СОДЕРЖАНИЕ

Номер 1, 2022

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

ТЕОРИЯ СИСТЕМ И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.929.4+517.444

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ЛЯПУНОВА И СВОЙСТВО АСИМПТОТИЧЕСКОЙ НОРМАЛЬНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ УСТОЙЧИВЫХ ПОЛИНОМОВ[1]

А. М. Цирлин

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский, Россия

e-mail: tsirlin@sarc.botik.ru

Поступила в редакцию 20.08.2021 г.
После доработки 13.09.2021 г.
Принята к публикации 27.09.2021 г.

Показано, что из теоремы Ляпунова о свойствах распределения суммы случайных величин с различными плотностями распределения следуют условия, при которых коэффициенты устойчивых полиномов не только положительны, но их последовательность с ростом степени полинома приближается к нормальному распределению. Эта последовательность унимодальна, номер максимального коэффициента и его значение нетрудно вычислить по приведенным в статье формулам. Дополнительные признаки устойчивости позволяют приблизить необходимые условия устойчивости, основанные на последовательности коэффициентов полинома, к необходимым и достаточным, не используя алгебраические и частотные критерии устойчивости.

DOI: 10.31857/S0002338822010115

0. Введение. Рассмотрим проблему анализа устойчивости линейных динамических систем. Полином

$$P_n(y) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_0 \tag{0.1}$$

с действительными коэффициентами называют устойчивым, если действительные части всех корней характеристического уравнения $P_n(y) = 0$ отрицательны.

Согласно основной теореме алгебры, этот полином может быть представлен в форме произведений элементарных полиномов вида $P_{1i}(y) = y + r_i$ и $P_{2i}(y) = y^2 + 2r_i y + (\omega_i^2 + r_i^2)$, где $-r_i$ и ω_i – действительная и мнимая части комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения. Полином $P_n(y)$ устойчив тогда и только тогда, когда устойчив каждый из элементарных полиномов.

В свою очередь для устойчивости каждого из элементарных полиномов необходимо и достаточно, чтобы их коэффициенты были положительны. Коэффициенты полинома $P_n(y)$ представляют собой свертку коэффициентов элементарных полиномов, так что у устойчивого полинома они заведомо положительны. Это свойство легко проверяется, но оно не достаточно. Полином с положительными коэффициентами может быть и неустойчивым. Необходимые и достаточные условия устойчивости дают алгебраические критерии Рауса, Гурвица, частотные критерии Михайлова–Найквиста [1]. Использование этих критериев при большом значении n достаточно трудоемко.

Ниже сделана попытка найти дополнительные признаки, которые характерны для последовательности коэффициентов устойчивых полиномов. Эти признаки вытекают из свойств операции свертки.

[1] Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 20-61-46013).

Операция свертки функций действительного переменного – одна из самых распространенных в прикладной математике [2–7]. Она имеет форму

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \tag{0.2}$$

в непрерывном и

$$z(j) = x(j) * y(j) = \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} x_i y_{j-i} \tag{0.3}$$

в дискретном случаях.

Приведем два примера.

Плотность распределения суммы z независимых случайных величин x и y представляет собой свертку плотностей распределения каждой из них. Так что

$$p_z(z) = p_x(z) * p_y(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x)p_y(z-x)dx. \tag{0.4}$$

Коэффициенты c_j произведения $P_{n+m}(x)$ двух полиномов вида

$$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n, \tag{0.5}$$

и

$$P_m(x) = x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_m$$

равны свертке последовательностей их коэффициентов

$$c_j = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{j-i}, \quad j = 0,\ldots,n+m, \quad a_0 = b_0 = 1. \tag{0.6}$$

Коэффициенты $b_{i-j} = 0$ при $i - j < 0$ и $i - j > m$.

Некоторые теоремы теории вероятностей, по существу, определяют свойства операции свертки и полностью справедливы применительно к последовательностям коэффициентов полиномов [3].

Приведем некоторые свойства операции свертки [4].

1. Свертка коммутативна, так что

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t).$$

2. Свертка ассоциативна:

$$x(t) * (y_1(t) * y_2(t)) = (x(t) * y_1(t)) * y_2(t).$$

3. Свертка дистрибутивна относительно сложения:

$$x(t) * (y_1(t) + y_2(t)) = x(t) * y_1(t) + x(t) * y_2(t).$$

4. Площадь под кривой $z(t)$, если она ограничена, равна произведению площадей под кривыми $x(t)$ и $y(t)$. Как следствие, если $x(t)$ и $y(t)$ неотрицательны и их площадь равна единице, то их свертка $z(t)$ также имеет единичную площадь.

5. Ее первый момент

$$m_z = \int_0^{\infty} tz(t)dt = m_x + m_y, \tag{0.7}$$

а второй центральный момент

$$d_z = \int_0^{\infty} (t-m_z)^2 z(t)dt = d_x + d_y. \tag{0.8}$$

В теории вероятностей первый момент – математическое ожидание, а второй центральный – дисперсия случайной величины.

1. Предельные теоремы теории вероятностей. 1.1. Теорема Муавра–Лапласа. Согласно предельной теореме Муавра–Лапласа, при стремлении числа опытов n к бесконечности вероятность того, что случайная величина, принимающая с вероятностью p значение единица и с вероятностью $q = 1 - p$ значение ноль, в i-опытах окажется равной единице:

$$b_{ni} = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_n}} e^{\frac{-x^2(i,n)}{2}} (1 + \delta_n) = N(i,n)(1 + \delta_n). \tag{1.1}$$

В этом выражении

$$x(i,n) = \frac{i - M_n}{\sqrt{D_n}}, \tag{1.2}$$

где M_n и D_n – математическое ожидание и дисперсия суммы n одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения единица и ноль. В данном случае они равны np и npq соответственно. Зависимость $x(i,n)$ равномерно по i, n ограничена, т.е. существуют такие значения A и B, что $-\infty < A \le x(i,n) \le B < \infty$.

Величина δ_n, определяющая различие между последовательностью b_{ni} и нормальным дискретным распределением $N(i,n)$, стремится к нулю с ростом n так, что равномерно по i

$$|\delta_n| < \frac{C}{\sqrt{n}}, \tag{1.3}$$

где C – положительная константа, не зависящая от n, i. Свойство (1.1) называют свойством асимптотической нормальности.

1.2. Формулировка Ляпунова центральной предельной теоремы. В этой формулировке центральной предельной теоремы (ЦПТ) не требуется, чтобы сворачиваемые дискретные плотности распределения были одинаковы. Она утверждает, что при некотором доказанном Ляпуновым условии результат свертки неотрицательных функций, сумма ординат которых равна единице, имеющих первый и второй центральный моменты (см. (0.7), (0.8)), а также абсолютный центральный момент степени, большей двух, для достаточно большого значения n приближается к нормальному распределению $N(i,n)$, фигурирующему в (1.1).

Через c_i обозначим абсолютный центральный момент степени, большей двух, для k-го элементарного полинома $P_i(y)$, имеющего нормированные коэффициенты b_{jk}, т.е.

$$c_k(\epsilon) = \sum_{j=0}^{n} |j - m_k|^{2+\epsilon} b_{jk},$$

где $\epsilon > 0$. Обозначим через

$$C_n(\epsilon) = \sum_{i=1}^{n} c_k(\epsilon),$$

где n – число элементарных полиномов.

Формулировка Ляпунова ЦПТ состоит в следующем.

Теорема [8, 9]. Для того, чтобы плотность распределения свертки положительных нормированных дискретных функций была асимптотически нормальной, достаточно существования такого значения $\epsilon_0 > 0$, чтобы для всех $0 < \epsilon < \epsilon_0$

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\epsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{C_n(\epsilon)}{D_n^{1+0.5\epsilon}} = 0. \tag{1.4}$$

Дробь $L_n(\epsilon)$ в левой части этого выражения называют дробью Ляпунова.

Процитируем оценку этой теоремы из посвященной ей статьи в Википедии: "*Практическое значение теоремы Ляпунова огромно. Опыт показывает, что закон распределения суммы независимых случайных величин, сравнимых по своему рассеиванию, достаточно быстро приближается к нормальному. Уже при числе слагаемых порядка десяти закон распределения суммы можно заменить на нормальный*".

2. Преобразования полиномов. Рассмотрим линейную динамическую систему, характеристическое уравнение которой имеет форму

$$P_n(y) = \sum_{i=n}^{0} a_i y^i = 0, \tag{2.1}$$

где a_i – действительные коэффициенты.

Будем предполагать, что действительные части корней характеристического уравнения устойчивого полинома *отделены от нуля*, т.е. найдется такое не зависящее от n значение $\rho > 0$, что расстояния всех корней уравнения (2.1) от мнимой оси $r_i \geq \rho$. Для устойчивого полинома коэффициенты каждого из элементарных полиномов также отделены от нуля.

Элементарный полином первой степени $P_{1i}(y) = y + r_i$ соответствует действительному отрицательному корню, расположенному на расстоянии r_i от мнимой оси. Элементарный полином второй степени

$$P_{2i}(y) = y^2 + 2r_i y + r_i^2 + \omega_i^2 \tag{2.2}$$

соответствует паре комплексно-сопряженных корней с действительной частью $-r_i$ и мнимой частью $\pm\omega_i$.

Далее будем нормировать коэффициенты полинома, разделив каждый коэффициент на их сумму, так что для полинома $P_{1i}(y)$ коэффициенты после нормировки равны

$$p_i = 1/(1 + r_i), \quad q_i = 1 - p_i = r_i/(1 + r_i) \tag{2.3}$$

при y в первой и в нулевой степенях соответственно. Первый и второй центральный моменты для такого полинома:

$$m_{1i} = p_i, \quad d_{1i} = p_i q_i. \tag{2.4}$$

Для элементарного полинома второй степени (2.2) после нормирования коэффициенты при y – в квадрате, в первой и нулевой степени

$$p_i = \frac{1}{\sigma_i}, \quad z_i = \frac{2r_i}{\sigma_i}, \quad q_i = \frac{r_i^2 + \omega_i^2}{\sigma_i}. \tag{2.5}$$

Здесь через σ_i обозначена сумма коэффициентов полинома второй степени:

$$\sigma_i = (1 + r_i)^2 + \omega_i^2.$$

Первый и второй центральный моменты последовательности коэффициентов устойчивого полинома второй степени равны

$$m_{2i} = z_i + 2p_i, \quad d_{2i} = m_{2i}^2 q_i + (1 - m_{2i})^2 z_i + (2 - m_{2i})^2 p_i. \tag{2.6}$$

Нормированная последовательность коэффициентов

$$b_i = \frac{a_i}{R_n}, \quad R_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \tag{2.7}$$

полинома $P_n(y)$ (см. (2.1)) равна свертке нормированных последовательностей коэффициентов элементарных полиномов, а ее первый и второй центральный моменты, равные сумме соответствующих моментов элементарных полиномов (см. свойство 5 свертки), могут быть подсчитаны непосредственно через b_i:

$$M_n = \sum_{i=0}^{n} i b_i, \quad D_n = \sum_{i=0}^{n} (i - M_n)^2 b_i. \tag{2.8}$$

Первоначально рассмотрим случай, когда все корни полинома $P_n(y)$ действительные и кратные, т.е. он равен с учетом нормировки

$$P_n(y) = \left(\frac{y}{1 + r} + \frac{r}{1 + r}\right)^n = (py + q)^n. \tag{2.9}$$

Коэффициенты этого полинома образуют последовательность биномиальных коэффициентов [8, 10]:

$$b_{ni} = \frac{n!}{i!(n-i)!}\left(\frac{1}{1+r}\right)^i \left(\frac{r}{1+r}\right)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}p^i q^{n-i}, \quad i = 0,1,\ldots,n. \tag{2.10}$$

По теореме Муавра–Лапласа эта последовательность асимптотически нормальна.

Теорему Муавра–Лапласа обычно относят к теории вероятностей. Но, по существу, она посвящена свойству последовательных сверток положительных нормированных дискретных функций. В случае биномиальных коэффициентов эти дискретные функции одинаковы. Поэтому свертка коэффициентов элементарных полиномов с одинаковыми действительными корнями асимптотически нормальна.

То же относится и к теореме Ляпунова. Распределения случайных величин лишь одно из ее приложений. Как и классическая формулировка ЦПТ, теорема Ляпунова определяет свойство свертки детерминированных положительных функций, для каждой из которых существуют m_i, d_i, c_i. Эти функции могут быть разными. Для асимптотической нормальности их свертки достаточно выполнения условия (1.4). В качестве меры погрешности приближения δ_n используется дробь Ляпунова или функция от нее, стремящаяся к нулю при $L_n \to 0$. Далее рассмотрены следствия из этой теоремы применительно к устойчивым полиномам.

3. Условие асимптотической нормальности последовательности коэффициентов устойчивых полиномов. Нормированная последовательность b_i коэффициентов полинома $P_n(y)$ представляет собой свертку нормированных последовательностей коэффициентов элементарных полиномов.

Роль плотностей распределения играют нормированные последовательности положительных коэффициентов элементарных полиномов.

Эти коэффициенты меньше единицы и равны нулю при $i > 2$ и $i < 0$, так что для них все перечисленные в теореме Ляпунова моменты существуют. Они определены значениями корней характеристического уравнения.

Таким образом, из теоремы Ляпунова вытекает следствие.

С л е д с т в и е. Для того, чтобы последовательность коэффициентов устойчивого полинома $P_n(y)$ обладала свойством асимптотической нормальности, достаточно, чтобы характеристики элементарных полиномов $m_i, d_i, c_i(\epsilon)$ удовлетворяли условию (1.4) при $\epsilon > 0$.

Конкретизируем это утверждение для нашей задачи.

1. Так как коэффициенты элементарных полиномов отделены от нуля, то второй центральный момент каждого из них $d_i \geq \delta > 0$. В силу этого с ростом n второй центральный момент D_n полинома P_n неограниченно возрастает.

2. В силу малости ϵ и гладкости зависимостей $c_i(\epsilon)$ числитель дроби Ляпунова может быть представлен в форме $C_n = D_n + \epsilon S_n + o(\epsilon)$, где

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dc_i}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0},$$

а остаточный член $\dfrac{o(\epsilon)}{\epsilon} \to 0$ при $\epsilon \to 0$.

Покажем, что для справедливости условия Ляпунова достаточно выполнения неравенства:

$$\left(\frac{dc_i}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0} < 0 \quad \forall i. \tag{3.1}$$

Здесь, как и выше, строгое неравенство соответствует тому, что найдется такое значение $\eta < 0$, что для всех значений i производная, фигурирующая в условии (3.1), не превосходит η.

Если неравенство (3.1) выполнено, то для каждого из элементарных полиномов $d_i > c_i(\epsilon)$. В этом случае $C_n(\epsilon) < C_n(0) = D_n$ и справедливо неравенство

$$L_n(\epsilon) < \frac{D_n}{D_n^{1+0.5\epsilon}} = \frac{1}{D_n^{0.5\epsilon}}. \tag{3.2}$$

С ростом D_n правая, а значит, и левая части неравенства стремятся к нулю.

3.1. Полином с действительными корнями. Покажем, что условию (3.1) удовлетворяет полином с отрицательными действительными корнями, находящимися от мнимой оси на расстояниях r_i. Выражения для моментов такого полинома записаны в (2.6).

Центральный момент $c_i(\epsilon)$ для такой последовательности коэффициентов равен:

$$c_i = p_i^{2+\epsilon} q_i + (1 - p_i)^{2+\epsilon} p_i = p_i q_i (p_i^{1+\epsilon} + q_i^{1+\epsilon}) = d_i R_i(\epsilon). \tag{3.3}$$

Производная

$$\left(\frac{dc_i}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=0} = d_i(p_i \ln p_i + q_i \ln q_i) = d_i[p_i \ln p_i + (1 - p_i)\ln(1 - p_i)] < 0. \tag{3.4}$$

Здесь учтено, что сумма коэффициентов $p + q = 1$ и они строго положительные. При этих условиях функция Гиббса, стоящая в неравенстве (3.4) в квадратных скобках, отрицательная для $0 < p < 1$.

Таким образом условие (3.1) выполнено, и *для любого устойчивого полинома с действительными корнями последовательность его коэффициентов асимптотически нормальна*.

3.2. Полином с комплексными корнями. Значения $m_i, d_i, c_i(\epsilon)$ могут быть подсчитаны для элементарного полинома второй степени, соответствующего паре комплексно-сопряженных корней $P_i(y) = y^2 + 2r_i y + r_i^2 + \omega_i^2$, по формулам (2.5)–(2.6).

Абсолютный момент степени, большей двух, для элементарного квадратного полинома

$$c_i(\epsilon) = p_i m_i^{2+\epsilon} + z_i |(1 - m_i)|^{2+\epsilon} + q_i (2 - m_i)^{2+\epsilon}. \tag{3.5}$$

Каждый из этих моментов зависит от действительной и мнимой частей корней r_i, ω_i в соответствии с (2.5)–(2.6).

Для выполнения условия Ляпунова достаточно, чтобы для любого i, выполнялось условие (3.1). Учитывая, что производная A^ε по ε равна $A^\varepsilon \ln A$, и устремляя ε к нулю, получим требование неположительности производной:

$$q_i m_i^2 \ln m_i + z_i (1 - m_i)^2 \ln|1 - m_i| + p_i (2 - m_i)^2 \ln(2 - m_i) \le 0. \tag{3.6}$$

При стремлении m_i к нулю, к единице и к двум левая часть неравенства (3.6) стремится к $-\infty$.

На рис. 1 заштрихована область, в которой полином второй степени устойчив, но неравенство (3.6) нарушено и выполнение условий Ляпунова не гарантировано. Здесь q и m представляют собой коэффициент при y в нулевой степени и первый момент последовательности коэффициентов и вычисляются по формулам (2.5), (2.6).

Верхней границе заштрихованной области (прямой на рисунке) соответствуют мнимые корни полинома. Для всех коэффициентов полинома, которым соответствует точка, лежащая ниже заштрихованной области, асимптотическая нормальность гарантирована.

Если устойчивый полином $P_n(y)$ имеет несколько комплексных корней, то условие асимптотической нормальности может быть нарушено, если в заштрихованной области окажутся все комплексные корни.

На рис. 2 показан вид последовательности коэффициентов устойчивого полинома.

Для того, чтобы проверить, является ли полином достаточно большой степени устойчивым, нужно найти M_n и D_n по приведенным выше формулам (2.8). Последовательность коэффициентов a_i устойчивого полинома должна быть унимодальной, причем максимум ее достигается в точке i^*, ближайшей слева или справа к величине M_n, а максимальное значение коэффициента должно быть приближенно равно

$$a_{i^*} = \frac{R_n}{\sqrt{2\pi D_n}}. \tag{3.7}$$

4. Примеры. 4.1. Устойчивый полином. Рассмотрим полином пятой степени

$$P_5(y) = 4 + 14y + 20y^2 + 15y^3 + 6y^4 + y^5. \tag{4.1}$$

Его коэффициенты положительны, их последовательность имеет единственный максимум при $i = 2$, а значение максимального коэффициента равно 20. Сумма коэффициентов полинома $R_n = 60$.

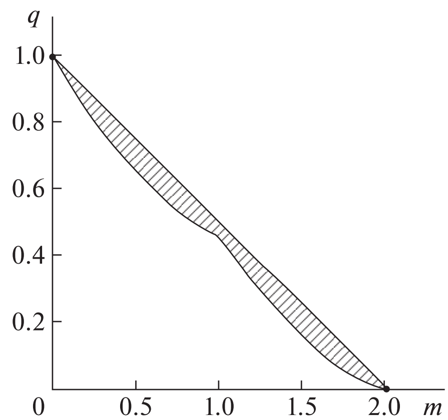


Рис. 1. Граница выполнения условия Ляпунова для полинома второй степени

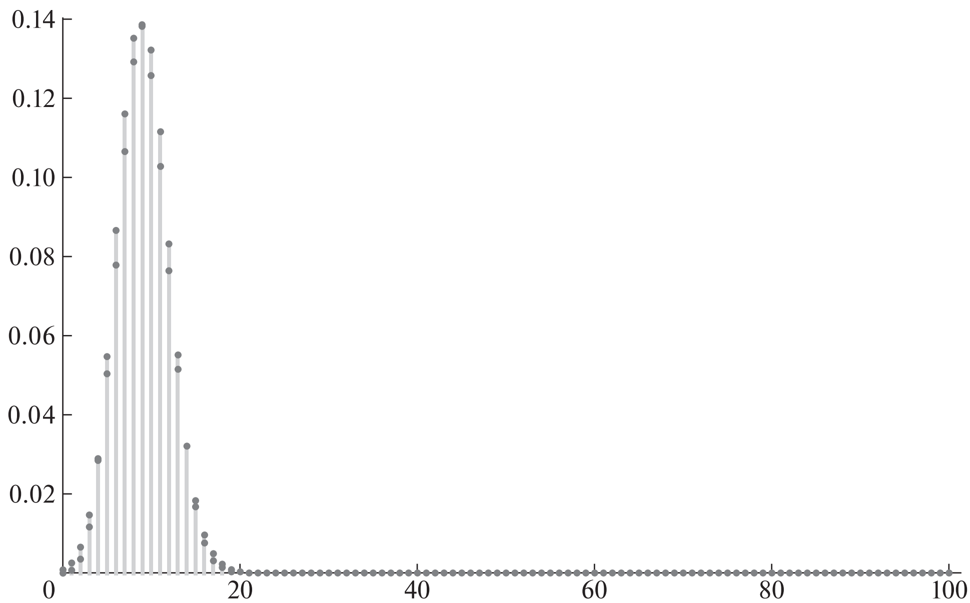


Рис. 2. Коэффициенты b_i полинома $(p + qy)^n$ в зависимости от i $(n = 100)$

Сравним эти значения с величинами, соответствующими асимптотической нормальности последовательности коэффициентов. После деления каждого из коэффициентов на их сумму и вычисления моментов по формуле (2.8) получим $M_n = 2.13$, $D_n = 1.28$. Величина максимального коэффициента, вычисленная по формуле (3.7), равна 21.14. Таким образом, уже для $n = 5$ фактический номер максимального коэффициента и его величина близки к их значениям, соответствующим нормальному распределению, что позволяет сделать вывод об устойчивости полинома.

Полином (4.1) устойчив, имеет действительные корни в точках -1 (кратности 2) и -2 и комплексно-сопряженные с действительной частью -1 и мнимой ± 1.

4.2. Неустойчивый полином. Рассмотрим полином пятой степени

$$P_5(y) = 10 + 21y + 12y^2 + 2y^3 + 2y^4 + y^5. \tag{4.2}$$

Все его коэффициенты положительны, их последовательность унимодальна, а их сумма равна $R_n = 48$. Те же расчеты, что и для полинома (4.1), приводят к значениям $M_n = 1.33$, $D_n = 1.22$. Расчетная величина максимального коэффициента, найденная по формуле (3.7), равна 17.32, что существенно меньше его реального значения.

Полином (4.2) неустойчив, имеет действительные корни в точках -1 (кратности 2) и -2 и два комплексно-сопряженных с действительной частью $+1$ и мнимой ± 2.

Заключение. Доказано, что коэффициенты устойчивых полиномов не только положительны, но и их последовательность асимптотически нормальна, а значит, имеет единственный максимум. Получены формулы для оценки номера и величины максимального коэффициента. Близость этих оценок к реальным значениям номера и величины этого коэффициента является дополнительным признаком устойчивости и освобождает от необходимости использования частотных или алгебраических критериев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цыпкин Я.З.* Основы теории автоматических систем. М.: Наука, 1977.
2. *Хиршман И.И., Уиддер Д.В.* Преобразования типа свертки. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
3. *Цирлин А.М., Заева М.А.* Преобразования операции свертки в сумму и асимптотическое поведение коэффициентов устойчивых полиномов // Программные системы: теория и приложения. 2019. Т. 10. № 4 (43). С. 141–161.
4. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.
5. *Гарднер М.Ф., Бернс Дж.Л.* Переходные процессы в линейных системах. М.: Физматгиз, 1961.
6. *Карслоу Х., Егер Ф.* Операционные методы в прикладной математике. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
7. *Микусинский Я.* Операторное исчисление. М.: Изд-во иностр. лит., 1956.
8. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшее образование, 2005.
9. *Петров В.В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.
10. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Либроком, 2009.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 1, с. 11–18

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 531.6: 531.391.5: 681.513.1

МЕХАТРОННАЯ СХЕМА СТАБИЛИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЙ

© 2022 г. В. Н. Тхай

ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

e-mail: tkhaivn@yandex.ru

Поступила в редакцию 01.06.2021 г.
После доработки 19.08.2021 г.
Принята к публикации 27.09.2021 г.

Рассматривается связанная система, содержащая осциллятор Ван дер Поля и консервативную систему, допускающую семейство одночастотных колебаний: осциллятор односторонней слабой связью – управлением действует на консервативную систему. Находится управление, посредством которого в замкнутой системе реализуется орбитально асимптотически устойчивый (в большом) цикл. При этом в управляемой консервативной системе стабилизируемое колебание становится проекцией цикла на фазовое пространство лагранжевой системы.

DOI: 10.31857/S0002338822010103

Введение. При исследовании модели, содержащей связанные подсистемы (МССП), в [1] предлагается выбирать связи, обеспечивающие одновременно существование, устойчивость и стабилизацию колебания связанной системы. Тогда связь действует как управление, а задача стабилизации решается естественным образом, т.е. без привлечения других управлений. Связь может быть односторонней. В этом случае одна система действует на другую, не испытывая действия последней системы. Первая система генерирует управление, вторая система становится управляемой.

Рассматривается консервативная система, допускающая периодическое движение. Используются уравнения Лагранжа второго рода. Фазовое пространство консервативной системы симметрично относительно неподвижного множества $M = \{q, \dot{q} : \dot{q} = 0\}$: q – обобщенная координата. В силу этого обстоятельства одночастотные колебания системы реализуются как симметричные периодические движения (СПД).

В рамках самой консервативной модели СПД не стабилизируется: необходимо приложить силу, нарушающую симметрию фазового пространства. Для ε-малой силы колебание ε-скорректированной системы будет ε-близким к колебанию консервативной системы.

Примечательным примером ε-скорректированной системы является уравнение Ван дер Поля. В нем действие ε-малой силы на линейный осциллятор приводит к существованию орбитально асимптотически глобально устойчивого цикла. Само управление дается нелинейной диссипацией, линейной по скорости и приложенной в текущей точке траектории осциллятора Ван дер Поля. Как результат через обратную связь системе навязывается режим цикла. Диссипация реализуется в электронной схеме для осциллятора Ван дер Поля на основе триода (см., например, [2. с. 26]).

Возникает идея использовать осциллятор Ван дер Поля как подсистему МССП для стабилизации (в большом) колебания консервативной системы. Идею предлагается реализовать в рамках слабо связанных систем: в связанной системе осциллятор Ван дер Поля действует через одностороннюю ε-связь на консервативную систему. При этом связь – управление действует как вынуждающая сила в теории колебаний.

В теории управления, как и в теории вынужденных колебаний, динамика системы, генерирующей управляющий сигнал (СГУС), обычно оказывается за рамками рассмотрения системы управления: она дается только действием на управляемый объект. В рамках связанной системы такой "дискриминации" не происходит. Знание о динамике СГУС можно применить для построения гибкой системы управления. Односторонняя связь естественным образом выделяет СГУС в связанной системе. В работе предлагается внести в систему управления генератор колебаний с настраиваемой частотой, служащий для формирования стабилизирующего управлямого сигнала. При этом “излагается общий принцип стабилизации колебаний консервативных систем произвольной природы за счет управляющих воздействий...”[1].

В статье для решения задачи стабилизации применяется свойство осциллятора Ван дер Поля обладать орбитально асимптотически глобально устойчивым циклом. Учитывается свобода в выборе частоты (параметр ω), амплитуды цикла (параметр K), а также возможность различной реализации (непрерывной, дискретной). Система, колебания которой стабилизируются, рассматривается, как механическая, а осциллятор Ван дер Поля – как электронная система. В этом смысле предлагается мехатронная схема стабилизации колебаний.

Уравнение Ван дер Поля широко используется в составе связанных систем (например, [3–5]) при моделирование нелинейных колебаний. Однако этот осциллятор не приводится в качестве регулятора в системе управления.

1. Постановка задачи. Предлагаемая схема стабилизации колебаний описывается связанной системой

$$\begin{gathered}\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon(1 - Kx^2)\dot{x},\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = \varepsilon k(1 - Kx^2)u_s(q, \dot{q}), \qquad s = \overline{1, n},\end{gathered} \tag{1.1}$$

содержащей уравнение Ван дер Поля и управляемую консервативную систему с функцией Лагранжа L. Консервативная система и функции u_s в управлении принимаются гладкими.

В системе (1.1) применяются следующие обозначения: ω – частота линейного оциллятора, K – постоянная, амплитуда автоколебаний осциллятора Ван дер Поля в первом приближении метода усреднения равна $2/\sqrt{K}$; ε – малый параметр в уравнении Ван дер Поля и одновременно коэффициент усиления регулятора; число k имеет смысл переключателя и принимает значение 1 или (–1). Стандарный вид уравнения Ван дер Поля, где $\omega = 1$ и $K = 1$, содержащий один только параметр ε, получается путем перехода к безразмерным переменной и времени.

В системе (1.1) динамика осциллятора Ван дер Поля через одностороннюю связь навязывается консервативной системе: осциллятор Ван дер Поля становится регулятором.

На СПД консервативной системы траектория пересекает множество M в двух различных точках. Поэтому необходимые и достаточные условия существования СПД периода T записываются в виде

$$\dot{q}_s(q_1^0, \dots, q_n^0, \tau) = 0, \qquad \tau = 0, T/2, \qquad s = \overline{1, n}, \tag{1.2}$$

где через $q^0 = (q_1^0, \dots, q_n^0)$, $q^0 \in M$, обозначается начальная точка для СПД в момент времени $t = 0$.

При $\tau = 0$ система (1.2) совместна. При $\tau = T/2$ получается система из n уравнений с $n + 1$ неизвестными. Следовательно, СПД всегда образуют семейство Σ, например по параметру T.

О п р е д е л е н и е. Случай

$$\operatorname{rank} A = n, \qquad A = \left[\frac{\partial \dot{q}_s(q^0, T/2)}{\partial q_j^0}\right]$$

называется невырожденным для симметричного периодического движения, а само СПД – невырожденным.

Согласно определению, колебания математического маятника являются невырожденными, а колебания линейного осциллятора – вырожденными.

Невырожденные СПД образуют семейство Σ, на котором период T монотонно зависит от одного параметра. Такая ситуация типична для семейства невырожденных СПД [6]. В консервативной системе за параметр обычно выбирается постоянная интеграла энергии: на Σ период $T(h_q)$ является монотонной функцией постоянной энергии h_q. Траектории на семействе Σ описываются формулой $q = \varphi(h_q, t + \gamma)$, где $q = (q_1, \dots, q_n)$ – вектор обобщенных координат лагранже-

[1] Замечание рецензента.

вой системы, γ – временной сдвиг на траектории. При $\gamma = 0$ координаты $q_s, s = \overline{1,n}$, даются четными функциями t.

В фазовом пространстве семейство Σ заполняет инвариантное двумерное многообразие $\tilde{\Sigma}$. Условия (1.2) выполняются на $\tilde{\Sigma}$ тождественно по паре (h_q, T). Семейство Σ описывается консервативной системой с одной степенью свободы.

В самом деле, из условий (1.2) при $\tau = T/2$ следуют линейные равенства

$$\xi_s \equiv a_{s1}(q^0,\tau)dq_1^0 + \ldots + a_{sn}(q^0,\tau)dq_n^0 + b_s(q^0,\tau)d\tau = 0,$$
$$a_{sj}(q^0,\tau) = \partial\dot{q}_s(q^0,\tau)/\partial q_j^0, \quad b_s = \partial\dot{q}_s(q^0,\tau)/\partial t; \quad s, j = \overline{1,n},$$

которые выполняются тождественно на $\tilde{\Sigma}$. Для семейства Σ справедливо условие $\operatorname{rank} A = n$, поэтому линейным преобразованием $\eta = P\xi$, $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ с постоянной матрицей P в векторной форме η выделяется форма a_1: формы $\eta_2,\ldots,\eta_n$ не содержат $d\tau$. Преобразование справедливо для любой точки (q^0,τ), поэтому выделение происходит на всем $\tilde{\Sigma}$. В результате семейство Σ описывается консервативной системой с одной степенью свободы.

Предполагается, что консервативная система в (1.1) допускает семейство Σ невырожденных СПД. Функция $T(h_q)$ может быть возрастающей или убывающей.

П р и м е р 1. Период колебаний математического маятника возрастает с ростом отклонения маятника от вертикали. Решения консервативной системы $\ddot{y} + y^3 = 0$ образуют семейство с убывающим периодом.

В работе ставится задача нахождения в связанной системе (1.1) при выбранных функциях u_s закона переключения по k, обеспечивающего существование притягивающего (в большом) цикла.

Для определенности излагается случай возрастающего периода $T(h_q)$. В конце статьи отмечается, как изменяются доказательства для убывающего периода.

2. Порождающие движения. При $\varepsilon = 0$ система (1.1) становится порождающей и распадается на линейный осциллятор и консервативную систему. Колебания линейного осциллятора описываются функцией $x = A\cos\omega(t+\beta)$, где A – амплитуда колебания, β – начальный сдвиг по траектории.

На периодических решениях порождающей системы выполняется условие $T(h_q) = 2\pi/\omega$. В силу монотонности функции $T(h_q)$ для линейного осциллятора с частотой ω находится единственное значение h_q энергии консервативной системы. Следовательно, уравнению Ван дер Поля в (1.1) из-за единственности его цикла будет соответствовать единственный цикл связанной системы. При этом энергия h_l линейного осциллятора, соответствующего циклу Ван дер Поля, равна $2\omega^2/K$, а период цикла связанной системы (1.1) совпадает с периодом цикла осциллятора Ван дер Поля.

Решение автономной системы (1.1) содержит только один начальный сдвиг, поэтому $\gamma = \beta + \nu$, где ν – некоторое фиксированное число. Значит, все порождающие периодические решения даются формулами

$$x = A\cos\omega(t+\beta), \quad q = \varphi(h_q, t+\beta+\nu), \quad T(h_q) = 2\pi/\omega,$$
$$(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)/2 = h_l, \quad E_q(\varphi,\dot{\varphi}) = h_q, \tag{2.1}$$

где через $E_q(q,\dot{q})$ обозначена полная механическая энергия консервативной системы; h_q – постоянная энергии.

В случае $\nu = 0$ из (2.1) получается семейство $\Xi(h)$ СПД консервативной системы, содержащей линейный осциллятор и консервативную систему с координатой q, с интегралом энергии

$$\frac{\dot{x}^2 + \omega^2 x^2}{2} + E_q(q,\dot{q}) = h(\mathrm{const}).$$

В ней $h = h_l + h_q$; период на семействе $\Xi(h)$ дается функцией $T = T(h)$.

Изучение вопроса о существовании периодического решения системы (1.1) при малых значениях ε сводится [1] к анализу амплитудного (бифуркационного) уравнения. Оно получается при записи условия существования T^*-периодического решения системы (1.1) в первом по ε приближении: $T^* = T(h^*)$. Для семейства $\Xi(h)$ амплитудное уравнение принимает вид

$$I(h) = I_x(h) + I_y(h) = 0,$$
$$I_x \equiv \int_0^{T^*} [1 - K(h^*)x^2(h,t)]\dot{x}^2(h,t)dt,$$
$$I_q \equiv k\int_0^{T^*} [1 - K(h^*)x^2(h,t)]\sum_{s=1}^{n} u_s(q,\dot{q})\dot{q}_s dt,$$

где вместо функций $x(h,t)$ и $q(h,t)$ подставляются их выражения из (2.1).

Равенство $I_x(h) = 0$ выводится из уравнения Ван дер Поля и рассматривается отдельно. Оно допускает корень при любом $K(h^*)$: получается решение с амплитудой $A = 2/\sqrt{K(h^*)}$.

Изучается уравнение $I_q(h) = 0$. В силу возможности выбора $K(h^*)$ в уравнении Ван дер Поля это число берется таким, чтобы уравнение $I_q(h) = 0$ имело бы корнем число $h = h^*$. Тогда $K(h^*)$ вычисляется из равенства $I_q(h) = 0$ при подстановке вместо h значения h^*. Отсюда следует, что корень h^* существует. Далее вычисляется производная $dI_q(h^*)/dh$ и показывается, что она отлична от нуля. Тем самым доказывается рождение цикла в точке $h = h^*$ семейства $\Xi(h)$.

При $\nu \neq 0$ периодическое решение порождающего уравнения будет несимметричным. В этом случае анализ проводится подстановкой решения $x = x_c(h_l^*, t + \beta)$, $h_l^* = 2\omega^2/K(h^*)$, описывающего цикл Ван дер Поля, во второе уравнение системы (1.1). Тогда получается задача для неавтономного периодического уравнения, содержащего произвольный параметр β. Существование цикла в (1.1) устанавливается с помощью амплитудного уравнения

$$\int_0^{T^*} (1 - Kx_c^2(h_l^*, t))\sum_{s=1}^{n} \tilde{u}_s(t+\nu)\dot{\varphi}_s(h_q^*, t+\nu)dt = 0,$$
$$\tilde{u}_s(t+\nu) = u_s(q(h_q^*, t+\nu), \dot{q}(h_q^*, t+\nu)). \tag{2.2}$$

При этом каждому простому корню $\nu = \nu^*$ уравнения (2.2) будет отвечать цикл связанной системы (1.1).

Условия существования цикла не зависят от знака k. Поэтому цикл существует как при $k = 1$, так и при $k = -1$. Порождающие решения находятся для одного и того же (единственного) цикла Ван дер Поля. Следовательно, независимо от того или иного приведенного локального сценария рождения получается единственный цикл связанной системы. Сама реализация конкретного сценария зависит от свойств семейства Σ.

Доказательство существования цикла, свободное от выбора порождающего периодического решения, дается сначала для случая консервативной системы с одной степенью свободы. Эти результаты обобщаются на случай консервативной системы с произвольным числом степеней свободы.

3. Цикл связанной системы. В случае консервативной системы с одной степенью свободы, подверженной действию силы $(-f)$, второе уравнение системы (1.1) описывается скалярной переменной y. Функция $u(y,\dot{y})$ выбирается таким образом, чтобы в текущей точке траектории на плоскости $\Pi_y = (y,\dot{y})$, соответствующей точке осциллятора Ван дер Поля на плоскости $\Pi_x = (x,\dot{x})$, реализовалась бы диссипация: $u(y,\dot{y}) = \dot{y}$. Тогда связанная система (1.1) принимает вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon(1 - Kx^2)\dot{x},$$
$$\ddot{y} + f(y) = \varepsilon k(1 - Kx^2)\dot{y}. \tag{3.1}$$

В уравнении Ван дер Поля энергия осциллятора E_x меняется по следующему закону:

$$\frac{dE_x}{dt}\varepsilon(1 - Kx^2)\dot{x}^2, \quad E_x = (\dot{x}^2 + \omega^2x^2)/2. \tag{3.2}$$

Закон изменения полной механической энергии E_y для второго уравнения системы (3.1) записывается в виде

$$\frac{dE_y}{dt}\varepsilon k(1-Kx^2)\dot{y}^2, \quad E_y = \frac{\dot{y}^2}{2} + \int f(y)dt. \tag{3.3}$$

Любая траектория уравнения Ван дер Поля, исключая равновесие на плоскости Π_x, притягивается к циклу – кривой C_x. На цикле $E_x(t)$ становится $T^* = (2\pi/\omega)$-периодической функцией, среднее значение которой определяется энергией h_l^* линейного осциллятора для цикла. Кривая C_x ограничивает область Ω_x, содержащую начало координат. Приращение энергии ΔE_x на отрезке $t \in [0, T^*]$ положительно в Ω_x и отрицательно вне Ω_x. На цикле $\Delta E_x = 0$, поэтому притяжение траектории к циклу сопровождается предельным переходом $\Delta E_x \to 0$. Многообразие $\tilde{\Sigma}$ принадлежит плоскости Π_y.

Для взаимного изменения энергий E_x и E_y из законов (3.2) и (3.3) выводится равенство

$$k\dot{y}^2 dE_x = \dot{x}^2 dE_y \quad (dE_x = \dot{x}^2 d\sigma, \quad dE_y = k\dot{y}^2 d\sigma, \quad d\sigma = \varepsilon(1-Kx^2)dt), \tag{3.4}$$

справедливое при $(1 - Kx^2) \neq 0$.

При $k = 1$ равенство (3.4) выражает одновременное возрастание (убывание) энергии осциллятора Ван дер Поля и энергии консервативной системы. Отсюда получается, что приращение ΔE_y энергии E_y на отрезке $t \in [0, T^*]$ в области $\Omega_y \in \Pi_y$, отвечающей области $\Omega_x \in \Pi_x$, удовлетворяет неравенству $\Delta E_y > 0$; вне области Ω_y получается $\Delta E_y < 0$. При стремлении траектории на плоскости Π_x к циклу C_x траектория на плоскости Π_y асимптотически стремится к кривой $C_y \in \Pi_y$. При этом $\Delta E_y \to 0$, и в пределе на кривой C_y приращение $\Delta E_y = 0$. На C_y функция $E_y(t)$ становится T^*-периодической. Так как кривая C_y соответствует циклу Ван дер Поля C_x, то среднее значение функции$E_y(t)$ на C_y определяется энергией h_y^* консервативной системы для порождающего колебания.

Если точка $(x, \dot{x}) \in \Omega_x$, то $\Delta E_x > 0$. Поэтому $\Delta E_y > 0$. Для точек Ω_y неравенство $\Delta E_y > 0$ приводит к притяжению точки к C_y; точки $(y, \dot{y}) \notin \Omega_y$ отталкиваются от C_y.

Пусть точка $(x, \dot{x}) \notin \Omega_x$, тогда $\Delta E_x < 0$. Поэтому $\Delta E_y < 0$. Для точек $(y, \dot{y}) \notin \Omega_y$ неравенство $\Delta E_y < 0$ означает притяжение к C_y; точки $(y, \dot{y}) \in \Omega_y$ отталкиваются от C_y.

Таким образом, при $k = 1$ существует предельное T^*-периодическое решение $C_x \times C_y$ автономной системы (1.1). По построению это решение единственное. Оно изолированное, т.е. является циклом. Цикл имеет гиперболический характер.

Аналогично доказывается, что при $k = -1$ предельное T^*-периодическое решение системы (1.1) существует. Оно совпадает с $C_x \times C_y$ и притягивает те траектории, где все время $(x, \dot{x}) \in \Omega_x$ и $(y, \dot{y}) \notin \Omega_y$ или $(x, \dot{x}) \in \Omega_x$ и $(y, \dot{y}) \in \Omega_y$. В оставшихся двух областях траектории отталкиваются от цикла: цикл имеет гиперболический характер.

Заметим, что совпадение циклов при $k = 1$ и $k = -1$ не препятствуют различному устройству их окрестностей.

4. Схема управления. Закон переключения. Для консервативной системы с одной степенью свободы схема управления дается связанной системой (3.1). В ней регулятором служит осциллятор Ван дер Поля, действующий с малым коэффициентом ε усиления. В (3.1) стабилизуется (в большом) цикл связанной системы, состоящий из цикла Ван дер Поля и колебания ε-скорректированной консервативной системы. Периоду T^* консервативной системы отвечает энергия $E_y^* = h_y^*$. Частота ω осциллятора Ван дер Поля выбирается из условия $T^* = 2\pi/\omega$.

Единственный цикл системы (1.1) существует как при $k = 1$, так и при $k = -1$. Циклу отвечают значения энергии линейного осциллятора h_l^* и консервативной системы h_y^*.

Вводится плоскость (h_l, h_y) с началом координат в точке (h_l^*, h_y^*). Согласно анализу, в разд. 3 для первого и третьего квадрантов число $k = 1$ обеспечивает притяжение траекторий к циклу; для второго и четвертого квадрантов значение k, обеспечивающего такое притяжение, равняется (-1).

С учетом данного факта в системе (1.1) строится переключение по k и конструируется кусочно-гладкая управляемая система, обеспечивающая притяжение всех траекторий в (1.1) к циклу $C_x \times C_y$. Тем самым решается задача стабилизации (в большом) цикла $C_x \times C_y$, а значит, и колебания консервативной системы, отвечающей циклу.

Захват колебания происходит настройкой частоты ω линейного осциллятора на период T^* колебания консервативной системы.

Как результат формулируется теорема 1.

Т е о р е м а 1. Пусть при $\varepsilon = 0$ второе уравнение в (3.1) допускает многообразие $\tilde{\Sigma}$, заполненное семейством Σ невырожденных симметричных периодических движений. Тогда связанная система (3.1) имеет единственный притягивающий цикл $C_x \times C_y$, отвечающий энергии h_l^* линейного осциллятора и энергии h_y^* консервативной системы. При этом на плоскости (h_l, h_y) с началом координат в точке (h_l^*, h_y^*) используется следующий закон переключения: $k = 1$ для первого и третьего квадрантов, $k = -1$ для второго и четвертого квадрантов. На плоскости $(y, \dot{y})$ область притяжения к C_y совпадает с $\tilde{\Sigma}$.

З а м е ч а н и е 1. В условиях выполнения теоремы 1 все траектории связанной системы (3.1) в четырехмерном пространстве $(x, \dot{x}, y, \dot{y})$ притягиваются к циклу, который состоит из цикла Ван дер Поля – кривой C_x на плоскости Π_x и замкнутой кривой C_y на плоскости Π_y.

З а м е ч а н и е 2. Из теоремы 1 следует стабилизация (в большом) цикла связанной системы (3.1). Область притяжения траекторий консервативной системы к кривой C_y совпадает с многообразием $\tilde{\Sigma}$.

П р и м е р 2. Движение спутника в плоскости орбиты под действием гравитационных сил описывается уравнением В.В. Белецкого [7]. Для круговой орбиты уравнение приобретает вид

$$\ddot{\alpha} + \mu \sin\alpha \cos\alpha = 0, \quad \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dv},$$

где μ – инерциальный параметр ($|\mu| \le 3$), α – угол между радиус-вектором центра масс и главной центральной осью инерции спутника в плоскости орбиты, v – истинная аномалия, выбранная в качестве независимой переменной. Получается уравнение математического маятника

$$\ddot{y} + \mu \sin y = 0, \quad \mu > 0, \quad y = 2\alpha$$

или

$$\ddot{y} + |\mu| \sin y = 0, \quad \mu < 0, \quad y = 2\alpha + \pi.$$

Колебания спутника образуют семейство от начального отклонения по углу y, на котором период $T(h_y)$ возрастает.

С помощью схемы

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x},$$
$$\ddot{y} + |\mu| \sin y = k\varepsilon(1 - x^2)\dot{y},$$

где $y = 2\alpha$ при $\mu > 0$ и $y = 2\alpha + \pi$, если $\mu < 0$, любое колебание спутника выбором частоты ω настраивается на режим притягивающего (в большом) цикла с периодом $2\pi/\omega$.

5. Консервативная система с *n* степенями свободы. В случае консервативной системы с n степенями свободы управление в связанной системе (1.1) выбирается с функцией

$$u_s = \sum_{j=1}^{n} r_{sj} \dot{q}_j, \quad s = \overline{1, n}, \tag{5.1}$$

где $\|r_{sj}\|$ – постоянная матрица. Тогда изменение полной механической энергии E_q консервативной системы происходит по закону

$$\frac{dE_q}{dt} = \varepsilon k(1 - Kx^2) \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_{sj} \dot{q}_s \dot{q}_j, \tag{5.2}$$

в котором функция x удовлетворяет уравнению Ван дер Поля. В частном случае $n = 1$ из (5.2) получается формула (3.3).

Из законов (3.2) и (5.2) изменения энергии следует равенство

$$k\sum_{s=1,\,j=1}^{n} r_{sj}\dot q_s\dot q_j dE_x = \dot x^2 dE_q,$$
$$dE_x = \dot x^2 d\sigma,\quad dE_q = k\sum_{s=1,\,j=1}^{n} r_{sj}\dot q_s\dot q_j d\sigma,\quad d\sigma = \varepsilon(1 - Kx^2)dt. \tag{5.3}$$

Сравнение (3.4) и (5.3) показывает, что в случае положительно-определенной квадратичной формы

$$R = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{sj}\dot q_s\dot q_j > 0 \tag{5.4}$$

полная энергия системы в окрестности $\tilde\Sigma$ меняется так же, как и на $\tilde\Sigma$. Поэтому приращение ΔE_q энергии E_q за период $T^* = 2\pi/\omega$ следует за приращением ΔE_x по сценарию для ΔE_y в разд. 3. При этом $\Delta E_q \to 0$, когда $\Delta E_x \to 0$, а предельная функция $E_q(t)$ становится T^*-периодической.

В окрестности $\tilde\Sigma$ вводятся координаты y и $z = (z_2,\ldots,z_n)$, где переменной y описывается на $\tilde\Sigma$ консервативная система с одной степенью; $z = 0$ на $\tilde\Sigma$. При $z \neq 0$ энергия E_q представляется суммой: $E_q = E_y + E_z$, где E_y – энергия консервативной системы на $\tilde\Sigma$. В связанной системе (3.1) справедлив предельный переход $\Delta E_y \to 0$. Поэтому $\Delta(E_q - E_y) \to 0$. В силу T^*-периодичности предельных функций $E_q(t)$ и $E_y(t)$ функция $E_z(t)$ будет T^*-периодической. Колебания по переменной z рассматриваются близ точки $z = 0$. В случае, когда в системе по z коэффициенты $\lambda_i, i = 2, \ldots, n$, устойчивости Пуанкаре положительны, получается

$$(z \neq 0) \Leftrightarrow \left(\sum_{i=2}^{n}\lambda_i z_i^2 > 0\right).$$

Поэтому при $\Delta(E_q - E_y) \to 0$ также $E_z \to 0$.

Таким образом, точки окрестности $\tilde\Sigma$ притягиваются к кривой $C_y \in \tilde\Sigma$: связанная система (1.1) имеет единственный цикл $C_x \times C_y$.

Заметим, что в случае $\lambda_i > 0$ корни соответствующего характеристического уравнения являются чисто мнимыми.

Т е о р е м а 2. Пусть консервативная механическая система допускает семейство невырожденных симметричных периодических движений Σ, заполняющее двумерное многообразие $\tilde\Sigma$: характеристические показатели для $\tilde\Sigma$ предполагаются чисто мнимыми. Тогда в связанной системе (1.1) с функцией (5.1), где форма (5.4) положительно определена, реализуется единственный притягивающий цикл $C_x \times C_y$, отвечающий энергии h_l^* линейного осциллятора и энергии h_q^* консервативной системы. При этом на плоскости (h_l, h_q) с началом координат в точке (h_l^*, h_q^*) используется следующий закон переключения: $k = 1$ для первого и третьего квадрантов, $k = -1$ для второго и третьего квадрантов. Выход системы на режим цикла из точек окрестности $\tilde\Sigma$ происходит так, что траектории управляемой консервативной системы притягиваются к кривой $C_y \in \tilde\Sigma$, отвечающей циклу $C_x \times C_y$.

З а м е ч а н и е 3. Цикл $C_x \times C_y$ орбитально асимптотически устойчив в большом.

З а м е ч а н и е 4. Теоремы 1 и 2 остаются справедливыми для семейства Σ с убывающим периодом: в доказательствах знак числа k меняется на противоположный.

Заключение. В мехатронной схеме стабилизации колебаний осциллятор Ван дер Поля становится регулятором, генерируя управление своей динамикой. Его динамика через одностороннюю ε-слабую связь навязывается консервативной системе, что приводит всю связанную систему к режиму притягивающего (в большом) цикла. При этом в ε-скорректированной консервативной системе реализуется асимптотически устойчивое колебание, ε-близкое к колебанию консервативной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний автономной системы // АиТ. 2016. № 6. С. 38–46.
2. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956.
3. *Rompala K., Rand R., Howland H.* Dynamics of Three Coupled Van der Pol Oscillators with Application to Circadian Rhythms // Communicat. Nonlin. Sci. Numerical Simulation. 2007. V. 12. № 5. P. 794–803.
4. *Кондрашов Р.Е., Морозов А.Д.* К исследованию резонансов в системе двух уравнений Дюффинга–Ван дер Поля // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6. № 2. С. 241–254.
5. *Lazarus L., Rand R.H.* Dynamics of a System of Two Coupled Oscillators which are Driven by a Third Oscillator // J. Appl. Nonlin. Dynam. 2014. V. 3. № 3. P. 271–282.
6. *Тхай В.Н.* О поведении периода симметричных периодических движений // ПММ. 2012. Т. 76. Вып. 4. С. 616–622.
7. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс // Искусственные спутники Земли. 1958. № 1. С. 25–43.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 1, с. 19–27

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПОВОРОТ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОСРЕДСТВОМ ПОДВИЖНОЙ МАССЫ ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ[1]

© 2022 г. Н. Ю. Наумов[a,*], А. М. Нунупаров[a,**], Ф. Л. Черноусько[a]

[a] МФТИ; ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН Москва, Россия

* e-mail: nikita.naumov@phystech.edu

**e-mail: anunuparov@gmail.com

Поступила в редакцию 07.04.2021 г.
После доработки 25.08.2021 г.
Принята к публикации 27.09.2021 г.

Рассматривается двумерная задача наискорейшего поворота твердого тела посредством движения материальной точки при отсутствии влияния внешних сил. Рассчитаны оптимальные траектории материальной точки для поворота тела на заданный угол при наличии фазового ограничения в виде окружности.

DOI: 10.31857/S0002338822010085

Введение. Традиционно управление ориентацией робототехнической системы осуществляют с помощью внешних движителей (колес, ног, винтов и т.д.). В случае агрессивных и ранимых сред предпочтительно использование робота с гладким и герметичным корпусом. Организовать движение такого робота можно с помощью движения внутренних масс. В [1–4] изучаются возможности управления ориентацией механической системы посредством движения одной или нескольких внутренних масс. Задача оптимального по быстродействию управления плоским поворотом тела при помощи внутренней массы поставлена и решена в публикации [5] в важном случае, когда внутренняя масса мала по сравнению с массой тела. Эта задача описана в [6]. В [7–10] результаты работы [5] развиты и обобщены для управления пространственной (трехмерной) ориентацией твердого тела при помощи подвижной внутренней массы. При рассмотрении поворота твердого тела при помощи подвижной внутренней массы в ряде случаев требуется учитывать геометрические ограничения, наложенные на ее траекторию. Как для задачи управления мобильным (капсульным) роботом, так и для управления ориентацией космического аппарата или другого подвижного объекта движение внутренней массы может быть ограничено габаритами того объема, в котором осуществляется движение внутренней массы [11].

В статье построены траектории движения внутренней массы, обеспечивающие заданный поворот твердого тела за кратчайшее время при ограничении в виде окружности. Как и в работах [5–11], предполагается, что внешними силами, действующими на систему, можно пренебречь. Это предположение справедливо для космических аппаратов, а также для случая быстрого поворота роботов, когда силы взаимодействия внутренней массы и несущего тела значительно превосходят внешние силы.

1. Описание механической системы. Рассмотрим систему, состоящую из твердого тела P массы M и подвижной материальной точки Q массы m, расположенной внутри тела (рис. 1). Посредством актюатора точка Q может перемещаться относительно тела P. Единственной силой, действующей в системе, является сила взаимодействия между телом P и материальной точкой Q. В начальный момент времени система покоится. Ограничимся рассмотрением плоскопараллельных движений указанных тел в плоскости, перпендикулярной одной из главных центральных осей инерции тела P.

[1] Работа выполнена за счет РНФ (грант № 18-11-00307).

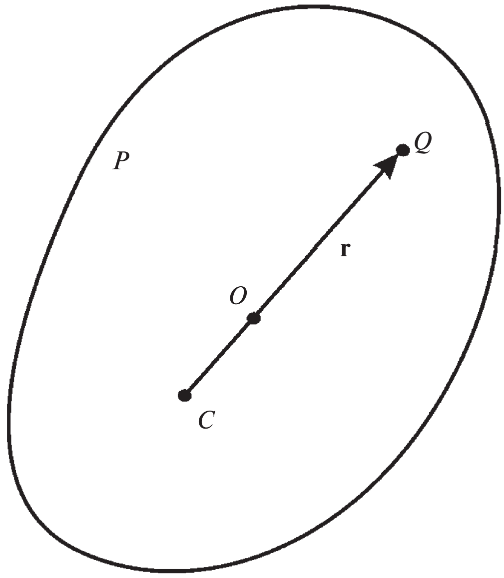


Рис. 1. Механическая система

Обозначим через C проекцию центра масс тела P на плоскость движения, а через O – проекцию центра масс системы $P + Q$ на эту же плоскость. Введем векторы $\mathbf{R}_C = \overline{OC}$ и $\mathbf{r} = \overline{CQ}$. Так как внешние силы отсутствуют, то центр масс системы $P + Q$ неподвижен. Поэтому имеем

$$M\mathbf{R}_C + m(\mathbf{R}_C + \mathbf{r}) = \mathbf{0}, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{0}$ – нулевой вектор.

Пусть $\mathbf{V}_C = \dot{\mathbf{R}}_C$ – абсолютная скорость центра масс C тела P, а $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость тела P. Запишем условие сохранения импульса:

$$M\mathbf{V}_C + m(\mathbf{V}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}. \tag{1.2}$$

Здесь $\dot{\mathbf{r}}$ – скорость тела Q относительно тела P. Обозначим через J момент инерции твердого тела P относительно оси, проходящей через точку C перпендикулярно плоскости движения тел. Как предполагается, эта ось является одной из главных центральных осей инерции тела P. Тогда из теоремы об изменении кинетического момента относительно начала координат O следует, что

$$M\mathbf{R}_C \times \mathbf{V}_C + J\boldsymbol{\omega} + m(\mathbf{R}_C + \mathbf{r}) \times (\mathbf{V}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}. \tag{1.3}$$

Пусть $\mu = m / (M + m)$, тогда из соотношений (1.1) и (1.2) получим

$$\mathbf{R}_C = -\mu\mathbf{r}, \quad \mathbf{V}_C = -\mu(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}}). \tag{1.4}$$

Подставим (1.4) в уравнение (1.3). После преобразований получим основное уравнение

$$\left(\frac{J}{M} + \mu r^2\right)\boldsymbol{\omega} + \mu(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}. \tag{1.5}$$

Свяжем с твердым телом P декартову систему координат CXY с началом в точке C. Обозначим через x и y координаты вектора $\mathbf{r}$, через u и v – проекции скорости точки Q на оси CX и CY соответственно, а через φ – угол поворота тела P в плоскости CXY. Тогда уравнение (1.5) примет следующую форму:

$$\begin{gathered} \dot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \\ \dot{\varphi} = \omega = \frac{\mu(yu - xv)}{a^2 + \mu(x^2 + y^2)}, \end{gathered} \tag{1.6}$$

где $a = \sqrt{J/M}$ – радиус инерции тела P.

2. Постановки задач управления. Предполагаем, что точка Q может перемещаться с постоянной по величине скоростью V относительно тела P. Таким образом, на управляющие воздействия u и v в системе (1.6) наложено ограничение

$$u^2 + v^2 = V^2. \tag{2.1}$$

Кроме того, на координаты x и y точки Q наложено фазовое ограничение

$$x^2 + y^2 \le R^2, \tag{2.2}$$

где R – радиус окружности, внутри которой может осуществляться движение точки Q. Начальные состояния точки Q внутри окружности радиуса R и тела P запишем как

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \tag{2.3}$$

где x_0 – заданное число, $|x_0| < R$.

Будем рассматривать две задачи управления: задачу со свободным концом траектории и двухточечную задачу.

В задаче со свободным концом зафиксируем угол поворота твердого тела при помощи условия

$$\varphi(T) = \varphi_T, \tag{2.4}$$

а конечное положение точки Q, т.е. координаты $x\,(T)$ и $y\,(T)$, считаем свободными.

В двухточечной задаче, помимо условия (2.4), наложены краевые условия

$$x(T) = x_T, \quad y(T) = y_T \tag{2.5}$$

на конечное положение точки Q.

В обеих задачах требуется найти управления $u(t)$, $v(t)$ и траектории $x(t)$, $y(t)$ точки Q, при которых удовлетворяются уравнение (1.6), наложенные условия (2.1)–(2.5) и достигается наименьшее значение времени движения T.

Точное решение поставленных задач оптимального быстродействия при произвольном μ приводит к операциям с эллиптическими функциями [6, 11]. Ниже предлагается более простое решение, близкое к оптимальному в важном случае малых μ.

Как показано в [5], в случае малых μ оптимальные траектории точки Q при отсутствии фазовых ограничений являются дугами окружностей. Поэтому естественно искать решение поставленных задач в виде комбинации дуг окружностей и движения по фазовому ограничению, которое является окружностью радиуса R. В точках сопряжения дуг окружностей они должны иметь общую касательную. Это вытекает из условий оптимальности [11] и представляется естественным с физической точки зрения: при негладком сопряжении дуг будут иметь место скачки скоростей тел, что нежелательно.

3. Анализ траекторий. В результате приходим к следующей структуре траекторий для поставленных задач.

Сначала рассмотрим траектории для задачи со свободным правым концом. Такая траектория начинается в точке A с координатами $(x_0, 0)$ из (2.3) и состоит из дуги AB окружности некоторого радиуса ρ и дуги BD окружности радиуса R, лежащей на заданном ограничении (рис. 2). В точке B, имеющей координаты $(R\cos\alpha, R\sin\alpha)$, обе окружности касаются. Траектория заканчивается в некоторой точке D с координатами $(R\cos\beta, R\sin\beta)$. Данная траектория однозначно определяется параметрами α, ρ и β, которые подлежат определению.

Обозначим через K центр окружности радиуса ρ на рис. 2. Имеем равенства

$$KQ = KA = KB = \rho, \quad CK = R - \rho.$$

Координаты точки K равны

$$x_K = (R - \rho)\cos\alpha, \quad y_K = (R - \rho)\sin\alpha. \tag{3.1}$$

Из треугольника CKA получим равенство

$$\rho^2 = (R - \rho)^2 + x_0^2 - 2(R - \rho)x_0\cos\alpha,$$

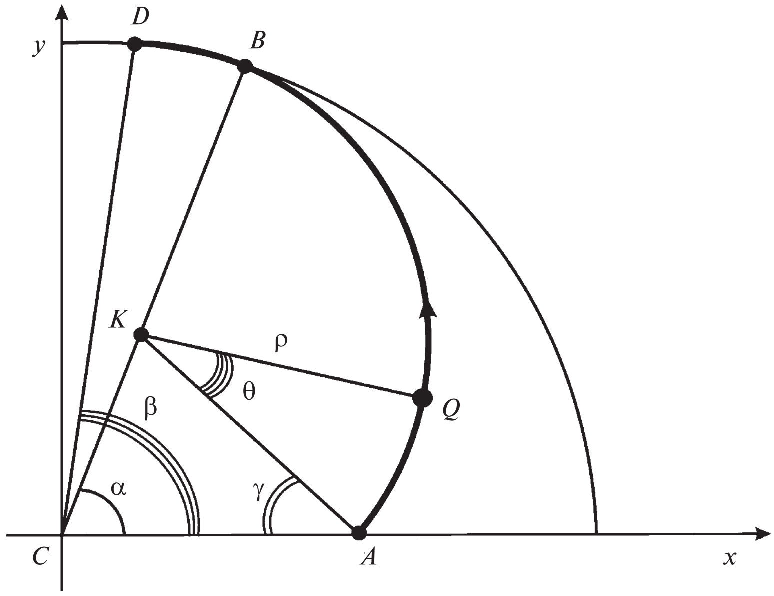


Рис. 2. Траектория для задачи со свободным правым концом

откуда находим

$$\rho = \frac{R^2 + x_0^2 - 2Rx_0 \cos\alpha}{2(R - x_0 \cos\alpha)}. \tag{3.2}$$

Обозначим через γ угол CAK, а через θ – угол AKQ, определяющий положение точки Q, движущейся по окружности радиуса ρ и отсчитанный от радиуса KA (рис. 2). При движении Q от точки A до точки B этот угол изменяется от 0 до $\gamma + \alpha$. Из треугольника CKA имеем равенство

$$\frac{\sin\gamma}{R-\rho} = \frac{\sin\alpha}{\rho}, \tag{3.3}$$

которое служит для определения угла γ через α и ρ. Координаты движущейся точки Q при этом запишутся в виде

$$x = x_K + \rho\cos(\theta - \gamma), \quad y = y_K \rho\sin(\theta - \gamma), \tag{3.4}$$

а ее скорости u, v, согласно (1.6), представим как

$$u = -\rho\dot\theta\sin(\theta - \gamma), \qquad v = \rho\dot\theta\cos(\theta - \gamma). \tag{3.5}$$

Подставим соотношения (3.1), (3.4) и (3.5) в последнее равенство (1.6). Получим

$$\omega = -\frac{\mu\rho\dot\theta[\rho + (R-\rho)\cos(\theta - \gamma - \alpha)]}{a^2 + \mu[(R-\rho)^2 + \rho^2 + 2(R-\rho)\rho\cos(\theta - \gamma - \alpha)]}. \tag{3.6}$$

Для движения точки Q по дуге BD окружности радиуса R имеем соотношения

$$x = R\cos\delta, \quad y = R\sin\delta, \quad u = -R\dot\delta\sin\delta, \quad v = R\dot\delta\cos\theta, \tag{3.7}$$

где δ – полярный угол точки Q, изменяющийся на дуге BD от α до β.

Подставляя соотношения (3.7) в последнее равенство (1.6), найдем

$$\omega = -\frac{\mu R^2\dot\delta}{a^2 + \mu R^2}. \tag{3.8}$$

Суммарный угол поворота твердого тела φ_T получим, интегрируя равенство (3.6) для дуги AB и равенство (3.8) для дуги BD. Интегрирование по времени заменим интегрированием по углу θ

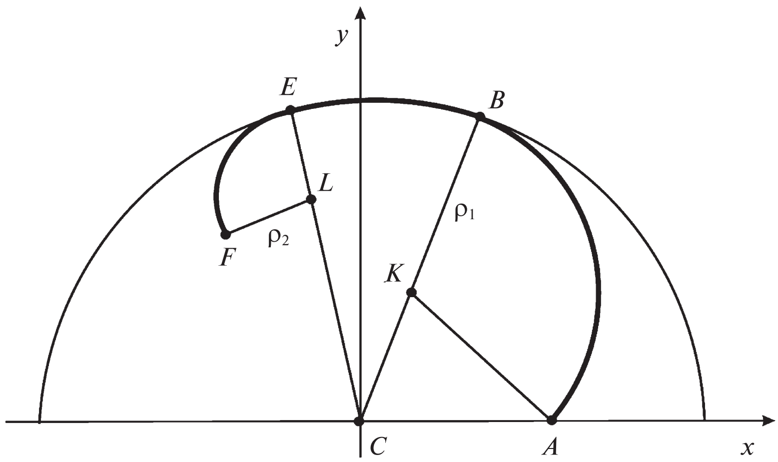


Рис. 3. Траектория для двухточечной задачи

от 0 до $\gamma+\alpha$ для равенства (3.6) и по углу δ от α до β для равенства (3.8). В результате получим равенство

$$\varphi_T = \Delta\varphi - \frac{\mu R^2(\beta-\alpha)}{a^2+\mu R^2}, \tag{3.9}$$

где введено следующее обозначение:

$$\Delta\varphi = -\mu\rho\int\limits_0^{\gamma+\alpha} \frac{[\rho + (R-\rho)\cos(\theta-\gamma-\alpha)]\,d\theta}{a^2+\mu[(R-\rho)^2+\rho^2+2\rho(R-\rho)\cos(\theta-\gamma-\alpha)]}. \tag{3.10}$$

Так как скорость движения точки Q постоянна и равна V, то для определения времени достаточно подсчитать полную длину траектории ABD. Имеем

$$VT = \rho(\gamma+\alpha) + R(\beta-\alpha). \tag{3.11}$$

Исключая β при помощи равенства (3.9), получим из (3.11)

$$VT = \rho(\gamma+\alpha) + \frac{(a^2+\mu R^2)(\Delta\varphi-\varphi_T)}{\mu R}. \tag{3.12}$$

Оптимизация траектории сводится к определению параметра α, доставляющего минимум выражению (3.12). Параметры γ и ρ, от которых зависит интеграл $\Delta\varphi$ из (3.10) и правая часть соотношения (3.12), выражаются через α формулами (3.2) и (3.3). Поэтому вместо нахождения параметра α можно искать минимум выражения (3.12) по параметру ρ, считая, что углы α и γ выражаются через ρ посредством указанных формул. Искомый минимум можно определить численно. Заметим, что после дифференцирования выражения (3.12) по α или ρ параметр φ_T уничтожается. Следовательно, дуга AB не зависит от условия на конечный поворот твердого тела.

В двухточечной задаче (рис. 3) заданы начальная точка A и конечная точка F, лежащие внутри окружности радиуса R. Соответствующая траектория состоит из двух дуг AB и EF радиусов ρ_1 и ρ_2 в начале и в конце движения и из дуги BE радиуса R, лежащей на ограничении. Действуя аналогично случаю задачи со свободным правым концом, можно привести поиск оптимальной траектории к задаче минимизации времени движения по двум параметрам ρ_1 и ρ_2.

Например, можно выполнить следующие шаги. Вначале найдем параметры дуги AB из решения задачи со свободным концом и зафиксируем найденные значения $\Delta\varphi_1, \alpha$ и ρ_1. Параметры дуги BE и EF можно определить, решая задачу, похожую на задачу со свободным концом в обратном направлении. Систему координат расположим по аналогии с решенной задачей, а в начальный момент времени поместим материальную точку в $(\sqrt{x_T^2+y_T^2}, 0)$, см. точку F на рис. 3.

Для обратной задачи в качестве необходимого поворота твердого тела возьмем величину $\varphi_T - \Delta\varphi_1$. Она является углом, на который должно повернуться твердое тело P после прохода

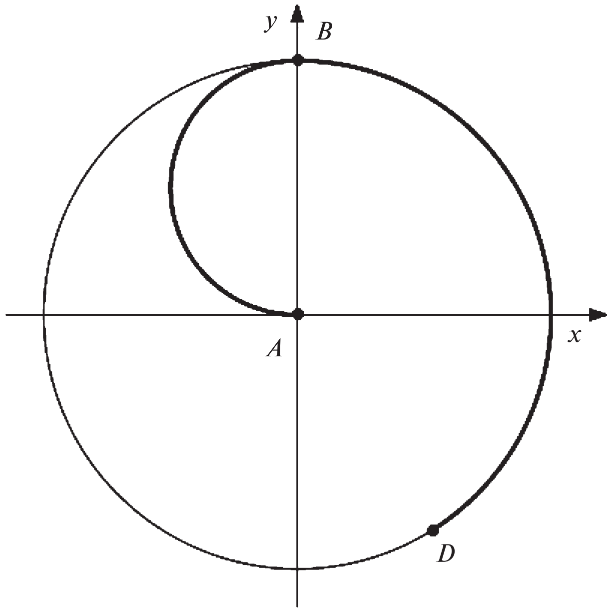


Рис. 4. Пример 1

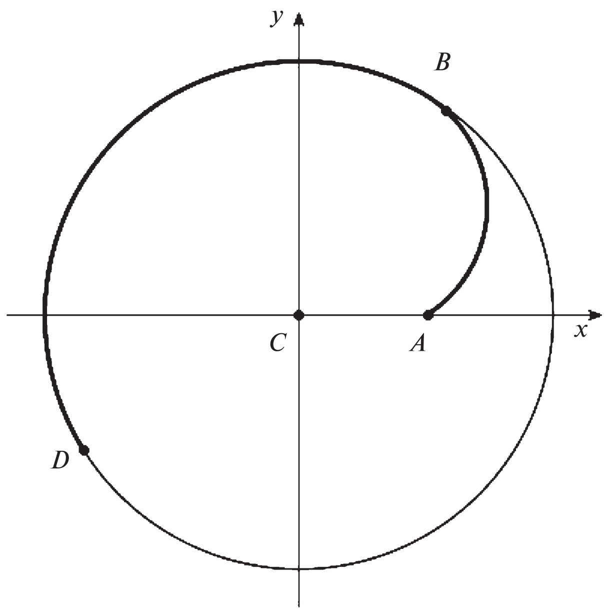


Рис. 5. Пример 2

точки Q по дугам FE и EB. Также добавим ограничение на конец дуги EB для сопряжения с дугой AB, найденной ранее. Будем обозначать переменные обратной задачи символом ~, тогда "новые" (для обратной задачи) и "старые" переменные связаны следующим образом:

$$\tilde{\alpha} = \varepsilon - \beta, \quad \tilde{\beta} = \varepsilon - \alpha,$$

где ε – угол поворота "новой" системы координат относительно "старой".

Обозначим через T_1, T_2, T_3 времена движения по дугам AB, BE, EF соответственно. В результате решения первой задачи найдем T_1, а в результате решения второй (обратной) задачи определим T_2 и T_3.

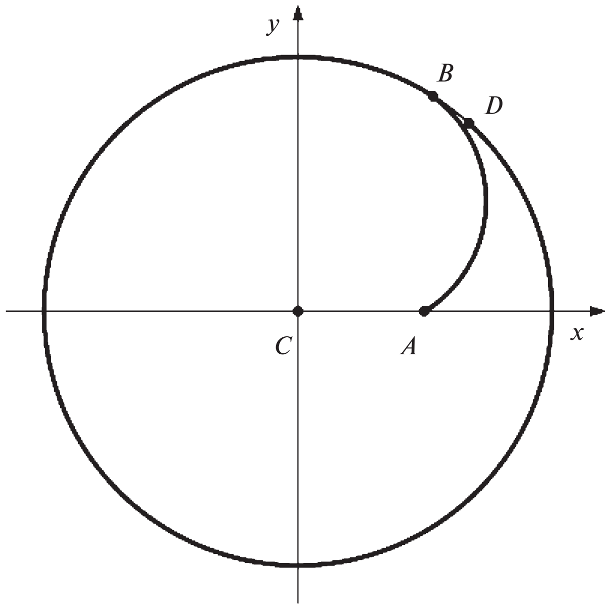


Рис. 6. Пример 3

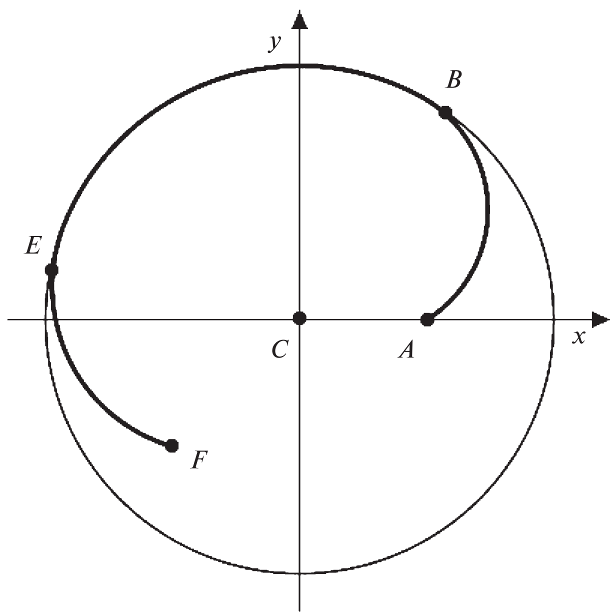


Рис. 7. Пример 4

Таким образом, путем решения двух однотипных задач минимизации по одной переменной будет найдена оптимальная траектория, доставляющая минимум суммарному времени:

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

5. Обсуждение результатов. Примеры траекторий при различных параметрах системы приведены на рис. 4–7. Во всех примерах 1–4 приняты следующие значения параметров:

$$\mu = 0.25, \quad V = 1, \quad R = 2, \quad a = 4.$$

Примеры 1–3 соответствуют задаче со свободным правым концом, а пример 4 – двухточечной задаче. Для примеров 1–3 соответствующие данные представлены в таблице. В статье [11] для

Таблица

Пример	x_0	ϕ_T	α	β	T_1	T_2	T	Рисунок
1	0	0.2	1.57	−1.03	3.15	5.2	8.35	4
2	1	−0.2	1.08	3.71	2.13	5.26	7.39	5
3	1	−0.4	1.08	7.11	2.13	12.06	14.19	6

случая, когда в начальный момент времени точка Q находится в центре окружности радиуса R, найдена оптимальная траектория без учета ограничения на движение точки Q дугами окружностей. На рис. 4 приведены результаты численного решения с параметрами из упомянутой статьи. Траектории получились похожими, а длительности маневров почти совпали ($T = 8.35$ против $T = 8.34$). На рис. 5 описан случай, когда необходим поворот твердого тела в обратном направлении. Отметим также, что смещение начального положения материальной точки не приводит к качественному изменению траектории движения. Выше было замечено, что изменение величины необходимого поворота твердого тела P не приводит к изменению параметра α. При увеличении необходимого поворота твердого тела φ_T дуга BD увеличивается, причем она может стать больше длины окружности радиуса R. На рис. 6 приведена траектория для случая, аналогичного рис. 5 с увеличенным значением φ_T. Как и предполагалось, дуга AB осталась неизменной, а дуга BD увеличилась.

Пример траектории для двухточечной задачи описан на рис. 7. Соответствующие значения параметров для этого примера таковы:

$$x_0 = 1, \quad x_T = -1, \quad y_T = -1, \quad \varphi_T = -0.2,$$

$$\alpha = 1.08, \quad \beta = 2.75, \quad T_1 = 2.13, \quad T_2 = 3.34, \quad T_3 = 2.21, \quad T = 7.68.$$

Условия, при которых построена траектория на рис. 7, аналогичны условиям траектории на рис. 5. Добавление краевых условий на конечное положение точки Q привело к увеличению времени маневра T. Это ожидаемо и связано с необходимостью попадания точки Q в ее конечное положение по дуге EF, что происходит с меньшей угловой скоростью твердого тела P. Изменение величины необходимого поворота, начальных или конечных условий для материальной точки не приводит к качественным изменениям траектории движения материальной точки. Длины дуг меняются по аналогии со случаем задачи со свободным концом.

Заключение. Когда внешние силы отсутствуют или очень малы, для управления ориентацией твердого тела можно использовать движение внутренней массы. Предложены решения задач о наискорейшем плоском повороте твердого тела посредством движения внутренней массы при наложенных фазовых ограничениях и различных краевых условиях. Задача сведена к поиску минимума у нелинейного выражения с одним неизвестным параметром. Анализ полученного выражения показал, что траектория выхода внутренней массы на ограничивающую окружность не зависит от величины необходимого поворота твердого тела. Построены и проанализированы оптимальные траектории движения внутренней массы. Результаты исследования могут представлять интерес при разработке мобильных роботов, которые не имеют внешних движителей, систем ориентации космических аппаратов и других движущихся объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Huda M.N., Yu H., Cang S.* Behavior-based Control Approach for the Trajectory Tracking of an Underactuated Planar Capsule Robot // IET Control Theory Appl. 2015. V. 9. P. 163–175.
2. *Chernousko F.L.* Two-dimensional Motions of a Body Containing Internal Moving Masses // Meccanica. 2016. V. 51 № 12. P. 3203–3209.
3. *Zhan X., Xu J., Fang, H.A* Vibration-driven Planar Locomotion Robot–Shell // Robotica. 2018. V. 36 № 9. P. 1402–1420.
4. *Xu J., Fang H.* Improving Performance: Recent Progress on Vibration-driven Locomotion Systems // Nonlinear Dyn. 2019. V. 98. № 4. P. 2651–2669.
5. *Черноусько Ф.Л.* Оптимальное управление движением двухмассовой системы // ДАН. 2018. Т. 480. № 5. С. 528–532.
6. *Шматков А.М.* Поворот тела за кратчайшее время перемещением точечной массы // ДАН. 2018. Т. 481. № 5. С. 498–502.

7. *Chernousko F.L.* Optimal Two-dimensional Motions of a Body Controlled by a Moving Internal Mass // Multibody System Dynamics. 2019. V. 46. № 4. P. 381–398.
8. *Наумов Н.Ю., Черноусько Ф.Л.* Переориентация твердого тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // Изв. РАН. ТиСУ. 2019. № 2. С. 98–105.
9. *Chernousko F.L.* Two- and Three-dimensional Motions of a Body Controlled by an Internal Movable Mass // Nonlinear Dynamics. 2020. V. 99. № 1. P. 793–802.
10. *Черноусько Ф.Л.* Изменение ориентации твердого тела при помощи вспомогательной массы // Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки. 2020. Т. 490. С. 79–81.
11. *Шматков А.М.* Влияние габаритов управляемого устройства на оптимальный по быстродействию поворот с помощью подвижной внутренней массы // ДАН. 2019. Т. 486. № 3. С. 292–296.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.977

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ ПЕРЕМЕННОЙ РАЗМЕРНОСТИ

А. С. Бортаковский

МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия

e-mail: asbortakov@mail.ru

Поступила в редакцию 05.07.2021 г.
После доработки 23.07.2021 г.
Принята к публикации 26.07.2021 г.

Рассматривается задача оптимального управления гибридной системой, непрерывное движение которой чередуется с дискретными изменениями (переключениями), при которых меняется пространство состояний. Смена размерности пространства состояний происходит, например, при изменении количества управляемых объектов, что характерно, в частности, для задач управления группами подвижных объектов переменного состава. Моменты переключений заранее не заданы. Они определяются в результате минимизации функционала, при этом не исключаются процессы с мгновенными многократными переключениями. Доказаны необходимые условия оптимальности управления такими системами. Из-за наличия мгновенных многократных переключений эти условия отличаются от традиционных, в частности, уравнениями для вспомогательных переменных. Применение условий оптимальности демонстрируется на академическом примере.

DOI: 10.31857/S0002338821060056

Введение. Непрерывное движение гибридных систем переменной размерности (ГСПР) описывается дифференциальными уравнениями, а мгновенные изменения состояния (переключения) – рекуррентными уравнениями или включениями. В момент переключения меняется пространство состояний системы, в частности его размерность. Системы управления с изменяемым пространством состояний исследовались под разными названиями: составные системы [1, 2], системы с переменной размерностью [3], системы с разветвлением структур [4], ступенчатые системы [5], сложные (многоэтапные) процессы [6], системы со сменой фазового пространства [7], гибридные системы с промежуточными условиями [8, 9]. Большинство работ относятся к линейным системам и касаются вопросов устойчивости, управляемости и наблюдаемости [2, 4]. В задачах оптимального управления [1, 5, 7–9], как правило, моменты смены фазового пространства фиксированы или определяются промежуточными условиями, а переключения состояний неуправляемы. Количество переключений задано, а в первых работах [1, 5, 7] по этой тематике переключение единственное. Необходимые условия для гибридных систем с промежуточными условиями, обобщающие принцип максимума [10], получены в [8, 9]. В этих публикациях количество переключений задано, а сами переключения неуправляемы.

В статье рассматриваются задачи, в которых переключения состояний системы управляемы. Количество переключений задано, а моменты переключений – нет. Они определяются в результате минимизации функционала, в котором учитываются затраты на каждое переключение. При этом допускаются процессы с мгновенными многократными переключениями [11]. Такие процессы, как правило, исключаются в задачах оптимизации гибридных систем (ГС), несмотря на то, что именно они оказываются оптимальными не только в академических примерах, но и в приложениях, например в задачах группового управления.

Необходимые условия оптимальности управления динамическими системами, как правило, связаны с вычислением вариаций функционалов, определенных на траекториях движения. Для ГСПР такие вариации порождаются игольчатыми вариациями управления непрерывным движением системы, малыми вариациями управления переключениями, а также малыми вариациями моментов переключений. При доказательстве принципа максимума для непрерывных [10] или дискретных [12, 13] систем важную роль играют вспомогательные функции. Аналогичные функции используются для ГСПР. Между моментами переключений эти функции удовлетворяют сопряженной системе дифференциальных уравнений, а в моменты переключений – рекуррентным уравнениям. Из-за изменения размерности ГС приходится использовать разные наборы вспомогательных функций после каждого переключения.

Перечисленные вариации управлений непрерывным движением и переключениями – традиционные для непрерывных [10] и дискретных [12, 13] систем. Они порождают малые изменения траектории движения. Вариация моментов переключений приводит к необычным изменениям траектории. Возникают малые промежутки времени, на которых нельзя определить вариацию (даже отклонение) траектории, так как опорная и возмущенная траектории принадлежат разным пространствам состояний. Поэтому приходится преодолевать определенные технические трудности при вычислении вариации функционала.

Доказанные необходимые условия оптимальности ГСПР и ранее полученные достаточные условия [14] можно использовать для широкого круга задач управления с переключениями: непрерывно-дискретными [15], логико-динамическими, составными [1, 2], ступенчатыми системами [5], системами с промежуточными условиями [2, 8, 9, 16], с переменной или разветвляемой структурой [3, 4, 17, 18]. Применение необходимых условий оптимальности ГСПР демонстрируется на академическом примере.

