

СОДЕРЖАНИЕ

Том 58, номер 8, 2022

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- О существовании дифференциальной системы с ляпуновской глобальной неустойчивостью, все решения которой стремятся к нулю при неограниченном росте времени
А. А. Бондарев 1011
- Алгебраический критерий существования центра в монодромной особой точке полиномиальной системы Лъенара
В. Т. Борухов 1020
- Квазибезмонодромные особые точки уравнения Штурма–Лиувилля стандартного вида на комплексной плоскости
А. А. Голубков 1032
-

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

- Смешанная задача для систем гиперболических уравнений с нелинейной граничной диссипацией и нелинейным источником переменного порядка роста
А. Б. Алиев, Г. Х. Шафиева 1039
- Краевая задача для уравнения в частных производных первого порядка с дробной производной Лиувилля
А. В. Псху 1053
- О существовании счётного числа периодических решений краевой задачи для уравнения колебаний балки с однородными граничными условиями
И. А. Рудаков 1062
-

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Аналитическое представление для интегрального поперечника рассеяния в рамках интегрофункционального метода дискретных источников
Ю. А. Еремин, Е. В. Захаров 1073
- Модификация метода дискретных особенностей для неравномерных сеток в приложении к одномерным интегральным уравнениям с сильной особенностью в ядре
А. С. Ненашев 1078
- Граничное гиперсингулярное интегральное уравнение с запаздыванием для нестационарных задач рассеяния на идеально проводящих телах
А. Б. Самохин, А. В. Сетуха 1090
-

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

Синтез субоптимальных фильтров для многосвязных дискретных систем

В. В. Фомичев, М. А. Каменщиков

1105

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Численные исследования динамики развития двумерных возмущений в магнитных ловушках-галатеех

К. В. Брушлинский, Е. В. Степин

1112

Квадратурная формула для потенциала двойного слоя с дифференцируемой плотностью

П. А. Крутицкий, И. О. Резниченко

1121

Двумерные граничные задачи фильтрационных течений с произвольно расположенными источниками в неоднородном пористом слое

В. Ф. Пивень

1132

Вычисление индуктивности нормальных проводников и сверхпроводников

М. М. Хапаев, М. Ю. Куприянов

1148

ХРОНИКА

О семинаре по проблемам нелинейной динамики и управления при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова

1158

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.925.51

О СУЩЕСТВОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЛЯПУНОВСКОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТЬЮ, ВСЕ РЕШЕНИЯ КОТОРОЙ СТРЕМЯТСЯ К НУЛЮ ПРИ НЕОГРАНИЧЕННОМ РОСТЕ ВРЕМЕНИ

© 2022 г. А. А. Бондарев

Конструктивно на конкретном примере доказывается, что из стремления к нулю (при неограниченном росте времени) абсолютно всех решений неавтономной двумерной дифференциальной системы, вообще говоря, не следует никакая вообще (даже хотя бы частичная) ляпуновская устойчивость её нулевого решения, поскольку при этом может случиться, что каждое её ненулевое решение хотя бы однажды удаляется от нуля на достаточное расстояние. Построенная в работе нелинейная система обладает к тому же и нулевым первым приближением вдоль нулевого решения.

DOI: 10.31857/S0374064122080015, EDN: CESKTK

Настоящая работа посвящена исследованию сочетаний ляпуновских, перроновских [1] и верхнепредельных [2] свойств дифференциальных систем. Она логически продолжает цикл работ [3–5], усиливая их результаты:

1) работа [3] исправляла недостаток, указанный в замечании 4 к теореме 1 (см. [6]) (о неограниченности линейного приближения построенной системы вдоль нулевого решения), однако построенная в ней система обладала хотя и *ограниченным* на всей полуоси времени, но всё же *ненулевым* линейным приближением вдоль нулевого решения;

2) в работе [4] построена система, обладающая теми же свойствами, но уже с *нулевым* линейным приближением;

3) в работе [5] построена система с ещё более сильными свойствами, а именно, как *перроновской*, так и *верхнепредельной*, с одной стороны, *полной неустойчивостью* (а значит, и *ляпуновской глобальной неустойчивостью*), а с другой – *массивной частной устойчивостью* (в отличие от всех рассмотренных выше примеров, в которых эта частная устойчивость была лишь *точечной*).

Следующее ниже усиление перечисленных результатов состоит в построении системы, обладающей одновременно следующими свойствами:

– *ляпуновской глобальной неустойчивостью* (которой обладали также примеры из работ [3–5]);

– *перроновской и верхнепредельной глобальной устойчивостью* (в отличие от всех примеров, предложенных ранее).

Для числа $n \in \mathbb{N}$ и области G евклидова пространства \mathbb{R}^n (с нормой $|\cdot|$), содержащей начало координат, рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad x \in G, \quad (1)$$

с правой частью $f : \mathbb{R}_+ \times G \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условиям

$$f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \quad f(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

а значит, обеспечивающей существование и единственность решений задач Коши и допускающей нулевое решение. Обозначим через $\mathcal{S}_*(f)$ множество всех непродолжаемых ненулевых решений системы (1), а через $\mathcal{S}_\delta(f) \subset \mathcal{S}_*(f)$ – его подмножество, состоящее из тех решений x , которые удовлетворяют начальному условию $|x(0)| < \delta$.

Определение 1. Скажем, что для системы (1) (точнее, для её нулевого решения, о чём мы для краткости не будем далее упоминать) имеет место перроновская или, соответственно, верхнепредельная:

1) *устойчивость*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ удовлетворяет требованию

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| < \varepsilon \quad \text{или, соответственно,} \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| < \varepsilon; \quad (2)$$

2) *неустойчивость*, если устойчивость не имеет места, а именно, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ некоторое решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ не удовлетворяет требованию (2);

3) *глобальная устойчивость*, если сразу все решения $x \in \mathcal{S}_*(f)$ удовлетворяют требованию

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = 0 \quad \text{или, соответственно,} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = 0; \quad (3)$$

4) *глобальная неустойчивость*, если для некоторого $\varepsilon > 0$ ни одно решение $x \in \mathcal{S}_*(f)$ не удовлетворяет требованию (2).

Определение 2. С каждым из четырёх введённых в определении 1 перроновских или верхнепредельных свойств системы (1) сопоставим ляпуновское свойство:

1) *устойчивость* и *неустойчивость по Ляпунову* получаются соответственно повторением описаний из пп. 1) и 2) определения 1 с механической заменой в них требования (2) требованием

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t)| < \varepsilon; \quad (4)$$

2) *глобальная устойчивость по Ляпунову*, означающая, что система (1) устойчива по Ляпунову и сразу все решения $x \in \mathcal{S}_*(f)$ удовлетворяют второму из требований (3);

3) *глобальная неустойчивость по Ляпунову*, означающая, что для некоторого $\varepsilon > 0$ сразу все решения $x \in \mathcal{S}_*(f)$ не удовлетворяют требованию (4).

Подчеркнём, что в этих определениях требования (2)–(4) считаются невыполненными, в частности, уже тогда, когда решение x попросту определено не на всей полуоси \mathbb{R}_+ , т.е. когда соответствующая ему фазовая кривая за конечное время выходит к границе фазовой области G (согласно теореме о продолжаемости решений; см., например, [7, теорема 23]).

Здесь не приведены такие (не менее интересные [2, 8], но не изучаемые в данной работе) разновидности перроновских, верхнепредельных и ляпуновских свойств, как асимптотическая устойчивость или неустойчивость, частная устойчивость, массивная частная устойчивость, частичная устойчивость, полная неустойчивость.

Основной результат настоящей работы состоит в доказательстве существования дифференциальной системы, у которой все решения при неограниченном росте времени стремятся по норме к нулю (следовательно, эта система обладает глобальной перроновской и верхнепредельной устойчивостью), но при этом фазовая кривая каждого ненулевого решения хотя бы однажды покидает фиксированную окрестность начала координат (т.е. система является ещё и глобально неустойчивой по Ляпунову).

Система, существование которой утверждается в следующей ниже теореме, *неавтономна* и *двумерна*, и не случайно:

– автономной системы с такими свойствами не существует [9], поскольку ляпуновская глобальная неустойчивость в автономном случае влечёт за собой и перроновскую (а значит, и верхнепредельную) глобальную неустойчивость;

– одномерной такой системы не существует [2], поскольку в одномерном случае верхнепредельная глобальная устойчивость влечёт за собой и ляпуновскую глобальную устойчивость.

Теорема. При $n = 2$ и $G = \mathbb{R}^2$ существует система (1), которая имеет правую часть, удовлетворяющую условию

$$f'_x(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

и обладает следующими двумя свойствами:

1) для всех решений x системы (1) справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = 0;$$

2) для всех ненулевых решений x системы (1) справедливо неравенство

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t)| > 1.$$

Перед доказательством теоремы приведём две технические леммы.

Лемма 1. Функция $\theta_1 : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, заданная условиями

$$\theta_1(\rho, \varphi) = \begin{cases} \varphi, & 0 < \rho \leq 1; \\ \varphi + \frac{\pi}{2} \left(\int_1^\rho \chi_1(\tau) d\tau \right) \left(\int_1^2 \chi_1(\tau) d\tau \right)^{-1}, & 1 < \rho < 2; \\ \varphi + \frac{\pi}{2}, & \rho \geq 2, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\chi_1(v) = \begin{cases} 0, & v \leq 1 \text{ или } v \geq 2; \\ \exp\left(\frac{1}{(v-1)(v-2)}\right), & 1 < v < 2, \end{cases}$$

обладает следующими свойствами:

1) при каждом фиксированном значении переменной $\rho \in (0, +\infty)$ функция $\theta_1(\rho, \cdot)$ является биекцией из прямой \mathbb{R} в себя и удовлетворяет неравенству

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \varphi}(\rho, \varphi) > 0, \quad \varphi \in \mathbb{R};$$

2) является бесконечно дифференцируемой функцией по совокупности переменных.

Доказательство. Прежде всего покажем, что функция $\theta_1(\cdot, \varphi)$ является C^∞ -гладкой функцией своего аргумента при каждом фиксированном значении переменной $\varphi \in \mathbb{R}$. Для этого сначала заметим, что она является константой (а значит, и гладкой функцией) на промежутках $(0, 1]$ и $[2, +\infty)$. Внутри интервала $(1, 2)$ гладкость по построению тоже имеется, поэтому остаётся её проверить в двух концевых точках: 1 и 2.

Выполнение равенств

$$\theta_1(1+0, \varphi) = \varphi + \frac{\pi}{2} \left(\int_1^{1+0} \chi_1(\tau) d\tau \right) \left(\int_1^2 \chi_1(\tau) d\tau \right)^{-1} = \varphi = \theta_1(1-0, \varphi)$$

и

$$\theta_1(2-0, \varphi) = \varphi + \frac{\pi}{2} \left(\int_1^2 \chi_1(\tau) d\tau \right) \left(\int_1^2 \chi_1(\tau) d\tau \right)^{-1} = \varphi + \frac{\pi}{2} = \theta_1(2+0, \varphi)$$

доказывает непрерывность в точках 1 и 2 соответственно.

Далее, выполнение равенств

$$\theta_{1\rho}'(1+0, \varphi) = \frac{\pi}{2} \chi_1(1+0) \left(\int_1^2 \chi_1(\tau) d\tau \right)^{-1} = 0 = \theta_{1\rho}'(1-0, \varphi)$$

и

$$\theta_{1\rho}'(2+0, \varphi) = 0 = \frac{\pi}{2} \chi_1(2-0) \left(\int_1^2 \chi_1(\tau) d\tau \right)^{-1} = \theta_{1\rho}'(2-0, \varphi)$$

доказывает непрерывную дифференцируемость в точках 1 и 2 соответственно.

Теперь заметим, что выполняются равенства

$$\chi_1^{(m)}(1) = \chi_1^{(m)}(2) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

в силу которых и равенств (5), а также гладкости функции $\chi_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ функция $\theta_1(\cdot, \varphi)$ является бесконечно дифференцируемой функцией для каждого фиксированного значения переменной $\varphi \in \mathbb{R}$. Отсюда и из равенств (5) следует, что функция θ_1 имеет непрерывные по совокупности переменных (ρ, φ) производные всех порядков по ρ и φ всюду на декартовом произведении $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$, поэтому свойство 2) настоящей леммы выполнено.

Наконец, заметим, что при каждом фиксированном значении переменной $\rho \in (0, +\infty)$ функция $\theta_1(\rho, \cdot)$ является линейной всюду на прямой \mathbb{R} , а поэтому монотонной (возрастающей) и взаимно-однозначной функцией из прямой \mathbb{R} в себя. Отсюда следует свойство 1).

Лемма доказана.

Лемма 2. Функция $\theta_2 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, задаваемая условиями

$$\theta_2(t, u) = \begin{cases} u, & u \leq \frac{1}{3+t}; \\ u - \int_{\frac{1}{3+t}}^u \chi_2(t, \tau) d\tau, & \frac{1}{3+t} < u < \frac{1}{2+t}; \\ \frac{1}{1+t}u + \frac{1}{2+t} \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) - \Sigma(t), & u \geq \frac{1}{2+t}, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\chi_2(t, v) = \begin{cases} 0, & v \leq \frac{1}{3+t}; \\ \sigma(t) \int_{\frac{1}{3+t}}^v \exp\left(\left(\tau - \frac{1}{3+t} \right)^{-1} \left(\tau - \frac{1}{2+t} \right)^{-1} \right) d\tau, & \frac{1}{3+t} < v < \frac{1}{2+t}; \\ \frac{t}{1+t}, & v \geq \frac{1}{2+t}, \end{cases} \quad (7)$$

$$\sigma(t) = \frac{t}{1+t} \left(\int_{\frac{1}{3+t}}^{\frac{1}{2+t}} \exp\left(\left(\tau - \frac{1}{3+t} \right)^{-1} \left(\tau - \frac{1}{2+t} \right)^{-1} \right) d\tau \right)^{-1},$$

$$\Sigma(t) = \int_{\frac{1}{3+t}}^{\frac{1}{2+t}} \chi_2(t, \tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (8)$$

обладает следующими свойствами:

1) при каждом фиксированном значении момента $t \in \mathbb{R}_+$ функция $\theta_2(t, \cdot)$ является биекцией из прямой \mathbb{R} в себя и удовлетворяет неравенству

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial u}(t, u) > 0, \quad u \in \mathbb{R};$$

2) является бесконечно дифференцируемой функцией по совокупности переменных.

Доказательство. Прежде всего покажем, что функция $\theta_2(t, \cdot)$ является C^∞ -гладкой функцией своего аргумента при каждом фиксированном значении момента $t \in \mathbb{R}_+$. Действительно, она является линейной (а значит, и гладкой) функцией всюду на лучах $(-\infty, 1/(3+t)]$ и $[1/(2+t), +\infty)$. В интервале $(1/(3+t), 1/(2+t))$ гладкость по построению тоже имеется, поэтому остаётся её проверить в двух концевых точках: $1/(3+t)$ и $1/(2+t)$.

Выполнение равенств

$$\theta_2\left(t, \frac{1}{3+t} + 0\right) = \frac{1}{3+t} - \int_{1/(3+t)}^{1/(3+t)+0} \chi_2(t, \tau) d\tau = \frac{1}{3+t} = \theta_2\left(t, \frac{1}{3+t} - 0\right)$$

и

$$\theta_2\left(t, \frac{1}{2+t} - 0\right) = \frac{1}{2+t} - \int_{1/(3+t)}^{1/(2+t)} \chi_2(t, \tau) d\tau = \frac{1}{2+t} - \Sigma(t) = \theta_2\left(t, \frac{1}{2+t} + 0\right)$$

доказывает непрерывность в точках $1/(3+t)$ и $1/(2+t)$ соответственно.

Аналогично, выполнение равенств

$$\theta_{2'u}\left(t, \frac{1}{3+t} + 0\right) = 1 - \chi_2(t, \tau)\Big|_{\tau=1/(3+t)+0} = 1 = \theta_{2'u}\left(t, \frac{1}{3+t} - 0\right)$$

и

$$\begin{aligned} \theta_{2'u}\left(t, \frac{1}{2+t} - 0\right) &= 1 - \chi_2(t, \tau)\Big|_{\tau=1/(2+t)-0} = \\ &= 1 - \sigma(t) \left(\int_{1/(3+t)}^{1/(2+t)} \exp\left(\left(\tau - \frac{1}{3+t}\right)^{-1} \left(\tau - \frac{1}{2+t}\right)^{-1}\right) d\tau \right) = 1 - \frac{t}{1+t} = \frac{1}{1+t} = \theta_{2'u}\left(t, \frac{1}{2+t} + 0\right) \end{aligned}$$

доказывает непрерывную дифференцируемость в точках $1/(3+t)$ и $1/(2+t)$ соответственно.

Теперь заметим, что в силу бесконечной дифференцируемости функции χ_2 (которая следует из равенств (7) и (8)), а также выполнения равенств

$$\frac{\partial^m \chi_2}{\partial v^m}\left(t, \frac{1}{3+t}\right) = \frac{\partial^m \chi_2}{\partial v^m}\left(t, \frac{1}{2+t}\right) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

функция $\theta_2(t, \cdot)$ является бесконечно дифференцируемой функцией своего аргумента для каждого фиксированного момента $t \in \mathbb{R}_+$. Покажем также, что она является строго монотонной (возрастающей) и взаимно-однозначной функцией из прямой \mathbb{R} в себя.

Действительно, в силу справедливости для неотрицательной функции χ_2 оценки

$$\begin{aligned} \chi_2(t, u) &= \sigma(t) \left(\int_{1/(3+t)}^u \exp\left(\left(\tau - \frac{1}{3+t}\right)^{-1} \left(\tau - \frac{1}{2+t}\right)^{-1}\right) d\tau \right) \leq \\ &\leq \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t} < 1, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad u \in \left(\frac{1}{3+t}, \frac{1}{2+t}\right), \end{aligned}$$

для производной

$$\theta_{2'u}(t, u) = \begin{cases} 1, & u \leq \frac{1}{3+t}; \\ 1 - \chi_2(t, u), & \frac{1}{3+t} < u < \frac{1}{2+t}; \\ \frac{1}{1+t}, & u \geq \frac{1}{2+t} \end{cases}$$

справедливо неравенство

$$\theta_{2u}'(t, u) > 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad u \in \mathbb{R},$$

откуда следует монотонность и инъективность функции $\theta_2(t, \cdot)$.

Далее заметим, что при фиксированном значении момента $t \in \mathbb{R}_+$ выполняются соотношения

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \theta_2(t, u) = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \theta_2(t, u) = +\infty,$$

в силу которых и непрерывности функции $\theta_2(t, \cdot) \in C^\infty(\mathbb{R})$ получаем, что $\theta_2(t, \cdot)$ принимает все промежуточные значения от $-\infty$ до $+\infty$, т.е. является сюръективным отображением из прямой \mathbb{R} в себя. Отсюда следует свойство 1) настоящей леммы.

Остаётся заметить, что в силу доказанной ранее гладкости функции $\theta_2(t, \cdot) \in C^\infty(\mathbb{R})$, а также равенств (6)–(8) функция θ_2 имеет непрерывные по совокупности переменных (t, u) производные всех порядков по t и u всюду на декартовом произведении $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, откуда следует свойство 2).

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Построение описанной в теореме системы проведём в три этапа.

I. Введём на плоскости с координатами x_1, x_2 полярные координаты ρ, φ ($\rho \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}$):

$$x_1 = \rho \cos \varphi, \quad x_2 = \rho \sin \varphi \quad (9)$$

и рассмотрим автономную двумерную систему

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \rho^2 \begin{pmatrix} 2 - \rho \\ \sin^2 \varphi + \chi(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \rho^2 \equiv x_1^2 + x_2^2, \quad x \equiv (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad (10)$$

где

$$\chi(\varphi) = \begin{cases} \cos^2 \varphi, & \cos \varphi < 0; \\ 0, & \cos \varphi \geq 0. \end{cases}$$

Равенство (10) задаёт векторное поле в области $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$ переменных (ρ, φ) , которое при помощи локального диффеоморфизма, заданного формулой (9), переносится на проколотую плоскость $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ переменных (x_1, x_2) . Полученное поле непрерывно продолжается в начало координат нулём, причём продолженное поле непрерывно дифференцируемо в начале координат и имеет нулевое линейное приближение за счёт наличия в правой части системы множителя ρ^2 . Из сказанного выше следует, что система (10) допускает нулевое решение, значит, она является системой вида (1).

Первое уравнение системы (10) задаёт динамическую систему на прямой (точнее, на полу-прямой \mathbb{R}_+ , так как по смыслу $\rho \geq 0$), имеющую на \mathbb{R}_+ две неподвижные точки: 0 и 2. При этом очевидно, что если $\rho(0)$ отлично от 0 и 2, то $\rho(t) \rightarrow 2$ при $t \rightarrow +\infty$.

A. Рассмотрим сначала все ненулевые решения данной системы, удовлетворяющие условию $\rho(0) < 2$. Такие решения имеются двух типов.

