



Российская Академия Наук

Л.Х. Ингель, А.А. Макоско

**Введение в теорию
влияния неоднородностей
поля силы тяжести
на динамику атмосферы**

Москва 2017

УДК 531
ББК 22.3
И59

ISBN 978-5-9908169-9-2

© Российская академия наук, 2017
© Л.Х. Ингель, А.А. Макоско, 2017

Введение в теорию влияния неоднородностей поля силы тяжести на динамику атмосферы

Л.Х. Ингель, А.А. Макоско

Аннотация: *Ингель Л.Х., Макоско А.А. Введение в теорию влияния неоднородностей поля силы тяжести на динамику атмосферы / Российская академия наук. – М.: РАН, 2017.*

Кратко рассматриваются основные понятия, сведения и методы исследования влияния неоднородностей (аномалий) поля силы тяжести на динамику атмосферы. Основой этих теоретических исследований является получение аналитических выражений для линейных возмущений, вызываемых в полях метеорологических величин неоднородностями поля силы тяжести, и последующий анализ соответствующих физических механизмов.

Найденные аналитические решения показывают, что в определенных ситуациях влияние аномалий силы тяжести на атмосферные течения может быть заметным и значимым.

Ранее отсутствовали замкнутые аналитические модели, которые достаточно строго и прозрачно описывали атмосферные эффекты, обусловленные влиянием неоднородностей силы тяжести. Этот пробел восполнен настоящим изданием.

Ключевые слова: *неоднородности (аномалии) поля силы тяжести, атмосферные возмущения, аналитическая модель.*

Annotation: *Ingel L.Kh., Makosko A.A. Introduction to the theory of the effect of gravity inhomogeneities on the dynamics of the atmosphere / Russian Academy of Sciences. - Moscow: Nauka, 2017.*

The basic concepts, information and methods for studying the influence of inhomogeneities (anomalies) of the gravity field on the dynamics of the atmosphere are briefly considered. The basis of these theoretical studies is the obtaining of analytical expressions for linear perturbations caused in the fields of meteorological quantities by inhomogeneities in the field of gravity, and the subsequent analysis of the corresponding physical mechanisms.

The analytical solutions found show that in certain situations the effect of gravity anomalies on atmospheric currents can be noticeable and significant.

Previously, there were no closed analytical models, which described quite rigorously and transparently the atmospheric effects caused by the influence of the inhomogeneities of gravity. This gap is filled with this edition.

Key words: *inhomogeneities (anomalies) of gravity field, atmospheric perturbations, analytical model.*

Работа выполнена при поддержке Программ № 15, 51
фундаментальных исследований Президиума РАН.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ	5
2. ВОЗМУЩЕНИЯ ГЕОСТРОФИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПОД ВЛИЯНИЕМ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ПОЛЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ	6
2.1. Постановка задачи	7
2.2. Решение	9
3. АТМОСФЕРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ВЕРТИКАЛЬНЫМ ТЕПЛООБМЕНОМ В НЕОДНОРОДНОМ ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ	14
3.1. Постановка задачи	16
3.2. Решение	17
3.3. Анализ решения	21
4. ГЕНЕРАЦИЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ПОЛЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА АТМОСФЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ	23
4.1. Постановка задачи	23
4.2. Решение и его анализ	24
5. НЕКОТОРЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ	29
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	30
ЛИТЕРАТУРА	31

1. Введение

В современных моделях геофизической гидродинамики поле силы тяжести обычно принимается однородным и описывается с использованием единственного параметра. Между тем, известно, что на среднюю силу тяжести у поверхности Земли накладывается широкий спектр аномалий (неоднородностей) силы тяжести (АСТ). Это связано, прежде всего, с неоднородностями распределения массы в земной коре¹. Вариации силы тяжести, конечно, очень малы по абсолютной величине по сравнению со средним значением g . Но существенно, что при наличии таких неоднородностей появляется составляющая силы тяжести, тангенциальная по отношению к общему земному эллипсоиду. В плоских мезомасштабных моделях, в которых используются декартовы координаты (« f -плоскость», «бета-плоскость» [1, 2]), это означает необходимость учета дополнительных объемных неоднородных сил с горизонтальной составляющей. По отношению к таким составляющим динамика атмосферы весьма чувствительна. В высокоаномальных регионах тангенциальные («горизонтальные») составляющие силы тяжести на масштабах порядка 100 км могут превышать значения 100 мГал (10^{-3} м/с²) [3, 4]. Тем самым, они могут быть сравнимыми по порядку величины в уравнениях динамики с силами градиента давления в циклонах умеренных широт и другими слагаемыми, необходимость учета которых не вызывает сомнений.

По меньшей мере с 70-х годов в метеорологической литературе неоднократно высказывались предположения о возможности существенного влияния неоднородностей поля силы тяжести (НПСТ) на динамику некоторых атмосферных процессов (см., например, [4-7]). В частности, согласно [5], некоторые натурные данные указывают на возможное влияние АСТ на зарождение тропических циклонов (ТЦ). В последнее время выполнен

¹ АСТ обусловлены (в порядке убывания степени влияния) центробежной силой, сплюснутостью Земли, аномалиями расположения масс внутри Земли, приливными явлениями в гидро- и атмосфере, перераспределениями воздушных масс и др. [3]. Учет первых двух факторов обеспечивается выбором подходящей системы отсчета, например, декартовой, связанной с общим земным эллипсоидом [2, 4]. Принимая во внимание, что влияние аномальных масс на три порядка превышает влияние оставшихся факторов, ниже обоснованно следует считать АСТ обусловленными гравитационными аномалиями Земли.

более репрезентативный статистический анализ, относящийся к возможному влиянию АСТ на ТЦ [8, 9]. Имеется также некоторый опыт численного моделирования [10-12]; в этих работах сделаны выводы о возможности заметных атмосферных эффектов НПСТ. Но существует потребность в достаточно строгих и прозрачных аналитических моделях, без которых трудно добиться уверенного понимания физических механизмов влияния НПСТ на динамику атмосферы.

Известна теорема, согласно которой в покоящейся среде изобары и изопикны должны совпадать с эквипотенциальными поверхностями [13]. Если изобары совпадают с поверхностями равного потенциала силы тяжести, то это означает, что сила градиента давления в каждой точке и в каждом направлении компенсирует силу тяжести. Поэтому существует статическое решение. В этой связи распространено мнение, что неоднородности поля силы тяжести лишь несколько «деформируют», «искривляют» состояние гидростатического равновесия, но не влияют на поле движения.

Но авторы обратили внимание на существование физических механизмов, которые, вообще говоря, должны нарушать это статическое равновесие, т.е. приводить к возникновению атмосферных течений под влиянием НПСТ. Первые относящиеся сюда результаты к настоящему времени уже опубликованы [14-16], но для последовательности изложения, они вкратце изложены ниже, наряду с еще не опубликованными материалами.

2. Возмущения геострофического течения под влиянием неоднородностей поля силы тяжести

Прежде всего, статическое равновесие должно нарушаться при наличии фоновых горизонтальных течений. Пока неоднородности поля силы тяжести отсутствуют, и изопикны строго горизонтальны, такие течения, двигаясь касательно к изопикнам, не нарушают состояния гидростатического равновесия. Но когда фоновое течение «наталкивается» на аномалию силы тяжести, оно по инерции, очевидно, стремится сохранять прямолинейное движение в горизонтальном направлении. При этом искривленные изопикны, связанные с неоднородностями поля силы тяже-

сти, вообще говоря, пересекаются горизонтальными течениями, так что появляется адвекция массы, чему соответствуют ненулевые слагаемые типа $u\partial\rho$ в уравнениях переноса (здесь – скорость в направлении горизонтальной оси x , ρ – плотность среды). Таким образом, фоновые горизонтальные течения в этом случае, вообще говоря, должны взаимодействовать с гидростатически равновесным состоянием среды – нарушать это состояние (деформировать изопикны и изобары) или приспосабливаться к нему (т.е. искривляться); в общем случае – и то, и другое. Есть и ещё один фактор, способствующий нарушению гидростатического состояния. Если на подстилающей поверхности задано условие непротекания, то вблизи этой поверхности течение, очевидно, не может иметь нормальную к ней составляющую. А эквипотенциальные поверхности вполне могут иметь нормальные составляющие по отношению к твердой подстилающей поверхности. Это – еще одна (помимо инерции) причина отклонения течений от изоповерхностей, т.е. нарушения гидростатического баланса в неоднородном поле силы тяжести. Заранее нельзя утверждать, что эффекты такого рода метеорологически значимы, но в любом случае имеет смысл их оценить.