1. Постановка задачи. Пусть на заданном промежутке времени $T = [t_0, t_F]$ динамическая система совершает N переключений в моменты времени t_i, $i = 1,\ldots,N$, образующие неубывающую конечную последовательность $\mathcal{T} = \{t_1,\ldots,t_N\}$:

$$t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_N \le t_{N+1} \overset{\Delta}{=} t_F. \tag{1.1}$$

Между неравными последовательными моментами переключений состояние системы изменяется непрерывно, согласно дифференциальному уравнению:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_i(t), u_i(t)), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}, \tag{1.2}$$

а в моменты переключений – дискретно в соответствии с рекуррентным уравнением

$$x_i(t_i) = g_i(t_i, x_{i-1}(t_i), v_i), \quad i = 1,\ldots,N. \tag{1.3}$$

В соотношениях (1.2) $\mathcal{N} \overset{\Delta}{=} \{i = 0,1,\ldots,N \,|\, t_i < t_{i+1}\}$ – множество номеров ненулевых (по длине) частичных промежутков $T_i = [t_i, t_{i+1}]$ непрерывного изменения системы; $x_i(t)$ – состояние системы в момент времени $t \in T_i$, $x_i(t) \in X_i = \mathbb{R}^{n_i}$; $u_i(t)$ – управление непрерывным движением системы в момент времени $t \in T_i$, $u_i(t) \in U_i \subset \mathbb{R}^{p_i}$, U_i – заданное множество допустимых значений управления, $i \in \mathcal{N}$. При $t_i = t_{i+1}$ дифференциальное уравнение (1.2) опускается ($i \notin \mathcal{N}$), функция $x_i(\cdot)$ определена в одной точке $x_i(t_i) = x_i$, а значение $u_i(t_i)$ управления в этой точке несущественно. В уравнении (1.3) v_i – управление переключением системы в момент $t_i \in \mathcal{T}$, $v_i \in V_i \subset \mathbb{R}^{q_i}$, V_i – заданное множество допустимых управлений переключениями, $i = 1,\ldots,N$. Функции $f_i : T \times X_i \times$ $\times U_i \to \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 0,1,\ldots,N$, и $g_i : T \times X_{i-1} \times V_i \to \mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1,\ldots,N$, непрерывны на всей области определения вместе с первыми частными производными по t и компонентам вектора x_i. Возможное равенство последовательных моментов в (1.1) означает, что система совершает мгновенные многократные переключения [11].

Начальное состояние системы фиксировано $x_0(t_0) = x_0$, а конечное определяется первым достижением терминальной поверхности $(t_F, x_N(t_F)) \in \boldsymbol{\Gamma}_N$, задаваемой системой уравнений

$$\Gamma_N(t, x_N) = 0,$$

где $\Gamma_N : [t_0, +\infty) \times X_N \to \mathbb{R}^{l_N}$ – непрерывно дифференцируемая вектор-функция. Аналогичные терминальные условия могут накладываться на левый конец траектории [19] либо на оба конца траектории одновременно (например, условие периодичности).

Множество допустимых процессов $\mathcal{D}_0(t_0, x_0)$ составляют четверки $d = (\mathcal{T}, x(\cdot), u(\cdot), \{v\})$, включающие неубывающую последовательность $\mathcal{T}$ моментов переключений (1.1); последовательность $x(\cdot) = \{x_i(\cdot)\}_{i=0}^{N}$ абсолютно непрерывных функций $x_i : T_i \to X_i$, $i \in \mathcal{N}$; последовательность $u(\cdot) = \{u_i(\cdot)\}_{i=0}^{N}$ ограниченных измеримых функций $u_i : T_i \to U_i$; последовательность $\{v\} = \{v_i\}_{i=1}^{N}$ векторов $v_i \in V_i$. Причем пары $(x_i(\cdot), u_i(\cdot))$, $i \in \mathcal{N}$, удовлетворяют дифференциальному уравнению (1.2) почти всюду на промежутке T_i, тройки $(x_{i-1}(t_i), x_i(t_i), v_i)$, $i = 1,\ldots,N$, — рекуррентному уравнению (1.3). В начальный момент времени выполняется условие $x_0(t_0) = x_0$, а в конечный — терминальное условие $\Gamma_N(t_F, x_N(t_F)) = 0$. Подчеркнем, что количество $N = |\mathcal{T}|$ переключений и моменты переключений $\mathcal{T} = \{t_1,\ldots,t_N\}$ не фиксированы и у разных допустимых процессов могут не совпадать. При этом не исключается случай отсутствия переключений, когда $N = 0$ и $\mathcal{T} = \varnothing$ — пустое множество по определению.

На множестве $\mathcal{D}_0(t_0, x_0)$ допустимых процессов задан функционал качества

$$I_0(t_0, x_0, d) = \sum_{i=0}^{N} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_i^0(t, x_i(t), u_i(t))\,dt + \sum_{i=1}^{N} g_i^0(t_i, x_{i-1}(t_i), v_i) + F_N(t_F, x_N(t_F)), \qquad (1.4)$$

где функции $f_i^0 : T_i \times X_i \times U_i \to \mathbb{R}$, $g_i^0 : T \times X_i \times V_i \to \mathbb{R}_+$ и $F_N : [t_0, +\infty) \times X_N \to \mathbb{R}$ ограничены снизу и непрерывны вместе с первыми частными производными по t и x. В функционале (1.4) момент окончания t_F обозначен также через t_{N+1}.

Требуется найти минимальное значение функционала (1.4) и оптимальный процесс $d^* = (\mathcal{T}^*, x^*(\cdot), u^*(\cdot), \{v^*\}) \in \mathcal{D}_0(t_0, x_0)$, на котором это значение достигается:

$$I_0(t_0, x_0, d^*) = \min_{d \in \mathcal{D}_0(t_0, x_0)} I_0(t_0, x_0, d). \qquad (1.5)$$

Если наименьшее значение (1.5) не существует, то может быть поставлена задача нахождения минимизирующей последовательности допустимых процессов [19]. Количество переключений у процессов минимизирующей последовательности может оставаться конечным или неограниченно возрастать. Бесконечное количество переключений у оптимального процесса становится невозможным, если усилить условие ограниченности функции g_i^0 в (1.4), полагая $g_i^0(t, x_{i-1}, v_i) \geq \text{const} > 0$. В этом случае каждое слагаемое g_i^0 в (1.4) можно рассматривать как затраты (или "штраф") при переключении $x_{i-1}(t_i) \to x_i(t_i)$. Применение таких "штрафов" в функционале качества исключает фиктивные переключения, когда состояние не меняется $x_{i-1}(t_i) = x_i(t_i)$, а также последовательности процессов с неограниченным ростом числа переключений как неминимизирующие.

Отметим, что управляющие параметры в задаче (1.5) образуют "управляющий комплекс", который включает: количество переключений N, моменты переключений $t_1, \ldots, t_N$, управление непрерывным движением $u(\cdot)$, управление переключениями $\{v\}$ и момент окончания процесса управления t_F. Как правило, решение поставленной задачи $I \to \min$ сводится к решению ряда задач $I_N \to \min$ с фиксированным числом переключений N, которое последовательно увеличивается: $N = 0, 1, \ldots$ Отметим, что в прикладных задачах количество переключений ограничено техническими требованиями.

2. Вариации функционала. Вывод условий оптимальности по методике [20] состоит в следующем: используя вариации управления, составляем уравнение для вариации траектории; выражаем вариацию функционала через вариации управления и траектории, исключаем из полученного выражения вариацию траектории, вводя вспомогательные переменные, удовлетворяющие дополнительным уравнениям и условиям трансверсальности (в форме [21]). Будем сравнивать значения функционала (1.5) на опорном (невозмущенном) допустимом процессе $d = (\mathcal{T}, x(\cdot), u(\cdot), \{v\})$ и возмущенном допустимом процессе $d = (\tilde{\mathcal{T}}, \tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot), \{\tilde{v}\})$. Для ГСПР используем два типа вариаций управляющих параметров: либо игольчатые вариации $\delta u_i(\cdot)$ управлений $u_i(\cdot)$, малые изменения δv_i управления v_i и малую вариацию δt_F момента окончания, либо малые вариации δt_i моментов переключений t_i, $i = 1,\ldots,N$.

2.1. *Вариации управлений и момента окончания.* Игольчатые вариации $\delta u_i(\cdot)$ управлений $u_i(\cdot)$ представляют собой конечные отклонения $\delta u_i(t) = \tilde{u}_i(t) - u_i(t)$ на множестве $T_i' \subset T_i$ малой меры μ_i, $i \in \mathcal{N}$. В остальных точках $t \in T_i \setminus T_i'$ вариация $\delta u_i(\cdot)$ равна нулю. Величину $\mu = \mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_N$ будем считать бесконечно малой первого порядка причем $\mu_i = 0$, $i \notin \mathcal{N}$. Предполагаем, что вариация $\delta t_F = \tilde{t}_F - t_F$ момента окончания и вариации $\delta v_i = \tilde{v}_i - v_i$ управлений переключениями имеют тот же порядок малости, т.е. $\delta t_F \sim \mu$ и $|v| = |v_1| + \ldots + |v_N| \sim \mu$. Эти вариации порождают малые вариации $\delta x(\cdot) = \tilde{x}(\cdot) - x(\cdot)$ траектории, которые удовлетворяют уравнениям в вариациях:

$$\delta\dot{x}_i(t) = f_{i\,x_i}[t]\,\delta x_i(t) + \tilde{f}_i[t] - f_i[t], \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}, \tag{2.1}$$

$$\delta x_i(t_i) = g_{i\,x_{i-1}}[t_i]\,\delta x_{i-1}(t_i) + g_{i\,v_i}[t_i]\,\delta v_i, \quad i = 1,\ldots,N. \tag{2.2}$$

Здесь и далее принято следующее [20]: аргумент t, заключенный в квадратные скобки, означает, что функция вычислена на опорном режиме в указанный момент времени. Например, $f_i[t] = f_i(t, x_i(t), u_i(t))$ – значение функции f_i на опорном режиме; $f_{i\,x_i}[t] = f_{i\,x_i}(t, x_i(t), u_i(t))$ – матрица (Якоби) первых частных производных вектор-функции f_i по компонентам вектора x_i, вычисленная на опорном режиме. Знак "тильда" относится только к возмущенному управлению, т.е. $\tilde{f}_i[t] = f_i(t, x_i(t), \tilde{u}_i(t))$. Вариации $\delta x(\cdot)$ имеют порядок малости μ, а уравнения в вариациях (2.1), (2.2) выполняются с точностью $o(\mu)$.

Запишем вариацию функционала (1.4)

$$\begin{gathered}\delta I = \sum_{i=0}^{N} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{f^0_{i\,x_i}[t]\delta x_i(t) + \tilde{f}^0_i[t] - f^0_i[t]\}dt + \sum_{i=1}^{N}\{g^0_{i\,x_{i-1}}[t_i]\delta x_{i-1}(t_i) + g^0_{i\,v_i}[t_i]\delta v_i\} + \\ + \{F_{N\,t}[t_F] + f^0_N[t_F]\}\delta t_F + F_{N\,x_N}[t_F]\delta x_{N\,F},\end{gathered} \tag{2.3}$$

где $\delta x_{N\,F} = \delta x_N(t_F) + f_N[t_F]\,\delta t_F$. Здесь, как и ранее, первые частные производные функций обозначаем, указывая в нижнем индексе соответствующий аргумент. Например, $F_{N\,t}$ – частная производная скалярной функции $F_N(t, x_N)$ по времени t, $F_{N\,x_N}$ – градиент этой же функции по координатам вектора x_N. Теперь, следуя методике [20], нужно исключить в (2.3) вариации δx_i.

Введем функции Гамильтона–Понтрягина (ГП) для непрерывного движения и переключений соответственно:

$$H_i(\psi_i, t, x_i, u_i) = \psi_i\, f_i(t, x_i, u_i) - f^0_i(t, x_i, u_i),$$

$$\hat{H}_i(\psi_i, t, x_{i-1}, v_i) = \psi_i\, g_i(t, x_{i-1}, v_i) - g^0_i(t, x_{i-1}, v_i).$$

Здесь $\psi_i = (\psi^1_i, \ldots, \psi^{n_i}_i)$ – вспомогательные переменные, $i = 1,\ldots,N$. Предполагаем, что между моментами переключений функции $\psi_i : T_i \to \mathbb{R}^{n_i}$, $i \in \mathcal{N}$, абсолютно непрерывны и удовлетворяют сопряженным системам уравнений:

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial H_i(\psi_i(t), t, x_i(t), u_i(t))}{\partial x_i}, \quad i \in \mathcal{N}, \tag{2.4}$$

в моменты переключений – рекуррентным уравнениям:

$$\psi_{i-1}(t_i) = \frac{\partial \hat{H}_i(\psi_i(t_i), t_i, x_{i-1}(t), v_i)}{\partial x_{i-1}}, \quad i = 1,\ldots,N; \tag{2.5}$$

а в конечный момент времени – условиям трансверсальности

$$\{F_{N\,t}[t_F] - H_N[t_F]\}\delta t_F + \{F_{N\,x_N}[t_F] + \psi_N(t_F)\}\,\delta x_{N\,F} = 0 \tag{2.6}$$

при $\Gamma_{N\,t}[t_F]\,\delta t_F + \Gamma_{N\,x_N}[t_F]\,\delta x_N = 0$, где $\delta x_{N\,F} = \delta x_N(t_F) + f_N[t_F]\,\delta t_F$.

Прибавляем к вариации (2.3) равенства

$$\psi_i(t)\,\delta x_i(t)\,\Big|_{t_i}^{t_{i+1}} - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{\dot{\psi}_i(t)\,\delta x_i(t) + \psi_i(t)\,\delta\dot{x}_i(t)\}\,dt = 0, \quad i = 0,1,\ldots,N, \tag{2.7}$$

которые следуют из формулы Ньютона–Лейбница для ненулевых по длине промежутков $T_i = [t_i, t_{i+1}]$, $i \in \mathcal{N}$. Для совпадающих моментов переключений $t_i = t_{i+1}$ равенства (2.7), очевидно, выполняются. После добавления равенств (2.7) вариация (2.3) принимает вид

$$\delta I = \sum_{i=0}^{N} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{f^0_{i\,x_i}[t]\,\delta x_i(t) + \tilde{f}^0_i[t] - f^0_i[t] - [\dot\psi_i(t)\,\delta x_i(t) + \psi_i(t)\,\delta\dot{x}_i(t)]\}dt +$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\{g^0_{i\,x_{i-1}}[t_i]\,\delta x_{i-1}(t_i) + g^0_{i\,v_i}[t_i]\,\delta v_i + \psi_i(t_{i+1})\,\delta x_i(t_{i+1}) - \psi_i(t_i)\,\delta x_i(t_i)\} + \tag{2.8}$$
$$+\{F_{N\,t}[t_F] + f^0_N[t_F]\}\delta t_F + F_{N\,x_N}[t_F]\delta x_{N\,F} + \psi_0(t_1)\delta x_0(t_1).$$

В (2.8) учтено, что в начальный момент времени вариации траектории нет, т.е. $\delta x_0(t_0) = 0$.

Рассмотрим сначала терминальные слагаемые, которые после подстановки $\delta x_N(t_F) = \delta x_{NF} - f_N[t_F]\delta t_F$ можно преобразовать следующим образом:

$$\{F_{N\,t}[t_F] + f^0_N[t_F]\}\delta t_F + F_{N\,x_N}[t_F]\delta x_{N\,F} + \psi_N(t_F)(\delta x_{N\,F} - f_N[t_F]\delta t_F) =$$
$$= \{F_{N\,t}[t_F] - H_N[t_F]\}\,\delta t_F + \{F_{N\,x_N}[t_F] + \psi_N(t_F)\}\,\delta x_{N\,F}.$$

Согласно условиям трансверсальности (2.6), это выражение равно нулю.

Теперь запишем подынтегральные слагаемые для одного промежутка $[t_i, t_{i+1}]$, $i \in \mathcal{N}$, подставляя для производных $\delta\dot{x}_i$ и $\dot\psi_i$ выражения из уравнений в вариациях (2.1) и сопряженной системы (2.4). Опуская индекс i (для сокращения записи), получаем

$$f^0_x[t]\,\delta x(t) + \tilde{f}^0[t] - f^0[t] - (-\psi(t)f_x[t] + f^0_x[t])\delta x(t) - \psi(t)\,(f_x[t]\,\delta x(t) + \tilde{f}[t] - f[t]) =$$
$$= \tilde{f}^0[t] - \psi(t)\tilde{f}[t] - f^0[t] + \psi(t)f[t] = H[t] - \tilde{H}[t].$$

Следовательно, интегральные слагаемые вариации (2.8) имеют вид

$$\sum_{i=0}^{N}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\{H_i(\psi_i(t), t, x_i(t), u_i(t)) - H_i(\psi_i(t), t, x_i(t), \tilde{u}_i(t))\}\,dt.$$

Запишем слагаемые в (2.8), относящиеся к одному моменту переключений t_i:

$$g^0_{i\,x_{i-1}}[t_i]\,\delta x_{i-1}(t_i) + g^0_{i\,v_i}[t_i]\,\delta v_i + \psi_{i-1}(t_i)\,\delta x_{i-1}(t_i) - \psi_i(t_i)\,\delta x_i(t_i).$$

Подставляем вариацию (2.2) и группируем слагаемые с вариацией $\delta x_{i-1}(t_i)$:

$$\{g^0_{i\,x_{i-1}}[t_i] + \psi_{i-1}(t_i) - \psi_i(t_i)g_{i\,x_i}[t_i]\}\delta x_{i-1}(t_i) + \{g^0_{i\,v_i}[t_i] - \psi_i(t_i)\,g_{i\,v_i}[t_i]\}\delta v_i.$$

Учитывая (2.5), первое слагаемое равняется нулю. Второе – выражается через производную $\hat{H}_{i\,v_i}[t_i]$ функции ГП. Суммируя, получаем

$$-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\hat{H}_i(\psi_i(t_i), t_i, x_{i-1}(t_i), v_i)}{\partial v_i}\delta v_i.$$

Таким образом, вариация функционала (1.4) при варьировании управлений и момента окончания процесса управления имеет вид

$$\delta I = \sum_{i=0}^{N}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\{H_i(\psi_i(t), t, x_i(t), u_i(t)) - H_i(\psi_i(t), t, x_i(t), \tilde{u}_i(t))\}dt -$$
$$-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial\,\hat{H}_i(\psi_i(t_i), t_i, x_{i-1}(t_i), v_i)}{\partial v_i}\,\delta v_i. \tag{2.9}$$

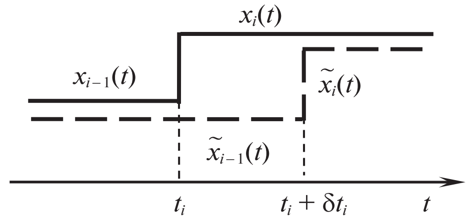


Рис. 1. Опорная (x) и возмущенная ($\tilde{x}$) траектории при $\delta t_i > 0$

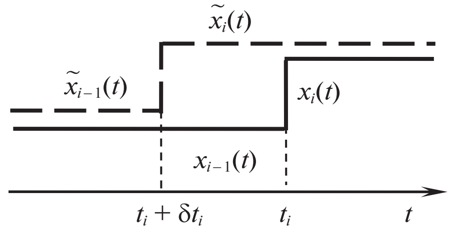


Рис. 2. Опорная (x) и возмущенная ($\tilde{x}$) траектории при $\delta t_i < 0$

2.2. Вариации моментов переключений. Будем варьировать только моменты переключений. Предполагаем, что вариации $\delta t_i = \tilde{t}_i - t_i$ моментов переключений t_i, $i = 1,\ldots,N$, настолько малы, что выполняются неравенства

$$t_0 \le t_1 + \delta t_1 \le \ldots \le t_N + \delta t_N \le t_F.$$

Величину $|\delta t| = |\delta t_1| + \ldots + |\delta t_N|$ будем считать бесконечно малой первого порядка. На промежутках между моментами переключений t_i и $t_i + \delta t_i$ вариации траектории $\delta x(\cdot)$ и управления $\delta u(\cdot)$ не определены, так как опорный и возмущенный процессы принадлежат разным пространствам. На рис. 1 и 2 изображены опорная (сплошная линия) и возмущенная (штриховая линия) траектории при вариации δt_i момента переключения t_i. На рис. 1 представлен случай $\delta t_i > 0$, а на рис. 2 – случай $\delta t_i < 0$. На пересечениях $\Delta T_i = T_i \cap \tilde{T}_i$ промежутков $T_i = [t_i, t_{i+1}]$ и $\tilde{T}_i = [\tilde{t}_i, \tilde{t}_{i+1}]$, $i \in \mathcal{N}$, вариация $\delta x_i(\cdot)$ имеет тот же порядок малости, что и $|\delta t|$, а вариация управления нулевая. Уравнение в вариациях

$$\delta \dot{x}_i(t) = f_{i\,x_i}[t]\,\delta x_i(t), \quad t \in \Delta T_i, \quad i \in \mathcal{N}, \tag{2.10}$$

выполняется с погрешностью $o(|\delta t|)$.

Запишем вариацию функционала (1.4) при $\delta t_i > 0$, $i = 1,\ldots,N$:

$$\delta I = F_{N\,x_N}[t_F]\,\delta x_N(t_F) + \sum_{i=0}^{N} \int\limits_{t_i+\delta t_i}^{t_{i+1}} f^0_{i\,x_i}[t]\,\delta x_i(t)\,dt +$$

$$+\sum_{i=1}^{N} \{ (g^0_{i\,t}[t_i] + g^0_{i\,x_{i-1}}[t_i] f_{i-1}[t_i] + f^0_{i-1}[t_i] - f^0_i[t_i])\,\delta t_i + g^0_{i\,x_{i-1}}[t_i]\,\delta x_{i-1}(t_i) \}.$$

К этой вариации прибавляем равенства

$$\psi_i(t)\,\delta x_i(t)\Big|_{t_i+\delta t_i}^{t_{i+1}} - \int\limits_{t_i+\delta t_i}^{t_{i+1}} \{ \dot{\psi}_i(t)\,\delta x_i(t) + \psi_i(t)\,\delta \dot{x}_i(t) \} dt = 0, \quad i = 0,1,\ldots,N.$$

Терминальные слагаемые будут равны нулю в силу условий трансверсальности (2.6)

$$\{ F_{N\,x_N}[t_F] + \psi_N(t_F) \} \delta x_N(t_F) = 0.$$

Каждое подынтегральное выражение тоже равняется нулю, согласно уравнению в вариациях (2.10) и сопряженной системе (2.4):

$$f^0_{i\,x_i}[t]\,\delta x_i(t) - \{\,\dot\psi_i(t)\,\delta x_i(t) + \psi_i(t)\,\delta\dot x_i(t)\} =$$

$$= f^0_{i\,x_i}[t]\,\delta x_i(t) + (\psi_i(t) f_{i\,x_i}[t] - f^0_{i\,x_i}[t])\,\delta x_i(t) - \psi_i(t) f_{i\,x_i}[t]\delta x_i(t) = 0.$$

Отметим, что в случае $\delta t_i < 0$ терминальные и интегральные члены вариации будут также нулевыми.

Запишем теперь слагаемые, относящиеся к одному моменту времени t_i:

$$(g^0_{i\,t}[t_i] + g^0_{i\,x_{i-1}}[t_i] f_{i-1}[t_i] + f^0_{i-1}[t_i] - f^0_i[t_i])\delta t_i + g^0_{i\,x_{i-1}}[t_i]\delta x_{i-1}(t_i) +$$

$$+\psi_{i-1}(t_i)\,\delta x_{i-1}(t_i) - \psi_i(t_i + \delta t_i)\,\delta x_i(t_i + \delta t_i).$$

Преобразуем последнее слагаемое, подставляя вариацию

$$\delta x_i(t_i + \delta t_i) = g_{i\,x_{i-1}}[t_i]\delta x_{i-1}(t_i) + \{g_{i\,t}[t_i] + g_{i\,x_{i-1}}[t_i] f_{i-1}[t_i] - f_i[t_i]\}\delta t_i \tag{2.11}$$

и заменяя $\psi_i(t_i + \delta t_i) = \psi_i(t_i) + \dot\psi_i(t_i)\delta t_i$. Отбрасывая члены второго порядка малости и группируя слагаемые, получаем

$$\{g^0_{i\,t}[t_i] + g^0_{i\,x_{i-1}}[t_i] f_{i-1}[t_i] + f^0_{i-1}[t_i] - f^0_i[t_i] - \psi_i(t_i)(g_{i\,t}[t_i] + g_{i\,x_{i-1}}[t_i] f_{i-1}[t_i] - f_i[t_i])\}\delta t_i +$$

$$+\{g^0_{i\,x_{i-1}}[t_i] + \psi_{i-1}(t_i) - \psi_i(t_i) g_{i\,x_{i-1}}[t_i]\}\delta x_{i-1}(t_i).$$

Последнее слагаемое равно нулю, согласно уравнению (2.5). Оставшиеся члены записываем при помощи функции ГП:

$$\{\,g^0_{i\,t}[t_i] + g^0_{i\,x_{i-1}}[t_i] f_{i-1}[t_i] + f^0_{i-1}[t_i] - f^0_i[t_i] - \psi_i(t_i)(g_{i\,t}[t_i] + g_{i\,x_{i-1}}[t_i]\, f_{i-1}[t_i] - f_i[t_i])\,\delta t_i =$$

$$= \left\{H_i[t_i] - \frac{\partial}{\partial t}\hat H_i[t_i] + f^0_{i-1}[t_i] + (g^0_{i\,x_{i-1}}[t_i] - \psi_i(t_i) g_{i\,x_{i-1}}[t_i]) f_{i-1}[t_i]\right\}\delta t_i.$$

Заменяя выражение в круглых скобках, согласно (2.5), получаем

$$\left\{H_i[t_i] - \frac{\partial}{\partial t}\hat H_i[t_i] + f^0_{i-1}[t_i] - \psi_{i-1}(t_i) f_{i-1}[t_i]\right\}\delta t_i = \left\{H_i[t_i] - H_{i-1}[t_i] - \frac{\partial}{\partial t}\hat H_i[t_i]\right\}\delta t_i.$$

При $\delta t_i < 0$ приходим к этой же формуле. Но в этом случае вместо замены (2.11) нужно использовать вариацию

$$\delta x_i(t_i) = g_{i\,x_{i-1}}[t_i]\delta x_{i-1}(t_i) + \{g_{i\,t}[t_i] + g_{i\,x_{i-1}}[t_i]\, f_{i-1}[t_i] - f_i[t_i]\}\,\delta t_i.$$

Таким образом, вариация функционала при вариации моментов переключений имеет вид

$$\delta I = \sum_{i=0}^{N}\left\{H_i(\psi_i(t_i), t_i, x_i(t_i), u_i(t_i)) - H_{i-1}(\psi_{i-1}(t_i), t_i, x_{i-1}(t_i), u_{i-1}(t_i)) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial t}\hat H_i(\psi_i(t_i), t_i, x_{i-1}(t_i), v_i)\right\}\delta t_i. \tag{2.12}$$

3. Необходимые условия оптимальности. Полученные вариации (2.9) и (2.12) функционала (1.4), определенного на траекториях ГСПР, позволяют сформулировать необходимые условия оптимальности. Для учета неравенств (1.1) будем использовать метод Лагранжа [22, 23] снятия ограничений.

Т е о р е м а. Пусть оптимальный процесс $(\mathcal{T}, x(\cdot), u(\cdot), \{v\})$ имеет N переключений в моменты $t_1, \ldots, t_N$: $t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_N \le t_F$. Тогда существуют функции $\psi_i(\cdot)$, $i = 0,1,\ldots,N$, и такие числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{N+1}$, неравные нулю одновременно, что выполняются:

1) дифференциальные уравнения:

$$\dot\psi_i(t) = -\frac{\partial H_i(\psi_i(t), t, x_i(t), u_i(t))}{\partial x_i}, \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N};$$

2) рекуррентные уравнения:

$$\psi_{i-1}(t_i) = \frac{\partial \hat H_i(\psi_i(t_i), t_i, x_{i-1}(t_i), v_i)}{\partial x_{i-1}}, \quad i = 1,\ldots,N;$$

3) условие трансверсальности:

$$\{F_{N\,t}[t_F] - H_N[t_F]\}\delta t_F + \{F_{N\,x_N}[t_F] + \psi_N(t_F)\}\delta x_{N\,F} = 0$$

для любых вариаций, связанных равенством $\Gamma_{N\,t}[t_F]\delta t_F + \Gamma_{N\,x_N}[t_F]\delta x_{N\,F} = 0$;

4) условие максимума функции ГП по управлению непрерывным движением

$$H_i(\psi_i(t), t, x_i(t), u_i(t)) = \max_{u_i \in U_i} H_i(\psi_i(t), t, x_i(t), u_i)$$

почти всюду на T_i, $i \in \mathcal{N}$;

5) условие неположительности вариации функции ГП по управлению переключениями:

$$\frac{\partial \hat H_i(\psi_i(t_i), t_i, x_{i-1}(t_i), v_i)}{\partial v_i}\delta v_i \le 0$$

для любых допустимых вариаций δv_i, $i = 1,\ldots,N$;

6) условие скачка функции ГП:

$$\lambda_0 \Bigg\{ H_i(\psi_i(t_i), t_i, x_i(t_i), u_i(t_i)) - H_{i-1}(\psi_{i-1}(t_i), t_i, x_{i-1}(t_i), u_{i-1}(t_i)) -$$

$$- \frac{\partial \hat H_i(\psi_i(t_i), t_i, x_{i-1}(t_i), v_i)}{\partial t} \Bigg\} - \lambda_i + \lambda_{i+1} = 0, \quad i = 1,\ldots,N;$$

7) условие дополняющей нежесткости:

$$\lambda_i(t_{i-1} - t_i) = 0, \quad i = 1,\ldots,N+1;$$

8) условие неотрицательности:

$$\lambda_i \ge 0, \quad i = 0,1,\ldots,N+1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если в качестве опорного процесса взять оптимальный, то вариации функционала (1.4) должны быть неотрицательными. Из неотрицательности вариации (2.9) следуют условия 4) и 5) теоремы. Действительно, возмущенное управление $\tilde u(\cdot)$ отличается от оптимального $u(\cdot)$ на множестве малой меры. Однако множество сколь угодно малой меры можно взять всюду плотным на T. Поэтому почти всюду на каждом промежутке интегрирования T_i выполняется неравенство

$$H_i(\psi_i(t), t, x_i(t), u_i(t)) - H_i(\psi_i(t), t, x_i(t), \tilde u_i(t)) \ge 0,$$

откуда следует условие 4) максимума функции ГП по непрерывному управлению. Для управления переключениями из неравенства $\delta I \ge 0$ для каждой допустимой вариации δv_i получаем условие 5) теоремы.

Чтобы снять ограничения $t_{i-1} \le t_i$, $i = 1,\dots,N+1$, на моменты переключений используем принцип Лагранжа [22]. Функция Лагранжа для рассматриваемой задачи минимизации функционала (1.4) при ограничениях типа неравенств имеет вид

$$L = \lambda_0 I + \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i (t_{i-1} - t_i),$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N+1}$ – множители Лагранжа. Равенства 6), учитывая вариацию (2.12), соответствуют условиям стационарности функции Лагранжа по переменным t_i, а условие 7) дополняющей нежесткости и условие 8) неотрицательности отвечают принципу Лагранжа снятия ограничений типа неравенств [22]. Теорема доказана.

Заметим, что если из условий 4) и 5) теоремы удается выразить оптимальные управления $u_i = u_i(\psi_i, t, x_i)$ и $v_i = v_i(\psi_i, t_i, x_{i-1})$ как функции времени, состояния и вспомогательных переменных, то, подставляя эти управления в уравнения движения и условия 1), 2) теоремы, получаем краевую задачу с промежуточными условиями. Ее решение зависит от $n_0 + n_N$ произвольных постоянных, моментов переключений $t_1,\dots,t_N$ и множителей $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N+1}$. Всего имеется $n_0 + n_N + 2N + 2$ параметров. Остальные произвольные постоянные, получаемые при интегрировании дифференциальных уравнений движения (2.1) и сопряженных уравнений (2.4), связаны таким же количеством рекуррентных уравнений (2.2) и промежуточных условий (2.5). Начальные и конечные условия вместе с условиями трансверсальности дают $n_0 + n_N$ уравнений, позволяющих исключить оставшиеся произвольные постоянные. Для нахождения остальных $2N + 2$ параметров имеются N условий 6) для скачка функции ГП и $N + 1$ условий дополняющей нежесткости. Этих условий хватает, так как коэффициенты λ_i определяются с точностью до положительного множителя. Как правило, систему дополняют либо равенством $\lambda_0 = 0$ (вырожденный [22], нерегулярный [23] случаи), либо равенством $\lambda_0 = 1$ (невырожденный, регулярный случаи). Таким образом, теорема, как и принцип максимума [10], дает "полную" систему условий, для нахождения процесса, который может быть оптимальным.

4. Пример. Рассмотрим движение группы объектов управления переменного состава на плоскости. Движение начинает один объект управления – носитель. При каждом переключении от него отделяется один объект, который продолжает самостоятельное управляемое движение к заданной цели. Количество управляемых объектов, а следовательно, и размерность гибридной системы увеличиваются с каждым переключением. Задача управления состоит в наискорейшем достижении всех заданных целей – терминальных положений объектов управления, т.е. решается задача многоцелевого быстродействия [15]. Применение необходимых условий оптимальности ГСПР покажем на простой задаче с одним переключением.

Пусть на промежутке времени $[0,T]$ система совершает одно переключение в момент $t_1 \in [0,T]$. До переключения объект управления один – носитель. Его движение описывается уравнениями

$$\dot{x}_0(t) = V\cos\gamma_0(t), \quad \dot{y}_0(t) = V\sin\gamma_0(t), \quad 0 \le t \le t_1,$$

где x_0, y_0 – прямоугольные координаты положения носителя; γ_0 – угол между вектором скорости и осью абсцисс (будем его называть ***углом направления*** движения), V – постоянная линейная скорость движения носителя. Угол направления движением $\gamma_0(\cdot)$ является управлением на промежутке $[0,t_1]$. Начальное состояние носителя задано как

$$x_0(0) = x_{00}, \quad y_0(0) = y_{00}.$$

В момент переключения t_1 от носителя отделяется объект управления

$$x_1(t_1) = x_0(t_1), \quad y_1(t_1) = y_0(t_1), \quad x_1'(t_1) = x_0(t_1), \quad y_1'(t_1) = y_0(t_1). \tag{4.1}$$

Здесь x_1, y_1 – координаты носителя, а x_1', y_1' – координаты отделившегося объекта, которые, согласно (4.1), совпадают с координатами носителя.

После переключения движение системы описывается уравнениями

$$\dot{x}_1(t) = V\cos\gamma_1(t), \quad \dot{y}_1(t) = V\sin\gamma_1(t), \quad \dot{x}_1'(t) = v\cos\gamma_1'(t), \quad \dot{y}_1'(t) = v\sin\gamma_1'(t), \quad t_1 \le t \le t_F,$$

где v – постоянная линейная скорость отделившегося объекта, а $\gamma_1(t)$ и $\gamma_1'(t)$ – углы направления движения носителя и отделившегося объектов соответственно. Функции $\gamma_1(\cdot)$ и $\gamma_1'(\cdot)$ служат управлениями.

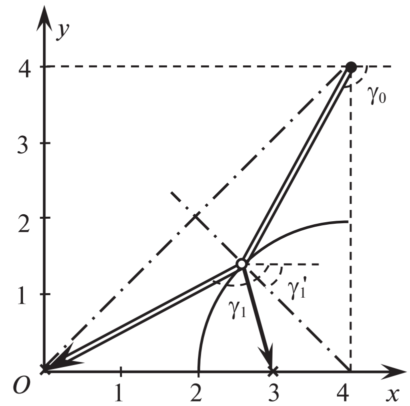


Рис. 3. Траектория движения

Момент окончания процесса управления определяется условиями

$$x_1(T) = x_T, \quad y_1(T) = y_T, \quad x_1'(T) = x_T', \quad y_1'(T) = y_T'. \tag{4.2}$$

Требуется найти наименьшее значение T и управление, на котором это значение достигается, т.е. решается задача группового быстродействия $T \to \min$.

По сравнению с общей постановкой задачи имеем:

$$t_0 = 0, \quad t_F = T, \quad n_0 = 2, \quad n_1 = 4, \quad p_0 = 1, \quad p_1 = 2, \quad U = \mathbb{R}, \quad f_0 = (V\cos\gamma_0, V\sin\gamma_0)^T,$$

$$f_1 = (V\cos\gamma_1, V\sin\gamma_1, v\cos\gamma_1', v\sin\gamma_1')^T, \quad g_1 = (x_0, y_0, x_0, y_0)^T, \quad f_0^0 = f_1^0 = 1, \quad g_1^0 = 0, \quad F = 0.$$

Управление переключениями отсутствует, поэтому “управляющий комплекс” образуют управления непрерывным движением $\gamma_0(\cdot)$, $\gamma_1(\cdot)$, $\gamma_1'(\cdot)$, момент переключения t_1 и момент окончания T.

На рис. 3 траектория движения носителя изображена двойной линией, отделившегося объекта – полужирной линией, начальное состояние – полужирной точкой, конечные состояния носителя и отделившегося объектов – крестиками, точка разделения – окружностью. Направление движения указано стрелками.

Составляем функции ГП:

$$H_0 = \psi_{01}V\cos\gamma_0 + \psi_{02}V\sin\gamma_0 - 1,$$

$$H_1 = \psi_{11}V\cos\gamma_1 + \psi_{12}V\sin\gamma_1 + \psi_{13}v\cos\gamma_1' + \psi_{14}v\sin\gamma_1' - 1,$$

$$\hat{H}_1 = \psi_{11}x_0 + \psi_{12}y_0 + \psi_{13}x_0 + \psi_{14}y_0.$$

Записываем условия теоремы:

1) дифференциальные уравнения для вспомогательных переменных:

$$\dot\psi_{01} = 0, \quad \dot\psi_{02} = 0, \quad 0 \le t \le t_1, \quad \dot\psi_{11} = 0, \quad \dot\psi_{12} = 0, \quad \dot\psi_{13} = 0, \quad \dot\psi_{14} = 0, \quad t_1 \le t \le t_F. \tag{4.3}$$

Поскольку, согласно (4.3), вспомогательные функции постоянны, аргумент у этих функций далее не указывается;

2) рекуррентные уравнения для вспомогательных переменных:

$$\psi_{01} = \psi_{11} + \psi_{13}, \quad \psi_{02} = \psi_{12} + \psi_{14}; \tag{4.4}$$

3) условие трансверсальности:

$$V\psi_{11}\cos\gamma_1(T) + V\psi_{12}\sin\gamma_1(T) + v\psi_{13}\cos\gamma_1'(T) + v\psi_{14}\sin\gamma_1'(T) - 1 = 0; \tag{4.5}$$

4) условие максимума функции ГП по управлению непрерывным движением, из которого следует равенство нулю производных функций ГП по γ_0, γ_1, γ_1':

$$\psi_{01}\sin\gamma_0 - \psi_{02}\cos\gamma_0 = 0, \quad \psi_{11}\sin\gamma_1 - \psi_{12}\cos\gamma_1 = 0, \quad \psi_{13}\sin\gamma_1' - \psi_{14}\cos\gamma_1' = 0. \tag{4.6}$$

Из этих равенств следует, что функции $\gamma_0(\cdot)$, $\gamma_1(\cdot)$, $\gamma_1'(\cdot)$ – постоянны. Поэтому аргумент у этих функций далее не указывается;

5) условия неположительности вариации функции ГП по управлению переключениями нет, так как управление переключениями отсутствует;

6) условие скачка функции ГП:

$$\lambda_0\{V\psi_{11}\cos\gamma_1 + V\psi_{12}\sin\gamma_1 + v\psi_{13}\cos\gamma_1' + v\psi_{14}\sin\gamma_1' - V\psi_{01}\cos\gamma_0 - V\psi_{02}\sin\gamma_0\} + \\ +\lambda_1 - \lambda_2 = 0; \tag{4.7}$$

7) условия дополняющей нежесткости: $\lambda_1(-t_1) = 0$, $\lambda_2(t_1 - T) = 0$;

8) условия неотрицательности: $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$.

Будем решать задачу при конкретных значениях параметров:

$$V = 2, \quad v = 1, \quad x_{00} = 4, \quad y_{00} = 4, \quad x_T = 0, \quad y_T = 0, \quad x_T' = 3, \quad y_T' = 0.$$

Разберем сначала крайние случаи, когда $t_1 = 0$ или $t_1 = T$. При $t_1 = 0$ разделение объектов управления происходит в начальный момент времени. Тогда носитель достигает цели (начало координат) за время $T = 2\sqrt{2}$, а отделившийся объект приходит в конечное состояние (3, 0) – за время $T = \sqrt{17}$. Следовательно, терминальные условия (4.2) не выполняются. Случай $t_1 = T$ не подходит, так как в момент разделения t_1 положение отделившегося объекта совпадает с положением носителя, а в конечный момент времени T – нет. Тогда $0 < t_1 < T$ и из условий дополняющей нежесткости получаем $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Значит, $\lambda_0 \neq 0$ из-за нетривиальности множителей Лагранжа. Поэтому задача невырожденная (регулярная) и можно взять $\lambda_0 = 1$.

Обозначая через (x, y) координаты точки разделения, для невырожденной задачи из уравнений движения и терминальных условий получаем

$$x = 4 + 2t_1\cos\gamma_0, \quad y = 4 + 2t_1\sin\gamma_0, \quad x + 2(T - t_1)\cos\gamma_1 = 0, \quad y + 2(T - t_1)\sin\gamma_1 = 0 \\ x + (T - t_1)\cos\gamma_1' = 3, \quad y + (T - t_1)\sin\gamma_1' = 0. \tag{4.8}$$

Система (4.8) вместе с условиями (4.4)–(4.7) для невырожденного случая ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_0 = 1$) имеет 13 уравнений с 13 неизвестными: $x, y, t_1, T, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_1', \psi_{01}, \psi_{02}, \psi_{11}, \psi_{12}, \psi_{13}, \psi_{14}$. Найдем решение этой системы.

Исключая из последних четырех уравнений время $T - t_1$ движения после разделения, приходим к равенству

$$x^2 + y^2 = 4[(x-3)^2 + y^2] \Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 = 4.$$

Следовательно, точка разделения лежит на окружности Аполлония (см. рис. 3), так как отношение расстояний пройденных носителем и отделившимся объектом постоянно – равно отношению скоростей ($V/v = 2$).

Равенство (4.7) с учетом условия трансверсальности можно представить в виде $V\psi_{01}\cos\gamma_0 - V\psi_{02}\sin\gamma_0 = 1$. Решая это уравнение вместе с первым уравнением в (4.6) относительно ψ_{01} и ψ_{02}, получаем

$$\psi_{01} = \frac{\cos\gamma_0}{V} = \frac{x-4}{2l_1}, \quad \psi_{02} = \frac{\sin\gamma_0}{V} = \frac{y-4}{2l_1}. \tag{4.9}$$

Здесь $l_1 = \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2}$ – длина пути до точки разделения (см. рис. 3). Из последних двух уравнений (4.6) находим $\psi_{12} = \psi_{11}\mathrm{tg}\gamma_1$, $\psi_{14} = \psi_{13}\mathrm{tg}\gamma_1'$ и подставляем в уравнения (4.4) и в условие трансверсальности:

$$\psi_{11} + \psi_{13} = \psi_{01}, \quad \psi_{11}\mathrm{tg}\gamma_1 + \psi_{13}\mathrm{tg}\gamma_1' = \psi_{02},$$

$$2\psi_{11}(\cos\gamma_1 + \sin\gamma_1\mathrm{tg}\gamma_1) + (\psi_{13}\cos\gamma_1' + \sin\gamma_1'\mathrm{tg}\gamma_1') - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{2\psi_{11}}{\cos\gamma_1} + \frac{2\psi_{13}}{\cos\gamma_1'} = 1.$$

Выражаем $\cos\gamma_1 = -x/l_2$, $\mathrm{tg}\gamma_1 = y/x$, $\cos\gamma_1' = 2(3-x)/l_2$, $\mathrm{tg}\gamma_1' = y/(x-3)$ через координаты точки разделения. Здесь $l_2 = \sqrt{x^2+y^2}$ – длина пути носителя после разделения. Подставляя значения тригонометрических функций и с учетом (4.9), получаем систему

$$\psi_{11} + \psi_{13} = \frac{x-4}{2l_1}, \quad \psi_{11}\frac{y}{x} + \psi_{13}\frac{y}{x-3} = \frac{y-4}{2l_1}, \quad \frac{2\psi_{11}l_2}{-x} + \frac{\psi_{13}l_2}{2(x-3)} = 1.$$

Из первых двух уравнений находим

$$\psi_{11} = \frac{x(4x-y-12)}{6yl_1}, \quad \psi_{13} = \frac{4(y-x)(x-3)}{6yl_1}.$$

Подставляем эти выражения в третье уравнение в (4.9). После упрощений приходим к равенству

$$l_2(4-x) = yl_1 \Leftrightarrow (4-x)\sqrt{x^2+y^2} = y\sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2}.$$

Для $0 \le x \le 4$ и $0 \le y \le 4$ получаем уравнение $(x-y)(x+y-4) = 0$. Отсюда $x = y$ или $x + y = 4$. Прямая $x = y$ (см. рис. 3) не имеет общих точек с окружностью Аполлония, а прямая $x + y = 4$ пересекает ее в точке с координатами $x = 4-\sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$. Следовательно, точка разделения будет $(4-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Остальные неизвестные находятся без труда. Вычислим только минимальное значение функционала $\min T = 2\sqrt{x^2+y^2}/V = 2\sqrt{5-2\sqrt{2}} \approx 2.947$.

Таким образом, необходимым условиям оптимальности удовлетворяет траектория с точкой разделения $(4-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Заметим, что эта траектория действительно оптимальная. В самом деле, из всех двухзвенных ломаных с концами (0, 0), (4, 4) и “промежуточной” вершиной (x, y), принадлежащей окружности, кратчайшей будет такая ломаная, звенья которой образуют равные углы с радиусом окружности, проведенным в вершину (x, y). Это следует из правила геометрической оптики: “угол падения равен углу отражения”.

Заключение. Предлагаемые условия оптимальности применяются для решения задач управления гибридными системами переменной размерности. Эти задачи отличаются от непрерывно-дискретных систем свободными моментами переключений, которые выбираются при оптимизации процесса управления. Именно поиск оптимальных моментов переключений является наиболее сложной частью решения. Необходимые условия обычно позволяют аналитически выразить управления непрерывным движением и переключениями через вспомогательные переменные. Получить аналитические выражения для оптимальных моментов переключений невозможно даже в простых примерах. Поэтому их приходится искать численно, а необходимые условия использовать для контроля процесса оптимизации. Следует заметить, что минимизируемый функционал как функция моментов переключений имеет овражный характер и множество локальных минимумов.

Изменение модели системы управления при переключениях, в частности ее размерности, ожидаемо усложняет условия оптимальности, так как количественно меняется набор вспомогательных функций. Гораздо сложнее учитывать мгновенные многократные переключения. В случае аналитического решения нужно рассматривать разные варианты реализации условий дополняющей нежесткости. При численном решении такие переключения требуется специальным образом предусматривать в процессе оптимизации.

Применение доказанных условий оптимальности кажется перспективным для решения задач управления группами подвижных объектов переменного состава. В частности, это задачи группового быстродействия. Такие задачи востребованы в авиации, космонавтике, робототехнике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Величенко В.В.* Оптимальное управление составными системами // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. № 4. С. 754–756.

2. *Барсегян В.Р.* Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями. М.: Наука, 2016.

3. *Кириллов А.Н.* Динамические системы с переменной структурой и размерностью // Изв. вузов. Приборостроение. 2009. Т. 52. № 3. С. 23–28.

4. *Кириченко Н.Ф., Сопронюк Ф.А.* Минимаксное управление в задачах управления и наблюдения для систем с разветвлением структур // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1995. Т. 2. № 1.
5. *Медведев В.А., Розова В.Н.* Оптимальное управление ступенчатыми системами // АиТ. 1972. №. 3. С. 15–23.
6. *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1985.
7. *Болтянский В.Г.* Задача оптимизации со сменой фазового пространства // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 3. С. 518–521.
8. *Sussmann H.J.* A Maximum Principle for Hybrid Optimal Control Problems // Proc. 38th IEEE Conf. on Decision and Control. Phoenix, 1999.
9. *Дмитрук А.В., Каганович А.М.* Принцип максимума для задач оптимального управления с промежуточными ограничениями // Нелинейная динамика и управление. Вып. 6. М.: Физматлит, 2008. С. 101–136.
10. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
11. *Бортаковский А.С.* Синтез оптимальных систем управления со сменой моделей движения // Изв. РАН. ТиСУ. 2018. № 4. С. 57–74.
12. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.
13. *Пропой А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных систем. М.: Наука, 1973.
14. *Бортаковский А.С.* Достаточные условия оптимальности гибридных систем переменной размерности // Тр. МИАН. 2020. Т. 308. С. 88–100.
15. *Бортаковский А.С.* Необходимые условия оптимальности непрерывно-дискретных систем с мгновенными многократными переключениями дискретной части // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 4. С. 73–85.
16. *Величенко В.В.* Условия оптимальности в задачах управления с промежуточными условиями // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174. № 5. С. 1011–1913.
17. *Емельянов С.В.* Системы автоматического управления с переменной структурой. М.: Наука, 1967.
18. *Boltyanski V.G.* The Maximum Principle for Variable Structure Systems // Int. J. on Control. 2004. V. 77. № 17. P. 1445–1451.
19. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
20. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
21. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1973.
22. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
23. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 1, с. 41–55

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ

УДК 004.93'14, 004.021, 519.177

МНОГОАСПЕКТНАЯ КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ПОДПРОСТРАНСТВ МЕТОДОМ АДАПТИВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ГЛОБАЛЬНОГО ГРАФА СРОДСТВА[1]

© 2022 г. Л. Ванг[a,b,*], Д. Жу[a,b], Ю. Жу[a,b], И. А. Матвеев[c,**], С. Чен[d]

[a] Научный колледж Нанкинского ун-та аэронавтики и космонавтики, Нанкин, КНР

[b] Лаборатория математического моделирования и высокопроизводительных вычислений летательных аппаратов, Нанкинский ун-т аэронавтики и космонавтики, Нанкин, КНР

[c] Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН, Москва, Россия

[d] Факультет экспериментального обучения, Нанкинский ун-т аэронавтики и космонавтики, Нанкин, КНР

*e-mail: wlpmath@nuaa.edu.cn

**e-mail: matveev@ccas.ru

Поступила в редакцию 11.08.2021 г.
После доработки 15.08.2021 г.
Принята к публикации 27.09.2021 г.

Рассматривается задача кластеризации объектов, каждый из которых представлен несколькими векторами данных в различных пространствах признаков — так называемая многоаспектная кластеризация. Предлагается метод решения этой задачи посредством построения графов смежности в каждом из пространств признаков и общего графа сродства объектов. Выполняется последовательность итераций, на каждой из которых уточняются графы смежности и граф сродства. Также накладывается ограничение на ранг матрицы Лапласа графа сродства, что в силу известной теоремы обеспечивает разбиение графа на несколько компонент связности, которые после завершения итераций считаются искомыми кластерами. В численных экспериментах используются несколько тестовых баз из открытых источников. Результаты сравниваются с известными методами, получено некоторое преимущество предлагаемого подхода.

DOI: 10.31857/S0002338822010127

0. Введение. В связи с информатизацией возрастает количество данных с многими *представлениями* или *аспектами*, в которых описания объектов взяты из нескольких различных источников или даны различными признаками [1]. Например, веб-страница может быть представлена текстом, изображениями и гиперссылками; изображение может быть описано с помощью гистограмм, спектральных или морфологических характеристик [2], наборами угловых точек и т.д. Данные с несколькими аспектами порождают новый класс методов кластеризации, *многоаспектную кластеризацию* (МАК) (multi-view clustering, MVC). Методы наиболее полного использования дополнительной и непротиворечивой информации из различных представлений важны во многих приложениях [3]. Разработано множество алгоритмов МАК, которые в соответствии с целью и реализуемой стратегией можно разделить на пять категорий: многоаспектная спектральная кластеризация (multi-view spectral clustering) [4], многоядерная кластеризация (multi-kernel clustering) [5], многоаспектная кластеризация неотрицательным матричным разложением (multi-view nonnegative matrix factorization clustering) [6], многоаспектная кластеризация подпространств (multi-view subspace clustering) [7] и канонический корреляционный анализ (canonical correlation analysis) [8].

В этой статье основное внимание уделяется *многоаспектной кластеризации подпространств* (МАКП) (multi-view subspace clustering, MVS). Этот класс методов появился при сочетании двух подходов: многоаспектности (использования данных об объектах из различных представлений)

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 21-51-53019), Государственного фонда естественных наук Китая (гранты № 11971231; 1211153001) и Государственной ключевой программы НИОКР Китая (грант № 2018YFB2003300).

и поиска таких разбиения и признаков, что каждый кластер соответствует подпространству объединенного пространства признаков. Известные алгоритмы МАКП работают следующим образом:

1) для каждого аспекта строится матрица смежности;

2) построенные матрицы некоторым образом объединяются в матрицу сродства;

3) для полученной матрицы сродства выполняется алгоритм спектральной кластеризации, дающий окончательный результат.

Очевидно, эффективность МАКП существенно зависит от способа построения матрицы сродства. *Сегментация ансамбля подпространств при блочных ограничениях* (ensemble subspace segmentation under blockwise constraints, ESSB) [9] сначала строит матрицы смежности для каждого аспекта, а затем получает матрицу сродства как среднее этих матриц. Такой подход не использует взаимосвязь различных аспектов [10]. *Система кластеризации на основе графов* (graph-based system, GBS) [11] выделяет структуру многообразия при помощи разреженного представления различных аспектов, единая матрица сродства получается как взвешенная комбинация. *Многоаспектная кластеризация обучением графа* (multiview clustering by graph learning, MVGL) [12] строит начальные матрицы для отдельных аспектов, затем эти матрицы уточняются решением специальной оптимизационной задачи. Матрица сродства получается их комбинацией.

Здесь и далее для отношений смежности и сродства термины *граф* и *матрица* используются как взаимозаменяемые, поскольку существует взаимно-однозначное соответствие между полным неориентированным взвешенным графом с N пронумерованными вершинами и симметрической матрицей размером $N \times N$, содержащей веса ребер графа. Граф с несколькими компонентами связности и вершинами, занумерованными так, что номера вершин каждой компоненты идут подряд, соответствует блочно-диагональной матрице. Для приложений смысл имеет граф и его компоненты связности, называемые *кластерами*, при расчетах используется матричное представление. *Матрицей Лапласа (Кирхгофа)* для матрицы W называется матрица

$$L_W = D - W, \quad d_{ii} = \sum_{j=1}^{N} w_{ij}, \tag{0.1}$$

где D – диагональная матрица, диагональные элементы которой равны сумме в соответствующих строках W. Доказана следующая теорема.

Теорема. Если матрица Лапласа L_W имеет c нулевых собственных значений, то граф W содержит c компонент связности [13].

Следствие 1. Если ранг rank $L_W = N - c$, то граф W содержит c компонент связности.

Следствие 2. Если ранг rank $L_W = N - c$, то связанной перестановкой строк и столбцов можно свести матрицу W к блочно-диагональному виду.

Методы [9, 11, 12] объединяют информацию из разных аспектов для создания матрицы сродства. При этом методы GBS и MVGL используют дополнительную информацию о взаимосвязях аспектов. Однако матрицы смежности для каждого аспекта получаются отдельно и далее не меняются. Если многоаспектные данные содержат шум или пропуски, первоначально построенные матрицы смежности не могут точно выразить корреляции объектов в каждом отдельном аспекте, получаемая матрица сродства также не точна и качество кластеризации падает. Имеет смысл улучшать построенные матрицы смежности, используя матрицу сродства, объединяющую все аспекты.

В статье предлагается новый алгоритм МАКП: *адаптивное обучение глобального графа сродства* (adaptive global affinity graph learning, AGAGL). На рис. 1 показана общая схема работы AGAGL, включающая начальное построение матриц смежности отдельных аспектов, сведение этих матриц к одной глобальной матрице сродства с использованием функции невязки и ограничения на ранг матрицы Лапласа. После получения матрицы сродства пересчитываются матрицы смежности. В конечном счете разбиение на кластеры получается, согласно следствию 1, непосредственно из глобальной матрицы сродства без каких-либо дополнительных алгоритмов кластеризации.

Особенности представленного метода:

1) введена функция невязки между глобальной матрицей сродства и матрицами смежности отдельных аспектов;

2) на каждом шаге итеративно пересчитываются матрица сродства и матрицы смежности;

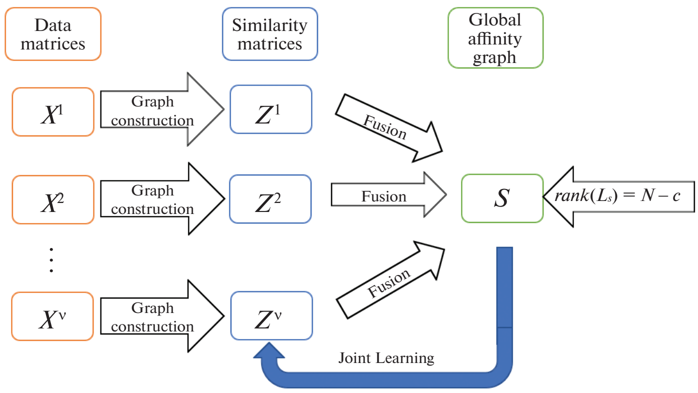


Рис. 1. Схема предлагаемого метода

3) окончательное разбиение на кластеры получается благодаря ограничению ранга матрицы Лапласа графа сродства.

Далее в разд. 1 дана постановка задачи и описаны некоторые применяемые методы, в разд. 2 рассмотрен предлагаемый метод и процедура оптимизации. Экспериментальные результаты и анализ приведены в разд. 3.

1. Постановка задачи и применяемые методы. Изложим чуть более подробно два подхода, из которых был развит представленный метод.

1.1. Кластеризация подпространств. Пусть в линейном пространстве размерности d задано c попарно не совпадающих подпространств. Из каждого подпространства взято несколько ненулевых объектов (векторов), их общее количество равно N, $N > d$. Эту совокупность назовем *обучающей выборкой*. Ее можно представить в виде матрицы $X = [x_1, \cdots, x_N]$, составленной из столбцов-векторов $x_i \in \mathbb{R}^d$. Цель метода кластеризации подпространств – найти разбиение N объектов обучающей выборки на c кластеров, наиболее близкое к истинному, т.е. в каждом полученном кластере должны содержаться объекты одного подпространства. Предполагается, что каждый вектор обучающей выборки может быть представлен как линейная комбинация остальных:

$$x_i = \sum_{j \neq i} z_{ji} x_j.$$

Это можно записать в виде $X = XZ$, $X \in \mathbb{R}^{d\times N}$, $Z \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\operatorname{diag} Z = 0$. Матрицу Z назовем *матрицей смежности*, элемент z_{ij} определяет сходство векторов x_i и x_j, $i \neq j$. Большую роль при обработке реальных данных играет также наличие шума измерения (относительно небольших случайных отклонений многих значений x_{ij}, как правило, описываемых нормальным распределением) и выбросов (больших отклонений некоторых векторов x_i). В этом случае разложение записывается как $X = XZ + E$, где $E \in \mathbb{R}^{d\times N}$ – матрица невязки. Эти представления неоднозначны, поэтому на матрицы смежности и невязки можно накладывать различные ограничения (регуляризации), получая различные алгоритмы, такие, как регрессия наименьших квадратов (least squares regression, LSR) [14], разреженный граф с ограничениями на блоки (blockwise constrained sparse graph, SGB) [15], низкоранговое представление (low-rank representation, LRR) [16], разреженная кластеризация подпространств (sparse subspace clustering, SSC) [17], и т.д.

LSR минимизирует взвешенную сумму нормы Фробениуса матрицы Z и матрицы невязки $E = X - XZ$. Такой подход хорошо работает на данных с гауссовым шумом. LSR формулируется как следующая оптимизационная задача:

$$\begin{aligned} &\min_{Z,E}(\|Z\|_F^2 + \lambda\|E\|_F^2) \\ &\text{s.t.} \quad X = XZ + E, \quad \operatorname{diag} Z = 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где λ – вес невязки. Запись s.t. обозначает “при условии”. Норма Фробениуса матрицы Z равна

$$\|Z\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} z_{ij}^2}.$$

SGB вводит в целевую функцию слагаемое регуляризации графа и оптимизационная задача записывается как

$$\begin{aligned}&\min_{Z,E}(\|Z\|_F^2 + \lambda\|E\|_{2,1}^2 + \mu\mathrm{Tr}(ZWZ^{\mathrm{T}}))\\ &\text{s.t.}\quad X = XZ + E,\quad \mathrm{diag}\ Z = 0,\end{aligned} \tag{1.2}$$

где W – симметрическая весовая матрица, задающая априорные предположения о близости объектов, λ – вес невязки разложения, μ – вес регуляризации графа. Во втором слагаемом целевой функции (1.2) применяется норма $l_{2,1}$. Минимизация этой нормы порождает матрицы невязки с нулевыми столбцами, что отвечает точному разложению соответствующих векторов [18]. Аналогично в SSC для Z используется норма l_1, а в методе LRR – следовая норма (сумма модулей сингулярных значений матрицы).

После нахождения оптимального решения Z окончательное разбиение на кластеры получается спектральной кластеризацией Z [19–22].

1.2. МАКП. Набор данных с несколькими аспектами $X = \{X^1, \cdots, X^v\}$ представляет собой матрицу, составленную вертикально из v матриц аспектов. Матрица i-го аспекта $X^i = [x_1^i, x_2^i, \cdots, x_N^i] \in \mathbb{R}^{d^i \times N}$, d^i – размерность аспекта, N – количество объектов выборки, $\sum d_i = d$. Есть два способа получить матрицу сродства Z для МАКП.

Первый способ. Сразу строить единую матрицу, общую для всех аспектов. Различные аспекты должны иметь одну и ту же матрицу смежности, поскольку данные каждого из них соответствуют одним и тем же объектам. Такой метод называется *ранним слиянием* (early fusion). В [23] предложена следующая модель раннего слияния:

$$\begin{aligned}&\min_{Z,\alpha_i}\sum_{i=1}^{v}(\alpha^i\|X^i - X^iZ\|_{2,p}^p + \mu\mathrm{Tr}(ZL_W^iZ^{\mathrm{T}}))\\ &\text{s.t.}\quad \alpha^i \ge 0,\quad \mathrm{diag}Z = 0,\end{aligned} \tag{1.3}$$

где α^i – параметр невязки каждого аспекта, Z – общая матрица сродства. Недостаток методов раннего слияния состоит в том, что матрица сродства игнорирует разнообразие различных аспектов и не может сохранить локальную структуру многообразия каждого аспекта [24].

Второй способ. Получить матрицу смежности Z^i для каждого аспекта, объединить эти отдельные матрицы в матрицу сродства Z [9, 25, 26] и, наконец, провести кластеризацию по Z. Такой метод называется *поздним слиянием* (late fusion). Например, в ESSB [9] матрица смежности каждого аспекта определяется решением следующей задачи:

$$\begin{aligned}&\min_{Z^i,E^i}(\|Z^i\|_F^2 + \lambda\|E^i\|_{2,1} + \mu\mathrm{Tr}(Z^iL_W^iZ^{i\mathrm{T}}))\\ &\text{s.t.}\quad X^i = X^iZ^i + E^i,\quad \mathrm{diag}\ Z^i = 0.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Матрица сродства задается усреднением матриц смежности:

$$Z = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v} Z^i. \tag{1.5}$$

2. Метод AGAGL. Составим целевую функцию, сочетая кластеризацию подпространств, МАКП и вводя ограничения на ранг матрицы Лапласа.

2.1. Построение целевой функции. Аналогично регрессии наименьших квадратов (1.1) для матриц смежности Z^i используется норма Фробениуса, для невязок E^i берется норма $l_{2,1}$, порождающая матрицы с немногими ненулевыми столбцами, соответствующими выбросам данных [15]. Чтобы раскрыть внутреннюю локальную структуру данных, добавим к (1.1) слагаемое лапласовской регуляризации, которое обеспечивает то, что два похожих объекта в исходном пространстве близки и в новом пространстве [26]. Регуляризация лапласианом выражается как

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\|z_i - z_j\|^2 w_{ij} = \mathrm{Tr}(ZL_W Z^{\mathrm{T}}),$$

где w_{ij} – элемент весовой матрицы W, L_W – ее лапласиан, полученный согласно (0.1). Тогда оптимизационная задача записывается как

$$\min_{Z^i, E^i}\left(\sum_{i=1}^{v}\|Z^i\|_F^2 + \lambda\sum_{i=1}^{v}\|E^i\|_{2,1} + \mu\sum_{i=1}^{v}\mathrm{Tr}(Z^i L_W^i Z^{i\mathrm{T}})\right)$$
$$\text{s.t.}\quad X^i = X^i Z^i + E^i,\quad \operatorname{diag} Z^i = 0, \tag{2.1}$$

где λ – вес невязки разложения, μ – вес регуляризации. Матрица смежности для каждого представления получается индивидуально и (2.1) является набором кластеризаций в отдельных аспектах. Следовательно, игнорируется дополнительная информация, скрытая во взаимосвязях различных аспектов, что приводит к снижению качества.

В связи с тем, что данные различных аспектов поступают от одних и тех же исходных объектов, существует общая структура кластера для всех аспектов. Следует найти глобальный граф сродства S для описания общей структуры. Чтобы в полной мере использовать информацию о согласованности, скрытую в нескольких аспектах, определяется функция стоимости несогласия для измерения разницы между матрицей смежности Z^i и общей матрицей сродства S:

$$\min_S \sum_{i=1}^{v}\|S - Z^i\|_F^2. \tag{2.2}$$

Объединяя (2.1) и (2.2), можно записать задачу:

$$\min_{Z^i, E^i, L^i, S}\left(\sum_{i=1}^{v}\|Z^i\|_F^2 + \lambda\sum_{i=1}^{v}\|E^i\|_{2,1} + \mu\sum_{i=1}^{v}\mathrm{Tr}(Z^i L_W^i Z^{i\mathrm{T}}) + \alpha\sum_{i=1}^{v}\|S - Z^i\|_F^2\right)$$
$$\text{s.t.}\quad X^i = X^i Z^i + E^i,\quad \operatorname{diag} Z^i = 0,\quad \operatorname{rank} L_S = N - c. \tag{2.3}$$

В известных из литературы методах МАК после получения матрицы сродства необходимо выполнить окончательную кластеризацию, например, методом k-средних или N-разреза. С ограничением ранга $\operatorname{rank} L_S = N - c$ можно напрямую получить результат кластеризации из графа сродства S без каких-либо дополнительных шагов кластеризации. Поскольку L_S является полуположительно определенной матрицей [27], все ее собственные значения неотрицательны. Предположим, что N собственных значений L_S упорядочены по возрастанию: $0 \le \sigma_1 \le \dots \le \sigma_N$. Если выполняется $\operatorname{rank} L_S = N - c$, это означает, что сумма c наименьших собственных значений L_S равна 0, т.е.

$$\sum_{i=1}^{c}\sigma_i = 0. \tag{2.4}$$

Согласно теореме, можно получить [28], что

$$\sum_{i=1}^{c}\sigma_i = \min_{Q^{\mathrm{T}}Q=I}\mathrm{Tr}(Q^{\mathrm{T}}L_S Q),\quad Q \in \mathbb{R}^{c\times N}. \tag{2.5}$$

Когда все элементы S нулевые, для (2.5) существует тривиальное решение. Чтобы избежать тривиального решения, добавляется ограничение $1 \cdot s_j = 1$, где s_j представляет каждый столбец матрицы S, $1 = [1, \dots, 1]$, точка обозначает операцию скалярного умножения векторов. Тогда (2.5) преобразуется в

$$\min_Q \mathrm{Tr}(Q^{\mathrm{T}}L_S Q)$$
$$\text{s.t.}\quad Q^{\mathrm{T}}Q = I,\quad 1 \cdot s_j = 1,\quad s_j \ge 0,\quad Q \in \mathbb{R}^{c\times N}. \tag{2.6}$$

Оптимизационную задачу AGAGL можно окончательно записать в виде

$$\min_{Z^i,E^i,L^i,S,Q}\left(\sum_{i=1}^{v}\|Z^i\|_F^2+\lambda\sum_{i=1}^{v}\|E^i\|_{2,1}+\mu\sum_{i=1}^{v}\mathrm{Tr}(Z^iL^iZ^{i\mathrm{T}})+\alpha\sum_{i=1}^{v}\|S-Z^i\|_F^2+\beta\mathrm{Tr}(Q^TL_SQ)\right) \tag{2.7}$$
$$\text{s.t.}\quad X^i=X^iZ^i+E^i,\quad \mathrm{diag}\,Z^i=0,\quad Q^{\mathrm{T}}Q=I,\quad 1\cdot s_j=1,\quad s_j\ge 0,$$

где α, β – масштабирующие константы.

2.2. Процедура оптимизации. Для решения задачи (2.7) применяется расширенный метод множителей Лагранжа. Расширенное уравнение Лагранжа может быть записано как

$$\min_{Z^i,E^i,L^i,S,Q} L=\sum_{i=1}^{v}[\mathrm{Tr}\{Z^{i\mathrm{T}}((1+\alpha)I+\mu L^i)Z^i\}-2\alpha\mathrm{Tr}(Z^{i\mathrm{T}}S)]+$$
$$+\alpha\sum_{i=1}^{v}\|S\|_F^2+\lambda\sum_{i=1}^{v}\|E^i\|_{2,1}\beta\mathrm{Tr}(Q^{\mathrm{T}}L_sQ)+\sum_{i=1}^{v}\langle Y^i,X^i-X^iZ^i-E^i\rangle+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{v}\|X^i-X^iZ^i-E^i\|_F^2 \tag{2.8}$$
$$\text{s.t.}\quad Q^{\mathrm{T}}Q=I,$$

где $\varepsilon>0$ – штрафной коэффициент, а Y^i – множитель Лагранжа.

Итеративно решаются несколько подзадач.

Подзадача Z^i**.** Пересчитаем Z^i, фиксируя остальные переменные. Взяв частную производную лагранжиана по Z^i и приравнивая ее к нулю, имеем

$$Z^i=\frac{2\alpha S+X^{i\mathrm{T}}Y^i+\varepsilon X^{i\mathrm{T}}X^i-\varepsilon X^{i\mathrm{T}}E^i}{2(1+\alpha)I+2\mu L^i+\varepsilon X^{i\mathrm{T}}X^i}. \tag{2.9}$$

Подзадача L^i**.** Поскольку исходная выборка содержит шум и выбросы, Z^i можно использовать для получения набора данных с уменьшенным шумом, обозначим его $\tilde{X}^i=X^iZ^i$. В отличие от большинства предыдущих работ, где строится граф k-ближайших соседей на исходном наборе данных, здесь можно построить матрицу весов W^i на наборе данных $\tilde{X}^i$ и вычислить матрицу Лапласа, согласно (0.1).

Подзадача E^i**.** Для каждого E^i отбрасываем другие несвязанные члены и получаем функцию как

$$E^i=\arg\min_{E^i}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\|E^i\|_{2,1}+\frac{1}{2}\|E^i-(X^i-X^iZ^i+Y^i/\varepsilon)\|_F^2\right). \tag{2.10}$$

Дальнейшее решение осуществляется с помощью оператора сжатия [29].

Подзадача $\boldsymbol{S}$**.** Чтобы обновить S, другие переменные фиксируются. Целевая функция (2.7) может быть переформулирована как

$$\min_S\left(\alpha\|S\|_F^2-2\alpha\sum_{i=1}^{v}\mathrm{Tr}(Z^{i\mathrm{T}}S)+\beta\mathrm{Tr}(Q^{\mathrm{T}}L_SQ)\right) \tag{2.11}$$
$$\text{s.t.}\quad 1\cdot s_j=1,\quad s_j\ge 0.$$

Обозначая

$$M=2\alpha\sum_{i=1}^{v}Z^{i^{\mathrm{T}}},$$

получаем

$$\min_S(\alpha\|S\|_F^2-\mathrm{Tr}(MS)+\beta\mathrm{Tr}(Q^{\mathrm{T}}L_SQ)) \tag{2.12}$$
$$\text{s.t.}\quad 1\cdot s_j=1,\quad s_j\ge 0.$$

Поскольку векторы s_j не зависят друг от друга при различных j, оптимизация проводится отдельно по каждому j. Слагаемое, ограничивающее ранг, равно

$$\mathrm{Tr}(Q^{\mathrm{T}} L_S Q) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\|q_i - q_j\|_2^2 s_{ij},$$

где s_{ij} – i-й элемент вектора s_j, и (2.12) переходит в

$$\min_{s_j}\left(\alpha s_j^{\mathrm{T}} s_j - \sum_{i=1}^{N} m_{ij}s_{ij} + \sum_{i=1}^{N}\beta\|q_i - q_j\|_2^2 s_{ij}\right) = \min_{s_j}\left(\alpha s_j^{\mathrm{T}} s_j + \sum_{i=1}^{N}[\beta\|q_i - q_j\|_2^2 - m_{ij}]s_{ij}\right) \quad (2.13)$$
$$\text{s.t.} \quad 1 \cdot s_j = 1, \quad s_j \geq 0.$$

Обозначим i-й элемент вектора p_j как $p_{ij} = \beta\|q_i - q_j\|_2^2 - m_{ij}$. Тогда целевая функция (2.13) записывается следующим образом:

$$\min_{s_j}\left\|s_j + \frac{p_j}{2\alpha}\right\|_2^2 \quad (2.14)$$
$$\text{s.t.} \quad 1 \cdot s_j = 1, \quad s_j \geq 0.$$

Лагранжиан (2.14)

$$L(s_j, \eta, \rho) = \left\|s_j + \frac{p_j}{2\alpha}\right\|_2^2 - \eta(1 \cdot s_j - 1) - \rho^{\mathrm{T}} s_j, \quad (2.15)$$

где η, ρ – лагранжевы множители, ρ – вектор, η – константа. Согласно условию Каруша–Куна–Таккера [30], оптимальным решением (2.14) является

$$s_j = \left(-\frac{p_j}{2\alpha} + \eta 1\right). \quad (2.16)$$

Подзадача Q. Фиксируя S, пересчитываем Q:

$$\min_{Q} \mathrm{Tr}(Q^{\mathrm{T}} L_S Q) \quad (2.17)$$
$$\text{s.t.} \quad Q^{\mathrm{T}} Q = I, \quad Q \in \mathbb{R}^{N\times c}.$$

В (2.17) оптимальное решение Q составлено из собственных векторов, соответствующих c наименьшим собственным значениям матрицы Лапласа графа L_S.

Шаги предлагаемого алгоритма AGAGL даны ниже. Согласно следствию 1, если $\mathrm{rank}\, L_S = N - c$, то выборку можно напрямую разделить на c кластеров – компонент связности глобального графа сродства. Следовательно, условием остановки алгоритма является то, что сумма c наименьших собственных значений L_S равна нулю, т.е. выполняется (2.4).

Алгоритм AGAGL.

Вход: многоаспектный набор данных X, параметры λ, μ, α, β, количество кластеров c, число ближайших соседей k (для вспомогательного метода).

Выход: матрица S, содержащая c компонент связности.

Шаг 1. Для каждого X^i построить L^i методом k ближайших соседей.

Шаг 2. Рассчитать Z^i, согласно (2.9), при $S = 0$.

Шаг 3. Вычислить $S = \sum_{i=1}^{v} Z^i$.

Шаг 4. Определить Q, согласно (2.17).

Шаг 5. Присвоить $\varepsilon_0 = 10^{-6}$, $\varepsilon_{\max} = 10^6$, $E^i = 0$, $Y^i = 0$, $p = 1$.

Шаг 6. Для $i = 1, 2, \ldots, v$.

Шаг 7. Пересчитать Z^i, согласно (2.9).

Ш а г 8. Составить матрицу Лапласа набора $\tilde{X}^i = X^i Z^i$.

Ш а г 9. Пересчитать E^i, согласно (2.10).

Ш а г 10. Пересчитать множители Лагранжа: $Y^i = Y^i + \varepsilon(X^i - X^i Z^i - E^i)$.

Ш а г 11. Пересчитать $\varepsilon = \min(p\varepsilon, \varepsilon_{\max})$.

Ш а г 12. Конец цикла по i.

Ш а г 13. Для $j = 1, 2, \dots, N$.

Ш а г 14. Пересчитать j-й столбец S, согласно (2.16);

Ш а г 15. Конец цикла по j.

Ш а г 16. Вычислить матрицу сродства $S = \frac{1}{2}(S + S^{\mathrm{T}})$.

Ш а г 17. Сформировать Q по c наименьшим собственным значениям L_S.

Ш а г 18. Если S содержит c связных компонент – завершить, иначе перейти к шагу 6.

2.3. В ы ч и с л и т е л ь н а я с л о ж н о с т ь. В алгоритме есть пять неизвестных переменных, а именно Z^i, L^i, E^i, S и Q. Каждая из них пересчитывается итеративно в указанном порядке. Основная вычислительная сложность складывается из четырех подзадач. При обновлении Z^i сложность в основном связана с обращением и умножением матрицы и составляет $O(vN^3 + dN^2)$, где $d = \sum d_v$ – общая размерность данных всех аспектов. Для пересчета S необходимо рассмотреть каждый столбец s_j. Стоимость рассмотрения каждого столбца равна $O(N)$. Таким образом стоимость пересчета S составляет $O(N^2)$. Чтобы решить Q, вычисляются c собственных векторов матрицы Лапласа L_S, а сложность составляет $O(cN^2)$. Итак, общая вычислительная сложность есть $O(vN^3 + dN^2 + cN^2)$.

3. Эксперименты. В этом разделе описано проведение вычислительных экспериментов: наборы данных, меры, оценка качества, алгоритмы, с которыми сравнивается представленный метод, результаты сравнения. Представлено влияние параметров метода на качество кластеризации, исследована сходимость.

3.1. Н а б о р ы д а н н ы х. Для экспериментов было выбрано пять наборов данных.

Набор BBC [31] содержит тексты 145 документов. Каждый документ разделен на четыре части, поэтому набор данных содержит четыре разных аспекта.

Набор Caltech-101 [32] содержит 8677 изображений из 101 категории. Для экспериментов выбраны наиболее широко представленные семь классов, включая лица, мотоциклы, купюры, Гарфилд, знак “стоп”, кресло; общее количество изображений составляет 1474. Каждое изображение описывается шестью аспектами, такими, как 40-мерные моменты вейвлетов, 48-мерное преобразование Габора, 254-мерные признаки CENTRIST [33], 1984-мерная гистограмма ориентированных градиентов (HOG), 512-мерный GIST [34] и 928-мерные локальные бинарные шаблоны (LBP).

Набор MFD [35] содержит образцы рукописных цифр – 10 классов от 0 до 9, всего 2000 образцов. Образцы представлены шестью различными способами, включая 76-мерные коэффициенты Фурье форм символов, 216-мерные профильные корреляции, 64-мерные коэффициенты Карунена–Лоэва, 240 средних значений пикселей в окнах 2 × 3, 47-мерный момент Цернике и 6-мерный морфологический.

Набор HW2sources также содержит рукописные цифры от 0 до 9. Случайным образом выбрано 2000 образцов из баз MNIST [36] и USPS [37] по 200 каждого класса. Поскольку образцы классов получены из двух разных источников, то набор HW2sources имеет два аспекта.

Набор 3sources содержит 169 текстов новостей, разделенных на шесть классов. Новости взяты из трех источников: BBC, Reuters и Guardian.

В табл. 1 даны характеристики этих наборов.

3.2. М е р ы к а ч е с т в а. Чтобы сравнить предложенный алгоритм с другими, используются три показателя оценки качества кластеризации: точность, нормализованная взаимная информация, чистота.

Таблица 1. Описание баз данных

База данных	Количество объектов			Тип данных
	объектов	кластеров	аспектов	
BBC	145	2	4	Текст
Caltech-101	1474	7	6	Изображение
MFD	2000	10	6	’’
HW2sources	2000	10	2	’’
3sources	169	6	3	Текст

Точность. Обозначим через U_i истинный номер кластера, куда входит объект x_i, V_i – номер кластера, куда попал этот объект при кластеризации, $\nu(x)$ – перенумерация, обладающая свойством $a = b \Leftrightarrow \nu(a) = \nu(b)$, δ – символ Кронекера. Точность кластеризации Q_{Acc} – доля объектов, правильно отнесенных к кластерам при оптимальной перенумерации (используется венгерский алгоритм [38]):

$$Q_{Acc} = \frac{1}{N}\max_{\nu}\sum_{i=1}^{N}\delta(U_i, \nu(V_i)). \tag{3.1}$$

Нормализованная взаимная информация. Даны два набора кластеров U и V, которые обозначаются как $U = \{U_1, \cdots, U_k\}$ и $V = \{V_1, \cdots, V_m\}$. Если взять в качестве U истинное разбиение, известное из обучающей выборки, то качество кластеризации разбиения V можно определить как нормализованную взаимную информацию наборов кластеров U и V:

$$Q_{NMI} = \frac{\sum\limits_{U_i\in U, V_j \in V} P(U_i, V_j)\log_2\dfrac{P(U_i, V_j)}{P(U_i)P(V_j)}}{\max\{H(U), H(V)\}}, \tag{3.2}$$

где $P(U_i)$ и $P(V_j)$ представляют вероятность того, что случайная выборка из набора данных принадлежит кластерам U_i и V_j соответственно, $P(U_i, V_j)$ – вероятность того, что случайная выборка принадлежит обоим кластерам. Величина

$$H(U) = \sum_{U_i \in U} P(U_i)\log_2 P(U_i)$$

обозначает энтропию набора кластеров.

Чистота. Пусть задан набор c кластеров $\{C_1, \cdots, C_c\}$, $m_i = |C_i|$ – число объектов в C_i, m_{ij} – число объектов истинного класса j, попавших в кластер C_i, $P_{ij} = m_i/m_{ij}$ – вероятность того, что объект из кластера C_i принадлежит классу j. Чистотой кластера C_i назовем величину $P(C_i) = \max\limits_j P_{ij}$, чистотой всего разбиения – величину

$$Q_{Pur} = \sum_{i=1}^{c}\frac{m_i}{N}P(C_i),$$

где N – общее число объектов выборки.

3.3. Алгоритмы сравнения. Метода сравнивается с шестью классическими алгоритмами:

k-средних: базовый алгоритм кластеризации, применяется к наборам данных с одним аспектом, исполняется для каждого аспекта, в качестве результата берется среднее (1.5);

ESSB [9]: сегментация ансамбля подпространств при блочных ограничениях;

AMGL [39]: взвешенное обучение системы графов (auto-weighted multiple graph learning, AMGL) – алгоритм, автоматически определяющий оптимальный вес для графа каждого аспекта;

GBS [11]: система кластеризации на основе графов;

MVGL [12]: многоаспектная кластеризация обучением графа;

Таблица 2. Величины Q_{Acc} на базах данных

Метод	База данных				
	MFD	Caltech-101	BBC	HW2sources	3sources
K-means	58.84 ± 2.63	44.94 ± 1.55	88.44 ± 4.41	45.53 ± 2.01	54.17 ± 5.12
ESSB	84.48 ± 2.66	55.09 ± 0.06	89.48 ± 2.42	79.52 ± 0.05	66.98 ± 3.76
AMGL	80.60 ± 5.99	62.69 ± 5.58	63.22 ± 8.14	91.91 ± 7.39	60.95 ± 6.93
MVGL	94.20 ± 0	57.06 ± 0	95.50 ± 0	95.50 ± 0	77.51 ± 0
GBS	88.10 ± 0	69.20 ± 0	95.85 ± 0	95.85 ± 0	69.23 ± 0
DSS-MSC	94.54 ± 0.21	63.24 ± 0.42	89.73 ± 5.70	89.73 ± 5.70	71.76 ± 1.61
ACAGL	**97.40 ± 0**	**83.65 ± 0**	**95.90 ± 0**	**95.90 ± 0**	**78.11 ± 0**

Таблица 3. Величины Q_{NMI} на базах данных

Метод	База данных				
	MFD	Caltech-101	BBC	HW2sources	3sources
K-means	59.92 ± 1.17	33.24 ± 1.02	2.03 ± 2.53	42.39 ± 1.10	43.11 ± 3.98
ESSB	88.14 ± 0.06	50.81 ± 0.06	20.76 ± 3.04	80.84 ± 0.08	63.92 ± 3.05
AMGL	84.64 ± 3.70	53.00 ± 7.49	6.04 ± 1.70	90.20 ± 3.84	56.08 ± 3.06
MVGL	89.05 ± 0	53.17 ± 0	53.50 ± 0	90.78 ± 0	62.84 ± 0
GBS	89.23 ± 0	**60.56 ± 0**	53.50 ± 0	90.92 ± 0	54.80 ± 0
DSS-MSC	89.48 ± 0.38	55.20 ± 0.47	56.27 ± 3.03	84.32 ± 2.90	59.11 ± 2.10
ACAGL	**94.18 ± 0**	**55.15 ± 0**	**85.76 ± 0**	**91.17 ± 0**	**69.90 ± 0**

Таблица 4. Величины Q_{Our} на базах данных

Метод	База данных				
	MFD	Caltech-101	BBC	HW2sources	3sources
K-means	62.74 ± 1.91	79.53 ± 053	92.54 ± 0.25	49.59 ± 1.59	66.81 ± 2.91
ESSB	88.32 ± 1.31	87.64 ± 0.03	92.41 ± 0	84.22 ± 0.05	78.34 ± 2.42
AMGL	83.35 ± 5.04	83.77 ± 5.28	94.34 ± 0.98	92.90 ± 5.62	80.00 ± 3.99
MVGL	94.20 ± 0	87.04 ± 0	97.24 ± 0	95.50 ± 0	81.07 ± 0
GBS	88.10 ± 0	**88.47 ± 0**	97.24 ± 0	95.85 ± 0	75.56 ± 0
DSS-MSC	94.54 ± 0.21	88.37 ± 0.21	97.36 ± 0.26	90.67 ± 3.86	77.06 ± 1.47
ACAGL	**97.40 ± 0**	87.18 ± 0	**99.31 ± 0**	**95.90 ± 0**	**82.25 ± 0**

DSS-MSC [40]: многоаспектная кластеризация подпространств с двойным разделением (dual shared-specific multi-view subspace clustering) одновременно извлекает информацию общую для нескольких аспектов и выделяет в каждом из аспектов специфический остаток.

