиндра и основания – это полоса $x \in [-a, a]$, где x отсчитывается от проекции оси цилиндра на опорное полупространство (рис. 1). Ширина этой полосы определяется прижимающей силой P , радиусом цилиндра R , а также модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν материалов цилиндра и основания:

$$a = \sqrt{\frac{8RP}{E'}}, \quad E' = \frac{\pi E}{1 - \nu^2}$$

Контактная область либо полностью состоит из области проскальзывания материалов цилиндра и основания (в этом случае касательные напряжения в каждой точке $\tau_{xy}(x)$ пропорциональны нормальным напряжениям $p(x)$, т.е. $\tau_{xy}(x) = \mu p(x)$, где μ – коэффициент трения), либо делится на участок проскальзывания и участок сцепления материалов (при сцеплении $|\tau_{xy}(x)| < \mu p(x)$). Участок сцепления материалов в области контактного взаимодействия возникает, если

$$\delta = \frac{\omega R - V}{V} \tag{3.1}$$

по абсолютной величине не превышает некоторой постоянной величины, определяемой механическими характеристиками материала, коэффициентом трения, а также радиусом цилиндра и величиной прижимающей силы:

$$|\delta| < \frac{\mu}{2\kappa}; \quad \kappa = \frac{R}{2a} = \frac{\sqrt{E'R}}{\sqrt{32P}} \tag{3.2}$$

Параметр $\kappa \gg 1$ – безразмерный, его механический смысл – отношение радиуса цилиндра к ширине области контактного взаимодействия.

Результирующая касательных напряжений τ_{xy} имеет вид [12]

$$Q = \begin{cases} \mu P \operatorname{sign} V \frac{2\kappa\delta}{\mu} \left(2 - \frac{2\kappa|\delta|}{\mu} \right), & |\delta| < \frac{\mu}{2\kappa} \\ \mu P \operatorname{sign}(\omega R - V), & |\delta| \geq \frac{\mu}{2\kappa} \end{cases} \tag{3.3}$$

Распределение нормальных напряжений $p(x)$ симметрично: $p(x) = p(-x)$, поэтому момент сил взаимодействия относительно оси цилиндра определяется только касательными напряжениями и равен

$$M_C = RQ$$

Таким образом, из (2.2) получим

$$m\dot{V} = Q + mg \sin \varphi, \quad J\dot{\omega} = -RQ \tag{3.4}$$

4. Анализ уравнений движения. Введем безразмерные переменные

$$\tilde{t} = t\sqrt{\frac{P}{mR}} = t\sqrt{\frac{g \cos \varphi}{R}}, \quad \tilde{V} = \frac{V}{\sqrt{gR \cos \varphi}}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega\sqrt{R}}{\sqrt{g \cos \varphi}}$$

Кроме того, обозначим

$$j = \frac{J}{mR^2} \tag{4.1}$$

безразмерный момент инерции на единицу длины. Тогда уравнения движения (3.4) принимают вид

$$\tilde{V}' = \tilde{Q} + \operatorname{tg} \varphi, \quad j\tilde{\omega}' = -\tilde{Q} \quad (4.2)$$

где штрихом обозначена производная по безразмерному времени \tilde{t} , а $\tilde{Q} = Q/P$ – безразмерная результирующая касательных напряжений (см. (3.3)), которая задается соотношениями

$$\tilde{Q}(\delta, \operatorname{sign} \tilde{V}) = \begin{cases} \mu \operatorname{sign} \tilde{V} \frac{2\kappa\delta}{\mu} \left(2 - \frac{2\kappa|\delta|}{\mu} \right), & |\delta| < \frac{\mu}{2\kappa} \\ \mu \operatorname{sign}(\tilde{\omega} - \tilde{V}), & |\delta| \geq \frac{\mu}{2\kappa} \end{cases} \quad (4.3)$$

График этой функции при положительных значениях \tilde{V} показан синей сплошной линией на рис. 2 при $\mu = 0.4$, $\kappa = 2.9$; область $|\delta| < \mu/(2\kappa)$ показана на врезке справа.

Заметим, что при $|\delta| > \mu/(2\kappa)$ уравнения движения полностью совпадают с уравнениями движения классической задачи о движении с проскальзыванием твердого диска. Действительно, в этом случае сила трения \tilde{Q} постоянна (в размерном виде равна μP) и направлена противоположно скорости проскальзывания $(V - \omega R)\mathbf{e}_\xi$. Поэтому в указанной выше области фазового пространства $(\tilde{V}, \tilde{\omega})$ движение цилиндра происходит так же, как и в классической задаче.

Интерес представляет область фазового пространства, задаваемая неравенством $|\delta| \leq \mu/(2\kappa)$, в которой величина силы трения в соответствии с формулой (3.3) по модулю уменьшается при убывании $|\delta|$. Поэтому далее рассмотрим именно эту область фазового пространства.

5. Движение с постоянным относительным проскальзыванием. Докажем следующее утверждение.

Теорема. При углах наклона

$$\operatorname{tg} \varphi \leq \frac{\mu}{j} \left(j + \frac{1}{1 - \mu/(2\kappa)} \right) \quad (5.1)$$

основания к горизонту динамические уравнения (4.2) имеют решение, при котором ось цилиндра движется вдоль оси $O\xi$ с постоянным линейным ускорением $w^* > 0$, при этом относительное проскальзывание также постоянно, то есть

$$\tilde{V}(\tau) = w^*\tau + \tilde{V}_0, \quad \tilde{\omega}(\tau) = \frac{\operatorname{tg} \varphi - w^*}{j} \tau + \tilde{\omega}_0, \quad \delta \equiv \delta^* \quad (5.2)$$

Это решение асимптотически устойчиво по отношению к переменной δ .

Доказательство. Пользуясь определением относительного проскальзывания (3.1), составим дифференциальное уравнение, описывающее его изменение на решениях системы (4.2):

$$\delta' = -\frac{(1 + j^{-1})\tilde{Q} + \operatorname{tg} \varphi}{\tilde{V}} - \frac{\tilde{Q} + \operatorname{tg} \varphi}{\tilde{V}} \delta$$

Найдем стационарное решение этого уравнения вида $\delta(\tau) \equiv \delta^*$. После подстановки получим уравнение

$$\tilde{Q}(\delta^*) = \Phi(\delta^*); \quad \Phi(\delta) = -\operatorname{tg} \varphi \frac{j(\delta + 1)}{j(\delta + 1) + 1} \quad (5.3)$$

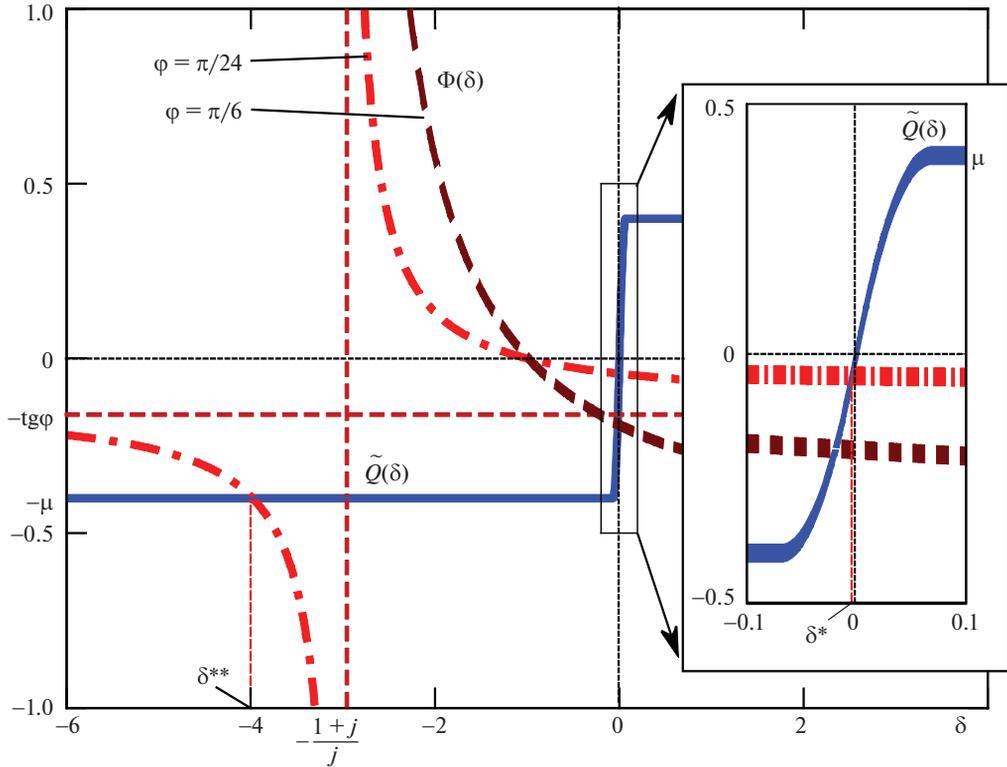


Рис. 2. Зависимость силы трения \tilde{Q} от относительного проскальзывания δ (синяя сплошная линия) и функция $\Phi(\delta)$ (см. (5.3)) при разных значениях угла наклона φ (красная штрих-пунктирная и коричневая пунктирная кривые).

Функция $\Phi(\delta)$ зависит от угла наклона основания φ и параметра j (см. (4.1)). На рис. 2 показаны графики этой функции при $\varphi = \pi/24; \pi/6, j = 0.5$, пунктирными линиями даны асимптоты.

Будем искать решения уравнения (5.3) на отрезке $|\delta| \leq \mu / (2\kappa)$, то есть когда происходит частичное сцепление материалов. Такое решение существует при

$$\Phi\left(-\frac{\mu}{2\kappa}\right) \geq -\mu,$$

причем оно единственно и отрицательно: $\delta^* \in [-\mu / (2\kappa), 0)$. Полученное выше неравенство приводится к виду (5.1), указанному в формулировке теоремы.

Если начальная скорость оси цилиндра $\tilde{V}_0 > 0$ и угловая скорость $\tilde{\omega}_0$ соответствуют найденному решению

$$\delta^* = \frac{\tilde{\omega}_0 - \tilde{V}_0}{\tilde{V}_0},$$

то уравнения (4.2) имеют решение (5.2), причем ускорение w^* оси цилиндра постоянно и согласно уравнениям (4.2), (5.3) имеет вид:

$$w^* = \tilde{Q}(\delta^*) + \text{tg } \varphi = \frac{\text{tg } \varphi}{j(\delta^* + 1) + 1} > 0 \tag{5.4}$$

Угловое ускорение на этом движении также постоянно и может быть вычислено из второго уравнения (4.2).

Устойчивость решения по переменной δ следует из теоремы об устойчивости по части переменных (теорема 5.1, [19]), если в качестве функции Ляпунова взять функцию $(\delta - \delta^*)^2/2$. Доказательство асимптотической устойчивости и оценка асимптотики приведены в Приложении.

