

# Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 84. Iss. 1

---

## EDITORIAL BOARD

- I.G. Goryacheva** (editor-in-chief, Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)
- V.G. Baydulov** (executive secretary, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)
- J. Awrejcewicz** (Professor, Politechnika Łódzka, Lodz, Poland),  
**N.N. Bolotnik** (Professor, Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),  
**F.M. Borodich** (Professor, Cardiff University, Cardiff, United Kingdom),  
**A.B. Freidin** (Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),  
**A.M. Gaifullin** (Professor, Corresponding RAS member, Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Zhukovsky, Russia),  
**M.L. Kachanov** (Professor, Tufts University, Medford, MA, USA),  
**Ju.D. Kaplunov** (Professor, Keele University, Staffordshire, United Kingdom),  
**A.V. Karapetyan** (Professor, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia),  
**A.A. Korobkin** (Professor, University of East Anglia, Norwich, United Kingdom),  
**A.M. Kovalev** (Professor, NASU member, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Ukraine),  
**V.V. Kozlov** (Professor, RAS member, Vice-President RAS, Moscow, Russia),  
**A.M. Krivtsov** (Professor, Corresponding RAS member, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),  
**A.G. Kulikovskii** (Professor, RAS member, Steklov Institute of Mathematics, RAS, Moscow, Russia),  
**Yu.Yu. Makhovskaya** (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),  
**N.F. Morozov** (Professor, RAS member, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia),  
**T.J. Pedley** (Professor, FRS member, University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom),  
**F. Pfeiffer** (Professor, FRS, Foreign RAS member, Technische Universität München, Munich, Germany),  
**V.V. Pukhnachev** (Professor, Corresponding RAS member, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics RAS, Novosibirsk, Russia),  
**G. Rega** (Professor, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy),  
**S.A. Reshmin** (Professor, Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),  
**V.A. Sabelnikov** (Professor, The French Aerospace Lab ONERA, Paris, France),  
**Ye.I. Shifrin** (Professor, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),  
**F.E. Udwadia** (Professor, University of Southern California, Los Angeles, CA, USA),  
**S.E. Yakush** (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),  
**V.F. Zhuravlev** (Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),  
**K. Zimmermann** (Professor, Technische Universität Ilmenau, Ilmenau, Germany)
- Editorial advisory board: N.I. Amelkin, I.M. Anan'evskii, A.S. Andreev, A.M. Formalskii, Yu.P. Gupalo, A.P. Ivanov, A.N. Kraiko, A.P. Markeev, S.A. Nazarov, V.S. Patsko, A.G. Petrov, N.N. Rogacheva, V.V. Sazonov, A.P. Seyranian, I.A. Soldatenkov, S.Ya. Stepanov, G.A. Tirsksii, V.N. Tkhai

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

---

January–February

*Учредитель:* РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

*Редакция:*

В.Г. Байдулов – отв. секретарь

Е.В. Есина – зав. редакцией

*Адрес редакции:* 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245

*Телефон редакции:* 8 (495) 434-21-49

*E-mail:* pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

*URL:* <http://pmm.ipmnet.ru>

На сайте Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала "Прикладная математика и механика" в каталоге Роспечати 70706

ISSN 0032-8235

---

Founder: Russian Academy of Sciences

*The Editorial Staff:*

V.G. Baydulov – executive secretary

E.V. Esina – head of Editorial office (manager editor)

*The Editorial Board Adress:* 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia

*Phone:* 8 (495) 434-21-49

*E-mail:* pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

*URL :* <http://pmm.ipmnet.ru>

The subscription index in Rospechat catalogue 70706

ISSN 0021-8928

---

**СО Д Е Р Ж А Н И Е**

---

О работах К.И. Бабенко в области механики и прикладной математики <i>А. И. Аптекарев, Н. Г. Афендикова</i>	3
Об одном аналоге истолкования Пуансо решения Эйлера в задаче о движении твердого тела в потенциальном поле сил <i>Г. В. Горр</i>	13
Об эволюции движений спутника-баллона в плоской ограниченной планетной задаче четырех тел с учетом светового давления <i>А. В. Доброславский, П. С. Красильников</i>	26
Макроскопическая модель двухфазного течения сжимаемых жидкостей в среде с двойной пористостью <i>М. Б. Панфилов, Ж. Д. Байшемиров, А. С. Бердышев</i>	44
Структура температурного фронта при фильтрации в трещиновато-пористой среде <i>А. А. Афанасьев</i>	64
Поверхность разрыва в анизотропной редуцированной среде Коссера. Теорема единственности для задач динамики с разрывами <i>А. Е. Анисимов, Е. В. Зданчук, В. В. Лалин</i>	77
Новый класс однородных решений плоских задач эластодинамики <i>Н. Б. Расулова, М. Б. Расулов</i>	85
Асимптотический анализ вынужденных колебаний двухслойных пластин при наличии вязкого сопротивления <i>Л. А. Агаловян, М. Л. Агаловян, Т. В. Закарян</i>	91
Контакт с межмолекулярным взаимодействием для вязкоупругого слоя (самосогласованный подход): расчет НДС и диссипации энергии <i>И.А. Солдатенков</i>	102
К расчету кинетики изнашивания покрытия: использование уточненных деформационных моделей <i>И. А. Солдатенков</i>	122

---

---

# CONTENTS

---

About the works of K.I. Babenko in the field of mechanics and applied mathematics <i>A. I. Aptekarev, N. G. Afendikova</i>	3
On one analogue of Poinsot interpretation of Euler solution in the problem of rigid body motion in the potential force field <i>G. V. Gorr</i>	13
On the evolution of balloon satellite motions in a plane restricted planetary four-body problem with light pressure <i>A. V. Dobroslavskiy, P. S. Krasilnikov</i>	26
Macroscopic model of two-phase flow of compressible fluids in double-porosity media <i>M. B. Panfilov, Zh. D. Baishemirov, A. S. Berdyshev</i>	44
The structure of temperature front in a fractured porous medium <i>A. A. Afanasyev</i>	64
Surface of discontinuity for the anisotropic reduced Cosserat continuum. Uniqueness of solution for dynamic issue with discontinuity <i>A. E. Anisimov, E. V. Zdanchuk, V. V. Lalin</i>	77
A new class of homogeneous solutions for flat elastodynamics problems <i>M. B. Rasulov, N. B. Rasulova</i>	85
Asymptotic analysis of forced vibrations of double-layer plates under viscous resistance <i>L. A. Aghalovyan, M. L. Aghalovyan, T. V. Zakaryan</i>	91
The contact with intermolecular interaction forces for viscoelastic layer (self-consistent approach): calculation of the stress-strain state and energy dissipation <i>I. A. Soldatenkov</i>	102
On the calculation of the coating wear kinetics: use of the refined deformation models <i>I. A. Soldatenkov</i>	122

---

---

---

---

УДК 533.6.013.2:534.222.2:535.71

*Памяти К.И. Бабенко (к столетию со дня рождения)*



**Константин Иванович Бабенко** (21 июля 1919–10 июня 1987) — выдающийся специалист в области механики жидкости и газа, численного анализа, гармонического анализа, теории функций, теории приближений и теории уравнений в частных производных. Член-корреспондент АН СССР (1976); доктор физико-математических наук (1952), профессор (1958). Лауреат Государственной премии СССР. Входил в состав редакционной коллегии журнала ПММ (1978–1987).

### О РАБОТАХ К.И. БАБЕНКО В ОБЛАСТИ МЕХАНИКИ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

© 2020 г. А. И. Аптекарев<sup>1,\*</sup>, Н. Г. Афендикова<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup> *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия*

\* *e-mail: apteka@keldysh.ru*

\*\* *e-mail: keldysh111@gmail.com*

Поступила в редакцию 27.09.2019 г.

После доработки 23.10.2019 г.

Принята к публикации 02.12.2019 г.

В работе представлен обзор научных достижений чл.-корр. АН К.И. Бабенко в области механики и прикладной математики, в том числе, касающихся решения задач обтекания тел идеальным газом, исследования течений вязкой жидкости и вычисли-

тельной математики. Характерной особенностью этих работ является сочетание глубоких аналитических методов с численным решением конкретных задач.

*Ключевые слова:* течения жидкости и газа, численное решение, вычислительные алгоритмы

**DOI:** 10.31857/S0032823520010051

**Введение.** Научное творчество К.И. Бабенко отличается необычайной широтой творческого диапазона: от абстрактных проблем теории функций и функционального анализа до конкретных прикладных задач механики. Невозможно выделить одну область исследований, которой принадлежат его основные результаты. Зачастую его работы по “чистой математике” были вызваны к жизни реальными прикладными задачами, а решение ряда прикладных задач оказалось возможным благодаря глубокому проникновению в математическую сущность проблемы.

Первые научные работы К.И. Бабенко были выполнены им во время учебы в 1945–48 гг. в адъюнктуре инженерного факультета ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского и были представлены в журнал “Доклады АН СССР” академиками М.В. Келдышем и С.Н. Берштейном. Одна из них, “О сопряженных функциях” [1] в дальнейшем сыграла немалую роль при его работе над докторской диссертацией.

Кандидатскую диссертацию К.И. Бабенко “Определение сил и моментов, действующих на колеблющееся стреловидное в плане крыло в сверхзвуковом потоке газа” можно назвать классической работой по механике. В ней уже определившийся талант аналитика применен к решению дифференциального уравнения, которое описывает движение крыла. В автобиографии, написанной в 1972 году, Константин Иванович написал: “...в линеаризованной постановке я решил задачу об определении сил и моментов и дал для их нахождения явные формулы. Для этого мне нужно было эффективно учесть влияние боковых кромок крыла, что мне и удалось. После защиты моя работа была засекречена и поэтому не была своевременно опубликована. Позже частично мои результаты были получены за рубежом”. Кандидатская диссертация К.И. Бабенко (см. <https://www.keldysh.ru/memory/babenko/cand.pdf>) была удостоена в 1949 г. премии и медали имени Н.Е. Жуковского.

Контакты в те годы с академиком М.В. Келдышем во многом повлияли на дальнейшую судьбу Константина Ивановича. По-видимому, краевые задачи для уравнений смешанного типа попали в круг его интересов именно под влиянием работ М.В. Келдыша и Ф.И. Франкля. Защита докторской диссертации К.И. Бабенко “Об уравнениях смешанного типа” (см. <https://www.keldysh.ru/memory/babenko/doktor.pdf>) состоялась в 1952 году. Годом раньше, по инициативе М.В. Келдыша, Константин Иванович был переведен на работу в МИАН. Известно, что с 1946 года в Математическом институте проводились расчеты, сопровождавшие создание ракетно-ядерного щита страны. Указанное в приказе о переводе К.И. Бабенко в МИАН постановление Совета министров от 9 мая 1951 года относится к периоду работы над созданием термоядерного оружия и касается формирования соответствующих структур, которые в Советском атомном проекте должны были отвечать за организацию вычислений. В частности, в МИАН был организован отдел прикладной математики, заведующим которого стал академик М.В. Келдыш. Константин Иванович активно включился в работы этого отдела, посвященные решению задач по производственной тематике, как в те годы называли закрытые работы по заданиям директивных органов. Создавалась новая наука, которую можно назвать вычислительная математика, и он принял самое активное участие в ее становлении. Часть этой деятельности сейчас называют математическим моделированием, поскольку для нелинейных прикладных задач полные обоснования дискретизации являются скорее исключением, чем правилом. Ключевое место в этих исследованиях заняли работы по газовой динамике и, позднее, по гидродинамике.

**1. Работы по газовой динамике.** Итоги первых лет работы К.И. Бабенко по производственной тематике в отделе прикладной математики МИАН, а потом и в созданном в 1953 году “Отделении прикладной математики” частично освещены в известном отчете 1954 года “Решение задачи об осесимметричном движении газа с ударной волной”, посвященном решению двумерной газодинамической задачи о сильном взрыве в неоднородной атмосфере. (В настоящее время рассекреченный отчет хранится в Кабинете-музее академика М.В. Келдыша и опубликован в томе “Математика” собрания сочинений М.В. Келдыша). В этой работе была предложена первая методика для расчета двумерных задач. Кроме К.И. Бабенко, его авторами являются И.М. Гельфанд, Н.А. Дмитриев, М.В. Келдыш, О.М. Локуциевский, Н.Н. Ченцов.

Из отзыва академика М.В. Келдыша о научных работах К.И. Бабенко, написанного в 1974 году: “Слабость имевшейся в это время вычислительной техники заставила преодолевать серьезные трудности. Это потребовало привлечения многих средств математического анализа, включая разнообразные асимптотические методы. К.И. Бабенко вложил в эту работу присущее ему аналитическое мастерство”. В этом отчете Константину Ивановичу принадлежит ряд важных теоретических результатов. В частности, там был исследован предложенный Келдышем метод решения “двумерных” разностных уравнений. В это же время К.И. Бабенко и И.М. Гельфанд предложили способ исследования устойчивости разностных уравнений относительно вариации граничных условий, применение которого помогло справиться с возникающей неустойчивости схемы. Этот факт отмечен в отчете ОПМ МИАН 1955 года “Точечный взрыв в атмосфере”, опубликованном в трудах М.В. Келдыша в томе “Механика”. Позже, в 1972 году, он написал в автобиографии: “Сначала в МИАН, а потом в ИПМ я включился в работу по вычислительной математике. Я смею надеяться, что есть и моя заслуга в том, что в ИПМ вычислительная математика находится на высоком научном уровне и имеет ряд выдающихся достижений”.

Следующей важной вехой в его работах был 1956 год, когда возникла необходимость более детального геометрического описания процессов, происходящих при работе зарядов. Коллективом под его руководством были разработаны методы и алгоритмы, открытой частью которых были расчеты сверхзвукового обтекания затупленных тел [2].

В личном деле К.И. Бабенко в списке его трудов, датированным 1974 годом, приведены пять отчетов по производственной тематике, выполненных с соавторами с 1954 по 1965 годы, но не входящих в известный список его трудов. О существенном вкладе Константина Ивановича в выполненные работы говорит его награждение двумя орденами Трудового Красного Знамени (в 1955 и 1956 гг.), назначение начальником отдела (№ 4 в ИПМ) и присвоение звания профессора в 1959 году. Открытые работы Константина Ивановича по численным методам газовой динамики появились только в 60-х годах.

К.И. Бабенко с коллективом сотрудников был выполнен большой цикл работ по численным методам решения задач пространственного обтекания тел совершенным газом. Эти работы оказали большое влияние на численные методы газовой динамики и получили дальнейшее развитие в многочисленных отечественных и зарубежных работах. Широкую известность приобрела монография [3] “Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом”, выпущенная в 1967 году и удостоенная Государственной премии. В монографии подробно изложен метод пространственного обтекания заостренных тел сверхзвуковым потоком газа, проведено теоретическое исследование систем конечно-разностных уравнений. Там был представлен разработанный К.И. Бабенко и Г.П. Воскресенским первый конечно-разностный метод решения задач сверхзвукового пространственного обтекания тел со вторым порядком точности. Приведенные в этой книге таблицы неосесимметричного обтекания тел в широком диапазоне чисел Маха дают исчерпывающую информацию о потоке газа.

Приведем отзыв М.В. Келдыша об этой работе Бабенко: “Особенно характерной для стиля Константина Ивановича является первая, теоретическая часть книги. Там наряду с ясным и подробным изложением использованного метода разбирается ряд вопросов общего значения, относящимся к разностным краевым задачам и методам их решения”.

В последующие годы в работах, посвященных исследованию пространственных течений жидкостей и газов и сверхзвуковому обтеканию, разработанные алгоритмы модернизировались и обобщались в соответствии с нуждами практики.

**2. Обтекание тел вязкой жидкостью.** С конца 60-х годов К.И. Бабенко начал заниматься задачами обтекания тел вязкой жидкостью [4–21]. Остановимся более подробно на примере, когда прикладная задача послужила источником замечательных теоретических результатов.

Рассматривается внешняя задача для уравнений Навье–Стокса

$$\begin{aligned}(u \cdot \nabla)u + \text{grad } p &= \frac{1}{2\lambda} \Delta u \\ \text{div } u &= 0,\end{aligned}$$

где  $u$  и  $p$  – безразмерные вектор скорости и давления, плотность  $\rho = 1$ , а число Рейнольдса –  $2\lambda$ . Предполагается, что рассматривается обтекание ограниченного тела  $T$ , с границей  $S$ , удовлетворяющей условию Гельдера. За единицу длины принимается  $l = \text{diam } T$ , а оси направлены так, что  $u_\infty = (1, 0, 0)$ . Тогда задаются граничные условия на теле и в бесконечно удаленной точке:

$$u|_S = u_0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = u_\infty$$

Вопрос о постановке граничных условий при численном решении задачи обтекания вдали от обтекаемого тела [4] побудил Константина Ивановича к глубокому теоретическому рассмотрению задач обтекания. Выяснению структуры решений задачи обтекания тела вязкой несжимаемой жидкостью посвятили свои работы многие выдающиеся ученые, имена которых остались в мировой науке. И, если вопрос о существовании обобщенных стационарных решений при любых числах Рейнольдса был установлен в разных вариантах Ж. Лере, О.А. Ладыженской и др., то вопрос о том, в каком смысле для этих решений удовлетворяются условия на бесконечности многие годы оставался открытым. Существенный прогресс в этой области был связан с работами Р. Финна (R. Finn), который ввел класс “физически приемлемых”  $PR$  (physically reasonable) решений задачи обтекания. Для них он постулировал, что на бесконечности они удовлетворяют условию

$$|u(x) - u_\infty| \leq C |x|^{-\alpha}$$

для некоторого  $\alpha > 1/2$  в случае пространственного и  $\alpha > 1/4$  в случае плоского обтекания. При этих условиях он получил главный член асимптотического разложения  $u(x)$  при  $|x| \rightarrow \infty$  и оценил остаток. Им было доказано и существование таких решений при достаточно малых числах Рейнольдса.

Для  $PR$  решений К.И. Бабенко [5] сначала были получены несколько первых членов асимптотических разложений решения стационарной задачи обтекания в плоском случае с остаточным членом  $O(|r|^{-3/2} \ln |r|)$ ,  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$  и асимптотическая формула для вихря

$$\omega(x, y) = A \frac{y\lambda}{r^{3/2}} e^{\lambda(x-r)} + e^{\mu(x-r)} O(r^{-3/2} \ln |r|), \quad \mu = \lambda - \varepsilon$$

Из этой формулы следует, в частности, экспоненциальное убывание вихря вне любого угла, содержащего полуось  $x > 0$ ,  $y = 0$ .

Кроме того, в этой работе для  $PR$  решений был строго установлен аналог формулы Жуковского для вязкой жидкости, формально полученный Файлоном [22] и получена формула для лобового сопротивления.

При решении трехмерной задачи [14], методом [5] была установлена формула для вихря, аналогичная двумерному случаю и для случая, когда сила, действующая на тело, совпадает с силой лобового сопротивления, были получены два члена асимптотического разложения для скорости.

В дальнейшем эти разложения неоднократно уточнялись, в частности, в работах М.М. Васильева и Н.И. Яворского.

Во всех работах до 1972 года вопрос о существовании  $PR$  решения для произвольных чисел Рейнольдса оставался открытым. В ключевой для этой области науки работе [13] было установлено, что всякое решение трехмерной задачи обтекания с конечным интегралом Дирихле  $D[u] < \infty$ , удовлетворяет неравенству

$$|u(x) - u_\infty| < C|x|^{-1},$$

т.е. всякое решение трехмерной задачи обтекания с конечным интегралом Дирихле удовлетворяет условию  $PR$  с  $\alpha = 1$ . Этот глубокий факт соединил исследования Ж. Лерре, Р. Финна, О.А. Ладыженской и других математиков и полностью охарактеризовал структуру стационарного решения пространственной задачи обтекания при любом числе Рейнольдса.

Следующим результатом, полученным К.И. Бабенко в качественной теории уравнений Навье–Стокса, явилась математически строгая теория возмущений для стационарных решений задачи обтекания, опубликованная в работах [17, 19]. Эта большая работа начинается с видоизменения классической теории потенциалов, чтобы избежать вырождения при нулевом числе Рейнольдса. Используя представление членов ряда

$$u(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} u^{(n)}(x, \lambda) \lambda^n,$$

где  $u^{(n)}(x, \lambda)$  – решение однородного ( $n = 0$ ) и неоднородного ( $n > 0$ ) уравнений Озеена. С помощью модифицированных потенциалов К.И. Бабенко не только доказывает сходимость этого ряда и изучает асимптотическое поведение первых членов, но и доказывает единственность решения при достаточно малых  $\lambda$ . Тем самым он получил строгое обоснование использования внешних и внутренних разложений в этой задаче, а приложением построенной теории явилась асимптотическая формула для сил, действующих на тело, движущееся в жидкости. В частности, была строго обоснована знаменитая формула Стокса для сопротивления шара

$$F_1 = F_1^0 (1 + 0.9\lambda^2 \ln(2\lambda)) + B\lambda + O(\lambda^2 \ln^2(2\lambda)),$$

где  $F_1^0$  отвечает аппроксимации Озеена, а  $B$  – эффективно вычисляемая константа. Затем он перешел к построению теории возмущений при конечных  $\lambda$  и доказал теоремы, из которых вытекает:

1. Если  $u(x, \lambda)$  решение задачи обтекания и однородная линеаризованная задача при  $\lambda = \lambda_0$  имеет только тривиальное решение, то при  $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$  существует решение задачи обтекания, представляемое рядом

$$u(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} u^{(n)}(x) \varepsilon^n$$

2. Если при  $\lambda = \lambda_0$  решение единственно, а при  $\lambda > \lambda_0$  имеется более одного решение задачи обтекания, то при  $\lambda = \lambda_0$  линеаризованная задача имеет нетривиальное решение.

В дальнейшем, уже в 80-е годы, Константин Иванович исследовал свойства непрерывного и точечного спектров линеаризованной задачи обтекания [20] и, в частности, показал, что собственное значение  $\lambda = 0$  принадлежит спектру при всех числах Рейнольдса. Им было показано [21], что, если пара комплексно-сопряженных собственных значений пересекает мнимую ось, то при выполнении некоторых условий невырожденности от стационарного решения ответвляется семейство периодических по времени решений. Там же установлено, что при каждом фиксированном  $t = t_0$  это решение имеет конечный интеграл Дирихле, но не принадлежит  $L_2(\mathbb{R}^3 \setminus T)$ .

Этот результат особенно интересен тем, что к этой задаче неприменимы ни классическая редукция Ляпунова—Шмидта, ни стандартный метод редукции бифуркационной задачи на центральное многообразие.

Частично эти результаты были переизложены, а их доказательства упрощены в работах Л.И. Сазонова и его докторской диссертации, в работах Дж. Хейвуда, Дж. Галди и др. (см. [23]).

В 80-е годы под руководством К.И. Бабенко был выполнен цикл работ по исследованию перехода в течениях вязкой несжимаемой жидкости от ламинарных режимов к турбулентным. В этих работах наряду с общими утверждениями даны решения задач о потере устойчивости конкретных течений вязкой жидкости: течений Пуазейля и Куэтта, вихрей Тейлора; обсуждается переход к турбулентности, исследуются сложные аттракторы системы Навье—Стокса. Эти исследования были подытожены в статьях [24–26].

**3. Поверхностные волны.** Постоянно сталкиваясь в процессе численного решения прикладных задач механики с коллизией между объемом памяти и быстродействием ЭВМ и необходимыми потребностями, К.И. Бабенко уделял много внимания исследованию оптимальности вычислительных методов. Созданные им вычислительные алгоритмы, автоматически реагирующие на гладкость решения (алгоритмы без насыщения) оказались незаменимы при решении многих задач, в частности, в вопросах численного исследования задач гидродинамической неустойчивости. На основе этих алгоритмов, Константин Иванович разработал метод доказательных вычислений — метод контролируемых вычислений на ЭВМ, которые в совокупности с аналитическими исследованиями приводят к строгому доказательству новых утверждений. Доказательные вычисления были, в частности, применены при исследовании уравнения, описывающего поверхностные волны малой амплитуды. В алгоритме численного решения задачи о неустойчивости Релея—Тейлора [27–30], который был разработан К.И. Бабенко, простое изменение направления силы тяжести дает алгоритм численного решения задачи о поверхностных волнах. Одним из элементов алгоритма было численное решение линеаризованной задачи. Константин Иванович обратил внимание, что при малых амплитудах матрица в указанном алгоритме оказалась подобна симметричной. Это привело его к идее поиска нового уравнения, для которого линеаризация приводила бы к самосопряженной задаче. К.И. Бабенко вывел эквивалентное известным уравнениям Стокса и Некрасова новое уравнение, описывающее волны на поверхности идеальной жидкости

$$\frac{1}{2}J(y^2) + (y - c^2)J(y) + y - kR^{-1}(1 + J(y)) - kH[R^{-1}D(y)] = 0,$$

где  $J = DH$ ,  $D$  — оператор дифференцирования,  $H$  — оператор Гильберта,  $k$  — коэффициент поверхностного натяжения, а  $R$  — радиус кривизны, для которого имеется известное выражение. Для этого уравнения методом доказательных вычислений были

получены фундаментальные результаты о структуре множества решений, т.е. об области существования поверхностных волн конечной амплитуды [31–35]. Эти исследования были продолжены в работах Дж. Толанда, П.И. Плотникова, П.М. Лушникова, В.Е. Захарова, А.И. Дьяченко и др. [36–40], где был, в частности, решен вопрос о существовании и структуре волны Стокса.

К моменту поступления на работу в МИАН Константин Иванович получил значительные результаты и в теории функций, и в теории дифференциальных уравнений, проявив там свой талант аналитика. В дальнейшем он добился впечатляющих успехов в области прикладной математики. Но математический мир притягивал его, в нем жила потребность решать красивые и фундаментальные аналитические задачи и он не оставлял работу в “чистой математике”. Именно эти исследования легли в основу его достижений в решении проблем прикладной математики и механики.

Константин Иванович Бабенко для всех знавших его был образцом трудоспособности, преданности науке, принципиальности и глубиной порядочности.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабенко К.И. О сопряженных функциях // Докл. АН СССР. 1948. Т. 62. № 2. С. 157–160.
2. Бабенко К.И., Иванова В.Н., Казанджан Э.П., Кукаркина М.А., Радвогин Ю.Б. Нестационарное обтекание головной части затупленного тела идеальным газом // Препринт. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1969. 170 с.
3. Бабенко К.И., Воскресенский Г.П., Русанов В.В., Любимов А.Н. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. М.: Наука, 1964. 505 с.
4. Бабенко К.И., Введенская Н.Д., Орлова М.М. О стационарном обтекании кругового цилиндра вязкой жидкостью // Препринт № 4. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1969. 70 с.
5. Бабенко К.И. Об асимптотическом поведении вихря вдали от тела при обтекании его плоским потоком вязкой жидкости // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 5. С. 911–925.
6. Babenko K.I., Vvedenskaya N.D., Orlova M.G. On stationary flow of viscous fluid past a circular cylinder Fluid Dynamics // Fluid Dyn. Trans. 1970. V. 5. № 11. P. 37–49.
7. Бабенко К.И. О асимптотическом поведении вихря вдали от тела при обтекании его плоским потоком вязкой жидкости // Препринт № 2. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1970. 24 с.
8. Бабенко К.И., Васильев М.М. Асимптотическое поведение решения задачи обтекания конечного тела вязкой жидкостью // Препринт № 84. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1971. 39 с.
9. Бабенко К.И., Введенская Н.Д., Орлова М.М. Результаты расчета обтекания бесконечного кругового цилиндра вязкой жидкостью // Препринт № 38. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1971. 44 с.
10. Бабенко К.И., Введенская Н.Д., Орлова М.М. Краевая задача для уравнений Навье–Стокса в плоской задаче обтекания // Препринт № 39. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1971. 40 с.
11. Бабенко К.И., Введенская Н.Д. О численном решении краевой задачи для уравнений Навье–Стокса // ЖВММФ. 1972. Т. 12. № 5. С. 1343–1349.
12. Бабенко К.И., Васильев М.М., Казанджан Э.П., Орлова М.М. Численное решение задачи о нестационарном движении вязкой несжимаемой жидкости внутри заданной области // Препринт № 54. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1972. 25 с.
13. Бабенко К.И. О стационарных решениях задачи обтекания тела вязкой несжимаемой жидкостью // Матем. сб. 1973. Т. 91 (133). № 1. С. 3–26.
14. Бабенко К.И., Васильев М.М. Об асимптотическом поведении стационарного течения вязкой несжимаемой жидкости вдали от тела // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 690–705.
15. Бабенко К.И., Введенская Н.Д., Орлова М.М. Расчет стационарного обтекания кругового цилиндра вязкой жидкостью // ЖВММФ. 1975. Т. 15. № 1. С. 183–196.
16. Бабенко К.И., Введенская Н.Д. Расчет уравнений и вихря на границе при численном решении краевой задачи для уравнений Навье–Стокса // Тр. 4 Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, 1975.
17. Бабенко К.И. Теория возмущений стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса // Препринт № 79. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1975. 25 с. [https://keldysh.ru/papers/1975/prep1975\\_79.pdf](https://keldysh.ru/papers/1975/prep1975_79.pdf)

18. *Бабенко К.И.* Теория возмущений стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. № 3. С. 592–595.
19. *Babenko K.I.* On properties of steady viscous incompressible fluid flows // Lecture Notes in Math. V. 771. P. 12–42. in: Approximation Methods for Navier–Stokes Problems. Berlin: Springer, 1980.
20. *Бабенко К.И.* О спектре линеаризованной задачи обтекания тела вязкой жидкостью // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 1. С. 64–68.
21. *Бабенко К.И.* О периодических решениях задачи обтекания тела вязкой жидкостью // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1293–1298.
22. *Filon L.N.G.* The forces on a cylinder in a stream of viscous fluid // Proc. R. Soc. London. A. 1926. V. 113. P. 7–27.
23. *Galdi G.P.* An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier–Stokes Equations. Springer Monographs in Mathematics. N.Y.: Springer, 2011. 511 p.
24. *Babenko K.I.* Investigation of hydrodynamic stability by means of computers // Fluid Dyn. Trans. 1980. V. 10. P. 9–75.
25. *Бабенко К.И., Афендикова А.Л.* О возникновении турбулентности в течениях вязкой несжимаемой жидкости // в сб. Механика и научно-технический прогресс. Т. 2. М.: Наука, 1987.
26. *Бабенко К.И., Рахманов А.И.* Доказательные вычисления в задаче о поверхностных волнах // в сб. Конструирование алгоритмов и решение задач математической физики. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1989. С. 123–127.
27. *Бабенко К.И., Петрович В.Ю.* О неустойчивости Релея–Тейлора // Препринт № 68. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1978. 28 с.
28. *Бабенко К.И., Петрович В.Ю.* О неустойчивости Релея–Тейлора // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 3. С. 551–554.
29. *Бабенко К.И., Петрович В.Ю.* Численное исследование задачи о неустойчивости Релея–Тейлора // Докл. АН СССР. 1980. Т. 255. № 2. С. 318–322.
30. *Бабенко К.И., Петрович В.Ю.* О неустойчивости Релея–Тейлора // в сб. К 75-летию академика А.Н. Тихонова. Актуальные проблемы математической физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1984.
31. *Бабенко К.И.* Вычислительный эксперимент и доказательные вычисления в задаче о поверхностных волнах // Препринт № 116. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 1986. 28 с.
32. *Бабенко К.И.* Несколько замечаний к теории поверхностных волн конечной амплитуды // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294. № 5. С. 1033–1037.
33. *Бабенко К.И.* О локальной теореме существования в теории поверхностных волн конечной амплитуды // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294. № 6. С. 1289–1292.
34. *Бабенко К.И., Петрович В.Ю., Рахманов А.И.* О вычислительном эксперименте в теории поверхностных волн конечной амплитуды // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302. № 4. С. 781–784.
35. *Бабенко К.И., Петрович В.Ю., Рахманов А.И.* О доказательном эксперименте в теории поверхностных волн конечной амплитуды. // Докл. АН СССР. 1988. Т. 303. № 5. С. 1033–1037.
36. *Plotnikov P.I., Toland J.F.* Convexity of Stokes waves of extreme form // Arch. Rat. Mech. Anal. 2004. V. 171. P. 349–416.
37. *Dyachenko A.I., Kuznetsov E.A., Spector M.D., Zakharov V.E.* Analytic description of the free surface dynamics of an ideal fluid (canonical formalism and conformal mapping) // Phys. Lett. A. 1996. V. 221. № 1–2. P. 73–79.
38. *Shargorodsky E., Toland J.F.* Riemann–Hilbert theory for problems with vanishing coefficients that arise in nonlinear hydrodynamics // J. Funct. Anal. 2003. V. 197. P. 283–300.
39. *Dyachenko A.I., Dyachenko S.A., Lushnikov P.M., Zakharov V.E.* Traveling capillary waves on the boundary of a disc of poles in two-dimensional hydrodynamics with free surface: new constants of motion. // J. Fluid Mech. 2019. V. 874. P. 891–925.
40. *Lushnikov P.M., Dyachenko S.A., Silantyev D.A.* New conformal mapping for adaptive resolving of the complex singularities of Stokes wave // Proc. R. Soc. A. 2017. V. 473: 20170198. <http://dx.doi.org/10098/rspa.2017.0198>. 2017.

**About the Works of K.I. Babenko in the Field of Mechanics  
and Applied Mathematics (*On the 100th anniversary of his birth*)**

**A. I. Aptekarev<sup>a,#</sup> and N. G. Afendikova<sup>a,##</sup>**

<sup>a</sup> *Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Science, Moscow, Russia*

<sup>#</sup> *e-mail: aptekaa@keldysh.ru*

<sup>##</sup> *e-mail: keldysh111@gmail.com*

The paper provides an overview of the scientific achievements of the corr-member of Ac. Sci USSR K.I. Babenko in the field of mechanics and applied mathematics, including numerical studies of perfect gas flows past an obstacle and research of viscous fluid flows. A characteristic feature of these works is the close combination of deep analytical methods and tools, along with numerical solutions to the problems under consideration.

*Keywords:* fluid and gas dynamics, numerical solution, computational algorithms

REFERENCES

1. *Babenko K.I.* On conjugate functions // DAN SSSR, 1948, vol. 62, no. 2, pp. 157–160. (in Russian)
2. *Babenko K.I., Ivanova V.N., Kazandjan E.P., Kukarkina M.A., Padvogin Yu.B.* Unsteady flow around the head of a blunted body by an ideal gas // Preprint. Moscow: KIAM RAS, 1969. 170 p. (in Russian)
3. *Babenko K.I., Voskresenskii G.P., Rusanov V.V., Lubimov A.N.* Spatial Flow around Smooth Bodies by Ideal Gas. Moscow: Nauka, 1964. 505 p. (in Russian)
4. *Babenko K.I., Vvedenskaya N.D., Orlova M.M.* On stationary viscous fluid flow past a circular cylinder // Preprint no. 4. Moscow: KIAM RAS, 1969. 70 p. (in Russian)
5. *Babenko K.I.* On the asymptotic behavior of a vortex in a plane viscous fluid flow away from the body // JAMM, 1970, vol. 34, no. 5, pp. 911–925. (in Russian)
6. *Babenko K.I., Vvedenskaya N.D., Orlova M.M.* On stationary flow of viscous fluid past a circular cylinder // Fluid Dyn. Trans., 1970, vol. 5, no. 11, pp. 37–49.
7. *Babenko K.I.* On the asymptotic behavior of a vortex in a plane viscous fluid flow away from the body // Preprint no. 2. Moscow: KIAM RAS, 1970. 70 p. (in Russian)
8. *Babenko K.I., Vasilyev M.M.* Asymptotic behavior of a solution of a viscous fluid flow problem past a finite body // Preprint no. 84. Moscow: KIAM RAS, 1971. 39 p. (in Russian)
9. *Babenko K.I., Vvedenskaya N.D., Orlova M.M.* Results of calculation of flow around an infinite circular cylinder by a viscous fluid // Preprint no. 38. Moscow: KIAM RAS, 1971. 44 p. (in Russian)
10. *Babenko K.I., Vvedenskaya N.D., Orlova M.M.* Boundary value problem for Navier–Stokes equations in a plane flow problem // Preprint no. 39. Moscow: KIAM RAS, 1971. 40 p. (in Russian)
11. *Babenko K.I., Vvedenskaya N.D.* Numerical solution of the boundary value problem for the Navier–Stokes equation // USSR Comput. Math. Math. Phys., 1972, vol. 12, no. 5, pp. 329–339.
12. *Babenko K.I., Vasilyev M.M., Kazandjan E.P., Orlova M.M.* Numerical solution of the problem of unsteady motion of a viscous incompressible fluid within a given region // Preprint no. 54. Moscow: KIAM RAS, 1972. 25 p. (in Russian)
13. *Babenko K.I.* On stationary solutions of the problem of flow past a body of a viscous incompressible fluid // Math. USSR–SB, 1973, vol. 20, no. 1, pp. 1–25.
14. *Babenko K.I., Vasilyev M.M.* On asymptotic behavior of stationary flow of viscous incompressible fluid away from the body // JAMM, 1973, vol. 37, no. 4, pp. 690–705. (in Russian)
15. *Babenko K.I., Vvedenskaya N.D., Orlova M.M.* Calculation of the steady flow of a viscous fluid past a circular cylinder // USSR Comput. Math. Math. Phys., vol. 15, no. 1, pp. 176–190.
16. *Babenko K.I., Vvedenska N.D.* Calculation of equations and vortex at the boundary in numerical solution of the boundary value problem for Navier–Stokes equations // Proc. 4th All-Union Seminar on Numerical Methods of Viscous Fluid Mechanics. Novosibirsk, 1975. (in Russian)
17. *Babenko K.I.* Perturbation theory of stationary viscous incompressible fluid flows at small Reynolds numbers // Preprint no. 79, Moscow: KIAM RAS, 1975. 25 p. (in Russian)

18. *Babenko K.I.* Perturbation theory of stationary flows of viscous incompressible fluid for small Reynolds numbers // *Sov. Phys. Doklady*, 1976, vol. 21, pp. 143–145.
19. *Babenko K.I.* On properties of steady viscous incompressible fluid flows // *Lecture Notes in Math.* vol. 771, pp. 12–42. in: *Approximation methods for Navier–Stokes problems*. Berlin: Springer, 1980.
20. *Babenko K.I.* Spectrum of the linearized problem of flow of a viscous incompressible liquid round a body // *Sov. Phys. Doklady*, 1982, vol. 262, no. 1, pp. 25–27.
21. *Babenko K.I.* Periodic solutions of the flow of a viscous fluid past a body // *Sov. Math. Doklady*, 1982, vol. 25, pp. 211–216.
22. *Filon L.N.G.* The forces on a cylinder in a stream of viscous fluid // *Proc. R. Soc. London A*, 1926, vol. 113, pp. 7–27.
23. *Galdi G.P.* *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier–Stokes Equations*. Springer Monographs in Mathematics. N.Y.: Springer, 2011, 511 p.
24. *Babenko K.I.* Investigation of hydrodynamic stability by means of computers // *Fluid Dyn. Trans.*, 1980, vol. 10, pp. 9–75.
25. *Babenko K.I., Afendikov A.L.* On the occurrence of turbulence in viscous incompressible fluid flows // in: *Mech.&Sci. Techn. Prog. M.: Nauka*. 1987. (in Russian).
26. *Babenko K.I., Rahmanov A.I.* Proof-based calculations in the surface wave problem // in: *Designing Algorithms and Solving Problems of Mathematical Physics*. Moscow: KIAM RAS, 1989. pp. 123–127. (in Russian).
27. *Babenko K.I., Petrovich V.Yu.* On the Rayleigh–Taylor instability // Preprint no. 68, Moscow: KIAM RAS, 1975. 25 p. (in Russian)
28. *Babenko K.I., Petrovich V.Yu.* On the Rayleigh–Taylor instability // *Sov. Phys. Doklady*, 1979, vol. 24, pp. 161–163.
29. *Babenko K.I., Petrovich V.Yu.* Numerical study of the Rayleigh–Taylor instability problem // *Sov. Phys. Doklady*, 1980, vol. 25, pp. 909–912.
30. *Babenko K.I., Petrovich V.Yu.* On Rayleigh–Taylor instability // in: *To the 75th anniversary of academician A.N. Tikhonov. Actual problems of mathematical physics and computational mathematics*. M.: Nauka, 1984. (in Russian)
31. *Babenko K.I.* Computational experiment and evidence-based calculations in the surface wave problem // Preprint no. 116. Moscow: KIAM RAS, 1986. 28 p. (in Russian)
32. *Babenko K.I.* Some remarks on the theory of surface waves of finite amplitude // *Sov. Math. Doklady*, 1987, vol. 35, pp. 599–603.
33. *Babenko K.I.* A local existence theorem in the theory of surface waves of finite amplitude // *Sov. Math. Doklady*, 1987, vol. 35, pp. 647–650.
34. *Babenko K.I., Petrovich V.Yu., Rahmanov A.I.* A computational experiment in the theory of surface waves of finite amplitude // *Sov. Math. Doklady*, 1989, vol. 38, pp. 327–331.
35. *Babenko K.I., Petrovich V.Yu., Rahmanov A.I.* On a demonstrative experiment in the theory of surface waves of finite amplitude // *Sov. Math. Doklady*, 1989, vol. 38, pp. 626–630.
36. *Plotnikov P.I., Toland J.F.* Convexity of Stokes waves of extreme form // *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 2004, vol. 171, pp. 349–416.
37. *Dyachenko A.I., Kuznetsov E.A., Spector M.D., Zakharov V.E.* Analytic description of the free surface dynamics of an ideal fluid (canonical formalism and conformal mapping) // *Phys. Lett. A*, 1996, vol. 221, no 1–2, pp. 73–79.
38. *Shargorodsky E., Toland J.F.* Riemann–Hilbert theory for problems with vanishing coefficients that arise in nonlinear hydrodynamics // *J. Funct. Anal.*, 2003, vol. 197, pp. 283–300.
39. *Dyachenko A.I., Dyachenko S.A., Lushnikov P.M., Zakharov V.E.* Traveling capillary waves on the boundary of a disc of poles in two-dimensional hydrodynamics with free surface: new constants of motion. // *J. Fluid Mech.*, 2019, vol. 874, pp. 891–925.
40. *Lushnikov P.M., Dyachenko S.A., Silantyev D.A.* New conformal mapping for adaptive resolving of the complex singularities of Stokes wave // *Proc. R. Soc. A*, 2017, vol. 473: 20170198. <http://dx.doi.org/10098/rspa.2017.0198>. 2017.

---

---

УДК 531.38; 531.39

## ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ИСТОЛКОВАНИЯ ПУАНСО РЕШЕНИЯ ЭЙЛЕРА В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛ

© 2020 г. Г. В. Горр\*

*Институт прикладной математики и механики, Донецк, Украина*

*\* e-mail: gvgorr@gmail.com*

Поступила в редакцию 25.09.2019 г.

После доработки 21.11.2019 г.

Принята к публикации 02.12.2019 г.

Рассмотрена задача о движении твердого тела с неподвижной точкой под действием потенциальных сил. Получены условия существования трех инвариантных соотношений уравнений движения. Найдены зависимости от времени основных переменных задачи. Исследовано движение эллипсоида инерции тела в неподвижном пространстве. Установлен некоторый аналог результата Пуансо в истолковании решения Эйлера – в статье движение тела представлено как качение без скольжения эллипсоида инерции по касательной к нему плоскости в неподвижном пространстве.

*Ключевые слова:* твердое тело, потенциальные силы, эллипсоид инерции, истолкование движения по Пуансо

**DOI:** 10.31857/S0032823520010075

**Введение.** Исследование движения твердого тела, как правило, заключается в комплексном подходе, который состоит в получении аналитического решения уравнений движения и последующего истолкования движения с помощью различных геометрических методов. Известно, что в общем случае уравнения движения тела под действием потенциальных и гироскопических сил не интегрируемы в квадратурах по Якоби (уравнений Эйлера–Пуассона [1–3] и уравнений Кирхгофа–Пуассона [4, 5]). Первые дополнительные интегралы уравнений динамики твердого тела получены при определенных ограничениях на параметры распределения масс (см. обзоры [6–9]).

Изучение свойств движения тела относится к заключительному этапу в исследовании решений уравнений динамики. Классический результат Л. Пуансо [10] в истолковании движения тела в случае Эйлера [11] изложен в монографиях Э. Рауса [12], Г.К. Сулова [6], К. Магнуса [13], А.В. Борисова и И.С. Мамаева [8] и других авторов. В силу важности изучения движения свободного твердого тела в приведенных монографиях подробно рассмотрены и результаты И. Мак-Куллага, Ж. Сильвестра, Г. Дарбу, Н.Б. Делоне, Ж. Кенига. В качестве обзорных работ по исследованию других решений уравнений Эйлера–Пуассона наравне с приведенными выше можно отметить публикации А.О. Домогарова [14], П.В. Харламова [15]. Значение геометрического анализа свойств движения тела с неподвижной точкой высоко оценивал Н.Е. Жуковский [16]. Он предлагал и свой метод истолкования движения тела, который основан на свойствах вектора кинематического момента, а работа [17] по истолкованию движения гироскопа Гесса занимает особое место в динамике твердого тела.

Теорема Л. Пуансо о представлении движения тела с помощью качения без скольжения подвижного аксоида вектора угловой скорости по неподвижному аксоиду наибольшее применение получила после того, как П.В. Харламов [18] вывел новые уравнения неподвижного годографа. Хотя формально уравнения неподвижного годографа можно найти, используя углы Эйлера, но процедура получения уравнений неподвижного годографа при таком подходе приводит к значительным трудностям в нахождении вспомогательных переменных, которые в прямом методе Пуансо не используются. Благодаря применению уравнений П.В. Харламова [18] к настоящему времени практически во всех решениях уравнений динамики установлено истолкование движения тела прямым методом Пуансо (см. монографии П.В. Харламова [15], И.Н. Гашененко, Г.В. Горра, А.М. Ковалева [19], Г.В. Горра, А.М. Ковалева [20]).

После того, как была накоплена информация о геометрических свойствах движения тела с помощью различных методов, актуальной стала задача о комплексном подходе в истолковании движения твердого тела с неподвижной точкой. Для его получения автор данной статьи предложил модифицированный метод Пуансо [21], основанный на введении вектора, который коллинеарен вектору угловой скорости. Он позволяет представлять не только движение тела с помощью качения без скольжения подвижного аксоида этого вектора по неподвижному аксоиду, но и, в зависимости от целей исследования, выбирать в качестве подвижного годографа или неподвижного годографа плоские направляющие линии. Данный подход, как показано [21–24], приносит новую информацию о движении тела, упрощая в ряде случаев истолкование движения тела. Кроме этого, данный подход позволяет исследовать движение различных геометрических объектов, связанных с телом, в неподвижном пространстве. Например, с его помощью можно получить свойства движения сферы, эллипсоида инерции и других поверхностей в неподвижном пространстве. То есть в этом варианте модифицированного метода имеет место обобщение подхода Э. Рауса [13], который он использовал при рассмотрении сфероконических и эллипсоидоконических сечений в решении Эйлера. Однако его исследования были основаны на достаточно сложных приемах сферической тригонометрии. Определенное преимущество комплексного подхода по сравнению с методом Пуансо связано, прежде всего, со структурой решения уравнений движения тела. Данная статья посвящена исследованию движения эллипсоида инерции тела в решении [25], уравнений движения тела под действием потенциальных сил. Это решение получено на основании применения метода инвариантных соотношений [26, 27], особенности которого изучены ранее [28], и метода изучения обратных задач динамики твердого тела [29]. Показано, что движение тела можно представить качением без скольжения эллипсоида инерции по касательной плоскости, которая неподвижна в пространстве. Таким образом, установлен аналог результата Пуансо, полученного им в истолковании решения Эйлера.

**1. Постановка задачи. Вид решения.** Рассмотрим уравнения движения твердого тела, имеющего неподвижную точку, в потенциальном поле сил [6, 30, 31]:

$$A_1 \dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3) \omega_2 \omega_3 + v_3 \frac{\partial U(v_1, v_2, v_3)}{\partial v_2} - v_2 \frac{\partial U(v_1, v_2, v_3)}{\partial v_3} \quad (1.1)$$

$$A_2 \dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1) \omega_3 \omega_1 + v_1 \frac{\partial U(v_1, v_2, v_3)}{\partial v_3} - v_3 \frac{\partial U(v_1, v_2, v_3)}{\partial v_1} \quad (1.2)$$

$$A_3 \dot{\omega}_3 = (A_1 - A_2) \omega_1 \omega_2 + v_2 \frac{\partial U(v_1, v_2, v_3)}{\partial v_1} - v_1 \frac{\partial U(v_1, v_2, v_3)}{\partial v_2} \quad (1.3)$$

$$\dot{v}_1 = \omega_3 v_2 - \omega_2 v_3, \quad \dot{v}_2 = \omega_1 v_3 - \omega_3 v_1, \quad \dot{v}_3 = \omega_2 v_1 - \omega_1 v_2 \quad (1.4)$$

Уравнения (1.1)–(1.4) при заданной силовой функции  $U = U(v_1, v_2, v_3)$  допускают первые интегралы

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1, \quad A_1\omega_1v_1 + A_2\omega_2v_2 + A_3\omega_3v_3 = k \quad (1.5)$$

$$A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 - 2U(v_1, v_2, v_3) = 2E, \quad (1.6)$$

где  $k$  и  $E$  – произвольные постоянные, и введены обозначения:  $\omega_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) – компоненты угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ ;  $v_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) – компоненты единичного вектора  $\mathbf{v}$  оси симметрии силового поля;  $A_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) – главные моменты инерции тела; точка над переменными обозначает относительную производную по времени  $t$ .

Условия существования дополнительных первых интегралов уравнений (1.1)–(1.4) изучали Д.Н. Горячев [30], Х.М. Яхья [32, 33]. Обзор результатов, полученных в этой задаче, подробно изучен в монографии А.В. Борисова и И.С. Мамаева [8], в которой отмечены статьи И.В. Комарова и В.Б. Кузнецова [34, 35], имеющие большое значение для квантовой механики.

Ранее [25] автором рассмотрены условия существования у системы (1.1)–(1.4) трех инвариантных соотношений

$$\omega_1 = v_3^{n-1} \left( -\frac{\mu_1 n}{n+2} v_1 + \beta_1 \mu_2 \right), \quad \omega_2 = v_3^{n-1} \left( -\frac{\mu_1 n}{n+2} v_2 + \beta_2 \mu_2 \right), \quad \omega_3 = \mu_1 v_3^n, \quad (1.7)$$

где  $\beta_1, \beta_2, \mu_1, \mu_2$  – постоянные параметры,  $n \in \mathbb{N}$ . С помощью метода решения обратных задач динамики твердого тела [29] силовая функция уравнений (1.1)–(1.3), (1.6) строится на основании соотношения (1.6):

$$U(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{2} \left[ A_1 \omega_1^2(v_1, v_2, v_3) + A_2 \omega_2^2(v_1, v_2, v_3) + A_3 \omega_3^2(v_1, v_2, v_3) \right] - E, \quad (1.8)$$

где  $\omega_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) определяются равенствами (1.7).

Рассмотрим одно из решений [25]. Оно характеризуется следующими условиями на моменты инерции, постоянную  $k$  и параметры  $\beta_1, \beta_2, \mu_1, \mu_2$ :

$$A_2 = A_1 = A_3(n+2), \quad k = 0 \quad (1.9)$$

$$\mu_1^2 n^2 = \mu_2^2 \kappa_0^2 (n+2)^2 \quad (\kappa_0^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2) \quad (1.10)$$

Запишем вид исследуемого решения [25]:

$$\begin{aligned} \omega_1(v_3) &= \frac{\mu_2(n+1)v_3^n}{n} \left( \beta_1 v_3 + \beta_2 \sqrt{\lambda_0^2 - v_3^2} \right) \\ \omega_2(v_3) &= \frac{\mu_2(n+1)v_3^n}{n} \left( \beta_2 v_3 - \beta_1 \sqrt{\lambda_0^2 - v_3^2} \right) \\ \omega_3(v_3) &= \mu_1 v_3^n \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} v_1(v_3) &= \frac{1}{\kappa_0} \left[ \beta_1 \left( n - (n+1)v_3^2 \right) - \beta_2 (n+1)v_3 \sqrt{\lambda_0^2 - v_3^2} \right] \\ v_2(v_3) &= \frac{1}{\kappa_0} \left[ \beta_2 \left( n - (n+1)v_3^2 \right) + \beta_1 (n+1)v_3 \sqrt{\lambda_0^2 - v_3^2} \right], \end{aligned} \quad (1.12)$$

где  $v_3(t)$  удовлетворяет интегральному равенству

$$\int_{v_3^{(0)}}^{v_3} \frac{dv_3}{v_3^n \sqrt{\lambda_0^2 - v_3^2}} = -\frac{\mu_1(n+1)}{n+2}(t-t_0) \quad (1.13)$$

В соотношениях (1.11)–(1.13) через  $\lambda_0$  обозначена постоянная

$$\lambda_0 = \frac{\sqrt{n(n+2)}}{n+1}, \quad (1.14)$$

а переменная  $v_3$  изменяется на отрезке

$$-\lambda_0 \leq v_3 \leq \lambda_0 \quad (1.15)$$

Очевидно, что  $\lambda_0$  из (1.14) удовлетворяет условию  $0 < \lambda_0 < 1$ , при котором решение (1.11)–(1.13) на отрезке (1.15) является действительным (значение  $v_3^{(0)} = 0$  исключается из рассмотрения). В дальнейшем полагаем  $\mu_1 > 0$ ,  $\mu_2 > 0$ , что не ограничивает общности задачи истолкования движения.

Отметим, что интерес в исследовании инвариантных соотношений (1.7) (ИС) состоит в том, что уравнения (1.4) на ИС (1.7)

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_3^n \left( \frac{2(n+1)}{n+2} \mu_1 v_2 - \beta_2 \mu_2 \right), \\ \dot{v}_2 &= v_3^n \left( -\frac{2(n+1)}{n+2} \mu_1 v_1 + \beta_1 \mu_2 \right), \quad \dot{v}_3 = \mu_2 v_3^{n-1} (\beta_2 v_1 - \beta_1 v_2), \end{aligned} \quad (1.16)$$

кроме интеграла  $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$  допускают ИС

$$\beta_2 v_1 + \beta_1 v_2 = \frac{K_0}{n} [n - (n+1)v_3^2], \quad (1.17)$$

что позволило на основании геометрического интеграла и ИС (1.17) получить зависимости (1.12).

Приведем вид силовой функции (1.8) на ИС (1.7) при выполнении условий (1.9), (1.10):

$$\begin{aligned} U(v_1, v_2, v_3) &= \frac{\mu_1 A_3 v_3^{2(n-1)}}{2(n+2)} \left[ 2\mu_1 n^2 - \mu_1 (n+1)(n-2)v_3^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2\mu_2 n(n+2)(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) \right] \end{aligned} \quad (1.18)$$

В силу результатов [28] следует, что в выражении для силовой функции из (1.18) нельзя использовать равенство (1.17).

**2. Истолкование движения тела в решении (1.11)–(1.13) прямым методом Пуансо.** Рассмотрим интеграл (1.13). Пусть  $n = 1$ , тогда ИС (1.7) принимают вид

$$\omega_1 = -\frac{\mu_1 n}{n+2} v_1 + \beta_1 \mu_2, \quad \omega_2 = -\frac{\mu_1 n}{n+2} v_2 + \beta_2 \mu_2, \quad \omega_3 = \mu_1 v_3 \quad (2.1)$$

В случае (2.1) силовая функция (1.18) имеет квадратичный порядок. То есть уравнения (1.1)–(1.3) описывают движение твердого тела под действием центральных ньютоновских сил. Условие (1.9) при  $n = 1$  таково

$$A_2 = A_1 = 3A_3 \quad (2.2)$$

Линейные ИС для уравнений движения исследовались многими авторами (см., например, [9]). Однако случай (2.2) ими отдельно не рассматривался.

Положим в (1.13)  $n = 1$ . Сделаем замену  $\lambda_0^2 - v_3^2 = z^2$ . Тогда, учитывая, что

$$\int_{v_3^{(0)}}^{v_3} \frac{dz}{\lambda_0^2 - z^2} = \frac{2\mu_1}{3}(t - t_0), \tag{2.3}$$

получим

$$v_3^2 = \frac{3e^w}{(e^w + 1)^2}, \quad \left( w = \frac{2\mu_1(t - t_0)}{\sqrt{3}} \right) \tag{2.4}$$

Запишем равенства (1.12), (2.1) при  $n = 1$ :

$$\begin{aligned} v_1(v_3) &= \frac{1}{\kappa_0} \left[ \beta_1 (1 - 2v_3^2) - \beta_2 v_3 \sqrt{3 - 4v_3^2} \right] \\ v_2(v_3) &= \frac{1}{\kappa_0} \left[ \beta_2 (1 - 2v_3^2) + \beta_1 v_3 \sqrt{3 - 4v_3^2} \right] \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\omega_1(v_3) = \mu_2(\beta_1 - \kappa_0 v_1), \quad \omega_2(v_3) = \mu_2(\beta_2 - \kappa_0 v_2), \quad \omega_3(v_3) = \mu_1 v_3 \tag{2.6}$$

На основании равенств (2.4)–(2.6) можно сделать заключение о том, что при  $t \rightarrow \infty$  функции  $v_3 \rightarrow 0$ ,  $v_1 \rightarrow \frac{\beta_1}{\kappa_0}$ ,  $v_2 \rightarrow \frac{\beta_2}{\kappa_0}$ ,  $\omega_i \rightarrow 0$  ( $i = \overline{1,3}$ ). То есть при неограниченном возрастании времени движение тела стремится к состоянию покоя.

Покажем, что и при  $n > 1$  движение тела носит асимптотический характер. Выберем начальное значение  $v_3^{(0)} > 0$ . Из интеграла (1.13) следует, что  $\frac{dv_3}{dt} < 0$  при  $v_3 = v_3^{(0)}$ ,

то есть на отрезке (1.15) переменная  $v_3$  убывает и достигает значения  $v_3 = 0$  за бесконечный промежуток времени, так как интеграл (1.13) расходится. Из равенств (1.11) следует, что  $\omega_i \rightarrow 0$  ( $i = \overline{1,3}$ ) при  $v_3 \rightarrow 0$ . Данные свойства доказывают высказанное выше утверждение.

Для построения подвижного годографа обратимся к равенствам (1.11). Исключим из них переменную  $v_3$ :

$$\begin{aligned} (n + 2)(\omega_1^2 + \omega_2^2) - n\omega_3^2 &= 0 \\ \mu_2^n (n + 2)^{2n} (\beta_1 \omega_1 + \beta_2 \omega_2)^n - \mu_1^{2n} n^n (n + 1)^n \omega_3^{n-1} &= 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Таким образом, в силу (2.7) подвижный годограф вектора угловой скорости – линия пересечения конуса второго порядка и алгебраической поверхности  $n$ -го порядка.

Уравнения неподвижного годографа угловой скорости для решения (1.11), (1.12) находим с помощью уравнений П.В. Харламова [15]

$$\omega_\xi(v_3) = \frac{\mu_1(n + 1)}{n + 2} v_3^n \sqrt{\lambda_0^2 - v_3^2}, \quad \omega_\eta(v_3) = \mu_1 v_3^n, \quad \omega_\zeta(v_3) = \frac{\mu_1(n + 1)}{n + 2} v_3^{n+1} \tag{2.8}$$

Откуда следует, что при  $v_3 \rightarrow 0$  функции  $\omega_\xi \rightarrow 0$ ,  $\omega_\eta \rightarrow 0$ ,  $\omega_\zeta \rightarrow 0$ .

Покажем, что, кроме свойства асимптотичности, движение тела имеет и свойство изоконичности движения. Изоконическими движениями называются движения тела, для которых подвижный и неподвижный аксоиды вектора угловой скорости симметричны относительно касательной к ним плоскости, проходящей через начало координат [36].

Изоконические движения в динамике тяжелого твердого тела имеют место в решениях Ж. Лагранжа [37], Д. Гриоли [38], В.А. Стеклова [39]. Например, изоконические движения в решении В.А. Стеклова рассмотрены Р. Фаббри [40, 41], Е.И. Харламовой и Г.В. Мозалевской [42]. В полях сложной структуры они изучены в [43, 44].

Выполним в решении (1.11) замену переменных: вместо  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  введем переменные

$$\Omega_1 = \frac{1}{\kappa_0}(\omega_1\beta_2 - \omega_2\beta_1), \quad \Omega_2 = \frac{1}{\kappa_0}(\omega_1\beta_1 + \omega_2\beta_2), \quad \Omega_3 = \omega_3 \quad (2.9)$$

Замена (2.9) означает поворот подвижной системы координат вокруг третьей координатной оси. Подставим  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  из (1.11) в равенства (2.9). Тогда получим

$$\Omega_1(v_3) = \frac{\mu_1(n+1)}{n+2} v_3^n \sqrt{\lambda_0^2 - v_3^2}, \quad \Omega_2(v_3) = \frac{\mu_1(n+1)}{n+2} v_3^{n+1}, \quad \Omega_3(v_3) = \mu_1 v_3^n \quad (2.10)$$

Из соотношений (2.8) и (2.10) следует

$$\omega_\xi(v_3) = \Omega_1(v_3), \quad \omega_\eta(v_3) = \Omega_3(v_3), \quad \omega_\zeta(v_3) = \Omega_2(v_3),$$

что доказывает свойство изоконичности движения тела в исследуемом решении.