3.4. Результаты эксперимента. Каждый из алгоритмов 30 раз выполнен для каждого набора данных. В табл. 2–4 приведены средние значения и среднеквадратичные отклонения для Q_{Acc}, Q_{NMI} и Q_{Pur}.

Из таблиц видно, что предлагаемый метод в целом лучше известных из литературы. AGAGL получает лучшие результаты по всем наборам данных, кроме набора данных Caltech-101 с точки зрения Q_{NMI} и Q_{Pur}. По сравнению с некоторыми алгоритмами, такими, как ESSB, DSS-MSC и AMGL, предложенный метод не требует дополнительного шага кластеризации на изученном графе.

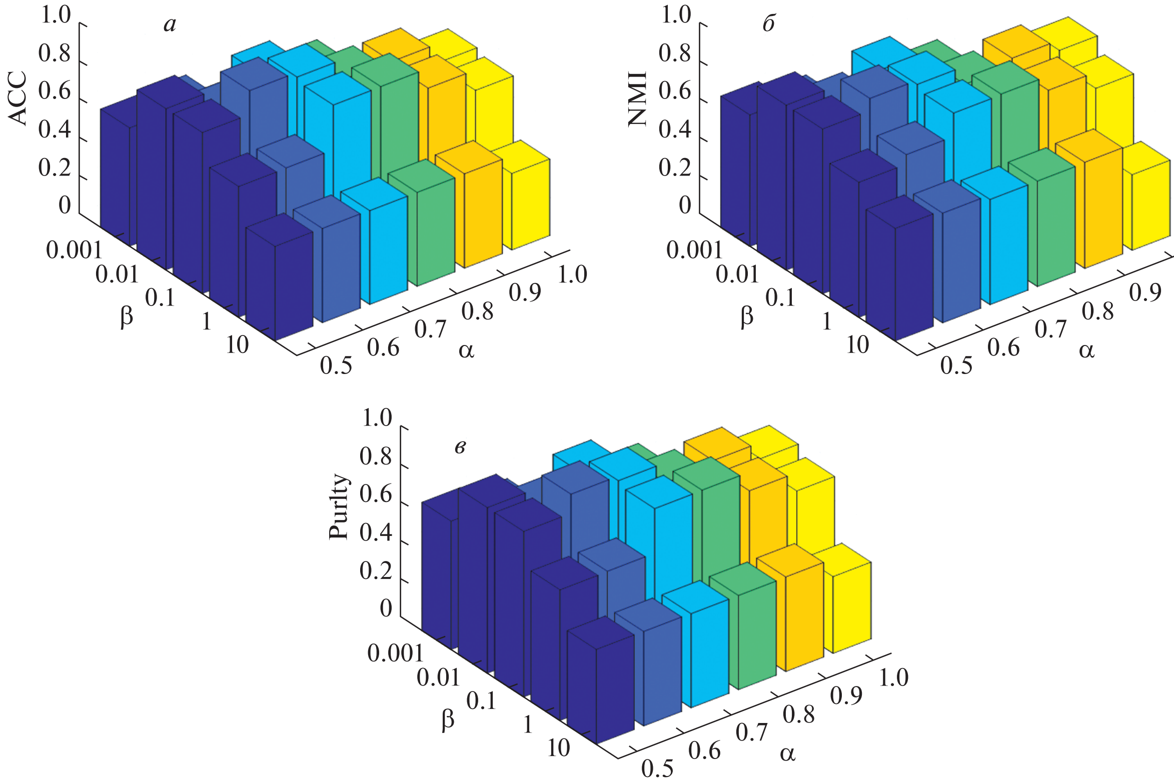


Рис. 2. Влияние α, β на качество кластеризации: *а* – Q_{Acc}, *б* – Q_{NMI}, *в* – Q_{Pur}

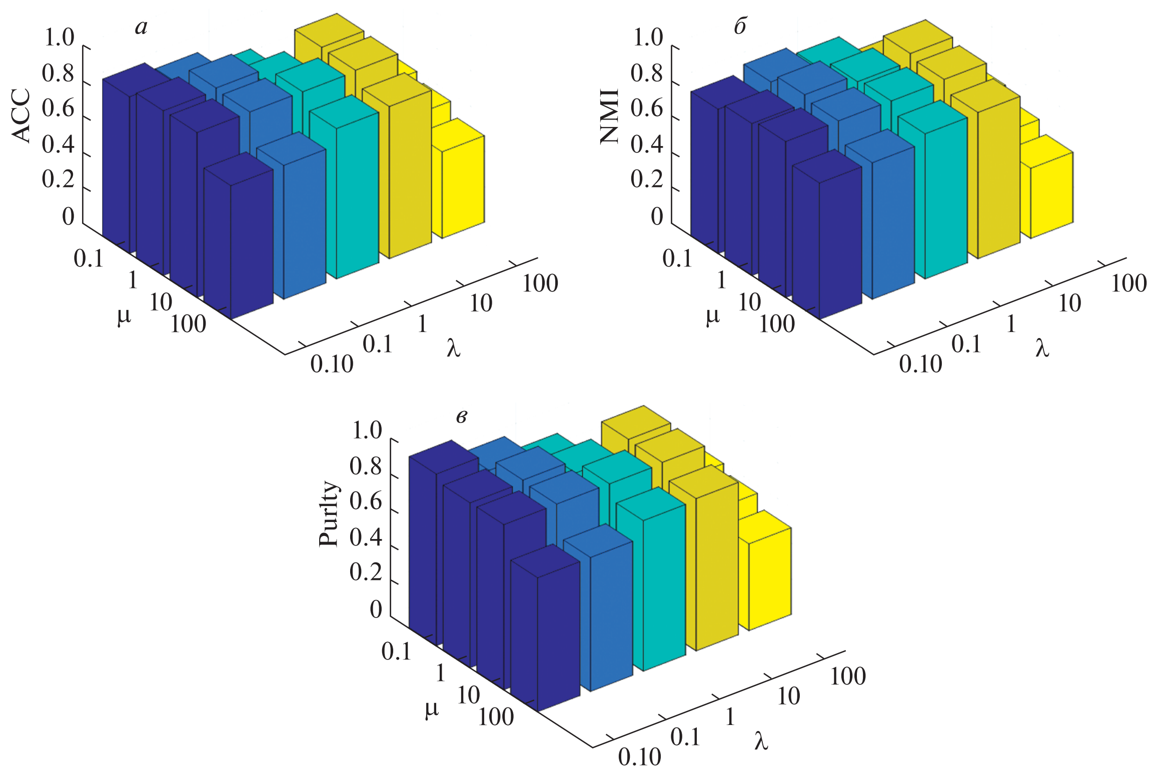


Рис. 3. Влияние λ, μ на качество кластеризации: *а* – Q_{Acc}, *б* – Q_{NMI}, *в* – Q_{Pur}

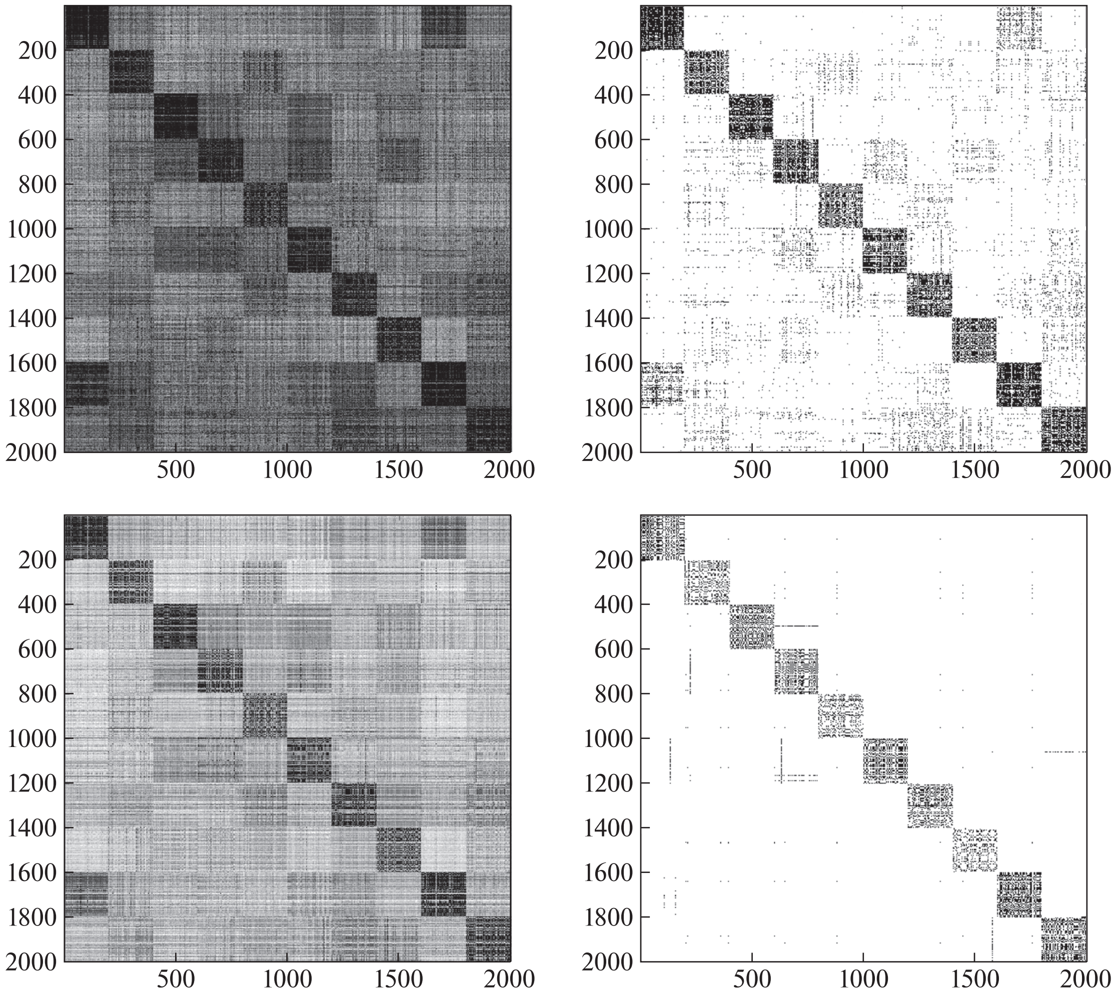


Рис. 4. Графы смежности и сродства на разных итерациях

3.5. А н а л и з ч у в с т в и т е л ь н о с т и п а р а м е т р о в. В статье в основном используются четыре параметра: λ, μ, α, β. Их влияние на показатели кластеризации изучалось на наборе данных MFD.

Влияние α, β *на качество кластеризации*. Для фиксированных значений $\lambda = 1$ и $\mu = 1$ проверены значения $\alpha = \{0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0\}$ и $\beta = \{0.001, 0.01, 0.1, 1, 10\}$, произведено 15 прогонов. На рис. 2 показаны величины ACC, NMI и Purity.

Как видно из рисунков, значения Q_{Acc}, Q_{NMI} и Q_{Pur} максимальны при значении веса рангового ограничения $\beta = 0.1$ и веса невязки $\alpha = 0.7$.

Влияние λ, μ *на качество кластеризации*. При фиксированных значениях $\alpha = 0.5$ и $\beta = 0.1$ значения параметров λ и μ перебираются на множестве {0.01, 0.1, 1, 10, 100}, производено 15 прогонов. На рис. 3 даны величины Q_{Acc}, Q_{NMI} и Q_{Pur}.

3.6. О б у ч е н н ы й г р а ф с р о д с т в а. Чтобы отразить качество глобального графа сродства предложенного метода, проведены эксперименты с набором данных MFD и получен глобальный граф сродства с блочно-диагональной структурой. На рис. 4 показаны сгенерированные на разных итерациях граф смежности Z, рассчитанный как среднее значение суммы матриц смежности различных представлений (1.5) (в левой колонке) и глобальный граф сродства S (в правой колонке). Верхний ряд соответствует четвертой итерации, нижний – десятой. Как видно из рисунка, глобальный граф сродства, построенный предложенным методом, лучше кластеризует данные, чем Z.

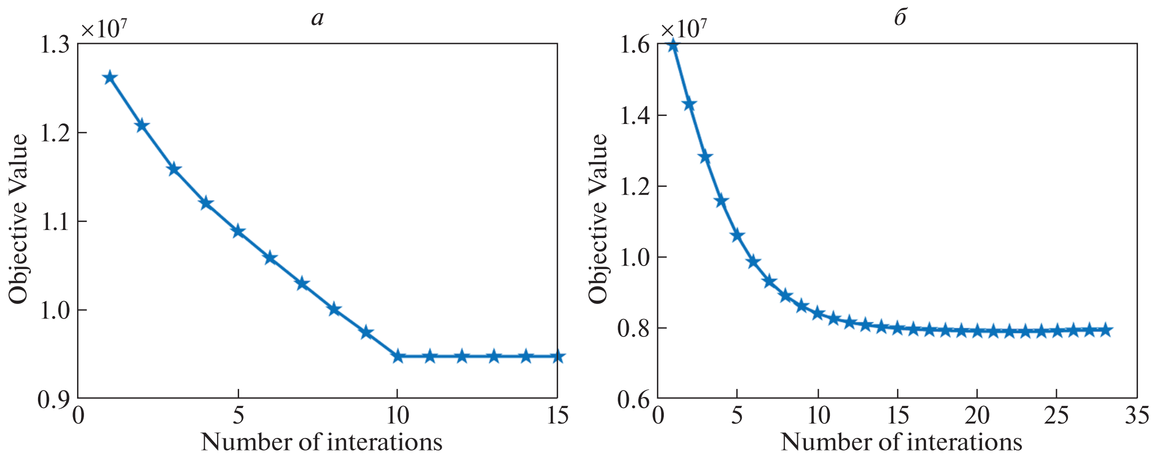


Рис. 5. Зависимость значения целевой функции от номера итерации: *а* – база MFD, *б* – база HW2sources

3.7. Исследование сходимости. Проверка сходимости метода сделана на наборах MFD и HW2sources, которые содержат большое количество выборок. На рис. 5 приведены графики значения целевой функции по итерациям. Видно, что для обоих наборов данных постоянное значение целевой функции достигается уже в районе 10-й итерации, т.е. граф сродства, содержащий искомые c компонент связности, получается за 10 итераций.

Заключение. Представлен новый метод многоаспектной кластеризации подпространств, использующий оптимизацию глобального графа сродства. Метод итеративный, на каждой итерации глобальный граф сродства строится на основании матриц смежности, полученных для отдельных аспектов, а эти матрицы далее уточняются с помощью графа сродства. Компоненты связности глобального графа сродства задают разбиение выборки на кластеры без каких-либо дополнительных шагов. Экспериментальные результаты на нескольких наборах данных показывают эффективность метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Li Y., Yang M., Zhang Z.* Multi-View Representation Learning: A Survey from Shallow Methods to Deep Methods // IEEE Trans. Knowledge and Data Engineering. 2019. V. 31. № 10. P. 1863–1883.
2. *Vizilter Y.V., Vygolov O.V., Zheltov S.Y.* Comparison of Statistical Properties for Various Morphological Filters Based on Mosaic Image Shape Models // J. Computer Optics. 2021. V. 45. № 3. P. 449–460.
3. *Li Y., Liao H.* Multi-view Clustering via Adversarial View Embedding and Adaptive View Fusion // Applied Intelligence. 2021. V. 51. P. 1201–1212.
4. *Kumar A., Rai P., Daume H.* Co-regularized Multi-view Spectral Clustering // Proc. 24th Intern. Conf. Neural Information Processing Systems / Eds J. Shawe-Taylor, R.S. Zemel, P.L. Bartlett, F. Pereira, K.Q. Weinberger. N.Y., USA: Curran Associates, 2011. P. 1413–1421.
5. *Zhao B., Kwok J.T., Zhang C.* Multiple Kernel Clustering // Proc. SIAM Intern. Conf. Data Mining. Sparks, Nevada, USA, 2009. P. 638–649.
6. *Liu J., Wang C., Gao J., Han J.* Multi-view Clustering via Joint Nonnegative Matrix Factorization // Proc. SIAM Intern. Conf. Data Mining / Eds J. Ghosh, Z. Obradovic, J. Dy, Z.-H. Zhou, C. Kamath, S. Parthasarathy. Austin, TX, USA, 2013. P. 252–260.
7. *Gao H., Nie F., Li X., Huang H.* Multi-view Subspace Clustering // Proc. IEEE Intern. Conf. Computer Vision. Santiago, Chile, 2015. P. 4238–4246.
8. *Chaudhuri K., Kakade S.M., Livescu K., Sridharan K.* Multi-view Clustering via Canonical Correlation Analysis // Proc. 26th Annual Intern. Conf. Machine Learning. Montreal, Canada, 2009. P. 129–136.
9. *Zhao H., Ding Z., Yun F.* Ensemble Subspace Segmentation Under Block-wise Constraints // IEEE Trans. Circuits and Systems for Video Technology. 2018. V. 28. № 7. P. 1526–1539.

10. *Zhao K., Zhao X., Peng C. et al.* Partition Level Multiview Subspace Clustering // Neural Networks. 2020. V. 122. P. 279–288.

11. *Wang H., Yang Y., Liu B., Fujita H.* A Study of Graph-based System for Multi-view Clustering // Knowledge-Based Systems. 2019. V. 163. P. 1009–1019.

12. *Zhan K., Zhang C., Guan J., Wang J.* Graph Learning for Multiview Clustering // IEEE Trans. Cybernetics. 2018. V. 48. № 10. P. 2887–2895.

13. *Mohar B., Alavi Y., Chartrand G. et al.* The Laplacian Spectrum of Graphs // Graph Theory, Combinatorics, and Applications. 1991. V. 2. P. 871–898.

14. *Lu C.-Y., Min H., Zhao Z.-Q. et al.* Robust and Efficient Subspace Segmentation via Least Squares Regression // Proc. 12th Europ. Conf. Computer Vision. Florence, Italy, 2012. P. 347–360.

15. *Zhao H., Zheng M., Fu Y.* Block-wise Constrained Sparse Graph for Face Image Representation // Proc. 11th IEEE Intern. Conf. and Workshops on Automatic Face and Gesture Recognition. Ljubljana, Slovenia, 2015. P. 1–6.

16. *Liu G., Lin Z., Yu Y.* Robust Subspace Segmentation by Low-rank Representation // Proc. Intern. Conf. Machine Learning / Eds J. Furnkranz, T. Joachims. Madison, WI, USA: Omnipress, 2010. P. 663–670.

17. *Elhamifar E., Vidal R.* Sparse Subspace Clustering // IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition. Miami, FL, USA, 2009. P. 2790–2797.

18. *Zhang C., Fu H., Liu S. et al.* Low-rank Tensor Constrained Multi-view Subspace Clustering // Proc. IEEE Intern. Conf. Computer Vision. Santiago, Chile, 2015. P. 1582–1590.

19. *Xia R., Pan Y., Du L., Yin J.* Robust Multi-view Spectral Clustering via Low-rank and Sparse Decomposition // Proc. 28 AAAI Conf. Artificial Intelligence. Quebec, Canada, 2014. P. 2149–2155.

20. *Ng A.Y., Jordan M.I., Weiss Y.* On Spectral Clustering: Analysis and an Algorithm // Proc. Intern. Conf. Neural Information Processing System / Eds T.G. Dietterich, S. Becker, Z. Ghahramani. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 2001. P. 849–856.

21. *Wang Y., Wu L., Lin X., Gao J.* Multiview Spectral Clustering via Structured Low-rank Matrix Factorization // IEEE Trans. Neural Networks and Learning Systems. 2018. V. 29. № 10. P. 4833–4843.

22. *Brbic M., Kopriva I.* Multi-view Low-rank Sparse Subspace Clustering // Pattern Recognition. 2018. V. 73. P. 247–258.

23. *Abavisani M., Patel V.M.* Multimodal Sparse and Low-rank Subspace Clustering // Information Fusion. 2018. V. 39. P. 168–177.

24. *Wang Y., Zhang W., Wu L., Lin X. et al.* Iterative Views Agreement: An Iterative Low-rank Based Structured Optimization Method to Multi-view Spectral Clustering // Proc. 25th Intern. Joint Conf. Artificial Intelligence. N.Y., USA, 2016. P. 2153–2159.

25. *Xie D., Zhang X., Gao Q. et al.* Multiview Clustering by Joint Latent Representation and Similarity Learning // IEEE Trans. Cybernetics. 2020. V. 50. № 11. P. 4848–4854.

26. *Cao X., Zhang C., Fu H. et al.* Diversity-induced Multi-view Subspace Clustering // Proc. IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition. Boston, MA, USA, 2015. P. 586–594.

27. *von Luxburg U.* A Tutorial on Spectral Clustering // Statistics and Computing. 2007. V. 17. P. 395–416.

28. *Fan K.* On a Theorem of Weyl Concerning Eigenvalues of Linear Transformations. I // Proc. National Academy of Sciences. 1949. V. 35. № 11. P. 652–655.

29. *Yang J., Yin W., Zhang Y. et al.* A Fast Algorithm for Edge-Preserving Variational Multichannel Image Restoration // SIAM J. Imaging Sciences. 2009. V. 2. № 2. P. 569–592.

30. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization. Cambridge University Press, 2004.

31. *Green D., Cunningham P.* Practical Solutions to the Problem of Diagonal Dominance in Kernel Document Clustering // Proc. Intern. Conf. Machine Learning. Pittsburgh, USA, 2006. P. 377–384.

32. *Li F.-F., Fergus R., Perona P.* Learning Generative Visual Models from Few Training Examples: An incremental Bayesian Approach Tested on 101 Object Categories // Computer Vision and Image Understanding. 2007. V. 106. № 1. P. 59–70.

33. *Wu J., Rehg J.M.* CENTRIST: A Visual Descriptor for Scene Categorization // IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2011. V. 33. № 8. P. 1489–1501.

34. *Oliva A., Torralba A.* Modeling the Shape of the Scene: A Holistic Representation of the Spatial Envelope // Intern. J. Computer Vision. 2001. V. 42. № 3. P. 145–175.

35. *Dua D., Graff C.* UCI Machine Learning Repository // Center for Machine Learning and Intelligent Systems. Irvine, CA, USA, 2019.

36. *LeCun Y., Bottou L., Bengio Y., Haffner P.* Gradient-based Learning Applied to Document Recognition // Proc. IEEE. 1998. V. 86. № 11. P. 2278–2324.

37. *Hull J.J.* A Database for Handwritten Text Recognition Research // IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1994. V. 16. № 5. P. 550–554.

38. *Chen S., Donoho D.L., Saunders M.A.* Atomic Decomposition by Basis Pursuit // SIAM Review. 2001. V. 43. № 1. P. 129–159.

39. *Nie F., Li J., Li X.* Parameter-free Auto-weighted Multiple Graph Learning: A Framework for Multiview Clustering and Semi-supervised Classification // Intern. Joint Conf. Artificial Intelligence. Palo Alto, CA, USA, 2016. P. 1881–1887.

40. *Zhou T., Zhang C.-Q., Peng X. et al.* Dual Shared-specific Multi-view Subspace Clustering // IEEE Tran. Cybernetics. 2019. V. 50. № 8. P. 3517–3530.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 1, с. 56–66

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.85

АНАЛИЗ КРИТИЧЕСКИ ОПАСНЫХ ПОВРЕЖДЕНИЙ СЕТИ СВЯЗИ. IV. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ УЯЗВИМОСТИ КЛАСТЕРОВ

Ю. Е. Малашенко[a], И. А. Назарова[a,*]

[a] *ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия*

**e-mail: irina-nazar@yandex.ru*

Поступила в редакцию 20.04.2021 г.
После доработки 14.07.2021 г.
Принята к публикации 26.07.2021 г.

На модели многопользовательской системы связи анализируются изменения допустимых информационных потоков внутри кластерных объединений при разрушении фрагментов сети. В ходе вычислительных экспериментов для каждого центрального узла-источника последовательно определяются компоненты вектора исходящего многопродуктового потока во все вершины-приемники. Для оценки последствий каждого повреждения вычисляется разность максимальных значений потоков между всеми парами корреспондентов в исходной и поврежденной сети. На основе агрегированных расчетных показателей строятся итоговые диаграммы и определяются наиболее уязвимые узлы с недоминируемыми многокритеральными оценками ущерба.

DOI: 10.31857/S0002338821060135

Введение. Работа продолжает исследования по построению многокритериальных и гарантированных оценок функциональных характеристик многопользовательской системы связи в случае разрушающих воздействий. При моделировании узлы сети рассматриваются как центры информационных кластеров. Для центрального узла кластера анализируются изменения исходящего многопродуктового потока к остальным вершинам-корреспондентам при удалении фрагментов сети.

Для всех пар узлов вычисляются величины максимальных однопродуктовых потоков, которые используются для оценки предельных функциональных возможностей кластерного объединения в неповрежденной сети. Множество исследуемых критически опасных повреждений, как и в наших предыдущих работах, формируется из специально подобранных минимальных и вершинных разрезов. В поврежденной сети последовательно определяются исходящие максимальные потоки из центра кластера к остальным вершинам-приемникам. Параметрические оценки изменений компонент вектора потока в кластере подсчитываются как разность максимальных значений в исходной и поврежденной сети для пар источник-приемник с учетом направления передачи.

Для всех повреждений на основе агрегированных оценок информационного обмена внутри кластеров строятся диаграммы, позволяющие выделить наиболее уязвимые узлы сети.

1. Математическая модель. Для описания многопользовательской сетевой системы используется математическая запись модели передачи многопродуктового потока [1]. Структура сети $G(\mathbf{d})$ задается множествами $\langle V, R, U\rangle$: узлов (вершин) сети $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots, v_N\}$, неориентированных ребер $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots, r_E\}$ и ориентированных дуг $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots, u_{2E}\}$. Ребро $r_k = (v_{n_k}, v_{j_k})$ соединяет вершины v_{n_k}, v_{j_k} (инцидентно вершинам v_{n_k}, v_{j_k}), которые для него служат концевыми. Предполагается, что в сети отсутствуют петли и сдвоенные ребра. Ребру r_k ставятся в соответствие две ориентированные дуги u_k, u_{k+E} прямого и обратного направления из множества U. Дуги $\{u_k, u_{k+E}\}$ определяют направление передачи потока по ребру r_k между концевыми вершинами v_{n_k}, v_{j_k}.

Обозначим через $K(v_n)$ множество номеров ребер, инцидентных вершине (v_n); $S(v_n)$ – множество номеров исходящих дуг, по которым поток покидает узел v_n; $T(v_n)$ – множество номеров входящих дуг, по которым поток поступает в узел v_n. Состав множеств $S(v_n)$, $T(v_n)$ однозначно определяется в ходе выполнения следующей процедуры. Пусть некоторое ребро $r_k \in R$ соединяет вершины с номерами n и j, такими, что $n < j$. Тогда ориентированная дуга $u_k = (v_n, v_j)$ считается *исходящей* из вершины v_n и ее номер k заносится в множество $S(v_n)$, ориентированная дуга $u_{k+E} = (v_j, v_n)$ – *входящей* для v_n и ее номер $k + E$ помещается в список $T(v_n)$. Дуга u_k является *входящей* для v_j и ее номер k попадает в $T(v_j)$, а дуга u_{k+E} – *исходящей* и номер $k + E$ вносится в список исходящих дуг $S(v_j)$.

Предполагается, что в сети между любой парой узлов могут передаваться потоки разных видов. Назовем парой узлов-корреспондентов p_m упорядоченную пару вершин $p_m = (v_{s_m}, v_{t_m})$, где вершина с номером s_m является источником, а с номером t_m – приемником потока m-го вида. В настоящей работе в сети из N узлов рассматривается $M = N(N-1)$ независимых, невзаимозаменяемых и равноправных потоков различных видов, которые передаются между всеми парами узлов из множества $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_M\}$.

Множество пар узлов разбивается на N кластеров по следующему правилу. Некоторый узел v_n, $n = \overline{1, N}$, рассматривается как центр кластера и является вершиной-источником для исходящих потоков соответствующих видов во все остальные вершины сети, которые считаются вершинами-приемниками указанного n-го кластера.

Обозначим через: z_m величину потока m-го вида, который поступает в сеть в узле с номером s_m и покидает из узла с номером t_m; x_{mk} – величину потока m-го вида, который передается по дуге u_k в прямом, а $x_{m(k+E)}$ – величину потока m-го вида, который передается по дуге u_{k+E} в обратном направлении, $x_{mk} \geq 0$, $x_{m(k+E)} \geq 0$, $m = \overline{1, M}$, $k = \overline{1, E}$. Каждому ребру $r_k \in R$ приписывается неотрицательное число d_k, определяющее суммарный предельно допустимый поток, который можно передать по ребру r_k в обоих направлениях. В исходной сети компоненты вектора пропускных способностей – $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_k, \ldots, d_E)$ – наперед заданные положительные числа $d_k > 0$. Вектором $\mathbf{d}$ определяются следующие ограничения на все потоки, передаваемые по ребру r_k:

$$\sum_{m=1}^{M} (x_{mk} + x_{m(k+E)}) \leq d_k, \quad x_{mk} \geq 0, \quad x_{m(k+E)} \geq 0, \quad k = \overline{1, E}. \tag{1.1}$$

Во всех узлах сети $v_n \in V$, $n = \overline{1, N}$, для всех видов потоков должны выполняться условия сохранения потоков:

$$\sum_{i \in S(v_n)} x_{mi} - \sum_{i \in T(v_n)} x_{mi} = \begin{cases} z_m, & \text{если} \quad v_n = v_{s_m}, \\ -z_m, & \text{если} \quad v_n = v_{t_m}, \\ 0 & \text{в остальных случаях}, \end{cases} \tag{1.2}$$
$$n = \overline{1, N}, \quad m = \overline{1, M}, \quad x_{mi} \geq 0, \quad z_m \geq 0.$$

Величина z_m равна входному потоку m-го вида, который пропускается от источника к стоку пары p_m при распределении потоков x_{mi} по дугам сети.

Ограничения (1.1), (1.2) задают множество допустимых значений компонент векторов потоков $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_m, .., z_M)$:

$$\mathscr{Z}(x, \mathbf{d}) = \{\mathbf{z} \geq 0 \mid (\mathbf{z}, x) \text{ удовлетворяют } (1.1), (1.2)\}. \tag{1.3}$$

2. Функциональные характеристики узлов. Обозначим через $z_i(j)$ однопродуктовый поток, направленный из центрального узла v_j кластера в некоторую вершину-приемник v_i.

З а д а ч а 1. Найти максимальный однопродуктовый поток из центрального узла v_j в узел-приемник v_i:

$$z_i^0(j) = \max_{z \in Z(d)} z_i(j).$$

Каждому максимальному значению $z_i^0(j)$ соответствует минимальный разрез — множество ребер

$$h_i(j) = \left\{ r_k \in R \mid z_i^0(j) = \sum_{r_k \in h_i(j)} d_k \right\},$$

таких, что при удалении из сети всех ребер разреза $h_i(j)$ максимальный поток из вершины v_j в вершину v_i становится равным нулю, а вершины v_j, v_i оказываются в разных связных компонентах физического графа $G(d)$.

Для некоторого фиксированного центрального узла v_j кластера решим задачу 1 для всех $v_i \in V, i \neq j$, сформируем все $h_i(j)$ и на основе найденных значений $z_i^0(j)$ построим вектор

$$\mathbf{z}^0(j) = (z_1^0(j), \ldots, z_{j-1}^0(j), z_{j+1}^0(j), \ldots, z_N^0(j))$$

максимальных исходящих потоков из v_j к узлам-приемникам данного кластерного объединения.

Для узла v_j обозначим через $D(j)$ предельно возможную пропускную способность инцидентных дуг для всех исходящих из v_j потоков во все остальные узлы сети $v_i \in V, i \neq j$:

$$D(j) = \sum_{k \in K(v_j)} d_k.$$

Величину $\theta^0(j)$ определим как коэффициент передачи вектора потоков $\mathbf{z}^0(j)$ из узла $v_i \in V$:

$$\sum_{i \neq j} \theta^0(j) z_i^0(j) = \theta^0(j) \sum_{i \neq j} z_i^0(j) = D(j),$$

$$\theta^0(j) = \frac{D(j)}{\sum_{i \neq j} z_i^0(j)} \quad \text{при условии} \quad \sum_{i \neq j} z_i^0(j) > 0. \tag{2.1}$$

Последовательно рассмотрим каждый узел сети $v_j \in V$ в качестве центрального в соответствующем кластере и решим цепочки задач 1. На основе найденных решений построим множество векторов

$$Z(0) = \{\mathbf{z}^0(1), \mathbf{z}^0(2), \ldots, \mathbf{z}^0(N)\}$$

максимальных исходящих потоков из всех узлов сети. Оценки изменения компонент векторов из $Z(0)$ далее используются для анализа последствий возможных повреждений сети.

3. Множество повреждений. Множеству $Z(0)$ поставим в соответствие множество

$$H(\cdot) = \{h_2(1), h_3(1), h_4(1), \ldots, h_N(1), h_1(2), h_3(2), h_4(2), \ldots, h_N(2), \ldots,$$
$$h_1(N), h_2(N), h_3(N), \ldots, h_{N-1}(N)\}$$

минимальных разрезов, найденных при решении задачи 1 для всех максимальных потоков из v_j во все узлы $v_i, v_i \in V, i \neq j$, для каждого узла $v_j \in V$.

Для целей дальнейшего анализа формируется множество возможных повреждений сети на основе решения следующей аналогичной задачи о максимальном потоке — минимальном разрезе. В физическом графе сети $G(d)$ пропускная способность всех ребер полагается равной единице, $d_k = 1, k = \overline{1, E}$. Для каждого узла v_j сети, который считается центром кластера, на графе с единичными пропускными способностями вычисляется максимальный поток из v_j в узел-приемник v_i.

З а д а ч а 2. Найти $z_i^1(j) = \max_{z \in Z(1)} z_i(j)$, где

$$Z(1) = \{Z(d) \mid d_k = 1, k = \overline{1, E}\}.$$

Величина $z_i^1(j)$ численно равна числу ребер в минимальном разрезе для максимального целочисленного потока из v_j в v_i.

Обозначим через

$$q_i(j) = \left\{ k \mid r_k \in R, z_i^1(j) = \sum_{k \in q_i(j)} d_k \right\}$$

список номеров ребер, при удалении которых максимальный поток из v_j в v_i становится равным нулю. Аналогично множеству $H(\cdot)$ вводится объединенное множество $Q(\cdot)$ минимальных разрезов, при удалении которых из сети поток из v_j в соответствующий узел $v_i \in V, i \neq j$, обнуляется:

$$Q(\cdot) = \{q_2(1), q_3(1), q_4(1), \ldots, q_N(1); q_1(2), q_3(2), q_4(2), \ldots, q_N(2); \ldots,$$
$$q_1(N), q_2(N), q_3(N), \ldots, q_{N-1}(N)\}.$$

Обозначим через $u(j)$ множество номеров ребер, инцидентных узлу $v_j, v_j \in V$, и введем множество $U(\cdot)$, элементами которого являются списки номеров ребер, инцидентных каждой вершине $v_j, j = \overline{1, N}$:

$$U(\cdot) = \{u(1), u(2), \ldots, u(j), \ldots, u(N)\}.$$

С помощью $H(\cdot), Q(\cdot), U(\cdot)$ формируется множество повреждений сети W, которое в дальнейшем используется для оценки уязвимости кластеров. Совпадающим спискам $h_i(j), q_m(n), u(s)$ в множествах $H(\cdot), Q(\cdot), U(\cdot)$ поставим в соответствие единственный в множестве W элемент w_l — список номеров ребер, входящих в каждый из одинаковых элементов $h_i(j), q_m(n), u(s)$:

$$w_l = \{k \mid r_k \in R, k \in h_i(j), k \in q_m(n), k \in u(s)\}.$$

Кроме этого, каждому w_l поставим в соответствие тройку индикаторов $str(w_l) = (a, b, c)$, значения которых определим следующим образом. Положим:

$a = 1$, если множество w_l совпадает с одним или более списком $h_i(j)$ в $H(\cdot)$, $a = 0$ – в противном случае;

$b = 1$, если список w_l встречается в множестве $Q(\cdot)$ хотя бы один раз, $b = 0$ – в противном случае;

$c = 1$, если w_l идентичен одному или более элементам в $U(\cdot)$, $c = 0$ – в противном случае.

Всего возможно семь вариантов возможных записей тройки индикаторов (a, b, c), каждая из которых поэлементно характеризует множество повреждений W. Общее число элементов множества W обозначим через L, $W = \{w_1, w_2, .., w_L\}$. Совпадение списков дуг, образующих разрезы, указывает на подмножества пересечений $H(\cdot), Q(\cdot), U(\cdot)$ и структурную зависимость различных потоков от всех критически опасных повреждений.

4. Оценки характеристик узлов при повреждениях. Рассмотрим последовательно каждый элемент $w_l \in W$ как повреждение физического графа сети $G(d)$. Для каждого $w_l \in W$ определим пропускную способность дуги r_k следующим образом:

$$d_k(l) = \begin{cases} d_k, & \text{если} \quad k \notin w_l, \\ 0, & \text{если} \quad k \in w_l. \end{cases}$$

Пропускную способность узла v_j после повреждения w_l обозначим через $D(j, l)$:

$$D(j, l) = \sum_{k \in K(v_j)} d_k(l).$$

Тогда величина

$$\delta D(j, l) = \frac{D(j, l)}{D(j)}$$

характеризует долю сохранившейся пропускной способности при повреждении w_l, а усредненный показатель

$$\overline{\delta D}(j,W) = \frac{\sum_{l=1}^{L} \delta D(j,l)}{L}$$

— среднюю величину сохраняющейся пропускной способности узла v_j относительно всех повреждений из множества W.

Для оценки изменения коэффициентов передачи $\theta^0(j)$ при повреждении w_l последовательно для каждого $v_i \in V$ решается следующая задача.

З а д а ч а 3. При некоторых фиксированных v_j, v_i, w_l найти максимальный поток из центрального узла v_j в вершину v_i:

$$z_i^0(j,l) = \max\{z_i(j) \mid i \neq j, z \in Z(d(w_l))\}.$$

Для полученных решений задачи 3 для каждого центрального узла v_j вычисляются

$$\theta^0(j,l) = \frac{D(j,l)}{\sum_{i \neq j} z_i^0(j,l)} \quad \text{при условии} \quad \sum_{i \neq j} z_i^0(j,l) > 0$$

и относительное изменение по сравнению с исходным значением, определенным в (2.1):

$$\delta(j,l) = \frac{\theta^0(j,l)}{\theta^0(j)} = \frac{\sum_{i \neq j} z_i^0(j)}{\sum_{i \neq j} z_i^0(j,l)} \cdot \frac{D(j,l)}{D(j)} \quad \text{при условиях} \quad \sum_{i \neq j} z_i^0(j,l) > 0, \quad D(j) > 0.$$

Для узла-центра v_j задается среднее изменение коэффициента передачи потока при всех повреждениях $w_l \in W$:

$$\delta(j) \doteq \bar{\delta}(j,W) = \frac{\sum_{l=1}^{L} \delta(j,l)}{(L-1)}.$$

Величина $\delta(j)$ показывает, как изменится возможность передачи исходящих потоков из узла-центра v_j при усреднении по множеству W.

Рассмотрим изменения максимально возможных информационных потоков между корреспондентами при повреждениях из W. На основе последовательного решения задачи 3 для всех пар узлов $v_j \in V, v_i \in V, i \neq j$, и повреждения $w_l \in W$ вводится индексный показатель

$$\xi_i(j,l) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad z_i^0(j,l) = 0, \\ 0, & \text{если} \quad z_i^0(j,l) > 0. \end{cases}$$

Сумма

$$\xi(j,l) = \sum_{i \neq j} \xi_i(j,l)$$

равна числу узлов, связь с которыми из узла v_j невозможна, т.е. при повреждении $w_l \in W$ поток из центра v_j в вершины-приемники v_i равен нулю. Вычислим среднюю долю $\rho(j, W)$ узлов v_i, потоки в которые из центра v_j равны нулю для всего множества повреждений W:

$$\rho(j,W) = \frac{\sum_{l=1}^{L} \xi(j,l)}{L(N-1)}.$$

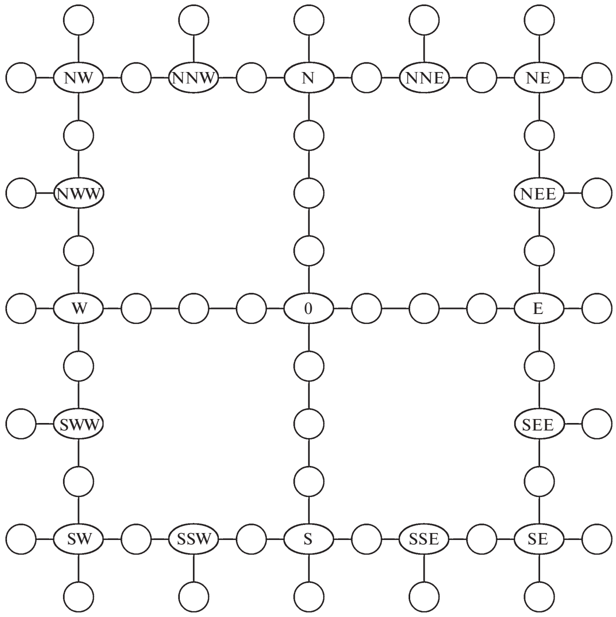


Рис. 1. Базовая сеть

Для всех потоков $z_i^0(j,l) > 0$ априори задается величина γ – уровень критических повреждений. При заданном значении γ рассмотрим индикаторную функцию для исходящего потока из центра v_j в узел v_i при повреждении $w_l \in W$:

$$\psi_i(j,l,\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \dfrac{z_i^0(j) - z_i^0(j,l)}{z_i^0(j)} \geq \gamma, \\ 0, & \text{если} \quad \dfrac{z_i^0(j) - z_i^0(j,l)}{z_i^0(j)} < \gamma. \end{cases}$$

Если $\psi_i(j, l, \gamma) = 1$, то будем говорить, что *потери* информационного потока из центрального узла v_j в v_i для кластера при повреждении $w_l \in W$ превышают допустимый *критический* уровень γ. Для исходящих потоков из узла v_j для всех повреждений из W величина

$$\psi(j,\gamma) \doteq \overline{\psi}(j,W,\gamma) = \frac{\sum_{l=1}^{L}\sum_{i\neq j}\psi_i(j,l,\gamma)}{L(N-1)}$$

характеризует среднее число узлов $v_i \in V$, потери входящих потоков в которые при передаче из узла v_j на всем множестве повреждений W окажутся выше критических.

При оценке изменений функционирования кластера с центром в узле v_j величина $\psi(j,\gamma)$ характеризует среднее число узлов $v_i \in V, i \neq j$, уменьшение входящих потоков (потери) в которые на всем множестве повреждений W окажутся выше критических.

5. Вычислительный эксперимент. Вычислительный эксперимент проводился на моделях сетевых систем, имеющих исходный, базовый граф “крестовина” (рис. 1). Узлы сети обозначены согласно картушке компаса. Базовая сеть “крестовина” состоит из 65 вершин. Пропускные способности дуг указанной сети выбирались случайным образом с равной вероятностью из интервала [900, 999]. Для сетей с графом “звезда” и графом “ромб” (рис. 2) расчеты проводились на том же множестве вершин при сохранении пропускных способностей общих дуг. Пропускная способность каждой из четырех дуг, добавленных в центральной части в сетях “звезда” и “ромб”, была равна 900.

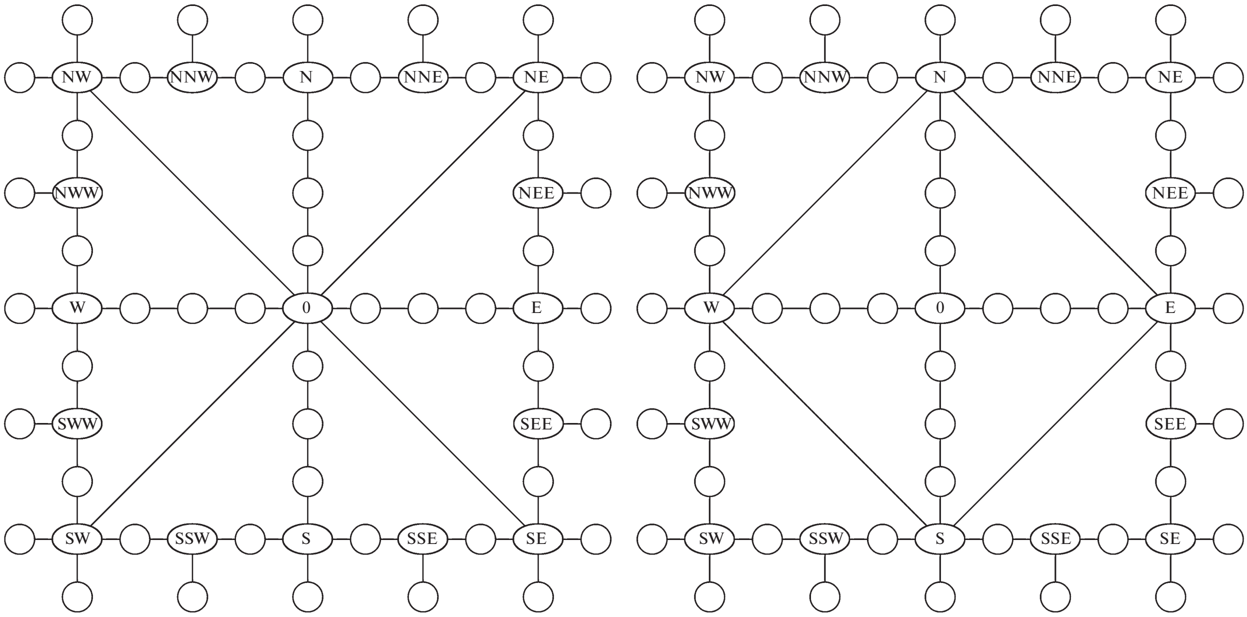


Рис. 2. Сети с графом "звезда" и "ромб"

Общее число пар вершин – более 4×10^3. Исходное суммарное число элементов-разрезов в множествах $H(\cdot), Q(\cdot)$ – более 8×10^3, а в $U(\cdot)$ – 65 по числу узлов сети. Число уникальных элементов в W составило для базовой сети 121, для "звезды" – 119, для "ромба" – 118. Состав множества W приведен в таблице.

Все элементы множества $U(\cdot)$ вошли в W. В таблице в первом столбце указаны строки-индексы, характеризующие принадлежности ("происхождение") элементов W к множествам $H(\cdot), Q(\cdot)$, $U(\cdot)$ и/или их пересечениям.

Например, для базовой сети 17 элементов множества W содержатся только в множестве вершинных разрезов $U(\cdot)$, что составляет 26% от общего числа элементов в $U(\cdot)$. Соответствующие цифры для множеств $H(\cdot)$ и $Q(\cdot)$ составляют доли процента. В множестве W 23% от всех повреждений являются разрезами из множества $H(\cdot)$, а число разрезов только из $Q(\cdot)$ составляет 18% числа элементов W.

Данные, собранные в таблице, позволяют говорить о (почти) равном представительстве разрезов $H(\cdot), Q(\cdot)$ в множестве повреждений W. Без учета элементов "крупномасштабных" ("сильных") повреждений из $U(\cdot)$ разрезы из $H(\cdot), Q(\cdot)$ составляют 86% уникальных повреждений из W. Анализ элементов множества W показывает, насколько важно сформировать его из разрезов всех имеющихся множеств.

На рис. 3–5 представлены диаграммы для расчетных пар показателей $(\rho(j), \psi(j))$ при значениях $\gamma = 0.4$ (слева) и $\gamma = 0.5$ (справа) для всех сетей (базовой, "звезды" и "ромба"). На каждой из

Таблица

H, Q, U	Базовая	"Звезда"	"Ромб"	Среднее
(1, 0, 0)	28/121 = 23%	18/119 = 15%	28/118 = 24%	21%
(0, 1, 0)	22/121 = 18%	24/119 = 20%	19/118 = 16%	18%
(0, 0, 1)	17/121 = 14%	17/119 = 14%	16/118 = 14%	14%
(1, 1, 1)	30/121 = 25%	34/119 = 29%	30/118 = 25%	26%
(1, 1, 0)	6/121 = 5%	12/119 = 10%	6/118 = 5%	7%
(0, 1, 1)	18/121 = 15%	14/119 = 12%	19/118 = 16%	14%
(1, 0, 1)	0/121 = 0%	0/119 = 0%	0/118 = 0%	0%

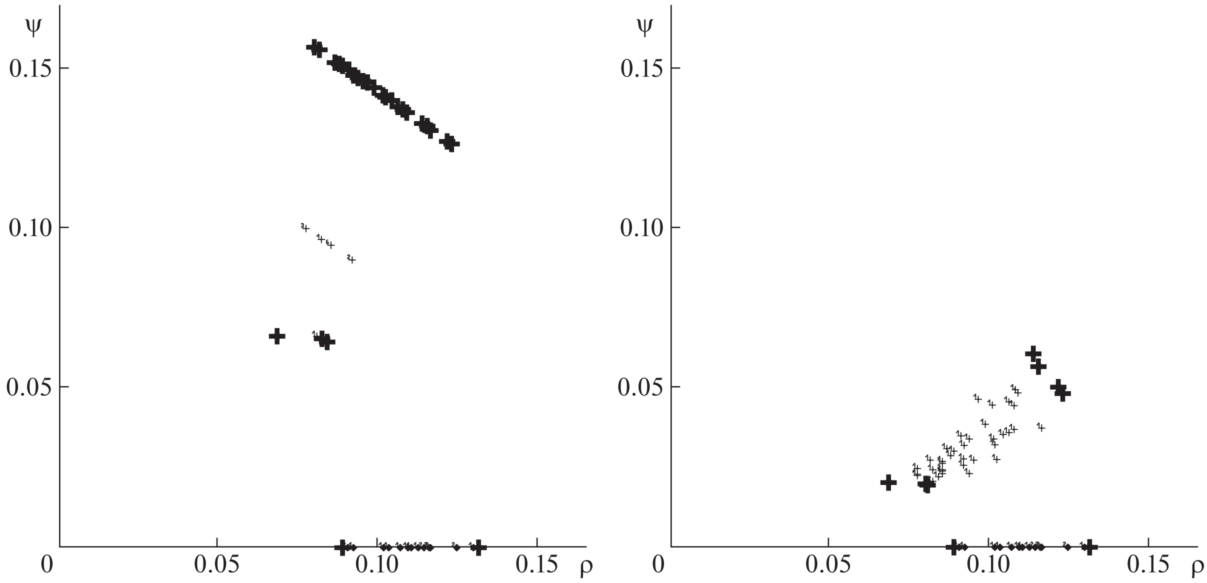


Рис. 3. Функциональные характеристики повреждений для базовой сети

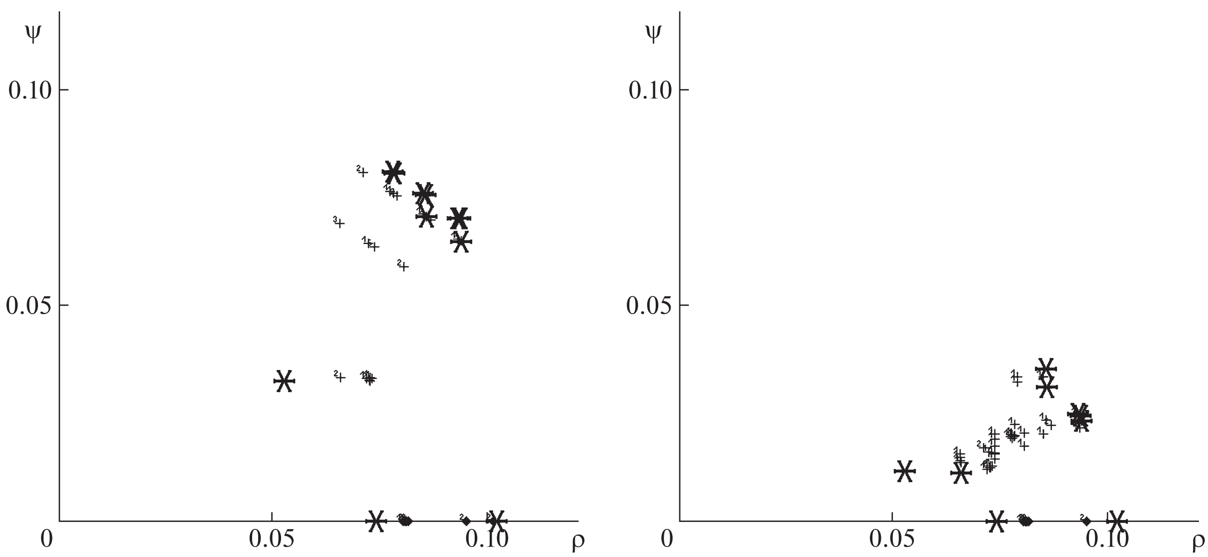


Рис. 4. Функциональные характеристики повреждений для сети “звезда”

диаграмм недоминируемые значения выделены значками (крестиками, звездочками, ромбиками), которые соответствуют названиям графов.

Детальный анализ результатов расчетов указывает, что вершины-центры объединены в некоторые группы (см. диаграммы потерь $(\rho(j),\psi(j))$ на рис. 4, 5). Точки (значки), находящиеся на северо-восточной границе, являются недоминируемыми по максимальным потерям $(\rho(j),\psi(j))$. Поскольку большое число точек расположено в непосредственной близости от границы, то при анализе использовались все точки с близкими значениями. Аналогично в юго-западном углу, вблизи начала координат, расположены вершины-центры с наименьшими показателями потерь по критериям $(\rho(j),\psi(j))$.

В базовой сети (граф “крестовина”) центральный узел v_0 является недоминируемым по минимальным значениям для обоих критериев $(\rho(j),\psi(j))$ и $(\delta(j),\delta D(j))$. Узлы $v(N)$, $v(S)$, $v(E)$, $v(W)$ входят не во все списки недоминируемых точек, но всегда имеют численные показатели,

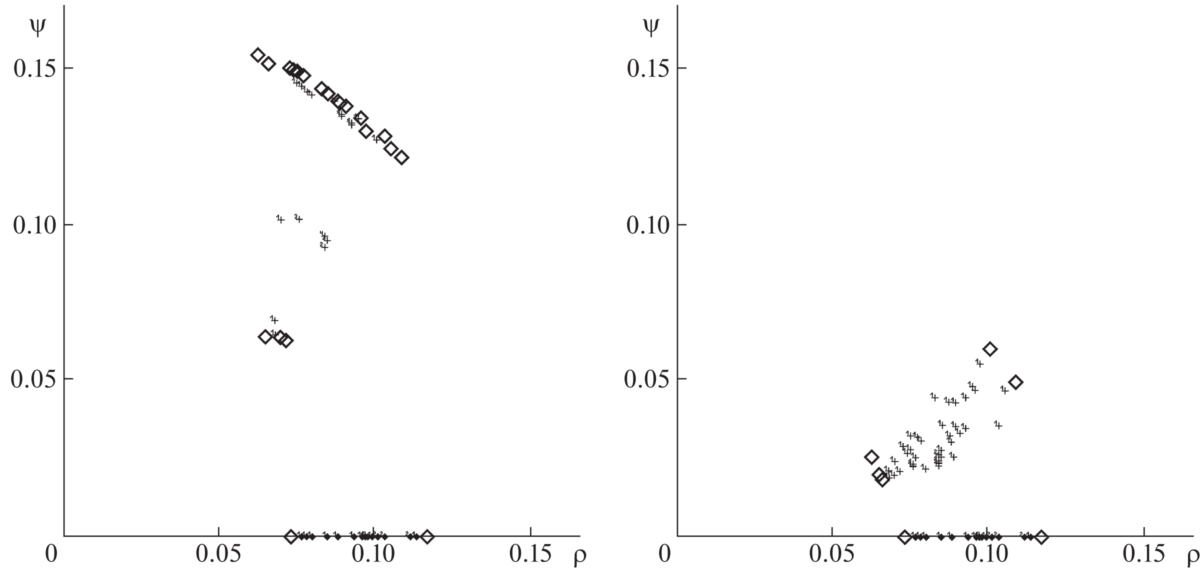


Рис. 5. Функциональные характеристики повреждений для сети “ромб”

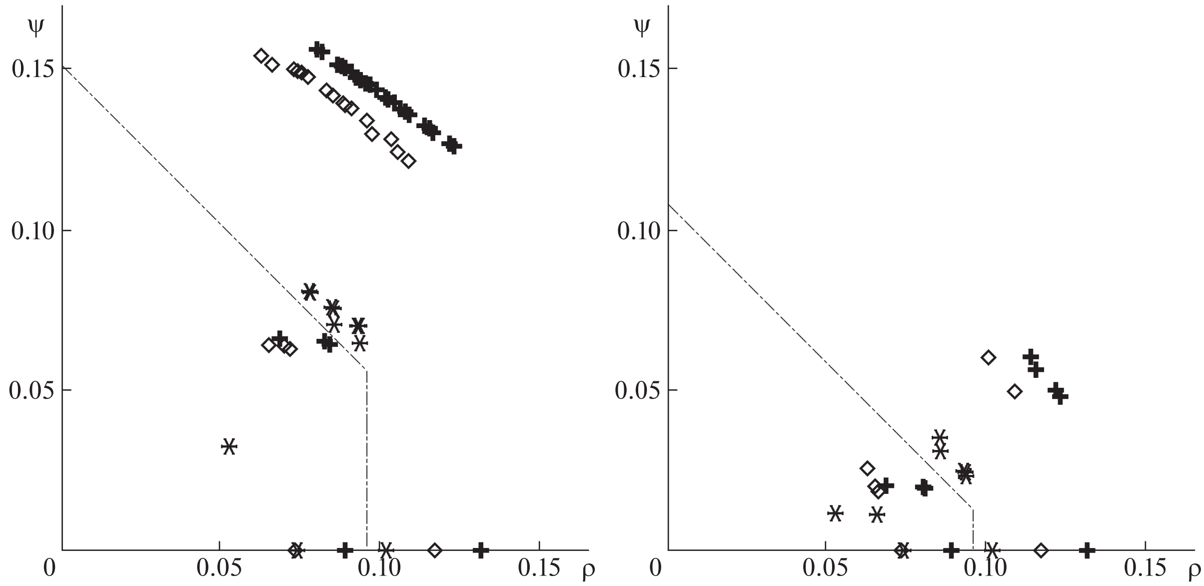


Рис. 6. Недоминируемые решения для всех сетей

близкие к предельным. Для сети “звезда” центральный узел v_0 будет недоминируемым по минимальным значениям для обоих критериев $(\rho(j), \psi(j))$ и $(\delta(j), \delta D(j))$ с большим преимуществом перед остальными вершинами. На объединенной диаграмме недоминируемых точек для всех сетей это становится особенно заметно (рис. 6). Для сети “ромб” центральный узел v_0 не является недоминируемым и не входит ни в один список вершин с показателями, близкими к предельным. Все списки недоминируемых по минимальным значениям потерь или “близких” (юго-западный угол на диаграмме) возглавляют узлы $v(N)$, $v(S)$, $v(E)$, $v(W)$.

На рис. 6 представлены объединенные диаграммы по критериям $(\rho(j), \psi(j))$ для всех сетей при значениях $\gamma = 0.4$, $\gamma = 0.5$. Штрихпунктирная линия разделяет граничные точки, относящиеся к северо-восточной границе (максимальные потери) и точки из юго-западного угла, для которых потери минимальны. Таким образом указанная линия разделяет недоминируемые по максимуму

$(\rho(j), \psi(j))$ вершины-центры кластеров от тех, для которых потери минимальны. Выше штрих-пунктирной линии лежат вершины-центры кластеров, для которых потери максимальны среди всех вершин.

Слои недоминируемых вершин-центров строго упорядочены: наибольшие потери наблюдаются в базовой сети "крестовина", далее – в сети "ромб" и наименьшие – в сети "звезда". Ниже указанной линии тенденция сохраняется – наименьшие потери в сети "звезда". Точка, ближайшая к началу координат, соответствует вершине v_0. Точки, лежащие вблизи разделяющего штрихпунктира, относятся к базовой сети.

Действительно, вершина v_0 является единственным узлом в базовом графе "крестовина", которому инцидентны четыре дуги, а в графе "звезда" у v_0 – восемь инцидентных дуг, что значительно увеличивает количество путей обхода при повреждениях, обуславливает исключительно низкие показатели потерь по критериям $(\rho(j), \psi(j))$ и затрудняет сравнение с другими точками, лежащими в данном случае вдали от границы.

Вершины $v(N)$, $v(S)$, $v(E)$, $v(W)$ формально имеют:

четыре инцидентных дуги в базовом графе, но одна из этих дуг ведет в висячую вершину;

шесть инцидентных дуг в графе "ромб", пять из них позволяют использовать большое число обходных путей при повреждениях;

функциональные показатели, которые значительно уступают v_0.

Последнее закономерно, поскольку четыре дополнительных дуги в сетях "звезда" и "ромб" значительно увеличивают число обходных путей при повреждениях и уменьшают значения $(\rho(j), \psi(j))$. Размытые оценки для сети "звезда" обусловлены тем, что угловые вершины $v(NE)$, $v(SE)$, $v(NW)$, $v(SW)$ хотя и имеют по пять инцидентных дуг, однако две из них ведут в висячие вершины.

Заключение. В последнее время возрос интерес к оценке устойчивости функционирования многопользовательских сетевых систем при повреждениях [2–4]. В рамках предлагаемой модели обеспечение информационного обмена между узлами-корреспондентами рассматривается как основная функция сети связи, а соответствующие величины потоков – как функциональные характеристики системы. В наших предыдущих работах при выборе критериев предполагалось, что неуязвимость системы целесообразно количественно оценивать исходя из того, какие показатели работоспособности сохраняются, а уязвимость – какие возможности по передаче потока утрачиваются при повреждениях.

Анализ уязвимости и вычислительные эксперименты проводились в рамках методологии исследования операций [5–7] с использованием методов оптимизации и потокового программирования [8–10]. Изучение влияния каждого повреждения на информационный обмен внутри кластера позволяет получить агрегированный срез данных о взаимосвязи между жесткой комбинаторно-графовой природой сети и множеством векторов допустимых потоков. Способ формирования множества критически опасных повреждений допускает оценку неуязвимости сети в условиях реально существующей неопределенности о месте и мощности разрушения систем связи, например в случае стихийных бедствий.

Представленный в работе метод выделения узлов, недоминируемых по потерям исходящего многопродуктового потока, можно расценивать как один из вариантов постановки задачи о поиске и определении критических элементов в сети, тогда предложенная агрегированная оценка ущерба будет служить вариантом коэффициента кластеринга для содержательной постановки [2]. Для поиска критически опасных повреждений [3], который сводится к NP-трудной задаче, в качестве эффективных эвристик для метода ветвей-и-границ подойдут изложенные в статье варианты вычисления векторных оценок. Данная работа является одним из возможных подходов к принятию решений в условиях реально существующей неопределенности о месте и цели повреждения систем связи и управления специального назначения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Assad A.A.* Multicommodity Network Flows: a Survey // Networks. 1978. V. 8. № 1. P. 37–91.
2. *Ponton J., Wei P., Sun D.* Weighted Clustering Coefficient Maximization for Air Transportation Networks // Control Conference (ECC). Zurich, 2013. P. 866–871.

3. *Kuhnle A., Nguyen N.P., Dinh T.N., Thai M.T.* Vulnerability of Clustering under Nodes Failure in Complex Networks // Social Network Analysis and Mining. 2017. V.7. Iss. 1. P. 8–24.
4. *Ramirez-Marquez J.E., Rocco C.M., Barker K.* Bi-Objective Vulnerability-Reduction Formulation for a Network under Diverse Attacks // ASCE-ASME J. of Risk and Uncertainty in Engineering Systems. Pt A: Civil Engineering. 2017. V. 3. Iss. 4. P. 04017025-04017041.
5. *Фрэнк Г., Фриш М.* Сети, связь и потоки. М.: Связь, 1978.
6. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
7. *Данскин Дж.М.* Теория максимина и ее приложение к задачам распределения вооружения. М.: Сов. радио, 1970.
8. *Йенсен П., Барнес Д.* Потоковое программирование. М.: Радио и связь, 1984.
9. *Ogryczak W., Luss H., Pioro M., Nace D., Tomaszewski A.* Fair Optimization and Networks: a survey // J. Appl. Math. 2014. V. 25. P. 1–25.
10. *Chankong V., Haimes Y.Y.* Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology. Dover: Mineola, NY, 2008.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 1, с. 67–75

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 519.7

ВИРТУАЛЬНЫЕ ДАТЧИКИ В ЗАДАЧЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ДИАГНОСТИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ[1]

© 2022 г. А. Н. Жирабок[a,b,*], Ким Чхун Ир[a]

[a] *Дальневосточный федеральный ун-т, Владивосток, Россия*

[b] *Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток, Россия*

**e-mail: zhirabok@mail.ru*

Поступила в редакцию 04.07.2021 г.
После доработки 20.08.2021 г.
Принята к публикации 27.09.2021 г.

Рассматривается задача построения виртуальных датчиков в технических системах, описываемых нелинейными моделями, для решения задач функционального диагностирования. Приводятся соотношения, позволяющие построить датчик минимальной сложности, оценивающий заданную компоненту вектора состояния. Теоретические результаты иллюстрируются примером.

DOI: 10.31857/S0002338822010139

Введение. Проблема функционального диагностирования (ФД) к настоящему времени уже достаточно хорошо изучена, задачи обнаружения, поиска и идентификации дефектов решены для широкого класса динамических систем [1–4]. Одним из препятствий на пути реализации методов ФД может быть недостаточное число датчиков, которыми оснащена диагностируемая система. Введение дополнительных датчиков приводит к дополнительным затратам и не всегда реализуемо на практике. Более перспективным является использование так называемых виртуальных датчиков [3, 4], которые строятся на основе наблюдателей Люенбергера и в работах [3, 4] имеют размерность, совпадающую с размерностью исходной системы. В статье ставится и решается задача построения виртуальных датчиков минимальной размерности, оценивающих заданные компоненты вектора состояния нелинейной системы.

Для решения этой задачи предлагается использовать так называемый логико-динамический (ЛД) подход, который был успешно применен как для решения задачи ФД [5], так и анализа наблюдаемости и управляемости нелинейных систем [6]. ЛД-подход характерен тем, что он не гарантирует достижения оптимального решения задачи в смысле размерности получаемых в результате решения систем, но оперирует только линейными методами даже для систем с недифференцируемыми нелинейностями.

1. Основные модели. Рассмотрим стационарную систему, описанную нелинейной моделью

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) + C\Psi(x(t), u(t)) + L\rho(t), \\ y(t) &= Hx(t), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$ и $y(t) \in R^l$ – векторы состояния, управления и выхода; F, G и H – матрицы соответствующих размеров; C – матрица размера $n \times p$, L – известная матрица размера $n \times q$, $\rho(t) \in R^q$ – неизвестная функция времени, описывающая возмущения на систему. Нелинейный член $\Psi(x(t), u(t)$ имеет вид

$$\Psi(x(t), u(t)) = \begin{pmatrix} \varphi_1(A_1 x(t), u(t)) \\ \cdots \\ \varphi_p(A_p x(t), u(t)) \end{pmatrix},$$

$A_1, \ldots, A_p$ – матрицы-строки; $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ – нелинейные (возможно, недифференцируемые) функции.

[1] Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 22-19-00028).

Требуется построить виртуальный датчик, оценивающий переменную $y_v(t) = H_v x(t)$ с известной матрицей H_v. Способ ее нахождения определяется рассматриваемой задачей диагностирования. В частности, наиболее благоприятной для реализации процедуры ФД является ситуация, когда все компоненты вектора состояния системы могут быть измерены. В этом случае матрица H_v должна удовлетворять условию

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} H \\ H_v \end{pmatrix} = n.$$

В дальнейшем для простоты будем предполагать, что H_v – матрица-строка. Если эта матрица содержит более одной строки, предлагаемое решение распространяется и на этот случай. Другие варианты задания матрицы H_v приведены в [7], где было получено решение задачи в линейном случае.

Решение рассматриваемой задачи состоит в построении нелинейного наблюдателя, оценивающего переменную $y_v(t)$ и, таким образом, выполняющего функцию виртуального датчика. Уравнение искомого наблюдателя имеет вид

$$\begin{gathered} \dot{x}_v(t) = F_* x_v(t) + J_* y_0(t) + G_* u(t) + C_* \Psi(x_v(t),\ y_0(t),\ u(t)) + J_v r(t), \\ y_*(t) = H_* x_v(t), \\ y_v(t) = H_{*_v} x_v(t) + Q y(t), \\ r(t) = R_* y(t) - y_*(t), \end{gathered} \tag{1.2}$$

где $x_v(t) \in R^k$ – вектор состояния наблюдателя, k – размерность наблюдателя, F_*, J_*, J_v, G_*, C_*, R_*, H_*, H_{*_v}, Q – матрицы, подлежащие определению, $C_*\Psi(x_v, y_0, u)$ – нелинейная составляющая,

$$y_0(t) = H_0 x(t) = \begin{pmatrix} H \\ H_v \end{pmatrix} x(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y_v(t) \end{pmatrix}.$$

Отметим, что переменная $y_*(t)$ в (1.2) необходима для формирования невязки $r(t)$, используемой в цепи обратной связи для обеспечения устойчивости наблюдателя.

В соответствии с ЛД-подходом решение задачи осуществляется в три этапа. На первом этапе строится линейная модель, не чувствительная к возмущениям:

$$\begin{gathered} \dot{x}_v(t) = F_* x_v(t) + J_* y_0(t) + G_* u(t), \\ y_*(t) = H_* x_v(t). \end{gathered} \tag{1.3}$$

Далее проверяется возможность введения в нее нелинейной составляющей $C_*\Psi(x_v, y_0, u)$ и возможность оценки переменной $y_v(t)$ на основе условия

$$y_v(t) = H_{*_v} x_v(t) + Q y(t). \tag{1.4}$$

На последнем этапе ищется матрица J_v, обеспечивающая устойчивость наблюдателя.

2. Построение модели. Для получения решения на первом этапе матрицы F_* и H_* ищутся в каноническом виде:

$$F_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad H_* = (1\ 0\ 0\ \cdots\ 0). \tag{2.1}$$

Предполагается, что после окончания переходного процесса векторы $x(t)$ и $x_v(t)$ связаны матрицей Φ:

$$x_v(t) = \Phi x(t).$$

Известно, что матрицы, описывающие модель, удовлетворяют следующим уравнениям [5, 6]:

$$R_* H = H_* \Phi, \quad \Phi F = F_* \Phi + J_* H_0, \quad G_* = \Phi G, \tag{2.2}$$

$$C_* = \Phi C, \quad A' = A_* \begin{pmatrix} \Phi \\ H_0 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Последнее соотношение эквивалентно ранговому равенству

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \Phi \\ H_0 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \Phi \\ H_0 \\ A' \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

где матрица A' строится из тех строк матрицы A, номера $j_1, j_2, \ldots, j_d$ которых совпадают с номерами ненулевых столбцов произведения ΦC.

Решение задачи на первом этапе осуществляется на основе уравнения [5, 6]

$$(R_* \;\; -J_{*_1} \; \ldots \; -J_{*_k})(V^{(k)} \quad L^{(k)}) = 0, \tag{2.5}$$

где

$$V^{(k)} = \begin{pmatrix} HF^k \\ H_0 F^{k-1} \\ \vdots \\ H_0 \end{pmatrix}, \quad L^{(k)} = \begin{pmatrix} HL & HFL & \ldots & HF^{k-1}L \\ 0 & H_0 L & \ldots & H_0 F^{k-2} L \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1,\, 2, \ldots,$$

матрица $V^{(k)}$ обеспечивает построение модели (1.3), $L^{(k)}$ – нечувствительность ее к возмущениям. Уравнение (2.5) имеет нетривиальное решение, если

$$\operatorname{rank}(V^{(k)} \quad L^{(k)}) < l + (l+1)k. \tag{2.6}$$

Для построения модели из (2.6) определяется минимальное k и из (2.5) – строка $(R_* \;\; -J_{*_1} \; \ldots \; -J_{*_k})$, затем на основе соотношений

$$R_* H = \Phi_1, \quad \Phi_i F = \Phi_{i+1} + J_{*i} H_0, \quad i = \overline{1, k-1}, \quad \Phi_k F = J_k H_0,$$

полученных из (2.1) и (2.2), строится матрица Φ, на чем заканчивается первый этап.

Для реализации второго этапа представим уравнение (1.4) в виде

$$H_v x(t) = H_{*_v} \Phi x(t) + Q H x(t),$$

откуда следует

$$H_v = H_{*_v} \Phi + QH = (H_{*_v} \;\; Q) \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

что эквивалентно равенству

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ H_v \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Выполнение условия (2.8) означает, что матрица-строка H_v может быть выражена через матрицу $(\Phi^{\mathrm{T}} \;\; H^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ и построенная линейная модель будет оценивать заданную компоненту $y_v = H_v x$; матрицы H_{*_v} и Q определяются из алгебраического уравнения (2.7).

Для проверки возможности преобразования построенной линейной модели в нелинейную рассчитывается матрица $C_* = \Phi C$, определяются номера $j_1, j_2, \ldots, j_d$ ненулевых ее столбцов и по описанному выше правилу строится матрица A'. Далее проверяется условие (2.4) и при его выполнении строится нелинейная составляющая:

$$\Psi(x_v, y_0, u) = \begin{pmatrix} \varphi_{j_1}(A_{*j_1} x_v, y_0, u) \\ \cdots \\ \varphi_{j_d}(A_{*j_d} x_v, y_0, u) \end{pmatrix},$$

где матрицы-строки A_{*j_1}, A_{*j_2}, ..., A_{*j_d} определяются из линейных алгебраических уравнений

$$A_j = A_{*j}\begin{pmatrix} \Phi \\ H_0 \end{pmatrix}, \quad j = j_1, j_2, \ldots, j_d.$$

Если хотя бы одно из условий (2.4) и (2.8) не верно, нужно найти другое решение уравнения (2.5) при прежней или увеличенной размерности k.

Полагая, что условия (2.4) и (2.8) выполняются, примем $G_* = \Phi G$, на чем заканчивается процедура построения нелинейной модели (второй этап).

Соотношение (2.7) предлагается использовать для получения критерия возможности построения виртуального датчика, не чувствительного к возмущениям. Для этого введем матрицу максимального ранга L_*, такую, что $L_* L = 0$. Тогда $\Phi = KL_*$ для некоторой матрицы K. Заменим в (2.7) Φ на KL_* и преобразуем полученное выражение:

$$H_v = (H_{*v} \;\; Q)\begin{pmatrix} KL_* \\ H \end{pmatrix} = (KH_{*v} \;\; Q)\begin{pmatrix} L_* \\ H \end{pmatrix}.$$

Из последнего уравнения ясно, что оно имеет решение в том случае, когда

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} L_* \\ H \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} L_* \\ H \\ H_v \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Приведенное ранговое равенство и является искомым критерием: если оно выполняется, виртуальный датчик может быть построен, в противном случае решение не существует. Отметим, что условие (2.9) дополняет условия существования решения, не чувствительного к возмущениям, найденные в [5].

3. Обеспечение устойчивости. На третьем этапе для определения матрицы J_v, обеспечивающей устойчивость наблюдателя, введем ошибку по состоянию $e(t) = \Phi x(t) - x_v(t)$ и с учетом (1.1), (1.2) и (2.2) запишем и преобразуем уравнение для $\dot{e}(t)$:

$$\dot{e}(t) = \Phi F x(t) + \Phi G u(t) + \Phi C \Psi(x(t),\, u(t)) - (F_* x_v(t) + J_* y_0(t) + G_* u(t) + C_* \Psi(x_v, y_0, u) +$$
$$+ J_v(R_* y(t) - y_*(t))) = F_* \Phi x(t) - F_* x_v(t) - J_v R_* H x(t) + J_v H_* x_v(t) + \Delta\Psi(t) = F_* \Phi x(t) - J_v H_* \Phi x(t) -$$
$$- F_* x_v(t) + J_v H_* x_v(t) + \Delta\Psi(t) = (F_* - J_v H_*)\Phi x(t) - (F_* - J_v H_*) x_v(t) + \Delta\Psi(t) = (F_* - J_v H_*) e(t) + \Delta\Psi(t),$$

где

$$\Delta\Psi(t) = C_* \Psi(x(t),\, u(t)) - C_* \Psi(x_v(t),\, y_0(t),\, u(t)) = C_* \Psi(\Phi x(t),\, y_0(t),\, u(t)) - C_* \Psi(x_v(t),\, y_0(t),\, u(t)).$$

Рассмотрим два подхода к выбору матрицы J_v. В первом из них предполагается, что функция $\Psi(x,u)$ удовлетворяет условию Липшица по аргументу x, т.е.

$$\|\Psi(x,u) - \Psi(x',u)\| \le N\,\|x - x'\|, \tag{3.1}$$

$N > 0$ – некоторая константа. Тогда функция $\Delta\Psi(t)$ также удовлетворяет этому условию с некоторой константой $N_* > 0$, т.е.

$$\|\Delta\Psi(t)\| \le N_*\,\|e(t)\|. \tag{3.2}$$

Известно, что если пара (F_*, H_*) наблюдаема, то существует такая матрица J_v, что $F_{**} = (F_* - J_v H_*)$ устойчива. Из канонической формы (2.1) с очевидностью следует наблюдаемость пары (F_*, H_*) и, следовательно, существование матрицы J_v, обеспечивающей устойчивость матрицы F_{**}. Из устойчивости этой матрицы также вытекает, что существуют симметрические положительно-определенные матрицы P и W, такие, что

$$F_{**}^{\mathrm{T}}P + PF_{**} = -W. \tag{3.3}$$

Рассмотрим функцию Ляпунова $V(t) = e^{\mathrm{T}}(t)Pe(t)$ и найдем ее производную с учетом (3.1) и (3.2):

$$\begin{aligned}\dot V(t) &= (F_{**}e(t) + \Delta\Psi(t))^{\mathrm{T}}Pe(t) + e^{\mathrm{T}}(t)P(F_{**}e(t) + \Delta\Psi(t)) = e^{\mathrm{T}}(t)(F_{**}^{\mathrm{T}}P + PF_{**})e(t) + \\ &+ 2e^{\mathrm{T}}(t)P\Delta\Psi(t) = -e^{\mathrm{T}}(t)We(t) + 2e^{\mathrm{T}}(t)P\Delta\Psi(t) \le -\left\|e(t)\right\|^2\lambda_{\min}(W) + 2\left\|e^{\mathrm{T}}(t)P\Delta\Psi(t)\right\| \le \\ &\le -\left\|e(t)\right\|^2\lambda_{\min}(W) + 2\left\|e(t)\right\|^2\lambda_{\max}(P)N_*,\end{aligned}$$

где $\lambda_{\min}(W)$ и $\lambda_{\max}(P)$ – минимальное и максимальное собственные числа матриц W и P соответственно. Из последнего выражения ясно, что если

$$N_* < \frac{\lambda_{\min}(W)}{2\lambda_{\max}(P)}, \tag{3.4}$$

то $\dot V(t) < 0$, т.е. наблюдатель устойчив. Отметим, что такой подход был рассмотрен в [8].

Будем искать J_v в виде $J_v = (a_1\ a_2\ \dots\ a_k)^{\mathrm{T}}$. Тогда

$$F_* - J_vH_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} - J_v(1\ 0\ 0\ \cdots\ 0) = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ -a_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_k$ связаны с собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ матрицы $F_* - J_vH_*$ известными соотношениями:

$$a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k), \quad a_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3\ldots + \lambda_{k-1}\lambda_k, \ldots, \quad a_1 = (-1)^k\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k,$$

Исходя из заданных требований к качеству переходного процесса, можно выбрать собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ и определить коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_k$.

Отметим, что из-за наличия слагаемого $J_*y_0(t)$ в модели (1.2) может появиться обратная связь по переменной $y_v(t) = H_{*_v}x_v(t) + Qy(t)$, что приведет к матрице F_*, отличной от канонического вида (2.1). В этом случае выбор коэффициентов $a_1, a_2, \dots, a_k$ должен быть осуществлен так, чтобы собственные числа матрицы $F_* - J_vH_*$ удовлетворяли требованию устойчивости. Сделать это можно, если выразить в общем виде собственные числа матрицы $F_* - J_vH_*$ через коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_k$, выбрав числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ и найдя из полученных уравнений искомые коэффициенты.

Рассмотренный подход накладывает довольно жесткие ограничения на класс функций $\Psi(x,u)$, которые диктуются условием (3.4) на константу N_* – как правило, она должна быть меньше единицы. Только при $k = 1$ из (3.3) следует $\lambda_{\min}(W) = 2PJ_v$ и $N_* < J_v$, т.е. коэффициент J_v всегда может быть выбран так, чтобы соблюсти условие $N_* < J_v$ для произвольной функции, удовлетворяющей условию Липшица.

Отметим, что условие Липшица (3.1) носит глобальный характер и выполняется далеко не всегда, однако любая дифференцируемая функция локально удовлетворяет этому условию, поскольку верно приближенное равенство

$$\Psi(x,u) - \Psi(x',u) \approx \frac{\partial\Psi(x,u)}{\partial x}(x - x').$$

Это положено в основу второго подхода, где предполагается, что функция $\Psi(x,u)$ дифференцируема, ошибка $e(t)$ мала и функция $\Delta\Psi(t)$ может быть разложена в ряд Тейлора относительно текущего значения.

Более детально рассмотрим это вначале для случая, когда система содержит одну нелинейность и $\Psi(x(t),u(t)) = \varphi(Ax(t),u(t))$. Поскольку $A = A_*\begin{pmatrix}\Phi\\ H_0\end{pmatrix}$ и $e = \Phi x - x_v$, то

$$Ax = A_*\begin{pmatrix}\Phi\\ H_0\end{pmatrix}x = A_*^1\Phi x + A_*^2 H_0 x = A_*^1(x_v + e) + A_*^2 y_0$$

и разность $\Delta\Psi(t)$ можно записать в виде

$$\Delta\Psi(t) = C_*(\varphi(Ax(t),\, u(t)) - \varphi(A_*^1 x_*(t) + A_*^2 y_0(t),\, u(t))) = C_*(\phi(A_*^1 x_v(t) + A_*^2 y_0(t) +$$
$$+ A_*^1 e(t),\, u(t)) - \varphi(A_*^1 x_v(t) + A_*^2 y_0(t),\, u(t))) \approx \Phi C\frac{\partial\varphi(x_v, y_0, u)}{\partial x_v}A_*^1 e(t).$$

В результате получаем окончательное уравнение для ошибки $e(t)$:

$$\dot e(t) = \left(F_* - J_v H_* + \Phi C\frac{\partial\varphi(x_v, y_0, u)}{\partial x_v}A_*^1\right)e(t) = F_e(J_v, x_v, y_0, u)e(t), \tag{3.5}$$

из которого следует, что элементы матрицы обратной связи J_v в этом случае будут зависеть от компонент вектора состояния x_v, управления u и переменной y_0. Для определения этих элементов необходимо выполнить следующие операции:

найти характеристический полином матрицы $F_e(J_v, x_v, y_0, u)$ в виде

$$\det(F_e(J_v, x_v, y_0, u) - \lambda E) = \lambda^k + a_1(J_v, x_v, y_0, u)\lambda^{k-1} + \ldots + a_k(J_v, x_v, y_0, u);$$

для обеспечения требуемой динамики наблюдателя задать значения собственных чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$;

составить систему нелинейных уравнений:

$$\begin{gathered}a_1(J_v, x_v, y_0, u) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k),\\ a_2(J_v, x_v, y_0, u) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \ldots + \lambda_{k-1}\lambda_k,\\ \ldots,\\ a_k(J_v, x_v, y_0, u) = (-1)^k\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k;\end{gathered}$$

найти из этой системы элементы матрицы J_v.

При наличии в системе нескольких нелинейностей получаем

$$F_e(J_v, x_v, y_0, u) = F_* - J_v H_* + \Phi C\begin{pmatrix}(\partial\varphi_1(x_v, y_0, u)/\partial x_v)A_{*1}^1\\ \ldots\\ (\partial\varphi_p(x_v, y_0, u)/\partial x_v)A_{*p}^1\end{pmatrix}.$$

На практике рассмотренный метод может быть использован для наблюдателя размерности не более 3–4, поскольку приводит к громоздким выражениям при вычислении определителя $\det(F_e(J_v, x_v, y_0, u) - \lambda E)$. Его преимущество по сравнению с методами, изложенными в [8], состоит в том, что он не приводит к производным в управляющих и выходных сигналах.