Замечание. При $\operatorname{tg} \varphi < \mu$ существует еще одно решение уравнения (5.3), которое соответствует движению цилиндра с полным проскальзыванием $\delta^{**} < -(1+j)/j$ (см. рис. 2). Фазовые переменные зависят от времени следующим образом:

$$\tilde{V}(\tau) = \tilde{V}_0 + (-\mu + \operatorname{tg} \varphi) \tau, \quad \tilde{\omega}(\tau) = \frac{\mu}{j} \tau + \tilde{\omega}_0; \quad \delta^{**} = \frac{\tilde{\omega}_0 - \tilde{V}_0}{\tilde{V}_0}$$

Движение оканчивается за конечное время $\tau^{**} = \tilde{V}_0/(\mu - \operatorname{tg} \varphi)$: в этот момент оказываются равны нулю как линейная, так и угловая скорость цилиндра. Так как при $\varphi \neq 0$ условия равновесия цилиндра на наклонном основании не выполняются, то при $\tau \geq \tau^{**}$ начинается движение с малым относительным проскальзыванием, причем относительное проскальзывание δ стремится к значению δ^* вследствие асимптотической устойчивости решения (5.2) по переменной δ . При $\varphi = 0$ после остановки цилиндра в момент τ^{**} движение прекращается [15].

Графики решений уравнения (5.3) $\delta^*(\mu)$ при $\varphi = \pi/24$ и $\kappa = 2.9$, $\kappa = 6$ (сплошные линии) и границы $\delta = -\mu/(2\kappa)$ существования области сцепления материалов (пунктирные линии) показаны на рис. 3 (численные значения остальных параметров указаны выше). Для фиксированного значения φ решение (5.2) существует для всех $\mu > \mu_0$, где μ_0 можно найти из неравенства (5.1). Анализ зависимости (4.3) показывает, что функция $\delta^*(\mu)$ с ростом μ асимптотически приближается к значению $-j \operatorname{tg} \varphi/[4(1+j)\kappa]$.

6. Свойства полученного решения. Проведенное выше исследование показывает, что в случае выполнения (5.1) при движении упругого цилиндра по основанию из того же материала существует асимптотически устойчивое по величине относительного проскальзывания решение, на котором ускорение оси цилиндра постоянно и положительно, а в зоне контактного взаимодействия существует участок сцепления материалов. При этом ускорение оси на величину порядка малой величины μ/κ больше, чем ускорение w_d (см. (1.1)) в классической постановке. Действительно, возвращаясь к размерным переменным и считая цилиндр однородным $j = 1/2$, получим:

$$w_{el} = g \cos \varphi w^* = \frac{2g \sin \varphi}{\delta^* + 3} > w_d, \quad \text{т.к.} \quad -\frac{\mu}{2\kappa} < \delta^* < 0$$

Условие существования такого движения – выполнение неравенства (5.1) – чуть шире классического условия $\operatorname{tg} \varphi < 3\mu$ (также на малую величину порядка μ/κ). Кроме того, решение (5.2) является асимптотически устойчивым по переменной δ . Важным отличием полученного здесь решения с постоянным относительным проскальзыванием от классического решения является тот факт, что абсолютное значение проскальзывания, то есть величина $V - \omega R$ в рассматриваемой задаче является линейной функцией времени: из определения (3.1) следует, что

$$V - \omega R = V \delta^* = (w_{el} t + V_0) \delta^*,$$

а в классической задаче $V - \omega R \equiv 0$.

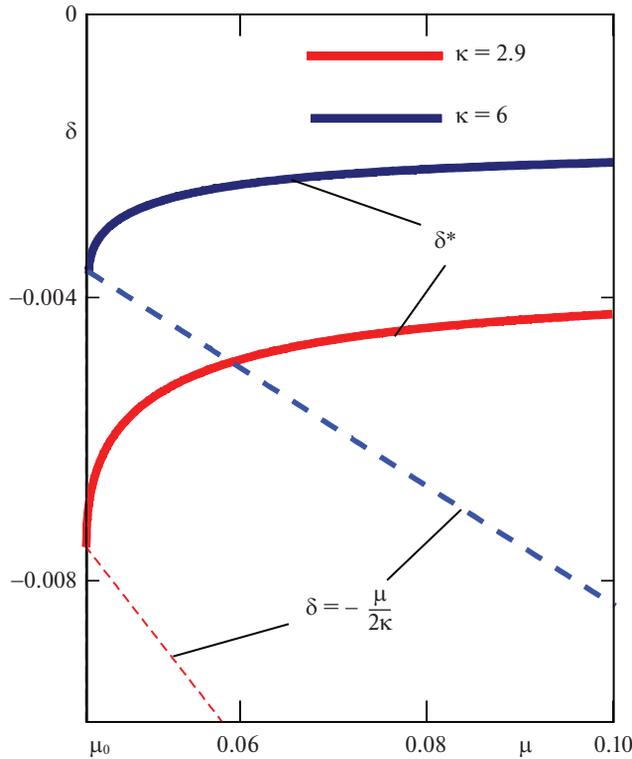


Рис. 3. Зависимость стационарного значения относительного проскальзывания от коэффициента трения μ и параметра κ (3.2)

На рис. 4 построены изолинии относительного отклонения ускорения оси однородного ($j = 1/2$) упругого цилиндра w_{el} от ускорения, рассчитанного в классической задаче w_d при пренебрежении упругостью контактирующих тел (в процентах)

$$e_w = \frac{w_{el} - w_d}{w_d} \times 100\% \tag{6.1}$$

при фиксированном значении угла наклона $\varphi = \pi/4$. Результаты расчетов показывают, что отклонение e_w довольно мало (порядка 1%), оно увеличивается при уменьшении коэффициента трения μ и параметра κ . Используемый на рис. 4 диапазон изменения параметра $\kappa \in [2.9, 7]$ соответствует диапазону модуля Юнга $E \in [1.9 \times 10^5 \text{ Па}, 1.1 \times 10^6 \text{ Па}]$ при следующих размерных параметрах (плотность соответствует плотности резины)

$$R = 10 \text{ см}, \quad m = 35.5 \text{ кг/м}, \quad \nu = 0.3$$

Поскольку параметр κ (см. (3.2)) пропорционален \sqrt{ER} , то найденные отличия в ускорении оси цилиндра будут более существенны для цилиндров малых радиусов и малых модулей Юнга E материала. Расчеты также показывают, что при увеличении угла наклона основания к горизонту φ при фиксированных κ и μ величина e_w увеличивается.

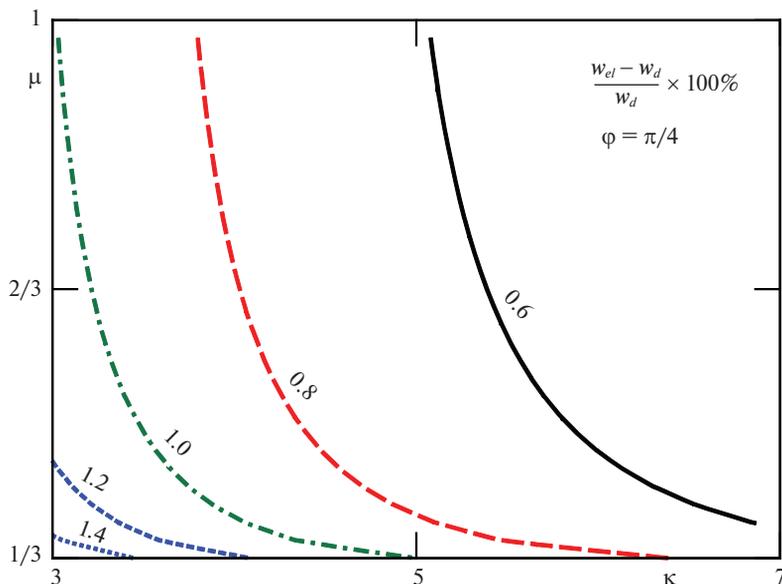


Рис. 4. Изолинии e_w (6.1) при варьировании коэффициента трения μ и параметра κ (3.2), угол наклона $\varphi = \pi/4$.

Заключение. В работе исследована задача о движении под действием силы тяжести упругого цилиндра по наклонному основанию из того же материала. Найдено асимптотически устойчивое (по части переменных) решение задачи Коши для динамических уравнений: оно соответствует качению цилиндра с постоянным ускорением его оси, при этом в части области контактного взаимодействия происходит сцепление материалов. Проведено сравнение параметров этого движения с решением классической задачи о качении без проскальзывания абсолютно твердого диска по недеформированной прямой. Показано, что ускорение оси упругого цилиндра увеличивается при уменьшении коэффициента трения, радиуса цилиндра и параметра, зависящего от механических характеристик контактирующих материалов (их модуля Юнга и коэффициента Пуассона), а также при увеличении угла наклона основания к горизонту. Полученные результаты позволяют оценить погрешности в определении ускорения оси цилиндра и углового ускорения, возникающие при использовании в этой задаче модели абсолютно твердого тела. Установлено, что указанные погрешности в достаточно широком диапазоне изменения механических характеристик материалов и коэффициента трения оказываются невелики; однако абсолютное значение проскальзывания при учете упругости материала растет линейно с течением времени, что существенно отличается от свойства решения в классической постановке, в которой оно принимается тождественно равным нулю. Этот факт представляется важным с теоретической точки зрения.

Часть работы, посвященная анализу решения контактной задачи, выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4); исследование стационарного решения и его устойчивости по части переменных – в рамках проекта Российского фонда фундаментальных исследований 19-01-00140-а.

Приложение

Устойчивость равноускоренного движения. Будем исследовать устойчивость решения (5.2) по переменной δ [19]. Введем переменные:

$$x = \delta - \delta^*, \quad y = \tilde{V}$$

Тогда уравнения возмущенного движения имеют вид:

$$x' = \frac{G(x, \text{sign}(y))}{y}, \quad y' = F(x, \text{sign}(y)),$$

где $F(x, \text{sign}(y)) = \tilde{Q}(x + \delta^*, \text{sign}(y)) + \text{tg } \varphi$,

$$G(x, \text{sign}(y)) = -(1 + j^{-1})\tilde{Q}(x + \delta^*, \text{sign}(y)) - \text{tg } \varphi - \\ - (\tilde{Q}(x + \delta^*, \text{sign}(y)) + \text{tg } \varphi)(x + \delta^*)$$

Так как для близких к невозмущенному движению $\tilde{V}(0) > 0$, $y' > 0$, то имеем $y(\tau) > 0$ для всех $\tau > 0$. Следовательно,

$$y' = F(x, 1) > 0, \quad x' = \frac{G(x, 1)}{y}, \quad G(0, 1) = 0, \quad F(0, 1) = w(\delta^*) \quad (\text{П.1})$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\bar{x}' = \frac{G(\bar{x}, 1)}{F(0, 1)\tau + y_0} \quad (\text{П.2})$$

Это уравнение имеет решение $\bar{x} = 0$. Запишем в окрестности этого решения

$$G(\bar{x}, 1) = k_1\bar{x} + O(\bar{x}^2), \quad k_1 = \frac{\partial G}{\partial \bar{x}}(0, 1)$$

Докажем, что коэффициент $k_1 < 0$. Действительно,

$$k_1 = \frac{\partial G}{\partial x}(0, 1) = -(1 + j^{-1} + \delta^*)\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \delta}(\delta^*, 1) - w(\delta^*)$$

Заметим, что так как $-\mu/(2\kappa) < \delta^* < 0$, то из (4.3) получаем

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \delta}(\delta^*, 1) = 4\kappa \left(1 + \frac{2\kappa\delta^*}{\mu}\right) > 0$$

Кроме того, $w(\delta^*) > 0$, следовательно, $k_1 < 0$.