Тун 1. Для решений x , удовлетворяющих начальному условию $\varphi(0) = 0$, справедливы соотношения

$$\varphi(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \rho(t) \rightarrow 2 \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty. \quad (11)$$

Тун 2. Рассмотрим решения, удовлетворяющие условию $\varphi(0) \neq 0$. Заметим, что угловая координата $\varphi(t)$ каждого такого решения x системы (10) возрастает при $t \rightarrow +\infty$, поэтому в некоторый момент $t > 0$ оно обязательно войдёт в область (4-ю четверть внутри круга радиуса 2)

$$V_{4;2}^\bullet \equiv \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 4, \quad x_1 > 0, \quad x_2 < 0\},$$

в которой всюду функция χ нулевая. В этой области система (10) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \rho^2 \begin{pmatrix} 2 - \rho \\ \sin^2 \varphi \end{pmatrix}, \quad (12)$$

следовательно, для рассматриваемых решений выполняются соотношения

$$\varphi(t) \rightarrow 2\pi, \quad \rho(t) \rightarrow 2 \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty. \quad (13)$$

Б. Рассмотрим решения, удовлетворяющие условию $\rho(0) > 2$. Такие решения у рассматриваемой системы (10) имеются двух типов.

Тун 3. Для решений x , удовлетворяющих начальному условию $\varphi(0) = 0$, справедливо равенство (11).

Тун 4. Рассмотрим решения, удовлетворяющие условию $\varphi(0) \neq 0$. Заметим, что угловая координата $\varphi(t)$ каждого такого решения x системы (10) возрастает при $t \rightarrow +\infty$, поэтому в некоторый момент $t > 0$ оно обязательно войдёт в область (4-ю четверть вне круга радиуса 2)

$$V^{\circ}_{4;2} \equiv \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 > 4, \quad x_1 > 0, \quad x_2 < 0\},$$

в которой всюду функция χ нулевая. В этой области система (10) принимает вид (12), следовательно, для рассматриваемых решений выполняются соотношения (13).

В. Рассмотрим теперь решения, удовлетворяющие начальному условию $\rho(0) = 2$. Такие решения бывают также двух типов.

Тун 5. Точка $e_1 = (2, 0)^T$ является особой для рассматриваемой системы (10) и, как показано в пп. А и Б, представляет собой точку притяжения внутренности и внешности круга радиуса 2.

Тун 6. Рассмотрим решения x , удовлетворяющие условию $\varphi(0) \neq 0$. Угловая координата $\varphi(t)$ каждого решения этого типа удовлетворяет соотношению $\varphi(t) \rightarrow 2\pi$ при $t \rightarrow +\infty$, поэтому такие решения, как и все остальные ненулевые решения системы (10), асимптотически притягиваются к особой точке e_1 при $t \rightarrow +\infty$.

II. Сделаем в системе (10) автономную замену координат, заданную формулами

$$\varrho = \rho, \quad \phi = \theta_1(\rho, \varphi), \quad (14)$$

где функция θ_1 задаётся равенствами (5).

Из леммы 1 следует, что при каждом фиксированном значении переменной $\rho \in (0, +\infty)$ к функции $\theta_1(\rho, \cdot)$ существует обратная функция, которая, если её рассматривать уже как функцию от двух аргументов ρ и ϕ , является бесконечно дифференцируемой всюду на прямом произведении $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Заметим также, что при $0 < \rho \leq 1$ имеем

$$\theta_1(\rho, \varphi) = \varphi, \quad (15)$$

поэтому полученное при помощи замены (14) векторное поле с помощью локального диффеоморфизма, заданного равенствами

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho \cos \phi \\ \varrho \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \varrho \equiv y_1^2 + y_2^2, \quad (16)$$

переносится на проколотую плоскость $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ координат (y_1, y_2) , доопределяется непрерывно дифференцируемым образом в начало координат нулём, и полученная таким образом система, задающая это поле, ещё и обладает нулевым линейным приближением вдоль нулевого решения в силу того факта, что этим же свойством, согласно доказанному ранее, обладает система (10).

Итак, построена допускающая нулевое решение автономная дифференциальная система

$$\dot{y} = f_1(y), \quad y \equiv (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad (17)$$

с правой частью $f_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, удовлетворяющей условиям

$$f_1, f_{1y} \in C(\mathbb{R}^2), \quad f_1(0) = 0, \quad f_{1y}(0) = 0,$$

качественное поведение решений которой в круговой 1-окрестности начала координат в точности такое же, как и у решений системы (10). Покажем теперь, что для всех ненулевых решений y построенной системы (17) справедливы соотношения

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_1(t) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y_2(t) = 2. \tag{18}$$

Действительно, согласно доказанному выше, особая точка e_1 является точкой притяжения всей проколотой плоскости $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ переменных (x_1, x_2) для системы (10). Поэтому в силу равенства $\theta_1(2, 0) = \pi/2$ и формул (14), (16), задающих диффеоморфизм, точка $e_2 = (0, 2)^T$ является точкой притяжения проколотой плоскости $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ переменных (y_1, y_2) для системы (17). Отсюда следует выполнение равенств (18).

III. Наконец, сделаем в системе (17) замену переменных:

$$z_1 = y_1, \quad z_2 = \theta_2(t, y_2), \tag{19}$$

где функция $\theta_2 \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ задаётся равенствами (6). Из леммы 2 следует, что при каждом фиксированном значении момента $t \in \mathbb{R}_+$ к функции $\theta_2(t, \cdot)$ существует обратная функция, которая, если её рассматривать уже как функцию от двух аргументов t и z_2 , является бесконечно дифференцируемой всюду на прямом произведении $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Покажем, что построенная таким образом неавтономная дифференциальная система

$$\dot{z} = f_2(t, z), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad z \equiv (z_1, z_2)^T \in \mathbb{R}^2, \tag{20}$$

с правой частью $f_2 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, удовлетворяющей условию

$$f_2, f_{2z}' \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2),$$

обладает всеми свойствами, указанными в формулировке настоящей теоремы.

Для этого сначала отметим, что в полосе

$$U(t) \equiv \{y \in \mathbb{R}^2 : |y_2| < 1/(3+t)\}$$

замена (19) принимает вид

$$z = y, \tag{21}$$

поэтому построенная на данном этапе система (20) допускает нулевое решение и обладает нулевым линейным приближением вдоль нулевого решения, поскольку этим же свойством обладает и система (17).

Далее, в единичном полукруге

$$V_{3,4;1}^\bullet \equiv \{z \in \mathbb{R}^2 : z_1^2 + z_2^2 \leq 1, \quad z_2 < 0\},$$

в который хотя бы однажды войдут все ненулевые решения z системы (20), удовлетворяющие начальному условию $|z(0)| \leq 1$, замена (19) тоже принимает вид (21), а значит, и вид $z = x$, что следует из равенств (14) и (15). Отсюда, а также из исследованного ранее качественного поведения решений системы (10), следует свойство 2) настоящей теоремы.

Остаётся заметить, что для неотрицательной функции $\Sigma(\cdot)$, определённой равенством (8), справедливы оценки

$$\begin{aligned} \Sigma(t) &= \int_{1/(3+t)}^{1/(2+t)} \chi_2(t, \tau) d\tau \leq \left(\frac{1}{2+t} - \frac{1}{3+t} \right) \max_{\tau \in [1/(3+t), 1/(2+t)]} \chi_2(t, \tau) \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{2+t} - \frac{1}{3+t} \right) \frac{t}{1+t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

а поэтому равномерно по $y_2 \in [1, 3]$ имеем

$$\theta_2(t, y_2) = \frac{1}{1+t}y_2 + \frac{1}{2+t} \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) - \Sigma(t) \leq \frac{3}{1+t} + \frac{1}{2+t} - \Sigma(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty,$$

откуда следует свойство 1) настоящей теоремы. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность профессору И.Н. Сергееву за ценные замечания, способствовавшие значительному улучшению текста работы.

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (проект 21-8-2-4-1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сергеев И.Н.* Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856.
2. *Сергеев И.Н.* Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557.
3. *Бондарев А.А.* Один пример неустойчивой системы // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 899.
4. *Бондарев А.А.* Пример полной, но не глобальной неустойчивости по Перрону // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 2. С. 43–47.
5. *Бондарев А.А.* Существование вполне неустойчивой по Ляпунову дифференциальной системы, обладающей перроновской и верхнепредельной массивной частной устойчивостью // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 6. С. 858–859.
6. *Сергеев И.Н.* Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 636–646.
7. *Сергеев И.Н.* Лекции по дифференциальным уравнениям. М., 2019.
8. *Сергеев И.Н.* Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1576–1578.
9. *Сергеев И.Н.* Ляпуновские, перроновские и верхнепредельные свойства устойчивости автономных дифференциальных систем // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртского гос. ун-та. 2020. Т. 56. № 2. С. 63–78.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 10.01.2022 г.
После доработки 21.05.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.925.42

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЦЕНТРА В МОНОДРОМНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЛЬЕНАРА

© 2022 г. В. Т. Борухов

Рассматривается проблема различения центра и фокуса для полиномиальной системы Лье-нара (полиномиального векторного поля $(y - F(x))\partial/\partial x - \tilde{g}(x)\partial/\partial y$) в монодромной особой точке $(0, 0)$. Получено описание полуалгебраического множества центров в пространстве коэффициентов полиномов $(F(x) = \int_0^x \tilde{f}(\tau) d\tau, G(x) = \int_0^x \tilde{g}(\tau) d\tau)$, основанное на исключении параметров A, B, C из условия композиции $F = B(A), G = C(A)$.

DOI: 10.31857/S0374064122080027, EDN: SETWWV

Введение. Проблема различения центра и фокуса для монодромной особой точки вещественного векторного поля на плоскости занимает важное место в качественной теории дифференциальных уравнений (см. монографии [1–5]). Для полиномиального векторного поля в случае невырожденной особой точки условия существования центра сводятся к вычислению фокусных величин Пуанкаре–Ляпунова [1, гл. 2; 2, гл. 1; 4, гл. 3]. Привлечение методов компьютерной алгебры дало новый импульс для реализации таких вычислений. Однако задача оценки достаточного числа фокусных величин остаётся в общем случае открытой.

Альтернативой вычислению фокусных величин является предложенный И.С. Куклесом подход обобщённой симметрии [6] (см. также [2, гл. 1; 4, гл. 3]). Для рациональных и полиномиальных векторных полей Лье-нара этот подход связывает проблему центра и фокуса с разрешимостью специальных функциональных уравнений [6–17]. В частности, известно следующее параметрическое представление центров (см. [4, гл. 3; 8; 11]):

$$F = B(A), \quad G = C(A) \tag{1}$$

в пространстве пар полиномов (F, G) . Здесь параметры A, B, C – вещественные полиномы, при этом нижняя степень k' полинома A – чётное число. Данный результат доказан Л.А. Черкасом в работе [8] в случае невырожденной особой точки $(0, 0)$ при $k' = 2$ и К. Кристофером [11] в общем случае монодромной особой точки.

В дальнейшем соотношения вида (1), называемые в зависимости от контекста *условием композиции* или *гипотезой композиции*, оказались востребованными в теории центра для дифференциальных уравнений Абеля. Обзор и новые направления исследований проблемы центра и фокуса для различных классов уравнений Абеля представлены в работах [18, 19]. В статье [20] установлена связь гипотезы композиции с инфинитезимальной проблемой центра на нулевых циклах.

В настоящей работе представление (1) рассматривается в пространстве коэффициентов полиномов F, G и ставится задача исключения неизвестных полиномов A, B, C из системы уравнений (1). Предложен алгоритм исключения, основанный на рекурсии, обнаруженной в структуре вхождения коэффициентов полиномов A, B, C в систему (1). В результате получена система полиномиальных уравнений и неравенств, характеризующая вместе с условиями монодромности особой точки $(0, 0)$ полуалгебраическое множество центров в пространстве коэффициентов полиномов F и G .

В п. 1 собраны известные [6–11] утверждения о необходимых и достаточных условиях существования центра для полиномиальной системы Лье-нара. Одним из таких утверждений является уже упомянутый результат о параметрическом представлении пары (F, G) .

В п. 2 уточняется постановка задачи описания множества центров в пространстве пар (F, G) . Для фиксированных верхних n, m и нижних n', m' степеней полиномов F, G определяется конечное множество $P(n, n', m, m') = \{(k, k')\}$ допустимых в силу (1) пар степеней полиномов A . Если для монодромной особой точки множество $P(n, n', m, m')$ – пустое, то особая точка является фокусом. Пара (k, k') из непустого множества $P(n, n', m, m')$ называется числовой характеристикой центров в пространстве пар (F, G) , имеющих представление (1). Таким образом, проблема различения центра и фокуса сводится к задаче описания центров с числовыми характеристиками (k, k') из множества $P(n, n', m, m')$.

Редукция системы (1) с заданной числовой характеристикой (k, k') к системе полиномиальных уравнений и неравенств для коэффициентов полиномов F, G представлена в п. 3.

Основной результат статьи, критерий существования центра в монодромной особой точке $(0, 0)$ и описание полуалгебраического множества центров в пространстве коэффициентов полиномов F, G приводятся в п. 4.

Вывод условий монодромности особой точки $(0, 0)$ системы Льенара с использованием результатов А.М. Ляпунова представлен в приложении 1. В приложении 2 даётся доказательство результатов п. 1 об условиях центра полиномиальной системы Льенара.

1. Предварительные сведения. Рассмотрим проблему различения центра и фокуса для системы Льенара

$$\dot{x}(t) = y - F(x), \quad \dot{y}(t) = -\tilde{g}(x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

где $F(x), \tilde{g}(x)$ – вещественные полиномы,

$$F(x) = f_n x^n + \dots + f_{n'} x^{n'} \quad (1 \leq n' \leq n), \quad (3)$$

$$G(x) = \int_0^x \tilde{g}(\tau) d\tau = g_m x^m + \dots + g_{m'} x^{m'} \quad (2 \leq m' \leq m). \quad (4)$$

Отметим, что если $n = n'$, то $F(x) = f_n x^n = f_{n'} x^{n'}$. Степени полинома F определим, положив, что если $F \neq 0$, то $f_n \neq 0, f_{n'} \neq 0$, где n – верхняя степень, n' – нижняя степень F . Если же $F = 0$, то считаем, что $n' = \infty$.

Поскольку наличие центра или фокуса в особой точке $(0, 0)$ является локальным свойством, то система (2)–(4) рассматривается в некоторой окрестности точки $(0, 0)$. Согласно [11, 21] начало координат $(0, 0)$ будет особой точкой типа центр либо фокус тогда и только тогда, когда выполняются условия монодромности

$$m' \in 2\mathbb{Z}^+, \quad n' \geq \frac{m'}{2}, \quad 8g_{m'} > f_{m'/2}^2. \quad (5)$$

Здесь $2\mathbb{Z}^+ = \{2, 4, \dots\}$ – множество чётных положительных чисел.

Отметим, что определение нижней степени нулевого полинома $F = 0$ согласуется как с асимптотическим при $n' \rightarrow \infty$ поведением полинома в окрестности нуля, так и с неравенством $n' \geq m'/2$ в (5).

Если выполняется строгое неравенство $n' > m'/2$, то $f_{m'/2} = 0$, и тогда последнее неравенство в (5) приобретает вид $g_{m'} > 0$. В приложении 1 приводится вывод условий (5) из результатов А.М. Ляпунова [22, с. 440] о принадлежности особой точки ко второй группе особых точек.

В случае $m' = 2$ центр в особой точке $(0, 0)$ называется невырожденным, в случае $m' > 2$ – вырожденным. Следующая теорема 1 является основной в теории центра и фокуса для полиномиальной системы Льенара. Для невырожденного центра она вытекает из результатов Л.А. Черкаса [7, 8] и К. Кристофера [11]. В общем случае монодромной особой точки теорема доказана (за исключением утверждения (iii)) в работе [11]. Утверждение (iii) вытекает из результатов статей [9, 10].

Теорема 1. Пусть выполнены условия (5) монодромности особой точки $(0, 0)$ системы Льенара (2)–(4). Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) особая точка $(0, 0)$ является центром;
(ii) в окрестности точки $u = 0$ справедливо равенство

$$F(x(u)) = F(x(-u)), \quad (6)$$

где $x(u)$ – функция, обратная к функции

$$u(x) = \text{sign}(x)(m'G(x))^{1/m'};$$

- (iii) полиномы F , G связаны равенством

$$F(x) = \Phi(G^{2/m'}(x)), \quad \Phi(0) = 0,$$

где $\Phi(z)$ – аналитическая в окрестности точки $z = 0$ функция;

- (iv) в окрестности точки $x = 0$ система уравнений

$$F(x) = F(z), \quad G(x) = G(z) \quad (7)$$

имеет единственное вещественное аналитическое решение $z = z(x)$, удовлетворяющее условиям $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = -1$;

(v) полиномы F , G допускают представление (1), где A , B , C – вещественные полиномы, и нижняя степень полинома A является чётным числом.

Общий случай монодромной точки кратко изложен в работе [11]. Полное доказательство теоремы 1 приводится в приложении 2. Отметим также, что в работах [4, гл. 3; 9; 11] система уравнений (7) используется для доказательства алгебраических условий центра в терминах теории результатов.

2. Постановка задачи. Будем рассматривать параметрическое представление (1) полиномов F , G как систему уравнений относительно неизвестных полиномов

$$A(x) = a_k x^k + \dots + a_{k'} x^{k'}, \quad B(x) = b_l x^l + \dots + b_{l'} x^{l'}, \quad C(x) = c_s x^s + \dots + c_{s'} x^{s'}, \quad (8)$$

где $k \geq k'$, $l \geq l'$, $s \geq s'$.

Нетрудно заметить, что равенства (1) эквивалентны равенствам

$$F = B_d(dA), \quad G = G_d(dA),$$

где $d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$, $B_d(x) = B(d^{-1}x)$, $C_d(x) = C(d^{-1}x)$. Отсюда следует, что полином A допускает нормировки вида $a_{k'} = 1$ и $a_k = 1$. Традиционно в литературе используется нормировка $a_{k'} = 1$. Однако, как следует далее из теоремы 2, принципиальное значение имеет нормировка $a_k = 1$, поскольку именно её применение позволяет получить явный критерий центра.

Из утверждения (v) теоремы 1 следует важное теоретико-числовое свойство композиции (1).

Следствие 1. Если особая точка $(0, 0)$ – центр системы (2)–(4), то степени полиномов F , G допускают мультипликативное представление

$$n = kl, \quad n' = k'l', \quad m = ks, \quad m' = k's',$$

где степени k , k' полинома A удовлетворяют условиям

$$k' \in 2\mathbb{Z}^+, \quad k \geq k', \quad k \mid (n, m), \quad k' \mid (n', m'), \quad \frac{n}{k} \geq \frac{n'}{k'}, \quad \frac{m}{k} \geq \frac{m'}{k'}. \quad (9)$$

Здесь условие $k \mid (n, m)$ означает, что $k > 1$ и k является делителем n и m . В частности, $k' \infty = \infty$, поэтому если $n' = \infty$, то k' – делитель n' .

Отметим, что неравенства $n/k \geq n'/k'$, $m/k \geq m'/k'$ равносильны неравенствам $l \geq l'$, $s \geq s'$.

Определение. Пару (k, k') натуральных чисел, удовлетворяющих условиям (9), назовём *числовой характеристикой* центров, определяемых условием композиции (1).

Рассмотрим множество $P(n, n', m, m') = \{(k, k')\}$ допустимых согласно (3)–(5), (9) числовых характеристик центров. Для заданных степеней n, n', m, m' множество $P(n, n', m, m')$ является конечным и непустым, если существует система (2)–(4), для которой особая точка является центром. Отсюда следует

Утверждение 1. Если степени полиномов F, G таковы, что $P(n, n', m, m')$ – пустое множество, то монодромная особая точка $(0, 0)$ системы Льенара (2)–(4) является фокусом.

Так, например, если m и n – взаимно простые числа либо число n' – нечётное, то множество $P(n, n', m, m')$ – пустое. Особая монодромная точка $(0, 0)$ в этом случае является фокусом. Ещё один пример фокуса в монодромной особой точке $(0, 0)$ – нарушение, по крайней мере, одного из неравенств $n/k \geq n'/k', m/k \geq m'/k'$ для любой пары (k, k') из множества $P_0(n, n', m, m') = \{(k, k') : k \in 2\mathbb{Z}, k \geq k', k \mid (n, m), k' \mid (n', m')\}$. Пусть, например, m – простое число, $n = ml, n' = 2l', m' = 2$. Тогда если $l < l'$ и выполняется вытекающее из требования $n \geq n'$ неравенство $ml \geq 2l'$, то $P_0(n, n', m, m') = \{k = m, k' = 2\}$ и $P(n, n', m, m')$ – пустое множество. Следовательно, особая точка $(0, 0)$ системы Льенара (1)–(3) с параметрами $g_2 > 0, n = ml, n' = 2l', m \in \{3, 5, 7, \dots\}, l < l', m' = 2, ml \geq 2l'$ является фокусом. Приведём для случая $m' = 2, g_2 > 0$ конкретные примеры фокусов:

- 1) $m = 3, n = 6, n' \in \{3, 5, 6\}$;
- 2) $m = 3, n = 9, n' \in \{3, 5, 7\}$;
- 3) $m = 5, n = 10, n' \in \{3, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
- 4) $m = 7, n = 14, n' \in \{3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$.

Таким образом, проблема различения центра и фокуса для полиномиальной системы Льенара сводится к задаче описания центров с числовыми характеристиками из конечного непустого множества $P(n, n', m, m')$.