**3. Применение модифицированного метода Пуансо в истолковании движения тела.** Для исследования движения эллипсоида инерции в неподвижном пространстве необходимо получить матрицу перехода от подвижного базиса к неподвижному базису. Введем углы Эйлера  $\phi, \psi, \theta$ , используя равенства

$$\begin{aligned} v_1 &= \sin \theta \sin \phi, & v_2 &= \sin \theta \cos \phi, & v_3 &= \cos \theta \\ \omega_1 &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi, & \omega_2 &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi, & \omega_3 &= \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{aligned} \quad (3.1)$$

Обозначим единичные векторы подвижной системы координат через  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ , а неподвижной системы координат – через  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 = \mathbf{v}$ . Из (3.1) следуют очевидные равенства

$$\phi(t) = \arctg \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{i}_1}{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{i}_2}, \quad \theta(t) = \arccos(\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}_3), \quad \psi(t) = \int_{t_0}^t \frac{(\boldsymbol{\omega}(\tau) \times \mathbf{i}_3) \cdot (\mathbf{v}(\tau) \times \mathbf{i}_3)}{(\mathbf{v}(\tau) \times \mathbf{i}_3)^2} d\tau \quad (3.2)$$

Поскольку полярный угол неподвижного годографа можно определить из соотношений (2.8)

$$\alpha(v_3) = \arctg \frac{n+2}{(n+1)\sqrt{\lambda_0^2 - v_3^2}}, \quad (3.3)$$

то вместо третьей формулы из (3.2) целесообразно использовать формулу [21]

$$\operatorname{tg}(\alpha(v_3) - \psi(v_3)) = \frac{(\boldsymbol{\omega}(v_3) \times \mathbf{v}(v_3)) \cdot (\mathbf{v}(v_3) \times \mathbf{i}_3)}{\mathbf{i}_3 \cdot (\boldsymbol{\omega}(v_3) \times \mathbf{v}(v_3))} \quad (3.4)$$

На основании равенств (1.11) и (1.12), а также (3.3) и (3.4) получим

$$\psi(v_3) = -\arctg(n+1)\sqrt{\lambda_0^2 - v_3^2} + \psi_0 \quad (3.5)$$

Запишем первые два соотношения из (3.2), принимая  $v_3$  за вспомогательную переменную:

$$\phi(v_3) = \arctg \frac{\beta_1 \left[ n - (n+1)v_3^2 \right] - \beta_2(n+1)v_3 \sqrt{\lambda_0^2 - v_3^2}}{\beta_2 \left[ n - (n+1)v_3^2 \right] + \beta_1(n+1)v_3 \sqrt{\lambda_0^2 - v_3^2}} \quad (3.6)$$

$$\theta(v_3) = \arccos v_3 \quad (3.7)$$

Применим к исследованию решения (1.11)–(1.13) модифицированный метод [21]. Пусть  $\mathbf{b}(v_3) = b(v_3)\boldsymbol{\omega}(v_3)$ , где

$$b(v_3) = \frac{1}{v_3^n} \quad (v_3 \neq 0) \quad (3.8)$$

Функция (3.8) определена на отрезке (1.15), исключая точку  $v_3 = 0$ . Тогда из (1.11), (1.12), (2.8) и (3.8) имеем

$$\mathbf{b}_\Pi(v_3) = b_1(v_3)\mathbf{i}_1 + b_2(v_3)\mathbf{i}_2 + b_3(v_3)\mathbf{i}_3 \quad (3.9)$$

$$\mathbf{b}_H(v_3) = b_\zeta(v_3)\boldsymbol{\vartheta}_1 + b_\eta(v_3)\boldsymbol{\vartheta}_2 + b_\xi(v_3)\boldsymbol{\vartheta}_3, \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} b_1(v_3) &= \frac{\mu_1(n+1)}{n+2} \left( \beta_1 v_3 + \beta_2 \sqrt{\lambda_0^2 - v_3^2} \right) \\ b_2(v_3) &= \frac{\mu_1(n+1)}{n+2} \left( \beta_2 v_3 - \beta_1 \sqrt{\lambda_0^2 - v_3^2} \right), \quad b_3(v_3) = \mu_1 \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$b_\zeta(v_3) = \frac{\mu_1(n+1)}{n+2} \sqrt{\lambda_0^2 - v_3^2}, \quad b_\eta(v_3) = \mu_1, \quad b_\xi(v_3) = \frac{\mu_1(n+1)}{n+2} \quad (3.12)$$

Подвижный и неподвижный годографы (3.9) и (3.10) – конгруэнтные плоские кривые; в алгебраической форме в силу (3.11) и (3.12) их координаты определяются уравнениями

$$\begin{aligned} b_1^2(v_3) + b_2^2(v_3) &= \frac{\mu_1^2 n}{n+2}, \quad b_\zeta(v_3) = \mu_1 \\ b_\zeta^2(v_3) + b_\eta^2(v_3) &= \frac{\mu_1^2 n}{n+2}, \quad b_\eta(v_3) = \mu_1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Таким образом, применение модифицированного метода [21] позволяет представить движение тела качением без скольжения двух конусов (3.13). В силу структуры (3.13) данный подход имеет несомненные преимущества перед прямым методом Пуансо, так как уравнения подвижного и неподвижного годографов (2.7) и (2.8) содержат одно алгебраическое уравнение, степень которого зависит от параметра  $n$ . Это обстоятельство существенно скажется на построении годографов. В отличие от этого свойства, годографы (3.13) векторов (3.9) и (3.10) для любых  $n$  являются плоскими кривыми (уравнение плоскости не зависит от  $n$ ) и только радиусы окружностей зависят от  $n$ .

Рассмотрим движение эллипсоида инерции в решении (1.11)–(1.13). Данная задача решается следующим образом. Рассмотрим уравнение эллипсоида инерции тела, используя равенства из (1.9):

$$(n+2)(x^2 + y^2) + z^2 = \sigma_0^2, \quad (3.14)$$

где  $x, y, z$  – координаты точек эллипсоида (3.14),  $\sigma_0$  – постоянная. Непосредственной подстановкой значений  $b_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) из (3.11) в уравнение (3.14) убеждаемся в том, что конец подвижного годографа вектора  $\mathbf{b}_\Pi$  из (3.9) принадлежит поверхности (3.14) при  $\sigma_0^2 = \mu_1^2(n+1)$ . То есть при обкатывании поверхностей с направляющими  $\mathbf{b}_\Pi, \mathbf{b}_H$  получим движение эллипсоида инерции. Остается выяснить свойство расположения эллипсоида инерции в неподвижном пространстве. Покажем, что эллипсоид инерции тела на кривой (3.11) касается неподвижной плоскости  $b_\eta(v_3) = \mu_1$ .

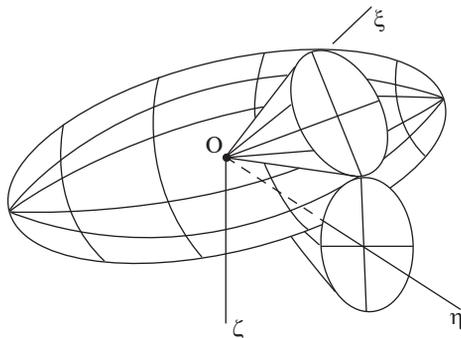


Рис. 1

Запишем уравнение (3.14) в переменных  $b_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ):

$$\Phi(b_1, b_2, b_3) = (n+2)(b_1^2 + b_2^2) + b_3^2 - \mu_1^2(n+1) = 0 \quad (3.15)$$

Запишем матрицу перехода от подвижной системы координат к неподвижной системе [13]:

$$L(\phi, \psi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi - \sin \phi \sin \psi \cos \theta & -\sin \phi \cos \psi - \cos \phi \sin \psi \cos \theta & \sin \psi \sin \theta \\ \cos \phi \sin \psi + \sin \phi \cos \psi \cos \theta & -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \cos \theta & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

где в силу (3.5)–(3.7) получаем

$$\begin{aligned} \cos \theta &= v_3, & \sin \theta &= \sqrt{1 - v_3^2}, & \sin \phi &= \frac{v_1(v_3)}{\sqrt{1 - v_3^2}}, & \cos \phi &= \frac{v_1(v_3)}{\sqrt{1 - v_3^2}} \\ \sin \psi &= \frac{\sqrt{\lambda_0^2 - v_3^2}}{\sqrt{1 - v_3^2}}, & \cos \psi &= -\frac{1}{(n+1)\sqrt{1 - v_3^2}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Вычислим градиент поверхности (3.15) на кривой  $\mathbf{b}_{\Pi}(v_3)$ :

$$\overline{\text{grad}} \Phi \Big|_{\mathbf{b}_{\Pi}(v_3)} = \frac{1}{v_3} [-\mu_1 n v_1 + \beta_1(n+2)\mu_2] \mathbf{i}_1 + \frac{1}{v_3} [-\mu_1 n v_2 + \beta_2(n+2)] \mathbf{i}_2 + \mu_1 \mathbf{i}_3 \quad (3.18)$$

Используя равенства (3.16)–(3.18), вычислим значение вектора (3.18) в неподвижной системе координат:

$$\overline{\text{grad}} \Phi \Big|_{\mathbf{b}_{\Pi}(v_3)} = \mu_1(n+1) \mathbf{e}_2 \quad (3.19)$$

Равенство (3.19) показывает, что при движении эллипсоида инерции в неподвижном пространстве он катается по плоскости  $b_{\eta}(v_3) = \mu_1$  по кривым (3.9), (3.10). Эскиз движения эллипсоида показан на рис. 1. Поскольку при  $t \rightarrow \infty$   $v_3 \rightarrow 0$ , а точка  $v_3 = 0$  исключена из рассмотрения, то по непрерывности можно сделать заключение, что при  $t \rightarrow \infty$  эллипсоид инерции в неподвижном пространстве стремится к состоянию покоя.

**Заключение.** Исследовано движение эллипсоида инерции тела в одном решении задачи о движении тела под действием потенциальных сил. Установлен определенный аналог истолкования Пуансо в решении Эйлера: движение тела представлено качением без скольжения эллипсоида инерции тела по неподвижной в пространстве плоско-

сти, которая является касательной плоскостью к эллипсоиду инерции. Доказано, что данное касание происходит на кривой неподвижного годографа вспомогательного вектора, коллинеарного вектору угловой скорости. На основе модифицированного метода Пуансо, предложенного автором данной статьи [21], движение тела можно представить посредством качения подвижного годографа вспомогательного вектора по неподвижному годографу этого вектора. Преимущество данного результата, по сравнению с результатом истолкования прямым методом, состоит в том, что направляющие линии соответствующих аксоидов являются окружностями одинакового радиуса, что означает свойство изоконичности движения тела.

Автору статьи известен только один аналогичный случай, установленный И.Н. Гашененко [45], в случае А. Брессана [46] для решения В. Гесса [47]. Однако, для этого варианта представления движения с помощью качения эллипсоида инерции по плоскости не выполняется свойство изоконичности движения гироскопа Гесса, так как кривая, по которой происходит качение эллипсоида, является трансцендентной кривой.

Статья посвящается памяти моего учителя Павла Васильевича Харламова.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зиглин С.Л. Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновых системах // Функциональный анализ и его приложения. 1983. Т. 17. № 1. С. 8–23.
2. Зиглин С.Л. Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела // Тр. Моск. матем. об-ва. 1980. Т. 41. С. 287–303.
3. Козлов В.В. О несуществовании аналитических интегралов канонических систем, близких к интегрируемым // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика и механика. 1974. № 2. С. 77–82.
4. Борисов А.В. Необходимые и достаточные условия интегрируемости уравнений Кирхгофа // Reg. & Chaot. Dyn. 1996. V. 1. № 2. P. 61–73.
5. Козлов В.В., Онищенко Д.А. Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 6. С. 1298–1300.
6. Сулов Г.К. Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
7. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наук. думка, 1978. 294 с.
8. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 384 с.
9. Горр Г.В., Мазнев А.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. Донецк: ДонНУ, 2010. 364 с.
10. Poincaré L. Théorie nouvelle de la rotation des corps // J. Math. Pures et Appl. 1851. Bd. 1. № 16. P. 289–336.
11. Euler L. Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable // Ibid. 1758, 1765. V. 14. P. 154–193.
12. Раус Э.Дж. Динамика системы твердых тел. М.: Наука, 1983. Т. 1. 464 с.; Т. 2. 544 с.
13. Магнус К. Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.
14. Домогаев А.С. О свободном движении гиростата. СПб., 1893. 175 с.
15. Харламов П.В. Лекции по динамике твердого тела. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1965. 221 с.
16. Жуковский Н.Е. О значении геометрического истолкования в теоретической механике // Собр. соч.: в 7 т. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. Т. 7. С. 9–15.
17. Жуковский Н.Е. Локсодромический маятник Гесса // Собр. соч.: в 7 т. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. Т. 1. С. 257–274.
18. Харламов П.В. Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 502–507.
19. Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М. Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наук. думка, 2012. 401 с.
20. Горр Г.В., Ковалев А.М. Движение гиростата. Киев: Наук. думка, 2013. 408 с.

21. Горр Г.В. Об одном подходе в применении теоремы Пуансо кинематического истолкования движения тела с неподвижной точкой // Механика твердого тела. 2012. Вып. 42. С. 26–36.
22. Горр Г.В., Щетинина Е.К. О движении тяжелого твердого тела в двух частных случаях решения С.В. Ковалевской // Нелинейная динамика. 2018. Т. 14. № 1. С. 123–138.
23. Горр Г.В., Синенко А.И. О кинематическом истолковании движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // ПММ. 2014. Т. 28. Вып. 3. С. 334–345.
24. Горр Г.В., Данилюк Д.А., Ткаченко Д.Н. О кинематическом истолковании движения тела в частном случае решения Д.Н. Горячева–С.А. Чаплыгина // Ж. Теор. Прикл. Мех. (ДонНУ). № 3–4 (60). 2017. С. 19–32.
25. Горр Г.В. О трех инвариантных соотношениях уравнений движения тела в потенциальном поле сил // ПММ. 2019. Т. 83. № 2. С. 202–214.
26. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. В 2-х т. Т. 2. Ч. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 555 с.
27. Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. 1974. Вып. 6. С. 15–24.
28. Горр Г.В. Инвариантные соотношения уравнений динамики твердого тела (теория, результаты, комментарии). М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2017. 424 с.
29. Галиуллин А.С. Обратные задачи динамики тяжелого твердого тела с одной закрепленной точкой // Диффер. уравн. 1972. Т. 8. № 8. С. 1357–1362.
30. Горячев Д.Н. Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела. Варшава: Тип. Варш. уч. округа, 1910. 62 с.
31. Горячев Д.Н. Новые случаи движения твердого тела вокруг неподвижной точки // Варшав. унив. изв. 1915, кн. 3. С. 1–11.
32. Yehia H.M. Transformations of mechanical systems with cyclic coordinates and new integrable problems // J. Phys. A: Math.-Con. 2001. V. 34. P. 11167–11183.
33. Yehia H.M. Kovalevskaya's integrable case: generalizations and related new results // Reg. Chaot. Dyn. 2003. V. 8. № 3. P. 337–348.
34. Комаров И.В., Кузнецов В.Б. Обобщенный гириостат Горячева–Чаплыгина в квантовой механике // Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. Зап. научн. сем. ЛОМИ АН СССР. 1987. Т. 9. С. 134–141.
35. Комаров И.В., Кузнецов В.Б. Квазиклассическое квантование волчка Ковалевской // Теор. и мат. физ. 1987. Т. 73. № 3. С. 335–347.
36. Горр Г.В., Илюхин А.А., Ковалев А.М., Савченко А.Я. Нелинейный анализ поведения механических систем. Киев: Наук. думка, 1984. 285 с.
37. Klein F., Sommerfeld A. Über die Theorie des Kreisels. N.Y.: Johnson Reprint Corp., 1965. 966 p.
38. Grioli G. Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. di Matem. pura ed Applic. 1947. S. 4. V. 24, f. 3–4. P. 271–281.
39. Стеклов В.А. Новое частное решение дифференциальных уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // Тр. отд-ния физ. наук Об-ва любителей естествознания. 1899. Т. 10. № 1. С. 1–3.
40. Fabbri R. Sopra una soluzione particolare delle equazioni del moto di un solido pesante ad un punto fisso // Atti. Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fis. Mat. e Nat. 1934. V. 19. № 6. P. 407–415, 495–502, 872–873.
41. Fabbri R. Sui coni di Poinsot in una particolare rotazione dei solidi pesanti // Atti. Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur. 1934. Ser. 6. V. 19. P. 872–873.
42. Харламова Е.И., Мозалевская Г.В. Интегрируемое дифференциальное уравнение динамики твердого тела. Киев: Наук. думка, 1986. 296 с.
43. Верховод Е.В., Горр Г.В. Прецессионно-изокоические движения твердого тела с неподвижной точкой // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 4. С. 31–39.
44. Верховод Е.В., Горр Г.В. Новые случаи изокоических движений в обобщенной задаче динамики твердого тела с неподвижной точкой // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 25–34.
45. Гашененко И.Н. Кинематическое представление по Пуансо движения тела в случае Гесса // Механика твердого тела. 2010. Вып. 40. С. 12–20.
46. Bressan A. Sulle precessioni d'un corpo rigido costituenti moti di Hess // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 1957. V. 27. P. 276–283.

47. *Hess W.* Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren schweren Körpers um einen festen Punkt // *Math. Ann.* 1890. B. 37. H. 2. S. 153–181.

**On One Analogue of Poinso't Interpretation of Euler Solution  
in the Problem of Rigid Body Motion in the Potential Force Field**

**G. V. Gorr<sup>a, #</sup>**

<sup>a</sup> *Department of Applied Mechanics at the Institute of Applied Mathematics and Mechanics,  
Donetsk, Ukraine*

<sup>#</sup> *e-mail: gvgorr@gmail.com*

The subject of investigation is the problem on motion of a rigid body with a fixed point under the action of potential forces. Existence conditions for three invariant relations of the equations of motion are obtained. Dependences of basic variables on time are found. Motion of the ellipsoid of inertia of the body is studied in the immovable space. A certain analogue of Poinso't interpretation of Euler solution is established, namely, the motion of the body is represented by the ellipsoid of inertia rolling without slip along a plane, fixed in the immovable space.

*Keywords:* rigid body, potential forces, ellipsoid of inertia, Poinso't interpretation of motion

REFERENCES

1. *Sieglin S.L.* Branching of solutions and non-existence of first integrals in Hamiltonian systems // *Funct. Anal. Its Appl.*, 1983, vol. 17, no. 1. pp. 8–23. (in Russian)
2. *Sieglin S.L.* The splitting of separatrices, branching of solutions and non-existence of an integral in rigid body dynamics // *Proc. Moscow mathematical society*, 1980, vol. 41, pp. 287–303. (in Russian)
3. *Kozlov V.V.* On the non-existence of analytic integrals of canonical systems close to integrable ones // *Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. & Mech.*, 1974, no. 2. pp. 77–82. (in Russian)
4. *Borisov A.V.* Necessary and sufficient conditions for integrability of Kirchhoff equations // *Reg. & Chaot. Dyn.*, 1996, vol. 1, no. 2. pp. 61–73. (in Russian)
5. *Kozlov V.V., Onishchenko D.A.* Nonintegrability of Kirchhoff's equations // *Sov. Math. Dokl.*, 1982, vol. 26, pp. 495–498.
6. *Suslov G.K.* *Theoretical Mechanics.* Moscow; Leningrad: State Sci. Techn. Publ. House, 1946. 655 p. (in Russian)
7. *Gorr G.V., Kudryashova L.V., Stepanova L.A.* *Classical problems of rigid body dynamics.* Kyiv: Naukova Dumka, 1978. 294 p. (in Russian)
8. *Borisov A.V., Mamaev I.S.* *Dynamics of a Rigid Body.* Moscow; Izhevsk: Regul. Chaot. Dyn., 2001. 384 p. (in Russian)
9. *Gorr G.V., Maznev A.V.* *Dynamics of a gyrostat having a fixed point.* Donetsk: Donetsk Nat. Univ., 2010. 364 p. (in Russian)
10. *Poinso't L.* Théorie nouvelle de la rotation des corps // *J. Math. Pures et Appl.*, 1851, bd. 1, no. 16, pp. 289–336.
11. *Euler L.* Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable // *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, Berlin, 1758–1765, vol. 14. pp. 154–193.
12. *Routh J.E.* *Dynamics of a System of rigid Bodies. Part II.* London: Macmillan, 1884. 365 p.
13. *Magnus K. Kreisel.* *Theorie und Anwendungen.* Berlin; Heidelberg: Springer, 1971. 494 p.
14. *Domogarov A.S.* On the Free Motion of a Gyrostat. St. Petersburg, 1893. 175 p. (in Russian)
15. *Kharlamov P.V.* *Lectures on the Dynamics of a Rigid Body.* Novosibirsk: Novosibirsk State Univ., 1965. 221 p. (in Russian)
16. *Zhukovsky N.E.* On the meaning of geometric interpretation in theoretical mechanics // *Collected works in 7 volumes.* Moscow; Leningrad: State Sci. Techn. Publ. House, 1950, vol. 7, pp. 9–15. (in Russian)

17. *Zhukovsky N.E.* Hess's loxodromic pendulum // Collected works in 7 volumes. Moscow; Leningrad: State Sci. Techn. Publ. House, 1948. vol. 1, pp. 257–274. (in Russian)
18. *Kharlamov P.V.* Kinematic interpretation of the motion of a body having a fixed point // JAMM, 1964, vol. 28, iss. 3, pp. 615–621.
19. *Gasheneko I.N., Gorr G.V., Kovalev A.M.* Classical Problems of the Rigid Body Dynamics. Kyiv: Naukova Dumka, 2012. 401 p. (in Russian)
20. *Gorr G.V., Kovalev A.M.* Motion of a Gyrostat. Kyiv: Naukova Dumka, 2013. 408 p. (in Russian)
21. *Gorr G.V.* On one approach in the application of the Poincot theorem of the kinematic interpretation of the motion of a body with a fixed point // Mech. Rigid Body, 2012, iss. 42, pp. 26–36. (in Russian)
22. *Gorr G.V., Shechetinina E.K.* On the motion of a heavy rigid body in two particular cases of S.V. Kovalevskaya's solution // Rus. J. Nonlin. Dyn., Izhevsk, 2018, vol. 14, no. 1, pp. 123–138. (in Russian)
23. *Gorr G.V., Sinenko A.I.* A Kinematic interpretation of the motion of a heavy rigid body with a fixed point // JAMM, 2014, no. 3, pp. 233–241.
24. *Gorr G.V., Danilyuk D.A., Tkachenko D.N.* On kinematic interpretation of motion of a body in a particular case of D.N. Goryachev–S.A. Chaplygin solution // J. Theor. Appl. Mech. (Donetsk Nat. Univ.), 2017, no. 3–4 (60), pp. 19–32. (in Russian)
25. *Gorr G.V.* On three invariant relations of three equations of motion of a body in a potential field of force // Mech. Solids, 2019, vol. 54, no. 2, pp. 234–244.
26. *Levi-Civita T., Amaldi U.* Lezioni di Meccanica Razionale. In 2 vol. / Nuova Ed., Bologna: Zanichelli, 1952, vol. 2, parte 2.
27. *Kharlamov P.V.* On invariant relations of a system of differential equations // Mechanics of Rigid Body, 1974, iss. 6, pp. 15–24. (in Russian)
28. *Gorr G.V.* Invariant Relations of Equations of the Rigid Body Dynamics (Theory, Results, Comments). Moscow; Izhevsk: Inst. Comput. Res., 2017. 424 p. (in Russian)
29. *Galiullin A.S.* Inverse problems of dynamics of a heavy rigid body with one fixed point // Differ. Equat., 1972, vol. 8, no. 8, pp. 1357–1362. (in Russian)
30. *Goryachev D.N.* Some General Integrals in the Problem of Motion of a Rigid Body. Warsaw: Print. House of the Warsaw School Distr., 1910. 62 p. (in Russian)
31. *Goryachev D.N.* New cases of motion of a rigid body around a fixed point // Proc. Warsaw Univ., 1915, vol. 3, pp. 1–11. (in Russian)
32. *Yehia H.M.* Transformations of mechanical systems with cyclic coordinates and new integrable problems // J. Phys. A. Math. Gen., 2001, vol. 34, pp. 11167–11183.
33. *Yehia H.M.* Kovalevskaya integrable case: generalizations and related new results // Regul. Chaot. Dyn., 2003, vol. 8, no. 3, pp. 337–348.
34. *Komarov I.V., Kuznetsov V.B.* Generalized Goryachev–Chaplygin gyrostat in the quantum mechanics // Differential geometry, Lie groups and mechanics. Notes of the scientific seminar in the Leningrad branch of Steklov mathematical Institute of the USSR Academy of Sciences, 1987, vol. 9, pp. 134–141. (in Russian)
35. *Komarov I.V., Kuznetsov V.B.* Quasiclassical quantization of the Kovalevskaya top // Theor. Math. Phys., 1987, vol. 73, no. 3, pp. 335–347. (in Russian)
36. *Gorr G.V., Ilyukhin A.A., Kovalev A.M., Savchenko A.Y.* Nonlinear Analysis of Behavior of Mechanical Systems. Kyiv: Naukova Dumka, 1984. 285 p. (in Russian)
37. *Klein F., Sommerfeld A.* Über die Theorie des Kreisels. N.Y.: Johnson Reprint Corp., 1965. 966 p.
38. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. di matem. pura ed appl., 1947, ser. 4, vol. 24, fasc. 3–4, pp. 271–281.
39. *Steklov V.A.* New partial solution of differential equations of motion of a rigid body having a fixed point // Proc. Depart. Phys. Sci. Soc. Natur. Hist. Lovers, 1899, vol. 10, no. 1, pp. 1–3. (in Russian)
40. *Fabbri R.* Sopra una soluzione particolare delle equazioni del moto di un solido pesante ad un punto fisso // Rend. Acc. Naz. dei Lincei, 1934, ser. 6, vol. 19, pp. 407–415.
41. *Fabbri R.* Sui coni di Poincot in una particolare rotazione dei solidi pesanti // Rend. Acc. Naz. dei Lincei, 1934, ser. 6, vol. 19, pp. 872–873.

- 
42. *Kharlamova E.I., Mozalevskaya G.V.* Integro-differential equation of rigid body dynamics. Kyiv: Scientific thought, 1986. 296 p. (in Russian)
  43. *Verkhovod E.V., Gorr G.V.* Precession-isoconic motions of a rigid body with a fixed point // JАММ, 1993, vol. 57, iss. 4, pp. 613–622.
  44. *Verkhovod E.V., Gorr G.V.* New cases of isoconic motions in the generalized problem of dynamics of a rigid body with a fixed point // JАММ, 1993, vol. 57, iss. 5, pp. 783–792.
  45. *Gashenko I.N.* Kinematic representation by Poincot of the body motion in the Hess case // Mech. Rigid Body, 2010, iss. 40, pp. 2–20. (in Russian)
  46. *Bressan A.* Sulle precessini d'un corpo rigido costituenti moti di Hess // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, 1957, vol. 27, pp. 276–283.
  47. *Hess W.* Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren schweren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann., 1890. B. 37. H. 2. S. 153–181.

---

---

УДК 531.36, 531.352

## ОБ ЭВОЛЮЦИИ ДВИЖЕНИЙ СПУТНИКА-БАЛЛОНА В ПЛОСКОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАНЕТНОЙ ЗАДАЧЕ ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ С УЧЕТОМ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ

© 2020 г. А. В. Доброславский<sup>1,\*</sup>, П. С. Красильников<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup> *Московский авиационный институт, Москва, Россия*

\* *e-mail: a.dobroslavskiy@gmail.com*

\*\* *e-mail: krasil06@rambler.ru*

Поступила в редакцию 14.06.2019 г.

После доработки 20.10.2019 г.

Принята к публикации 30.10.2019 г.

Рассмотрена плоская ограниченная задача четырех тел с учетом сил светового давления, когда орбита Земли – кеплеровский эллипс с фокусом в Солнце, орбита Луны – кеплеровский эллипс с фокусом в Земле, спутник-баллон – пассивно гравитирующее тело. Получена усредненная силовая функция задачи в оскулирующих элементах в нерезонансном случае, когда невозмущенная орбита спутника Земли принадлежит внешней сфере гравитационного влияния Земли, расположенной за лунной сферой Хилла. Показано, что интегралами усредненных уравнений в оскулирующих элементах являются большая полуось орбиты спутника и среднее значение силовой функции. Исследованы стационарные режимы колебаний, их бифуркация в зависимости от коэффициента светового давления и большой полуоси невозмущенной орбиты спутника. Построены фазовые портреты колебаний при разных значениях коэффициента светового давления. Проведены расчеты либрационных и ротационных движений спутника в плоскости эклиптики.

*Ключевые слова:* ограниченная планетная задача четырех тел, световое давление, усредненные уравнения в оскулирующих элементах

DOI: 10.31857/S0032823520010063

Впервые фактор светового давления в ограниченной задаче трех тел был исследован в работе Радзиевского [1], в которой рассмотрен фотогравитационный случай, полученный введением коэффициента редукации. Практический интерес к проблеме появился в связи с исследованием движения спутника Vanguard 1, деградация орбиты которого не соответствовала расчетным значениям. Объяснение этому было дано в работах Мюзена [2] и Паркинсона [3] – было учтено влияние сил светового давления на спутник в первом приближении классической теории возмущений. Расчет орбит спутников-баллонов Echo 1, Echo 2 и PAGEOS, обладавших большим отношением миделева сечения к массе, потребовал учитывать заход спутника в земную тень. В работе Козаи [4] это было учтено решением уравнения тени. Интересной находкой стало введение теневой функции в работе Феррас-Мелло [5], что позволило использовать уравнения теории возмущений. В дальнейшем, в работах Вашковьяк [6, 7] функция тени была представлена в виде ряда по полиномам Лежандра и выражена через элементы орбиты спутника, в результате чего были получены вековые и долгопериодические возмущения элементов орбиты под влиянием солнечного давления и сжатия Земли у полюсов. В монографии Аксенова [8] исследовано влияние светового давле-

ния и земной тени на эволюцию кеплеровских элементов орбиты в первом приближении метода малого параметра. В работе Кривога и др. [9] возмущения от сил светового давления, наряду с возмущениями от зональных гармоник, используются в решении задачи о движении космического мусора. Эта же задача, но дополненная возмущениями от электромагнитных сил, рассматривается в работе Гамильтона и Кривога [10].

Брайант [11], используя идеи метода усреднения, описал явное изменение большой полуоси орбиты за период обращения спутника по орбите с учетом эффекта тени. Он показал также, что при отсутствии тени большая полуось орбиты спутника сохраняет свое невозмущенное значение. Было получено решение плоской ограниченной эллиптической задачи трех тел методом двойного усреднения без учета сил светового давления [12, 13]: показано, что усредненные уравнения движения допускают два первых интеграла, исследованы траектории движения спутника, в частности траектории падения спутника на центральное тело. Исследованы периодические орбиты пассивно гравитирующей точки в фотогравитационной прямолинейной ограниченной задаче четырех тел [14, 15]. Изучены положения относительного равновесия пассивно гравитирующей точки в поле притяжения трех массивных материальных точек, находящихся в вершинах треугольника Лагранжа, при условии, что одно из тел является источником излучения [16]. Рассмотрены движения спутника под воздействием уже трех излучающих тел, находящихся в вершинах равностороннего треугольника [17]. Методом двойного усреднения решалась ограниченная задача четырех тел [18], в частности использовалась техника, впервые примененная Гауссом, следуя которой Луна представляется материальным кольцом, при этом были рассмотрены как орбиты спутника, находящиеся внутри лунной орбиты, так и вовне. Заметим также, что метод усреднения эффективно используется и в задачах о вращательных движениях спутников на неэволюционирующих орбитах. Из всего множества работ на эту тему укажем лишь некоторые — [19–23].

Цель статьи — исследовать эволюционные эффекты в движении спутника-баллона в ограниченной задаче четырех тел с учетом сил светового давления. Анализ движений проводится на асимптотически больших интервалах времени на основе тройного усреднения оскулирующих уравнений движения, записанных в кеплеровских элементах орбиты, при этом эффект тени учитываться не будет. Такая постановка задачи вполне оправдана для системы Земля—Луна—Солнце—спутник, когда невозмущенная орбита спутника — кеплеровский эллипс с фокусом в Земле. В этом случае эффектом тени можно пренебречь, так как время нахождения спутника в зоне земной тени мало.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим движение спутника-баллона большой парусности на асимптотически больших промежутках времени, когда орбиты спутника находятся во внешней сфере гравитационного влияния Земли, расположенной за лунной сферой Хилла.

Поскольку орбита Луны составляет малый угол с плоскостью эклиптики, будем считать, что все тела движутся в одной плоскости (рис. 1). Введем декартову неинерциальную систему координат, с центром в  $P_0$  (Земле) и осью  $P_0x$ , направленной в перигелий орбиты Солнца, при этом тело  $P_1$  массы  $m_1$  (Солнце) обращается вокруг тела  $P_0$  по эллиптической орбите с заданными большой полуосью  $a_1$  и эксцентриситетом  $e_1$ . Тело  $P_2$  массы  $m_2$  (Луна), также движется по эллиптической орбите вокруг  $P_0$  с заданной большой полуосью  $a_2$ , эксцентриситетом  $e_2$  и аргументом перигелия  $\omega_2$ . Считаем также, что невозмущенная орбита пассивно-гравитирующего тела  $P$  (спутника-баллона) есть кеплеровский эллипс с фокусом в точке  $P_0$ , большой полуосью  $a$  и эксцентриситетом  $e$ . На спутник действуют гравитационные силы со стороны массивных тел  $P_0$ ,  $P_1$  (вектор  $\vec{\Delta}_1$ ) и  $P_2$  (вектор  $\vec{\Delta}_2$ ). Помимо этого, будем учитывать силу светового давления  $\vec{F}$  со стороны тела  $P_1$ , считая, что спутник имеет значительную площадь ми-

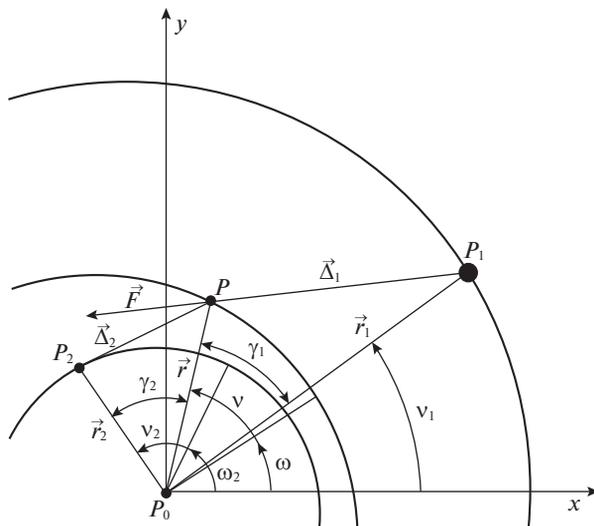


Рис. 1. Постановка задачи.

делева сечения при небольшой массе. Будем считать также, что большая полуось орбиты спутника существенно превосходит радиус лунной орбиты ( $a \approx 6.15 \times 10^{-3}$  а.е.). В этом случае можно пренебречь эффектом земной тени, так как, согласно проведенным расчетам, конус земной тени начинает влиять на орбиту спутника при эксцентриситете  $e < 0.38$ , а в предельном случае  $e = 0$  пребывание в тени составляет менее 0.12% периода обращения.

Отметим, что в силу постановки задачи траектории возмущающих тел  $P_1$ ,  $P_2$  рассматриваются как кеплеровские эллипсы. Такое допущение вполне оправдано, так как спутник находится на значительном удалении как от  $P_1$ , так и от  $P_2$ , поэтому возмущения в кеплеровских элементах орбит этих тел дают пренебрежимо малый вклад в силовую функцию задачи.

Пусть  $\gamma_1$  – угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{r}_1$ , имеющий выражение через параметры орбитального движения:

$$\gamma_1 = v + \omega - v_1 \quad (1.1)$$

Здесь  $v$ ,  $\omega$  – соответственно, истинная аномалия и аргумент перицентра тела  $P$ , а  $v_1$  – истинная аномалия орбиты тела  $P_1$ . Обозначим  $\gamma_2$  угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{r}_2$ , тогда

$$\gamma_2 = v_2 + \omega_2 - v - \omega, \quad (1.2)$$

где  $v_2$ ,  $\omega_2$  – истинная аномалия и аргумент перицентра тела  $P_2$ .

**2. Возмущающая функция.** Выражение для возмущающей силовой функции представим в виде:

$$R = R_1 + R_\lambda + R_2 \quad (2.1)$$

Здесь  $R_1$  – силовая функция гравитационного возмущения от Солнца, имеющая вид

$$R_1 = \frac{fm_1}{r_1} \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{r}{r_1} \right)^k P_k(\cos \gamma_1)$$

$f$  – гравитационная постоянная,  $P_k$  – полиномы Лежандра.

$R_\lambda$  – возмущенная функция светового давления на спутник:

$$R_\lambda = -\delta \left( \frac{r_0^2}{r_1^2} r \cos \gamma_1 + \frac{r_0^2}{r_1} \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{r}{r_1} \right)^k P_k(\cos \gamma_1) \right),$$

где  $r_0$  – среднее расстояние от Земли до Солнца,  $\delta$  – коэффициент светового давления на сферический спутник:

$$\delta = \frac{\kappa \pi \rho^2 E_0}{mc} \quad (2.2)$$

Здесь  $\rho$  – радиус спутника,  $m$  – его масса,  $\kappa$  – коэффициент поверхности спутника, равный 1 для полного поглощения/отражения света, и 1.44 для диффузного рассеивания,  $E_0$  – солнечная постоянная, определенная как мощность светового потока на поверхности Земли без учета поглощения в атмосфере (приблизительно 1367 Вт/м<sup>2</sup>),  $c$  – скорость света в вакууме.

Далее,  $R_2$  – силовая функция гравитационного возмущения со стороны тела  $P_2$  (Луны), которая, для случая внешней сферы гравитационного влияния Земли, находящейся за сферой Хилла Луны, имеет вид [24]:

$$R_2 = fm_2 \left( \frac{1}{r} + \frac{r_2^3 - r^3}{r^2 r_2^2} \cos \gamma_2 + \frac{1}{r} \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{r_2}{r} \right)^k P_k(\cos \gamma_2) \right)$$

Здесь  $r_2 < r$ ,  $3 \times 10^{-3} < r < 6.21 \times 10^{-3}$  а.е.

**3. Усредненная возмущающая функция.** Быстрыми переменными задачи являются средняя аномалия  $M$  невозмущенного движения спутника, а также средние аномалии  $M_1$ ,  $M_2$  тел  $P_1$ ,  $P_2$ . Всюду ниже предполагаем, что отсутствуют резонансы между частотами средних аномалий.

Возмущающую функцию (2.1) усредним по  $M$ , полагая  $r_2 < r$ :

$$R^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R_1 + R_\lambda + R_2) dM, \quad dM = \frac{r^2}{a^2 \sqrt{1-e^2}} dv$$

Здесь  $a$  и  $e$  – большая полуось и эксцентриситет невозмущенной орбиты тела  $P$ . Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} R^* = & \frac{3r_0^2}{2r_1^2} \delta e a \cos(\omega - v_1) + \frac{fm_1 - \delta r_0^2}{r_1} \sum_{k=2}^{\infty} r_1^{-k} R_{k+2,k}^*(v_1 - \omega) + \\ & + fm_2 \left( \frac{1}{a} + \frac{3}{2} e a \cos(v_2 + \omega_2 - \omega) + \sum_{k=2}^{\infty} r_2^k R_{1-k,k}^*(v_2 + \omega_2 - \omega) \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} R_{m,k}^*(\xi) = & \frac{a^m (1+e)^m}{a^2 \sqrt{1-e^2}} \left( F_{2,1} \left( \frac{1}{2}, m; 1; \frac{2e}{e-1} \right) (P_k^{(0)}(0))^2 + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{i=1}^k \frac{(k-i)!}{(k+i)!} (P_k^{(i)}(0))^2 F_{3,2}^{reg} \left( \frac{1}{2}, 1, m; 1-i, 1+i; \frac{2e}{e-1} \right) \cos i\xi \right) \end{aligned}$$

$P_k^{(i)}(0)$  – присоединенные функции Лежандра в нуле [25]:

$$P_k^{(i)}(0) = \begin{cases} (-1)^{(k-i)/2} \frac{(k+i)!}{2^k \left(\frac{k-i}{2}\right)! \left(\frac{k+i}{2}\right)!}, & k-i = 2m, \quad m \in \mathbb{Z} \\ 0, & k-i = 2m+1, \quad m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$F_{2,1}$  – гипергеометрическая функция,  $F_{3,2}^{\text{reg}}$  – регуляризованная гипергеометрическая функция, имеющая вид

$$F_{3,2}^{\text{reg}}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n (\alpha_3)_n}{\Gamma(\beta_1 + n) \Gamma(\beta_2 + n) n!} z^n,$$

$\Gamma$  – гамма-функция,  $(x)_n$  – символ Похгаммера:

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}$$

Усредняя (3.1) по  $M_1$ , получим

$$R^{**} = (fm_1 - \delta r_0^2) \sum_{k=2}^{\infty} R_{1-k, k+2, k}^{**}(\omega) + fm_2 \left( \frac{1}{a} + \frac{3}{2} ea \cos(v_2 + \omega_2 - \omega) + \sum_{k=2}^{\infty} r_2^k R_{1-k, k}^*(v_2 + \omega_2 - \omega) \right), \quad (3.2)$$

где

$$R_{s, m, k}^{**}(\eta) = \frac{a_1^s (1+e_1)^s a^m (1+e)^m}{a_1^2 \sqrt{1-e_1^2} a^2 \sqrt{1-e^2}} \left( F_{2,1} \left( \frac{1}{2}, s; 1; \frac{2e_1}{e_1-1} \right) F_{2,1} \left( \frac{1}{2}, m; 1; \frac{2e}{e-1} \right) (P_k^{(0)}(0))^2 + \right. \\ \left. + 2 \sum_{i=1}^k \frac{(k-i)!}{(k+i)!} F_{3,2}^{\text{reg}} \left( \frac{1}{2}, 1, s; 1-i, 1+i; \frac{2e_1}{e_1-1} \right) \times \right. \\ \left. \times F_{3,2}^{\text{reg}} \left( \frac{1}{2}, 1, m; 1-i, 1+i; \frac{2e}{e-1} \right) (P_k^{(i)}(0))^2 \cos i\eta \right) \quad (3.3)$$

Усредним  $R^{**}$  по  $M_2$ . Учитывая, что  $M_2$  входит (через  $v_2$ ) только в последние два члена формулы (3.2), получим

$$R^{***} = (fm_1 - \delta r_0^2) \sum_{k=2}^{\infty} R_{1-k, k+2, k}^{**}(\omega) + fm_2 \left( \frac{1}{a} - \frac{3}{2} ee_2 a \cos(\omega - \omega_2) + \sum_{k=2}^{\infty} R_{k+2, 1-k, k}^{***}(\omega - \omega_2) \right), \quad (3.4)$$

где  $R_{1-k, k+2, k}^{**}(\omega)$  вычисляется по формуле (3.3), а  $R_{k+2, 1-k, k}^{***}(\omega - \omega_2)$  по формуле (3.5), представленной ниже:

$$R_{t, m, k}^{***}(\zeta) = \frac{a_2^t (1+e_2)^t a^m (1+e)^m}{a_2^2 \sqrt{1-e_2^2} a^2 \sqrt{1-e^2}} \left( F_{2,1} \left( \frac{1}{2}, t; 1; \frac{2e_2}{e_2-1} \right) F_{2,1} \left( \frac{1}{2}, m; 1; \frac{2e}{e-1} \right) (P_k^{(0)}(0))^2 + \right. \\ \left. + 2 \sum_{i=1}^k \frac{(k-i)!}{(k+i)!} F_{3,2}^{\text{reg}} \left( \frac{1}{2}, 1, t; 1-i, 1+i; \frac{2e_2}{e_2-1} \right) \times \right. \\ \left. \times F_{3,2}^{\text{reg}} \left( \frac{1}{2}, 1, m; 1-i, 1+i; \frac{2e}{e-1} \right) (P_k^{(i)}(0))^2 \cos i\zeta \right) \quad (3.5)$$

**4. Первые интегралы уравнений движения.** В случае плоского движения с учетом того, что функция  $R^{***}$  не зависит от средней аномалии  $M$ , усредненные оскулирующие уравнения Лагранжа имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 0 \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2} \frac{\partial R^{***}}{\partial \omega} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2} \frac{\partial R^{***}}{\partial e} \\ \frac{dM}{dt} &= n - \frac{1-e^2}{ena^2} \frac{\partial R^{***}}{\partial e} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь  $n$  – среднее движение тела  $P$ . Уравнения по  $e$ ,  $\omega$  имеют канонический вид с автономной функцией Гамильтона  $R^{***}$ , поэтому система допускает два первых интеграла:

$$a = \text{const}, \quad R^{***}(e, \omega) = \text{const}$$

**5. Качественный анализ.** Для проведения качественного анализа рассмотрим усеченный ряд (3.4), в котором ограничимся первыми тремя членами, взятыми для гравитационного возмущения со стороны Солнца ( $r/r_1 \ll 1$ ) и со стороны Луны ( $r_2/r \ll 1$ ). Тогда, после преобразований, получим следующее выражение для усеченной силовой функции:

$$\begin{aligned} R^{(3,3)} &= (fm_1 - \delta r_0^2) \left( \frac{a^2(3e^2 + 2)}{8a^3(1-e_1^2)^{3/2}} - \frac{15e_1a^3(3e^3 + 4e)}{64a_1^4(1-e_1^2)^{5/2}} \cos \omega \right) + \\ &+ fm_2 \left( \frac{1}{a} + \frac{a_2^2(3e_2^2 + 2)}{8a^3(1-e^2)^{3/2}} - 3ee_2 \left( \frac{a}{2} + \frac{5a_2^3(3e_2^2 + 4)}{64a^4(1-e^2)^{5/2}} \right) \cos(\omega - \omega_2) \right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Найдем стационарные точки уравнений (4.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^{(3,3)}}{\partial e} &= (fm_1 - \delta r_0^2) \left( \frac{3ea^2}{4a_1^3(1-e_1^2)^{3/2}} - \frac{15e_1a^3(9e^2 + 4)}{64a_1^4(1-e_1^2)^{5/2}} \cos \omega \right) + \\ &+ fm_2 \left( \frac{3ea_2^2(3e_2^2 + 2)}{8a^3(1-e^2)^{5/2}} - 3e_2 \left( \frac{5a_2^3(4e^2 + 1)(3e_2^2 + 4)}{64a^4(1-e^2)^{7/2}} + \frac{a}{2} \right) \cos(\omega - \omega_2) \right) = 0 \\ \frac{\partial R^{(3,3)}}{\partial \omega} &= (fm_1 - \delta r_0^2) \frac{15e_1a^3(3e^3 + 4e)}{64a_1^4(1-e_1^2)^{5/2}} \sin \omega + \\ &+ 3fm_2ee_2 \left( \frac{5a_2^3(3e_2^2 + 4)}{64a^4(1-e^2)^{5/2}} + \frac{a}{2} \right) \sin(\omega - \omega_2) = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Одним из решений второго уравнения в системе (5.2) является  $e = 0$ . Более того, из системы уравнений (4.1) следует, что одномерное многообразие  $e = 0$  является инте-

гральным, при этом  $\omega$  – его локальная координата ( $\omega$  теряет физический смысл как угол, задающий положение перигея оскулирующего эллипса в плоскости  $P_0xy$ ).

Подставив  $e = 0$  в первое уравнение системы (5.2), получим выражение для нахождения  $\omega$ :

$$\frac{5e_1a^2(fm_1 - \delta r_0^2)}{8a_1^4(1 - e_1^2)^{5/2}} \cos \omega - fm_2e_2 \left( \frac{5a_2^3(3e_2^2 + 4)}{32a^5} + 1 \right) \cos(\omega - \omega_2) = 0$$

Отсюда находим значения стационарных точек  $\omega = \omega_*$  на интервале  $[0, 2\pi)$ :  $\omega_* = \{\pi/2, 3\pi/2\}$  при  $\omega_2 = \{0, \pi\}$  и, если аргумент перицентра орбиты Луны отличен от  $\pi m$ , имеем два значения  $\omega_*$ , как функции параметров задачи (их явные выражения опускаем). Одна из стационарных точек устойчива, вторая неустойчива на многообразии  $e = 0$ . Нестационарный режим  $(0, \omega(t))$  описывает асимптотическое стремление к устойчивой точке.

Таким образом, круговая невозмущенная орбита спутника-баллона сохраняет свою форму под действием возмущений от Солнца, Луны и светового давления, но при этом угловая скорость движения спутника по орбите меняется на малую величину  $\dot{\omega}$ , зависящую от времени и параметров возмущений. Влияние Луны проявляет себя в том, что возмущения  $\omega(t)$  в полярном угле  $\nu + \omega$  радиус-вектора спутника имеют предельный режим  $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \omega_*$ , отличный от  $\pi/2, 3\pi/2$  при  $\omega_2 \neq \pi m$ .

Для исследования движений спутника при значениях  $e \neq 0$  заметим, что система (5.2) линейна относительно  $\sin \omega$  и  $\cos \omega$ . Из второго уравнения и тождества  $\cos^2 \omega + \sin^2 \omega = 1$  выразим  $\sin \omega$  и  $\cos \omega$ :

$$\sin \omega = \pm \frac{M(e, a) \sin \omega_2}{Q(e, a, \delta, \omega_2)}, \quad \cos \omega = \pm \frac{M(e, a) \cos \omega_2 + S(e, a, \delta)}{Q(e, a, \delta, \omega_2)}, \quad (5.3)$$

где знаки перед выражением следует брать согласованно. Здесь

$$S(e, a, \delta) = \frac{5e_1a^3(3e^2 + 4)}{16a_1^4(1 - e_1^2)^{5/2}}(fm_1 - \delta r_0^2), \quad M(e, a) = fm_2e_2 \left( \frac{5a_2^3(3e_2^2 + 4)}{16a^4(1 - e^2)^{5/2}} + 2a \right)$$

$$Q(e, a, \delta, \omega_2) = \sqrt{M^2(e, a) + S^2(e, a, \delta) + 2M(e, a)S(e, a, \delta) \cos \omega_2}$$

Подставив (5.3) в первое уравнение системы (5.2), исключим  $\omega$ , получив уравнение относительно эксцентриситета  $e$ :

$$\begin{aligned} & \frac{a^2(fm_1 - \delta r_0^2)}{a_1^3(1 - e_1^2)^{3/2}} \left( e \mp \frac{5ae_1(9e^2 + 4)}{16a_1(1 - e_1^2)} \left( \frac{M(e, a) \cos \omega_2 + S(e, a, \delta)}{Q(e, a, \delta, \omega_2)} \right) \right) + \\ & + fm_2 \left( \frac{a_2^2e(3e_2^2 + 2)}{2a^3(1 - e^2)^{5/2}} \mp e_2 \left( \frac{5a_2^3(4e^2 + 1)(3e_2^2 + 4)}{16a^4(1 - e^2)^{7/2}} + 2a \right) \left( \frac{M(e, a) + S(e, a, \delta) \cos \omega_2}{Q(e, a, \delta, \omega_2)} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Уравнение (5.4) исследуем численно для системы Земля–Луна–Солнце:  $a = 2.67 \times 10^{-3}$  а.е.,  $a_1 = 1$  а.е.,  $a_2 = 2.57 \times 10^{-3}$  а.е.,  $e_1 = 0.01671123$ ,  $e_2 = 0.0549$ ,  $\omega_2 = 0$ , рассматривая  $\delta$  как независимый параметр. На рис. 2 изображены кривые равновесий в координатах  $(\delta, e)$ , где непрерывной линией отмечены устойчивые, а штриховой – неустойчивые положения равновесия. На левой ветви кривой равновесия, соответству-

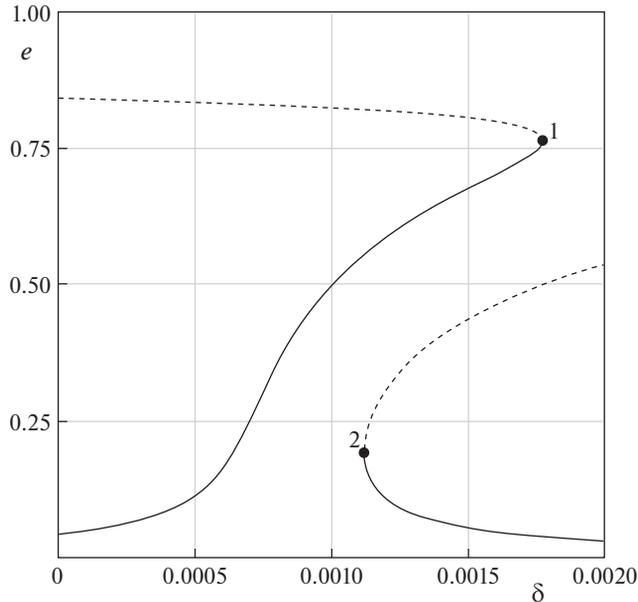


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма  $e(\delta)$ .

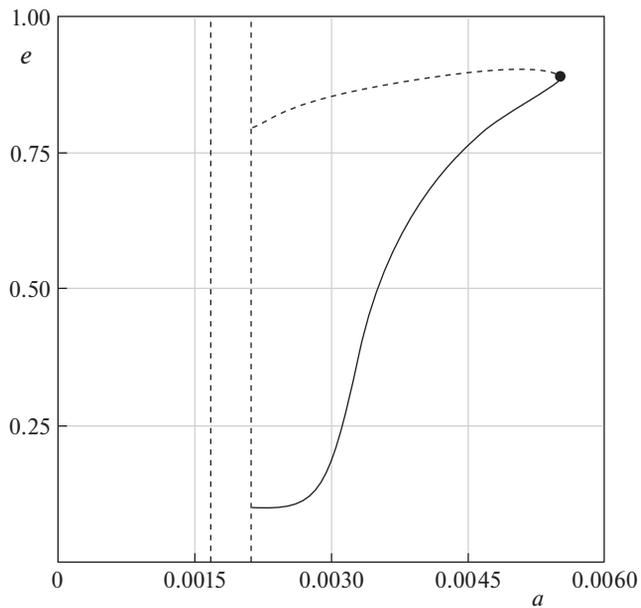
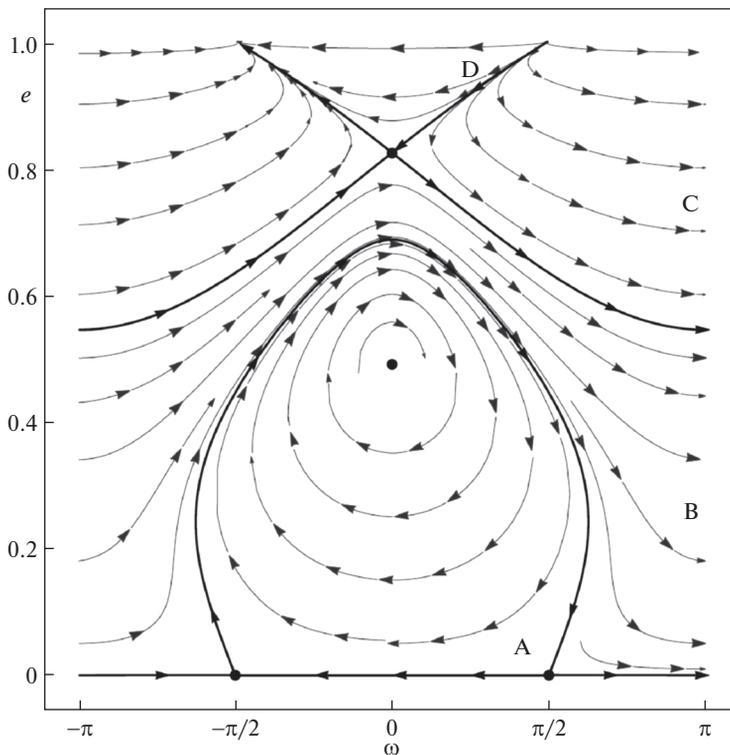
ющей знаку минус в уравнении (5.4), отмечена точка бифуркации (1) с координатами  $(\delta_*^{(1)}, e_*^{(1)}) = (1.77 \times 10^{-3}, 0.762)$ . На правой ветви расположена точка бифуркации (2) с координатами  $(\delta_*^{(2)}, e_*^{(2)}) = (1.12 \times 10^{-3}, 0.192)$ , соответствующей плюсу в уравнении (5.4).

Исследуем также уравнение (5.4) при фиксированном  $\delta = 5 \times 10^{-4}$ , рассматривая  $a$  как независимый параметр. На рис. 3 представлена кривая равновесия в координатах  $(a, e)$ , где непрерывной линией отмечены устойчивые, а штриховой — неустойчивые положения равновесия. Вертикальными штриховыми линиями на рисунке отмечена лунная сфера Хилла. Точка бифуркации имеет координаты  $(a_*, e_*) = (5.52 \times 10^{-3}, 0.887)$ .

Построим фазовые портреты колебаний по  $(\omega, e)$ , используя прежние значения параметров. На рис. 4 представлен фазовый портрет при  $\delta = 1 \cdot 10^{-3}$  (случай  $\delta < \delta_*^{(2)}$ ). Здесь видим область ограниченных колебаний  $A$  с гетероклиническими границами. Фазовые кривые внутри области  $B$  охватывают цилиндр  $S^1 \times R^1 = [0, 1) \times [-\pi, \pi)$ , сохраняя значение  $e < 1$ , тогда как в областях  $C$  и  $D$  они покидают область  $e < 1$ . Заметим, что ряды для усредненной силовой функции задачи расходятся при  $e = 1$ , поэтому достоверность расчетов в окрестности  $e = 1$  низкая.

При бифуркационном значении  $\delta = \delta_*^{(2)}$  появляется дополнительная неустойчивая стационарная точка возвратного типа, принадлежащая гомоклинической кривой, охватывающей цилиндр (рис. 5).

Наиболее интересная картина колебаний отвечает случаю  $\delta \in (\delta_*^{(2)}, \delta_*^{(1)})$ , приведенному на рис. 6 (фазовый портрет построен при  $\delta = 1.5 \times 10^{-3}$ ). Здесь имеем четыре стационарные точки, а фазовый портрет состоит из областей либрационных движений  $A$  и  $D$  в окрестности устойчивых равновесий, области ротационных колебаний  $B$  и обла-

Рис. 3. Бифуркационная диаграмма  $e(a)$ .Рис. 4. Фазовый портрет при  $\delta = 1 \times 10^{-3}$ .

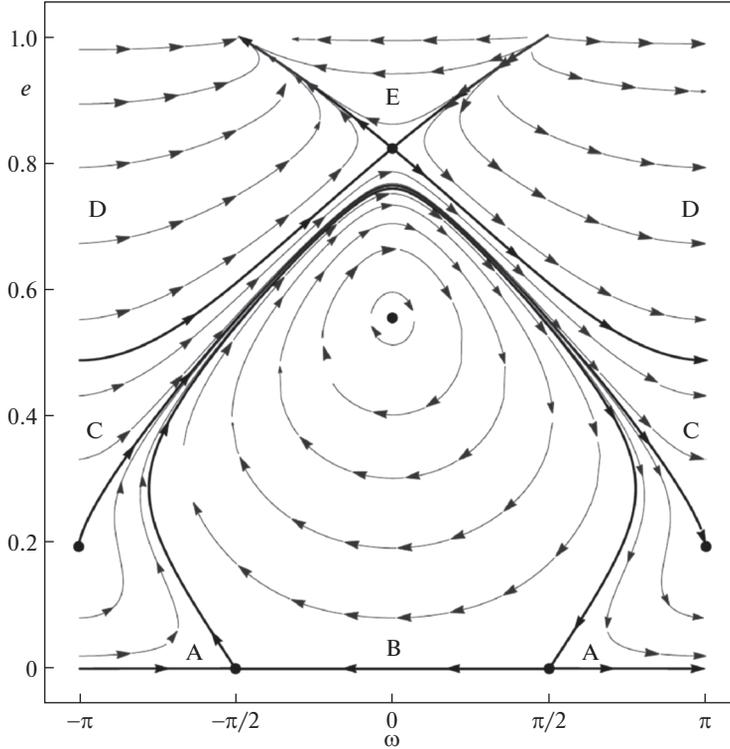


Рис. 5. Фазовый портрет при  $\delta = \delta_*^{(2)}$ .

стей неограниченных движений  $C$ ,  $E$  и  $F$ , когда фазовая точка выходит на траектории параболического типа, преодолевая значения  $e = 1$ . Указанные области разделены сепаратрисами, при этом сепаратрисы, ограничивающие область  $C$ , асимптотически сливаются в бесконечно удаленной точке при  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Еще раз подчеркнем, что в малой окрестности  $e = 1$  достоверность расчетов падает в силу расходимости рядов. Так удержание большего числа членов ряда (3.4) (до 10-ти включительно) показало, что решение задачи Коши в малой окрестности  $e = 1$  некорректно: существенно меняется поведение траектории спутника в осях  $P_0xy$  при появлении новых членов ряда и недопустимо быстро возрастает скорость колебаний по эксцентриситету орбиты спутника. Высокая точность расчетов гарантируется для  $e \leq 0.8$ .

Рисунки 7 и 8 описывают колебания при  $\delta \in [\delta_*^{(1)}, +\infty)$ . Видно, что область либрации  $D$  (см. рис. 6) сжимается в точку равновесия при  $\delta = \delta_*^{(1)}$  на рис. 7 и полностью исчезает при  $\delta > \delta_*^{(1)}$  на рис. 8 (для построения фазового портрета использовалось значение  $\delta = 2 \times 10^{-3}$ ).

**6. Численный расчет траекторий движения.** Для построения оскулирующего эллипса в декартовых координатах воспользуемся следующей параметризацией:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r = a(1 - e \cos E) \tag{6.1}$$

Здесь  $\theta$  – полярный угол, получаемый из соотношений:

$$\theta = v + \omega, \quad v = 2 \arctg \left( \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \right)$$

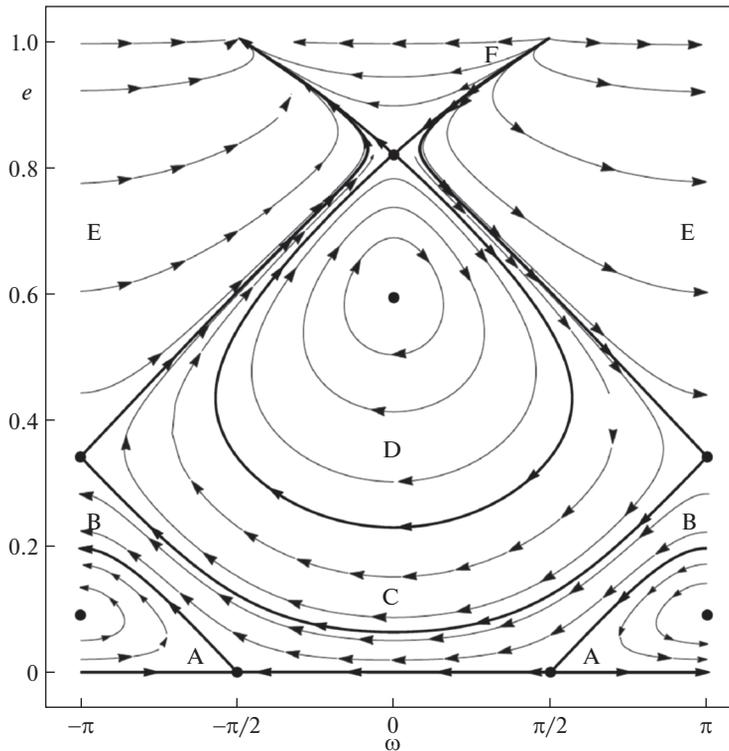


Рис. 6. Фазовый портрет при  $\delta = 1.5 \times 10^{-3}$ .

$E$  – эксцентрисическая аномалия, представимая рядом Фурье [24]:

$$E = M(t) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(ke(t))}{k} \sin kM(t)$$

Здесь  $J_k$  – функция Бесселя,  $M$  – средняя аномалия.

Подставив в (6.1) известные выражения для  $\cos v$  и  $\sin v$  через эксцентрисическую аномалию  $E$  и эксцентриситет  $e$

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \quad \sin v = \frac{\sin E \sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E}$$

получим

$$\begin{aligned} x &= a \left( \cos \omega (\cos E - e) - \sin \omega \sin E \sqrt{1 - e^2} \right) \\ y &= a \left( \cos \omega \sin E \sqrt{1 - e^2} + \sin \omega (\cos E - e) \right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Далее, численно интегрируя систему (4.1), с учетом усеченной силовой функции (5.1), получим  $e(t)$ ,  $\omega(t)$  и  $M(t)$ .