Отбрасыванием членов порядка $O(\bar{x}^2)$ из (8.2) получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\bar{x}' = \frac{k_1\bar{x}}{k_2\tau + y_0}, \quad k_1 < 0, \quad k_2 = w(\delta^*) > 0$$

Тогда получим:

$$\ln(\bar{x}) - \ln(\bar{x}_0) = \frac{k_1}{k_2}(\ln(\tau + y_0/k_2) - \ln y_0/k_2),$$

откуда

$$\bar{x} = \bar{x}_0 \left(\frac{k_2\tau + y_0}{y_0} \right)^{k_1/k_2}$$

Показатель степени отрицательный, следовательно, функция \bar{x} , определенная вспомогательным уравнением (П.2), убывает как степенная функция времени. Поскольку по вспомогательному уравнению можно построить мажорирующие уравне-

ния для исходной системы (П.1), то решение (5.2) исходной системы по переменной δ асимптотически устойчиво.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. 520 с.
2. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения неголономных систем // ПММ. 1967. Т. 31. № 2. С. 260–271.
3. *Румянцев В.В.* О принципе Гамильтона для неголономных систем // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 387–399.
4. *Румянцев В.В.* О принципах Лагранжа и Якоби для неголономных систем // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 4. С. 583–590.
5. *Румянцев В.В.* Об общих уравнениях динамики // В сб. Нелин. мех. М.: Физматлит, 2001. С. 4–38.
6. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 2. Динамика системы. Аналитическая механика. М.: Физ.-мат. лит., 1960. 487 с.
7. *De Ambrosis A., Malgieri M., Mascheretti P., Onorato P.* Investigating the role of sliding friction in rolling motion: a teaching sequence based on experiments and simulations // *Eur. J. Phys.* 2015. V. 36. № 3. PaperNumber 035020.
8. *Suárez Á., Vaccino D., Martí A.C.* Video-based analysis of the transition from slipping to rolling // *The Physics Teacher.* 2020. V. 58. № 3. P. 170–172.
9. *Pöchel T., Brilliantov N., Zaikin A.* Bistability and noise-enhanced velocity of rolling motion // *Europhys. Lett.* 2005. V. 69. № 3. P. 371–377.
10. *Кулешов А.С., Трещев Д.В., Иванова Т.Б., Наймушина О.С.* Твердый цилиндр на вязкоупругой плоскости // Нелин. дин. 2011. Т. 7. № 3. С. 601–625.
11. *Ai J., Chen J.-F., Rotter J.M., Ooi J.Y.* Assessment of rolling resistance models in discrete element simulations // *Powder Technol.* 2011. V. 206. № 3. P. 269–282.
12. *Carter F.W.* On the action of a locomotive driving wheel // *Proc. Roy. Soc. London A.* 1926. V. 112. P. 151–157.
13. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
14. *Горячева И.Г., Зобова А.А.* Динамическая задача о качении с проскальзыванием упругого цилиндра по упругому основанию // Докл. РАН. 2018. Т. 481. № 1. С. 24–26.
15. *Горячева И.Г., Зобова А.А.* Динамика движения упругого цилиндра по упругому основанию // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 1. С. 39–46.
16. *Горячева И.Г., Зобова А.А.* Торможение жесткого цилиндра, скользящего по вязкоупругому основанию // ПММ. 2019. Т. 83. № 2. С. 215–227.
17. *Zobova A.A., Goryacheva I.G.* Dynamics of a viscoelastic cylinder on a viscoelastic half-space // *Acta Mech.* 2020. V. 231. № 6. P. 2217–2230.
18. *Zobova A.A., Goryacheva I.G.* Effect of contacting bodies' mechanical properties on the dynamics of a rolling cylinder // *Acta Mech.* 2021. <https://doi.org/10.1007/s00707-020-02800-w>
19. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 256 с.

Stability of the Accelerated Motion of Elastic Cylinder along Inclined Foundation

A. A. Zobova^{a,#} and I. G. Goryacheva^{b,##}

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

^b *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: alexandra.zobova@math.msu.ru*

^{##} *e-mail: goryache@ipmnet.ru*

We consider an infinite elastic cylinder that rolls with slipping along a half-space made of the same material in the gravity field (the cylinder's axis is horizontal). The foundation's undeformed boundary makes a non-zero angle with the horizon. The foundation reaction in dynamic equations satisfies the solution of the Carter contact problem in the quasi-static for-

mulation. If the inclination angle's tangent does not exceed the product of the friction coefficient by the coefficient depending on the elastic properties of the material and the distribution of masses, then there exists the motion with constant relative slip δ and constant acceleration of the center of mass; in the contact area, there is a region of the materials' sticking. This motion is asymptotically stable with respect to the variable δ . The dependence of the cylinder axis's acceleration on the mechanical parameters of the material and the coefficient of friction is investigated. The results are discussed in the scope of the classical problem on a rigid disk motion along an inclined straight line.

Keywords: rolling with slipping, elastic cylinder, dry friction, partial stability, inclined foundation

REFERENCES

1. *Nejmark J.I., Fufaev N.A.* Dynamics of Nonholonomic Systems. Vol. 33 Transl. Math. Monogr. Amer. Math. Soc., 2004. 518 p.
2. *Rumiantsev V.V.* On stability of motion of nonholonomic systems // JAMM, 1967, vol. 31, no. 2, pp. 282–293.
3. *Rumiantsev V.V.* On Hamilton's principle for nonholonomic systems // JAMM, 1978, vol. 42, no. 3, pp. 407–419.
4. *Rumiantsev V.V.* On the Lagrange and Jacobi principles for nonholonomic systems // JAMM, 1979, vol. 43, no 4, pp. 625–632.
5. *Rumiantsev V.V.* On general equations of motions (Ob obshchih uravneniyah dinamiki) // in: Non-linear Dynamics. Moscow: Fizmatlit, 2001. pp. 4–38. (in Russian).
6. *Appell P.* Traité de Mécanique rationnelle, Tome Deuxième: Dynamique des Systèmes Mécanique Analytique. Paris: Gauthier-Villars, 1953. (in French)
7. *De Ambrosis A., Malgieri M., Mascheretti P., Onorato P.* Investigating the role of sliding friction in rolling motion: a teaching sequence based on experiments and simulations // Europ. J. Phys., 2015, vol. 36, no. 3, Paper Number 035020.
8. *Suárez Á., Baccino D., Martí A.C.* Video-based analysis of the transition from slipping to rolling // The Physics Teacher, 2020, vol. 58, no. 3, pp. 170–172.
9. *Pöchel T., Brilliantov N., Zaikin A.* Bistability and noise-enhanced velocity of rolling motion // Europhys. Lett., 2005, vol. 69, no. 3, pp. 371–377.
10. *Kuleshov A.S., Treschev D.V., Ivanova T.B., Naimushina O.S.* A rigid cylinder on a viscoelastic plane // Nelin. Dinam., 2011, vol. 7, no. 3, pp. 601–625. (in Russian)
11. *Ai J., Chen J.-F., Rotter J.M., Ooi J.Y.* Assessment of rolling resistance models in discrete element simulations // Powder Technol., 2011, vol. 206, no. 3, pp. 269–282.
12. *Carter F.W.* On the action of a locomotive driving wheel // Proc. Roy. Soc. London A, 1926, vol. 112, pp. 151–157.
13. *Goryacheva I.G.* Contact Mechanics in Tribology. Dordrecht: Kluwer, 1998. 344 p.
14. *Goryacheva I.G., Zobova A.A.* Dynamics of rolling with a microslip for an elastic cylinder on an elastic half-space // Dokl. Phys., 2018, vol. 63, no. 7, pp. 263–265.
15. *Goryacheva I.G., Zobova A.A.* Dynamics of the motion of an elastic cylinder along an elastic foundation // Mech. Solids, 2019, vol. 54, no. 2, pp. 271–277.
16. *Goryacheva I.G., Zobova A.A.* Deceleration of a rigid cylinder sliding along a viscoelastic foundation // Mech. Solids, 2019, vol. 54, no. 2, pp. 278–288.
17. *Zobova A.A., Goryacheva I.G.* Dynamics of a viscoelastic cylinder on a viscoelastic half-space // Acta Mech., 2020, vol. 231, no. 6, pp. 2217–2230.
18. *Zobova A.A., Goryacheva I.G.* Effect of contacting bodies' mechanical properties on the dynamics of a rolling cylinder // Acta Mech., 2021, <https://doi.org/10.1007/s00707-020-02800-w>
19. *Rumiantsev V.V., Oziraner A.S.* Stability and Stabilization of Motion with Respect to Part of the Variables. (Ustoichivost i stabilizatsiya dvizheniya po otnosheniju k chasti peremennyh) Moscow: Nauka. 1987. 256 p. (in Russian)

УДК 531.36

ДВИЖЕНИЕ МАССИВНОЙ ТОЧКИ ПО ПОВЕРХНОСТИ ОДНОРОДНОГО ШАРА СО СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ© 2021 г. А. А. Буров^{1,2,*}, В. И. Никонов^{1,2,**}, Е. С. Шалимова^{3,***}¹ ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия² НИУ ВШЭ, Москва, Россия³ МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

*e-mail: jtm@narod.ru

**e-mail: nikon_v@list.ru

***e-mail: ekateryna-shalimova@yandex.ru

Поступила в редакцию 31.12.2020 г.

После доработки 10.03.2021 г.

Принята к публикации 15.03.2021 г.

Рассматривается задача о движении частицы по поверхности массивного тела. Предполагается, что тело представляет собой однородный гравитирующий шар со сферической полостью, равномерно вращающийся вокруг своей оси симметрии. При этом считается, что на частицу, находящуюся на внешней или внутренней поверхности тела, помимо силы притяжения действует сила сухого трения. Исследована зависимость от параметров условий существования, бифуркаций и устойчивости относительных равновесий частицы как на внешней, так и на внутренней поверхности тела. Результаты, полученные как аналитически, так и численно, представлены в виде бифуркационных диаграмм. Исследование мотивировано возможным существованием полостей или массовых концентраций (масконов) в больших и малых небесных телах.

Ключевые слова: динамика на поверхностях небесных тел, небесные тела с полостями, относительные равновесия, сухое трение, движение частицы в нецентральной гравитационном поле, обобщения гравитирующей гантели

DOI: 10.31857/S0032823521040032

1. Введение. Описание свойств движения на поверхности небесных тел является важной и сложной задачей. Как было замечено ранее (см., например, [1–5]), среди многочисленных факторов, важных для описания такой динамики, следует выделить не только неоднородность поля притяжения, имеющую место из-за нерегулярности их формы и распределения масс, но и сопоставимость по величине сил притяжения и центробежных сил, обусловленных достаточно быстрым вращением изучаемых тел. Так, в частности, на поверхности тела могут существовать области, в которых незакрепленная частица не может оставаться в покое несмотря на наличие трения (аналогии крутых склонов гор). Такие области и их зависимость от параметров могут быть изучены с использованием общих методов исследования существования и бифуркаций неизолированных равновесий в системах с сухим трением, развитых в работах [6–11] и опробованных ранее на ряде механических систем [12–14].