4. Пример. Рассмотрим систему управления

$$\begin{gathered}\dot x_1(t) = u_1(t)/\vartheta_1 - b_1\sqrt{x_1(t) - x_2(t)},\\ \dot x_2(t) = u_2(t)/\vartheta_2 + b_1\sqrt{x_1(t) - x_2(t)} - b_2\sqrt{x_2(t) - x_3(t)},\\ \dot x_2(t) = b_2\sqrt{x_2(t) - x_3(t)} - b_3\sqrt{x_3(t) - \vartheta_3} + \rho(t),\\ y_1(t) = x_2(t), \quad y_2(t) = x_3(t).\end{gathered} \tag{4.1}$$

Уравнения (4.1) описывают так называемую трехтанковую систему (см. рисунок), состоящую из трех резервуаров, соединенных между собой трубами. Жидкость поступает в первый и второй танки и выливается из третьего танка. Уровни жидкости в танках обозначены $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$; ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, b_1, b_2 и b_3 – коэффициенты, значения которых определяются геометрическими размерами системы.

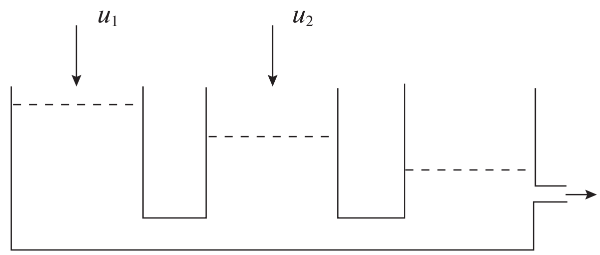


Рисунок. Трехтанковая система

Поскольку неизмеряемой является компонента $x_1(t)$, примем $y_v(t) = x_1(t)$, $H_v = (1\ \ 0\ \ 0)$ и построим соответствующий виртуальный наблюдатель. Для простоты зададим $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 1$, $\vartheta_3 = 0$, $b_1 = b_2 = b_3 = 1$. Поскольку уравнения (4.1) содержат только нелинейные члены, для них $F = 0$ и решение задачи описанным методом невозможно. Для устранения этого недостатка, согласно ЛД-подходу, добавим в первое уравнение формальный член $-(x_1 - x_2) + (x_1 - x_2)$, первый элемент которого отнесем к линейной части, второй – к нелинейной. Аналогично во второе уравнение добавим член $x_1 - x_2 - (x_2 - x_3) - (x_1 - x_2 - (x_2 - x_3))$, в третье – член $(x_2 - x_3 - x_3) - (x_2 - x_3 - x_3)$. В результате получим следующее описание системы:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi(x,u) = \begin{pmatrix} -\sqrt{A_1x} + A_1x \\ \sqrt{A_1x} - \sqrt{A_2x} - (A_1x - A_2x) \\ \sqrt{A_2x} - \sqrt{A_3x} - (A_2x - A_3x) \end{pmatrix},$$

$$A_1 = (1\ \ -1\ \ 0), \quad A_2 = (0\ \ 1\ \ -1), \quad A_3 = (0\ \ 0\ \ 1).$$

Нетрудно проверить, что условие (2.6) выполняется при $k = 1$, однако при этом не верно условие (2.8), поэтому принимаем $k = 2$. Составная матрица $(V^{(2)}\ \ L^{(2)})$ имеет вид

$$(V^{(2)}\ \ L^{(2)}) = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 5 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что с матрицей $(V^{(2)}\ \ L^{(2)})$ уравнение (2.5) имеет два решения:

$$(R_* \ -J_{*1}\ -J_{*2}) = (1\ 0\ 2\ -1\ 0\ -1\ 0\ 1), \quad \Phi^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(R_* \ -J_{*1}\ -J_{*2}) = (1\ 0\ 3\ -1\ 0\ 1\ -1\ 0), \quad \Phi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^{(2)} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим первое из них. Так как

$$\Phi^{(1)}C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то $j_1 = 2,\ j_2 = 1$ и

$$A' = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что условие (2.4) выполняется и нелинейная составляющая может быть добавлена в линейную модель. Уравнение (2.3) принимает вид

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A_* \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

одно из возможных решений которого представлено строками

$$A_{*1} = (0\ 1\ -1\ 0\ 0), \quad A_{*2} = (0\ 0\ 1\ -1\ 0).$$

В результате получаем модель:

$$\dot{x}_{v1} = x_{v2} - 2y_1 + y_2 + u_2 + \sqrt{x_{v2} - y_1} - \sqrt{y_1 - y_2} - (x_{v2} - y_1 - (y_1 - y_2)) = u_2 + \sqrt{x_{v2} - y_1} - \sqrt{y_1 - y_2},$$
$$\dot{x}_{v2} = -y_v + y_1 - \sqrt{x_{v2} - y_1} + x_{v2} - y_1 = -x_{v2} + y_1 + u_1 - \sqrt{x_{v2} - y_1} + x_{v2} - y_1 = u_1 - \sqrt{x_{v2} - y_1},$$
$$y_* = x_{v1}, \quad y_v = x_{v2}.$$

Уравнение (3.5) для ошибки $e(t)$ принимает вид

$$\dot{e}(t) = \left(\begin{pmatrix} -J_{v1} & 0 \\ -J_{v2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2\sqrt{x_{v2} - y_1}} \\ 0 & -\dfrac{1}{2\sqrt{x_{v2} - y_1}} \end{pmatrix} \right) e(t) = \begin{pmatrix} -J_{v1} & \dfrac{1}{2\sqrt{x_{v2} - y_1}} \\ -J_{v2} & -\dfrac{1}{2\sqrt{x_{v2} - y_1}} \end{pmatrix} e(t).$$

Запишем характеристический полином матрицы этого уравнения:

$$(J_{v1} + \lambda)\left(\frac{1}{2\sqrt{x_{v2} - y_1}} + \lambda\right) + \frac{J_{v2}}{2\sqrt{x_{v2} - y_1}} = \lambda^2 + \lambda\left(J_{v1} + \frac{1}{2\sqrt{x_{v2} - y_1}}\right) + \frac{J_{v1} + J_{v2}}{2\sqrt{x_{v2} - y_1}} = 0.$$

Примем $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, тогда

$$J_{v1} + \frac{1}{2\sqrt{x_{v2} - y_1}} = 2, \quad \frac{J_{v1} + J_{v2}}{2\sqrt{x_{v2} - y_1}} = 1,$$

откуда

$$J_{v1} = 2 - \frac{1}{2\sqrt{x_{v2} - y_1}}, \quad J_{v2} = 2\sqrt{x_{v2} - y_1} + \frac{1}{2\sqrt{x_{v2} - y_1}} - 2.$$

Приведем описание наблюдателя:

$$\dot{x}_{v1}(t) = u_2(t) + \sqrt{x_{v2}(t) - y_1(t)} - \sqrt{y_1(t) - y_2(t)} + J_{v1} r(t),$$
$$\dot{x}_{v2}(t) = u_1(t) - \sqrt{x_{v2}(t) - y_1(t)} + J_{v2} r(t),$$
$$y_*(t) = x_{v1}(t),$$
$$y_v(t) = x_{v2}(t),$$
$$r(t) = y_1(t) - y_*(t).$$

Заключение. В работе предложен метод построения виртуальных датчиков в технических системах, описываемых нелинейными моделями. На основе наблюдателей Люенбергера получены соотношения, позволяющие построить датчики минимальной размерности, оценивающие заданные компоненты вектора состояния диагностируемой системы. Синтезированные виртуальные датчики дают возможность в ряде случаев не только уменьшить сложность средств диагностирования и повысить глубину диагностирования, но и рассмотреть задачи, которые без использования таких датчиков не могли быть решены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мироновский Л.А.* Функциональное диагностирование динамических систем. М.; СПб.: МГУ-ГРИФ, 1998.
2. *Шумский А.Е., Жирабок А.Н., Гаджиев Ч.* Диагностирование и отказоустойчивое управление динамическими системами. Монография [электронный ресурс]. Владивосток: ДВФУ, 2016. 178 с. http://elib.dvfu.ru/vital/access/manager/Repository/fefu:4053.
3. *Blanke M., Kinnaert M., Lunze J., Staroswiecki M.* Diagnosis and Fault Tolerant Control. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
4. *Witczak M.* Fault Diagnosis and Fault Tolerant Control Strategies for Nonlinear Systems. Berlin: Springer, 2014.
5. *Жирабок А.Н., Зуев А.В., Шумский А.Е.* Метод идентификации дефектов в нелинейных системах на основе скользящих наблюдателей // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 1. С. 11–23.
6. *Жирабок А.Н.* Анализ наблюдаемости и управляемости нелинейных динамических систем линейными методами // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. № 1. С. 10–17.
7. *Жирабок А.Н., Ким Чхун Ир*. Виртуальные датчики в задаче функционального диагностирования // Мехатроника, автоматизация, управление. 2021. № 6. С. 298–303.
8. *Misawa E.A., Hedrick J.K.* Nonlinear Observers – a State of the Art Survey // J. Dynamic Systems, Measurements and Control. 1989. V. 111. P. 344–352.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 1, с. 76–82

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

УДК 004.8

ПОСТРОЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ В ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С АВТОМАТИЗИРОВАННЫМ ДИСПЕТЧЕРОМ

© 2022 г. Р. А. Горбачев[a],*, Е. М. Захарова[a],**,
И. С. Макаров[b],***, В. И. Цурков[b],****

[a] Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Московский физико-технический институт (национальный исследовательский ун-т)” МФТИ, Долгопрудный, МО, Россия

[b] Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН (ФИЦ ИУ РАН), Москва, Россия

*e-mail: gorbachev.ra@mipt.ru

**e-mail: zakharova.em@mipt.ru

***e-mail: i.s.m.mipt@yandex.ru

****e-mail: tsur@ccas.ru

Поступила в редакцию 16.08.2021 г.
После доработки 27.08.2021 г.
Принята к публикации 27.09.2021 г.

В предыдущей работе авторов [1] представлена интеллектуальная система для автоматизации диспетчерской деятельности при организации движения железнодорожного транспорта. Речь идет о корректировке расписаний в многоагентных системах при неожиданных изменениях ситуаций. В данной статье конкретизируется основной подход и детально описаны модель, метод решения и возможная модернизация системы.

DOI: 10.31857/S000233882201005X

Введение. В [2, 3] рассмотрены первые исследования по разработке систем искусственного интеллекта в задаче автоматизированного диспетчера. Для принятия решения используется метод обучения многослойных нейронных сетей. В [1] учитываются недостатки в вышеупомянутых публикациях, формируется более широкий подход в данном направлении многоагентных систем. Ниже принципы и подходы [1] конкретизируются и распространяются на более общий случай. Работа диспетчера – человека, контролирующего движение транспорта, и без того достаточно трудоемка. В связи с повышением интенсивности движения его деятельность становится сложнее, поэтому исследование систем помощи диспетчерскому аппарату на сегодняшний день до сих пор является одним из актуальных направлений [4]. При этом вследствие высоких требований к безопасности движения окончательное решение остается за человеком, а предлагаемые системой решения носят рекомендательный характер.

В работе приведено описание алгоритма построения планового расписания в соответствии с регламентом движения и алгоритма прогнозирования движения с учетом графиков исполненного и планового движения.

1. Постановка задачи и основная модель. Для построения расписания необходимо в первую очередь реализовать модель движения агентов. В статье для этой цели используется дополненная модель, описанная в [1, 5].

Для тестирования интеллектуальной системы был выбран линейный участок на графе железнодорожной сети Монголии, включающий в себя шесть станций и пять перегонов между ними. Каждая станция состоит из трех или более станционных путей. Инфраструктурным сегментом считается станционный путь или перегон между станциями. Для каждого сегмента известны его название, длина и смежные с ним инфраструктурные сегменты. Каждый инфраструктурный сегмент может находиться в одном из трех возможных состояний: “normal”, “locked”, “reduced speed”. Состояние сегмента “normal” означает, что он доступен для движения и на нем нет никаких ограничений. Состояние сегмента “locked” означает, что на нем произошел аншлаг. Аншлагом называется любой запрет движения агентов по данному сегменту. Для каждого аншлага

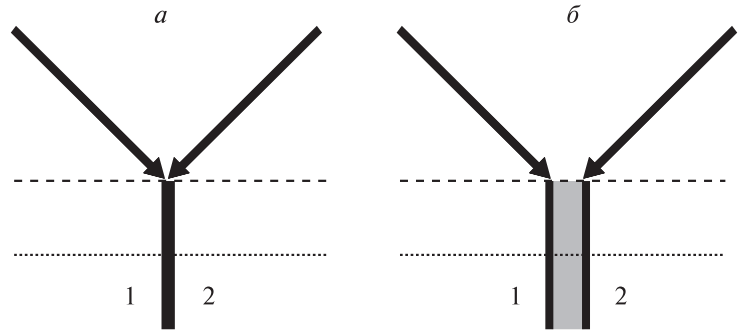


Рис. 1. Схема управления агентами: *а* — некорректная и *б* — корректная

задается номер сегмента и его продолжительность, т.е. время начала и время окончания запрета. Состояние сегмента “reduced speed” означает, что движение по данному сегменту разрешено, однако максимально допустимая скорость агентов ограничена. Максимальное значение скорости в данном случае задается отдельно.

Для каждого сегмента известно время движения каждого агента в обоих направлениях. Стоит отметить, что все сегменты образуют планарный граф, при этом южный полюс любого сегмента соединяется только с северными полюсами других сегментов и наоборот. Таким образом, рассматриваемое движение агентов имеет одно из двух условных направлений — южное или северное (на железной дороге — четное или нечетное). Предыдущие версии алгоритма [1] управляли агентами таким образом, что сегменты занимались без учета интервалов движения между агентами при последовательном движении, т.е. при уходе одного агента с некоторого сегмента, последний мог быть занят другим агентом в тот же момент времени. Однако подобная стратегия управления в реальности не соответствует правилам безопасности движения, поэтому в алгоритм управления был добавлен интервал движения между двумя последовательными агентами, который запрещает агенту проследовать на только что освободившийся сегмент.

На рис. 1 представлены две схемы управления агентами. Вариант *а* соответствует предыдущей версии алгоритма, основанной на использовании нейронной сети, вариант *б* — алгоритму, представленному в данной работе. Точечной пунктирной линией обозначен станционный путь, на котором останавливаются агенты. Штриховой пунктирной линией отмечена граница станции, т.е. условно стрелки, соединяющие станционный путь и перегон. Серым цветом показана занятость, связанная с межпоездным интервалом. Данный интервал означает что время между отбытием одного агента и прибытием другого на один и тот же участок должно быть не менее заданного значения, где стрелки — направление движения агентов.

Каждый агент может находиться в одном из следующих состояний. Состояние “stay” соответствует движению агента по перегону либо остановке на станции, согласно плановому графику движения. Состояние “move” является командой и означает, что агент, который простоял на станционном пути необходимое по плану количество времени, может начать движение к следующей станции по смежному перегону. Агент находится в этом состоянии один момент времени, после чего состояние агента становится “stay”. Состояние “wait” служит командой и означает, что агент, который простоял на станционном пути необходимое по плану количество времени, может продолжать стоянку на этом станционном пути. Данное состояние реализуется только в течение пребывания поезда на станции. Эта команда отдается агенту в том случае, если начинать дальнейшее движение неоптимально в данный момент времени. Состояние “skip” устанавливается для агента, который достиг конечную точку своего маршрута. Такие агенты игнорируются при дальнейшей работе алгоритма.

Важно отметить, что состояния, являющиеся командами, могут быть установлены только в результате возникновения в модели следующих событий: появление нового агента на участке, достижение одним из агентов какой-либо станции своего маршрута, окончание плановой стоянки любого агента.

Для каждого агента известны его тип, направление движения, начальная и конечная точки маршрута и приоритет. Тип движения необходим для определения нормативного времени перемещения агента по каждому сегменту. В каждый отдельный момент времени для каждого агента

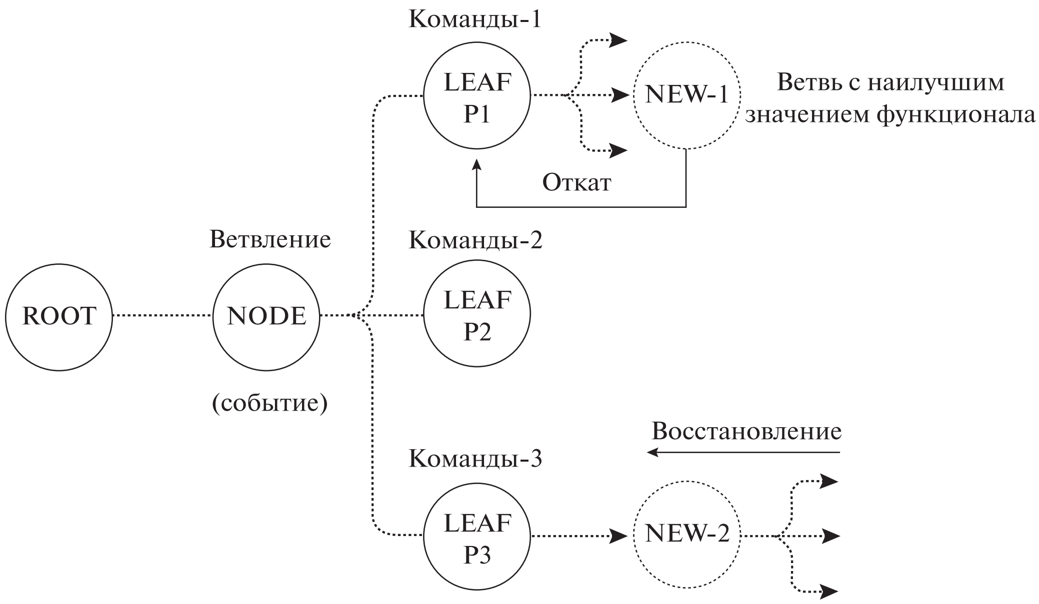


Рис. 2. Построение дерева возможных вариантов развития графика движения: P1, P2, P3 – вероятности выбора листьев

известен текущий сегмент его пребывания, время пребывания на нем и отклонение от планового графика движения. Отклонение пересчитывается для всех агентов на каждом временном шаге.

Отклонение от планового графика движения является целевой функцией, который минимизируется в рассматриваемой оптимизационной задаче и рассчитывается по формуле из [1]:

$$R = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \in W_i} \omega_i |\Delta T_{ij}| \to \min_{\theta}, \tag{1.1}$$

где i – индекс агента, j – индекс сегмента из множества W_i, обязательных для посещения, согласно маршруту агента i, ω_i – весовой коэффициент агента i на основе его типа – задается вручную для каждого агента, T_{ij} – изменение времени прибытия агента i на станцию j по сравнению с нормативным графиком, θ – тензор весовых коэффициентов нейронной сети.

2. Построение решения. Для построения оптимального графика движения входными данными являются: граф участка дороги, состоящий из инфраструктурных сегментов; список аншлагов (запретов движения); исходный плановый график движения агентов. Для построения прогнозного графика движения в качестве дополнительных данных подается график исполненного до текущего времени движения.

Для маршрутов введем термин нитки. В рамках данной терминологии будут рассматриваться исходные, плановые, исполненные и прогнозные нитки. Каждая нитка задается следующим набором параметров: время начала нитки, приоритет и тип агента движения, массив составляющих ее фрагментов. Фрагментом обозначается совокупность инфраструктурного сегмента, через который проходит нитка, и времени пребывания агента в состоянии "stay" на этом сегменте.

Подход заключается в моделировании движения агентов в рамках многоагентной системы. Моделирование осуществляется дискретно и циклически, с шагом в одну виртуальную единицу времени, которая соответствует одной минуте движения поездов в реальном времени.

Процесс моделирования заключается в построении дерева возможных вариантов развития графика движения, в котором выбираются оптимальные в соответствии с формулой (1.1) стратегии управления.

На рис. 2 представлен алгоритм построения дерева возможных вариантов развития графика движения.

Узлом дерева является вариация состояния всех сегментов и агентов движения в данный момент времени, т.е. массивы агентов и сегментов в некоторых состояниях. В каждом узле содержится информация о смежных узлах дерева – родителе и потомках, текущем отклонении от исходного планового графика, а также флаг события, показывающий, произошло ли какое-либо событие в момент времени, соответствующий данному узлу. Листьями дерева выступают последние рассчитанные варианты. Корень дерева – состояние сегментов и агентов в начальный момент времени. Он устанавливается при инициализации системы. Узлы следуют друг за другом, количество потомков для одного узла может быть больше одного. Несколько потомков создаются за счет вариативности предпринимаемых мер управления, т.е. наборов команд, отдаваемых агентам при возникновении событий. Работа алгоритма заключается в построении данного дерева оптимальным образом и поиску ветви дерева, соответствующей наилучшей стратегии управления движением. При построении дерева используются вариация алгоритма метода Монте-Карло поиска по дереву [6], алгоритм Дейкстры [7], а также отдельные алгоритмы теории графов, такие, как BFS [8], DFS [7]. Результатом работы алгоритма является набор ниток по самой оптимальной ветви дерева стратегий, которые в свою очередь и представляют оптимальное расписание движения, передаваемое пользователю.

Алгоритм построения нового узла дерева стратегий заключается в следующем.

Ш а г 1. Новые узлы строятся как продолжение одного из имеющихся листов дерева. Изначально лист только один – корень дерева. В структуру узла в первую очередь вносятся агенты, которые уже сформированы и готовы начать свое движение. Для этих агентов устанавливается состояние “stay”. В том случае, если стартовый сегмент маршрута агента занят, его появление откладывается до освобождения данного сегмента.

Ш а г 2. На втором шаге осуществляется обновление состояния инфраструктурных сегментов участка. Меняется их статус или, например, появляются новые аншлаги.

Ш а г 3. В каждом узле есть массив активных на данный момент времени агентов. Выполняется двойная сортировка данного массива в соответствии с их приоритетами и величиной отклонения по времени от планового графика движения (формула (1.1)).

Ш а г 4. Выполнение команд управления движением агентов, унаследованных от предыдущего узла. Так, например, исполнение команды “move” для некоторого агента приводит к его перемещению со станционного пути на смежный перегон и установке состояния “stay”. В процессе выполнения команд осуществляется проверка на то, что исполнение команды не приведет к возникновению deadlock (deadlock или взаимоблокировка – ситуация, при которой несколько агентов находятся в состоянии ожидания сегментов, занятых друг другом, и ни один из них не может продолжать свое движение). Например, не допускается загруженность агентами локальной области участка графа так, чтобы не оставалось ни одного свободного станционного пути.

Ш а г 5. В соответствии с формулой (1.1) обновляется текущее суммарное временное отклонение от планового графика движения всех агентов.

Ш а г 6. Создаются варианты наборов допустимых команд для агентов в данном узле, которые затем передаются в узлы-потомки для исполнения их на следующей итерации цикла в шаге 4. Углубление веток происходит с вероятностью, линейно пропорциональной оценке отклонения от планового графика движения. Данный подход является разновидностью метода Монте-Карло поиска по дереву.

Шаги 1–6 выполняются в цикле до тех пор, пока все агенты не дойдут до конечных точек своих маршрутов либо не будет определено, что движение невозможно из-за ситуации deadlock. При построении дерева стратегий выполняется сжатие и обрезка пройденных веток, не меняющихся на протяжении заданного количества времени. Это позволяет избежать линейного роста потребления памяти при построении дерева.

Особенностью данного алгоритма является стратегия откатов. При построении дерева предпочтение отдается наиболее перспективным ветвям в соответствии с формулой (1.1). В случае ухудшения значений оптимизируемой целевой функции выполняется откат к предыдущим, родительским, узлам, для которых имеется лучшее значение целевой функции. Далее происходит построение другой ветви дерева на основе нового набора команд. Откаты могут выполняться последовательно. Наиболее оптимальной стратегией является откат на один уровень назад. Данный подход также используется для решения deadlock.

На рис. 3 представлен пример deadlock на случайно сгенерированных нитках исполненного движения.

По вертикальной оси отмечены станции выбранного участка железнодорожной сети Монголии и их станционные пути [9, 10]. На горизонтальной оси задана абсолютная временная шкала.

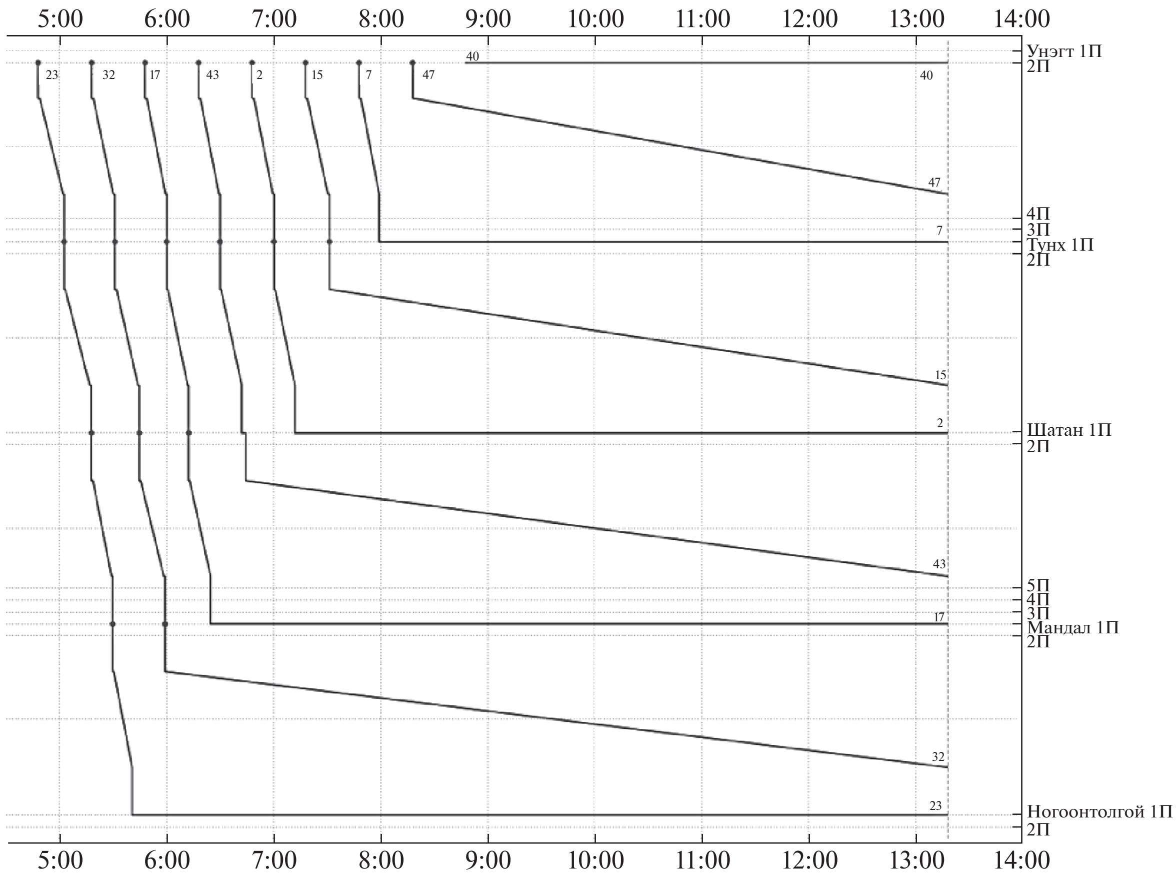


Рис. 3. Пример отображения ситуации deadlock на графике движения

Агенты стоят на сегментах бесконечно долго, поэтому отображаемые нитки тянутся вправо, не достигая конечной точки.

3. Применение. Алгоритм применим как для корректировки планового расписания в соответствии с задаваемыми пользователем ограничениями, так и для построения прогнозного графика движения на основе имеющегося планового и исполненного движения. Во втором случае используется тот же самый алгоритм, однако построение дерева стратегий управления агентами начинается не с нулевого момента времени, а с момента окончания исполненного движения. При этом дерево на протяжении всего исполненного движения состоит из одной единственной ветви. Скорость работы алгоритма на графике любого объема не превышает 1 с.

На рис. 4 приведен результат работы алгоритма по корректировке планового графика движения по реальному участку железной дороги Монголии на основе пожеланий пользователя. По вертикальной оси отмечены станции выбранного участка железнодорожной сети Монголии и их станционные пути. На горизонтальной оси задана абсолютная временная шкала. Исходные плановые нитки обозначены сплошными линиями, а исправленные нитки без конфликтов, предлагаемые алгоритмом, – пунктирными линиями. Стоит обратить внимание на станцию Ногоонтолгой. На ней два станционных пути, однако ни в один момент времени оба не являются занятыми. Это обусловлено алгоритмом предотвращения deadlock.

На рис. 5 приведено предлагаемое алгоритмом прогнозное расписание на основе имеющихся графиков планового и исполненного движения. Вертикальная красная черта обозначает текущий момент времени. Слева от черты показано исполненное движение. В данном случае исполненное движение генерировалось случайно с небольшими отклонениями от заданного планового расписания по принципу “первый – главный”. Справа от вертикальной черты также приведено плановое расписание, нитки которого обозначены сплошными линиями. Также представлены нитки прогнозируемого допустимого движения без конфликтов, которые могут быть реализованы в реальности. Прогнозные нитки являются продолжением исполненных,

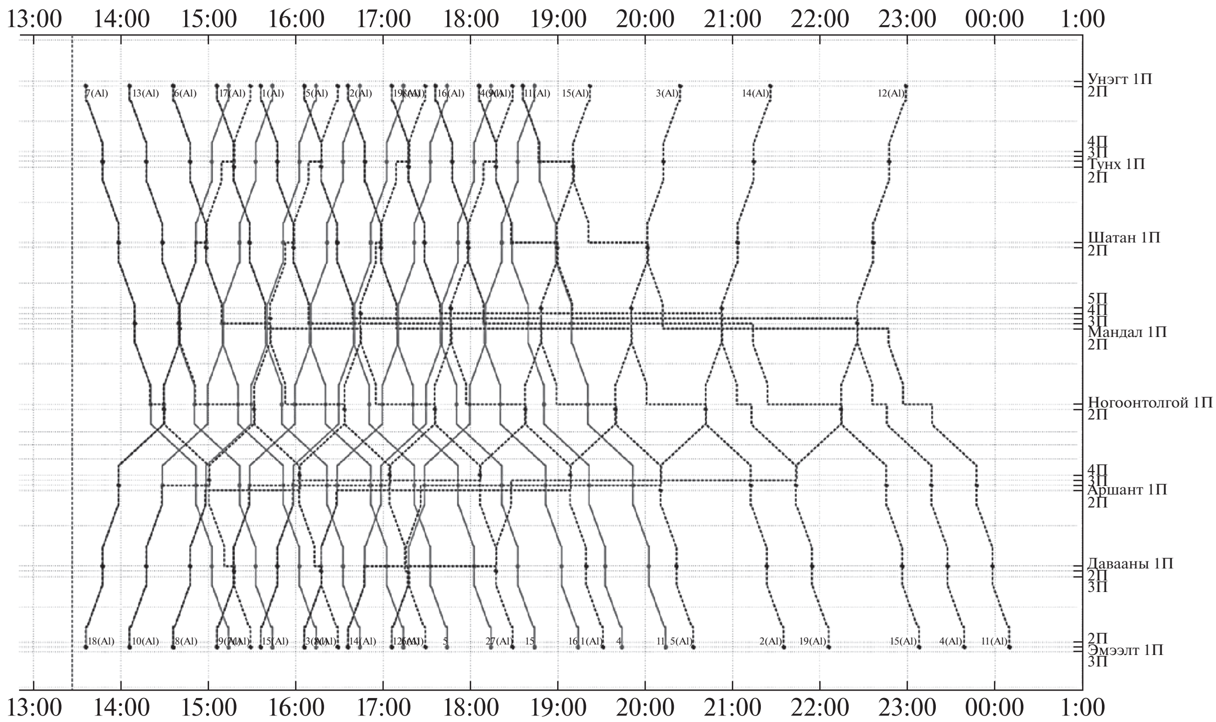


Рис. 4. Результат работы алгоритма при построении оптимального графика движения

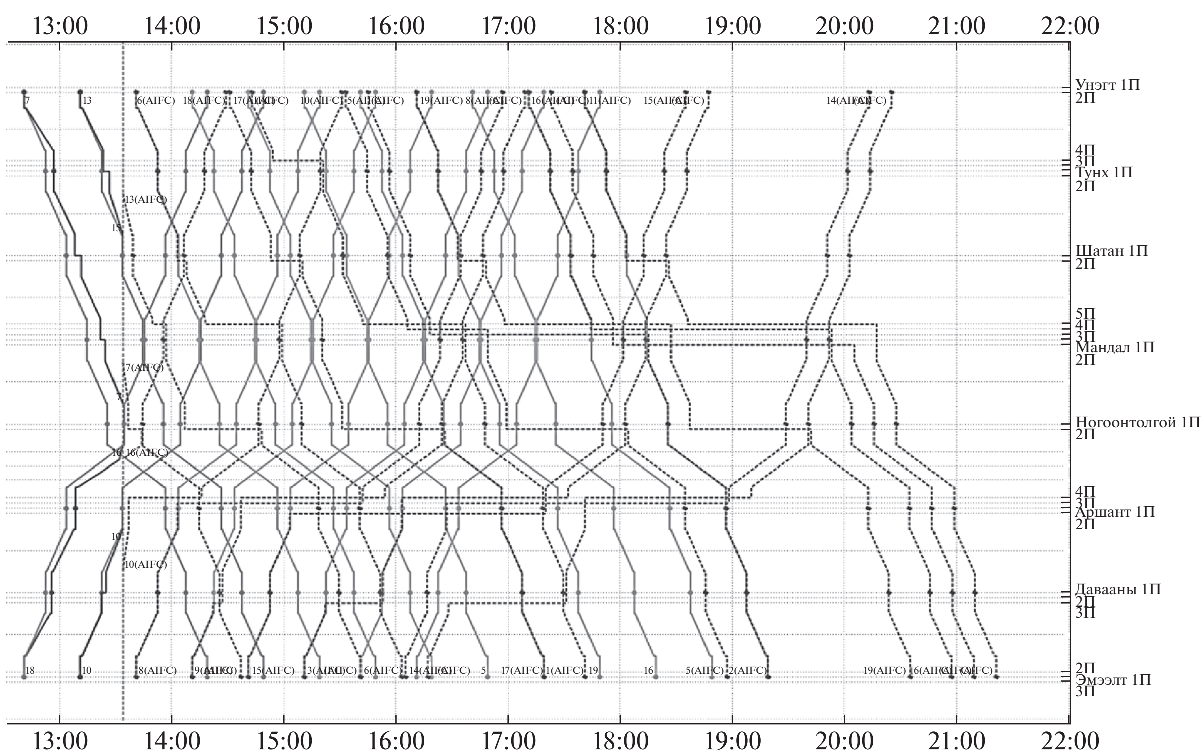


Рис. 5. Пример построенного прогнозного графика движения

при этом они строятся при минимизации отклонения от планового графика движения в соответствии с заданной целевой функцией (формула (1.1)).

Заключение. Предлагаемй подход включает в себя модель поведения диспетчера в случае возникновения конфликтных ситуаций и модель движения. Основная концепция реализуемого решения заключается в приближении задачи управления движением агентов к одной из задач теории игр, в которой участвует один игрок, взаимодействующий с группой агентов в динамической среде. Игрок на каждом шаге игры отдает команды каждому агенту таким образом, чтобы агенты следовали по соответствующим им маршрутам и не нарушали заданные технологические ограничения, связанные с движением по этому маршруту.

Дальнейшее развитие предложенного метода заключается в следующем: отладка существующего решения в соответствии с замечаниями, выявленными в процессах блочного и интеграционного тестирований; реализация возможности пакетного пропуска агентов (возможность пропускать несколько агентов на перегон в одном направлении); оптимизация основного алгоритма игровых стратегий с использованием алгоритмов на графах (BFS, DFS, Dijkstra) для поиска допустимых маршрутов движения и ускорения построения дерева стратегий, а также отсеивание лишних ветвей на основе анализа плотности потока агентов через участок; внедрение оптимизации для прогнозирования циклического движения (пригородное движение, Московское центральное кольцо, Московские центральные диаметры, метро), а именно замена текущей целевой функции, показывающей отклонение от нормативного графика движения, на целевую функцию, работающую с интервальным движением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горбачев Р.А., Захарова Е.М., Макаров И.С., Цурков В.И.* Интеллектуальная система для пошагового управления при оперативном перестроении расписания // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 5. С. 111–116.
2. *Ning L., Li Y., Zhou M., Song H., Dong H.* A Deep Reinforcement Learning Approach to High-speed Train Timetable Rescheduling under Disturbances // IEEE Intelligent Transportation Systems Conf. (ITSC). Auckland, New Zealand, 2019. P. 3469–3474.
3. *Jih-Wen Sheu, Wei-Song Lin*. Designing Automatic Train Regulation for MRT System by Adaptive Critic Method // IEEE Intern. Joint Conf. on Neural Networks (IEEE World Congress on Computational Intelligence). Hong Kong, 2008. P. 406–412.
4. *Bettinelli A., Santini A., Vigo D.* A Real-time Conflict Solution Algorithm for the Train Rescheduling Problem // Transportation Research. Pt B: Methodological. 2017. V. 106. P. 237–265.
5. *Zakharova E.M., Gorbachev R.A., Novikov A.N., Makarov I.S.* Research and Development of an Intelligent System For Rapid Train Schedule Adjustment Based on Step-by-step Neural Control // 2020 Intern. Conf. Engineering and Telecommunication (En&T). Dolgoprudny, 2020. P. 1–5.
6. *Browne C., Powley E., Whitehouse D., Lucas S., Cowling P.I., Rohlfshagen Ph., Tavener S., Perez D., Samothrakis S., Colton S.* A Survey of Monte Carlo Tree Search Methods // IEEE Transactions on Computational Intelligence and AI in Games. 2012. V. 4. № 1. P. 1–49.
7. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К.* Алгоритмы. Построение и анализ. М.: Вильямс, 2019. С. 1328.
8. *Левитин А.В.* Алгоритмы. Введение в разработку и анализ. М.: Вильямс, 2006. С. 576.
9. *Балжир М.* Перспективное развитие участков Монгольской железной дороги // Транспортное дело России. 2014. № 6. С. 29–33.
10. *Batnasan N.* Mongolia's Mining-Based Development and Trade Policy // ERINA Report, Japan. 2013. № 109. P. 43–49.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 1, с. 83–94

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

УДК 551.510.5373

РАСПОЗНАВАНИЕ ГЕОМАГНИТНЫХ БУРЬ НА ОСНОВЕ НЕЙРОСЕТЕВЫХ МОДЕЛЬНЫХ ОЦЕНОК Dst-ИНДЕКСОВ[1]

© 2022 г. А. В. Белов[d], А. Д. Гвишиани[a,b], В. Г. Гетманов[a,b], А. А. Ковыляева[a,c], А. А. Сололовьев[a,b], В. Е. Чинкин[a,b,*], В. Г. Янке[d], И. И. Яшин[a,c]

[a] *Геофизический центр РАН, Москва, Россия*

[b] *Институт физики Земли РАН им. О.Ю. Шмидта, Москва, Россия*

[c] *Национальный исследовательский ядерный ун-т МИФИ, Москва, Россия*

[d] *Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн РАН им. Н.В. Пушкова, Москва, Троицк, Россия*

**e-mail: v.chinkin@gcras.ru*

Поступила в редакцию 30.08.21 г.
После доработки 07.09.2021 г.
Принята к публикации 27.09.2021 г.

Предложен метод распознавания геомагнитных бурь, основанный на нейросетевых модельных оценках Dst-индексов (disturbance storm time); использованы наблюдения от мюонного годоскопа УРАГАН и нейтронных мониторов. Применена сверточная нейронная сеть. Реализовано правило принятия решений для распознавания. Сформированы оценки вероятностных характеристик распознавания геомагнитных бурь. Экспериментальное исследование метода подтвердило его эффективность. Показано, что совместные наблюдения системы годоскоп-мониторы по сравнению с раздельными наблюдениями повышают вероятность правильного распознавания геомагнитных бурь.

DOI: 10.31857/S0002338822010048

Введение. Геомагнитные возмущения возникают вследствие воздействия на магнитосферу Земли плазменных образований от солнечных корональных выбросов масс, которые обычно интерпретируются как экстремальные события гелиосферы. Геомагнитными бурями (geomagnetic storms- GS) принято считать геомагнитные возмущения, имеющие амплитуды больше заданной. GS могут стать причинами нарушений работы линий телефонной и радиосвязи, трубопроводов, линий электропередач, привести к сбоям работы электроники для авиационных и космических систем, оказывать пагубные действия на биосистемы. Распознавание (наличие-отсутствие) GS представляет собой актуальную научную проблему.

Как известно, геомагнитную активность принято характеризовать геомагнитными индексами. Одним из наиболее распространенных является Dst-индекс, введенный и описанный в [1, 2]. Этот индекс определяется на основе значений меридианальных составляющих вектора напряженности геомагнитного поля четырех экваториальных магнитных обсерваторий, разнесенных по долготе, который вычисляется почасовым усреднением. Dst-индексы измеряются в нанотеслах; для спокойных состояний магнитосферы их значения находятся в пределах +20...–40 нТл; для GS Dst-индексы принимают значения в диапазоне –50...–150 нТл и в исключительных случаях выходят за указанный диапазон.

Материалы статьи основываются на информации из следующих источников:

1) экспериментального матричного временного ряда из базы данных мюонного годоскопа (muon hodoscope – MH) УРАГАН [3, 4], сайта МИФИ [5]; MH-наблюдения пропорциональны интенсивностям мюонных потоков, зависящих от экстремальных событий, которые происходят в гелиосфере;

2) экспериментального скалярного временного ряда функции изотропной составляющей, вычисленной по методу глобальной съемки [6, 7] из мировой базы данных нейтронных монито-

[1] Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 17-17-01215-П).

ров (neutron monitor – NM), сайта ИЗМИРАН [8]; NM-наблюдения пропорциональны интенсивностям нейтронных потоков от экстремальных событий в гелиосфере;

3) экспериментального скалярного временного ряда Dst-индексов сайта WDCG (world data center of geomagnetism, Kyoto) [9, 10].

Решение задачи распознавания GS зависит от вида используемых информационных источников и математических методов. Так, в [11, 12] для распознавания GS на основе матричных МН-наблюдений предлагаются специальные двумерные функции вариаций мюонных потоков и индикаторные матрицы.

Для задач распознавания-предсказания экстремальных событий в гелиосфере и магнитосфере в рамках солнечно-земной физики достаточно широко применяются нейросетевые технологии [13, 14]. Целый ряд публикаций, связанных с нейронными сетями (neural network–NN), отличаются вариантами используемых информационных источников и нейросетевых структур. Указанные обстоятельства вносят значительные разнообразия в постановки задач.

Работы [15, 16], посвященные предсказаниям GS, написаны на основе данных по солнечному ветру и использовании нейросетевых многослойных персептронов. В [17] представляется метод, сочетающий рекуррентную NN с кратковременной памятью и моделью гауссовского процесса для обеспечения вероятностных прогнозов Dst-индексов, и реализуется необходимое обучение NN. В [18] с помощью многослойного персептрона прямой связи исследованы предсказания вариаций Dst-индексов по предыдущим значениям на несколько часов вперед.

Публикации [19–22] содержат описания методов восстановления, коррекции, прогнозирования и классификации характеристик магнитосферной активности, основанных на технологии нейронных сетей с учетом изменяющихся условий космической погоды. Такой подход определяет связи между входными и выходными параметрами на базе экспериментальных данных без построения физических моделей, что может быть использовано для сложных геофизических систем. Особенность описанных методов состоит в том, что NN позволяют решать поставленные задачи автоматизированным способом по спутниковым данным, магнитным измерениям на земной поверхности и результатам зондирования ионосферы.

В [23–25] исследуются возможности прогнозирования временных рядов геомагнитных Dst-индексов. Прогнозы осуществляются по параметрам солнечного ветра и межпланетного магнитного поля, измеренных в эксперименте на американском космическом аппарате, при помощи методов машинного обучения NN на основе классических персептронов и рекуррентных сетей.

Приведенный обзор публикаций позволяет сделать вывод, что в них:

не рассматриваются возможности, которые можно было бы достичь при совместном использовании нескольких информационных источников – МН, NM-наблюдений и Dst-индексов для распознаваний GS;

реализуются решения, в которых осуществляются оценивания вероятности правильного распознавания, и при этом опускается необходимый учет методически важной вероятности ложного распознавания.

В статье предложен метод распознавания GS с помощью разработанной системы модельных оценок Dst-индексов и реализации правила принятия решений. Применен подход к реализации метода, основанный на совместных наблюдениях от МН УРАГАН, мировой сети нейтронных мониторов и Dst-индексов от WDCG при помощи обучения сверточной NN. Сформированы оценки вероятностных характеристик распознавания геомагнитных бурь. Экспериментальное исследование метода подтвердило его эффективность. Показано, что совместные наблюдения системы годоскоп–мониторы по сравнению с раздельными наблюдениями повышают вероятность правильного распознавания GS.

Результаты статьи могут быть использованы для целого ряда научных и технических приложений, например:

при возможном внезапном отсутствии (пропуске) Dst-индексов от WDCG распознавание GS может быть произведено на базе заранее построенных моделей Dst-индексов, работающих только на основе МН- и NM-наблюдений;

при необходимости краткосрочного предсказания GS, которое потенциально возможно на основе экстраполяции для МН- и NM-наблюдений.

1. Постановка задачи распознавания GS. Все переменные, которые использовались в рамках данной статьи, были дискретизованы с часовым шагом в единой шкале времени UTC (coordinated universal time). Для рассматриваемой задачи Dst-индексы $Y_D(k)$ реализовывались на интервале

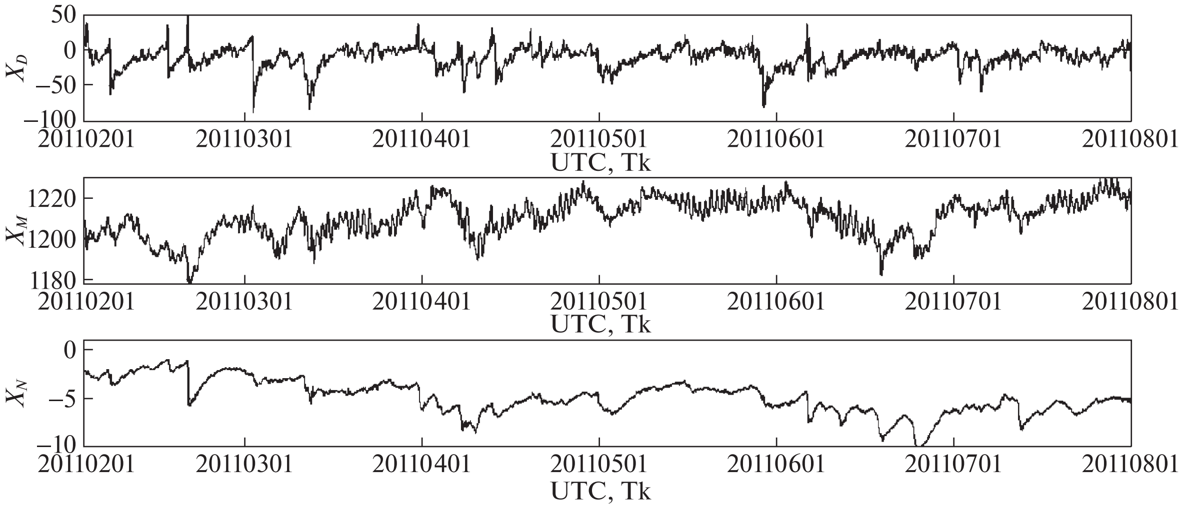


Рис. 1. Графики МН- и NM-наблюдений $X_M(k)$, $X_N(k)$ и Dst-индексов $Y_D(k)$ с участками GS

времени 01.2002–12.2016, МН-наблюдения $X_M(k)$ – на интервале 01.2008–12.2018, NM-наблюдения $X_N(k)$ – на интервале 01.2002–12.2018. Временной индекс k определял моменты дискретизации Tk, $T = 1$ ч. Для Y_D начальный и конечный временной индексы принимали значения $k_0 = 1$, $k_{f0} = 131736$; для X_M начальный и конечный индексы равнялись $k_{01} = 52285$, $k_f = 149016$; для X_N – $k_{02} = 1$, $k_f = 149016$. Из перечисленного следовало, что на интервале времени 01.01.2008–31.12.2016 реализовывались переменные Y_D, X_M, X_N, на интервале 01.01.2017–31.12.2018 – переменные X_M, X_N.

На рис. 1 помещены примеры графиков исходных переменных $Y_D(k)$, $X_M(k)$ и $X_N(k)$ для 7-месячного временного интервала 01.01.2011–31.07.2011. На оси абсцисс отмечены короткими жирными отрезками участки с реально происходившими GS. На графике $Y_D(k)$ видно, что GS-события обусловливали падения переменной Y_D.

Рассмотрение $Y_D(k)$ на рис. 1 позволило сделать вывод, что средняя продолжительность GS составила величину порядка 2–2.5 сут. Анализ исходных переменных дал возможность заключить, что для них средний период аддитивных неинформативных низкочастотных трендов, подлежащих фильтрации, составил величину примерно 60–75 сут.

На рис. 2 помещены графики переменных $Y_D(k)$, $X_M(k)$ и $X_N(k)$ для месячных фрагментов 01.02.2011–31.05.2011 с пятью событиями GS, которые отмечены на осях абсцисс жирными линиями в соответствии с рис. 1. Укрупненный масштаб дал возможность детально проанализировать исходные переменные.

Из графиков видно, что переменные $Y_D(k)$ и $X_N(k)$ можно представить в виде сумм информативных низкочастотных трендов и высокочастотных шумов; переменную $X_M(k)$ – в виде суммы информативного низкочастотного тренда, помеховой составляющей от суточных колебаний и высокочастотных шумов. Анализ изменений информативных низкочастотных трендов переменных $X_M(k)$, $X_N(k)$ на указанных рисунках для месячных интервалов позволил сделать вывод об их почти одинаковом поведении во времени.

В практике анализа геомагнитных наблюдений общепринято делать заключение о распознавании GS по критериям, которые формируются на базе геомагнитных индексов. Достаточно распространенным и в определенной степени надежным при распознавании GS является критерий, основанный на сравнении Dst-индексов от WDCG с задаваемым порогом. Однако в ряде случаев непосредственное использование Dst-индексов для распознавания может оказаться проблематичным в связи с возможным их отсутствием в текущий и предшествующие моменты времени.

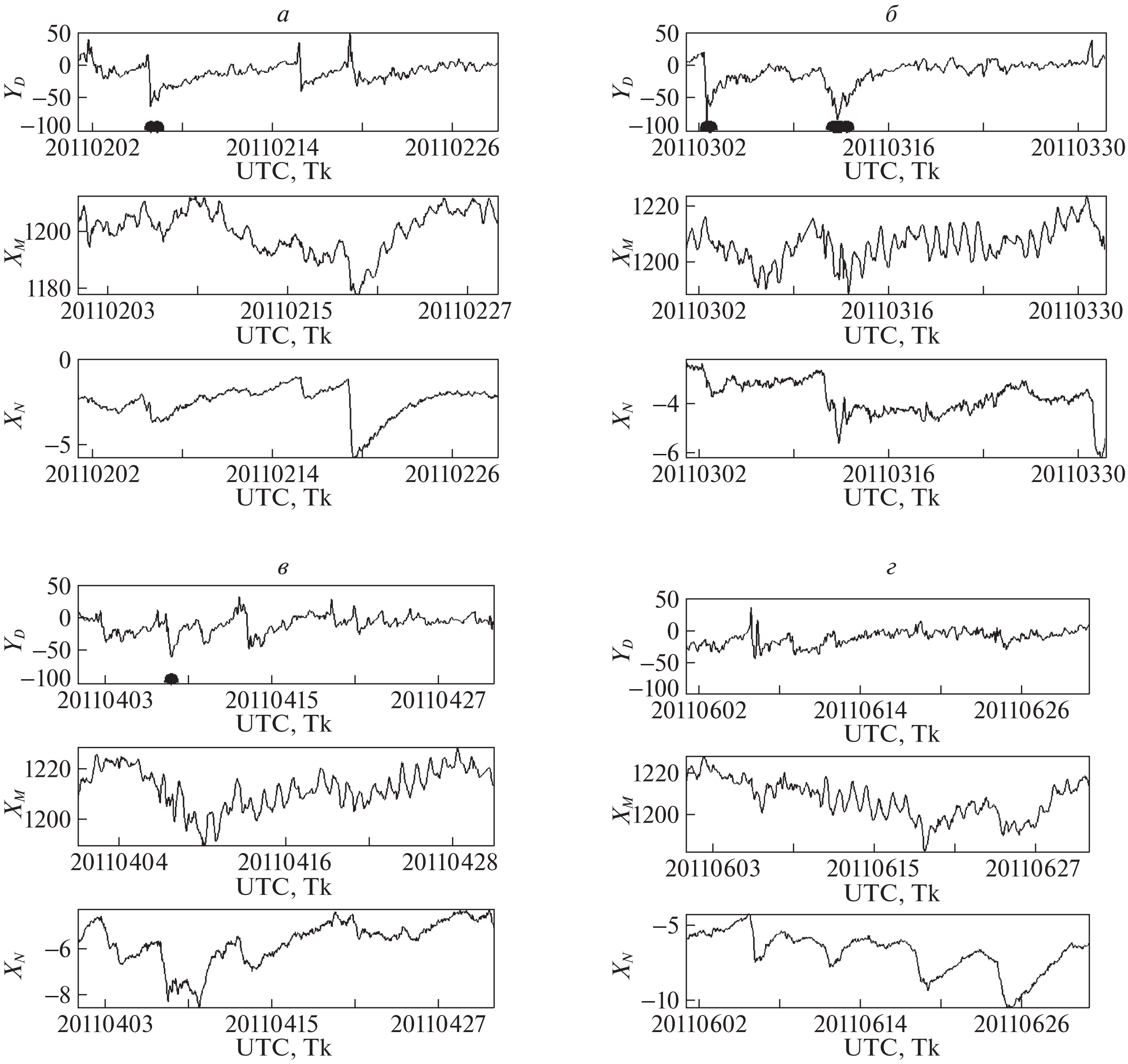


Рис. 2. Графики месячных фрагментов Dst-индексов Y_D и МН-, NM-наблюдений X_M, X_N: *а* – 02.2011, *б* – 02.2011, *в* – 03.2011, *г* – 04.2011

Будем полагать, что:

1) заданы текущие моменты времени, которым соответствуют временные индексы k, удовлетворяющие неравенствам $k_{f0}+1 \le k \le k_f$;

2) на интервале с индексами $k_{f0}+1,\ldots,k-1,k$ реализованы временные ряды МН- и NM-наблюдений;

3) на интервале $k_{01} \le k \le k_{f0}$ реализованы временные ряды МН-наблюдений и Dst-индексов, на интервале $k_{02} \le k \le k_{f0}$ – временные ряды NM-наблюдений и Dst-индексов.

Очевидно, что МН- и NM-наблюдения, которые формируются на основе различных физических явлений и с помощью разных измерительных устройств, содержат информацию о GS.

Требуется для заданных текущих моментов времени на основе реализованных временных рядов МН-, NM-наблюдений разработать процедуру принятия решений по распознаванию GS.

2. Общая схема решения задачи распознавания GS. Решение задачи распознавания GS здесь базируется на предположении, что между МН-, NM-наблюдениями, с одной стороны, и Dst-индексами – с другой существует функциональная связь, искаженная помехами. Тогда, очевидно,

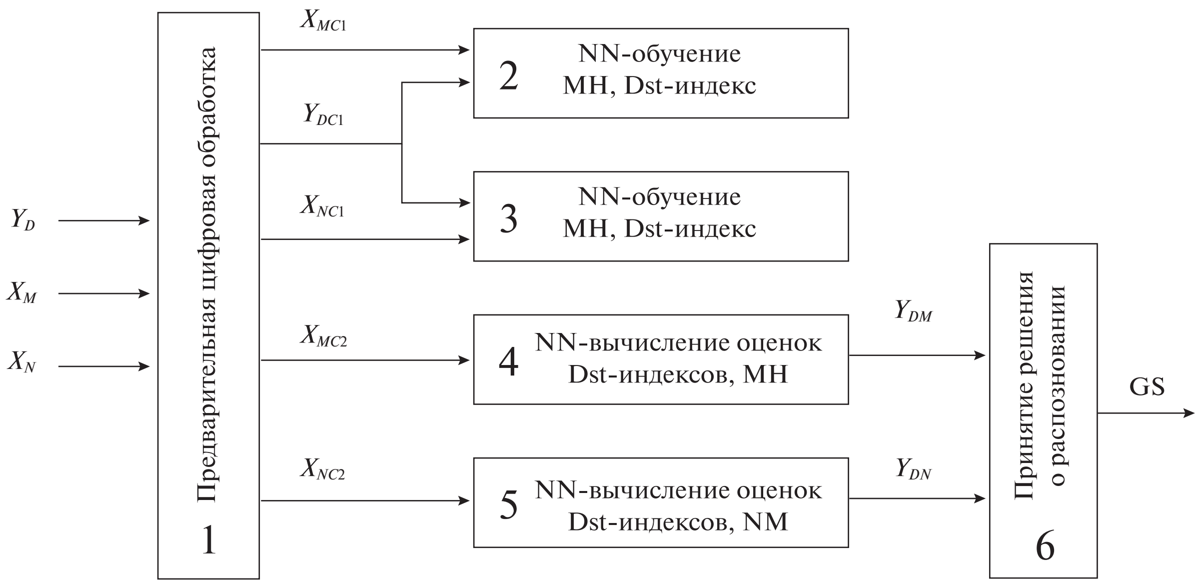


Рис. 3. Схема вычислительных операций решения задачи распознавания GS

можно построить модель Dst-индексов в зависимости от MH-, NM-наблюдений на основе соответствующей нейронной сети NN.

Общая схема решения задачи может быть подразделена на четыре части и состоять из:

процедур предварительной цифровой обработки исходных Dst-индексов и MH-, NM-наблюдений для выделения в них существенных информативных составляющих;

процедур обучения NN на основе MH-, NM-наблюдений и Dst-индексов;

процедур вычисления модельных оценок Dst-индексов на основе NN и MH-, NM-наблюдений;

процедуры принятия решений для распознавания GS, которая базируется на модельных оценках Dst-индексов и сравнении их с задаваемым порогом.

Процедуры предварительной цифровой обработки производятся для исходных Dst-индексов $Y_D = Y_D(k)$ и MH-, NM-наблюдений $X_M = X_M(k)$, $X_N = X_N(k)$. Осуществляется их фильтрация с целью устранения высокочастотных шумов и суточных колебаний и масштабирование для обеспечения соизмеримости переменных, которая необходима для эффективной работы NN. Результаты процедур предварительной обработки для этапа обучения обозначаются как X_{MC1}, X_{NC1} и Y_{DC1}, для этапа вычисления модельных оценок Dst-индексов – как X_{MC2}, X_{NC2}.

На этапе обучения на вход MH, NM-NN подаются переменныеX_{MC1}, X_{NC1}; Dst-индексы Y_{DC1} используются для формирования целевых функций в функционале обучения; в результате обучения формируются NN-модели. На этапе вычисления модельных оценок используются переменные X_{MC2}, X_{NC2} и сформированные на этапе обучения NN-модели.

Процедура принятия решения для распознавания GS основывается на вычисленных модельных оценках Dst-индексов Y_{DM}, Y_{DN} и сравнении их с задаваемым порогом Y_{D0}. Решение о GS реализуется с помощью логических вычислений.

На рис. 3 помещена схема вычислительных операций с обозначенными выше переменными, которая поясняет решение рассматриваемой задачи.

Вычислительные операции подразделены на: блок № 1 предварительной цифровой обработки, блоки № 2, 3 обучения NN на основе MH-, NM-наблюдений и Dst-индексов, блоки № 4, 5 вычисления модельных оценок Dst-индексов на базе MH-, NM-наблюдений и блок № 6 принятия решения о распознавании GS.

3. Структура сверточной NN. Результаты настоящей статьи получены с помощью сверточной NN [26, 27]. Применение этой сети обусловлено тем, что исходные данные и наблюдения, представляли собой матричные и скалярные временные ряды; сверточные NN ориентированы на обработку подобной информации. Однако необходимо отметить, что в статье применена

$$\xrightarrow{\Delta k} \boxed{\text{CL1}} \to (f) \to \boxed{\text{CL2}} \to (f) \to \boxed{\text{CL3}} \to (f) \to \boxed{\text{CL4}} \to (f) \to \boxed{\text{FCL}} \xrightarrow{\Delta k_n}$$

Рис. 4. Структура сверточной NN

сверточная NN со скалярными временными рядами и соответственно реализован упрощенный вариант решения на основе преобразования матричного временного ряда MH-наблюдений в скалярный временной ряд путем вычисления средних значений матриц MH-наблюдений. Применение сверточной NN с матричными MH-наблюдениями станет предметом дальнейшего исследования.

Структура используемой сверточной NN [28] представлена на рис. 4. Были использованы четыре сверточных слоя (convolution layer – CL) со входным вектором размерности Δk, со сверточными фильтрами размерности Δk_c и функциями активации $f(x) = 1, x > 0,\ f(x) = 0, x \le 0$. Выходы от CL подавались на вход суммирующего полносвязного слоя (fully connected layer – FCL) с выходом размерности $\Delta k_n = 1$.

Были сформированы 9-летний интервал 01.01.2008–31.12.2016 для MH-обучения и 15-летний интервал 01.01.2002–31.12.2016 для NM-обучения; 2-летний интервал 01.01.2017–31.12.2018 отводился на вычисления модельных оценок Dst-индексов Y_{DM}, Y_{DN}.

Работа NN базировалась на системе "скользящих" с единичным шагом временных окон шириной Δk, согласованной со средней длительностью GS. Функционал обучения представлял собой среднюю по интервалу обучения сумму квадратов разностей NN-моделей и Dst-индексов для крайних правых значений индексов "скользящих" окон. Реализовывалась минимизация введенного функционала. Полученные в результате минимизации NN-модели использовались для вычисления модельных оценок Ds-индексов.

Экспертным путем на базе вычислительных экспериментов были установлены ширина "скользящего" окна $\Delta k = 48$, размерность сверточного фильтра $\Delta k_c = 8$ и параметры фильтрации с помощью описаний переменных в разд. 1.

4. Правило принятия решения о распознавании GS и вычисление вероятностей правильных и ложных распознаваний GS. Метод распознавания GS сведем к процедуре классификации [28, 29], основанной на сравнении модельных оценок Dst-индексов $Y_{DM}(k)$, $Y_{DN}(k)$ с порогом Y_{D0}. Правило принятия решений распознавания GS на базе совместного использования MH-, NM-модельных оценок Dst-индексов для $k_{f0} + \Delta k \le k \le k_f$ состоит в том, что если будет выполняться хотя бы одно из двух неравенств

$$(Y_{DM}(k) \le Y_{D0}) \quad \text{и/или} \quad (Y_{DN}(k) \le Y_{D0}), \tag{4.1}$$

то будет приниматься решение о распознавании GS – для момента времени с индексом k имеет место GS; в остальных случаях будет приниматься противоположное решение.

Распознавание GS на основе процедуры классификации сопровождается погрешностями – пропусками правильных и образованиями ложных распознаваний GS. Погрешности определяются вероятностными характеристиками $Y_{DM}(k)$, $Y_{DN}(k)$. Воспользуемся [28] для приближенного вычисления указанных погрешностей.

Сформируем оценки погрешностей, в которых используются Dst-индексы $Y_D(k)$, модельные оценки Dst-индексов $Y_{DM}(k)$, $Y_{DN}(k)$ и правило принятия решений (4.1) для $k_{f0} + \Delta k \le k \le k_f$.

Фиксируем порог распознавания Y_{D0} и рассмотрим момент времени с индексом k, в котором имеет место GS – выполняется неравенство $Y_D(k) \le Y_{D0}$. Количество N_{GS} состояний с GS, которые определяются выполнениями данного неравенства на интервале $k_{f0} + \Delta k \le k \le k_f$, вычислим с помощью следующей суммы:

$$N_{\text{GS}} = \sum_{k=k_{f0}+\Delta k}^{k_f} \operatorname{sign}(Y_{D0} - Y_D(k)), \tag{4.2}$$

где $\operatorname{sign} x = 1, x \geq 0$, $\operatorname{sign} x = 0, x < 0$. Определим $N_{M,\text{GS}}$ – количество правильных МН-распознаваний GS с помощью $Y_{DM}(k)$; найдем β_M° – оценку вероятности правильного распознавания GS

$$N_{M,\text{GS}} = \sum_{k=k_{f0}+\Delta k}^{k_f} \operatorname{sign}(Y_{D0} - Y_D(k)) \operatorname{sign}(Y_{D0} - Y_{DM}(k)), \quad \beta_N^\circ = \frac{N_{N,\text{GS}}}{N_{\text{GS}}}. \tag{4.3}$$

Подсчитаем количество $N_{N,GS}$ правильных NM-распознаваний GS с помощью $Y_{DN}(k)$, определим оценку β_N° вероятности правильного распознавания

$$N_{N,\text{GS}} = \sum_{k=k_{f0}+\Delta k}^{k_f} \operatorname{sign}(Y_{D0} - Y_D(k)) \operatorname{sign}(Y_{D0} - Y_{DN}(k)), \quad \beta_N^\circ = \frac{N_{N,\text{GS}}}{N_{\text{GS}}}. \tag{4.4}$$

Оценку вероятности β_{MN}° правильного распознавания GS при совместном использовании МН- и NM-наблюдений найдем следующим образом:

$$N_{MN,\text{GS}} = \sum_{k=k_{f0}+\Delta k}^{k_f} \operatorname{sign}(Y_{D0} - Y_D(k)) \operatorname{sign}[\operatorname{sign}(Y_{D0} - Y_{DN}(k)) + \operatorname{sign}(Y_{D0} - Y_{DM}(k))],$$
$$\beta_{MN}^\circ = \frac{N_{MN,\text{GS}}}{N_{\text{GS}}}. \tag{4.5}$$

Количества $N_{0\text{GS}}$, $N_{M,0\text{GS}}$, $N_{N,0\text{GS}}$, $N_{MN,0\text{GS}}$ и соответствующие вероятности ложных распознаваний GS α_M°, α_N°, α_{MN}° вычислим по формулам, аналогичным (4.2)–(4.5).

5. Экспериментальное исследование метода распознавания GS. 5.1. Вычисление оценок вероятностей правильного и ложного распознавания GS. На временном интервале вычисления модельных оценок с использованием базы данных [9] был сформирован временной ряд $Y_D(k)$ Dst-индексов. Вычислялись модельные оценки $Y_{DM}(k)$, $Y_{DN}(k)$. Реализовывались сравнения переменных $Y_D(k)$, $Y_{DM}(k)$, $Y_{DN}(k)$ с порогом Y_{D0}. Определялись оценки вероятностей распознавания GS по формулам (4.2)–(4.5) в зависимости от величины порога, который подчинялся неравенствам $\bar{Y}_{D01} \leq Y_{D0} \leq \bar{Y}_{D02}$, $\bar{Y}_{D01} = -70$ нТл, $\bar{Y}_{D02} = -20$ нТл.

На рис. 5, *а*, *б* представлены графики результатов расчетов оценок вероятностей ложного и правильного распознавания GS $\alpha_{MN}^\circ(Y_{D0})$ и $\beta_{MN}^\circ(Y_{D0})$ в зависимости от порога Y_{D0}; дополнительно помещены графики расчетов $\alpha_M^\circ(Y_{D0})$, $\beta_M^\circ(Y_{D0})$ и $\alpha_N^\circ(Y_{D0})$, $\beta_N^\circ(Y_{D0})$. Из рис. 5, *а*, *б* может быть заключено, что значения оценок вероятностей правильного и ложного распознавания возрастали с увеличением порога, что вполне естественно. На основе графиков видно, что предельное выполнение неравенства-ограничения $\alpha_{MN}^\circ \leq 0.05$ достигалось при $Y_{D0} = -56.2$ нТл. При этом вероятность правильного распознавания принимала значение $\beta_{MN}^\circ = 0.717$; для $\alpha_{MN}^\circ \leq 0.1$ имело место $Y_{D0} = -45.1$ нТл и $\beta_{MN}^\circ = 0.823$. Из рис. 5, *б* видно, что использование совместных наблюдений системы годоскоп-мониторы по сравнению с раздельными наблюдениями обеспечило повышение вероятности правильного распознавания GS на 10–12%.

5.2. Вычисление модельных оценок Dst-индексов и результатов распознавания GS. Было произведено экспериментальное исследование задачи распознавания GS.

Выбирался 4-месячный интервал 01.08.2018–30.11.2018, расположенный вне границ интервала обучения. На рис. 6, *а* показаны график Dst-индексов $Y_D(k)$ и полученные на основе NN графики вычисленных модельных оценок Dst-индексов $Y_{DM}(k)$, $Y_{DN}(k)$ для $\Delta k = 48$. При заданном пороге $Y_{D0} = -50$ нТл реализовывались пять GS-событий, которые отмечены знаком “крест в

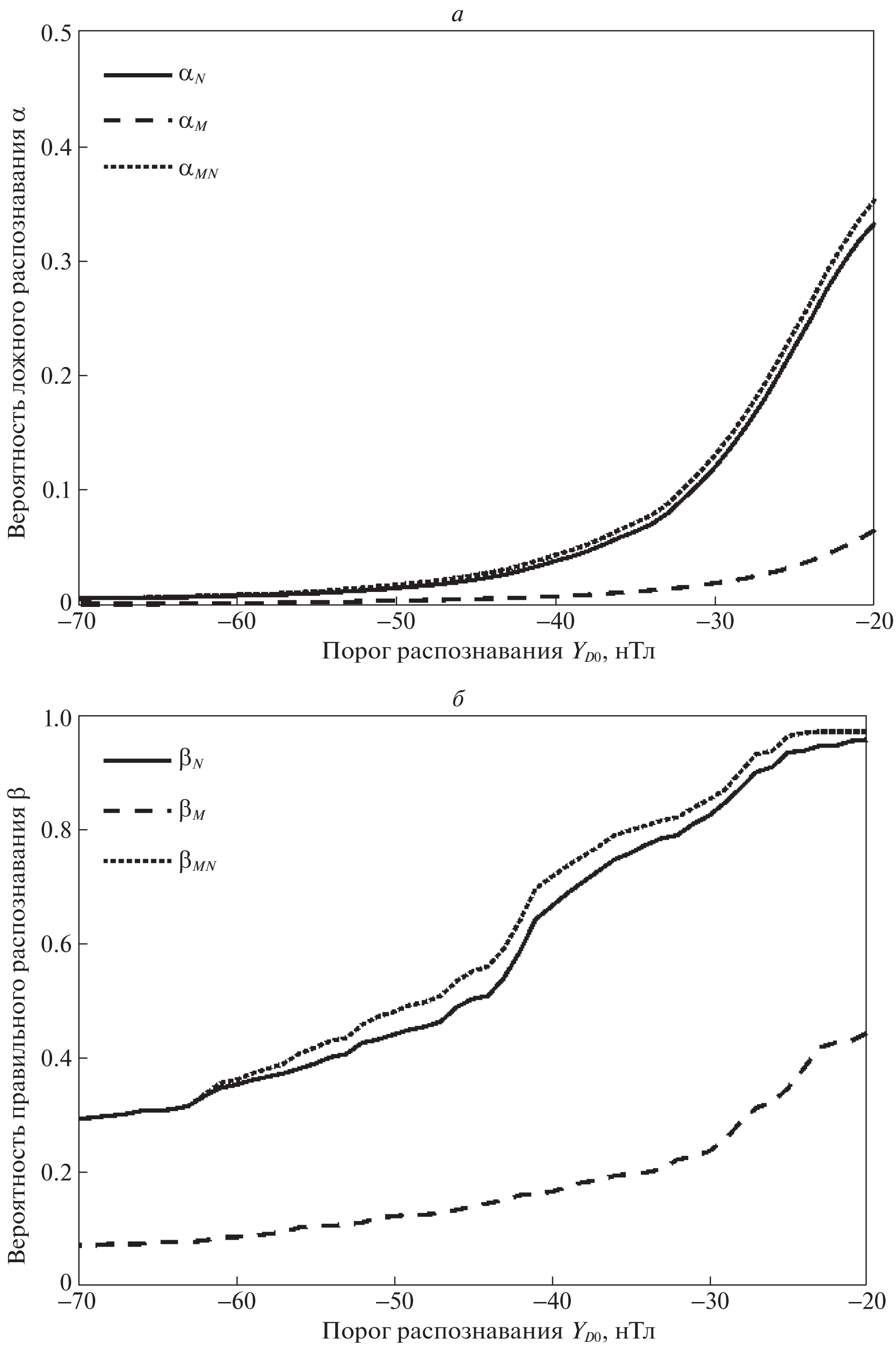


Рис. 5. Графики результатов расчетов вероятностей ложных и правильных распознаваний в зависимости от Y_{D0}: *а* – $\overset{\circ}{\alpha}_{MN}(Y_{D0})$, *б* – $\overset{\circ}{\beta}_{MN}(Y_{D0})$

кружочке". Рассмотрение графика $Y_{DN}(k)$с учетом порога $Y_{D01} = -(40\ldots42)$ нТл позволило установить, что реализовывалось четыре факта правильных распознаваний GS, отмеченных знаком "крест в кружочке", и ноль фактов ложных распознаваний GS. Рассмотрение графика $Y_{DM}(Tk)$ с учетом порога $Y_{D02} = -(40\ldots42)$ нТл показало, что реализовывалось два факта правильных распознаваний GS и одно ложное распознавание, отмеченное знаком "минус в кружочке".

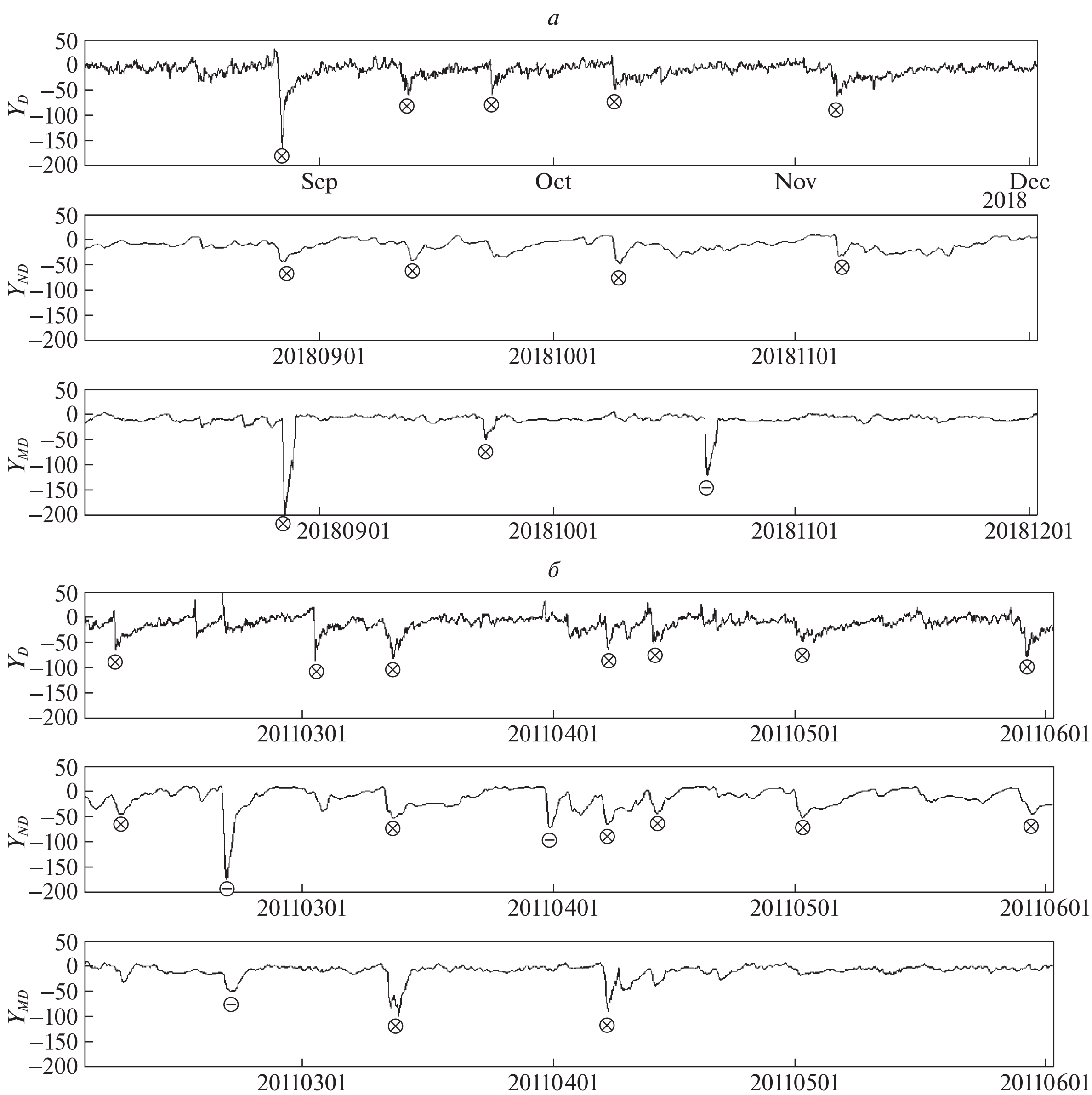


Рис. 6. Графики Dst-индексов $Y_D(k)$ и модельных оценок Dst-индексов $Y_{DN}(k)$, $Y_{DM}(k)$: *а* – интервал 08.2018–11.2018, *б* – интервал 02.2011–05.2011

Выбирался интервал 01.02.2011–31.05.2011, который располагался в границах интервала обучения. На рис. 6, *б* показаны график Dst-индексов $Y_D(k)$ и полученные на основе NN графики модельных оценок Dst-индексов $Y_{DM}(k)$, $Y_{DN}(k)$ для $\Delta k = 48$.

При заданном пороге $Y_{D0} = -50$ нТл для $Y_D(k)$ реализовывались семь GS-событий. Рассмотрение графика $Y_{DN}(k)$ с учетом порога Y_{D02} = –(40...42) нТл позволило установить, что реализовывалось шесть правильных и два ложных распознаваний GS. График $Y_{DN}(Tk)$ с учетом порога Y_{D02} = –(40...42) нТл дал возможность определить, что реализовывалось два правильных распознаваний GS и одно ложное распознавание GS. Видно, что переменные $Y_{DM}(k)$, $Y_{DN}(k)$ дополняют друг друга при решении задачи распознавания GS.

Были произведены вычисления для NN с шириной “скользящих” окон $\Delta k = 36, 60$; при данных значениях окон реализовывались снижения вероятности правильного распознавания и увеличения вероятности ложного распознавания.

Анализ результатов рис. 5, *а*, *б* и 6, *а*, *б* позволил сделать вывод о достоверности полученных модельных оценок Dst-индексов.

5.3. В ы ч и с л е н и е с р е д н е к в а д р а т и ч н ы х о т к л о н е н и й д л я р а з н о с т е й Y_{DM}, Y_{DN} и Y_D. Были произведены вычисления среднеквадратичных отклонений (с.к.о.) для разностей $\Delta Y_{DM}(k)$, $\Delta Y_{DN}(k)$ модельных оценок Dst-индексов $Y_{DM}(k)$, $Y_{DN}(k)$ и исходных Dst-индексов $Y_D(k)$:

$$\Delta Y_{DM}(k) = Y_{DM}(k) - Y_D(k), \quad \Delta Y_{DN}(k) = Y_{DN}(k) - Y_D(k),$$

которые принимались в качестве показателей эффективности предложенного метода распознавания GS. Рассматривались MH- и NM-переменные на обучающих интервалах и интервалах вычисления модельных оценок для спокойных и возмущенных состояний GS.

Для MH-переменных на обучающем интервале определялись множества A_1, A_2:

$$A_1 = \left\{k : Y_{DM}(k) \le Y_{D0}, k_{01} \le k \le k_{f0}\right\}, \quad A_2 = \left\{k : Y_{DM}(k) > Y_{D0}, k_{01} \le k \le k_{f0}\right\},$$

и N_1, N_2 – количества индексов k для спокойных и возмущенных состояний:

$$N_1 = \sum_{k \in A_1} \operatorname{sign}(Y_{D0} - Y_{DM}(k)), \quad N_2 = \sum_{k \in A_2} \operatorname{sign}(Y_{DM}(k) - Y_{D0}).$$

С учетом A_1, A_2, N_1, N_2 на обучающем интервале вычислялись с.к.о для спокойных и возмущенных состояний $\sigma_{DM,S1}$, $\sigma_{DM,S2}$. Подобным образом на интервале вычисления модельных оценок Dst-индексов были определены оценки с.к.о для спокойных и возмущенных состояний $\sigma_{DM,T1}$, $\sigma_{DM,T2}$. Для MN-переменных для вычислений с.к.о. были использованы аналогичные формулы.

В результате расчетов получены следующие значения с.к.о.: 1) для MH на интервале обучения $\sigma_{DM,S1} = 12.47$, $\sigma_{DM,S2} = 51.45$, на интервале вычисления модельных оценок $\sigma_{DM,T1} = 14.07$, $\sigma_{DM,T2} = 68.96$; 2) для NM на интервале обучения $\sigma_{DN,S1} = 17.75$, $\sigma_{DN,S2} = 63.05$, на интервале вычисления модельных оценок $\sigma_{DN,T1} = 15.55$, $\sigma_{DN,T2} = 44.57$. Результаты расчетов с.к.о. позволили сделать выводы: 1) MH-, NM-информационные источники по своим характеристикам с.к.о. практически равноправны; 2) оценки с.к.о. для Y_{DM}, Y_{DN} могут служить индикаторами спокойных и возмущенных состояний при распознавании GS.

Заключение. Предложен метод распознавания GS на основе NN-модельных оценок Dst-индексов, полученных с использованием наблюдений MH и NM при помощи сверточной NN. Разработана процедура принятия решения по распознаванию GS. Исследование метода распознавания GS на экспериментальных Dst-индексах, MH- и NM-наблюдениях за 2002–2018 и 2008–2018 продемонстрировало его работоспособность и эффективность.

Результаты проведенных расчетов позволили сделать вывод о достоверности полученных модельных оценок Dst-индексов. Совместное использование MH-, NM-наблюдений показало, что оценки вероятностей правильного и ложного распознавания составили значения $\beta^{\circ}_{MN} = 0.823$ и $\alpha^{\circ}_{MN} = 0.1$. Применение совместных наблюдений системы годоскоп–мониторы по сравнению с использованием раздельных наблюдений, обеспечило повышение вероятности правильного распознавания геомагнитных бурь на 10–12%.

Предложенный метод распознавания GS имеет большие резервы для усовершенствования, в частности, дальнейшей оптимизации его параметров с целью улучшения вероятностных характеристик и его приспособления для решения задачи краткосрочного прогнозирования GS на основе экстраполяции MH- и NM-наблюдений, а также благоприятную перспективу использования в прикладных задачах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Suigiura M.* Hourly Values of Equatorial Dst for the IGY // Ann. Int. Geophys. Year. 1964. V. 35. P. 9–45.
2. *Suigiura M., Kamei T.* Equtorial Dst-index 1957–1986 // IAGA Bulletin. 1991. № 40. P. 14–21.
3. *Yashin I.I., Astapov I.I., Barbashina N.S. et al.* Real-time Data of Muon Hodoscope URAGAN // Advances in Space Research. 2015. V. 56. Iss. 12. P. 2693–2705.
4. *Barbashina N.S., Kokoulin R.P., Kompaniets K.G., Mannocchi G., Petrukhin A.A., Timashkov D.A., Saavedra O., Trinchero G., Chernov D.V., Shutenko V.V., Yashin I.I.* The URAGAN Wide-Aperture Large-area Muon Hodoscope // Instruments and Experimental Techniques. 2008. V. 51. P. 180–186.
5. Data Base of Muon Hodoscope MEPHI. http://www.nevod.mephi.ru/
6. *Dorman L.I.* Cosmic Rays in the Earth's Atmosphere and Underground. Springer, 2010. 862 p.
7. *Белов А.В., Ерошенко Е.А., Янке В.Г. и др.* Метод глобальной съемки для мировой сети нейтронных мониторов // Геомагнетизм и аэрономия. 2018. Т. 58. № 3. С. 374–389 https://doi.org/10.7868/S0016794018030082
8. Database of Moscow Neuron Monitor. http://cr0.izmiran.rssi.ru/.
9. World Data Center of Geomagnetism. Kyoto. http://wdc.kugi.kyoto-u.ac.jp.
10. *Заболоцкая Н.А.* Индексы геомагнитной активности: справочное пособие. М.: Изд-во ЛКИ, 2007. 88 с.
11. *Гетманов В.Г., Чинкин В.Е., Гвишиани А.Д. и др.* Метод идентификации гелиосферных аномалий на основе нормированных матриц наблюдений мюонного годоскопа // Ядерная физика. 2019. Т. 82. Вып. 6. С. 929–933.
12. *Гетманов В.Г., Добровольский М.Н., Гвишиани А.Д. и др.* Метод поиска локальной анизотропии потоков мюонов в матричных данных годоскопа УРАГАН // Изв. РАН. Сер. физ. 2019. Т. 83. № 5. С. 706–708.
13. *Бархатов Н.А.* Искусственые нейронные сети в задачах солнечно-земной физики. Нижний Новгород: Поволжье, 2010. 407 с.
14. *Бархатов Н.А., Ревунов С.Е.* Гелиогеофизические приложения современных методов обработки цифровых данных: монография. Нижний Новгород: Изд-во "ФЛИНТА", 2017. 316 с.
15. *Lundstredt H.* Geomagnetic Storm Predictions From Solar Wind Data with the Use of Dynamic Neural Networks // J. Geophys. Res. 1997. V. 102. № A7. P. 14.255–14.268.
16. *Pallochia G., Amota E., Consoliniet G. et al.* Geomagnetics Dst Index Forecast Based on IMF Data Only // Ann. Geophys. 2006. V. 24. P. 989–999.
17. *Gruet M.A., Chandorkar M., Sicard A., Camporeale E.* Multiplehour-ahead Forecast of the Dst Index Using a Combination of Long Short-term Memory Neural Network and Gaussian Process. Space Weather. 2018. V. 16. https://doi.org/10.1029/2018SW001898
18. *Stepanova M.V., Perez P.* Autoprediction of Dst-index Using Neural Network Techniques and Relationship to the Auroral Geomagnetics Indices // Geofisica International. 2000. V. 39. № 1. P. 143–146.
19. *Бархатов Н.А., Королев А.В., Пономарев С.М. и др.* Долгосрочное прогнозирование индексов солнечной активности методом искусственных нейронных сетей // Изв. вузов. Радиофизика. 2001. Т. 44. № 9. С. 806–824.
20. *Бархатов Н.А., Беллюстин Н.С., Левитин А.Е., Сахаров С.Ю.* Сравнение эффективности предсказания индекса геомагнитной активности Dst искусственными нейронными сетями // Изв. вузов Радиофизика. 2000. Т. 43. № 5. С. 385.
21. *Бархатов Н.А., Левитин А.Е., Сахаров С.Ю.* Метод искусственных нейронных сетей как способ восстановления пробелов в записях отдельных магнитных обсерваторий по данным других станций // Геомагнетизм и аэрономия. 2002. Т. 42. № 2. С. 195–198.
22. *Бархатов Н.А., Левитин А.Е., Рябкова Г.А.* Искусственные нейронные сети для прогнозирования индексов геомагнитной активности по параметрам околоземного пространства // Солнечно-земная физика. 2002. Вып. 2 (115). С. 104–106.
23. *Ефиторов А.О., Мягкова И.Н., Широкий В.Р., Доленко С.А.* Прогнозирование Dst-индекса, основанное на методах машинного обучения // Космич. исслед. 2018. Т. 56. № 6. С. 420–428.