3. Исключение параметров A, B, C . Введём векторные обозначения для коэффициентов полиномов A, B, C, F, G (см. (8), (4), (3)):

$$a = (a_k, a_{k-1}, \dots, a_{k'}), \quad b = (b_l, b_{l-1}, \dots, b_{l'}), \quad c = (c_s, c_{s-1}, \dots, c_{s'}),$$

$$f = (f_n, f_{n-1}, \dots, f_{n'}), \quad g = (g_m, g_{m-1}, \dots, g_{m'}).$$

Пары $(n, n'), (m, m'), (k, k'), (l, l'), (s, s')$ удовлетворяют условиям (9), следовательно, полиномы $B(A), C(A)$ можно записать в виде

$$B(A) = \varphi_{kl}^B(a, b)x^{kl} + \dots + \varphi_{k'l'}^B(a, b)x^{k'l'},$$

$$C(A) = \varphi_{ks}^C(a, c)x^{ks} + \dots + \varphi_{k's'}^C(a, c)x^{k's'},$$

где $\varphi_i^B(a, b)$ ($i \in \{kl, \dots, k'l'\}$), $\varphi_i^C(a, c)$ ($i \in \{ks, \dots, k's'\}$) – полиномы от коэффициентов полиномов A, B и A, C соответственно.

Полином A^j также запишем в виде

$$A^j = a_{j,kj}(a)x^{kj} + \dots + a_{j,k'j}(a)x^{k'j}, \quad j \in \{1, 2, \dots, l\}.$$

Его коэффициенты определяются по формуле

$$a_{j,q}(a) = \sum_{(\alpha_k, \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_{k'}) \in L(j,q)} \frac{j!}{\alpha_k! \alpha_{k-1}! \dots \alpha_{k'}!} a_k^{\alpha_k} a_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \dots a_{k'}^{\alpha_{k'}}, \tag{10}$$

где $q \in \{kj, kj - 1, \dots, k'j\}$,

$$L(j, q) = \left\{ (\alpha_k, \dots, \alpha_{k'}) : \alpha_i \in \{0, 1, \dots\}, \sum_{i=0}^{k-k'} \alpha_{k-i} = j, \sum_{i=0}^{k-k'} (k-i)\alpha_{k-i} = q \right\}, \quad 0! = 1! = 1.$$

Формула (10) следует из правила умножения полиномов. При этом для приведения подобных одночленов следует воспользоваться известной формулой

$$\binom{j}{\alpha_k} \binom{j - \alpha_k}{\alpha_{k-1}} \times \dots \times \binom{j - \alpha_k - \dots - \alpha_{k'+1}}{\alpha_{k'}} = \frac{j!}{\alpha_k! \dots \alpha_{k'}!},$$

выражающей полиномиальные коэффициенты через биномиальные. Нам понадобятся коэффициенты

$$a_{j,kj}(a), a_{j,kj-1}(a), \dots, a_{j,kj-(k-k')}(a). \tag{11}$$

Вычислим первые четыре коэффициента из множества (11):

$$\begin{aligned} a_{j,kj}(a) &= a_k^j, & a_{j,kj-1}(a) &= \frac{j!}{(j-1)!1!} a_k^{j-1} a_{k-1} = j a_k^{j-1} a_{k-1}, \\ a_{j,kj-2}(a) &= \frac{j!}{(j-1)!1!} a_k^{j-1} a_{k-2} + \frac{j!}{(j-2)!2!} a_k^{j-2} a_{k-1}^2 = j a_k^{j-1} a_{k-2} + \frac{j(j-1)}{2} a_k^{j-2} a_{k-1}^2 = \\ &= j a_k^{j-1} a_{k-2} + \tilde{a}_{j,kj-2}(a_k, a_{k-1}), \\ a_{j,kj-3}(a) &= j a_k^{j-1} a_{k-3} + j(j-1) a_k^{j-2} a_{k-1} a_{k-2} + \frac{j(j-1)(j-2)}{3!} a_k^{j-3} a_{k-1}^3 = \\ &= j a_k^{j-1} a_{k-3} + \tilde{a}_{j,kj-3}(a_k, a_{k-1}, a_{k-2}). \end{aligned}$$

Далее по индукции имеем

$$a_{j,kj-(k-k')}(a) = j a_k^{j-1} a_{k'} + \tilde{a}_{j,kj-(k-k')}(a_k, \dots, a_{k'+1}).$$

Положив $a_k = 1$, получим

Утверждение 2. Пусть $a_k = 1$, тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} a_{j,kj}(a) &= 1, & a_{j,kj-1}(a) &= j a_{k-1}, & a_{j,kj-2}(a) &= j a_{k-2} + \tilde{a}_{j,kj-2}(1, a_{k-1}), \\ a_{j,kj-3}(a) &= j a_{k-3} + \tilde{a}_{j,kj-3}(1, a_{k-1}, a_{k-2}), & \dots \\ \dots, & & a_{j,kj-(k-k')}(a) &= j a_{k'} + \tilde{a}_{j,kj-(k-k')}(1, a_{k-1}, \dots, a_{k'+1}). \end{aligned}$$

В следующих двух леммах указаны коэффициенты полиномов $B(A)$, $C(A)$, определяющие рекурсивную структуру системы уравнений (1).

Лемма 1. Пусть $a_k = 1$, тогда справедливы равенства:

1) $\varphi_{kl}^B(a, b) = b_l$, $\varphi_{kl-1}^B(a, b) = l b_l a_{k-1}$, $\varphi_{kl-i}^B(a, b) = l b_l a_{k-i} + \tilde{\varphi}_{kl-i}^B(b_l, a_{k-1}, \dots, a_{k-i+1})$ для любого $i \in \{2, \dots, k - k'\}$;

2) $\varphi_{k(l-j)}^B(a, b) = b_{l-j} + \tilde{\varphi}_{k(l-j)}^B(b_l, \dots, b_{l-j+1}, a)$ для любого $j \in \{1, \dots, l - l'\}$.

Доказательство. Поскольку $k' \geq 2$, то $kl - (k - k') = k(l - 1) + k' > k(l - 1)$. Отсюда и из равенства $B(A) = b_l A^l + b_{l-1} A^{l-1} + \dots + b_{l'} A^{l'}$ вытекает, что $\varphi_{kl-i}^B(a, b) = b_l a_{l,kl-i}(a)$ для любого $i \in \{0, 1, \dots, k - k'\}$. Таким образом, первая серия равенств в лемме 1 следует из утверждения 2 при $j = l$. Далее,

$$\varphi_{k(l-j)}^B(a, b) = b_{l-j} a_{l-j,k(l-j)}(a) + b_{l-j+1} a_{l-j+1,k(l-j)}(a) + \dots + b_l a_{l,k(l-j)}(a), \tag{12}$$

где $b_{l-j+i} = 0$ при $i > j$. Последовательно полагая в (12) $j = \overline{1, l - l'}$ с учётом утверждения 2, получаем вторую серию равенств леммы 1. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $a_k = 1$, тогда справедливы равенства:

1) $\varphi_{ks}^C(a, c) = c_s$, $\varphi_{ks-1}^C(a, c) = s c_s a_{k-1}$, $\varphi_{ks-i}^C(a, c) = s c_s a_{k-i} + \tilde{\varphi}_{ks-i}^C(c_s, a_{k-1}, \dots, a_{k-i+1})$ для любого $i \in \{2, \dots, k - k'\}$;

2) $\varphi_{k(s-j)}^C(a, c) = c_{s-j} + \tilde{\varphi}_{k(s-j)}^C(c_s, \dots, c_{s-j+1}, a)$ для любого $j \in \{1, \dots, s - s'\}$.

Доказательство. Лемма 2 – следствие леммы 1 в силу формальной замены b на c .

Приступим к решению системы уравнений (1). Для заданной числовой характеристики центра $(k, k') \in P(n, n', m, m')$ система (1) эквивалентна полиномиальной системе уравнений

$$\varphi_{kl-i}^B(a, b) = f_{n-i} \quad \text{для любых } i \in \{0, 1, \dots, n - n'\}, \quad (13)$$

$$\varphi_{ks-i}^C(a, c) = g_{m-i} \quad \text{для любых } i \in \{0, 1, \dots, m - m'\} \quad (14)$$

относительно искомым векторов a, b, c . Напомним, что $l = n/k$. Применив первую серию равенств леммы 1 к системе (13), получим равенство $b_l = f_n$ и в предположении, что $f_n \neq 0$, равенства

$$a_k = 1, \quad a_{k-1} = \frac{k}{nf_n} f_{n-1},$$

$$a_{k-i} = \frac{kf_{n-i}}{nf_n} - \frac{1}{f_n} \tilde{\varphi}_{kl-i}^B(f_n, a_k, a_{k-1}, \dots, a_{k-i+1}) \quad \text{для всех } i \in \{2, \dots, k - k'\}. \quad (15)$$

В векторных обозначениях имеем

$$a = \alpha_F(f), \quad (16)$$

где компоненты вектора $\alpha_F(f)$ последовательно определяются рекурсией (15).

Применив вторую серию равенств леммы 1 к (13), получим

$$b_l = f_n, \quad b_{l-j} = f_{n-kj} - \tilde{\varphi}_{k(l-j)}^B(b_l, \dots, b_{l-j+1}, a) \quad \text{для каждого } j \in \{1, \dots, l - l'\}, \quad (17)$$

или в векторной форме

$$b = \beta_F(f), \quad (18)$$

где компоненты вектора $\beta_F(f)$ последовательно определяются рекурсией (17).

Подставив векторы (16), (17) в ещё неиспользованные уравнения системы (13), получим условия её разрешимости:

$$\varphi_{kl-i}^B(\alpha_F(f), \beta_F(f)) = f_{n-i}, \quad (19)$$

где $i \in \{k - k' + 1, \dots, n - n'\} \setminus \{k, 2k, \dots, k l'\}$.

Точно также с помощью леммы 2 получим условия разрешимости системы (14):

$$\varphi_{ks-i}^C(\alpha_G(g), \beta_G(g)) = g_{m-i} \quad \text{для любого } i \in \{k - k' + 1, \dots, m - m'\} \setminus \{k, 2k, \dots, ks'\}, \quad (20)$$

где вектор

$$a = \alpha_G(g) \quad (21)$$

задаётся рекурсией

$$a_k = 1, \quad a_{k-1} = \frac{k}{mg_m} g_{m-1},$$

$$a_{k-i} = \frac{k}{mg_m} g_{m-i} - \frac{1}{g_m} \tilde{\varphi}_{kl-i}^C(g_m, a_k, a_{k-1}, \dots, a_{k-i+1}) \quad \text{для любых } i \in \{2, \dots, k - k'\},$$

а вектор

$$c = \beta_G(g) \quad (22)$$

– рекурсией

$$c_s = g_m, \quad c_{s-j} = g_{m-kj} - \tilde{\varphi}_{k(s-j)}^C(c_s, \dots, c_{s-j+1}, a) \quad \text{для всех } j \in \{1, \dots, s - s'\}.$$

Осталось заметить, что для разрешимости совместной системы уравнений (13), (14) условия (19), (20) следует дополнить условием

$$\alpha_F(f) = \alpha_G(g) \quad (23)$$

совместимости уравнений (13), (14).

Отдельно рассмотрим случай $f_n = 0$. Согласно определению степеней полинома F , из равенства $f_n = 0$ следует равенство $F = 0$. Поскольку множество решений уравнения $0 = B(A)$ имеет вид $B = 0$, $A(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots$, где a_{k-1}, a_{k-2}, \dots – произвольные числа, то условия (22), (23) выполняются при $f_n = 0$ автоматически.

Таким образом, доказана

Теорема 2. 1. Для заданной пары $(k, k') \in P(n, n', m, m')$ система (13), (14) разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия (19), (20), (23).

2. Пусть $a_k = 1$. Если решение системы (13), (14) существует, то оно единственное и задаётся формулами (18), (21), (22).

4. Полуалгебраическое множество центров. Из теоремы 2 вытекает алгебраический критерий центра.

Теорема 3. Для наличия центра в монодромной особой точке $(0, 0)$ системы Льенара (2)–(4) необходимо и достаточно существование пары $(k, k') \in P(n, n', m, m')$, для которой выполняются условия (19), (20), (23).

Отметим, что в случае равенства $F = 0$ система уравнений (1) имеет решение

$$A = \frac{1}{g_m}G, \quad B = 0, \quad C(x) = g_mx.$$

Следовательно, необходимые и достаточные условия центра сводятся к требованиям $m' \in 2\mathbb{Z}^+$, $g_{m'} > 0$.

Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{R}^N = \{(f, g)\}$ ($N = n - n' + m - m' + 2$) коэффициентов полиномов F, G . Напомним, что полуалгебраическое множество в векторном пространстве определяется как конечное объединение подмножеств, каждое из которых задаётся конечной системой полиномиальных уравнений и неравенств.

Обозначим через $Q_{(k, k')}$ множество векторов $\{(f, g)\}$, удовлетворяющих для пары $(k, k') \in P(n, n', m, m')$ условиям (19), (20), (23) и условиям (5) монодромности особой точки $(0, 0)$. Поскольку $f_n \neq 0$, $g_m \neq 0$, то система уравнений (19), (20), (23) приводится к полиномиальной системе уравнений. Следовательно, $Q_{(k, k')}$ – полуалгебраическое множество в пространстве \mathbb{R}^N . Из теорем 2, 3 вытекает

Следствие 2. Полуалгебраическое множество $Q(n, n', m, m') \subset \mathbb{R}^N$ коэффициентов полиномов F, G , для которых системы Льенара (2)–(4) имеют центр в монодромной особой точке $(0, 0)$, задаётся формулой

$$Q(n, n', m, m') = \bigcup_{(k, k') \in P(n, n', m, m')} Q_{(k, k')}.$$

Для иллюстрации теоремы 3 и следствия 2 приведём описание множества $Q(8, 2, 8, 2)$. Отметим вначале, что задача явного описания множества центров в пространстве коэффициентов для малых степеней полиномов $\tilde{f}(x) = dF(x)/dx$ и $\tilde{g}(x) = dG(x)/dx$ рассматривалась в работах [13, 14]. В работе [13] предлагается алгоритм вычисления множества центров, использующий программу вычисления базиса Грёбнера для полиномиальных идеалов. Явные условия центра получены для случая $n, m \leq 6$, $m' = 2$. В [14] применялся комплексный подход, основанный на вычислении фокусных величин Пуанкаре–Ляпунова, явном описании общих интегралов для некоторых классов уравнений Льенара и вычислении результатов, согласно следствию утверждения (iv) теоремы 1. Явные условия центра получены в статье [14] для случая $n, m \leq 7$, $m' = 2$.

Пример. Пусть $n = m = 8$, $n' = m' = 2$, тогда $N = 14$, $P(8, 2, 8, 2) = \{(8, 2), (4, 2), (2, 2)\}$. Рассмотрим случай, когда $(k, k') = (8, 2)$. Имеем

$$A(x) = x^8 + a_7x^7 + \dots + a_2x^2, \quad B(x) = b_1x, \quad C(x) = c_1x,$$

$$B(A) = b_1(x^8 + a_7x^7 + \dots + a_2x^2) = f_8x^8 + \dots + f_2x^2.$$

Следовательно,

$$b_1 = f_8, \quad a_7 = \frac{f_7}{f_8}, \quad \dots, \quad a_2 = \frac{f_2}{f_8}.$$

Точно также из равенства $C(A) = G$ получим

$$c_1 = g_8, \quad a_7 = \frac{g_7}{g_8}, \quad \dots, \quad a_2 = \frac{g_2}{g_8}.$$

Таким образом, на основании равенства (23) заключаем, что множество $Q_{(8,2)}$ имеет вид

$$Q_{(8,2)} = \{(f_8, \dots, f_2, g_8, \dots, g_2) : g_8 f_7 - f_8 g_7 = 0, \quad g_8 f_6 = f_8 g_6 = 0, \quad \dots \\ \dots, \quad g_8 f_2 - f_8 g_2 = 0, \quad g_2 > 0, \quad g_8 \neq 0, \quad f_2 \neq 0, \quad f_8 \neq 0\}.$$

Далее, если $(k, k') = (4, 2)$, то

$$A(x) = x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2, \quad B(x) = b_2 x^2 + b_1 x, \quad C(x) = c_2 x^2 + c_1 x,$$

а значит,

$$B(A) = b_2 x^8 + 2b_2 a_3 x^7 + (2b_2 a_2 + b_2 a_3^2) x^6 + 2b_2 a_3 a_2 x^5 + (b_2 a_2^2 + b_1) x^4 + b_1 a_3 x^3 + b_1 a_2 x^2.$$

Полином $C(A)$ имеет тот же вид, что и полином $B(A)$ с заменой компонент вектора b на компоненты вектора c . Таким образом, применив условия (19), (20), (23), получим описание множества

$$Q_{(4,2)} = \{(f_8, \dots, f_2, g_8, \dots, g_2) : 2f_8 a_{f_3} a_{f_2} = f_5, \quad f_8 a_{f_2}^2 + b_1 = f_4, \quad b_1 a_{f_3} = f_3, \quad b_1 a_{f_2} = f_2, \\ 2g_8 a_{g_3} a_{g_2} = g_5, \quad g_8 a_{g_2}^2 + c_1 = g_4, \quad c_1 a_{g_3} = g_3, \quad g_1 a_{g_2} = g_2, \quad a_{f_3} = a_{g_3}, \quad a_{f_2} = a_{g_2}, \quad g_2 > 0, \quad g_8 \neq 0, \\ f_2 \neq 0, \quad f_8 \neq 0\},$$

где

$$a_{f_3} = \frac{1}{2f_8} f_7, \quad a_{f_2} = \frac{1}{2f_8} \left(f_6 - \frac{1}{4f_8} f_7^2 \right), \quad b_1 = f_4 - f_8 a_{f_2}^2, \quad a_{g_3} = \frac{1}{2g_8} g_7, \\ a_{g_2} = \frac{1}{2g_8} \left(g_6 - \frac{1}{4g_8} g_7^2 \right), \quad c_1 = g_4 - g_8 a_{g_2}^2.$$

Наконец, для случая $(k, k') = (2, 2)$ имеем $A(x) = x^2$. Отсюда следует, что F, G – чётные функции. Следовательно,

$$Q_{(2,2)} = \{(f_8, \dots, f_2, g_8, \dots, g_2) : f_7 = f_5 = f_3 = g_7 = g_5 = g_3 = 0, \quad g_2 > 0, \quad g_8 \neq 0, \quad f_2 \neq 0, \quad f_8 \neq 0\}.$$

Таким образом, особая точка $(0, 0)$ системы Льенара (2)–(4) с параметрами $n = m = 8, n' = m' = 2$ является центром тогда и только тогда, когда вектор $(f_8, \dots, f_2, g_8, \dots, g_2)$ принадлежит множеству $Q(8, 2, 8, 2) = Q_{(8,2)} \cup Q_{(4,2)} \cup Q_{(2,2)}$.

Приложение 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = y + X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y), \tag{24}$$

где X, Y – аналитические в окрестности точки $(0, 0)$ функции, разложения которых в ряды не содержат свободных и линейных членов. Согласно [22, с. 440; 2, с. 111] особая точка $(0, 0)$ системы (24) является монодромной тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$Y(x, \tilde{F}(x)) = a_{2r-1} x^{2r-1} + a_{2r} x^{2r} + \dots, \tag{25}$$

$$\left(\frac{\partial X(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Y(x, y)}{\partial y}\right)\Big|_{(x, \tilde{F}(x))} = A_{r-1}x^{r-1} + A_r x^r + \dots, \tag{26}$$

$$A_{r-1}^2 + 4ra_{2r-1} < 0, \tag{27}$$

где $\tilde{F}(x)$ ($\tilde{F}(0) = 0$) – аналитическая в окрестности точки $x = 0$ функция, определяемая уравнением

$$y = X(x, y). \tag{28}$$

Отметим, что в случае $A_{r-1} = 0$ из (27) следует неравенство $a_{2r-1} < 0$.

Применим условия (25)–(28) к системе Лъенара (2)–(4). Поскольку $X(x, y) = -F(x)$, то из (28) следует, что $\tilde{F}(x) = -F(x)$. Далее, на основании (26) получим

$$\left(\frac{\partial(-F + y)}{\partial x} + \frac{\partial(-g(x))}{\partial y}\right) = -\frac{\partial F}{\partial x} = -r f_r x^{r-1} + O(x^r),$$

т.е. $F = f_r x^r + O(x^{r+1})$. Здесь символ Ландау $O(x)$ означает, что в некоторой окрестности точки $x = 0$ выполняется неравенство $|O(x)| \leq K|x|$ с константой K , не зависящей от x .

Из (25) следует, что $Y(x, F(x)) = -2r g_r x^{2r-1} + O(x^{2r})$, т.е.

$$G(x) = g_{m'} x^{m'} + \dots + g_m x^m,$$

где $m' = 2r$. Согласно (27) имеем $r^2 f_r^2 - 8r^2 g_{2r} < 0$ или, в эквивалентной форме,

$$8g_{m'} > f_{m'/2}^2.$$

Таким образом, доказаны условия монодромности (5) в случае вырожденной особой точки $(0, 0)$. Справедливость условий (5) для невырожденной особой точки следует из линейного приближения $\dot{x}(t) = y - F'(0)x$, $\dot{y} = -2g_2x$ системы Лъенара (2).

Приложение 2. Докажем эквивалентность утверждений (i), (ii). Поскольку

$$G(x) = x^{m'}(g_{m'} + O(x)),$$

то

$$u(x) := (m'G(x))^{1/m'} = x((m'g_{m'})^{1/m'} + O(x)) \tag{29}$$

– аналитическая в окрестности точки $x = 0$ функция, для которой существует обратная функция $x(u)$.