В настоящей работе, как и в [15], рассматривается тело, простейшее по форме и распределению масс – однородный шар. Предполагается, что в шаре имеется сферическая полость, центр которой, вообще говоря, не совпадает с центром шара. Наличи-

ем такой полости обусловлена нецентральность порождаемого телом поля притяжения. Такое тело может как равномерно вращаться вокруг одной из своих центральных осей инерции, так и совершать прецессионное движение. Изучаемое тело представляет собой особенный случай гантелеобразного тела, являющегося удобной моделью для исследования движения в поле притяжения тел с нерегулярным распределением масс. Различные свойства таких движений в отсутствие контакта с поверхностью тела, в частности, точки либрации, были исследованы в [16–18].

2. Постановка задачи. Рассмотрим твердое тело \mathcal{A} , получающееся изъятием содержимого сферической полости \mathcal{C} с центром C радиуса r_C из однородного шара \mathcal{B} с центром B радиуса r_B . Предположим, что тело \mathcal{A} совершает вращение вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью ω , а по поверхности $\partial\mathcal{A}$ тела \mathcal{A} движется частичка P . Ее движение осуществляется под действием силы притяжения со стороны тела \mathcal{A} , а также реакции со стороны поверхности тела, имеющей нормальную составляющую, препятствующую проникновению под поверхность тела, и касательную составляющую, представленную силой сухого трения. В дальнейшем считается, что частичка пренебрежимо мала по сравнению с телом, и она не оказывает влияния на его движение.

Введем правую систему отсчета $Bx_1x_2x_3$ с началом в точке B , ось Bx_3 которой совпадает с осью вращения. Поскольку нас интересуют прежде всего относительные равновесия точки P на поверхности вращающегося тела, а тело динамически и геометрически симметрично, то достаточно изучить положения относительного равновесия в любом из осевых сечений тела, например, в сечении плоскостью Bx_3x_1 .

Для описания положения частички в этой плоскости введем угол θ (см. рис. 1). Тогда, если $|\mathbf{CB}| = d$, то $|\mathbf{CP}| = (r_B^2 - 2r_Bd \cos \theta + d^2)^{1/2}$. Единичная внешняя нормаль и расположенная в рассматриваемой плоскости касательная к поверхности задаются как

$$\mathbf{n} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)^T, \quad \boldsymbol{\tau} = (-\cos \theta, 0, \sin \theta)^T$$

соответственно. Кроме того,

$$\mathbf{BP} = (r_B \sin \theta, 0, r_B \cos \theta)^T, \quad \mathbf{CP} = (r_B \sin \theta, 0, r_B \cos \theta - d)^T$$

Точки внешней поверхности тела, наименее и наиболее удаленные от полости, для удобства описания назовем полюсами и обозначим N и S . Им отвечают углы $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ соответственно. Также для удобства будем называть северным и южным полушариями части тела, прилегающие к точкам N и S соответственно. Будем считать, что центр полости располагается в северном полушарии. Тогда в случае касания полости и внешней поверхности тела такое касание происходит в точке N .

Точка P находится в относительном равновесии под действием нескольких сил. Среди них, во-первых, сила притяжения со стороны тела \mathcal{A} напряженностью

$$\mathbf{g}_A = \mathbf{g}_B + \mathbf{g}_C$$

$$\mathbf{g}_B = -g_B (\sin \theta, 0, \cos \theta)^T, \quad \mathbf{g}_C = g_C \frac{r_C^2}{|\mathbf{PC}|^3} (r_B \sin \theta, 0, r_B \cos \theta - d)^T$$

Здесь и далее g_X – величина напряженности поля притяжения на поверхности шара $X \in \{B, C\}$:

$$g_B = \frac{4\pi}{3} G \rho r_B, \quad g_C = \frac{4\pi}{3} G \rho r_C \tag{2.1}$$

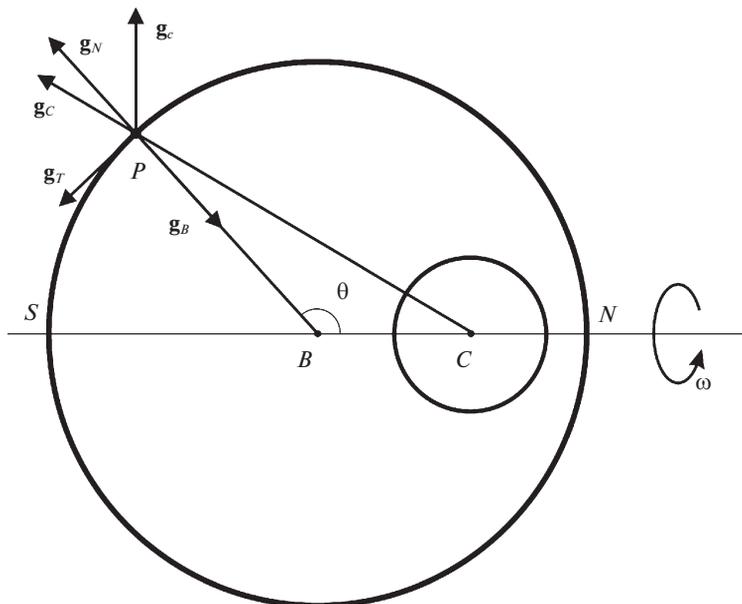


Рис. 1.

Во-вторых, среди них – центробежная сила напряженностью

$$\mathbf{g}_c = \omega^2 (r_B \sin \theta, 0, 0)^T$$

В-третьих, это реакция связи, нормальная и касательная составляющие которой, отнесенные к массе точки, имеют вид

$$\mathbf{g}_N = g_N (\sin \theta, 0, \cos \theta)^T, \quad \mathbf{g}_T = g_T (-\cos \theta, 0, \sin \theta)^T$$

Уравнения относительного равновесия в проекциях на нормаль и на касательную в точке P , соответственно, имеют вид

$$0 = g_N - g_B + g_C \frac{r_C^2}{|\mathbf{PC}|^3} (r_B - d \cos \theta) + \omega^2 r_B \sin^2 \theta$$

$$0 = g_T - g_C \frac{r_C^2}{|\mathbf{PC}|^3} d \sin \theta - \omega^2 r_B \sin \theta \cos \theta$$

Далее будем изучать условие существования относительных равновесий, в данном случае имеющее вид

$$|g_T| \leq \mu |g_N|$$

после подстановки выражений для g_N и g_T принимающее вид

$$\left| g_C \frac{r_C^2}{|\mathbf{PC}|^3} d \sin \theta + \omega^2 r_B \sin \theta \cos \theta \right| \leq \mu \left| g_B - g_C \frac{r_C^2}{|\mathbf{PC}|^3} (r_B - d \cos \theta) - \omega^2 r_B \sin^2 \theta \right| \quad (2.2)$$

После подстановки в (2.2) соотношений (2.1), введения обозначения

$$\Omega^2 = \omega^2 \left(\frac{4\pi}{3} G\rho \right)^{-1}$$

и преобразований это неравенство может быть представлено в виде

$$|f_T| \leq \mu |f_N| \tag{2.3}$$

$$f_T = \sin \theta \left(dr_C^3 + \Omega^2 r_B |PC|^3 \cos \theta \right)$$

$$f_N = r_B |PC|^3 \left(1 - \Omega^2 \sin^2 \theta \right) - r_C^3 (r_B - d \cos \theta)$$

Знак функции f_N определяет направление нормальной реакции: если $f_N > 0$, то нормальная реакция направлена вовне тела \mathcal{A} . Если это условие не выполнено, то возможные решения неравенства (2.3) согласно постановке задачи не имеют физического смысла. Однако в работе неравенство (2.3) будет рассматриваться в целом, а решения, на которых не выполнено указанное условие, будут выделяться и отбрасываться по мере появления.

3. Равновесия на внешней поверхности. Прежде всего исследуем зависимость областей, заполненных равновесиями, от коэффициента трения и от размеров и положения полости.

3.1. Зависимость равновесий от коэффициента трения. Неотрицательная функция $f = f(\theta) = f_T/f_N$ непрерывна на своем периоде и достигает на нем своего максимального значения μ_* . Тогда, если $\mu \geq \mu_*$, то поверхность целиком заполнена равновесиями. Если $\mu < \mu_*$, то на поверхности имеются области, где равновесий нет. Эти области образуют кольцо, разделяющее приполярные области, заполненные равновесиями. Заметим, что приполярная область, прилегающая к северному полюсу N при любом значении d уже приполярной области, прилегающей к южному полюсу S . При этом, если

$$\mu > \mu_{**} = \frac{dr_C^3}{r_B \left((r_B^2 + d^2)^{3/2} - r_C^3 \right)},$$

то примыкающая к южному полюсу область содержит все южное полушарие и даже простирается в северное полушарие.

Кроме того, функция f также зависит от геометрических параметров r_B, r_C, d , а также от Ω . Положим в дальнейшем $r_B = 1$ и изобразим на рис. 2 график функции $f(\theta)$ при $r_C = 0.25$ и различных значениях параметра d . В рассматриваемом случае полость относительно невелика по сравнению с размерами тела, и критические значения μ_* коэффициента трения, при котором образуются области, не содержащие равновесий, весьма малы и отвечают, например, скольжению металла по льду ($\mu \approx 0.02$, см. например, [19]). В то же время, как показывают вычисления, для полостей больших размеров критическое значение коэффициента трения увеличивается и отвечает, например, скольжению резины по льду $\mu \approx 0.3$ (см., например, [20]) или по дороге $\mu \approx 0.4-0.6$ (см., например, [19]).

3.2. Зависимость равновесий от размера полости. При исследовании множеств положений равновесия при различных значениях коэффициента трения ограничимся рассмотрением случая, когда полость касается внешней поверхности тела. В этом случае $r_C + d = 1$. Исследование множеств точек $f(\theta, r_C) = \mu$ при различных значениях параметра μ показывает (см. рис. 3), что для каждого значения μ имеется минимальное значение r_{C*} такое, что при $r_C \leq r_{C*}$ равновесия занимают всю внешнюю поверхность тела. При $r_C > r_{C*}$ область, заполненная равновесиями, распадается на две приполярных области. Заметим, что критическое значение r_{C*} возрастает с ростом коэффициента трения. Также заметим, что приполярная область, прилегающая к северному по-

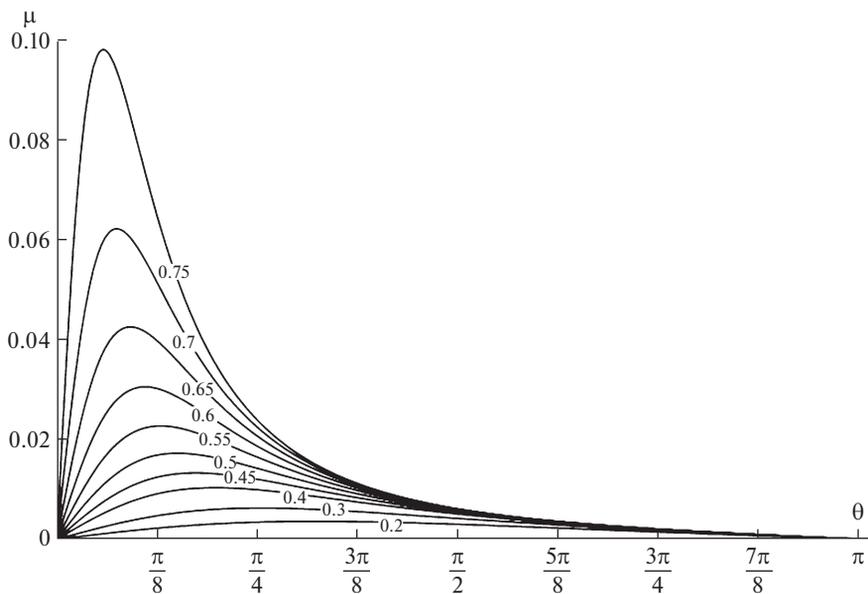


Рис. 2.