24. *Dolenko S.A., Orlov Yu.V., Persianinov I.G., Shugai Ju.S.* Neural Network Algorithm for Events Forecasting and Its Application to Space Physics Data // Leture Notes in Computer Science. 2005. V. 3697. P. 527–532.

25. *Широкий В.Р.* Сравнение нейросетевых моделей прогнозирования геомагнитного Dst-индекса на различных наборах данных и сравнения методов оценки качества работы моделей // Сб. научн. тр. XVII Всероссийск. науч. техн. конф. “Нейроинформатика-2015” с международным участием. Ч. 2. М.: НИЯУ МИФИ, 2015. С. 51–60.

26. Deep Learning Matlab Toolbox. http://matlab.exponenta.ru.

27. *Bishop C.M.* Pattern Recognition and Machine Learning. Springer, 2006. 758 p.

28. *Goodfellow I., Bengia Y., Courville A.* Deep Learning. London; Cambridge: MIT Press., 2016. 800 p.

29. *Мерков А.Б.* Распознавание образов: построение и обучение вероятностных моделей. М.: Стереотип, 2020. 240 с.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 1, с. 95–104

СЛОЖНЫЕ ТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩИЕ КОМПЛЕКСЫ

УДК 004.896

О ПОСТРОЕНИИ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ КИСЛОРОДНЫМ КОНВЕРТЕРОМ НА ОСНОВЕ КОМПЬЮТЕРНОГО ЗРЕНИЯ

© 2022 г. В. Б. Трофимов

ФГАОУ ВО “Национальный исследовательский технологический университет “МИСиС” Москва, Россия

e-mail: trofimov_vbt@mail.ru

Поступила в редакцию 06.04.2021 г.
После доработки 09.06.2021 г.
Принята к публикации 26.07.2021 г.

Предложена структура интеллектуальной системы управления конвертером, включающая подсистемы распознавания и оценивания выбросов газошлако-металлической эмульсии в режиме реального времени на основе компьютерного зрения по прямым признакам, подсистему прогнозирования выбросов по косвенным признакам, которые наиболее часто используются для мониторинга кислородно-конвертерного процесса. Разработаны процедуры прогнозирования и обнаружения выбросов на основе искусственных нейронных сетей и прецедентного подхода. Описаны морфологические признаки выбросов, а также факторы, влияющие на их возникновение.

DOI: 10.31857/S0002338821060159

Введение. Кислородно-конвертерный процесс представляет собой сложную совокупность тепловых, химических, аэро- и гидродинамических процессов, протекающих одновременно и совмещенных в пространстве. Выбросы (непрерывный перелив через край конвертера) вспенивающегося шлака, точнее газошлакометаллической эмульсии, содержащей пузырьки газов CO и CO_2, оксиды металлов (шлак) и капли металла, образующейся на поверхности расплава во время продувки кислородом, – сложное явление, сопровождающее конвертерные процессы с момента их появления, зависящее от многих факторов. Выбросы вызывают потерю металла (обычно от 5 до 12%), нарушение кислородно-конвертерного процесса и загрязнение окружающей среды. Выбросы происходят неравномерно, что часто приводит к увеличению времени между плавками, остановкам для очистки (удаления остатков материала), ремонту охладительной системы.

Задача автоматического прогнозирования и оперативного обнаружения выбросов на основе компьютерного зрения и машинного обучения с целью их предотвращения, уменьшения эксплуатационных и экологических проблем до сих пор является актуальной.

На возникновение выброса вспененной эмульсии влияют: химический состав и показатели качества чугуна и лома (особенно содержание Si и Mn в чугуне); физико-химические свойства и количество шлака (увеличение окисленности шлака, основность шлака от 1.4 до 1.8); размер пузырьков газов CO и CO_2, их выделение; скорость обезуглероживания; “присадка” большого количества железорудных материалов одной порцией; расстояние от поверхности металла до фурмы; интенсивность и программа расхода кислорода (существенное увеличение расхода кислорода с целью повышения производительности конвертера); вес каждого добавленного флюса; состояние футеровки конвертера (срок службы футеровки, количество плавок с момента последней замены); износ сопел фурмы (применение современных фурм не решает проблему выбросов). Причины выброса иногда имеют противоречивый характер. В середине продувки обычно наблюдаются два или три максимума интенсивности выбросов, совпадающие с наибольшими значениями скорости обезуглероживания и подъемом уровня ванны.

В [1] описан метод автоматического обнаружения выбросов по косвенным признакам на основе обработки акустического сигнала для оценки уровня шлака в конвертере (шум в процессе измерения рассматривается как “белый”, имеющий нормальный закон распределения) и на основе использования упрощенной модели (линейной регрессии), описывающей взаимосвязь между расходом отходящего газа, давлением и полученной оценкой уровня вспенивающегося шлака. Параметры этой модели определяются методом наименьших квадратов и обновляются в режиме реального времени. В качестве признака возможного выброса также рассматривается резкое изменение параметров модели из-за значительного изменения химических реакций в конвертере, т.е. из-за отклонения от нормального режима работы.

Точную динамическую модель образования вспенивающегося шлака в конвертере (для оценки его уровня) аналитическим методом получить сложно или невозможно, проблема определения размера пузырьков газа, оценивания химического состава и измерения температуры расплава в режиме реального времени на всем интервале продувки не решена. Существующие методы позволяют оценить содержание углерода в расплаве и измерить его температуру только на завершающей стадии процесса (при этом контроль осуществляется дискретно в нескольких временных точках) и применяются для конвертеров большой емкости. При наличии помех, грубых выбросов в сигналах измерительной информации, при изменении базового режима работы объекта, при неточной информации о химическом составе лома гибридные или упрощенные модели требуют дополнительной настройки параметров. Для оценки этих параметров на основе экспериментов в работе [1] используют метод наименьших квадратов, предпосылки которого не выполняются для сложных нелинейных нестационарных динамических процессов. Для проверки таких упрощенных моделей применяют физическую модель конвертера ("холодную" модель объекта управления), но не рассматривают проблемы подобия [1].

На зависимость уровня вспенивающегося шлака в конвертере от акустических сигналов, вибрации конвертера, состава и температуры отходящего газа влияют изменяющиеся и не поддающиеся автоматическому контролю в режиме реального времени факторы, например физические свойства шлака, поэтому точность математических моделей, отражающих эту зависимость, существенно ограничена [2]. Обнаружение выброса по этим моделям определяется либо при пересечении определенного граничного уровня сигнала, либо в случае, когда измеренный параметр слишком сильно отклоняется от среднего значения.

Обнаружение выбросов с помощью видеокамер, просматривающих летку конвертера, может вызвать некоторые проблемы при обслуживании. В [2] представлена автоматическая система прямого обнаружения выбросов в режиме реального времени, основанная на методах обработки изображений, сделанных видеокамерой, которая просматривает горловину конвертера. В этой системе цветное изображение преобразуется в черно-белое, далее из полученного изображения удаляются помехи, искажающие распознаваемый выброс. Для ее настройки используются два параметра: значение порога для B-компоненты (в цветовой модели RGB) и максимальный размер исключаемых помех. Белые пиксели на изображении используются для обнаружения выбросов. Расстояние от видеокамеры до конвертера составляет около 10 м. Чтобы справиться с резкими изменениями интенсивности света во время плавки, вместо стандартной видеокамеры CCD была применена CMOS-видеокамера. Если произойдет сильное вспыхивание пламени, то это может замаскировать выброс и эта система перестанет идентифицировать его, поэтому необходимы дополнительные модули прогнозирования выбросов по косвенным признакам.

В [3] представлена автоматическая система обнаружения выбросов на основе одновременной цифровой обработки акустических сигналов от микрофона, установленного над конвертером, и изображения с видеокамеры, установленной в 27.5 м от горловины конвертера. Изображения горловины конвертера регистрируются со скоростью 10 кадров в секунду. Алгоритм обработки изображения [3]: извлечение "интересующей области" (ROI) из изображения, т.е. области, содержащей выброс; преобразование RGB-изображения в HSL; преобразование полученного изображения в черно-белое; применение метода Робертса для выделения контуров изображения; фильтрация мелких частиц (помех) на изображении; суммирование информативных участков изображения и вычисление нормированного значения "индекса обнаружения выбросов". Если это значение выше порогового уровня, то возможен выброс. Данный алгоритм не позволяет автоматически распознать размер выброса ("сильный", "слабый" или "средний").

Если уровень звука L слишком высок, то уровень вспенивающегося шлака в конвертере низкий и вероятность возникновения выброса очень мала. На практике часто встречается ситуация когда уровень звука ниже порогового значения, а выброс не происходит, что приводит к большому количеству ложных сигнализаций. Искажение звукового сигнала шумами от внешних источников также является проблемой, поэтому звуковой акустический сигнал сам по себе не рассматривается как надежный признак для обнаружения выбросов [3].

Сильное хаотическое пламя, имеющее область насыщенного цвета, близкую к белому, – актуальная проблема для цифровой обработки изображений. Сильное пламя при низком уровне пены в конвертере часто распознается в этой системой [3] как выброс, что приводит к ложному срабатыванию.

В автоматизированной оптоакустической системе обнаружения выбросов [4] используются три микрофона, чтобы выдерживать высокие уровни звукового давления, обрабатываются акустические сигналы, оценивается уровень звука, используется видеокамера CCD, просматривающая горловину конвертера и зону пламени, обрабатываются изображения по специальным алгоритмам обнаружения и оценки выбросов.

1. Постановка задачи. Управление кислородно-конвертерным процессом осуществляется оператором, который должен найти компромисс между высотой шлака (обеспечивающей высокое качество металла) и уменьшением (предотвращением) выбросов. Основной способ ведения продувки заключается в ступенчатом изменении положения фурмы и изменении расхода кислорода с помощью систем автоматического регулирования (САР) по утвержденным шаблонам (схеме продувки) для каждой марки стали. Корректировка программных управляющих воздействий осуществляется оператором на основе данных о химическом составе отходящих газов (по показаниям газоанализаторов) и визуального наблюдения за горловиной конвертера. На металлургических заводах разработаны способы борьбы с выбросами путем изменения режима продувки, шлакового режима. Оператор оценивает возможность выбросов по шкале от “1” до “3”, где “1” означает то, что выброса не будет, “2” – возможен “слабый” (“небольшой”, “легкий”) или “средний” выброс, “3” – возможен “сильный” выброс. Эта оценка является субъективной, часто проводится в условиях стресса, в агрессивных производственных условиях (высокие температуры, объемные потоки запыленных газов, быстро меняющиеся металлургические операции). Визуальное наблюдение *опытным* оператором через видеокамеру, контролирующую внутреннюю часть конвертера, обеспечивает предсказание выброса примерно за 30 с до его появления. Регистрация выбросов выполняется операторами вручную, и поэтому они не всегда могут быть “надежно” учтены (присутствует человеческий фактор). Обычно из 100% плавок 15% плавок с выбросами, из них: 7% – с “сильными” выбросами, 5% – со “средними” выбросами и 3% – с “небольшими” выбросами. Продолжительность ремонтных работ по очистке конвертера от шлака может составлять 20 мин. Сокращение издержек от выбросов является важной задачей (потери от одного выброса могут достигать более 0.5 млн руб.).

Применение вибрационного метода для оценки уровня вспенивающегося шлака не обеспечивает высокую точность, точность этой оценки во многом зависит от выбора измеряемых частот вибрации, которые меняются в зависимости от условий кислородно-конвертерного процесса.

Автоматическая система обнаружения выбросов (диагностирования состояния конвертерного процесса) должна быть точной, работать в режиме реального времени, прогнозировать выбросы в условиях колебания качества сырья и ассортимента продукции (заданных марок стали), быть интегрирована в систему аварийной сигнализации цеха. Система должна идентифицировать аномалии за время не менее чем сумма времени ответной реакции оператора-дистрибуторщика (от 5 до 10 с) и постоянной времени исполнительного механизма, регулирующего ход технологического процесса.

2. Схема интеллектуальной системы управления конвертером. Создание современных интеллектуальных технологий, систем обработки больших объемов данных, машинного обучения и искусственного интеллекта является актуальным направлением в науке и производстве [5–8].

В предлагаемой системе (рис. 1) осуществляется прогнозирование, распознавание и оценивание выбросов, формируются аварийные сигналы, выполняется сбор, отображение и хранение технологических данных, прецедентов в базе знаний с возможностью их использования в смежных системах. Система позволяет оператору наблюдать за процессами в конвертере с помощью видеокамер (ВК) и принимать окончательное решение о наличии выбросов, корректировать программы управления конвертером.

База знаний содержит:

изображения “слабых”, “средних” и “сильных” выбросов, на которых часть вспененного шлака капает или выливается через край конвертера, которые обычно можно увидеть в середине плавки, представляющих собой желтые или оранжевые объекты, расположенные вертикально прямо над защитным экраном (и их почти никогда не бывает над горловиной конвертера), наблюдаемые на нескольких последующих видеокадрах с $ВК_1$ и $ВК_2$;

изображения “слабых”, “средних” и “сильных” выбросов с $ВК_3$ и $ВК_4$, расположенных под корпусом конвертера;

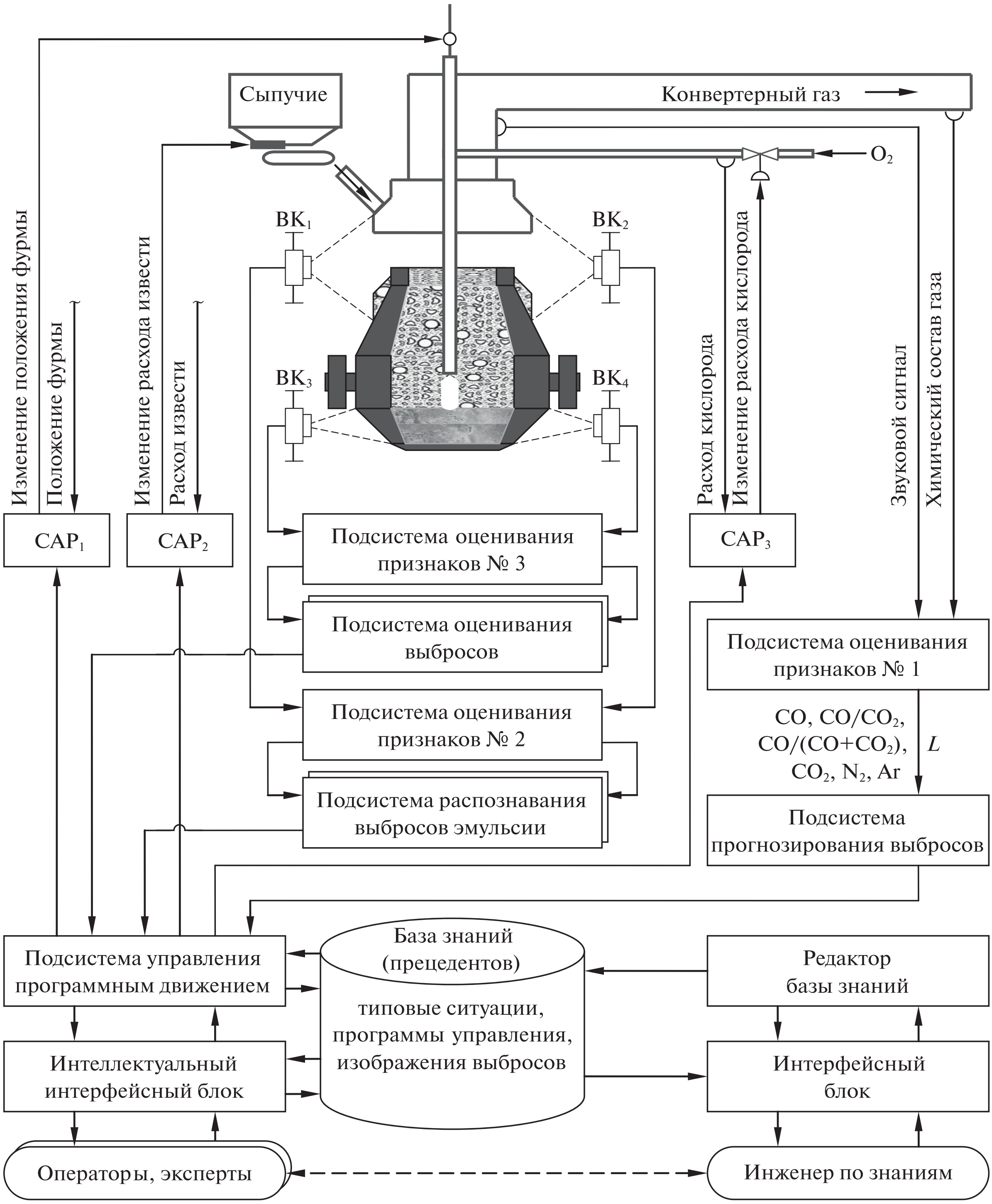


Рис. 1. Схема интеллектуальной системы управления конвертером

изображения пламени, которые могут принимать любую форму и размер, но обычно это большие желтые или оранжевые узоры, возникающие в середине плавки, пламя может появиться внезапно и исчезнуть, а может быть видно некоторое время на всем изображении и, следовательно, над горловиной конвертера тоже;

изображения без выбросов, характеризующие “ровный” ход (“нормальное” состояние) процесса, представляющие собой горизонтальные желтые или оранжевые полоски, расположенные над устьем конвертера, они часто наблюдаются в начале и в конце плавки.

Для прогнозирования выбросов выполняются следующие операции:

проверка технологических данных на достоверность, фильтрация;

оценивание признаков в подсистеме № 1: CO, CO/CO_2, $CO/(CO+CO_2)$, CO_2, N_2, Ar конвертерного отходящего газа;

ввод признаков в подсистему прогнозирования, т.е. в нейросетевой прогнозатор, представляющий собой многослойный персептрон с шестью входными элементами, 13 нейронами в промежуточном слое и одним выходным нейроном, функция активации нейронов – униполярная логистическая;

принятие решения о возможности возникновения выброса по правилу: если выход нейросетевого прогнозатора (искусственной нейронной сети – ИНС) $Y_{\text{ИНС}}(t) > 0.9$, то возможен выброс эмульсии, если $Y_{\text{ИНС}}(t) < 0.1$ и уровень звукового сигнала L выше порогового значения, то выброс не предвидится.

Обнаружение выбросов выполняется на основе обработки изображений с цифровых ВК. ВК_1 и ВК_2 направлены на зазор между нижней частью юбки газоотводящего тракта и горловиной конвертера (верхней частью защитного экрана).

Для распознавания выбросов выполняются следующие операции:

получение видеосигнала с ВК_1 и ВК_2;

разбиение каждого видеосигнала на последовательность непересекающихся видеокадров (цифровых изображений);

представление i-го цифрового изображения в цветовой модели RGB (получение 24-разрядного рисунка);

преобразование полученного цветного изображения в изображение с нулевым контрастом (изображение в градации серого) выполняется по формуле, которая отражает цветовое восприятие человека:

$$S_{n,m}(i) = \text{Round}[0.30R_{n,m}(i) + 0.59G_{n,m}(i) + 0.11B_{n,m}(i)],$$

где $R_{n,m}(i)$, $G_{n,m}(i)$, $B_{n,m}(i)$ – красный, зеленый, синий компоненты цветовой модели RGB; $n = \overline{1,N}$ – номер строки изображения; $m = \overline{1,M}$ – номер столбца изображения; i – номер изображения (видеокадра);

минимаксное нормирование (индекс “Н”) изображения осуществляется по формуле

$$S^{\text{Н}}_{n,m}(i) = \frac{S_{n,m}(i) - S^{\min}}{S^{\max} - S^{\min}},$$

где $S^{\max} = 255$, $S^{\min} = 0$ – максимальное и минимальное значения $S_{n,m}(i)$;

бинаризация (индекс “Б”) изображения (“0” – черный цвет пикселя, “1” – белый) осуществляется по правилу

$$S^{\text{Б}}_{n,m}(i) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad S^{\text{Н}}_{n,m}(i) \le \delta(i); \\ 1, & \text{если} \quad S^{\text{Н}}_{n,m}(i) > \delta(i), \end{cases}$$

где $\delta(i)$ – пороговый уровень;

оценивание информативного признака в подсистеме № 2 путем суммирования бинарных кодов цвета пикселей в соответствии с выражениями:

по строкам: $X_1(i) = \sum_{m=1}^{M} S^{\text{Б}}_{1,m}(i), \ldots, X_N(i) = \sum_{m=1}^{M} S^{\text{Б}}_{N,m}(i)$;

по столбцам: $X_{N+1}(i) = \sum_{n=1}^{N} S^{\text{Б}}_{n,1}(i), \ldots, X_{N+M}(i) = \sum_{n=1}^{N} S^{\text{Б}}_{n,M}(i)$;

оценивание принадлежности текущего изображения к одному из возможных состояний процесса осуществляется путем подачи на входы нейросетевых классификаторов выделенного информативного признака. На входные элементы первого классификатора подается признак,

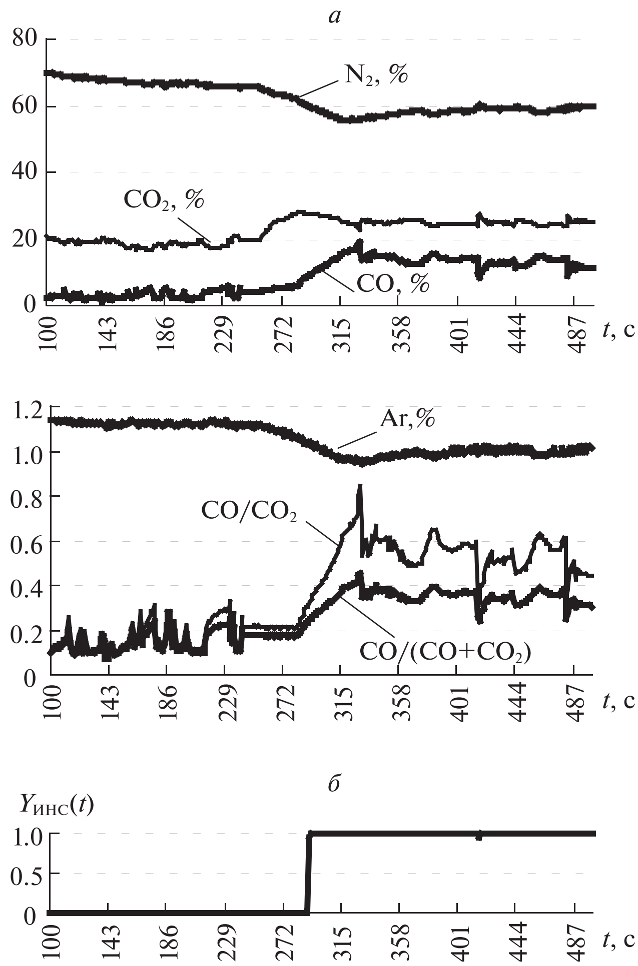


Рис. 2. Натурные данные (после 100-й с продувки) по ситуации № 1: *а* – химический состав конвертерного газа, *б* – выход нейросетевого прогнозатора (прогноз выброса)

полученный по изображению с $ВК_1$, а на входы второго – с $ВК_2$. Математическое описание нейросетевых классификаторов (многослойного персептрона) имеет следующий вид:

$$X_j^{\text{Н}}(i) = \frac{X_j(i) - X_j^{\min}}{X_j^{\max} - X_j^{\min}};$$

$$Y_p^{\text{Н}}(i) = \left[1 + \exp\left(-\sum_{k=0}^{K} w_{pk}^{(2)}\left[1 + \exp\left(-\sum_{j=0}^{N+M} w_{kj}^{(1)}\ X_j^{\text{Н}}(i)\right)\right]^{-1}\right)\right]^{-1};$$

$$Y_p(i) = Y_p^{\min} + [Y_p^{\max} - Y_p^{\min}]\ Y_p^{\text{Н}}(i),$$

где $X_j(i)$ – информативный признак, $j = \overline{1, N+M}$; $Y_p(i)$ – оценка принадлежности текущего изображения к одному из возможных классов, $p = \overline{1.4}$ – выходы сети; $X_j^{\text{Н}}(i)$ и $Y_p^{\text{Н}}(i)$ – нормированные значения $X_j(i)$ и $Y_p(i)$; $X_j^{\max}$, $X_j^{\min}$ и $Y_p^{\max}$, $Y_p^{\min}$ – максимальное и минимальное значения $X_j(i)$ и $Y_p(i)$, взятые из обучающей выборки; $w_{kj}^{(1)}$ – весовые коэффициенты нейронов промежуточного слоя; K – количество нейронов в промежуточном слое; $w_{pk}^{(2)}$ – весовые коэффициенты нейронов выходного слоя (настроечные параметры сети). В нейронах этого персептрона были использованы униполярные функции активации сигмоидального типа.

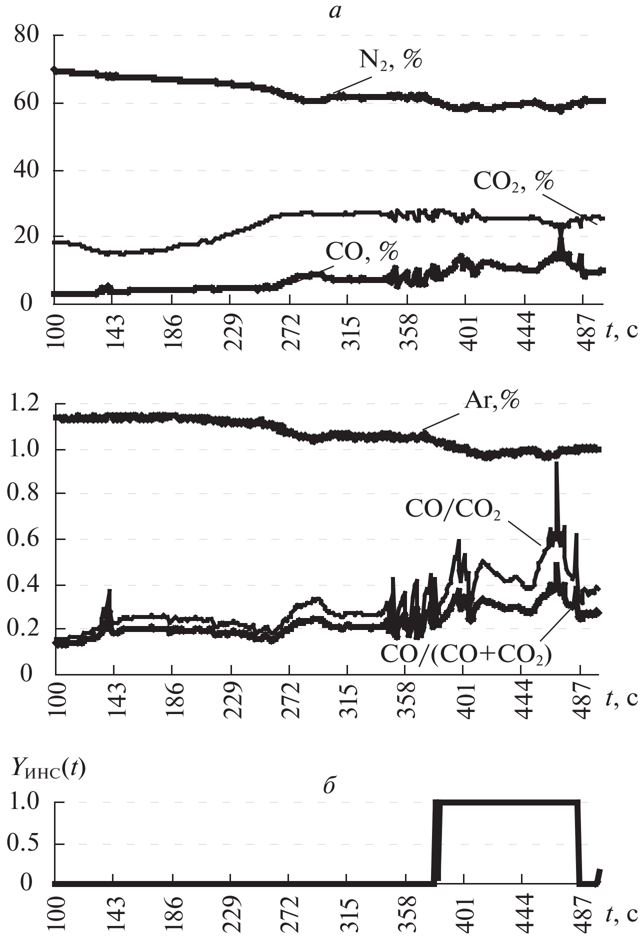


Рис. 3. Натурные данные (после 100-й с продувки) по ситуации № 2: *а* – химический состав конвертерного газа, *б* – выход нейросетевого прогнозатора (прогноз выброса)

Следующая операция – принятие решения о состоянии процесса по правилам:

если $\{Y_1(i) > 0.7$ и $Y_2(i) < 0.1$ и $Y_3(i) < 0.1$ и $Y_4(i) < 0.1\}$, то выбросы отсутствуют, наблюдается “нормальное” состояние процесса;

если $\{Y_1(i) < 0.1$ и $Y_2(i) > 0.7$ и $Y_3(i) < 0.1$ и $Y_4(i) < 0.1\}$, то наблюдается пламя;

если $\{Y_1(i) < 0.1$ и $Y_2(i) < 0.1$ и $Y_3(i) > 0.7$ и $Y_4(i) < 0.1\}$, то появились “сильные” выбросы;

если $\{Y_1(i) < 0.1$ и $Y_2(i) < 0.1$ и $Y_3(i) < 0.1$ и $Y_4(i) > 0.7\}$, то возникли “слабые” или “средние” выбросы.

В подсистеме оценивания признаков № 3 осуществляется: разбиение каждого видеосигнала с ВК$_3$ и ВК$_4$ на последовательность непересекающихся видеокадров, представление цифрового изображения в цветовой модели RGB, преобразование полученного цветного изображения в изображение с нулевым контрастом, минимаксное нормирование изображения, бинаризация изображения.

В подсистеме оценивания выбросов выполняется суммирование бинарных кодов цвета белых и черных пикселей изображения. Соотношение между белыми пикселями выбросов эмульсии и черными пикселям фона изображения используется для оперативного оценивания эффективности обнаружения выбросов, их прогнозирования, а также для оценивания размеров выбросов, которые не удалось устранить на ранней стадии. Это соотношение усредняется за период выборки 2 с и сохраняется в базе знаний.

Подсистема управления программным движением конвертера построена на основе подхода, представленного в работе [6], использующего CBR-концепцию [7]. Прецедент включает: описание проблемной ситуации (химический состав чугуна, его температура и вес, вид лома и его вес,

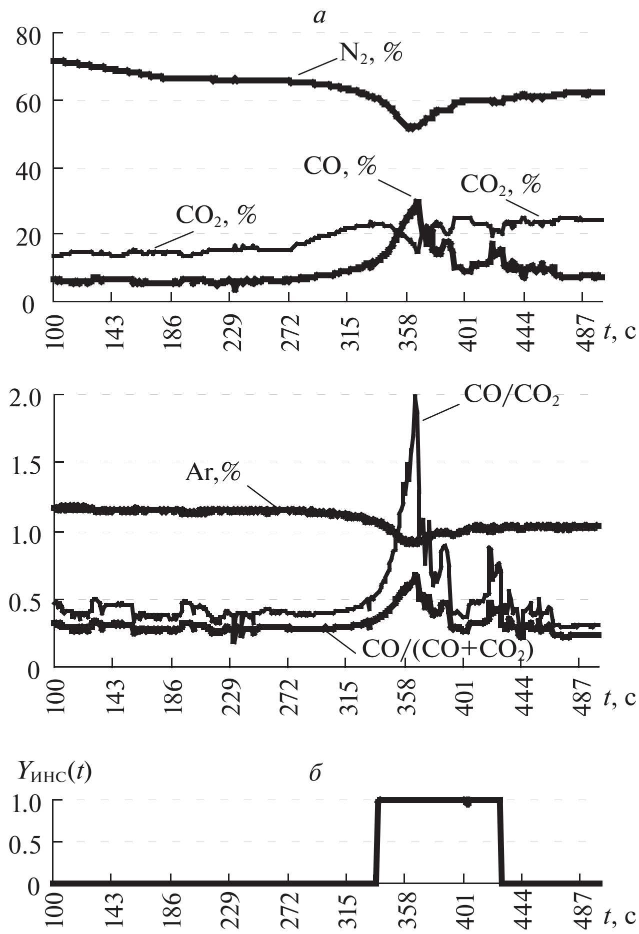


Рис. 4. Натурные данные (после 100-й с продувки) по ситуации № 3: *а* – химический состав конвертерного газа, *б* – выход нейросетевого прогнозатора (прогноз выброса)

номер и состояние фурмы, футеровки, заданная марка стали, вид ферромарганца, флюса, тип угля, химический состав извести, сворачивание шлака, выбросы, переливы шлака); описание совокупности управляющих воздействий (расход кислорода и его программная траектория, положение фурмы и ее программная траектория, время начала и окончания плавки, количество чугуна, залитого в конвертер, количество лома, извести, ферромарганца, флюса, угля, поданного в конвертер, длительность нагрева лома); описание результата применения решения (химический состав полученной стали, ее температура, параметры отходящих технологических газов, марка стали).

3. Применение интеллектуальной системы управления конвертером. Для исследования системы управления (рис. 1) были использованы натурные данные, полученные в кислородно-конвертерном цехе № 1 АО "ЕВРАЗ Объединенного Западно-Сибирского металлургического комбината", производительность конвертера составляет 170 т/ч. При нормальном режиме работы объекта продувка ведется сверху через 5-сопловую фурму с расходом кислорода от 350 до 450 $м^3$/мин. Положение фурмы в течение первых 3–4 мин продувки поддерживается на высоте от 2 до 2.6 м от уровня жидкого металла, после чего продувка ведется при высоте фурмы от 1 до 1.5 м. На плавках с присадкой на 8–14-й мин продувки углеродосодержащих материалов продувка ведется при высоте фурмы от 1.4 до 1.6 м.

При "сворачивании" шлака (основная причина – недостаток окислов железа в шлаке) разрешается кратковременный подъем фурмы на 1.5–1.8 м относительно рабочего положения. При появлении "выносов" металла разрешается кратковременный подъем фурмы до 2–3 м, производится присадка плавикошпатового концентрата порциями до 150 кг. При "выбросах" вспененной эмульсии допускается кратковременное снижение расхода кислорода до 250–300 $м^3$/мин,

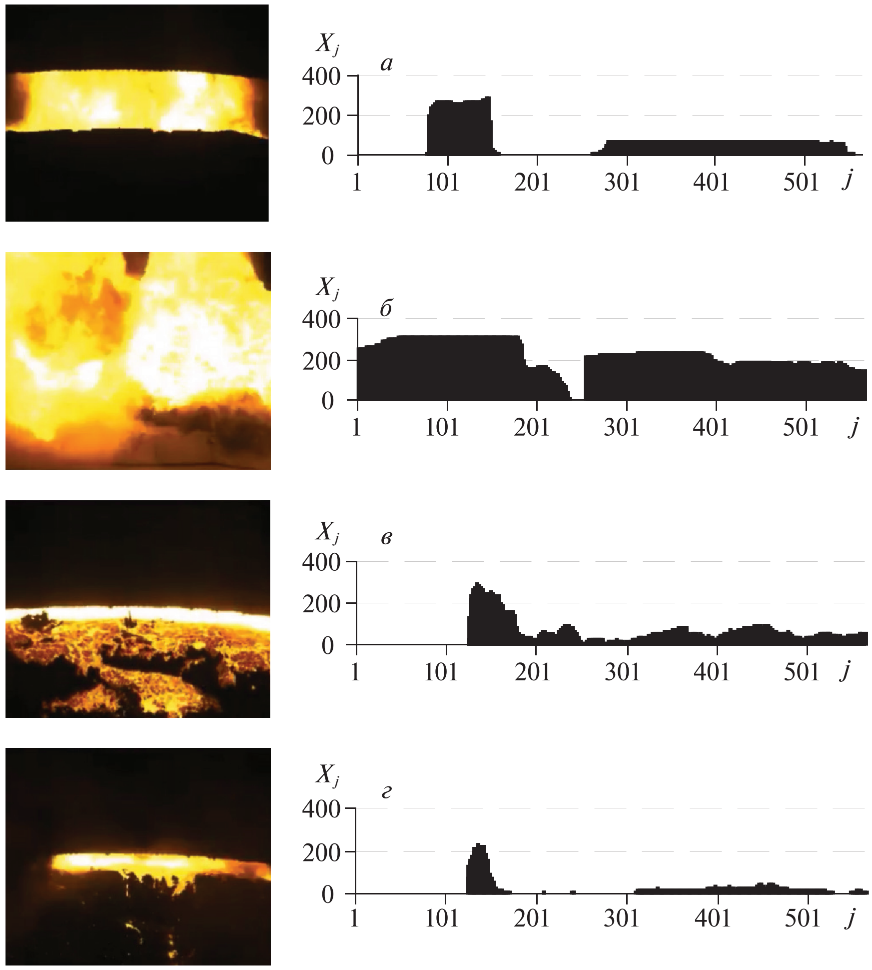


Рис. 5. Цифровые изображения и их информативный признак: *а* – выбросы отсутствуют, наблюдается “нормальное” состояние процесса, *б* – пламя, *в* – “сильный” выброс, *г* – “слабый” выброс

при одновременном снижении положения фурмы на 100–300 мм, и присадка извести в количестве до 1 т. Выбросы возникают в периоды жидкофазного шлака, а выносы – при его сворачивании. При необходимости продувка прекращается и производится скачивание шлака.

После устойчивого зажигания плавки (появления устойчивого факела над горловиной), но не позднее, чем через 1 мин после начала продувки, юбку опускают, далее химический состав отходящих газов (рис. 2, *а*, 3, *а*, 4, *а*) подается в подсистему оценивания признаков № 1. По этим признакам в режиме реального времени формируется прогноз возникновения выбросов (рис. 2, *б*, 3, *б*, 4, *б*).

Искусственная нейронная сеть для прогнозирования выбросов была обучена по алгоритму обратного распространения ошибки с использованием натурных данных (прецедентов), характеризующих разные технологические ситуации. Среднеквадратическое отклонение сети на обучающем наборе данных составило 0.03 ед. Сеть прошла испытания на верификационном наборе данных и прогнозирует возможность возникновения выброса (рис. 2, *б*, 3, *б*, 4, *б*).

Параметры состава отходящих газов имеют наибольшую связь с процессами, протекающими в конвертере. Химический состав отходящего газа оценивается каждую секунду, что приводит к значительному сокращению времени на изменение этих процессов.

Искусственная нейронная сеть для распознавания выбросов была обучена по алгоритму обратного распространения ошибки с использованием цифровых изображений (рис. 5, $M = 310$, $N = 254$). Среднеквадратическое отклонение сети на обучающем наборе данных составляет 0.01 ед., а на верификационном – 0.08 ед. (при $\delta(i) = 0.5$, $K = 284$). Сеть распознает изображения, характеризующие разные состояния кислородно-конвертерного процесса.

Цвет, размер и положение распознаваемых огненных образов на цифровых изображениях рассматриваются как отличительные признаки, которые искусственная нейронная сеть использует для идентификации состояния конвертера, для обнаружения выбросов. Если искусственная нейронная сеть распознает выброс на 8–10 изображениях подряд в течение 3 с, то это верный признак появления выброса, так как он обычно наблюдается длительное время.

Сохранение изображений и технологических данных (прецедентов) в базе знаний позволяет выполнить ретроспективный поиск причин возникновения выбросов.

Заключение. Обеспечение рентабельного производства, повышение качества выпускаемой продукции, минимизация негативного воздействия процесса на окружающую среду, уменьшение повреждений конвертера и риска для здоровья и безопасности операторов-технологов, а также уменьшение аварий невозможно без использования современных интеллектуальных систем управления.

Предлагаемая система отличается от других тем, что предупреждает оператора-технолога в режиме реального времени о возможности возникновения выброса (в среднем за 25 с до его появления) на основе искусственных нейронных сетей по признакам {CO, CO/CO_2, $CO/(CO+CO_2)$, CO_2, N_2, Ar} конвертерного газа. Если выброс произошел, то система распознает его в течение 3–5 с после его возникновения, автоматически классифицирует его на “сильные” или “слабые/средние” выбросы, а также применяет прецедентный подход для управления конвертером.

Интеллектуальные системы управления на основе распознавания образов в автоматическом режиме позволяют уменьшить длительность продувки металла кислородом на 1–1.3 мин, увеличить производительность конвертера на 1–2%, уменьшить количество выбросов на 50–95%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Evestedt M., Medvedev A.* Model-based Slopping Warning in the LD Steel Converter Process // J. of Process Control. 2009. № 19 (6). P. 1000–1010.
2. *Kattenbelt C., Spelbos E., Mink P., Roffel B.* Detection of Slopping in Basic Oxygen Steelmaking Using a Camera Viewing the Converter Mouth // Steel Research Int. 2008. № 11 (79). P. 821–825.
3. *Batista L.G., Salarolli P.F., Menezes R.P., Ayres L.M., Pereira R.P., Cuadros M.A., Furtado H.S.* Slopping Detection System for LD Converters Using Sound Signal Digital and Image Processing // 13th IEEE Intern. Conf. on Industry Applications. Sao Paulo. 2019. P. 1137–1142.
4. *Odenthal H.-J., Schluter J., Uebber N.* Recent SMS Siemag Developments in BOF Steelmaking // 7th European Oxygen Steelmaking Conf. Trinec. 2014. 12 p.
5. *Vassilyev S.N., Novikov D.A., Bakhtadze N.N.* Intelligent Control of Industrial Processes // 7th IFAC Conf. on Manufacturing Modelling, Management, and Control. St. Petersburg. 2013. P. 49–57.
6. *Trofimov V.B.* An Approach to Intelligent Control of Complex Industrial Processes: An Example of Ferrous Metal Industry // Automation and Remote Control. 2020. V. 81. № 10. P. 1856–1864.
7. *Aamodt A., Plaza E.* Case-Based Reasoning: Foundational Issues, Methodological Variations, and System Approaches // AI Communications. IOS Press. 1994. V. 7. № 1. P. 39–59.
8. *Temkin I., Klebanov D., Deryabin S., Konov I.* Predictive Analytics in Mining. Dispatch System Is the Core Element of Creating Intelligent Digital Mine // Communications in Computer and Information Science. 2020. V. 1201. P. 365–374.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 1, с. 105–123

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

УДК 629.7.01

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ АВИАЦИОННЫХ КОМПЛЕКСОВ НА БАЗЕ КОНЦЕПЦИИ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

© 2022 г. К. С. Анисимов[a], В. Н. Евдокименков[b,*], М. Н. Красильщиков[b], К. И. Сыпало[a], Н. Б. Топоров[a, c]

[a] *ЦАГИ им. проф. Н.Е. Жуковского, Москва, Россия*

[b] *МАИ (национальный исследовательский ун-т), Москва, Россия*

[c] *НИЦ им. Н.Е. Жуковского, Москва, Россия*

**e-mail: evdokimenkovvn@mai.ru*

Поступила в редакцию 17.08.2021 г.
После доработки 27.08.2021 г.
Принята к публикации 27.09.2021 г.

Развивается концепция функционального проектирования авиационных комплексов – этапа, предшествующего традиционным этапам структурного, компоновочного и обликового проектирования. Показано, что развиваемая концепция функционального проектирования оптимизирует существующий процесс путем сокращения временных и материальных затрат на создание перспективных образцов авиационной техники вследствие исключения из дальнейшего углубленного анализа заведомо неприемлемых вариантов облика перспективного летательного аппарата. Описаны предложенные на основе аппарата оптимизации методы и алгоритмы решения задач, возникающих на этапе функционального проектирования.

Эффективность разработанных методов и алгоритмов иллюстрируется примером формирования облика перспективного самолета транспортной категории на основе развитой концепции.

DOI: 10.31857/S0002338822010036

Введение. Последние десятилетия характеризуются стремительным развитием авиакосмических технологий, что создает необходимые условия для дальнейшего совершенствования авиационной техники. Вместе с тем свойства упомянутых технологий, потенциально способных радикально изменить характеристики авиационных комплексов, таковы, что общепризнанный в настоящее время подход к формированию облика перспективных образцов таких комплексов, состоящий в масштабировании на основе новых технологий характеристик некоторого наилучшего в принятом смысле варианта на предварительно сформированном множестве альтернатив, не приводит к достижению требуемого эффекта с точки зрения принятых критериев. Выход в данном случае, по мнению авторов, состоит в использовании развиваемой концепции так называемого функционального проектирования, заключающейся в генерации комбинаций возможных с точки зрения функциональных требований к проектируемому образцу технических решений. Каждой такой комбинации соответствует альтернативный вариант проектируемого образца авиационной техники (АТ). Количество таких комбинаций ограничивается направленностью процедуры их формирования с учетом перечня задач, для решения которых предполагается использовать проектируемый образец АТ, приоритетными направлениями развития вида АТ, которому принадлежит разрабатываемый образец, а также составом существующих и перспективных технологий реализации функциональных требований к АТ.

Таким образом, в рамках сформулированной выше концепции основные задачи функционального состоят в:

определении предпочтительного с точки зрения решаемой целевой задачи типа перспективного летательного аппарата (ЛА) в зависимости от реализуемого принципа полета;

формировании вариантов облика перспективного ЛА выбранного типа с учетом накопленного научно-технологического задела;

формировании облика проектируемого ЛА с учетом перспективных научно-технических решений (в случае невозможности создания ЛА, удовлетворяющего заданным требованиям, на текущем уровне научно-технологического развития).

В следующих разделах приведено описание возможной формализации перечисленных выше задач.

1. Определение предпочтительного типа перспективного ЛА на основе многокритериального экспертно-статистического метода. Процесс функционального проектирования начинается с определения набора базовых функций, которыми должен обладать проектируемый ЛА, чтобы обеспечить выполнение возложенной на него целевой задачи.

Примерами подобных базовых функций могут служить:

весовая эффективность, выражаемая обычно весовой отдачей перспективного ЛА, характеризующая его способность к перемещению полезной нагрузки;

энергетическая эффективность, характеризующая перспективный ЛА с точки зрения баланса между производимой и потребляемой бортовыми системами электроэнергией;

динамическая эффективность, под которой понимается способность проектируемого ЛА обеспечить требуемые для выполнения целевой задачи динамические характеристики;

уровень безопасности проектируемого ЛА, т.е. его способность обеспечить требования по надежности критически важных систем, а также запасам устойчивости и управляемости;

экологическая эффективность, характеризующая проектируемый ЛА с точки зрения экологических требований;

экономическая эффективность, выражающая способность проектируемого ЛА обеспечить выполнение требований по затратам на создание, эксплуатацию и утилизацию.

Далее введем в рассмотрение интегральные показатели $I_j, j = \overline{1, N}$, количественно оценивающие способность проектируемого ЛА обеспечить реализацию возложенных на него функций. В рамках подобного представления будем полагать, что проектируемый ЛА отвечает требованиям к базовым функциям, если выполняется совокупность условий:

$$\begin{cases} I_{1\min} \le I_1 \le I_{1\max}, \\ I_{2\min} \le I_2 \le I_{2\max}, \\ I_{3\min} \le I_3 \le I_{3\max}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ I_{N\min} \le I_N \le I_{N\max}. \end{cases} \tag{1.1}$$

Предельные значения показателей $I_{j\min}, I_{j\max}$ устанавливает специалист, исходя из заданных требований к перспективному ЛА, сформулированных в техническом задании.

Как уже указывалось, первая задача, которая должна быть решена в рамках развиваемой концепции функционального проектирования, заключается в определении конкретного типа (класса) ЛА в зависимости от используемого принципа полета, способного обеспечить выполнение требований (1.1), предъявляемых к его базовым функциям.

Как известно, принцип полета определяется тем, каким образом и за счет чего создается подъемная сила [1]. Учитывая существующее разнообразие классов ЛА, потенциально пригодных для достижения поставленной цели, тип ЛА, способного обеспечить требования к базовым функциям, определяется выбором из следующего набора альтернатив: a_1 – бездвигательный ЛА аэростатического типа (свободный или привязной аэростат, стратостат); a_2 – дирижабль; a_3 – аэродинамический ЛА самолетного типа; a_4 – аэродинамический ЛА вертолетного типа; a_5 – ЛА баллистического типа; a_6 – ракетодинамический ЛА.

Решение задачи выбора предпочтительного, с точки зрения возможности обеспечения предъявленных требований, типа ЛА на этапе функционального проектирования осложняется существенным влиянием факторов неопределенности, присутствие которых не позволяет применять методы принятия решений, основанные на математических моделях и формализованных критериях. Учитывая это, для выбора предпочтительного (с точки зрения требований к базовым функциям) типа перспективного ЛА предлагается использовать экспертно-статистический подход к многокритериальному принятию решений, развивающий известный метод многокритериальной оценки качества продукции [2], адаптированный для целей функционального проектирования.

Таблица 1. Структура данных в экспертно-статистическом методе многокритериального определения предпочтительного (с точки зрения обеспечения требований к базовым функциям) типа перспективного ЛА

Тип (класс) ЛА	Интегральные показатели, выражающие требования к базовым функциям проектируемого ЛА					
	I_1 $\downarrow$	I_2 $\downarrow$	I_3 $\downarrow$	I_4 $\downarrow$	....	I_N $\uparrow$
	Вес показателей					
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	....	ω_N
	Привлекательность (ценность) альтернативных типов ЛА по отдельным показателям					
a_1	$U_1(a_1)$	$U_2(a_1)$	$U_3(a_1)$	$U_4(a_1)$	....	$U_N(a_1)$
a_2	$U_1(a_2)$	$U_2(a_2)$	$U_3(a_2)$	$U_4(a_2)$	....	$U_N(a_2)$
a_3	$U_1(a_3)$	$U_2(a_3)$	$U_3(a_3)$	$U_4(a_3)$	....	$U_N(a_3)$
a_4	$U_1(a_4)$	$U_2(a_4)$	$U_3(a_4)$	$U_4(a_4)$	....	$U_N(a_4)$
a_5	$U_1(a_5)$	$U_2(a_5)$	$U_3(a_5)$	$U_4(a_5)$	....	$U_N(a_5)$
a_6	$U_1(a_6)$	$U_2(a_6)$	$U_3(a_6)$	$U_4(a_6)$	....	$U_N(a_6)$

Данный метод в наименьшей степени подвержен влиянию субъективных факторов, обусловленных квалификацией экспертов, на достоверность принимаемых решений за счет введения функций ценности показателей, опирающихся на технические характеристики обсуждаемых образцов.

Его реализация опирается на структуру данных, представленную в табл. 1. Строки этой таблицы представляют собой альтернативные типы (классы) ЛА, которые потенциально могут быть задействованы для обеспечения требований, предъявляемых к базовым функциям проектируемого ЛА.

Столбцами таблицы выступают перечисленные выше интегральные показатели $I_j, j = \overline{1,N}$, выражающие требования к базовым функциям проектируемого ЛА. Каждый интегральный показатель помечен либо символом стрелка вниз ($\downarrow$), либо символом стрелка вверх ($\uparrow$). Наличие символа $\downarrow$ для некоторого интегрального показателя предполагает, что наиболее привлекательным с точки зрения этого показателя является тип (класс) ЛА, обеспечивающий его наименьшее значение. Если некоторый показатель помечен символом $\uparrow$, то наиболее привлекательным с точки зрения этого показателя будет тип (класс) ЛА, обеспечивающий его наибольшее значение.

Полагаем, что априори заданы:

1) веса (важности) $\omega_j \geq 0, j = \overline{1,N}$, каждого из интегральных показателей с точки зрения необходимости их учета при выборе типа (класса) перспективного ЛА, которые подчиняются условию нормировки:

$$\sum_{j=1}^{N} \omega_j = 1;$$

2) оценки $U_j(a_i), i = \overline{1,6}$, выражающие привлекательность (ценность) каждого из альтернативных классов ЛА по отдельным интегральным показателям.

Тогда предпочтительность каждого альтернативного типа (класса) перспективного ЛА по комплексу интегральных показателей оценивается величиной

$$U(a_i) = \sum_{j=1}^{N} \omega_j U_j(a_i). \tag{1.2}$$

В результате решение принимается в пользу того класса ЛА, для которого наблюдается максимум величины $U(a_i)$.

Очевидно, что достоверность решения относительно предпочтительности того или иного класса ЛА с точки зрения его способности обеспечить выполнение требований к базовым функциям перспективного авиационного комплекса определяющим образом зависит от того, насколько достоверно выбраны веса ω_j и оценки $U_j(a_i)$, выражающие привлекательность (ценность) каждого из альтернативных классов ЛА по отдельным интегральным показателям.

Возможны различные способы определения этих величин.

Первый способ является традиционным для экспертных систем и опирается на опыт и знания специалистов-экспертов. При этом для обеспечения максимальной объективности оценок ω_j, $j = \overline{1, N}$, и $U_j(a_i), i = \overline{1, 6}$, учитывается коллективное мнение группы специалистов-экспертов. Предположим, что в процессе получения интересующих нас величин участвует группа из L специалистов. Каждый эксперт, исходя из того, насколько жестко, по его мнению, должны учитываться требования к каждой из базовых функций при определении облика перспективного ЛА, назначает весовые коэффициенты $\omega_j^l, l = \overline{1, L}$. Эти оценки, полученные от экспертов, усредняются, в результате чего получаются значения весов ω_j, выражающие их коллективное мнение:

$$\omega_j = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\omega_j^l. \tag{1.3}$$

Аналогичным образом, опираясь на собственный опыт и знания, а также привлекая доступную справочную информацию, эксперты определяют значения $U_j^l(a_i)$, $i = \overline{1, 6}$; $j = \overline{1, N}$; $l = \overline{1, L}$, характеризующие ценность каждого типа (класса) ЛА с точки зрения его способности обеспечить требуемые значения интегральных показателей.

В результате рассчитываются усредненные оценки $U_j(a_i)$, выражающие коллективное мнение экспертов:

$$U_j(a_i) = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}U_j^l(a_i). \tag{1.4}$$

Несмотря на очевидную простоту описанной выше экспертной процедуры определения предпочтительного (с точки зрения возможности обеспечения требований к базовым функциям) типа перспективного ЛА, ее практическое использование сталкивается с рядом трудностей.

Первая трудность связана с фундаментальной проблемой систем поддержки принятий решений, основанных на экспертных знаниях. Известно, что результаты коллективного мнения группы специалистов экспертов являются достаточно достоверными лишь в том случае, когда специалисты, привлекаемые в экспертную группу, обладают сопоставимыми знаниями в данной предметной области. Иными словами, в состав экспертной группы включаются специалисты, индивидуальные оценки которых в необходимой степени согласованы. Чаще всего для оценки согласованности экспертных мнений используется коэффициент конкордации, позволяющий подтвердить, насколько удачно подобрана экспертная группа. Тем не менее, подбор специалистов, обладающих сопоставимыми знаниями, может стать проблемой на пути реализации описанной процедуры.

Вторая трудность связана с надежностью экспертных оценок $U_j^l(a_i)$, выражающих ценность каждого типа (класса) ЛА с точки зрения его способности обеспечить требуемые значения интегральных показателей. Получение таких оценок, обладающих необходимой достоверностью, требует участия специалистов, демонстрирующих одинаково глубокие знания в области проектирования ЛА всех обсуждаемых классов. Очевидно, что подобрать специалистов, обладающих подобными энциклопедическими знаниями, чрезвычайно сложно.

Учитывая это, предлагается экспертно-статистический подход для определения предпочтительного типа перспективного ЛА. Информационной основой развиваемого экспертно-статистического подхода является база данных (БД), обобщающая накопленный опыт создания ЛА различных классов и содержащая конкретные значения интегральных показателей, полученные в реализованных проектах. Указанная БД имеет вид электронной таблицы формата, представленного в табл. 2. Строки этой таблицы соответствуют анализируемым типам (классам)

Таблица 2. Значения интегральных показателей, выражающих требования к базовым функциям ЛА, накопленные в ходе реализации предшествующих проектов

Тип (класс) ЛА	Ранее реализованные проекты	$I_1(a_i)$	$I_2(a_i)$	$I_3(a_i)$	$I_4(a_i)$	....	$I_N(a_i)$
a_1	1	$I_1^1(a_1)$	$I_2^1(a_1)$	$I_3^1(a_1)$	$I_4^1(a_1)$	....	$I_N^1(a_1)$
a_1	2	$I_1^2(a_1)$	$I_2^2(a_1)$	$I_3^2(a_1)$	$I_4^2(a_1)$	....	$I_N^2(a_1)$
....	....	....	....	....	....	....	....
a_1	M_1	$I_1^{M_1}(a_1)$	$I_2^{M_1}(a_1)$	$I_3^{M_1}(a_1)$	$I_4^{M_1}(a_1)$	....	$I_N^{M_1}(a_1)$
a_2	1	$I_1^1(a_2)$	$I_2^1(a_2)$	$I_3^1(a_2)$	$I_4^1(a_2)$	....	$I_N^1(a_2)$
a_2	2	$I_1^2(a_2)$	$I_2^2(a_2)$	$I_3^2(a_2)$	$I_4^2(a_2)$	....	$I_N^2(a_2)$
....	....	....	....	....	....	....	....
a_2	M_2	$I_1^{M_2}(a_2)$	$I_2^{M_2}(a_2)$	$I_3^{M_2}(a_2)$	$I_4^{M_2}(a_2)$	....	$I_N^{M_2}(a_2)$
....	....	....	....	....	....	....	....
a_6	1	$I_1^1(a_6)$	$I_2^1(a_6)$	$I_3^1(a_6)$	$I_4^1(a_6)$	....	$I_N^1(a_6)$
a_6	2	$I_1^2(a_6)$	$I_2^2(a_6)$	$I_3^2(a_6)$	$I_4^2(a_6)$	....	$I_N^2(a_6)$
....	....	....	....	....	....	....	....
a_6	M_6	$I_1^{M_6}(a_6)$	$I_2^{M_6}(a_6)$	$I_3^{M_6}(a_6)$	$I_4^{M_6}(a_6)$	....	$I_N^{M_6}(a_6)$

ЛА $a_i, i = \overline{1,6}$, которые потенциально могут использоваться для обеспечения требований предъявляемых к перспективному авиационному комплексу. Предполагается, что для каждого типа (класса) ЛА a_i доступна информация по ранее реализованным проектам $q = \overline{1, M_i}$. Таким образом, данные, приведенные в табл. 2, в совокупности объединяют реализации $I_j^q(a_i), i = \overline{1,6}; j = \overline{1,N}; q = \overline{1,M_i}$, значений интегральных показателей, достигнутые в ранее реализованных проектах с участием анализируемых типов (классов) ЛА.

Реализации $I_j^q(a_i)$, представленные в табл. 2, в дальнейшем используются для расчета значений $U_j(a_i)$. Каждый показатель $U_j(a_i)$ выражает ценность типа (класса) ЛА a_i с точки зрения его способности обеспечить требуемое значение интегрального показателя I_j. Для этого по аналогии с [2] применяются линейные функции ценности $U_j(a_i)$. Эти функции конструируются по следующим простым правилам.

Если некоторый интегральный показатель I_j в табл. 1 помечен символом $\downarrow$, наиболее привлекательным с точки зрения этого показателя является тип (класс) ЛА a_i, обеспечивающий его наименьшее значение. В этом случае линейная функция ценности $U_j(a_i)$ задается совокупностью условий:

$$U_j(a_i) = \begin{cases} 1, & I_j(a_i) < I_{j\min}, \\ \dfrac{I_{j\max} - I_j(a_i)}{I_{j\max} - I_{j\min}}, & I_{j\min} \le I_j(a_i) \le I_{j\max}, \\ 0, & I_j(a_i) > I_{j\max}, \end{cases} \tag{1.5}$$

где $I_{j\min}, I_{j\max}$ – соответственно минимальное и максимальное значения интегрального показателя I_j, задаваемые специалистом с учетом требований к соответствующей базовой функции.

Если некоторый интегральный показатель I_j в табл. 1 помечен символом ↑, предпочтительным является тип (класс) ЛА a_i, обеспечивающий его наибольшее значение, а линейная функция ценности $U_j(a_i)$ приобретает вид

$$U_j(a_i) = \begin{cases} 0, & I_j(a_i) < I_{j\min}, \\ \dfrac{I_j(a_i) - I_{j\min}}{I_{j\max} - I_{j\min}}, & I_{j\min} \le I_j(a_i) \le I_{j\max}, \\ 1, & I_j(a_i) > I_{j\max}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Таким образом, на основе БД выполненных ранее проектов (табл. 2) можно реализовать экспертно-статистический метод многокритериального выбора предпочтительного (с точки зрения возможности обеспечения требований к базовым функциям) типа перспективного ЛА путем выполнения следующих процедур.

1. На основе мнения группы экспертов относительно того, насколько жестко должны учитываться требования к каждой из базовых функций при определении облика перспективного ЛА, назначаются весовые коэффициенты ω_j^l, $j = \overline{1,N}$; $l = \overline{1,L}$.

2. Рассчитываются усредненные значения весов $\bar{\omega}_j$, выражающие коллективное мнение экспертов:

$$\bar{\omega}_j = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\omega_j^l. \quad (1.7)$$

3. Используя реализации $I_j^q(a_i), i = \overline{1,6}; j = \overline{1,N}; q = \overline{1,M_i}$, представленные в табл. 2, рассчитываются значения $U_j^q(a_i)$ функций ценности с помощью (1.5) или (1.6) в зависимости от того, какое значение интегрального показателя является наилучшим, т.е. помечен ли он в табл. 1 символом ↑ или символом ↓.

4. На основе полученных значений функций ценности $U_j^q(a_i)$ рассчитываются выборочные оценки их математических ожиданий:

$$\bar{U}_j(a_i) = \frac{1}{M_i}\sum_{q=1}^{M_i}U_j^q(a_i). \quad (1.8)$$

5. Оцениваются предпочтительности каждого типа (класса) ЛА по комплексу интегральных показателей, выражающих требования к базовым функциям перспективного ЛА:

$$\bar{U}(a_i) = \sum_{j=1}^{N}\bar{\omega}_j\bar{U}_j(a_i), \quad i = \overline{1,6}. \quad (1.9)$$

Полученные таким образом оценки $\bar{U}(a_i), i = \overline{1,6}$, отображаются лицу, принимающему решение (ЛПР), для последующего выбора предпочтительного типа (класса) перспективного ЛА в зависимости от реализуемого им принципа полета. Решение принимается в пользу того типа ЛА a_k, которому соответствует максимум величины $\bar{U}(a_i)$:

$$\bar{U}(a_k) = \max_{i=\overline{1,6}}\bar{U}(a_i). \quad (1.10)$$

Структура описанного алгоритма, реализующего экспертно-статистическую процедуру, приведена на рис. 1.

Основное преимущество описанного экспертно-статистического метода определения предпочтительного типа ЛА заключается в том, что наиболее сложный этап, связанный с выбором адекватных оценок $U_j^l(a_i)$, выражающих ценность каждого типа (класса) ЛА с точки зрения его способности обеспечить требуемые значения интегральных показателей, опирается на использование объективной информации, аккумулирующей накопленный опыт проектирования. Заметим, что число обсуждаемых классов может быть расширено за счет учета в пределах каждого класса некоторого числа подклассов. При этом описанные выше процедуры никак не изменятся.

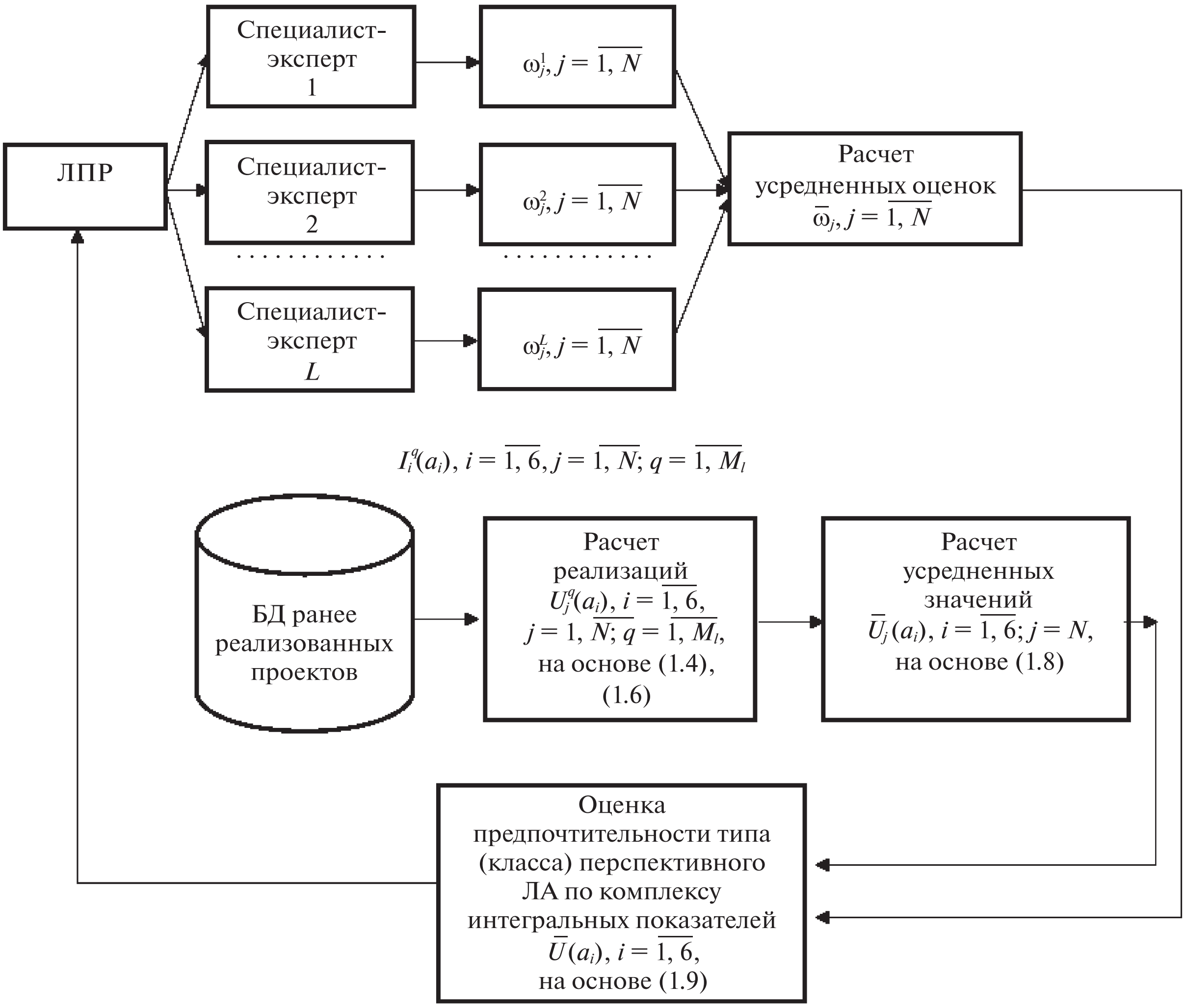


Рис. 1. Структура алгоритма, реализующего экспертно-статистическую процедуру определения предпочтительного (с точки зрения возможности обеспечения требований к базовым функциям) типа перспективного ЛА

2. Формирование облика перспективного ЛА с учетом накопленного научно-технологического задела на основе решения задачи математического программирования. Рассмотренный выше экспертно-статистический подход позволяет выбрать тип (класс) перспективного ЛА в зависимости от реализуемого принципа полета, использование которого способно обеспечить выполнение комплекса многодисциплинарных требований, предъявляемых к проектируемому ЛА.

Следующая задача, возникающая на этапе функционального проектирования, заключается в определении предварительного облика перспективного ЛА на основе анализа ограниченного набора потенциально приемлемых вариантов реализации ЛА выбранного типа.

В рамках развиваемой концепции функционального проектирования приемлемым полагается облик перспективного ЛА, описываемый вектором проектных параметров r, при котором обеспечивается одновременное выполнение комплекса многодисциплинарных требований. Формальный учет этих требований базируется на использовании интегральных показателей $I_j(r), j = \overline{1, N}$:

$$\begin{cases} I_{1\min} \le I_1(r) \le I_{1\max}, \\ I_{2\min} \le I_2(r) \le I_{2\max}, \\ I_{3\min} \le I_3(r) \le I_{3\max}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ I_{N\min} \le I_N(r) \le I_{N\max}. \end{cases} \qquad (2.1)$$

Предельные значения показателей $I_{j\min}, I_{j\max}$ устанавливает специалист, исходя из заданных требований к перспективному ЛА. Заметим, что система неравенств (2.1) позволяет в наиболее общем виде учесть требования к базовым функциям перспективного ЛА. Действительно, специалист может задать только максимальное значение некоторого интегрального показателя $I_j(r)$. В этом случае, допустимым полагается его любое значение, удовлетворяющее условию:

$$-\infty < I_j(r) \le I_{j\max} \ . \qquad (2.2)$$

Если специалист, исходя из требований, предъявляемых к некоторой базовой функции, задает минимально допустимое значение соответствующего интегрального показателя, приемлемым полагается любое его значение, удовлетворяющее неравенству:

$$I_{j\min} \le I_j(r) < \infty. \qquad (2.3)$$

Наконец, требование к некоторой базовой функции может выражаться конкретным значением соответствующего интегрального показателя. В этом случае специалист в рамках (2.1) выбирает равные предельные значения, что приводит к условию

$$I_j(r) = I_{j\min} = I_{j\max}. \qquad (2.4)$$

Конкретный набор интегральных показателей в (2.1) определяется пользователем в рамках выбранного типа (класса) проектируемого ЛА с учетом требований, предъявляемых к его базовым функциям.

Вектор $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)^{\mathrm{T}}$ в (2.1) представляет собой n-мерный вектор, компоненты которого $r_i, i = \overline{1,n}$, в совокупности объединяют летно-технические характеристики (ЛТХ), участвующие в вычислении интегральных показателей $I_j(r), j = \overline{1,N}$. Конкретный набор компонент вектора r и зависимостей $I_j(r)$, связывающих интегральные показатели I_j с ЛТХ (компонентами вектора r), будут разными в зависимости от выбранного типа (класса) проектируемого ЛА.

Вследствие различного уровня априорной информированности о значениях ЛТХ, участвующих в описании интегральных показателей $I_j(r)$, компоненты $r_i, i = \overline{1,n},$ вектора r могут интерпретироваться как:

1) детерминированные, если их значения точно известны и не подвержены вариациям (в качестве допустимого r_i задается единственное значение соответствующей компоненты):

$$r_{i\min} = r_{i\max} = r_i; \qquad (2.5)$$

2) неопределенные, если для них достоверно известны лишь диапазоны допустимых значений:

$$r_i \in [r_{i\min}, r_{i\max}] \qquad (2.6)$$

(специалист задает предельные значения $r_{i\min}, r_{i\max}$ соответствующей компоненты);

3) случайные, информация о которых ограничена лишь их статистическими характеристиками. В подобной ситуации в качестве интервала допустимых значений $[r_{i\min}, r_{i\max}]$ компоненты r_i выступает доверительный интервал, которому с заданной вероятностью, близкой к единице, принадлежат значения r_i. Универсальный алгоритм, пригодный для вычисления границ доверительного интервала $[r_{i\min}, r_{i\max}]$ в ситуациях, когда распределение случайной величины r_i является произвольным, описан в работе [3].

Таким образом, компоненты вектора ЛТХ r объединяют данные различной физической природы (детерминированные, неопределенные, случайные). Учитывая это, с целью унифицированного описания допустимых значений компонент вектора r, в качестве множества его допустимых значений будем использовать n-мерный параллелепипед W_r, задаваемый, совокупностью условий:

$$W_r = \{r : r_{i\min} \le r_i \le r_{i\max}, i = \overline{1,n}\}. \qquad (2.7)$$

В рамках подобного формального описания задача определения предварительного облика перспективного ЛА сводится к отысканию множества $\Omega \subset W_r$ комбинаций значений компонент вектора ЛТХ $r \in W_r$, при которых выполняется совокупность условий:

$$\begin{cases} I_{1\min} \le I_1(r) \le I_{1\max}, \\ I_{2\min} \le I_2(r) \le I_{2\max}, \\ I_{3\min} \le I_3(r) \le I_{3\max}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ I_{N\min} \le I_N(r) \le I_{N\max}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Численные методы поиска множества значений вектора ЛТХ $\Omega \subset W_r$, удовлетворяющих системе неравенств (2.8), обсуждаются ниже.

Наиболее простой метод предполагает представление множества допустимых значений ЛТХ W_r в виде дискретного набора реализаций $r^t, t = \overline{1,T}$. Для этого на отрезках $[r_{i\min}, r_{i\max}]$, $i = \overline{1,n}$, определяющих допустимые значения компонент вектора ЛТХ, выделяются q точек $r_i^1 = r_{i\min}$, r_i^2, r_i^3, ..., $r_i^q = r_{i\max}$, $i = \overline{1,n}$. Очевидно, что общее число реализаций $r^t, t = \overline{1,T}$, вектора ЛТХ в этом случае равно $T = q^n$.

В результате перебора реализаций $r^t, t = \overline{1,T}$, находится множество $\Omega_1 \subset W_r$, при котором выполняется первое из условий (2.8):

$$\Omega_1 = \{r^t : I_{1\min} \le I_1(r^t) \le I_{1\max}, t = \overline{1,T}\}. \tag{2.9}$$

Аналогичным образом определяются множества $\Omega_2 \subset W_r, \Omega_3 \subset W_r, \dots, \Omega_N \subset W_r$, при которых выполняются второе, третье и последующие из условий (2.8):

$$\begin{gathered} \Omega_2 = \{r^t : I_{2\min} \le I_2(r^t) \le I_{2\max}, t = \overline{1,T}\}, \\ \Omega_3 = \{r^t : I_{3\min} \le I_3(r^t) \le I_{3\max}, t = \overline{1,T}\}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Omega_N = \{r^t : I_{N\min} \le I_N(r^t) \le I_{N\max}, t = \overline{1,T}\}. \end{gathered} \tag{2.10}$$

В итоге получаем множество значений вектора ЛТХ $\Omega \subset W_r$, удовлетворяющее системе неравенств (2.8), как пересечение полученных таким образом множеств $\Omega_1 \subset W_r$, $\Omega_2 \subset W_r$, ..., $\Omega_N \subset W_r$:

$$\Omega = \{r^t : \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \ldots \cap \Omega_N, t = \overline{1,T}\}. \tag{2.11}$$

Главный недостаток подобной процедуры определения предварительного облика перспективного ЛА путем перебора допустимых значений ЛТХ заключается в том, что она требует проведения большого числа вычислений, объем которых лавинообразно увеличивается с ростом размерности вектора r. Учитывая это, рассмотрим численный метод определения множества Ω, основанный на решении задачи математического программирования.

Введем в рассмотрение скалярные функции $\varphi_j(r), j = \overline{1,N}$, количественно выражающие для любого фиксированного вектора ЛТХ r степень выполнения каждого из условий (2.8). Эти функции определим следующим образом:

$$\varphi_j(r) = \begin{cases} I_j(r) - I_{j\min}, & I_j(r) < I_{j\min}, \\ 0, & I_{j\min} \le I_j(r) \le I_{j\max}, \\ I_j(r) - I_{j\max}, & I_j(r) > I_{j\max}. \end{cases} \tag{2.12}$$

Выражение (2.12) задает способ определения функций $\varphi_j(r)$ для наиболее общего случая, когда для каждого интегрального показателя $I_j(r)$, выражающего требования к базовым функциям перспективного ЛА, заданы минимально допустимое и максимально допустимое значения.

Если специалист задает только максимальное значение некоторого интегрального показателя $I_j(r)$, приемлемым полагается его любое значение, удовлетворяющее условию:

$$-\infty < I_j(r) \le I_{j\max}.$$

В этом случае выражение для соответствующей функции $\varphi_j(r)$ несколько упрощается и принимает вид

$$\varphi_j(r) = \begin{cases} 0, & I_j(r) \le I_{j\max}, \\ I_j(r) - I_{j\max}, & I_j(r) > I_{j\max}. \end{cases} \tag{2.13}$$

Если же специалист, исходя из требований, предъявляемых к некоторой базовой функции, задает только минимально допустимое значение соответствующего интегрального показателя, приемлемым полагается любое его значение, удовлетворяющее неравенству:

$$I_{j\min} \le I_j(r) < \infty.$$

В подобной ситуации выражение для функции $\varphi_j(r)$ примет вид

$$\varphi_j(r) = \begin{cases} I_j(r) - I_{j\min}, & I_j(r) < I_{j\min}, \\ 0, I_{j\min} \le I_j(r). \end{cases} \tag{2.14}$$

Наконец, если требование к некоторой базовой функции выражается определенным, конкретным значением соответствующего интегрального показателя

$$I_j(r) = I_{j\min} = I_{j\max} = I_j^*,$$

то выражение для функции $\varphi_j(r)$ запишется как

$$\varphi_j(r) = \begin{cases} I_j(r) - I_j^*, & I_j(r) \ne I_j^*, \\ 0, & I_j(r) = I_j^*. \end{cases} \tag{2.15}$$

Далее определим скалярную функцию $\Phi(r)$, количественно выражающую для любого фиксированного вектора ЛТХ r степень выполнения всей совокупности условий (2.8):

$$\Phi(r) = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j^2(r). \tag{2.16}$$

В рамках подобного представления задача сводится к отысканию такого вектора ЛТХ r^*, при котором достигается минимум скалярной функции $\Phi(r)$:

$$\Phi(r^*) = \min_{r \in W_r} \Phi(r). \tag{2.17}$$

Если при этом $\Phi(r^*) = 0$, облик перспективного ЛА, описываемый вектором ЛТХ r^*, является приемлемым с точки зрения выполнения совокупности требований (2.8).

Задача минимизации вида (2.17) есть ни что иное как задача условной оптимизации [4]. Для ее решения можно использовать метод случайного поиска [5] с проверкой принадлежности решения множеству допустимых значений. В результате выполнения случайного поиска находится вектор ЛТХ r^*, при котором достигается минимум скалярной функции $\Phi(r)$. При этом возможны следующие ситуации.

1. $\Phi(r^*) = 0$. Выполнение этого равенства означает, что облик проектируемого ЛА, описываемый вектором ЛТХ $r^* \in W_r$, удовлетворяет требованиям (2.8), предъявляемым к базовым функциям.

Множество W_r в (2.8) определяет допустимые значения ЛТХ, которые могут быть достигнуты с учетом текущего уровня развития авиационных технологий и накопленного опыта проектирования. Следовательно, вектор ЛТХ r^* задает облик перспективного ЛА, удовлетворяющего требованиям к базовым функциям, который может быть реализован на существующем уровне развития технологий.

2. $\Phi(r^*) \ne 0$. Полученный результат указывает на невозможность создания перспективного ЛА, удовлетворяющего всей совокупности требований к базовым функциям, на современном

уровне развития авиационных технологий. Возникает следующая задача, связанная с формированием облика перспективного ЛА с учетом внедрения перспективных научно-технологических решений и оценки возможности выполнения заданных требований к базовым функциям перспективного ЛА на основе этих решений. Формализация этой задачи и возможный способ ее решения рассматриваются ниже. Очевидно, что подобная задача возникает в случае, когда накопленный научно-технологический задел не позволяет сформировать ЛА, удовлетворяющий комплексу многодисциплинарных требований к базовым функциям перспективного ЛА выбранного типа.

3. Формирование облика проектируемого ЛА с учетом перспективных научно-технических решений на основе решения обобщенной задачи минимизации. Как указывалось выше, подобная задача возникает тогда, когда накопленный научно-технологический задел не позволяет сформировать ЛА, удовлетворяющий комплексу многодисциплинарных требований к базовым функциям перспективного ЛА выбранного типа. Формализованным признаком подобной ситуации является неравенство

$$\Phi(r^*) = \min_{r \in W_r} \Phi(r) \neq 0, \tag{3.1}$$

где $\Phi(r)$ – скалярная функция, которая количественно выражает степень одновременного выполнения всего комплекса многодисциплинарных требований, предъявляемых к проектируемому ЛА, рассчитываемая на основе (2.12)–(2.16).

Заметим, что в процессе решения задачи оптимизации (3.1) будет найден оптимальный вектор ЛТХ r^*, описывающий облик будущего ЛА, и соответствующие этому вектору функции $\varphi_j(r^*)$, $j = \overline{1, N}$, количественно выражающие степень выполнения каждого из требований, предъявляемых к базовым функциям перспективного ЛА, на текущем уровне научно-технологического развития.

Объектом исследования являются отличные от нуля функции $\varphi_j(r^*) \neq 0$, конкретизирующие те отдельные требования к базовым функциям, которые не могут быть удовлетворены на текущем уровне развития технологий. Список этих базовых функций отображается специалистам для их последующего анализа. Каждая из функций, для которой имеет место неравенство $\varphi_j(r^*) \neq 0$, в соответствии с (2.12)–(2.15) имеет знак, указывающий на то, что именно стало причиной нарушения заданных требований.

1. Если $\varphi_j(r^*) < 0$, значение соответствующего интегрального показателя $I_j(r^*)$, которое может быть достигнуто на современном уровне научно-технологического развития, меньше минимально допустимого значения $I_{j\min}$, заданного специалистом с учетом требований к соответствующей базовой функции. Фактически рассматриваемая ситуация означает следующее: на современном уровне научно-технологического развития невозможно создание ЛА, обеспечивающего минимально допустимое значение интегрального показателя $I_{j\min}$. Однако возможно создание перспективного ЛА, если несколько ослабить предъявленное требование, приняв в качестве минимально допустимого значения $I_{j\min} = I_j(r^*)$.

2. При $\varphi_j(r^*) > 0$ значение соответствующего интегрального показателя $I_j(r^*)$, которое может быть обеспечено на современном уровне научно-технологического развития, больше максимально допустимого значения $I_{j\max}$. В этом случае можно говорить о возможности создания перспективного ЛА, если несколько ослабить предъявленное требование, приняв в качестве максимально допустимого значения $I_{j\max} = I_j(r^*)$.

3. Наконец, если требование к некоторой базовой функции выражается конкретным значением соответствующего интегрального показателя, тогда в соответствии с (2.15) неравенство $\varphi_j(r^*) \neq 0$ указывает на невозможность обеспечения значения этого показателя на современном уровне научно-технологического развития. В этом случае в качестве достижимого (с учетом накопленного опыта проектирования) принимается значение $I_j^* = I_j(r^*)$.

Таким образом, специалист, если это допустимо, имеет возможность несколько изменить исходные требования, предъявляемые к базовым функциям перспективного ЛА, путем соответствующей коррекции предельных значений интегральных показателей. Это касается показателей, для которых невозможно обеспечить выполнение исходных требований на существующем уровне научно-технологического развития. При этом специалист получает количественную оценку того, насколько должны быть расширены их предельные значения.

В некоторых ситуациях подобная корректировка исходных требований может оказаться вполне приемлемой и не приведет к значительным потерям функциональных возможностей проектируемого ЛА.

Однако чаще всего требуется жесткое выполнение исходных требований, предъявляемых к базовым функциям перспективного ЛА. В этом случае единственным способом выполнения исходных требований является использование перспективных научно-технологических решений, внедрение которых возможно в обозримой перспективе. Вопрос в том, какие именно перспективные научно-технологические решения являются наиболее приоритетными с точки зрения необходимости выполнения заданных требований к базовым функциям перспективного ЛА.

Влияние перспективных научно-технологических решений проявляется изменениями формы и размеров множества допустимых значений ЛТХ W_r. Таким образом, в задаче определения облика проектируемого ЛА с учетом перспективных решений множество W_r становится дополнительным параметром оптимизации, что приводит к задаче вида

$$\Phi(W_r^*, r^*) = \min_{W_r \in \Xi} \min_{r \in W_r} \Phi(r) = 0, \tag{3.2}$$

где Ξ – семейство всех (любых) множеств допустимых значений ЛТХ, которые могут быть сформированы с учетом внедрения перспективных научно-технологических решений. В дальнейшем для получения конструктивного алгоритма решения обобщенной задачи минимизации (3.2) ограничимся параметрическим описанием множества Ξ в классе многомерных параллелепипедов.

В результате решения задачи оптимизации (3.2) будут рассчитаны:

1) W_r^* – оптимальное (с учетом внедрения перспективных научно-технологических решений) множество допустимых значений ЛТХ, при котором обеспечивается выполнение заданных требований к базовым функциям проектируемого ЛА;

2) r^* – оптимальный вектор ЛТХ, определяющий возможный (с учетом внедрения перспективных научно-технологических решений) облик проектируемого ЛА, при котором обеспечивается выполнение заданных требований к базовым функциям проектируемого ЛА.

Задачи оптимизации, подобные (3.2), достаточно глубоко исследованы в рамках обобщенного минимаксного подхода [6–9], где предложены различные численные процедуры оптимизации доверительных множеств. С точки зрения возможности практического использования наибольший интерес представляет алгоритм получения оптимального множества W_r^*, основанный на последовательной деформации начального параллелепипеда W_r. Рассмотрим основные шаги этого алгоритма более подробно с учетом его адаптации к особенностям рассматриваемой задачи.