2.1. Постановка задачи

Рассматриваются стационарные линейные возмущения геострофического течения в модели идеальной стратифицированной вращающейся несжимаемой жидкой среды под влиянием пространственно-неоднородных объемных сил – неоднородностей поля силы тяжести.

Остановимся подробнее на выборе системы координат и фонового состояния. В отсутствие НПСТ (фоновое состояние) естественно использовать хорошо апробированные стандартные модели геофизической гидродинамики. Сюда относится модель « f -плоскости» [1, 2], которая и используется ниже. Согласно этой модели, задача о движении среды у поверхности общего земного эллипсоида приближенно сводится к «плоской» задаче с однородной силой тяжести, так что вертикальное и горизонтальные направления однозначно определены, и становится удобным использование декартовой системы координат. Если на этом фоне имеются неоднородности поля силы тяжести относительно небольшой амплитуды (такое предположение об амплитуде всегда оправдано) и горизонтальных

масштабов (например, порядка 100 км), то их можно адекватно описывать как действие некоторых дополнительных неоднородных объемных сил, которые в упомянутой системе координат имеют не только вертикальную, но и горизонтальные составляющие, и изучать возмущения, вызываемые этими дополнительными силами.

В отсутствие упомянутых неоднородностей задано однородное фоновое геострофическое течение вдоль одной из горизонтальных осей x :

$$U = -\frac{1}{f\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}. \quad (1)$$

Здесь y – вторая горизонтальная координата (в поперечном течении направлении), f – параметр Кориолиса (используется приближение f -плоскости), p – давление. В случаях, когда аномалия силы тяжести действует на интенсивный атмосферный вихрь (тропический циклон, полярный мезоциклон), некоторым аналогом параметра Кориолиса является «параметр инерциальной устойчивости» [17], который при твердотельном вращении приблизительно равен удвоенной угловой скорости вращения. В упомянутых интенсивных вихрях эта величина может превышать параметр Кориолиса на 1-2 порядка. Предполагается, что фоновые распределения плотности и давления (обозначены чертой) зависят не только от высоты z , но и от одной из горизонтальных координат y . Удобна для анализа, например, модель

$$\bar{\rho} = \rho_0 \exp\left[-\left(\frac{z}{H} + \frac{y}{L_p}\right)\right], \quad \bar{p} = g\rho_0 H \exp\left[-\left(\frac{z}{H} + \frac{y}{L_p}\right)\right], \quad (2)$$

$$U = \frac{gH}{fL_p} = \text{const.}$$

где ось z направлена вертикально вверх; смысл постоянных ρ_0 , H , L_p достаточно очевиден. Такое задание фонового состояния позволяет свести задачу к системе уравнений с постоянными коэффициентами.

В линейном приближении исследуются возмущения, которые вносятся в этот поток двумерными неоднородностями поля силы тяжести. Горизонтальная и вертикальная составляющие этих «дополнительных» сил описываются соответственно величинами $g_x(x,z)$ и $g_z(x,z)$ (имеют размерность ускорения). Полная сила тяжести представляет собой векторную сумму этих возмущений и

средней силы тяжести, которая ниже, как обычно, обозначается константой g . Если обозначить потенциал силы тяжести через Φ , то

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -g_x, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = g - g_z, \quad \frac{\partial g_x}{\partial z} = \frac{\partial g_z}{\partial x}. \quad (3)$$

Линеаризованная система уравнений для двумерных стационарных возмущений скорости, давления и плотности в идеальной несжимаемой среде имеет вид:

$$\begin{aligned} U\bar{\rho} \frac{\partial u'}{\partial x} &= -\frac{\partial p'}{\partial x} + f\bar{\rho}v + \bar{\rho}g_x, \\ U\bar{\rho} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial p'}{\partial y} - f\bar{\rho}u' - fU\rho', \\ U\bar{\rho} \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{\partial p'}{\partial z} - g\rho' + \bar{\rho}g_z, \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \quad U \frac{\partial \rho'}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь v, w – возмущения составляющих скорости вдоль осей y и z ; возмущения других величин обозначены штрихом.

На нижней границе среды задано условие непротекания. На твердой горизонтальной поверхности оно имеет вид

$$w|_{z=0} = 0. \quad (5)$$

При рассмотрении возмущений над водной поверхностью ситуация сложнее. Эта поверхность в неоднородном поле силы тяжести, вообще говоря, не является горизонтальной плоскостью. В удовлетворительном приближении она совпадает с эквипотенциальной поверхностью, отклонение которой от горизонтали $h_0(x) \approx -\Phi(x,0)/g$. Условие непротекания на этой поверхности в линейном приближении можно записать в виде

$$w \approx U \frac{\partial h_0}{\partial x} \approx U \frac{g_x(x,0)}{g} \quad \text{при } z = 0 \quad (6)$$

(величины g_x и w медленно меняются с высотой, так что в (6) предполагаются практически совпадающими их значения на близких уровнях $z = 0$ и $z = h_0$). Ещё одно граничное условие – затухание возмущений при $z \rightarrow \infty$ (не рассматриваем в настоящем разделе ситуаций, когда возможна генерация внутренних волн). Предполагается также отсутствие возмущений в натекающем потоке – при $z \rightarrow -\infty$.

2.2. Решение

Остановимся сначала на случае течения над твердой горизонтальной поверхностью. Возмущение давления удобно искать в виде

$$p' = \rho \bar{\rho}(y, z) \Pi(x, z), \quad (7)$$

где функция $\Pi(x, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = U \frac{\partial w}{\partial z} + f v + g_x. \quad (8)$$

Исключая из (4) часть неизвестных, с учетом (2), (3) и (8), можно получить систему двух уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{1}{H} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{g}{HU^2} w + \frac{f}{U} \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{1}{HU} g_x, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{f}{U} \left(1 + \frac{U^2}{gH} \right) \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{f}{UH} w + \frac{f}{gH} g_x, \end{aligned} \quad (9)$$

которая может быть сведена к одному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\Delta_2 w - \frac{1}{H} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{g}{HU^2} w \right) + \left(\frac{f}{U} \right)^2 \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(1 + \frac{U^2}{gH} \right) \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{w}{H} \right] &= \\ &= \frac{1}{HU} \left(\frac{\partial^2 g_x}{\partial x^2} - \frac{f^2}{g} \frac{\partial g_x}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где Δ_2 – символ двумерного лапласиана.

Несмотря на относительно громоздкий вид этих уравнений, их анализ, в принципе, несложен. Много информации можно получить, например, рассматривая модель с гармонической зависимостью неоднородностей поля силы тяжести от x , когда задача сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Обозначим характерный пространственный масштаб рассматриваемых неоднородностей поля силы тяжести и связанных с ними атмосферных возмущений через L (в настоящем разделе он предполагается больше или порядка 100 км). Введем безразмерные переменные $X = x / L$, $Z = z / L$. Уравнение (10) принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left[\xi F^2 \left(\xi \Delta_2 w - \frac{\partial w}{\partial Z} \right) + w \right] + \xi B \frac{\partial}{\partial Z} \left[\xi \left(1 + F^2 \right) \frac{\partial w}{\partial Z} - w \right] =$$

$$= \frac{U}{g} \left(\frac{\partial^2 g_x}{\partial X^2} - \xi B \frac{\partial g_x}{\partial Z} \right). \quad (11)$$

Здесь введены обозначения для трех определяющих безразмерных параметров. Число Фруда $F = U / \sqrt{gH}$ характеризует соотношение сил инерции и плавучести, $B = fL^2 / gH$ – обратное число Бургера [1], характеризующее соотношение эффектов вращения и стратификации, геометрический фактор $\xi = H / L$ имеет смысл отношения аспекта. Число Фруда можно считать малым, по крайней мере, для умеренных скоростей фонового ветра (при $U = 10$ м/с, $H = 10^4$ м, оно порядка 1/30). Рассматриваем достаточно большие горизонтальные масштабы неоднородностей поля силы тяжести, например, порядка 100 км, так что $L \geq H$. Нетрудно убедиться, что для типичных значений параметров задачи в (11) все упомянутые безразмерные коэффициенты малы. Если сохранить в этом уравнении только слагаемые без малых коэффициентов, получается

$$\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \approx \frac{U}{g} \frac{\partial^2 g_x}{\partial X^2} \quad \text{или} \quad w \approx U \frac{g_x}{g}. \quad (12)$$