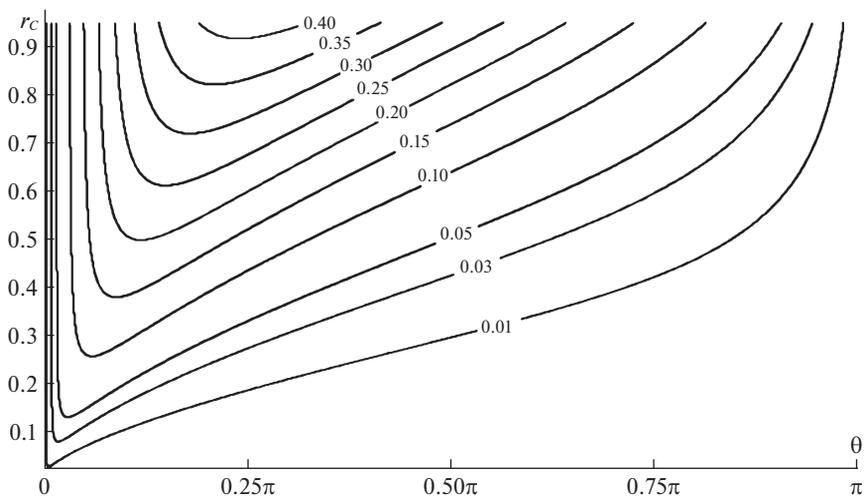


Рис. 3.

люсу N при исследованных значениях μ , уже приполярной области, прилегающей к южному полюсу S .

Замечание. Из соотношения (2.3), в котором взят знак равенства, нетрудно выразить зависимость r_c от остальных параметров задачи. Однако определение с помощью этой зависимости критического значения r_{c*} оказывается задачей, не поддающейся аналитическому решению даже в случае, когда $\mu = 0$. Этим обусловлено применение

численного счета для изучения такой, на первый взгляд — несложной, зависимости, в частности, при построении рис. 3.

4. Относительные равновесия на внешней поверхности: случай касания полости и внешней поверхности. В данном разделе изучается зависимость области, заполненной относительными равновесиями (ОЗОР), на внешней поверхности равномерно вращающегося тела от величины угловой скорости Ω . В примерах, для которых построены бифуркационные диаграммы, предполагается, что радиус внешней поверхности $r_B = 1$, а коэффициент трения $\mu = 0.05$.

Прежде всего, исследуем соотношение (2.3), рассматривая его как неравенство относительно Ω и переписав в виде (ср. [21])

$$\sigma_T f_T \leq \mu \sigma_N f_N, \quad \sigma_i = \text{sign}(f_i), \quad i \in \{T, N\} \quad (4.1)$$

Имеем

$$\sigma_T \sin \theta \cdot (dr_C^3 + \Omega^2 r_B |\mathbf{PC}|^3 \cos \theta) \leq \mu \sigma_N (r_B |\mathbf{PC}|^3 (1 - \Omega^2 \sin^2 \theta) - r_C^3 (r_B - d \cos \theta))$$

и неравенство (4.1) представимо в виде

$$\Omega^2 H_* \leq H^*$$

$$H_* = |\mathbf{PC}|^3 r_B \sin \theta (\sigma_T \cdot \cos \theta + \mu \sigma_N \sin \theta)$$

$$H^* = (\mu \sigma_N \cos \theta - \sigma_T \sin \theta) dr_C^3 + \mu \sigma_N r_B (|\mathbf{PC}|^3 - r_C^3)$$

Иными словами,

$$\Omega^2 \leq \frac{H^*}{H_*}$$

при $H_* > 0$ и

$$\Omega^2 \geq \frac{H^*}{H_*}$$

при $H_* < 0$.

Эти неравенства определяют на полуполосе $\{\Omega \geq 0\} \times \{0 \leq \theta \leq \pi\}$ область, которую в дальнейшем будем называть бифуркационной диаграммой. В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая, когда $\Omega \geq 0$. Кроме того, будем выделять случай $f_N < 0$ как физически нереализуемый. Предметом исследования будет зависимость ОЗОР, обозначаемой E , от величины угловой скорости Ω и геометрических параметров задачи.

Замечание. Особо выделим случай отсутствия трения ($\mu = 0$, иначе говоря, “ледяной шар с полостью”). Несмотря на то, что аналитическое исследование зависимости решений от параметров, вообще говоря, затруднено, через них и переменную θ можно выразить величину Ω . Соответствующие этой зависимости кривые изображены штрих-пунктирными линиями на бифуркационных диаграммах рис. 4, 5 и 7. Эти линии являются “скелетными” для ОЗОР при отличных от нуля значениях коэффициента трения.

В качестве примеров прежде всего рассмотрим такие диаграммы на множестве тел, полость в которых касается их внешней поверхности.

4.1. Случай а). Прежде всего рассмотрим случай, когда $r_C = 0.125$, которому отвечает рис. 4а. Здесь $(\Omega_1, \theta_1) = (0.225, 0.103)$, $(\Omega_2, \theta_2) = (0.312, 0.705)$, $(\Omega_3, \theta_3) = (0.334, 2.365)$, $(\Omega_4, \theta_4) = (0.341, 0.292)$, $(\Omega_*, \theta_*) = (0.9995, 1.572)$. Если $\Omega = 0$, то область E совпадает со

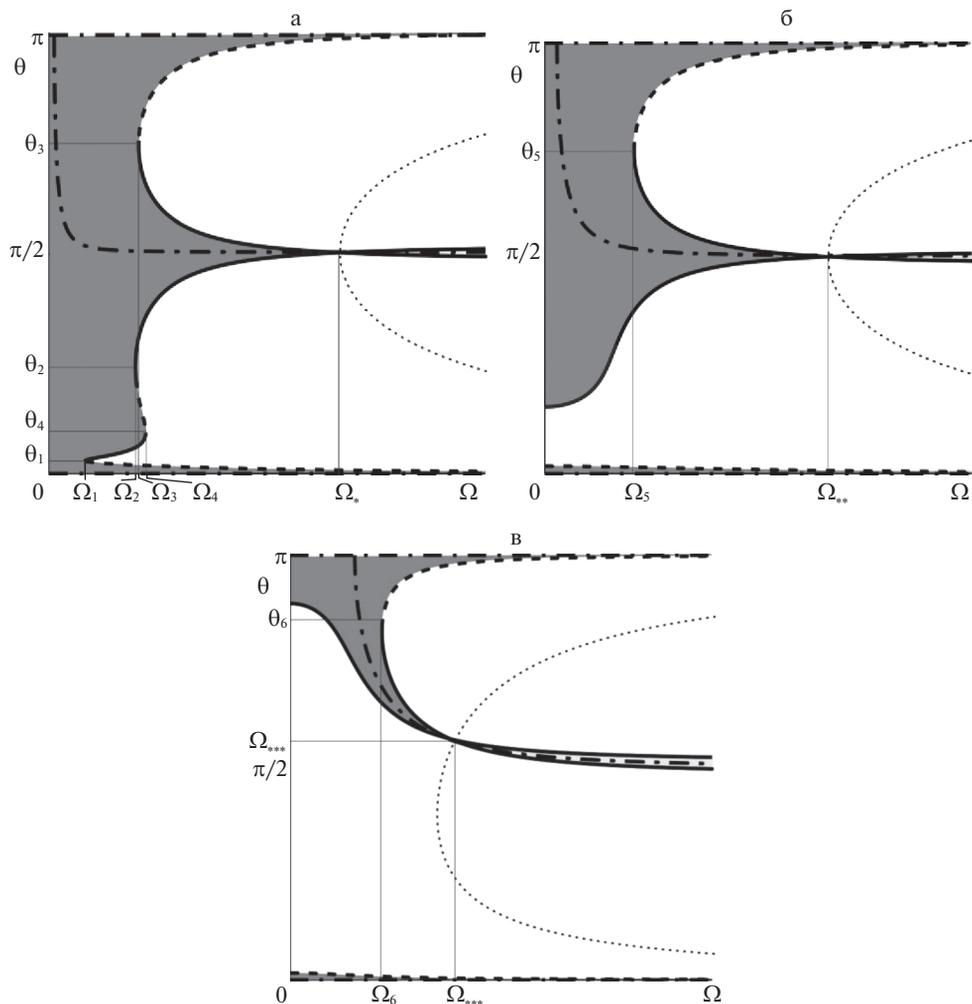


Рис. 4.