Обобщённая замена Конти (см. [10])

$$x = x(u), \quad y = y, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{u^{m'-1}}{g(u)}$$

приводит систему (2)–(4) к системе

$$\dot{u}(s) = y - F(x(u)), \quad \dot{y} = -u^{m'-1}, \tag{30}$$

имеющей тот же тип особой точки $u = 0, y = 0$, что и тип особой точки $x = 0, y = 0$ системы (2). В частности, условия монодромности для точки $u = 0, y = 0$ совпадают с условиями (5). Поэтому достаточно доказать, что равенство (6) является необходимым и достаточным условием центра для системы (30).

Координаты векторного поля системы (30) представимы в виде суммы

$$(y - F(x(u)), -u^{m'-1}) = (y - F_+(x(u)), -u^{m'-1}) + (-F_-(x(u)), 0) \tag{31}$$

координат векторных полей системы

$$\dot{u} = y - F_+(x(u)), \quad \dot{y} = -u^{m'-1} \quad (32)$$

и системы

$$\dot{u} = -F_-(x(u)), \quad \dot{y} = 0,$$

где $F_+(x(u))$ и $F_-(x(u))$ – соответственно чётная и нечётная части функции $F(x(u))$.

Пусть $F_-(x(u)) \equiv 0$. Поле направлений касательных к интегральным кривым системы (32) симметрично относительно оси $u = 0$. Отсюда и в силу монодромности особой точки $(0, 0)$ системы (32) следует, что эта особая точка является центром. Тем самым доказана достаточность условия (6) для существования центра в точке $(0, 0)$ системы (2).

Пусть $F_-(x(u)) \not\equiv 0$. Тогда из равенства (31) следует, что в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ замкнутые интегральные кривые системы (32) пересекаются интегральными кривыми системы (30) в одном направлении – наружу или внутрь, в зависимости от знака первого отличного от нуля коэффициента в разложении функции $F_-(x(u))$ в ряд Тейлора (за исключением точек оси $u = 0$, в которых интегральные кривые систем (30), (32) касаются). Таким образом, если $F_-(x(u)) \not\equiv 0$, то особая точка $(0, 0)$ системы (30) является фокусом, что доказывает необходимость условия (6) существования центра в точке $(0, 0)$ для системы (30). Эквивалентность утверждений (i), (ii) доказана.

Согласно работе [10] эквивалентность утверждений (i), (iii) следует из равенств

$$F(x(u)) = \tilde{\Phi}(u^2(x)) = \tilde{\Phi}((m'G(x))^{2/m'}) = \Phi((G(x))^{2/m'}),$$

где аналитическая функция Φ определена в силу чётности функции $F(x(u))$ из равенства $\tilde{\Phi}(u) = F(u)$.

Докажем эквивалентность утверждений (ii), (iv). Пусть выполняется условие (6). Из (29) следует равенство

$$x(u) = (m'g_{m'})^{-1/m'}u + O(u^2),$$

откуда имеем $x(-u(x)) = -x + O(x^2)$. Кроме того, поскольку $u^{m'} = \text{sign}(x)m'G(x)$ и m' – чётное число, то

$$m'G(x(u)) = u^{m'} = m'G(x(-u)).$$

Таким образом, из (ii) следует (7), где $z(x) = x(-u(x))$, $z(0) = 0$, $z'(0) = -1$.

Докажем, что функция $z(x) = x(-u(x))$ является единственной вещественной аналитической функцией, удовлетворяющей системе (7) и условиям $z(0) = 0$, $z'(0) = -1$. Функцию $z(x)$ будем искать в виде $z(x) = x\beta(x)$. После подстановки $z(x)$ в (7) и сокращения на множитель $x^{m'}$ получим

$$g_{m'}(\beta(x))^{m'} + \dots + g_m x^{m-m'}(\beta(x))^m = g_{m'} + g_{m'+1}x + \dots + g_m x^{m-m'}.$$

Следовательно, $g_{m'}(\beta(0))^{m'} = g_{m'}$. Поскольку $g_{m'} \neq 0$, то $(\beta(0))^{m'} = 1$. Уравнение $(\beta(0))^{m'} = 1$ имеет два действительных корня $\beta_1 = 1$ и $\beta_2 = -1$ и $m' - 2$ комплексных. Следовательно, в силу теоремы о неявной функции уравнение $G(x\beta(x)) = G(x)$ имеет в окрестности нулевой точки ровно m' различных аналитических решений, из которых выбираем функцию, удовлетворяющую условию $\beta(0) = -1$. Тем самым доказано, что из (ii) следует (iv).

Обратно, пусть выполняется (iv). Тогда, поскольку $z(x) = x(-u(x))$ – единственное решение системы (7), удовлетворяющее условиям $z(0) = 0$, $z'(0) = -1$, полагая $z = x(-u(x))$ в $F(x) = F(z)$, получаем (6). Следовательно, (ii) вытекает из (iv). Эквивалентность утверждений (ii) и (iv) доказана.

Докажем эквивалентность утверждений (iv) и (v). Напомним, что согласно теореме Люрота [23, с. 31] если \mathcal{F} – подполе поля рациональных функций $\mathbb{R}(x)$, содержащее поле \mathbb{R} , то \mathcal{F} имеет вид $\mathbb{R}(h(x))$, где $h(x)$ – некоторая рациональная функция, называемая *элементом Люрота*. Если при этом подполе \mathcal{F} содержит полиномы, отличные от констант, то в качестве элемента Люрота можно выбрать полином (теорема Э. Нётер [23, с. 42]).

Для доказательства импликации (iv) \Rightarrow (v) рассмотрим, согласно [12], множество \mathcal{F} всех рациональных функций $r(x)$, удовлетворяющих условию $r(x) = r(z(x))$, где $z(x)$ – функция, определённая в теореме 1 (утверждение (iv)). Нетрудно заметить, что $(r(x))^{-1} \in \mathcal{F}$, $\mathbb{R} \in \mathcal{F}$, $G \in \mathcal{F}$, и, кроме того, сумма, произведение и частное двух элементов из \mathcal{F} принадлежат \mathcal{F} .

Таким образом, \mathcal{F} является подполем поля $\mathbb{R}(x)$ и содержит полином $G \neq \text{const}$. Отсюда на основании теорем Люрота, Э. Нётер и уравнений (7) заключаем, что существуют полином A и рациональные функции B , C , для которых справедливы равенства вида (1). Нетрудно заметить, что B , C также являются полиномами. Действительно, пусть, например, $C = q_1/q_2$, где q_1 , q_2 – полиномы. Обозначим через s_1 , s_2 верхние степени полиномов q_1 , q_2 соответственно. Если $s_1 \leq s_2$, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} C(A(x)) = \text{const} \neq \infty,$$

но $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \infty$, т.е. $G \neq C(A)$. Пусть теперь $s_1 > s_2$. Тогда

$$G(x) = \frac{q_1(A(x))}{q_2(A(x))} = p(A(x)) + \frac{p_1(A(x))}{q_2(A(x))},$$

где p – полином, а верхняя степень полинома p_1 строго меньше s_2 . Отсюда следует, что $p_1 = 0$ и можно положить $C = p$.

Далее, поскольку полином A генерирует поле \mathcal{F} , то $A \in \mathcal{F}$, а значит,

$$A(x) = A(z(x)). \quad (33)$$

Из равенства (33) вытекает, что нижняя степень k' полинома A – чётное число. Действительно, положив $z(x) = x\beta(x)$ ($\beta(0) = -1$), приходим к уравнению $(\beta(0))^{k'} = 1$, которое имеет корень $\beta(0) = -1$ только тогда, когда k' – чётное. Импликация (iv) \Rightarrow (v) доказана.

Обратно, пусть выполняется утверждение (v). Поскольку нижняя степень полинома A – чётное число, то уравнение (33) имеет решение $z(x)$, удовлетворяющее условиям $z(0) = 0$, $z'(0) = -1$. Подставив в (1) вместо $A(x)$ функцию $A(z(x))$, получим утверждение (iv). Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Немьцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л., 1947.
2. *Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П.* Нелинейные колебания в системах второго порядка. Минск, 1982.
3. *Медведева Н.Б.* Об аналитической разрешимости проблемы различения центра и фокуса // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2006. Т. 254. С. 11–100.
4. *Romanovski V.G., Shafer D.S.* The Center and Cyclicity Problems: a Computational Algebra Approach. Basel, 2010.
5. *Yirong Lin, Jibin Li, Wentao Huang.* Planar Dynamical System. Selected Classical Problems. Berlin; Boston, 2014.
6. *Кужлес И.С.* Некоторые признаки отличия фокуса от центра // Тр. Узбекского ун-та им. А. Навои. 1951. Вып. 47. С. 29–98.
7. *Черкас Л.А.* Об условиях центра для некоторых уравнений вида $yy' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$. // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 5. С. 1435–1439.
8. *Черкас Л.А.* Степень негрубости фокуса в уравнении Лъенара // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23. № 8. С. 681–683.
9. *Садовский А.П.* Решение проблем центра и фокуса для системы Лъенара с полиномиальными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 11. С. 2102–2104.
10. *Gasull A., Torregrosa J.* Center problem for several differential equations via Cherkas' method // J. of Math. Anal. and Appl. 1998. V. 228 P. 322–343.
11. *Chritopher C.* An algebraic approach to the classification of centers in polynomial Lienard systems // J. of Math. Anal. and Appl. 1999. V. 229 P. 319–329.

12. *Садовский А.П.* Теорема Ляпунова и метод Черкаса // Тр. Пятой междунар. конф. “Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений”. Минск, 2010. Т. 2. С. 120–122.
13. *Yu Z.H., Zhang W.N.* Condition for polynomial Lienard centers // *Sci China Math.* 2016. V. 59. № 3. P. 411–424.
14. *Giné J.* Center conditions for polynomial Lienard systems // *Qualit. Theory of Dynam. Syst.* 2017. V. 16. № 1. P. 119–126.
15. *Амелькин В.В., Руденок А.Е.* Центры и изохронные центры систем Ляенара // *Дифференц. уравнения.* 2019. Т. 55. № 3. С. 294–303.
16. *Руденок А.Е.* Обобщённая симметрия системы Ляенара // *Дифференц. уравнения.* 2019. Т. 55. № 2. С. 181–198.
17. *Руденок А.Е.* Рациональные системы Ляенара с центром и изохронным центром // *Дифференц. уравнения.* 2020. Т. 56. № 1. С. 70–83.
18. *Briskin M., Pakovich F., Yomdin Y.* Algebraic geometry of the center focus problem for Abel differential equation // *Ergodic Theory and Dynam. Syst.* 2016. V. 36. № 3. P. 714–744.
19. *Gavrĭlov L.* On the center-focus problem for the equation $dy/dx + \sum_{i=1}^n a_i(x)y^i = 0$, $0 \leq x \leq 1$, where a_i are polynomials // *Ann. Henri Lebesque.* 2020. V. 3. P. 615–648.
20. *A'varez A., Bravo J.L., Christopher C., Mardešić P.* Infinitesimal center problem on zero cycles and the composition conjecture // *Func. Anal. and Its Appl.* 2021. V. 55. P. 257–271.
21. *Moussu R.* Symétrie et forme normale des centers et foyers dégénérés // *Ergodic Theory Dynam. Syst.* 1982. V. 2. P. 241–251.
22. *Ляпунов А.М.* Собр. соч. Т. 2. М.; Л., 1956. С. 7–263.
23. *Чеботарёв Н.Г.* Теория алгебраических функций. М.; Л., 1948.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию 17.01.2022 г.
После доработки 23.06.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.

══════ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ══════

УДК 517.926.4

КВАЗИБЕЗМОНОДРОМНЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ СТАНДАРТНОГО ВИДА НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

© 2022 г. А. А. Голубков

Для уравнения Штурма–Лиувилля стандартного вида на комплексной плоскости исследован вопрос существования потенциалов с квазибезмонодромными особыми точками, т.е. такими особыми точками, некоторая степень матрицы монодромии M которых не зависит от спектрального параметра и равна $\pm I$, где I – единичная матрица. Сформулированы условия на матрицу M и её след, необходимые и достаточные для того, чтобы особая точка потенциала была квазибезмонодромной. Приведены примеры потенциалов с такими особыми точками, включая точки ветвления.

DOI: 10.31857/S0374064122080039, EDN: CFCYXH

1. Введение. Безмонодромность и квазибезмонодромность. Пусть Ω_1 и Ω_2 – односвязные области в комплексной плоскости \mathbb{C} , $\Omega_1 \subset \Omega_2$, и их границы не имеют общих точек, т.е. существует “кольцеобразная” область $K = \Omega_2 \setminus \Omega_1$. Заметим, что область Ω_1 может состоять и из единственной точки. Рассмотрим уравнение Штурма–Лиувилля стандартного вида

$$y''(z) + (q(z) - \lambda^2)y(z) = 0, \quad z \in K, \quad (1)$$

равносильное системе уравнений первого порядка

$$y'(z) = y_1, \quad y_1'(z) = (\lambda^2 - q(z))y(z), \quad z \in K, \quad (2)$$

с потенциалом $q(z)$, который в области K всюду голоморфен и имеет порядок ветвления $N-1$ ($N \geq 1$) [1, гл. 8, § 6]. Обозначим через $Y_0(z, \lambda, z_0)$ фундаментальную матрицу пространства голоморфных решений системы (2) в окрестности точки $z_0 \in K$ при некотором значении спектрального параметра λ , а через $Y_1(z, \lambda, z_0)$ – аналитическое продолжение Y_0 вдоль некоторой замкнутой спрямляемой кривой $\gamma \subset K$ с началом и концом в точке z_0 , которая N раз обходит область Ω_1 в положительном направлении, т.е. кривая γ ориентирована против часовой стрелки, и все точки области Ω_1 лежат внутри γ (процедура аналитического продолжения вдоль кривой описана, например, в [1, гл. 8, § 5]). В силу связи между уравнениями в (1) и (2) элементы первой строки матриц Y_0 , Y_1 образуют фундаментальную систему голоморфных решений (ФСР) уравнения (1), а элементы второй строки – первые производные по переменной z элементов первой строки. Поскольку функция q имеет в области K порядок ветвления $N-1$, то матрицы Y_0 и Y_1 являются в окрестности точки z_0 фундаментальными для одной и той же системы уравнений (2). Поэтому для системы (2) и уравнения (1) существует постоянная невырожденная матрица монодромии M области Ω_1 такая, что

$$Y_1(z, \lambda, z_0) = Y_0(z, \lambda, z_0)M(\lambda, Y_0).$$

Пусть теперь $Y_n(z, \lambda, z_0)$ – аналитическое продолжение Y_0 вдоль некоторой замкнутой спрямляемой кривой $\gamma \subset K$ с началом и концом в точке z_0 , которая обходит область Ω_1 nN раз. При этом $n > 0$, если обход происходит в положительном направлении, и $n < 0$ – в отрицательном. Тогда нетрудно убедиться в том, что справедливо равенство

$$Y_n(z, \lambda, z_0) = Y_0(z, \lambda, z_0)M^n(\lambda, Y_0).$$

Отметим, что матрица монодромии области Ω_1 в силу аналитичности потенциала q в области K не зависит от конкретной формы кривой $\gamma \subset K$, но зависит от выбора фундаментальной матрицы Y_0 . Действительно, рассмотрим аналитическое продолжение фундаментальной матрицы $\tilde{Y}_0 := Y_0 T$, где T – произвольная постоянная невырожденная матрица. Тогда получим

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_1(z, \lambda, z_0) &= Y_1(z, \lambda, z_0) T = Y_0(z, \lambda, z_0) M(\lambda, Y_0) T = \\ &= \tilde{Y}_0(z, \lambda, z_0) T^{-1} M(\lambda, Y_0) T = \tilde{Y}_0(z, \lambda, z_0) M(\lambda, \tilde{Y}_0), \end{aligned}$$

где $M(\lambda, \tilde{Y}_0) = T^{-1} M(\lambda, Y_0) T$. К аналогичному результату приводит также сдвиг начальной и конечной точки z_0 замкнутой кривой γ , а для многозначного потенциала и изменение выбора его “начальной” ветви. Таким образом, все матрицы монодромии области Ω_1 подобны друг другу и, следовательно, имеют одинаковый след. Подобны, очевидно, и любые одинаковые степени всех матриц монодромии. Кроме того, в силу вида уравнения (1) вронскиан любой его ФСР будет сохраняться вдоль любой кривой, поэтому определители всех матриц монодромии уравнения (1) и системы (2) равны единице. Также существенно, что если хотя бы одна матрица монодромии (её n -я степень) при некотором значении параметра λ равна $\pm I$, где I – единичная матрица, то и все остальные матрицы монодромии (их n -е степени) равны $\pm I$ при этом же значении параметра λ .

Напомним, что если для системы (2) с *однозначным* потенциалом q , а значит и для уравнения (1), хотя бы одна матрица монодромии области Ω_1 равна единичной матрице при всех значениях параметра λ , то такое уравнение Штурма–Лиувилля (1) и соответствующий потенциал q называют безмонодромными в области K (см. [2–5]). При этом если в области K можно провести хотя бы одну кусочно-гладкую кривую, которая ограничивает выпуклую область, то в силу теоремы 1 работы [2] потенциал q может быть единственным образом аналитически продолжен в область Ω_1 и будет иметь в этой области только безмонодромные особые точки, т.е. будет безмонодромен во всей области Ω_2 .

В статьях [2–5] исследовались безмонодромные однозначные потенциалы. При этом остался не изученным следующий вопрос. Допустим, что область K не является безмонодромной. Возможна ли в этом случае ситуация, когда при некотором числе обходов этой области мы получим исходную ФСР или исходную ФСР, умноженную на минус единицу? Иными словами, существуют ли такие потенциалы, для которых некоторая ненулевая степень матрицы монодромии области Ω_1 тождественно равна плюс или минус единичной матрице I , хотя сама матрица монодромии отлична от $\pm I$? Этот вопрос возникает, в частности, при исследовании асимптотик решений уравнений Штурма–Лиувилля вдоль кривых на комплексной плоскости, а также краевых и обратных спектральных задач для этих уравнений, которые к настоящему времени изучены только при достаточно жёстких ограничениях на форму кривой и (или) на потенциал (см., например, работы [6–9] и библиографические списки в них).

Определение 1. Пусть Ω_1 и Ω_2 – односвязные области в \mathbb{C} , $\Omega_1 \subset \Omega_2$, и их границы не имеют общих точек. Потенциал q и соответствующее уравнение Штурма–Лиувилля (1) будем называть *квазибезмонодромным* в “кольцеобразной” области $K = \Omega_2 \setminus \Omega_1$ аналитичности потенциала q , если существует такое натуральное число $n \geq 1$, что $M^n(\lambda) \equiv \pm I$, где M – некоторая матрица монодромии области Ω_1 . Минимальное значение степени n , при котором это тождество выполнено, будем называть модулем *показателя безмонодромности* потенциала и уравнения. При этом сам показатель безмонодромности I_M будем считать положительным, если $M^n(\lambda) \equiv I$, и отрицательным, если $M^n(\lambda) \equiv -I$.

Заметим, что $M^n(\lambda) \equiv \pm I$ если и только если $M^{-n}(\lambda) \equiv \pm I$. Поэтому ограничение $n \geq 1$ в определении 1 не является существенным, а использовано исключительно для удобства. Существенно только ограничение $n \neq 0$, поскольку $M^0 \equiv I$ для любой матрицы M . Определение 1 также легко обобщается на случай, когда в области K существуют безмонодромные особые точки потенциала. При этом достаточно отметить, что замкнутая кривая $\gamma \subset K$, вдоль которой происходит аналитическое продолжение потенциала и которой соответствует некоторая матрица M монодромии области Ω_1 , не проходит через эти особые точки. Кроме того, в соответствии с приведённым определением для безмонодромного потенциала $I_M = 1$.

В п. 2 настоящей работы сформулированы три альтернативных условия на матрицу монодромии M и её след такие, что уравнение (1) является квазибезмонодромным в области K тогда и только тогда, когда выполнено одно из них. Для каждого из этих трёх условий найдено значение I_M и доказано, что не существует квазибезмонодромных потенциалов с положительным чётным показателем безмонодромности. В п. 3 приведены примеры потенциалов с квазибезмонодромными особыми точками, включая точки ветвления, со всеми остальными значениями I_M .

2. Необходимые и достаточные условия квазибезмонодромности потенциала в кольцеобразной области его аналитичности.