Но приближенное решение (12) не удовлетворяет условию непротекания на твердой поверхности (5). Это не удивительно, поскольку пока не учтены слагаемые с малыми коэффициентами при старших производных. С учетом этих слагаемых в решении появляется пограничный слой, который обеспечивает выполнение краевых условий. Чтобы получить решение в явном аналитическом виде, рассмотрим простейшую модель с периодической по x неоднородностью поля силы тяжести:

$$g_x = G \exp(-z/L) \cos(x/L), \quad g_z = G \exp(-z/L) \sin(x/L), \quad (13)$$

где G – амплитуда. Решение для возмущений также ищется в виде горизонтальной гармоники, в частности,

$$w(x, z) = W(z) \cos(x/L). \quad (14)$$

Для амплитуды W получается уравнение

$$\xi^2 [B(1 + F^2) - F^2] \frac{d^2 W}{dZ^2} + \xi(F^2 - B) \frac{dW}{dZ} - (1 - \xi^2 F^2) W = -U \frac{G}{g} (1 - \xi B) \exp(-Z). \quad (15)$$

Общее решение последнего уравнения стандартным образом ищется в виде суммы общего решения однородного уравнения

W_h и частного решения неоднородного W_n . Последнее, с учетом малости безразмерных параметров F, B, ξ , имеет вид

$$W_n \approx U \frac{G}{g} \exp(-Z). \quad (16)$$

Это – частный случай приближенного решения (12). Чтобы удовлетворить краевому условию на поверхности необходимо добавить соответствующее решение однородного уравнения. Его характеристическое уравнение имеет вид

$$\xi^2 [B(1+F^2) - F^2] \sigma^2 + \xi(F^2 - B)\sigma - (1 - \xi^2 F^2) = 0. \quad (17)$$

В зависимости от соотношения безразмерных параметров F, B, ξ , вообще говоря, возможны весьма различные ситуации. Рассматриваемая задача имеет общие черты с известной задачей о возмущениях стратифицированного течения над синусоидальным рельефом [2]. В последней имеется область генерации внутренних волн, заключенная в интервале масштабов L между $L_N \equiv U/f$ (где частота плавучести $N = \sqrt{-(g/\bar{\rho})(\partial\bar{\rho}/\partial z)}$ в данной модели равна $\sqrt{g/H}$) и $L_f \equiv U/f$. По обе стороны от нее находятся области, в которых волны не генерируются, и возмущения в различной степени заключены у нижней границы. В настоящей работе, в соответствии с рассматриваемыми масштабами неоднородностей, основное внимание уделяется области

$$L \geq L_f = U/f \quad \text{или} \quad B \geq F^2, \quad (18)$$

в которой внутренние волны не генерируются (более точное условие отсутствия волн выглядит громоздко; оно несколько мягче, чем (18)). В этой области дискриминант уравнения (17) отрицателен (т.е. в формуле для σ подкоренное выражение положительно). Согласно краевым условиям, из двух значений σ выбирается отрицательное, так что решение имеет вид

$$\begin{aligned} w &\approx U \frac{G}{g} \left[\exp\left(-\frac{z}{L}\right) - \exp\left(-\left|\sigma\right|\frac{z}{L}\right) \right] \cos \frac{x}{L}, \\ u' &\approx U \frac{G}{g} \left[\exp\left(-\frac{z}{L}\right) - \left|\sigma\right| \exp\left(-\left|\sigma\right|\frac{z}{L}\right) \right] \sin \frac{x}{L}, \\ v &\approx fL \frac{G}{g} \left[\exp\left(-\frac{z}{L}\right) - \left(\left|\sigma\right| + \xi^{-1}\right) \exp\left(-\left|\sigma\right|\frac{z}{L}\right) \right] \cos \frac{x}{L}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\sigma = \frac{B - F^2 - \left\{ (B - F^2)^2 + 4(1 - \xi^2 F^2) [B(1 + F^2) - F^2] \right\}^{1/2}}{2\xi [B(1 + F^2) - F^2]} < 0. \quad (20)$$

Таким образом, в данном случае к решениям типа (12), (16) добавляется пограничный слой толщиной порядка $L/|\sigma|$, который обеспечивает выполнение краевого условия (5). С учетом малости безразмерных параметров, выражение (20) существенно упрощается:

$$\sigma \approx -\frac{1}{\xi [B(1 + F^2) - F^2]^{1/2}}. \quad (21)$$

Отметим, что упомянутый погранслои относительно тонкий ($|\sigma| \gg 1$). С увеличением $|\sigma|$ в этом слое возрастает $|\partial w / \partial z|$, следовательно, абсолютная величина горизонтальных составляющих скорости, дивергенции и вихря (последнее видно, в частности, из второго уравнения (9)). Поскольку, согласно (21), $|\sigma| \gg \xi^{-1}$, в (19) обе горизонтальные составляющие возмущения скорости практически одинаково зависят от высоты.

Пусть, например, $B = 2F^2$ (т.е. условие (18) выполняется с двойным запасом). Тогда $\sigma \approx -1/\xi F = -(L/U)\sqrt{g/H}$, толщина возникающего пограничного слоя $h_{bl} \sim L/|\sigma| \approx U\sqrt{H/g}$. Если $L = 150$ км, $U = 10$ м/с, $H = 10^4$ м, то $|\sigma| \approx 500$, $h_{bl} \sim 300$ м. Если принять амплитуду неоднородности силы тяжести $G = 10^{-3}$ м/с², то, согласно (19), в пограничном слое

$$\begin{aligned} |u'| &\sim |\sigma|UG/g \approx LG/\sqrt{gH} \sim 0.5 \text{ м/с}, \\ v &\sim |\sigma|fLG/g \approx fL^2G/U\sqrt{gH} \sim 1 \text{ м/с} \end{aligned}$$

(последнее – при $f = 10^{-4}$ м/с). Во втором уравнении (4) в погранслое имеет место приближенный баланс $U\partial v / \partial x \approx -fu'$.

Легко проверить, что слагаемое $v\partial\bar{\rho} / \partial y$ в последнем уравнении (1.4) пренебрежимо мало, откуда

$$\frac{\partial\rho'}{\partial x} \approx -\frac{w}{U} \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}; \quad \rho' \approx \bar{\rho} \frac{L}{H} \frac{G}{g} \left[\exp\left(-\frac{z}{L}\right) - \exp\left(-|\sigma|\frac{z}{L}\right) \right] \sin\frac{x}{L}. \quad (22)$$

Вне погранслоя изопикны близки к эквипотенциальным поверхностям – мало отличаются от случая отсутствия фоновых тече-

ний. Но вблизи поверхности $\rho' \rightarrow 0$, следовательно, изопикны, вообще говоря, не совпадают с эквипотенциальными поверхностями. Это означает отклонения от гидростатического баланса и может приводить к возникновению заметных возмущений горизонтальной скорости в рассматриваемом пограничном слое.

В случае течения над водной поверхностью вывод соотношения (12) остается в силе. Но, в отличие от случая твердой горизонтальной поверхности, это соотношение теперь удовлетворяет нижнему граничному условию (6). Таким образом, (12) в рассматриваемом случае является приближенным решением для вертикальной скорости (несмотря на неучет при его выводе слагаемых с малыми коэффициентами при старших производных).

Смысл этого результата вполне прозрачен. При не слишком сильных фоновых ветрах и слабых эффектах вращения силы инерции малы, и движение воздуха, в основном, определяется архимедовыми силами, т.е. в рассматриваемом приближении имеет место движение по эквипотенциальным поверхностям, с которыми приближенно совпадают изобары и изопикны. Это означает гладкое обтекание неоднородностей, включая существующую в НПСТ неоднородность на поверхности воды; рассматриваемый выше пограничный слой при этом не образуется. Если $U = 30$ м/с, амплитуды $g_x(x, z)$ и $g_z(x, z)$ порядка 10^{-3} м/с², то w и u' получаются порядка $3 \cdot 10^{-3}$ м/с. Для возмущения вертикальной скорости это может быть значимой величиной. Если при этом $f = 10^{-4}$ с⁻¹, $L = 3 \cdot 10^5$ м, то возмущение «поперечной» составляющей скорости $v \sim fLg_z / g$ порядка $3 \cdot 10^{-3}$ м/с. Таким образом, в отличие от рассмотренного выше течения над твердой поверхностью, возмущения горизонтальной скорости оказываются весьма слабыми.