Рассмотрим фазовые траектории в области  $A$  (рис. 4). Для этого случая проведем численное моделирование траекторий движения, задав параметры  $\delta = 1 \times 10^{-3} < \delta_*^{(2)}$ ,  $a = 2.67 \times 10^{-3}$ ,  $\omega_2 = 0$  и начальные значения фазовых переменных  $e(0) = 0.4$ ,

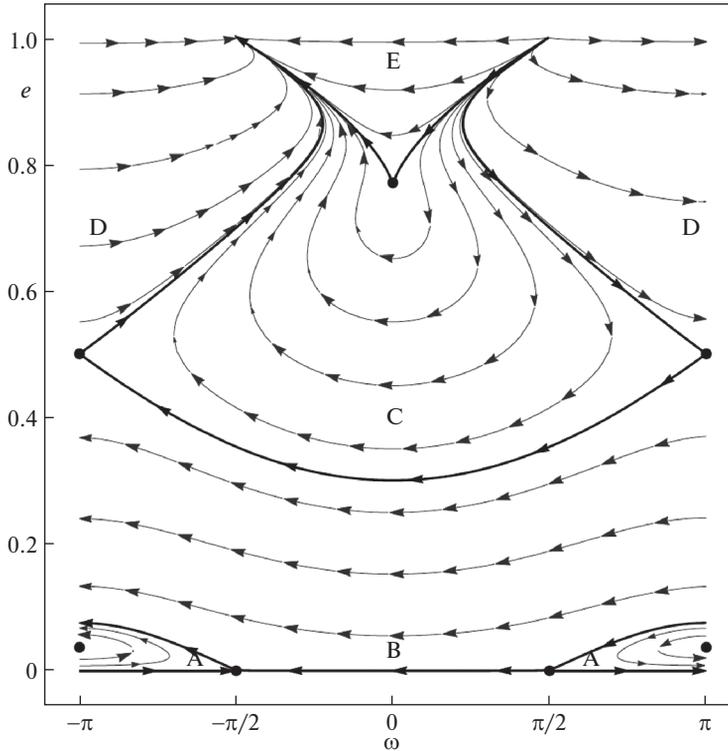


Рис. 7. Фазовый портрет при  $\delta = \delta_*^1$ .

$\omega(0) = 0, M(0) = 0$ . Интегрируя систему (4.1) на промежутке времени в 3650 дней получим возмущенные траектории “либрационного” типа (рис. 9) как для случая чисто гравитационных возмущений от Солнца и Луны (траектории, отвечающие  $\delta = 0$ ), так и с учетом совместного влияния светового и гравитационного воздействий (траектории, отвечающие  $\delta = 0.001$ ). Поскольку оскулирующие аргумент перигея и эксцентриситет меняются слабо, возмущенная орбита близка к “стационарной орбите”, отвечающей стационарной точке фазового портрета. Заметим, что “стационарная орбита” сохраняет значения своих кеплеровских элементов  $a = 2.67 \times 10^{-3}, e = 0.497, \omega = 0$  во все время движения.

Для начальных значений  $e(0) = 0.5, \omega(0) = \pi, M(0) = 0$ , отвечающих случаю вековых возмущений по  $\omega$ , имеем траектории ротационного типа, представленные на рис. 10. Для расчетов использовался промежуток времени 2700 дней. Этим траекториям отвечает область *B* на фазовом портрете системы (см. рис. 4).

В заключение отметим, что точность, с которой решения усредненной системы приближают решения строгих уравнений движения спутника-баллона, определяется на основе обобщенной теоремы Н.Н. Боголюбова [27, 28] поскольку строгие уравнения движения содержат три независимых малых параметра:  $\delta, \varepsilon = (r/r_1)^2 \approx a^2$  (здесь  $r_1 \approx 1$ ) и  $\mu = m_2 (m_1 = 1)$ . Метод усреднения с тремя независимыми малыми параметрами гарантирует точность приближения первого порядка малости по малым параметрам на асимптотически большом промежутке времени в нерезонансном случае. Это

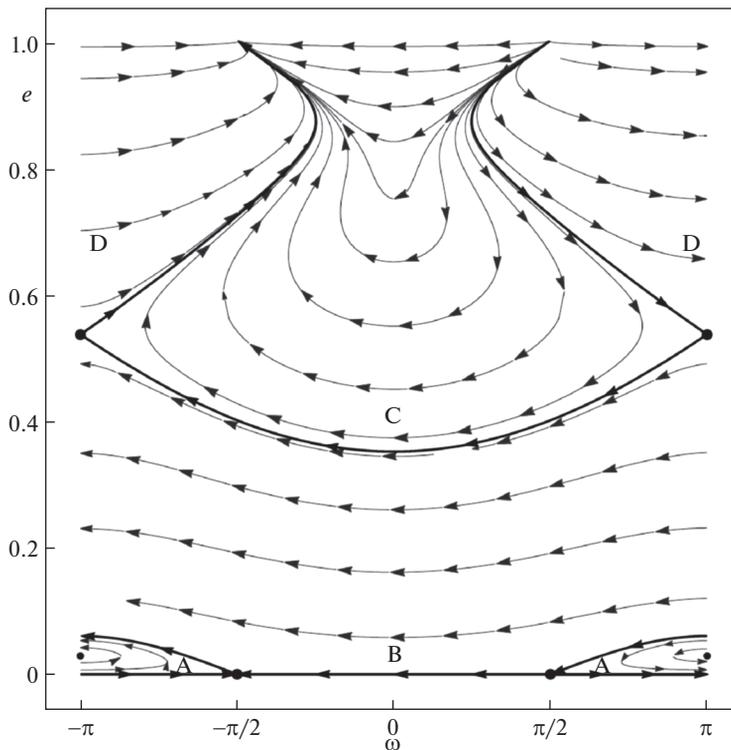


Рис. 8. Фазовый портрет при  $\delta = 2 \times 10^{-3}$ .

значит, что для любых малых величин  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 > 0$ ,  $\sigma_3 > 0$  существуют три константы  $\gamma_i (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) > 0$  такие, что

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \gamma_1 \delta + \gamma_2 \varepsilon + \gamma_3 \mu,$$

когда  $t \sim 1/\|\delta, \varepsilon, \mu\|$ ,  $0 \leq \delta \leq \sigma_1$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq \sigma_2$ ,  $0 \leq \mu \leq \sigma_3$ . Здесь  $u(t)$  – вектор строгих решений уравнений движения,  $v(t)$  – вектор усредненных уравнений.

**Заключение.** Исследована эволюция высоких орбит спутника Земли, принадлежащих плоскости эклиптики, под действием гравитационных возмущений от Солнца, Луны и светового давления. Из анализа нерезонансных усредненных уравнений движения в оскулирующих элементах следует, что большая полуось  $a$  не эволюционирует, эволюция по  $e$  и  $\omega$  описывается интегралом энергии. В отличие от задачи трех тел, когда пренебрегают притяжением Луны [26], здесь существуют (при фиксированных параметрах  $a = 2.67 \times 10^{-3}$  а.е.,  $a_1 = 1$  а.е.,  $a_2 = 2.57 \times 10^{-3}$  а.е.,  $e_1 = 0.01671123$ ,  $e_2 = 0.0549$ ,  $\omega_2 = 0$ ) два бифуркационных значения  $\delta_*^{(1)} = 1.77 \times 10^{-3}$ ,  $\delta_*^{(2)} = 1.12 \times 10^{-3}$  коэффициента светового давления  $\delta$ . При  $\delta \in [0, \delta_*^{(2)}) \cup (\delta_*^{(1)}, +\infty)$  имеем два положения равновесия, на интервале  $\delta \in (\delta_*^{(2)}, \delta_*^{(1)})$  – четыре равновесия, в точках бифуркации – три равновесия. Бифуркация равновесий наблюдается также в плоскости параметров  $(a, e)$  при фиксированном  $\delta = 5 \times 10^{-4}$  (рис. 3). Поэтому фазовые портреты колебаний (рис. 4–8) имеют гораздо более сложный вид, чем в задаче трех тел.

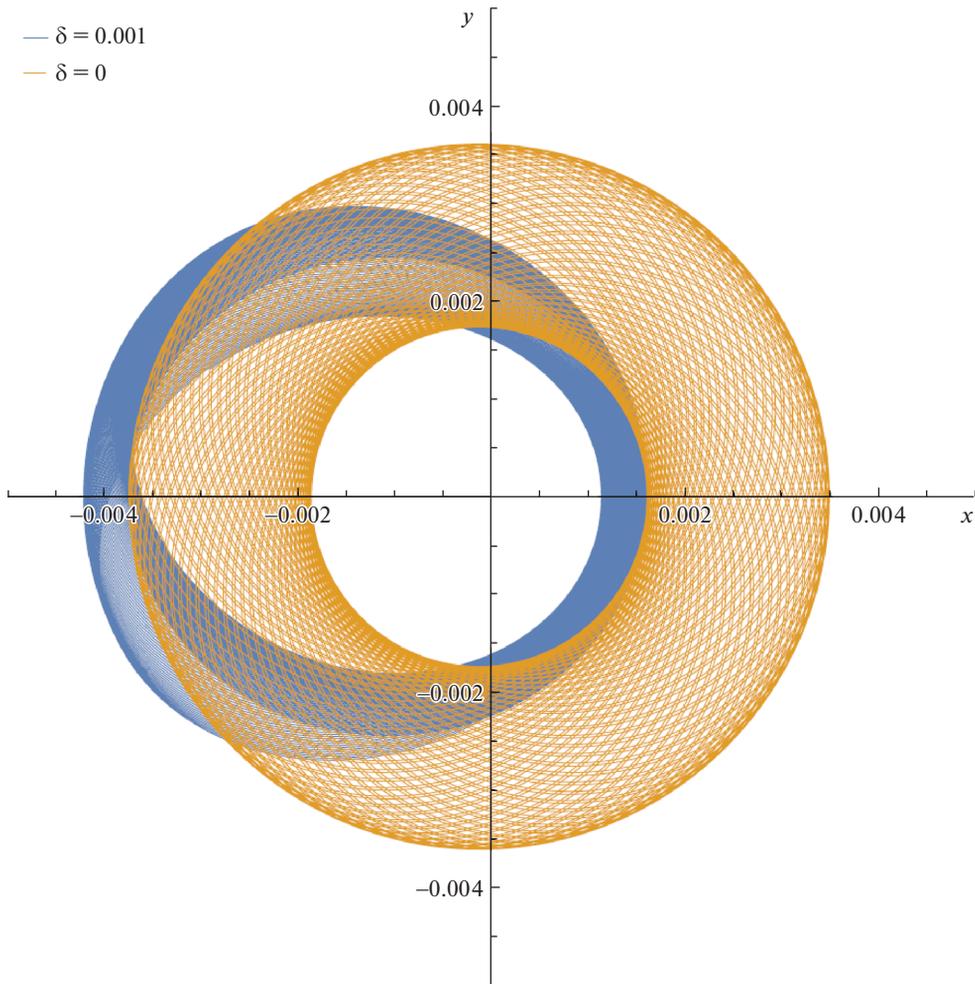


Рис. 9. Траектории либрационного типа.

Показано, что существует два типа эволюционирующих орбит: орбиты либрационного и ротационного типов. Для орбит первого типа оскулирующие аргумент перицентра и эксцентриситет меняются периодически, но с малыми амплитудами, орбита близка к траектории, отвечающей стационарной точке и сохраняющей значения своих невозмущенных кеплеровских элементов во все время движения.

Орбиты второго типа имеют непрерывно возрастающий аргумент перицентра, и, как следствие, медленное вращение линии апсид оскулирующего эллипса, на которое накладывается медленное периодическое изменение эксцентриситета.

Притяжение спутника точкой  $P_2$  массы  $m_2$  (Луной) сильно осложняет проведение расчетов в окрестности  $e = 1$ , так как коэффициенты ряда (3.4) быстро возрастают по величине при  $e \rightarrow 1$  (см. (5.4)) и ряд расходится. Поэтому, в отличие от плоской ограниченной задачи трех тел [26], численный счет не подтвердил наличие орбит столкновения с Землей, для которых эксцентриситет близок к единице.

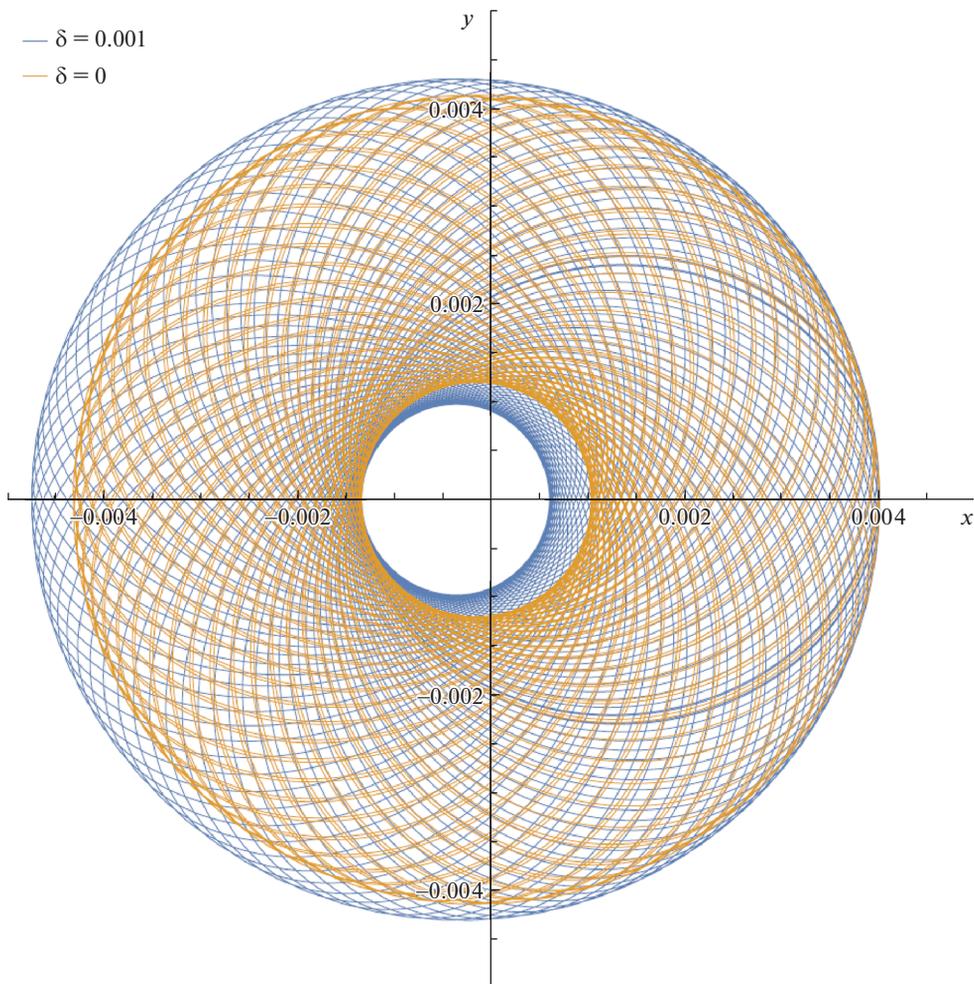


Рис. 10. Траектории ротационного типа.

Описаны дополнительные эффекты, вызванные световым давлением: смещение ограниченной траектории спутника как целого относительно траектории классической задачи четырех тел в область, более удаленную от Солнца (на рис. 9 и рис. 10 Солнце находится в правой полуплоскости).

Авторы признательны рецензентам за сделанные замечания.

Исследования выполнены в Московском авиационном институте при поддержке гранта РФФИ № 18-01-00820 А.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Радзиевский В.В. Ограниченная задача трех тел с учетом светового давления // Астрон. ж. 1950. Т. 27. № 4. С. 250–256.
2. Musen P. The influence of the solar radiation pressure on the motion of an artificial satellite // J. Geophys. Res. 1960. V. 65. № 5. P. 1391–1396.

3. *Parkinson R.W., Jones H.M., Shapiro I.I.* Effects of solar radiation pressure on Earth satellite orbits // *Science*. 1960. V. 131. P. 920–921.
4. *Kozai Y.* Effect of solar radiation pressure on the motion of an artificial satellite // *Smiths. Astrophys. Obs. Special Rept.* 1961. V. 56. P. 25–34.
5. *Ferraz-Mello S.* Analytical study of the Earth's shadowing effects on satellite orbits // *Celest. Mech.* 1972. V. 5. P. 80–101.
6. *Вашковьяк С.Н.* Функция тени в задаче о влиянии светового давления на движение искусственных спутников Земли // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон.* 1974. № 5. С. 584–590.
7. *Вашковьяк С.Н.* Изменение орбит спутников-баллонов под действием светового излучения // *Астрон. ж.* 1976. Т. 53. № 5. С. 1085–1094.
8. *Аксенов Е.П.* Теория движения искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1977. 360 с.
9. *Krivov A.V., Sokolov L.L., Dikarev V.V.* Dynamics of Mars-orbiting dust: Effect of light pressure and planetary oblateness // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 1995. V. 63. Iss. 3–4. P. 313–339.
10. *Hamilton D.P., Krivov A.V.* Circum planetary dust dynamics: effect of solar gravity, radiation pressure, planetary oblateness, and electromagnetism // *Icarus*. 1996. V. 123. P. 503–523.
11. *Bryant R.W.* The effect of solar radiation pressure on the motion of an artificial satellite // *Astron. J.* 1961. V. 66. P. 430–432.
12. *Аксенов Е.П.* Двукратно осредненная эллиптическая ограниченная задача трех тел // *Астрон. ж.* 1979. Т. 56. № 2. С. 419–426.
13. *Аксенов Е.П.* Траектории в двукратно осредненной эллиптической ограниченной задаче трех тел // *Астрон. ж.* 1979. Т. 56. № 3. С. 623–631.
14. *Kalvouridis T.J., Arribas M., Elipe A.* Parametric evolution of periodic orbits in the restricted four-body problem with radiation pressure // *Planet. Space Sci.* 2007. V. 55. P. 475–493.
15. *Kalvouridis T.J., Hadjifotinou K.G.* Bifurcations from planar to three-dimensional periodic orbits in the photo-gravitational restricted four-body problem // *Intern. J. Bifurc. Chaos*. 2008. V. 18. № 2. P. 465–479.
16. *Papadouris J.P., Papadakis K.E.* Equilibrium points in the photogravitational restricted four-body problem // *Astrophys. Space Sci.*, 2013. V. 344. P. 21–38.
17. *Mittal A., Agarwal R., Suraj M.S., Arora M.* On the photo-gravitational restricted four-body problem with variable mass // *Astrophys. Space Sci.* 2018. V. 363. P. 109.
18. *Ash M.E.* Doubly averaged effect of the Moon and Sun on high altitude Earth satellite orbit // *Celest. Mech.* 1976. V. 14. P. 209–238.
19. *Krasil'nikov P.* Fast non-resonance rotations of spacecraft in restricted three body problem with magnetic torques // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2015. V. 73. P. 43–50.
20. *Тихонов А.А.* О вековой эволюции ротационного движения заряженного ИСЗ на регрессирующей орбите // *Космич. исслед.* 2005. Т. 43. № 2. С. 111–125.
21. *Тихонов А.А.* Уточнение модели “наклонный диполь” в задаче об эволюции вращательного движения заряженного тела в геомагнитном поле // *Космич. исслед.* 2002. Т. 40. № 2. С. 171–177.
22. *Амелькин Н.И., Холощак В.В.* Эволюция вращательного движения динамически симметричного спутника с внутренним демпфированием на круговой орбите // *ПММ.* 2019. Т. 83. № 1. С. 3–15.
23. *Амелькин Н.И., Холощак В.В.* Вращательное движение несимметричного спутника с демпфером на круговой орбите // *ПММ.* 2019. Т. 83. № 1. С. 16–31.
24. *Мюррей К., Дермотт С.* Динамика солнечной системы, М.: Физматлит, 2010. 556 с.
25. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы, М.: Наука, 1968. 800 с.
26. *Доброславский А.В., Красильников П.С.* Об эволюции движений спутника-баллона в плоской ограниченной задаче трех тел с учетом светового давления // *Письма в астрон. ж.* 2018. Т. 44. № 8–9. С. 618–630.
27. *Красильников П.С.* Прикладные методы исследования нелинейных колебаний. М.; Ижевск: Инст. компьютер. исслед., 2015. 528 с.
28. *Красильников П.С.* О нелинейных колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем основании // *ПММ.* 2012. Т. 76. № 1. С. 36–51.

**On the Evolution of Balloon Satellite Motions in a Plane  
Restricted Planetary Four-Body Problem with Light Pressure**

**A. V. Dobroslavskiy<sup>a,#</sup> and P. S. Krasilnikov<sup>a,##</sup>**

<sup>a</sup> *Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

<sup>#</sup> *e-mail: a.dobroslavskiy@gmail.com*

<sup>##</sup> *e-mail: krasil06@rambler.ru*

In this paper the plane restricted four-body problem is considered taking into account the light pressure forces when the Earth's orbit is the Keplerian ellipse focused in the Sun, the Moon's orbit is the Keplerian ellipse focused in the Earth, the balloon satellite is a passively gravitating body. The averaged disturbing function of the problem in osculating elements is obtained in the non-resonant case, when the unperturbed orbit of the Earth satellite belongs to the outer sphere of the Earth's gravitational influence, located beyond the Hill's lunar sphere. It is found that the constants of motion are the semi-major axis of the satellite orbit as well as the average value of the disturbing function. The stationary modes of oscillations and their bifurcation depending on the light pressure coefficient and the semi-major axis are investigated. Phase oscillations portraits are constructed for different values of the light pressure coefficient. The librational and rotational orbits of the satellite in the ecliptic plane are calculated.

*Keywords:* restricted planetary four-body problem, light pressure, averaged equations in osculating elements

#### REFERENCES

1. *Radzievsky V.V.* The restricted problem of three bodies taking account of light pressure // *Astron. Zh.*, 1950, vol. 27, pp. 250–256. (in Russian)
2. *Musen P.* The influence of the solar radiation pressure on the motion of an artificial satellite // *J. Geophys. Res.*, 1960, vol. 65, no. 5, pp. 1391–1396.
3. *Parkinson R.W., Jones H.M., Shapiro I.I.* Effects of solar radiation pressure on Earth satellite orbits // *Science*, 1960, vol. 131, pp. 920–921.
4. *Kozai Y.* Effect of solar radiation pressure on the motion of an artificial satellite // *Smiths. Astrophys. Obs. Special Rept.*, 1961, vol. 56, pp. 25–34.
5. *Ferraz-Mello S.* Analytical study of the Earth's shadowing effects on satellite orbits // *Celest. Mech.*, 1972, vol. 5, pp. 80–101.
6. *Vashkov'yak S.N.* The shadow function in the problem of influence of light pressure on the motion of artificial earth satellites // *Vestn. Mosk. un-ta*, 1974, vol. 15, pp. 584–590. (in Russian)
7. *Vashkov'yak, S.N.* Variation in orbits of balloon satellites caused by radiation pressure // *Sov. Astron. J.*, 1976, vol. 20, pp. 615–619.
8. *Aksenov E.P.* *Theory of Motion of Artificial Earth Satellites.* Moscow: Nauka, 1977. 360 p. (in Russian)
9. *Krivov A.V., Sokolov L.L., Dikarev V.V.* Dynamics of Mars-orbiting dust: Effect of light pressure and planetary oblateness // *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 1995, vol. 63, Iss. 3–4, pp. 313–339.
10. *Hamilton D.P., Krivov A.V.* Circum planetary dust dynamics: effect of solar gravity, radiation pressure, planetary oblateness, and electromagnetism // *Icarus*, 1996, vol. 123, pp. 503–523.
11. *Bryant R.W.* The effect of solar radiation pressure on the motion of an artificial satellite // *Astron. J.*, 1961, vol. 66, pp. 430–432.
12. *Aksenov E.P.* The doubly averaged, elliptical, restricted three-body problem // *Sov. Astron. J.*, 1979, vol. 23, pp. 236–239.
13. *Aksenov E.P.* Trajectories in the doubly-averaged, elliptical, restricted three-body problem // *Sov. Astron. J.*, 1979, vol. 23, pp. 351–354.
14. *Kalvouridis T.J., Arribas M., Elipe A.* Parametric evolution of periodic orbits in the restricted four-body problem with radiation pressure // *Planet. Space Sci.*, 2007, vol. 55, pp. 475–493.

15. *Kalvouridis T.J., Hadjifotinou K.G.* Bifurcations from planar to three-dimensional periodic orbits in the photo-gravitational restricted four-body problem // Intern. J. Bifurc. Chaos, 2008, vol. 18, no. 2, pp. 465–479.
16. *Papadouris J.P., Papadakis K.E.* Equilibrium points in the photogravitational restricted four-body problem // Astrophys. Space Sci., 2013, vol. 344, pp. 21–38.
17. *Mittal A., Agarwal R., Suraj M.S., Arora M.* On the photo-gravitational restricted four-body problem with variable mass // Astrophys. Space Sci., 2018, vol. 363, pp. 109.
18. *Ash M.E.* Doubly averaged effect of the Moon and Sun on high altitude Earth satellite orbit // Celest. Mech., 1976, vol. 14, pp. 209–238.
19. *Krasil'nikov P.* Fast non-resonance rotations of spacecraft in restricted three body problem with magnetic torques // Int. J. Non-Linear Mech., 2015, vol. 73, pp. 43–50.
20. *Tikhonov A.A.* Secular evolution of rotary motion of a charged satellite in a decaying orbit // Cosmic Res., 2005, vol. 43, pp. 107–121.
21. *Tikhonov A.A.* Refinement of the oblique dipole model in the evolution of rotary motion of a charged body in the geomagnetic field // Cosmic Res., 2002, vol. 40, no. 2, pp. 157–162.
22. *Amel'kin N.I., Kholoshchak V.V.* Evolution of the rotational movement of a dynamically symmetric satellite with inner damping in a circular orbit // Mech. Sol., 2019, vol. 54, no. 2, pp. 179–189.
23. *Amel'kin N.I., Kholoshchak V.V.* Rotational motion of a non-symmetrical satellite with a damper in a circular orbit // Mech. Sol., 2019, vol. 54, no. 2, pp. 199–203.
24. *Murray C.D., Dermott S.F.* Solar System Dynamics. Cambridge: Univ. Press, 1999. 556 p.
25. *Duboshin G.N.* Celestial Mechanics: Basic Problems and Methods. Moscow: Nauka, 1968. 800 p. (in Russian)
26. *Dobroslavskiy A.V., Krasilnikov P.S.* On the evolution of balloon satellite motions in a plane restricted three-body problem with light pressure, // Astron. Lett., 2018, vol. 44, no. 8–9, pp. 567–578.
27. *Krasilnikov P.S.* Applied Research Methods of Nonlinear Oscillations. Moscow; Izhevsk: ICS, 2015. 528 p. (in Russian)
28. *Krasil'nikov P.S.* The non-linear oscillations of a pendulum of variable length on a vibrating base // JAMM, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 25–35.

УДК 532.546:517.928

**МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУХФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ В СРЕДЕ С ДВОЙНОЙ ПОРИСТОСТЬЮ**© 2020 г. М. Б. Панфилов<sup>1,2,\*</sup>, Ж. Д. Байшемиров<sup>3,4</sup>, А. С. Бердышев<sup>3,4</sup><sup>1</sup> *Институт Эли Картан – Университет Лотарингии, Нанси, Франция*<sup>2</sup> *Институт д’Аламбера – Университет Сорбонна, Париж, Франция*<sup>3</sup> *Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан*<sup>4</sup> *Институт информационных и вычислительных технологий, Алматы, Казахстан*

\* e-mail: michel.panfilov@univ-lorraine.fr

Поступила в редакцию 27.06.2019 г.

После доработки 20.09.2019 г.

Принята к публикации 13.11.2019 г.

Для двухфазного течения сжимаемых жидкостей в сжимаемой пористой среде с двойной пористостью построена макроскопическая модель, на базе которой проведен качественный анализ механизмов возникновения различных видов памяти (запаздывания). Двумя основными механизмами являются немгновенное капиллярное перераспределение фаз и немгновенная релаксация давления. Помимо них возникают перекрестные эффекты памяти, вызванные асимметричным отжимом жидкостей из пор за счет расширения фаз и компакссии пор, а также нелинейным наложением сжимаемости и капиллярности (нелинейный отжим). Для построения модели применен асимптотический метод двухмасштабного осреднения в вариационной формулировке. Полное осреднение удастся провести за счет разнесения нелокальности и нелинейности на разные уровни асимптотического разложения. Явно определены все характерные времена запаздывания как функции насыщенности и давления.

*Ключевые слова:* двойная пористость, осреднение, двухфазное течение, сжимаемая жидкость, нелокальность, память, запаздывание, неравновесность

DOI: 10.31857/S0032823520010087

**Введение.** Среда с двойной пористостью (ее еще называют трещиновато-пористой) является классической моделью для исследования эффектов возникновения памяти в течениях жидкостей при изменении масштаба рассмотрения. Такая среда состоит из слабопроницаемых блоков и высокопроницаемых трещин. При однофазном течении сжимаемой жидкости в ней распространение возмущения в блоках намного медленнее, чем в трещинах, поэтому среднее давление в блоках запаздывает и зависит от всей истории изменения среднего давления в трещинах, что и является эффектом памяти. Поскольку этот эффект наблюдается в терминах средних давлений, то для его изучения надо построить уравнения, осредненные по неоднородностям. В однофазном случае, который описывается линейными уравнениями, можно получить полностью осредненную модель и явные выражения для оператора памяти. Первая математическая модель такого процесса была предложена в 1960 г. [1]. Позже методами осреднения было показано [2, 3], что сильная разница в проницаемостях блоков и трещин приводит не просто к запаздыванию, а к долгой памяти, описываемой интегро-дифференциальным уравнением.

В случае двухфазного течения появляется другой тип памяти, который порождается капиллярностью. Капиллярные силы толкают смачивающую фазу из трещин в блоки, при этом вытесняя несмачивающую фазу из блоков в трещины. Это явление известно как капиллярная противоточная пропитка. В блоках она медленнее, чем в трещинах, что вызывает запаздывание в поведении насыщенности фаз (“насыщенность” означает объемную долю фазы в порах). Динамика волн насыщенности нелинейная, свойственная всем двухфазным течениям. Поэтому возникает ситуация, когда запаздывание/память на макроуровне вызывается распространением нелинейной волны на локальном масштабе. Для краткости такую память будем называть нелинейной.

Если же течение двухфазное и жидкости сжимаемые, то два типа памяти, вызванные сжимаемостью и капиллярностью, должны как-то взаимодействовать, что может привести к новым физическим эффектам. Обнаружение и исследование этих физических эффектов и есть цель настоящей работы. Для этого, прежде всего, необходимо было построить макроскопическую модель двухфазного течения сжимаемых жидкостей в среде с двойной пористостью.

Попытки построить такие модели проводились в основном для систем с несжимаемыми фазами [3–9]. Однако, появление нелинейной памяти приводит к тому, что макроскопические модели оказываются не полностью осредненными. Это означает, что макроскопические уравнения и локальная задача не расщепляются, а составляют единую сцепляющуюся систему уравнений, которые должны решаться совместно и многократно для каждой макроскопической точки пространства и каждого момента времени. Поскольку такой результат не проще, чем исходная неосредненная задача, его значение для моделирования динамики течений снижается. Поэтому проблема построения осредненной модели остается открытой даже для несжимаемых флюидов. Попытки преодолеть ее линеаризацией уравнений капиллярной пропитки, как это было сделано ранее [5, 10], означают, что течение в блоках заменяется однофазным.

Авторам известны две работы, посвященные двухфазному течению сжимаемых флюидов в среде с двойной пористостью [11, 12]. В первой из них [11] обе фазы представляли собой сжимаемый газ, а во второй одна из фаз полагалась несжимаемой [12]. Сделаны математические продвижения в области доказательства сходимости исходной системы к осредненной в условиях взаимодействия нелокальности, двойной нелинейности и двойной вырождаемости (параболических уравнений), однако полученные модели остаются не полностью осредненными.

В связи с этим физика двухфазных течений в трещиновато-пористых средах продолжает исследоваться не только методами осреднения, но и иными способами. Экспериментальные исследования на уровне пор проводятся на стеклянных микромоделях [13–15] с визуальным наблюдением за процессом. Эксперименты на уровне Дарси проводятся на непрозрачных образцах пород, сканируемых методом ядерного магнитного резонанса [16].

Численное моделирование на уровне пор, основанное на уравнениях Навье–Стокса, использует метод диффузной поверхности Кана–Хильярда [15, 17, 18], позволяющий отслеживать поверхность раздела фаз и ее деформации. Численное моделирование, основанное на законе Дарси, сфокусировано в настоящее время, прежде всего на проблеме стыковки трехмерной задачи в блоке и двумерной задачи в плоской трещине [19, 20].

Во всех этих исследованиях получены сходные результаты относительно роли капиллярной пропитки на нефтеотдачу: чем больше капиллярное давление, тем интенсивнее пропитка и тем больше нефти вымывается из блоков. Однако есть и противоречивые результаты относительно влияния темпа вытеснения на нефтеотдачу: так, например, по результатам [14, 17, 18, 20] отдача падает с ростом темпа закачки, тогда как согласно [13, 16] – растет. Это указывает на то, что общая теория двухфазных течений в среде с сильными неоднородностями остается открытым вопросом.

В настоящей работе мы предлагаем теоретический подход, который позволяет построить полностью осредненную модель таких систем, несмотря на возникновение в них нелинейной памяти. Она сочетает элементы однофазной сжимаемой и двухфазной несжимаемой систем. Показано, что помимо капиллярного запаздывания насыщенности и запаздывания давления из-за сжимаемости, возникает также два новых перекрестных эффекта:

- эффект запаздывания насыщенности, вызываемый несимметричным отжимом фаз из блоков за счет расширения фаз и компакции пор;
- эффект запаздывания насыщенности, вызываемый нелинейным наложением сжимаемости и капиллярности.

Ниже метод осреднения применяется для двухмасштабной формулировки задачи в вариационной форме, по технике близкий к конструктивной части метода двухмасштабной сходимости [21]. Предлагаемый подход позволяет провести все вычисления в наиболее компактной форме.

Следует подчеркнуть, что в рамках используемого подхода сжимаемыми являются прежде всего флюиды. Пористая среда может быть тоже сжимаемой, то есть изменять объем пор в зависимости от давления жидкости их заполняющей (такая деформация среды называется компакцией), но сжимаемость среды считается слабой. Полностью деформируемые среды здесь не рассматриваются. Подходы к осреднению деформируемых упругих насыщенных пористых сред также развиваются в последнее время [22, 23].

## 1. Формулировка задачи.

**1.1. Уравнения двухфазного течения сжимаемых жидкостей.** Сжимаемость означает, что плотности жидкостей и пористость/проницаемость пористой среды зависят от давления. Традиционно сжимаемость пористых сред считается слабой и описывается линейным законом, а сжимаемость жидкостей описывается более общим экспоненциальным законом [24]:

$$\frac{d\rho_w}{dp} = \tilde{\beta}_w \rho_w, \quad \frac{d\rho_o}{dp} = \tilde{\beta}_o \rho_o, \quad \frac{d\phi}{dp} = \tilde{\beta}_\phi \phi^0, \quad (1.1)$$

где  $p$  – давление,  $\phi^0$  – характерная постоянная величина пористости;  $\tilde{\beta}_w, \tilde{\beta}_o, \tilde{\beta}_\phi$  – изотермические коэффициенты сжимаемости, которые считаются константами. Их размерность  $\text{Pa}^{-1}$ . Для воды, нефти и геологических пористых сред характерная величина коэффициента сжимаемости составляет  $10^{-9} - 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$ . Положительная производная  $d\phi/dp$  означает, что пористость уменьшается, если давление жидкости в порах падает. Последнее соответствует компакции пор под весом вышележащих пород.

Для однофазных сжимаемых флюидов в деформируемой среде используется классическое упрощение уравнений течения, которое заключается в следующем. Подставим уравнения сжимаемости (1.1) в уравнение сохранения массы флюида:

$$\partial_t(\phi\rho) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) = 0,$$

где  $\mathbf{V}$  – скорость фильтрации. Тогда получим:

$$0 = (\phi\rho)' \partial_t p + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} + \rho' \mathbf{V} \cdot \nabla p,$$

где “штрих” означает производную по давлению. Последний член,  $\mathbf{V} \cdot \nabla p \sim (\nabla p)^2$ , пренебрежимо мал, так как градиенты давления в подземных пластах малы. Тогда получаем классическое уравнение однофазной фильтрации сжимаемых жидкостей в деформируемых пластах:

$$\phi^0 \beta \partial_t p + \nabla \cdot \mathbf{V} = 0,$$

где  $\beta = \frac{(\phi\rho)'}{\phi^0\rho} = \tilde{\beta}_w + \tilde{\beta}_\phi$ , а скорость фильтрации  $\mathbf{V}$  считается пропорциональной параметру абсолютной проницаемости среды  $K$ .

Пористость  $\phi^0$  и проницаемость  $K$  в этих уравнениях считаются далее постоянными.

Применим такое же допущение и для двухфазных флюидов. Рассмотрим несмешивающиеся фазы. Будем называть их водой и нефтью. Фазы имеют разные давления:  $p_w$  и  $p_o$ . Поэтому  $\rho_w = \rho_w(p_w)$  и  $\rho_o = \rho_o(p_o)$ . Классические уравнения теории двухфазной фильтрации применимы для шнурковой структуры течений [25], когда каждая фаза занимает свои собственные поры. Поэтому в каждый момент времени  $\phi = \phi(p_w)$  для пор, занятых водой, и  $\phi = \phi(p_o)$  для пор, занятых нефтью. Исходные уравнения сохранения массы фаз имеют вид:

$$\partial_t(\phi\rho_w s) + \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{V}_w) = 0, \quad \text{и} \quad \partial_t(\phi\rho_o(1-s)) + \nabla \cdot (\rho_o \mathbf{V}_o) = 0,$$

где  $s$  — объемная доля воды (насыщенность),  $\rho$  — плотность фазы,  $\phi$  — пористость среды,  $p$  — давление,  $\mathbf{V}$  — вектор скорости фильтрации (скорость Дарси). Индексы  $w$  и  $o$  означают воду (water) и нефть (oil). Дифференцируя по частям, получим для воды:

$$\phi\rho_w\partial_t s + \frac{d(\phi\rho_w)}{dp_w} s\partial_t p_w + \rho_w \nabla \cdot \mathbf{V}_w + \frac{d\rho_w}{dp_w} \nabla p_w \cdot \mathbf{V}_w = 0$$

Пренебрегая членами порядка  $(\nabla p)^2$ , получим окончательно систему уравнений двухфазного течения сжимаемых жидкостей в слабосжимаемой пористой среде:

$$\begin{aligned} \phi\partial_t s + \phi\beta_w s\partial_t p_w + \nabla \cdot \mathbf{V}_w &= 0 \\ -\phi\partial_t s + \phi\beta_o(1-s)\partial_t p_o + \nabla \cdot \mathbf{V}_o &= 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\beta_w \equiv \tilde{\beta}_w + \tilde{\beta}_\phi$ ,  $\beta_o \equiv \tilde{\beta}_o + \tilde{\beta}_\phi$ , а величина  $\phi^0$  обозначена просто как  $\phi$ .

Система (1.2) дополняется уравнениями сохранения импульса в форме закона Дарси для каждой фазы и уравнением капиллярного равновесия, связывающим давления в фазах:

$$\mathbf{V}_\alpha = -K\lambda_\alpha \nabla p_\alpha, \quad \alpha = w, o; \quad \lambda_\alpha(x, s) \equiv \frac{k_\alpha(x, s)}{\mu_\alpha} \quad (1.3)$$

$$p_o = p_w + p_c(s), \quad (1.4)$$

где  $K$  — абсолютная проницаемость среды,  $\mu$  — динамическая вязкость фазы. Подчеркнем, что  $K$  и  $\phi$  считаются независящими от давления, что соответствует слабосжимаемой пористой среде.

Функции относительных фазовых проницаемостей  $k_w(s)$ ,  $k_o(s)$  и капиллярного давления  $p_c(s)$  заданы. Они обладают следующими свойствами:

- $k_w(s)$  непрерывная и монотонно неубывающая функция водонасыщенности  $s$ , такая что  $k_w \equiv 0$  при  $s \in [0, s_*]$ , и  $k_w(1) = 1$ ;
- $k_o(s)$  непрерывная и монотонно невозрастающая функция такая, что  $k_o(0) = 1$  и  $k_o \equiv 0$  при  $s \in [s^*, 1]$ ;
- $p_c(s)$  непрерывная и монотонно невозрастающая функция такая, что  $p_c(1) = 0$  и  $p_c \rightarrow \infty$  при  $s \rightarrow s_*$ . Функция  $p_c$  не определена при  $s \in [0, s_*]$ .

**1.2. Задача осреднения.** Пусть резервуар  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ) — ограниченная, связная область с периодической микроструктурой с характерным масштабом  $\epsilon$ , который явля-

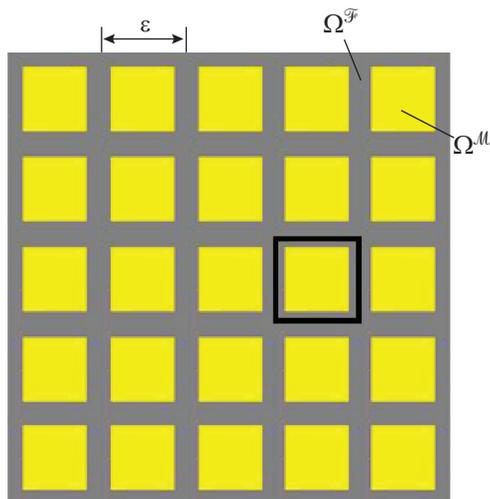


Рис. 1. Структура среды.

ется отношением периода неоднородности к длине всей области. Параметр  $\varepsilon$  малый:  $0 < \varepsilon \ll 1$  (рис. 1).

Единичная ячейка этой микроструктуры выделена черным квадратом. Будучи растянутой в  $\varepsilon^{-1}$  раз по каждой оси она образует куб  $Y = (0, 1)^d$  со стороной 1, где  $d$  – размерность пространства. Этот куб состоит из двух подобластей: связанной подобласти  $Y^{\mathcal{F}}$  (“трещины”) и  $Y^{\mathcal{M}}$  (“блок матрицы”). Обозначим через  $\Gamma$  границу раздела между  $Y^{\mathcal{F}}$  и  $Y^{\mathcal{M}}$  в  $Y$ .

Четыре уравнения сохранения массы и импульса (1.2) и (1.3) можно свести к двум уравнениям, исключив скорости фильтрации:

$$\phi \partial_t s_\alpha + \phi s_\alpha \beta_\alpha \partial_t p_\alpha = \nabla \cdot (K \lambda_\alpha \nabla p_\alpha), \quad \alpha = w, o, \quad (1.5)$$

где  $s \equiv s_w$ ,  $s_o = 1 - s_w$ .

Система (1.5) и соотношение (1.4) определяют три неизвестных функции: насыщенность воды  $s$ , давление в воде  $p_w$  и давление в нефти  $p_o$ . На границе раздела сред  $\Gamma$  нормальные потоки фаз и фазовые давления непрерывны.

Граничными условиями являются заданное давление воды и насыщенность. Начальные условия фиксируют заданное распределение насыщенности и давления в области:

$$s(x, 0) = s^0(x), \quad p_w(x, 0) = p_w^0(x)$$

**1.3. Параметры задачи.** Пористость, коэффициенты сжимаемости, фазовые проницаемости, и капиллярное давление различны в блоках и трещинах, но остаются величинами одного порядка:

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi^{\mathcal{F}} \\ \phi^{\mathcal{M}} \end{cases}, \quad \beta_\alpha(x) = \begin{cases} \beta_\alpha^{\mathcal{F}}, & x \in \Omega^{\mathcal{F}} \\ \beta_\alpha^{\mathcal{M}}, & x \in \Omega^{\mathcal{M}} \end{cases}$$

$$\lambda_\alpha(s, x) = \begin{cases} \lambda_\alpha^{\mathcal{F}}(s) \\ \lambda_\alpha^{\mathcal{M}}(s) \end{cases}, \quad p_c(s, x) = \begin{cases} p_c^{\mathcal{F}}(s), & x \in \Omega^{\mathcal{F}} \\ p_c^{\mathcal{M}}(s), & x \in \Omega^{\mathcal{M}} \end{cases}, \quad \alpha = w, o,$$

где  $\phi^{\mathcal{F}}, \phi^{\mathcal{M}}, \beta_\alpha^{\mathcal{F}}, \beta_\alpha^{\mathcal{M}}, \lambda_\alpha^{\mathcal{F}}(s), \lambda_\alpha^{\mathcal{M}}(s), p_c^{\mathcal{F}}(s), p_c^{\mathcal{M}}(s)$  не зависят от  $\varepsilon$ . Параметры  $\phi^{\mathcal{F}}, \phi^{\mathcal{M}}, \beta_\alpha^{\mathcal{F}}, \beta_\alpha^{\mathcal{M}}$  положительны. Функции  $\lambda_\alpha^{\mathcal{F}}(s), \lambda_\alpha^{\mathcal{M}}(s), p_c^{\mathcal{F}}(s), p_c^{\mathcal{M}}(s)$  неотрицательны. Полагаем, что  $p_c^{\mathcal{M}}(s) \geq p_c^{\mathcal{F}}(s)$ , так как капиллярное давление больше там, где проницаемость меньше.

В то же время, абсолютная проницаемость блоков и трещин может различаться очень значительно. Известно, что при вариации пористости в пределах 0.1–0.2 проницаемость меняется на несколько порядков. Поэтому принимаем основное условие двойной пористости:

$$K(x) = \begin{cases} K^{\mathcal{F}}, & x \in \Omega^{\mathcal{F}} \\ \delta K^{\mathcal{M}}, & x \in \Omega^{\mathcal{M}} \end{cases} \quad (1.6)$$

где параметр  $\delta$  мал, коэффициенты  $K^{\mathcal{M}}, K^{\mathcal{F}}$  положительные и не зависят от  $\varepsilon$ .

Параметр  $\delta > 0$  описывает степень контрастности между проницаемостями блоков и трещин. Большой контраст вызывает запаздывание или память. Степень запаздывания (или “длина памяти”) выражается другим параметром,  $\omega$ , который определяется следующим образом:

$$\omega = \frac{\varepsilon^2}{\delta}$$

Параметр  $\omega$  входит в задачу в явном виде, если исходные уравнения (1.5) записаны не через макроскопические координаты  $x_i$ , а микроскопические (растянутые) координаты  $y_i = x_i/\varepsilon$ . Тогда в уравнениях (1.5) правая часть примет вид на блоке:  $\dots = \omega^{-1} \nabla_y \cdot (K^{\mathcal{M}} \lambda_\alpha \nabla_y p_\alpha)$ .

По степени контрастности и длине памяти интерес представляют два типа сред:

– среды с долгой памятью:  $\omega \sim 1$ , или с сильным контрастом:  $\delta \sim \varepsilon^2$  (так называемые  $\varepsilon^2$ -среды);

– среды с короткой памятью:  $\varepsilon \ll \omega \ll 1$ , или с умеренным контрастом:  $\varepsilon^2 \ll \delta \ll \varepsilon$ .

Классификация сред по параметрам  $\delta$  и  $\omega$  представлена на рис. 2.

Существуют также среды неконтрастные:  $\delta \sim 1$ , слабоконтрастные  $\varepsilon \ll \delta \ll 1$  и среды с непроницаемыми блоками:  $\delta \ll \varepsilon^2$ . В первых и вторых обменный процесс между блоками и трещинами происходит без запаздывания, а в третьих полностью отсутствует из-за очень сильного запаздывания, поэтому ни те, ни другие, ни третьи для целей настоящего исследования интереса не представляют.

## 2. Метод осреднения с расщеплением нелокальности и нелинейности.

**2.1. Расщепление нелокальности и нелинейности.** Целью данной статьи является построение *полностью осредненной модели*. Полностью осредненной называется модель, макроскопические уравнения которой не содержат микроскопические переменные, а задача на ячейке, определяющая макроскопические коэффициенты, не зависит от макроскопических переменных и поэтому решается только один раз [4].

Чтобы обойти наложение нелинейности и нелокальности, описанное ранее, мы разнесем их на разные уровни асимптотического разложения по параметру длины памяти  $\omega$ , то есть нелинейность сохраняется в нулевом приближении, а нелокальность –



Рис. 2. Классификация сред по параметрам контрастности свойств ( $\delta$ ) и длины возникающей памяти ( $\omega$ ).

в первом. Поскольку в первом приближении асимптотические разложения обычно приводят к линейным задачам, то нелокальность возможно будет описать явно и полностью. Ранее этот метод был применен для несжимаемых жидкостей [8].

Таким образом, параметр  $\omega$  должен быть малым, то есть мы приходим к средам с умеренным контрастом между проницаемостями блоков и трещин. В общем случае мы вынуждены работать с двухпараметрическими разложениями: по периоду неоднородности  $\epsilon$  и по параметру длины памяти  $\omega$ , которые независимы. Учитывая упорядочение сред по параметрам  $\delta$  и  $\omega$ , представленное на рис. 2, асимптотическое разложение любой функции  $f$  будет выглядеть следующим образом:

$$f^{\epsilon, \omega}(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \omega^k \epsilon^j f_{kj}^{\epsilon}(x, t) = f_{00} + \omega f_{01}^{\epsilon} + \epsilon f_{10}^{\epsilon} + \dots, \quad (2.1)$$

где верхние индексы  $\epsilon$  и  $\omega$  означают зависимость от соответствующих параметров. При этом учтено, что задача регулярна по  $\omega$  (за исключением малых времен  $t \sim \omega$  после возмущения) и сингулярно возмущена по  $\epsilon$ , поэтому коэффициенты  $f_{kj}^{\epsilon}$  в общем случае зависят от  $\epsilon$  и не зависят от  $\omega$ .

Если  $\epsilon \rightarrow 0$ , то неоднородности стягиваются в точку, то есть среда превращается в однородную осредненную. Если  $\omega \rightarrow 0$ , то в системе исчезает память. Поэтому нулевое приближение  $f_{00}$  соответствует осредненному значению функции в системе без контраста свойств блоков и трещин.

Для построения осредненной модели достаточно нулевого и первого приближения:  $f_{00}$ ,  $f_{01}^{\epsilon}$ ,  $f_{10}^{\epsilon}$ . При этом член  $\omega f_{01}^{\epsilon}$  описывает вклад контрастности свойств, то есть эффекты памяти, а  $\epsilon f_{10}^{\epsilon}$  ответствен за вклад пространственных осцилляций проницаемости.

Очевидно, что техника осреднения значительно упрощается, если выбрать  $\omega$  так, чтобы например:

$$\omega = \sqrt{\epsilon}, \quad \text{или} \quad \delta = \epsilon^{3/2}, \quad (2.2)$$

что использовалось в [8]. Тогда полное асимптотическое разложение сводится к однопараметрическому разложению по  $\sqrt{\epsilon}$ .

**2.2. Двухмасштабная формулировка задачи.** Прежде всего, введем расширение решения  $\tilde{s}(x, y, t)$ ,  $\tilde{p}(x, y, t)$ , так что

$$p_w(x, t) = \tilde{p}(x, y, t)|_{y=x/\epsilon}, \quad s(x, t) = \tilde{s}(x, y, t)|_{y=x/\epsilon}$$

Тогда следующее справедливо для производных:

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial x_i} \rightarrow \left( \frac{\partial \tilde{p}(x, y, t)}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{p}(x, y, t)}{\partial y_i} \right) \Big|_{y=x/\varepsilon}$$

Поскольку операции расширения и дифференцирования коммутируют, получаем, что аргумент  $y$  может рассматриваться как независимая переменная от  $x$ , а в конечных результатах надо положить его равным  $x/\varepsilon$ .

Двухмасштабная формулировка уравнений (1.5) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \phi(y) \partial_t s_\alpha + \phi(y) \beta_\alpha(y) s_\alpha \partial_t p_\alpha &= \left( \partial_{x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_i} \right) \left( K(y) \lambda_\alpha \left( \partial_{x_i} p_\alpha + \frac{1}{\varepsilon} \partial_{y_i} p_\alpha \right) \right) \\ x \in \Omega, \quad y \in Y, \quad t \in (0, T) & \\ p_o &= p_w + p_c, \quad s_o = 1 - s_w \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам  $i, k, j$  идет суммирование от 1 до 3. С условиями:

$$\begin{aligned} s_w|_{t=0} &= s^0(x), \quad p_w|_{t=0} = p_w^0(x) \\ \left[ K \lambda_\alpha \frac{\partial p_\alpha}{\partial n} \right]_\Gamma &= 0, \quad [p_\alpha]_\Gamma = 0, \quad \alpha = w, o \\ s_w, p_w &- 1\text{-периодичны по } y \end{aligned} \quad (2.4)$$

и условиями Неймана или Дирихле на границе области  $\partial\Omega$ . Здесь  $[\cdot]$  – обозначают скачок функции.

Задачу (2.3), (2.4) можно представить в вариационной формулировке:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega Y} \phi w \partial_t s_\alpha dx dy + \int_{\Omega Y} \phi \beta_\alpha s_\alpha w \partial_t p_\alpha dx dy = \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega Y} K \lambda_\alpha (\partial_{y_i} p_\alpha + \varepsilon \partial_{x_i} p_\alpha) (\partial_{y_i} w + \varepsilon \partial_{x_i} w) dy dx = \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \int_{Y^\mathfrak{F}} K^\mathfrak{F} \lambda_\alpha^\mathfrak{F} (\partial_{y_i} p_\alpha + \varepsilon \partial_{x_i} p_\alpha) (\partial_{y_i} w + \varepsilon \partial_{x_i} w) dy dx - \\ &- \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{\Omega} \int_{Y^\mathfrak{M}} K^\mathfrak{M} \lambda_\alpha^\mathfrak{M} (\partial_{y_i} p_\alpha + \varepsilon \partial_{x_i} p_\alpha) (\partial_{y_i} w + \varepsilon \partial_{x_i} w) dy dx \end{aligned} \quad (2.5)$$

для любой функции  $w = w(x, y)$ , действующей в пространстве  $\Omega \times Y$ , непрерывной и периодичной по  $y$ , а также такой, что  $w|_{\partial\Omega} = 0$ .

Соотношение (2.5) получается умножением уравнения (2.3) на функцию  $w$ , с последующим интегрированием по частям, и использованием теоремы Гаусса–Остроградского. Возникающие при этом интегралы по границе области  $\partial\Omega$  обнуляются из-за граничного условия на функцию  $w$ . Интегралы по границе периода  $\partial Y$ , в свою очередь, обращаются в нуль из-за периодичности всех функций по  $y$ .

**2.3. Асимптотическое разложение.** Осреднение строится методом двухмасштабных асимптотических разложений по параметру  $\varepsilon$ , а также регулярных асимптотических рядов по параметру нелокальности  $\omega$ , что, с учетом параметризации (2.2), означает появление членов, содержащих дробные степени  $\sqrt{\varepsilon}$ . Общая структура разложений имеет следующий вид, для  $\alpha = w, o$ :

$$p_\alpha(x, y, t) = \begin{cases} p_{\alpha 0}(x, t) + \sqrt{\varepsilon} p_{\alpha, 1/2}^\mathfrak{M}(x, y, t) + \varepsilon p_{\alpha 1}^\mathfrak{M}(x, y, t) + \dots, & y \in Y^\mathfrak{M} \\ p_{\alpha 0}(x, t) + \sqrt{\varepsilon} p_{\alpha, 1/2}^\mathfrak{F}(x, y, t) + \varepsilon p_{\alpha 1}^\mathfrak{F}(x, y, t) + \dots, & y \in Y^\mathfrak{F} \end{cases}$$

$$s_\alpha(x, y, t) = \begin{cases} s_{\alpha 0}(x, t) + \sqrt{\varepsilon} s_{\alpha, 1/2}^{\mathcal{M}}(x, y, t) + \varepsilon s_{\alpha 1}^{\mathcal{M}}(x, y, t) + \dots, & y \in Y^{\mathcal{M}} \\ s_{\alpha 0}(x, t) + \sqrt{\varepsilon} s_{\alpha, 1/2}^{\mathcal{F}}(x, t) + \varepsilon s_{\alpha 1}^{\mathcal{F}}(x, y, t) + \dots, & y \in Y^{\mathcal{F}} \end{cases}$$

Причем выполняются условия непрерывности фазовых давлений:

$$p_{\alpha, 1/2}^{\mathcal{M}} \Big|_{y \in \Gamma} = p_{\alpha, 1/2}^{\mathcal{F}}(x, t) \quad (2.6)$$

(Независимость первых членов разложений от  $y$  легко доказывается подстановкой разложения в (2.5)).

Тогда для нелинейных функций, входящих в (2.5), получим:

$$\lambda_\alpha(x, y, t) = \begin{cases} \lambda_{\alpha 0}(x, t) + \sqrt{\varepsilon} \lambda_{\alpha, 1/2}^{\mathcal{M}}(x, y, t) + \varepsilon \dots, & y \in Y^{\mathcal{M}} \\ \lambda_{\alpha 0}(x, t) + \sqrt{\varepsilon} \lambda_{\alpha, 1/2}^{\mathcal{F}}(x, t) + \varepsilon \dots, & y \in Y^{\mathcal{F}} \end{cases} \quad (2.7)$$

Интегральное тождество (2.5) примет вид:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y \phi w (\partial_t s_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} \partial_t s_{\alpha, 1/2} + \dots) dx dy + \\ & + \int_{\Omega} \int_Y \phi \beta_\alpha w (s_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} s_{\alpha, 1/2} + \dots) (\partial_t p_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} \partial_t p_{\alpha, 1/2} + \dots) dx dy = \\ & = -\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \int_{Y^{\mathcal{F}}} K^{\mathcal{F}} (\lambda_{\alpha 0}^{\mathcal{F}} + \sqrt{\varepsilon} \lambda_{\alpha, 1/2}^{\mathcal{F}} + \dots) (\partial_{y_i} p_{\alpha 1} + \partial_{x_i} p_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} (\partial_{y_i} p_{\alpha, 3/2} + \partial_{x_i} p_{\alpha, 1/2})) \times \\ & \quad \times (\partial_{y_i} w + \varepsilon \partial_{x_i} w) dy dx - \\ & - \int_{\Omega} \int_{Y^{\mathcal{M}}} K^{\mathcal{M}} \lambda_{\alpha 0}^{\mathcal{M}} (\partial_{y_i} p_{\alpha, 1/2} + \sqrt{\varepsilon} (\partial_{y_i} p_{\alpha 1} + \partial_{x_i} p_{\alpha 0})) (\partial_{y_i} w + \varepsilon \partial_{x_i} w) dy dx + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Общая техника осреднения заключается в подстановке асимптотического разложения в интегральное тождество (2.8) и получении замкнутых выражений для последовательных членов разложения выбором тестовых функций  $w$ .

**2.4. Результат осреднения – макроскопическая модель.** Приведем сразу результат осреднения (полный вывод дается в разд. 3).

Определим осредненные фазовые давления и насыщенности в блоках и трещинах как:

$$\mathcal{P}_\alpha^{\mathcal{F}} \equiv \frac{1}{|Y^{\mathcal{F}}|} \int_{Y^{\mathcal{F}}} (p_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} p_{\alpha, 1/2}^{\mathcal{F}}) dy = p_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} p_{\alpha, 1/2}^{\mathcal{F}} \quad (2.9)$$

$$\mathcal{P}_\alpha^{\mathcal{M}} \equiv \frac{1}{|Y^{\mathcal{M}}|} \int_{Y^{\mathcal{M}}} (p_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} p_{\alpha, 1/2}^{\mathcal{M}}) dy = p_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} \langle p_{\alpha, 1/2}^{\mathcal{M}} \rangle_{\mathcal{M}}$$

$$\mathcal{S}_\alpha^{\mathcal{F}} \equiv \frac{1}{|Y^{\mathcal{F}}|} \int_{Y^{\mathcal{F}}} (s_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} s_{\alpha, 1/2}^{\mathcal{F}}) dy = s_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} s_{\alpha, 1/2}^{\mathcal{F}} \quad (2.10)$$

$$\mathcal{S}_\alpha^{\mathcal{M}} \equiv \frac{1}{|Y^{\mathcal{M}}|} \int_{Y^{\mathcal{M}}} (s_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} s_{\alpha, 1/2}^{\mathcal{M}}) dy = s_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} \langle s_{\alpha, 1/2}^{\mathcal{M}} \rangle_{\mathcal{M}},$$

$$\text{где } \langle \cdot \rangle_\alpha \equiv \frac{1}{|Y^\alpha|} \int_{Y^\alpha} (\cdot) dy, \quad \alpha = \mathcal{M}, \mathcal{F}.$$

Между ними существуют следующие связи:

$$\mathcal{P}_o^{\mathcal{F}} = 1 - \mathcal{P}_w^{\mathcal{F}}, \quad \mathcal{P}_o^{\mathcal{M}} = 1 - \mathcal{P}_w^{\mathcal{M}}, \quad \mathcal{P}_o^{\mathcal{F}} = \mathcal{P}_w^{\mathcal{F}} + p_c^{\mathcal{F}}(\mathcal{P}_w^{\mathcal{F}}), \quad \mathcal{P}_o^{\mathcal{M}} = \mathcal{P}_w^{\mathcal{M}} + p_c^{\mathcal{M}}(\mathcal{P}_w^{\mathcal{M}}) \quad (2.11)$$

Заметим, что макроскопические капиллярные давления в трещинах и блоках,  $\mathcal{P}_c^{\mathcal{F}}(\mathcal{G}_w^{\mathcal{F}})$  и  $\mathcal{P}_c^{\mathcal{M}}(\mathcal{G}_w^{\mathcal{M}})$ , не фигурируют в этой модели, так как они просто равны исходным функциям капиллярного давления, взятым от средних насыщенностей, с точностью  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ :

$$\mathcal{P}_c^{\mathcal{F}}(\mathcal{G}_w^{\mathcal{F}}) = p_c^{\mathcal{F}}(\mathcal{G}_w^{\mathcal{F}}), \quad \mathcal{P}_c^{\mathcal{M}}(\mathcal{G}_w^{\mathcal{M}}) = p_c^{\mathcal{M}}(\mathcal{G}_w^{\mathcal{M}}) \quad (2.12)$$

Макроскопическая модель процесса имеет вид следующей системы уравнений для средних давлений и насыщенностей в блоках и трещинах:

$$\begin{aligned} & \phi^{\mathcal{F}}(1-\theta)\partial_r \mathcal{G}_\alpha^{\mathcal{F}} + \phi^{\mathcal{F}}\beta_\alpha^{\mathcal{F}}(1-\theta)\mathcal{G}_\alpha^{\mathcal{F}}\partial_r \mathcal{P}_\alpha^{\mathcal{F}} = \\ & = \partial_{xi}(\mathbb{K}_{ik}\lambda_\alpha^{\mathcal{F}}(\mathcal{G}_\alpha^{\mathcal{F}})\partial_{xk}\mathcal{P}_\alpha^{\mathcal{F}}) + \xi_\alpha(\mathcal{P}_\alpha^{\mathcal{M}} - \mathcal{P}_\alpha^{\mathcal{F}}), \quad \alpha = w, o \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\mathcal{P}_w^{\mathcal{M}} = \mathcal{P}_w^{\mathcal{F}} - \frac{\tau_w^{\text{comp}}}{\beta_w^{\mathcal{M}}\mathcal{G}_w^{\mathcal{M}}}[\partial_r \mathcal{G}_w^{\mathcal{M}} + \beta_w^{\mathcal{M}}\mathcal{G}_w^{\mathcal{M}}\partial_r \mathcal{P}_w^{\mathcal{M}}] \quad (2.14)$$

$$p_c^{\mathcal{M}}(\mathcal{G}_w^{\mathcal{M}}) = p_c^{\mathcal{F}}(\mathcal{G}_w^{\mathcal{F}}) + \frac{(\tau^{\text{cap}} + \tau^{\text{cc}})}{\beta_o^{\mathcal{M}}}\partial_r \mathcal{G}_w^{\mathcal{M}} + (\tau_w^{\text{comp}} - \tau_o^{\text{comp}})\partial_r \mathcal{P}_w^{\mathcal{M}}, \quad (2.15)$$

где  $\theta \equiv |Y^{\mathcal{M}}|$  – объемная доля блока.