Лемма 1. Пусть $t = \text{Tr}(M)$ – след матрицы второго порядка M с единичным определителем, I – единичная матрица второго порядка. Тогда для любого целого n справедливо равенство

$$M^n = a_n M + b_n I, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

где $a_0 = 0, b_0 = 1$, а остальные коэффициенты a_n и b_n удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$a_n = t a_{n-1} + b_{n-1}, \quad b_n = -a_{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{4}$$

Доказательство. Справедливость представления (3) и значения коэффициентов a_n и b_n при $n \in \{0, 1\}$ следуют непосредственно из определения нулевой и первой степени матрицы, причём $b_0 = a_1 = 1, a_0 = b_1 = 0$, т.е. формулы (4) справедливы при $n = 1$. Учитывая, что $\det M = 1$, нетрудно также показать, что

$$M^2 = tM - I, \quad M^{-1} = -M + tI, \tag{5}$$

т.е. представление (3) справедливо также при значениях $n \in \{-1, 2\}$, причём $a_2 = b_{-1} = t, a_{-1} = b_2 = -1$, и значит, формулы (4) выполнены при $n \in \{0, 2\}$. Далее воспользуемся индукцией по $N \in \mathbb{N}$. Предположим, что представление (3) справедливо при $n \in \{-N + 1, \dots, N\}$ ($N \geq 2$), а формулы (4) – при $n \in \{-N + 2, \dots, N\}$ (выше мы доказали это для $N = 2$). Тогда из соотношений (3) при $n = -N + 1$ и $n = N$ и формул (5) получим

$$M^{N+1} = a_N M^2 + b_N M = (t a_N + b_N) M - a_N I,$$

$$M^{-N} = a_{-N+1} I + b_{-N+1} M^{-1} = -b_{-N+1} M + (t b_{-N+1} + a_{-N+1}) I,$$

т.е. представление (3) справедливо также и при $n = N + 1, n = -N$, причём $a_{N+1} = t a_N + b_N, b_{N+1} = -a_N, a_{-N} = -b_{-N+1}, b_{-N} = t b_{-N+1} + a_{-N+1} = -t a_{-N} + a_{-N+1}$, что доказывает формулы (4) при $n = -N + 1$ и $n = N + 1$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $\mu = 0, 5(t + \sqrt{t^2 - 4})$. Тогда в условиях леммы 1

$$a_n = (\pm 1)^{n+1} n \quad \text{при} \quad t = \pm 2, \tag{6}$$

$$a_n = \frac{\mu^n - \mu^{-n}}{\mu - \mu^{-1}} \quad \text{при} \quad t \neq \pm 2 \quad (\mu \neq \pm 1). \tag{7}$$

Доказательство. Поскольку в силу леммы 1 коэффициенты a_n и b_n зависят только от номера n и следа t , то достаточно провести доказательство леммы для диагональной матрицы M с элементами μ и $1/\mu = 0, 5(t - \sqrt{t^2 - 4})$ (напомним, что $\det(M) = 1, t = \text{Tr}(M)$). В этом случае M^n – диагональная матрица с элементами μ^n и μ^{-n} . Поэтому из соотношений (3) сразу имеем

$$\mu^n = a_n \mu + b_n, \quad \mu^{-n} = \frac{a_n}{\mu} + b_n. \tag{8}$$

Если $t = \pm 2$, т.е. $\mu = \pm 1$, то уравнения в (8) равносильны. Добавив к ним вторую формулу из (4), получим новое рекуррентное соотношение

$$\mu a_n = \mu^n + a_{n-1}. \tag{9}$$

Обозначим $c_n := \mu^{n+1}a_n$. Тогда, умножив (9) на μ^n с учётом $\mu^2 = 1$, получим $c_n = 1 + c_{n-1}$. Поскольку $c_0 = a_0 = 0$, то, воспользовавшись формулой для n -го члена арифметической прогрессии, получим (6). Пусть теперь $t \neq \pm 2$ (т.е. $\mu \neq \pm 1$). В этом случае формула (7) следует непосредственно из соотношений (8). Лемма доказана.

В силу леммы 2 при $t = \pm 2$ коэффициент a_n не равен нулю при любом целом $n \neq 0$. Из леммы 1 получим следующие два утверждения.

Следствие 1. Если $t = 2$ и $M \neq I$, то $M^n \neq \pm I$ при любом целом $n \neq 0$.

Следствие 2. Если $t = -2$ и $M \neq -I$, то $M^n \neq \pm I$ при любом целом $n \neq 0$.

Лемма 3. При $t \neq \pm 2$ и $n \neq 0$ коэффициент a_n в формуле (3) равен нулю тогда и только тогда, когда $t = 2 \cos(\pi k/n)$, где $|n| \geq 2$, а $k \in \{1, \dots, |n| - 1\}$. При этом $b_n = (-1)^k$.

Доказательство. При $t \neq \pm 2$ (т.е. $\mu \neq \pm 1$) из формулы (7) следует, что $a_n = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu = \exp(i\pi k/n)$, т.е. $\mu^n = (-1)^k$, где i – мнимая единица, а целое число $k \neq pn$, $p \in \mathbb{Z}$. С другой стороны, при таких значениях μ имеем $t \equiv \mu + (\mu)^{-1} = 2 \cos(\pi k/n)$ и $b_n = -a_{n-1} = (-1)^k$ в силу соотношений (4) и (7). Ограничения $|n| \neq 1$, $k \neq pn$ возникают из условия $t \neq \pm 2$. Приведённые в лемме ограничения на значения k , отличные от условия $k \neq pn$, $p \in \mathbb{Z}$, несущественны, так как в силу свойств косинуса они не меняют множество всех подходящих значений t . Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $t = 2 \cos(\pi k/n)$, где числа $n \geq 2$ и $k \in \{1, \dots, n-1\}$ взаимно простые. Тогда $a_j \neq 0$ ($j = \overline{1, n-1}$), $a_n = 0$.

Доказательство. Очевидно, что в условиях леммы $t \neq \pm 2$ и $a_n = 0$ в силу леммы 3. Если $n = 2$, то лемма полностью доказана, так как $a_1 = 1$. Предположим, что $n \geq 3$ и $a_j = 0$ при некотором $j \in \{2, \dots, n-1\}$. Тогда из леммы 3 получаем, что $t = 2 \cos(\pi s/j)$, где $s \in \{1, \dots, j-1\}$. В силу условия леммы это означает, что $\cos(\pi k/n) = \cos(\pi s/j)$. Откуда, пользуясь формулой разности косинусов, имеем $k/n + s/j = 2p$ или $k/n - s/j = 2p$, где $p \in \mathbb{Z}$. По условию $0 < k/n, s/j < 1$, поэтому возможен только второй случай при $p = 0$. Допустим, что $k/n = s/j$, т.е. $kj = ns$. Но n и k – взаимно простые, поэтому последнее равенство возможно, только если $j = rn$, где целое число $r \geq 1$, а по условию $j < n$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема. Пусть Ω_1 и Ω_2 – односвязные области в \mathbb{C} , $\Omega_1 \subset \Omega_2$, и их границы не имеют общих точек. Уравнение (1) и потенциал q являются квазибезмонодромными в “кольцеобразной” области $K = \Omega_2 \setminus \Omega_1$ аналитичности потенциала q тогда и только тогда, когда для уравнения (1) некоторая матрица монодромии M области Ω_1 или её след t удовлетворяют одному из следующих трёх альтернативных условий:

- 1) $M = I$;
- 2) $M = -I$;
- 3) $t = 2 \cos(\pi k/n)$, где числа $n \geq 2$ и $k \in \{1, \dots, n-1\}$ – взаимно простые.

В первых двух случаях показатель безмонодромности $I_M = \pm 1$ соответственно, а в последнем случае $I_M = (-1)^k n$.

Доказательство. При $n \geq 1$ в силу формулы (3) $M^n \in \{\pm I\}$ тогда и только тогда, когда либо $M \in \{\pm I\}$, либо $M \notin \{\pm I\}$, но $a_n = 0$. Поэтому необходимость и достаточность выполнения одного из трёх условий теоремы непосредственно вытекает из следствий 1, 2 и леммы 3. При этом условие взаимной простоты чисел k и n , очевидно, не является существенным, так как не меняет множество всех подходящих значений t . Значение I_M в первых двух случаях сразу следует из определения 1, а в третьем случае ($t \neq \pm 2$) – из определения 1, формулы (3) и леммы 4.

Следствие 3. Не существует потенциалов с положительным чётным показателем безмонодромности I_M .

Доказательство. В силу сформулированной выше теоремы показатель безмонодромности равен либо ± 1 , либо $(-1)^k n$, где k и n – взаимно простые числа, и, следовательно, не могут быть одновременно чётными. Следствие доказано.

Поскольку $\det(M) = 1$, то $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(M^{-1})$, и значит, в условиях теоремы можно использовать как матрицу монодромии M , так и обратную к ней, полученную при обходе области Ω_1 по часовой стрелке.

3. Примеры квазибезмонодромных потенциалов. Случай $M = I$ для однозначных потенциалов хорошо изучен в работах [2–5], а для многозначных потенциалов ранее не рассматривался. Случай 2 в теореме, скорее всего, не реализуем ни для каких *однозначных* потенциалов. По крайней мере, пользуясь известными асимптотическими представлениями решений уравнения (1) (см. [6; 10, формула (1.3)]), можно доказать, что это справедливо, если в области K существует хотя бы одна спрямляемая кривая, ограничивающая выпуклую область. Последнее утверждение, в частности, всегда имеет место в некоторой достаточно малой выколотой окрестности изолированной особой точки. Вместе с тем, как будет показано в данном пункте, существуют особые точки многозначного характера, для которых $M = -I$. Приведены примеры потенциалов с особыми точками, имеющими любое заданное значение показателя безмонодромности, не запрещенное следствием 3.

Рассмотрим потенциалы $q(z)$ вида

$$q(z) = -\frac{p(p-1)}{z^2}, \quad \text{где } p \geq \frac{1}{2}. \quad (10)$$

Ограничение на значения параметра p учитывает тот факт, что замена p на $1-p$ не меняет вид потенциала (10). Как известно (см., например, [11, ч. 3, гл. 2, пример 2.162(7)]), если $\lambda \neq 0$, то одну из ФСР уравнения (1) с потенциалом (10) образуют функции $y^{(1)} = \sqrt{z} J_{p-1/2}(i\lambda z)$ и $y^{(2)} = \sqrt{z} N_{p-1/2}(i\lambda z)$, где J_k и N_k – функции Бесселя первого и второго рода соответственно. Также хорошо известно [12, формула (21.8-6)], что

$$J_k(\exp\{2\pi i\}z) = \exp\{2\pi k i\}J_k(z), \quad N_k(\exp\{2\pi i\}z) = \exp\{-2\pi k i\}N_k(z) + 4i \cos^2(\pi k)J_k(z).$$

Следовательно, при $\lambda \neq 0$ и указанном выборе ФСР матрица монодромии особой точки $z = 0$ уравнения (1) с потенциалом (10) будет равна

$$M = \begin{pmatrix} \exp(2\pi p i) & -4i \sin^2(\pi p) \\ 0 & \exp(-2\pi p i) \end{pmatrix}.$$

Поэтому для этой особой точки $m \equiv \text{Tr}(M) = 2 \cos(2\pi p)$. Заметим также, что при $\lambda = 0$ в качестве ФСР уравнения (1) с потенциалом (10) можно взять, например, функции z^p , z^{1-p} при $p \neq 1/2$ и $z^{1/2}$, $z^{1/2} \ln z$ при $p = 1/2$. При этом вид матрицы монодромии будет другим, но формула для следа сохранится. Из этой формулы и теоремы следует, что возможны два случая квазибезмонодромных потенциалов вида (10):

- 1) $p \in \mathbb{N}$ – классический случай безмонодромного потенциала ($M = I$);
- 2) $p = (r + k/n)/2$, где $r \in \mathbb{N}$, а числа $n \geq 2$ и $k \in \{1, \dots, n-1\}$ – взаимно простые, – квазибезмонодромный потенциал с $I_M = (-1)^k n$, если r чётное, и $I_M = (-1)^{n-k} n$, если r нечётное.

При остальных значениях p потенциал (10) не является квазибезмонодромным. Иными словами, потенциалы (10) являются квазибезмонодромными при любом рациональном p , отличном от полуцелого числа. При этом они охватывают все возможные значения показателя безмонодромности, не запрещенные следствием 3, кроме случая $I_M = -1$.

Поскольку, как уже было отмечено, однозначные изолированные особые точки заведомо не могут иметь показатель $I_M = -1$, то рассмотрим потенциалы, имеющие в нуле точку ветвления порядка $N-1 > 0$, и сделаем в уравнении (1) следующие замены переменной и неизвестной функции:

$$w = z^{1/N}, \quad u(w) = y(z)w^{(1-N)/2}. \quad (11)$$

Тогда прямой подстановкой нетрудно убедиться, что $u(w)$ удовлетворяет уравнению Штурма–Лиувилля с комплексным весом, имеющим в точке $w = 0$ нуль кратности $2(N-1)$:

$$u''(w) + \left\{ \frac{1-N^2}{4w^2} + N^2 w^{2N-2} (q(w^N) - \lambda^2) \right\} u(w) = 0. \quad (12)$$

При этом важно, что при N -кратном обходе по замкнутой траектории особой точки $z = 0$ на комплексной плоскости переменной z особая точка $w = 0$ на комплексной плоскости w будет обходиться один раз также по замкнутой траектории, и значит, потенциал в уравнении (12) будет однозначной функцией от w . При этом для любых ФСР уравнений (1) и (12), связанных между собой соотношением (11), соответствующие матрицы монодромии M_z и M_w этих особых точек будут также связаны равенством

$$M_w = (-1)^{N-1} M_z. \tag{13}$$

Действительно, пусть функции $u^{(j)}(w)$ ($j = 1, 2$) образуют ФСР уравнения (12). Тогда соответствующая ФСР уравнения (1) в силу (11) будет иметь вид $y^{(j)}(z) = u^{(j)}(w)w^{(N-1)/2}$, где $w = z^{1/N}$. Поэтому, если $u^{(j)}(w \exp\{2\pi i\}) = M_{w,jk} u^{(k)}(w)$ ($j, k = 1, 2$) (здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование), то

$$\begin{aligned} y^{(j)}(z \exp\{2\pi Ni\}) &= (-1)^{N-1} u^{(j)}(w \exp\{2\pi i\}) w^{(N-1)/2} = \\ &= (-1)^{N-1} M_{w,jk} u^{(k)}(w) w^{(N-1)/2} = (-1)^{N-1} M_{w,jk} y^{(k)}(z). \end{aligned}$$

Из соотношения (13) следует

Утверждение 1. Пусть $z = 0$ является точкой ветвления потенциала $q(z)$ порядка $N-1$ ($N \geq 2$), а $w = 0$ – безмонодромная особая точка уравнения (12). Тогда $z = 0$ является квазибезмонодромной особой точкой уравнения (1), причём $I_M = (-1)^{N-1}$.

Неограниченное количество уравнений вида (12) с безмонодромной особой точкой $w = 0$ можно построить с помощью следующей леммы, являющейся частным случаем (при $\lambda = 0$) леммы 1 работы [13].

Лемма 5. Пусть функция $h(w)$ имеет вид

$$h(w) = -\frac{\nu(\nu - 1)}{w^2} + h_{-1}w^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} h_k w^k,$$

где $\nu \in \mathbb{N}$, $h_{-1} = h_1 = \dots = h_{2\nu-3} = 0$, и ряд сходится в круге $U_R = \{|z| < R\}$. Тогда все голоморфные решения уравнения $u''(w) + h(w)u(w) = 0$ являются однозначными функциями в кольце $K_R = \{0 < |w| < R\}$.

Заметим, что различие в знаке перед первым слагаемым формулы для потенциала в лемме 1 статьи [13] и в лемме 5 настоящей работы связано с соответствующими различиями в знаках перед потенциалами в уравнениях Штурма–Лиувилля.

Пусть потенциал $q(z)$ в уравнении (1) имеет вид

$$q(z) = \frac{1}{N^2 z^2} \left(-\frac{1 - N^2}{4} - \nu(\nu - 1) + \sum_{k=-1}^{\infty} h_k z^{(k+2)/N} \right),$$

где $\nu \in \mathbb{N}$, $h_{-1} = h_1 = \dots = h_{2\nu-3} = 0$, и ряд сходится в круге U_R . Тогда если существует хотя бы одно значение $h_k \neq 0$ с номером $k = Np + r - 2$, где $p \in \{0, \mathbb{N}\}$, r и N – взаимно простые, то в силу леммы 5 и утверждения 1 показатель безмонодромности уравнения (1) в кольце K_R будет равен $(-1)^{N-1}$. Таким образом, существует целое семейство многозначных потенциалов, особая точка которых имеет показатель безмонодромности $I_M = -1$.

Утверждение 1 может быть использовано для поиска безмонодромных в некоторой области уравнений Штурма–Лиувилля с переменным весом. Пусть уравнение (1) является квазибезмонодромным в некоторой “кольцеобразной” области $K_z = \Omega_2 \setminus \Omega_1$ комплексной плоскости z , причём модуль показателя безмонодромности равен $n \geq 1$, а голоморфный всюду в K потенциал $q(z)$ имеет конечный порядок ветвления $N - 1 \geq 0$ ($nN > 1$). Без ограничения общности можно считать, что точка $z = 0$ лежит в области Ω_1 . Тогда с помощью замены переменной и неизвестной функции по формулам, аналогичным (11):

$$w = z^{1/(nN)}, \quad u(w) = y(z)w^{(1-nN)/2}, \tag{14}$$

получим, что функция $u(w)$ удовлетворяет следующему уравнению Штурма–Лиувилля, аналогичному уравнению (12):

$$u''(w) + \left\{ \frac{1 - (nN)^2}{4w^2} + (nN)^2 w^{2nN-2} (q(w^{nN}) - \lambda^2) \right\} u(w) = 0, \quad w \in K_w. \quad (15)$$

Формулы (14) отображают любую замкнутую кривую, лежащую в области K_z и обходящую nN раз область Ω_1 , в замкнутую кривую, лежащую в некоторой кольцевой области $K_w = \Omega_{2w} \setminus \Omega_{1w}$ комплексной плоскости w и обходящую область Ω_{1w} один раз. Поэтому потенциал уравнения (15) будет однозначной функцией переменной w в области K_w . При этом для любых ФСР уравнений (1) и (15), связанных между собой соотношениями (14), соответствующие матрицы монодромии M_z и M_w областей Ω_1 и Ω_{1w} будут связаны соотношением, аналогичным формуле (13):

$$M_w = (-1)^{nN-1} M_z.$$

Поэтому справедливо, в частности, следующее утверждение.

Утверждение 2. Пусть $z = 0$ является точкой ветвления потенциала $q(z)$ порядка $N - 1$ ($N \geq 1$) и имеет порядок безмонодромности $I_{M_z} = (-1)^L n$, где $n \geq 1$. Тогда порядок безмонодромности точки $w = 0$ уравнения (15) равен $I_M = (-1)^{L+nN-1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркушевич А.М. Теория аналитических функций. Т. 2. М., 1968.
2. Ишкин Х.К. О критерии безмонодромности уравнения Штурма–Лиувилля // Мат. заметки. 2013. Т. 94. № 4. С. 552–568.
3. Duistermaat J.J., Grünbaum F.A. Differential equations in the spectral parameter // Comm. in Math. Phys. 1986. V. 103. № 2. P. 177–240.
4. Обломков А.А. Безмонодромные операторы Шрёдингера с квадратично растущим потенциалом // Теор. и мат. физика. 1999. Т. 121. № 3. С. 374–386.
5. Gibbons J., Veselov A.P. On the rational monodromy-free potentials with sextic growth // J. of Math. Phys. 2009. V. 50. № 1. P. 013513.
6. Langer R.E. The boundary problem of an ordinary linear differential system in the complex domain // Trans. Amer. Math. Soc. 1939. V. 46. P. 151–190.
7. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1968.
8. Ишкин Х.К., Давлетова Л.Г. Регуляризованный след оператора Штурма–Лиувилля на кривой с регулярной особенностью на хорде // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 10. С. 1291–1303.
9. Golubkov A.A. Inverse problem for the Sturm–Liouville equation with piecewise entire potential and piecewise constant weight on a curve // Сиб. электрон. мат. изв. 2021. Т. 18. № 2. С. 951–974.
10. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М., 1965.
11. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.
12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1981.
13. Ишкин Х.К. О критерии однозначности решений уравнения Штурма–Лиувилля // Мат. заметки. 2008. Т. 84. № 4. С. 552–566.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 18.05.2022 г.
После доработки 18.05.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.

УДК 517.956.35

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЧНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ И НЕЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА РОСТА

© 2022 г. А. Б. Алиев, Г. Х. Шафиева

Исследована смешанная задача для систем одномерных полулинейных гиперболических уравнений с переменным показателем роста нелинейности и нелинейными граничными условиями. Доказаны теоремы о локальной разрешимости и разрушении решений за конечный промежуток времени.

DOI: 10.31857/S0374064122080040, EDN: CFGWLJ

1. Постановка задачи и основные результаты. Настоящая работа является продолжением работы авторов [1], в которой исследована начально-краевая задача для систем полулинейных гиперболических уравнений с нелинейными граничными условиями и нелинейным источником, имеющим рост переменного порядка, приведены краткая история вопроса и обоснование актуальности темы исследования (см. также [2–7]).

В области $[0, l] \times [0, +\infty)$ рассмотрим начально-краевую задачу

$$u_{i_{tt}} - (a_i(x)u_{i_x})_x = f_i(x, u_1, u_2), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u_i(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$a_i(l)u_{i_x}(l, t) + |u_{i_t}(l, t)|^{r_i-1}u_{i_t}(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$u_i(x, 0) = u_{i0}(x), \quad u_{i_t}(x, 0) = u_{i1}(x), \quad 0 < x < l, \quad (4)$$

где $i = 1, 2$, $r_1 \geq 1$, $r_2 \geq 1$, $u_1 = u_1(x, t)$, $u_2 = u_2(x, t)$, $u_{10}(x)$, $u_{20}(x)$, $u_{11}(x)$, $u_{21}(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ – вещественнозначные функции,

$$a_i(x) \in C^1[0, l], \quad a_i(x) \geq a_{i0} > 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

$$f_i(x, u_1, u_2) = |u_1 + u_2|^{2p(x)}(u_1 + u_2) + |u_1|^{p(x)+(-1)^i}|u_2|^{p(x)-(-1)^i}u_i, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Предположим, что измеримая функция $p(\cdot)$ удовлетворяет условию логарифмической непрерывности Гёльдера, т.е. для любых $x, y \in [0, l]$ таких, что $|x - y| < \delta$, $0 < \delta < 1$, выполнено неравенство

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{\log|x - y|}, \quad (7)$$

где $C > 0$. Допустим также, что

$$2 \leq p_1 \leq p(x) \leq p_2 < +\infty, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (8)$$

где $p_1 := \operatorname{ess\,inf}_{x \in [0, l]} p(x)$, $p_2 := \operatorname{ess\,sup}_{x \in [0, l]} p(x)$.