Выше рассматривалась модельная задача с максимально упрощенным фоновым состоянием (2), в котором фоновое течение не зависит от высоты. Это позволило свести задачу к уравнениям с постоянными коэффициентами и, тем самым, упростить аналитическое исследование. Решение (12) для вертикальной скорости в этом случае очень слабо зависит от высоты, поскольку g_x мало меняется на масштабах толщины тропосферы. Отсюда следуют очень малые значения амплитуд возмущений горизонтальной скорости (вне пограничного слоя над твердой поверхностью). В [14] приближенно рассмотрен и случай неоднородного по высоте фонового потока, например струйного

течения. В этом случае вертикальная скорость существенно зависит от высоты, и, как следует из уравнения неразрывности, амплитуды возмущений горизонтальной скорости могут заметно возрастать по сравнению с вышеприведенной оценкой.

3. Атмосферные возмущения, обусловленные вертикальным теплообменом в неоднородном поле силы тяжести

Выше рассматривалась модель идеальной среды, без учета теплообмена. При его учете обнаруживается еще один механизм нарушения гидростатического равновесия и возникновения атмосферных течений в НПСТ.

Геометрия задачи схематически представлена на рисунке (для простоты ограничиваемся двумерной задачей). Штриховыми линиями обозначены эквипотенциальные поверхности, с которыми, согласно вышеупомянутой теореме, совпадают изобары, изопикны и, следовательно, изотермы в состоянии покоя в идеальной среде. В области АСТ эти поверхности деформированы (в случае отрицательной АСТ изогнуты вниз). В этой области должна существовать некоторая горизонтальная температурная неоднородность (в атмосфере в качестве соответствующей переменной удобнее использовать потенциальную температуру). При учете теплообмена с окружающей средой (в атмосфере существен, прежде всего, турбулентный обмен с нижней границей—подстилающей поверхностью) эта неоднородность должна в какой-то мере релаксировать (на рисунке затушевана область, подверженная влиянию теплообмена с нижней границей, температура которой предполагается фиксированной). Это, в свою очередь, должно отражаться на поле давления (при изменении температуры меняется вес столба среды).

Таким образом, учет теплообмена приводит к изменениям пространственного распределения поля давления и, тем самым, к нарушению статического баланса силы тяжести и градиента давления. Тангенциальная (горизонтальная) составляющая силы тяжести теперь (с учетом теплообмена) компенсируется не в полной мере, а это означает возникновение течений. В этом принципиальное отличие от случая однородной силы тяжести,

в котором учет вертикального теплообмена меняет лишь вертикальные распределения полей температуры, плотности и давления и может не приводить к возникновению нескомпенсированных горизонтальных сил.

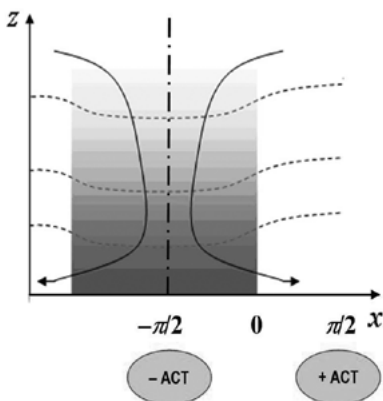


Рис. Геометрия задачи (пояснено в тексте).

Затушевана нижняя часть области аномалии силы тяжести, подверженная термическому влиянию нижней границы. Сплошные линии схематически изображают течения, возникающие вследствие связанного с теплообменом нарушения гидростатического баланса.

Если рассматривать неоднородности поля силы тяжести с горизонтальными масштабами порядка $100 \div 1000$ км, то эти масштабы много больше характерной толщины атмосферы. Поэтому наиболее существенна диффузия тепла в вертикальном направлении. Если в простейшей модели предполагать температуру горизонтальной нижней границы (подстилающей поверхности) фиксированной и постоянной, то эта граница при учете теплообмена, очевидно, будет влиять на поле температуры в нижнем слое среды. Изотермы и изобары вблизи границы при этом уже не совпадают с эквипотенциальными поверхностями; баланс горизонтальных сил нарушается в пользу вариаций силы тяжести, что должно приводить к возникновению течений.

3.1. Постановка задачи

Линеаризованная система уравнений гидротермодинамики для двумерной стационарной задачи в приближении Буссинеска с учетом планетарного вращения имеет вид:

$$0 = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} + f v + \nu \Delta_2 u + g_x, \quad (23)$$

$$0 = -f u + \nu \Delta_2 v, \quad (24)$$

$$0 = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \Delta_2 w - g \frac{\rho'}{\bar{\rho}} + g_z, \quad (25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (26)$$

$$\gamma w = \kappa \Delta_2 \theta, \quad \rho' = -\bar{\rho} \alpha \theta. \quad (27)$$

Здесь θ – возмущение потенциальной температуры воздуха; α – коэффициент его теплового расширения; ν – кинематический коэффициент вязкости, κ – коэффициент температуропроводности (предполагаются постоянными); $\gamma > 0$ – фоновый вертикальный градиент потенциальной температуры (предполагается устойчивая фоновая стратификация плотности).

На нижней границе (подстилающей поверхности) предполагается выполнение условий непротекания и прилипания, а также фиксированной температуры (отсутствия температурных возмущений):

$$u = v = w = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (28)$$

Вдали от поверхности предполагается выход на статический режим, существующий, согласно [13], при отсутствии теплообмена, т.е., без учета влияния подстилающей поверхности (горизонтальный теплообмен в рассматриваемой геометрии задачи незначителен). Последнее означает, что изобары, изопикны и изотермы вдали от нижней границы совпадают с эквипотенциальными поверхностями, а возмущения скорости затухают. Обозначим через Φ и η соответственно отклонения потенциала силы тяжести и вертикальные отклонения эквипотенциальных поверхностей, связанные с неоднородностями поля силы тяжести. По определению, $\eta = -\Phi / g = \int g_x dx / g$, где нижний предел интегрирования – «отсчетная» точка, в которой упомянутые отклонения отсутствуют. Соответственно, верхнее граничное условие для температурного возмущения имеет вид:

$$\theta \rightarrow -\gamma \eta = -\gamma \int g_x dx / g \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty. \quad (29)$$

3.2. Решение

Исключая из системы уравнений все неизвестные, кроме w , с учетом (3) получаем уравнение

$$\Delta_2^3 w + \frac{N^2}{\kappa \nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \left(\frac{f}{\nu} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0, \quad (30)$$

где $N = (\alpha g \gamma)^{1/2}$ – частота плавучести (частота Брента-Вяйсяля).

Удобно, как и в (13), анализировать модель с синусоидальной зависимостью неоднородностей поля силы тяжести от горизонтальной координаты:

$$g_x = G \exp(-kz) \cos kx, \quad g_z = -G \exp(-kz) \sin kx, \quad (31)$$

где k^{-1} – пространственный масштаб неоднородности. В этом случае решение также ищем в виде горизонтальной гармоники:

$$u(x, z) = U(z) \cos kx, \quad w(x, z) = W(z) \sin kx, \quad \text{и т. д.} \quad (32)$$

Уравнение (30) принимает вид

$$\left(\frac{d^2}{dZ^2} - 1\right)^3 W = -\text{Ta} \frac{d^2}{dZ^2} W + \text{R}W, \quad \text{R} = \frac{N^2}{\kappa \nu k^4}, \quad \text{Ta} = \frac{f^2}{\nu^2 k^4}. \quad (33)$$

Здесь введены безразмерная переменная $Z = kz$ и безразмерные параметры, являющиеся некоторыми аналогами чисел Рэлея и Тейлора.

Решение последнего уравнения стандартным образом ищем в виде линейной комбинации экспонент типа $\exp(\sigma kz)$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$(\sigma^2 - 1)^3 + \text{Ta}\sigma^2 - \text{R} = 0. \quad (34)$$

Решение для вертикальной скорости представляет собой линейную комбинацию трёх экспонент

$$w(x, z) = \sum_{j=1}^3 C_j \exp(k\sigma_j z) \sin kx, \quad (35)$$

где, с учётом затухания при $z \rightarrow \infty$, из шести корней σ_j отобраны три с отрицательными действительными частями (здесь предполагается, что эти корни различны). Учитывая уравнение неразрывности, имеем

$$u(x, z) = \sum_{j=1}^3 C_j \sigma_j \exp(k\sigma_j z) \cos kx. \quad (36)$$

В выражениях для возмущений температуры и давления, как нетрудно проверить, присутствуют также слагаемые с четвертой экспонентой $\exp(-kz)$. Выражение для температурного возмущения можно представить в виде

$$\theta(x, z) = \left[C_4 \exp(-kz) + \frac{\gamma}{\kappa k^2} \sum_{j=1}^3 \frac{C_j}{\sigma_j^2 - 1} \exp(k\sigma_j z) \right] \sin kx. \quad (37)$$

При характерных для атмосферы значениях параметров на рассматриваемых достаточно больших горизонтальных масштабах безразмерное число R весьма велико. Это позволяет существенно упростить анализ характеристического уравнения.