Эффективная проницаемость определена как:

$$\mathbb{K}_{ik} \equiv \int_{Y^{\mathcal{F}}} K^{\mathcal{F}} \left( \frac{\partial \Psi_k}{\partial y_i} + \delta_{ik} \right) dy, \quad (2.16)$$

а ячеечные функции  $\Psi_k(y)$  – решения первой задачи на ячейке (на трещине), для  $k = 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y_i} \left( K^{\mathcal{F}} \left( \frac{\partial \Psi_k}{\partial y_i} + \delta_{ik} \right) \right) = 0, \quad y \in Y^{\mathcal{F}} \\ & K^{\mathcal{F}} \left( \frac{\partial \Psi_k}{\partial y_i} + \delta_{ik} \right) n_i \Big|_{y \in \Gamma} = 0 \\ & \Psi_k - y\text{-периодична} \\ & \langle \Psi_k \rangle_{Y^{\mathcal{F}}} = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Времена запаздывания между блоками и трещинами, вызванные сжимаемостью фаз, и времена запаздывания, вызванные капиллярностью и совместным действием капиллярности и сжимаемости, определены как:

$$\tau_\alpha^{\text{comp}}(\mathcal{G}_w^{\mathcal{M}}) = \sqrt{\varepsilon} \langle \varphi \rangle_{\mathcal{M}} \phi^{\mathcal{M}} \frac{\beta_\alpha^{\mathcal{M}} \mathcal{G}_\alpha^{\mathcal{M}}}{\lambda_\alpha^{\mathcal{M}}} \quad (2.18)$$

$$\tau^{\text{cap}}(\mathcal{G}_w^{\mathcal{M}}) = \sqrt{\varepsilon} \langle \varphi \rangle_{\mathcal{M}} \phi^{\mathcal{M}} \beta_o^{\mathcal{M}} \frac{(\lambda_w^{\mathcal{M}} + \lambda_o^{\mathcal{M}})}{\lambda_w^{\mathcal{M}} \lambda_o^{\mathcal{M}}} \quad (2.19)$$

$$\tau^{\text{cc}}(\mathcal{G}_w^{\mathcal{M}}) = -\beta_o^{\mathcal{M}} \frac{dp_c^{\mathcal{M}}}{d\mathcal{G}_w^{\mathcal{M}}} \tau_o^{\text{comp}}, \quad (2.20)$$

а функция  $\varphi(y)$  – решение второй ячейечной задачи (на блоке):

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left( K^{\mathcal{M}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \right) = -1, \quad y \in Y^{\mathcal{M}}, \quad \varphi|_{y \in \Gamma} = 0 \quad (2.21)$$

Параметры массообмена  $\xi_\alpha$  определены следующим образом:

$$\xi_\alpha = \frac{\theta \lambda_\alpha^M}{\sqrt{\epsilon} \langle \phi \rangle_M}$$

Модель (2.13)–(2.15) является формальным асимптотическим разложением исходной задачи, сохраняющим члены порядка  $\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$ . Порядок отброшенных членов, таким образом,  $\mathcal{O}(\epsilon)$ .

### 3. Вывод осредненной модели

**3.1. Первый шаг осреднения – разложение на трещине.** Пусть  $w = w(x, y)$  в  $\Omega \times Y$ ,  $w|_{\partial\Omega} = 0$ ,  $w$  непрерывна и периодична по  $y$ . Тогда из интегрального тождества (2.8) для отрицательных степеней  $\epsilon$  получим:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \int_{Y^{\mathfrak{F}}} K^{\mathfrak{F}} \lambda_{\alpha 0} (\partial_{y_i} p_{\alpha 1}^{\mathfrak{F}} + \partial_{x_i} p_{\alpha 0}) \partial_{y_i} w dy dx \\ 0 &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \int_{\Omega} \int_{Y^{\mathfrak{F}}} K^{\mathfrak{F}} [\lambda_{\alpha 0} (\partial_{y_i} p_{\alpha 3/2}^{\mathfrak{F}} + \partial_{x_i} p_{\alpha 1/2}^{\mathfrak{F}}) + \lambda_{\alpha 1/2} (\partial_{y_i} p_{\alpha 1}^{\mathfrak{F}} + \partial_{x_i} p_{\alpha 0})] \partial_{y_i} w dy dx \end{aligned} \quad (3.1)$$

Из системы (3.1) вытекает:

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{\Omega} \int_{Y^{\mathfrak{F}}} w \partial_{y_i} (K^{\mathfrak{F}} \lambda_{\alpha 0} (\partial_{y_i} p_{\alpha 1}^{\mathfrak{F}} + \partial_{x_i} p_{\alpha 0})) dx dy + \int_{\Omega} \int_{\Gamma} w K^{\mathfrak{F}} \lambda_{\alpha 0} (\partial_{y_i} p_{\alpha 1}^{\mathfrak{F}} + \partial_{x_i} p_{\alpha 0}) n_i^{\Gamma} dx dy \\ 0 &= \int_{\Omega} \int_{Y^{\mathfrak{F}}} w \partial_{y_i} (K^{\mathfrak{F}} \lambda_{\alpha 0} (\partial_{y_i} p_{\alpha 3/2}^{\mathfrak{F}} + \partial_{x_i} p_{\alpha 1/2}^{\mathfrak{F}}) + K^{\mathfrak{F}} \lambda_{\alpha 1} (\partial_{y_i} p_{\alpha 1}^{\mathfrak{F}} + \partial_{x_i} p_{\alpha 0})) dy dx + \\ &+ \int_{\Omega} \int_{\Gamma} w (K^{\mathfrak{F}} \lambda_{\alpha 0} (\partial_{y_i} p_{\alpha 3/2}^{\mathfrak{F}} + \partial_{x_i} p_{\alpha 1/2}^{\mathfrak{F}}) + K^{\mathfrak{F}} \lambda_{\alpha 1} (\partial_{y_i} p_{\alpha 1}^{\mathfrak{F}} + \partial_{x_i} p_{\alpha 0})) n_i^{\Gamma} dx dy, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{n}^{\Gamma} = \{n_1^{\Gamma}, n_2^{\Gamma}, n_3^{\Gamma}\}$  – единичный нормальный вектор к границе  $\Gamma$ , направленный от трещины к блоку.

С учетом разложений (2.7) и того факта, что  $\lambda_{\alpha 0}$  не зависит от  $y$ , это эквивалентно двум задачам в классической формулировке:

$$\begin{cases} \partial_{y_i} (K^{\mathfrak{F}} (\partial_{y_i} p_{\alpha 1}^{\mathfrak{F}} + \partial_{x_i} p_{\alpha 0})) = 0, & y \in Y^{\mathfrak{F}} \\ K^{\mathfrak{F}} (\partial_{y_i} p_{\alpha 1}^{\mathfrak{F}} + \partial_{x_i} p_{\alpha 0}) n_i^{\Gamma} \Big|_{y \in \Gamma} = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} \partial_{y_i} (K^{\mathfrak{F}} (\partial_{y_i} p_{\alpha 3/2}^{\mathfrak{F}} + \partial_{x_i} p_{\alpha 1/2}^{\mathfrak{F}})) = 0, & y \in Y^{\mathfrak{F}} \\ K^{\mathfrak{F}} (\partial_{y_i} p_{\alpha 3/2}^{\mathfrak{F}} + \partial_{x_i} p_{\alpha 1/2}^{\mathfrak{F}}) n_i^{\Gamma} \Big|_{y \in \Gamma} = 0 \end{cases}$$

Это дает следующее представление для  $p_{\alpha 1}^{\mathfrak{F}}$  и  $p_{\alpha 3/2}^{\mathfrak{F}}$  через  $p_{\alpha 0}$  и  $p_{\alpha 1/2}^{\mathfrak{F}}$ :

$$p_{\alpha 1}^{\mathfrak{F}} = \psi_k(y) \frac{\partial p_{\alpha 0}}{\partial x_k} + \bar{p}_{\alpha 1}^{\mathfrak{F}}(x, t), \quad p_{\alpha 3/2}^{\mathfrak{F}} = \psi_k(y) \frac{\partial p_{\alpha 1/2}^{\mathfrak{F}}}{\partial x_k} + \bar{p}_{\alpha 3/2}^{\mathfrak{F}}(x, t),$$

где  $\bar{p}_{\alpha 1}^{\mathfrak{F}}(x, t)$  и  $\bar{p}_{\alpha 3/2}^{\mathfrak{F}}(x, t)$  – некоторые медленные функции, которые не войдут в осредненную модель. Для функций  $\psi_k(y)$  получаем первую задачу на ячейке (2.17). Последнее условие в ней добавляется для единственности решения.

**3.2. Второй шаг – осредненное уравнение на трещинах.** Пусть  $w = w(x)$  в  $\Omega$  и  $w|_{\partial\Omega} = 0$ . Тогда интегральное тождество (2.8) дает:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y w \phi (\partial_t s_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} \partial_t s_{\alpha 1/2}) dx dy + \int_{\Omega} \int_Y w \phi \beta_{\alpha} (s_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} s_{\alpha 1/2}) (\partial_t p_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} \partial_t p_{\alpha 1/2}) dx dy = \\ & = - \int_{\Omega} \int_{Y^{\mathcal{F}}} K^{\mathcal{F}} (\lambda_{\alpha 0}^{\mathcal{F}} + \sqrt{\varepsilon} \lambda_{\alpha 1/2}^{\mathcal{F}}) (\partial_{y_i} p_{\alpha 1} + \partial_{x_i} p_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} (\partial_{y_i} p_{\alpha 3/2} + \partial_{x_i} p_{\alpha 1/2})) \partial_{x_i} w dy dx + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned}$$

Или с учетом задачи (3.2):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_Y w \phi \partial_t (s_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} s_{\alpha 1/2}) dx dy + \\ & + \int_{\Omega} \int_Y w \phi \beta_{\alpha} (s_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} s_{\alpha 1/2}) \partial_t (p_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} p_{\alpha 1/2}) dx dy = \\ & = \int_{\Omega} \int_{Y^{\mathcal{F}}} w \partial_{x_i} (K^{\mathcal{F}} (\lambda_{\alpha 0}^{\mathcal{F}} + \sqrt{\varepsilon} \lambda_{\alpha 1/2}^{\mathcal{F}})) (\partial_{y_i} \Psi_k + \delta_{ik}) \partial_{x_k} (p_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} p_{\alpha 1/2}) dy dx + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned}$$

Вводя средние давления и насыщенности (2.9), получим:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} w [\phi^{\mathcal{F}} (1 - \theta) \partial_t \mathcal{S}_{\alpha}^{\mathcal{F}} + \phi^{\mathcal{M}} \theta \partial_t \mathcal{S}_{\alpha}^{\mathcal{M}}] dx + \\ & + \int_{\Omega} w [\phi^{\mathcal{F}} \beta_{\alpha}^{\mathcal{F}} (1 - \theta) \mathcal{S}_{\alpha}^{\mathcal{F}} \partial_t \mathcal{P}_{\alpha}^{\mathcal{F}} + \phi^{\mathcal{M}} \beta_{\alpha}^{\mathcal{M}} \theta \mathcal{S}_{\alpha}^{\mathcal{M}} \partial_t \mathcal{P}_{\alpha}^{\mathcal{M}}] dx = \int_{\Omega} w \partial_{x_i} (\mathbb{K}_{ik} \lambda_{\alpha}^{\mathcal{F}} (\mathcal{S}_{\alpha}^{\mathcal{F}}) \partial_{x_k} \mathcal{P}_{\alpha}^{\mathcal{F}}) dx \\ & \alpha = w, o, \end{aligned}$$

где эффективная проницаемость есть (2.16). Это дает первое осредненное уравнение системы (2.9) в почти законченном виде:

$$\begin{aligned} & \phi^{\mathcal{F}} (1 - \theta) \partial_t \mathcal{S}_{\alpha}^{\mathcal{F}} + \phi^{\mathcal{F}} \beta_{\alpha}^{\mathcal{F}} (1 - \theta) \mathcal{S}_{\alpha}^{\mathcal{F}} \partial_t \mathcal{P}_{\alpha}^{\mathcal{F}} = \\ & = \partial_{x_i} (\mathbb{K}_{ik} \lambda_{\alpha}^{\mathcal{F}} (\mathcal{S}_{\alpha}^{\mathcal{F}}) \partial_{x_k} \mathcal{P}_{\alpha}^{\mathcal{F}}) - \phi^{\mathcal{M}} \theta \partial_t \mathcal{S}_{\alpha}^{\mathcal{M}} - \phi^{\mathcal{M}} \beta_{\alpha}^{\mathcal{M}} \theta \mathcal{S}_{\alpha}^{\mathcal{M}} \partial_t \mathcal{P}_{\alpha}^{\mathcal{M}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

**3.3. Третий шаг – разложение на блоках.** Пусть функция  $w = w(x, y)$  – непрерывная функция обоих аргументов, действующая в пространстве  $\Omega \times Y$ ,  $w|_{\partial\Omega} = 0$ , такая, что выполняется условие  $w \equiv 0$  в  $Y^{\mathcal{F}}$ . Тогда для членов нулевого порядка интегральное тождество (2.8) дает:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{Y^{\mathcal{M}}} w \phi (\partial_t s_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} \partial_t s_{\alpha 1/2}^{\mathcal{M}}) dx dy + \\ & + \int_{\Omega} \int_{Y^{\mathcal{M}}} w \phi \beta_{\alpha} (s_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} s_{\alpha 1/2}^{\mathcal{M}}) (\partial_t p_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} \partial_t p_{\alpha 1/2}^{\mathcal{M}}) dx dy = \\ & = - \int_{\Omega} \int_{Y^{\mathcal{M}}} K^{\mathcal{M}} (\lambda_{\alpha 0}^{\mathcal{M}} + \sqrt{\varepsilon} \lambda_{\alpha 1/2}^{\mathcal{M}}) (\partial_{y_i} p_{\alpha 1/2}^{\mathcal{M}} + \sqrt{\varepsilon} (\partial_{y_i} p_{\alpha 1/2}^{\mathcal{M}} + \partial_{x_i} p_{\alpha 0})) \partial_{y_i} w dy dx + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned}$$

Интеграл по границе блока  $\Gamma$  равен нулю, так как функции  $w$  равны нулю на трещине и непрерывны.

Члены нулевого порядка дают:

$$\int_{\Omega} \int_{Y^{\mathcal{M}}} w \phi (\partial_t s_{\alpha 0} + \beta_{\alpha} s_{\alpha 0} \partial_t p_{\alpha 0}) dy dx = \int_{\Omega} \int_{Y^{\mathcal{M}}} w \partial_{y_i} (K^{\mathcal{M}} \lambda_{\alpha 0} \partial_{y_i} p_{\alpha 1/2}^{\mathcal{M}}) dy dx,$$

что определяет следующее выражение для  $p_{\alpha 1/2}^{\mathcal{M}}$  с учетом (2.6):

$$p_{\alpha 1/2}^{\mathcal{M}} = p_{\alpha 1/2}^{\mathcal{F}}(x, t) - \phi(y) \frac{\phi^{\mathcal{M}}}{\lambda_{\alpha 0}^{\mathcal{M}}} [\partial_t s_{\alpha 0} + \beta_{\alpha}^{\mathcal{M}} s_{\alpha 0} \partial_t p_{\alpha 0}], \quad (3.4)$$

где  $\phi(y)$  – решение второй задачи на ячейке (2.21). Граничное условие в (2.21) вытекает из условия непрерывности фазовых давлений (2.6).

**3.4. Четвертый шаг – осредненное уравнение на блоках.** Соотношение (3.4) дает возможность получить явное соотношение между функциями  $\mathcal{P}_\alpha^M$  и  $\mathcal{P}_\alpha^{\mathcal{F}}$ . В самом деле, беря среднее от (3.4) по  $Y^M$  (и учитывая, что в правой части (3.4) только функция  $\phi(y)$  зависит от  $y$ ), умножая на  $\sqrt{\varepsilon}$  и прибавляя  $p_{\alpha 0}$ , получим:

$$p_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} \langle p_{\alpha 1/2}^M \rangle_M = p_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} p_{\alpha 1/2}^{\mathcal{F}} - \sqrt{\varepsilon} \langle \phi \rangle_M \frac{\phi^M}{\lambda_{\alpha 0}} [\partial_t s_{\alpha 0} + \beta_\alpha^M s_{\alpha 0} \partial_t p_{\alpha 0}]$$

Учитывая определение средних давлений и насыщенностей (2.9), получим:

$$\mathcal{P}_\alpha^M = \mathcal{P}_\alpha^{\mathcal{F}} - \frac{\tau_\alpha^{\text{comp}}}{\beta_\alpha^M \mathcal{G}_\alpha^M} [\partial_t \mathcal{G}_\alpha^M + \beta_\alpha^M \mathcal{G}_\alpha^M \partial_t \mathcal{P}_\alpha^M], \quad \alpha = w, o, \quad (3.5)$$

что совпадает с уравнением (2.14). Характерные времена запаздывания  $\tau_\alpha^{\text{comp}}$  определены выражением (2.18).

В структуре времен запаздывания было учтено соотношение

$$\begin{aligned} \partial_t s_{\alpha 0} &= \partial_t (s_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} \langle s_{\alpha 1/2}^M \rangle_M) - \sqrt{\varepsilon} \partial_t \langle s_{\alpha 1/2}^M \rangle_M = \partial_t \mathcal{G}_\alpha^M + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) \\ \lambda_{\alpha 0}^M &\equiv \lambda_\alpha^M (s_{\alpha 0}) = \lambda_\alpha^M (s_{\alpha 0}) + \sqrt{\varepsilon} \frac{d\lambda_\alpha^M}{ds_{\alpha 0}} \langle s_{\alpha 1/2}^M \rangle_M - \sqrt{\varepsilon} \frac{d\lambda_\alpha^M}{ds_{\alpha 0}} \langle s_{\alpha 1/2}^M \rangle_M = \\ &= \lambda_\alpha^M (s_{\alpha 0} + \sqrt{\varepsilon} \langle s_{\alpha 1/2}^M \rangle_M) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) = \lambda_\alpha^M (\mathcal{G}_\alpha^M) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}) \end{aligned}$$

В результате чего получаем:

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\lambda_{\alpha 0}^M} \partial_t s_{\alpha 0} = \frac{\sqrt{\varepsilon} \partial_t \mathcal{G}_\alpha^M + \mathcal{O}(\varepsilon)}{\lambda_\alpha^M (\mathcal{G}_\alpha^M) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})} = \frac{\sqrt{\varepsilon} \partial_t \mathcal{G}_\alpha^M}{\lambda_\alpha^M (\mathcal{G}_\alpha^M)} + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

и т.п. для других членов.

Вместо двух уравнений (3.5) для фазовых давлений удобнее заменить одно из них уравнением для капиллярного давления. Вычитая одно уравнение (3.5) из другого, получаем уравнение связи средних капиллярных давлений в блоках и трещинах:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_c^M &= \mathcal{P}_c^{\mathcal{F}} + \tau_w^{\text{comp}} \partial_t \mathcal{P}_w^M - \tau_o^{\text{comp}} \partial_t (\mathcal{P}_w^M + \mathcal{P}_c^M) + \left( \frac{\tau_w^{\text{comp}}}{\beta_w^M \mathcal{G}_w^M} + \frac{\tau_o^{\text{comp}}}{\beta_o^M \mathcal{G}_o^M} \right) \partial_t \mathcal{G}_w^M = \\ &= \mathcal{P}_c^{\mathcal{F}} + \left( \frac{\tau_w^{\text{comp}}}{\beta_w^M \mathcal{G}_w^M} + \frac{\tau_o^{\text{comp}}}{\beta_o^M \mathcal{G}_o^M} - \tau_o^{\text{comp}} \frac{d\mathcal{P}_c^M}{d\mathcal{G}_w^M} \right) \partial_t \mathcal{G}_w^M + (\tau_w^{\text{comp}} - \tau_o^{\text{comp}}) \frac{\partial \mathcal{P}_w^M}{\partial t}, \quad (3.6) \end{aligned}$$

что сводится к уравнению (2.15), если связать средние капиллярные давления  $\mathcal{P}_c^{\mathcal{F}}$  и  $\mathcal{P}_c^M$  с исходными заданными кривыми капиллярного давления  $p_c^{\mathcal{F}}(s)$  и  $p_c^M(s)$ , то есть получить соотношения (2.12). Используя разложения выражений для  $p_c^{\mathcal{F}}(\mathcal{G}_w^{\mathcal{F}})$  и  $p_c^M(\mathcal{G}_w^M)$  в ряд Тейлора, учитывая выражения (2.10), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} p_c^{\mathcal{F}}(\mathcal{G}_w^{\mathcal{F}}) &= p_c^{\mathcal{F}}(s_{w0}) + \sqrt{\varepsilon} \frac{dp_c^{\mathcal{F}}}{ds_{w0}} s_{w1/2}^{\mathcal{F}} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ p_c^M(\mathcal{G}_w^M) &= p_c^M(s_{w0}) + \sqrt{\varepsilon} \frac{dp_c^M}{ds_{w0}} \langle s_{w1/2}^M \rangle_M + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned}$$

Поскольку все функции справа не зависят от  $y$ , получаем:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_c^{\mathcal{F}}(\mathcal{S}_w^{\mathcal{F}}) &\equiv \left\langle p_c^{\mathcal{F}}(\mathcal{S}_w^{\mathcal{F}}) \right\rangle_{\mathcal{F}} = p_c^{\mathcal{F}}(\mathcal{S}_w^{\mathcal{F}}) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \mathcal{P}_c^{\mathcal{M}}(\mathcal{S}_w^{\mathcal{M}}) &\equiv \left\langle p_c^{\mathcal{M}}(\mathcal{S}_w^{\mathcal{M}}) \right\rangle_{\mathcal{M}} = p_c^{\mathcal{M}}(\mathcal{S}_w^{\mathcal{M}}) + \mathcal{O}(\varepsilon),\end{aligned}$$

что подтверждает соотношения (2.12). Найденные соотношения дают возможность записать формулу (3.6) через исходные заданные функции капиллярного давления: (2.15).

Для выражений в правой части макроскопических уравнений (3.3) можно получить явное выражение через разницу давлений, используя уравнение (2.14):

$$\partial_t \mathcal{S}_\alpha^{\mathcal{M}} + \beta_\alpha^{\mathcal{M}} \mathcal{S}_\alpha^{\mathcal{M}} \partial_t \mathcal{P}_\alpha^{\mathcal{M}} = - \frac{\beta_\alpha^{\mathcal{M}} \mathcal{S}_\alpha^{\mathcal{M}}}{\tau_\alpha^{\text{comp}}} (\mathcal{P}_\alpha^{\mathcal{M}} - \mathcal{P}_\alpha^{\mathcal{F}}),$$

что дает окончательную форму осредненных уравнений (2.13).

**4. Физический анализ модели.** Уравнения (2.13) описывают поведение насыщенности  $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}$  и давления  $\mathcal{P}^{\mathcal{F}}$  в трещинах с обменными членами справа, пропорциональными разнице фазовых давлений. Соотношения (2.14), (2.15) представляют собой систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений для насыщенности  $\mathcal{S}^{\mathcal{M}}$  и давления  $\mathcal{P}^{\mathcal{M}}$  в блоках (при известных насыщенности и давлении в трещинах).

**4.1. Частный случай однофазной сжимаемой системы.** В однофазном случае система (2.13)–(2.15) принимает вид хорошо известной модели двойной пористости [2, 3]:

$$\phi^{\mathcal{F}} \beta^{\mathcal{F}} (1 - \theta) \partial_t \mathcal{P}^{\mathcal{F}} - \partial_{xi} (\mathbb{K}_{ik} \partial_{xk} \mathcal{P}^{\mathcal{F}}) = \xi (\mathcal{P}^{\mathcal{M}} - \mathcal{P}^{\mathcal{F}}) \quad (4.1)$$

$$\mathcal{P}^{\mathcal{M}} - \mathcal{P}^{\mathcal{F}} = -\tau^{\text{comp}} \frac{\partial \mathcal{P}^{\mathcal{M}}}{\partial t}, \quad (4.2)$$

где  $\xi \equiv \frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon} \langle \phi \rangle_{\mathcal{M}}}$ ,  $\tau^{\text{comp}} = \sqrt{\varepsilon} \langle \phi \rangle_{\mathcal{M}} \phi^{\mathcal{M}} \beta^{\mathcal{M}} \mu$ ,  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости.

**4.2. Частный случай несжимаемой двухфазной системы.** В случае, когда фазы несжимаемы, система (2.13)–(2.15) принимает вид:

$$\phi^{\mathcal{F}} (1 - \theta) \partial_t \mathcal{S}_\alpha^{\mathcal{F}} - \partial_{xi} (\mathbb{K}_{ik} \lambda_\alpha^{\mathcal{F}}(\mathcal{S}_\alpha^{\mathcal{F}}) \partial_{xk} \mathcal{P}_\alpha^{\mathcal{F}}) = \xi_\alpha (\mathcal{P}_\alpha^{\mathcal{M}} - \mathcal{P}_\alpha^{\mathcal{F}}), \quad \alpha = w, o \quad (4.3)$$

$$\mathcal{P}_w^{\mathcal{M}} = \mathcal{P}_w^{\mathcal{F}} - \frac{\tau_w^{\text{comp}}}{\beta_w^{\mathcal{M}} \mathcal{S}_w^{\mathcal{M}}} \partial_t \mathcal{S}_w^{\mathcal{M}} \quad (4.4)$$

$$p_c^{\mathcal{M}}(\mathcal{S}_w^{\mathcal{M}}) = p_c^{\mathcal{F}} + \frac{\tau_o^{\text{cap}}}{\beta_o^{\mathcal{M}}} \partial_t \mathcal{S}_w^{\mathcal{M}}, \quad (4.5)$$

где отношения  $\frac{\tau_w^{\text{comp}}}{\beta_w^{\mathcal{M}} \mathcal{S}_w^{\mathcal{M}}}$  и  $\frac{\tau_o^{\text{cap}}}{\beta_o^{\mathcal{M}}}$  не зависят от коэффициентов сжимаемости. В самом деле, согласно соотношениям (2.18), (2.19) получаем:

$$\frac{\tau_w^{\text{comp}}}{\beta_w^{\mathcal{M}} \mathcal{S}_w^{\mathcal{M}}} = \sqrt{\varepsilon} \langle \phi \rangle_{\mathcal{M}} \frac{\phi^{\mathcal{M}}}{\lambda_w^{\mathcal{M}}}, \quad \frac{\tau_o^{\text{cap}}}{\beta_o^{\mathcal{M}}} = \sqrt{\varepsilon} \langle \phi \rangle_{\mathcal{M}} \phi^{\mathcal{M}} \frac{(\lambda_w^{\mathcal{M}} + \lambda_o^{\mathcal{M}})}{\lambda_w^{\mathcal{M}} \lambda_o^{\mathcal{M}}}$$

Как видно, из двух уравнений (4.4), (4.5) дифференциальным оказывается только второе (относительно насыщенности на блоках). Первое – алгебраическое уравнение для давления на блоках. Это означает, что запаздывание в системе вызывается только капиллярностью, а именно, сильным различием в капиллярных эффектах на блоках и

трещинах. Разница в фазовых давлениях в этом случае также существует, но лишь как следствие связи фазовых давлений с капиллярным давлением.

Эта модель совпадает с моделью [3, 8] для несжимаемого течения в недеформируемой среде.

**4.3. Капиллярное запаздывание и запаздывание, вызванное сжимаемостью.** Сравнение со случаем несжимаемых флюидов (4.2) и однофазного течения (4.1) позволяет лучше понять суть полученной модели (2.13)–(2.15) и роль сжимаемости в двухфазной системе.

Неравновесное поведение системы (2.13)–(2.15) определяется подсистемой двух ОДУ (2.14), (2.15) для насыщенности  $\mathcal{S}_w^M$  и давления  $\mathcal{P}_w^M$  в блоках. Связь решения на блоках и трещинах через дифференциальные уравнения по времени указывает на неравновесный характер процесса на макроуровне. Что при этом происходит на микроуровне, какие конкретно процессы вызывают эту неравновесность? Прежде всего, выделим два основных механизма:

– *Неравновесное капиллярное перераспределение фаз* на макромасштабе, вызванное тем, что средняя насыщенность в блоках меняется медленнее, чем в трещинах, что нарушает равенство средних капиллярных давлений (условие капиллярного равновесия). В итоге, возникает разница средних капиллярных давлений, которая зависит от скорости изменения насыщенности в блоке. В уравнении (2.15) этот процесс описывается первым слагаемым в правой части:

$$p_c^M - p_c^{\mathcal{F}} = \frac{\tau^{\text{cap}}}{\beta_o^M} \frac{\partial \mathcal{S}_w^M}{\partial t}.$$
 Разница в капиллярных давлениях автоматически вызывает и разницу в фазовых давлениях, которая описывается

первым слагаемым в правой части уравнения (2.14): 
$$\mathcal{P}^M - \mathcal{P}^{\mathcal{F}} = -\frac{\tau_w^{\text{comp}}}{\beta_w^M \mathcal{S}_w^M} \frac{\partial \mathcal{S}_w^M}{\partial t}.$$

В сильно контрастной среде такой процесс привел бы к долговременной памяти. В рассматриваемом же случае умеренного контраста времена запаздывания малы. Этот процесс не зависит от сжимаемости фаз и пород, и выражение для разницы давлений совпадает с формулами (4.4), (4.5), полученными для несжимаемых фаз.

– *Релаксация волн давления в сжимаемой среде*, вызванная тем, что возмущение давления в низкопроницаемых блоках распространяется много медленнее, чем в трещинах. Возникает разница средних давлений, которая описывается вторым слагаемым в

правой части уравнения (2.14): 
$$\mathcal{P}^M - \mathcal{P}^{\mathcal{F}} = -\tau_w^{\text{comp}} \frac{\partial \mathcal{P}^M}{\partial t}.$$
 Тогда процесс релаксации не зависит от двухфазности системы, а его уравнение совпадает с уравнением (4.1) для однофазной системы.

Механизмы неравновесности, связанные с перекрестными эффектами наложения сжимаемости и капиллярности, можно описать следующим образом.

– *Перераспределение фаз из-за асимметричного отжима (выдавливания).* Сжимаемость приводит к расширению жидкостей и компактизации пор под весом вышележащих пород (если давление падает), что ведет к «выдавливанию» обеих фаз из пор. В геонауках такой эффект называют «отжимом» жидкости из пор. Этот эффект похож на перистальтику, когда жидкость в канале выдавливается из него за счет резкого сжатия канала. Если такое выдавливание происходит симметрично для обеих фаз, то они отжимаются как единое целое, что не меняет их насыщенность. В случае же асимметричного отжима происходит перераспределение фаз в порах, что влияет на насыщенность. В блоках это движение, вызванное отжимом, запаздывает, что вносит дополнительную неравновесность в поведение насыщенности. Возникает дополнительная разница в капиллярных давлениях, которая описывается третьим членом в (2.15):

$p_c^M - p_c^F = (\tau_w^{\text{comp}} - \tau_o^{\text{comp}}) \frac{\partial \mathcal{P}_w^M}{\partial t}$ . Как видно, этот эффект действительно отсутствует при

симметричном отжиме фаз, то есть когда  $\tau_w^{\text{comp}} = \tau_o^{\text{comp}}$ .

– *Перераспределение фаз из-за нелинейного отжима*, вызванное наложением капиллярности и сжимаемости, при учете нелинейности капиллярных явлений. Этот эффект описывается вторым слагаемым в правой части уравнения (2.15):  $p_c^M - p_c^F = \frac{\tau^{\text{cc}}}{\beta_o^M} \frac{\partial \mathcal{F}_w^M}{\partial t}$ .

**5. Подход к описанию сильно сжимаемых пористых сред.** Полученные результаты относятся к слабосжимаемой пористой среде, так что коэффициенты сжимаемости пор входят в структуру исходных уравнений, но пористость и проницаемость в них считаются от давления зависящими очень слабо. Насколько можно снять это условие слабостью сжимаемости? Допустим, что среда может сжиматься сильно, и, что при этом не меняются фазовые проницаемости и кривые капиллярного давления блоков и трещин. Тогда есть все основания полагать, что сильная сжимаемость среды не повлияет на структуру асимптотических разложений в первых его членах, а значит, полученные макроскопические уравнения (2.13)–(2.15) формально не изменятся. Однако, тогда исходные пористости  $\phi^F$  и  $\phi^M$ , а также проницаемости  $K^F$  и  $K^M$  зависят от давления. В результате тензор эффективной проницаемости (2.16), (2.17) также зависит от давления через проницаемость трещин  $K^F$ . Времена запаздывания (2.13) тоже будут зависеть от давления через пористость блоков  $\phi^M$  и проницаемость блоков  $K^M$ , которая входит в ячеечную задачу (2.21). Более того, поскольку давления в воде и нефти разные, то проницаемости  $K^F$  и  $K^M$  и пористость  $\phi^M$  ведут себя по-разному в порах, занятых водой и нефтью. Это можно учесть, если считать их зависящими от давлений, осредненных по фазам:

$$\mathcal{P}^F \equiv \mathcal{P}_w^F \mathcal{F}_w^F + \mathcal{P}_o^F (1 - \mathcal{F}_w^F) \quad \text{и} \quad \mathcal{P}^M \equiv \mathcal{P}_w^M \mathcal{F}_w^M + \mathcal{P}_o^M (1 - \mathcal{F}_w^M) \quad (5.1)$$

Таким образом, возникает ситуация, в которой ячеечные задачи (2.17) и (2.21) зависят от макроскопических переменных  $\mathcal{P}_w^M$ ,  $\mathcal{P}_w^F$ ,  $\mathcal{P}_o^F$ ,  $\mathcal{P}_o^M$ ,  $\mathcal{F}_w^M$ ,  $\mathcal{F}_w^F$ , что является типичным случаем не полностью осредненной модели. И хотя ее можно использовать для качественного анализа процесса, но для численных расчетов она не проще, чем исходная неосредненная система уравнений.

Ситуация изменяется, если ячеечные задачи можно решить аналитически. Тогда макроскопические давления и насыщенности появятся в структуре эффективной проницаемости и времен релаксации в явном виде. Это можно сделать для простой геометрии блоков  $Y^M$ . Например, для сферических блоков радиуса  $R$ , ячеечная задача (2.21) имеет точное аналитическое решение, а ячеечная задача (2.17) имеет приближенное решение, полученное методом потенциальных течений [3]:

$$\varphi(y) = \frac{R^2 - r^2}{6K^M}, \quad \Psi_k(y) \approx \frac{y_k \left[ 2 + \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right]}{2 + \theta} - y_k \quad (k = 1, 2, 3); \quad r \equiv \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2},$$

где  $R = l \left( \frac{3\theta}{4\pi} \right)^{1/3}$ , а  $l$  – размерная длина одного периода неоднородности среды. Тогда можно получить:

$$\langle \varphi \rangle_M = \frac{l^2}{15K^M} \left( \frac{3\theta}{4\pi} \right)^{2/3}, \quad \mathbb{K} \approx 2K^{\mathcal{F}} \frac{1-\theta}{2+\theta} \quad (5.2)$$

Эти соотношения должны быть дополнены законом сжимаемости, записанным относительно проницаемостей  $K^{\mathcal{F}}$  и  $K^M$ , например, экспоненциальным законом типа (1.1):

$$K^M = K^{M,0} e^{\tilde{\beta}_K^M (P^M - P^0)}, \quad K^{\mathcal{F}} = K^{\mathcal{F},0} e^{\tilde{\beta}_K^{\mathcal{F}} (P^{\mathcal{F}} - P^0)}, \quad (5.3)$$

где  $\tilde{\beta}_K^{\mathcal{F}}$  и  $\tilde{\beta}_K^M$  коэффициенты сжимаемости по проницаемости, давления  $\mathcal{P}^{\mathcal{F}}$  и  $\mathcal{P}^M$  определены в (5.1), а верхним индексом “ноль” обозначена некая характерная величина.

Теперь модель (2.13)–(2.15) с соотношениями (5.2), (5.3) и (5.1) полностью осреднена, но существенно нелинейна по давлению.

В частности, для однофазного случая получаем замкнутую нелинейную систему течения (сильно-) сжимаемой жидкости в (сильно-) сжимаемой среде:

$$\beta^{\mathcal{F}} (1-\theta) \phi^{\mathcal{F}} (\mathcal{P}^{\mathcal{F}}) \partial_t \mathcal{P}^{\mathcal{F}} - \partial_{xi} (\mathbb{K} (\mathcal{P}^{\mathcal{F}})) \partial_{xi} \mathcal{P}^{\mathcal{F}} = \xi (\mathcal{P}^M) (\mathcal{P}^M - \mathcal{P}^{\mathcal{F}}) \quad (5.4)$$

$$\mathcal{P}^M - \mathcal{P}^{\mathcal{F}} = -\tau^{\text{comp}} (\mathcal{P}^M) \frac{\partial \mathcal{P}^M}{\partial t}$$

$$\xi = \frac{15\theta^{1/3} \left( \frac{4\pi}{3} \right)^{2/3}}{\sqrt{\varepsilon} l^2} K^M (\mathcal{P}^M), \quad \mathbb{K} \approx 2 \frac{1-\theta}{2+\theta} K^{\mathcal{F}} (\mathcal{P}^{\mathcal{F}}) \quad (5.5)$$

$$\tau^{\text{comp}} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{15} \beta^M l^2 \mu \left( \frac{3\theta}{4\pi} \right)^{2/3} \frac{\phi^M (\mathcal{P}^M)}{K^M (\mathcal{P}^M)},$$

где  $\beta^{\mathcal{F}}$ ,  $\beta^M$ ,  $\theta$ ,  $\mu$ ,  $l$ ,  $\varepsilon$  – константы, а зависимости  $\phi^M (\mathcal{P}^M)$ ,  $\phi^{\mathcal{F}} (\mathcal{P}^{\mathcal{F}})$ ,  $K^M (\mathcal{P}^M)$ ,  $K^{\mathcal{F}} (\mathcal{P}^{\mathcal{F}})$  описываются соотношениями типа (5.3).

**Заключение.** Построенная осредненная модель (2.13)–(2.15) представляет теоретический интерес. Во-первых, она полностью осреднена и в ней отсутствуют микроскопические переменные, а задачи ячейки (2.17), (2.21) не содержат макроскопических переменных, поэтому решаются только один раз.

Во-вторых, модель предсказывает и описывает несколько механизмов запаздывания, часть из которых нетривиальна. Интуитивно можно было бы ожидать, что введение сжимаемости в двухфазную систему приведет к двойному запаздыванию: капиллярному (свойственному для несжимаемых двухфазных течений) и депрессионному (свойственному однофазным сжимаемым течениям). Кроме этого, показано, что возникают дополнительные перекрестные механизмы перераспределения фаз, вызванные отжимом фаз и нелинейным отжимом, которые, в свою очередь, нетривиально зависят от асимметрии или симметрии процесса сжимаемости по отношению к двум фазам.

Практическое значение полученная модель имеет в случаях сильно нестационарных процессов, когда сжимаемость играет существенную роль в распространении возмущения. Различные эффекты памяти особенно сильно проявляются в процессах с переменным направлением эволюции. Например, процессы в подземных хранилищах газа, в которых закачка газа в водоносный пласт чередуется с его отбором. Накопление истории осцилляций давления и насыщенности в таких процессах может привести к сильному запаздыванию и полному расхождению в качественном поведении процесса по сравнению с процессом без памяти.

Выше был рассмотрен только случай экспоненциального закона сжимаемости, который применим для жидкостей и твердых тел, но не для газов. Поэтому примени-

мость данной модели для системы газ-жидкость возможна только для случая сильно сжатого газа при больших давлениях, свойства которого близки к жидкости.

Работа выполнена при поддержке комитета Науки министерства образования и науки Республики Казахстан: грант № AP05132680.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ПММ. 1960. Т. 24. № 5. С. 852–864.
2. *Arbogast T., Douglas J., Hornung U.* Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory // SIAM J. Math. Anal. 1990. V. 21. № 4. P. 823–836.
3. *Panfilov M.* Macroscale Models of Flow through Highly Heterogeneous Porous Media. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. 363 p.
4. *Amaziane B., Jurak M., Pankratov L., Vrbaski A.* Some remarks on the homogenization of immiscible incompressible two-phase flow in double porosity media // Discr. Cont. Dyn. Syst. Ser. B. 2018. V. 23. № 2. P. 629–665.
5. *Amaziane B., Milisic J.P., Panfilov M., Pankratov L.* Generalized nonequilibrium capillary relations for two-phase flow through heterogeneous media // Phys. Rev. E. 2012. V. 85. P. 016304.
6. *Amaziane B., Pankratov L., Jurak M., Vrbaski A.* A fully homogenized model for incompressible two-phase flow in double porosity media // Appl. Anal. 2015. April.
7. *Bourgeat A., Luckhaus S., Mikelic A.* Convergence of the homogenization process for a double-porosity model of immiscible two-phase flow // SIAM J. Math. Anal. 1966. V. 27. № 6. P. 1520–1543.
8. *Bourgeat A., Panfilov M.* Effective two-phase flow through highly heterogeneous porous media // Comput. Geosci. 1998. V. 2. P. 191–215.
9. *Yeh L.M.* Homogenization of two-phase flow in fractured media // Math. Models Meth. Appl. Sci. 2006. V. 16. P. 1627–1651.
10. *Arbogast T.* A simplified dual porosity model for two-phase flow // in: Computat. Meth. in Water Res. IX. V. 2: Math. Model. Water Res. Eds. *T.F. Russell et al.* Southampton: Comput. Mech. Publ., 1992.
11. *Ait Mahiout L., Amaziane B., Mokrane A., Pankratov L.* Homogenization of immiscible compressible twophase flow in double porosity media // Electron. J. Diff. Equat. 2016. V. 52. P. 1–28.
12. *Amaziane B., Pankratov L.* Homogenization of a model for water-gas flow through double-porosity media // Math. Meth. Appl. Sci. 2016. V. 39. P. 425–451.
13. *Jafari I., Masihi M., Nasiri Zarandi M.* Experimental study on imbibition displacement mechanisms of two-phase fluid using micromodel: Fracture network, distribution of pore size, and matrix construction // Phys. Fluids. 2017. V. 29. № 11. P. 122004.
14. *Khoshkalam Y., Khosravi M., Rostami B.* Visual investigation of viscous cross-flow during foam injection in a matrix-fracture system // Phys. Fluids. 2019. V. 31. P. 023102.
15. *Yao C.C., Yan P.Y.* A diffuse interface approach to injection-driven flow of different miscibility in heterogeneous porous media // Phys. Fluids. 2015. V. 27. № 8. P. 083101.
16. *Li H., Guo H., Yang Z. et al.* Evaluation of oil production potential in fractured porous media // Phys. Fluids. 2019. V. 31. P. 052104.
17. *Jafari I., Masihi M., Nasiri Zarandi M.* Numerical simulation of counter-current spontaneous imbibition in water-wet fractured porous media: Influences of water injection velocity, fracture aperture, and 826 grains geometry // Phys. Fluids. 2017. V. 29. № 11. P. 113305.
18. *Panfilov M.* Macroscale Models of Flow through Highly Heterogeneous Porous Media. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. 363 p.
19. *Hussein M.* Multiphase flow simulations in heterogeneous fractured media through hybrid grid method // AIP Conf. Proc. 2013. № 1558. P. 2048.
20. *Saedi B., Ayatollahi S., Masihi M.* Free fall and controlled gravity drainage processes in fractured porous media: Laboratory and modelling investigation // Can. J. Chem. Eng. 2015. V. 93. P. 2286.
21. *Allaire G.* Homogenization and two-scale convergence // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 28. P. 1482–1518.

22. *Meirmanov A.M.* Mathematical Models for Poroelastic Flows, Atlantis Studies in Differential Equations. V. 1. Beijing: Atlantis Press, 2014. 308 p.
23. *Мейрманов А.М.* Повторное усреднение в задачах фильтрации подземных жидкостей // Научн. зап. Белгор. гос. ун-та. Сер. Математика—Физика. № 17 (136). Вып. 28. 2012. 16 с.
24. *Николаевский В.Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. 233 с.
25. *Scheidegger A.E.* The Physics of Flow through Porous Media. 3rd Edition. Toronto: Univ. Press, 1974. 372 p.

### Macroscopic Model of Two-phase Flow of Compressible Fluids in Double-porosity Media

**M. Panfilov<sup>a,b,#</sup>, Zh. D. Baishemirov<sup>c,d</sup>, and A. S. Berdyshev<sup>c,d</sup>**

<sup>a</sup> *Institut Elie Cartan – Université de Lorraine/CNRS, Nancy, France*

<sup>b</sup> *Institut Jean le Rond d'Alembert – Sorbonne Université/CNRS, Paris, France*

<sup>c</sup> *Abay Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan*

<sup>d</sup> *Institute of information and computational technologies, Almaty, Kazakhstan*

<sup>#</sup> *e-mail: michel.panfilov@univ-lorraine.fr*

For a two-phase flow of compressible liquids in a compressible porous medium with double porosity, a macroscopic model is obtained, on the basis of which a qualitative analysis of the mechanisms of occurrence of various types of memory (delay) is performed. The two main mechanisms are non-instantaneous capillary phase redistribution and non-instantaneous pressure relaxation. In addition to them, cross effects of memory arise, caused by asymmetric squeezing of liquids from pores due to phase expansion and pore compaction, as well as nonlinear overlap of compressibility and capillarity (nonlinear squeezing). To construct the model, the asymptotic method of two-scale homogenization in the variational formulation is applied. Complete homogenization has been realized thanks to the separation of nonlocality and nonlinearity into different levels of asymptotic expansion. All characteristic delay times are explicitly defined as functions of saturation and pressure.

*Keywords:* double porosity, homogenization, two-phase flow, compressible fluid, nonlocality, memory, delay, disequilibrium

### REFERENCES

1. *Barenblatt G.I., Zheltov Yu.P., Kochina I.N.* Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata] // JAMM, 1960. vol. 24, no. 5, pp. 1286–1303.
2. *Arbogast T., Douglas J., Hornung U.* Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory // SIAM J. Math. Anal. 1990. vol. 21, no. 4, pp. 823–836.
3. *Panfilov M.* Macroscale Models of Flow through Highly Heterogeneous Porous Media. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. 363 p.
4. *Amaziane B., Jurak M., Pankratov L., Vrbaski A.* Some remarks on the homogenization of immiscible incompressible two-phase flow in double porosity media // Discr. Cont. Dyn. Syst. Ser. B., 2018, vol. 23, no. 2, pp. 629–665.
5. *Amaziane B., Milisic J.P., Panfilov M., Pankratov L.* Generalized nonequilibrium capillary relations for two-phase flow through heterogeneous media // Phys. Rev. E., 2012, vol. 85, pp. 016304.
6. *Amaziane B., Pankratov L., Jurak M., Vrbaski A.* A fully homogenized model for incompressible two-phase flow in double porosity media // Appl. Anal., 2015, April.
7. *Bourgeat A., Luckhaus S., Mikelic A.* Convergence of the homogenization process for a double-porosity model of immiscible two-phase flow // SIAM J. Math. Anal., 1966, vol. 27, no. 6, pp. 1520–1543.
8. *Bourgeat A., Panfilov M.* Effective two-phase flow through highly heterogeneous porous media // Comput. Geosci., 1998, vol. 2, pp. 191–215.
9. *Yeh L.M.* Homogenization of two-phase flow in fractured media // Math. Models Meth. Appl. Sci., 2006, vol. 16, pp. 1627–1651.

10. *Arbogast T.* A simplified dual porosity model for two-phase flow // in: *Computat. Meth. in Water Res. IX. vol. 2: Math. Model. Water Res. Eds T.F. Russell et al.* Southampton: Comput. Mech. Publ., 1992.
11. *Ait Mahiout L., Amaziane B., Mokrane A., Pankratov L.* Homogenization of immiscible compressible twophase flow in double porosity media // *Electron. J. Diff. Equat.*, 2016, vol. 52, pp. 1–28.
12. *Amaziane B., Pankratov L.* Homogenization of a model for water-gas flow through double-porosity media // *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2016, vol. 39, pp. 425–451.
13. *Jafari I., Masihi M., Nasiri Zarandi M.* Experimental study on imbibition displacement mechanisms of two-phase fluid using micromodel: Fracture network, distribution of pore size, and matrix construction // *Phys. Fluids*, 2017, vol. 29, no. 11, p. 122004.
14. *Khoshkalam Y., Khosravi M., Rostami B.* Visual investigation of viscous cross-flow during foam injection in a matrix-fracture system // *Phys. Fluids*, 2019, vol. 31, p. 023102.
15. *Yao C.C., Yan P.Y.* A diffuse interface approach to injection-driven flow of different miscibility in heterogeneous porous media // *Phys. Fluids*, 2015, vol. 27, no. 8, p. 083101.
16. *Li H., Guo H., Yang Z. et al.* Evaluation of oil production potential in fractured porous media // *Phys. Fluids*, 2019, vol. 31, p. 052104.
17. *Jafari I., Masihi M., Nasiri Zarandi M.* Numerical simulation of counter-current spontaneous imbibition in water-wet fractured porous media: Influences of water injection velocity, fracture aperture, and 826 grains geometry // *Phys. Fluids*, 2017, vol. 29, no. 11, p. 113305.
18. *Panfilov M.* *Macroscale Models of Flow through Highly Heterogeneous Porous Media.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. 363 p.
19. *Hussein M.* Multiphase flow simulations in heterogeneous fractured media through hybrid grid method // *AIP Conf. Proc.*, 2013, no. 1558, p. 2048.
20. *Saedi B., Ayatollahi S., Masihi M.* Free fall and controlled gravity drainage processes in fractured porous media: Laboratory and modelling investigation // *Can. J. Chem. Eng.*, 2015, vol. 93, p. 2286.
21. *Allaire G.* Homogenization and two-scale convergence // *SIAM J. Math. Anal.*, 1992, vol. 28, pp. 1482–1518.
22. *Meirmanov A.M.* *Mathematical Models for Poroelastic Flows, Atlantis Studies in Differential Equations. V. 1.* Beijing: Atlantis Press, 2014. 308 p.
23. *Meirmanov A.M.* Reiterated homogenization in the problems of filtration of underground liquids // *Sci. Notes Belgorod State Univ.. Ser. Math.–Phys.*, 2012, no. 17 (136). iss. 128 16 p. (in Russian)
24. *Nikolaevsky V.N.* *The Mechanics of Porous and Fractured Media.* Moscow: Nedra, 1984. 233 p. (in Russian)
25. *Scheidegger A.E.* *The Physics of Flow through Porous Media.* 3rd Ed. Toronto: Univ. Press, 1974. 372 p.

УДК 532.546

**СТРУКТУРА ТЕМПЕРАТУРНОГО ФРОНТА ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ  
В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ СРЕДЕ**

© 2020 г. А. А. Афанасьев\*

*Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия**\* e-mail: afanasyev@imec.msu.ru*

Поступила в редакцию 30.01.2019 г.

После доработки 03.10.2019 г.

Принята к публикации 05.10.2019 г.

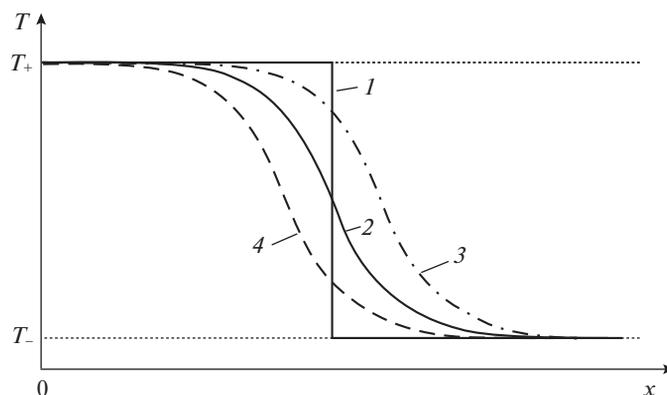
Исследована структура фронта температуры при неизотермической однофазной фильтрации в трещиновато-пористой среде с учетом неравновесных эффектов, обусловленных различными значениями температуры в трещинах и вмещающей их низкопроницаемой среде. В рамках модели двойной пористости даны оценки для толщины фронта и ограничены области значений параметров подобия, при которых она определяется процессами теплопроводности или неравновесным теплообменом в среде. Для различных пространственных масштабов неизотермического течения выделено три асимптотических случая распределения температуры в структуре фронта, описывающихся конечными соотношениями.

*Ключевые слова:* пористая среда, неизотермическая фильтрация, двойная пористость, сильный разрыв, автомодельное решение

DOI: 10.31857/S0032823520010026

**1. Постановка задачи.** При закачке нагретой жидкости в однородную холодную пористую среду, насыщенную той же самой жидкостью, образуется фронт температуры  $S$ . Предположим, что в одномерном течении он распространяется от границы  $x = 0$  в область  $x > 0$  (рис. 1). Перед фронтом сохраняется начальная температура  $T_-$ , а за ним пористая среда нагревается до температуры закачиваемой жидкости  $T_+$ . Предполагая локальное тепловое равновесие и малость кондуктивного переноса тепла по сравнению с конвективным, фронт можно рассматривать как сильный разрыв, на котором температура скачком возрастает от  $T_-$  до  $T_+$  (рис. 1, линия 1). Решения с такими разрывами, скорость которых выражается из конечного соотношения, рассматривались ранее (напр. [1, 2]). Если кондуктивный перенос тепла сопоставим с конвективным, то теплопроводность сглаживает разрывное распределение температуры. В результате фронт  $S$  представляет собой протяженную область, в которой температура непрерывно возрастает от  $T_-$  до  $T_+$  (рис. 1, кривая 2). Фильтрация с подобными температурными слоями, протяженность которых растет со временем,  $t$ , как  $\sqrt{t}$ , рассматривалась в [3–5].

При высоких скоростях фильтрации течение осложняется отсутствием локального теплового равновесия между жидкостью и скелетом пористой среды. В этом случае время, за которое фронт проходит некоторое характерное расстояние, имеет тот же или больший порядок величины, что и время, за которое в элементарном объеме выравниваются температуры жидкости и скелета пористой среды. Подобные неравновесные эффекты, также как и теплопроводность, могут привести к образованию пере-



**Рис. 1.** Схема распределения температуры  $T$  в фронте  $S$  при локальном равновесии (кривые 1, 2), в случаях если конвективный поток тепла существенно больше кондуктивного потока (кривая 1) и если эти потоки сопоставимы (кривые 2–4). Разрывные линии 3 и 4 показывают распределения  $T$  в средах  $\Phi_f$  и  $\Phi_m$  при отсутствии локального теплового равновесия.

ходного слоя  $S$  конечной толщины, в котором температура непрерывна. Структура таких фронтов рассматривалась в работах [6, 7], в которых показано, что при характерных размерах зерен геологических пористых сред ( $10^0$ – $10^4$  мкм) подобные неравновесные эффекты несущественны для геофизических приложений теории фильтрации.

В настоящей работе рассмотрена структура температурного фронта при фильтрации в трещиновато-пористых средах, когда течение осложняется наличием двух различных масштабов пористости и проницаемости. Существуют высокопроницаемые трещины или каналы, между которыми располагаются низкопроницаемые пористые блоки. Для прогнозирования фильтрации в таких средах часто используют модель двойной пористости [8, 9]. В этой модели трещиновато-пористая среда рассматривается в виде двух взаимопроникающих континуумов (пористых сред) — трещин,  $\Phi_f$ , и блоков,  $\Phi_m$ , между которыми происходит теплообмен [8, 10]. В практических приложениях часто рассматривается предельный случай, когда  $\Phi_f$  имеет малую пористость и высокую проницаемость, а  $\Phi_m$ , наоборот, — высокую пористость и малую проницаемость [11–13]. В этом случае течение жидкости в основном происходит по трещинам, тогда как больший ее объем находится в блоках. В настоящей работе для общности исследования данных предположений о  $\Phi_f$  и  $\Phi_m$  не делается, а существенным для дальнейшего изложения является только наличие двух различных масштабов пористости проницаемости.

При фильтрации в трещиновато-пористой среде нагретая жидкость может переносить высокие значения температуры  $T_+$  существенно быстрее по трещинам  $\Phi_f$ , чем по блокам  $\Phi_m$  (рис. 1, кривые 3 и 4). В результате локальное тепловое равновесие между  $\Phi_f$  и  $\Phi_m$  нарушается, а фронт  $S$  имеет конечную толщину. При этом в обоих взаимопроникающих континуумах возможен конвективный перенос тепла жидкостью, который в отличие от [6, 7, 14, 15] учитывается в настоящей работе. Так как характерный размер низкопроницаемых блоков в среде  $\Phi_m$  ( $>1$  м) существенно больше характерного размера зерен ( $10^0$ – $10^4$  мкм), то неравновесное распределение температуры в тре-

щиновато-пористых средах может развиваться в существенно большем диапазоне параметров течения, чем в случаях, рассмотренных ранее [6, 7]. Подобную неравновесность необходимо учитывать в геофизических приложениях, связанных с получением геотермальной энергии и природными процессами [11, 13].

**2. Основные уравнения.** Поровое пространство трещиновато-пористой среды охарактеризуем параметром  $\gamma = V_f/V$  – относительным объемом среды  $\Phi_f$ , где  $V = V_f + V_m$  – полный элементарный объем среды, а  $V_i, i = f, m$  – объем, относящийся к континууму  $\Phi_i$ . Тогда относительный объем среды  $\Phi_m$  равен  $1 - \gamma = V_m/V$ . Для каждого континуума зададим пористость  $\phi_i = V_{\text{пор},i}/V_i$ , абсолютную проницаемость  $K_i$ , и коэффициент теплопроводности насыщенной пористой среды  $\lambda_i$ , где  $V_{\text{пор},i}$  – объем пустот, заполненных жидкостью в соответствующем континууме. Тогда поровые пространства в средах  $\Phi_f$  и  $\Phi_m$  занимают, соответственно, доли  $\gamma\phi_f$  и  $(1 - \gamma)\phi_m$  элементарного объема  $V$ .

Неизотермическая фильтрация несжимаемой жидкости в тонком горизонтальном слое трещиновато-пористой среды описывается системой уравнений [8, 11, 13, 16, 17]

$$\mathbf{u}_i = -\frac{K_i}{\mu} \nabla P_i, \quad i = f, m \quad (2.1)$$

$$\nabla \mathbf{u}_i = n_i v_{mf} \quad (2.2)$$

$$\partial_t(\rho e)_i + \nabla(\rho e_i \mathbf{u}_i) = -\nabla(P_i \mathbf{u}_i) + n_i v_{mf} P_i + \lambda_i \Delta T_i + n_i v_{mf} \rho C T_{mf} + n_i q_{mf} \quad (2.3)$$

$$v_{mf} = \sigma \frac{K_m}{\mu} (P_m - P_f), \quad q_{mf} = \sigma \lambda_m (T_m - T_f) \quad (2.4)$$

Здесь  $\partial_t = \partial/\partial t$ ,  $\mathbf{u}$  – скорость фильтрации,  $\mu = \text{const}$  – динамическая вязкость жидкости,  $P$  – давление,  $\sigma = 12/(L_0^2)$  – параметр формы блоков в изотропной среде  $\Phi_m$ , характеризующий форму и размер блоков и, следовательно, интенсивность теплообмена между трещинами и блоками [12],  $L_0$  – характерный размер блоков,  $\rho = \text{const}$  – плотность жидкости, а  $e$  – ее удельная внутренняя энергия,  $(\rho e)_i$  – эффективная внутренняя энергия насыщенной пористой среды  $\Phi_i$ ,  $T$  – температура,  $v_{mf}$  и  $q_{mf}$  – потоки жидкости и энергии, передающейся посредством теплопроводности, из среды  $\Phi_m$  в  $\Phi_f$ , введены константы  $n_f = 1$ ,  $n_m = -1$ , а индекс  $i = m, f$  обозначает параметры, относящиеся к среде  $\Phi_i$ .

Соотношение (2.1) – закон фильтрации Дарси, а (2.2) – уравнения неразрывности для каждого  $\Phi_i$ . Закон сохранения энергии (2.3) основывается на предположении о малой скорости фильтрации  $\mathbf{u}$ , которое заведомо выполняется для широкого класса течений в пористых средах [16]. Тогда, считая  $\mathbf{u}$  малым, при записи баланса энергии можно пренебречь изменением кинетической энергии  $E \sim \mathbf{u}^2$  и притоком тепла вследствие диссипации кинетической энергии  $dQ^{**} \sim \mathbf{u}^2$ . В результате закон сохранения энергии для каждого континуума  $\Phi_i$  постулируем в виде

$$dU_i = dA_i^{(e)} + dQ_i^{(e)}, \quad (2.5)$$

где  $dU$  – изменение внутренней энергии,  $dA^{(e)}$  – элементарная работа внешних сил,  $dQ^{(e)}$  – элементарный приток тепла [18]. В сформулированной задаче массовые силы отсутствуют, поэтому член  $dA^{(e)}$  содержит работу только поверхностных сил. Левые части уравнений (2.3) соответствуют приращению  $dU_i$  в законе (2.5). Члены  $-\nabla(P_i \mathbf{u}_i)$

и  $n_i P_i v_{mf}$  соответствуют работе внешних сил давления  $dA_i^{(e)}$ , приводящих к течению по средам  $\Phi_i$  и между  $\Phi_m$  и  $\Phi_f$ , соответственно. Последние три члена в правой части (2.3), равны кондуктивному (т.е. из-за теплопроводности) притоку тепла  $dQ_i^{(e)}$  по среде  $\Phi_i$ , а также конвективному и кондуктивному перетоку тепла между  $\Phi_m$  и  $\Phi_f$ , соответственно.

Соотношения (2.4) задают переток жидкости и кондуктивный поток тепла между взаимопроницающими средами, согласно которым  $v_{mf}$  прямо пропорционально разности давлений  $P_m - P_f$ , а  $q_{mf}$  – температур  $T_m - T_f$ .

Температура  $T_{mf}$  жидкости во втором слагаемом в правой части уравнения (2.3), ответственном за конвективный перенос тепла между  $\Phi_i$ , сносится против направления потока. Если течение происходит из  $\Phi_m$  в  $\Phi_f$ , т.е. при  $P_m \geq P_f$ ,  $v_{mf} \geq 0$ , то  $T_{mf} = T_m$ , а если, наоборот, – из  $\Phi_f$  в  $\Phi_m$ , т.е. при  $P_m < P_f$ ,  $v_{mf} < 0$ , то  $T_{mf} = T_f$ .