всей сферой: $E = S^2$. Это свойство остается выполненным при $\Omega < \Omega_1$ (см. рис. 4а). При $\Omega = \Omega_1$ происходит расщепление области $E: S^2 \rightarrow D_S \cup D_N$, где D_S и D_N – диски, примыкающие, соответственно, к южному и северному полюсам. При изменении Ω между Ω_1 и Ω_2 топология области E не меняется. При $\Omega = \Omega_2$ происходит расщепление диска $D_S: D_S \rightarrow D'_S \cup R_N$, т.е. от него отделяется кольцо R_N , расположенное в северном полушарии. При $\Omega \in (\Omega_2, \Omega_3)$ топология изучаемых областей остается неизменной, в то время как при $\Omega = \Omega_3$ диск D'_S также претерпевает деление: $D'_S \rightarrow D''_S \cup R_e$, т.е. от него тоже отделяется кольцо R_e , прилегающее к экватору тела. Такая топология остается неизменной при $\Omega \in (\Omega_3, \Omega_4)$, затем при $\Omega = \Omega_4$ кольцо R_N стягивается в окружность и исчезает при $\Omega > \Omega_4$. Кольцо R_e сохраняется до значения

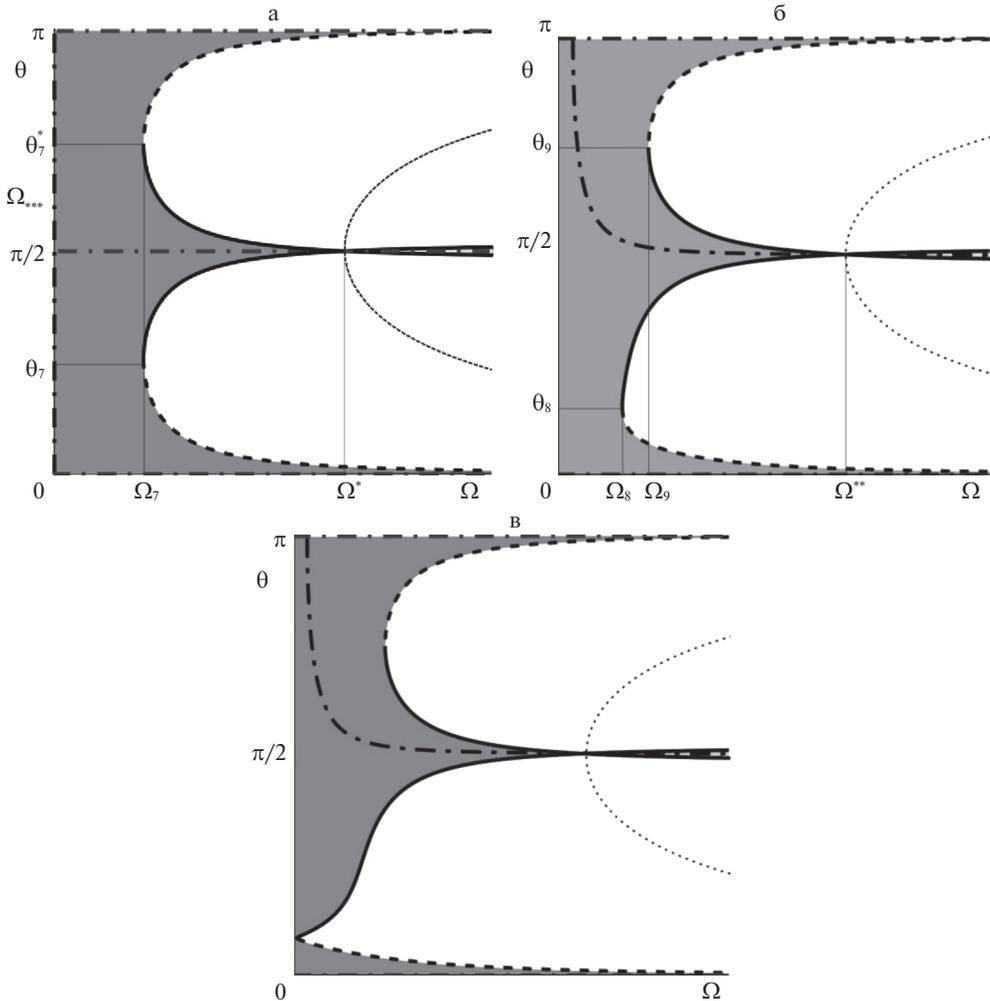


Рис. 5.

$\Omega = \Omega_*$, при котором на относительных равновесиях из этого кольца обращается в нуль нормальная реакция. Порожденное этим кольцом семейство решений при $\Omega > \Omega_*$ отвечает отрицательным значениям нормальной реакции и в дальнейшем не рассматривается, как не имеющее физического смысла. В противоположность физически осмысленным относительным равновесиям, изображенным на рис. 4 темно-серым цветом, эти равновесия изображены светло-серым цветом. Здесь и далее на рисунках точечная кривая отделяет области положительной и отрицательной нормальной реакции.

В дальнейшем, с увеличением $\Omega > \Omega_4$ южная приполярная область D_S'' уменьшается в размерах, стягиваясь к южному полюсу. Северная приполярная область D_N стягивается к северному полюсу: она уменьшается в размерах с увеличением Ω , начиная со своего выделения при $\Omega = \Omega_1$.

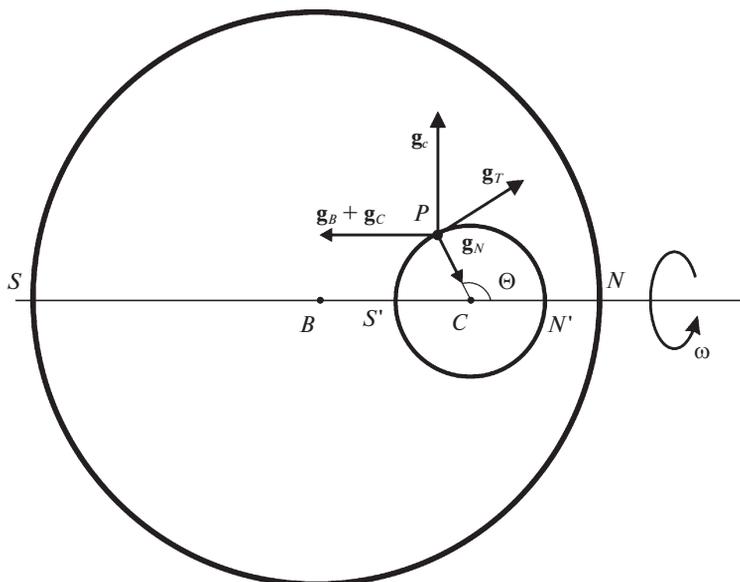


Рис. 6.

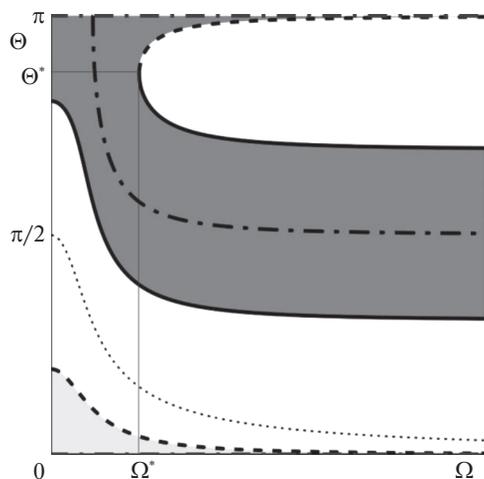


Рис. 7.

4.2. *Случай б).* Теперь рассмотрим случай $r = 0.25$, которому отвечает рис. 4б. На нем $(\Omega_5, \theta_5) = (0.314, 2.347)$, $(\Omega_{**}, \theta_{**}) = (0.996, 1.577)$. При $\Omega = 0$ область E сразу разделена на диски D_S и D_N , примыкающие, соответственно, к южному и северному полюсам: $E = D_S \cup D_N$. Такая же топология области E сохраняется при $\Omega < \Omega_5$ (см. рис. 4б). При $\Omega = \Omega_5$ диск D_S расщепляется на прилегающий к южному полюсу диск D'_S и прилегающее к экватору кольцо R_e : $D_S \rightarrow D'_S \cup R_e$. При $\Omega \in (\Omega_5, \Omega_{**})$ топология обла-

сти E остается неизменной. При $\Omega = \Omega_{**}$ кольцо R_e стягивается в окружность, и на отвечающих ему решениях нормальная реакция обращается в нуль. Это множество решений продолжается и для $\Omega > \Omega_{**}$, но для решений из этого множества нормальная реакция отрицательна, и такие решения в дальнейшем не рассматриваются, как не имеющие физического смысла. С увеличением $\Omega > \Omega_5$ южная приполярная область D'_S уменьшается в размерах, стягиваясь к южному полюсу. Северная приполярная область D_N стягивается к северному полюсу: она уменьшается в размерах с увеличением Ω , начиная со значения $\Omega = 0$.

Замечание. В случае, когда r велико, естественно было ожидать какие-либо отличия в характере бифуркаций от рассмотренных выше случаев. Однако исследование случая $r = 0.9$ показало, что в этом случае топологические перестройки области E совпадают с перестройками в случае b). При этом при $\Omega = 0$ оба диска D_S и D_N , образующих множество E весьма малы, причем более крупный диск D_S целиком располагается в южном полушарии. В отличие от предыдущего случая, при возрастании Ω от нуля до Ω_6 область D_S не убывает, а возрастает (см. рис. 4в).

Замечание. Применение в исследовании численных методов не дает возможности сделать вывод о том, что описаны все возможные типы бифуркаций. В этом плане на выполняемые исследования целесообразно смотреть как на описание уже выявленных перестроек ОЗОР при наличии осевой симметрии. Отказ от такой симметрии как правило делает картину бифуркаций куда более разнообразной (ср. [13]).

5. Относительные равновесия на внешней поверхности: полость целиком внутри тела. Теперь исследуем зависимость области E от расположения полости. Бифуркационные диаграммы для случаев радиуса полости $r_C = 0.25$ и расстояния между центром сферы и центром полости $d = 0$, $d = 0.6$ и $d = 0.6725$ при $\mu = 0.05$ показаны на рис. 5а–в, где $(\Omega_7, \theta_7) = (0.355, 0.77)$, $(\Omega_7, \theta_7^*) = (0.355, 2.308)$, $(\Omega^*, \theta^*) = (1, \pi/2)$, $(\Omega_8, \theta_8) = (0.222, 0.508)$, $(\Omega_9, \theta_9) = (0.313, 2.343)$, $(\Omega^{**}, \theta^{**}) = (0.995, 1.577)$. В случае $d = 0$, то есть если центр полости совпадает с центром сферы, гравитационное поле однородно. Тогда бифуркационная диаграмма симметрична относительно прямой $\theta = \pi/2$, как и в случае шара без полости (см. [15]) (рис. 5а). При $\Omega < \Omega_7$ множество E покрывает всю внешнюю поверхность. При $\Omega = \Omega_7$ оно расщепляется сразу в двух точках на прилегающее к экватору кольцо R_e и приполярные области D_S и D_N . Приполярные области существуют при $\Omega > \Omega_7$. Они стягиваются к полюсам при $\Omega \rightarrow \infty$. Кольцевая область R_e при $\Omega \rightarrow \Omega^*$ стягивается в окружность, заполненную равновесиями, отвечающими нулевым значениям нормальной реакции. При $\Omega > \Omega^*$ она вновь переходит в кольцо, заполненное решениями, отвечающими отрицательным значениям реакции, т.е. не имеющими физического смысла в рамках принятой постановки задачи.

При $d \neq 0$ диаграмма перестает быть симметричной. Так, при $0 < d < d_1$ (рис. 5б) можно указать значения Ω_8 и Ω_9 бифуркационного параметра, такие, что при $\Omega < \Omega_8$ множество E покрывает всю внешнюю поверхность. При $\Omega = \Omega_8$ область E расщепляется на приполярные области D_S и D_N , существующие при Ω : $\Omega_8 < \Omega < \Omega_9$. При $\Omega = \Omega_9$ расщепляется область D_S : из нее выделяется экваториальное кольцо R_e . С дальнейшим ростом Ω , как и в предыдущем случае, приполярные области стягиваются к полюсам, а кольцевая область R_e при $\Omega \rightarrow \Omega^{**}$ стягивается в окружность, заполненную равновесиями, отвечающими нулевым значениям нормальной реакции. При $\Omega > \Omega^{**}$, как и в предыдущем случае, решениям из данного семейства отвечают равновесия, не обладающие физическим смыслом.