В частном случае $Ta = 0$ (т.е. без учета планетарного вращения) приближенные значения корней уравнения (34):

$$\sigma_1 \approx -R^{1/6}, \quad \sigma_{2,3} \approx -R^{1/6} \exp\left(\pm i \frac{\pi}{3}\right).$$

Решения для двух составляющих скорости (движение в «поперечном» направлении без учета кориолисовых ускорений не возникает) имеют вид

$$u \approx -\frac{1}{2} \Xi \sqrt{\frac{\kappa}{\nu}} \left[\exp\left(-\frac{z}{h}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{z}{2h}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{z}{h} - \frac{\pi}{6}\right) \right] \cos kx,$$

$$w \approx \frac{1}{2} h k \Xi \sqrt{\frac{\kappa}{\nu}} \left[\exp\left(-\frac{z}{h}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{z}{h}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{z}{h} + \frac{\pi}{6}\right) \right] \sin kx,$$

где введены масштабы длины $h = (\kappa \nu / N^2 k^2)^{1/6} = k^{-1} R^{-1/6}$ (вертикальный масштаб течений, возникающих у подстилающей поверхности) и скорости

$$\Xi = \frac{N G}{k g} \sim N \eta. \quad (38)$$

Возмущения скорости с высотой осциллируют, затухая на вертикальных масштабах порядка h . Если $\kappa = \nu = 1 \text{ м}^2/\text{с}$, $k = 0.5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}$ (что соответствует длине горизонтальной полуволны около 600 км), то $h \approx 300 \text{ м}$. В области отрицательной АСТ (например, вблизи вертикали $x = -\pi/2$) у поверхности преобладает горизонтальное растекание (положительная горизонтальная дивергенция) и нисходящее движение. Это понятно, поскольку в указанной области баланс горизонтальных сил нарушен в пользу силы тяжести, которая и определяет направление горизонтального движения.

Но вне узкой экваториальной зоны значения велики. Например, при $N = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $f = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $\kappa = \nu = 1 \text{ м}^2/\text{с}$, $k = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}$ (что соответствует длине горизонтальной полуволны около 150 км) $R \sim 10^{15}$, $Ta \sim 10^{11}$. И в этом случае корни характеристического уравнения σ_j велики по абсолютной величине по сравнению с

единицей, так что в формулах (34) и (37) можно пренебрегать единицей по сравнению с квадратами этих корней (физически это соответствует пренебрежимо малой роли горизонтального обмена). В дальнейшем имеет смысл ограничиться характерными для атмосферы значениями рассматриваемых параметров, для которых в этом случае выполняются неравенства

$$1 \ll R^{2/3} < Ta \ll R. \quad (39)$$

Три корня характеристического уравнения, фигурирующие в (35) – (37), выражаются в этом случае следующим образом:

$$\sigma_1 \approx -\left(\frac{R}{Ta}\right)^{1/2} = -\left(\frac{\nu}{\kappa}\right)^{1/2} \frac{N}{f}, \quad \sigma_{2,3} \approx -(1 \pm i)\left(\frac{Ta}{4}\right)^{1/4}, \quad (40)$$

причем

$$|\sigma_{2,3}| = Ta^{1/4} \gg |\sigma_1| \gg 1. \quad (41)$$

В выражении (37) первая из экспонент убывает очень медленно по сравнению с остальными тремя. Поэтому из краевого условия (29), в сочетании с (31) следует

$$C_4 \approx -\frac{\gamma G}{kg}. \quad (42)$$

Остальные коэффициенты C_j находятся из системы трех уравнений, вытекающих из краевых условий (28):

$$\sum_{j=1}^3 C_j = 0, \quad \sum_{j=1}^3 \sigma_j C_j = 0, \quad \sum_{j=1}^3 C_j / \sigma_j^2 \approx \frac{\kappa k G}{g}.$$

Решение имеет вид

$$C_1 \approx \kappa k \frac{G}{g} \sigma_1^2 \approx \kappa k \frac{G}{g} \frac{R}{Ta} = \nu k \frac{G}{g} \left(\frac{N}{f}\right)^2,$$

$$C_{2,3} \approx -\kappa k \frac{G}{g} \frac{\sigma_1^2 \sigma_{3,2}}{\sigma_{3,2} - \sigma_{2,3}} = -\nu k \frac{G}{g} \left(\frac{N}{f}\right)^2 \frac{\sigma_{3,2}}{\sigma_{3,2} - \sigma_{2,3}}.$$

Отсюда получаем приближенные решения для w , u , θ :

$$w \approx \nu k \frac{G}{g} \left(\frac{N}{f}\right)^2 \left[\exp\left(-\frac{z}{h_B}\right) - 2^{1/2} \exp\left(-\frac{z}{h_E}\right) \cos\left(\frac{z}{h_E} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \sin kx, \quad (43)$$

$$u \approx vk \left(\frac{v}{\kappa} \right)^{1/2} \frac{G}{g} \left(\frac{N}{f} \right)^3 \times \quad (44)$$

$$\times \left[-\exp\left(-\frac{z}{h_B}\right) + \left(4 \frac{\text{Ta}^3}{R^2}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{z}{h_E}\right) \sin\left(\frac{z}{h_E}\right) \right] \cos kx,$$

$$\theta \approx -\frac{\gamma G}{kg} \left[\exp(-kz) - \exp\left(-\frac{z}{h_B}\right) \right] \sin kx. \quad (45)$$

Здесь введены масштабы длины

$$h_B = (k\sigma_1)^{-1} = \frac{1}{k} \left(\frac{\text{Ta}}{R} \right)^{1/2} = \left(\frac{\kappa}{v} \right)^{1/2} \frac{f}{kN}, \quad h_E = \frac{1}{k} \left(\frac{\text{Ta}}{4} \right)^{-1/4} = \left(\frac{2v}{f} \right)^{1/2}.$$

Первый из них – толщина слоя, в котором число Бургера [1] порядка единицы (следовательно, влияния вращения и стратификации примерно одинаковы), второй – экмановский масштаб [1, 2].

Характерная особенность настоящей задачи, учитывающей эффекты планетарного вращения – возникновение вихревых возмущений под влиянием НПСТ. Приближенное решение уравнения (24) имеет вид

$$v \approx \left(\frac{\kappa}{v} \right)^{1/2} \Xi \left[(1 - \delta) e^{-kz} - \exp\left(-\frac{z}{h_B}\right) + \delta \exp\left(-\frac{z}{h_E}\right) \cos\left(\frac{z}{h_E}\right) \right] \cos kx, \quad (46)$$

где введен безразмерный параметр

$$\delta = \frac{(2R)^{1/2}}{\text{Ta}^{3/4}} = \frac{Nvk}{(\kappa f^3/2)^{1/2}} \ll 1$$

и фигурирует введенный выше в (38) масштаб скорости Ξ .