Ш а г 1. Формируется начальное приближение W_r^0 для множества допустимых значений ЛТХ. Как указывалось ранее, в качестве начального приближения W_r^0 используется n-мерный параллелепипед, задаваемый совокупностью условий:

$$W_r^0 = \{r : r_{i\min}^0 \le r_i \le r_{i\max}^0, i = \overline{1,n}\}, \tag{3.3}$$

где $r_{i\min}^0$, $r_{i\max}^0, i = \overline{1,n},$ – начальные предельные значения ЛТХ, определяемые с учетом текущего уровня научно-технологического развития авиастроения и накопленного опыта проектирования ЛА определенного типа. Дальнейшая процедура, обеспечивающая получение оптимального множества W_r^*, базируется на идее метода оптимизации нулевого порядка – метода покоординатного спуска [5]. Заметим, что описываемая ниже процедура во многом повторяет алгоритм параметрической оптимизации доверительных множеств в классе кубов, изложенный [9].

Ш а г 2. Последовательно варьируется значение $r_{1\min}$ в сторону уменьшения:

$$r_{1\min}^k = r_{1\min}^0 - k\delta r_1, \quad k = 1.2,3\ldots, \tag{3.4}$$

где δr_1 – заданный шаг поиска по компоненте r_1. При этом предельные значения всех других компонент вектора r принимаются равными: $r_{1\max} = r_{1\max}^0$, $r_{i\min} = r_{i\min}^0, r_{i\max} = r_{j\max}^0, i = \overline{2,n}$. Таким образом, для каждого нового значения $r_{1\min}^k$ имеем приближение W_r^k для множества W_r, задаваемое совокупностью условий:

$$W_r^k = \{r : r_{1\min}^k \le r_1 \le r_{1\max}^0, r_{j\min}^0 \le r_j \le r_{j\max}^0, j = \overline{2,n}\}. \tag{3.5}$$

Сформированное таким образом множество $W_r^k \in \Xi$ в дальнейшем используется для решения задачи оптимизации (3.1), в результате чего находится вектор $\hat{r}^k$, удовлетворяющий условию

$$\Phi(\hat{r}^k) = \min_{r \in W_r^k} \Phi(r). \tag{3.6}$$

Ш а г 3. В результате перебора значений $r_{1\min}^k, k = 1,2,3\ldots$ находится, во-первых, граница $r_{1\min}^*$, во-вторых, соответствующее этой границе множество $W_r^* \in \Xi$, определяемое условиями (3.5), а также вектор ЛТХ r^*, при которых достигается минимум критериальной функции $\Phi(r)$.

Ш а г 4. Проверяется условие

$$\Phi(r^*) = 0. \tag{3.7}$$

Если это равенство выполняется, процесс уточнения множества допустимых (с учетом внедрения перспективных научно-технических решений) значений ЛТХ может быть завершен. При этом приоритет имеют те перспективные технологии, которые направлены на расширение нижней границы параметра r_1.

На практике обычно строгое выполнение условия (3.7) не требуется, т.е. приемлемым полагается вектор ЛТХ, для которого справедливо неравенство:

$$|\Phi(r^*)| \le \varepsilon,$$

где ε – малая положительная константа, задаваемая специалистом.

Если же приведенное выше равенство (3.7) не обеспечивается, значение $r_{1\min}$ фиксируется $r_{1\min} = r_{1\min}^*$ и аналогичным образом сначала варьируются максимально допустимые значения $r_{1\max}^k = r_{1\max}^0 + k\delta r_1, k = 1,2,3\ldots$, с повторением шагов 1–4. В результате возможны два исхода:

последовательное увеличение значения $r_{1\max}$ приводит к (3.7), описанная выше процедура завершается;

за счет роста значения $r_{1\max}$ не удается добиться справедливости равенства (3.7). В этом случае продолжается реализация описанной процедуры для предельных значений компонент r_2, r_3 и т.д.

Таким образом, в результате выполнения шагов 1–4 находится (рис. 2):

– оптимальное множество допустимых значений ЛТХ W_r^* с конкретизацией тех приоритетных научно-технических решений, внедрение которых обеспечит создание ЛА, отвечающего заданным требованиям к базовым функциям;

– вектор ЛТХ r^*, определяющий возможный облик проектируемого ЛА.

Следующий раздел статьи иллюстрирует работу алгоритмов, описанных в разд. 2, 3, на примере формирования предварительного облика перспективного самолета транспортной категории в рамках развитой концепции функционального проектирования.

4. Пример функционального проектирования перспективного самолета транспортной категории. Допустим, что целью функционального проектирования является формирование предварительного облика перспективного самолета транспортной категории, отвечающего следующим требованиям:

1) вес перевозимой целевой нагрузки – $G_{\text{ц.н}} = 60$ т,

2) дальность полета при полной загрузке $L_{\text{п.з}} = 5000$ км,

3) перегоночная дальность полета (без загрузки) $L_{\text{б.з}} = 12000$ км,

4) способность взлетать и совершать посадку на аэродромы с длиной взлетно-посадочной полосы (ВПП) не более 1300 м.

При формировании облика перспективного ЛА ограничимся только требованиями весовой и динамической эффективности. Это допущение никак не повлияет на существо развиваемой

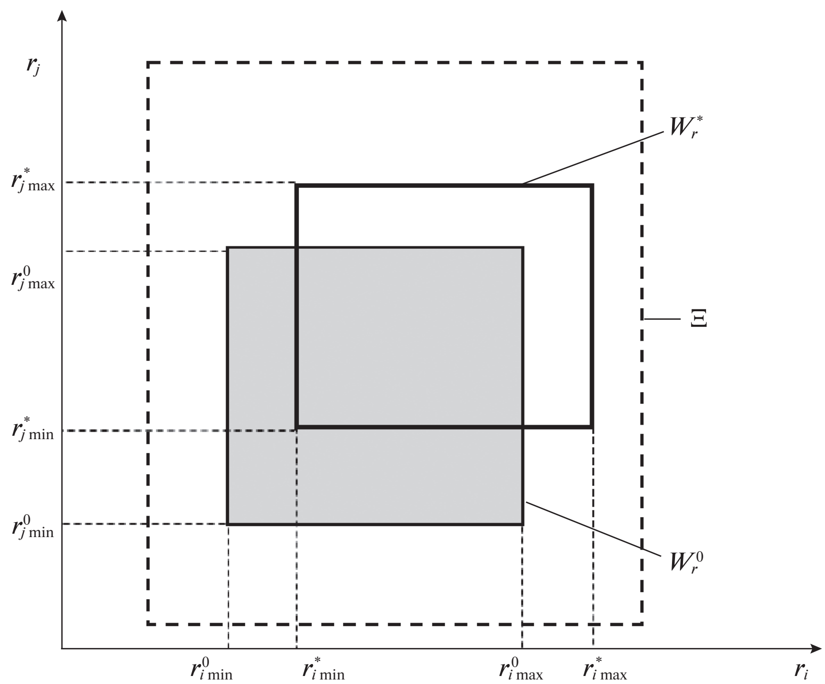


Рис. 2. Иллюстрация процедуры оптимизации множества допустимых значений ЛТХ с учетом перспективных научно-технологических решений

концепции функционального проектирования, но обеспечит более наглядное представление результатов.

Прежде всего определим зависимости $I_j(r), j = \overline{1,N}$, составляющие основу развиваемой концепции функционального проектирования.

Интегральной характеристикой весовой эффективности проектируемого ЛА выступает его весовая отдача – безразмерная величина, равная отношению массы полезной нагрузки ЛА $m_{\text{п.н}}$ к его взлетной массе m_0:

$$I_1 = I_1(r) = \bar{m}_{\text{п.н}} = \frac{m_{\text{п.н}}}{m_0}. \quad (4.1)$$

На величину весовой отдачи накладывается дополнительное ограничение, которое непосредственно следует из уравнения существования самолета:

$$\bar{m}_{\text{пн}} + \bar{m}_{\text{кон}} + \bar{m}_{\text{с.у}} + \bar{m}_{\text{о.у}} + \bar{m}_{\text{т}} = 1, \quad (4.2)$$

где $\bar{m}_{\text{кон}} = m_{\text{кон}}/m_0$ – относительная масса конструкции ЛА; $\bar{m}_{\text{с.у}} = m_{\text{с.у}}/m_0$ – относительная масса силовой установки; $\bar{m}_{\text{о.у}} = m_{\text{о.у}}/m_0$ – относительная масса оборудования управления; $\bar{m}_{\text{т}} = m_{\text{т}}/m_0$ – относительная масса топлива.

В итоге, требование к весовой эффективности ЛА может быть выражено условием

$$I_{1\min} \le I_1(r) = 1 - (\bar{m}_{\text{кон}} + \bar{m}_{\text{с.у}} + \bar{m}_{\text{о.у}} + \bar{m}_{\text{т}}) \le I_{1\max}. \quad (4.3)$$

Из (4.3) непосредственно следует набор ЛТХ (компонент вектора r), участвующих в расчете показателя весовой эффективности: $r_1 = m_0$; $r_2 = \bar{m}_{\text{кон}}$; $r_3 = \bar{m}_{\text{с.у}}$; $r_4 = \bar{m}_{\text{о.у}}$; $r_5 = \bar{m}_{\text{т}}$.

Существенно сложнее оценить динамическую эффективность ЛА, которая, как правило, характеризуется комплексом показателей. Набор этих показателей может быть разным для ЛА различных классов и возлагаемых на них целевых задач. Введем некоторые базовые понятия, используемые в дальнейшем для оценки динамической эффективности на этапе функционального проектирования.

Режим полета ЛА – этап или участок управляемого движения ЛА, характеризующийся конкретной целью (взлет, посадка, крейсерский полет и др.).

Расчетный случай – совокупность условий для выбранного режима полета, подлежащих обязательному учету (расчету) в процессе функционального проектирования, которые определяются тактико-техническими требованиями на проектируемое изделие и действующими нормами летной годности.

В частности, для оценки динамической эффективности самолетов транспортной категории используются следующие расчетные случаи.

1. Полет на дальность. Типичная постановка задачи: определить относительный вес топлива, достаточный для полета на заданную дальность при заданных значениях скорости и высоты полета.

2. Взлет. Предполагается определение допустимых значений проектных параметров (прежде всего потребная тяговооруженность), при которых обеспечивается взлет с ВПП заданной длины при соблюдении требований норм летной годности по высоте и скорости взлета. Безопасной высотой по международным нормам считается высота 10.7 м [10]. Безопасной скоростью является скорость, на которой самолет обладает устойчивостью и управляемостью и может перейти к следующему этапу – начальному набору высоты.

3. Продолженный взлет – взлет многодвигательного самолета с отказом двигателя в процессе взлета. Он протекает как нормальный полет до момента отказа двигателя, после чего взлет продолжается и завершается с отказавшим двигателем. В этом случае необходимо определить допустимые значения проектных параметров, при которых возможно продолжение взлета с неработающим двигателем по траектории наиболее крутого набора высоты и соблюдение норм летной годности самолетов соответствующей категории к градиенту (углу) набора высоты.

4. Крейсерский полет. Отыскание допустимых значений проектных параметров, при которых обеспечивается крейсерский полет на режиме минимального удельного расхода топлива при заданных значениях крейсерской скорости и крейсерской высоты.

5. Посадка. Определение допустимых проектных параметров, при которых обеспечивается посадка на ВПП требуемой длины с соблюдением норм летной годности по скорости захода на посадку.

Основная идея предлагаемого метода оценки динамической эффективности заключается в следующем: для каждого расчетного случая используются функциональные зависимости $I_2(r) - I_6(r)$, описывающие влияние проектных параметров ЛА на тактико-технические требования и требования норм летной годности, которые основаны на базовых соотношениях теории полета ЛА как материальной точки.

Для самолетов транспортной категории эти зависимости имеют следующий вид [11, 12]:

$$\begin{cases} I_2(r) = r_6 - \dfrac{r_7 r_8}{r_9} \ln \dfrac{1}{1 - r_5} = 0, \\ I_3(r) = r_{10} - \dfrac{1.656}{g\rho_0 r_{11}} \dfrac{r_{12}}{r_{13} r_{14}} = 0, \\ I_4(r) = r_{14} - \dfrac{r_{15}}{r_{15} - 1} \dfrac{1}{r_{16}} \left(\dfrac{1}{r_{17}} + r_{18} \right) \geq 0, \\ I_5(r) = r_{14} - \dfrac{1}{r_{19} r_{20} r_7} \geq 0, \\ I_6(r) = r_{12} - \dfrac{r_{21} r_{22} r_{10}}{30.2(1 - r_5)} \leq 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

где $r_5 = \overline{m}_{\text{т}}$ – относительная масса топлива; $r_6 = L$ – дальность полета; $r_7 = K_{\text{кр}}$ – аэродинамическое качество на крейсерском режиме; $r_8 = V_{\text{кр}}$ – скорость на крейсерском режиме; $r_9 = C_{\text{кр}}$ – расход топлива на крейсерском режиме; $r_{10} = L_{\text{впп}}$ – длина ВПП; $r_{11} = k_V$ – коэффициент, определяющий скорость изменения тяги в процессе разбега; $r_{12} = p_{\text{н}}$ – нагрузка на крыло; $r_{13} = C_{\text{у взл}}$ – максимальное значение коэффициента подъемной силы на взлете; $r_{14} = \overline{R}_0$ – стартовая тяговооруженность, $r_{15} = N_{\text{дв}}$ – количество двигателей; $r_{16} = \overline{R}_{HV}$ – высотно-скоростная характеристика двигателя на взлете; $r_{17} = K^{N-1}_{\max\text{ взл}}$ – максимальное аэродинамическое качество при отказе одного двигателя; $r_{16} = \theta$ – градиент изменения высоты на взлете; $r_{19} = \overline{R}(H_{\text{кр}}, V_{\text{кр}})$ – удельная тяга

Таблица 3. Значение компонент вектора ЛТХ, получененые в процессе случайного поиска

Итерация	Взлетная масса, кг	Степень двухконтурности двигателя	Коэффициент лобового сопротивления на крейсерском режиме	Расход топлива на крейсерском режиме, кг/кгс в час	Длина разбега, м	Длина пробега, м	Крейсерская скорость, км/ч	Масса топлива, кг	Весовая отдача	Относительный вес конструкции
1	200000	11.0	0.010	0.58	1652	1369	942	26352	0.4	0.57
2	200000	9.0	0.010	0.59	1652	1362	942	27224	0.4	0.56
3	200000	4.5	0.010	0.66	1652	1337	942	30347	0.5	0.55
4	200000	11.0	0.015	0.55	1652	1308	851	34074	0.5	0.53
5	200000	9.0	0.015	0.57	1652	1299	851	35257	0.5	0.52
6	200000	4.5	0.015	0.64	1652	1265	851	39489	0.5	0.50
7	200000	11.0	0.020	0.53	1652	1254	792	40953	0.5	0.50
8	200000	9.0	0.020	0.55	1652	1242	792	42420	0.5	0.49
9	160000	11.0	0.010	0.55	1031	1085	842	22382	0.5	0.49
10	160000	9.0	0.010	0.57	1031	1079	842	23162	0.5	0.48
11	160000	4.5	0.010	0.63	1031	1057	842	25955	0.5	0.46
12	200000	4.5	0.020	0.62	1652	1201	792	47672	0.5	0.46
13	160000	11.0	0.015	0.52	1031	1032	761	29022	0.6	0.44
14	160000	9.0	0.015	0.54	1031	1024	761	30080	0.6	0.44
15	160000	4.5	0.015	0.61	1031	994	761	33865	0.6	0.41
16	160000	11.0	0.020	0.51	1031	986	708	34950	0.6	0.41
17	160000	9.0	0.020	0.53	1031	975	708	36262	0.6	0.40
18	160000	4.5	0.020	0.59	1031	938	708	40959	0.6	0.37
19	120000	11.0	0.010	0.51	566	802	729	18216	0.7	0.35
20	120000	9.0	0.010	0.53	566	797	729	18892	0.7	0.34
21	120000	4.5	0.010	0.60	566	778	729	21310	0.7	0.32
22	120000	11.0	0.015	0.49	566	759	659	23704	0.7	0.30
23	120000	9.0	0.015	0.51	566	752	659	24620	0.7	0.29
24	120000	4.5	0.015	0.58	566	726	659	27898	0.7	0.27
25	120000	11.0	0.020	0.48	566	721	613	28616	0.7	0.26
26	120000	9.0	0.020	0.50	566	712	613	29753	0.7	0.25
27	120000	4.5	0.020	0.57	566	680	613	33820	0.8	0.22

на крейсерском режиме в зависимости от высоты и скорости; $r_{20} = \overline{R}_{\text{др}}$ — коэффициент, учитывающий изменение тяги двигателя при дросселировании; $r_{21} = C_{\text{у пос}}$ — максимальное значение коэффициента подъемной силы на посадке; $r_{22} = k_l$ — поправочный коэффициент, используемый для расчета длины пробега по ВПП; ρ_0 — плотность стандартной атмосферы у поверхности земли.

Конкретные значения компонент вектора r могут быть заданы тактико-техническими требованиями или определяться на основе накопленного опыта проектирования.

Полученные таким образом зависимости $I_1(r) - I_6(r)$, описывающие требования к базовым функциям проектируемого ЛА, в дальнейшем используются для определения его предварительного облика.

Таблица 4. Варианты обликов ЛА

Итерация	Взлетная масса, кг	Степень двухконтурности двигателя	Коэффициент лобового сопротивления на крейсерском режиме	Расход топлива на крейсерском режиме, кг/кгс в час	Длина разбега, м	Длина пробега, м	Крейсерская скорость, км/ч	Масса топлива, кг	Весовая отдача	Относительный вес конструкции
1	120000	4.5	0.015	0.58	566	418	659	66956	0.0	–0.06
2	120000	11.0	0.020	0.48	566	405	613	68679	0.0	–0.07
3	120000	9.0	0.020	0.50	566	383	613	71406	0.0	–0.10
4	120000	4.5	0.020	0.57	566	306	613	81169	0.0	–0.18
5	200000	11.0	0.010	0.58	1652	1078	942	63245	0.6	0.38
6	200000	9.0	0.010	0.59	1652	1062	942	65339	0.6	0.37
7	200000	4.5	0.010	0.66	1652	1002	942	72833	0.7	0.34
8	200000	11.0	0.015	0.55	1652	932	851	81778	0.7	0.29
9	160000	11.0	0.010	0.55	1031	838	842	53718	0.7	0.29
10	160000	9.0	0.010	0.57	1031	823	842	55590	0.7	0.28
11	200000	9.0	0.015	0.57	1652	910	851	84616	0.7	0.28
12	160000	4.5	0.010	0.63	1031	770	842	62293	0.8	0.24
13	200000	4.5	0.015	0.64	1652	830	851	94773	0.8	0.23
14	200000	11.0	0.020	0.53	1652	802	792	98288	0.8	0.21
15	200000	9.0	0.020	0.55	1652	774	792	101808	0.8	0.19
16	160000	11.0	0.015	0.52	1031	712	761	69654	0.8	0.19
17	160000	9.0	0.015	0.54	1031	692	761	72191	0.8	0.17
18	120000	11.0	0.010	0.51	566	602	729	43719	0.9	0.14
19	200000	4.5	0.020	0.62	1652	675	792	114412	0.9	0.13
20	120000	9.0	0.010	0.53	566	589	729	45340	0.9	0.12
21	160000	4.5	0.015	0.61	1031	621	761	81276	0.9	0.12
22	160000	11.0	0.020	0.51	1031	600	708	83880	0.9	0.10
23	160000	9.0	0.020	0.53	1031	575	708	87029	0.9	0.08
24	120000	4.5	0.010	0.60	566	543	729	51145	0.9	0.07
25	120000	11.0	0.015	0.49	566	498	659	56890	1.0	0.03
26	160000	4.5	0.020	0.59	1031	487	708	98301	1.0	0.01
27	120000	9.0	0.015	0.51	566	480	659	59088	1.0	0.01

Решение задачи формирования облика перспективного самолета транспортной категории, удовлетворяющего комплексу требований (4.3), (4.4), начинается с решения задачи оптимизации (2.17), в которой множество допустимых значений ЛТХ представляет собой параллелепипед, задаваемый совокупностью условий:

$$W_r = \left\{ r : r_{i\min} \le r_i \le r_{i\max}, i = \overline{1,22} \right\}. \tag{4.5}$$

Предельные значения ЛТХ $r_{i\min}, r_{i\max}, i = \overline{1,22}$, в этих условиях определялись на основе обобщения накопленного опыта проектирования самолетов транспортной категории.

Для решения задачи оптимизации (2.17) использовался метод случайного поиска, реализуемый в виде итерационной процедуры последовательного уточнения значений ЛТХ, присутствующих в описании условий (4.3), (4.4).

Таблица 5. Варианты обликов ЛА, полученные с учетом внедрения перспективных научно-технических решений

Направления деформации множества допустимых значений ЛТХ	Взлетная масса, кг	Степень двухконтурности двигателя	Коэффициент лобового сопротивления на крейсерском режиме	Расход топлива на крейсерском режиме, кг/кгс в час	Длина разбега, м	Длина пробега, м	Крейсерская скорость, км/ч	Масса топлива, кг	Весовая отдача	Относительный вес конструкции
Расширение диапазонов значений аэродинамических характеристик	200000	9.0	0.01	0.59	1652	1062	942	65339	0.6	0.37
Расширение диапазонов массовых и энергетических характеристик	220000	9.0	0.02	0.56	1412	875	830	108963	0.8	0.23
Улучшение расходных показателей	200000	11.0	0.02	0.53	1652	802	792	98288	0.8	0.21
Базовый вариант	200000	9.0	0.02	0.55	1652	774	792	101808	0.8	0.19

В табл. 3 приведены наиболее значимые ЛТХ, полученные в процессе решения задачи оптимизации (2.17) на основе итерационной процедуры случайного поиска.

Варианты обликов ЛА, представленные в первых 16 строках табл. 3, являются абсолютно неприемлемыми с точки зрения сформулированных требований и должны быть исключены из процесса дальнейшего анализа как заведомо неприемлемые.

Варианты обликов, расположенные в следующих 11 строках, могут представлять потенциальный интерес, демонстрируя близкие к нулю значения критериальной функции ($0 < \Phi(r^*) \le 49.6$). Наилучшим решением, с точки зрения задачи (2.17), при котором выполняется условие $\Phi(r^*) = 0$, является облик, перспективного ЛА, описываемый комбинацией значений ЛТХ, представленных в последней строке табл. 3. Именно этот вариант и должен стать объектом последующего углубленного анализа на этапах структурного, компоновочного и обликового проектирования.

Мы рассмотрели пример, в котором возможно формирование облика ЛА, допускающего реализацию на современном уровне научно-технологического развития авиастроения.

Ужесточим требования, предъявляемые к перспективному ЛА, увеличив перегоночную дальность полета (без загрузки) до величины $L_{б.з} = 17000$ км.

Варианты обликов ЛА, полученные в процессе решения задачи (2.17) приведены в табл. 4.

Заметим, что ни один из представленных в табл. 4 вариантов облика перспективного ЛА не обеспечивает выполнения условия $\Phi(r^*) = 0$. Это значит, что создание ЛА, удовлетворяющего сформулированным требованиям, на современном уровне научно-технологического развития невозможно.

В этом случае в рамках функционального проектирования возникает задача, связанная с определением перспективных научно-технических решений, внедрение которых обеспечит создание ЛА, удовлетворяющего предъявленным требованиям. Эта задача интерпретирована нами как обобщенная задача минимизации (3.2), результатом решения которой является оптимальное множество допустимых значений ЛТХ, рассчитанное с учетом перспективных научно-технических решений.

Результаты оптимизации множества допустимых значений ЛТХ и варианты обликов перспективных ЛА, полученные в ходе решения обобщенной задачи минимизации, приведены в табл. 5.

Анализ полученных результатов показывает, что наибольшего эффекта можно ожидать от расширения диапазонов значений аэродинамических характеристик (максимальные значения коэффициентов подъемной силы) и, в несколько меньшей степени, за счет улучшения расходных показателей (расход топлива на крейсерском режиме), что и определяет приоритетные направления дальнейших исследований. Заметим, что реализация этих мер обеспечивает решение задачи (3.2), а значит, делает возможным создание перспективного ЛА, удовлетворяющего заявленным требованиям.

Заключение. Таким образом, развитая концепция функционального проектирования позволяет оптимизировать процесс предварительного проектирования, предшествующего этапам структурного, компоновочного и обликового проектирования, путем:

1) сокращения временных и материальных затрат на создание перспективных образцов ЛА вследствие исключения из процесса последующего углубленного анализа вариантов облика, которые являются заведомо неприемлемыми с точки зрения предъявленных требований;

2) определения предварительного облика перспективного ЛА, обеспечивающего требования к его базовым функциям и реализуемого на существующем научно-технологическом уровне развития авиастроения, с целью его последующего уточнения на этапах структурного, компоновочного и обликового проектирования;

3) определения перспективных научно-технических решений, внедрение которых обеспечит создание перспективного ЛА, отвечающего всем заявленным требованиям, сформулированным в техническом задании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Егер С.М., Матвеенко А.М., Шаталов И.А.* Основы авиационной техники: учебник / Под ред. И.А. Шаталова. М.: Изд-во МАИ, 1999.
2. *Семенов С.С., Щербинин В.В.* Оценка технического уровня систем наведения управляемых авиационных бомб. М.: Машиностроение, 2015.
3. *Евдокименков В.Н., Карлов В.И., Красильщиков М.Н.* Оценка вероятностных показателей качества, близких к единице, на основе методов планирования эксперимента // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1989. № 4.
4. *Стрекаловский А.С.* Введение в выпуклый анализ: учеб. пособие. Иркутск: Иркут. ун-т, 2009.
5. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.
6. *Кибзун А.И., Лебедев А.А., Малышев В.В.* О сведении задачи с вероятностными ограничениями к эквивалентной ей минимаксной // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1984. № 4.
7. *Малышев В.В.* Методы оптимизации ЛА при действии случайных и неопределенных факторов. М.: Изд-во МАИ, 1987.
8. *Малышев В.В., Красильщиков М.Н., Карлов В.И.* Оптимизация наблюдения и управления летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1989.
9. *Евдокименков В.Н., Динеев В.Г., Карп К.А.* Инженерные методы вероятностного анализа авиационных и космических систем. М.: Физматлит, 2010.
10. Авиационные правила. Часть 25. Нормы летной годности самолетов транспортной категории. М.: Авиаиздат, 2015.
11. *Чепурных И.В.* Динамика полета самолетов: учеб. пособие. Комсомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВПО “КнАГТУ”, 2014.
12. *Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В.* Динамика самолета. Пространственное движение. М.: Машиностроение, 1983

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 1, с. 124–144

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

УДК 681.51

ВЫБОР ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ РАСПОЛОЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВИГАТЕЛЕЙ-МАХОВИКОВ ПРИ УПРАВЛЕНИИ ВРАЩАТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

А. И. Игнатов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

e-mail: general_z@mail.ru

Поступила в редакцию 10.11.2020 г.
После доработки 13.09.2021 г.
Принята к публикации 27.09.2021 г.

Рассмотрены два возможных варианта расположения системы двигателей-маховиков на борту космического аппарата. Первый вариант – система из четырех маховиков, оси вращения которых расположены параллельно боковым ребрам четырехугольной пирамиды. Второй вариант – система из шести маховиков, оси вращения которых расположены параллельно боковым ребрам правильной шестиугольной пирамиды. Каждая система характеризуется геометрическими параметрами, определяющими угловые положения осей вращения маховиков. Построены области возможных значений суммарного кинетического момента, создаваемого системой маховиков, в том числе при отказе одного из них. Приведены параметрические зависимости для выбора наиболее рационального расположения маховиков, обеспечивающие максимально широкие возможности управления угловой скоростью космического аппарата. Рассмотрен режим стабилизации орбитальной ориентации аппарата с учетом воздействия внешних возмущающих моментов. Для этого режима получены зависимости, позволяющие выбрать значения геометрических параметров системы, обеспечивающие минимальную скорость накопления кинетического момента каждым из маховиков. Приведены результаты численного моделирования уравнений движения космического аппарата.

DOI: 10.31857/S0002338822010061

0. Введение. Комплекс электромеханических исполнительных органов (гиросистема), входящий в систему управления космическим аппаратом (КА), предназначен для создания управляющих моментов. Во многих случаях при создании длительно существующих КА использованию гиросистемы в составе системы управления нет альтернативы [1]. В то же время электромеханические исполнительные органы – одни из наиболее массивных и энергопотребляющих устройств, постоянно задействованных в процессе функционирования КА. В связи с этим задачи выбора типа исполнительных органов гиросистемы и оптимизации их характеристик являются актуальными.

Гиросистемы, используемые на КА, могут быть построены на базе трех основных типов электромеханических исполнительных органов:

управляющих двигателей-маховиков (маховиков);
двухстепенных силовых гироскопов (гиродинов);
трехстепенных силовых гироскопов.

В свою очередь силовые гироскопы могут быть реализованы:

с постоянным абсолютным значением кинетического момента;
с изменяемым абсолютным значением кинетического момента.

Для крупногабаритных и тяжелых КА с высокими требованиями к динамике и точности ориентации целесообразность применения гиросистемы на основе силовых гироскопов различного типа во многих случаях очевидна [2]. Для малых КА выбор типа исполнительных органов системы управления, как правило, ограничивается маховиками или гиродинами, что тоже является не тривиальной задачей. Между областями применения перечисленных устройств нельзя провести резких границ. Динамические требования к системе управления КА, включающей в свой состав гиросистему, во многом определяются множеством требуемых значений кинетического момента H_T. Множество H_T является областью изменения в связанной с КА системе координат вектора суммарного кинетического момента, создаваемого гиросистемой. Изменение этого вектора в указанной области в соответствии с реализуемыми в системе законами должно обеспечивать требуемое управление параметрами вращательного движения КА. Естественно, что множество H_T должно содержаться внутри множества максимальных значений кинетического момента H_C, реализуемых гиросистемой.

Таким образом, для всех вариантов построения гиросистемы должно быть обеспечено выполнение условия:

$$H_T \subset H_C. \tag{0.1}$$

При этом можно утверждать, что величина суммарного кинетического момента, создаваемого гиросистемой, будет достаточна для обеспечения требуемой угловой скорости вращения КА.

1. Область возможных значений кинетического момента системы маховиков. В работе в качестве электромеханических исполнительных органов рассматривается система управляющих двигателей-маховиков. Область вариации возможных значений суммарного кинетического момента H_C, создаваемого системой, зависит от количества маховиков, схемы их расположения относительно жестко связанной с КА системы координат и максимального значения кинетического момента, реализуемого каждым из маховиков.

Вектор $\mathbf{H}$ суммарного кинетического момента маховиков выражается формулой

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^{n} h_k \mathbf{g}_k, \tag{1.1}$$

где h_k – алгебраическое значение кинетического момента маховика с номером k, $k = \overline{1,n}$, $\mathbf{g}_k$ – орт оси вращения маховика с номером k, n – общее количество маховиков в системе. Здесь и далее считаем, что система всегда состоит из одинаковых маховиков. В этом случае $-h_{\max} \le h_k \le h_{\max}$, где $h_{\max}$ – абсолютная величина предельного значения кинетического момента отдельного маховика. Величина $h_{\max}$ – один из параметров системы.

Введем связанную с системой маховиков правую декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, в которой вектор $\mathbf{H}$ представлен своими компонентами H_i, $i = 1,2,3$. Рассмотрим область P_n пространства $R^3(H_1, H_2, H_3)$, заполняемую концами векторов (1.1) (начала векторов помещены в точку O). Чтобы обеспечить полную ориентацию КА, на нем должно быть установлено не менее трех маховиков [3], орты осей вращения которых линейно независимы. В общем случае область P_n представляет собой многогранник, обладающий центральной симметрией относительно точки O, для которого справедлива теорема Эйлера: $B - P + \Gamma = 2$, где $B = n(n-1) + 2$ – число вершин, $P = 2n(n-1)$ – число ребер, $\Gamma = n(n-1)$ – число граней. Если все маховики в системе одинаковые, то многогранник P_n является выпуклым, а все его грани – ромбы, каждая сторона которых имеет длину $2h_{\max}$ [4]. Стороны каждого ромба параллельны каким-либо из ортов $\mathbf{g}_k$ и $\mathbf{g}_j$, площадь соответствующего ромба равна $h_{\max}^2|\mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_j|$, где $k \ne j$, $j,k = \overline{1,n}$. При построении многогранника P_n, не ограничивая общности, будем использовать безразмерные параметры:

$$\tilde{\mathbf{H}} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{h}_k \mathbf{g}_k, \quad \tilde{h}_k = \frac{h_k}{h_{\max}}, \tag{1.2}$$

в этом случае $|\tilde{h}_k| \le 1$. Выражение (1.2) для краткости запишем в виде $\tilde{\mathbf{H}} = \langle \tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \ldots, \tilde{h}_n \rangle$. Рассмотрим две схемы расположения системы маховиков относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$.

1.1. Схема “четырехугольная пирамида”. Система состоит из четырех маховиков, оси вращения которых расположены параллельно боковым ребрам четырехугольной пирамиды. Высота пирамиды параллельна оси Ox_1, линии пересечения граней пирамиды с плоскостью Ox_2x_3 параллельны или перпендикулярны осям Ox_2, Ox_3 (рис. 1). Орты $\mathbf{g}_k$, $k = \overline{1,4}$, имеют компоненты

$$\mathbf{g}_1 = (d_1, -d_2, d_3)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{g}_2 = (-d_1, d_2, d_3)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{g}_3 = (d_1, d_2, -d_3)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{g}_4 = (-d_1, -d_2, -d_3)^{\mathrm{T}}.$$

Здесь $d_1 = \cos\alpha$, $d_2 = \sin\alpha \sin\beta$, $d_3 = \sin\alpha \cos\beta$, α – угол между осью Ox_1 и каждым из ортов $\mathbf{g}_k$, β – угол между осью Ox_3 и проекцией каждого из ортов $\mathbf{g}_k$ на плоскость Ox_2x_3. Углы α и β – параметры системы, полагаем, что $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$. Основание пирамиды, лежащее в

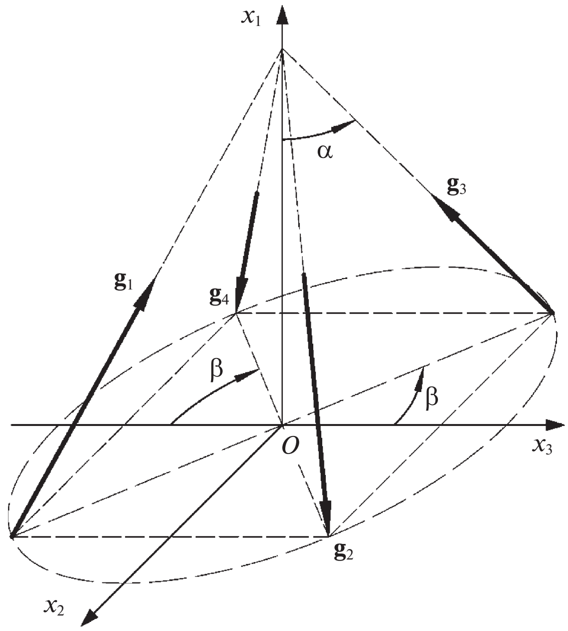


Рис. 1. Схема расположения маховиков “четырехугольная пирамида”

плоскости Ox_2x_3, представляет собой прямоугольник, а в случае $\beta = \pi/4$ – квадрат. Скалярная запись векторного выражения (1.2) имеет вид

$$\tilde{H}_1 = \left(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2 + \tilde{h}_3 - \tilde{h}_4\right)d_1, \quad \tilde{H}_2 = \left(-\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 + \tilde{h}_3 - \tilde{h}_4\right)d_2,$$
$$\tilde{H}_3 = \left(\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 - \tilde{h}_3 - \tilde{h}_4\right)d_3. \tag{1.3}$$

Область пространства, заполняемая концами векторов $\tilde{\mathbf{H}} = \left\langle \tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3, \tilde{h}_4 \right\rangle$, представляет собой выпуклый многогранник P_4, общий вид которого показан на рис. 2. Предельные значения $\tilde{\mathbf{H}} = \langle \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1 \rangle$ (кроме значений $\tilde{\mathbf{H}} = \langle -1,-1,-1,-1 \rangle = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$ и $\tilde{\mathbf{H}} = \langle 1,1,1,1 \rangle = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$) реализуются в вершинах многогранника P_4.

Рассмотрим случай, когда один из маховиков отключен (вышел из строя). Без ограничения общности можно считать, что отключен маховик с осью, параллельной орту $\mathbf{g}_4$. Тогда скалярная запись векторного выражения (1.2) имеет вид

$$\tilde{H}_1 = (\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2 + \tilde{h}_3)d_1, \quad \tilde{H}_2 = (-\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 + \tilde{h}_3)d_2, \quad \tilde{H}_3 = (\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 - \tilde{h}_3)d_3.$$

Область пространства, заполняемая концами векторов $\tilde{\mathbf{H}} = \left\langle \tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3 \right\rangle$, представляет собой параллелепипед P_3, общий вид которого приведен на рис. 3.

Случай, когда отключены два маховика из четырех, в данной работе не рассматривается, поскольку система уже не сможет обеспечить полную ориентацию КА [3].

1.2. Схема “шестиугольная пирамида”. Система состоит из шести маховиков, оси вращения которых расположены параллельно боковым ребрам правильной шестиугольной пирамиды. Высота пирамиды параллельна оси Ox_1, линии пересечения граней пирамиды с плоскостью Ox_2x_3 образуют правильный шестиугольник (рис. 4). Орты $\mathbf{g}_k$, $k = \overline{1,6}$, имеют следующие компоненты:

$$\mathbf{g}_1 = (d_4, -d_5, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{g}_2 = \left(-d_4, \frac{1}{2}d_5, \frac{\sqrt{3}}{2}d_5\right)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{g}_3 = \left(d_4, \frac{1}{2}d_5, -\frac{\sqrt{3}}{2}d_5\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{g}_4 = (-d_4, -d_5, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{g}_5 = \left(d_4, \frac{1}{2}d_5, \frac{\sqrt{3}}{2}d_5\right)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{g}_6 = \left(-d_4, \frac{1}{2}d_5, -\frac{\sqrt{3}}{2}d_5\right)^{\mathrm{T}}.$$

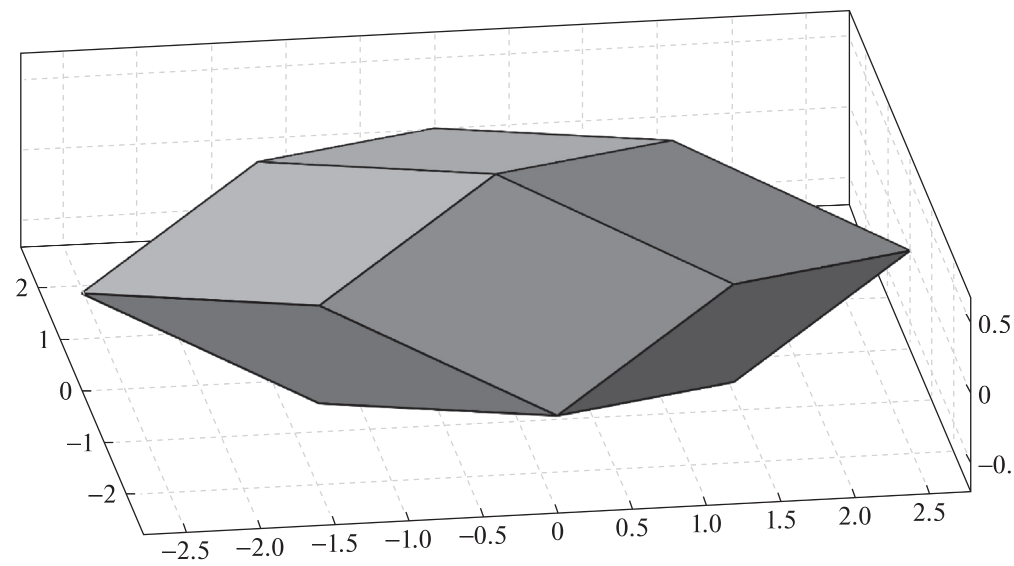


Рис. 2. Общий вид многогранника P_4

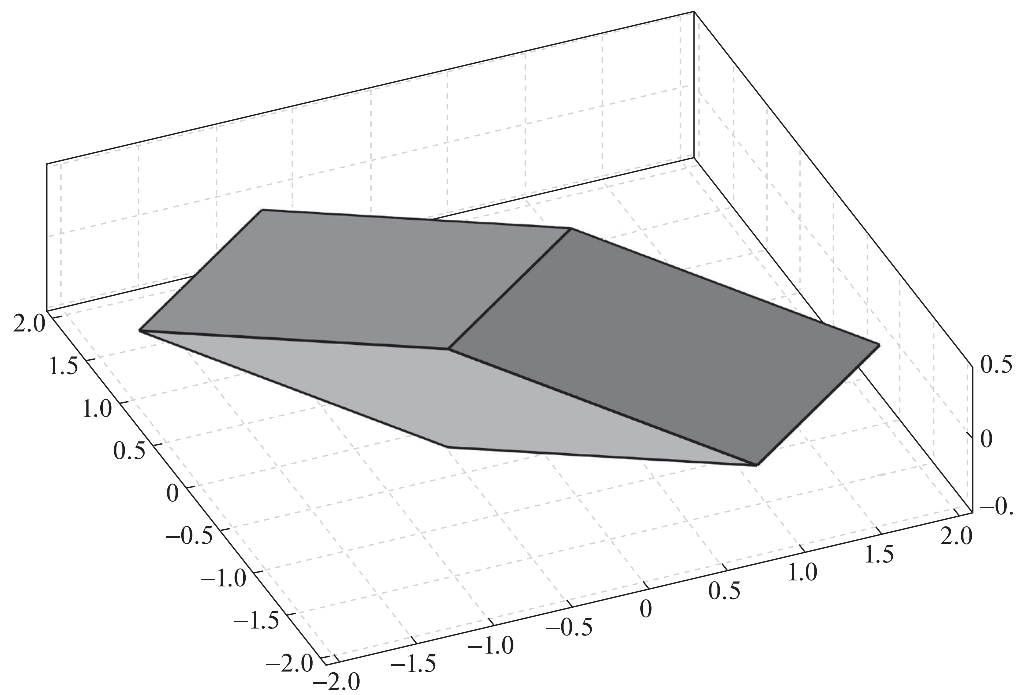


Рис. 3. Общий вид параллелепипеда P_3

Здесь $d_4 = \cos\gamma$, $d_5 = \sin\gamma$, γ – угол между осью Ox_1 и каждым из ортов $\mathbf{g}_k$, угол γ – параметр системы, $0 < \gamma < \pi/2$. В этом случае скалярная запись векторного выражения (1.2) имеет вид

$$\tilde{H}_1 = \left(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2 + \tilde{h}_3 - \tilde{h}_4 + \tilde{h}_5 - \tilde{h}_6\right) d_4, \quad \tilde{H}_2 = \left(-2\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 + \tilde{h}_3 - 2\tilde{h}_4 + \tilde{h}_5 + \tilde{h}_6\right)\frac{1}{2} d_5,$$
$$\tilde{H}_3 = \left(\tilde{h}_2 - \tilde{h}_3 + \tilde{h}_5 - \tilde{h}_6\right)\frac{\sqrt{3}}{2} d_5. \qquad (1.4)$$

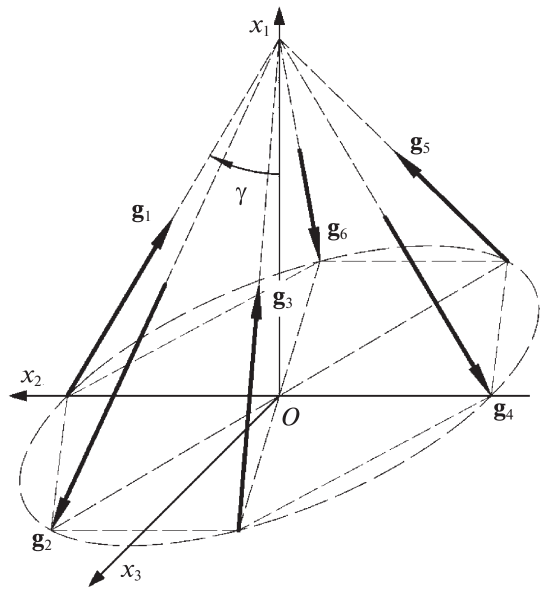


Рис. 4. Схема расположения маховиков “шестиугольная пирамида”

Область пространства, заполняемая концами векторов $\tilde{\mathbf{H}} = \left\langle \tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \ldots, \tilde{h}_6 \right\rangle$, представляет собой выпуклый многогранник P_6, общий вид которого показан на рис. 5. В случае отключения одного из маховиков (к примеру с осью, параллельной орту $\mathbf{g}_6$) область пространства, заполняемая концами векторов $\tilde{\mathbf{H}} = \left\langle \tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \ldots, \tilde{h}_5 \right\rangle$, представляет собой выпуклый многогранник P_5, общий вид которого показан на рис. 6. В этом случае скалярная запись векторного выражения (1.2) имеет вид

$$\tilde{H}_1 = \left(\tilde{h}_1 - \tilde{h}_2 + \tilde{h}_3 - \tilde{h}_4 + \tilde{h}_5\right) d_4, \quad \tilde{H}_2 = \left(-2\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 + \tilde{h}_3 - 2\tilde{h}_4 + \tilde{h}_5\right)\frac{1}{2} d_5,$$

$$\tilde{H}_3 = \left(\tilde{h}_2 - \tilde{h}_3 + \tilde{h}_5\right)\frac{\sqrt{3}}{2} d_5.$$

Случаи, когда отключены два или три маховика из шести сводятся к рассмотрению систем, описанных в разд. 1.1 для соответствующих ортов $\mathbf{g}_k$.

Все необходимые при построении многогранников P_3, P_4, P_5, P_6 соотношения для координат вершин, а также параметризация граней будут приведены ниже.

2. Область требуемых значений кинетического момента системы маховиков. Перейдем к рассмотрению области множества требуемых значений кинетического момента H_T. Введем связанную с КА правую декартову систему координат $Oy_1y_2y_3$, образованную его главными центральными осями инерции. Базисные орты этой системы обозначим $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Ниже, если не оговорено особо, компоненты векторов и координаты точек относятся к системе $Oy_1y_2y_3$. Полный кинетический момент КА можно представить в виде $\mathbf{K} = \hat{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}$, где $\hat{I} = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$ – тензор инерции КА, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^{\mathrm{T}}$ – абсолютная угловая скорость КА, $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)^{\mathrm{T}}$ – суммарный кинетический момент, создаваемый системой маховиков. В качестве примера будем рассматривать конечный поворот КА вокруг оси конечного вращения (поворот Эйлера), так как с помощью такого поворота может быть задано любое вращательное движение КА. При построении множества H_T, необходимого для реализации конечного поворота КА, считаем, что $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$ и $\mathbf{H}(0) = 0$, а также пренебрегаем накоплением кинетического момента от внешних сил за время поворота КА. Тогда при любом допустимом направлении оси конечного вращения мы имеем, что $\mathbf{H} = -\hat{I}|\boldsymbol{\omega}_{\text{пр}}|\mathbf{e}$, или в матричном виде $\left\|H_i\right\|_{i=1}^{3} = -\left\|I_i \omega_{\text{пр}} e_i\right\|_{i=1}^{3}$. Здесь $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)^{\mathrm{T}}$ – орт оси конечного

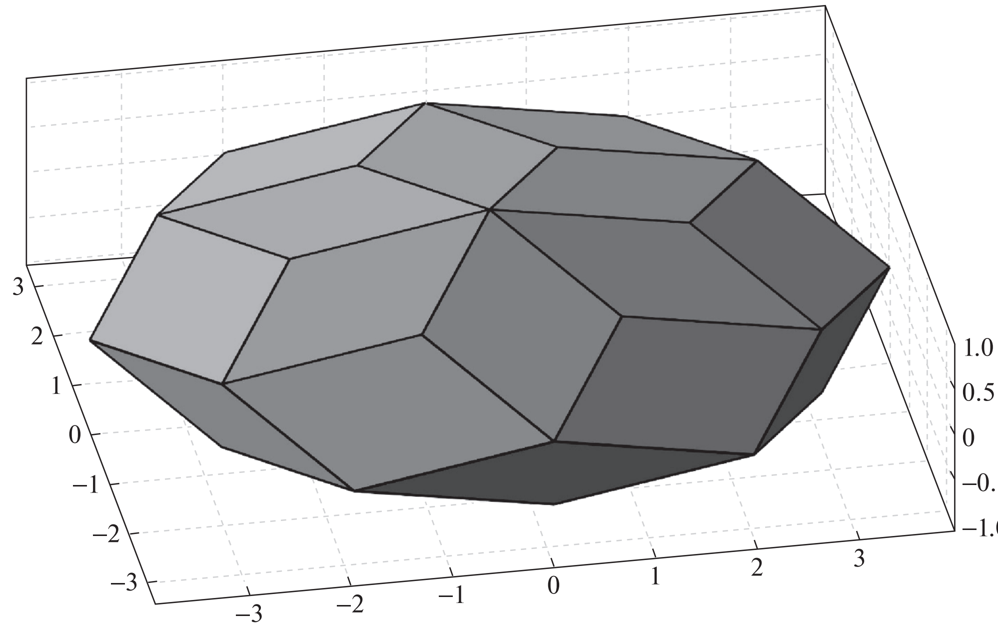


Рис. 5. Общий вид многогранника P_6

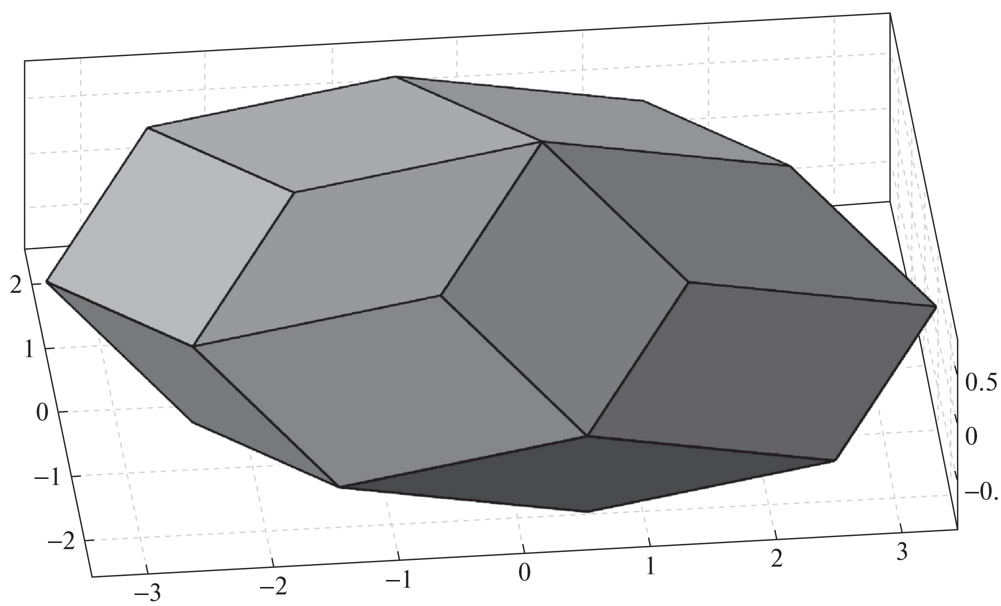


Рис. 6. Общий вид многогранника P_5

вращения, $\omega_{\text{пр}} = |\boldsymbol{\omega}_{\text{пр}}|$ – модуль требуемой (программной) угловой скорости конечного поворота КА относительно орта $\mathbf{e}$. Откуда следует, что фигура множества H_T представляет собой эллипсоид:

$$\left(\frac{H_1}{I_1}\right)^2 + \left(\frac{H_2}{I_2}\right)^2 + \left(\frac{H_3}{I_3}\right)^2 \le \omega_{\text{пр}}^2. \tag{2.1}$$

Как было сказано выше, чтобы система маховиков обеспечивала требования к динамике КА, должно выполняться условие (0.1). Проще всего проверить выполнение условия (0.1) можно, построив области H_T и H_C в одной системе координат и в едином масштабе, как будет показано далее.

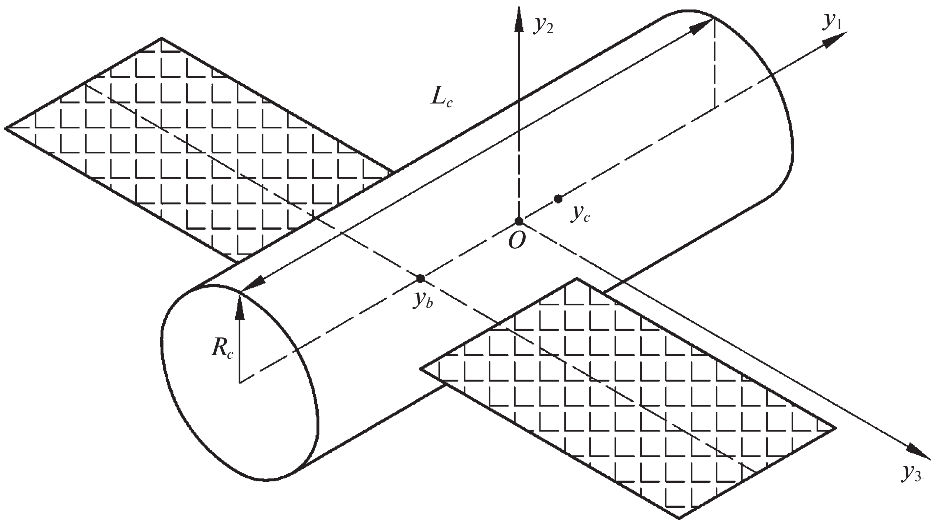


Рис. 7. Общая форма КА и положение связанной системы координат

3. Расположение маховиков на КА. Рассмотрим КА – гиростат, форма которого аппроксимируется прямым круговым цилиндром (рис. 7) радиуса R_c и высотой L_c, с двумя прикрепленными к нему одинаковыми прямоугольными пластинами – солнечными батареями суммарной площади S_b. Панели солнечных батарей неподвижны относительно цилиндра. Ось цилиндра совпадает с осью Oy_1. Солнечные батареи расположены в плоскости Oy_1y_3 симметрично относительно оси Oy_1, стороны батарей параллельны осям Oy_1 и Oy_3, ось Oy_2 перпендикулярна плоскости солнечных батарей. Координаты геометрических центров цилиндра и пластин солнечных батарей обозначим $(y_c, 0, 0)$ и $(y_b, 0, 0)$ соответственно. Далее, в расчетах используются следующие параметры КА: $m = 6440$ кг, $I_1 = 2600$ кг $\cdot$ м^2, $I_2 = 11\,100$ кг $\cdot$ м^2, $I_3 = 10\,900$ кг $\cdot$ м^2, $R_c = 1.3$ м, $L_c = 5.0$ м, $S_b = 33$ м^2, $y_b = -1$ м, $y_c = 0.3$ м. Указанные параметры приближенно соответствуют спутникам *Фотон-М № 4*, *Бион-М № 1*. Полагаем, что на КА используется система одинаковых маховиков, для каждого из которых значение $h_{\max} = 18$ Н $\cdot$ м $\cdot$ с.

Поскольку система управления ориентацией КА должна быть достаточно универсальной, естественно потребовать, чтобы максимальные абсолютные значения реализуемых ею угловых скоростей вращения КА $\omega_{i\max}$ вокруг каждой из осей Oy_i, $i = 1, 2, 3$, были одинаковы. Предположим, что $\mathbf{K} = 0$, тогда справедливо соотношение

$$\omega_{i\max} = H_{i\max}/I_i, \tag{3.1}$$

где $H_{i\max}$ – максимальные абсолютные значения кинетического момента, реализуемого системой маховиков по каждой из осей Oy_i, $i = 1, 2, 3$, здесь и далее полагаем $H_{i\max} > 0$.

Совместим начала систем координат $Ox_1x_2x_3$ и $Oy_1y_2y_3$ в центре масс КА (начало системы $Ox_1x_2x_3$ можно поместить в любое место, важно лишь угловое положение осей Ox_i относительно осей Oy_i). Матрицу перехода от $Ox_1x_2x_3$ к $Oy_1y_2y_3$ обозначим U. Поскольку для моментов инерции КА выполняются соотношения $I_1 < I_3 < I_2$ и $I_2 \approx I_3$, то наиболее рационально будет расположить "пирамиду" из четырех или шести маховиков таким образом, чтобы ее вершина лежала на оси Oy_1 (или $-Oy_1$). Не ограничивая общности, будем считать, что направления осей систем $Ox_1x_2x_3$ и $Oy_1y_2y_3$ совпадают, $U = E$, где E – единичная матрица порядка 3. Тогда, для системы четырех маховиков, расположенных по схеме "четырехугольная пирамида", значения $H_{i\max}$ определяются соотношениями (1.3):

$$H_{1\max} = 4h_{\max}\cos\alpha, \quad H_{2\max} = 4h_{\max}\sin\alpha\sin\beta, \quad H_{3\max} = 4h_{\max}\sin\alpha\cos\beta.$$

Исходя из условия $\omega_{1\,\max} = \omega_{2\,\max} = \omega_{3\,\max}$ и с учетом (3.1) зависимости, определяющие значения углов α и β, имеют вид

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2}}{I_1}\right), \quad \beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{I_2}{I_3}\right).$$

Тогда заданным величинам моментов инерции КА соответствуют углы $\alpha = 80.5°$ и $\beta = 45.5°$.

Для системы шести маховиков, расположенных по схеме “шестиугольная пирамида”, значения $H_{i\,\max}$ определяются соотношениями (1.4):

$$H_{1\,\max} = 6h_{\max}\cos\gamma, \quad H_{2\,\max} = 4h_{\max}\sin\gamma, \quad H_{3\,\max} = 2\sqrt{3}\; h_{\max}\sin\gamma. .$$

При условии $\omega_{1\,\max} = \omega_{2\,\max} = \omega_{3\,\max}$ зависимость, определяющая значение угла γ, имеет вид

$$\gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{3I_2}{2I_1}\right).$$

Для заданных величин моментов инерции КА угол $\gamma = 81.1°$.

Если по какой-либо оси Oy_i, $i = 1, 2, 3$ реализуется отвечающее ей максимальное значение угловой скорости $\omega_{i\,\max}$, то компоненты угловой скорости по двум другим осям равны нулю. Значения $\omega_{i\,\max}$, $i = 1, 2, 3$ характеризуют предельные возможности каждой из рассматриваемых схем расположения маховиков для поворотов КА вокруг его главных центральных осей инерции. При произвольном выборе направления вектора угловой скорости в системе $Oy_1y_2y_3$ максимальное значение модуля этого вектора будет меньше. Область допустимых значений угловой скорости КА, реализуемой системой маховиков, представляет собой многогранник, получающийся из многогранника P_n преобразованием подобия, задаваемым формулами (3.1). Предельные значения угловых скоростей $\omega_{i\,\max}$, $i = 1, 2, 3$ реализуются в вершинах этого многогранника.

Еще одним из возможных критериев выбора расположения маховиков на КА является условие максимально возможного объема многогранника P_n. Как показано в работе [5], чтобы объем P_n был максимальным, оси вращения всех маховиков системы должны быть расположены по боковым ребрам правильной n-угольной пирамиды, угол между боковым ребром и высотой которой не зависит от числа маховиков n и равен $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}) \approx 54.7°$.

4. Анализ динамических возможностей системы маховиков. Как было написано выше, для того, чтобы система маховиков обеспечивала требования к динамике КА, должно выполняться условие (0.1). Условие (0.1) можно проверить, построив области H_T и H_C в одной системе координат и в едином масштабе. Чтобы соответствующим образом отобразить эллипсоид H_T в системе координат $Oy_1y_2y_3$, необходимо уравнение (2.1) представить в безразмерном виде:

$$\frac{y_1^2}{l_1^2} + \frac{y_2^2}{l_2^2} + \frac{y_3^2}{l_3^2} = 1, \quad l_i = \frac{I_i\omega_{\max}}{h_{\max}}, \tag{4.1}$$

где l_i – полуоси эллипсоида H_T, $i = 1,2,3$. Таким образом, зная значения I_i и $h_{\max}$, можно определить значение $\omega_{\max}$ относительно произвольной выбранной оси (или наоборот, зная значение $\omega_{\max}$, можно выбрать значение $h_{\max}$), исходя из условия (0.1).

Примем значения параметров $h_{\max}$, α, β, γ как в разд. 3. Для схемы расположения маховиков “четырехугольная пирамида” на рис. 8 (вверху) показан соответствующий многогранник P_4, несколько граней которого изображены прозрачными. На этом же рисунке при значении $\omega_{\max} = 0.184$ град/с показан эллипсоид H_T, касательный к некоторым граням многогранника P_4, что соответствует выполнению условия (0.1). В качестве примера на рис. 8 (внизу) изображены многогранник P_4 и эллипсоид H_T для значения $\omega_{\max} = 0.190$ град/с, при котором эллипсоид выходит за грани многогранника. В случае отказа одного любого из маховиков выполнению условия (0.1) будет соответствовать значение $\omega_{\max} = 0.092$ град/с.

Для схемы расположения маховиков “шестиугольная пирамида” условие (0.1) будет выполнено при $\omega_{\max} = 0.292$ град/с, а в случае отказа одного из маховиков – при $\omega_{\max} = 0.184$ град/с. Схема

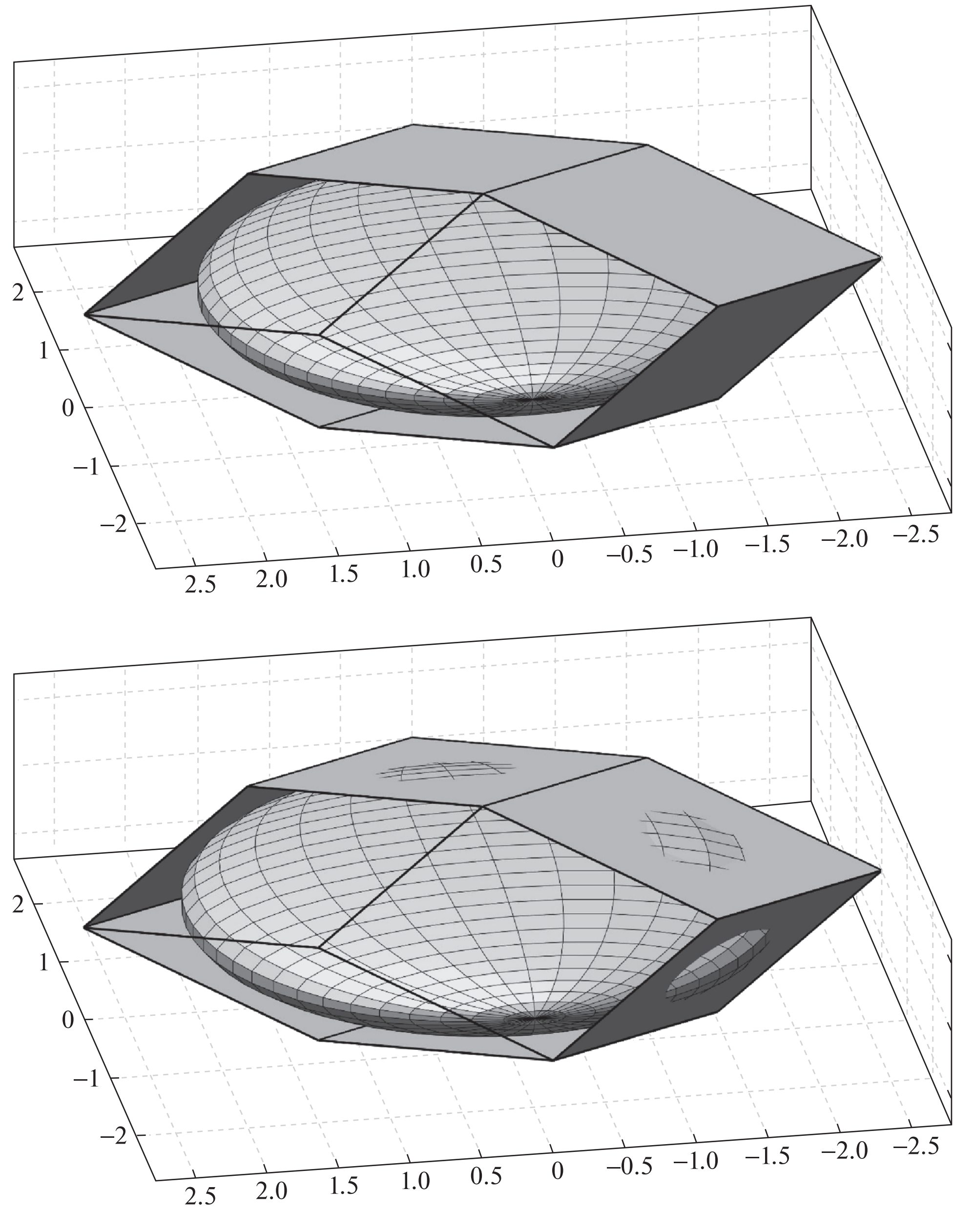


Рис. 8. Общий вид многогранника P_4 и эллипсоида H_T (вверху при $\omega_{\max} = 0.184$ град/с, внизу при $\omega_{\max} = 0.190$ град/с)

из шести маховиков более устойчива к отказу, поскольку в этом случае реализуемое значение $\omega_{\max}$ уменьшится в 1.6 раза, а для схемы из четырех маховиков в аналогичной ситуации значение $\omega_{\max}$ уменьшится в 2 раза. Следует отметить, что для заданных значений моментов инерции КА, четыре маховика, используемые в схеме “четырехугольная пирамида”, благодаря более рациональному расположению, позволяют реализовать такое же значение $\omega_{\max}$, что и любые пять из шести маховиков, используемые в схеме “шестиугольная пирамида”.

Аналогичным способом формулу (4.1) можно применить чтобы определить максимальное значение реализуемого углового ускорения программных поворотов КА $\varepsilon_{\max}$ относительно произвольной выбранной оси. Для этого необходимо построить эллипсоид с полуосями $l_i = I_i\varepsilon_{\max}/m_{\max}$, $i = 1, 2, 3$, где $m_{\max}$ – абсолютная величина предельного значения механического момента отдельного маховика. Найденные указанным способом значения $\omega_{\max}$ и $\varepsilon_{\max}$ являются оценочными, поскольку не учитывают воздействие на КА внешних возмущающих моментов и физических характеристик самих маховиков.

5. Суммарный кинетический момент системы маховиков. Полагаем, что система состоит из $n \geq 3$ маховиков. Запишем орты $\mathbf{g}_k$, $k = \overline{1,n}$, осей вращения маховиков в виде матрицы $D = \|\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n\|$, тогда выражение (1.1) можно представить как

$$\mathbf{H} = UD\mathbf{G}, \tag{5.1}$$

где U – матрица перехода от $Ox_1x_2x_3$ к $Oy_1y_2y_3$, D – прямоугольная матрица размерности $3 \times n$, $\mathbf{G} = (h_1, \ldots, h_n)^{\mathrm{T}}$. В случае $n > 3$ соотношение (5.1) нельзя единственным образом разрешить относительно величин h_k, $k = \overline{1,n}$. Для достижения единственности, потребуем, чтобы решение системы (5.1) относительно h_k имело минимальную евклидову норму:

$$l_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} h_k^2}.$$

Тогда

$$\mathbf{G} = D^{+}U^{\mathrm{T}}\mathbf{H}, \tag{5.2}$$

где $D^{+} = D^{\mathrm{T}}(DD^{\mathrm{T}})^{-1}$ – матрица, псевдообратная для матрицы D [6]. Матрица D^{+} существует при условии, что в системе есть любые три маховика, у которых орты $\mathbf{g}_k$, $k = \overline{1,n}$, осей вращения линейно независимы. В случае $n = 3$ соотношения (5.1) разрешаются относительно h_k единственным образом, при этом в выражении (5.2) матрица $D^{+} = D^{-1}$ также при условии, что все три орта $\mathbf{g}_k$ линейно независимы. Для варианта расположения маховиков по схеме “четырехугольная пирамида” матрицы D и D^{+} имеют вид

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & -d_1 & d_1 & -d_1 \\ -d_2 & d_2 & d_2 & -d_2 \\ d_3 & d_3 & -d_3 & -d_3 \end{pmatrix}, \quad D^{+} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} d_1^{-1} & -d_2^{-1} & d_3^{-1} \\ -d_1^{-1} & d_2^{-1} & d_3^{-1} \\ d_1^{-1} & d_2^{-1} & -d_3^{-1} \\ -d_1^{-1} & -d_2^{-1} & -d_3^{-1} \end{pmatrix}.$$

Для варианта “шестиугольная пирамида” матрицы D и D^{+} имеют вид

$$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2d_4 & -2d_4 & 2d_4 & -2d_4 & 2d_4 & -2d_4 \\ -2d_5 & d_5 & d_5 & -2d_5 & d_5 & d_5 \\ 0 & \sqrt{3}d_5 & -\sqrt{3}d_5 & 0 & \sqrt{3}d_5 & -\sqrt{3}d_5 \end{pmatrix}, \quad D^{+} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} d_4^{-1} & -2d_5^{-1} & 0 \\ -d_4^{-1} & d_5^{-1} & \sqrt{3}d_5^{-1} \\ d_4^{-1} & d_5^{-1} & -\sqrt{3}d_5^{-1} \\ -d_4^{-1} & -2d_5^{-1} & 0 \\ d_4^{-1} & d_5^{-1} & \sqrt{3}d_5^{-1} \\ -d_4^{-1} & d_5^{-1} & -\sqrt{3}d_5^{-1} \end{pmatrix}.$$

Еще одним из способов достижения единственности решения системы (5.1) относительно h_k является требование минимума нормы

$$l_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |h_k|.$$

Применение метода минимальной нормы l_∞ позволяет системе маховиков наиболее эффективно использовать весь возможный объем области H_C создаваемого кинетического момента [7]. Однако в отличие от решения с минимальной евклидовой нормой l_2, метод минимальной нормы l_∞ в общем случае представлен не в виде конечных формул, а как некоторый алгоритм поиска решения. Примеры реализации указанных алгоритмов при использовании систем из четырех или шести маховиков приведены в работах [7–9].

6. Оценка накопленного кинетического момента маховиков. При использовании системы маховиков одним из критериев эффективности ее функционирования является скорость накопления собственного кинетического момента. Эта скорость определяет промежутки времени между разгрузками системы маховиков и должна быть достаточно малой, чтобы обеспечить продолжительные отрезки невозмущенного полета КА.

Введем правую декартову орбитальную систему координат $Oz_1z_2z_3$. Точка O – центр масс КА, ось Oz_3 направлена вдоль геоцентрического радиус-вектора точки O, ось Oz_2 – вдоль вектора кинетического момента орбитального движения КА. Базисные орты этой системы обозначим через $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$. Матрицу перехода от системы $Oy_1y_2y_3$ к системе $Oz_1z_2z_3$ запишем как $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^3$, где $a_{ij} = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{e}_j$ – косинусы углов, которые образуют ось Oy_j с осью Oz_i. Матрицу A параметризируем углами ψ, ϑ и φ, которые введем следующим образом. Система $Oy_1y_2y_3$ может быть получена из системы $Oz_1z_2z_3$ тремя последовательными поворотами: 1) на угол $\vartheta + \pi/2$ вокруг оси Oz_2, 2) на угол φ вокруг новой оси Oz_3, 3) на угол ψ вокруг оси Oz_1, полученной после первых двух поворотов и совпадающей с осью Oy_1. Элементы матрицы A выражаются через эти углы с помощью формул:

$$a_{11} = -\sin\vartheta\cos\varphi, \quad a_{12} = \cos\vartheta\sin\psi + \sin\vartheta\sin\varphi\cos\psi,$$

$$a_{21} = \sin\varphi, \quad a_{22} = \cos\varphi\cos\psi,$$

$$a_{31} = -\cos\vartheta\cos\varphi, \quad a_{32} = -\sin\vartheta\sin\psi + \cos\vartheta\sin\varphi\cos\psi,$$

$$a_{13} = \cos\vartheta\cos\psi - \sin\vartheta\sin\varphi\sin\psi,$$

$$a_{23} = -\cos\varphi\sin\psi,$$

$$a_{33} = -\sin\vartheta\cos\psi - \cos\vartheta\sin\varphi\sin\psi.$$

Оценим возможности системы маховиков при стабилизации КА в орбитальной системе координат $Oz_1z_2z_3$ [10, 11]. При поддержании неизменной ориентации КА в системе $Oz_1z_2z_3$ кинетический момент маховиков должен изменяться в соответствии с уравнениями

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}, \quad \mathbf{K} = \hat{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{H}. \tag{6.1}$$

Здесь $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)^{\mathrm{T}}$ – главный момент внешних сил, приложенных к КА, символом $\tilde{d}/dt$ обозначена локальная производная вектора, определяющая его изменение в системе $Oy_1y_2y_3$. Из внешних моментов будем учитывать только гравитационный и восстанавливающий аэродинамический. Гравитационный момент задается формулой [12]

$$\mathbf{M}_g = 3\frac{\mu_E}{r^5}(\mathbf{r} \times \hat{I}\mathbf{r}), \quad r = |\mathbf{r}|, \tag{6.2}$$

где μ_E – гравитационный параметр Земли, $\mathbf{r}$ – геоцентрический радиус-вектор точки O. Формула аэродинамического момента имеет вид

$$\mathbf{M}_a = p(\mathbf{v} \times \mathbf{e}_1), \quad p = \rho_a(\pi R_c^2 y_c|v_1| + S_b y_b|v_2| + 2R_c L_c y_c\sqrt{v_2^2 + v_3^2}), \tag{6.3}$$

где $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^{\mathrm{T}}$ – скорость точки O относительно поверхности Земли, ρ_a – плотность атмосферы в точке O. При выводе выражений для аэродинамического момента считалось, что атмосфера неподвижна в абсолютном пространстве, молекулы атмосферы при столкновении с корпусом КА испытывают абсолютно неупругий удар [13] и не учитывалось взаимное затенение корпуса КА и солнечных батарей от набегающего аэродинамического потока. Такое упрощение оправдано, поскольку для большинства движений КА относительная продолжительность отрезков времени, на которых указанное затенение существенно, невелика.

При оценке накопленного кинетического момента маховиков будем считать, что орбита КА круговая радиуса r и неизменна в абсолютном пространстве. Влияние атмосферы учитываем в предположении, что скорость набегающего потока направлена по касательной к орбите КА. Тогда $\boldsymbol{\omega} = \omega_0\mathbf{E}_2$, $\mathbf{r} = r\,\mathbf{E}_3$, $\mathbf{v} = v\mathbf{E}_1$, где $v = |\mathbf{v}| = \omega_0 r$, $\omega_0 = \sqrt{\mu_E/r^3}$ – среднее движение КА (орбитальная частота). С учетом указанных допущений уравнение, описывающее изменение кинетического момента системы маховиков, можно представить в виде

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{H}}{dt} + \omega_0 \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H} = -\hat{I}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} - \omega_0^2(\mathbf{E}_2 \times \hat{I}\mathbf{E}_2) + 3\omega_0^2(\mathbf{E}_3 \times \hat{I}\mathbf{E}_3) + pv(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{e}_1). \tag{6.4}$$

Так как мы рассматриваем именно стабилизацию КА, то первым слагаемым в правой части уравнения (6.4) можно пренебречь. Тогда уравнение (6.4) запишем как

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{H}}{dt} + \omega_0 \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H} = \omega_0^2[3(\mathbf{E}_3 \times \hat{I}\mathbf{E}_3) - (\mathbf{E}_2 \times \hat{I}\mathbf{E}_2)] + pv(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{e}_1). \tag{6.5}$$

Рассмотрим режим стабилизации КА относительно орбитальной системы координат, при котором $\boldsymbol{\omega} = \omega_0\mathbf{E}_2$, а орты $\mathbf{e}_i$ совпадают с ортами $\pm\mathbf{E}_j$, $i, j = 1,2,3$. Такую ориентацию КА будем называть орбитальной [10] и в данном случае с учетом принятых допущений она соответствует одному из положений равновесия (покоя) КА в орбитальной системе координат. Для определенности будем рассматривать стабилизацию КА в окрестности положения

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{e}_3 = -\mathbf{E}_2. \tag{6.6}$$

При выполнении неравенств $I_1 < I_3 < I_2$ положение равновесия (6.6) является неустойчивым [12]. Линеаризуем уравнение (6.5) в окрестности положения (6.6), которому соответствуют значения углов $\psi = -\vartheta = \pi/2$, $\varphi = 0$. В проекциях на оси системы $Oy_1y_2y_3$ с учетом соотношений $\mathbf{E}_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3})$, $i = 1,2,3$, уравнение (6.5) примет вид

$$\begin{gathered}\dot{H}_1 + \omega_0 H_2 = M_1, \quad \dot{H}_2 - \omega_0 H_1 = M_2, \quad \dot{H}_3 = M_3,\\ M_1 = 4\omega_0^2(I_2 - I_3)\tilde{\psi}, \quad M_2 = (\omega_0^2(I_1 - I_3) + \pi R_c^2 y_c \rho_a v^2)\varphi,\\ M_3 = (3\omega_0^2(I_1 - I_2) - \pi R_c^2 y_c \rho_a v^2)\tilde{\vartheta}, \quad \tilde{\vartheta} = \vartheta + \pi/2, \quad \tilde{\psi} = \psi - \pi/2.\end{gathered} \tag{6.7}$$

При фиксированных значениях углов ψ, ϑ, φ внешние моменты $M_i = \mathrm{const}$, и уравнения (6.7) легко проинтегрировать. Их решение с нулевыми начальными условиями запишем как

$$\begin{gathered}H_1 = \frac{1}{\omega_0}[M_1 \sin\omega_0 t - M_2(1 - \cos\omega_0 t)], \quad H_2 = \frac{1}{\omega_0}[M_1(1 - \cos\omega_0 t) + M_2 \sin\omega_0 t],\\ H_3 = M_3 t.\end{gathered} \tag{6.8}$$

Отсюда получаем

$$|\mathbf{H}|^2 = \frac{2(1 - \cos\omega_0 t)}{\omega_0^2}(M_1^2 + M_2^2) + M_3^2 t^2.$$

В данном случае значения $\tilde{\psi}$, $\tilde{\vartheta}$, φ фактически представляют собой точности стабилизации КА относительно положения (6.6) в соответствующем канале управления.

Из уравнений (6.8) следует, что накопление составляющих H_1, H_2 кинетического момента системы маховиков носит циклический характер, сами составляющие H_1, H_2 связаны соотношением

$$\left(H_1 + \frac{M_2}{\omega_0}\right)^2 + \left(H_2 - \frac{M_1}{\omega_0}\right)^2 = \frac{1}{\omega_0^2}(M_1^2 + M_2^2)$$

и ограничены величинами

$$H_{1\max} = \frac{1}{\omega_0}\left(|M_2| + \sqrt{M_1^2 + M_2^2}\right), \quad H_{2\max} = \frac{1}{\omega_0}\left(|M_1| + \sqrt{M_1^2 + M_2^2}\right).$$

При этом составляющая H_3 неограниченно возрастает с течением времени.

Приведенные выше соотношения позволяют определить требования к системе маховиков, обеспечивающие реализацию режима стабилизации КА в орбитальной системе координат в окрестности положения (6.6). Необходимость их точного определения возникает, как правило, только при отсутствии в программе функционирования КА режимов программных поворотов, имеющих более высокие требования к множеству возможных значений суммарного кинетического момента, создаваемого маховиками.

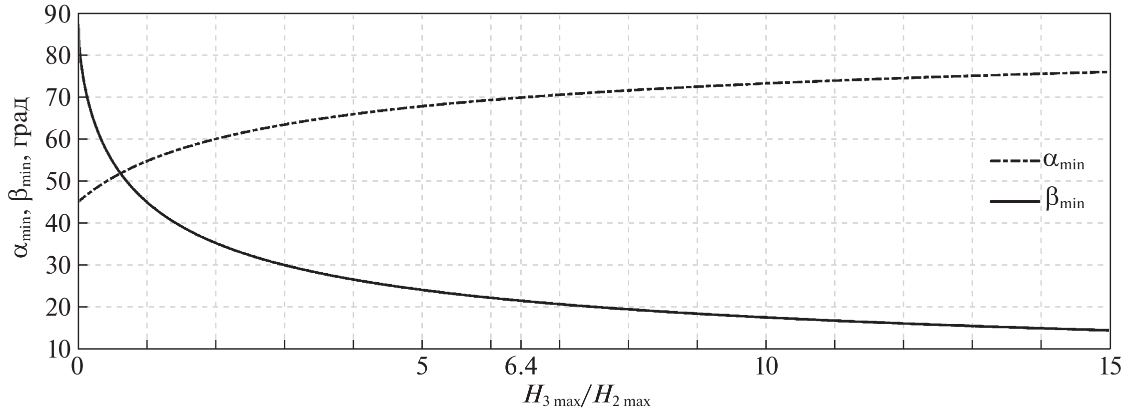


Рис. 9. Зависимость величин $\alpha_{\min}$, $\beta_{\min}$ от $H_{3\max}/H_{2\max}$, при $H_{1\max} = H_{2\max}$

Обеспечить стабилизацию КА относительно положения (6.6) можно с помощью системы из четырех или шести маховиков, которые расположены вершиной соответствующей “пирамиды” по оси Oy_1 (или $-Oy_1$) и при значениях углов α, β и γ, приведенных в разд. 3. Но если основным режимом функционирования КА является его орбитальная ориентация в окрестности положения (6.6), то можно выбрать более оптимальные значения углов α, β и γ.

Рассмотрим систему четырех маховиков, расположенных по схеме “четырехугольная пирамида” и представим компоненты вектора **G**, определяемого уравнением (5.2), в виде функций $h_k(\alpha,\beta)$, $k = \overline{1,4}$. В области $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$ найдем значения углов α и β, при которых функция

$$f(\alpha,\beta) = \sqrt{\sum_{k=1}^{4} h_k^2(\alpha,\beta)} \tag{6.9}$$

будет иметь минимум. В указанной области функция (6.9) является непрерывно дифференцируемой. Положим, что $H_i = H_{i\max} = \text{const} > 0$, $i = 1,2,3$, тогда минимум функции (6.9) достигается при

$$\alpha_{\min} = \operatorname{arctg}\left(\sqrt[4]{\left(\frac{H_{2\max}}{H_{1\max}\sin\beta_{\min}}\right)^2 + \left(\frac{H_{3\max}}{H_{1\max}\cos\beta_{\min}}\right)^2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{H_{2\max} + H_{3\max}}{H_{1\max}}}\right),$$
$$\beta_{\min} = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{H_{2\max}}{H_{3\max}}}\right). \tag{6.10}$$

На рис. 9 приведен график зависимости углов $\alpha_{\min}$ и $\beta_{\min}$ от $H_{3\max}/H_{2\max}$ при условии, что $H_{1\max} = H_{2\max}$.

Аналогичным способом можно выбрать значение угла γ при использовании системы шести маховиков, расположенных по схеме “шестиугольная пирамида”. В этом случае минимум функции

$$f(\gamma) = \sqrt{\sum_{k=1}^{6} h_k^2(\gamma)}$$

на интервале $0 < \gamma < \pi/2$ достигается при

$$\gamma_{\min} = \operatorname{arctg}\left(\sqrt[4]{\frac{2H_{2\max}^2 + 2H_{3\max}^2}{H_{1\max}^2}}\right). \tag{6.11}$$

Соотношение (6.11) верно для систем с любым количеством маховиков, расположенных по боковым ребрам правильной n-угольной пирамиды, у которой $\gamma_{\min}$ – угол между боковым ребром и высотой. В случае, когда $H_{1\max} = H_{2\max} = H_{3\max}$, значение угла $\gamma_{\min} = \mathrm{arctg}(\sqrt{2}) \approx 54.7°$, при котором соответствующий многогранник P_n системы маховиков будет иметь максимальный объем.

Используя формулы (6.8), можно получить лишь весьма приблизительную оценку величины накапливаемого собственного кинетического момента системы маховиков. Более точные значения $H_{i\max}$, используемые для расчета значений углов $\alpha_{\min}$, $\beta_{\min}$, $\gamma_{\min}$, можно получить в результате численного моделирования уравнений движения КА.

7. Численное моделирование уравнений движения КА. Более точно определить величину накапливаемого кинетического момента системы маховиков, а также рассчитать значения параметров α, β и γ можно по результатам численного моделирования полной системы уравнений движения КА. В качестве примера рассмотрим стабилизацию КА в орбитальной системе координат в окрестности положения (6.6). Для стабилизации КА используется система из четырех маховиков, расположенных по схеме “четырехугольная пирамида”.

Введем правую декартову гринвичскую систему координат $O_E Y_1 Y_2 Y_3$. Ее начало находится в центре Земли, плоскость $O_E Y_1 Y_2$ совпадает с плоскостью экватора, ось $O_E Y_1$ пересекает гринвичский меридиан, ось $O_E Y_3$ направлена к Северному полюсу. Матрицу перехода от системы $Oy_1 y_2 y_3$ к системе $O_E Y_1 Y_2 Y_3$ обозначим $B = \|b_{ij}\|_{i,j=1}^{3}$, где b_{ij} – косинус угла между осями $O_E Y_i$ и Oy_j. Матрицу перехода от орбитальной системы к гринвичской системе обозначим $C = \|c_{ij}\|_{i,j=1}^{3}$, где c_{ij} – косинус угла между осями $O_E Y_i$ и Oz_j. Элементы этой матрицы выражаются через координаты и компоненты скорости центра масс КА в гринвичской системе. Справедливо соотношение $B = CA$.