Если величина d достигает некоторого критического значения $d = d^*$, то Ω_8 из предыдущего рассуждения обращается в нуль (рис. 5в). При $d > d^*$ множество E изначально разделено на приполярные области D_S и D_N , характер изменений которых с неограниченным увеличением Ω описан выше (рис. 4б).

6. Относительные равновесия на поверхности полости. Как известно из основ теории притяжения (см., например, [22], задача О-130), сила притяжения со стороны тела \mathcal{A} внутри полости имеет напряженность

$$\mathbf{g}_B + \mathbf{g}_C = \mathbf{g}_A = g_A(0, 0, -1)^T, \quad g_A = \frac{4}{3}\pi G\rho d$$

Иными словами, внутри полости поле сил притяжения постоянно и однородно. В этом случае с учетом симметрии относительно поворота вокруг диаметра SN решение задачи об относительных равновесиях сводится к решению задачи об относительных равновесиях бусинки на круглом обруче, равномерно вращающемся вокруг своего вертикального диаметра. Эта задача была рассмотрена ранее ([23]), поэтому ограничимся тем, что воспроизведем коротко в используемых обозначениях аргументы из этой работы и построенные ранее бифуркационные диаграммы.

Пусть $d = 0$, и поле притяжения внутри полости отсутствует. Тогда внутренняя часть полости заполнена равновесиями, а на границах относительные равновесия определяются неравенством, которое после преобразований сводится к виду см. рис. 6.

$$\Omega^2 |\sin \Theta| (|\cos \Theta| - \mu |\sin \Theta|) \leq 0$$

При $\Omega = 0$ это неравенство выполнено всюду, и поверхность полости целиком заполнена равновесиями. При $\Omega \neq 0$ для любого значения коэффициента трения у неравенства имеются решения $\Theta = 0$ и $\Theta = \pi$, отвечающие, соответственно, полюсам полости N' и S' , расположенным на оси симметрии тела. Также при любом $\Omega \neq 0$ имеются относительные равновесия, на которых $\left| \Theta - \frac{\pi}{2} \right| \leq \alpha$, где $\alpha = \arctg \mu$ – угол трения. Эти относительные равновесия, существование которых обеспечивается центробежной силой, располагаются в симметричном поясе вдоль экватора полости.

Пусть теперь $d \neq 0$. Вводя безразмерный параметр

$$\hat{\Omega} = \sqrt{\frac{r_C}{d}} \Omega$$

представим уравнения относительного равновесия в проекциях на нормаль и на касательную в точке P , соответственно, в виде

$$0 = -g_N + \frac{4\pi G\rho d}{3} (\hat{\Omega}^2 \sin^2 \Theta - \cos \Theta), \quad 0 = g_T - \frac{4\pi G\rho d}{3} \sin \Theta (\hat{\Omega}^2 \cos \Theta + 1)$$

Определяющее условие покоя неравенство (2.2) после преобразований записывается как

$$|f_T| \leq \mu |f_N|$$

$$f_T = \sin \Theta (\hat{\Omega}^2 \cos \Theta + 1), \quad f_N = \hat{\Omega}^2 \sin^2 \Theta - \cos \Theta$$

Если безразмерная угловая скорость $\hat{\Omega}$ равна нулю, то существует заполненная равновесиями приполярная область Δ_S , примыкающая к полюсу S' . Этот диск заполнен равновесиями, для которых $\pi - \alpha < |\Theta| \leq \pi$, где α – угол трения. С возрастанием $\hat{\Omega}$ до значения $\hat{\Omega}^*$ (см. [23]) диск Δ_S становится шире, и при $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}^*$, которому отвечает

значение $\Theta = \Theta_*$, разделяется на диск $\Delta'_S(\hat{\Omega})$, примыкающий к полюсу S' , и на кольцевую область $R(\hat{\Omega})$. При $\hat{\Omega} \rightarrow \infty$ приполярная область $\Delta'_S(\hat{\Omega})$ стягивается к полюсу S' , а кольцевая область $R(\hat{\Omega})$ стремится к предельному положению $R(\infty)$, для которого $\left| \Theta - \frac{\pi}{2} \right| \leq \alpha$.

Рис. 7 построен для $\mu = 0.7$. Для него $\Theta^* = 2.723$, $\hat{\Omega}^* = 2.188$ (ср. [23]). Область, заполненная механически осмысленными относительными равновесиями, на которых нормальная реакция направлена внутрь полости, отмечена темно-серым цветом. Область, отвечающая физически нереализуемым относительным равновесиям, на которых нормальная реакция направлена за пределы полости, обозначена светло-серым цветом.

7. Об устойчивости относительных равновесий. Устойчивость по Ляпунову относительных равновесий, расположенных внутри найденных областей, следует из результатов Г.К. Пожарицкого [24]. Можно, как и в [14], поставить вопрос об устойчивости связанных компонент ОЗОР.

Будем считать связанную компоненту *устойчивой*, если для каждой точки ее границы проекция суммы активных сил и центробежной силы на плоскость, касательную к поверхности в этой точке, направлена внутрь рассматриваемой связанной компоненты ОЗОР. Это свойство можно трактовать следующим образом. Пусть в начальный момент точка P располагается в некоторой точке Q границы ОЗОР. “Отпустим” точку P без начальной скорости, “освободив” систему от трения, т.е. предположив, что коэффициент трения обратился в нуль. В случае устойчивости связанной компоненты ОЗОР для всех точек Q ее границы точка P начнет движение внутрь этой компоненты или вдоль ее границы. Если найдется хотя бы одна точка Q границы рассматриваемой связанной компоненты ОЗОР, для которой точка P начнет движение вовне этой компоненты, то речь идет о *неустойчивости* этой связанной компоненты.

Замечание. В рассматриваемой задаче благодаря осевой симметрии это свойство достаточно проверить для любого меридионального сечения поверхности тела.

Введенное таким образом определение устойчивости проверяется путем анализа знака функции f_T в точках границы ОЗОР. На бифуркационных диаграммах (рис. 4, 5, 7) точки границы ОЗОР, в которых упомянутая проекция суммы сил направлена вовне соответствующей связанной компоненты ОЗОР, прорисованы пунктиром, в то время как точки границы ОЗОР, в которых эта проекция суммы сил направлена внутрь соответствующей связанной компоненты ОЗОР, прорисованы сплошной линией.

Прокомментируем свойство устойчивости на примере случая *a*) из пункта (4.1). При выполнении условия $0 \leq \Omega < \Omega_1$ область E состоит из единственной связанной компоненты, совпадающей со всей сферой: $E = S^2$. Оно не имеет границ, т.е. устойчиво. При выполнении условия $\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$ область D_S устойчива, а область D_N неустойчива. При выполнении условия $\Omega_2 < \Omega < \Omega_3$ область D'_S устойчива, а область D_N неустойчива. Кольцевая область R_N также неустойчива: условие устойчивости выполнено на одной ее границе и не выполнено на другой. При выполнении условия $\Omega > \Omega_3$ обе приполярные области D''_S и D_N неустойчивы, равно как и кольцевая область R_N , существующая при $\Omega < \Omega_4$. При этом устойчивой оказывается приэкваториальная кольцевая область R_e , которая стягивается к окружности при $\Omega \rightarrow \Omega_*$. Наконец, при прохождении параметром Ω значения Ω_* нормальная реакция обращается в нуль.

При $\Omega > \Omega_*$ устойчивых связных компонент ОЗОР больше нет – остаются только две неустойчивые приполярные области D_S'' и D_N .

Замечание. В настоящей работе относительные равновесия рассмотрены в случае, когда тело вращается вокруг своей оси симметрии. Представляет интерес рассмотрение случая, когда тело совершает вращение вокруг оси инерции, перпендикулярной оси симметрии. В этом случае могут оказаться полезными результаты работы [25], в которой рассматривалось движение тяжелой бусинки по окружности, не совпадающей с ее вертикальным диаметром, а также работ [12, 14]. Особый интерес представляет случай, когда тело совершает прецессионные движения.

Замечание. Как любезно сообщил авторам рецензент, в работе [15] допущена ошибка: в конце 1980-х годов в рамках советского проекта освоения дальнего космоса “Фобос” были разработаны подвижные зонды ПРОП-ФП, изменяющие свое местоположение прыжками [26]. В.В. Белецкий, несомненно знавший о проекте таких зондов, совместно с О.П. Салимовой, вероятно, были первопроходцами, приступившими к систематическому изучению нелинейной динамики прыгающего космического аппарата [27, 28].

Данное исследование частично поддержано программой Президента Российской Федерации по федеральной поддержке молодых российских ученых, кандидатов наук (проект № МК-1712.2019.1) и РФФИ (проект № 18-01-00335).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Guibout V., Scheeres D.J.* Stability of surface motion on a rotating ellipsoid // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.* 2003. V. 87. P. 263–290.
2. *Bellerose J., Girard A., Scheeres D.J.* Dynamics and control of surface exploration robots on asteroids // in: *Optimization&Cooperative Control Strategies. LNCIS 381* / Ed. by *M.J. Hirsch* Berlin;Heidelberg: Springer, 2009. P. 135–150.
3. *Jiang Y., Zhang Y., Baoyin H.* Surface motion relative to the irregular celestial bodies // *Planet.&Space Sci.* 2016. V. 127. P. 33–43.
4. *Tardivel S., Scheeres D.J., Michel P., Wal S.V., Sánchez P.* Contact motion on surface of asteroid // *J. Spacecraft&Rockets.* 2015. V. 51. № 6. P. 1857–1871.
5. *Zhang Y., Zeng X., Circi C., Vulpetti G.* The motion of surface particles for the asteroid 101955 Bennu // *Acta Astron.* 2019. V. 163. Part B. P. 3–10.
6. *Van de Wouw N., Leine R.I.* Stability of stationary sets in nonlinear systems with set-valued friction // *Proc. 45th IEEE Conf. Decision and Control and European Control Conf. (CDC2006), San Diego, USA, 2006.* P. 3765–3770.
7. *Leine R.I., van de Wouw N.* Stability properties of equilibrium sets of nonlinear mechanical systems with dry friction and impact // *Nonlin. Dyn.* 2008. V. 51. № 4. P. 551–583.
8. *Leine R.I., van de Wouw N.* Stability and convergence of mechanical systems with unilateral constraints // В кн.: *Lecture Notes in Appl.&Comput. Mech.* 2008. V. 36. 236 p.
9. *Leine R.I., van Campen D.H.* Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems // *Europ. J. Mech. A. Solids.* 2006. V. 25. P. 595–616.
10. *Leine R.I.* Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems // *Physica D.* 2006. V. 223. P. 121–137.
11. *Ivanov A.* Bifurcations in systems with friction: Basic models and methods // *Regul. Chaotic Dyn.* 2009. V. 14. № 6. P. 656–672.
12. *Иванов А.П.* Основы теории систем с трением. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2011. 304 с.
13. *Burov A.A., Shalimova E.S.* On the motion of a heavy material point on a rotating sphere (dry friction case) // *R&C Dyn.* 2015. V. 20. № 3. P. 225–233.
14. *Буров А.А., Шалимова Е.С.* Бифуркации относительных равновесий тяжелой бусинки на вращающейся параболидоидальной чаше с сухим трением // *Изв. РАН. МТТ.* 2016. № 4. С. 30–42.