Вдали от подстилающей поверхности, где «вязким» слагаемым в (4) можно пренебречь, $\bar{\rho}^{-1}(\partial p' / \partial x) \approx fv + g_x$. Первое слагаемое в правой части («динамическое») много меньше второго («статического»):

$$\left| \frac{fv}{g_x} \right| \sim \left(\frac{\kappa}{v} \right)^{1/2} \frac{fN}{gk} \ll 1.$$

3.3. Анализ решения

Для определенности будем анализировать решение в области отрицательной аномалии силы тяжести, которой качественно соответствует рисунок. В рассматриваемой модели этому соответствуют, например, окрестности вертикали $x = -\pi/2$ (на рисунке эта вертикаль схематически изображена штрих-пунктиром). Правее этой вертикали в области $(-\pi/2 < x < \pi/2)$ отклонение горизонтальной составляющей силы тяжести g_x положительно (на рисунке направлено от этой вертикали направо, к периферии, поскольку в области отрицательной аномалии имеет место «дефицит притяжения»). Вблизи подстилающей поверхности эта сила, как упоминалось выше, доминирует (баланс горизонтальных сил нарушен в пользу силы тяжести), поэтому горизонтальная скорость в этой области вблизи поверхности положительна, а выше имеет место компенсационное течение ($u < 0$) с периферии к центру отрицательной аномалии $x = -\pi/2$, что соответствует правой линии тока на рисунке. Эти физические соображения вполне согласуются с полученным решением (44). Но учет вращения привел к важному отличию решения (44) от аналогичной задачи без учета кориолисовых ускорений [15] – к существенной асимметрии слоев с положительной и отрицательной дивергенцией. Положительная дивергенция (отток из области отрицательной аномалии) имеет место только в тонком экмановском слое, в то время как отрицательная (вток) – выше и в более толстом слое толщиной порядка h_B . Отношение интенсивностей «втока» и «оттока» – обратное отношению толщины слоев, как это и должно быть из соображений баланса массы. Сходящиеся течения в поле кориолисовых сил приводят к возникновению положительной завихренности. Поэтому выражаемая решением (46) тангенциальная скорость положительна вплоть до уровней порядка k^{-1} . Вблизи подстилающей поверхности, в пограничном слое, расходящиеся течения, в принципе, должны генерировать отрицательную завихренность. Но поскольку это – тонкий слой, в котором течения эффективно подавляются вязкостью, в рассматриваемом приближении (39) эти слабые движения теряются. Поэтому в области отрицательной аномалии силы тяжести рассматриваемый механизм, в основном, приводит к генерации циклонической завихренности. Отметим, что это качественно согласуется с анализом натуральных данных, представленным в [8, 9]. В упомянутых работах

отмечена положительная корреляция активности тропических циклонов с областями пониженных значений вертикальной составляющей аномалии силы тяжести. Если коэффициенты обмена ν , k одного порядка, то скорость v возникающего вихревого движения порядка $\Xi \sim N\eta$. При $N = 10^2 \text{ с}^{-1}$, отклонении геоида $\eta = 30 \text{ м}$, $\nu \sim 0.3 \text{ м/с}$.

Амплитуда скорости возникающих вертикальных движений, согласно (43),

$$\nu k \frac{G}{g} \left(\frac{N}{f} \right)^2 = \nu k^2 |\eta| \left(\frac{N}{f} \right)^2. \quad (47)$$

Она возрастает с уменьшением параметра Кориолиса. Но рассмотренная модель применима при не слишком малых значениях этого параметра: согласно второму неравенству (39), f должен превышать величину $f_{\min} \equiv (\nu k^2 N^2)^{1/3}$. Подставив ее в (47), получаем для максимальной амплитуды вертикальной скорости оценку $|\eta| (\nu k^2 N^2)^{1/3} = |\eta| f_{\min}$. Если $\nu = 10 \text{ м}^2/\text{с}$, $k = 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^{-1}$ (что соответствует длине горизонтальной полуволны около 1000 км), $N = 10^2 \text{ с}^{-1}$ то $f_{\min} \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-2}$. При $|\eta| = 50 \text{ м}$ амплитуда вертикальной скорости получается порядка 0.1 см/с. Для сравнения, согласно [18] (стр. 254), в области пассатов $w = -0.4 \text{ см/с}$. Там же приведен пример значения вертикальной скорости в циклоне умеренных широт: 0.57 см/с. Полученная выше теоретическая оценка амплитуды заметно меньше этих цифр. Но надо иметь в виду, из решения следует существование хотя и медленных, но стабильных вихревых и вертикальных (упорядоченных) движений на больших территориях (в данном примере – в области площадью порядка 1 млн кв. км).

4. Генерация внутренних гравитационных волн при воздействии неоднородностей поля силы тяжести на атмосферное течение

Хорошо известно, что при обтекании фоновым течением неоднородностей рельефа подстилающей поверхности, в зависимости от горизонтального масштаба этих неоднородностей,

возможна генерация внутренних гравитационных волн (ВГВ; с учетом эффектов вращения – инерционно-гравитационных волн), либо захваченных возмущений [2]. Воздействие неоднородностей поля силы тяжести на фоновое течение в этом отношении оказывается аналогичным. Выше в разделе 2 был рассмотрен случай достаточно больших горизонтальных масштабов неоднородностей, когда генерируются захваченные возмущения. В настоящем разделе рассмотрен случай генерации внутренних волн.

4.1. Постановка задачи

Постановка задачи в ряде отношений аналогична стандартной задаче о гравитационных волнах над синусоидальным рельефом [2]. Но в данном случае волны генерируются не за счет неоднородных краевых условий, а благодаря наличию неоднородных объемных сил тяжести (при однородных краевых условиях). Ниже, как и в [2] будем переходить к системе отсчета, движущейся вместе с фоновым горизонтальным течением. В таких движущихся системах отсчета величины g_x и g_z зависят не только от координат, но и от времени. С учетом этого, исходная линеаризованная двумерная система уравнений гидродинамики ([2], раздел 6.4) в движущейся с потоком системе отсчета имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \bar{\rho} g_x(x + Ut, z), \\ \bar{\rho} \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial z} - g\rho + \bar{\rho} g_z(x + Ut, z), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (48)$$

где t – время; p , ρ – возмущения плотности и давления соответственно. Как и в [2], на этой стадии исследования не учитываем кориолисовы ускорения (рассматриваем возмущения не слишком больших горизонтальных масштабов).

На нижней границе $z = 0$ предполагаем выполнение условия непротекания $w = 0$ (над поверхностью воды, как упоминалось выше, вообще говоря, требуется другое условие).

4.2. Решение и его анализ

Исключая из системы (48) все неизвестные кроме w , приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{\rho} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + N^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{N^2}{g} \frac{\partial^2 g_x(x+Ut, z)}{\partial x \partial t}. \quad (49)$$

Распределение фоновой плотности аппроксимируем экспонентой:

$$\bar{\rho}(z) = \rho_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right), \quad \text{откуда} \quad N^2 = \frac{g}{H}, \quad (50)$$

где $H = \text{const}$ – эффективная толщина среды.

Удобно анализировать модель с синусоидальной зависимостью неоднородностей поля силы тяжести от горизонтальной координаты; в покоящейся системе отсчета этому соответствуют выражения (31). В движущейся системе отсчета, связанной с течением,

$$g_x = G \exp(-kz) \cos[k(x + Ut)]. \quad (51)$$

Решение уравнения (49) в этой системе ищем в виде

$$w = W_1(z) \cos[k(x = Ut)] + W_2(z) \sin[k(x = Ut)]. \quad (52)$$

Для амплитуды $W_1(z)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2 \tilde{W}_1}{dz^2} + \frac{\tilde{W}_1}{\lambda^2} = \frac{N^2 G}{Ug} \exp(-\tilde{k}z). \quad (53)$$

для $W_2(z)$ – аналогичное однородное уравнение. В некоторых случаях бывает удобнее пользоваться переменными

$$\tilde{W}_{1,2}(z) = W_{1,2}(z) \exp(-z/2H), \quad (54)$$

для которых последнее уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 W_1}{dz^2} - \frac{1}{H} \frac{dW_1}{dz} + \left[\left(\frac{N}{U} \right)^2 - k^2 \right] W_1 = \frac{N^2 G}{Ug} \exp(-kz), \quad (55)$$

Здесь $\tilde{k} = k + 1/2H$; вертикальный масштаб

$$\lambda = \left[\left(\frac{N}{U} \right)^2 - \left(\frac{1}{2H} \right)^2 - k^2 \right]^{-1/2}. \quad (56)$$

В случае горизонтальных неоднородностей силы тяжести достаточно малых масштабов (т.е. при достаточно больших

значениях k) выражение в квадратных скобках в (56) отрицательно, что соответствует отрицательным значениям величины λ^2 . В этом случае решение экспоненциально затухает с высотой («захваченные возмущения», рассмотренные в разделе 2). Но представляет интерес и случай положительных значений λ^2 . Примем характерные для атмосферы значения $N = 10^2 \text{ с}^{-1}$, $U = 10 \text{ м/с}$. В этом случае $H = 105 \text{ м}$, $U/N = 10^3 \text{ м}$, и при горизонтальных масштабах неоднородностей, много больших километра

$$\lambda \approx U/N. \quad (57)$$

Общее решение уравнения (55) можно записать в виде

$$\tilde{W}_1(z) = C_1 \sin\left(\frac{z}{\lambda}\right) + C_2 \cos\left(\frac{z}{\lambda}\right) + \frac{\lambda^2 N^2 G}{Ug(1 + (\lambda \tilde{k})^2)} \exp(-\tilde{k}z).$$