Эффективная плотность внутренней энергии  $(\rho e)_i$  (и теплоемкость  $(\rho C)_i$ ) бесконечно малого объема среды  $\Phi_i$  записывается в виде суммы объемных энергий (и теплоемкостей) жидкости и скелета пористой среды:

$$\begin{aligned} (\rho y)_f &= \gamma(\phi_f \rho y_f + (1 - \phi_f) \rho_r y_{r,f}), \quad y = e, C \\ (\rho y)_m &= (1 - \gamma)(\phi_m \rho y_m + (1 - \phi_m) \rho_r y_{r,m}), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $\rho_r = \text{const}$  – плотность, а  $e_{r,i}$  – удельная внутренняя энергия скелета пористой среды. Здесь предполагается, что  $e_i = C T_i$  и  $e_{r,i} = C_r T_i$ , где  $C$  и  $C_r$  – теплоемкости.

**3. Уравнения в безразмерной форме и предложения.** Учитывая сформулированную задачу (рис. 1), определим безразмерные параметры в виде

$$x = x_* L, \quad t = t_* t_s, \quad u = u_* \Omega, \quad P = P_* P_s, \quad T = T_* T_s, \quad (3.1)$$

где звездочкой обозначены безразмерные переменные, а  $L$ ,  $t_s$ ,  $\Omega$ ,  $P_s$  и  $T_s$  – характерные масштабы длины, времени, скорости фильтрации, давления и температуры, соответственно. Далее предполагается, что введенные масштабы связаны соотношениями

$$\begin{aligned} L &= \frac{\Omega t_s}{\bar{\phi}}, \quad \Omega = \frac{\bar{K} P_s}{\mu L}, \quad T_s = T_+ - T_- \\ \bar{\phi} &= \gamma \phi_f + (1 - \gamma) \phi_m, \quad \bar{K} = K_f + K_m, \quad \bar{\lambda} = \lambda_f + \lambda_m, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $\bar{\phi}$ ,  $\bar{K}$  и  $\bar{\lambda}$  – эффективные (т.е. осредненные по масштабам  $\Phi_i$ ) пористость, проницаемость и коэффициент теплопроводности. Согласно уравнениям (3.2),  $L$  есть перемещение за время  $t_s$  частицы жидкости в одномерном однофазном течении с истинной скоростью  $\Omega/\bar{\phi}$  [16], а, согласно закону Дарси (2.1),  $P_s$  есть характерный перепад давления на масштабе  $L$ , обеспечивающий течение со скоростью фильтрации  $\Omega$ . Безразмерные температуры нагнетаемой жидкости и ее значение при  $t = 0$  равны 1 и 0, соответственно.

Подставляя соотношения (2.4)–(3.2) в уравнения (2.1)–(2.3) и всюду далее опуская символ звездочки у безразмерных величин, систему уравнений фильтрации в трещиновато-пористой среде представим в виде

$$\mathbf{u}_i = -\kappa_i \nabla P_i \quad (3.3)$$

$$\nabla \mathbf{u}_i = n_i \frac{\kappa_m}{B} (P_m - P_f) \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} & \text{Sh}_i \partial_i T_i + \mathbf{u}_i \nabla T_i + \Upsilon \mathbf{u}_i \nabla P_i = \\ & = \frac{\Lambda_i}{\text{Pe}} \Delta T_i + n_i \frac{\kappa_m}{B} (P_m - P_f)(T_{mf} - T_i) + \frac{n_i \Lambda_m}{B \text{Pe}} (T_m - T_f), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где введены параметры подобия

$$\begin{aligned} \kappa_i &= \frac{K_i}{K}, & \Lambda_i &= \frac{\lambda_i}{\lambda}, & \text{Sh}_i &= \frac{(\rho C)_i}{\phi \rho C} \\ \Upsilon &= \frac{P_s}{\rho C T_s}, & B &= \frac{1}{\sigma L^2}, & \text{Pe} &= \frac{\rho C \Omega L}{\lambda} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Так как  $\kappa_f + \kappa_m = 1$  и  $\Lambda_f + \Lambda_m = 1$ , то из параметров  $\kappa_i$  и  $\Lambda_i$  только  $\kappa_m$  и  $\Lambda_m$  независимые, а  $\kappa_f = 1 - \kappa_m$ ,  $\Lambda_f = 1 - \Lambda_m$ .

Параметр подобия  $\Upsilon$  характеризует влияние работы внешних поверхностных сил (давления) на распределение температуры. Для типичных параметров течения воды, рассматривающихся в данной работе ( $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $C = 4200$  Дж/(кг К),  $P_s = 10^5$  Па,  $T_s \geq 1^\circ\text{C}$ ), выполняется условие  $\Upsilon \ll 1$ , поэтому всюду далее полагаем  $\Upsilon \equiv 0$ .

Параметр подобия  $B$  характеризует интенсивность тепломассообмена между  $\Phi_i$ . Если  $B \rightarrow 0$ , то множители перед разностями давлений  $P_m - P_f$  и температур  $T_m - T_f$  в правых частях уравнений (3.4) и (3.5) стремятся к бесконечности, а, следовательно, эти разности стремятся к нулю. Это означает, что при  $B \rightarrow 0$   $P$  и  $T$  в средах  $\Phi_i$  быстро выравниваются. Чем больше  $B$ , тем больше могут различаться давления  $P_i$  и температуры  $T_i$ , а локальное равновесие между средами нарушается. Таким образом,  $B$  есть мера неравновесности течения из-за различной динамики процессов в средах  $\Phi_i$ .

В условиях локального теплового равновесия ( $B = 0$ ) фильтрация описывается уравнениями, полученными попарным суммированием уравнений (3.3)–(3.5) при  $i = f$  с  $i = m$ :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} &= -\nabla P, & \nabla \bar{\mathbf{u}} &= 0, & \overline{\text{Sh}} \partial_i T + \bar{\mathbf{u}} \nabla T &= \frac{\Delta T}{\text{Pe}} \\ P &= P_f = P_m, & T &= T_f = T_m, & \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{u}_f + \mathbf{u}_m, & \overline{\text{Sh}} &= \text{Sh}_f + \text{Sh}_m \end{aligned} \quad (3.7)$$

Заметим, что система уравнений (3.3)–(3.5) расщепляется на две подсистемы, которые можно решить последовательно одну за другой. Сначала достаточно решить уравнения (3.3), (3.4) относительно  $P_i$  и  $\mathbf{u}_i$ , а затем, используя полученные распределения давления и скорости, решить два уравнения на температуру (3.5).

Далее ограничимся случаем, когда на границе  $x = 0$  давления в средах равны, а объемы жидкости, закачиваемой в среды  $\Phi_i$ , пропорциональны соответствующей проницаемости  $K_i$ , т.е. в безразмерных переменных заданы граничные условия

$$x = 0: \quad P_i = P_+, \quad T_i = 1, \quad u_m/u_f = \kappa_m/\kappa_f, \quad (3.8)$$

где  $P_+ = \text{const}$ . Учитывая (3.8), получим, что решение системы (3.3), (3.4) дается соотношениями

$$u_i = \kappa_i, \quad P_i = P_+ - x \quad (3.9)$$

Таким образом, давления в средах  $\Phi_i$  равны друг другу во всей области  $x > 0$  и, согласно соотношениям (2.4), переток жидкости между  $\Phi_i$  равен нулю:  $v_{mf} = 0$ . Тогда второй

член в правой части уравнения (3.5) тождественно равен нулю, а уравнения на температуру упрощаются:

$$\begin{aligned} \text{Sh}_i \partial_t T_i + \kappa_i \nabla T_i &= \Lambda_i \alpha \Delta T_i + n_i \Lambda_m \beta (T_m - T_f) \\ \alpha &= \frac{1}{\text{Pe}}, \quad \beta = \frac{1}{B \text{Pe}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Учитывая уравнения (3.7) и соотношения (2.5), получим, что температура в равновесном течении ( $B = 0$ ) удовлетворяет уравнению

$$\overline{\text{Sh}} \partial_t T + \nabla T = \frac{\Delta T}{\text{Pe}} \quad (3.11)$$

**4. Малые возмущения и сильные разрывы.** При  $\text{Pe} \rightarrow \infty$  система двух уравнений (1.16) на распределение температуры в неравновесном течении имеет две характеристические скорости [1]

$$c_i = \frac{\kappa_i}{\text{Sh}_i} = \text{const} \quad (4.1)$$

С характеристикой  $c_m$  (или  $c_f$ ) в среде  $\Phi_m$  (или  $\Phi_f$ ) переносятся малые возмущения температуры  $T_m$  (или  $T_f$ ), а параметры в смежной среде  $\Phi_f$  (или  $\Phi_m$ ) не изменяются. Таким образом, малые возмущения (4.1) описывают перенос возмущений  $T_i$  жидкостью в условиях пренебрежимо малой теплопроводности и отсутствия теплообмена между средами  $\Phi_i$ .

Из интегральной формы записи законов сохранения (3.10) [18, 19] следует, что при  $\text{Pe} \rightarrow \infty$  и любом  $B$  возможны разрывы двух типов,  $S_f$  и  $S_m$ , распространяющихся со скоростями  $c_f$  и  $c_m$ . Разрывы  $S_f$  (и  $S_m$ ) переносят возмущения  $T_f$  (и  $T_m$ ), а температура  $T_m$  (и  $T_f$ ) в них непрерывна. На каждом разрыве  $S_i$  выполняется два условия, соответствующие законам сохранения (3.10), поэтому для эволюционности разрыва  $S_i$  необходимо потребовать, чтобы от него уходила ровно одна характеристика [19]. Так как в среде  $\Phi_i$  скорость разрыва равна  $c_i$ , то, в случае общего положения  $c_f \neq c_m$ , и от разрыва  $S_i$  уходит только одна характеристика другого типа  $c_j$ ,  $j \neq i$ . Это означает, что любой разрыв  $S_i$  эволюционен.

При  $\text{Pe} \rightarrow \infty$  уравнение (3.11) на распределение температуры в равновесном течении имеет одну характеристическую скорость

$$c = \frac{1}{\overline{\text{Sh}}} = \text{const}, \quad c < 1 \quad (4.2)$$

Заметим, что из выражения (4.2) ясен физический смысл параметра  $\overline{\text{Sh}}$ . Температурное число Струхала  $\overline{\text{Sh}} > 1$  показывает во сколько раз в равновесном течении частица жидкости движется быстрее, чем распространяются возмущения температуры  $T$ , вызванные конвективным переносом тепла. Действительно, если частица нагретой жидкости догоняет  $S$ , то далее она в переходном слое отдает тепло скелету пористой среды, охлаждается и движется дальше, обгоняя  $S$ . Числа  $\text{Sh}_i$  характеризуют те же самые процессы в средах  $\Phi_i$  при  $B \rightarrow \infty$ .

Из интегральной формы записи уравнения (3.11) следует, что в равновесном течении возможны разрывы только одного типа  $S$ , распространяющегося с характеристической скоростью  $c$ . При  $B = 0$  на разрыве  $S$  выполняется одно условие, соответствующее закону сохранения (3.11), поэтому для эволюционности разрыва  $S$  необходимо

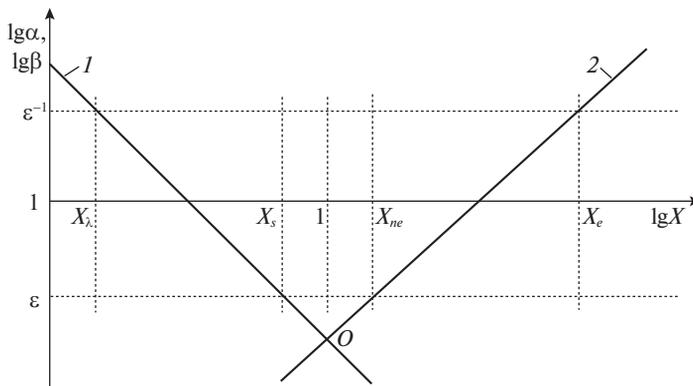


Рис. 2. Зависимость  $\alpha$  и  $\beta$  от  $X$  в логарифмических осях – прямые 1 и 2 соответственно.

потребуется, чтобы характеристики (4.2) от него не уходили. Так как разрыв распространяется со скоростью  $c$ , то в равновесной модели разрыв  $S$  всегда эволюционен.

Рассмотрим разрыв  $S$  в рамках более общей неравновесной модели (3.10), из которой в пределе  $B = 0$  получено уравнение (3.11). В случае общего положения  $c \neq c_i$ , поэтому при  $B \neq 0$  разрыв  $S$  неэволюционен, так как от него обязательно уходит одна характеристика  $c_m$  и одна  $c_f$ . Таким образом, имеется кажущееся противоречие, связанное с тем, что разрыв  $S$  эволюционен только в предельном случае  $B = 0$  и неэволюционен при любом  $B > 0$ , несмотря на то, что уравнение (3.11) есть частный случай системы (3.10). Для разрешения противоречия рассмотрим структуру фронта разрыва  $S$  в неравновесном течении.

##### 5. Характерные масштабы в температурном фронте. Введем переменную

$$X = L\sqrt{\sigma} = 1/\sqrt{12} \cdot L/L_0,$$

равную числу вовлеченных в неизотермическое течение блоков в среде  $\Phi_m$ , умноженному на коэффициент  $1/\sqrt{12}$ . Таким образом,  $X$  характеризует пространственный масштаб течения, если за единицу длины взят размер одного блока. Тогда, согласно (3.2), возрастание  $X$  соответствует пропорциональному росту времени закачки нагретой жидкости  $t_s$ .

Используя переменную  $X$ , параметры  $\alpha$  и  $\beta$  в уравнениях (3.10) представим в виде

$$\alpha = \frac{1}{\text{Pe}_0 X}, \quad \beta = \frac{X}{\text{Pe}_0}, \quad \text{Pe}_0 = \frac{\rho C \Omega}{\lambda \sqrt{\sigma}} \quad (5.1)$$

Здесь  $\text{Pe}_0$  – число Пекле, если масштаб длины равен  $1/\sqrt{\sigma} \sim L_0$ . Таким образом, параметр  $\alpha$ , пропорциональный кондуктивному переносу тепла внутри каждой среды  $\Phi_i$ , убывает с  $X$  как  $X^{-1}$ , а параметр  $\beta$ , пропорциональный интенсивности теплообмена между средами, возрастает прямопропорционально  $X$ . Согласно (5.1), кривые  $\alpha(X)$  и  $\beta(X)$  на рис. 2 пересекаются в точке  $O$  с координатами  $X = 1$ ,  $\alpha = \beta = 1/\text{Pe}_0$ .

Введем малую величину  $\epsilon \ll 1$ , такую что при  $\alpha < \epsilon$  и  $\beta < \epsilon$  можно пренебречь правой частью уравнения (3.10) по сравнению с конвективным членом  $\kappa_i \nabla T_i$ , имеющим

порядок единицы в силу выбранных единиц измерения (3.1), (3.2). Определим значения  $X_\lambda$ ,  $X_s$ ,  $X_{ne}$  и  $X_e$  так, чтобы выполнялись равенства (рис. 2)

$$\alpha(X_\lambda) = \varepsilon^{-1}, \quad \alpha(X_s) = \varepsilon, \quad \beta(X_{ne}) = \varepsilon, \quad \beta(X_e) = \varepsilon^{-1}$$

Тогда, согласно (5.1), получим

$$X_\lambda = \frac{\varepsilon}{\text{Pe}_0}, \quad X_s = \frac{1}{\varepsilon \text{Pe}_0}, \quad X_{ne} = \text{Pe}_0 \varepsilon, \quad X_e = \frac{\text{Pe}_0}{\varepsilon} \quad (5.2)$$

В силу введенных определений, при  $t \sim 1$  и  $X \geq X_s$  ( $\text{Pe} \gg 1$ ) влиянием теплопроводности на распределение параметров в пространстве можно пренебречь, а при  $X < X_\lambda$  ( $\text{Pe} \ll 1$ ) кондуктивный перенос тепла преобладает над конвективным. При  $X_\lambda \leq X < X_s$  необходимо учитывать оба механизма переноса тепла внутри каждого континуума  $\Phi_i$ . При  $X \geq X_e$  ( $B\text{Pe} \ll 1$ ) происходит течение близкое к локальному тепловому равновесию, т.е.  $T_f \approx T_m$ , а при  $X < X_{ne}$  ( $B\text{Pe} \gg 1$ ) теплообмен между средами пренебрежимо мал и, следовательно, распределения температур  $T_m$  и  $T_f$  не зависят друг от друга. При  $X_{ne} \leq X < X_e$  существенны неравновесные эффекты из-за теплообмена между средами  $\Phi_i$ .

Предположим, что  $X_s < X_{ne}$ , т.е., согласно обозначениям (5.2),  $\text{Pe}_0 \gg 1$ , а точка  $O$  на рис. 2 лежит ниже горизонтальной прямой с ординатой  $\varepsilon$ . Тогда выполняется следующая цепочка неравенств

$$X_\lambda \ll X_s < 1 < X_{ne} \ll X_e \quad (5.3)$$

Введем переменные

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \sqrt{\frac{\text{ShPe}x}{t}}, \quad \xi = (\text{Sh}x - t) \sqrt{\frac{\text{Pe}}{\text{Sh}t}}, \quad \eta = \frac{\text{Sh}x - t}{\text{Sh}t} \\ \xi &= \xi_0 - \sqrt{\frac{\text{Pe}_0 X t}{\text{Sh}}}, \quad \xi = \eta \sqrt{\text{ShPe}_0 X t} \end{aligned} \quad (5.4)$$

и далее рассмотрим распределения  $T_i$  на плоскостях  $\{\xi, T\}$  и  $\{\eta, T\}$ . По определению (5.4) сильный разрыв  $S$  (при  $\alpha, \beta \rightarrow 0$ ) расположен при  $\xi = 0$  и  $\eta = 0$ . Переменные  $\xi$  и  $\eta$  удобны для выделения распределений в структуре фронта разрыва  $S$ , в которых характерный масштаб длины  $\Delta x$  пропорционален  $\sqrt{t}$  и  $t$ , соответственно.

На масштабах  $X < X_\lambda$ ,  $t \sim 1$  уравнения (3.10) сводятся к системе двух уравнений теплопроводности, решение которых зависит только от переменной  $\xi_0$ :

$$\text{Sh}_i \partial_i T_i = \frac{\Lambda_i}{\text{Pe}} \Delta T_i, \quad T_i = 1 - \text{erf} \left( \frac{\xi_0}{2} \sqrt{\frac{\text{Sh}_i}{\text{Sh} \Lambda_i}} \right), \quad (5.5)$$

где  $\text{erf}(x)$  — функция ошибок. Согласно выражениям (5.4), на начальных этапах закачки жидкости, т.е. при  $Xt \rightarrow 0$ , выполняется условие  $\xi_0 \rightarrow \xi$ , а в решении (5.5) можно заменить  $\xi_0$  на  $\xi$ . Уравнения (5.5) описывают автомодельные температурные пограничные слои в средах  $\Phi_i$ , образующиеся мгновенно при  $Xt \rightarrow 0$  (рис. 3а, кривые 1, 2). Толщина этих слоев  $\Delta x_i$  дается оценкой

$$\Delta x_i \sim \sqrt{\frac{t \Lambda_i}{\text{Sh}_i \text{Pe}}} = \sqrt{\frac{\Lambda_i}{\text{Sh}_i \text{Pe}_0}} \left( \frac{t}{X} \right)^{1/2} \quad (5.6)$$

При  $X < X_\lambda$  и возрастании  $Xt$  кривые 1 и 2 на плоскости  $\{\xi, T\}$  смещаются влево, так как переменная  $\xi$  убывает при  $\xi_0 = \text{const}$  (рис. 3а). Решение (5.5) на плоскости  $\{\eta, T\}$ ,

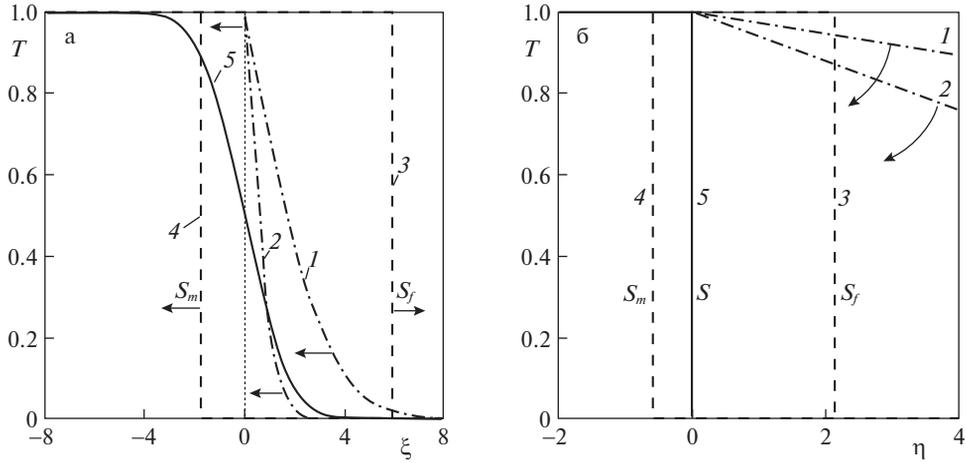


Рис. 3. Асимптотические случаи распределения  $T_i$  при  $Sh_m = 1.86$ ,  $Sh_f = 0.53$ ,  $\kappa_m = \Lambda_m = 0.3$ ,  $Re_0 = 18.3$ . Кривые 1, 2 и 3 – распределения  $T_f$ ,  $T_m$  при  $X < X_\lambda$ ,  $t \ll 1$  и  $X_s \leq X < X_{ne}$ , соответственно. Кривая 5 – равновесное распределение  $T = T_f = T_m$  при  $X \geq X_e$ . Стрелки показывают направление смещения кривых при возрастании  $Xt$ .

$\eta \sim 1$  дает прямые линии (рис. 3б). В пределе  $Xt \rightarrow 0$  они совпадают с горизонтальной прямой  $T = 1$ , а при возрастании  $Xt$  их наклон к оси  $\eta$  увеличивается.

На масштабах  $X_\lambda < X < X_s$ ,  $t \sim 1$ , когда члены  $\kappa_i \nabla T_i$  и  $\Lambda_i \Delta T_i / Pe$  в уравнениях (3.10) сравнимы, а теплообмен между средами  $\Phi_i$  еще пренебрежимо мал ( $X < X_e$ ), распределение температуры описывается уравнениями

$$Sh_i \partial_i T_i + \kappa_i \nabla T_i = \frac{\Lambda_i}{Pe} \Delta T_i \quad (5.7)$$

Решение системы (5.7) имеет вид

$$T_i = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_i}{2}\right), \quad \xi_i = (Sh_i x - \kappa_i t) \sqrt{\frac{Pe}{\Lambda_i Sh_i t}} \quad (5.8)$$

Следовательно, температуры  $T_i$  имеют автомодельные распределения от различных переменных  $\xi_i$ . Решения (5.8) описывают постепенное формирование двух различных фронтов температуры  $S_i$  в средах  $\Phi_i$ , для толщины которых  $\Delta x_i$  остается справедливой оценка (5.6). С возрастанием  $Xt$  толщины фронтов на плоскости  $\{\xi, T\}$  уменьшаются и в результате переходных процессов при  $X_\lambda \leq X < X_s$  распределения температуры непрерывным образом эволюционируют к следующему асимптотическому распределению при  $X_s \leq X < X_{ne}$ .

На масштабах  $X_s \leq X < X_{ne}$ ,  $t \sim 1$  можно пренебречь как теплопроводностью ( $X_s \leq X$ ), так и теплообменом между средами ( $X < X_{ne}$ ), а (3.10) сводится к двум уравнениям переноса

$$Sh_i \partial_i T_i + \kappa_i \nabla T_i = 0 \quad (5.9)$$

Система (5.9) описывает разрывные распределения температуры в среде  $\Phi_i$ , связанные с распространением со скоростями  $c_i$  (4.1) двух сильных разрывов  $S_i$  (рис. 3, кри-

вые 3, 4). В результате  $T_i$  в структуре фронта  $S$  имеют автомодельные распределения от переменной  $\eta$

$$T_i = 1 - \theta(\eta), \quad (5.10)$$

где  $\theta(x)$  – функция Хевисайда. Если эти решения построить на плоскости  $\{\xi, T\}$ , то график  $T_i$  имеет форму “ступеньки”, смещающейся в случае разрыва  $S_f$  (или  $S_m$ ) в положительном (или отрицательном) направлении оси  $\xi$  (предполагается, что  $c_m < c_f$ ). На плоскости  $\{\eta, T\}$  распределения (5.10) при возрастании  $X$  не изменяются, т.е. при  $X_s \leq X < X_{ne}$  реализуется автомодельное распределение температуры  $T_i$  от переменной  $\eta$ . Для толщины  $\Delta x$  фронта  $S$ , определяемой как расстояние от разрыва  $S_m$  до  $S_f$ , справедлива оценка

$$\Delta x \sim (c_f - c_m)t = \left( \frac{\kappa_f}{\text{Sh}_f} - \frac{\kappa_m}{\text{Sh}_m} \right) t \sim 1 \quad (5.11)$$

При этом разрывы  $S_i$  нужно понимать как узкие температурные подслои, имеющие толщины (5.6).

На промежуточных масштабах  $X_{ne} \leq X < X_e$  температуры  $T_i$  непрерывным образом эволюционируют к следующему асимптотическому распределению при  $X \geq X_e$ . Здесь при возрастании  $Xt$  температуры  $T_i$  между разрывами  $S_m$  и  $S_f$  начинают выравниваться из-за теплообмена между средами  $\Phi_i$ , сближаясь при  $X \sim X_e$ .

При  $X > X_e$ ,  $t \sim 1$  можно пренебречь как теплопроводностью ( $X_s \leq X$ ), так и считать течение равновесным ( $X > X_e$ ), происходящим при локально однородной температуре  $T = T_i$ . В этом случае уравнение на температуру (3.11) сводится к уравнению переноса ( $\text{Pe} \gg 1$ )

$$\overline{\text{Sh}} \partial_t T + \nabla T = 0, \quad (5.12)$$

которое описывает разрывное распределение  $T$ , связанное с распространением со скоростью  $c$  (4.2) сильного разрыва  $S$  (рис. 3б, линия 5):

$$T = 1 - \theta(\eta) \quad (5.13)$$

Для оценки толщины температурного слоя при  $X \geq X_e$  заметим, что, в соответствии с (3.10), время установления локального теплового равновесия  $t_e$  пропорционально константе  $B\text{Pe}$ , т.е.  $t_e \sim B\text{Pe}$ . Следовательно, так как скорость разрыва  $S$  постоянна и равна  $c$  (4.2), то для протяженности переходного слоя  $\Delta x_e$ , определяющего только теплообменом между средами  $\Phi_i$  ( $B\text{Pe} \sim 1$ ,  $\text{Pe} \rightarrow \infty$ ), получим оценку

$$\Delta x_{ne} \sim cB\text{Pe} = \frac{B\text{Pe}}{\text{Sh}} = \frac{\text{Pe}_0}{\sigma L_0^2 \text{Sh}} \frac{1}{X} \quad (5.14)$$

Если же пренебречь неравновесными эффектами, рассмотрев фронт, определяющийся только теплопроводностью ( $B = 0$ ,  $\text{Pe} \sim 1$ ), то, согласно (3.11), для его протяженности  $\Delta x_\lambda$  получим

$$\Delta x_\lambda \sim \sqrt{\frac{t}{\text{ShPe}}} = \sqrt{\frac{1}{\text{ShPe}_0}} \left( \frac{t}{X} \right)^{1/2} \quad (5.15)$$

Таким образом, согласно выражениям (3.6), (3.10) и (5.1), при  $X > X_e$ ,  $t \sim 1$  имеем  $\Delta x_{ne} \sim X^{-1}$ ,  $\Delta x_\lambda \sim X^{-1/2}$ . Следовательно, при  $X \gg 1$  выполняется неравенство

$\Delta x_\lambda > \Delta x_e$ , а толщина фронта  $S$  определяется теплопроводностью. В этом случае  $T$  есть решение уравнения (3.11)

$$T = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{erf}(\xi)) \quad (5.16)$$

Соотношение (5.16) определяет кривую  $S$  на рис. 3а, которая с возрастанием  $Xt$  не перемещается на плоскости  $\{\xi, T\}$ . Заметим, что устремив в выражении для температуры (5.16)  $t$  к бесконечности и перейдя к переменной  $\eta$ , получим решение (5.13).

Таким образом, при  $X < X_{ne}$  толщина  $\Delta x$  фронта  $S$ , в соответствии с соотношением (5.11), растет прямо пропорционально времени  $t$ . При этом фронт содержит два температурных подслоя, соответствующих разрывам  $S_i$ , толщины которых  $\Delta x_i$  растут как  $\sqrt{t}$  (см. (5.6)). При  $X_{ne} \leq X < X_e$   $\Delta x$  достигает значения  $\Delta x \sim BPe/\sqrt{\text{Sh}}$  (см. (5.14)) и при  $X > X_e$  растет как  $\sqrt{t}$  (см. (5.15)), а внутренние температурные подслои исчезают из-за теплообмена между средами  $\Phi_i$ . Следовательно, неэволюционный в рамках неравновесной модели разрыв  $S$  всегда имеет структуру конечной протяженности. В рамках неравновесной модели на таких масштабах, что  $B \ll 1$ , фронт  $S$  нужно понимать не как сильный разрыв, а бесконечно узкий переходный слой.

В заключение отметим, что если не выполняется условие  $Re_0 \gg 1$ , то  $X_s > X_{ne}$ , а цепочка неравенств (5.3) нарушается. При  $Re_0 \sim 1$  сразу после образования температурных слоев в средах  $\Phi_i$  при  $X < X_\lambda$  может становиться существенным теплообмен между средами  $\Phi_i$ , а промежуточный асимптотический этап  $X_s \leq X < X_{ne}$ , на котором фронт ограничен сильными разрывами  $S_i$ , не реализуется.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (МД-3567.2018.1)

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев А.А. Исследование эволюционности разрывов при фильтрации бинарной смеси // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 1. С. 90–102.
2. Афанасьев А.А., Султанова Т.В. Исследование гидродинамической неустойчивости фронта вытеснения при закачке углекислого газа в водонасыщенный пласт // Изв. РАН МЖГ. 2016. № 4. С. 85–96.
3. Бармин А.А., Цыпкин Г.Г. Математическая модель инъекции воды в геотермальный пласт, насыщенный паром // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 6. С. 92–98.
4. Шагапов В.Ш., Ильясов У.Р., Насырова Л.А. Об инъекции воды в геотермальный пласт // ПМТФ. 2002. Т. 43. № 4. С. 127–138.
5. Афанасьев А.А., Бармин А.А. Нестационарные одномерные фильтрационные течения воды и пара с учетом фазовых переходов // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 4. С. 134–143.
6. Gandomkar A., Gray K.E. Local thermal non-equilibrium in porous media with heat conduction // Int. J. Heat Mass Trans. 2018. V. 124. P. 1212–1216.
7. Gelet R., Loret B., Khalili N. The significance of local thermal non-equilibrium in simulations of enhanced geothermal recovery // 14th IACMAG, Kyoto, Japan. 2014. P. 1713–1718.
8. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 852–864.
9. Warren J.E., Root P.J. The behavior of naturally fractured reservoirs // SPE J. 1963. V. 3. № 3. P. 245–255.
10. Нугматуллин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
11. Pruess K., Narasimhan T.N. A practical method for modelling fluid and heat flow in fractured porous media // SPE. J. 1985 V. 25. № 1. P. 14–26.

12. *Kazemi H., Merrill L.S., Porterfield K.L., Zeman P.R.* Numerical simulation of water-oil flow in naturally fractured reservoirs // *SPE J.* 1976. V. 16. № 6. P. 317–326.
13. *Afanasyev A.* Reservoir simulation with MUFITS code: Extension for double porosity reservoirs and flows in horizontal wells // *Energy Proc.* 2017. V. 125. P. 596–603.
14. *Lu W., Xiang Y.* Analysis of the instantaneous local thermal equilibrium assumption for heat exchange between rock matrix and fracture water // *Adv. Mater. Res.* 2012. V. 594–597. P. 2430–2437.
15. *Nield D.A.* A note on local thermal non-equilibrium in porous media near boundaries and interfaces // *Transp. Porous Media.* 2012. V. 95. P. 581–584.
16. *Баренблат Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
17. *Афанасьев А.А.* Об одном представлении уравнений многокомпонентной многофазной фильтрации // *ПММ.* 2012. Т. 76. Вып. 2. С. 265–274.
18. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
19. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Нелинейные волны в упругих средах. М.: Моск. лицей, 1998. 412 с.

### The Structure of Temperature Front in a Fractured Porous Medium

A. A. Afanasyev<sup>#</sup>

*Institute of Mechanics of Moscow State University, Moscow, Russia*

<sup>#</sup> *e-mail: afanasyev@imec.msu.ru*

We investigate the structure of a temperature front propagating through a fractured-porous medium with account for break down of local thermal equilibrium between fractures and low-permeability matrix in which the fractures are embedded. Using the dual porosity model, we estimate the front thickness and constrain the similarity parameters for which it is determined by either heat conduction or non-equilibrium heat transfer in the medium. We show that three asymptotic cases for the temperature distribution in the front exist for different space and time scales. The temperature distribution in these cases is described with analytical relationships.

*Keywords:* porous medium, non-isothermal flow, dual porosity, shock wave, self-similar solution

### REFERENCES

1. *Afanasyev A.A.* Investigation of the evolutionarity of discontinuities in binary mixture flows through a porous medium // *Fluid Dyn.*, 2014, vol. 49, no. 1, pp. 77–87.
2. *Afanasyev A.A., Sultanova T.V.* Investigation of hydrodynamic instability of CO<sub>2</sub> injection into an aquifer // *Fluid Dyn.*, 2016, vol. 51, no. 4, pp. 513–523.
3. *Barmin A.A., Tsyarkin G.G.* Mathematical model of water injection into a steam-saturated geothermal reservoir // *Fluid Dyn.*, 1996, vol. 31, no. 6, pp. 874–879.
4. *Shagapov V.Sh., Il'yasov U.R., Nasyrova L.A.* Water injection into a geothermal reservoir // *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2002, vol. 43, no. 4, pp. 593–602.
5. *Afanas'ev A.A., Barmin A.A.* unsteady one-dimensional water and steam flows through a porous medium with allowance for phase transitions // *Fluid Dyn.*, 2007, vol. 42, no. 4, pp. 627–636.
6. *Gandomkar A., Gray K.E.* Local thermal non-equilibrium in porous media with heat conduction // *Int. J. Heat Mass Trans.*, 2018, vol. 124, pp. 1212–1216.
7. *Gelet R., Loret B., Khalili N.* The significance of local thermal non-equilibrium in simulations of enhanced geothermal recovery // 2014. 14th IACMAG, Kyoto, Japan. pp. 1713–1718.
8. *Barenblatt G.I., Zheltov Yu.P., Kochina I.N.* Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata] // *JAMM*, 1960, vol. 24, no. 5, pp. 1286–1303.
9. *Warren J.E., Root P.J.* The behavior of naturally fractured reservoirs // *SPE J.*, 1963, vol. 3, no. 3, pp. 245–255.

10. *Nigmatulin R.I.* Dynamics of Multiphase Media. Vol. 1, 2. N.Y.: Hemisphere; 1990. 507 p.
11. *Pruess K., Narasimhan T.N.* A practical method for modelling fluid and heat flow in fractured porous media // SPE J., 1985, vol. 25, no. 1, pp. 14–26.
12. *Kazemi H., Merrill L.S., Porterfield K.L., Zeman P.R.* Numerical simulation of water-oil flow in naturally fractured reservoirs // SPE J., 1976, vol. 16, no. 6, pp. 317–326.
13. *Afanasyev A.* Reservoir simulation with MUFITS code: Extension for double porosity reservoirs and flows in horizontal wells // Energy Proc., 2017, vol. 125, pp. 596–603.
14. *Lu W., Xiang Y.* Analysis of the instantaneous local thermal equilibrium assumption for heat exchange between rock matrix and fracture water // Adv. Mater. Res., 2012, vol. 594–597, pp. 2430–2437.
15. *Nield D.A.* A note on local thermal non-equilibrium in porous media near boundaries and interfaces // Transp. Porous Media 2012, vol. 95, pp. 581–584.
16. *Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M.* Motion of Liquids and Gases in Natural Formations. Moscow: Nedra, 1984. 208 p. (in Russian)
17. *Afanas'ev A.A.* A Representation of the equations of multicomponent multiphase seepage // JAMM, 2012, vol. 76, no. 2, pp. 192–198.
18. *Sedov L.I.* Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Reading MA: Addison-Wesley, 1965.
19. *Kulikovskii A.G., Sveshnikova E.I.* Nonlinear Waves in Elastic Media. Boca Raton FL: CRC Press; 1995.

УДК 539.3

**ПОВЕРХНОСТЬ РАЗРЫВА В АНИЗОТРОПНОЙ РЕДУЦИРОВАННОЙ  
СРЕДЕ КОССЕРА. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ  
ДЛЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ С РАЗРЫВАМИ**

© 2020 г. А. Е. Анисимов<sup>1,\*</sup>, Е. В. Зданчук<sup>1,\*\*</sup>, В. В. Лалин<sup>1,\*\*\*</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
Санкт-Петербург, Россия

\* e-mail: alex.evg.anisimov@yandex.ru

\*\* e-mail: zelizaveta@yandex.ru

\*\*\* e-mail: vllalin@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.05.2019 г.

После доработки 31.10.2019 г.

Принята к публикации 23.11.2019 г.

В рамках континуальной модели гранулированного материала с независимыми векторами перемещений и поворота (линейная, анизотропная редуцированная среда Коссера) проанализированы поверхности сильного разрыва в материале. Показано, что сильные разрывы вектора поворота невозможны. Получены условия на поверхности разрыва для вектора перемещений, выявлено, что только два векторных условия являются существенными. Доказано, что решение динамической задачи в среде с сильными разрывами единственно.

*Ключевые слова:* редуцированная среда Коссера, поверхность сильного разрыва, модель сыпучего материала, кинематические и динамические условия, теорема единственности

**DOI:** 10.31857/S003282352001004X

С активным внедрением в современную технику новых конструкционных материалов интенсивно развиваются неклассические модели сплошных сред. Математическая модель редуцированной среды Коссера учитывает микроструктуру материала и предназначена для описания гранулированных, сыпучих материалов. Отличие данной модели от классической теории упругости состоит в том, что она учитывает размер частиц среды, микроструктуру материала, и вектор поворота является независимым от вектора перемещений. При этом, в отличие от классического континуума Коссера [1–4], в такой модели не возникает моментных напряжений. Впервые такая модель была предложена в 1984 году [5] для описания океанических отложений, которая затем детально изучалась [6–10].

Для построения математической модели материала недостаточно рассмотрения только гладких, т.е. непрерывных и нужное число раз дифференцируемых решений уравнений механики. Рано или поздно исследователям приходится сталкиваться с разрывами в свойствах среды, в первую очередь, с ударными волнами. Поэтому математические модели материала должны включать в себя разрывные решения дифференциальных уравнений. Разрывы изучались в классическом континууме Коссера [11, 12], но, как показывают исследования [8, 9], в редуцированной среде Коссера возникают эффекты, которых не наблюдается для классического континуума, например,

запрещенные зоны распространения волн, поэтому не следует считать редуцированную среду Коссера упрощением классического континуума – для нее необходимо получать все уравнения отдельно. Изучены условия совместности решений на поверхности разрыва в нелинейной редуцированной среде Коссера [13]. В настоящей работе приводятся результаты анализа кинематических и динамических условий совместности на поверхности сильного разрыва в редуцированном континууме Коссера для линейно-упругой среды с произвольной анизотропией. Под сильным разрывом в работе понимается случай, в котором некоторые первые производные от искомых функций могут быть разрывны на конечном числе гладких поверхностей. Не уменьшая общности, будем рассматривать только одну такую поверхность.

В модели редуцированной среды Коссера тензор напряжений  $\boldsymbol{\tau}$  несимметричен и может быть представлен как:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{T} \times \mathbf{I}, \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  – симметричная часть тензора напряжений,  $\mathbf{T}$  – вектор, соответствующий антисимметричной части тензора  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{I}$  – единичный тензор второго ранга, “ $\times$ ” – знак векторного умножения. Уравнения, описывающие процессы в анизотропной линейной среде, можно представить в форме [14]:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \nabla \times \mathbf{T} + \mathbf{q} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad -2\mathbf{T} = \mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad \boldsymbol{\gamma} = 2\boldsymbol{\phi} - \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\gamma} \quad (4)$$

Здесь  $\rho$  – объемная плотность;  $\mathbf{J}$  – объемная плотность тензора инерции;  $\mathbf{u}$  – вектор перемещений;  $\boldsymbol{\phi}$  – вектор поворота;  $\mathbf{q}$  – объемная силовая нагрузка;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – тензор линейных деформаций,  $\boldsymbol{\gamma}$  – вектор деформаций сдвига;  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  – тензоры упругих модулей четвертого и второго ранга соответственно; точкой обозначена частная производная по времени. В уравнениях (2)–(4) использованы стандартные обозначения прямого тензорного исчисления [15].

Пусть деформируемое тело занимает объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$ . Движущаяся поверхность  $\Gamma$ , заданная уравнением

$$\psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (5)$$

разделяет объем  $V$  на две части  $V^+$  и  $V^-$ , так что в любой момент времени  $V = V^+ \cup V^-$ . В дальнейшем предполагаем, что функция  $\psi$  непрерывно дифференцируема в объеме  $V$  и что поверхность (5) не имеет особых точек, т.е.  $(\nabla \psi)^2 \neq 0$  во всех точках  $\Gamma$  в любой момент времени  $t$ . В таком случае в точках поверхности  $\Gamma$  определен единичный вектор нормали  $\mathbf{n} = \frac{1}{|\nabla \psi|} \nabla \psi$ . Считаем, что  $V^+$  – обозначение той части объема  $V$ , в которую направлен вектор  $\mathbf{n}$ . Как известно [16, 17], скорость  $c_n$  движения поверхности  $\Gamma$  в направлении нормали  $\mathbf{n}$  определяется формулой  $c_n = -\frac{\dot{\psi}}{|\nabla \psi|}$ . В силу сделанных предположений о функции  $\psi$ , скорость  $c_n$  непрерывна в объеме  $V$ .

В дальнейшем будем считать, что инерционные и упругие характеристики редуцированной среды Коссера непрерывны в  $V$ . Квадратными скобками в формулах будет обозначен скачок функций на поверхности  $\Gamma$ :  $[Z] \equiv Z^+ - Z^-$ , где  $Z(\mathbf{r}, t)$  – некоторая функция, имеющая конечные пределы при приближении к поверхности  $\Gamma$  по точкам объема  $V^+$ :  $Z^+$  и по точкам объема  $V^-$ :  $Z^-$ . Тогда условия непрерывности при переходе

через поверхность  $\Gamma$  для скорости  $c_n$ , инерционных и упругих характеристик могут быть записаны в виде:

$$[c_n] = 0, \quad [\rho] = 0, \quad [\mathbf{J}] = 0, \quad [\mathbf{C}] = 0, \quad [\mathbf{D}] = 0 \quad (6)$$

Будем называть поверхность  $\Gamma$  поверхностью разрыва, если [16, 17]: векторы  $\mathbf{u}$ ,  $\phi$  непрерывны при переходе через поверхность, а некоторые производные первого порядка этих векторов имеют разрыв на этой поверхности.

Разрывы в первых производных не могут быть произвольными. Они должны быть связаны некоторыми соотношениями, которые называются кинематическими и динамическими условиями совместности.

Кинематические условия совместности, связывающие производные первого порядка функции  $\mathbf{u}$ , есть условия, следующие из непрерывности самой функции  $\mathbf{u}$ , и имеют вид [16, 17]:

$$[\mathbf{n}\dot{\mathbf{u}} + c_n\nabla\mathbf{u}] = 0 \quad (7)$$

Аналогично, для первых производных вектора  $\phi$ :

$$[\mathbf{n}\dot{\phi} + c_n\nabla\phi] = 0 \quad (8)$$

Динамические условия совместности, есть следствия основных законов механики. Они были получены [13] для общей нелинейной постановки – физически и геометрически нелинейной редуцированной среды Коссера. Запишем эти соотношения в линеаризованном виде:

баланс массы:

$$[\rho c_n] = 0 \quad (9)$$

баланс импульса:

$$[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} + c_n \rho \dot{\mathbf{u}}] = 0 \quad (10)$$

баланс кинетического момента:

$$[c_n \mathbf{J} \cdot \dot{\phi}] = 0 \quad (11)$$

баланс энергии:

$$[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}} + c_n(K + \Pi)] = 0, \quad (12)$$

где  $K = \frac{1}{2}\rho\dot{\mathbf{u}}^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi} \cdot \mathbf{J} \cdot \dot{\phi}$  – объемная плотность кинетической энергии,  $\Pi = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\gamma}$  – объемная плотность энергии деформации.

Рассмотрим некоторые следствия из условий совместности (7)–(12). Отметим, прежде всего, что выражение (9) есть тривиальное следствие из условий непрерывности (6) и не имеет самостоятельного значения. Также вследствие условий непрерывности (6) из выражения (11) следует, что  $[\dot{\phi}] = 0$ , но тогда из кинематических условий совместности (8) получаем  $[\nabla\phi] = 0$ . Таким образом, из кинематических и динамических условий совместности вытекает, что все частные производные вектора  $\phi$  непрерывны при переходе через поверхность разрыва. Другими словами доказан следующий факт: в линейной редуцированной среде Коссера непрерывность вектора поворота  $\phi$  влечет непрерывность всех первых частных производных вектора  $\phi$ , т.е. разрывы вектора  $\phi$  не возможны.

Докажем, что условие баланса энергии (12) также не имеет самостоятельного значения, а является следствием кинематических условий совместности (7) и динамиче-

ских условий совместности (10), (11). Предварительно преобразуем условие (7), добавив непрерывное слагаемое  $c_n \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{I}$ , и введем для удобства обозначения  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ :

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{n}\dot{\mathbf{u}} + c_n(\nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{I}), \quad \mathbf{A}_1 \equiv \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} + c_n \rho \dot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{A}_2 \equiv c_n \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\phi}.$$

Введенные величины непрерывны при переходе через поверхность  $\Gamma$ :

$$[\mathbf{A}] = 0, \quad [\mathbf{A}_1] = 0, \quad [\mathbf{A}_2] = 0 \quad (13)$$

Докажем равенство

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{\tau}^T \cdot \cdot \mathbf{A} + \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{A}_1 + \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{A}_2) = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}} + c_n(K + \Pi) \quad (14)$$

Имеем

$$\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{A}_1 + \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{A}_2 = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}} + c_n(\rho \dot{\mathbf{u}}^2 + \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\phi}) = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}} + 2c_n K \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\tau}^T \cdot \cdot \mathbf{A} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}} + c_n \boldsymbol{\tau}^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{I}) \quad (16)$$

При вычислении последнего слагаемого в выражении (16), используем следствия определений (1) и первого уравнения (3), обращение в нуль свертки симметричного и кососимметричного тензоров, обращение в нуль свертки симметричного и кососимметричного тензоров, а также тождество  $(\mathbf{a} \times \mathbf{I}) \cdot \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{I}) = -2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , справедливое для любых векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . В результате, получим  $\boldsymbol{\tau}^T \cdot \cdot (\nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{I}) = 2\Pi$ . Теперь выражение (16) принимает вид

$$\boldsymbol{\tau}^T \cdot \cdot \mathbf{A} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}} + 2c_n \Pi \quad (17)$$

Складывая формулы (15) и (17) и деля на 2, получаем равенство (14).

Докажем, что левая часть равенства (14) непрерывна при переходе через поверхность  $\Gamma$ . Из условий (13), а также доказанной непрерывности  $\boldsymbol{\phi}$  следует, что

$$\left[ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\tau}^T \cdot \cdot \mathbf{A} + \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{A}_1 + \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{A}_2) \right] = \frac{1}{2}((\mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\tau}] + c_n \rho [\dot{\mathbf{u}}]) \cdot \dot{\mathbf{u}} + c_n([\boldsymbol{\sigma}] \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + [\mathbf{T}] \cdot \boldsymbol{\gamma}) + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot [\dot{\mathbf{u}}]) \quad (18)$$

В правой части выражения (18) первое слагаемое – второе равенство в (13) – равно нулю. Для преобразования последнего слагаемого в (18) распишем, равное нулю, согласно (13), выражение

$$\boldsymbol{\tau}^T \cdot \cdot [\mathbf{A}] = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot [\dot{\mathbf{u}}] + c_n(\boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot [\boldsymbol{\varepsilon}] + \mathbf{T} \cdot [\boldsymbol{\gamma}]) = 0$$

Из последней формулы выразим слагаемое  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot [\dot{\mathbf{u}}]$  и подставим в уравнение (18). Получим

$$\left[ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\tau}^T \cdot \cdot \mathbf{A} + \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{A}_1 + \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{A}_2) \right] = \frac{1}{2}c_n([\boldsymbol{\sigma}] \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + [\mathbf{T}] \cdot \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot [\boldsymbol{\varepsilon}] - \mathbf{T} \cdot [\boldsymbol{\gamma}]) \quad (19)$$

В силу симметрии и непрерывности тензоров упругости  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$  имеем

$$[\boldsymbol{\sigma}] \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}] \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cdot \mathbf{C}] \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon}] \cdot \cdot \mathbf{C} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\varepsilon}] \cdot \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot [\boldsymbol{\varepsilon}]$$

$$[\mathbf{T}] \cdot \boldsymbol{\gamma} = [\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\gamma}] \cdot \boldsymbol{\gamma} = [\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{D}] \cdot \boldsymbol{\gamma} = [\boldsymbol{\gamma}] \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\gamma} = [\boldsymbol{\gamma}] \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot [\boldsymbol{\gamma}],$$

откуда следует, что правая часть выражения (19) равна нулю.

Итак, доказано, что левая часть (а тем самым и правая) равенства (14) непрерывна при переходе через поверхность  $\Gamma$ , а, следовательно, условие баланса энергии (12) является следствием кинематических (7) и динамических (10), (11) условий совместности.

В итоге, получаем следующие существенные условия совместности на поверхности разрыва

$$[\mathbf{n}\dot{\mathbf{u}} + c_n \nabla \mathbf{u}] = 0, \quad [\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} + c_n \rho \dot{\mathbf{u}}] = 0 \quad (20)$$

Далее докажем, что решение динамической задачи с разрывами единственно. Решением задачи в среде с разрывами будем называть функции  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\varphi}$ , которые

- а) непрерывны в объеме  $V = V^+ \cup V^-$ ;
- б) в каждой подобласти  $V^+$  и  $V^-$  дважды непрерывно дифференцируемы;
- в) в каждой из подобластей  $V^+$  и  $V^-$  удовлетворяют уравнениям движения, а также граничным  $S_1 : \mathbf{u} = 0, \boldsymbol{\varphi} = 0, S_2 : \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{T} \times \mathbf{I}) = \mathbf{g}$  и начальным  $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(x, y, z), \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \mathbf{v}_0(x, y, z), \boldsymbol{\varphi}|_{t=0} = \boldsymbol{\varphi}_0(x, y, z), \dot{\boldsymbol{\varphi}}|_{t=0} = \boldsymbol{\omega}_0(x, y, z)$  условиям линейной редуцированной среды Коссера [14].

Здесь  $\mathbf{g}$  – заданная поверхностная нагрузка,  $\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\omega}_0$  – заданные начальные значения перемещений, поворотов и их скоростей.

- г) первая производная функции  $\mathbf{u}$  имеет конечные пределы при стремлении к поверхности  $\Gamma$ , разделяющей области  $V^+$  и  $V^-$ , изнутри соответствующих областей;
- д) первая производная функций  $\mathbf{u}$  на поверхности  $\Gamma$  удовлетворяет кинематическим и динамическим условиям совместности (20);
- е) функция  $\boldsymbol{\varphi}$  непрерывна вместе со своими первыми производными в объеме  $V$ .

Докажем, что если решение с разрывами существует, то оно единственно.

Допустим, что существуют два решения:  $\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\varphi}_1$  и  $\mathbf{u}_2, \boldsymbol{\varphi}_2$ . Обозначим их разности  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \boldsymbol{\varphi} \equiv \boldsymbol{\varphi}_1 - \boldsymbol{\varphi}_2$ . Векторы  $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}$  удовлетворяют однородным уравнениям движения, однородным граничным и начальным условиям. Кинематические и динамические условия совместности линейны по функциям  $\mathbf{u}_i$  и поэтому для разности  $\mathbf{u}$  остаются справедливыми. Докажем, что в любой момент времени  $\mathbf{u} \equiv 0, \boldsymbol{\varphi} \equiv 0$  в области  $V$ .

Из уравнения баланса энергии для каждого решения следует формула [13]

$$\frac{\partial}{\partial t}(K_i + \Pi_i) = \mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{u}}_i + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}_i \cdot \dot{\mathbf{u}}_i) \quad (21)$$

Из уравнений (2)–(4) и симметрии тензоров  $\mathbf{D}, \mathbf{C}, \mathbf{J}$  несложно доказать, что для разности решений справедлива следующая формула

$$\frac{\partial}{\partial t}(K + \Pi) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}}), \quad (22)$$

где  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2$ .

Далее воспользуемся теоремой переноса [18]. Пусть  $\eta(\mathbf{r}, t)$  – некоторая функция, определенная в точках сплошной среды, движущихся по закону  $\mathbf{r}(\mathbf{R}, t)$ , где  $\mathbf{R}$  – отсчетные координаты. Пусть функция  $\eta$  непрерывно дифференцируема в объеме  $V$ , кроме точек поверхности  $\Gamma$ , и имеет конечные пределы  $\eta^+$  и  $\eta^-$  при стремлении к поверхности  $\Gamma$  по точкам  $V^+$  и  $V^-$ , соответственно. Тогда

$$\frac{d}{dt} \int_V \eta dV = \int_V \dot{\eta} dV - \int_{\Gamma} [\eta] c_n d\Gamma \quad (23)$$

Положим  $\eta = K + \Pi$ , тогда  $W = \int_V (K + \Pi) dV$  – полная энергия для разности решений. Теперь формула (23) примет следующий вид

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(K + \Pi) dV - \int_{\Gamma} [K + \Pi] c_n d\Gamma$$

Воспользовавшись равенством (22), перепишем последнюю формулу в виде:

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}}) dV - \int_{\Gamma} [K + \Pi] c_n d\Gamma \quad (24)$$

Используем формулу Остроградского–Гаусса для функций, имеющих разрыв на поверхности  $\Gamma$ , находящейся внутри объема  $V$  [19]:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} dS - \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{a}] d\Gamma \quad (25)$$

Положим в равенстве (25)  $\mathbf{a} = \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}}$  и подставим результат в выражение (24), тогда (24) примет вид:

$$\frac{dW}{dt} = \int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}} dS - \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot [\boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}}] + [K + \Pi] c_n) d\Gamma \quad (26)$$

Разность решений удовлетворяет однородным граничным условиям. Тогда на  $S_2$ :  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$ , на  $S_1$ :  $\mathbf{u} = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{u}} = 0$  и интеграл по  $S = S_1 \cup S_2$  в (26) равен нулю. Следовательно,

$$\frac{dW}{dt} = - \int_{\Gamma} [\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\mathbf{u}} + (K + \Pi) c_n] d\Gamma \quad (27)$$

Так как разность решений  $\mathbf{u}$  удовлетворяет на поверхности  $\Gamma$  кинематическим и динамическим условиям совместности (20), то, по доказанному ранее (12), подынтегральное выражение в правой части формулы (27) равно нулю, откуда  $\frac{dW}{dt} = 0 \Rightarrow W = \text{const}(t)$ . Поскольку разности решений удовлетворяют однородным начальным условиям, то  $W(t) \equiv 0$ .

Рассмотрим выражение для энергии разности решений

$$W = \int_V \left( \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\phi} + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \right) dV$$

Поскольку  $\rho$  больше нуля, а  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  – положительно определенные тензоры, то энергия  $W$  может быть равна нулю только в случае, если  $\dot{\mathbf{u}} = 0$ ,  $\boldsymbol{\phi} = 0$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ ,  $\boldsymbol{\gamma} = 0$ . Откуда, с учетом нулевых начальных условий, получаем, что  $\mathbf{u} \equiv 0$ ,  $\boldsymbol{\phi} \equiv 0$  [17]. Что и требовалось доказать.

Итак, в работе приведены кинематические и динамические условия совместности на поверхности разрыва в линейной анизотропной редуцированной среде Коссера. Доказано, что разрывы вектора поворота в среде не возможны. С помощью условий на поверхности разрыва доказано, что начально-краевая задача с разрывами имеет единственное решение.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Построение аналитического решения волны Лэмба в рамках континуума Коссера // ПМТФ. 2007. Т. 48. № 1 (281). С. 143–150.
2. Варыгина М.П., Садовская О.В., Садовский В.М. О резонансных свойствах моментного континуума Коссера // ПМТФ. 2010. Т. 51. № 3 (301). С. 126–136.
3. Суворов Е.М., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Плоская задача об ударе твердого тела по полупространству, моделируемому средой Коссера // ПММ. 2012. Т. 76. № 5. С. 850–859.
4. Зданчук Е.В., Куроедов В.В., Лалин В.В. Вариационная постановка динамических задач для нелинейной среды Коссера // ПММ. 2017. Т. 81. № 1. С. 97–102.
5. Schwartz L.M., Johnson D.L., Feng S. Vibrational Modes in Granular Materials // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. № 10. P. 831–834.

6. Grekova E.F., Herman G.C. Wave propagation in rock modelled as reduced Cosserat continuum with weak anisotropy // 67th Europ. Assoc. Geosci. Engin., EAGE Conference and Exhibition, incorporating SPE Europe 2005., Feria de Madrid, June 13–16, 2005. Extended Abstracts. P. 2643–2646.
7. Harris D. Double-slip and Spin: A generalisation of the plastic potential model in the mechanics of granular materials // Int. J. Engng. Sci. 2009. V. 47. I. 11–12. P. 208–1215.
8. Кулеш М.А., Грекова Е.Ф., Шардаков И.Н. Задача о распространении поверхностной волны в редуцированной среде Коссера // Акуст. ж. 2009. Т. 55. № 2. С. 216–225.
9. Grekova E.F., Kulesh M.A., Herman G.C. Waves in linear elastic media with microrotations, part 2: isotropic reduced Cosserat model // Bull. Seismol. Soc. Amer. 2009. V. 99. № 2B. P. 1423–1428.
10. Грекова Е.Ф. Линейная редуцированная среда Коссера с шаровым тензором инерции, вращения в которой не наблюдаются в экспериментах // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 5. С. 58–64.
11. Еремеев В.А. Об условиях распространения волн ускорения в термоупругой микрополярной среде // Вестн. южного научн. центра РАН. 2007. Т. 3. № 4. С. 10–13.
12. Altenbach H., Eremeyev V.A., Lebedev L.P., Rendon L.A. Acceleration waves and ellipticity in thermoelastic micropolar media // Arch. Appl Mechanics. 2010. V. 80 (3). P. 217–227.
13. Lalin V.V., Zdanchuk E.V. Conditions on the surface of discontinuity for the reduced Cosserat continuum // Mater. Phys. Mech. 2017. V. 31. №. 1–2. P. 28–31.
14. Lalin V.V., Zdanchuk E.V. The initial boundary-value problem for a mathematical model for granular medium // Appl. Mech. Mater. 2015. V. 725–726. P. 863–868.
15. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
16. Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1980.
17. Порушков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986.
18. Casey J. On the derivation of jump conditions in continuum mechanics // Intern. J. Struct. Changes in Solids. V. 3. P. 61–84.
19. Слеттери Дж.С. Теория переноса импульса, энергии и массы в сплошных средах. М.: Энергия, 1978.

### Surface of Discontinuity for the Anisotropic Reduced Cosserat Continuum. Uniqueness of Solution for Dynamic Issue with Discontinuity

A. E. Anisimov<sup>a,#</sup>, E. V. Zdanchuk<sup>a,##</sup>, and V. V. Lalin<sup>a,###</sup>

<sup>a</sup> Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russia

<sup>#</sup> e-mail: alex.evg.anisimov@yandex.ru

<sup>##</sup> e-mail: zelizaveta@yandex.ru

<sup>###</sup> e-mail: vllalin@yandex.ru

In this work an isolated surface that moves relative to the micropolar media and across which the first derivatives of variables are discontinuous is considered. The reduced Cosserat continuum is an elastic medium, where all translations and rotations are independent. Moreover, a force stress tensor is asymmetric and a couple stress tensor is equal to zero. In paper continuity conditions were established and it is shown that first derivative of the rotation vector cannot have discontinuities. It is shown that the solution for this case is unique.

*Keywords:* micropolar continuum, discontinuity, granular materials, uniqueness theorem, reduced Cosserat continuum, continuity conditions

### REFERENCES

1. Kulesh M.A., Matveenko V.P., Shardakov I.N. // Acoust. Phys., 2006, vol. 52, no. 2, pp. 186–193.
2. Varygina M.P., Sadovskaya O.V., Sadovskii V.M. Resonant properties of moment Cosserat continuum // J. Appl. Mech. Techn. Phys., 2010, vol. 51, no. 3, pp. 405–413.
3. Suvorov Y.M., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. The plane problem of the impact of a rigid body on a half-space modelled by a Cosserat medium // JAMM, 2012, vol. 76, no. 5, pp. 511–518.

4. *Zdanchuk E.V., Kuroyedov V.V., Lalin V.V.* Variational formulation of dynamic problems for a non-linear Cosserat medium // JAMM, 2017, vol. 81, no. 1, pp. 66–70.
5. *Schwartz L.M., Johnson D.L., Feng S.* Vibrational modes in granular materials // Phys. Rev. Lett., 1984, vol. 52, no. 10, pp. 831–834.
6. *Grekova E.F., Herman G.C.* Wave propagation in rock modelled as reduced Cosserat continuum with weak anisotropy // 67th Europ. Assoc. Geosci. Engin., EAGE Conference and Exhibition, incorporating SPE Europe 2005., Feria de Madrid, June 13–16, 2005. Extended Abstracts. pp. 2643–2646.
7. *Harris D.* Double-slip and spin: A generalisation of the plastic potential model in the mechanics of granular materials // Int. J. Eng. Science, 2009, vol. 47. I. 11–12, pp. 208–215.
8. *Kulesh M.A., Grekova E.F., Shardakov I.N.* The problem of surface wave propagation in a reduced Cosserat medium // Acoust. Phys., 2009, vol. 55, no. 2, pp. 218–226.
9. *Grekova E.F., Kulesh M.A., Herman G.C.* Waves in linear elastic media with microrotations, part 2: isotropic reduced Cosserat model // Bull. Seismol. Soc. Amer., 2009, vol. 99, no. 2B, pp. 1423–1428.
10. *Grekova E.F.* Linear reduced Cosserat medium with spherical tensor of inertia, where rotations are not observed in experiment // Mech. Solids, 2012, vol. 47, no. 5, pp. 538–543.
11. *Maugin G.A.* Acceleration waves in simple and linear viscoelastic micropolar materials // Intern. J. Engng. Sci., 1974, vol. 12, no. 2, pp. 143–157.
12. *Altenbach H., Eremeyev V.A., Lebedev L.P., Rendon L.A.* Acceleration waves and ellipticity in thermoelastic micropolar media // Arch. Appl. Mech., 2010, vol. 80, no. 3, pp. 217–227.
13. *Lalin V.V., Zdanchuk E.V.* Conditions on the surface of discontinuity for the reduced Cosserat continuum // Mater. Phys. Mech., 2017, vol. 31, no. 1–2, pp. 28–31.
14. *Lalin V.V., Zdanchuk E.V.* The initial boundary-value problem for a mathematical model for granular medium // Appl. Mech. Mater., 2015, vol. 725–726, pp. 863–868.
15. *Lurie A.I.* Theory of Elasticity Berlin: Springer, 2005. 1050 p.
16. *Petrashen G.I.* Propagation of Waves in Anisotropic Elastic Media (Rasprostranenie voln v anizotropnyh uprugih sredah) Leningrad: Nauka, 1980. (in Russian)
17. *Poruchikov V.B.* Methods of the Classical Theory of Elastodynamics. Berlin: Springer, 1993. 319 p.
18. *Casey J.* On the derivation of jump conditions in continuum mechanics // Intern. J. Struct. Changes in Solids, 2011, vol. 3, pp. 61–84.
19. *Slattery J.C., Sagis L., Oh E.* Interfacial Transport Phenomena. Boston: Springer US, 2007. 828 p.