Заметим, что необходимые известные факты пространства Лебега переменного порядка приведены в работах [1, 8–13].

Введём следующие обозначения:

$$H^m = H^m(0, l) = \{v : v, v^{(m)} \in L_2(0, l)\}, \quad {}_0H^1 = \{v : v \in H^1(0, l), \quad v(0) = 0\}.$$

Определим функционал энергии

$$E(t) = E_0(t) - R(u_1(\cdot, t), u_2(\cdot, t)), \tag{9}$$

где

$$E_0(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left[\int_0^l |u_{it}(x, t)|^2 dx + \int_0^l a_i(x) |u_{ix}(x, t)|^2 dx \right],$$

$$R(u_1(\cdot, t), u_2(\cdot, t)) = \int_0^l \frac{1}{2(p(x) + 1)} |u_1(x, t) + u_2(x, t)|^{2(p(x)+1)} dx +$$

$$+ \int_0^l \frac{1}{p(x) + 1} |u_1(x, t) \cdot u_2(x, t)|^{p(x)+1} dx.$$

Определение 1. Под *строгим решением* задачи (1)–(4) в области $(0, l) \times (0, T)$ будем понимать пару функций $(u_1(x, t), u_2(x, t))$ таких, что $u_i(\cdot) \in L_\infty(0, T; H^2 \cap_0 H^1)$, $u_{it}(\cdot) \in L_\infty(0, T; {}_0H^1)$, $u_{itt}(\cdot) \in L_\infty(0, T; L_2(0, l))$, $i = 1, 2$, удовлетворяющих системе (1) почти при всех $(x, t) \in (0, l) \times (0, T)$, а также граничным условиям (2), (3) и начальному условию (4).

Определение 2. Под *слабым решением* задачи (1)–(4) будем понимать пару функций $(u_1(x, t), u_2(x, t))$ таких, что

- а) $u_i(\cdot) \in C_w([0, T]; {}_0H^1)$, $u_{it}(\cdot) \in C_w([0, T]; L_2(0, l))$, $i = 1, 2$;
- б) след u_{it} в $\{l\} \times (0, T)$ принадлежит $L_{r_{i+1}}(0, T)$, т.е. $u_{it}(l, t) \in L_{r_{i+1}}(0, T)$, $i = 1, 2$;
- с) для всех $\eta_1(\cdot), \eta_2(\cdot) \in C_w([0, T]; {}_0H^1) \cap C_w^1([0, T]; L_2(0, l))$, $\eta_{it}(l, t) \in L_{r_{i+1}}(0, T)$, $\eta_i(x, T) = 0$, $i = 1, 2$, выполнены следующие равенства:

$$\int_0^T \int_0^l [-u_{it}(x, t)\eta_{it}(x, t) + u_{ix}(x, t)\eta_{ix}(x, t)] dx dt + \int_0^T |u_{it}(l, t)|^{r_i-1} u_{it}(l, t)\eta_i(l, t) dt -$$

$$- \int_0^l u_{i1}(x)\eta_i(x, 0) dt = \int_0^T \int_0^l f_i(x, u_1, u_2)\eta_i(x, t) dx dt;$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \langle u_i(\cdot, t) - u_{i0}(\cdot), \eta_i(\cdot) \rangle_{{}_0H^1} = 0.$$

Здесь через $C_w([0, T]; Y)$ обозначено пространство слабо непрерывных функций со значениями из банахова пространства Y .

Определим следующий класс функций:

$$C_{T'} = \{v : v \in C([0, T']; {}_0H^1), v'_i(\cdot) \in C^1([0, T']; L_2(0, l)), v_i(l, \cdot) \in L_{r_i}(0, T'), i = 1, 2\}.$$

Справедливы следующие теоремы о локальной разрешимости задачи (1)–(4).

Теорема 1. Пусть выполнены условия (5)–(8). Тогда для начальных данных $u_{i0} \in {}_0H^1$, $u_{i1} \in L_2(0, l)$, $i = 1, 2$, существует такое $T' \in (0, T]$, что задача (1)–(4) имеет локальное по времени слабое решение $(u_1(x, t), u_2(x, t))$ в области $(0, l) \times (0, T')$, причём $u_i(\cdot) \in C_{T'}$, $i = 1, 2$, и выполняется энергетическое равенство

$$E(t) + \sum_{i=1}^2 \int_0^t |u_{i\tau}(l, \tau)|^{r_i+1} d\tau = E(0), \quad 0 \leq t \leq T'. \tag{10}$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия (5)–(8). Предположим также, что $u_{i0} \in H^2 \cap_0 H^1$, $u_{i1} \in {}_0H^1$ и $a_i(l)u_{i0x}(l) + |u_{i1}(l)|^{r_i-1}u_{it}(l, t) = 0$, $i = 1, 2$.

Тогда существует такое $T' \in (0, T]$, что задача (1)–(4) имеет локальное по времени строгое решение $(u_1(x, t), u_2(x, t))$ в области $(0, l) \times (0, T')$ и выполняется энергетическое равенство (10).

Схему доказательств этих теорем приведём в п. 3.

Далее исследуем вопрос отсутствия глобальных решений задачи (1)–(4), т.е. разрушения локальных решений за конечное время в зависимости от отношений между r_i , $i = 1, 2$, и $p(x)$. Под термином *решения* будем подразумевать слабые решения рассматриваемой задачи.

В случае когда $\max\{r_1, r_2\} < p_1 + 1$, получен следующий результат о разрушении локальных решений за конечный промежуток времени.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Предположим, что

$$\max\{r_1, r_2\} < p_1 + 1, \quad E(0) < 0.$$

Тогда решение задачи (1)–(4) разрушается за конечное время.

Случай, когда коэффициенты $a_i(x)$ не зависят от x , исследован в статье [1]. Заметим, что доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2 из [1] с небольшим техническим уточнением.

Введём следующие обозначения:

$$\varphi_0 = \min_{-1 \leq x \leq 0} \varphi(x), \quad \text{где} \quad \varphi(x) = |1 + x|^{2(p_1+1)} + 2|x|^{p_1+1},$$

$$\psi_0 = \max\{a_1(l), a_2(l)\}.$$

Очевидно, что $\varphi_0 > 0$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема об отсутствии глобальных решений в случае $\min\{r_1, r_2\} \geq p_1 + 1$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (5)–(8). Предположим, что справедливы неравенства

$$a'_i(x) \geq 0, \quad p'(x) \leq 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad i = 1, 2, \tag{11}$$

$$\min\{r_1, r_2\} \geq p_1 + 1, \tag{12}$$

$$E(0) < -\frac{3}{2e} \int_0^l \frac{|xp'(x)|}{p^2(x)} dx, \tag{13}$$

$$l > \max_{0 \leq x \leq l} \frac{2(p(x) + 1) - xp'(x)}{p(x)(p(x) + 1)} \bigg/ \min \left\{ \varphi_0, \frac{2p_1 + 1}{2(p_1 + 1)\psi_0}, \frac{2p_1 + 1}{2(p_1 + 1)} \right\}. \tag{14}$$

Тогда решение задачи (1)–(4) разрушается за конечное время.

2. Разрушение решений за конечное время (доказательство теоремы 4). Через c_k , $k = 1, 2, \dots$, будем обозначать различные положительные константы.

Будем использовать следующие леммы, доказанные в [1].

Лемма 1. Пусть выполнены условия (8) и (9). Тогда существуют такие постоянные $0 < c_1 < c_2$, что при любых $u_1, u_2 \in {}_0H^1$ выполнено неравенство

$$c_1 \sum_{i=1}^2 \rho_{2(p(\cdot)+1)}(u_i) \leq F(u_1, u_2) \leq c_2 \sum_{i=1}^2 \rho_{2(p(\cdot)+1)}(u_i).$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия (8), (9) и $1/(p_1 + 1) < \varkappa < 1$, тогда существует такая постоянная $c_3 > 0$, что при всех $u_1, u_2 \in {}_0H^1$ выполнено неравенство

$$\left[\sum_{i=1}^2 \rho_{2(p(\cdot)+1)}(u_i) \right]^\varkappa \leq c_3 \left\{ \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_{ix}|^2 dx + \sum_{i=1}^2 \rho_{2(p(\cdot)+1)}(u_i) \right\}.$$

В частности, справедливо также неравенство

$$\left\{ \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_i|^{2(p_i+1)} dx \right\}^{\approx} \leq c_3 \left\{ \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_{ix}|^2 dx + \sum_{i=1}^2 \rho_{2(p_i+1)}(u_i) \right\}.$$

Доказательство теоремы 4. Отметим, что в процессе доказательства теоремы 4 все операции проводятся для гладких начальных данных. Для слабых решений аналогичные утверждения получаются путём предельного перехода.

Согласно (11) $p'(x) \leq 0$, поэтому $p_1 = \min_{0 \leq x \leq l} p(x) = p(l)$ и $p_2 = \max_{0 \leq x \leq l} p(x) = p(0)$.

Введём функционал $y(t) = -E(t) + \varepsilon k y_1(t) + \varepsilon y_2(t)$, где $\varepsilon > 0$, $k > 0$,

$$y_1(t) = \sum_{i=1}^2 \int_0^l u_i(x, t) u_{it}(x, t) dx, \quad y_2(t) = \sum_{i=1}^2 \int_0^l x u_{it}(x, t) u_{ix}(x, t) dx.$$

В силу неравенства (14) существует такое число k , что

$$\max_{0 \leq x \leq l} \frac{2(p(x) + 1) - xp'(x)}{p(x)(p(x) + 1)} < k < l \min \left\{ \varphi_0, \frac{2p_1 + 1}{2(p_1 + 1)\psi_0}, \frac{2p_1 + 1}{2(p_1 + 1)} \right\}. \tag{15}$$

Из (1)–(4) находим

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_{it}(x, t)|^2 dx - \sum_{i=1}^2 \int_0^l a_i(x) |u_{ix}(x, t)|^2 dx + \sum_{i=1}^2 a_i(l) u_{ix}(l, t) u_i(l, t) + \\ &+ \int_0^l |u_1(x, t) + u_2(x, t)|^{2(p(x)+1)} dx + 2 \int_0^l |u_1(x, t) u_2(x, t)|^{p(x)+1} dx \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} y_2'(t) &= \frac{l}{2} \sum_{i=1}^2 |u_{it}(l, t)|^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_{it}(x, t)|^2 dx + \\ &+ \frac{l}{2} \sum_{i=1}^2 a_i(l) |u_{ix}(l, t)|^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_0^l a_i(x) |u_{ix}(x, t)|^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_0^l x a_i'(x) |u_{ix}(x, t)|^2 dx - \\ &- \int_0^l \frac{p(x) + 1 - xp'(x)}{2(p(x) + 1)^2} |u_1(x, t) + u_2(x, t)|^{2(p(x)+1)} dx + \frac{l}{2(p_1 + 1)} |u_1(l, t) + u_2(l, t)|^{2(p_1+1)} - \\ &- \int_0^l \frac{xp'(x)}{p(x) + 1} |u_1(x, t) + u_2(x, t)|^{2(p(x)+1)} \ln |u_1(x, t) + u_2(x, t)| dx - \\ &- \int_0^l \frac{p(x) + 1 - xp'(x)}{(p(x) + 1)^2} |u_1(x, t) u_2(x, t)|^{p(x)+1} dx + \frac{l}{p_1 + 1} |u_1(l, t) u_2(l, t)|^{p_1+1} - \\ &- \int_0^l \frac{xp'(x)}{p(x) + 1} |u_1(x, t) u_2(x, t)|^{p(x)+1} \ln |u_1(x, t) u_2(x, t)| dx. \end{aligned}$$

С учётом этих соотношений, прибавив и отняв $\varepsilon(1 + 2k)E(t)$, получим

$$\begin{aligned}
 y'(t) = & \sum_{i=1}^2 |u_{it}(l, t)|^{r_i+1} - \varepsilon(1 + 2k)E(t) + 2\varepsilon k \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_{it}(x, t)|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^2 \int_0^l x a'_i(x) |u_{ix}(x, t)|^2 dx + \\
 & + \varepsilon \int_0^l \left\{ k \frac{p(x)}{p(x) + 1} - \frac{2(p(x) + 1) - xp'(x)}{2(p(x) + 1)^2} \right\} |u_1(x, t) + u_2(x, t)|^{2(p(x)+1)} dx - \\
 & - \varepsilon \int_0^l \left\{ 2k \frac{p(x)}{p(x) + 1} - \frac{2(p(x) + 1) - xp'(x)}{(p(x) + 1)^2} \right\} |u_1(x, t)u_2(x, t)|^{p(x)+1} dx - \\
 & - \varepsilon \int_0^l \frac{xp'(x)}{p(x) + 1} |u_1(x, t) + u_2(x, t)|^{2(p(x)+1)} \ln |u_1(x, t) + u_2(x, t)| dx - \\
 & - \varepsilon \int_0^l \frac{xp'(x)}{p(x) + 1} |u_1(x, t)u_2(x, t)|^{p(x)+1} \ln |u_1(x, t)u_2(x, t)| dx + \\
 & + \frac{l\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^2 |u_{it}(l, t)|^2 + \frac{l\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{1}{a_i(l)} |u_{it}(l, t)|^{2r_i} + \frac{l\varepsilon}{2(p_1 + 1)} |u_1(l, t) + u_2(l, t)|^{2(p_1+1)} + \\
 & + \frac{l\varepsilon}{p_1 + 1} |u_1(l, t)u_2(l, t)|^{p_1+1} + \varepsilon k \sum_{i=1}^2 |u_{it}(l, t)|^{r_i-1} u_{it}(l, t) u_i(l, t).
 \end{aligned}$$

Использував неравенство Юнга с показателями $\theta = 2(p_1 + 1)$, $\theta' = 2(p_1 + 1)/(2p_1 + 1)$, имеем

$$|u_{it}(l, t)|^{r_i} |u_i(l, t)| \leq \frac{2p_1 + 1}{2(p_1 + 1)} |u_{it}(l, t)|^{2(p_1+1)r_i/(2p_1+1)} + \frac{1}{2(p_1 + 1)} |u_i(l, t)|^{2(p_1+1)}, \quad i = 1, 2. \quad (16)$$

В силу неравенств (8), (12) запишем

$$r_i \frac{2(p_1 + 1)}{2p_1 + 1} \leq 2r_i$$

и

$$r_i \frac{2(p_1 + 1)}{2p_1 + 1} - 2 \geq (p_1 + 1) \frac{2(p_1 + 1)}{2p_1 + 1} - 2 = 2p_1^2 > 0, \quad i = 1, 2,$$

откуда следует

$$|u_{it}(l, t)|^{2(p_1+1)r_i/(2p_1+1)} \leq |u_{it}(l, t)|^2 + |u_{it}(l, t)|^{2r_i}, \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

Использував определение φ_0 , можно доказать, что

$$|u_1(l, t) + u_2(l, t)|^{2(p_1+1)} + 2|u_1(l, t) \cdot u_2(l, t)|^{p_1+1} \geq \varphi_0 \sum_{i=1}^2 |u_i(l, t)|^{2(p_1+1)}.$$

С учётом данного неравенства из (15)–(17) получим

$$y'(t) \geq \sum_{i=1}^2 |u_{it}(l, t)|^{r_i+1} - \varepsilon(1 + 2k)E(t) + 2\varepsilon k \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_{it}(x, t)|^2 dx +$$

$$\begin{aligned}
 & + \varepsilon \int_0^l \left\{ k \frac{p(x)}{p(x)+1} - \frac{2(p(x)+1) - xp'(x)}{2(p(x)+1)^2} \right\} |u_1(x,t) + u_2(x,t)|^{2(p(x)+1)} dx - \\
 & - \varepsilon \int_0^l \left\{ 2 \frac{p(x)}{p(x)+1} - \frac{2(p(x)+1) - xp'(x)}{(p(x)+1)^2} \right\} |u_1(x,t)u_2(x,t)|^{p(x)+1} dx - \\
 & - \varepsilon \int_0^l \frac{xp'(x)}{p(x)+1} |u_1(x,t) + u_2(x,t)|^{2(p(x)+1)} \ln |u_1(x,t) + u_2(x,t)| dx - \\
 & - \varepsilon \int_0^l \frac{xp'(x)}{p(x)+1} |u_1(x,t)u_2(x,t)|^{p(x)+1} \ln |u_1(x,t)u_2(x,t)| dx + \\
 & + \varepsilon \left(\frac{l}{2} - k \frac{2p_1+1}{2(p_1+1)} \right) \sum_{i=1}^2 |u_{i_t}(l,t)|^2 + \varepsilon \left(\frac{l}{2\psi_0} - k \frac{2p_1+1}{2(p_1+1)} \right) \sum_{i=1}^2 |u_{i_t}(l,t)|^{2r_i} + \\
 & + \frac{\varepsilon}{2(p_1+1)} (l\varphi_0 - k) \sum_{i=1}^2 |u_i(l,t)|^{2(p_1+1)}. \tag{18}
 \end{aligned}$$

Для $t > 0$, обозначив $\mathfrak{R}_{1t} = \{x : |u_1(x,t) + u_2(x,t)| \geq 1, 0 \leq x \leq l\}$ и $\mathfrak{R}_{2t} = \{x : |u_1(x,t) + u_2(x,t)| < 1, 0 \leq x \leq l\}$, запишем

$$I_t = -\varepsilon \int_0^l \frac{xp'(x)}{p(x)+1} |u_1(x,t) + u_2(x,t)|^{2(p(x)+1)} \ln |u_1(x,t) + u_2(x,t)| dx = I(\mathfrak{R}_{1t}) + I(\mathfrak{R}_{2t}),$$

где

$$I(\mathfrak{R}_{1t}) = -\varepsilon \int_{x \in \mathfrak{R}_{1t}} \frac{xp'(x)}{p(x)+1} |u_1(x,t) + u_2(x,t)|^{2(p(x)+1)} \ln |u_1(x,t) + u_2(x,t)| dx$$

и

$$I(\mathfrak{R}_{2t}) = -\varepsilon \int_{x \in \mathfrak{R}_{2t}} \frac{xp'(x)}{p(x)+1} |u_1(x,t) + u_2(x,t)|^{2(p(x)+1)} \ln |u_1(x,t) + u_2(x,t)| dx.$$

С учётом (11) имеем

$$I(\mathfrak{R}_{1t}) \geq 0, \tag{19}$$

а с другой стороны $|\alpha|^{2(p(x)+1)} \ln |\alpha| \geq -0.5(p(x)+1)^{-1}e^{-1}$, если $|\alpha| < 1$, поэтому

$$I(\mathfrak{R}_{2t}) \geq -\varepsilon M_1, \tag{20}$$

где

$$M_1 = \frac{1}{2e} \int_0^l \frac{|xp'(x)|}{(p(x)+1)^2} dx.$$

Из неравенств (19) и (20) следует, что

$$I_t \geq -\varepsilon M_1. \tag{21}$$

Аналогичным образом можно получить

$$J_t = -\varepsilon \int_0^l \frac{xp'(x)}{p(x)+1} |u_1(x,t)u_2(x,t)|^{p(x)+1} \ln |u_1(x,t)u_2(x,t)| dx \geq -\varepsilon M_2,$$

где

$$M_2 = \frac{1}{e} \int_0^l \frac{|xp'(x)|}{(p(x)+1)^2} dx.$$

Кроме того, из (13), (15) и (21) следует, что выполняются неравенства

$$2k \frac{p(x)}{p(x)+1} - \frac{2(p(x)+1) - xp'(x)}{(p(x)+1)^2} \geq 0, \tag{22}$$

$$-\varepsilon(1+2k)E(t) + I_t + J_t \geq -\varepsilon\{(1+2k)E(0) - M_1 - M_2\} \geq 0. \tag{23}$$

С другой стороны, из (15) имеем

$$\beta = \varepsilon \min \left\{ l\varphi_0 - k, \frac{l}{2} - k \frac{2p_1+1}{2(p_1+1)}, \frac{l}{2\psi_0} - k \frac{2p_1+1}{2(p_1+1)} \right\} > 0.$$

В силу (19)–(23) из (18) находим

$$y'(t) \geq \beta \left\{ \sum_{i=1}^2 |u_{i_t}(l,t)|^2 + \sum_{i=1}^2 |u_{i_t}(l,t)|^{2r_i} + \sum_{i=1}^2 |u_i(l,t)|^{2(p_1+1)} \right\}. \tag{24}$$

Зафиксируем k и выберем ε достаточно малым, чтобы

$$y(0) = -E(0) + \varepsilon k \sum_{i=1}^2 \int_0^l u_{i0}(x)u_{i1}(x) dx + \varepsilon \sum_{i=1}^2 \int_0^l xu_{0x}(x)u_{1x}(x) dx > 0. \tag{25}$$