Аналогичным образом,

$$\tilde{W}_2(z) = C_3 \sin\left(\frac{z}{\lambda}\right) + C_4 \cos\left(\frac{z}{\lambda}\right).$$

где C_i – постоянные интегрирования. Они выбираются с учетом краевого условия на поверхности $z = 0$ и условия излучения – групповая скорость должна быть направлена вверх ([2], стр.175). Это соответствует направленной вниз фазовой скорости ВГВ [2]. В данном случае получаем $C_1 = C_4 = 0$,

$$C_3 = -C_2 = \frac{\lambda^2 N^2 G}{Ug[1 + (\lambda \tilde{k})^2]}.$$

В итоге выражение для вертикальной скорости имеет вид

$$w = \frac{\lambda^2 N^2 G}{Ug[1 + (\lambda \tilde{k})^2]} \times \left\{ \exp(-kz) \cos[k(x + Ut)] - \exp\left(\frac{z}{2H}\right) \cos\left[\frac{z}{\lambda} + k(x + Ut)\right] \right\}. \quad (58)$$

Воспользовавшись уравнением неразрывности, находим выражение для возмущения горизонтальной скорости:

$$u = \frac{\lambda N^2 G}{U g k \left[1 + (\lambda \tilde{k})^2 \right]} \left\langle k \lambda e^{-kz} \sin[k(x + Ut)] + \left\{ \frac{\lambda}{2H} \sin \left[\frac{z}{\lambda} + k(x + Ut) \right] + \cos \left[\frac{z}{\lambda} + k(x + Ut) \right] \right\} e^{z/2H} \right\rangle. \quad (59)$$

С учетом этого, из первого уравнения (48) находим поле возмущений давления

$$p = \bar{p} \frac{G}{k} \left\langle \left[1 - \frac{k \lambda^2 N^2}{g (1 + (\lambda \tilde{k})^2)} \right] e^{-kz} \sin[k(x + Ut)] - \frac{\lambda N^2}{g (1 + (\lambda \tilde{k})^2)} \times \left\{ \frac{\lambda}{2H} \sin \left[\frac{z}{\lambda} + k(x + Ut) \right] + \cos \left[\frac{z}{\lambda} + k(x + Ut) \right] \right\} e^{z/2H} \right\rangle. \quad (60)$$

Слагаемые в выражениях (58)-(60) можно разделить на две категории. Первая из них (с множителем $\exp(-kz)$) непосредственно описывает обтекание потоком поверхностей равного потенциала. Эти слагаемые не носят волновой характер (не содержат волн, распространяющихся по вертикали) и медленно затухают с высотой на тех же масштабах k^{-1} , что и аномалия силы тяжести. Остальные слагаемые содержат множители $\sin[z/\lambda + k(x + Ut)]$, $\cos[z/\lambda + k(x + Ut)]$ и описывают внутренние гравитационные волны, фазовая скорость которых направлена вниз, а групповая – вверх. Амплитуда этих волн в поле скорости растет с высотой как $\exp(z/2H)$. Вертикальная составляющая волнового вектора составляет λ^{-1} , частота – $\omega = kU$, вертикальная фазовая скорость – $k\lambda U$.

Решение зависит от трех пространственных масштабов: k^{-1} , H , U/N . Порядок первого из них (пространственные масштабы НПСТ) предполагаем не менее 100 км. Второй, видимо, следует считать порядка толщины тропосферы, т.е. ~ 10 км. (Отметим, что характерное для атмосферы значение $N = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ получается из выражения для частоты плавучести $N = \sqrt{-(g/\bar{\rho})(\partial \bar{\rho} / \partial z)}$ при характерном вертикальном масштабе изменения фоновой плотности H порядка 100 км, в то время как в реальной атмосфере $H \sim 10$ км. Это – издержка используемой модели несжимаемой жидкости.) Третий масштаб при рассматриваемых значе-

ниях параметров – не более нескольких километров. Из такого соотношения масштабов следует (57), а также

$$\lambda \ll H \ll k^{-1}, \quad \tilde{k} \approx 1/2H, \quad \lambda\tilde{k} \approx \lambda/2H \approx U/2HN \ll 1, \\ \frac{k\lambda^2 N^2}{g(1+(\lambda\tilde{k})^2)} \approx \frac{\lambda^2}{Hk^{-1}} \ll 1, \quad \frac{\lambda N^2}{g(1+(\lambda\tilde{k})^2)} \approx \frac{\lambda}{H} \ll 1. \quad (61)$$

Отсюда следует, что вертикальный масштаб (длина волны) $\sim 2\pi U/N$, вертикальная фазовая скорость $-k\lambda U \approx kU^2/N$.

Вертикальный поток волновой энергии оценивается по формуле [2]

$$F_z = \overline{pw},$$

где черта в данном случае означает осреднение по длине волны. Видно, что при этом осреднении ненулевой вклад дает только произведение слагаемых с $\cos[z/\lambda + k(x + Ut)]$ в (58) и (60). Нетрудно получить приближенное выражение, не зависящее от высоты:

$$F_z \approx \frac{1}{2}\rho_0 \frac{NU^2 G^2}{g^2 k}. \quad (62)$$

Этот результат прозрачно интерпретируется. Горизонтальное воздушное течение в НПСТ искривляется и имеет тенденцию двигаться вдоль поверхностей равного потенциала (как обсуждалось выше, вблизи подстилающей поверхности ситуация сложнее, поскольку условие непротекания исключает возможность нормальной к этой поверхности составляющей движения). Это означает появление вертикальной составляющей скорости с амплитудой

$$w \sim U \frac{G}{g}.$$

Последнее выражение с учетом (57) и (61) приближенно равно амплитуде выражения (58). Амплитуда вертикального смещения потока воздуха (или эквипотенциальных поверхностей – амплитуда отклонений геоида), обозначаемая в настоящем разделе через h , порядка G/gk , откуда $G/g \sim hk$. Если подставить это в (62), то получается выражение, практически совпадающее (с точностью до обозначений) с формулой (6.8.7) из

[2]. Последняя описывает вертикальный поток энергии ВГВ, обусловленный неоднородностями рельефа амплитудой h . Таким образом, учет воздействия АСТ (искривленные эквипотенциальные поверхности) приводит к эффекту, аналогичному влиянию неоднородностей рельефа той же амплитуды и горизонтальных масштабов.

Если принять амплитуду АСТ $G = 10^{-3} \text{ м/с}^2$, $k = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}$ (что соответствует длине полуволны около 150 км), $U = 20 \text{ м/с}$, $N = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $\rho_0 = 1 \text{ кг/м}^3$, то получаем поток энергии около 10^{-3} Вт/м^2 . Если $G = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2$, $k = 4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}$, $U = 30 \text{ м/с}$, то поток энергии получается порядка $0.5 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/м}^2$. Такие потоки, в некоторых ситуациях, видимо, могут быть значимыми, хотя чаще не могут конкурировать с наиболее эффективными механизмами генерации ВГВ в атмосфере (склоны эквипотенциальных поверхностей обычно весьма пологи по сравнению с рельефом подстилающей поверхности). Для иллюстрации упомянем, что, согласно [19], средний поток энергии, поступающий из нижней атмосферы в верхнюю, благодаря волновым возмущениям и приливным колебаниям составляет порядка $2 \cdot 10^{-4} \text{ Вт/м}^2$. Но говорить о практической значимости рассмотренного выше механизма генерации внутренних гравитационных волн было бы преждевременно. Основные результаты настоящего раздела авторы видят в том, что 1) обнаружен неизвестный ранее механизм генерации атмосферных возмущений под влиянием неоднородностей поля силы тяжести; 2) обнаружен механизм генерации ВГВ в атмосфере, который ранее не обсуждался.