УДК 539.3

**НОВЫЙ КЛАСС ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ ПЛОСКИХ  
ЗАДАЧ ЭЛАСТОДИНАМИКИ**© 2020 г. Н. Б. Расулова<sup>1,\*</sup>, М. Б. Расулов<sup>1,\*\*</sup><sup>1</sup> *Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан**\*e-mail: nazila.rasulova@imm.az**\*\*e-mail: rasulova@gmail.com*

Поступила в редакцию 25.02.2019 г.

После доработки 09.09.2019 г.

Принята к публикации 16.09.2019 г.

Представлен новый тип функционально-инвариантных решений Смирнова–Соболева волнового уравнения, которые могут быть использованы при решении многих однородных задач эластодинамики. Найденное решение обладает уникальным свойством: его двукратный прообраз Лапласа и Фурье с новым аргументом и коэффициентом совпадает с исходной функцией. Таким образом, это свойство позволяет получить удобную формулу обращения для двукратных интегральных преобразований. Метод получения формулы показан на примере решения задачи Лэмба для полуплоскости при переходе от изображения к оригиналу.

Ключевые слова: однородные решения, преобразования Лапласа и Фурье, задача Лэмба, волновое уравнение, решения Смирнова–Соболева

DOI: 10.31857/S0032823519050084

**Введение.** С целью разработки более удобного метода нахождения обратных двукратных интегральных преобразований некоторых плоских задач эластодинамики предложен новый вид функции-изображения, являющийся решением преобразованного волнового уравнения и одновременно обладающий очень удобным свойством: при переходе к оригиналу по двум операторам, эта функция, исключая ее коэффициент, как функция одного безразмерного параметра, сохраняет свой вид. При этом ее параметр заменяется другим безразмерным параметром, зависящим от реальных координат плоскости и времени.

Основываясь на этом свойстве найденного решения, легко и быстро решаются некоторые известные задачи, например, задача Броберга [2] и не менее знаменитая задача Лэмба для полуплоскости [3], до этого решенные весьма сложными и трудоемкими способами. В общем случае это свойство создает полезную формулу обращения для двукратных преобразований, которая позволяет представить значения какой-нибудь величины (компоненты скорости, напряжения и др.) в любой точке плоскости через их значения на границе полуплоскости. Кроме того, в решении большинства задач эластодинамики для неограниченных и полуограниченных областей, метод интегральных преобразований является мощнейшим, часто используемым математическим аппаратом. Но нахождение оригиналов во многих случаях сопровождается колоссальными трудностями, преодоление которых еще больше усложняется, если применены не одно-, а двукратные преобразования. Существо-

ет довольно много приближенных методов обращения, которые, естественно, не могут сравниться ни с одним точным аналитическим методом.

Новое решение будет представлено на примере решения задачи Лэмба для полуплоскости.

Задача Лэмба с момента своего появления привлекла внимание специалистов всего мира, решение этой задачи для полупространства до недавнего времени было единственным точным решением трехмерной задачи эластодинамики.

Обзоры постановок задач и методов их решения приведены в работах [4–6], в которых также показаны численные методы решения для несколько усложненных вариантов задач Лэмба. Тем не менее, основным методом решения этой задачи является метод интегральных преобразований, который впервые в динамике упругих сред был использован Лэмбом [1].

**1. Задача Лэмба для полуплоскости и ее эффективное решение.** Решение задачи об ударе сосредоточенной силой  $I$  в момент  $t = 0$  в изотропной упругой полуплоскости  $y < 0$ , находящейся в покое при  $t < 0$ , дано в [3]. Эта задача была решена методом интегральных преобразований, и для нахождения оригиналов был использован трудоемкий способ с использованием метода Каньяра.

Ниже будет представлен новый, более удобный метод решения этой задачи. Уравнения движения среды, граничные и начальные условия в потенциалах  $\phi$  и  $\psi$ , имеют следующий вид:

$$\vec{u} = \text{grad } \phi + \text{rot}(\psi \vec{e}_3) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_1^2 \Delta \phi; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c_2^2 \Delta \psi \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(t, x, y) &= -I \delta(x) \delta(t), \quad y = 0 \\ \sigma_{xy} &= \frac{c_{2p}^2}{2} \left( 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) = 0, \quad y = 0 \\ \phi = \psi = \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} &= 0, \quad t = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $\vec{u}$  – вектор перемещения,  $\rho$  – плотность среды,  $c_1$  и  $c_2$  скорости продольных и поперечных волн, соответственно,  $\{\sigma\}$  – тензор напряжений,  $\delta$  – дельта-функция Дирака. К компонентам вектора перемещения применяются преобразования Лапласа (по переменной  $t$ ) и Фурье (по переменной  $x$ ):

$$\bar{u}_j(p, x, y) = \int_0^{\infty} u_j(t, x, y) e^{-pt} dt; \quad \text{Re } p > 0$$

$$\bar{u}_j^*(p, q, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_j(p, x, y) e^{iqx} dx; \quad \text{Im } q = 0$$

В результате компоненты перемещения представляются в виде [3]:

$$\begin{aligned} \bar{u}_x^* &= \frac{Iqi}{\mu c_1^2 R(p, q)} \left[ \left( \frac{p^2}{c_2^2} + 2q^2 \right) e^{y \sqrt{\frac{p^2}{c_1^2} + q^2}} - 2 \sqrt{\left( \frac{p^2}{c_1^2} + q^2 \right) \left( \frac{p^2}{c_2^2} + q^2 \right)} e^{y \sqrt{\frac{p^2}{c_2^2} + q^2}} \right] \\ \bar{u}_y^* &= \frac{I \sqrt{\frac{p^2}{c_1^2} + q^2}}{\mu c_1^2 R(p, q)} \left[ \left( \frac{p^2}{c_2^2} + 2q^2 \right) e^{y \sqrt{\frac{p^2}{c_1^2} + q^2}} - 2q^2 e^{y \sqrt{\frac{p^2}{c_2^2} + q^2}} \right], \end{aligned}$$

где  $R(p, q) = \left( \frac{p^2}{c_2^2} + 2q^2 \right)^2 - 4q^2 \sqrt{\left( \frac{p^2}{c_1^2} + q^2 \right) \left( \frac{p^2}{c_2^2} + q^2 \right)}$ .

С учетом того, что имеется следующая простая связь

$$\left( \frac{p^2}{q^2 c_1^2} + 1 \right) = \frac{c_2^2}{c_1^2} \left( \frac{p^2}{q^2 c_2^2} + 1 \right) + \left( 1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \right),$$

приведенные выше решения могут быть представлены через функции определенного вида:

$$\bar{u}_k^* = \frac{I}{\mu c_1^2} e^{y \sqrt{\frac{p^2}{c_k^2} + q^2}} \frac{1}{q} f \left( \sqrt{\frac{p^2}{q^2 c_k^2} + 1} \right)$$

Их можно преобразовать к следующему виду:

$$\bar{u}_k^* = \frac{Ic_k}{\mu c_1^2} \frac{e^{y \sqrt{\frac{p^2}{c_k^2} + q^2}}}{\sqrt{p^2 + c_k^2 q^2}} \left[ \sqrt{\frac{p^2}{q^2 c_k^2} + 1} \right] f \left( \sqrt{\frac{p^2}{q^2 c_k^2} + 1} \right) \tag{1.4}$$

Используя формулу обращения:

$$\frac{1}{\sqrt{p^2 + \alpha^2}} e^{-\tau \sqrt{p^2 + \alpha^2}} \div J_0(\alpha \sqrt{t^2 - \tau^2}) H(t - \tau),$$

где знак  $\div$  обозначает переход от изображения к оригиналу и наоборот.

Применим формулу Эфроса для определения оригинала Лапласа функции (1.4),

$$u_k^* = \frac{Ic_k}{\mu c_1^2} \int_0^\infty \Omega^*(t, q, y, \tau) d\tau, \tag{1.5}$$

где

$$\Omega^*(t, q, y, \tau) = \begin{cases} F(\tau) J_0 \left( \sqrt{c_k^2 t^2 q^2 - \left( \frac{\tau}{q} - y \right)^2 q^2} \right) H \left( c_k t - \left| \frac{\tau}{q} - y \right| \right), & q > 0 \\ \bar{F}(\tau) J_0 \left( \sqrt{c_k^2 t^2 q^2 - \left( \frac{\tau}{q} + y \right)^2 q^2} \right) H \left( c_k t - \left| \frac{\tau}{q} + y \right| \right), & q < 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Здесь  $F(t)$  – является оригиналом функции-изображения  $pf(p)$ :

$$F(t) \div L^{-1} [pf(p)]$$

и обозначен  $\bar{F}(z) = \overline{F(\bar{z})}$ ,  $H$  – функция Хэвисайда. Преобразуем выражение (1.6) к виду:

$$\Omega^*(t, q, y, \tau) = \begin{cases} F(\tau) J_0(\sqrt{c_k^2 t^2 - y^2} \sqrt{(q - \alpha)^2 - \beta^2}) H[|q - \alpha| - \beta], & q > 0 \\ \bar{F}(\tau) J_0(\sqrt{c_k^2 t^2 - y^2} \sqrt{(q + \alpha)^2 - \beta^2}) H[|q + \alpha| - \beta], & q < 0 \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\tau y}{c_k^2 t^2 - y^2}, \quad \beta = \frac{t c_k}{c_k^2 t^2 - y^2}$$

С помощью таблиц, приведенных в [7], можно определить оригинал функции  $\Omega^*(t, q, y, \tau)$  по преобразованию Фурье:

$$\Omega(t, x, y, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iqx} \Omega^*(t, q, y, \tau) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} [e^{-i\alpha x} F(\tau) + e^{i\alpha x} \bar{F}(\tau)] \frac{1}{\sqrt{c_k^2 t^2 - x^2 - y^2}} e^{-\beta \sqrt{c_k^2 t^2 - x^2 - y^2}}, \\ \text{при } |x| < \sqrt{c_k^2 t^2 - y^2} \\ \frac{1}{2\pi} [e^{-i\alpha x} F(\tau) + e^{i\alpha x} \bar{F}(\tau)] \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - c_k^2 t^2}} \sin[\beta \sqrt{x^2 + y^2 - c_k^2 t^2}] + \\ + i [e^{-i\alpha x} F(\tau) + e^{i\alpha x} \bar{F}(\tau)] \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - c_k^2 t^2}} \cos[\beta \sqrt{x^2 + y^2 - c_k^2 t^2}], \\ \text{при } |x| > \sqrt{c_k^2 t^2 - y^2} \end{cases}$$

В итоге получим:

$$\Omega(t, x, y, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{Re}(e^{-\tau s_k} F(\tau))}{\sqrt{t^2 c_k^2 - x^2 - y^2}}; & \text{если } |x| < \sqrt{t^2 c_k^2 - y^2} \\ -\frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{Im}(e^{-\tau s_k^*} F(\tau))}{\sqrt{x^2 + y^2 - t^2 c_k^2}}; & \text{если } |x| > \sqrt{t^2 c_k^2 - y^2} \end{cases} \quad (1.7)$$

Окончательное выражение для компонентов перемещения получается из интеграла (1.5), который в данном случае представляет собой обычную формулу обращения Лапласа

$$u_k = \frac{I c_k}{\mu c_1^2} \int_0^{\infty} \Omega(t, x, y, \tau) d\tau =$$

$$= \frac{I c_k}{\mu c_1^2} \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{Re} s_k f(s_k)}{\sqrt{t^2 c_k^2 - x^2 - y^2}}; & \text{при } |x| < \sqrt{t^2 c_k^2 - y^2} \\ -\frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{Im} s_k^* f(s_k^*)}{\sqrt{x^2 + y^2 - t^2 c_k^2}}; & \text{при } |x| > \sqrt{t^2 c_k^2 - y^2} \end{cases} \quad (1.8)$$

где

$$s_k = \frac{t c_k \sqrt{t^2 c_k^2 - x^2 - y^2} + i x y}{t^2 c_k^2 - y^2}, \quad s_k^* = \frac{t c_k \sqrt{x^2 + y^2 - t^2 c_k^2} + x y i}{t^2 c_k^2 - y^2}$$

Функция  $pf(p)$ , фигурирующая в формуле преобразования, теперь появляется и в функции оригинала с новым аргументом и коэффициентом. Этот результат позволяет сформулировать следующую теорему.

*Теорема.* Функция вида

$$f_k(x, y, t) = A \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{Re} F(s_k)}{\sqrt{t^2 c_k^2 - x^2 - y^2}}; & \text{при } |x| < \sqrt{t^2 c_k^2 - y^2} \\ -\frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{Im} F(s_k^*)}{\sqrt{x^2 + y^2 - t^2 c_k^2}}; & \text{при } |x| > \sqrt{t^2 c_k^2 - y^2} \end{cases} \quad (1.9)$$

является решением волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_k^2 \Delta u; \quad (1.10)$$

кроме того, она является прообразом функции двукратного преобразования (Лапласа и Фурье) следующего вида:

$$\bar{f}_k^*(q, y, p) = A \frac{e^{y \sqrt{\frac{p^2}{c_k^2} + q^2}}}{\sqrt{p^2 + c_k^2 q^2}} F\left(\sqrt{\frac{p^2}{q^2 c_k^2} + 1}\right), \quad y \leq 0,$$

где  $A$  – постоянная задачи.

Как показывает простое вычисление, функции вида  $\operatorname{Re} F(s_k)$  и  $\operatorname{Im} F(s_k^*)$  с нулевыми порядками также удовлетворяют волновому уравнению (1.10). Это свидетельствует о том, что они образуют совершенно новый тип функционально-инвариантных решений Смирнова–Соболева и, соответственно, обладают всеми свойствами этих решений [8]. При этом функции (1.9) на фронте волны  $\sqrt{x^2 + y^2} = tc_k$ , имея особенность степени  $1/2$ , являются решениями порядка  $(-1)$  этого же семейства. Необходимо отметить, что данное однородное решение этого порядка обнаружено впервые, и что решение задачи Лэмба, полученное на основе представленной выше теоремы, полностью совпадает с решением, приведенным в [3].

**Заключение.** Найден новый тип функционально-инвариантных решений Смирнова–Соболева для волновых уравнений. Эти решения обладают свойством сохранения своего вида при переходе к двукратным интегральным преобразованиям Лапласа и Фурье. Благодаря данному свойству, полученные решения могут быть использованы в решении многих задач математической физики.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lamb H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1904. V. A203. P. 1–42.
2. Broberg K.V. Cracks and Fracture. London: Acad. Press, 1999. 705 p.
3. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986, 328 с.
4. Kravtsov A.V., Kuznetsov S.V., Sekerzh-Zen'kovich S.Ya. Finite element models in Lamb's problem // Mech. Solids. 2011. V. 46. № 6. P. 952–959.
5. Il'yasov Kh.Kh., Kravtsov A.V., Kuznetsov S.V., Sekerzh-Zen'kovich S.Ya. Exterior 3D Lamb problem: harmonic load distributed over a surface // Mech. Solids. 2016. V. 51. № 1. P. 39–45.
6. Kuznetsov S.V., Terentjeva E.O. Planar internal Lamb problem: waves in the epicentral zone of a vertical power source // Acoust. Phys. 2015. V. 61. № 3. P. 356–367.
7. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционные исчисления. М.: Наука, 1961. 524 с.
8. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. 672 с.

## A New Class of Homogeneous Solutions for Flat Elastodynamics Problems

N. B. Rasulova<sup>a,#</sup> and M. B. Rasulov<sup>a,##</sup>

<sup>a</sup> *Institute of Mathematics and Mechanics of the NAS Azerbaijan, Baku, Azerbaijan*

<sup>#</sup> *e-mail: nazila.rasulova@imm.az*

<sup>##</sup> *e-mail: rasulova@gmail.com*

The article presents a new type of functionally invariant Smirnov–Sobolev solutions for the wave equation, which can be used for solving many homogeneous problems of elastodynamics. The derived solution has a unique property: the double pre-image of Laplace and Fourier transforms of this function with a new argument and coefficient is identical to function itself. Thus, this property creates a new formula for double transformation. The method of obtaining this formula has been demonstrated when solving the Lamb problem for a half-plane, in the process of transition from image to original.

Keywords: homogeneous solutions, Laplace and Fourier transformations, Lamb's problem, wave equation, Smirnov–Sobolev solution

### REFERENCES

1. *Lamb H.* On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid // *Phil. Trans. R. Soc.*, 1904, vol. A203, pp. 1–42.
2. *Broberg K.B.* Cracks and Fracture. London: Academic Press, 1999. 705 p.
3. *Poruchikov V.A.* Methods of the dynamic theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1986, 328 p.
4. *Kravtsov A.V., Kuznetsov S.V., Sekerzh-Zen'kovich S.Ya.* Finite element models in Lamb's problem // *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 6, pp. 952–959.
5. *Il'yasov Kh.Kh., Kravtsov A.V., Kuznetsov S.V., Sekerzh-Zen'kovich S.Ya.* Exterior 3D Lamb problem: harmonic load distributed over a surface // *Mech. Solids*, 2016, vol. 51, no. 1, pp. 39–45.
6. *Kuznetsov S.V., Terentjeva E.O.* Planar internal Lamb problem: waves in the epicentral zone of a vertical power source // *Acoust. Phys.*, 2015, vol. 61, no. 3, pp. 356–367.
7. *Ditkin V.A., Prudnikov A.P.* Integral Transformations and Operational Calculus. Moscow: Fizmatgiz, 1961. 524 p. (in Russian)
8. *Smirnov V.I.* The Course of Higher Mathematics. Moscow: Nauka, 1974. 672 p. (in Russian)

УДК 539.3

**АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ  
ДВУХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ**© 2020 г. Л. А. Агаловян<sup>1,\*</sup>, М. Л. Агаловян<sup>1,\*\*</sup>, Т. В. Закарян<sup>1,\*\*\*</sup><sup>1</sup> *Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения**\* e-mail: lagal@sci.am**\*\* e-mail: mheraghalovyan@rambler.ru**\*\*\* e-mail: zaqaryantatevik@mail.ru*

Поступила в редакцию 11.07.2019 г.

После доработки 22.10.2019 г.

Принята к публикации 31.10.2019 г.

Асимптотическим методом решена трехмерная динамическая задача о вынужденных колебаниях ортотропной двухслойной пластинки при наличии в слоях внутреннего трения. Считается, что трение пропорционально скорости точек. На лицевых поверхностях двухслойного пакета заданы значения напряжений, которые изменяются во времени гармонически. Найдено общее асимптотическое решение внутренней задачи. Показано, что трение (диссипация) приводит к тому, что амплитуды колебаний всегда остаются конечными, в то время как при отсутствии внутреннего трения существуют частоты, при которых амплитуда превращается в бесконечность.

*Ключевые слова:* слоистая пластинка, вынужденные колебания, внутреннее трение, асимптотическое решение

**DOI:** 10.31857/S0032823520010038

**Введение.** Для решения динамических задач теории упругости использовались метод Фуре, интегральные преобразования, методы Винера–Хопфа и Смирнова–Соболева [1]. Для решения статических и динамических задач пластин и оболочек, в том числе слоистых, на основе классической и уточненных теорий эффективным оказался также численно-аналитический метод [2, 3]. Сравнительно мало работ, посвященных пространственным статическим и динамическим задачам пластин и оболочек. Для решения подобных задач эффективным оказался асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Решению статических пространственных задач однослойных и многослойных пластин и оболочек посвящены монографии [4–6]. Некоторые классы динамических задач решены для анизотропных пластин [5, 7–9] и для оболочек [10]. Асимптотическим методом изучены локализованные колебания и волны в тонких телах [11–15]. Для изучения напряженно-деформированных состояний слоистых структур использован асимптотический метод [16–19]. Получено асимптотическое решение задачи о гармонических колебаниях упругого параллелепипеда [20], установлена асимптотика частот и мод собственных колебаний тонкой упругой прокладки между двумя абсолютно жесткими профилями [21].

В настоящей работе определено асимптотическое решение трехмерной динамической задачи о вынужденных колебаниях ортотропной двухслойной пластинки с учетом влияния трения в слоях. Считается, что трение пропорционально скорости точек [22].

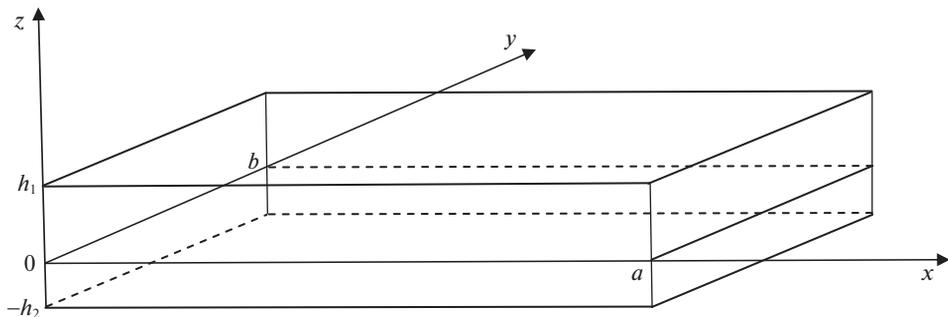


Рис. 1

**1. Основные уравнения и постановка задачи.** Требуется найти в области

$$D = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h_2 \leq z \leq h_1, h_1 + h_2 = h \ll l\}$$

$$l = \min(a, b)\},$$

занятой двухслойной пластинкой, решение уравнений движения

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(m)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{(m)}}{\partial z} - k_m \frac{\partial u^{(m)}}{\partial t} = \rho^{(m)} \frac{\partial^2 u^{(m)}}{\partial t^2}, \quad (x, y, z; u, v, w), \quad m = 1, 2 \quad (1.1)$$

и соотношений упругости ортотропного тела

$$\frac{\partial u^{(m)}}{\partial x} = a_{11}^{(m)} \sigma_{xx}^{(m)} + a_{12}^{(m)} \sigma_{yy}^{(m)} + a_{13}^{(m)} \sigma_{zz}^{(m)}, \quad (x, y, z; u, v, w; 1, 2, 3), \quad m = 1, 2$$

$$\frac{\partial u^{(m)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x} = a_{66}^{(m)} \sigma_{xy}^{(m)}, \quad \frac{\partial w^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(m)}}{\partial z} = a_{55}^{(m)} \sigma_{xz}^{(m)} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial w^{(m)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(m)}}{\partial z} = a_{44}^{(m)} \sigma_{yz}^{(m)},$$

где  $k$  – коэффициент сопротивления,  $\rho$  – плотность. В уравнении (1.1) и далее обозначение типа  $(x, y, z; u, v, w)$  означает, что есть еще два уравнения, которые можно получить из уравнения (1.1) циклической заменой переменных  $x$  на  $y$ ,  $y$  на  $z$ ,  $z$  на  $x$ ; аналогичная перестановка для функций  $u, v, w$ . Группы  $(x, y, z)$ ,  $(u, v, w)$  разделяются точкой с запятой (;). Решение должно удовлетворять следующим граничным условиям на лицевых поверхностях  $z = h_1, -h_2$  пластинки:

$$\sigma_{\alpha z}^{(1)}(x, y, h_1, t) = \sigma_{\alpha z}^+(\xi, \eta) \cos \Omega t, \quad \alpha = x, y, z$$

$$\sigma_{\alpha z}^{(2)}(x, y, -h_2, t) = -\sigma_{\alpha z}^-(\xi, \eta) \cos \Omega t \quad (1.3)$$

$$\xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad l = \min(a, b),$$

где  $\Omega$  – частота внешнего воздействия, а также условиям полного контакта между слоями пакета (рис. 1):

$$\sigma_{\alpha z}^{(1)}(x, y, 0, t) = \sigma_{\alpha z}^{(2)}(x, y, 0, t), \quad \alpha = x, y, z$$

$$u^{(1)}(x, y, 0, t) = u^{(2)}(x, y, 0, t), \quad (u, v, w) \quad (1.4)$$

и условиям на боковой поверхности, которые пока не будем конкретизировать.

**2. Общий интеграл внутренней задачи.** Решение сформулированной задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^{(m)}(x, y, z, t) &= \sigma_{jkI}^{(m)}(x, y, z) \sin \Omega t + \sigma_{jkII}^{(m)}(x, y, z) \cos \Omega t, \quad \alpha, \beta = x, y, z, \quad j, k = 1, 2, 3 \\ u^{(m)}(x, y, z, t) &= u_I^{(m)}(x, y, z) \sin \Omega t + u_{II}^{(m)}(x, y, z) \cos \Omega t, \quad (u, v, w), \quad m = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

и перейдем к безразмерным координатам и перемещениям:

$$\xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad \zeta = z/h, \quad U_I = u_I/l, \quad U_{II} = u_{II}/l, \quad (u, v, w) \quad (2.2)$$

Получим сингулярно возмущенную малым параметром  $\varepsilon = h/l$  систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11I}^{(m)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12I}^{(m)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{13I}^{(m)}}{\partial \zeta} + k_m l^2 \Omega U_{II}^{(m)} &= -\rho^{(m)} \Omega^2 l^2 U_I^{(m)}, \quad (\xi, \eta; 1, 2; U, V) \\ \frac{\partial \sigma_{11II}^{(m)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12II}^{(m)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{13II}^{(m)}}{\partial \zeta} - k_m l^2 \Omega U_I^{(m)} &= -\rho^{(m)} \Omega^2 l^2 U_{II}^{(m)}, \quad (\xi, \eta; 1, 2; U, V) \\ \frac{\partial \sigma_{13I}^{(m)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23I}^{(m)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{33I}^{(m)}}{\partial \zeta} + k_m l^2 \Omega W_{II}^{(m)} &= -\rho^{(m)} \Omega^2 l^2 W_I^{(m)}, \quad (I, II) \\ \frac{\partial U_I^{(m)}}{\partial \xi} &= a_{11}^{(m)} \sigma_{11I}^{(m)} + a_{12}^{(m)} \sigma_{22I}^{(m)} + a_{13}^{(m)} \sigma_{33I}^{(m)} \\ \frac{\partial U_{II}^{(m)}}{\partial \xi} &= a_{11}^{(m)} \sigma_{11II}^{(m)} + a_{12}^{(m)} \sigma_{22II}^{(m)} + a_{13}^{(m)} \sigma_{33II}^{(m)}, \quad (\xi, \eta; 1, 2; U, V) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial W_I^{(m)}}{\partial \zeta} = a_{13}^{(m)} \sigma_{11I}^{(m)} + a_{23}^{(m)} \sigma_{22I}^{(m)} + a_{33}^{(m)} \sigma_{33I}^{(m)}$$

$$\frac{\partial V_I^{(m)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_I^{(m)}}{\partial \eta} = a_{66}^{(m)} \sigma_{12I}^{(m)}, \quad (I, II)$$

$$\frac{\partial W_I^{(m)}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U_I^{(m)}}{\partial \zeta} = a_{55}^{(m)} \sigma_{13I}^{(m)}, \quad \frac{\partial W_I^{(m)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V_I^{(m)}}{\partial \zeta} = a_{44}^{(m)} \sigma_{23I}^{(m)} \quad (I, II)$$

Решение  $I$  этой сингулярно возмущенной системы складывается из решений внутренней задачи ( $I^{\text{int}}$ ) и пограничного слоя ( $I_b$ ):

$$I = I^{\text{int}} + I_b \quad (2.4)$$

Решение внутренней задачи будем искать в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{jk\gamma}^{\text{int}} &= \varepsilon^{-1+s} \sigma_{jk\gamma}^{(s)}, \quad j, k = 1, 2, 3, \quad \gamma = I, II, \quad s = \overline{0, N} \\ (U_\gamma^{\text{int}}, V_\gamma^{\text{int}}, W_\gamma^{\text{int}}) &= \varepsilon^s (U_\gamma^{(s)}, V_\gamma^{(s)}, W_\gamma^{(s)}), \quad \gamma = I, II \end{aligned} \quad (2.5)$$

Обозначение  $s = \overline{0, N}$  означает, что по нему (повторяющемуся) индексу  $s$  происходит суммирование по целочисленным значениям  $s$  от 0 до  $N$ .

Подставив решение (2.5) в уравнения (2.3), для определения неизвестных коэффициентов  $\sigma_{jk\gamma}^{(s)}, U_\gamma^{(s)}, V_\gamma^{(s)}, W_\gamma^{(s)}$  получим систему:

$$\frac{\partial \sigma_{11I}^{(m,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12I}^{(m,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{13I}^{(m,s)}}{\partial \zeta} + 2H_m \Omega U_{II}^{(m,s)} + \rho_m^2 \Omega^2 U_I^{(m,s)} = 0, \quad (\xi, \eta; 1, 2; U, V)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_{11II}^{(m,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12II}^{(m,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{13II}^{(m,s)}}{\partial \zeta} - 2H_m \Omega U_I^{(m,s)} + \rho_m^2 \Omega^2 U_{II}^{(m,s)} = 0 \\
& \frac{\partial \sigma_{13II}^{(m,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23II}^{(m,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{33II}^{(m,s)}}{\partial \zeta} + 2H_m \Omega W_{II}^{(m,s)} + \rho_m^2 \Omega^2 W_{II}^{(m,s)} = 0 \\
& \frac{\partial \sigma_{13II}^{(m,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23II}^{(m,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_{33II}^{(m,s)}}{\partial \zeta} - 2H_m \Omega W_I^{(m,s)} + \rho_m^2 \Omega^2 W_I^{(m,s)} = 0 \\
& \frac{\partial U_I^{(m,s-1)}}{\partial \xi} = a_{11}^{(m)} \sigma_{11II}^{(m,s)} + a_{12}^{(m)} \sigma_{22II}^{(m,s)} + a_{13}^{(m)} \sigma_{33II}^{(m,s)}, \quad (\xi, \eta; 1, 2; U, V) \\
& \frac{\partial U_{II}^{(m,s-1)}}{\partial \xi} = a_{11}^{(m)} \sigma_{11II}^{(m,s)} + a_{12}^{(m)} \sigma_{22II}^{(m,s)} + a_{13}^{(m)} \sigma_{33II}^{(m,s)} \\
& \frac{\partial W_I^{(m,s)}}{\partial \zeta} = a_{13}^{(m)} \sigma_{11II}^{(m,s)} + a_{23}^{(m)} \sigma_{22II}^{(m,s)} + a_{33}^{(m)} \sigma_{33II}^{(m,s)} \\
& \frac{\partial W_{II}^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{13}^{(m)} \sigma_{11II}^{(m,s)} + a_{23}^{(m)} \sigma_{22II}^{(m,s)} + a_{33}^{(m)} \sigma_{33II}^{(m,s)} \\
& \frac{\partial V_I^{(m,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_I^{(m,s-1)}}{\partial \eta} = a_{66}^{(m)} \sigma_{12II}^{(m,s)} \\
& \frac{\partial V_{II}^{(m,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_{II}^{(m,s-1)}}{\partial \eta} = a_{66}^{(m)} \sigma_{12II}^{(m,s)} \\
& \frac{\partial W_I^{(m,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_I^{(m,s)}}{\partial \zeta} = a_{55}^{(m)} \sigma_{13II}^{(m,s)} \\
& \frac{\partial W_{II}^{(m,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_{II}^{(m,s)}}{\partial \zeta} = a_{55}^{(m)} \sigma_{13II}^{(m,s)} \\
& \frac{\partial W_I^{(m,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V_I^{(m,s)}}{\partial \zeta} = a_{44}^{(m)} \sigma_{23II}^{(m,s)} \\
& \frac{\partial W_{II}^{(m,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V_{II}^{(m,s)}}{\partial \zeta} = a_{44}^{(m)} \sigma_{23II}^{(m,s)}, \quad 2H_m = k_m h^2, \quad \rho_m^2 = \rho^{(m)} h^2
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Из системы (2.6) все компоненты тензора напряжений можно выразить через компоненты вектора перемещения по формулам

$$\begin{aligned}
\sigma_{13\gamma}^{(m,s)} &= \frac{1}{a_{55}^{(m)}} \left( \frac{\partial U_\gamma^{(m,s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_\gamma^{(m,s-1)}}{\partial \xi} \right) \\
\sigma_{23\gamma}^{(m,s)} &= \frac{1}{a_{44}^{(m)}} \left( \frac{\partial V_\gamma^{(m,s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_\gamma^{(m,s-1)}}{\partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{12\gamma}^{(m,s)} &= \frac{1}{a_{66}^{(m)}} \left( \frac{\partial U_\gamma^{(m,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V_\gamma^{(m,s-1)}}{\partial \xi} \right) \\
 \sigma_{11\gamma}^{(m,s)} &= \frac{1}{\Delta^{(m)}} \left( -A_{23}^{(m)} \frac{\partial W_\gamma^{(m,s)}}{\partial \zeta} + A_{22}^{(m)} \frac{\partial U_\gamma^{(m,s-1)}}{\partial \xi} - A_{12}^{(m)} \frac{\partial V_\gamma^{(m,s-1)}}{\partial \eta} \right) \\
 \sigma_{22n}^{(m,s)} &= \frac{1}{\Delta^{(m)}} \left( -A_{13}^{(m)} \frac{\partial W_\gamma^{(m,s)}}{\partial \zeta} - A_{12}^{(m)} \frac{\partial U_\gamma^{(m,s-1)}}{\partial \xi} + A_{33}^{(m)} \frac{\partial V_\gamma^{(m,s-1)}}{\partial \eta} \right) \\
 \sigma_{33\gamma}^{(m,s)} &= \frac{1}{\Delta^{(m)}} \left( A_{11}^{(m)} \frac{\partial W_\gamma^{(m,s)}}{\partial \zeta} - A_{23}^{(m)} \frac{\partial U_\gamma^{(m,s-1)}}{\partial \xi} - A_{13}^{(m)} \frac{\partial V_\gamma^{(m,s-1)}}{\partial \eta} \right), \quad m = 1, 2, \quad \gamma = I, II,
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_{11}^{(m)} &= a_{11}^{(m)} a_{22}^{(m)} - (a_{12}^{(m)})^2 \\
 A_{12}^{(m)} &= a_{12}^{(m)} a_{33}^{(m)} - a_{23}^{(m)} a_{13}^{(m)} \\
 A_{13}^{(m)} &= a_{11}^{(m)} a_{23}^{(m)} - a_{13}^{(m)} a_{12}^{(m)} \\
 A_{22}^{(m)} &= a_{22}^{(m)} a_{33}^{(m)} - (a_{23}^{(m)})^2 \\
 A_{23}^{(m)} &= a_{13}^{(m)} a_{22}^{(m)} - a_{12}^{(m)} a_{23}^{(m)} \\
 A_{33}^{(m)} &= a_{11}^{(m)} a_{33}^{(m)} - (a_{13}^{(m)})^2 \\
 \Delta^{(m)} &= a_{11}^{(m)} A_{22}^{(m)} - a_{12}^{(m)} A_{12}^{(m)} - a_{13}^{(m)} A_{23}^{(m)}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

А для определения компонент вектора перемещения получим уравнения

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^4 U_I^{(m,s)}}{\partial \zeta^4} + 2\rho_m^2 \Omega^2 a_{55}^{(m)} \frac{\partial^2 U_I^{(m,s)}}{\partial \zeta^2} + (4H_m^2 + \rho_m^4 \Omega^2) \Omega^2 (a_{55}^{(m)})^2 U_I^{(m,s)} &= R_u^{(m,s)}, \quad (U, V; a_{55}, a_{44}) \\
 R_u^{(m,s)} &= a_{55}^{(m)} \left[ 2H_m \Omega a_{55}^{(m)} \left( \frac{\partial \sigma_{11II}^{(m,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12II}^{(m,s-1)}}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial^2 U_{I*}^{(m,s)}}{\partial \zeta^2} + \right. \\
 &\quad \left. + 2H_m \Omega \frac{\partial^2 W_{II}^{(m,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - \rho_m^2 \Omega^2 a_{55}^{(m)} U_{I*}^{(m,s)} \right]
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
 U_{I*}^{(m,s)} &= \frac{\partial \sigma_{11I}^{(m,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12I}^{(m,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{1}{a_{55}^{(m)}} \frac{\partial W_I^{(m,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta}, \quad (U, V; a_{55}, a_{44}; \xi, \eta; 1, 2) \\
 \frac{\partial^4 W_I^{(m,s)}}{\partial \zeta^4} + \frac{2\rho_m^2 \Omega^2 \Delta_m}{A_{11}^{(m)}} \frac{\partial^2 W_I^{(m,s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{(4H_m^2 + \rho_m^4 \Omega^2) \Omega^2 \Delta_m^2}{(A_{11}^{(m)})^2} W_I^{(m,s)} &= R_w^{(m,s)} \\
 R_w^{(m,s)} &= \frac{2H_m \Omega (\Delta^{(m)})^2}{A_{11}^2} \left[ \frac{\partial \sigma_{13II}^{(m,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23II}^{(m,s-1)}}{\partial \eta} - \frac{1}{\Delta^{(m)}} \left( A_{23}^{(m)} \frac{\partial^2 U_{II}^{(m,s)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{12}^{(m)} \frac{\partial^2 V_{II}^{(m,s)}}{\partial \eta \partial \zeta} \right) \right] - \\
 &\quad - \frac{\Delta^{(m)}}{A_{11}^{(m)}} \frac{\partial^2 W_{I*}^{(m,s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{\rho_m^2 \Omega^2 (\Delta^{(m)})^2}{(A_{11}^{(m)})^2} W_{I*}^{(m,s)} \\
 W_{I*}^{(m,s)} &= \frac{\partial \sigma_{13I}^{(m,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{23I}^{(m,s-1)}}{\partial \eta} - \frac{1}{\Delta^{(m)}} \left( A_{23}^{(m)} \frac{\partial^2 U_I^{(m,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{12}^{(m)} \frac{\partial^2 V_{II}^{(m,s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} \right)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Остальные компоненты вектора перемещения определяются по соотношениям:

$$\begin{aligned} U_{II}^{(m,s)} &= -\frac{1}{2H_m\Omega} \left[ \frac{1}{a_{55}^{(m)}} \frac{\partial^2 U_I^{(m,s)}}{\partial \zeta^2} + \rho_m^2 \Omega^2 U_I^{(m,s)} + U_{I*}^{(m,s)} \right] \\ V_{II}^{(m,s)} &= -\frac{1}{2H_m\Omega} \left[ \frac{1}{a_{44}^{(m)}} \frac{\partial^2 V_I^{(m,s)}}{\partial \zeta^2} + \rho_m^2 \Omega^2 V_I^{(m,s)} + V_{I*}^{(m,s)} \right] \\ W_{II}^{(m,s)} &= -\frac{1}{2H_m\Omega} \left[ \frac{A_{11}^{(m)}}{\Delta^{(m)}} \frac{\partial^2 W_I^{(m,s)}}{\partial \zeta^2} + \rho_m^2 \Omega^2 W_I^{(m,s)} + W_{I*}^{(m,s)} \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

Решением уравнения (2.9) является функция

$$U_I^{(m,s)} = D_1^{(m,s)}(\xi)\varphi_{1u}^{(m)}(\zeta) + D_2^{(m,s)}(\xi)\varphi_{2u}^{(m)}(\zeta) + D_3^{(m,s)}(\xi)\varphi_{3u}^{(m)}(\zeta) + D_4^{(m,s)}(\xi)\varphi_{4u}^{(m)}(\zeta) + \bar{U}_I^{(m,s)}, \quad (2.12)$$

где  $\bar{U}_I^{(m,s)}$  – частное решение уравнения (2.9), а также использованы обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_{1u}^{(m)} &= \text{sh } c_u^{(m)} \zeta \sin d_u^{(m)} \zeta, & \varphi_{2u}^{(m)} &= \text{sh } c_u^{(m)} \zeta \cos d_u^{(m)} \zeta \\ \varphi_{3u}^{(m)} &= \text{ch } c_u^{(m)} \zeta \sin d_u^{(m)} \zeta, & \varphi_{4u}^{(m)} &= \text{ch } c_u^{(m)} \zeta \cos d_u^{(m)} \zeta \\ c_u^{(m)} &= \sqrt{\frac{\Omega a_{55}^{(m)}}{2} \sqrt{-\rho_m^2 \Omega + \sqrt{\rho_m^4 \Omega^2 + 4H_m^2}}} \\ d_u^{(m)} &= \sqrt{\frac{\Omega a_{55}^{(m)}}{2} \sqrt{\rho_m^2 \Omega + \sqrt{\rho_m^4 \Omega^2 + 4H_m^2}}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Тогда, согласно соотношениям (2.7), (2.11), получим

$$\begin{aligned} U_{II}^{(m,s)} &= -D_1^{(m,s)}(\xi)\varphi_{4u}^{(m)}(\zeta) + D_2^{(m,s)}(\xi)\varphi_{3u}^{(m)}(\zeta) - D_3^{(m,s)}(\xi)\varphi_{2u}^{(m)}(\zeta) + D_4^{(m,s)}(\xi)\varphi_{1u}^{(m)}(\zeta) + \bar{U}_{II}^{(m,s)} \\ \sigma_{13I}^{(m,s)} &= \frac{1}{a_{55}^{(m)}} [(c_u^{(m)}\varphi_{3u} + d_u^{(m)}\varphi_{2u})D_1^{(m,s)} + (c_u^{(m)}\varphi_{4u} - d_u^{(m)}\varphi_{1u})D_2^{(m,s)} + \\ &+ (c_u^{(m)}\varphi_{1u} + d_u^{(m)}\varphi_{4u})D_3^{(m,s)} + (c_u^{(m)}\varphi_{2u} - d_u^{(m)}\varphi_{3u})D_4^{(m,s)}] + \bar{\sigma}_{13I}^{(m,s)}(\xi, \eta, \zeta) \\ \sigma_{13II}^{(s)} &= \frac{1}{a_{55}^{(m)}} [-(c_u^{(m)}\varphi_{2u} - d_u^{(m)}\varphi_{3u})D_1^{(m,s)} + (c_u^{(m)}\varphi_{1u} + d_u^{(m)}\varphi_{4u})D_2^{(m,s)} - \\ &- (c_u^{(m)}\varphi_{4u} - d_u^{(m)}\varphi_{1u})D_3^{(m,s)} + (c_u^{(m)}\varphi_{3u} + d_u^{(m)}\varphi_{2u})D_4^{(m,s)}] + \bar{\sigma}_{13II}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \\ \bar{U}_{II}^{(m,s)} &= -\frac{1}{2H_m\Omega} \left( \frac{1}{a_{55}^{(m)}} \frac{\partial^2 \bar{U}_I^{(m,s)}}{\partial \zeta^2} + \rho_m^2 \Omega^2 \bar{U}_I^{(m,s)} + U_{I*}^{(m,s)} \right) \\ \bar{\sigma}_{13n}^{(m,s)} &= \frac{1}{a_{55}^{(m)}} \left( \frac{\partial \bar{U}_n^{(m,s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_n^{(m,s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad n = I, II \end{aligned} \quad (2.14)$$

Решением уравнения (2.9) для перемещения  $V$  является функция

$$V_I^{(m,s)} = F_1^{(m,s)}(\xi)\varphi_{1v}^{(m)}(\zeta) + F_2^{(m,s)}(\xi)\varphi_{2v}^{(m)}(\zeta) + F_3^{(m,s)}(\xi)\varphi_{3v}^{(m)}(\zeta) + F_4^{(m,s)}(\xi)\varphi_{4v}^{(m)}(\zeta) + \bar{V}_I^{(m,s)}, \quad (2.15)$$

где функции  $\varphi_{jv}^{(m)}(\zeta)$  определяются по формулам (2.13) в которых вместо  $U$ ,  $a_{55}$  необходимо подставить  $V$ ,  $a_{44}$ .

Аналогично, для уравнения (2.10) имеем решение

$$W_I^{(m,s)} = B_1^{(m,s)}(\xi)\varphi_{1w}^{(m)}(\zeta) + B_2^{(m,s)}(\xi)\varphi_{2w}^{(m)}(\zeta) + B_3^{(m,s)}(\xi)\varphi_{3w}^{(m)}(\zeta) + B_4^{(m,s)}(\xi)\varphi_{4w}^{(m)}(\zeta) + \bar{W}_I^{(m,s)}, \quad (2.16)$$

где  $\varphi_{jw}^{(m)}(\zeta)$ ,  $c_w$  вычисляются по формулам (2.13) заменой  $\varphi_{ju}^{(m)}(\zeta)$ ,  $c_u$ ,  $a_{55}$  на  $\varphi_{jw}^{(m)}(\zeta)$ ,  $c_w$ ,  $\Delta/A_{11}$ .

Удовлетворив граничным условиям (1.3) и условиям контакта (1.4), получим алгебраическую систему

$$\begin{aligned}
 \sigma_{j3I}^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) &= 0, \quad \sigma_{j3II}^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1) = \sigma_{\alpha z}^{+(s)}(\xi, \eta), \quad j = 1, 2, 3, \quad \alpha = x, y, z \\
 \sigma_{jz}^{+(0)} &= \varepsilon \sigma_{jz}^+, \quad \sigma_{jz}^{+(s)} = 0, \quad s \neq 0 \\
 \sigma_{j3I}^{(2,s)}(\xi, \eta, -\zeta_2) &= 0, \quad \sigma_{j3II}^{(2,s)}(\xi, \eta, -\zeta_2) = -\sigma_{\alpha z}^{-(s)}(\xi, \eta), \quad j = 1, 2, 3, \quad \alpha = x, y, z \\
 \sigma_{jz}^{-(0)} &= \varepsilon \sigma_{jz}^-, \quad \sigma_{jz}^{-(s)} = 0, \quad s \neq 0 \\
 \sigma_{j3m}^{(1,s)}(\xi, \eta, 0) &= \sigma_{j3m}^{(2,s)}(\xi, \eta, 0), \quad j = 1, 2, 3, \quad m = I, II \\
 U_m^{(1,s)}(\xi, \eta, 0) &= U_m^{(2,s)}(\xi, \eta, 0), \quad (U, V, W)
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Алгебраическая система (2.17) распадается на три алгебраические системы относительно  $D_j^{(m,s)}$ ,  $F_j^{(m,s)}$  и  $B_j^{(m,s)}$ , где  $j = 1, 2, 3, 4$ ,  $m = I, II$ .

Алгебраическая система относительно  $D_j^{(m,s)}$  имеет вид

$$\begin{aligned}
 b_{\alpha\beta} X_\beta^{(s)} &= a_\alpha^{(s)}, \quad \alpha = 1, \dots, 8, \quad \beta = 1, \dots, 8 \\
 X_j^{(s)} &= D_j^{(1,s)}, \quad X_{4+j}^{(s)} = D_j^{(2,s)}, \quad j = 1, \dots, 4,
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

где

$$b_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} b_{1u}^{(1)} & b_{2u}^{(1)} & b_{3u}^{(1)} & b_{4u}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{1u}^{(2)} & b_{2u}^{(2)} & b_{3u}^{(2)} & b_{4u}^{(2)} \\ -b_{4u}^{(1)} & b_{3u}^{(1)} & -b_{2u}^{(1)} & b_{1u}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{4u}^{(2)} & b_{3u}^{(2)} & -b_{2u}^{(2)} & b_{1u}^{(2)} \\ 0 & c_u^{(1)} & d_u^{(1)} & 0 & 0 & -c_u^{(2)} & -d_u^{(2)} & 0 \\ 0 & d_u^{(1)} & -c_u^{(1)} & 0 & 0 & -d_u^{(2)} & c_u^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} a_{1u}^{(s)} \\ a_{2u}^{(s)} \\ a_{3u}^{(s)} \\ a_{4u}^{(s)} \\ a_{5u}^{(s)} \\ a_{6u}^{(s)} \\ a_{7u}^{(s)} \\ a_{8u}^{(s)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 b_{1u}^{(1)} &= c_u^{(1)} \varphi_{3u}^{(1)}(\zeta_1) + d_u^{(1)} \varphi_{2u}^{(1)}(\zeta_1), & b_{1u}^{(2)} &= c_u^{(2)} \varphi_{3u}^{(2)}(-\zeta_2) + d_u^{(2)} \varphi_{2u}^{(2)}(-\zeta_2) \\
 b_{2u}^{(1)} &= c_u^{(1)} \varphi_{4u}^{(1)}(\zeta_1) - d_u^{(1)} \varphi_{1u}^{(1)}(\zeta_1), & b_{2u}^{(2)} &= c_u^{(2)} \varphi_{4u}^{(2)}(-\zeta_2) - d_u^{(2)} \varphi_{1u}^{(2)}(-\zeta_2) \\
 b_{3u}^{(1)} &= c_u^{(1)} \varphi_{1u}^{(1)}(\zeta_1) + d_u^{(1)} \varphi_{4u}^{(1)}(\zeta_1), & b_{3u}^{(2)} &= c_u^{(2)} \varphi_{1u}^{(2)}(-\zeta_2) + d_u^{(2)} \varphi_{4u}^{(2)}(-\zeta_2) \\
 b_{4u}^{(1)} &= c_u^{(1)} \varphi_{2u}^{(1)}(\zeta_1) - d_u^{(1)} \varphi_{3u}^{(1)}(\zeta_1), & b_{4u}^{(2)} &= c_u^{(2)} \varphi_{2u}^{(2)}(-\zeta_2) - d_u^{(2)} \varphi_{3u}^{(2)}(-\zeta_2)
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
 a_{1u}^{(s)} &= -a_{55}^{(1)} \bar{\sigma}_{13I}^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1), & a_{2u}^{(s)} &= -a_{55}^{(2)} \bar{\sigma}_{13I}^{(2,s)}(\xi, \eta, -\zeta_2) \\
 a_{3u}^{(s)} &= a_{55}^{(1)} (\sigma_{xz}^{+(s)} - \bar{\sigma}_{13I}^{(1,s)}(\xi, \eta, \zeta_1)), & a_{4u}^{(s)} &= a_{55}^{(2)} (-\sigma_{xz}^{-(s)} - \bar{\sigma}_{13II}^{(2,s)}(\xi, \eta, -\zeta_2)) \\
 a_{5u}^{(s)} &= \bar{\sigma}_{13I}^{(2,s)}(\xi, \eta, 0) - \bar{\sigma}_{13I}^{(1,s)}(\xi, \eta, 0), & a_{6u}^{(s)} &= \bar{\sigma}_{13II}^{(2,s)}(\xi, \eta, 0) - \bar{\sigma}_{13II}^{(1,s)}(\xi, \eta, 0) \\
 a_{7u}^{(s)} &= \bar{U}_I^{(2,s)}(\xi, \eta, 0) - \bar{U}_I^{(1,s)}(\xi, \eta, 0), & a_{8u}^{(s)} &= \bar{U}_{II}^{(2,s)}(\xi, \eta, 0) - \bar{U}_{II}^{(1,s)}(\xi, \eta, 0)
 \end{aligned}$$

Решением системы (2.18) по формуле Крамера является

$$X_\beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta}, \quad \Delta = |b_{\alpha\beta}|$$

Аналогичным образом определяются  $F_j^{(m,s)}$ ,  $B_j^{(m,s)}$  циклической заменой  $\left( U, V, W; a_{55}^{(m)}, a_{44}^{(m)}, \frac{\Delta^{(m)}}{A_{11}^{(m)}} \right)$  в формулах (2.18), (2.19).

Если функции  $\sigma_{\alpha z}^+$ ,  $\sigma_{\alpha z}^-$  являются многочленами от  $\xi$ ,  $\eta$ , итерационный процесс обрывается, и в результате получим математически точное решение во внутренней задаче. В качестве иллюстрации приведем это решение для следующего случая:

$$\sigma_{zz}^+ = \text{const}, \quad \sigma_{zz}^- = 0, \quad \sigma_{xz}^\pm = 0, \quad \sigma_{yz}^\pm = 0$$

В этом случае итерация обрывается на исходном приближении, следовательно, имеем

$$\begin{aligned} u^{(m)} = 0, \quad v^{(m)} = 0, \quad \sigma_{12}^{(m)} = 0, \quad \sigma_{13}^{(m)} = 0, \quad \sigma_{23}^{(m)} = 0 \\ w^{(m)} = IW_I^{(m,0)} \sin \Omega t + IW_{II}^{(m,0)} \cos \Omega t \\ \sigma_{\alpha\alpha}^{(m)} = \varepsilon^{-1} \sigma_{jjl}^{(m,0)} \sin \Omega t + \varepsilon^{-1} \sigma_{jjl}^{(m,0)} \cos \Omega t, \quad \alpha = x, y, z, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где

$$W_I^{(m,0)} = B_1^{(m,0)}(\xi)\varphi_{1w}^{(m)}(\zeta) + B_2^{(m,0)}(\xi)\varphi_{2w}^{(m)}(\zeta) + B_3^{(m,0)}(\xi)\varphi_{3w}^{(m)}(\zeta) + B_4^{(m,0)}(\xi)\varphi_{4w}^{(m)}(\zeta)$$

$$W_{II}^{(m,0)} = -\frac{1}{2H_m\Omega} \left[ \frac{A_{11}^{(m)}}{\Delta^{(m)}} \frac{\partial^2 W_I^{(m,0)}}{\partial \zeta^2} + \rho_m^2 \Omega^2 W_I^{(m,0)} \right]$$

$$\sigma_{11n}^{(m,0)} = -\frac{A_{23}^{(m)}}{\Delta^{(m)}} \frac{\partial W_n^{(m,0)}}{\partial \zeta}, \quad n = I, II, \quad m = 1, 2$$

$$\sigma_{22n}^{(m,0)} = -\frac{A_{13}^{(m)}}{\Delta^{(m)}} \frac{\partial W_n^{(m,0)}}{\partial \zeta}, \quad \sigma_{33n}^{(m,s)} = \frac{A_{11}^{(m)}}{\Delta^{(m)}} \frac{\partial W_n^{(m,0)}}{\partial \zeta}$$

$$B_i^{(1,s)} = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad B_i^{(2,s)} = \frac{|A_{i+4}|}{|A|}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$A = \begin{pmatrix} b_{1w}^{(1)} & b_{2w}^{(1)} & b_{3w}^{(1)} & b_{4w}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{1w}^{(2)} & b_{2w}^{(2)} & b_{3w}^{(2)} & b_{4w}^{(2)} \\ -b_{4w}^{(1)} & b_{3w}^{(1)} & -b_{2w}^{(1)} & b_{1w}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{4w}^{(2)} & b_{3w}^{(2)} & -b_{2w}^{(2)} & b_{1w}^{(2)} \\ 0 & c_{wu}^{(1)} & d_{wu}^{(1)} & 0 & 0 & -c_w^{(2)} & -d_w^{(2)} & 0 \\ 0 & d_w^{(1)} & -c_w^{(1)} & 0 & 0 & -d_w^{(2)} & c_w^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\Delta^{(1)}}{A_{11}^{(1)}} \sigma_{zz}^+ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, представление (2.5) позволило найти общее решение внутренней задачи, а после удовлетворения граничных условий (1.3) и условий контакта (1.4), получить решение сформулированной внутренней задачи. Найденное решение (2.5), (2.7)–(2.19) внутренней задачи, как правило, не будет удовлетворять граничным условиям на боковой поверхности пластинки. Возникающая неувязка устраняется решением для пограничного слоя. Это решение экспоненциально убывает при удалении от боковой поверхности вовнутрь пластинки. Решение для пограничного слоя и его сопряжение с решением внутренней задачи осуществляется описанным в [5] способом.

Было показано [23], что в однослойной пластинке при наличии внутреннего вязкого сопротивления амплитуды вынужденных колебаний всегда ограничены, в то время как при отсутствии вязкого сопротивления существуют частоты, при которых амплитуды колебаний становятся бесконечными. Очевидным образом, подобное имеет место и при вынужденных колебаниях двухслойных пластин, т.е. имеем  $\Delta = |b_{\alpha\beta}| \neq 0$ ,  $|A| \neq 0$  при наличии вязкого сопротивления. Для иллюстрации сказанного вычислены первые несколько корней соответствующего трансцендентного уравнения. Первый слой пакета – стеклопластик ортогонально-армированный в соотношении 2:1:

$$\rho^{(1)} = 1700 \text{ кг/м}^3, \quad E_1^{(1)} = 3.68 \times 10^{10} \text{ Па}$$

$$G_{13}^{(1)} = 0.44 \times 10^{10} \text{ Па}, \quad h_1 = 1 \text{ м}, \quad k_1 = 0.5$$

Второй слой – резина:

$$\rho^{(2)} = 1500 \text{ кг/м}^3, \quad E^{(2)} = 0.5 \times 10^7 \text{ Па}, \quad G^{(2)} = 0.15 \times 10^7 \text{ Па}, \quad h_2 = 0.5 \text{ м}, \quad k_2 = 0.7$$

Первые корни имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} &198.538 + 0.00023320i, \quad 397.07 + 0.00023321i, \quad 595.593 + 0.00023318i \\ &992.577 + 0.00023314i, \quad 1191.015 + 0.00023319i, \quad 1389.388 + 0.00023308i \\ &1785.723 + 0.00023341i, \quad 1983.384 + 0.00023319i, \end{aligned}$$

где  $i$  – мнимая единица. Следовательно, амплитуды колебаний конечны.

При отсутствии вязкого сопротивления условие  $|b_{\alpha\beta}| = 0$  приводит к уравнению

$$\begin{aligned} &(\rho_1 \sqrt{a_{55}^{(1)}} + \rho_2 \sqrt{a_{55}^{(2)}}) \sin(\rho_1 \Omega \sqrt{a_{55}^{(1)}} \zeta_1 + \rho_2 \Omega \sqrt{a_{55}^{(2)}} \zeta_2) + \\ &+ (\rho_1 \sqrt{a_{55}^{(1)}} - \rho_2 \sqrt{a_{55}^{(2)}}) \sin(\rho_1 \Omega \sqrt{a_{55}^{(1)}} \zeta_1 - \rho_2 \Omega \sqrt{a_{55}^{(2)}} \zeta_2) = 0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

левая часть которого при определенных частотах обращается в нуль, т.е., возникает резонанс.

**Заключение.** Асимптотическим методом изучены вынужденные колебания двухслойных ортотропных пластин при наличии внутреннего вязкого сопротивления. Найдено общее асимптотическое решение задачи. Показано, что наличие сопротивления приводит к тому, что амплитуды колебаний всегда ограничены. При отсутствии же вязкого сопротивления существуют частоты (резонансные), при которых амплитуды становятся бесконечно большими.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
2. Григоренко Я.М., Григоренко А.Я. Задачи статики и динамики анизотропных неоднородных оболочек с переменными параметрами и их численное решение // В кн.: Современ. пробл. мех. Киев: ЛиТеча ЛТД, 2017. Т. 2. С. 311–378.
3. Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочечных систем при нестационарных нагрузках // Прикладная механика. 2017. № 5. С. 3–65.
4. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, Физматлит, 1976. 512 с.
5. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414 с.
6. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Гитутюн НАН РА, 2005. 468 с.
7. Агаловян Л.А. К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин // Изв. вузов РФ. Сев.-Кавказск. регион. Естеств. науки. 2000. № 3. С. 8–11.

8. *Aghalovyan L.A., Aghalovyan M.L.* Asymptotics of free vibrations of anisotropic plates fastened with an absolutely rigid base // *Modern Probl. Deform. Bodies Mech.* Yerevan: Gitutyun NAS RA. 2005. V. 1. P. 8–19.
9. *Агаловян М.Л., Закарян Т.В.* Асимптотическое решение первой трехмерной динамической задачи теории упругости о вынужденных колебаниях трехслойной пластинки несимметричной структуры // *Мех. композ. матер.* 2019. Т. 55. № 1. С. 3–18.
10. *Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г.* К определению решений одного класса динамических пространственных задач математической теории упругости для ортотропных оболочек // *Уч. зап. Армянского госпединститута им. Х. Абовяна.* 2012. № 2 (17). С. 29–42.
11. *Kaplanov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V.* Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. San-Diego: Acad. Press, 1998. 226 p.
12. *Мухасев Г.И., Товстук П.Е.* Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы. М.: Физматлит, 2009. 292 с.
13. *Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю.* Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М.: Физматлит, 2010. 280 с.
14. *Prikazchikova L., Kaplanov J. et al.* Asymptotic analysis of an anti-plane dynamic problem for a three-layered strongly inhomogeneous laminate // *Math. Mech. Solids.* 2018. <https://doi.org/10.1177/1081286518790804>
15. *Kaplanov J., Prikazchikov D.A., Prikazchikova L.A.* Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate // *Intern. J. Solids Struct.* 2017. V. 113. P. 169–179.
16. *Altenbach H., Eremeyev V.A., Naumenko K.* On the use of the first order shear deformation plate theory for the analysis of three-layer plates with thin soft core layer // *ZAMM-J. Appl. Math. Mech. Zeitsch. Ange. Mathe. Mech.* 2015. V. 95. № 10. P. 1004–1011.
17. *Altenbach H., Altenbach J., Kissing W.* Mechanics of Composite Structural Elements. Singapore: Springer, 2018. 470 p.
18. *Boutin C.* Linear pantographic sheets. Asymptotic micro-macro models identification // *Math. Mech. Compl. Syst.* 2017. V. 5. № 2. P. 127–162.
19. *Boutin C., Soubestre J.* Generalized inner bending continua for linear fiber reinforced materials // *Int. J. Solids Struct.* 2011. V. 48. № 3–4. P. 517–534.
20. *Ланков С.О.* Асимптотически точное решение задачи о гармонических колебаниях упругого параллелепипеда // *Изв. РАН. МТТ.* 2017. № 6. С. 109–125.
21. *Назаров С.А.* Асимптотика собственных колебаний тонкой упругой прокладки между абсолютно жесткими профилями // *ПММ.* 2015. Т. 79. Вып. 6. С. 824–838.
22. *Пановко Я.Г.* Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1960. 193 с.
23. *Закарян Т.В.* К решению первой краевой задачи теории упругости о вынужденных колебаниях ортотропных пластин при наличии вязкого сопротивления // *Изв. НАН РА. Механика.* 2012. Т. 65. № 2. С. 5–13.