Уравнения движения КА состоят из двух подсистем. Одна подсистема описывает движение центра масс КА, другая – движение относительно центра масс (вращательное движение). Первая подсистема записывается в гринвичской системе координат. Ее переменными служат компоненты векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ [14]. В ней учитываются нецентральность гравитационного поля Земли и сопротивление атмосферы. Нецентральность поля учитывается с точностью до членов порядка (16,16) включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее плотность рассчитывается в соответствии с моделью ГОСТ Р 25645.166-2004. Баллистический коэффициент КА и параметры атмосферы считаются неизменными на всем интервале интегрирования уравнений движения.

Подсистема уравнений вращательного движения КА состоит из уравнений (6.1), где $\mathbf{M} = \mathbf{M}_a + \mathbf{M}_g$, и уравнений

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{H}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = -\mathbf{M}_c, \quad \frac{\tilde{d}\mathbf{b}_1}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_1 = \omega_E \mathbf{b}_2, \quad \frac{\tilde{d}\mathbf{b}_2}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}_2 = -\omega_E \mathbf{b}_1, \tag{7.1}$$

где $\mathbf{M}_c$ – управляющий момент, приложенный к корпусу КА со стороны системы маховиков, $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ – соответственно первая и вторая строки матрицы перехода B. Третья строка этой матрицы $\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2$. Строки $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ связаны условиями ортогональности матрицы B, которые учитываются при задании начальных условий. Моменты $\mathbf{M}_g$ и $\mathbf{M}_a$ вычисляются по формулам (6.2) и (6.3) соответственно. Скорость накопления кинетического момента маховиков во многом определяется видом и параметрами выбранного закона управления вращательным движением КА [9]. В данном случае используем в качестве закона управления тривиальный пропорционально-дифференцирующий регулятор. Выражение для $\mathbf{M}_c$ запишем в виде

$$\mathbf{M}_c = \xi^2 \hat{I}(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{e}_3) - 2\xi \hat{I}(\boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{E}_2), \tag{7.2}$$

где ξ – положительный параметр.

Моделирование режима орбитальной ориентации КА в окрестности положения (6.6) сводилось к численному интегрированию системы (6.1), (7.1), (7.2) с использованием соотношений (5.1), (5.2). Начальные условия движения центра масс КА задавались в восходящем узле орбиты в момент 09:10:34 UTC 21.09.2007. Начальные элементы орбиты: высота в апогее 450 км, высота в перигее 400 км, наклонение 63.0°, аргумент широты перигея 53.5°, долгота восходящего узла (отсчитывается от точки среднего весеннего равноденствия эпохи даты) 164.0°. Параметры

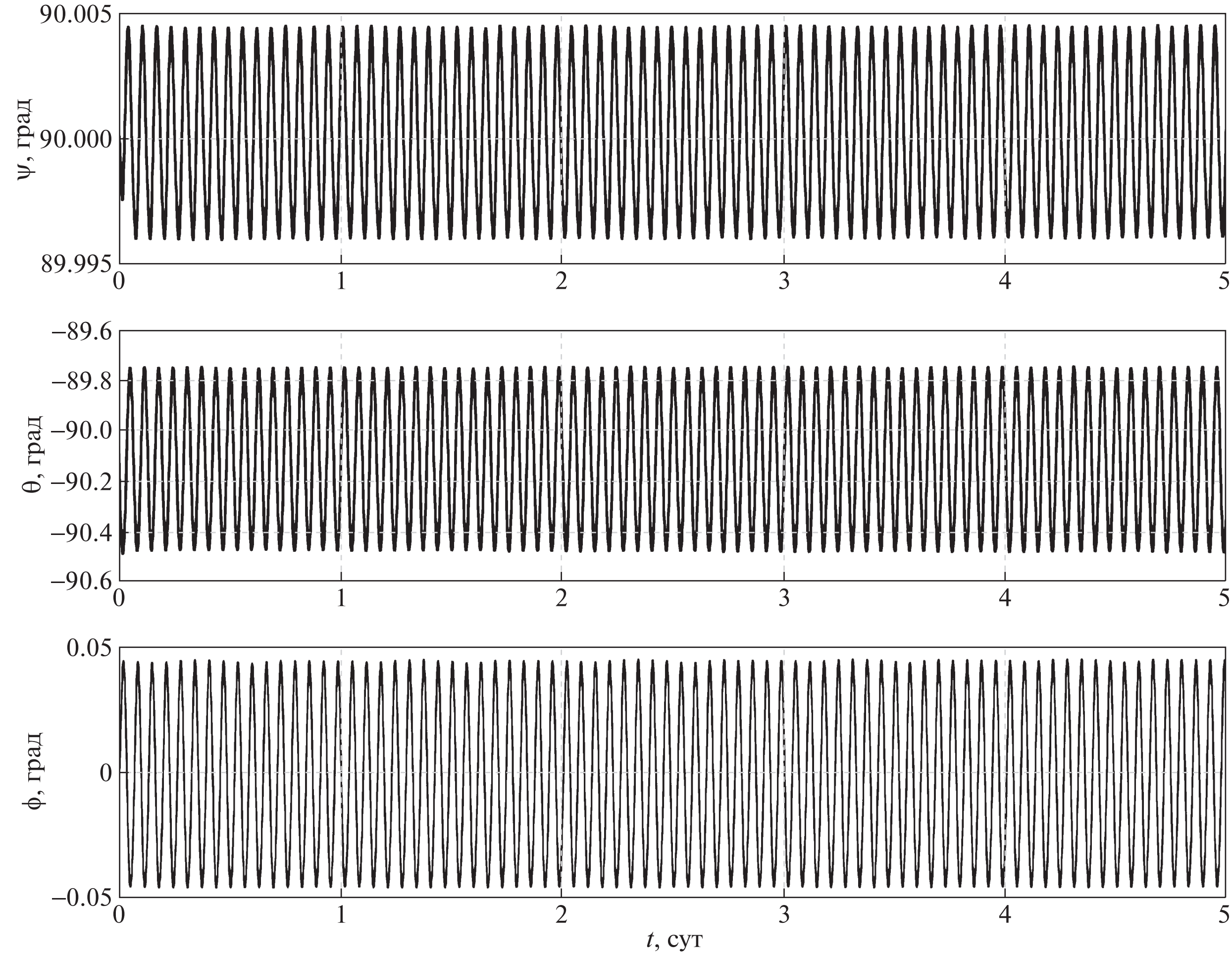


Рис. 10. Углы ориентации КА

модели атмосферы: $F_{10.7} = F_{81} = 150$, $A_p = 12$. Начальные условия системы (6.1), (7.1), (7.2): $\psi(0) = -\vartheta(0) = \pi/2$, $\varphi(0) = 0$, $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0$, $\omega_3(0) = -\omega_0$, $\mathbf{H}(0) = 0$. Они задавались в тот же момент времени, что и начальные условия орбитального движения. Этот момент служит началом отсчета времени – точкой $t = 0$. Параметры КА приведены в разд. 3, значения $\xi = 0.0025$ с$^{-1}$, $\omega_0 = 0.001125$ с$^{-1}$. Результаты расчетов движения КА, полученные в рамках принятой модели на интервале времени 5 сут, приведены на рис. 10–13. На рис. 10 представлены графики зависимости от времени углов ориентации КА, из которых видно, что закон управления (7.2) обеспечивает стабилизацию КА в окрестности положения (6.6) с погрешностями по углам ψ, θ, φ не более ±0.005°, ±0.5°, ±0.05° соответственно. Амплитуды установившихся колебаний компонентов вектора абсолютной угловой скорости КА ограничены значениями:

$$|\omega_1| < 6\times10^{-5}\ \text{град/с},\quad |\omega_2| < 6\times10^{-5}\ \text{град/с},\quad |\omega_3+\omega_0| < 2.5\times10^{-4}\ \text{град/с}.$$

На рис. 11 представлены графики зависимости от времени компонентов вектора собственного кинетического момента системы маховиков H_i, $i = 1, 2, 3$, которые на момент окончания моделирования достигли значений

$$H_{1\max} = H_{2\max} = 4.6\ \text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с},\quad H_{3\max} = 29.6\ \text{Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}. \tag{7.3}$$

Величина H_3 возрастает на всем интервале времени моделирования, что соответствует третьему уравнению (6.8). На графиках величин H_1, H_2 видно медленное (по сравнению с возрастанием H_3), но постоянное увеличение амплитуд их колебаний относительно средних значений $H_1 = 0$ и $H_2 = 0$ соответственно. Это вызвано в первую очередь влиянием атмосферы, которое при

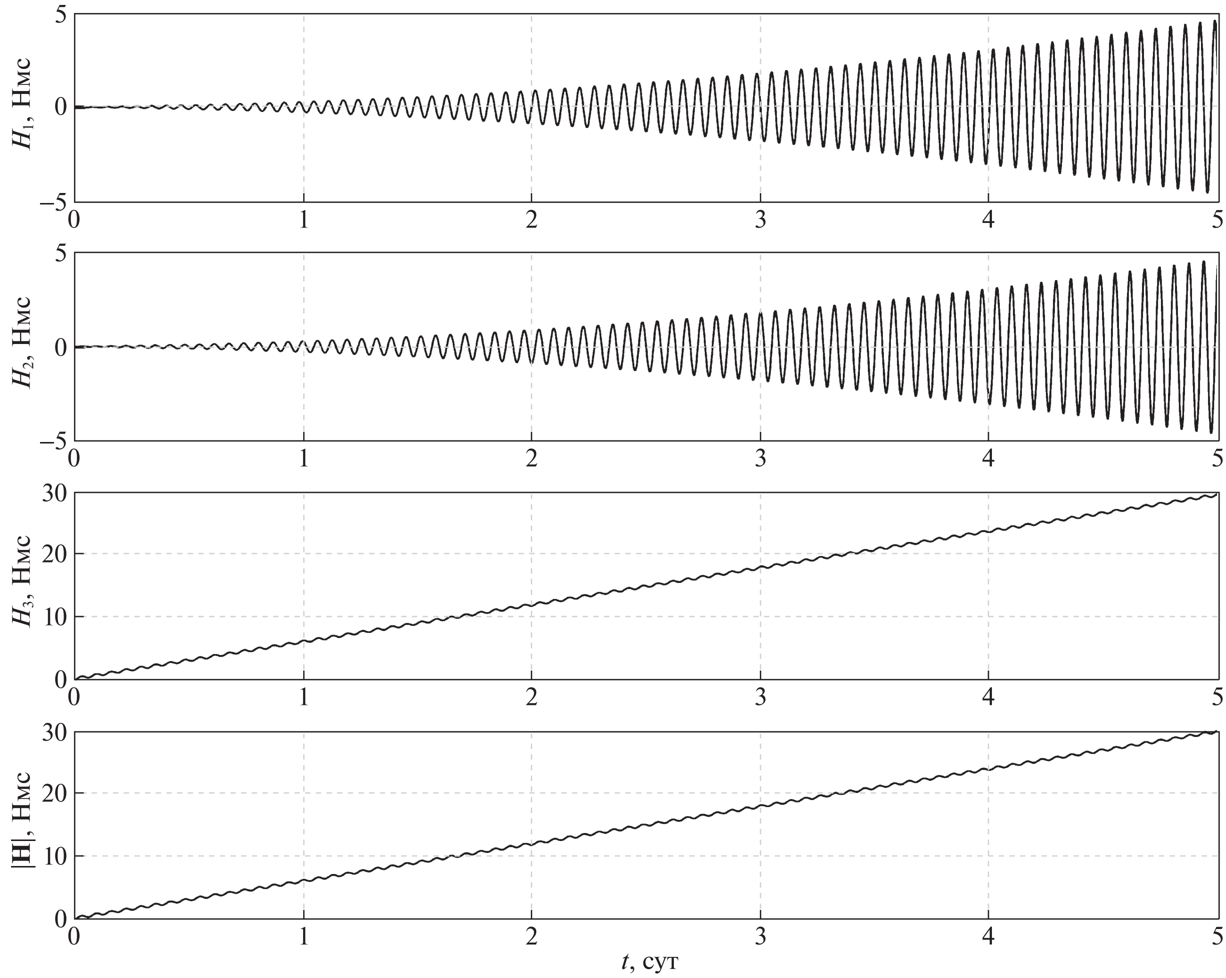


Рис. 11. Составляющие суммарного кинетического момента системы маховиков

моделировании движения КА учитывается более точно, чем в случае уравнений (6.7). Частота колебаний значений углов ψ, θ, φ, компонентов угловой скорости и H_i, $i = 1, 2, 3$, равна ω_0. На рис. 12 представлены графики зависимости от времени собственных кинетических моментов маховиков h_k, $k = \overline{1,4}$, в случае, когда значения углов $\alpha = 80.5°$ и $\beta = 45.5°$ (см. разд. 3). На представленных графиках видно, что на момент окончания моделирования кинетический момент каждого из маховиков практически достиг своего предельного значения $h_{\max} = 18$ Н · м · с, после превышения которого маховик утратит возможность создавать необходимый управляющий момент для поддержания заданной ориентации КА. Воспользуемся уравнением (6.10), использовав полученные значения (7.3), и вычислим значения углов $\alpha_{\min} = 70.0°$ и $\beta_{\min} = 21.5°$. Поскольку в данном случае $H_{1\max} = H_{2\max}$, то значения углов $\alpha_{\min}$, $\beta_{\min}$ представлены на графике рис. 9 при $H_{3\max}/H_{2\max} \approx 6.4$. На рис. 13 приведены графики зависимости от времени величин h_k, $k = \overline{1,4}$, при значении углов $\alpha = \alpha_{\min} = 70.0°$ и $\beta = \beta_{\min} = 21.5°$. На представленных графиках видно, что использование значений $\alpha = \alpha_{\min}$, $\beta = \beta_{\min}$ позволило уменьшить амплитуду колебаний величин h_k, $k = \overline{1,4}$, на момент окончания моделирования примерно в 1.4 раза по сравнению с аналогичными графиками на рис. 12. Это дает возможность увеличить продолжительность стабилизации КА относительно положения (6.6) до момента насыщения какого-либо из маховиков примерно на 31 ч. Кроме того, уменьшение амплитуды колебаний величин h_k снижает потребление электроэнергии двигателем привода каждого маховика за счет уменьшения величины создаваемого им

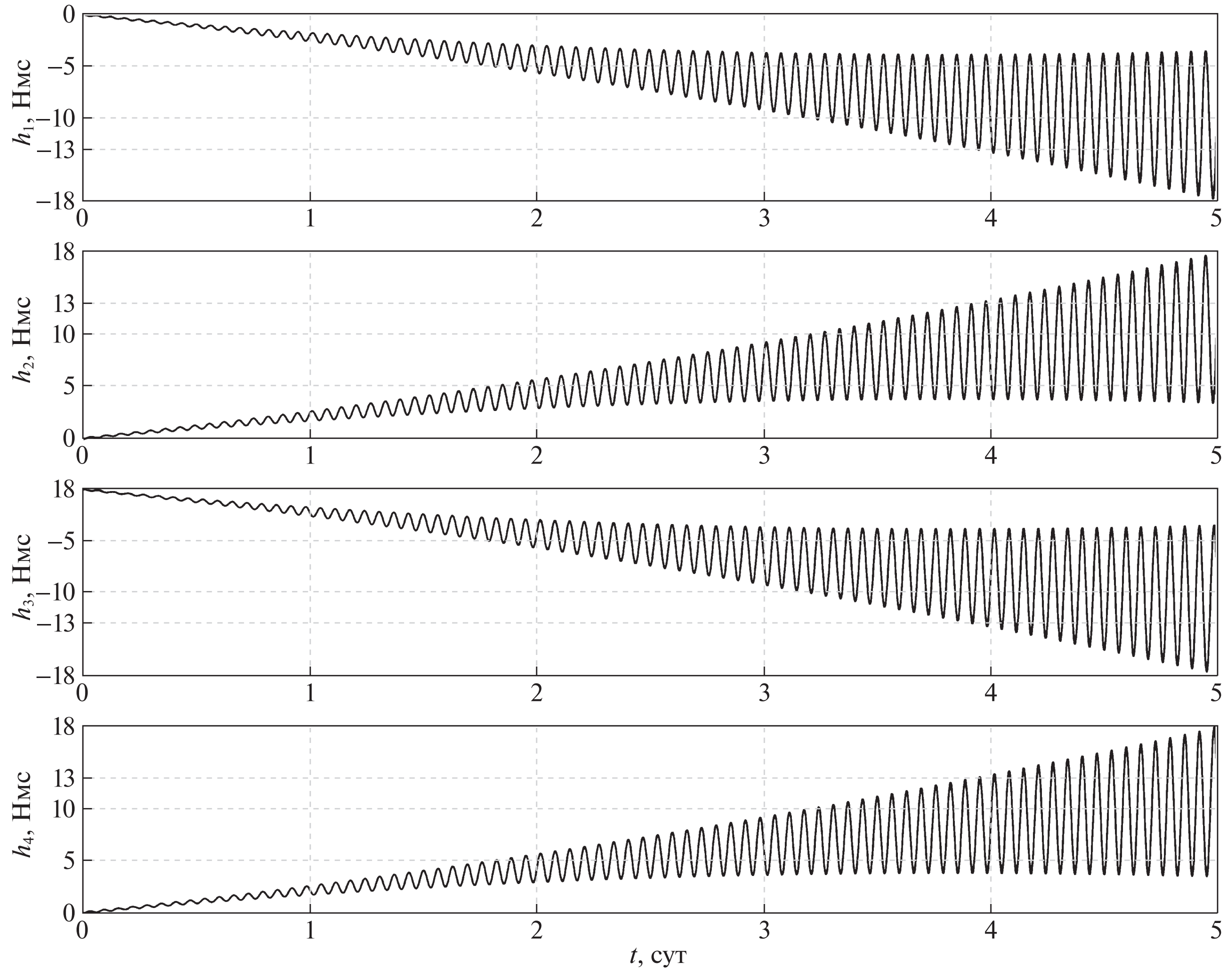


Рис. 12. Собственные кинетические моменты маховиков ($\alpha = 80.5°$, $\beta = 45.5°$)

механического момента. На рис. 14 для значений (7.3) приведен график функции (6.9), его сечение плоскостью $\beta = \beta_{\min} = 21.5°$ и показано значение $f(\alpha_{\min}, \beta_{\min}) = 19.4$ Н · м · с.

В разд. 4 был предложен способ оценки максимальных значений реализуемой угловой скорости $\omega_{\max}$ и углового ускорения $\varepsilon_{\max}$ конечного поворота КА относительно произвольной выбранной оси при условии отсутствия внешних возмущающих моментов. Более точные значения $\omega_{\max}$ и $\varepsilon_{\max}$, реализуемые при конечном повороте, также можно получить путем численного моделирования уравнений движения КА с учетом физических характеристик маховиков, всех действующих внешних возмущающих моментов и выбранного закона управления вращательным движением КА. Но эта задача может послужить темой для отдельного исследования и в данной работе не рассматривалась.

8. Построение областей возможных значений кинетического момента системы маховиков. Обозначим вершины и грани многогранника P_n как V_i, V_i', $i = \overline{1, n(n-1)/2+1}$, и F_i, F_i', $i = \overline{1, n(n-1)/2}$, соответственно. Вершины V_i, V_i' будем задавать своими координатами в системе $Ox_1x_2x_3$ таким образом, чтобы для координат выполнялось соотношение $V_i' = -V_i$. Грани F_i будем задавать списком принадлежащих им вершин V_i, V_i', при этом F_i' будет расположена симметрично F_i относительно точки O.

8.1. Схема “четырехугольная пирамида”. Положение вершин V_i, $i = \overline{1,7}$, многогранника P_4 характеризуется следующими соотношениями:

$$V_1 = (0, 4d_2, 0), \quad V_2 = (2d_1, 2d_2, 2d_3), \quad V_3 = (2d_1, 2d_2, -2d_3), \quad V_4 = (-2d_1, 2d_2, 2d_3),$$

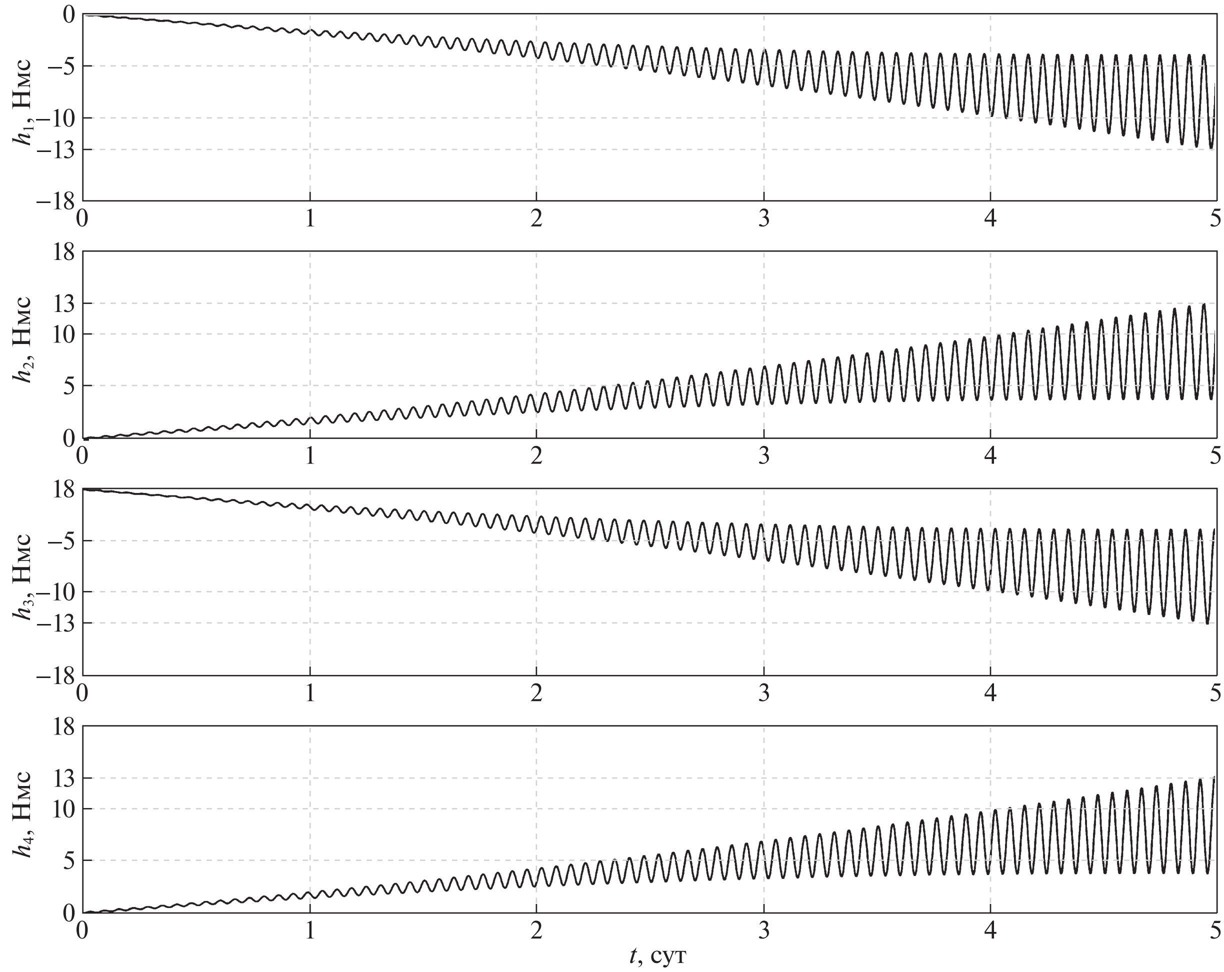


Рис. 13. Собственные кинетические моменты маховиков (α = 70.0°, β = 21.5°)

$$V_5 = (-2d_1, 2d_2, -2d_3), \quad V_6 = (0, 0, -4d_3), \quad V_7 = (-4d_1, 0, 0).$$

Грани F_i, F_i', $i = \overline{1,6}$, многогранника P_4 зададим как

$$F_1 = \{V_1, V_4, V_7, V_5\}, \quad F_2 = \{V_4, V_6', V_3', V_7\}, \quad F_3 = \{V_1, V_5, V_6, V_3\}, \quad F_4 = \{V_5, V_7, V_2', V_6\},$$

$$F_5 = \{V_1, V_3, V_7', V_2\}, \quad F_6 = \{V_2, V_6', V_4, V_1\}, \quad F_1' = \{V_1', V_4', V_7', V_5'\}, \quad F_2' = \{V_4', V_6, V_3, V_7'\},$$

$$F_3' = \{V_1', V_5', V_6', V_3'\}, \quad F_4' = \{V_5', V_7', V_2, V_6'\}, \quad F_5' = \{V_1', V_3', V_7, V_2'\}, \quad F_6' = \{V_2', V_6, V_4', V_1'\}.$$

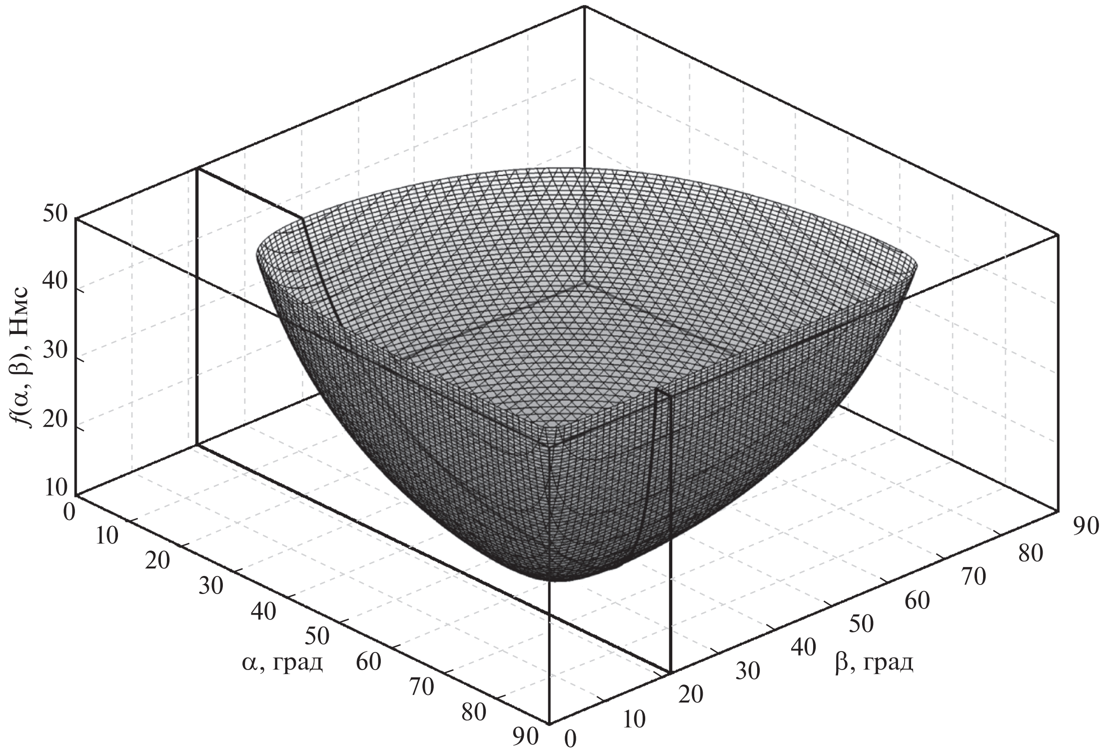
В случае отключения маховика с осью, параллельной орту $\mathbf{g}_4$, многогранник P_4 трансформируется в параллелепипед P_3. Положение вершин V_i, $i = \overline{1,4}$, параллелепипеда характеризуется соотношениями:

$$V_1 = (-d_1, 3d_2, -d_3), \quad V_2 = (d_1, d_2, d_3), \quad V_3 = (d_1, d_2, -3d_3), \quad V_4 = (-3d_1, d_2, d_3).$$

Как всякий параллелепипед, P_3 имеет шесть граней, которые зададим в виде

$$F_1 = \{V_1, V_2, V_4', V_3\}, \quad F_2 = \{V_1, V_3, V_2', V_4\}, \quad F_3 = \{V_1, V_4, V_3', V_2\},$$

$$F_1' = \{V_1', V_2', V_4, V_2'\}, \quad F_2' = \{V_1', V_3', V_2, V_4'\}, \quad F_3' = \{V_1', V_4', V_3, V_2'\}.$$



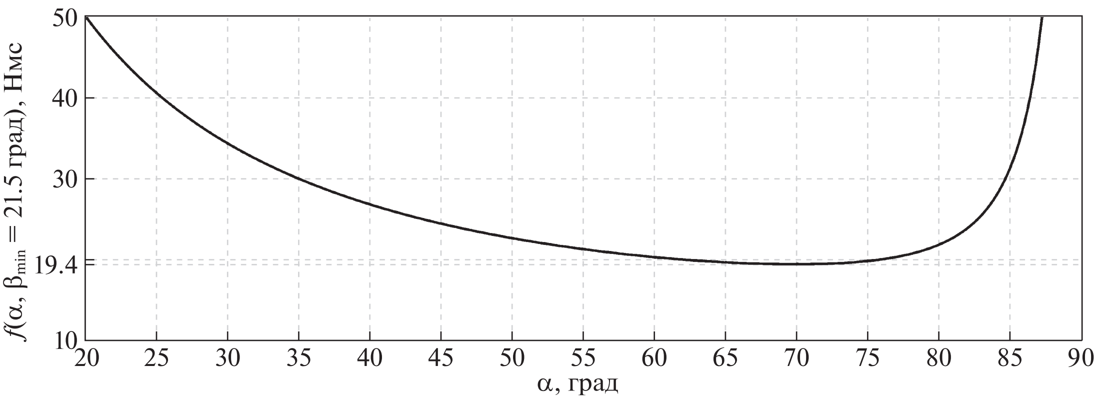


Рис. 14. Функция $f(\alpha, \beta)$

8.2. Схема "шестиугольная пирамида". Положение вершин V_i, $i = \overline{1,16}$, многогранника P_6 характеризуется как

$$V_1 = (6d_4, 0, 0), \quad V_2 = (4d_4, 2d_5, 0), \quad V_3 = (4d_4, d_5, -\sqrt{3}d_5), \quad V_4 = (4d_4, -d_5, -\sqrt{3}d_5),$$

$$V_5 = (4d_4, -2d_5, 0), \quad V_6 = (4d_4, -d_5, \sqrt{3}d_5), \quad V_7 = (4d_4, d_5, \sqrt{3}d_5), \quad V_8 = (2d_4, 3d_5, -\sqrt{3}d_5),$$

$$V_9 = (2d_4, 3d_5, \sqrt{3}d_5), \quad V_{10} = (2d_4, 0, -2\sqrt{3}d_5), \quad V_{11} = (2d_4, -3d_5, -\sqrt{3}d_5), \quad V_{12} = (2d_4, -3d_5, \sqrt{3}d_5),$$

$$V_{13} = (2d_4, 0, 2\sqrt{3}d_5), \quad V_{14} = (0, 2d_5, 2\sqrt{3}d_5), \quad V_{15} = (0, 4d_5, 0), \quad V_{16} = (0, 2d_5, -2\sqrt{3}d_5).$$

Грани F_i, $i = \overline{1,15}$, многогранника P_6 представим как

$$F_1 = \{V_1, V_2, V_9, V_7\}, \quad F_2 = \{V_1, V_3, V_8, V_2\}, \quad F_3 = \{V_1, V_4, V_{10}, V_3\}, \quad F_4 = \{V_1, V_5, V_{11}, V_4\},$$
$$F_5 = \{V_1, V_6, V_{12}, V_5\}, \quad F_6 = \{V_1, V_7, V_{13}, V_6\}, \quad F_7 = \{V_7, V_9, V_{14}, V_{13}\}, \quad F_8 = \{V_9, V_2, V_8, V_{15}\},$$

$$F_9 = \{V_8, V_3, V_{10}, V_{16}\}, \quad F_{10} = \{V_{10}, V_4, V_{11}, V_{14}'\}, \quad F_{11} = \{V_{11}, V_5, V_{12}, V_{15}'\}, \quad F_{12} = \{V_{12}, V_6, V_{13}, V_{16}'\},$$

$$F_{13} = \{V_{13}, V_{14}, V_{10}', V_{16}'\}, \quad F_{14} = \{V_9, V_{15}, V_{11}', V_{14}\}, \quad F_{15} = \{V_8, V_{16}, V_{12}', V_{15}\}.$$

В случае отключения маховика с осью, параллельной орту $\mathbf{g}_6$, многогранник P_6 трансформируется в многогранник P_5. Положение вершин V_i, $i = \overline{1,11}$, многогранника P_5 характеризуется соотношениями:

$$V_1 = \left(5d_4, \frac{1}{2}d_5, \frac{\sqrt{3}}{2}d_5\right), \quad V_2 = \left(3d_4, \frac{5}{2}d_5, \frac{\sqrt{3}}{2}d_5\right), \quad V_3 = \left(3d_4, \frac{3}{2}d_5, -\frac{\sqrt{3}}{2}d_5\right),$$

$$V_4 = \left(3d_4, -\frac{1}{2}d_5, -\frac{\sqrt{3}}{2}d_5\right), \quad V_5 = \left(3d_4, -\frac{3}{2}d_5, \frac{\sqrt{3}}{2}d_5\right), \quad V_6 = \left(3d_4, -\frac{1}{2}d_5, \frac{3\sqrt{3}}{2}d_5\right),$$

$$V_7 = \left(d_4, \frac{3}{2}d_5, \frac{3\sqrt{3}}{2}d_5\right), \quad V_8 = \left(d_4, \frac{7}{2}d_5, -\frac{\sqrt{3}}{2}d_5\right), \quad V_9 = \left(d_4, \frac{1}{2}d_5, -\frac{3\sqrt{3}}{2}d_5\right),$$

$$V_{10} = \left(d_4, -\frac{5}{2}d_5, -\frac{\sqrt{3}}{2}d_5\right), \quad V_{11} = \left(d_4, -\frac{5}{2}d_5, \frac{3\sqrt{3}}{2}d_5\right).$$

Грани F_i, $i = \overline{1,10}$, многогранника P_5 зададим как

$$F_1 = \{V_1, V_2, V_7, V_6\}, \quad F_2 = \{V_1, V_3, V_8, V_2\}, \quad F_3 = \{V_1, V_4, V_9, V_3\},$$
$$F_4 = \{V_1, V_5, V_{10}, V_4\}, \quad F_5 = \{V_1, V_6, V_{11}, V_5\},$$

$$F_6 = \{V_3, V_9, V_{11}', V_8\}, \quad F_7 = \{V_4, V_{10}, V_7', V_9\}, \quad F_8 = \{V_5, V_{11}, V_8', V_{10}\},$$

$$F_9 = \{V_6, V_7, V_9', V_{11}\}, \quad F_{10} = \{V_7, V_2, V_8, V_{10}'\}.$$

Приведенные выше соотношения для координат вершин V_i, V_i', а также параметризация граней F_i, F_i' использовались при построении многогранников P_4, P_3, P_6, P_5, приведенных на рис. 2, 3, 5, 6 соответственно.

Заключение. В работе исследованы два варианта системы маховиков, расположенной на КА для управления его вращательным движением. Для каждого из вариантов построены области реализуемых системой значений суммарного кинетического момента, в том числе при отказе одного из маховиков.

Для режима программных поворотов КА построена область требуемых значений суммарного кинетического момента системы маховиков. Предложенный в работе способ сравнения областей требуемого и реализуемого кинетического момента и полученные аналитические зависимости позволяют выбрать необходимые параметры системы, обеспечивающие реализацию вектора требуемой угловой скорости вращения КА.

Для режима стабилизации орбитальной ориентации КА приведены зависимости, позволяющие выбрать значения геометрических параметров расположения системы маховиков. Выбранные значения обеспечивают минимальную скорость накопления кинетического момента каждым из маховиков системы. Приведены результаты математического моделирования системы уравнений движения КА, подтверждающие правильность выбранных значений указанных параметров.

Полученные в работе результаты могут быть использованы при предварительном проектировании систем управления ориентацией КА, применяющих в качестве исполнительных органов двигатели-маховики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н.* Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974.
2. *Сорокин А.В., Башкеев Н.И., Яременко В.В. и др.* Гиросиловая система ориентации космического аппарата “Ресурс-ДК” // Тр. IX Санкт-Петербургской Междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ЦНИИ “Электроприбор”, 2002. С. 268–274.
3. *Васильев В.Н.* Системы ориентации космических аппаратов. М.: ФГУП “НПП ВНИИЭМ”, 2009.

4. *Игнатов А.И., Давыдов А.А., Сазонов В.В.* Анализ динамических возможностей систем управления малым космическим аппаратом, построенных на базе двигателей-маховиков. Препринт № 47. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2005.
5. *Карпачев Ю.А., Павловский М.А.* Управление ориентацией космических аппаратов с произвольно-избыточной структурой одноосных электромаховичных двигателей // Космич. исслед. 1987. Т. XXV. № 4. С. 530–536.
6. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. 4-е изд. М.: Наука. Физматлит, 1988.
7. *Markley F.L., Reynolds R.G., Liu F.X.* Maximum Torque and Momentum Envelopes for Reaction-wheel Arrays // J. of Guidance, Control, and Dynamics. 2010. V. 33. № 5. P. 1606–1614.
8. *Yoon H., Seo H.H., Choi H.-T.* Optimal Uses of Reaction Wheels in the Pyramid Configuration Using a New Minimum Infinity-norm Solution // Aerospace Science and Technology. 2014. V. 39. P. 109–119.
9. *Yoon H., Seo H. H., Park Y.-W., Choi H.-T.* A New Minimum Infinity-Norm Solution: with Application to Capacity Analysis of Spacecraft Reaction Wheels // American Control Conf. (ACC). Chicago, IL. 2015. P. 1241–1245.
10. *Игнатов А.И., Сазонов В.В.* Реализация режима орбитальной ориентации искусственного спутника Земли без накопления кинетического момента гиросистемы // Изв. РАН. ТиСУ. 2020. № 1. С. 129–142.
11. *Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Стабилизация орбитальной ориентации космического аппарата с одновременной разгрузкой кинетического момента инерционных исполнительных органов // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 4. С. 124–131.
12. *Белецкий В.В.* Движение искусственного КА относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
13. *Белецкий В.В., Яншин А.М.* Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наук. думка, 1984.
14. *Бажинов И.К., Гаврилов В.П., Ястребов В.Д. и др.* Навигационное обеспечение полета орбитального комплекса “Салют-6”–“Союз”–“Прогресс”. М.: Наука, 1985.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 1, с. 145–164

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

УДК 629.78

СПОСОБ СИТУАЦИОННОГО ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СПУСКАЕМЫМ АППАРАТОМ НА РИКОШЕТИРУЮЩЕЙ ТРАЕКТОРИИ ВОЗВРАЩЕНИЯ ОТ ЛУНЫ

А. С. Самотохин[a], Ю. Г. Сихарулидзе[a,]*, А. Г. Тучин[a]

[a] *ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия*

**e-mail: sikh@kiam1.rssi.ru*

Поступила в редакцию 06.07.2021 г.
После доработки 19.07.2021 г.
Принята к публикации 27.09.2021 г.

Предлагается способ *ситуационной* адаптации для управления движением спускаемого аппарата, который при возвращении от Луны входит в атмосферу Земли с околопараболической скоростью со стороны южного полушария, применяет рикошетирующую траекторию с двумя погружениями в атмосферу, разделенными внеатмосферным (баллистическим) участком, и совершает посадку в ограниченном районе на территории юга Российской Федерации. Здесь под ситуационной понимается адаптация бортовой модели движения к фактическим возмущениям, действующим в каждой конкретной реализации траектории спуска. Способ двухпараметрического терминального управления использует раздельную адаптацию к ошибкам аэродинамических характеристик, плотности возмущенной атмосферы и ошибке навигационной высоты. Это позволяет обеспечить высокую точность приведения к месту посадки, ограничить перегрузку и расход топлива.

DOI: 10.31857/S0002338822010097

Введение. Задача возвращения спускаемого аппарата (СА) от Луны с посадкой в заданном районе, расположенном на юге территории Российской Федерации, требует высокой точности приведения из-за ограниченности места посадки. Вместе с точностью необходимо обеспечить допустимую перегрузку для пилотируемого СА с малым аэродинамическим качеством (порядка 0.3) и расход топлива в пределах располагаемого запаса. С учетом ограничения по перегрузке СА должен возвращаться от Луны со стороны южного полушария и входить в атмосферу Земли с околопараболической скоростью. Для возвращения в любую дату должна обеспечиваться дальность спуска (от точки входа в атмосферу до района посадки) в диапазоне 5000–10000 км. Такие дальности с аэродинамическим качеством 0.3 могут быть реализованы только посредством использования рикошетирующих траекторий спуска с двумя погружениями СА в атмосферу, разделенными внеатмосферным (баллистическим) участком. Эти траектории очень чувствительны к возмущениям и требуют применения высокоточных методов терминального управления.

Впервые способ двухпараметрического терминального управления применительно к рикошетирующим траекториям возвращения от Луны был предложен в [1]. При двухпараметрическом управлении на каждом шаге коррекции уточняются два параметра: величина угла крена и кажущаяся скорость очередного переворота СА по крену из условия одновременного устранения промаха в продольном и боковом направлениях. Для этого выполняются три численных прогноза остающейся части траектории спуска и определяются частные производные конечных параметров движения по параметрам управления. Затем в линейном приближении решается система двух уравнений для поправок к зависимости командного угла крена от кажущейся скорости. Расчет уточненных параметров управления выполняется в течение одного шага коррекции (сейчас длительностью 1 с) с прогнозом текущего вектора состояния (радиус-вектора и вектора скорости) на один шаг вперед для задания начальных условий прогноза. Другими словами на текущем шаге коррекции вычисляется “упрежденное” управление для следующего шага, которое будет применено через один шаг.

Способ двухпараметрического управления рассматривается только в качестве перспективы для создаваемого в США нового пилотируемого корабля Orion [2]. Используемый сейчас однопараметрический терминальный алгоритм управления PredGuid имеет в основе алгоритм управления корабля Apollo, но в отличие от него применяет численный прогноз остающейся траектории спуска вместо прогноза по приближенным конечным формулам. Единственный параметр управления (величина угла крена) корректируется для устранения продольного промаха. Боковой промах удерживается в пределах заданного коридора по аналогии с Apollo, поэтому число переворотов по крену не ограничено и расход топлива на управление угловым движением тоже.

Впервые исходный вариант терминального алгоритма управления спуском (ТАУС) в задаче возвращения от Луны по рикошетирующей траектории рассмотрен в [3] при идеальной навигации, т.е. без навигационных ошибок. Полученные результаты по точности приведения, перегрузкам и расходу топлива можно рассматривать в качестве первого приближения.

Модифицированный алгоритм ТАУС-М (М – модифицированный) в задаче возвращения с учетом навигационных ошибок и действия “усиленных” возмущений обеспечивает требуемую точность приведения (4 км) с вероятностью 97%, перегрузку до 6g с вероятностью 98% и расход топлива в пределах располагаемого запаса с вероятностью 100% [4].

При использовании высокоточного терминального алгоритма управления очень важное значение имеет адаптация к фактическим условиям движения, т.е. идентификация аэродинамических характеристик (АДХ) СА, возмущенной атмосферы и ошибки навигационной высоты, так как от них зависит точность прогноза остающейся траектории и правильный выбор командного управления. Если прогнозируемая траектория имеет перелет, то алгоритм “раскрывает” угол крена (увеличивает по модулю). Если траектория имеет недолет, то алгоритм уменьшает величину угла крена в пределе до нуля, но и этого может оказаться недостаточно. Поэтому в алгоритме ТАУС-М для создания запаса по дальности прогнозное аэродинамическое качество занижается путем сдвига коэффициента момента тангажа на величину $\Delta m_z = -0.004$ и использования эмпирического поправочного коэффициента 1.025 для прогнозного коэффициента лобового сопротивления. Балансировочный угол атаки прогнозных АДХ соответственно уменьшается на ~2°, в результате чего прогнозное аэродинамическое качество снижается на 8.5%: с 0.319 до 0.292. За счет общего коэффициента адаптации $\Delta m_z = -0.004$ создается запас по дальности для всех вариантов возмущенных траекторий независимо от фактических действующих возмущений. Такой способ адаптации является *общим*. Как показали статистические испытания ТАУС-М [4], для 3% возмущенных траекторий такой запас является недостаточным, а в некоторых случаях он избыточен и может приводить к большим перегрузкам на участке второго погружения СА в атмосферу.

Пример возмущенной траектории с большим недолетом (–20 км) приведен на рис. 1 (вариант № 86). Такой недолет возник из-за сочетания сниженного на 10% фактического аэродинамического качества и увеличенной на 20% плотности атмосферы. Здесь $\gamma_к$ и $\gamma_ф$ – командный и фактический углы крена, h – высота, Δh – ошибка навигационной высоты, n – перегрузка.

Пример траектории с большой перегрузкой (8.1g) показан на рис. 2 (вариант № 60). Такая перегрузка возникла на втором погружении в атмосферу из-за большого перелета, который появился на первом погружении вследствие сочетания увеличенного на 7% фактического аэродинамического качества и сниженной на 20% плотности атмосферы.

Разработанная новая версия алгоритма ТАУС-МС (МС – модифицированный, ситуационный) для СА является *ситуационной* и обеспечивает индивидуальную адаптацию прогнозных АДХ к фактическому аэродинамическому качеству СА на основе автономных измерений кажущегося ускорения (перегрузки) в связанных осях. Одновременно определяется относительная плотность атмосферы (относительно бортовой среднемесячной модели) и уточняется ошибка навигационной высоты.

По существу различаются три варианта аэродинамического качества СА.

Расчетное $k_{расч}$, которое определяется при проектировании СА и используется в качестве эталона для сравнения.

Прогнозное $k_{прог}$, которое применяется при прогнозе оставшейся части траектории спуска и должно исключать недолеты, которые физически невозможно устранить.

Фактическое $k_{фак}$, которое реализуется случайным образом в рамках принятой модели возмущений для конкретной траектории при проведении статистических испытаний.

1. Постановка задачи. В качестве примера рассматриваются условия возвращения СА с окололунной орбиты до точки раскрытия парашюта на высоте 4.5 км в заданном районе с координатами центра полигона: широта 51.5° с.ш., долгота 55.9° в.д. Дата ухода с окололунной орбиты 19.04.2025. Выбор траектории возвращения на основе решения двухточечной краевой задачи при

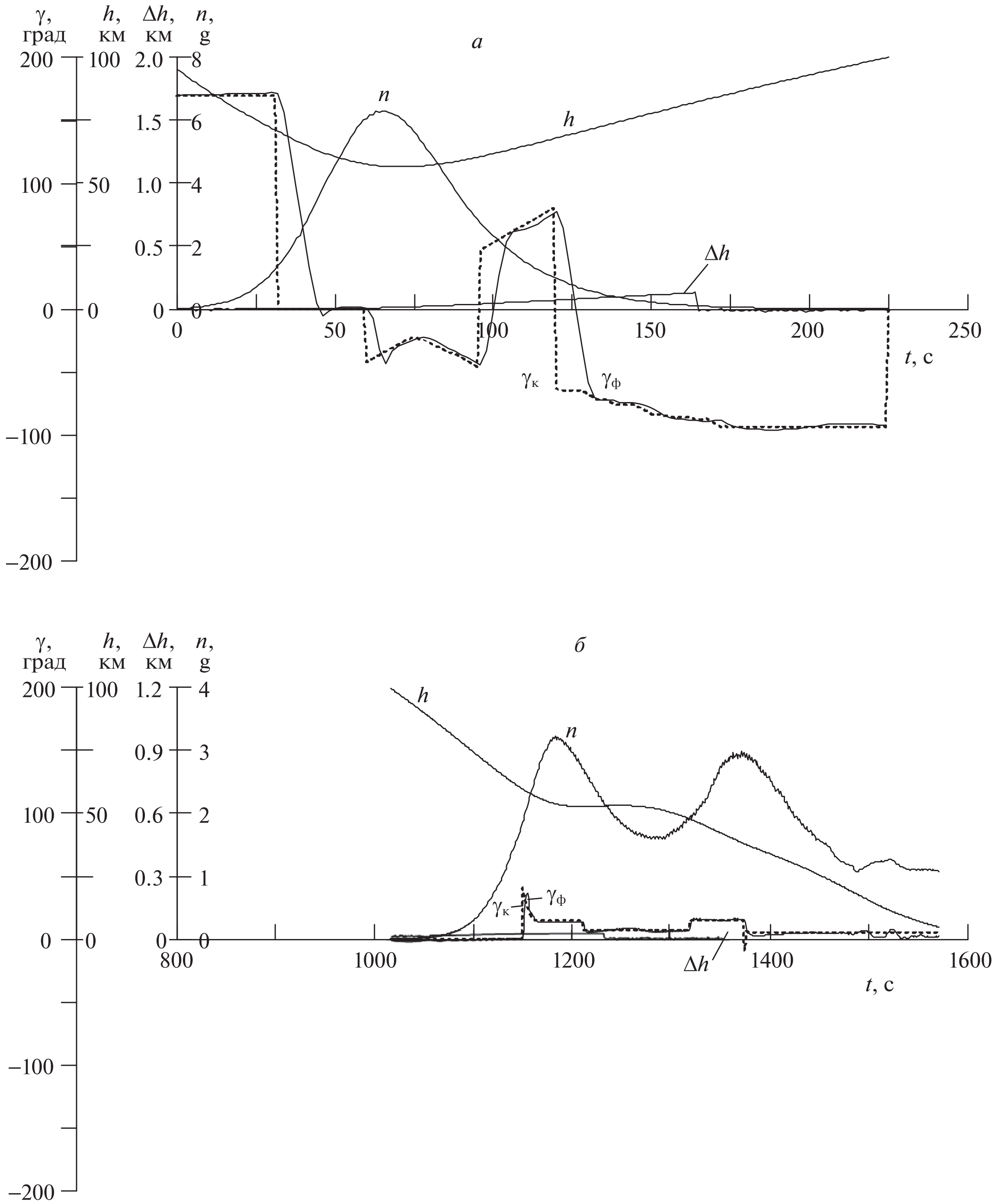


Рис. 1. Параметры траектории с алгоритмом ТАУС-М (вариант № 86 из статистики 1000 псевдослучайных возмущенных траекторий): *а* – участок первого погружения, *б* – участок второго погружения

минимизации импульса перехода с окололунной круговой орбиты на отлетную гиперболическую траекторию выполнялся по алгоритму, описанному в [5]. Величина импульса составляет 838 м/с, время перелета – 4.38 сут. Высота условного перигея траектории возвращения равна 52.5 км (примерно середина коридора входа). Дальность спуска от точки первого входа СА в атмосферу на высоте ее условной границы (100 км) до точки посадки будет порядка 10000 км. Такая дальность является достаточной для возвращения от Луны в любую дату [5]. Наклонение подлетной плоскости составляет 57.78°, широта точки входа – 19.35° с.ш., долгота – 53.14° в.д, угол входа равен – 4.878°, скорость входа – 11005.4 м/с.

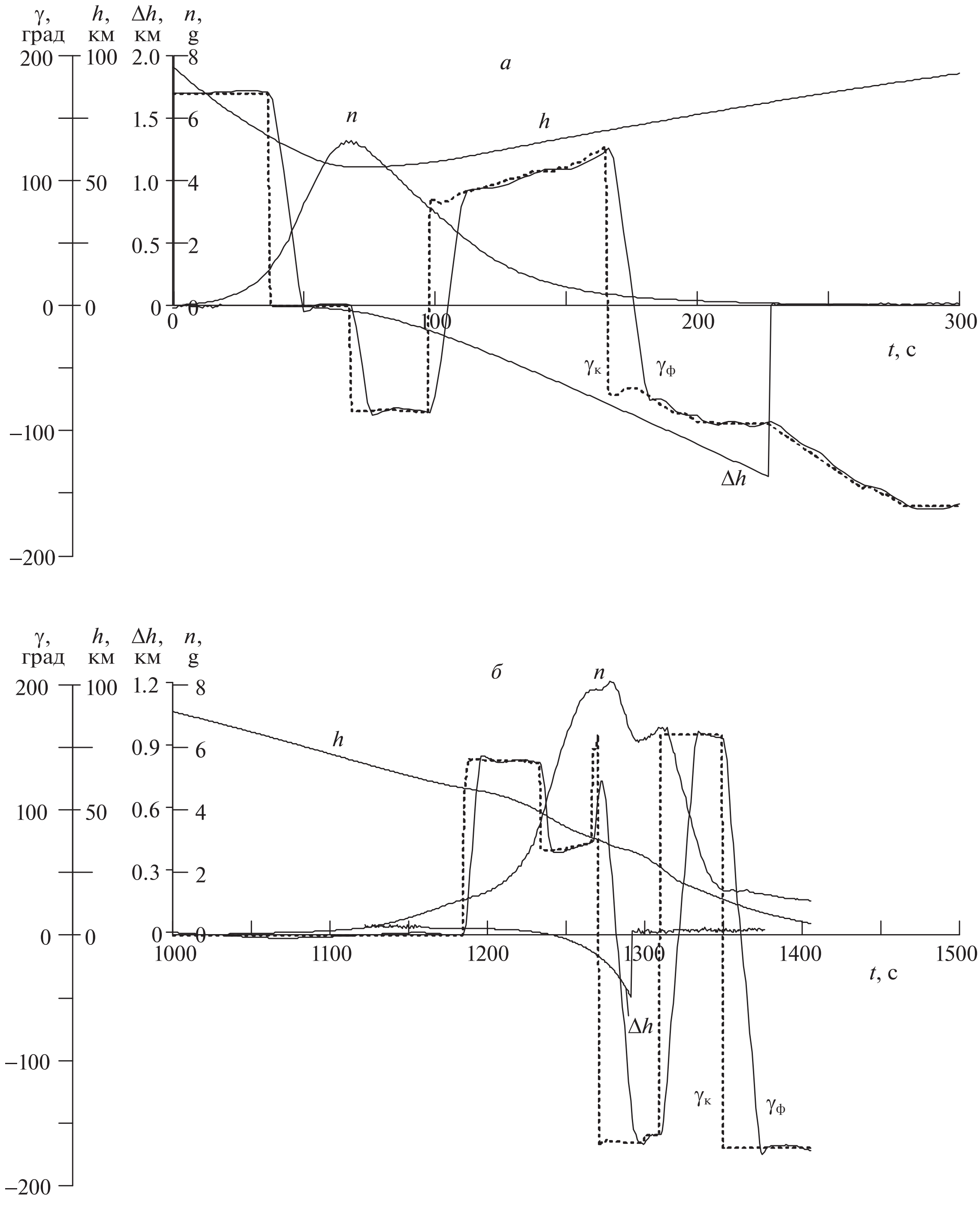


Рис. 2. Параметры траектории с алгоритмом ТАУС-М (вариант № 60 из статистики 1000 псевдослучайных возмущенных траекторий): *а* – участок первого погружения, *б* – участок второго погружения:

Используется модель полного движения СА, включающая движение центра масс и вращение относительно центра масс. Управление угловым движением осуществляется посредством управляющих двигателей (УД) в каналах тангажа, рыскания и крена. Продольное движение СА регулируется в основном величиной угла крена, а боковое движение – переворотами по углу крена, т.е. изменением знака угла крена при сохранении его величины. На первом погружении в атмосферу применяются два переворота, а на втором погружении – три переворота. Такое количество переворотов является минимально необходимым для обеспечения требуемой точности и позволяет уменьшить расход топлива, так как на каждый переворот с помощью УД требуется топливо.

На рис. 3 показана общая структура командных углов крена, а ниже даны параметры опорной зависимости командного угла крена от кажущейся скорости в виде кусочно-постоянных функций. В скобках приведены значения, полученные после уточнения опорной зависимости в точке первого входа СА в атмосферу на высоте 100 км.

На первом погружении

$V_0 = 0.3$ (0.11) км/с, $V_1 = 0.9$ (1.17) км/с, $V_2 = 2.2$ (2.52) км/с, $V_3 = 3.350$ км/с, $\gamma_{вх} = 170°$, $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = -60°$ ($-72°$), $\gamma_2 = 60°$ (72°), $\gamma_3 = -30°$($-25°$);

на втором погружении

$V_1 = 0$, $V_2 = 2.900$ км/с, $V_3 = 6.000$ км/с, $V_4 = 7.700$ км/с, $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 45°$, $\gamma_2 = -45°$, $\gamma_3 = 45°$, $\gamma_4 = -170°$, $k_\gamma = 0.5$ (для “среза” пика n).

Здесь переменные γ_i, V_i задают значения углов крена на отрезках кусочно-постоянной функции и моментов переключения между ними (см. рис. 3).

Величина опорного угла крена на первом погружении в 60° выбрана из условия обеспечения больших возможностей по увеличению дальности при недолете. Величина опорного угла крена на втором погружении в 45° выбрана из условия сохранения равных возможностей по изменению дальности.

Модель возмущений включает следующие составляющие:

ошибки аэродинамических характеристик,

ошибки массы, моментов инерции и центровки (МЦИХ – масса, центровка, инерция, характеристики),

возмущенная атмосфера (вариации плотности и ветер),

навигационные ошибки (акселерометров, датчиков угловой скорости, начальной выставки измерительных осей и точности ее знания, аппаратуры спутниковой навигации),

ошибки работы управляющих двигателей (тяги, удельной тяги, запаздывание включения-выключения).

В качестве возмущенной атмосферы для расчетов используется январская (экстремальная) модель атмосферы ЦНИИМаш, которая была разработана для программы “Энергия”–“Буран”. Некоторые ошибки (АДХ, МЦИХ, др.) имеют две составляющие: с нормальным и равномерным распределением. Величины самих ошибок определяются датчиком псевдослучайных чисел и однозначно зависят от номера возмущенной траектории. Это позволяет многократно повторять “плохие” варианты с большим промахом, большой перегрузкой или большим расходом топлива и “рассматривать их под микроскопом”. Статистические испытания принятых решений обосновываются расчетом 1000 возмущенных траекторий.

Основное предназначение *ситуационного* алгоритма ТАУС-МС состоит в гарантированной идентификации экстремальных сочетаний возмущений (сниженное аэродинамическое качество + повышенная плотность атмосферы + большая положительная ошибка по навигационной высоте или повышенное аэродинамическое качество + пониженная плотность атмосферы + большая отрицательная ошибка по навигационной высоте) и адекватной модификации управления для исключения возможности больших недолетов/перелетов и повышенной перегрузки. Средние и малые возмущения не столь опасны, так как даже предыдущая версия *общей* адаптации в алгоритме ТАУС-М успешно “справляется” с такими возмущениями.

Основные показатели рикошетирующей траектории спуска при возвращении от Луны (точность, перегрузка, расход топлива) формируются на участке первого погружения СА в атмосферу. Этот участок включает спуск СА до минимальной высоты (точки рикошета) и подъем до точки вылета за пределы условной границы атмосферы (100 км). Спуск СА до точки рикошета происходит за 60–70 с при интенсивном росте по времени перегрузки от нулевого значения до максимальной величины. Подъем от точки рикошета до точки вылета занимает 230–250 с при постепенном снижении перегрузки от максимальной величины до нуля. Максимальная перегрузка реализуется примерно за 6 с до пролета точки рикошета на высоте 55–57 км.

Наиболее важным для формирования рикошетирующей траектории является участок движения вблизи точки рикошета длительностью 50–70 с, на котором перегрузка превышает 2.5g. Сложность управления на этом участке обусловлена его скоротечностью.

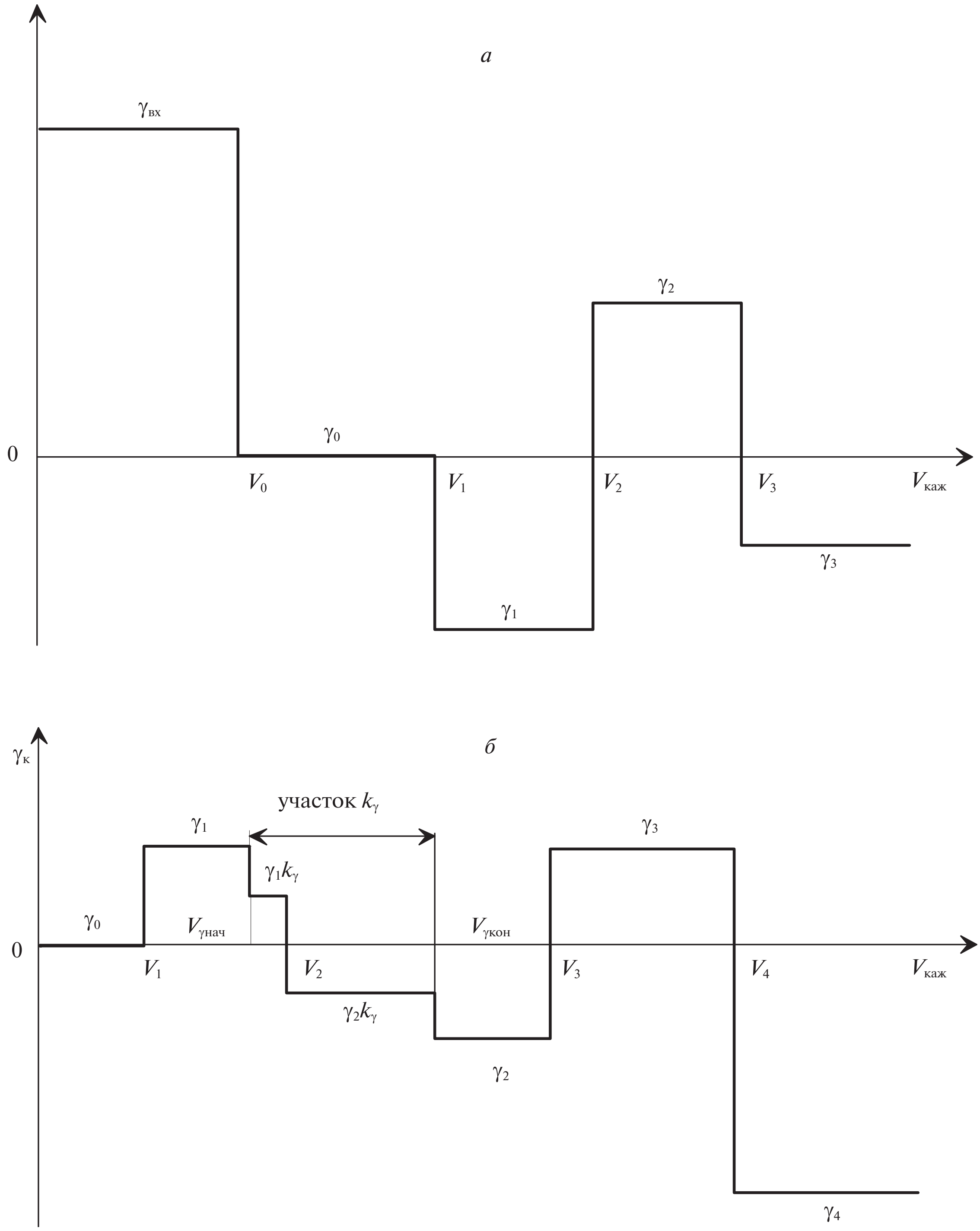


Рис. 3. Структура командных углов крена на атмосферных участках спуска при возвращении от Луны: *а* — командный угол крена на участке первого погружения (первый участок спуска), *б* — командный угол крена на участке второго погружения (третий участок спуска)

2. Адаптация к фактическим ошибкам АДХ+МЦИХ. В [4] описан способ раздельной адаптации, основанный на сравнении измеренного на борту вектора кажущегося ускорения $\vec{W} = (W_x, W_y, W_z)$ с расчетным вектором $\vec{W}^{\text{расч}} = (W_{x0}, W_{y0}, W_{z0})$, который вычисляется по бортовой модели АДХ, среднемесячной модели плотности атмосферы и навигационным параметрам движения.

Определяются две проекции измеренного вектора кажущегося ускорения: на единичный вектор навигационной воздушной скорости $\vec{V}^0$:

$$\vec{W}_V = -(\vec{W} \cdot \vec{V}^0)\vec{V}^0, \tag{2.1}$$

где скобки означают скалярное произведение векторов, и на нормаль к нему:

$$\vec{W}_{\text{п.с}} = \vec{W} - \vec{W}_V. \tag{2.2}$$

Первая проекция (2.1) определяет вектор кажущегося ускорения под действием силы лобового сопротивления. Вторая проекция (2.2) определяет вектор кажущегося ускорения под действием подъемной силы. Соответствующие проекции расчетного вектора кажущегося ускорения $\vec{W}^{\text{расч}}$ вычисляются с использованием бортовых моделей балансировочных АДХ и среднемесячной атмосферы, а также навигационной воздушной скорости.

На каждом шаге коррекции управления определяются два коэффициента адаптации:

$$a_V = |\vec{W}_V|/|\vec{W}_V^{\text{расч}}| \tag{2.3}$$

для коэффициента лобового сопротивления C_{xa} и

$$a_{\text{п.с}} = |\vec{W}_{\text{п.с}}|/|\vec{W}_{\text{п.с}}^{\text{расч}}| \tag{2.4}$$

для коэффициента подъемной силы C_{ya}.

Раскрывая формулу (2.3), получим отношение измеренного ускорения лобового сопротивления к расчетному:

$$a_V = \left(\frac{C_{xa}\rho V^2 S}{2m}\right)_{\text{изм}} \Big/ \left(\frac{C_{xa}\rho V^2 S}{2m}\right)_{\text{расч}} \simeq \frac{(C_{xa}\rho)_{\text{изм}}}{(C_{xa}\rho)_{\text{расч}}}. \tag{2.5}$$

Здесь S – характерная площадь СА, ρ – плотность атмосферы.

Раскрывая (2.4), получим аналогично

$$a_{\text{пс}} = \left(\frac{C_{ya}\rho V^2 S}{2m}\right)_{\text{изм}} \Big/ \left(\frac{C_{ya}\rho V^2 S}{2m}\right)_{\text{расч}} \simeq \frac{(C_{ya}\rho)_{\text{изм}}}{(C_{ya}\rho)_{\text{расч}}}. \tag{2.6}$$

В соотношениях (2.5) и (2.6) принято допущение $(V^2/m)_{\text{изм}} \approx (V^2/m)_{\text{расч}}$ с учетом того, что воздушная скорость V и масса СА m известны достаточно точно. Отношение $a_{\text{п.с}}$ к a_V определяет относительное аэродинамическое качество $\tilde{k}$ т.е. отношение фактического (измеренного) аэродинамического качества $k_{\text{изм}}$ к расчетному аэродинамическому качеству $k_{\text{расч}}$:

$$\frac{a_{\text{п.с}}}{a_V} = \frac{(C_{ya}\rho)_{\text{изм}}}{(C_{ya}\rho)_{\text{расч}}}\frac{(C_{xa}\rho)_{\text{расч}}}{(C_{xa}\rho)_{\text{изм}}} = \frac{(C_{ya}\rho)_{\text{изм}}}{(C_{xa}\rho)_{\text{изм}}} \Big/ \frac{(C_{ya}\rho)_{\text{расч}}}{(C_{xa}\rho)_{\text{расч}}} = \frac{k_{\text{изм}}}{k_{\text{расч}}} = \tilde{k}. \tag{2.7}$$

Хотя коэффициенты адаптации a_V и $a_{\text{п.с}}$ содержат ошибки, порождаемые ошибками АДХ, МЦИХ, возмущенной атмосферой и навигационной высоты Δh, их отношение (2.7) свободно от этих ошибок и определяет отношение измеренного (фактического) аэродинамического качества СА к расчетному (бортовому) аэродинамическому качеству.

Если $\tilde{k} < 1$, т.е. $k_{\text{изм}} < k_{\text{расч}}$, измеренное (фактическое) аэродинамическое качество меньше расчетного, что способствует *недолету*. Если $\tilde{k} = 1$, т.е. $k_{\text{изм}} = k_{\text{расч}}$, фактическое аэродинамическое качество равно расчетному, что способствует точному приведению СА в район посадки. Если $\tilde{k} > 1$, т.е. $k_{\text{изм}} > k_{\text{расч}}$, измеренное (фактическое) аэродинамическое качество больше расчетного, что способствует *перелету*.

Относительное аэродинамическое качество $\tilde{k}$ по существу показывает итоговую ошибку АДХ+МЦИХ через отношение измеренного (фактического) аэродинамического качества СА к расчетному. Для каждого варианта возмущений относительное аэродинамическое качество $\tilde{k}$ остается постоянным по всей траектории, так как ошибки АДХ+МЦИХ не меняются в процессе движения. Некоторые колебания $\tilde{k}$ на участках с малой перегрузкой (т.е. малым скоростным напором) обусловлены колебаниями СА по углу атаки в условиях слабого демпфирования и ошибками навигационных измерений. Колебания СА по углу атаки приводят к тому, что уточнение бортовых АДХ по формуле (2.7) с использованием коэффициентов адаптации a_V и $a_{\text{п.с}}$ зависит от фазы колебаний. Возникающая при этом “раскачка” прогнозных АДХ является дополнительной помехой для работы алгоритма.

Чтобы исключить колебания коэффициентов $a_V(t)$ и $a_{\text{п.с}}(t)$, при их вычислении по формулам (2.5) и (2.6) в качестве расчетных применяются коэффициенты, соответствующие текущему навигационному углу атаки $\alpha_{\text{нав}}$, т.е. $C_{xa}(\alpha_{\text{нав}})$ и $C_{ya}(\alpha_{\text{нав}})$. Навигационный угол атаки $\alpha_{\text{нав}}$ определяется на основе текущего навигационного вектора состояния [6]. Плотность атмосферы $\rho_{\text{расч}}(h_{\text{нав}})$ соответствует бортовой среднемесячной модели.

В этом случае коэффициенты адаптации $a_V(t)$ и $a_{\text{п.с}}(t)$ практически не имеют колебательной составляющей, и относительное аэродинамическое качество $\tilde{k}(t)$, вычисляемое по формуле (2.7), тоже почти постоянно.

Из-за навигационных и методических ошибок функция $\tilde{k}(t)$ на участке спуска от точки входа до точки рикошета все же может иметь небольшие колебания. По своей природе относительное аэродинамическое качество $\tilde{k}$ постоянно, так как оно зависит только от ошибок АДХ+МЦИХ, которые не меняются по всей траектории. Поэтому применяется сквозное осреднение относительного аэродинамического качества как среднее арифметическое мгновенных значений:

$$\tilde{k}_{\text{ср}\,l} = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\tilde{k}_i.$$

Путем несложных преобразований последнее соотношение может быть сведено к рекуррентной формуле

$$\tilde{k}_{\text{ср}\,l} = \frac{1}{l}[(l-1)\,\tilde{k}_{\text{ср}\,(l-1)} + \tilde{k}_l]. \tag{2.8}$$

Здесь $\tilde{k}_{\text{ср}\,l}$ – осредненное значение на текущем шаге навигационных измерений, l – текущий шаг, $\tilde{k}_{\text{ср}\,(l-1)}$ – осредненное значение на предыдущем шаге, $\tilde{k}_l$ – текущее измерение. Такое осреднение относительного аэродинамического качества (2.8) позволяет раньше идентифицировать его истинную величину и использовать в прогнозе.

Ошибку относительного аэродинамического качества ($\tilde{k}$) будем интерпретировать через изменение балансировочного угла атаки $\Delta\alpha$ из-за изменения коэффициента момента тангажа Δm_z. Для получения зависимости $\Delta m_z = f(\tilde{k})$ рассмотрим в линейном приближении вариацию аэродинамического качества k в окрестности балансировочного угла атаки $\alpha_{\text{бал}}$:

$$k(\Delta\alpha) = k_{\text{расч}} + \frac{\partial k}{\partial\alpha}\Delta\alpha. \tag{2.9}$$

С учетом (2.9) получим

$$\tilde{k} = \frac{k(\Delta\alpha)}{k_{\text{расч}}} = 1 + \frac{1}{k_{\text{расч}}}\frac{\partial k}{\partial\alpha}\Delta\alpha. \tag{2.10}$$

Из (2.10) определим $\Delta\alpha$:

$$\Delta\alpha = k_{\text{расч}}(\tilde{k} - 1)/\frac{\partial k}{\partial\alpha}. \tag{2.11}$$

Для коэффициента момента тангажа в линейном приближении имеем

$$\Delta m_z = -\frac{\partial m_z}{\partial\alpha}\Delta\alpha. \tag{2.12}$$

С учетом (2.11) и (2.12) получим формулу, устанавливающую связь между $\tilde{k}$ и Δm_z:

$$\Delta m_z = -\frac{\partial m_z}{\partial\alpha}k_{\text{расч}}(\tilde{k} - 1)/\frac{\partial k}{\partial\alpha}. \tag{2.13}$$

Гиперзвуковые коэффициенты в (2.13) при $M > 10$ и номинальных АДХ имеют значения: $\partial m_z/\partial\alpha = -0.0027$ град$^{-1}$, $k = -0.319$, $\partial k/\partial\alpha = -0.0134$ град$^{-1}$. Тогда

$$\Delta m_z = 0.0643(\tilde{k} - 1). \tag{2.14}$$

Если $\tilde{k} = 0.8$ (фактическое аэродинамическое качество на 20% меньше расчетного), то $\Delta m_z = -0.0129$. Если $\tilde{k} = 1$ (фактическое аэродинамическое качество равно расчетному), то $\Delta m_z = 0$. Если $\tilde{k} = 1.2$ (фактическое аэродинамическое качество на 20% больше расчетного), то $\Delta m_z = +0.0129$. Видно, что коэффициент адаптации Δm_z для расчета прогнозных АДХ может существенно отличаться от используемого в [3] *общего* коэффициента адаптации $\Delta m_z = -0.004$.

Формула (2.14) используется, если расчетные величины в (2.3)–(2.6) – это *номинальные* АДХ, соответствующие номинальному балансировочному углу атаки. Если в качестве расчетных применяются АДХ при *навигационном угле атаки*, то вычисление Δm_z проводится по формуле

$$\Delta m_z = 0.0643(\tilde{k} - 1) + \delta m_z\left(\alpha_{\text{бал}} - \Delta\alpha_{\text{бал}}\right). \tag{2.15}$$

Здесь второе слагаемое учитывает дополнительный аэродинамический момент δm_z, который возникает из-за смещения фактического балансировочного угла атаки ($\Delta\alpha_{\text{бал}}$) от номинального $\alpha_{\text{бал}}$. Для определения смещения $\Delta\alpha_{\text{бал}}$ используется алгоритм, описанный в работе [6].

Прогнозные АДХ формируются с учетом коэффициента момента тангажа (2.14) или (2.15), поэтому они автоматически учитывают ошибки АДХ и МЦИХ.

Построенная адаптация ТАУС-МС соответствует гиперзвуковой скорости движения СА с числом Маха больше 6, но формулы (2.14) и (2.15) сохраняют свою работоспособность вплоть до последнего участка спуска, т.е. до трансзвуковой скорости, и не требуют перенастройки.

Коэффициент $\tilde{k}$ уточняется только в том случае, когда новое вычисленное значение относительного аэродинамического качества отличается от принятого больше, чем на 0.01. Последнее полученное значение $\tilde{k}$ сохраняется до конца траектории спуска, т.е. и на участке второго погружения СА в атмосферу.

3. Идентификация относительной плотности. Вместо неизвестной относительной плотности $\xi = \rho/\rho_{\text{см}}$, где ρ – фактическая плотность атмосферы, $\rho_{\text{см}}$ – бортовая среднемесячная плотность атмосферы, в прогнозе используется функция

$$\eta = 0.5(a_V + a_{\text{п.с}}) \tag{3.1}$$

или с учетом (2.5) и (2.6)

$$\eta = 0.5(1 + \tilde{k})\frac{(C_{xa})_{\text{изм}}}{(C_{xa})_{\text{расч}}}\xi. \tag{3.2}$$

Если $\tilde{k} = 1$ и $(C_{xa})_{\text{изм}} = (C_{xa})_{\text{расч}}$, то имеем $\eta = \xi$. Если из-за ошибок АДХ+МЦИХ имеем $(C_{xa})_{\text{изм}} > (C_{xa})_{\text{расч}}$, то реально $\tilde{k} < 1$ и, наоборот, если $(C_{xa})_{\text{изм}} < (C_{xa})_{\text{расч}}$, то реально $\tilde{k} > 1$. Поэтому множитель перед ξ в формуле (3.2) близок к 1, т.е. функция η (3.1) должна примерно совпадать с ξ. Проведенный анализ экстремальных вариантов возмущенных траекторий показал, что на участке спуска до точки рикошета разница между η и ξ не превышает 3–6% в моменты коррекции управления. После точки рикошета начинает накапливаться ошибка навигационной высоты Δh, которая растет почти линейно по времени и может достигать ± 2 км на высоте 80 км, когда начинает работать аппаратура спутниковой навигации (АСН). Ошибка η следует ошибке Δh: при $\Delta h > 0$ функция η отклоняется вверх от ξ, а при $\Delta h < 0$ – вниз.

Близость ξ и η позволила в модифицированном алгоритме ТАУС-МС рассматривать параметр η в качестве относительной плотности ξ на участке спуска до точки рикошета (т.е. до появления ошибок навигационной высоты Δh). Тем самым с использованием навигационных измерений и введения параметров (2.14) или (2.15) и (3.1) удалось в алгоритме ТАУС-МС впервые разделить *ошибки относительного аэродинамического качества* ($\tilde{k}$) и *относительной плотности атмосферы* (ξ). Это позволило правильно идентифицировать условия движения для каждой возмущенной траектории.

Вариации плотности атмосферы в силу своей природы меняются медленно по времени (дальности), поэтому функция η не требует осреднения, чтобы “не потерять” длиннопериодическую волну.

При первом погружении СА в атмосферу логика адаптации включается, когда перегрузка достигает величины $n = 0.05g$ (высота ~88 км), а выключается после пролета точки рикошета на минимальной высоте, когда начинает накапливаться ошибка навигационной высоты Δh.

При прогнозе остающейся траектории ниже достигнутой высоты на участке первого погружения и на участке второго погружения принимается $\eta = 1$, что соответствует плотности среднемесячной (бортовой) атмосферы.

При движении СА на участке второго погружения в атмосферу на высотах выше 60 км используется среднее значение функции $\eta_{\text{ср}}$, полученное на участке первого погружения. На высотах ниже 60 км значение η вычисляется по формуле

$$\eta = k_\eta\left[1 + (1 + (\eta_{\text{ср}} - 1)\frac{h}{60}\right].$$

Здесь высота h задается в км, коэффициент $k_\eta = 1.1$, если $\eta_{\text{ср}} < 0.85$, и $k_\eta = 1$, если $\eta_{\text{ср}} \geq 0.85$. Тем самым при прогнозе плотность атмосферы на остающемся участке завышается.

4. Идентификация ошибки навигационной высоты. Идентификация ошибки навигационной высоты выполняется на участках траектории, где возможно накопление больших навигационных ошибок:

на восходящем участке траектории первого погружения в атмосферу,

на высотах от 70 до 37 км второго погружения в атмосферу.

Адаптация к ошибке навигационной высоты состоит в корректировке начального вектора состояния при бортовом прогнозе на величину высотной поправки Δh, для расчета которой используется следующий алгоритм.

Определяется величина номинального полного аэродинамического ускорения $\left|\vec{W}_\Sigma^{\text{расч}}\right|$. С использованием измеренной величины полного аэродинамического ускорения $\left|\vec{W}_\Sigma^{\text{изм}}\right|$ вычисляется поправочный коэффициент β по формуле

$$\beta = \left|\vec{W}_\Sigma^{\text{изм}}\right| / (\eta\left|\vec{W}_\Sigma^{\text{расч}}\right|).$$

Здесь η – модельная относительная плотность атмосферы, задаваемая формулой (3.1).

С привлечением стандартной атмосферы СА-81 (ГОСТ 4401-81) находится поправка Δh, для которой выполняется условие

$$\beta = \rho(h + \Delta h)/\rho(h). \tag{4.1}$$

Эта поправка навигационной высоты нужна для уточнения начального вектора состояния при расчете прогноза. Алгоритм уточнения следующий. По текущему навигационному радиус-вектору $\vec{r}$ определяются текущие значения широты φ, долготы λ и высоты h. Полученная высота h корректируется на величину Δh, найденную из условия (4.1). Затем по значениям φ, λ, $h + \Delta h$ вычисляется скорректированный радиус-вектор $\vec{r}_{\text{кор}}$, который применяется для формирования начального вектора состояния при расчете текущего прогноза.

Использование описанного алгоритма для расчета поправки навигационной высоты Δh на отдельных траекториях порождает автоколебания командного угла крена на восходящей ветви первого погружения СА в атмосферу, что приводит к увеличению расхода топлива. Причиной являлось “пилообразное” изменение вычисляемой поправки Δh. Для устранения этого применяется следующий алгоритм.

На каждом такте навигационных измерений (длительностью 0.025 с) вычисляется мгновенное значение Δh_i из условия (4.1). Предполагается, что на интервале накоплений измерений поправка навигационной высоты Δh зависит линейно от времени:

$$\Delta h = at + b.$$

Коэффициенты a и b вычисляются из условия минимума функции

$$\sum_i (at_i + b - \Delta h_i)^2$$

методом наименьших квадратов и обновляются всякий раз при поступлении очередного “измерения” Δh_i.

В результате автоколебания командного угла крена были устранены, расход топлива уменьшился, а точность приведения улучшилась.

5. Управление при отсутствии двухпараметрического решения. Двухпараметрическое управление ТАУС-МС с одновременным устранением прогнозируемых промахов в продольном и боковом направлениях основано на подходе, описанном в [1]. Этот подход подразумевает на каждом шаге работы алгоритма управления выполнение трех численных прогнозов остающейся части траектории спуска и определение частных производных конечных параметров движения по параметрам управления. Затем в линейном приближении решается система двух уравнений для поправок к зависимости командного угла крена от кажущейся скорости. Однако такая система может не иметь решения (“вырождаться”) в двух случаях.

В первом случае главный определитель системы двух линейных уравнений

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \gamma} & \dfrac{\partial x}{\partial V_i} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \gamma} & \dfrac{\partial z}{\partial V_i} \end{vmatrix}$$

для расчета поправок $\Delta\gamma$, ΔV обращается в нуль или близок к нулю. Здесь $\Delta\gamma$ – поправка к командному углу крена, ΔV – поправка к величине кажущейся скорости очередного переворота по крену. Физически это означает, что остающаяся прогнозная траектория становится практически нечувствительной к управлению. В таких случаях алгоритм сохраняет параметры управления, полученные на предыдущем шаге коррекции.

Во втором случае кажущаяся скорость V_i очередного прогнозного переворота по крену “уходит” за кажущуюся скорость V_{i+1} следующего за ним переворота на опорной зависимости угла крена. В такой ситуации допускается сдвиг кажущейся скорости момента переворота до некоторого предельного значения: $V_i \le V_{i+1} - \Delta V_{доп}$, где $\Delta V_{доп}$ – “буфер”, выбираемый заранее (в общем случае разный на участках первого и второго погружений в атмосферу). При этом командный угол крена не ограничивается.

В отдельных случаях, когда командный угол крена $\gamma_к$ близок к нулю, а поправка $\Delta\gamma$ изменяет его знак, могут возникать автоколебания в окрестности угла $\gamma_к = 0$, которые резко увеличивают расход топлива и промах. Для защиты от таких случаев была выполнена следующая доработка алгоритма ТАУС-МС.

Если после решения системы линейных уравнений величина поправки кажущейся скорости текущего переворота по крену ΔV оказывается такой, что нарушается условие $V_i + \Delta V < V_{i+1}$, то величина поправки ΔV вычисляется по формуле

$$\Delta V = 0.5(V_i + V_{i+1}) - V_i. \tag{5.1}$$

В этой ситуации величина поправки командного угла крена $\Delta\gamma$ выбирается из условия равенства нулю квадрата суммарного промаха $r^2 = x^2 + z^2$ при известном значении ΔV, вычисленном по формуле (5.1). Здесь x – продольный промах, z – боковой промах в посадочной системе координат.

В линейном приближении по формуле Тейлора имеем

$$r^2(\gamma + \Delta\gamma, V_i + \Delta V) = r^2(\gamma, V) + \frac{\partial(r^2)}{\partial V}\Delta V + \frac{\partial(r^2)}{\partial \gamma}\Delta\gamma, \tag{5.2}$$

где

$$\frac{\partial(r^2)}{\partial \gamma} = 2x\frac{\partial x}{\partial \gamma} + 2z\frac{\partial z}{\partial \gamma}, \quad \frac{\partial(r^2)}{\partial V} = 2x\frac{\partial x}{\partial V} + 2z\frac{\partial z}{\partial v},$$

а $\dfrac{\partial x}{\partial\gamma},\dfrac{\partial z}{\partial\gamma},\dfrac{\partial x}{\partial V},\dfrac{\partial z}{\partial V}$ – частные производные, которые использовались в системе линейных уравнений для поправок. Из условия равенства нулю (5.2) получим поправку командного угла крена в рассматриваемом случае:

$$\Delta\gamma = -\left[r^2(\gamma,V) + \frac{\partial(r^2)}{\partial V}\Delta V\right] \Big/ \frac{\partial(r^2)}{\partial\gamma}.$$

Если $\gamma_к$ и сумма $\gamma_к + \Delta\gamma$ оказываются по разные стороны от 0 или $\pm\pi$, то новое значение для $\gamma_к$ вычисляется как $\gamma_к = \gamma_0 \cdot \mathrm{sign}(\gamma_к)$ при переходе через 0 или как $\gamma_к = (\pi - \gamma_\pi) \cdot \mathrm{sign}\,(\gamma_к)$ при переходе через $\pm\pi$. Здесь γ_0 и γ_π – константы, которые равны соответственно 5° и 10°.