Отметим, что полученный результат существенно зависит от предполагаемого на нижней границе условия непротекания $w|_{z=0} = 0$. Это условие справедливо, когда подстилающая поверхность представляет собой плоскую горизонтальную поверхность. Ситуация, как обсуждалось выше, заметно меняется при рассмотрении процессов над поверхностью океана. Эта поверхность в использованной системе координат в НПСТ, вообще говоря, не является горизонтальной плоскостью. В удовлетворительном приближении она совпадает с эквипотенциальной поверхностью, отклонение которой от горизонтали обозначим $h_0(x) \approx -\Phi(x, 0)/g$, где Φ – потенциал силы тяжести. Условие непротекания на этой поверхности в линейном приближении можно записать в виде (6). Легко видеть, что в этом случае вид решения существенно упрощается. Краевые условия прибли-

женно удовлетворяются, при нулевых значениях всех коэффициентов C_i . Например, приближенное решение для вертикальной скорости имеет вид

$$w \approx \frac{\lambda^2 N^2 G}{Ug} \exp(-kz) \cos[k(x + Ut)] \approx U \frac{G}{g} \exp(-kz) \cos[k(x + Ut)].$$

Это означает гладкое обтекание всех эквипотенциальных поверхностей без генерации волн. При $G = 10^{-3} \text{ м/с}^2$, $U = 20 \text{ м/с}$ вертикальная скорость у подстилающей поверхности составляет около $2 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}$. С высотой она убывает столь медленно (на масштабах порядка k^{-1}), что в тропосфере практически не меняется. Отклонение давления в той же системе координат имеет вид

$$p \approx \bar{p} \frac{G}{k} e^{-kz} \sin[k(x + Ut)].$$

При указанных значениях параметров и $k = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}$ амплитуда этого отклонения у поверхности около 0.5 гПа и столь же медленно убывает с высотой.

5. Некоторые направления дальнейших исследований

Приведенный выше материал не вполне исчерпывает возможности аналитических исследований. Например, пока рассмотрены лишь двумерные модели. Трехмерные задачи в простейших случаях, видимо, также могут быть исследованы аналитическими методами. Вероятно, можно продвинуться за пределы рассмотренных моделей несжимаемой атмосферы, либо приближения Буссинеска. Помимо внутренних гравитационных волн, возможно, имеет смысл рассмотреть также генерацию инерционно-гравитационных волн, т.е. рассмотреть аналогичную задачу при *больших* горизонтальных масштабах неоднородностей, когда существенны кориолисовы ускорения. Представляет интерес также рассмотреть влияние на атмосферные процессы медленных вертикальных движений, возникающих, как показано выше, под влиянием НПСТ.

Упомянем еще один возможный геофизический эффект. НПСТ, вообще говоря, приводят к некоторым вариациям глуби-

ны водоемов, поскольку поверхность воды в известном приближении совпадает с эквипотенциальной поверхностью. В случае мелких морей это может означать заметные относительные вариации глубины, связанные с кривизной поверхностей равного потенциала. Например, глубина северных морей (Карского, Баренцева) на больших акваториях измеряется десятками метров, а Каспийского моря – единицами метров. Пусть, например, глубина моря в отсутствие НПСТ составляет 40 м, а с учетом отклонений геоида – 30 м. Это означает, что учет НПСТ приведет к более, чем двойному уменьшению числа Рэлея (пропорционального третьей степени толщины слоя) в этом слое воды. Поскольку зависимость конвекции в слое от числа Рэлея бывает критической, в таких ситуациях может существенно меняться термодинамика этого слоя – расчетные вертикальные потоки тепла, условия для существования ледового покрова, интенсивность испарения. Изменение температуры поверхности воды может иметь значение и для условий стратификации нижней атмосферы. Представляется, что возможность реализации подобных эффектов также целесообразно исследовать.

6. Заключение

Вопреки распространенному мнению, влияние на атмосферу неоднородностей поля силы тяжести не сводится лишь к деформациям гидростатического состояния. Выше показано, что НПСТ, вообще говоря, влияют и на динамику – могут приводить к возникновению атмосферных течений или к модификации существующих течений. Амплитуды динамических возмущений, связанных с НПСТ, согласно приведенным оценкам, обычно невелики. Но следует иметь в виду, что эти возмущения генерируются практически постоянно и на очень больших территориях. Поэтому в настоящее время нельзя исключить возможность «накопления» их влияния на погоду и климат. Можно рассчитывать, что по мере совершенствования численных моделей этот вопрос будет постепенно проясняться.

Список литературы

1. *Педлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика. М.: Мир, 1984. Т.1. 398 с. (Pedlosky J. Geophysical fluid dynamics. Springer-Verlag, 1987. 710 p.)
2. *Гилл А.Е.* Динамика атмосферы и океана. Т. 1. М.: Мир, 1986. 397 с. (Gill A.E. Atmosphere-Ocean Dynamics. N.Y. et al: Academic Press, 1982).
3. *Цубои Т.* Гравитационное поле Земли. М.: Мир, 1982. 286 с.
4. *Макоско А.А., Панин Б.Д.* Динамика атмосферы в неоднородном поле силы тяжести. Санкт-Петербург: РГГМУ, 2002. 246 с.
5. *Садоков В.П.* Гравитационное поле Земли и циркуляция атмосферы // Метеорология и гидрология. 1971. № 4. С. 14–26.
6. *Рудяев Ф.И.* Влияние аномального гравитационного поля Земли на циркуляционные системы атмосферы // ДАН СССР. 1990. Т. 310. № 6. С. 1345–1348.
7. *Борисенков Е.П.* Гравитационный ветер и его роль в формировании атмосферных процессов // Вестник СПбГУ. Сер. 7. 2004. Вып. 1. С. 46–57.
8. *Yaroshevich M.I.* Investigation of possible effect of gravitational field inhomogeneities on tropical cyclones // Trop. Cyclone Res. Rev. 2013. V. 2. N 2. P. 124–130.
9. *Макоско А.А., Ярошевич М.И.* Оценки регрессионных связей характеристик тропических циклонов и аномалий силы тяжести // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2016. Т. 52. № 3. С. 267–271.
10. *Макоско А.А., Рубинштейн К.Г., Лосев В.М., Боярский Э.А.* Математическое моделирование атмосферы в неоднородном поле силы тяжести. М.: Наука, 2007. 58 с.
11. *Бычкова В.И., Макоско А.А., Рубинштейн К.Г., Егорова Е.Н.* Воспроизведение начала летнего индийского муссона в экспериментах с моделью общей циркуляции атмосферы Гидрометцентра России // Метеорол. и гидрол. 2011. № 7. С. 16–31.
12. *Макоско А.А., Рубинштейн К.Г.* Исследование спиральности азиатско-го муссона по данным реанализа и результатам численного моделирования циркуляции атмосферы с учетом неоднородности силы тяжести. Докл. РАН. 2014. Т. 459. № 2. С. 237–242.
13. *Кочин Н.Е.* Изменение температуры и давления с высотой в свободной атмосфере. Собр. соч. Т. 1. М.-Л.: Изд. АН СССР. С. 530-591.

14. *Ингель Л.Х., Макоско А.А.* Возмущения геострофического течения под влиянием неоднородностей поля силы тяжести // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2017. Т. 53. № 5. С. 579–587.
15. *Ингель Л.Х., Макоско А.А.* Об одном механизме влияния неоднородностей поля силы тяжести на динамику атмосферы // Журнал технической физики. 2017. Т. 87. № 9. С. 1312–1316.
16. *Ингель Л.Х., Макоско А.А.* Генерация внутренних гравитационных волн при воздействии неоднородностей поля силы тяжести на атмосферное течение // Геофизические исследования. 2017. Т.18. № 3. С. 60–66.
17. *Schubert W.H., Hack J.J.* Transformed Eliassen balanced vortex model // J. Atmos. Sci. 1983. V. 40. P. 1571–1583.
18. *Хржан А.Х.* Физика атмосферы. М.: МГУ, 1986. 328 с.
19. *Jarvis M.J.* Atmospheric science: Bridging the atmospheric divide // Science. 2001. V. 293. N. 5538. P. 2218–2219.

Л.Х. Ингель, А.А. Макоско

**Введение в теорию
влияния неоднородностей поля силы тяжести
на динамику атмосферы**

Формат 60 x 84/16

Гарнитура Таймс

Усл. печ. л. 2,09. Усл. изд. л. 1,18

Тираж 100 экз.

Заказ

Издатель – Российская академия наук

Подготовлено к печати

Управлением научно-издательской деятельности РАН

Отпечатано в цифровой типографии ООО «Нюанс»
117036, Москва, ул. Дмитрия Ульянова, д. 26А, стр.2

Издано в авторской редакции

Издается в соответствии с распоряжением
президиума Российской академии наук
от 24 октября 2017 г. №10106-765,
распространяется бесплатно.