### Asymptotic Analysis of Forced Vibrations of Double-Layer Plates under Viscous Resistance

L. A. Aghalovyan<sup>a,#</sup>, M. L. Aghalovyan<sup>a,###</sup>, and T. V. Zakaryan<sup>a,###</sup>

<sup>a</sup> Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Armenia, Yerevan, Armenia

<sup>#</sup> e-mail: [lagal@sci.am](mailto:lagal@sci.am)

<sup>##</sup> e-mail: [mheraghalovyan@rambler.ru](mailto:mheraghalovyan@rambler.ru)

<sup>###</sup> e-mail: [zaqaryantatevik@mail.ru](mailto:zaqaryantatevik@mail.ru)

The three-dimensional dynamic problem of forced oscillations of an orthotropic two-layer plate in the presence of internal friction in layers is solved by the asymptotic method. It is assumed that the friction is proportional to the velocity of the points. On the front surfaces of a double-layer package, stress values are given. These values vary in time harmonically. The general asymptotic solution of the internal problem is found. It is shown that friction (dissipation) leads to the fact that the amplitudes of oscillations always remain finite, while, in the absence of internal friction, there are frequencies at which the amplitude becomes infinite.

**Keywords:** layered plate, forced oscillations, internal friction, asymptotic solution

## REFERENCES

1. *Poruchikov V.B.* Methods of Dynamic Theory of Elasticity. (Metody dinamicheskoy teorii uprugosti) Moscow: Nauka, 1986. 328 p. (in Russian)
2. *Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya.* Problems of statics and dynamics for anisotropic inhomogeneous shells with variable parameters and their numerical solution // Modern Problems Mech. Kiev: LiTecha LTD, 2017. no. 2, pp. 31–378. (in Russian)
3. *Lugovoi P.Z., Meysht V.F.* Dynamics of inhomogeneous shell systems under non-stationary loading // Appl. Mech., 2017, no. 5, pp. 3–65. (in Russian)
4. *Gol'denveizer A.L.* Theory of Elastic Thin Shells. (Teoria Uprugikh Tonkikh Obolochek) Moscow: Fizmatlit, 1976. 512 p. (in Russian)
5. *Aghalovyan L.A.* Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore: World Sci. Publ., 2015. 376 p.
6. *Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S.* Nonclassical Boundary-Value Problems of Anisotropic Layered Beams, Plates and Shells. Yerevan: Gitutyun NAS RA, 2005. 468 p.
7. *Aghalovyan L.A.* On an asymptotic method for solution of dynamic mixed boundary value problems for anisotropic strips and plates // Proc. Inst. Russian Federation. North Cauc. Reg. Nat. Sci., 2000, no. 3, pp. 8–11. (in Russian)
8. *Aghalovyan L.A., Aghalovyan M.L.* Asymptotics of free vibrations of anisotropic plates fastened with an absolutely rigid base // Modern Probl. Deform. Bodies Mech. Yerevan: Gitutyun NAS RA, 2005, vol. 1, pp. 8–19.
9. *Aghalovyan M.L., Zakaryan T.V.* Asymptotic solution of the first 3D dynamic elasticity theory problem on forced vibrations of a three-layer plate with an asymmetric structure // Mech. Compos. Mater., 2019, vol. 55, no. 1, pp. 3–18. (in Russian)
10. *Aghalovyan L.A., Ghulghazaryan L.G.* About defining solutions of a class of dynamic space problems of mathematical theory of elasticity for orthotropic shells // Sci News. ASPV after Kh. Abovyan, 2012, no. 2 (17), pp. 29–42. (in Russian)
11. *Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V.* Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. San-Diego: Acad. Press, 1998. 226 p.
12. *Mikhasev G.I., Tovstik P.E.* Localized Vibrations and Waves in Thin Shells. Asymptotic Methods. (Lokalizovannye kolebania i volny v tonkikh obolochkakh. Asimptoticheskie metody) Moscow: Fizmatlit, 2009. 292 p. (in Russian).
13. *Vil'de M.V., Kaplunov Yu.D., Kossovich L.Yu.* Boundary and Interfacial Resonant Phenomena in Elastic Bodies (Kraevye i interfeysnye rezonansnye yavlenia v uprugikh telakh) Moscow: Fizmatlit, 2010. 280 p. (in Russian)
14. *Prikazchikova L., Kaplunov J. et al.* Asymptotic analysis of an anti-plane dynamic problem for a three-layered strongly inhomogeneous laminate // Math. Mech. Solids, 2018, DOI: 10.1177/1081286518790804.
15. *Kaplunov J., Prikazchikov D.A., Prikazchikova L.A.* Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate // Intern. J. Solids Struct. 2017, vol. 113, pp. 169–179.
16. *Altenbach H., Eremeyev V.A., Naumenko K.* On the use of the first order shear deformation plate theory for the analysis of three-layer plates with thin soft core layer // ZAMM-J. Appl. Math. Mech. Zeitsch. Ange. Mathe. Mech., 2015, vol. 95, no. 10, P. 1004–1011.
17. *Altenbach H., Altenbach J., Kissing W.* Mechanics of Composite Structural Elements. Singapore: Springer, 2018. 470 p.
18. *Boutin C.* Linear pantographic sheets. Asymptotic micro-macro models identification // Math. Mech. Compl. Syst., 2017, vol. 5, no. 2, pp. 127–162.
19. *Boutin C., Soubestre J.* Generalized inner bending continua for linear fiber reinforced materials // Int. J. Solids Struct., 2011, vol. 48, no. 3–4, pp. 517–534.
20. *Papkov S.O.* Asymptotically exact solution of the problem of harmonic vibrations of an elastic parallelepiped // Mech. Solids, 2017, vol. 52, no. 6. pp. 686–699.
21. *Nazarov S.A.* Asymptotics of the natural oscillations of a thin elastic gasket between absolutely rigid profiles // JAMM, 2015, vol. 79, no. 6, pp. 577–586.
22. *Panovko Ya.G.* Internal Friction under Oscillations of Elastic Systems. (Vnutrennee trenie pri kolebaniakh uprugikh sistem) Moscow: Fizmatgiz, 1960, 193 p. (in Russian)
23. *Zakaryan T.V.* Solution of a first boundary value problem of elasticity theory of forced vibrations of orthotropic plates with viscous resistance // Proc. NAS Armenia. Mech., 2012, vol. 65, no. 2, pp. 5–13. (in Russian)

УДК 539.3

**КОНТАКТ С МЕЖМОЛЕКУЛЯРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ  
ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОГО СЛОЯ (САМОСОГЛАСОВАННЫЙ ПОДХОД):  
РАСЧЕТ НДС И ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ**

© 2020 г. И.А. Солдатенков\*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

*\*e-mail: iasoldat@hotmail.com*

Поступила в редакцию 21.06.2019 г.

После доработки 09.09.2019 г.

Принята к публикации 16.09.2019 г.

Рассматривается контакт бесконечно протяженного плоского индентора и вязкоупругого слоя в рамках самосогласованного по Дерягину подхода с поверхностным (традиционная постановка) и объемным (уточненная постановка) приложением сил межмолекулярного взаимодействия. Получены аналитические выражения для напряженно-деформированного состояния слоя. С привлечением первого начала термодинамики выполнен расчет диссипации энергии в вязкоупругом слое. Показано, что традиционная и уточненная постановки задачи могут приводить к существенно различным результатам расчета характеристик контакта индентора и вязкоупругого слоя.

Ключевые слова: вязкоупругость, слой, межмолекулярное взаимодействие, диссипация энергии

DOI: 10.31857/S0032823519050102

При изучении контакта деформируемых тел силы межмолекулярного взаимодействия впервые учитывались применительно к герцевскому контакту [1]. В дальнейшем был разработан ряд эффективных подходов к решению контактных задач такого типа, среди которых следует отметить подходы, использующие концепцию поверхностной энергии – модели JKR и DMT [2, 3]. Эти подходы также использовались для расчета адгезионного контакта слоистых [4] и вязкоупругих тел [5–8]. В частности, для такого контакта был выполнен расчет диссипации энергии в зависимости от скорости нагружения [7].

Строгая постановка контактной задачи, учитывающая межмолекулярное взаимодействие, предполагает существование некоторого зазора  $r$  между контактирующими телами. Величина этого зазора должна обеспечивать баланс сил, обусловленных контактной деформацией тел и их межмолекулярным взаимодействием (самосогласованный подход по Дерягину [9]). При таком подходе возможны постановки задачи с поверхностным (традиционная постановка [10–12]) и объемным (уточненная постановка [13–15]) приложением сил межмолекулярного взаимодействия.

В данной работе производится расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) тонкого вязкоупругого слоя, обусловленного внедрением в него индентора при наличии сил межмолекулярного взаимодействия (самосогласованный подход, традиционная и уточненная постановки задачи). Значительное внимание уделено анализу диссипации энергии и интенсивности касательных напряжений в зависимости от параметров режима нагружения слоя.

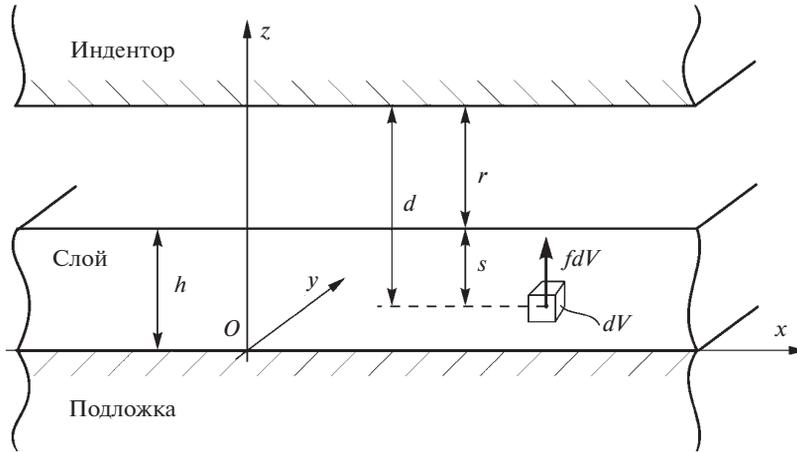


Рис. 1. Контактное взаимодействие индентора с основанием, состоящим из вязкоупругого слоя, связанного с абсолютно жесткой подложкой.

**1. Постановка задачи и основные уравнения.** Рассмотрим контактное взаимодействие абсолютно жесткого тела (индентора) с основанием, состоящим из вязкоупругого слоя толщины  $h$ , связанного с абсолютно жесткой подложкой (рис. 1). Считается, что индентор и слой разделены контактным зазором  $r$ , обеспечивающим баланс сил межмолекулярного и вязкоупругого взаимодействия контактирующих тел (самосогласованный подход) [9]. Свяжем с основанием систему координат  $Oxyz$ , совместив ее плоскость  $Oxy$  с границей раздела слоя и подложки. В дальнейшем также будут использоваться обозначения координат с индексом:  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ .

Межмолекулярное взаимодействие индентора и основания определяется парными взаимодействиями их молекул [16–18]. Соответствующая сила  $F$  зависит от свойств пары молекул и расстояния  $l$  между ними. Существуют разные формы такой зависимости, среди которых наиболее известен закон Леннард-Джонса [19]:

$$F(l) = \frac{a_1}{l^m} - \frac{a_2}{l^n}, \tag{1.1}$$

где  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $m$ ,  $n$  – параметры взаимодействия, причем обычно полагают  $m = 7$ ,  $n = 13$ . Применительно к рассматриваемой задаче, обозначим через  $a_{1c}$ ,  $a_{2c}$  параметры в законе (1.1), отвечающие взаимодействию молекул индентора и слоя, а через  $a_{1b}$ ,  $a_{2b}$  – взаимодействию молекул индентора и подложки.

При определенных допущениях [11, 20] суммирование парных взаимодействий молекул позволяет для каждой точки слоя рассчитать объемную силу, обусловленную межмолекулярным взаимодействием. Эта сила направлена вдоль оси  $z$  и зависит от расстояния  $d = r + s = r + h - z$  между точкой ее приложения и индентором (рис. 1). Таким образом, если обозначить через  $f_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  компоненты объемной силы в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , то

$$f_1 = f_2 \equiv 0, \quad f_3 = f(r + h - z) \tag{1.2}$$

Кроме того, суммирование парных взаимодействий молекул позволяет определить силу  $p$  воздействия индентора на основание, приходящуюся на единицу площади его поверхности:

$$p = \Phi(r), \quad \Phi(r) = -\int_0^{\infty} f(r+s)ds, \quad (1.3)$$

которая в рамках самосогласованного подхода интерпретируется как контактное давление [9–11, 15].

В случае закона Леннарда–Джонса функции  $f$  и  $\Phi$  имеют вид [15]

$$f(d) = \frac{b_{1\#}}{d^{m-3}} - \frac{b_{2\#}}{d^{n-3}} = \frac{b_{1\#}}{d_e^{\#}} \left[ \left( \frac{d_e^{\#}}{d} \right)^{m-3} - \left( \frac{d_e^{\#}}{d} \right)^{n-3} \right] \quad (1.4)$$

$$\Phi(r) = -\frac{A_{1c}}{r_{ec}^k} \left\{ \left[ \left( \frac{r_{ec}}{r} \right)^k - \left( \frac{r_{ec}}{H} \right)^k \right] - \left[ \left( \frac{r_{ec}}{r} \right)^l - \left( \frac{r_{ec}}{H} \right)^l \right] \right\} - \frac{A_{1b}}{r_{eb}^k} \left[ \left( \frac{r_{eb}}{H} \right)^k - \left( \frac{r_{eb}}{H} \right)^l \right], \quad (1.5)$$

где  $k = m - 4$ ,  $l = n - 4$ ,  $H = h + r$ ,

$$b_{1\#} = \frac{2\pi N_s N_{\#} a_{1\#}}{(m-1)(m-3)}, \quad b_{2\#} = \frac{2\pi N_s N_{\#} a_{2\#}}{(n-1)(n-3)}, \quad A_{1\#} = \frac{b_{1\#}}{k}, \quad A_{2\#} = \frac{b_{2\#}}{l}$$

$$r_{e\#} = \left( \frac{A_{1\#}}{A_{2\#}} \right)^{\frac{1}{m-n}}, \quad d_{e\#} = \left( \frac{b_{1\#}}{b_{2\#}} \right)^{\frac{1}{m-n}} = \left( \frac{k}{l} \right)^{\frac{1}{m-n}} r_{e\#}$$

$N_s$ ,  $N_c$  и  $N_b$  – концентрации молекул индентора, слоя и подложки, соответственно. Символ # подразумевает индекс  $b$  (подложка) или  $c$  (слой), причем в формуле (1.4) при  $d \in [r, r+h]$  используется индекс  $c$ , а при  $d > r+h$  – индекс  $b$ . Присутствующая в формулах (1.2), (1.5) толщина слоя  $h$  считается постоянной, что допустимо при малых деформациях.

Традиционная постановка контактной задачи при наличии межмолекулярного взаимодействия подразумевает, что определяемое по формуле (1.3) контактное давление прикладывается к границе слоя, в результате чего он деформируется [9–12]. Ниже также рассматривается уточненная постановка, в которой естественным образом предполагается, что деформация слоя порождается объемными силами (1.2), распределенными по его глубине, тогда как граница слоя свободна от нагрузок [13–15]. В качестве параметра нагружения слоя в обеих постановках выступает зазор  $r$ , однозначно определяющий объемные силы  $f_3$  по формуле (1.2) и контактное давление  $p$  по формуле (1.3).

Деформационные свойства слоя в каждой точке описываются линейным законом наследственного типа [21–23]

$$\sigma_{ij}(t) = \delta_{ij}\lambda\theta(t) + 2\mu\varepsilon_{ij}(t) - \delta_{ij} \int_{-\infty}^t \Lambda(t-\tau)\theta(\tau)d\tau - 2 \int_{-\infty}^t M(t-\tau)\varepsilon_{ij}(\tau)d\tau, \quad (1.6)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензоров деформаций и напряжений,  $\theta = \varepsilon_{kk}$ , причем здесь и далее применяется правило суммирования по повторяющимся индексам. Величины  $\lambda$  и  $\mu$  представляют собой мгновенные модули упругости (постоянные Ламе), а функции  $\Lambda(t)$ ,  $M(t)$  характеризуют вязкие свойства материала слоя и выражаются через ядра сдвиговой  $R_1$  и объемной  $R_2$  релаксации:

$$\Lambda(t) = KR_2(t) - \frac{2}{3}\mu R_1(t), \quad M(t) = \mu R_1(t), \quad (1.7)$$

причем  $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  – мгновенный модуль объемной упругости. Отметим, что первые два слагаемых в правой части равенства (1.6) отвечают закону Гука с мгновенными модулями упругости  $\lambda$  и  $\mu$ .

Деформации считаются малыми, поэтому [21, 22]

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(t) + u_{j,i}(t)), \quad (1.8)$$

где  $u_i$  – компоненты вектора перемещений,  $i = 1, 2, 3$ . Здесь и далее для записи частной производной функции по ее аргументу используется общепринятое обозначение с запятой и индексом аргумента (или самим аргументом).

Равенства (1.6) и (1.8) образуют полную систему уравнений НДС слоя, если к ним добавить уравнение равновесия [21, 22]:

$$\sigma_{ij,j}(t) + f_i(t) = 0 \quad (1.9)$$

Считается, что

$$r(t) = r^s, \quad t \leq 0, \quad (1.10)$$

т.е. до момента времени  $t = 0$  взаимодействие индентора и слоя носит стационарный характер с постоянным во времени зазором  $r^s$ , после чего зазор начинает меняться некоторым заданным образом. Здесь и далее верхним индексом  $s$  обозначается стационарное состояние слоя.

*Замечание 1.* Вопрос метода реализации заданной зависимости  $r(t)$  при  $t > 0$  здесь не рассматривается. Отметим только, что зазор  $r$  связан равенством (1.3) с контактным давлением  $p$ , совпадающим с удельной нагрузкой на индентор, поэтому имеется возможность путем изменения этой нагрузки получать требуемую зависимость  $r(t)$ .

Постоянному значению  $r^s$  зазора при  $t \leq 0$  отвечает некоторое стационарное НДС слоя:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}^s, \quad \sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}^s, \quad t \leq 0 \quad (1.11)$$

С учетом равенств (1.11) соотношение (1.6) можно записать в следующем виде:

$$\sigma_{ij}(t) = \begin{cases} \delta_{ij}\lambda^\infty\theta^s + 2\mu^\infty\varepsilon_{ij}^s = \sigma_{ij}^s, & t \leq 0 \\ \delta_{ij}\lambda\theta(t) + 2\mu\varepsilon_{ij}(t) + \sigma_{ij}^v(t), & t > 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

где

$$\sigma_{ij}^v(t) = -[\delta_{ij}\lambda^a(t)\theta^s + 2\mu^a(t)\varepsilon_{ij}^s] - \delta_{ij}\int_0^t \Lambda(t-\tau)\theta(\tau)d\tau - 2\int_0^t M(t-\tau)\varepsilon_{ij}(\tau)d\tau \quad (1.13)$$

$$\lambda^\infty \equiv \lambda - \int_0^\infty \Lambda(\xi)d\xi, \quad \mu^\infty \equiv \mu - \int_0^\infty M(\xi)d\xi, \quad \lambda^a(t) = \int_t^\infty \Lambda(\xi)d\xi, \quad \mu^a(t) = \int_t^\infty M(\xi)d\xi, \quad (1.14)$$

причем  $\lambda^\infty, \mu^\infty$  – длительные (равновесные) модули упругости [23].

Согласно формулам (1.2) и (1.3), величина зазора  $r$  определяет объемные силы  $f_3$  (уточненная постановка) и внешнюю нагрузку на слой – контактное давление  $p$  (традиционная постановка). При условии (1.10) эти формулы позволяют установить, что

$$p(t) = \begin{cases} p^s, & t \leq 0 \\ \Phi(r(t)), & t > 0 \end{cases} - \text{традиционная постановка} \quad (1.15)$$

$$f_3(z, t) = \begin{cases} f^s(z), & t \leq 0 \\ f(r(t) + h - z), & t > 0 \end{cases} \quad \text{– уточненная постановка,} \quad (1.16)$$

причем

$$p^s = \Phi(r^s), \quad f^s(z) = f(r^s + h - z) \quad (1.17)$$

Наряду с непрерывным режимом нагружения слоя, когда

$$r(0+0) = r^s, \quad p(0+0) = p^s, \quad f_3(z, 0+0) = f^s(z) \quad (1.18)$$

выражения (1.15) и (1.16) допускают мгновенное нагружение. При таком режиме в момент времени  $t = 0$  зазор  $r$  принимает значение  $r^\circ \neq r^s$ , а контактное давление  $p$  и объемные силы  $f_3$  мгновенно изменяются до значений  $p^\circ$  и  $f^\circ(z)$ , т.е.

$$r(0+0) = r^\circ, \quad p(0+0) = p^\circ, \quad f_3(z, 0+0) = f^\circ(z) \quad (1.19)$$

Кроме того, взаимодействие индентора и слоя может выходить на асимптотически стационарное состояние:

$$r(t) \rightarrow r^\infty, \quad p(t) \rightarrow p^\infty, \quad f_3(z, t) \rightarrow f^\infty(z); \quad t \rightarrow \infty \quad (1.20)$$

В соотношениях (1.19) и (1.20), согласно формулам (1.2) и (1.3):

$$f^{\left\{ \begin{smallmatrix} \circ \\ \infty \end{smallmatrix} \right\}}(z) = f\left(r^{\left\{ \begin{smallmatrix} \circ \\ \infty \end{smallmatrix} \right\}} + h - z\right), \quad p^{\left\{ \begin{smallmatrix} \circ \\ \infty \end{smallmatrix} \right\}} = \Phi\left(r^{\left\{ \begin{smallmatrix} \circ \\ \infty \end{smallmatrix} \right\}}\right) \quad (1.21)$$

В дальнейшем будет использоваться концепция асимптотически тонкого слоя, согласно которой НДС слоя меняется пренебрежимо мало на расстояниях  $\sim h$  в его продольном направлении (в плоскости  $Oxy$ ). В точности подобное НДС имеет место в случае бесконечно протяженного плоского индентора (рис. 1), который для определенности будет рассматриваться ниже. Отметим, что в случае контактной задачи теории упругости, концепция асимптотически тонкого слоя приводит к известной модели Винклера [24].

Пренебрегая изменением НДС слоя в продольном направлении, будем считать, что его компоненты  $u_i$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  зависят только от координаты  $z$  и времени  $t$ . В этом случае, как нетрудно убедиться на основе соотношений (1.8) и (1.12), все компоненты НДС равны нулю, кроме

$$u_3 = w^s(z), \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}^s(z) = w_{,z}^s(z), \quad \sigma_{\left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 22 \end{smallmatrix} \right\}} = \sigma_{\left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 22 \end{smallmatrix} \right\}}^s(z) = \lambda^\infty w_{,z}^s(z), \quad \sigma_{33} = \sigma_{33}^s(z) = \frac{1}{B^\infty} w_{,z}^s(z)$$

$$u_3 = w(z, t), \quad \varepsilon_{33} = w_{,z}(z, t), \quad \sigma_{\left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 22 \end{smallmatrix} \right\}} = \lambda w_{,z}(z, t) - \lambda^a(t) w_{,z}^s(z) - \int_0^t \Lambda(t - \tau) w_{,z}(z, \tau) d\tau \quad (1.22)$$

$$\sigma_{33} = \frac{1}{B} w_{,z}(z, t) - \frac{1}{B^a(t)} w_{,z}^s(z) - \int_0^t N(t - \tau) w_{,z}(z, \tau) d\tau,$$

где

$$B = (\lambda + 2\mu)^{-1}, \quad B^\infty = (\lambda^\infty + 2\mu^\infty)^{-1}, \quad B^a(t) = (\lambda^a(t) + 2\mu^a(t))^{-1} \quad (1.23)$$

$$N(t) = \Lambda(t) + 2M(t) \quad (1.24)$$

Здесь и далее по умолчанию считается, что  $t > 0$ .

При таком НДС первые два равенства условия равновесия (1.9) выполняются тождественно с учетом первых двух равенств (1.2). Подстановка выражений (1.22) в третье равенство (1.9) приводит к следующим уравнениям относительно перемещения  $w$ :

$$\frac{1}{B^\infty} w_{,zz}^s(z) = -f^s(z) \quad (1.25)$$

$$\frac{1}{B} w_{,zz}(z, t) - \frac{1}{B^a(t)} w_{,zz}^s(z) - \int_0^t N(t - \tau) w_{,zz}(z, \tau) d\tau = -f_3(z, t), \quad (1.26)$$

причем при традиционной постановке задачи имеет место тождество  $f^s(z) = f_3(z, t) \equiv 0$ , а при уточненной постановке эти функции определяются выражениями (1.16), (1.17).

Уравнения (1.25), (1.26) являются основными для рассматриваемой задачи, т.к. определяемое из них перемещение  $w$  позволяет с помощью выражений (1.22) найти все отличные от нуля компоненты НДС слоя. Сформулируем для этих уравнений граничные условия.

Ввиду того, что слой сцеплен с абсолютно жестким основанием (рис. 1), всегда имеет место равенство  $u_3|_{z=0} = 0$ , т.е.

$$w^s(0) = w(0, t) = 0 \quad (1.27)$$

Как указывалось выше, при традиционной постановке задачи к поверхности слоя прикладывается контактное давление  $p = -\sigma_{33}|_{z=h}$ , а при уточненной постановке поверхность слоя свободна от нагрузок. С использованием последнего выражения (1.22) данное обстоятельство позволяет записать дополнительные граничные условия

$$\frac{1}{B^\infty} w_{,z}^s(h) = -p^s \quad (1.28)$$

$$\frac{1}{B} w_{,z}(h, t) - \frac{1}{B^a(t)} w_{,z}^s(h) - \int_0^t N(t - \tau) w_{,z}(h, \tau) d\tau = -p(t), \quad (1.29)$$

причем при традиционной постановке задачи значения  $p^s$  и  $p(t)$  определяются выражениями (1.15), (1.17), а при уточненной постановке:  $p^s = p(t) \equiv 0$ .

**Ставится задача:** при заданной зависимости контактного зазора  $r$  от времени  $t > 0$  и соответствующих зависимостях  $p(t)$  вида (1.15) (традиционная постановка) и  $f_3(z, t)$  вида (1.16) (уточненная постановка) определить вязкоупругое перемещение  $w(z, t)$  и соответствующее НДС слоя.

*Замечание 2.* Вязкоупругие соотношения (1.6) предполагают, что температура слоя в процессе его деформирования не меняется (изотермический процесс), а уравнение равновесия (1.9) записано без учета инерционности материала слоя. Подобные допущения справедливы при условии достаточно медленного протекания процесса деформирования, когда, в частности, выделяемое в слое тепло успевают рассеяться, не вызывая повышение его температуры. Определенный выше режим мгновенного нагружения (1.19) очевидно не удовлетворяет такому условию. Тем не менее, в дальнейшем этот режим будет рассматриваться как предельный случай непрерывного нагружения, допускающий аналитическое описание. В частности, это позволит проводить проверку численных алгоритмов расчета режима непрерывного нагружения.

**2. Общее решение задачи.** Для решения поставленной в предыдущем разделе задачи потребуются конкретизировать ядра интегральных операторов в соотношении (1.6). Не ограничивая общности рассмотрения, пренебрежем объемной ползучестью материала слоя и положим [23]

$$R_1(t) = R_0 e^{-\alpha t}, \quad R_2(t) \equiv 0, \quad (2.1)$$

причем, из физических соображений  $R_0 < \alpha$ . Подстановка равенств (2.1) в соотношения (1.7) и (1.24) приводит к следующим выражениям

$$\begin{cases} \Lambda(t) \\ M(t) \\ N(t) \end{cases} = \begin{cases} \Lambda_0 \\ M_0 \\ N_0 \end{cases} e^{-\alpha t}, \quad \Lambda_0 = -\frac{2}{3}\mu R_0, \quad M_0 = \mu R_0, \quad N_0 = \frac{4}{3}\mu R_0 \quad (2.2)$$

С их помощью можно, в частности, конкретизировать введенные по формулам (1.14) и (1.23) вязкоупругие характеристики материала слоя, получив выражения:

$$\begin{aligned} \lambda^\infty &= \lambda + \frac{N_0}{2\alpha}, & \mu^\infty &= \mu - \frac{3N_0}{4\alpha}, & \frac{1}{B^\infty} &= \frac{1}{B} - \frac{N_0}{\alpha}, & \lambda^a(t) &= -\frac{N_0}{2\alpha} e^{-\alpha t} \\ \mu^a(t) &= \frac{3N_0}{4\alpha} e^{-\alpha t}, & \frac{1}{B^a(t)} &= \frac{N_0}{\alpha} e^{-\alpha t}, \end{aligned}$$

которые будут использоваться при дальнейших выкладках.

Далее также будет использоваться оператор  $\mathcal{R}$ , который формально определяется как решение краевой задачи

$$u_{,zz}(z) = g(z), \quad u(0) = u_{,z}(h) = 0 \quad (2.3)$$

для произвольных функций  $u(z) \in C^2[0, h]$ ,  $g(z) \in C[0, h]$ , так что [15]

$$u(z) = \mathcal{R}(g)(z) = \int_0^z \Omega(\xi) d\xi - \Omega(h)z, \quad \Omega(\xi) = \int_0^\xi g(\eta) d\eta \quad (2.4)$$

Наконец, для более компактной записи формул будут использоваться обозначения:

$$X(z, t) = \begin{pmatrix} p(t)z \\ \mathcal{R}(f_3)(z, t) \end{pmatrix}, \quad X^{(\bullet)}(z) = \begin{pmatrix} p^{(\bullet)}z \\ \mathcal{R}(f^{(\bullet)})(z) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

в которых верхний/нижний вариант в круглых скобках отвечает традиционной/уточненной постановке задачи. Верхний индекс в последнем равенстве может быть одним из символов:  $s$ ,  $\circ$ ,  $\infty$ , введенных в рассмотрение выше, при этом соответствующие величины  $p^{(\bullet)}$ ,  $f^{(\bullet)}(z)$  определяются по формулам (1.17), (1.21).

Рассмотрим вначале решение поставленной в предыдущем разделе задачи для стационарного состояния слоя, в котором он находится при  $t \leq 0$ . Соответствующее этому состоянию перемещение  $w^s(z)$  удовлетворяет уравнению (1.25) с граничными условиями (1.27) и (1.28). При традиционной постановке задачи ( $f^s = 0$ ) функция  $w^s(z)$  находится элементарно, тогда как при уточненной постановке ( $p^s = 0$ ) она определяется при помощи оператора  $\mathcal{R}$  по формуле (2.4). В результате, учитывая обозначения (2.5), можно установить, что

$$w^s(z) = -B^\infty X^s(z) \quad (2.6)$$

Стационарное НДС слоя при  $t \leq 0$  определяется по формулам (1.22) с учетом полученного выражения (2.6):

$$\varepsilon_{33}^s(z) = -B^\infty X_{,z}^s(z), \quad \sigma_{[11]}^s(z) = -\lambda^\infty B^\infty X_{,z}^s(z), \quad \sigma_{33}^s(z) = -X_{,z}^s(z) \quad (2.7)$$

*Замечание 3.* Полагая в выражении (2.6)  $z = h$  и учитывая обозначение (2.5), можно прийти к соотношению  $w^s(h) = -B^\infty h p^s$ , которое отвечает известной модели Винклера [4, 24].

Получим теперь решение поставленной задачи при  $t > 0$ . Соответствующее перемещение  $w(z, t)$  удовлетворяет уравнению (1.26), которое можно решить известным методом преобразования Лапласа по времени.

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$u(z, t) \equiv w(z, t) - w^s(z) \tag{2.8}$$

и допустим, что эта функция, ее первая и вторая производные по  $z$  при каждом  $z \in [0, h]$  непрерывны по  $t \in (0, \infty)$  и ограничены. Кроме того, в силу первого равенства (1.22), имеем:  $u(z, t) = 0, t \leq 0$ . Эти свойства позволяют определить для функции  $u(z, t)$  и ее производных преобразование Лапласа (изображение) [25]:

$$\bar{u}(z, q) = \int_0^\infty e^{-qt} u(z, t) dt, \quad \bar{u}_{\{z\}}(z, q) = \int_0^\infty e^{-qt} u_{\{z\}}(z, t) dt$$

Заменим в уравнении (1.26) функцию  $w(z, t)$  на  $u(z, t)$  согласно равенству (2.8) и перейдем в полученном уравнении к изображениям. Тогда, применяя формулу преобразования Лапласа свертки [25], получим алгебраическое уравнение относительно изображения  $\bar{u}_{,zz}(z, q)$ :

$$\frac{1}{B} \bar{u}_{,zz}(z, q) - \bar{N}(q) \bar{u}_{,zz}(z, q) = -\bar{f}_3^\Delta(z, q),$$

в котором  $\bar{N}(q) = N_0(q + \alpha)^{-1}$  и  $\bar{f}_3^\Delta(z, q)$  — изображения ядра  $N(t)$  вида (2.2) и функции  $f_3^\Delta(z, t) \equiv f_3(z, t) - f^s(z)$ , соответственно. Если из этого уравнения выразить  $\bar{u}_{,zz}(z, q)$ , в полученном равенстве вернуться к оригиналам, после чего с помощью равенства (2.8) заменить функцию  $u(z, t)$  на  $w(z, t)$ , то после несложных преобразований можно прийти к следующему выражению для второй производной функции  $w(z, t)$ :

$$w_{,zz}(z, t) = -B \left[ f_3(z, t) + BN_0 \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} f_3(z, \tau) d\tau \right] + \frac{BN_0}{\alpha} w_{,zz}^s(z) e^{-\beta t}, \tag{2.9}$$

где  $\beta = \alpha - BN_0 > 0$ , причем последнее неравенство имеет место в силу определения (2.2) величины  $N_0$  и неравенства  $R_0 < \alpha$ .

Выражение (2.9) позволяет найти саму функцию  $w(z, t)$ . Действительно, при традиционной постановке задачи  $f_3(z, t) \equiv 0$ , поэтому из выражения (2.9) следует с учетом (2.6), что  $w_{,zz}(z, t) = 0$ , т.е.  $w(z, t) = c_1(t)z + c_0(t)$ . Коэффициенты  $c_0, c_1$  в последнем равенстве находятся из граничных условий (1.27) и (1.29). При уточненной постановке задачи  $p(t) \equiv 0$ , поэтому, согласно (1.27) и (1.29), имеют место однородные граничные условия:  $w(0, t) = w_{,z}(h, t) = 0$ , при которых перемещение  $w(z, t)$  может быть найдено из выражения (2.9) с помощью оператора  $\mathcal{R}$  по формуле (2.4). Указанные выкладки при учете обозначений (2.5) позволяют получить выражение

$$w(z, t) = \frac{BN_0}{\alpha} w^s(z) e^{-\beta t} + \tilde{w}(z, t), \tag{2.10}$$

в котором функция  $w^s(z)$  имеет вид (2.6),

$$\tilde{w}(z, t) = -B \left[ X(z, t) + BN_0 \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} X(z, \tau) d\tau \right]$$

Нетрудно убедиться в том, что выражение (2.10) обеспечивает для функции  $u(z, t)$  вида (2.8) и ее производных выполнение сделанных выше допущений о непрерывности и ограниченности.

Отметим, что в случае (1.19) мгновенного нагружения выражение (2.10) допускает мгновенное изменение перемещения  $w(z, t)$  в момент  $t = 0$ . Действительно, с учетом равенств (1.19) и обозначений (2.5), функция  $w(z, t)$  при  $t = 0$  имеет предел справа

$$w(z, 0 + 0) = \frac{BN_0}{\alpha} w^s(z) - BX^\circ(z) \quad (2.11)$$

и этот предел не равен пределу слева  $w(z, 0 - 0) = w^s(z)$ . Равенство  $w(z, 0 + 0) = w(z, 0 - 0)$  имеет место только при  $r^\circ = r^s$ , т.е. когда контактный зазор изменяется непрерывно.

НДС слоя при  $t > 0$  определяется подстановкой выражения (2.10) в формулы (1.22). Таким образом можно установить, что

$$\varepsilon_{33}(z, t) = w_{,z}(z, t) = \frac{BN_0}{\alpha} w_{,z}^s(z) e^{-\beta t} + \tilde{w}_{,z}(z, t) \quad (2.12)$$

$$\sigma_{\begin{Bmatrix} 111 \\ 22 \end{Bmatrix}}(z, t) = 2\mu_* \frac{\beta}{\alpha} w_{,z}^s(z) e^{-\beta t} + \tilde{\sigma}(z, t), \quad \sigma_{33}(z, t) = -X_{,z}(z, t), \quad (2.13)$$

где

$$\tilde{\sigma}(z, t) = -B \left[ \lambda X_{,z}(z, t) + \frac{3}{2} KBN_0 \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} X_{,z}(z, \tau) d\tau \right], \quad \mu_* = \left( 1 - \frac{\alpha - R_0}{\beta} \right) \mu$$

Для вывода выражений (2.13) использовалась формула перестановки

$$\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \left[ \int_0^\tau e^{-\beta(\tau-\xi)} u(\xi) d\xi \right] d\tau = \frac{1}{BN_0} \int_0^t [e^{-\beta(t-\xi)} - e^{-\alpha(t-\xi)}] u(\xi) d\xi,$$

в которой  $u(\tau)$  — произвольная ограниченная и непрерывная при  $\tau \in (0, t]$  функция.

*Замечание 4.* Путем предельного перехода  $t \rightarrow \infty$  равенства (2.12) и (2.13) позволяют определить НДС слоя  $\varepsilon_{ij}^\infty$ ,  $\sigma_{ij}^\infty$  в асимптотически стационарном состоянии согласно соотношениям (1.20). Как и следовало ожидать, это НДС совпадает со стационарным и описывается выражениями (2.6), (2.7) при формальной замене в них  $r^s$  на  $r^\infty$ .

*Пример. Ступенчатое нагружение* имеет место, когда после мгновенного изменения в момент  $t = 0$  зазор  $r$  не изменяется, сохраняя значение  $r^\circ$ , т.е.

$$r(t) = \begin{cases} r^s, & t \leq 0 \\ r^\circ, & t > 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

и, следовательно, согласно выражениям (1.15), (1.16):  $p(t) = \Phi(r^\circ)$ ,  $f(z, t) = f(r^\circ + h - z)$ ,  $t > 0$ . В этом случае формулы (2.10), (2.12) и (2.13) позволяют установить, что

$$w(z, t) = \frac{BN_0}{\alpha} w^s(z) e^{-\beta t} + \omega^\circ(z) \left[ 1 + \frac{BN_0}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) \right], \quad \varepsilon_{33}(z, t) = w_{,z}(z, t) \quad (2.15)$$

$$\sigma_{\begin{Bmatrix} 111 \\ 22 \end{Bmatrix}}(z, t) = 2\mu_* \frac{\beta}{\alpha} w_{,z}^s(z) e^{-\beta t} + \omega_{,z}^\circ(z) [\lambda + 2\mu_* (1 - e^{-\beta t})], \quad \sigma_{33}(z, t) = -X_{,z}^\circ(z), \quad (2.16)$$

тогда как при  $t \leq 0$  НДС слоя является стационарным и определяется выражениями (2.6) и (2.7). В равенствах (2.15) и (2.16):  $\omega^\circ(z) = -BX^\circ(z)$ , причем функция  $X^\circ(z)$  имеет вид (2.5).

Полученные выше формулы (2.13) или (2.16) позволяют рассчитывать определенные комбинации компонент  $\sigma_{ij}$  тензора напряжений, которые используются в некоторых критериях разрушения [26]. Примером такой комбинации является интенсивность касательных напряжений

$$\tau_i = \frac{1}{\sqrt{6}} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)]^{1/2} \quad (2.17)$$

В рассматриваемом случае бесконечно протяженного индентора:  $\sigma_{ij} = 0$ , кроме  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$  и  $\sigma_{33}$ , поэтому выражение (2.17) принимает вид

$$\tau_i(z, t) = \frac{1}{\sqrt{3}} |\sigma_{33}(z, t) - \sigma_{11}(z, t)|$$

В частности, если взаимодействие индентора и слоя выходит на асимптотически стационарное состояние (1.20), то последняя формула с учетом замечания 4 позволяет рассчитать соответствующую интенсивность касательных напряжений:

$$\tau_i^\infty(z) = \frac{1}{\sqrt{3}} |\sigma_{33}^\infty(z) - \sigma_{11}^\infty(z)| = \frac{2}{\sqrt{3}} (\mu - \mu_*) B |X_{,z}^\infty(z)| \quad (2.18)$$

причем функция  $X^\infty(z)$  имеет вид (2.5).

**3. Расчет диссипации энергии** выполним на основе первого начала термодинамики, согласно которому, если пренебречь кинетической энергией тела, выполняется равенство [22]

$$dQ = dA^e - dU, \quad (3.1)$$

где  $dA^e$  – работа внешних сил над телом,  $dU$  – изменение его внутренней энергии,  $dQ$  – количество теплоты, выделенной телом. Внутренняя энергия  $U$  является функцией состояния тела и при неизменной температуре определяется эволюцией его НДС, а работу  $dA^e$  можно выразить через работу деформации по формуле [22]

$$dA^e = \int_V (\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}) dV, \quad (3.2)$$

где  $V$  – объем тела.

Диссипация энергии  $D_{[t_1, t_2]}$  на промежутке времени  $[t_1, t_2]$  определяется как теплота, выделенная телом за это время, т.е. с учетом (3.1) и (3.2):

$$D_{[t_1, t_2]} = \int_V W_{[t_1, t_2]} dV - [U(t_2) - U(t_1)], \quad (3.3)$$

где

$$W_{[t_1, t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} \sigma_{ij}(\tau) d\varepsilon_{ij}(\tau) \quad (3.4)$$

– удельная работа деформации на промежутке  $[t_1, t_2]$ , причем интеграл понимается в смысле Стильбеса.

В дальнейшем будет использоваться удельная потенциальная энергия упругой деформации [27]

$$\Pi(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \lambda \theta^2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad \Pi^\infty(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \lambda^\infty \theta^2 + \mu^\infty \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad (3.5)$$

причем последнее выражение отвечает энергии с длительными модулями упругости  $\lambda^\infty$  и  $\mu^\infty$ ,  $\theta = \varepsilon_{kk}$ . В рассматриваемом случае бесконечно протяженного индентора, когда  $\varepsilon_{ij} = 0$ , кроме  $\varepsilon_{33}$ , выражения (3.5) упрощаются и принимают вид:

$$\Pi(\varepsilon_{ij}) = \Pi(\varepsilon_{33}) = \frac{1}{2B} \varepsilon_{33}^2, \quad \Pi^\infty(\varepsilon_{ij}) = \Pi^\infty(\varepsilon_{33}) = \frac{1}{2B^\infty} \varepsilon_{33}^2 \quad (3.6)$$

Интеграл Стильеса (3.4) допускает разрывы подынтегральных функций при мгновенном нагружении слоя. Выделим соответствующие особенности в интеграле (3.4) и сведем его к интегралу Римана. Не ограничивая общности при этом, будем считать, что функции  $\varepsilon_{ij}(t)$  и  $\sigma_{ij}(t)$  имеют единственную точку разрыва  $\hat{t} \in [t_1, t_2]$  первого рода, являясь кусочно-непрерывными на  $[t_1, t_2]$ .

Воспользуемся вторым выражением (1.12) для напряжений  $\sigma_{ij}$  и заметим, что для первых двух слагаемых этого выражения справедливо равенство [27]

$$(\delta_{ij}\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{ij})d\varepsilon_{ij} = d\Pi(\varepsilon_{ij}) \quad (3.7)$$

После подстановки выражения (1.12) в интеграл (3.4) равенство (3.7) позволяет упростить полученный интеграл и прийти к выражению

$$W_{[t_1, t_2]} = \Pi(\varepsilon_{ij}(t_2)) - \Pi(\varepsilon_{ij}(t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} \sigma_{ij}^v(\tau) d\varepsilon_{ij}(\tau) \quad (3.8)$$

Присутствующие в последнем равенстве функции  $\sigma_{ij}^v(t)$  определяются по формуле (1.13) и, как нетрудно установить, являются непрерывными даже при наличии разрывов первого рода у функций  $\varepsilon_{ij}(t)$ . Учитывая это и допуская, что производные  $\dot{\varepsilon}_{ij}(t)$  – кусочно-непрерывные на  $[t_1, t_2]$  (подобно функциям  $\varepsilon_{ij}(t)$ ), сведем в равенстве (3.8) интеграл Стильеса к интегралу Римана на основе известной теоремы [28]. Если после этого в полученном интеграле вернуться к напряжениям  $\sigma_{ij}$  с помощью второго выражения (1.12) и опять воспользоваться равенством (3.7), то выражению (3.8) можно придать следующий вид

$$W_{[t_1, t_2]} = \Pi(\varepsilon_{ij}^+(\hat{t})) - \Pi(\varepsilon_{ij}^-(\hat{t})) + \sigma_{ij}^v(\hat{t})[\varepsilon_{ij}^+(\hat{t}) - \varepsilon_{ij}^-(\hat{t})] + \int_{t_1}^{t_2} \sigma_{ij}(\tau) \dot{\varepsilon}_{ij}(\tau) d\tau \quad (3.9)$$

где  $\varepsilon_{ij}^\pm(\hat{t}) = \lim_{t \rightarrow \hat{t}^\pm 0} \varepsilon_{ij}(t)$ . Здесь и далее точка над символом функции обозначает производную по времени.

В дальнейшем расчет диссипации энергии будет выполняться для перехода тела из одного стационарного состояния в другое. Получим в связи с этим выражение для внутренней энергии тела в стационарном состоянии.

Рассмотрим процесс бесконечно медленного деформирования тела, при котором компоненты НДС  $\varepsilon_{ij}$  и  $\sigma_{ij}$  связаны законом Гука с длительными модулями упругости  $\lambda^\infty$  и  $\mu^\infty$  [21]. Наличие такой связи позволяет воспользоваться равенством (3.7) и установить для рассматриваемого процесса соотношение

$$\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = d\Pi^\infty(\varepsilon_{ij}) \quad (3.10)$$

Кроме того, при бесконечно медленном деформировании диссипация энергии отсутствует – это обусловлено квадратичной зависимостью скорости диссипации от скоростей  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  деформаций [21]. С учетом данного обстоятельства подстановка в равен-

ство (3.3) выражения (3.4), предварительно преобразованного с помощью соотношения (3.10), приводит к равенству

$$U(t_2) - U(t_1) = \int_V [\Pi^\infty(\epsilon_{ij}(t_2)) - \Pi^\infty(\epsilon_{ij}(t_1))] dV \quad (3.11)$$

Представим теперь, что стационарное состояние получается путем бесконечно медленного деформирования тела из недеформированного состояния с нулевой внутренней энергией. Тогда на основе соотношения (3.11) можно заключить, что для такого состояния имеет место выражение

$$U = \int_V \Pi^\infty(\epsilon_{ij}) dV \quad (3.12)$$

Таким образом, внутренняя энергия вязкоупругого тела в стационарном состоянии определяется как потенциальная энергия упругой деформации с длительными модулями  $\lambda^\infty$  и  $\mu^\infty$ .

В случае деформирования тела с конечной скоростью из стационарного состояния  $\epsilon_{ij}^s$ ,  $\sigma_{ij}^s$  в асимптотически стационарное состояние  $\epsilon_{ij}^\infty$ ,  $\sigma_{ij}^\infty$ ,  $t \rightarrow \infty$  согласно (1.20), формулы (3.3), (3.4) и (3.12) позволяют рассчитать соответствующую диссипацию энергии:

$$D^\infty \equiv D_{[0,\infty)} = \int_V \{W^\infty - [\Pi^\infty(\epsilon_{ij}^\infty) - \Pi^\infty(\epsilon_{ij}^s)]\} dV, \quad (3.13)$$

причем

$$W^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} W_{[0,t]} \quad (3.14)$$

и величина  $W_{[0,t]}$  определяется по формуле (3.9) или по более общей формуле (3.4).

Применим вышесказанное к рассмотренному в предыдущих разделах вязкоупругому слою, выбрав в качестве тела произвольную его часть, ограниченную прямым цилиндром, основания которого совпадают с границами слоя и имеют площадь  $S$ . Тогда, учитывая отсутствие зависимости НДС от координат  $x$  и  $y$ , представим выражение (3.13) в следующем виде

$$d^\infty = \int_0^h \{W^\infty(z) - [\Pi^\infty(\epsilon_{ij}^\infty(z)) - \Pi^\infty(\epsilon_{ij}^s(z))]\} dz, \quad (3.15)$$

где  $d^\infty = D^\infty/S$  – диссипация энергии, приходящаяся на единицу площади поверхности слоя.

3.1. Случай ступенчатого нагружения описывается равенствами (2.6), (2.7), (2.15) и (2.16), которые позволяют получить следующие выражения для величин, присутствующих в формуле (3.9) при  $\hat{t} = t_1 = 0$ ,  $t_2 = t$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_{33}^-(z, 0) = \epsilon_{33}^s(z), \quad \epsilon_{33}^+(z, 0) = \epsilon_{33}^0(z), \quad \sigma_{33}^v(z, 0) = -\frac{N_0}{\alpha} \epsilon_{33}^s(z) \\ \int_0^t \sigma_{ij}(z, \tau) \dot{\epsilon}_{ij}(z, \tau) d\tau = \frac{1}{B} \omega_{,z}^0(z) [\epsilon_{33}(z, t) - \epsilon_{33}^0(z)], \end{aligned} \quad (3.16)$$

причем предел  $\epsilon_{33}^0(z) \equiv \epsilon_{33}(z, 0+0) = w_{,z}(z, 0+0)$  находится с помощью равенства (2.11).

Подстановка выражений (3.16) в формулу (3.9) с последующим учетом равенств (3.6) и (3.14) приводит к выражению

$$W^\infty(z) = -\Pi(\epsilon_{33}^\circ(z)) + \frac{BN_0 - \beta}{\alpha} \Pi(\epsilon_{33}^s(z)) + 2\Pi^\infty(\epsilon_{33}^\infty(z))$$

Используя его и учитывая выражения (2.7), (2.15) и замечание 4, по формуле (3.15) можно определить диссипацию энергии

$$d^\infty = \frac{BN_0}{2\alpha} B^\infty \int_0^h [X_{,z}^\circ(z) - X_{,z}^s(z)]^2 dz \quad (3.17)$$

Присутствующие в выражении (3.17) функции  $X^s(z)$  и  $X^\circ(z)$  связаны посредством равенств (1.17), (1.21) и (2.5) с функциями  $f(d)$  и  $\Phi(r)$ , которые имеют вид (1.4) и (1.5). Учитывая указанные равенства, можно получить из (3.17) выражение, связывающее диссипацию энергии  $d^\infty$  с параметрами межмолекулярного взаимодействия индентора и слоя:

$$d^\infty = \frac{BN_0}{2\alpha} B^\infty h \left( \frac{[\Phi(r^\circ) - \Phi(r^s)]^2}{Q_1(r^\circ) + Q_1(r^s) - 2Q_2(r^s, r^\circ)} \right), \quad (3.18)$$

где

$$\begin{aligned} Q_1(r) &= \left( \frac{A_{1c}}{r_{ec}^k} \right)^2 \left\{ C^2 + \frac{r_{ec}}{h} \left[ 2C \left( \frac{\xi^{l-1} - \eta^{l-1}}{l-1} - \frac{\xi^{k-1} - \eta^{k-1}}{k-1} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\xi^{2l-1} - \eta^{2l-1}}{2l-1} + \frac{\xi^{2k-1} - \eta^{2k-1}}{2k-1} - 2 \frac{\xi^{k+l-1} - \eta^{k+l-1}}{k+l-1} \right] \right\} \\ Q_2(r_1, r_2) &= \left( \frac{A_{1c}}{r_{ec}^k} \right)^2 \left\{ C_1 C_2 + \frac{r_{ec}}{h} \left[ C_1 \left( \frac{\xi_2^{l-1} - \eta_2^{l-1}}{l-1} - \frac{\xi_2^{k-1} - \eta_2^{k-1}}{k-1} \right) + C_2 \left( \frac{\xi_1^{l-1} - \eta_1^{l-1}}{l-1} - \frac{\xi_1^{k-1} - \eta_1^{k-1}}{k-1} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h} [r_{ec}^{2k} E_{kk} + r_{ec}^{2l} E_{ll} - r_{ec}^{k+l} (E_{kl} + E_{lk})] \right\} \quad (3.19) \end{aligned}$$

$$C(r) = \left( \frac{r_{ec}}{r} \right)^k - \left( \frac{r_{ec}}{r} \right)^l, \quad \xi(r) = \frac{r_{ec}}{r}, \quad \eta(r) = \frac{r_{ec}}{r+h}, \quad k = m-4, \quad l = n-4$$

$$C_i = C(r_i), \quad \xi_i = \xi(r_i), \quad \eta_i = \eta(r_i), \quad E_{ij} = \int_0^h \frac{dz}{(r_1 + h - z)^i (r_2 + h - z)^j}$$

Как видно, уточненная постановка задачи приводит к более сложным выражениям для диссипации энергии  $d^\infty$  (нижняя часть формулы (3.18)) в сравнении с традиционной постановкой (верхняя часть формулы (3.18)). Это обусловлено сложным характером распределения объемных сил межмолекулярного взаимодействия по глубине слоя, которые учитываются при уточненной постановке задачи.

Обращает на себя внимание также тот факт, что, согласно формуле (3.18), при уточненной постановке задачи диссипация энергии  $d^\infty$  зависит только от физико-механических свойств слоя. Однако при традиционной постановке задачи на величину  $d^\infty$  оказывают влияние параметры  $A_{1b}$ ,  $r_{eb}$  межмолекулярного взаимодействия подложки, что обуславливается влиянием этих параметров на контактное давление в силу равенства (1.3).

3.2. Случай непрерывного нагружения с переходом в асимптотически стационарное состояние. При таком нагружении разрывы во времени у компонент НДС слоя отсутствуют и, поэтому, правая часть равенства (3.9) для удельной работы деформации содержит только последний интеграл. Подстановка в этот интеграл выражений (2.12) и (2.13) для компонент  $\epsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  и учет равенств (2.6), (2.7), замечания 4 и определения (3.14), приводит к выражению

$$W^\infty(z) = \Pi^\infty(\epsilon_{33}^\infty(z)) - \Pi^\infty(\epsilon_{33}^s(z)) + \frac{BN_0}{\alpha} B^\infty \int_0^\infty dt \int_0^t d\tau e^{-\beta(t-\tau)} \dot{X}_{,z}(z, t) \dot{X}_{,z}(z, \tau)$$

С учетом этого выражения формула (3.15) позволяет установить, что

$$d^\infty = \frac{BN_0}{\alpha} B^\infty \int_0^\infty dt \int_0^t d\tau e^{-\beta(t-\tau)} L(t, \tau), \quad (3.20)$$

причем

$$L(t, \tau) = \int_0^h \dot{X}_{,z}(z, t) \dot{X}_{,z}(z, \tau) dz \quad (3.21)$$

Присутствующая в выражении (3.21) функция  $X(z, t)$  имеет вид (2.5) и связана посредством равенств (1.15) и (1.16) с функциями  $f(d)$  и  $\Phi(r)$ , которые определяются по формулам (1.4) и (1.5). Учитывая эти равенства, можно получить из (3.21) выражение, связывающее функцию  $L(t, \tau)$  с параметрами межмолекулярного взаимодействия индентора и слоя:

$$L(t, \tau) = \left( \frac{hr(t)\dot{r}(\tau)\Phi'(r(t))\Phi'(r(\tau))}{\dot{r}(t)\dot{r}(\tau)[S_2(t, \tau) - f(r(t))S_1(\tau) - f(r(\tau))S_1(t) + hf(r(t))f(r(\tau))]} \right), \quad (3.22)$$

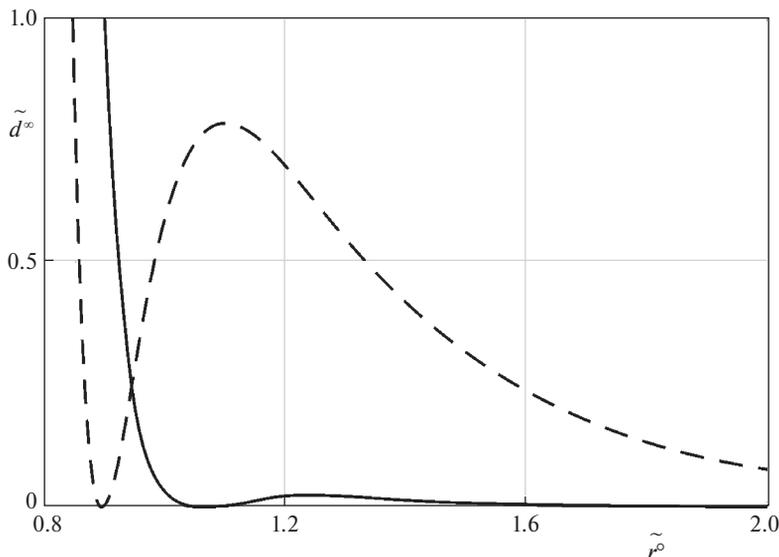
где

$$S_1(t) = \frac{A_{1c}}{r_{ec}^{m-4}} [\xi^{m-4} - \xi^{n-4} - (\eta^{m-4} - \eta^{n-4})] \quad (3.23)$$

$$S_2(t, \tau) = \left( \frac{b_c}{d_{ec}^k} \right)^2 [d_{ec}^{2k} E_{kk} + d_{ec}^{2l} E_{ll} - d_{ec}^{k+l} (E_{kl} + E_{lk})], \quad k = m - 3, \quad l = n - 3$$

При записи формул (3.23) используются обозначения (3.19), в которых следует положить  $r = r_1 = r(t)$ ,  $r_2 = r(\tau)$ . Подстановка выражения (3.22) в равенство (3.20) позволяет получить связь диссипации энергии  $d^\infty$  с параметрами межмолекулярного взаимодействия индентора и слоя.

**4. Численный анализ.** Главной целью выполненных расчетов был анализ влияния параметров режима нагружения слоя на диссипацию энергии и интенсивность касательных напряжений. Расчеты проводились при  $m = 7$ ,  $n = 13$ ,  $r_{ec} = 1$  нм,  $r_{eb} = 0.5r_{ec}$ ,  $h = 1$  нм,  $\lambda = 4.321$  МПа,  $\mu = 6.482$  МПа,  $R_0 = 0.8$  с<sup>-1</sup>,  $\alpha = 1$  с<sup>-1</sup>, причем указанным значениям  $\lambda$  и  $\mu$  отвечают модуль Юнга  $E = 15.56$  МПа и коэффициент Пуассона  $\nu = 0.2$ . Кроме того, полагалось, что  $A_{1c} = (6\pi)^{-1} A_H$  [9] и  $A_{1b} = 10A_{1c}$ , где  $A_H$  – постоянная Гамакера,  $A_H = 10^{-19}$  Дж. Значения остальных параметров указывается отдельно для каждого численного примера.



**Рис. 2.** Зависимость диссипации энергии  $\tilde{d}^\infty$  от величины конечного зазора  $\tilde{r}^\infty$  в случае ступенчатого нагружения.

Режим непрерывного нагружения задавался кусочно-линейной зависимостью

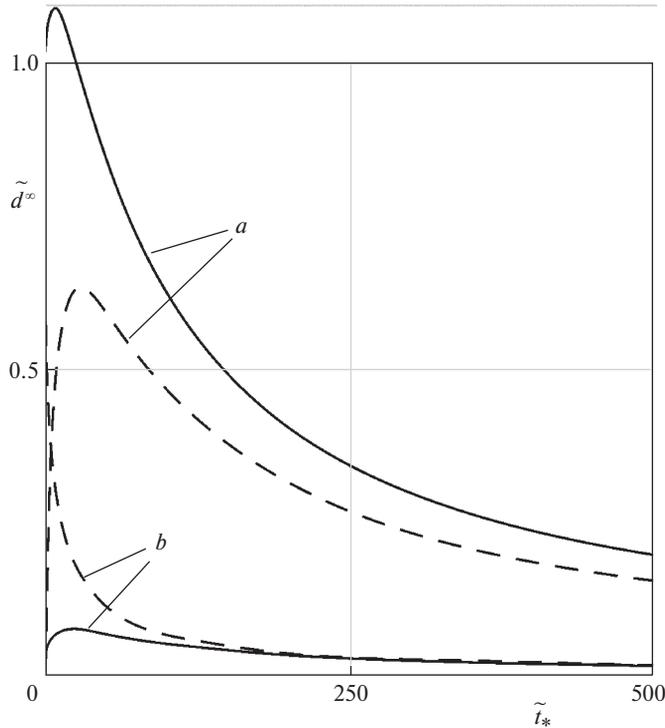
$$r(t) = \begin{cases} r^s, & t \leq 0 \\ r^\infty + \dot{r}_c(t - t_*), & t \in (0, t_*), \\ r^\infty, & t \geq t_* \end{cases} \quad (4.1)$$

где  $\dot{r}_c = (r^\infty - r^s)/t_*$ ,  $t_*$  – продолжительность стадии активного нагружения.

На всех представленных ниже рисунках штриховые кривые соответствуют традиционной постановке задачи, а сплошные – уточненной.

На рис. 2 показана зависимость диссипации энергии  $d^\infty$  от величины конечного зазора  $r^\infty$  в случае ступенчатого нагружения (2.14). Расчеты проводились на основе формулы (3.18) при начальном зазоре  $r^s = 5r_{ec}$ . Графики на рис. 2 построены для безразмерных величин:  $\tilde{r}^\infty = r^\infty/r_{ec}$  и  $\tilde{d}^\infty = d^\infty/d_*$ , где  $d_* = (A_{1c}/r_{ec}^{m-4})^2 \frac{BN_0}{\alpha} B^\infty h$ , причем для выбранных параметров задачи  $d_* = 1.086 \times 10^{-3}$  Дж/м<sup>2</sup>.

На рис. 3 показана зависимость диссипации энергии  $d^\infty$  от времени  $t_*$  в случае непрерывного нагружения (4.1). Расчеты проводились на основе формулы (3.20) при начальном зазоре  $r^s = 5r_{ec}$  и двух значениях конечного зазора:  $r^\infty = 0.9r_{ec}$  (a) и  $r^\infty = r_{ec}$  (b). При построении графиков использовалась безразмерная величина  $\tilde{t}_* = t_*/t_r$ , где  $t_r = \alpha^{-1}$  – время релаксации [21] и величина  $\tilde{d}^\infty$ , определенная выше.



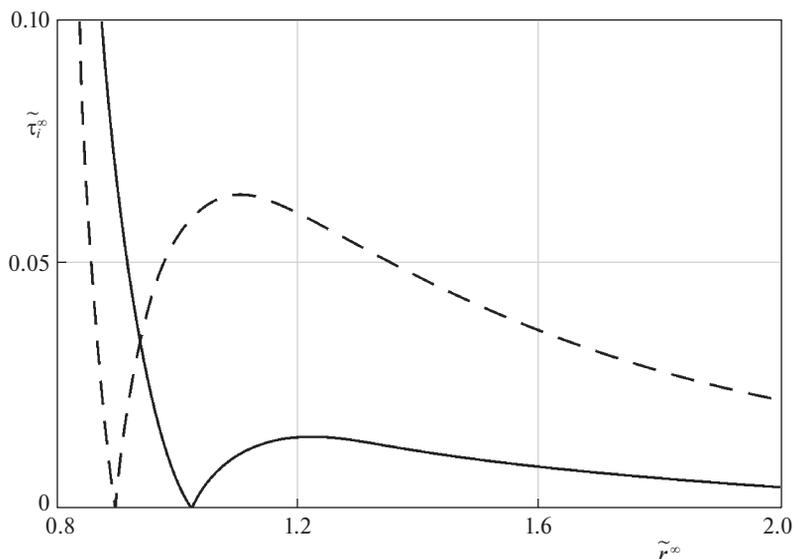
**Рис. 3.** Зависимость диссипации энергии  $\tilde{d}^\infty$  от продолжительности  $\tilde{t}_*$  стадии активного нагружения (случай непрерывного нагружения).