15. Шалимова Е.С. О движении тяжелой точки по сфере, вращающейся вокруг не проходящей через ее центр вертикальной оси, при наличии сухого трения // Нелин. дин. 2016. Т. 12. № 3. С. 369–383.
16. Буров А.А., Косенко И.И., Шалимова Е.С. Об относительных равновесиях массивной точки на равномерно вращающемся астероиде // Доклады АН. 2017. Т. 475. № 3. С. 269–272.
17. Белецкий В.В. Обобщенная ограниченная круговая задача трех тел как модель динамики двойных астероидов // Космич. исслед. 2007. Т. 45. № 6. С. 435–442.
18. Белецкий В.В., Родников А.В. Об устойчивости треугольных точек либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел // Космич. исслед. 2008. Т. 46. № 1. С. 42–50.
19. Муницына М.А. Относительные равновесия точки в гравитационном поле прецессирующего динамически симметричного твердого тела // в кн: Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 2009. С. 14–19.
20. Кошкин Н.И., Ширкевич М.Г. Справочник по элементарной физике. М.: Наука, 1972. 256 с.
21. Lahayne O., Pichler B., Reihnsner R. et al. Rubber Friction on Ice: Experiments and Modeling // Tribol. Lett. 2016. V. 62. Art. No. 17. P. 1–19.
22. Буров А. Маленькая сигма и задачи с модулями // Квант. 2012. Вып. 1. С. 36–38.
23. Генденштейн Л.Э., Кирик Л.А., Гельфгат И.М. Решение ключевых задач по физике для основной школы. 7–9 классы. М.: Илекса, 2016. 208 с.
24. Burov A.A. On bifurcations of relative equilibria of a heavy bead sliding with dry friction on a rotating circle // Acta Mech. 2010. V. 212. № 3–4. P. 349–354.
25. Пожарицкий Г.К. Об устойчивости равновесий для систем с сухим трением // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 1. С. 5–14.
26. Буров А.А., Якушев И.А. Бифуркации относительных равновесий тяжелой бусинки на вращающемся обруче с сухим трением // ПММ. 2014. Т. 78. № 5. С. 645–655.
27. Автоматические межпланетные станции “Фобос-1, 2” // НПО им. С.А. Лавочкина. <https://www.laspace.ru/projects/planets/fobos/>
28. Beletsky V.V., Salimova O.P. Hill’s problem as a dynamical billiard // R&C Dyn. 1996. V. 1. № 2. P. 47–58.
29. Beletsky V.V., Salimova O.P. Hill’s problem as a dynamic billiard // Proc. IUTAM Symp. Interaction between Dynamics and Control in Advanced Mechanical Systems held in Eindhoven, The Netherlands, 21–26 April 1996. Ser. Solid Mechanics and its Applications. 1997. P. 27–34.

On the Motion of a Point Particle on a Homogeneous Gravitating Ball with a Spherical Cavity in the Presence of Dry Friction

A. A. Burov^{a,b,#}, V. I. Nikonov^{a,b,##}, and E. S. Shalimova^{c,###}

^a FRC CSC RAS, Moscow, Russia

^b HSE University, Moscow, Russia

^c Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

[#]e-mail: jtm@narod.ru

^{##}e-mail: nikon_v@list.ru

^{###}e-mail: ekateryna-shalimova@yandex.ru

A problem of motion of a point particle on a surface of a homogeneous gravitating ball with a spherical cavity is considered. It is assumed that the body rotates uniformly around its symmetry axis. It is supposed that along with the gravity force acting on the particle a dry friction force occurs on the outer or inner (i.e. inside the cavity) surface of the body. The gravitational properties inside the cavity and outside the ball are described. The dependence of existence, bifurcations, and stability of relative equilibria of the point particle on the outer or inner body surface on the parameters of the problem is studied. The results are represented both analytically and as numerically obtained bifurcation diagrams. The research was motivated by the possible existence of cavities or mass concentrations (mascons) in large and small celestial bodies.

Keywords: dynamics on surfaces of celestial bodies, celestial bodies with cavities, relative equilibria, dry friction, motion of a point particle in a noncentral gravity field, generalization of a gravitating dumbbell

REFERENCES

1. *Guibout V., Scheeres D.J.* Stability of surface motion on a rotating ellipsoid // *Cel. Mech. Dyn. Astr.*, 2003, vol. 87, pp. 263–290.
2. *Bellerose J., Girard A., Scheeres D.J.* Dynamics and control of surface exploration. robots on asteroids // in: *Optimization & Cooperative Control Strategies. LNCIS 381* / Ed. by *M.J. Hirsch et al.* Berlin; Heidelberg: Springer, 2009. pp. 135–150.
3. *Jiang Y., Zhang Y., Baoyin H.* Surface motion relative to the irregular celestial bodies // *Planet. & Space Sci.*, 2011, vol. 127, pp. 33–43.
4. *Tardivel S., Scheeres D. J., Michel P. et al.* Contact motion on surface of asteroid // *J. Spacecraft & Rockets*, 2015, vol. 51, no. 6, pp. 1857–1871.
5. *Zhang Y., Zeng X., Circi C. et al.* The motion of surface particles for the asteroid 101955 Bennu // *Acta Astron.*, 2019, vol. 163, pp. 3–10.
6. *Van de Wouw N., Leine R.I.* Stability of stationary sets in nonlinear systems with set-valued friction // *Proc. 45th IEEE Conf. Decision and Control*, 2006, pp. 4271–4276.
7. *Leine R.I., van de Wouw N.* Stability properties of equilibrium sets of nonlinear mechanical systems with dry friction and impact // *Nonlin. Dyn.*, 2008, vol. 51, no. 4, pp. 551–583.
8. *Leine R.I., van de Wouw N.* Stability and convergence of mechanical systems with unilateral constraints // in: *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Berlin: Springer, 2008. V. 36. 236 p.
9. *Leine R.I., van Campen D.H.* Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems // *Europ. J. Mech. A. Solids*, 2006, vol. 25, pp. 595–616.
10. *Leine R.I.* Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems // *Physica D*, 2006, vol. 223, pp. 121–137.
11. *Ivanov A.* Bifurcations in Systems with Friction: Basic Models and Methods // *R&C Dyn.*, 2009, vol. 14, no. 6, pp. 656–672.
12. *Ivanov A.P.* Fundamentals of the Theory of Systems with Friction. Moscow; Izhevsk: R&C Dyn., 2011. 304 p.
13. *Burov A.A., Shalimova E.S.* On the motion of a heavy material point on a rotating sphere (dry friction case) // *R&C Dyn.*, 2015, vol. 20, no. 3, pp. 225–233.
14. *Burov A.A., Shalimova E.S.* Bifurcations of relative equilibria of a heavy bead on a rotating parabolic bowl with dry friction // *Mech. Solids*, 2016, vol. 51, no. 4, pp. 395–405.
15. *Shalimova E.S.* On the motion of a material point on a rotating sphere with dry friction (the case of the vertical axis) // *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 3, pp. 369–383. (in Russian)
16. *Burov A.A., Kosenko I.I., Shalimova E.S.* Relative equilibria of a massive point on a uniformly rotating asteroid // *Dokl. Phys.*, 2017, vol. 62, no. 7, pp. 359–362.
17. *Beletsky V.V.* Generalized restricted circular three-body problem as a model for dynamics of binary asteroids // *Cosmic Res.*, 2007, vol. 45, no. 6, pp. 408–416.
18. *Beletsky V.V., Rodnikov A.V.* Stability of triangle libration points in generalized restricted circular three-body problem // *Cosmic Res.*, 2008, vol. 46, no. 1, pp. 40–48.
19. *Munitsyna M.A.* Relative equilibria of a point in a gravity field of a symmetrical solid body // *Problems of Investigating the Stability and Stabilization of Motion*. Moscow: Vychisl. Tsentr. Ross. Akad. Nauk, 2009, pp. 14–19. (in Russian)
20. *Koshkin N.I., Shirkevich M.G.* Handbook of Elementary Physics. Moscow: Nauka, 1972. 256 p.]
21. *Lahayne O., Pichler B., Reihnsner R. et al.* Rubber friction on ice: experiments and modeling // *Tribol. Lett.*, 2016, vol. 62, art. no. 17, pp. 1–19.
22. *Burov A.* Small letter σ and problems with absolute values // *Kvant*, 2012, no. 1, pp. 36–38. (in Russian)
23. *Gendenstein L.E., Kirik L.A., Gelfgat I.M.* Solving Key Problems in Physics for Primary School. Grades 7–9. Moscow: Ileksa, 2016. 208 p.

-
24. *Burov A.A.* On bifurcations of relative equilibria of a heavy bead sliding with dry friction on a rotating circle // *Acta Mech.*, 2010, vol. 212, no. 3–4, pp. 349–354.
 25. *Pozharitsky G.* Stability of equilibria for the systems with dry friction // *JAMM*, 1962, vol. 26, no. 1, pp. 5–14.
 26. *Burov A.A., Yakushev I.A.* Bifurcations of the relative equilibria of a heavy bead on a rotating hoop with dry friction // *JAMM*, 2014, vol. 78, no. 5, pp. 460–467.
 27. Automatic interplanetary stations “Phobos-1, 2” // S.A. Lavochkin Scientific and Production Association. <https://www.laspace.ru/projects/planets/fobos/>
 28. *Beletsky V.V., Salimova O.P.* Hill’s problem as a dynamical billiard // *R&C Dyn.*, 1996, vol. 1, no. 2, pp. 47–58.
 29. *Beletsky V.V., Salimova O.P.* Hill’s problem as a dynamic billiard // *Proc. IUTAM Symp. Inter. between Dyn. Control in Adv. Mech. Sys.*, 1997, pp. 27–34.

Информация для авторов и читателей журнала ПММ

DOI: 10.31857/S0032823521040068

Издательство “Pleiades Publishers”, осуществляющее издание переводов статей журнала ПММ, выделяет 1000 долл. США для премирования лучших работ, опубликованных в ПММ.

Решением редколлегии от 01 июня 2021 года эта премия присуждена авторам следующих работ, опубликованных в 2020 году:

1. Афанасьев А.А.

“Структура температурного фронта при фильтрации в трещиновато-пористой среде” Т.84, вып. 1, С. 64–76.

“О численном моделировании фильтрации воды при околокритических условиях” Т.84, вып. 6, С. 709–720.

200 долл. США

2. Муницына М.А.

“Переходные процессы в динамике волчка тип-топ” Т.84, вып. 4, С. 433–441.

200 долл. США

3. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П.

“Длинноволновые колебания и длинные волны в анизотропной пластине” № 4

200 долл. США

4. Гаджиев Д.А., Гайфуллин А.М., Зубцов А.В.

“О порождении вихря вращающимся цилиндром” № 5

200 долл. США

5. Каспарова Е.А., Шифрин Е.И.

“К решению геометрической обратной задачи статической теории упругости по не полностью переопределенным данным на границе” № 3

200 долл. США