6. Алгоритм ограничения перегрузки. Перед первым входом СА в атмосферу априорная опорная зависимость угла крена от кажущейся скорости уточняется из условия получения заданной перегрузки $n_{зад} = 5.3g$ вблизи точки рикошета в предположении номинальных АДХ и среднемесячной атмосферы. Обычно максимальная перегрузка возникает за 5–6 с до точки рикошета и не превышает $5.8g$. Командный угол входа $\gamma_{вх} = 170°$ фиксирован, а длительность участка движения с таким углом $V_0 = 0.3$ км/с в номинальных условиях обеспечивает заданную максимальную перегрузку. После участка входа “с пикированием” (для быстрого “зарывания” СА в атмосферу) вводится управление $\gamma_1 = 0$ для выравнивания траектории. При таком управлении на первом погружении СА в атмосферу перегрузка может иметь только один максимум (“пик” перегрузки). В алгоритме ТАУС-М максимальная перегрузка на первом погружении СА в атмосферу не контролировалась из-за быстротечности ее нарастания: время спуска до точки рикошета составляет 50–60 с, из которых ~30 с отводятся на адаптацию к фактическим условиям движения [4].

В алгоритме ТАУС-МС впервые введено регулирование максимальной перегрузки на участке первого погружения в атмосферу за счет корректировки параметров V_0 (момент изменения угла крена со 170° на 0) и V_1 (момент изменения угла крена с 0 до γ_1) [7]. Алгоритм регулирования включает в себя начальный блок, в котором до входа в атмосферу строится профиль прогнозируемой перегрузки при отсутствии возмущений и два блока для коррекции параметров V_0 и V_1 в ходе спуска. Первый из этих блоков вызывается в фиксированный момент времени после входа в атмосферу и может корректировать значения V_0 и V_1 на основе сравнения прогнозного профиля перегрузки, построенного до входа в атмосферу, с профилем перегрузки, полученным по ее измерениям. Второй блок вызывается после уточнения значения поправка Δm_z и может изменять значение V_1 в зависимости от прогнозируемой максимальной перегрузки.

Для алгоритма ТАУС-МС максимальная перегрузка по всей траектории спуска обычно реализуется на первом погружении СА в атмосферу. Только на единичных траекториях максимальная перегрузка может оказаться на втором погружении. Для таких случаев разработан специальный алгоритм контроля и снижения максимальной перегрузки на втором погружении [7].

Физическая основа снижения перегрузки состоит в разбиении одного большого пика перегрузки на два пика меньшей высоты. Это реализуется посредством ввода так называемого “участка k_γ” [4]. Коэффициент k_γ определяет величину уменьшения модуля опорного командного угла крена на заданном интервале кажущейся скорости. За счет этого траектория “вспухает”, и пик перегрузки разбивается на два: один на большой высоте при большой скорости, а второй на меньшей высоте при увеличенной плотности атмосферы. Был выбран рациональный коэффициент $k_\gamma = 0.5$, т.е. опорный угол командного крена уменьшается на этом участке в 2 раза. Если коэффициент k_γ уменьшить еще, то снизится эффективность компенсации бокового промаха, если его увеличить, то не будет возможности снижения перегрузки.

Участок k_γ, помимо самого коэффициента, имеет два параметра настройки: величина кажущейся скорости начала этого участка $V_{\gamma\,нач}$ и его конца $V_{\gamma\,кон}$ (или его длительности ΔV_γ). В отличие от [4], где по результатам прогноза перегрузки использовался постоянный сдвиг участка k_γ (протяженностью $\Delta V_\gamma = 2$ км/с) влево по кажущейся скорости на 0.8 км/с от начального значения $V_{\gamma\,нач} = 2.2$ км/с, в ТАУС-МС применяется более гибкая логика, которая была представлена в [7].

Эта логика основана на коррекции значений $V_{\gamma\,нач}$ и $V_{\gamma\,кон}$ в случае, если прогнозируемая перегрузка превышает допустимое значение. На величину максимальной перегрузки влияет главным образом $V_{\gamma\,нач}$. Второй параметр выбирается таким образом, чтобы его значение совпадало с кажущейся скоростью, соответствующей пику перегрузки. В ТАУС-МС реализовано два блока,

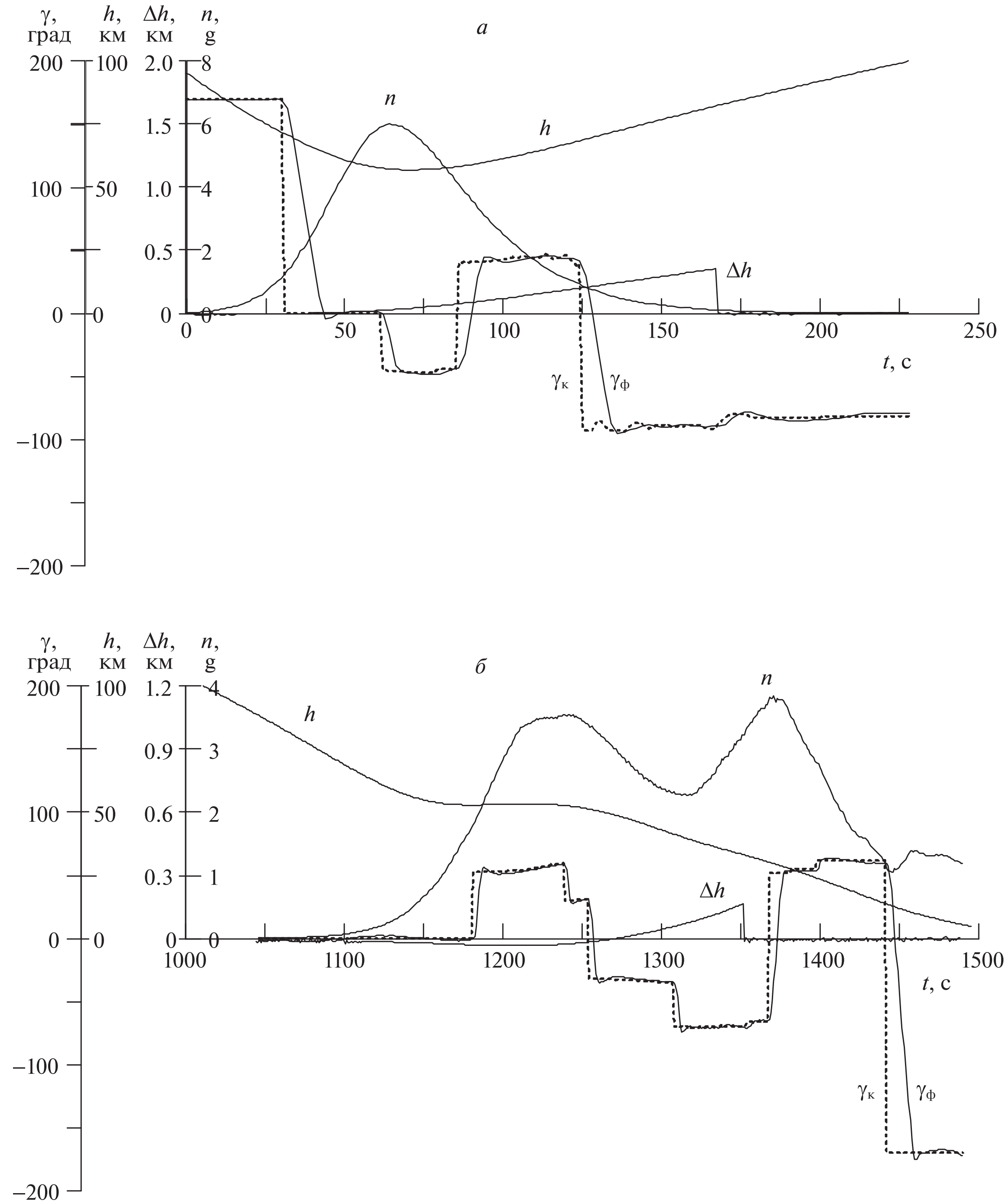


Рис. 4. Параметры траектории с алгоритмом ТАУС-МС (вариант № 86 из статистики 1000 псевдослучайных возмущенных траекторий): *а* – участок первого погружения, *б* – участок второго погружения

в которых возможна корректировка $V_{\gamma\,\text{нач}}$ и $V_{\gamma\,\text{кон}}$. Первый блок реализуется в виде итерационной процедуры по уточнению значений $V_{\gamma\,\text{нач}}$ и $V_{\gamma\,\text{кон}}$ на основе прогнозируемого значения максимальной перегрузки. Этот блок должен вызываться на внеатмосферном участке траектории после первого погружения в атмосферу. Второй блок вызывается в ТАУС-МС на каждом такте вызова алгоритма при втором погружении в атмосферу до тех пор, пока не будет пройден первый пик перегрузки. Алгоритмически второй блок аналогичен первому, однако при каждом его вызове выполняется только одна итерация по уточнению $V_{\gamma\,\text{нач}}$ и $V_{\gamma\,\text{кон}}$.

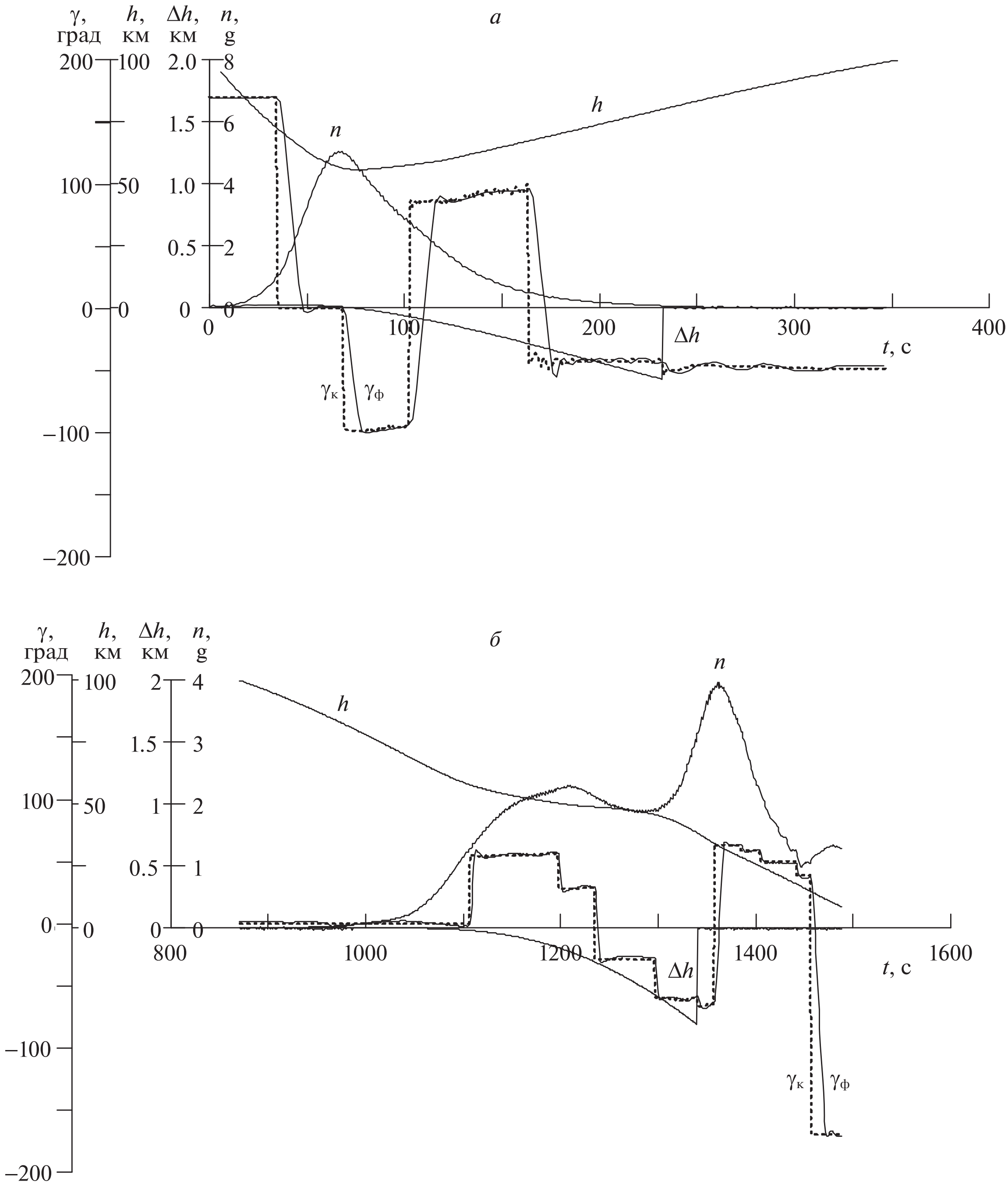


Рис. 5. Параметры траектории с алгоритмом ТАУС-МС (вариант № 60 из статистики 1000 псевдослучайных возмущенных траекторий): *а* — участок первого погружения, *б* — участок второго погружения

7. Блокировка автоколебаний. В условиях, когда эффективность управления существенно снижается, могут возникать автоколебания по углу крена. Такая ситуация обычно случается в конце участка первого погружения СА в атмосферу из-за низкой плотности и в конце участка второго погружения в атмосферу вследствие малой скорости движения. В условиях сниженной эффективности управления даже небольшие погрешности прогнозируемого промаха могут вызывать автоколебания по крену. Такие ситуации идентифицируются и блокируются путем сохранения командного угла крена.

Вторая причина возможных автоколебаний связана с переходом от двухпараметрического управления к однопараметрическому в конце участков первого и второго погружений в атмосферу,

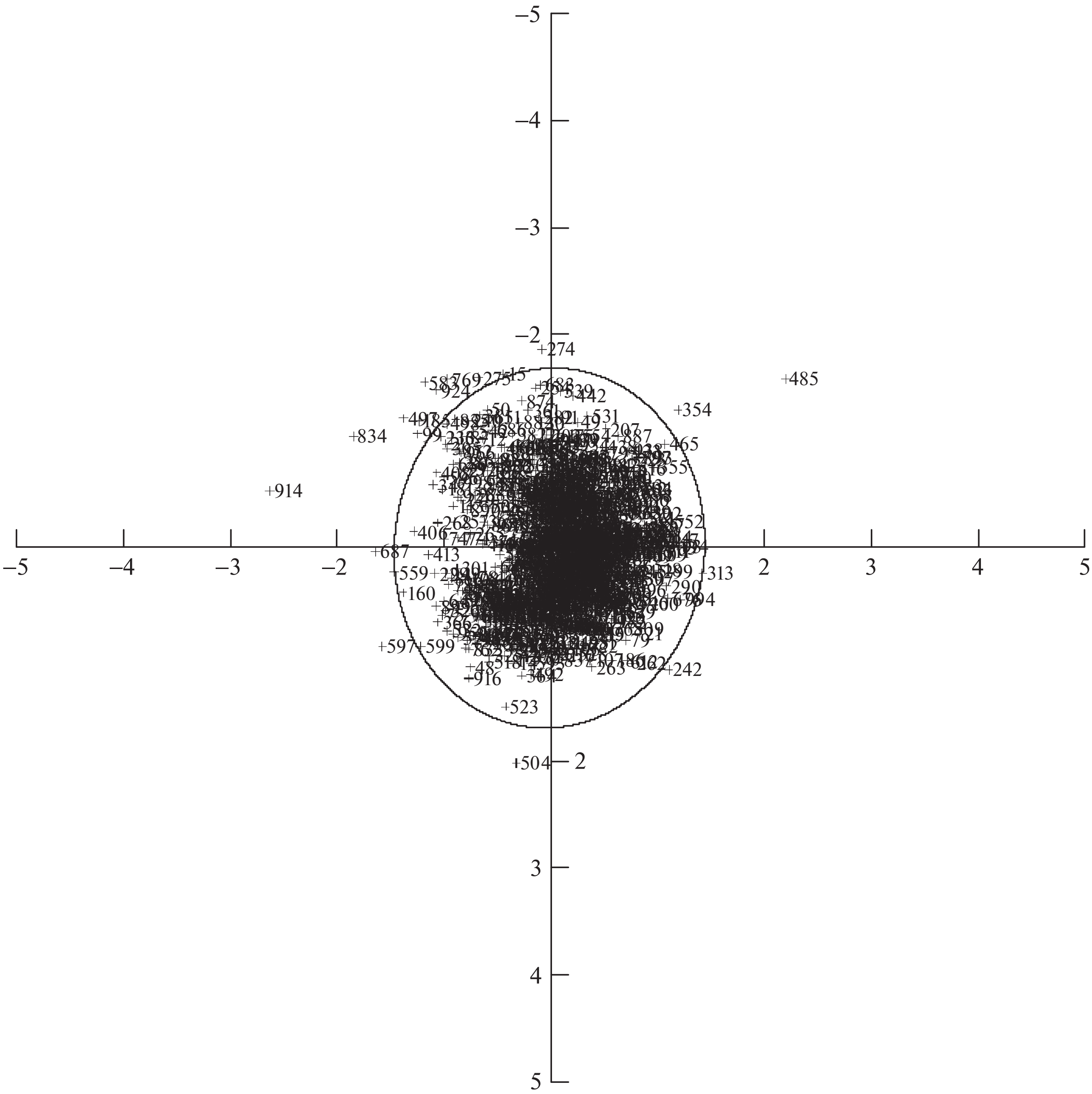


Рис. 6. Конечные точки на высоте приведения

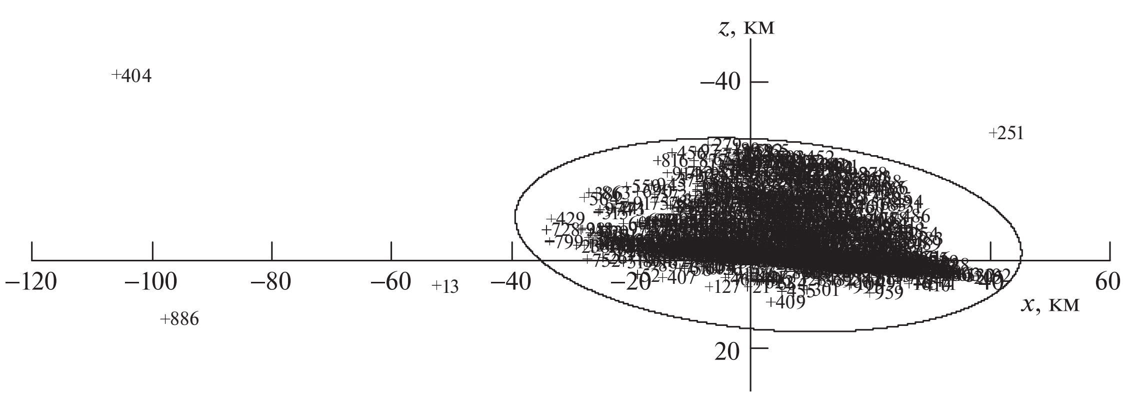


Рис. 7. Прогнозируемый промах в точке вылета

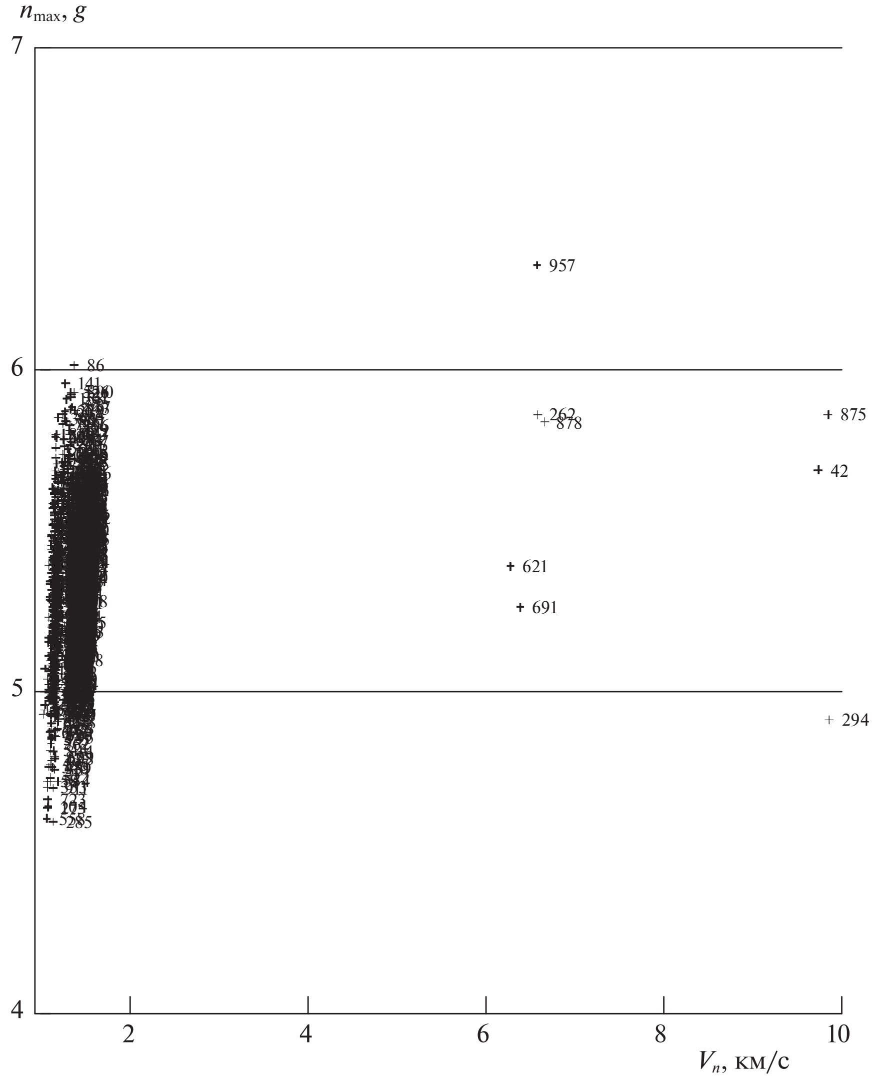


Рис. 8. Максимальные перегрузки

как было в алгоритме ТАУС-М. Автоколебания вызывают повышенный расход топлива и ухудшают точность приведения.

Для исключения "удара" на управление в алгоритме ТАУС-МС двухпараметрическое управление сохраняется на всей траектории спуска. В конце участка первого погружения СА в атмосферу в качестве параметров управления рассматриваются величина угла крена γ_3 этого участка и значение кажущейся скорости V_1 участка второго погружения в момент переключения угла крена с 0 на γ_1 (см. рис. 3).

В алгоритме ТАУС-М [4] было принято, что после третьего (последнего) переворота на втором погружении угол крена не меняется: $\gamma = -170°$. В алгоритме ТАУС-МС последний угол крена "разморожен", т.е. двухпараметрическое управление сохраняется до конца с учетом всех ограничений на командный угол крена. Только в случае нарушения этих ограничений осуществляется переход на однопараметрическое управление из условия минимального промаха.

На рис. 4 показаны параметры движения для варианта № 86 с алгоритмом ТАУС-МС. Промах уменьшился с 20 до 1 км, а управление стало похожим на вариант № 1 (без ошибок АДХ+МЦИХ и со среднемесячной атмосферой).

На рис. 5 приведены параметры движения для варианта № 60. Перегрузка снизилась с 8.1 до 5.1 g, а управление также стало похожим на вариант № 1.

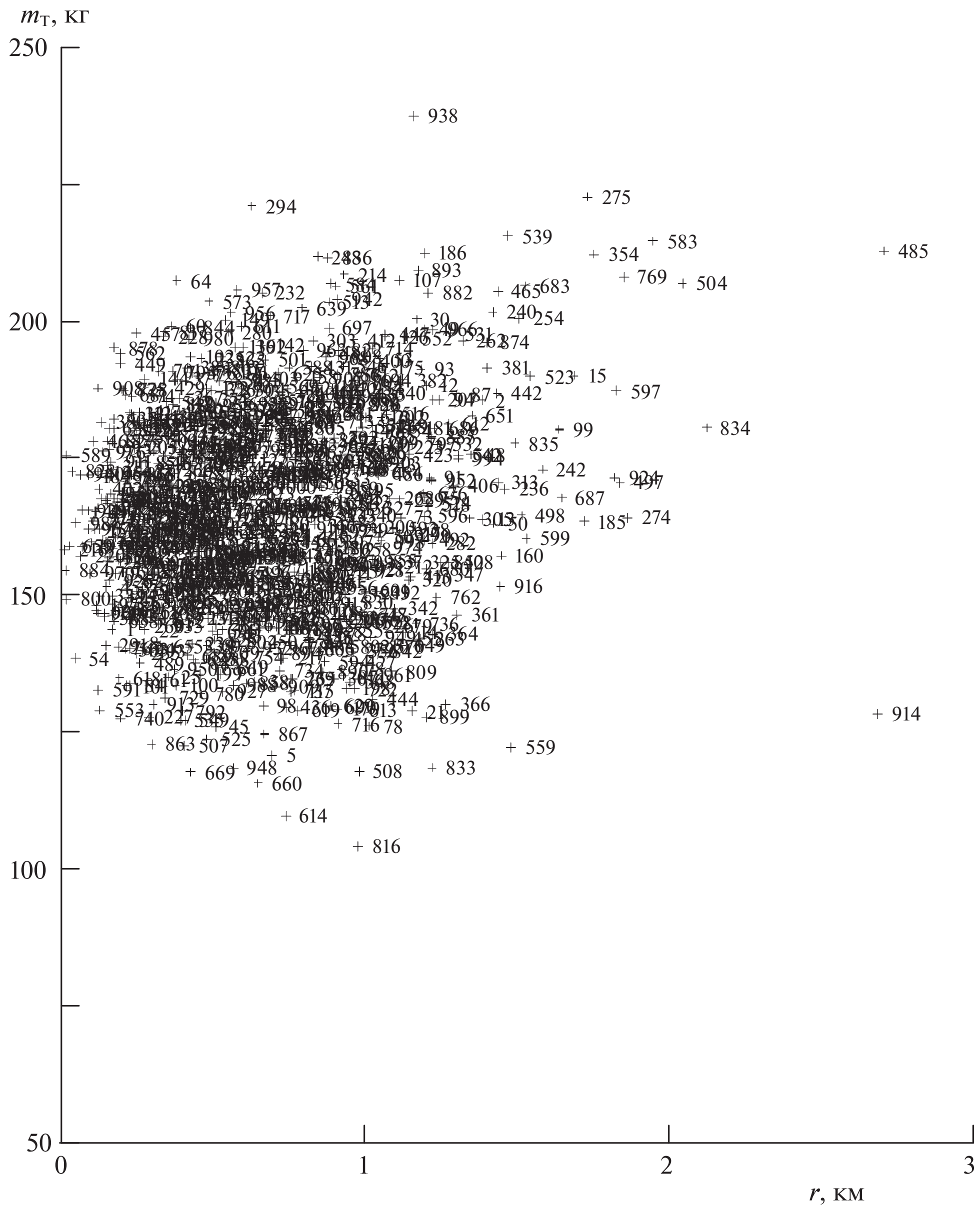


Рис. 9. Расход топлива

8. Результаты статистических испытаний алгоритма ТАУС-МС. Для проверки эффективности алгоритма ТАУС-МС выполнен большой объем статистических испытаний, которые показали следующее. После разработки алгоритмов раздельной адаптации к основным действующим возмущениям (ошибки АДХ+МЦИХ, возмущенная атмосфера, ошибка навигационной высоты) наиболее существенной для точности приведения оказалась ошибка знания начальной выставки осей чувствительности инерциального измерительного прибора (ИИП) относительно связанной системы координат. Статистическими расчетами установлено, что сама ошибка начальной выставки ИИП влияет на отдельные возмущенные траектории, но в статистике сказывается не сама ошибка, а точность ее знания.

Точность знания ошибки начальной выставки ИИП зависит от способа ее определения с помощью внешних датчиков (например, с использованием звездного датчика), а также от взаимного расположения ИИП и датчика. Если оба прибора конструктивно размещены на одной платформе, то ошибка знания начальной выставки ИИП минимальна (порядка 10 угл. мин). Если оба прибора конструктивно размещены на большом расстоянии, то ошибка знания

Таблица. Результаты статистических испытаний 1000 траекторий (“упрежденное” управление, точность знания ±10 угл. мин)

Параметры	МО	max	min	σ
Участок первого погружения				
T_1, с	292	518	226	33
x_1, км	2.966	40.523	–105.908	14.094
z_1, км	–8.490	13.476	–41.771	7.311
r_1, км	14.676	113.848	0.152	8.688
Δh_1, км	0.017	1.983	–2.040	0.745
$N_{\text{н.р}1}$, с	0.2	72	0	2.3
$n_{\max 1}$, g	5.32	6.02	4.60	0.24
$\Delta t(5g)$, с	13	25	0	6
$\Delta t(6g)$, с	0	1	0	0.03
$m_{\text{топ}1}$, кг	56	85	41	5
$\theta_{\text{выл}1}$, град	1.365	2.137	0.175	0.280
$V_{\text{выл}1}$, км/с	7.621	7.684	7.583	0.016
$V_{\text{каж}1}$, км/с	3.530	3.619	3.450	0.025
L_1, км	2411	4117	1891	255
Участок второго погружения				
T, с	1526	1582	1436	24
x, км	–0.015	2.194	–2.634	0.485
z, км	0.002	2.019	–1.863	0.562
r, км	0.645	2.708	0.016	0.367
Δh, км	0.153	3.809	–3.104	1.235
$N_{\text{н.р}}$, с	0.3	72	0	2.8
$n_{\max}$, g	5.33	6.33	4.60	0.24
$\Delta t(5g)$, с	13	87	0	8
$\Delta t(6g)$, с	0	14	0	0.4
$m_{\text{топ}}$, кг	165	237	104	19
$V_{\text{каж}}$, км/с	12.257	12.532	11.942	0.101
L_Σ, км	9577	9625	9513	15

начальной выставки будет существенно больше и зависит от многих факторов (нежесткость конструкции, перегрузка, нагрев и т.д.). При статистических испытаниях ТАУС-МС принята точность знания ошибки начальной выставки ±10 угл. мин с равномерным распределением. Сама ошибка начальной выставки рассматривалась в пределах ±25 угл. мин тоже с равномерным распределением.

Расчетами установлено, что использование “упрежденного” управления, когда на текущем шаге коррекции (длительностью 1 с) формируется управление для следующего шага, практически не влияет на точность приведения с алгоритмом ТАУС-МС, перегрузку и расход топлива. При этом предполагается, что одного шага достаточно для проведения всех расчетов, связанных с коррекцией управления.

Результаты статистических испытаний алгоритма ТАУС-МС по расчету 1000 возмущенных траекторий приведены в таблице для “упрежденного” управления на 1 шаг коррекции при точности знания выставки ИИП ±10 угл. мин с равномерным распределением. Здесь МО – математическое ожидание, max – максимальная величина, min – минимальная величина, σ – среднее квадратичное отклонение, нижним индексом 1 отмечены параметры на участке первого погружения, T – время движения, x – продольный промах, z – боковой промах, r – суммарный промах, Δh – ошибка навигационной высоты, $N_{\text{н.р}}$ – число шагов коррекции с отсутствием двухпараметрического решения (индекс “н.р” – нет решения), $n_{\max}$ – максимальная перегрузка, $\Delta t(5)$ – длительность интервала с превышением перегрузки 5g, $\Delta t(6)$ – длительность интервала с превышением перегрузки 6g, $m_{\text{топ}}$ – расход топлива, $\theta_{\text{выл}1}$ – угол наклона траектории в точке вылета, $V_{\text{выл}}$ – скорость вылета, $V_{\text{каж}}$ – кажущаяся скорость, L – дальность.

На рис. 6 показаны координаты конечных точек (x, z) в посадочной системе координат на высоте приведения 4.5 км. Номерами обозначены возмущенные траектории. Только в трех вариантах из 1000 промах достигает 2.7 км, а в подавляющем большинстве вариантов промах меньше 2 км. Прогнозируемый промах в точке вылета после первого погружения СА в атмосферу дан на рис. 7.

Максимальные перегрузки $n_{\max}$ в зависимости от кажущейся скорости V_n, при которой они достигаются, приведены на рис. 8. Только в одном варианте перегрузка достигает величины 6.33g, а в остальных вариантах перегрузка меньше 6g. Время действия перегрузок больше 5 и 6g меньше допустимого, согласно нормативам NASA-STD-3000 [8].

На рис. 9 показан суммарный расход топлива $m_{\text{топ}}$ в зависимости от промаха r. В одном варианте расход топлива достигает 237 кг, а в остальных вариантах расход меньше 225 кг.

Заключение. В разработанном алгоритме двухпараметрического терминального управления ТАУС-МС впервые разделены ошибки АДХ+МЦИХ и возмущенной атмосферы. Это позволило реализовать *ситуационную* (индивидуальную) адаптацию к действующим возмущениям для каждой рикошетирующей траектории возвращения от Луны. Алгоритм включает способ идентификации ошибки навигационной высоты, которая может достигать ±2 км на первом погружении в атмосферу и ±3 км на втором погружении. В основу ТАУС-МС положены детальный анализ движения СА в атмосфере при спуске до точки рикошета и использование автономных навигационных измерений для идентификации относительного аэродинамического качества (отношение фактического аэродинамического качества к расчетному), определения относительной плотности атмосферы (отношение фактической плотности атмосферы к среднемесячной плотности) и вычисления ошибки навигационной высоты (разница между навигационной высотой и фактической). ТАУС-МС позволяет реализовать посадку СА на юге территории Российской Федерации с требуемой точностью (4 км), максимальной перегрузкой до 6g и приемлемым расходом топлива.

Алгоритм ТАУС-МС защищен патентом на изобретение [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф., Сихарулидзе Ю.Г.* Алгоритмы управления космическим аппаратом при входе в атмосферу. М.: Наука, 1975. 400 с.

2. *Rea J.R., Putnam Z.R.* A Comparison of Two Skip Entry Guidance Algorithms // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conf. Hilton Head, South Carolina, USA, 2007. https://doi.org/10.2514/6.2007-6424

3. *Евдокимов С.Н., Климанов С.И., Корчагин А.Н., Микрин Е.А., Самотохин А.С., Сихарулидзе Ю.Г., Тучин А.Г., Тучин Д.А.* Обеспечение посадки спускаемого аппарата на космодром “Восточный” после возвращения от Луны // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 6. С. 136–152.

4. *Евдокимов С.Н., Климанов С.И., Корчагин А.Н., Микрин Е.А., Самотохин А.С., Сихарулидзе Ю.Г., Тучин А.Г.* Модификация терминального алгоритма управления спуском при возвращении от Луны применительно к “усиленным” возмущениям // Космич. исслед. 2020. Т. 58. № 2. С. 149–164.
5. *Самотохин А.С., Сихарулидзе Ю.Г.* Анализ траекторий возвращения от Луны // Изв. РАН. ТиСУ. 2021. № 3. С. 142–153.
6. *Самотохин А.С.* Определение балансировочного угла атаки и высотной поправки в алгоритме ТАУС-МС // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 108. 20 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2020-108
7. *Самотохин А.С.* Алгоритм ограничения перегрузки на рикошетирующей траектории возвращения от Луны // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 86. 21 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2020-86
8. *Vernis P., Spreng F., Gellys G.* Accurate Skip-Entry Guidance for Low to Medium L/D Spacecrafts Return Missions Requiring High Range Capabilities // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conf, Porland, Oregon, USA, 2011. https://doi.org/10.2514/6.2011-6649.
9. *Сихарулидзе Ю.Г., Самотохин А.С., Тучин А.Г.* Способ ситуационного терминального управления спускаемым аппаратом в атмосфере Земли на рикошетирующей траектории возвращения от Луны // Патент России № 2752305. 2021. Бюл. № 21.

ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2022, № 1, с. 165–176

СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ОБЪЕКТАМИ

УДК 519.23

ТРАЕКТОРНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ НАБЛЮДЕНИЯ ПОДВИЖНОГО ЦИФРОВОГО ПЕЛЕНГАТОРА В ТОПОЛОГИИ ДОРОЖНОЙ СЕТИ

 В. В. Хуторцев

РНИИРС, Ростов-на-Дону, Россия

e-mail: hvv.56@mail.ru

Поступила в редакцию 19.04.2020 г.
После доработки 23.08.2021 г.
Принята к публикации 27.09.2021 г.

Рассмотрено решение задачи определения траекторного управления процессом наблюдения подвижного цифрового пеленгатора в топологии дорожной сети при оценивании пространственной конфигурации системы дискретных источников радиоизлучения. Предложен критерий качества, позволяющий использовать при синтезе закона управления принципы дискретного динамического программирования. Определена его взаимосвязь с критериями качества, основанными на корреляционных матрицах ошибок оценивания. Приведен пример.

DOI: 10.31857/S0002338822010073

Введение. Определение пространственной конфигурации источников радиоизлучения (ИРИ) является одной из разновидностей задач радиотехнического мониторинга [1–3]. Ее решение часто проводится применительно к ИРИ, находящимся на поверхности Земли [2]. При этом базирование средств приема и обработки сигналов может осуществляться на борту космических аппаратов, воздушных летательных аппаратов или на наземных транспортных средствах.

Системы третьего типа эффективно используются при определении пространственной конфигурации ИРИ на земной поверхности, например, после первичной работы спутниковых систем геолокации, определяющих с достаточно большими погрешностями координаты местоположения нерегламентированных для спутниковых систем связи источников электромагнитного излучения. Задача наземных систем радиомониторинга при этом сводится к поиску источников сигнала в полученной области неопределенности.

Оценивание пространственной конфигурации ИРИ с использованием наземных подвижных систем радиомониторинга, перемещающихся в топологии дорожной сети, может быть также связано с определением местоположения людей и автотранспорта в различного рода аварийных ситуациях.

Одним из резервов повышения эффективности систем определения пространственной конфигурации ИРИ, в том числе и наземных, является рациональный выбор управления наблюдениями входящих в их состав измерителей [4–6].

Частным, но достаточно важным случаем такого управления является управление траекторией наблюдателя или траекторное управление наблюдениями [6–9]. Его принципы часто используются при определении пространственной конфигурации ИРИ и особенно актуальны при однопозиционной локации с применением подвижных унипараметрических измерителей [10]. При решении такой задачи наиболее эффективным с технической точки зрения будет использование угломерной информации [11, 12], формируемой, как правило, с помощью подвижного цифрового пеленгатора (ЦП) [13].

Необходимым условием определения координат местоположения ИРИ при этом будет перемещение ЦП, осуществляемое, как правило, в топологии дорожной сети. Одним из основных факторов, влияющих на точность однопозиционной локации, служит рациональный выбор траектории такого перемещения [10–13].

Определение траекторного управления процессом наблюдения подвижного ЦП в рассмотренных условиях приобретает ряд особенностей, связанных, во-первых, с дискретным характером

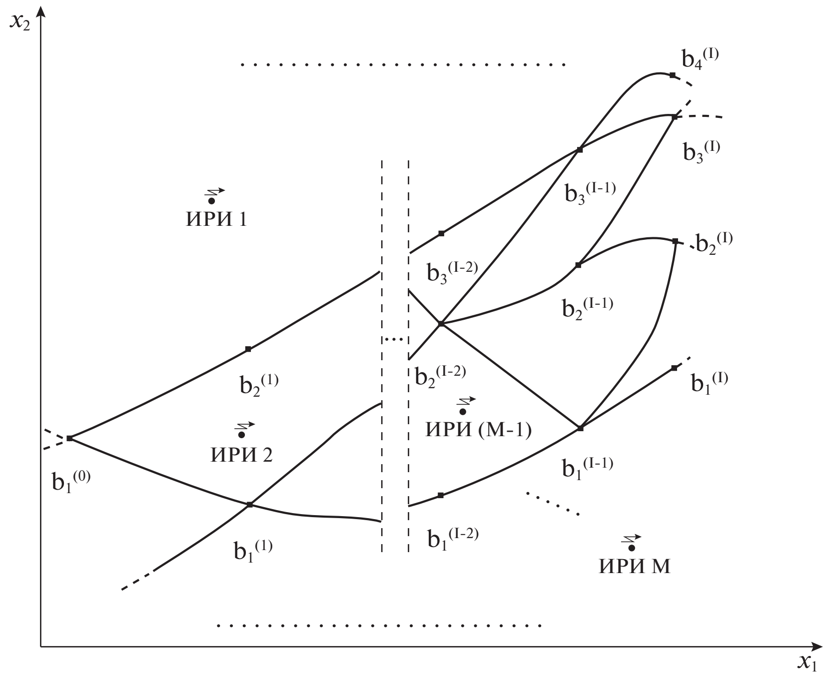


Рис. 1. Фрагмент топологии дорожной сети

такого управления и, во-вторых, с ограничением, обусловленным принадлежностью подвижного ЦП топологии дорожной сети. В указанной ситуации применение традиционных подходов к выбору оптимальной траектории перемещения измерителя [4–6] оказывается затруднительным.

С другой стороны, структура топологии дорожной сети является удобной для использования принципов дискретного динамического программирования [14]. Однако обычно применяемые в задачах планирования эксперимента целевые функции, основанные на корреляционных матрицах ошибок оценивания [4–6], в силу своей неаддитивной структуры для дискретного динамического программирования оказываются неприемлемыми.

Таким образом, разработка процедуры синтеза оптимального траекторного управления процессом наблюдения подвижного ЦП в топологии дорожной сети при определении пространственной конфигурации ИРИ является актуальной.

1. Модель топологии дорожной сети. Рассмотрим фрагмент топологии дорожной сети, представленный на рис. 1. Он состоит из множества взаимосвязанных одномерных многообразий. Такому фрагменту может быть поставлен в соответствие граф состояний $b_{j_i}^{(i)}$, $i = \overline{1, I}$, $j_i = \overline{1, J_i}$, $J_0 = 1$ (рис. 2), общее количество шагов которого равно I, а количество состояний на каждом шаге определяется как J_i. Граф состояний задает возможные траектории перемещения подвижного ЦП.

Множество взаимосвязанных одномерных многообразий можно представить в виде

$$\mu = \{X = \tilde{F}_{j_{i-1}}^{(i)}(l, u_{j_{i-1}j_i}^{(i)}),\ i = \overline{1, I},\ J_0 = 1,\ j_i = \overline{1, J_i}\}, \tag{1.1}$$

где $X \in R^2$, $(X) = [x_1\ x_2]^{\mathrm{T}}$; l – текущая длина одномерного многообразия; $dl = \sqrt{(dX)^{\mathrm{T}} dX}$ [15]; параметры $u_{j_{i-1}j_i}^{(i)} = 1$, $u_{j_{i-1}j_i}^{(i)} = 0$ определяют соответственно наличие и отсутствие элемента дорожной сети между узлами $b_{j_{i-1}}^{(i-1)}$, $b_{j_i}^{(i)}$;

$$\tilde{F}_{j_{i-1}}^{(i)}(l, u_{j_{i-1}j_i}^{(i)}) = \begin{cases} F_{j_{i-1}j_i}^{(i)}(l), & \text{если} \quad u_{j_{i-1}j_i}^{(i)} = 1, \\ 0, & \text{если} \quad u_{j_{i-1}j_i}^{(i)} = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

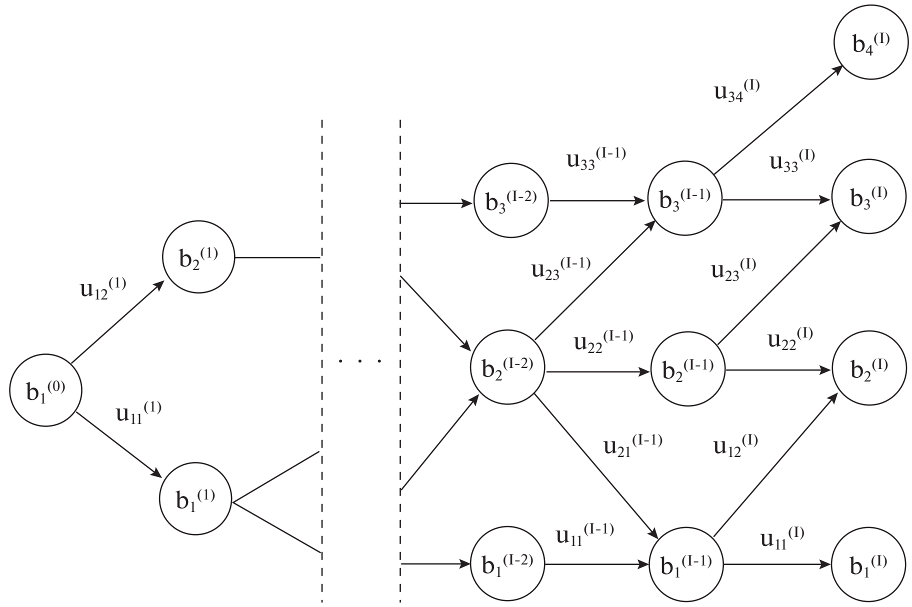


Рис. 2. Граф состояний для фрагмента топологии дорожной сети

Параметры $u^{(i)}_{j_{i-1}j_i}$, $u^{(i)}_{j_{i-1}j_i}$ образуют множества

$$\tilde{U}^{(i)} = \left\{u^{(i)}_{j_{i-1}j_i} = \{0,1\},\, J_0 = 1,\, j_i = \overline{1, J_i}\right\}, \quad i = \overline{1, I}. \tag{1.3}$$

Уравнение элемента дорожной сети при условии, что узлы $b^{(i-1)}_{j_{i-1}}$, $b^{(i)}_{j_i}$ соединены между собой ($u^{(i)}_{j_{i-1}j_i} = 1$), определяется соотношением

$$X = F^{(i)}_{j_{i-1}j_i}(l), \tag{1.4}$$

где $F^{(i)}_{j_{i-1}j_i}(l) = [F^{(i)}_{1j_{i-1}j_i}(l) \quad F^{(i)}_{2j_{i-1}j_i}(l)]^{\mathrm{T}}$ – непрерывно дифференцируемая по l векторная функция.

Дискретные множества

$$U^{(i)} = \left\{u^{(i)}_{j_{i-1}k_i} = 1,\, j_{i-1} = \overline{1, J}_{i-1},\, J_0 = 1,\, k_i \in Q^{(i)}_{j_{i-1}} \in \{\overline{1, J_i}\}\right\} \in \tilde{U}^{(i)}, \quad i = \overline{1, I},$$
$$U = \{U^{(i)}, i = \overline{1, I}\}, \tag{1.5}$$

где $k_i = j_i$, если $u^{(i)}_{j_{i-1}j_i} = 1$, выступают в качестве множеств допустимых траекторных управлений. Необходимо отметить, что множество $Q^{(i)}_{j_{i-1}}$ индексов k_i определяется как номером шага i, так и номером узла j_{i-1} на предыдущем шаге. Каждый элемент (1.5) задает выбор направления движения в соответствующем узле фрагмента дорожной сети. В соответствии с (1.5) соотношение (1.4) можно представить в виде

$$X = F^{(i)}_{j_{i-1}k_i}(l), \quad j_{i-1} = \overline{1, J}_{i-1}, \quad J_0 = 1, \quad k_i \in Q^{(i)}_{j_{i-1}} \in \{\overline{1, J_i}\}, \quad i = \overline{1, I}. \tag{1.6}$$

Определим через $L^{(i)}_{j_{i-1}k_i}$ общую длину элемента дорожной сети, описываемого соотношением (1.6).

Множество одномерных многообразий (1.1) может быть сформировано, например, с использованием массивов данных, лежащих в основе электронных карт.

Отметим, что к модели (1.4) можно свести любую форму описания одномерных многообразий. Соотношение (1.4), в частности, можно рассматривать как решение пространственно-дифференциальных уравнений, полученных на основании формул Френе [15].

Будем полагать скорость перемещения ЦП вдоль траектории неизменной $dl/dt = v_l = \text{const}$.

2. Критерий качества траекторного управления процессом наблюдения подвижного ЦП в топологии дорожной сети. Постановка задачи. Предположим, что траектория перемещения ЦП, задаваемая соотношением

$$X_{ЦП}(l) = \sum_{i=1}^{I} F^{(i)}_{j_{i-1}k_i}(l), \quad j_{i-1} = \overline{1, J}_{i-1}, \quad J_0 = 1, \quad k_i \in Q^{(i)}_{j_{i-1}} \in \{\overline{1, J}_i\}, \tag{2.1}$$

определяется некоторым управлением $u^{(i)}_{j_{i-1}k_i} \in U^{(i)}$, $i = \overline{1, I}$, $j_{i-1} = \overline{1, J}_{i-1}$, $J_0 = 1$, $k_i \in Q^{(i)}_{j_{i-1}} \in \{\overline{1, J}_i\}$ и имеет длину L. Положим, что функция $X_{ЦП}(l)$ является непрерывно дифференцируемой на интервале $[0, L]$.

Перемещение ЦП осуществляется из начального $b_1^{(0)}$ в одно из конечных состояний $b^{(I)}_{j_I}$, $j_I = \overline{1, J_I}$. Время движения пеленгатора вдоль траектории и соответственно время наблюдения равно $T_н = L/v_l$.

Рассмотрим оценку параметров пространственной конфигурации M дискретных ИРИ, функционирование каждого из которых осуществляются в дискретном режиме, чередующем периоды излучения радиосигнала и периоды радиомолчания. Будем полагать указанные режимы независимыми и случайными. Для их описания воспользуемся совокупностью M независимых дискретных марковских процессов с двумя состояниями [13, 16]:

$$\Omega_m(t) \in \{\omega_{m0} = 0, \omega_{m1} = 1\}, \quad m = \overline{1, M}, \tag{2.2}$$

где ω_{m0} и ω_{m1} связаны с событиями, обусловленными соответственно отсутствием и наличием излучения сигнала m-м дискретным ИРИ.

Установившиеся вероятностные характеристики (2.2) представим соотношениями

$$p_{m1} = \frac{\alpha_m}{\alpha_m + \beta_m}, \quad p_{m0} = 1 - p_{m1}, \quad m = \overline{1, M}, \quad t \in [0, T_н], \tag{2.3}$$

где p_{m0}, p_{m1} – установившиеся вероятности нахождения процесса $\Omega_m(t)$ в нулевом и единичном состояниях; α_m – интенсивность перехода из ω_{m0} в ω_{m1}, β_m – интенсивность перехода из ω_{m1} в ω_{m0}. Значения α_m, β_m, $m = \overline{1, M}$, полагаются постоянными.

Зададим структуру уравнения наблюдения ЦП (уравнения в отклонениях). Она определяется возможностью ЦП, построенного на базе цифровой антенной решетки, осуществлять параллельное определение угловых координат всех ИРИ, находящихся в зоне его контроля [13].

С учетом (2.2), (2.3) получим

$$y = \Omega\rho Hz + N, \tag{2.4}$$

где $y \in R^M$; $\Omega = \mathrm{diag}\{\Omega_m, m = \overline{1, M}\} \in R^{M\times M}$ – диагональная матрица; $H = \mathrm{diag}\{h_m, m = \overline{1, M}\} \in R^{M\times 2M}$ – блочно-диагональная матрица; $h_m = [h_{m1}\ h_{m2}]$; $z = [z_1^{\mathrm T}\ z_2^{\mathrm T} \dots z_M^{\mathrm T}]^{\mathrm T} \in R^{2M}$; $z_m \in R^2$, $m = \overline{1, M}$ – векторы случайных отклонений значений координат ИРИ от их математических ожиданий $\bar z = \left[\bar z_1^{\mathrm T}\ \ \bar z_2^{\mathrm T} \ \dots\ \bar z_M^{\mathrm T}\right]^{\mathrm T} \in R^{2M}$; $\bar z_m \in R^2$; $\rho = \mathrm{diag}\{\rho_m, m = \overline{1, M}\} \in R^{M\times M}$; $\rho_m = \rho_m(\bar z_m, X_{цп})$ – функция, характеризующая условия прогнозируемой наблюдаемости ЦП m-го ИРИ в ходе перемещения ЦП вдоль траектории, $0 \le \rho_m \le 1$; $N = [n_1 \dots n_M]^{\mathrm T}$ – векторный белый гауссовский шум наблюдения с характеристиками $\mathrm M[N] = 0$; $\mathrm M[N(t)N^{\mathrm T}(t-\tau)] = \mathrm Q\delta(\tau)$; $\mathrm Q = \mathrm{diag}\{\mathrm Q_m, m = \overline{1, M}\}$ – диагональная матрица с элементами

$$\mathrm Q_m = \mu(D_m)^{\kappa}, \quad m = \overline{1, M}, \tag{2.5}$$

$$D_m = \sum_{i=1}^{I} D^{(i)}_{j_{i-1}k_i}(\bar z_m, v_l t) = \sum_{i=1}^{I} [(\bar z_m - F^{(i)}_{j_{i-1}k_i}(v_l t))^{\mathrm T}(\bar z_m - F^{(i)}_{j_{i-1}k_i}(v_l t))]^{0.5},$$
$$j_{i-1} = \overline{1, J}_{i-1}, \quad J_0 = 1, \quad k_i \in Q^{(i)}_{j_{i-1}} \in \{\overline{1, J}_i\} \tag{2.6}$$

— прогнозируемая дальность между ЦП и m-м ИРИ при $t \in [0, T_{\text{н}}]$; $D^{(i)}_{j_{i-1}k_i}(\overline{z}_m, v_l t)$ — прогнозируемая дальность между ЦП и m-м ИРИ при нахождении ЦП между узлами $b^{(i-1)}_{j_{i-1}}, b^{(i)}_{k_i}$;

$$h_m = \sum_{i=1}^{I} h^{(i)}_{j_{i-1}k_i}(\overline{z}_m, v_l t) = \sum_{i=1}^{I} \left[\frac{\partial s(\overline{z}_m, F^{(i)}_{j_{i-1}k_i}(v_l t))}{\partial \overline{z}_m}\right]^{\text{T}} \in R^{1\times 2},$$
$$j_{i-1} = \overline{1, J}_{i-1}, \quad J_0 = 1, \quad k_i \in Q^{(i)}_{j_{i-1}} \in \{\overline{1, J}_i\}, \tag{2.7}$$

$s(\overline{z}_m, X_{\text{цп}}) \in R^1$ — модель сигнала, соответствующая угловым измерениям ЦП в отношении m-го ИРИ; $h^{(i)}_{j_{i-1}k_i}(\overline{z}_m, v_l t)$ — значение матрицы h_m при нахождении ЦП между узлами $b^{(i-1)}_{j_{i-1}}, b^{(i)}_{k_i}$ при $u^{(i)}_{j_{i-1}k_i} \in U^{(i)}$.

Значения μ и κ в (2.5) определяются характеристиками излучающих систем ИРИ и приемной системы пеленгатора. Координаты ЦП $X_{\text{ЦП}}$ для каждого $t \in [0, T_{\text{н}}]$ полагаются известными.

Определим для модели траектории (1.2) и модели наблюдения (2.4) информационную матрицу Фишера [17, 18]. С учетом дискретного характера режимов функционирования ИРИ [13, 16] она может быть представлена в виде

$$\Phi = \int_0^{T_{\text{н}}} PH^{\text{T}}\rho Q^{-1}\rho H dt = \int_0^{T_{\text{н}}} \phi(v_l t) dt, \tag{2.8}$$

где $P = \text{diag}\{P_m, m = \overline{1, M}\} \in R^{2M\times 2M}\}$, $P_m = p_{m1}E$, $E \in R^{2\times 2}$ — единичная матрица.

Отметим, что $\Phi \in R^{2M\times 2M}$. Из (2.4), (2.8) следует, что Φ имеет блочно-диагональную структуру

$$\Phi = \text{diag}\{\Phi_m, m = \overline{1, M}\}, \tag{2.9}$$

где

$$\Phi_m = \begin{bmatrix} \Phi_{m11} & \Phi_{m12} \\ \Phi_{m12} & \Phi_{m22} \end{bmatrix} = \int_0^{T_{\text{н}}} \frac{p_{m1}\rho_m^2}{Q_m} h_m^{\text{T}} h_m dt, \quad m = \overline{1, M}.$$

Исходя из структуры модели (2.1), подынтегральное выражение в (2.8) можно записать как

$$\phi(\nu_l t) = \sum_{i=1}^{I} \phi^{(i)}_{j_{i-1}k_i}(v_l t),$$
$$j_{i-1} = \overline{1, J}_{i-1}, \quad J_0 = 1, \quad k_i \in Q^{(i)}_{j_{i-1}} \in \{\overline{1, J}_i\}, \tag{2.10}$$

где $\phi^{(i)}_{j_{i-1}k_i}(v_l t)$ — значение матрицы $\phi(v_l t)$ при нахождении ЦП между узлами $b^{(i-1)}_{j_{i-1}}, b^{(i)}_{k_i}$ при $u^{(i)}_{j_{i-1}k_i} \in U^{(i)}$.

Таким образом, информационная матрица Фишера допускает следующее представление:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{I} \Phi^{(i)}_{j_{i-1}k_i}, \quad j_{i-1} = \overline{1, J}_{i-1}, \quad J_0 = 1, \quad k_i \in Q^{(i)}_{j_{i-1}} \in \{\overline{1, J}_i\}, \tag{2.11}$$

где

$$\Phi^{(i)}_{j_{i-1}k_i} = \Phi^{(i)}(b^{(i-1)}_{j_{i-1}}, u^{(i)}_{j_{i-1}k_i}) = \int_{t^{(i-1)}_{j_{i-1}}}^{t^{(i)}_{k_i}} \phi^{(i)}_{j_{i-1}k_i}(\nu_l t) dt$$

— частная информационная матрица Фишера, порождаемая перемещением ЦП на интервале времени $[t^{(i-1)}_{j_{i-1}}, t^{(i)}_{k_i}]$ соответственно из узла $b^{(i-1)}_{j_{i-1}}$ в узел $b^{(i)}_{k_i}$ при $u^{(i)}_{j_{i-1}k_i} \in U^{(i)}$.

Расчет значений $\Phi^{(i)}_{j_{i-1}k_i}$ может быть проведен заранее на основании априорных данных о топологии дорожной сети, условиях наблюдаемости дискретных ИРИ, вероятностных характеристиках их режимов функционирования и параметрах каналов наблюдения:

$$\Phi^{(i)}_{j_{i-1}k_i} = \int\limits_{l^{(i-1)}_{j_{i-1}}}^{l^{(i)}_{k_i}} \phi^{(i)}_{j_{i-1}k_i}(l)v_l^{-1}dl \simeq \sum_{\gamma=1}^{\Gamma^{(i)}_{j_{i-1}k_i}} \phi^{(i)}_{j_{i-1}k_i}(l^{(i-1)}_{j_{i-1}} + \gamma\Delta l)v_l^{-1}\Delta l,$$
$$j_{i-1} = \overline{1, J}_{i-1}, \quad J_0 = 1, \quad k_i \in Q^{(i)}_{j_{i-1}} \in \{\overline{1, J}_i\}, \tag{2.12}$$

где $\Gamma^{(i)}_{j_{i-1}k_i} = L^{(i)}_{j_{i-1}k_i} \big/ \Delta l$.

Определим терминальный критерий качества для траекторного управления процессом наблюдения подвижного ЦП в топологии дорожной сети как максимум следа информационной матрицы Фишера в конце интервала наблюдения:

$$\Psi = \sum_{i=1}^{I} \Psi^{(i)}(b^{(i-1)}_{j_{i-1}}, u^{(i)}_{j_{i-1}k_i}) = \sum_{i=1}^{I} \mathrm{tr}\Phi^{(i)}(b^{(i-1)}_{j_{i-1}}, u^{(i)}_{j_{i-1}k_i}) \to \max_{u^{(i)}_{j_{i-1}k_i} \in U^{(i)},\, i=\overline{1,I}},$$
$$j_{i-1} = \overline{1, J}_{i-1}, \quad J_0 = 1, \quad k_i \in Q^{(i)}_{j_{i-1}} \in \{\overline{1, J}_i\}, \tag{2.13}$$

где

$$\Psi^{(i)}(b^{(i-1)}_{j_{i-1}}, u^{(i)}_{j_{i-1}k_i}) = \mathrm{tr}\Phi^{(i)}(b^{(i-1)}_{j_{i-1}}, u^{(i)}_{j_{i-1}k_i}) \tag{2.14}$$

– частная целевая функция.

Из (2.13) следует, что целевая функция выбранного критерия качества обладает свойством аддитивности.

Предположим, что информационная матрица Фишера не вырождена. Тогда справедливым является следующее утверждение.

Утверждение. Целевая функция критерия (2.13) максимума следа информационной матрицы Фишера для несмещенной оценки координат местоположения ИРИ эквивалентна целевой функции критерия минимума нижней границы следа корреляционной матрицы ошибок оценивания $K \in R^{2M\times 2M}$ вектора $z \in R^{2M}$:

$$\mathrm{tr}K \geq \frac{4M^2}{\mathrm{tr}\Phi}. \tag{2.15}$$

Здесь

$$K = \mathrm{diag}\{K_m,\ m = \overline{1, M}\} \tag{2.16}$$

– блочно-диагональная матрица; $K_m \in R^{2\times 2}$, $m = \overline{1, M}$.

Доказательство приведено в Приложении.

Поставим задачу разработать процедуру синтеза оптимального в смысле критерия качества (2.13) траекторного управления процессом наблюдения подвижного ЦП в топологии дорожной сети:

$$\{u^{*(i)}_{j_{i-1}} = u^{(i)}_{j_{i-1}k_i^*} \in U^{(i)}, i = \overline{1, I},\ j_{i-1} = \overline{1, J}_{i-1},\ J_0 = 1\}, \tag{2.17}$$

где k_i^* – номер узла из множества $Q^{(i)}_{j_{i-1}} \in \{\overline{1, J}_i\}$, соответствующего оптимальной траектории перемещения ЦП на i-м шаге, при оценивании пространственной конфигурации системы дискретных источников радиоизлучения.

3. Траекторное управления процессом наблюдения подвижного ЦП в топологии дорожной сети. Проведем формальное описание динамической системы, соответствующей графу состояний, представленному на рис. 2. Если ЦП находится в узле $b^{(i-1)}_{j_{i-1}}$, т.е. в точке j_{i-1} сечения $i-1$, тогда необходимо выбрать такое управление $u^{(i)}_{j_{i-1}k_i}$, $j_{i-1} = \overline{1, J}_{i-1}$, $k_i \in Q^{(i)}_{j_{i-1}} \in \{\overline{1, J}_i\}$, которое в совокупности с другими управлениями приводило бы к максимуму целевой функции критерия (2.13).

Рассмотрим процедуру выбора траекторного управления процессом наблюдения подвижного ЦП в топологии дорожной сети, обладающего наилучшими информационными характеристиками в смысле критерия (2.13) при оценивании пространственной конфигурации дискретных ИРИ.

В соответствии с принципом дискретного динамического программирования решение задачи проводится в два этапа – обратном и прямом. Реализация обратного этапа начинается с конечных состояний.

Для каждого из узлов $b_{j_{I-1}}^{(I-1)}$, $j_{I-1} = \overline{1, J}_{I-1}$, запишем значения частных целевых функции $\Psi^{(I)}(b_{j_{I-1}}^{(I-1)}, u_{j_{I-1}k_I}^{(I)})$. Здесь $k_I \in Q_{j_{I-1}}^{(I)}$, $Q_{j_{I-1}}^{(I)} \in \{\overline{1, J}_I\}$ определяется в соответствии с (1.5). Выберем максимальное из них:

$$\overline{\Psi}^{(I)}(b_{j_{I-1}}^{(I-1)}) = \max_{u_{j_{I-1}k_I}^{(I)} \in U^{(I)}, k_I \in Q_{j_{I-1}}^{(I)}} \Psi^{(I)}(b_{j_{I-1}}^{(I-1)}, u_{j_{I-1}k_I}^{(I)}), \quad j_{I-1} = \overline{1, J}_{I-1}. \tag{3.1}$$

Условно оптимальные управления, обеспечивающие выполнение (3.1), или оптимальные управления при условии, что ЦП находится в одном из узлов $b_{j_{I-1}}^{(I-1)}$, $j_{I-1} = \overline{1, J}_{I-1}$, графа состояний (рис. 2), обозначим как

$$u_{j_{I-1}}^{*(I)} = \arg \max_{u_{j_{I-1}k_I}^{(I)} \in U^{(I)}, k_I \in Q_{j_{I-1}}^{(I)}} \Psi^{(I)}(b_{j_{I-1}}^{(I-1)}, u_{j_{I-1}k_I}^{(I)}). \tag{3.2}$$

Рассмотрим состояния $b_{j_{I-2}}^{(I-2)}$, $j_{I-2} = \overline{1, J}_{I-2}$. Соответствующие им условно оптимальные значения частных целевых функций формируются с учетом (3.1) и определяются соотношением

$$\overline{\Psi}^{(I-1)}(b_{j_{I-2}}^{(I-2)}) = \max_{u_{j_{I-2}k_{I-1}}^{(I-1)} \in U^{(I-1)},\, k_{I-1} \in Q_{j_{I-2}}^{(I-1)}} \{\Psi^{(I-1)}(b_{j_{I-2}}^{(I-2)}, u_{j_{I-2}k_{I-1}}^{(I-1)}) + \overline{\Psi}^{(I)}(b_{k_{I-1}}^{(I-1)})\}, \tag{3.3}$$

а условно оптимальные управления имеют вид

$$u_{j_{I-2}}^{*(I-1)} = \arg \max_{u_{j_{I-2}k_{I-1}}^{(I-1)} \in U^{(I-1)}, k_{I-1} \in Q_{j_{I-2}}^{(I-1)}} \{\Psi^{(I-1)}(b_{j_{I-2}}^{(I-2)}, u_{j_{I-2}k_{I-1}}^{(I-1)}) + \overline{\Psi}^{(I)}(b_{k_{I-1}}^{(I-1)})\}. \tag{3.4}$$

Рассмотренная процедура повторяется вплоть до начального состояния графа дорожной сети $b_1^{(0)}$:

$$\overline{\Psi}^{(1)}(b_1^{(0)}) = \max_{u_{1k_1}^{(1)} \in U^{(1)}, k_1 \in Q_0^{(1)}} \{\Psi^{(1)}(b_1^{(0)}, u_{1k_1}^{(1)}) + \overline{\Psi}^{(2)}(b_{k_1}^{(1)})\}. \tag{3.5}$$

В силу единственности начального состояния $k_1 \in Q_0^{(1)}$, $Q_0^{(1)} = \{\overline{1, J_1}\}$ и условно оптимальное управление для него также будет единственным и оптимальным:

$$u_1^{*(1)} = \arg \max_{u_{1k_1}^{(1)} \in U^{(1)}, k_1 \in Q_0^{(1)}} \{\Psi^{(1)}(b_1^{(0)}, u_{1k_1}^{(1)}) + \overline{\Psi}^{(2)}(b_{k_1}^{(1)})\}. \tag{3.6}$$

Формированием управления (3.6) реализация обратного этапа процедуры поиска оптимального траекторного управления наблюдениями подвижного ЦП завершается. Далее начинается прямой этап или этап определения оптимальной траектории перемещения ЦП в топологии дорожной сети. Он реализуется в прямом направлении от начального до конечного состояний.

Введем для (3.6) обозначение

$$u_{j_0}^{*(1)}\Big|_{j_0=1} = u_{1k_1^*}^{(1)} \in U^{(1)}, \tag{3.7}$$

где k_1^* – номер узла из множества $Q_0^{(1)}$, соответствующего оптимальной траектории перемещения ЦП на первом шаге.

Для второго шага с учетом обозначений, введенных в (3.7), получим $u_{j_1}^{*(2)}\Big|_{j_1=k_1^*} = u_{k_1^*}^{*(2)} = u_{k_1^*k_2^*}^{(2)} \in U^{(2)}$, где k_2^* – номер узла из множества $Q_1^{(2)}$, соответствующего оптимальной траектории

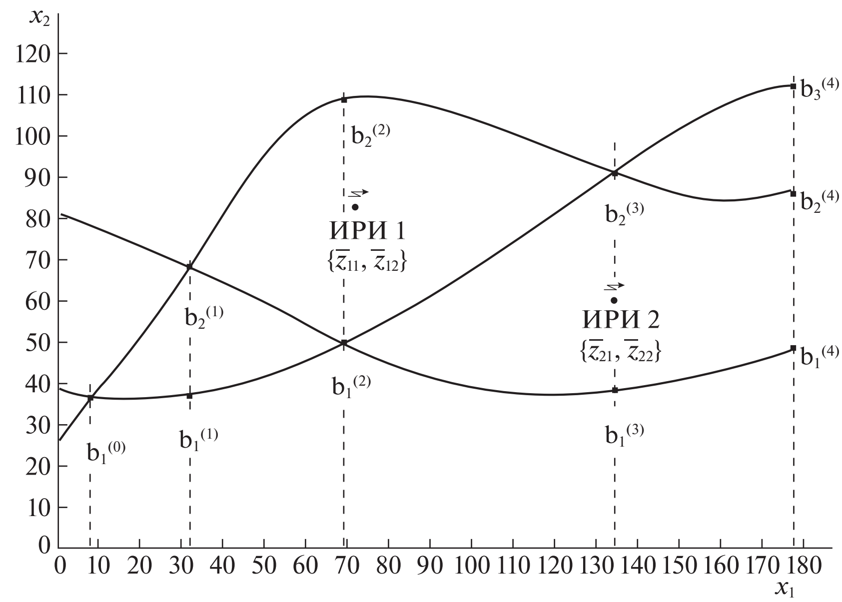


Рис. 3. Пример фрагмента топологии дорожной сети

перемещения ЦП на втором шаге. И так далее до управления $u^{*(I)}_{j_{I-1}}\Big|_{j_{I-1}=k^*_{I-1}} = u^{*(I)}_{k^*_{I-1}} = u^{(I)}_{k^*_{I-1}k^*_I} \in U^{(I)}$ на заключительном шаге.

В результате оптимальный закон управления можно представить в форме

$$u^* = \left\{ u^{(1)}_{j_0 k_1^*}\Big|_{j_0=1};\ u^{(2)}_{k_1^* k_2^*};\ u^{(3)}_{k_2^* k_3^*};\ \ldots;\ u^{(I-1)}_{k_{I-2}^* k_{I-1}^*};\ u^{(I)}_{k_{I-1}^* k_I^*} \right\} \in U. \tag{3.8}$$

Траекторное управление (3.8) процессом наблюдения подвижного ЦП соответствует информационно оптимальной в смысле критерия (2.13) траектории его перемещения в топологии дорожной сети (1.1)

$$X^*_{\text{цп}}(l) = \sum_{i=1}^{I} F^{(i)}_{k_{i-1}^* k_i^*}(l), \quad k_0^* = j_0 = 1, \tag{3.9}$$

и обеспечивает в конце этой траектории минимум нижней границы следа корреляционной матрицы ошибок оценивания координат местоположения ИРИ.

Выигрыш от оптимизации в терминах следа информационной матрицы составляет

$$\delta = \frac{\mathrm{tr}\Phi_{\text{опт}} - \mathrm{tr}\tilde{\Phi}}{\mathrm{tr}\Phi_{\text{опт}}},$$

где $\tilde{\Phi}$ – матрица Фишера, соответствующая некоторой неоптимальной траектории движения ЦП. Переходя к корреляционным матрицам ошибок оценивания, с учетом (2.15) получим

$$\delta = \frac{\underline{\mathrm{tr}}\tilde{K} - \underline{\mathrm{tr}}K_{\text{опт}}}{\underline{\mathrm{tr}}\tilde{K}},$$

где $\underline{\mathrm{tr}}$ – означает нижнюю границу следа корреляционной матрицы, соответствующую (2.15), $\tilde{K}$ определяется для некоторой неоптимальной траектории ЦП.

4. Пример определения траекторного управления процессом наблюдения подвижного ЦП в топологии дорожной сети. Рассмотрим задачу определения пространственной конфигурации двух дискретных ИРИ ($M = 2$) для фрагмента топологии дорожной сети, представленной на рис. 3.

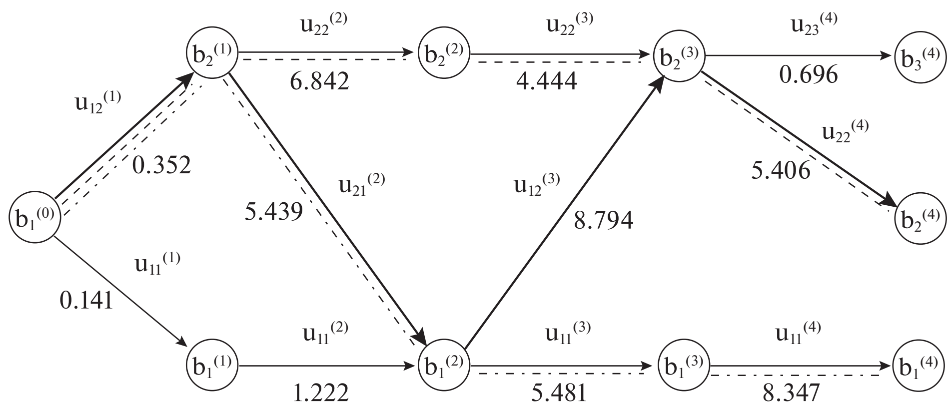


Рис. 4. Результаты решения оптимизационной задачи

Положим, что $\bar{z}_{11} = 75$, $\bar{z}_{12} = 80$, $\bar{z}_{21} = 135$, $\bar{z}_{22} = 58$, $\rho_{1,2} = 1$, $\kappa = 2$, $\mu = 10^{-7}$, $v_l = 60$. Здесь и далее переменные приведены в безразмерных единицах. В соответствии с (2.7) для угловых измерений полагалось, что

$$h_1 = \left[-\frac{\bar{z}_{12} - x_{2\text{ЦП}}}{D_1^2} \quad \frac{\bar{z}_{11} - x_{1\text{ЦП}}}{D_1^2} \right], \quad h_2 = \left[-\frac{\bar{z}_{22} - x_{2\text{ЦП}}}{D_2^2} \quad \frac{\bar{z}_{21} - x_{1\text{ЦП}}}{D_2^2} \right], \tag{4.1}$$

где $[x_{1\text{ЦП}} \;\; x_{2\text{ЦП}}]^{\mathrm{T}} = X_{\text{ЦП}}$.

Граф состояния для фрагмента топологии дорожной сети представлен на рис. 4.

Ниже каждого ребра графа приведены значения частных целевых функций (2.14), рассчитанные на основании априорных данных о структуре дорожной сети, каналах наблюдения и режимах функционирования дискретных ИРИ в соответствии с (2.3), (2.6), (2.7), (2.9), (2.12).

Оптимальное траекторное управление получено в соответствии с алгоритмом, описанным в разд. 3. Его структура соответствует (3.8) и для $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$ имеет вид

$$u^* = \{u_1^{*(1)} = u_{12}^{(1)};\; u_2^{*(2)} = u_{21}^{(2)};\; u_1^{*(3)} = u_{12}^{(3)};\; u_2^{*(4)} = u_{22}^{(4)}\}, \tag{4.2}$$

т. е. $k_1^* = 2$, $k_2^* = 1$, $k_3^* = 2$, $k_4^* = 2$.

Соответствующие ребра графа на рис. 4 выделены жирными линиями. Оптимальным конечным состоянием является состояние $b_2^{(4)}$. Относительный выигрыш, получаемый в терминах минимума нижней границы следа корреляционной матрицы ошибок оценивания $\underline{\mathrm{tr}}\{K_{\text{опт}}\}$ (2.15), для оптимальной траектории $\{b_1^{(0)}, b_2^{(1)}, b_1^{(2)}, b_2^{(3)}, b_2^{(4)}\}$ по отношению к аналогичной характеристике $\underline{\mathrm{tr}}\{\tilde{K}\}$, полученной, например, для траектории $\{b_1^{(0)}, b_1^{(1)}, b_1^{(2)}, b_2^{(3)}, b_2^{(4)}\}$, составил

$$\delta = \frac{\underline{\mathrm{tr}}\tilde{K} - \underline{\mathrm{tr}}K_{\text{опт}}}{\underline{\mathrm{tr}}\tilde{K}} = 0.45.$$

На рис. 4 также приведены оптимальные траектории для случаев, когда $\alpha_2 = 0$, $\beta_1 = 0$ ($p_{11} = 1$, $p_{10} = 0, p_{21} = 0, p_{20} = 1$) и $\alpha_1 = 0$, $\beta_2 = 0$ ($p_{11} = 0$, $p_{10} = 1$, $p_{21} = 1, p_{20} = 0$), соответственно $\{b_1^{(0)}, b_2^{(1)}, b_2^{(2)}, b_2^{(3)}, b_2^{(4)}\}$ – пунктирная линия и $\{b_1^{(0)}, b_2^{(1)}, b_1^{(2)}, b_1^{(3)}, b_1^{(4)}\}$ – штрихпунктирная линия. Они являются наилучшими в случае, когда сигнал излучает либо только первый, либо только второй ИРИ.

Заключение. Рассмотрена задача определения траекторного управления наблюдениями подвижного ЦП, осуществляющего в процессе перемещения в топологии дорожной сети оценку пространственной конфигурации системы дискретных ИРИ.

Первая особенность ее решения связана с дискретным характером управления, затрудняющим использование традиционных подходов к оптимизации активного эксперимента. Вторая особенность определяется неаддитивной структурой целевых функций, базирующихся на корреляционных матрицах ошибок оценивания и обычно применяемых при оптимизации наблюдений, не позволяющей использовать метод дискретного динамического программирования.

Переход к критерию качества, основанному на использовании информационной матрицы Фишера, дал возможность разработать процедуру синтеза оптимального траекторного управления на основе применения эффективного для рассмотренного класса задач метода дискретного динамического программирования.

Установленная взаимосвязь между целевой функцией критерия максимума следа информационной матрицы Фишера для несмещенной оценки координат местоположения ИРИ и целевой функцией критерия минимума нижней границы следа корреляционной матрицы ошибок оценивания позволяет осуществлять проекцию получаемых результатов на точностные характеристики определения пространственной конфигурации ИРИ.

Рассмотренный пример показал эффективность использования предложенного подхода.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения. Запишем неравенство Крамера–Рао для несмещенной оценки вектора $z \in R^{2M}$ [18]:

$$\Xi^{\mathrm{T}}[K - \Phi^{-1}]\Xi \geq 0, \tag{П.1}$$

где $\Xi \in R^{2M}$ – произвольный вектор.

С учетом блочно-диагональной структуры матрицы Φ получим [19]

$$\Phi^{-1} = \mathrm{diag}\{\Phi_m^{-1}, m = \overline{1, M}\}, \tag{П.2}$$

где $(\Phi_m)^{-1} = \begin{bmatrix} \Phi_{m22}/\Lambda_m & -\Phi_{m12}/\Lambda_m \\ -\Phi_{m12}/\Lambda_m & \Phi_{m11}/\Lambda_m \end{bmatrix}$, $\Lambda_m = \Phi_{m11}\Phi_{m22} - (\Phi_{m12})^2$; $\Phi_{m11}, \Phi_{m22}, \Phi_{m12}$ – элементы матрицы Φ_m.

Положим поочередно $\Xi = [1\ 0\ 0\ \ldots\ 0]^{\mathrm{T}}$, $\Xi = [0\ 1\ 0\ \ldots\ 0]^{\mathrm{T}}$, ..., $\Xi = [0\ 0\ 0\ \ldots\ 1]^{\mathrm{T}}$. Тогда из (П.1) следует, что

$$k_{m11} \geq \frac{\Phi_{m22}}{\Lambda_m}, \quad k_{m22} \geq \frac{\Phi_{m11}}{\Lambda_m}, \quad m = \overline{1, M}. \tag{П.3}$$

Здесь k_{m11}, k_{m22} – диагональные элементы матрицы K_m.

Суммируя левые и правые части неравенств (П.3), получим

$$\sum_{m=1}^{M} \mathrm{tr}\{K_m\} \geq \sum_{m=1}^{M} \mathrm{tr}\{\Phi_m^{-1}\} = \sum_{m=1}^{M} \frac{\Phi_{m22} + \Phi_{m11}}{\Lambda_m} \geq \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{\Phi_{m11}} + \frac{1}{\Phi_{m22}}. \tag{П.4}$$

Покажем, что с учетом условия $\Phi_{m11} > 0$, $\Phi_{m22} > 0$, $m = \overline{1, M}$, имеет место следующее неравенство:

$$\sum_{m=1}^{M} (\Phi_{m11} + \Phi_{m22}) \sum_{m=1}^{M} \left(\frac{1}{\Phi_{m11}} + \frac{1}{\Phi_{m22}} \right) \geq 4M^2. \tag{П.5}$$

Для этого введем следующие переобозначения:

$$\begin{gathered} \Phi_{111} = a_1, \quad \Phi_{122} = a_2, \quad \Phi_{211} = a_3, \quad \Phi_{222} = a_4, \ldots, \\ \Phi_{M11} = a_{2M-1}, \quad \Phi_{M22} = a_{2M}. \end{gathered} \tag{П.6}$$

С учетом (П.6) для (П.5) получим

$$\sum_{k=1}^{2M} a_k \sum_{k=1}^{2M} \left(\frac{1}{a_k} \right) \geq 4M^2. \tag{П.7}$$

Преобразуем левую часть неравенства (П.7)

$$\sum_{k=1}^{2M} a_k \sum_{k=1}^{2M} \left(\frac{1}{a_k}\right) = 2M + \sum_{k=1}^{2M-1} \sum_{p=1}^{2M-k} \left(\frac{a_k}{a_{k+p}} + \frac{a_{k+p}}{a_k}\right). \quad (\text{П}.8)$$

В силу положительности a_k, $k = \overline{1,2M}$, для каждого элемента суммы в правой части (П.8) справедливо неравенство

$$\left(\frac{a_k}{a_{k+p}} + \frac{a_{k+p}}{a_k}\right) \ge 2. \quad (\text{П}.9)$$

Общее количество составляющих во втором слагаемом правой части (П.8) равно $M(2M-1)$, тогда

$$\sum_{k=1}^{2M-1} \sum_{p=1}^{2M-k} \left(\frac{a_k}{a_{k+p}} + \frac{a_{k+p}}{a_k}\right) \ge 2M(2M-1)$$

или

$$2M + \sum_{k=1}^{2M-1} \sum_{p=1}^{2M-k} \left(\frac{a_k}{a_{k+p}} + \frac{a_{k+p}}{a_k}\right) \ge 4M^2. \quad (\text{П}.10)$$

Из (П.10) вытекает правомерность неравенств (П.7) и (П.5). В соответствии с (П.5) получим

$$\sum_{m=1}^{M} \left(\frac{1}{\Phi_{m11}} + \frac{1}{\Phi_{m22}}\right) \ge \frac{4M^2}{\sum_{m=1}^{M} \mathrm{tr}\Phi_m}. \quad (\text{П}.11)$$

Из (П.4), (П.11) следует, что

$$\sum_{m=1}^{M} \mathrm{tr}K_m \ge \frac{4M^2}{\sum_{m=1}^{M} \mathrm{tr}\Phi_m}. \quad (\text{П}.12)$$

С учетом блочно-диагональной структуры матриц K и Φ (П.12) соответствует (2.15).

Утверждение доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Showing Вознюк В.В., Зайцев С.А.* Космическая система радиотехнического мониторинга на основе группировки низкоорбитальных малогабаритных космических аппаратов // Изв. вузов. Приборостроение. 2005. Т. 48. № 6. С. 26–31.
2. *Кураков В.А.* Космическая система мониторинга наземных источников излучения // Матер. XIII Междунар. научной конф. “Решетневские чтения”. Красноярск, 2009. Ч. 1. С. 150–151.
3. *Козирацкий Ю.Л., Козирацкий А.Ю., Паринов М.Л. и др.* Способ пространственного мониторинга источников электромагнитного излучения: пат. 2540126 РФ, заявл. 25.09.2013; опубл. 10.02.2015. Бюл. № 4.
4. *Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б.* Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978.
5. *Григорьев Ф.Н., Кузнецов Н.А., Серебровский А.П.* Управление наблюдениями в автоматических системах. М.: Наука, 1986.
6. *Малышев В.В., Красильщиков М.Н., Карлов В.И.* Оптимизация наблюдения и управления летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1989.
7. *Рубинович Е.Я.* Траекторные управления наблюдениями в дискретных стохастических задачах оптимизации // АиТ. 1980. № 3. С. 93–102.
8. *Рубинович Е.Я.* О программности траекторного управления наблюдениями за подвижной целью // АиТ. 2020. Вып. 3. С. 157–173.
9. *Sulema Aranda, Martinez S., Bullob F.* On Optimal Sensor Placement and Motion Coordination for Target Tracking // IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation. Barcelona. Spain, 2005. P. 4544–4549.
10. *Хуторцев В.В.* Терминальная оптимизация пространственной траектории однопозиционного унипараметрического наблюдателя // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 2. С. 147–154.

11. *Андреев К.В., Рубинович Е.Я.* Траекторное управление наблюдателем за мобильной целью по угломерной информации // АиТ. 2016. № 1. С. 134–162.
12. *Oshman Y., Davidson P.* Optimization of Observer Trajectories for Bearings-Only Target Localization // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 1999. V. 35 (3). P. 892–902.
13. *Khutortsev V.V.* Local Optimization of Trajectory Control of Observations for Mobile Digital Direction-Finder in the Location of Discrete Sources of Radiation System // Automatic Control and Computer Sciences. 2016. V. 50. № 4. P. 211–219.
14. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Наука, 1964.
15. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986.
16. *Хуторцев В.В.* Совместная оптимизация управления траекторией и наблюдениями в задаче оценки координат источников с дискретно изменяющимися интенсивностями излучения // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 5. С. 131–141.
17. Математическая теория планирования эксперимента / Под ред. С.М. Ермакова. М.: Наука, 1983.
18. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989.
19. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.