Из (24) и (25) получим

$$y(t) \geq y(0) > 0.$$

Применив неравенство Гёльдера, имеем

$$y(t) \leq -E(t) + \frac{\varepsilon}{2}(k+1)l \left[\sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_{i_x}(x,t)|^2 dx + \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_{i_t}(x,t)|^2 dx \right].$$

Отсюда в силу (10) и (13) для достаточно малых $\varepsilon > 0$ получим

$$y(t) \leq c_4 R(u_1, u_2). \tag{26}$$

Из лемм 1 и 2 следует

$$[R(u_1, u_2)]^{1-\alpha} \leq c_5 \left[\sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_{i_x}(x,t)|^2 dx + R(u_1, u_2) \right], \tag{27}$$

где $0 < \alpha < p_1/(p_1+1)$. Тогда с учётом (10) и (26) из (27) получим следующее неравенство:

$$y^{1-\alpha}(t) \leq c_6 \int_0^l \frac{1}{p(x)+1} |u_1(x,t) + u_2(x,t)|^{2(p(x)+1)} dx + c_6 \int_0^l \frac{1}{p(x)+1} |u_1(x,t)u_2(x,t)|^{p(x)+1} dx.$$

Выбрав $\alpha = 0.5p_1/(p_1 + 1)$ и значение θ достаточно малым, определим функцию

$$z(t) = y^{1-\alpha}(t) + \theta \sum_{i=1}^2 \int_0^l u_i(x, t) u_{i_t}(x, t) dx,$$

где $z(0) > 0$. Продифференцировав $z(t)$ и используя (1)–(4), находим

$$\begin{aligned} z'(t) &= (1 - \alpha)y^{-\alpha}(t)y'(t) - 2\theta E(t) + 2\theta \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_{i_t}(x, t)|^2 dx + \\ &+ \theta \int_0^l \frac{p(x)}{p(x) + 1} |u_1(x, t) + u_2(x, t)|^{2(p(x)+1)} dx + \\ &+ 2\theta \int_0^l \frac{p(x)}{p(x) + 1} |u_1(x, t)u_2(x, t)|^{p(x)+1} dx - \theta \sum_{i=1}^2 |u_{i_t}(l, t)|^{r_i-1} u_{i_t}(l, t) u_i(l, t). \end{aligned}$$

Применив неравенство Юнга с показателями $\rho = 1/\alpha$, $\rho' = 1/(1 - \alpha)$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 |u_{i_t}(l, t)|^{r_i} |u_i(l, t)| &= \left[\frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^2 |u_{i_t}(l, t)|^{r_i} |u_i(l, t)| \right] \delta \leq \\ &\leq (1 - \alpha)\delta^{-1/(1-\alpha)} \left[\sum_{i=1}^2 |u_{i_t}(l, t)|^{r_i} |u_i(l, t)| \right]^{1/(1-\alpha)} + \alpha\delta^{1/\alpha}. \end{aligned}$$

Выбрав $\delta = K^{-1}y^{\alpha(1-\alpha)}(t)$, получим

$$\begin{aligned} z'(t) &\geq (1 - \alpha)y^{-\alpha}(t)y'(t) - 2\theta E(t) + 2\theta \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_{i_t}(x, t)|^2 dx + \\ &+ \theta \int_0^l \frac{p(x)}{p(x) + 1} |u_1(x, t) + u_2(x, t)|^{2(p(x)+1)} dx + 2\theta \int_0^l \frac{p(x)}{p(x) + 1} |u_1(x, t)u_2(x, t)|^{p(x)+1} dx - \\ &- \theta(1 - \alpha)K^{1/(1-\alpha)}y^{-\alpha}(t) \left[\sum_{i=1}^2 |u_{i_t}(l, t)|^{r_i} |u_i(l, t)| \right]^{1/(1-\alpha)} - \theta K^{-1/\alpha}y^{1-\alpha}(t). \end{aligned}$$

В силу (24) отсюда будем иметь

$$\begin{aligned} z'(t) &\geq \beta(1 - \alpha)y^{-\alpha}(t) \left\{ \sum_{i=1}^2 |u_{i_t}(l, t)|^2 + \sum_{i=1}^2 |u_{i_t}(l, t)|^{2r_i} + \sum_{i=1}^2 |u_i(l, t)|^{2(p_i+1)} \right\} - 2\theta E(t) + \\ &+ 2\theta \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_{i_t}(x, t)|^2 dx + \theta \int_0^l \frac{p(x)}{p(x) + 1} |u_1(x, t) + u_2(x, t)|^{2(p(x)+1)} dx + \\ &+ 2\theta \int_0^l \frac{p(x)}{p(x) + 1} |u_1(x, t)u_2(x, t)|^{p(x)+1} dx - \\ &- \theta(1 - \alpha)K^{1/(1-\alpha)}y^{-\alpha}(t) \left[\sum_{i=1}^2 |u_{i_t}(l, t)|^{r_i} |u_i(l, t)| \right]^{1/(1-\alpha)} - \theta K^{-1/\alpha}y^{1-\alpha}(t). \end{aligned} \tag{28}$$

Далее используем неравенство Юнга с показателями $\lambda = 2(1 - \alpha)$, $\lambda' = 2(1 - \alpha)/(1 - 2\alpha)$, в результате имеем

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^2 |u_{i_t}(l, t)|^{r_i} |u_i(l, t)| \right]^{1/(1-\alpha)} &\leq 2^{2/(1-\alpha)} \left[\sum_{i=1}^2 |u_{i_t}(l, t)|^{r_i/(1-\alpha)} |u_i(l, t)|^{1/(1-\alpha)} \right] \leq \\ &\leq 2^{2/(1-\alpha)} \left[\frac{1}{2(1-\alpha)} \sum_{i=1}^2 |u_{i_t}(l, t)|^{2r_i} + \frac{1-2\alpha}{2(1-\alpha)} \sum_{i=1}^2 |u_i(l, t)|^{2(p_i+1)} \right]. \end{aligned}$$

С учётом этих неравенств из (28) получим

$$\begin{aligned} z'(t) &\geq (1 - \alpha)y^{-\alpha}(t) \left\{ \beta \sum_{i=1}^2 |u_{i_t}(l, t)|^2 + \left(\beta - \theta \frac{2^{2/(1-\alpha)}}{2(1-\alpha)} K^{1/(1-\alpha)} \right) \sum_{i=1}^2 |u_{i_t}(l, t)|^{2r_i} + \right. \\ &+ \left(\beta - \theta 2^{2/(1-\alpha)} \frac{1-2\alpha}{2(1-\alpha)} K^{1/(1-\alpha)} \right) \sum_{i=1}^2 |u_i(l, t)|^{2(p_i+1)} \left. \right\} + 2\theta \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_{i_t}(x, t)|^2 dx + \\ &+ \theta \int_0^l \left\{ \frac{p(x)}{p(x)+1} - c_6 K^{-1/\alpha} \right\} |u_1(x, t) + u_2(x, t)|^{2(p(x)+1)} dx + \\ &+ 2\theta \int_0^l \left\{ \frac{p(x)}{p(x)+1} - c_6 K^{-1/\alpha} \right\} |u_1(x, t)u_2(x, t)|^{p(x)+1} dx. \end{aligned}$$

Далее выбираем достаточно большое $K > 0$ и достаточно малое $\theta > 0$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{p(x)}{p(x)+1} - c_6 K^{-1/\alpha} \geq \theta_0 > 0, \quad \beta - \theta \frac{2^{2/(1-\alpha)}}{2(1-\alpha)} K^{1/(1-\alpha)} \geq \theta_0 > 0.$$

С учётом этих неравенств и леммы 1 из (28) находим

$$\begin{aligned} z'(t) &\geq \theta_0 \left\{ \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_{i_t}(x, t)|^2 dx + \int_0^l |u_1(x, t) + u_2(x, t)|^{2(p(x)+1)} dx + \int_0^l |u_1(x, t)u_2(x, t)|^{p(x)+1} dx \right\} \geq \\ &\geq \theta_1 \left\{ \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_{i_t}(x, t)|^2 dx + \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_i(x, t)|^{2(p_i+1)} dx \right\}, \end{aligned} \tag{29}$$

где $\theta_1 = \theta_0 \min\{c_1, 1\}$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} z^{1/(1-\alpha)}(t) &\leq c_7 \left\{ y(t) + \theta^{1/(1-\alpha)} \left[\sum_{i=1}^2 \int_0^l u_{i_t}(x, t)u_i(x, t) dx \right]^{1/(1-\alpha)} \right\} \leq \\ &\leq c_8 \left\{ y(t) + \left[\sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_i(x, t)|^{2(p_i+1)} dx \right]^{1/(2(1-\alpha)(p_i+1))} \left[\sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_{i_t}(x, t)|^2 dx \right]^{1/(2(1-\alpha))} \right\}. \end{aligned}$$

Применив неравенство Гёльдера с показателями $\mu_1 = 2(1 - \alpha)/(1 - 2\alpha)$, $\mu_2 = 2(1 - \alpha)$, имеем

$$z^{1/(1-\alpha)}(t) \leq c_9 \left\{ y(t) + \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_{i_t}(x, t)|^2 dx + \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_i(x, t)|^{2(p_i+1)} dx \right\}.$$

Далее, с учётом неравенства (26), лемм 1 и 2 получим

$$z^{1/(1-\alpha)}(t) \leq c_{10} \left\{ \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_{i_t}(x, t)|^2 dx + \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_i(x, t)|^{2(p_i+1)} dx \right\}. \tag{30}$$

Из (29) и (30) имеем $z'(t) \geq c_{11}z^{1/(1-\alpha)}(t)$, следовательно,

$$z(t) \geq z_0 \left[z_0^{\alpha/(1-\alpha)} - \frac{c_{11}\alpha}{1-\alpha} t \right]^{(\alpha-1)/\alpha},$$

откуда $\lim_{t \rightarrow T'-0} z(t) = +\infty$, где $T' = \frac{1-\alpha}{c_{11}\alpha} z_0^{\alpha/(1-\alpha)}$.

3. Доказательство существования и единственности локальных решений. Пусть $K > 0$. Определим срезанную функцию

$$f_{iK}(x, u_1, u_2) = \begin{cases} f_i(x, u_1, u_2), & \|u_1\|_{0H^1} \leq K, \quad \|u_2\|_{0H^1} \leq K, \\ f_i\left(x, K \frac{u_1}{\|u_1\|_{0H^1}}, u_2\right), & \|u_1\|_{0H^1} > K, \quad \|u_2\|_{0H^1} \leq K, \\ f_i\left(x, u_1, K \frac{u_2}{\|u_2\|_{0H^1}}\right), & \|u_1\|_{0H^1} \leq K, \quad \|u_2\|_{0H^1} > K, \\ f_i\left(x, K \frac{u_1}{\|u_1\|_{0H^1}}, K \frac{u_2}{\|u_2\|_{0H^1}}\right), & \|u_1\|_{0H^1} > K, \quad \|u_2\|_{0H^1} > K, \end{cases}$$

и рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} u_{i_{tt}} - (a_i(x)u_{i_x})_x &= f_{iK}(x, u_1, u_2), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u_i(0, t) &= 0, \quad t > 0, \\ a_i(l)u_{i_x}(l, t) + \chi_i(u_{i_t}(l, t)) &= 0, \quad t > 0, \\ u_i(x, 0) &= u_{i0}(x), \quad u_{i_t}(x, 0) = u_{i1}(x), \quad 0 < x < l, \end{aligned}$$

где $\chi_i(\eta) = |\eta|^{r_i-1}\eta$, $i = 1, 2$ (см. работы [14–18]).

В пространстве $\mathcal{H} = [{}_0H^1 \times L_2(0, l)]^2$ введём скалярное произведение следующим образом:

$$\langle w^1, w^2 \rangle = \sum_{i=1}^2 \left[\int_0^l a_i(x)u_{i_x}^1(x)u_{i_x}^2(x) dx + \int_0^l v_i^1(x)v_i^2(x) dx \right].$$

В пространстве $L_2(0, l)$ определим линейный оператор ${}_0^i\Delta$:

$$\begin{aligned} D({}_0^i\Delta) &= \{f : f \in H^2(0, l), f(0) = 0, f'(l) = 0\}, \\ {}_0^i\Delta f(x) &= -(a_i(x)f_x)_x(x), \quad x \in (0, l), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Определим также линейный оператор

$$N_i : R \rightarrow H^2 : \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \rightarrow h_i = N_i\alpha,$$

где $(a_i(x)h_{i_x}(x))_x = 0$, $0 < x < l$, $h_i(0) = 0$, $h_{i_x}(l) = \alpha/a_i(l)$, т.е.

$$h_i(x) = \alpha \int_0^x \frac{ds}{a_i(s)}, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда получим, что

$$(N_i \alpha)_x = \alpha \frac{1}{a_i(x)}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad i = 1, 2.$$

Использував определение сопряжённого оператора, имеем

$$\langle N_i \alpha, u \rangle_{L_2(0,l)} = (\alpha, N_i^* u)_R = \alpha N_i^* u, \quad \text{где} \quad N_i^* u = \int_0^l u(x) \int_0^x \frac{ds}{a_i(s)} dx, \quad i = 1, 2.$$

Пусть $z \in D({}_0^i \Delta)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, тогда справедливы равенства

$$N_i^* {}_0^i \Delta z \cdot \alpha = ({}_0^i \Delta z, N_i \alpha)_{L_2(0,l)} = \left({}_0^i \Delta z, \alpha \int_0^x \frac{ds}{a_i(s)} \right)_{L_2(0,l)} = z(l) \cdot \alpha.$$

В пространстве \mathcal{H} определим оператор $A_K(\cdot)$ следующим образом:

$$D(A_K) = \{w : w = (u_1, v_1, u_2, v_2) \in \mathcal{H}, \quad u_i, v_i \in {}_0H^1, \quad u_i + N_i \chi_i(\gamma v_i) \in D({}_0^i \Delta), \quad i = 1, 2\},$$

$$A_K(w) = \{-v_1, {}_0^1 \Delta(u_1 + N_1 \chi_1(\gamma v_1)), -v_2, {}_0^2 \Delta(u_2 + N_2 \chi_2(\gamma v_2))\},$$

где γ – оператор следа из ${}_0H^1$ в точке $x = l$ (см. [19, гл. I, с. 32–34]).

Определим также нелинейный оператор $F_K(\cdot)$:

$$D(F_K) = \mathcal{H}, \quad F_K(w) = (0, -f_{1K}(x, u_1, u_2), 0, -f_{2K}(x, u_1, u_2)).$$

Лемма 3. *Нелинейный оператор $w \rightarrow F_K(w) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ удовлетворяет условию Липшица, т.е. для любых $w_1, w_2 \in \mathcal{H}$ выполнено неравенство*

$$\|F_K(w_2) - F_K(w_1)\|_{\mathcal{H}} \leq c_F(K) \|w_2 - w_1\|_{\mathcal{H}},$$

где $c_F(K) \geq 0$.

Доказательство леммы 3 проводится аналогично доказательствам работы [14].

Лемма 4. $A_K(\cdot)$ – максимально аккретивный оператор.

Доказательство. Пусть $w^i = (u_1^i, v_1^i, u_2^i, v_2^i) \in D(A_K)$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle A_K(w^2) - A_K(w^1), w^2 - w^1 \rangle_{\mathcal{H}} &= \sum_{i=1}^2 \int_0^l [\chi_i(v_i^2(l)) - \chi_i(v_i^1(l))] (v_i^2(l) - v_i^1(l))_x dx = \\ &= \sum_{i=1}^2 [\chi_i(v_i^2(l)) - \chi_i(v_i^1(l))] (v_i^2(l) - v_i^1(l)) \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $A_K(\cdot)$ является аккретивным оператором.

Теперь докажем, что $A_K(\cdot)$ – максимально аккретивный оператор. Рассмотрим уравнение

$$A_K(w) + \lambda w = h, \tag{31}$$

где $\lambda > 0$, $h = (h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22}) \in \mathcal{H}$ – заданный элемент, $w = (u_1, v_1, u_2, v_2) \in D(A_K)$. Очевидно, что (31) эквивалентно краевой задаче

$$\begin{aligned} -v_i + \lambda u_i &= h_{i1}, \\ {}^i_0\Delta(u_i + N_i \chi_i(\gamma v_i)) + \lambda v_i &= h_{i2}, \\ u_i(0) &= 0, \quad v_i(0) = 0, \\ u'_i(l) + \chi_i(v_i(l)) &= 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$u_i = \frac{1}{\lambda} v_i + \frac{1}{\lambda} h_{i1}, \quad {}^i_0\Delta(u_i + N_i \chi_i(\gamma v_i)) + \lambda^2 u_i = \lambda h_{i1} + h_{i2}, \quad i = 1, 2.$$

Легко заметить, что функции

$$z_i = u_i + N_i \chi_i(\gamma v_i), \quad i = 1, 2, \quad (32)$$

являются решением краевой задачи

$$z_i'' - \lambda^2 z_i = \eta_i(x), \quad (33)$$

$$z_i(0) = 0, \quad z'_i(l) = 0, \quad (34)$$

где

$$\eta_i(x) = -\lambda h_{i1}(x) - h_{i2}(x) - \lambda^2 N_i \alpha_i, \quad \alpha_i = \chi_i(\gamma v_i), \quad i = 1, 2. \quad (35)$$

Отметим, что

$$z_i(x) = \frac{1}{\lambda} \int_0^x \operatorname{sh}(\lambda(x-\tau)) \eta_i(\tau) d\tau - \frac{1}{\lambda} \frac{\operatorname{sh}(\lambda x)}{\operatorname{ch}(\lambda l)} \int_0^l \operatorname{ch}(\lambda(x-\tau)) \eta_i(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2,$$

являются решением задачи (33), (34). Отсюда получим

$$z_i(l) = \alpha_i \left\{ \int_0^l \frac{dx}{a_i(x)} - \frac{1}{\operatorname{ch}(\lambda l)} \int_0^l \frac{\operatorname{ch}(\lambda \tau)}{a_i(\tau)} d\tau \right\} + B_i(\lambda, l), \quad (36)$$

где

$$B_i(\lambda, l) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^l \operatorname{sh}(\lambda(l-\tau)) \eta_{1i}(\tau) d\tau + \frac{1}{\lambda} \operatorname{th}(\lambda l) \int_0^l \operatorname{ch}(\lambda(l-\tau)) \eta_{1i}(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2.$$

С другой стороны, из (32) следует, что

$$z_i(l) = u_i(l) + \alpha_i \int_0^l \frac{dx}{a_i(x)} = \frac{1}{\lambda} v_i(l) + \frac{1}{\lambda} h_{i1}(l) + \alpha_i \int_0^l \frac{dx}{a_i(x)}, \quad i = 1, 2. \quad (37)$$

Сравнив (36) и (37), найдём

$$\chi_i(v_i(l)) + \mathfrak{X}_i(\lambda) v_i(l) = C_i(\lambda, l),$$

где

$$\mathfrak{X}_i(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \operatorname{ch}(\lambda l) \left(\int_0^l \frac{\operatorname{ch}(\lambda \tau)}{a_i(\tau)} d\tau \right)^{-1} > 0, \quad C_i(\lambda, l) = \mathfrak{X}_i(\lambda) \left\{ B_i(\lambda, l) + \frac{1}{\lambda} h_{i1}(l) \right\}, \quad i = 1, 2.$$

Для отображения $\Phi(\xi) = (\chi_1(\xi_1) + \mathfrak{X}_1(\lambda)\xi_1, \chi_2(\xi_2) + \mathfrak{X}_2(\lambda)\xi_2)$, где $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, имеем оценку

$$\begin{aligned} \langle \Phi(\xi^2) - \Phi(\xi^1), \xi^2 - \xi^1 \rangle_{R^2} &= \sum_{i=1}^2 [\chi_i(\xi_i^2) - \chi_i(\xi_i^1)](\xi_i^2 - \xi_i^1) + \sum_{i=1}^2 [\mathfrak{X}_i(\lambda)\xi_i^2 - \mathfrak{X}_i(\lambda)\xi_i^1](\xi_i^2 - \xi_i^1) \geq \\ &\geq v_0 \sum_{i=1}^2 |\xi_i^2 - \xi_i^1|^2 = v_0 \|\xi^2 - \xi^1\|_{R^2}^2, \end{aligned}$$

где $\xi^1 = (\xi_1^1, \xi_2^1)$, $\xi^2 = (\xi_1^2, \xi_2^2)$, $v_0 = \min\{\mathfrak{X}_1(\lambda), \mathfrak{X}_2(\lambda)\}$.

Таким образом, $\Phi(\cdot)$ – максимально аккретивный оператор (см. [20, гл. IV, с. 155–158; 21, гл. II, с. 33–48]). Отсюда следует, что при $\lambda > 0$ уравнение

$$F(\xi) = M(\lambda, l) \tag{38}$$

имеет решение, где $M(\lambda, l) = (C_1(\lambda, l), C_2(\lambda, l))$. Пусть $\xi^0 = (\xi_1^0, \xi_2^0) \in \mathbb{R}^2$ – решение уравнения (38). Тогда, положив $v_i(l) = \xi_i^0$, $u_i(l) = \xi_i^0 + h_{i1}(l)$, $i = 1, 2$, получим, что $\alpha_i = \chi_i(\xi_i^0)$, $i = 1, 2$. С учётом этого в равенствах (35) находим $z_i(x)$, а из (32) имеем $u_i(x) = z_i(x) - N_i \alpha_i$, $i = 1, 2$.