Как и следовало ожидать, результаты расчетов (рис. 2 и 3) свидетельствуют о том, что значения  $d^\infty$  при достаточно быстром непрерывном нагружении ( $\tilde{t}_* \ll 1$ ) и ступенчатом нагружении отличаются незначительно. Например, если  $t_*/t_r = 0.0001$ , то при  $r^\infty = r^\circ = 0.9r_{ec}$  это расхождение не превышает 0.6%, а при  $r^\infty = r^\circ = r_{ec} - 0.0015\%$ .

На рис. 4 показана зависимость асимптотически стационарной интенсивности касательных напряжений  $\tau_i^\infty$  от величины соответствующего зазора  $r^\infty$  в случае непрерывного нагружения (4.1). Значения  $\tau_i^\infty$  здесь рассчитывались по формуле (2.18) и при построении графиков использовались безразмерные величины  $\tilde{r}^\infty = r^\infty/r_{ec}$  и  $\tilde{\tau}_i^\infty = \tau_i^\infty/E$ .

Представленные на рис. 2–4 результаты свидетельствуют о сложном характере зависимостей диссипации энергии и интенсивности касательных напряжений от параметров режима нагружения. В частности, у этих зависимостей могут присутствовать локальные экстремумы, что, по всей видимости, обусловлено наличием немонотонных зависимостей объемных сил (1.4) и контактного давления (1.5) от зазора  $r$ .

Показанные графики свидетельствуют также о том, что традиционная и уточненная постановки задачи могут приводить к существенно различным результатам расчета контактных характеристик вязкоупругого слоя. Например, на рис. 3 для значения



**Рис. 4.** Зависимость асимптотически стационарной интенсивности касательных напряжений  $\tilde{\tau}_i^\infty$  от величины соответствующего зазора  $\tilde{r}^\infty$  в случае непрерывного нагружения.

$r^\infty = 0.9 r_{ec}$  диссипация энергии  $d^\infty$ , определенная в рамках уточненной постановки задачи, существенно превосходит величину  $d^\infty$ , полученную при традиционной постановке. Однако для значения  $r^\infty = r_{ec}$  ситуация меняется, и уже традиционная постановка задачи дает более высокие значения  $d^\infty$ .

**5. Выводы.** 1. Рассмотрен контакт индентора с вязкоупругим слоем в рамках самосогласованного по Дерягину подхода с поверхностным (традиционная постановка) и объемным (уточненная постановка) приложением сил межмолекулярного взаимодействия. В случае бесконечно протяженного плоского индентора построены аналитические выражения для компонент НДС слоя.

2. Получены формулы для интенсивности касательных напряжений и диссипации энергии в вязкоупругом слое. Выявлены некоторые особенности зависимостей этих величин от параметров режима нагружения.

3. Показано, что традиционная и уточненная постановки задачи могут приводить к существенно различным результатам расчета контактных характеристик вязкоупругого слоя.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-58-00014, 18-08-00558).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Derjaguin B.* Untersuchungen über die Reibung und Adhäsion, IV. Theorie des Anhaftens kleiner Teilchen // *Kolloid-Zeitschrift*. 1934. Bd. 69. H. 2. S. 155–164.
2. *Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D.* Surface energy and the contact of elastic solids // *Proc. R. Soc. London. Ser. A*. 1971. V. 324. № 1558. P. 301–313.

3. *Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Yu.P.* Effect of contact deformations on the adhesion of particles // *J. Colloid Interface Sci.* 1975. V. 53. № 2. P. 314–326.
4. *Borodich F.M., Galanov B.A., Perepelkin N.V., Prikazchikov D.A.* Adhesive contact problems for a thin elastic layer: Asymptotic analysis and the JKR theory // *Math.&Mech. Solids.* 2018. V. 24. № 5. P. 1405–1424.
5. *Greenwood J.A., Johnson K.L.* The mechanics of adhesion of viscoelastic solids // *Philos. Mag. A.* 1981. V. 43. № 3. P. 697–711.
6. *Горячева И.Г., Губенко М.М., Маховская Ю.Ю.* Скольжение сферического индентора по вязкоупругому основанию с учетом сил молекулярного притяжения // *ПМТФ.* 2014. Т. 55. № 1. С. 99–107.
7. *Lin Y.Y., Hui C.Y.* Mechanics of contact and adhesion between viscoelastic spheres: an analysis of hysteresis during loading and unloading // *J. Polym. Sci. Pt B: Polym. Phys.* 2002. V. 40. P. 772–793.
8. *Haiat G., Phan Huy M.C., Barthel E.* The adhesive contact of viscoelastic spheres // *J. Mech. Phys. Solids.* 2003. V. 51. № 1. P. 69–99.
9. *Muller V.M., Yushchenko V.S., Derjaguin B.V.* On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid plane // *J. Coll. Interface Sci.* 1980. V. 77. № 1. P. 91–101.
10. *Attard P., Parker J.L.* Deformation and adhesion of elastic bodies in contact // *Phys. Rev. A.* 1992. V. 46. № 12. P. 7959–7971.
11. *Greenwood J.A.* Adhesion of small spheres // *Phil. Mag.* 2009. V. 89. № 11. P. 945–965.
12. *Солдатенков И.А.* Применение метода последовательных приближений к расчету упругого контакта при наличии молекулярной адгезии // *ПММ.* 2012. Т. 76. Вып. 5. С. 734–743.
13. *Sauer R.A., Li S.* A contact mechanics model for quasi-continua // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2007. V. 71. № 8. P. 931–962.
14. *He L.H.* Stress and deformation in soft elastic bodies due to intermolecular forces // *J. Mech. Phys. Solids.* 2013. V. 61. № 6. P.1377–1390.
15. *Солдатенков И.А.* Контактная задача при объемном приложении сил межмолекулярного взаимодействия (уточненная постановка) // *ПММ.* 2013. Т. 77. Вып. 6. С. 877–893.
16. *Tomlinson G.A.* Molecular cohesion // *Phil. Mag.* 1928. V. 6. № 37. P. 695–712.
17. *Bradley R.S.* The cohesive force between solid surfaces and the surface energy of Solids // *Phil. Mag.* 1932. V. 13. № 86. P. 853–862.
18. *Hamaker H.C.* The London – van der Waals attraction between spherical particles // *Physica.* 1937. V. 4. № 10. P. 1058–1072.
19. *Kaplan I.G.* Intermolecular interactions: physical picture, computational methods and model potentials. Chichester: Wiley, 2006.
20. *Israelachvili J.N.* Intermolecular and Surface Forces. 3-rd ed. London: Academic, 2011.
21. *Кристенсен П.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
22. *Огибалов П.М., Ломакин В.А., Кишкин Б.П.* Механика полимеров. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975. 528 с.
23. *Адамов А.А., Матвеев В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н.* Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с.
24. *Александров В.М.* Асимптотическое решение контактной задачи для тонкого упругого слоя // *ПММ.* 1969. Т. 33. Вып. 1. С. 61–73.
25. *Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989. 477 с.
26. *Коллинз Дж.* Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение. М.: Мир, 1984. 624 с.
27. *Хан Х.* Теория упругости. М.: Мир, 1988. 343 с.
28. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления (в 3-х томах). М.: Физматлит, 2001. Т. 3. 662 с.

## The Contact with Intermolecular Interaction Forces for Viscoelastic Layer (Self-Consistent Approach): Calculation of the Stress-Strain State and Energy Dissipation

I. A. Soldatenkov<sup>#</sup>

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

<sup>#</sup> *e-mail: iasoldat@hotmail.com*

The contact of an infinitely extended plane indenter and a viscoelastic layer is considered in the framework of the Derjaguin self-consistent approach with the surface (traditional formulation) and bulk (refined formulation) application of intermolecular interaction forces. Analytical expressions for the stress-strain state of the layer are obtained. Energy dissipation in the layer is calculated using the first law of thermodynamics. It is shown that the traditional and refined formulations of the problem can lead to significantly different results in calculating the characteristics of the contact between the indenter and the viscoelastic layer.

*Keywords:* viscoelasticity, layer, intermolecular interaction, energy dissipation

### REFERENCES

1. *Derjaguin B.* Untersuchungen über die Reibung und Adhäsion, IV. Theorie des Anhaftens kleiner Teilchen // *Kolloid-Zeitschrift*. 1934. Bd. 69. H. 2. S. 155–164.
2. *Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D.* Surface energy and the contact of elastic solids // *Proc. R. Soc. London. Ser. A*, 1971, vol. 324, no. 1558, pp. 301–313.
3. *Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Yu.P.* Effect of contact deformations on the adhesion of particles // *J. Colloid Interface Sci.*, 1975, vol. 53, no. 2, pp. 314–326.
4. *Borodich F.M., Galanov B.A., Perepelkin N.V., Prikazchikov D.A.* Adhesive contact problems for a thin elastic layer: Asymptotic analysis and the JKR theory // *Math. & Mech. Solids*, 2018, vol. 24, no. 5, pp. 1405–1424.
5. *Greenwood J.A., Johnson K.L.* The mechanics of adhesion of viscoelastic solids // *Philos. Mag. A*, 1981, vol. 43. no. 3, pp. 697–711.
6. *Goryacheva I.G., Gubenko M.M., Makhovskaya Yu. Yu.* Sliding of a spherical indenter on a viscoelastic foundation with the forces of molecular attraction taken into account // *J. Appl. Mech. Techn. Phys.*, 2014, vol. 55, no. 1, pp. 81–88.
7. *Lin Y.Y., Hui C.Y.* Mechanics of contact and adhesion between viscoelastic spheres: an analysis of hysteresis during loading and unloading // *J. Polym. Sci., Pt B: Polym. Phys.*, 2002, vol. 40, pp. 772–793.
8. *Haiat G., Phan Huy M.C., Barthel E.* The adhesive contact of viscoelastic spheres // *J. Mech. Phys. Solids*, 2003, vol. 51, no. 1. pp. 69–99.
9. *Muller V.M., Yushchenko V.S., Derjaguin B.V.* On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid plane // *J. Coll. Interface Sci.*, 1980, vol. 77, no. 1, pp. 91–101.
10. *Attard P., Parker J.L.* Deformation and adhesion of elastic bodies in contact // *Phys. Rev. A*, 1992, vol. 46, no. 12, pp. 7959–7971.
11. *Greenwood J.A.* Adhesion of small spheres // *Phil. Mag.*, 2009, vol. 89, no. 11, pp. 945–965.
12. *Soldatenkov I.A.* The use of the method of successive approximations to calculate an elastic contact in the presence of molecular adhesion // *JAMM*, 2012, vol. 76, no. 5, pp. 597–603.
13. *Sauer R.A., Li S.* A contact mechanics model for quasi-continua // *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 2007, vol. 71, no. 8, pp. 931–962.
14. *He L.H.* Stress and deformation in soft elastic bodies due to intermolecular forces // *J. Mech. Phys. Solids*, 2013, vol. 61, no. 6, pp. 1377–1390.
15. *Soldatenkov I.A.* The contact problem with the bulk application of intermolecular interaction forces (a refined formulation) // *JAMM*, 2013, vol. 77, no. 6, pp. 629–641.
16. *Tomlinson G.A.* Molecular cohesion // *Phil. Mag.*, 1928, vol. 6, no. 37, pp. 695–712.
17. *Bradley R.S.* The cohesive force between solid surfaces and the surface energy of Solids // *Phil. Mag.*, 1932, vol. 13, no. 86, pp. 853–862.

18. *Hamaker H.C.* The London – van der Waals attraction between spherical particles // *Physica*. 1937, vol. 4, no. 10, pp. 1058–1072.
19. *Kaplan I.G.* Intermolecular Interactions: Physical Picture, Computational Methods and Model Potentials. Chichester: Wiley, 2006.
20. *Israelachvili J.N.* Intermolecular and Surface Forces. 3-rd ed. London: Academic, 2011.
21. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity. An Introduction. New York: Acad. Press, 1971.
22. *Ogibalov P.M., Lomakin V.A., Kishkin B.P.* Mechanics of Polymers. Moscow: Moscow Univ. Press, 1975. (in Russian).
23. *Adamov A.A., Matveenko V.P., Trufanov N.A., Shardakov I.N.* Methods of Applied Viscoelasticity. Ekaterinburg: Ural Branch RAS, 2003 (in Russian).
24. *Aleksandrov V.M.* Asymptotic solution of the contact problem for a thin elastic layer // *JAMM*, 1969, vol. 33, no. 1, pp. 49–63.
25. *Sidorov Yu.V., Fedoryuk M.V., Shabunin M.I.* Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable. Moscow: Mir, 1985.
26. *Collins J.A.* Failure of Materials in Mechanical Design. Analysis, Prediction, Prevention. N.Y.: Ohio State Univ., John Wiley & Sons, 1981.
27. *Hahn H.G.* Elastizitätstheorie. Grundlagen der linearen Theorie und Anwendungen auf eindimensionale, ebene und räumliche Probleme. Stuttgart: Teubner, 1985.
28. *Fikhtengolts G.M.* Course of Differential and Integral Calculus. Moscow: Fizmatlit, vol. 2, 2001. (in Russian).

УДК 539.3

**К РАСЧЕТУ КИНЕТИКИ ИЗНАШИВАНИЯ ПОКРЫТИЯ:  
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УТОЧНЕННЫХ ДЕФОРМАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ**

© 2020 г. И. А. Солдатенков\*

*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия**\* e-mail: iasoldat@hotmail.com*

Поступила в редакцию 02.09.2019 г.

После доработки 13.11.2019 г.

Принята к публикации 02.12.2019 г.

Рассмотрен ряд деформационных моделей изнашиваемого покрытия. На их основе выполнены расчеты кинетики изнашивания покрытия в рамках двумерной постановки износоконтактной задачи. Показано, что использование уточненных деформационных моделей покрытия, учитывающих изменение его формы, может существенно повлиять на результаты расчета кинетики изнашивания покрытия.

*Ключевые слова:* трение, износ, покрытия, упругость, нелинейные задачи

**DOI:** 10.31857/S0032823520010099

Покрытия находят широкое применение в современной технике как эффективное средство снижения трения и износа деталей узлов трения. В процессе эксплуатации покрытие изнашивается, и это оказывает влияние на технические характеристики узла трения. Кроме того, износ покрытия является главным фактором, определяющим его долговечность. Все это обуславливает актуальность задачи расчета кинетики изнашивания покрытия.

Существуют различные подходы к моделированию изнашивания покрытий [1–4]. Детальное описание кинетики изнашивания покрытия предполагает использование решения соответствующей износоконтактной задачи [5], в рамках которой покрытие представляется полосой (двумерная постановка) или слоем (трехмерная постановка). При таком подходе в каждый момент времени решается контактная задача для покрытия, толщина  $h$  которого изменяется вследствие его изнашивания. Поведение покрытия в условиях контактного взаимодействия определяется на основе деформационной модели, связывающей контактные напряжения и граничные перемещения.

Простейшая деформационная модель покрытия постоянной толщины  $h = h_0$  устанавливает прямо пропорциональную зависимость нормального граничного перемещения  $V$  от контактного давления  $p$  и имеет вид модели Винклера  $v = -Bh_0p$  с постоянным коэффициентом податливости  $Bh_0$ . Подобная модель использовалась в ряде работ в связи с расчетом кинетики изнашивания покрытия [6].

Ввиду того, что толщина  $h$  покрытия обычно мала и сравнима с его износом  $W$ , возникает необходимость применения уточненных деформационных моделей, учитывающих изменение формы покрытия вследствие его изнашивания. В качестве такой модели в работах [7–9] использовалась модель Винклера  $v = -Bhp$ ,  $h = h_0 - W$  с изменяющимся в процессе изнашивания коэффициентом податливости  $Bh$ . Следует отме-

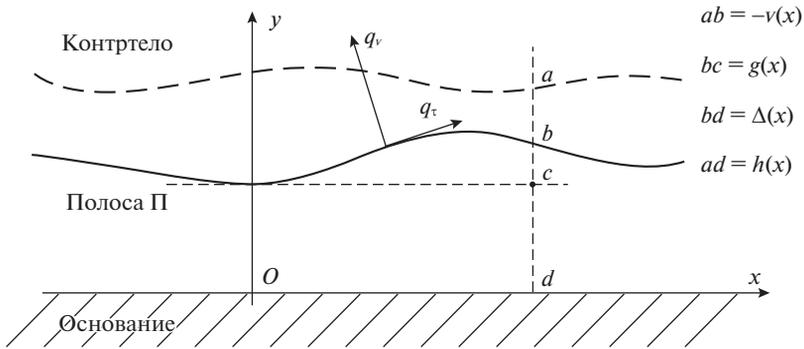


Рис. 1. Схема контактного взаимодействия контртела с покрытием (полосой П).

тить, что использование уточненных деформационных моделей приводит к нелинейным постановкам износоконтактной задачи.

В данной работе наряду с указанными моделями рассматривается уточненная деформационная модель покрытия, учитывающая искривленность границы покрытия [10]. С использованием различных деформационных моделей в рамках двумерной постановки износоконтактной задачи выполняются расчеты кинетики изнашивания покрытия, которые свидетельствуют о важности учета фактора формоизменения покрытия в процессе его изнашивания.

**1. Основные уравнения** износоконтактной задачи для покрытия формулируются далее в рамках двумерной теории упругости (плоское деформированное состояние). В этом случае покрытие представляется в виде упругой полосы П переменной ширины, сцепленной с абсолютно жестким основанием (рис. 1). Свяжем систему координат  $Ox$  с основанием, как это показано на рис. 1, и обозначим через  $h(x)$  ширину полосы.

Считается, что к верхней границе полосы приложены касательное  $q_\tau$  и нормальное  $q_v$  напряжения, обусловленные ее контактным взаимодействием с контртелом. Соответствующие перемещения верхней границы полосы вдоль осей  $x$  и  $y$  обозначим через  $u$  и  $v$ . В качестве контртела выступает абсолютно жесткое цилиндрическое тело, образующая которого перпендикулярна плоскости  $Oxy$ . Контртело может скользить по покрытию вдоль своей образующей (продольное скольжение) или перпендикулярно ей (поперечное скольжение).

Деформационная модель покрытия определяет связь напряжений  $q_\tau$ ,  $q_v$  и перемещений  $u$ ,  $v$ . Подобная связь устанавливается путем решения соответствующей краевой задачи теории упругости для неканонической области (полосы П) и в общем виде реализуется с использованием достаточно сложных алгоритмов [11]. Однако в случае тонкого покрытия, используя асимптотический подход, удается представить деформационную модель в виде простых алгебраических соотношений [6, 12]. Для полосы переменной ширины использование такого подхода приводит к следующим соотношениям [10]:

$$\frac{1}{G} h q_\tau = u + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} h' v + \frac{\varkappa - 2}{\varkappa - 1} h v', \quad \frac{1}{G} h q_v = \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1} v - \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} h' u - \frac{\varkappa - 2}{\varkappa - 1} h u', \quad (1.1)$$

в которых  $\varkappa = 3 - 4\nu$ ,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $G$  – модуль сдвига, штрих у символа функции означает производную по координате  $x$ , при этом полоса считается асимптотически тонкой и слабоискривленной. Последнее означает, что изменение

$\Delta A \approx A'h$  любой величины  $A$  вдоль оси  $x$  на расстоянии  $h$  мало по сравнению с самой величиной  $A$ , т.е.

$$|A'h| \sim \varepsilon|A|, \quad (1.2)$$

где  $\varepsilon$  – малый параметр,  $\varepsilon \ll 1$ . В качестве величины  $A$  здесь может выступать сама ширина  $h$  полосы, граничные перемещения  $u$ ,  $v$ , контактные напряжения  $q_\tau$ ,  $q_v$ . В частности, при  $A = h$  условие (1.2) означает, что  $|h'| \sim \varepsilon \ll 1$ . Правые части соотношений (1.1) содержат слагаемые, порядок малости которых, согласно условию (1.2), не превышает  $O(\varepsilon^2)$ .

Учитывая фрикционный характер контактного взаимодействия покрытия с контртелом, допустим, что контактные напряжения  $q_\tau$ ,  $q_v$  связаны друг с другом законом трения Кулона [13]

$$q_\tau = \mu p + \tau_0, \quad (1.3)$$

в котором  $0 < p = -q_v$  – контактное давление,  $0 \leq \mu$  – коэффициент трения,  $0 \leq \tau_0$  – адгезионная составляющая трения. Запись (1.3) закона Кулона при неотрицательных значениях  $p$ ,  $\mu$  и  $\tau_0$  предполагает, что скольжение контртела происходит в направлении оси  $x$ .

Подстановка в равенство (1.3) правых частей соотношений (1.1) позволяет найти выражение для перемещения  $u$  через перемещение  $v$ . В свою очередь, такое выражение позволяет исключить перемещение  $u$  из второго соотношения (1.1) и получить следующую деформационную модель покрытия

$$v + \mu \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} h'v + \mu \frac{\varkappa - 2}{\varkappa - 1} hv' - 2Bhh'\tau_0 = -Bhp \quad (1.4)$$

где  $B = (1 - 2\nu)[2(1 - \nu)G]^{-1}$ . При выводе зависимости (1.4) выполнялась оценка получаемых слагаемых с использованием условия (1.2) и удерживались только слагаемые, порядок малости которых не превышает  $O(\varepsilon^2)$ . Если же в (1.4) пренебречь слагаемыми порядка  $\varepsilon$ , то можно прийти к вышеупомянутой модели Винклера:

$$v = -Bhp \quad (1.5)$$

В случае постоянной ширины  $h = h_0$  полосы зависимость (1.4) принимает вид деформационной модели

$$v + \mu \frac{\varkappa - 2}{\varkappa - 1} h_0 v' = -Bh_0 p, \quad (1.6)$$

которая использовалась ранее для расчета трения и износа подвижных сопряжений с покрытиями [14, 15]. Пренебрегая в левой части равенства (1.6) последним слагаемым, имеющим порядок малости  $\varepsilon$ , получим модель Винклера с постоянным коэффициентом податливости:

$$v = -Bh_0 p, \quad (1.7)$$

которая также упоминалась выше.

*Замечание 1.* Величина  $-v$  представляет собой упругое сжатие полосы, которое не может превышать ее ширину, т.е.  $-v < h$ . Применительно к деформационным моделям (1.5) и (1.7) это условие принимает вид неравенства

$$Bp < 1 \quad (1.8)$$

*Замечание 2.* Общая деформационная модель покрытия (1.4) содержит производную  $h'$ , т.е. учитывает искривленность границы покрытия. Кроме того, эта модель содержит в качестве параметров коэффициент трения  $\mu$  и адгезионную составляющую

трения  $\tau_0$ . Более простая деформационная модель (1.6) содержит только коэффициент трения  $\mu$ , тогда как модели (1.5) и (1.7) винклеровского типа вообще не учитывают трение.

Записанные выше соотношения имеют место в каждый момент времени  $t$  процесса изнашивания покрытия, обусловленного его контактным взаимодействием с контртелом. В процессе изнашивания толщина  $h$  покрытия уменьшается на величину  $W$  линейного износа, так что

$$h(x, t) = h_0(x) - W(x, t), \quad W(x, 0) = 0, \quad h(x, 0) = h_0(x), \quad (1.9)$$

где  $h_0$  – начальная толщина покрытия. Здесь и далее аргументом  $t$  обозначается зависимость рассматриваемых величин от времени.

Считается, что скорость износа покрытия при неизменной скорости скольжения контртела линейно зависит от контактного давления [13]. Представим эту зависимость в виде закона изнашивания

$$\dot{W}(x, t) = -\dot{h}(x, t) = \alpha p(x, t), \quad (1.10)$$

в котором  $\alpha$  – параметр износостойкости материала покрытия, точка над символом функции означает производную по времени  $t$ , причем первое равенство (1.10) является следствием соотношения (1.9).

Граничное перемещение  $v$ , присутствующее в вышеуказанных деформационных моделях, связано с шириной полосы и геометрией контртела условием контакта (рис. 1):

$$-v(x, t) = h(x, t) - \Delta(x, t), \quad (1.11)$$

где

$$\Delta(x, t) = g(x) + \Delta_c(t) = g(x) - \delta(t) + y_0 \quad (1.12)$$

– зазор между контртелом и основанием,  $\Delta_c(t) = \Delta(0, t)$ , функция  $g(x)$  описывает форму контртела,  $g(0) = 0$ ,  $\delta(t)$  – внедрение контртела в покрытие относительно некоторого, произвольно заданного уровня  $y = y_0$ .

При условии, что  $|h'| \sim \epsilon \ll 1$ , нормальная (вдоль оси  $y$ ) нагрузка  $P$  на контртело, приходящаяся на единицу длины его образующей, связана с контактным давлением  $p$  согласно условию равновесия

$$P(t) = \int_{-a(t)}^{b(t)} p(x, t) dx \quad (1.13)$$

Здесь и далее отрезок  $[-a, b]$  задает область контакта контртела и покрытия в плоскости  $Oxy$ .

Задача расчета кинетики изнашивания покрытия состоит в нахождении функций  $h(x, t)$  и  $p(x, t)$ , удовлетворяющих уравнениям (1.10) и (1.11), при использовании той или иной деформационной модели покрытия. В дальнейшем эта задача будет конкретизирована для трех случаев, различающихся кинематикой скольжения и геометрией контакта контртела и покрытия.

**2. Продольное скольжение контртела.** Допустим, что контртело скользит вдоль своей образующей (перпендикулярно плоскости  $Oxy$ ) при фиксированной области контакта  $[-a, a]$ , а толщина  $h_0$  покрытия в начальном состоянии постоянна (рис. 2). Для описания упругого поведения покрытия в процессе его изнашивания воспользуемся деформационной моделью (1.5). Не ограничивая общности, внедрение  $\delta$  контртела в покрытие будем отсчитывать от уровня  $y = h_0$ , т.е. положим в выражении (1.12):  $y_0 = h_0$ .

Исключим с помощью условия контакта (1.11) граничное перемещение  $v$  из соотношения (1.5) и заменим в полученном равенстве контактное давление  $p$  комбинаци-

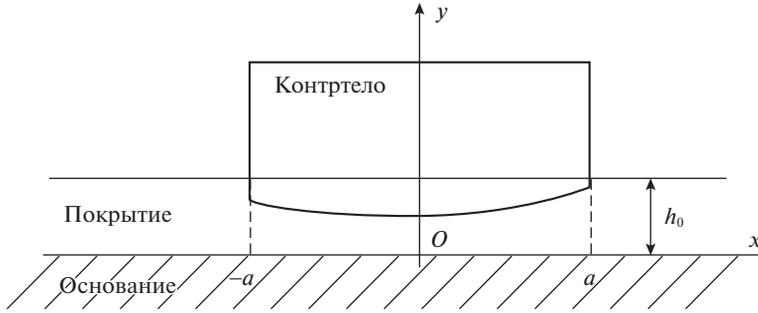


Рис. 2. Взаимодействие контртела с покрытием (продольное скольжение контртела, фиксированная область контакта).

ей  $-\dot{h}/\alpha$  согласно закону изнашивания (1.10). В результате можно прийти к следующему уравнению кинетики изнашивания покрытия:

$$\frac{B}{\alpha} h(x, t) \dot{h}(x, t) + h(x, t) = \Delta(x, t) \equiv g(x) - \delta(t) + h_0, \quad x \in [-a, a] \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение Абеля второго рода, и его решение при произвольной правой части может быть построено только приближенно численными методами. В дальнейшем будет рассматриваться случай линейной зависимости внедрения контртела от времени:

$$\delta(t) = \delta_0 + \delta_1 t, \quad \delta_1 > 0,$$

в котором уравнение (2.1) имеет точное решение [16]. С учетом начального условия  $h(x, 0) = h_0$  это решение представляется в параметрическом виде:

$$t = \frac{\Delta_0(x)}{\delta_1} \left[ 1 - e^{-(\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0))} \right], \quad h(x, t) = \frac{\alpha}{B\delta_1} [\Delta_0(x) - \delta_1 t] \xi, \quad x \in [-a, a], \quad (2.2)$$

где  $\xi$  – параметр решения,  $\xi_0$  – значение  $\xi$ , отвечающее моменту  $t = 0$ ,

$$\xi_0 = \frac{\Delta_1 h_0}{\Delta_0(x)} > \Delta_1, \quad \varphi(\xi) = \int \frac{\xi d\xi}{R(\xi)}, \quad R(\xi) = \xi^2 - \xi + \Delta_1 \quad (2.3)$$

$$\Delta_0(x) = \Delta(x, 0) = g(x) - \delta_0 + h_0, \quad \Delta_1 = \frac{B}{\alpha} \delta_1 > 0$$

Определив из равенств (2.2) производную  $\dot{h}$  и воспользовавшись законом изнашивания (1.10), можно получить параметрическое выражение для контактного давления:

$$p(x, t) = \frac{1}{B} \left( 1 - \frac{\Delta_1}{\xi} \right) \quad (2.4)$$

Ввиду того, что контактное давление  $p$  принимает только положительные значения, и должно выполняться неравенство (1.8), правая часть равенства (2.4) задает диапазон допустимых значений параметра  $\xi$ :

$$0 < \Delta_1 < \xi \quad (2.5)$$

Согласно равенствам (2.3) вид функции  $\varphi(\xi)$  в значительной степени определяется наличием корней у квадратного трехчлена  $R(\xi)$ , что, в свою очередь, зависит от значения параметра  $\Delta_1$ . Рассмотрим для определенности случай

$$1 < 4\Delta_1,$$

когда квадратный трехчлен  $R(\xi)$  не имеет корней, будучи положительным. Тогда [17]

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2} \ln R(\xi) + \frac{2}{\theta} \operatorname{arctg} \frac{2\xi - 1}{\theta}, \quad \theta = \sqrt{4\Delta_1 - 1} \quad (2.6)$$

и, в силу первого неравенства (2.3):  $1/4 < \Delta_1 < \xi_0$ .

Как показывает анализ первого равенства (2.2) с функцией  $\varphi(\xi)$  вида (2.6), с течением времени  $t$  параметр  $\xi$  возрастает. Это означает, что неравенства (2.3) обеспечивают выполнение условия (2.5).

При использовании вместо (1.5) более простой деформационной модели (1.7) получается линейное уравнение кинетики изнашивания покрытия, которое совпадает с уравнением (2.1), если в последнем заменить первый член на  $B/\alpha h_0 \dot{h}$ . Решение  $h$  такого уравнения и соответствующее контактное давление  $p$ , определяемое из закона изнашивания (1.10), имеют вид

$$h(x, t) = \Delta(x, t) + \frac{\delta_1}{\eta} - D(x)e^{-\eta t}, \quad p(x, t) = \frac{1}{Bh_0} \left[ \frac{\delta_1}{\eta} - D(x)e^{-\eta t} \right], \quad x \in [-a, a], \quad (2.7)$$

причем  $D(x) = g(x) - \delta_0 + \delta_1/\eta$ ,  $\eta = \alpha/(Bh_0)$ .

Полученные выше равенства позволяют выполнить расчет кинетики изнашивания покрытия. Это было сделано при

$$G = 1 \text{ ГПа}, \quad v = 0.3, \quad h_0 = 1 \text{ мм}, \quad \delta_0 = 0.1 \text{ мм} \\ \delta_1 = 1.75 \times 10^{-2} \text{ м/с}, \quad \alpha = 10^{-11} \text{ м/с/Па}$$

в случае плоского контртела ( $g(x) \equiv 0$ ), когда отсутствуют зависимости величин  $h$  и  $p$  от координаты  $x$ . При использовании деформационной модели (1.5) расчет выполнялся на основе равенств (2.2), (2.4) и (2.6), а при использовании модели (1.7) — по формулам (2.7).

На рис. 3 показаны расчетные зависимости толщины покрытия  $h$  и контактного давления  $p$  от безразмерного времени  $\tilde{t} = \eta t$ . Сплошные и штриховые линии отвечают деформационным моделям (1.5) и (1.7), соответственно.

Показанные зависимости свидетельствуют о том, что использование уточненной деформационной модели (1.5), учитывающей формоизменение покрытия, может существенным образом изменить результаты расчета кинетики его изнашивания.

**3. Поперечное скольжение контртела** (конечная область контакта). Рассмотрим гладкое выпуклое контртело, которое скользит по покрытию перпендикулярно своей образующей (в плоскости  $Oxy$ , рис. 4). Как и прежде, неизношенное покрытие имеет постоянную толщину  $h_0$  и описывается деформационной моделью (1.5).

Свяжем с подвижным контртелом систему координат  $Oxy$  (рис. 4) и допустим, что в ней существуют стационарные распределения контактного давления  $p(x)$ , износа  $W(x)$ , толщины  $h(x)$  покрытия, а область контакта представляется отрезком  $[-a, b]$ . В подвижной системе координат закон изнашивания (1.10) имеет вид [18]

$$-W'(x) = h'(x) = \alpha p(x), \quad (3.1)$$

причем

$$h(x) = h_0 - W(x), \quad W(b) = 0, \quad h(b) = h_0 \quad (3.2)$$

По аналогии с предыдущей задачей, исключим граничное перемещение  $v$  из соотношения (1.5) с помощью условия контакта (1.11), записанного в подвижной системе координат, полагая  $y_0 = h_0$ . Затем заменим в полученном равенстве контактное давление  $p$  комбинацией  $h'/\alpha$  согласно закону изнашивания (3.1). В результате придем к

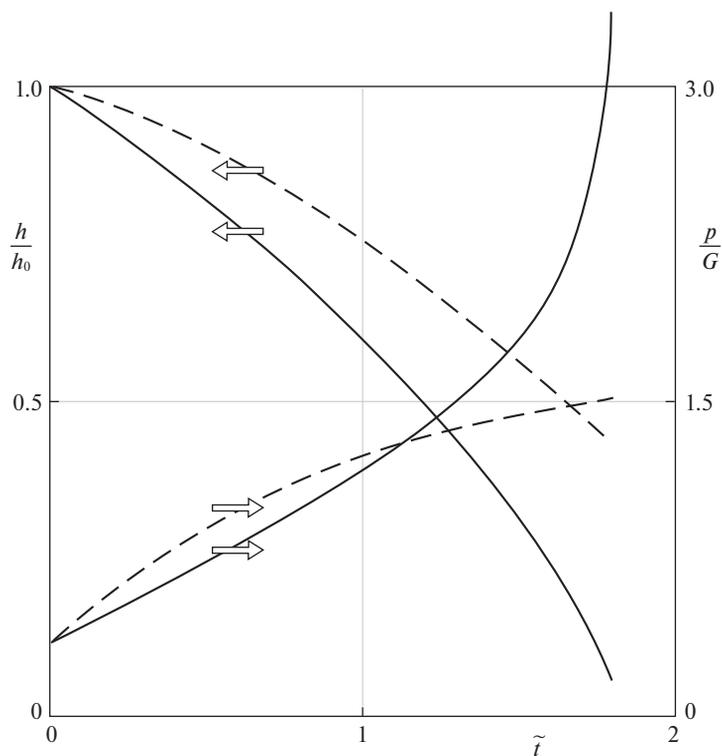


Рис. 3. Зависимости толщины покрытия  $h$  и контактного давления  $p$  от времени.

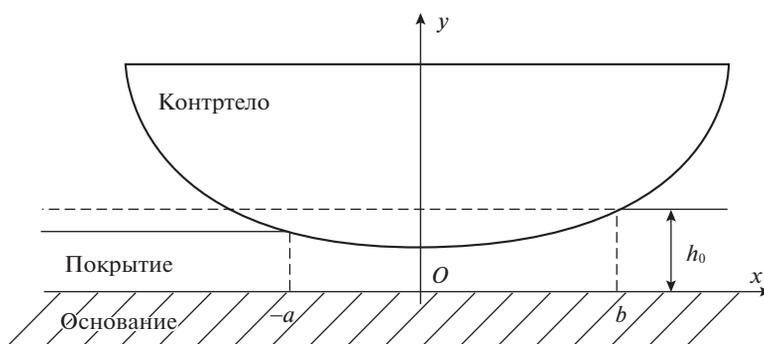


Рис. 4. Взаимодействие контртела с покрытием (поперечное скольжение контртела, произвольная область контакта).

следующему уравнению кинетики изнашивания покрытия в подвижной системе координат:

$$-\frac{B}{\alpha} h(x)h'(x) + h(x) = \Delta(x) \equiv g(x) - \delta + h_0, \quad x \in [-a, b] \quad (3.3)$$

Путем дифференцирования по  $x$  уравнения (3.3) при учете закона изнашивания (3.1) можно получить уравнение для контактного давления

$$p'(x) = \frac{1 - Bp(x)}{B\Delta(x)} [\alpha p(x)(1 - Bp(x)) - g'(x)], \quad x \in [-a, b] \quad (3.4)$$

Уравнения (3.3) и (3.4) представляют собой нелинейные дифференциальные уравнения Абеля второго и первого рода, соответственно [16]. Их решения могут быть построены только в приближенном виде численными методами.

Отметим, что найденное из уравнения (3.4) контактное давление  $p(x)$  позволяет определить толщину  $h(x)$  изношенного покрытия по формулам

$$h(x) = h_0 - \alpha \int_x^b p(s) ds, \quad h(-a) = h_0 - \alpha P,$$

которые вытекают из закона изнашивания (3.1), при этом последнее равенство получается с учетом условия равновесия (1.13).

Для гладкого контртела имеют место равенства  $v(-a) = v(b) = 0$ , из которых в силу соотношения (1.5) следует, что

$$p(-a) = p(b) = 0 \quad (3.5)$$

При наличии равенств (3.2) и  $v(b) = 0$  условие контакта (1.11) позволяет установить связь  $g(b) = \delta$  размера  $b$  области контакта с внедрением  $\delta$  контртела. Для определения размера  $a$  области контакта служит первое равенство (3.5). Последнее обстоятельство обуславливает целесообразность использования уравнения (3.4) для расчета кинетики изнашивания покрытия.

При использовании вместо (1.5) более простой деформационной модели (1.7) получается линейное уравнение кинетики изнашивания покрытия, которое совпадает с уравнением (3.3), если в последнем заменить первый член на  $-B/\alpha h_0 h'$ . Контактное давление при использовании деформационной модели (1.7) описывается линейным уравнением

$$p'(x) = \frac{1}{Bh_0} [\alpha p(x) - g'(x)], \quad x \in [-a, b],$$

решение которого, удовлетворяющее второму равенству (3.5), имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{Bh_0} \int_x^b g'(s) e^{-\eta(s-x)} ds, \quad x \in [-a, b], \quad (3.6)$$

причем, как и прежде,  $\eta = \alpha/(Bh_0)$ .

Расчет кинетики изнашивания покрытия выполнялся на основе дифференциального уравнения (3.4) (деформационная модель (1.5)) и формулы (3.6) (деформационная модель (1.7)) в случае параболического контртела  $g(x) \equiv kx^2$ . Для решения уравнения (3.4) применялся численный метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности [19], при этом контролировалось выполнение неравенства (1.8).

Расчет проводился при  $k = 0.05 \text{ м}^{-1}$ , значения параметров  $G$ ,  $v$ ,  $h_0$ ,  $\alpha$  принимались такими же, как для задачи с продольным скольжением контртела (раздел 2).

На рис. 5 показаны расчетные зависимости отношения  $\rho = b/a$ , характеризующего асимметрию области контакта, от внедрения  $\delta$  контртела в покрытие. Сплошные и штриховые линии, как и прежде, отвечают деформационным моделям (1.5) и (1.7), соответственно.

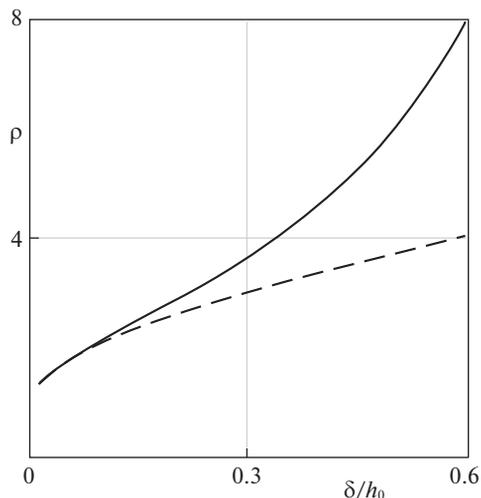


Рис. 5. Зависимости асимметрии  $\rho$  области контакта от внедрения  $\delta$  контртела в покрытие.

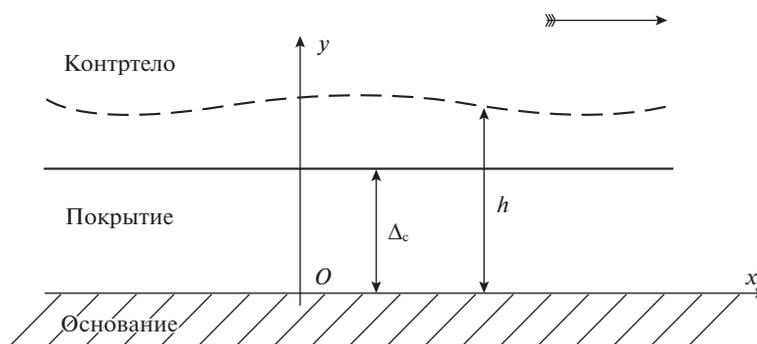


Рис. 6. Взаимодействие бесконечно протяженного плоского контртела с покрытием.

Показанные зависимости свидетельствуют о том, что использование уточненной деформационной модели (1.5), учитывающей изменение формы покрытия, может существенно повлиять на контактные характеристики изнашиваемого покрытия.

**4. Поперечное скольжение контртела (бесконечная область контакта).** Рассмотрим бесконечно протяженное плоское контртелo, которое скользит по покрытию перпендикулярно своей образующей (в плоскости  $Oxy$ ), в результате чего покрытие изнашивается (рис. 6). В отличие от предыдущих случаев, будем считать, что в начальном (неизношенном) состоянии покрытие имеет переменную толщину  $h_0(x)$  и его упругое поведение описывается более сложной деформационной моделью (1.4).

В рассматриваемом случае плоского контртела:  $\Delta(x, t) = \Delta_c(t)$  (рис. 6). Учитывая это равенство, исключим с помощью условия контакта (1.11) граничное перемещение  $v$  из соотношения (1.4) и заменим в полученном равенстве контактное давление  $p$  комби-

нацией  $-\dot{h}/\alpha$  согласно закону изнашивания (1.10). В результате можно прийти к следующему уравнению кинетики изнашивания покрытия

$$\frac{B}{\alpha} h(x, t) \dot{h}(x, t) + [A_1 h(x, t) - \mu_1 \Delta_c(t)] h'(x, t) + h(x, t) = \Delta_c(t), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (4.1)$$

где  $\mu_1 = \mu \alpha / (\alpha - 1)$ ,  $A_1 = 2(\mu + B\tau_0)$ . Для уравнения (4.1) имеет место начальное условие

$$h(x, 0) = h_0(x) \quad (4.2)$$

Уравнение (4.1) относится к классу квазилинейных уравнений в частных производных, и для нахождения его общего решения применим метод характеристик [20]. Однако, первые интегралы, получаемые при использовании этого метода, не позволяют эффективно реализовать известную процедуру решения задачи Коши (4.1), (4.2) [20]. В связи с этим, выполним линеаризацию уравнения (4.1), ограничив дальнейшее рассмотрение случаем малого износа покрытия. А именно, будем считать, что  $W/h_0 \sim \epsilon \ll 1$  и примем во внимание условие малости деформаций покрытия:  $|v|/h \sim \epsilon \ll 1$ . При таких ограничениях, используя в качестве искомой величины износ  $W$ , связанный с толщиной  $h$  соотношением (1.9), и пренебрегая членами порядка  $\epsilon^2$  в уравнении (4.1), получим из него линейное уравнение

$$\frac{B}{\alpha} h_0(x) W(x, t) + \gamma(x, t) W'(x, t) + W(x, t) = \psi(x, t), \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (4.3)$$

с начальным условием

$$W(x, 0) = 0 \quad (4.4)$$

Здесь

$$\gamma(x, t) = A_1 h_0(x) - \mu_1 \Delta_c(t), \quad \psi(x, t) = h_0(x) + \gamma(x, t) h_0'(x) - \Delta_c(t) \quad (4.5)$$

причем считается, что

$$0 < \gamma(x, t) \quad (4.6)$$

Согласно определению (4.5) величины  $\gamma$ , последнее неравенство выполняется, если

$$\Delta_c(t) < \frac{A_1}{\mu_1} h_{0m}; \quad h_{0m} = \min_{x \in (-\infty, \infty)} h_0(x)$$

Воспользуемся для решения уравнения (4.3) вышеупомянутым методом характеристик и составим соответствующую характеристическую систему

$$\frac{\alpha dt}{B h_0(x)} = \frac{dx}{\gamma(x, t)} = \frac{dW}{-W + \psi(x, t)} \quad (4.7)$$

Далее ограничимся случаем постоянного зазора между контртелом и основанием:

$$\Delta_c(t) = \Delta_{c0} = \text{const} \quad (4.8)$$

Для такого случая процедура построения решения задачи Коши (4.3), (4.4) с использованием первых интегралов системы (4.7) формально повторяет выкладки работы [15], поэтому выпишем сразу это решение, справедливость которого можно проверить прямой подстановкой в равенства (4.3) и (4.4):

$$W(x, t) = e^{-R(x)} \int_{L(x)}^x e^{R(s)} \frac{\Psi(s)}{\gamma(s)} ds, \quad (4.9)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= \gamma(x, t) \quad \text{и} \quad \psi(x) = \psi(x, t) \quad \text{при} \quad \Delta_c(t) = \Delta_{c0} \\ X(x, t) &= K(x) - t, \quad K(x) = \int_0^x k(s) ds, \quad k(x) = \frac{B h_0(x)}{\alpha \gamma(x)}, \quad R(x) = \int_0^x \frac{ds}{\gamma(s)}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$L(y)$  – функция, обратная к  $K(x)$ :  $L(K(x)) = x$ . Существование этой функции обеспечивается тем, что  $K(x)$  – монотонно возрастающая функция в силу своего определения (4.10) и неравенства (4.6). Отметим, что функция  $X(x, t)$  представляет собой первый интеграл характеристической системы (4.7). Здесь и далее  $X = X(x, t)$ , если не указано иное.

Определив производную  $\dot{W}$  путем дифференцирования выражения (4.9) по времени  $t$ , можно на основе закона изнашивания (1.10) найти контактное давление:

$$p(x, t) = p_0(L(X))e^{-S(x, L(X))}, \quad (4.11)$$

где

$$p_0(x) = p(x, 0) = \frac{\Psi(x)}{Bh_0(x)} \quad (4.12)$$

– начальное распределение контактного давления,  $S(x, L) = R(x) - R(L) > 0$ , причем последнее неравенство обуславливается монотонным возрастанием функций  $R(x)$  и  $L(y)$ .

Согласно выражению (4.11), контактное давление принимает положительные значения и выполняется неравенство (1.8), если  $0 < Bp_0(x) < 1$ , что, согласно выражению (4.12), имеет место при условии  $0 < \Psi(x) < h_0(x)$ . С учетом определения (4.10) функции  $\Psi(x)$ , можно установить, что последние неравенства выполняются, если

$$A_1 h_{0M} h'_{0M} < \Delta_{c0} < (1 - A_1 h'_{0M}) h_{0m}; \quad h_{0M} = \max_{x \in (-\infty, \infty)} h_0(x), \quad h'_{0M} = \max_{x \in (-\infty, \infty)} |h'_0(x)|$$

*Замечание 3.* Значения функции  $p_0(L(X(x, t)))$ , присутствующей в выражении (4.11), постоянны вдоль характеристик  $X(x, t) = \text{const}$ . Это позволяет описать эволюцию контактного давления  $p(x, t)$  во времени  $t$  как смещение начального распределения  $p_0(x)$  вдоль оси координат со скоростью  $\dot{x} = [K'(x)]^{-1}$ , обеспечивающей выполнение условия  $X(x, t) \equiv K(x) - t = \text{const}$ , с уменьшением значений этого распределения в  $e^{S(x, L(X))}$  раз. Подобное описание дает основание интерпретировать величину

$$\Upsilon(x) = \frac{1}{K'(x)} \equiv \frac{\alpha \gamma(x)}{Bh_0(x)}$$

как фазовую скорость эволюции контактного давления. Аналогичное поведение контактного давления наблюдается в случае изнашивания волнистого штампа, скользящего по упругому покрытию постоянной толщины [14, 15].

*Замечание 4.* В случае, когда начальная толщина покрытия описывается периодической функцией

$$h_0(x + \lambda) = h_0(x) \quad (4.13)$$

функции  $K$ ,  $R$  и  $L$  обладают квазипериодическими свойствами

$$\begin{aligned} K(x + \lambda) &= K(x) + k_0 \lambda, & R(x + \lambda) &= R(x) + r_0 \lambda \\ L(y + k_0 \lambda) &= L(y) + \lambda; & \left. \begin{matrix} k_0 \\ r_0 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \left\{ \begin{matrix} k(s) \\ \gamma^{-1}(s) \end{matrix} \right\} ds \end{aligned}$$

Эти свойства позволяют установить, что в случае (4.13) износ  $W$  и контактное давление  $p$ , определяемые по формулам (4.9) и (4.11), представляют собой периодические функции:

$$W(x + \lambda, t) = W(x, t), \quad p(x + \lambda, t) = p(x, t)$$

При использовании вместо (1.4) более простой деформационной модели (1.5) уравнение кинетики изнашивания покрытия имеет прежний вид (4.1) за тем исключением, что в его левой части отсутствует член с производной  $h'$ , а в правой части стоит функция

$$\hat{\psi}(x) = h_0(x) - \Delta_c(t)$$

Уравнение такого вида, как и прежде, можно линеаризовать в случае малого износа покрытия и прийти к уравнению (4.3), в левой части которого отсутствует член с производной  $W'$ , а в правой части стоит функция  $\hat{\psi}$ . При условии (4.8) это уравнение имеет решение

$$W(x, t) = \hat{\psi}(x) \left[ 1 - e^{-\eta(x)t} \right], \quad \eta(x) = \frac{\alpha}{Bh_0(x)}, \quad (4.14)$$

которому, в силу закона изнашивания (1.10), соответствует контактное давление

$$p(x, t) = p_0(x)e^{-\eta(x)t}, \quad p_0(x) = p(x, 0) = \frac{\hat{\psi}(x)}{Bh_0(x)} \quad (4.15)$$

Полученные выше равенства позволяют выполнить расчет кинетики изнашивания покрытия. Это было сделано для покрытия, имеющего первоначально волнистую форму

$$h_0(x) = \bar{h}_0 + h_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda} x, \quad (4.16)$$

где  $\bar{h}_0$  – средняя толщина покрытия,  $h_1$  и  $\lambda$  – амплитуда и длина волны формы покрытия. При использовании деформационной модели (1.4) расчет выполнялся на основе формул (4.9) и (4.11), а при использовании модели (1.5) – по формулам (4.14) и (4.15).

Использовались следующие значения параметров:  $\bar{h}_0 = 1$  мм,  $h_1 = 0.1\bar{h}_0$ ,  $\lambda = 4\bar{h}_0$ ,  $\Delta_{c0} = 0.7$  мм,  $\mu = 0.3$ ,  $\tau_0 = 1.05$  ГПа, которым, согласно выражению (4.16), отвечает слабоискривленное покрытие:  $|h_0'(x)| < 0.16$ . Значения параметров  $G$ ,  $v$ ,  $\alpha$  принимались такими же, как для задачи с продольным скольжением контртела (раздел 2).

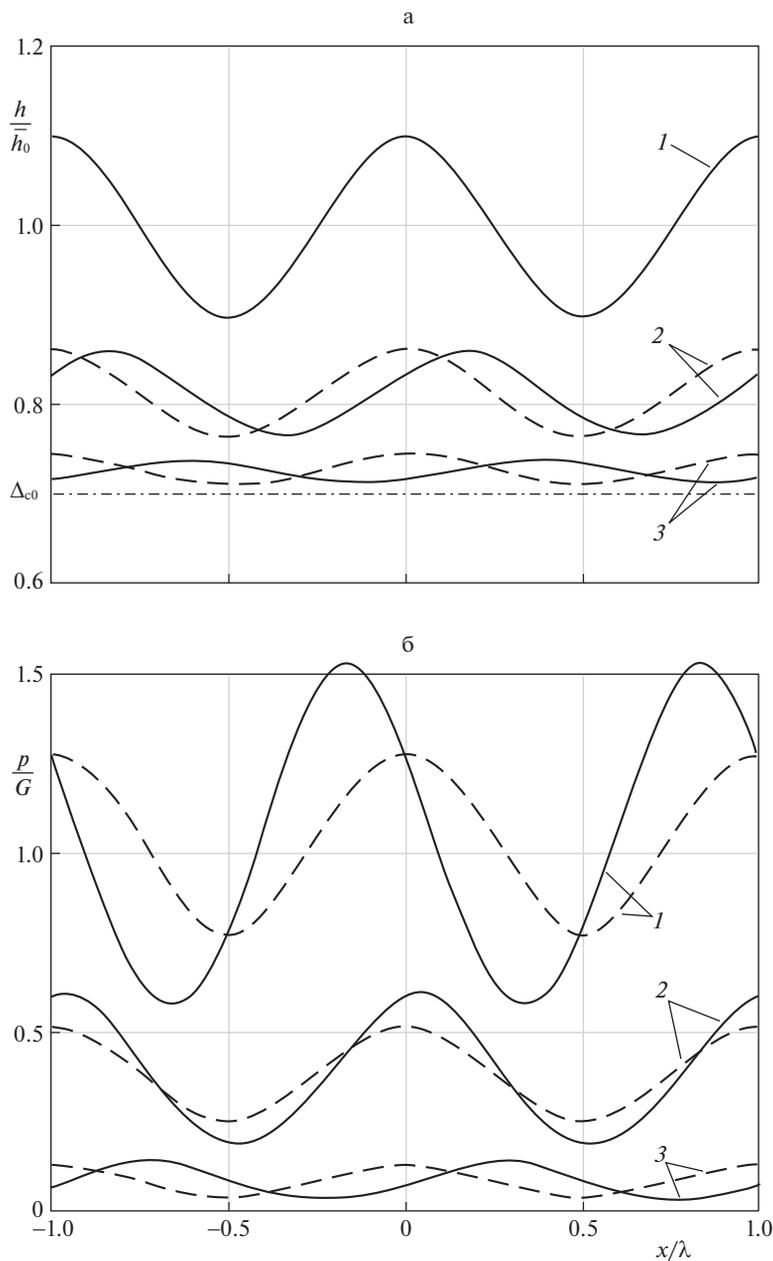
На рис. 7 показаны расчетные зависимости толщины покрытия  $h(x, t) = h_0(x) - W(x, t)$  (а) и контактного давления  $p(x, t)$  (б) от координаты  $x$  в различные моменты безразмерного времени  $\tilde{t}$ : 0 (кривые 1), 1 (кривые 2), 2.5 (кривые 3), причем  $\tilde{t} = \bar{\eta}t$ ,  $\bar{\eta} = \alpha/(B\bar{h}_0)$ . Сплошные и штриховые линии отвечают деформационным моделям (1.4) и (1.5), соответственно.

Показанные зависимости свидетельствуют о том, что использование уточненной деформационной модели (1.4) вместо более простой модели (1.5) может существенно изменить результаты расчета кинетики его изнашивания. В частности, при использовании модели (1.4) наблюдается сдвиг по фазе волнистых форм границы покрытия и распределения контактного давления (см. Замечание 3), который отсутствует при использовании модели (1.5).

### 5. Выводы.

1. Рассмотрены уточненные деформационные модели изнашиваемого покрытия, в том числе деформационная модель, учитывающая искривленность границы покрытия и трение. Использование таких моделей приводит к нелинейным уравнениям кинетики изнашивания покрытия.

2. На основе уточненных деформационных моделей выполнены расчеты эволюции толщины покрытия и контактного давления в рамках двумерной постановки износ-контактной задачи. Для некоторых частных случаев получены аналитические решения задачи.



**Рис. 7.** Зависимости толщины покрытия  $h$  (а) и контактного давления  $p$  (б) от координаты в различные моменты времени.

3. Показано, что использование уточненных деформационных моделей покрытия, учитывающих изменение его формы, может существенно изменить результаты расчета кинетики изнашивания покрытия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (17-01-00352).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Holmberg K., Mathewa A.* Coatings Tribology: Properties, Mechanisms, Techniques and Applications in Surface Engineering. Amsterdam: Elsevier Science, 2009.
2. *Ma L., Eom K., Geringer J., Jun T.-S., Kim K.* Literature review on fretting wear and contact mechanics of tribological coatings // Coatings. 2019. V. 9. № 8. 501. <https://doi.org/10.3390/coatings9080501>
3. *Goryacheva I.G.* Wear process for coated bodies with periodic microgeometry at the interface // Intern. J. Engng. Sci. 2012. V. 61. P. 48–52.
4. *Torskaya E.V.* Modeling of fatigue damage of coated bodies under frictional loading // Phys. Meso-mech. 2016. V. 19. № 3. P. 291–297.
5. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
6. Механика контактных взаимодействий // Под ред. *И.И. Воровича и В.М. Александрова*. М.: Физматлит, 2001. 670 с.
7. *Горячева И.Г., Солдатенков И.А.* Теоретическое исследование приработки и установившегося режима изнашивания твердых смазочных покрытий // Трение и износ. 1983. Т. 4. № 3. С. 420–431.
8. *Черский И.Н., Богатин О.Б., Сокольников Л.Г.* Расчет эксплуатационных характеристик антифрикционных втулок и покрытий при “сильном” износе // Трение и износ. 1986. Т. 7. № 1. С. 99–107.
9. *Дроздов Ю.Н., Коваленко Е.В.* Теоретическое исследование ресурса подшипника скольжения с вкладышем // Трение и износ. 1998. Т. 19. № 5. С. 565–570.
10. *Солдатенков И.А.* Асимптотический анализ решения задачи теории упругости для полосы переменной ширины // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 6. С. 57–73.
11. Развитие теории контактных задач в СССР // Под ред. Л.А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.
12. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
13. *Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С.* Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностр., 1977. 526 с.
14. *Солдатенков И.А.* Задача об изнашивании штампа при его случайном скольжении по тонкому упругому слою // ПММ. 2013. Т. 77. Вып. 5. С. 778–787.
15. *Солдатенков И.А.* Особенности процесса изнашивания пары штамп – тонкая упругая полоса с неоднородными параметрами трения и изнашивания // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 6. С. 717–726.
16. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Факториал, 1997. 512 с.
17. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1977. 224 с.
18. *Солдатенков И.А.* Задача об изнашивании полуплоскости дисковым контртелом // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 107–110.
19. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
20. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. СПб.: Лань, 2003. 447 с

**On the Calculation of the Coating Wear Kinetics: Use of the Refined Deformation Models****I. A. Soldatenkov<sup>#</sup>***Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*<sup>#</sup> *e-mail: iasoldat@hotmail.com*

A number of deformation models for coating in wearing are considered. On their basis the calculations of the coating wear kinetics within 2D statement of the wear contact problem are carried out. It is shown that the use of refined deformation models of the coating, taking into account the change in its shape, can significantly influence the results of the coating wear kinetics calculation.

*Keywords:* friction, wear, coating, elasticity, nonlinear problems

## REFERENCES

1. *Holmberg K., Mathewa A.* Coatings Tribology: Properties, Mechanisms, Techniques and Applications in Surface Engineering. Amsterdam: Elsevier Science, 2009.
2. *Ma L., Eom K., Geringer J., Jun T.-S., Kim K.* Literature review on fretting wear and contact mechanics of tribological coatings // *Coatings*. 2019, vol. 9, no. 8, p. 501. <https://doi.org/10.3390/coatings9080501>
3. *Goryacheva I.G.* Wear process for coated bodies with periodic microgeometry at the interface // *Intern. J. Engng. Sci.*, 2012, vol. 61, pp. 48–52.
4. *Torskaya E.V.* Modeling of fatigue damage of coated bodies under frictional loading // *Phys. Meso-mech.*, 2016, vol. 19, no. 3, pp. 291–297.
5. *Galín L.A.* Contact Problems: The Legacy of L.A. Galín. Berlin: Springer; 2008.
6. *Vorovich I.I., Aleksandrov V.M.*, editors. The Mechanics of Contact Interactions (Mekhanika kontaknykh vzaimodeistvii). Moscow: Fizmatlit, 2001. 670 p. (in Russian)
7. *Goryacheva I.G., Soldatenkov I.A.* Theoretical study of run-in and the steady-state wear regime of solid lubricating coatings // *Sov. J. Fric. Wear*, 1983, vol. 4, no. 3, pp. 26–35.
8. *Cherskii I.N., Bogatin O.B., Sokolnikova L.G.* Calculation of operational characteristics of antifriction bushings and coatings at “severe” wear // *Trenie i iznos*, 1986, vol. 7, no. 1, pp. 99–107. (in Russian)
9. *Drozhdov Yu.N., Kovalenko E.V.* Theoretical study on the life time of sliding bearing with liner // *Trenie i iznos*, 1998, vol. 19, no. 5, pp. 565–570. (in Russian)
10. *Soldatenkov I.A.* Asymptotic analysis of the solution of an elasticity theory problem for a strip of variable width // *Mech. Solids*, 1994, vol. 29, no. 6, pp. 56–74.
11. *Galín L.A.*, editor. Development of the theory of contact problems in the USSR (Razvitie teorii kontaknykh zadach v SSSR). Moscow: Nauka, 1976. 493 p. (in Russian)
12. *Aleksandrov V.M., Mkhitaryan S.M.* Contact Problems for Bodies with Thin Coatings and Interlayers (Kontaktnye zadachi dlya tel s tonkimi pokrytiyami i prosloykami). Moscow: Nauka, 1983. 487 p. (in Russian)
13. *Kragelskii I.V., Dobychin M.N., Komalov V.S.* Friction and Wear: Calculation Method. Oxford: Pergamon, 1982.
14. *Soldatenkov I.A.* The wear of a punch when it slides randomly on a thin elastic layer // *JAMM*, 2013, vol. 77, no. 5, pp. 559–565.
15. *Soldatenkov I.A.* Characteristic features of the process of wear of a punch and a thin elastic strip with non-uniform friction and wear parameters // *JAMM*, 2017, vol. 81, no. 6, pp. 492–498.
16. *Polyanin A.D., Zaitsev V.F.* Handbook of Ordinary Differential Equations: Exact Solutions, Methods, and Problems. Boca Raton—London: CRC Press, 2018.
17. *Dwight H.B.* Tables of Integrals and Other Mathematical Data. N.Y.: Macmillan, 1961.
18. *Soldatenkov I.A.* Problem of wear of a half-plane by a counteracting disk // *Mech. Solids*, 1989, vol. 24, no. 6, pp. 107–110.
19. *Kalitkin N.N.* Numerical Methods (Chislennyye metody). Moscow: Nauka, 1978. 512 p. (in Russian).
20. *Fedoryuk M.V.* Ordinary Differential Equations (Obyknovennyye differentsial’nye uravneniya). St. Petersburg: Lan’, 2003. 447 p. (in Russian)