Таким образом, $A_K(\cdot)$ – максимально аккретивный оператор. Лемма доказана.

Задачу (1)–(4) можем записать как задачу Коши в пространстве \mathcal{H} :

$$w' + A_K(w) + F_K(w) = 0, \quad w(0) = w_0, \tag{39}$$

где $w_0 = (u_{10}(x), u_{11}(x), u_{20}(x), u_{21}(x))$, $0 \leq x \leq l$.

В силу теоремы 4.1 из [20] при любом $w_0 \in D(A_K)$ и $K > 0$ задача (39) имеет единственное решение $w(\cdot) \in C^1([0, T]; \mathcal{H}) \cap C([0, T]; D(A_K))$, а в силу теоремы 4.1А из [20] задача (39) имеет слабое решение $w(\cdot) \in C([0, T]; \mathcal{H})$, если $w_0 \in \mathcal{H}$.

Так как $A_K(\cdot)$ – максимально аккретивный оператор, то из (39) получим, что $\|w(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|w_0\|_{\mathcal{H}}^2 e^{2c_F(K)t}$. Отсюда следует, что $\|w(t)\|_{\mathcal{H}}^2 < K^2$, $0 \leq t \leq T'$, если $\|w_0\|_{\mathcal{H}} < K$, где

$$T' = T(\|w_0\|_{\mathcal{H}}) = \frac{1}{c_F(K)} \operatorname{Ln} \frac{K}{\|w_0\|_{\mathcal{H}}}.$$

Следовательно, $f_{iK}(x, u_1(x, t), u_2(x, t)) = f_i(x, u_1(x, t), u_2(x, t))$ при $0 \leq t \leq T'$.

Поэтому функция $u(x, t)$ является решением задачи (1)–(4) в области $(0, l) \times (0, T')$.

Для строгих решений тождество (10) доказывается прямым дифференцированием, а для слабых решений – путём аппроксимации и предельного перехода. Теоремы 1 и 2 доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алиев А.Б., Шафиева Г.Х. Разрушение решений смешанной задачи для систем волновых уравнений с граничной диссипацией и внутренним нелинейным фокусирующим источником переменного порядка роста // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 3. С. 313–325.
2. Rauch J. Hyperbolic Partial Differential Equations and Geometric Optics. Graduate Studies in Mathematics. V. 133. Providence, 2012.
3. Жиков В.В. Об эффекте Лаврентьева // Докл. РАН. 1995. Т. 345. № 1. С. 10–14.
4. Жиков В.В. О весовых соболевских пространствах // Мат. сб. 1998. Т. 189. № 8. С. 27–58.
5. Корпусов М.О. О разрушении решения одной нелинейной системы уравнений с положительной энергией // Журн. теор. и мат. физики. 2012. Т. 171. № 3. С. 355–369.

6. *Hongyiping Fenga, Shengjia Li, Xia Zhi*. Blow-up solutions for a nonlinear wave equation with boundary damping and interior source // *Nonlin. Anal.* 2012. V. 75. P. 2273–2280.
7. *Wenjun Liu, Yun Sun, Gang Li*. Blow-up of solutions for a nonlinear wave equation with nonnegative initial energy // *Electronic J. of Differ. Equat.* 2013. V. 15. P. 1–8.
8. *Diening L., Harjulehto P., Hasto P., Ruzicka M.* Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. *Lect. Notes Math.* Heidelberg; Dordrecht; London; New York, 2017.
9. *Almeida A., Samko S.* Embeddings of variable Hajlasz–Sobolev spaces into Hölder spaces of variable order // *J. Math. Anal. Appl.* 2009. V. 353. № 2. P. 489–496.
10. *Kovacic O., Rakosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ // *Czechoslovak Math. J.* 1991. V. 41. P. 592–618.
11. *Antontsev S.* Wave equation with $p(x,t)$ -laplacian and damping term: blow-up of solutions // *C.R. Mecanique.* 2011. V. 339. P. 751–755.
12. *Messaoudi S.A., Talahmeh A.A.* Blow-up in solutions of a quasilinear wave equation with variable-exponent nonlinearities // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2017. V. 40. № 18. P. 6976–6986.
13. *Sun L., Ren Y., Gao W.* Lower and upper bounds for the blow-up time for nonlinear wave equation with variable sources // *Comput. Math. Appl.* 2016. V. 71. № 1. P. 267–277.
14. *Chueshov I., Eller M., Lasiecka I.* On the attractor for a semilinear wave equation with critical exponent and nonlinear boundary dissipation // *Comm. in Part. Differ. Equat.* 2002. V. 27. № 2. P. 1901–1951.
15. *Cavalcanti M., Domingos Cavalcanti V.N., Lasiecka I.* Well-posedness and optimal decay rates for the wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction // *J. Differ. Equat.* 2007. V. 236. P. 407–459.
16. *Lasiecka I., Triggiani R., Zhang X.* Nonhomogeneous boundary value problems for second order hyperbolic operators // *J. Math. Pures Appl.* 1986. V. 65. № 2. P. 149–192.
17. *Lasiecka I., Triggiani R., Zhang X.* Nonconservative wave equations with unobserved Neumann B.C.: global uniqueness and observability in one shot // *Contemp. Math.* 2000. V. 268. P. 227–327.
18. *Lasiecka I., Tataru D.* Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping // *Differ. and Integral Equat.* 1993. V. 6. № 3. P. 507–533.
19. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
20. *Showalter R.E.* Monotone Operators in Banach Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations. *Mathematical Surveys and Monographs.* V. 49. Providence, 1997.
21. *Barbu V.* Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces. Noordhoff, 1976.

Институт математики и механики
 НАН Азербайджана, г. Баку,
 Азербайджанский государственный университет
 нефти и промышленности, г. Баку,
 Бакинский государственный университет,
 Азербайджан

Поступила в редакцию 22.12.2021 г.
 После доработки 25.06.2022 г.
 Принята к публикации 05.07.2022 г.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.952.5

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА
С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ЛИУВИЛЛЯ

© 2022 г. А. В. Псху

Рассматривается уравнение в частных производных первого порядка с дробной производной по одной из двух независимых переменных. Дробное дифференцирование задано оператором Лиувилля, определённым на бесконечном интервале и имеющим начало в минус бесконечности. Для рассматриваемого уравнения исследуется краевая задача в бесконечной полуплоскости. Построено представление решения, найдены достаточные условия существования регулярных решений и доказана теорема единственности. Также показано, что решение однородного уравнения как функции одной из переменных является аналитическим.

DOI: 10.31857/S0374064122080052, EDN: CFTIVW

Введение. Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\right)u(x, y) = f(x, y), \quad (1)$$

где $\partial^\alpha/\partial y^\alpha$ – дробная производная по y порядка $\alpha \in (0, 1)$.

Исследование уравнений в частных производных дробного порядка, не выше первого, началось относительно недавно, но тем не менее имеет достаточно широкую библиографию. По всей видимости, первыми работами, посвящёнными таким уравнениям, были статьи [1] и [2] (см. также [3]). В последствии для таких уравнений, а также их обобщений, рассматривались различные начальные и краевые задачи, включая задачи в многомерных областях [4, 5] и областях с криволинейной границей [6], нелокальные краевые задачи [7, 8], изучались уравнения с переменными [9, 10] и матричными [11, 12] коэффициентами, а также задачи для уравнений с операторами дробного дискретно распределённого дифференцирования [13] и операторами Джрбашьяна–Нерсесяна [14, 15] и т.д.

Отметим также, что необходимость изучения уравнений вида (1) возникает при решении методом факторизации диффузионных и диффузионно-волновых уравнений дробного порядка [16]. Кроме того, такие уравнения появляются при математическом моделировании динамики численности популяций [17].

Заметим, что уравнение (1) представляет собой пример одного из самых простых уравнений в частных производных дробного порядка. В предельном случае (при $\alpha = 1$) это уравнение превращается в гиперболическое уравнение первого порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)u(x, y) = f(x, y). \quad (2)$$

Эти простота и наглядность также могут служить хорошей мотивацией к изучению уравнений вида (1), проведению сравнительного анализа свойств уравнений с частными производными целого порядка с их дробными аналогами, и способствовать тем самым лучшему пониманию того, что может принести присутствие в уравнении оператора дробного дифференцирования.

Во всех работах, указанных выше, рассматривались операторы дробного дифференцирования, определённые на конечном интервале (имеющие начало в конечных точках). В уравнении (1) рассматривается дробная производная, определённая на бесконечном интервале и имеющая начало в минус бесконечности (см. ниже).

Дифференциальные уравнения с производными дробного порядка, имеющими начало в бесконечно удалённой точке, изучались сравнительно мало. В связи с этим следует упомянуть работы [18, 19].

Как известно, начальные данные для уравнений с производными дробного порядка задаются именно в начальных точках (на линии начал). Для уравнений, содержащих операторы дробного дифференцирования, определённые на бесконечных промежутках (т.е. с началом в плюс или минус бесконечности), это приводит к необходимости вместо начального условия задавать асимптотическое поведение искомого решения, т.е. такие операторы индуцируют асимптотические задачи (задачи без начальных условий).

В данной работе рассматривается именно такая задача для уравнения (1) в бесконечной (вертикальной) полуполосе, для которой построено представление регулярного решения, найдены достаточные условия его существования и единственности. Показано, что, в отличие от соответствующих уравнений целого порядка (2) с началом в конечной точке, решение однородного уравнения (1) является аналитической функцией переменной x .

1. Дробное дифференцирование. Интеграл и производная Римана–Лиувилля порядка ζ по переменной t с началом в точке $t = s$ определяются равенствами [20, с. 11]

$$D_{st}^{\zeta}g(t) = \text{sign}(t-s) \int_s^t g(\eta) \frac{|t-\eta|^{-\zeta-1}}{\Gamma(-\zeta)} d\eta \quad (\zeta < 0), \quad D_{st}^0g(t) = g(t), \quad (3)$$

и

$$D_{st}^{\zeta}g(t) = \text{sign}^p(t-s) \frac{\partial^p}{\partial t^p} D_{st}^{\zeta-p}g(t) \quad (p-1 < \zeta \leq p, \quad p \in \mathbb{N}). \quad (4)$$

При $s = \pm\infty$ операторы (3) и (4) принято называть, соответственно, (дробными) интегралом и производной Лиувилля [21, с. 85].

В уравнении (1) дробное дифференцирование понимается как дробная производная Лиувилля с началом в минус бесконечности, т.е.

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial y^{\alpha}}u(x, y) = D_{-\infty y}^{\alpha}u(x, y) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^y \frac{(y-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u(x, t) dt.$$

В работе также понадобятся производные Капуто (которые в последнее время все чаще называют производными Герасимова–Капуто), определяемые равенством [20, с. 11]

$$\partial_{st}^{\zeta}g(t) = \text{sign}^p(t-s) D_{st}^{\zeta-p} \frac{\partial^p}{\partial t^p} g(t) \quad (p-1 < \zeta \leq p, \quad p \in \mathbb{N}).$$

2. Постановка задачи. Будем рассматривать уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + D_{-\infty y}^{\alpha} \right) u(x, y) = f(x, y) \quad (5)$$

в области

$$\Omega = (r, a) \times (-\infty, b) = \{(x, y) : x \in (r, a), \quad y \in (-\infty, b)\} \quad (r < a).$$

Также будем использовать обозначения

$$\Omega_r = \Omega \cup \{(x, y) : x = r, \quad y < b\}, \quad \Omega^{\varepsilon} = (r, a - \varepsilon) \times (-\infty, b - \varepsilon).$$

Определение. Будем называть функцию $u(x, y)$ *регулярным решением* уравнения (5) в области Ω , если: $u(x, y) \in C(\Omega_r)$; функция $u(x, y)$ непрерывно дифференцируема по переменной x , а функция $D_{-\infty y}^{\alpha-1}u(x, y)$ – по переменной y для всех $(x, y) \in \Omega$; $(R-y)^{-\alpha}u(x, y)$, как функция переменной y , интегрируема на множестве $(-\infty, R)$ для любых $x \in (r, a)$ и $R < b$; $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (5) в Ω .

Задача. Найти регулярное решение $u(x, y)$ уравнения (5) в области Ω , удовлетворяющее условию

$$u(r, y) = \varphi(y) \quad (y < b). \tag{6}$$

3. Специальное решение. Рассмотрим функцию

$$w_\mu(x, y) = y^{\mu-1} \phi(-\alpha, \mu; -x/y^\alpha) \quad (x, y > 0), \tag{7}$$

где

$$\phi(\xi, \eta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\xi k + \eta)} \quad (\xi > -1)$$

– функция Райта (см. работы [22, 23]).

Для функции Райта известны формулы дифференцирования (и интегрирования, во втором случае) [22]

$$\frac{d}{dz} \phi(\xi, \eta; z) = \phi(\xi, \eta + \xi; z) \tag{8}$$

и [3]

$$D_{0y}^\beta [y^{\mu-1} \phi(-\alpha, \mu; -\lambda y^{-\alpha})] = y^{\mu-\beta-1} \phi(-\alpha, \mu - \beta; -\lambda y^{-\alpha}) \quad (\beta, \mu \in \mathbb{R}, \lambda > 0).$$

Из этих формул с учётом (7) для функции $w_\mu(x, y)$ справедливы соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x} w_\mu(x, y) = -w_{\mu-\alpha}(x, y), \tag{9}$$

$$D_{0y}^\beta w_\mu(x, y) = \partial_{0y}^\beta w_\mu(x, y) = w_{\mu-\beta}(x, y) \quad (\beta \in \mathbb{R}). \tag{10}$$

В силу обобщённой формулы Ньютона–Лейбница для операторов дробного интегрирования и дифференцирования (см., например, [20, § 1.19]) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} D_{0x}^{-\nu} w_\mu(x, y) = D_{0x}^{-\nu} \frac{\partial}{\partial x} w_\mu(x, y) + \frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} \frac{y^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}.$$

Отсюда с учётом (9) и (10) получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + D_{0y}^\alpha \right) D_{0x}^{-\nu} w_\mu(x, y) = \frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} \frac{y^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}. \tag{11}$$

Кроме того, из свойств функции Райта следуют неравенства (см. [23])

$$|w_\mu(x, y)| < C y^{\mu-1} \exp(-\rho x^{1/(1-\alpha)} y^{-\alpha/(1-\alpha)}) \quad (C = C(\alpha, \mu), \rho < (1-\alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}) \tag{12}$$

и [24]

$$w_\mu(x, y) > 0 \quad (\mu \geq 0). \tag{13}$$

Из (12), в частности, следует, что

$$|w_\mu(x, y)| < C x^{-\theta} y^{\mu+\alpha\theta-1}, \quad \theta \geq \begin{cases} -1, & (-\mu) \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 0, & (-\mu) \notin \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{cases} \quad C = C(\alpha, \mu, \theta). \tag{14}$$

Здесь и далее буквой C обозначаются положительные постоянные (вообще говоря, различные). При этом в скобках, в случае необходимости, указываются параметры, от которых зависит их выбор, например, $C = C(\alpha, \beta, \dots)$.

4. Представление решения. Сначала докажем теорему о представлении регулярных решений уравнения (5).

Теорема 1. Пусть $f(x, y) \in L(\Omega^\varepsilon)$, $\varphi(y) \in L(-\infty, b - \varepsilon)$ и

$$\lim_{R \rightarrow -\infty} \sup_{\substack{x \in (r, a - \varepsilon) \\ y < R}} |u(x, y)| = 0 \tag{15}$$

для любого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$.

Если $u(x, y)$ – регулярное решение задачи (5) и (6), то оно представимо в виде

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^y \varphi(t) w_0(x - r, y - t) dt + \int_r^x \int_{-\infty}^y f(s, t) w_0(x - s, y - t) dt ds. \tag{16}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$v(x, y; s, t) = D_{xs}^{-1} w_1(x - s, y - t) \quad (s \leq x, \quad t \leq y).$$

Из (10) и (11) следует, что

$$\left(-\frac{\partial}{\partial s} + \partial_{yt}^\alpha \right) v(x, y; s, t) = 1 \tag{17}$$

и

$$v(x, y; x, t) = 0 \quad (t \leq y), \quad v(x, y; s, y) = 0 \quad (s \leq x). \tag{18}$$

Пусть $u(x, y)$ – регулярное решение уравнения (5), $R < y$. Рассмотрим выражение

$$\int_r^x \int_R^y v(x, y; s, t) f(s, t) dt ds = \int_r^x \int_R^y v(x, y; s, t) \left[\frac{\partial}{\partial s} + D_{-\infty t}^\alpha \right] u(s, t) dt ds.$$

В силу (18) имеем

$$\int_r^x \int_R^y v(x, y; s, t) \frac{\partial}{\partial s} u(s, t) dt ds = - \int_R^y v(x, y; r, t) u(r, t) dt - \int_r^x \int_R^y u(s, t) \frac{\partial}{\partial s} v(x, y; s, t) dt ds$$

и

$$\begin{aligned} \int_r^x \int_R^y v(x, y; s, t) D_{-\infty t}^\alpha u(s, t) dt ds &= \int_r^x \int_R^y v(x, y; s, t) [D_{Rt}^\alpha + J^R] u(s, t) dt ds = \\ &= \int_r^x \int_R^y v(x, y; s, t) J^R u(s, t) dt ds - \int_r^x \int_R^y D_{Rt}^{\alpha-1} u(s, t) \frac{\partial}{\partial t} v(x, y; s, t) dt ds, \end{aligned}$$

где

$$J^R u(s, t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^R \frac{u(s, \eta) d\eta}{(t - \eta)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{-\infty}^R \frac{u(s, \eta) d\eta}{(t - \eta)^{\alpha+1}} \quad (t > R). \tag{19}$$

Здесь было использовано равенство

$$\lim_{t \rightarrow R} D_{Rt}^{\alpha-1} u(s, t) = 0,$$

которое является следствием непрерывности функции $u(s, t)$ на линии $t = R$, $r \leq s \leq x$.

Теперь, используя формулу дробного интегрирования по частям (см., например, [20, § 1.2]), получим

$$\int_r^x \int_R^y v(x, y; s, t) f(s, t) dt ds = \int_r^x \int_R^y u(s, t) \left[-\frac{\partial}{\partial s} + \partial_{yt}^\alpha \right] v(x, y; s, t) dt ds + \\ + \int_r^x \int_R^y v(x, y; s, t) J^R u(s, t) dt ds - \int_R^y v(x, y; r, t) u(r, t) dt.$$

Продифференцировав это выражение по x и по y , с учётом (6), (10), (17) и (18) запишем равенство

$$u(x, y) = \int_r^x \int_R^y w_0(x - s, y - t) f(s, t) dt ds + \int_R^y w_0(x - r, y - t) \varphi(t) dt + I,$$

где

$$I = - \int_r^x \int_R^y w_0(x - s, y - t) J^R u(s, t) dt ds.$$

Оценим интеграл I . Введём обозначение

$$C_R = \sup_{\substack{s \in (r, x) \\ t < R}} |u(s, t)|.$$

С учётом (10), (13) и (19) получим

$$|I| \leq \frac{C_R}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_r^x \int_R^y w_0(x - s, y - t) (t - R)^{-\alpha} dt ds = C_R \int_r^x w_{1-\alpha}(x - s, y - R) ds,$$

откуда в силу условия (15) следует, что $\lim_{R \rightarrow -\infty} I = 0$. Тем самым представление (16) доказано.

5. Единственность решения. Утверждение теоремы 1 позволяет доказать единственность решения рассматриваемой задачи.

Теорема 2. *Существует не более одного регулярного решения задачи (5) и (6) в классе функций, удовлетворяющих условию (15).*

Доказательство. Пусть $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ – два решения задачи (5), (6) (соответствующие одной и той же правой части $f(x, y)$ и граничной функции $\varphi(y)$). Тогда функция $v(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ является регулярным решением однородной задачи

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + D_{-\infty y}^\alpha \right) v(x, y) = 0, \quad v(r, y) = 0,$$

удовлетворяющим предельному соотношению (15). В силу теоремы 1 это означает, что $v(x, y) \equiv 0$, т.е. $u_1(x, y) \equiv u_2(x, y)$.

6. Теорема существования решения. Из теоремы 1, вообще говоря, не следует, что любая функция вида (16) априори является решением задачи (5) и (6). Для того чтобы это имело место, необходимы дополнительные условия на правую часть $f(x, y)$ и граничную функцию $\varphi(y)$.

Теорема 3. Пусть $\varphi(y) \in C(-\infty, b) \cap L(-\infty, b - \varepsilon)$, $f(x, y) \in C(\Omega_r) \cap L(\Omega^\varepsilon)$,

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} (-y)^\delta \varphi(y) = 0 \quad (\delta > 1 - \alpha) \tag{20}$$

и функция $f(x, y)$ представима в виде

$$f(x, y) = D_{rx}^{-\xi} D_{-\infty y}^{-\eta} g(x, y) \quad (\xi > 0, \eta > 0), \tag{21}$$

где $g(x, y) \in L(\Omega^\varepsilon)$, $(x - r)^\mu g(x, y) \in C(\Omega_r)$ и

$$\sup\{(x - r)^\mu (b - y)^\nu |g(x, y)| : (x, y) \in \Omega^\varepsilon\} \leq C \quad (C = C(\varepsilon)) \tag{22}$$

для некоторых $\mu < \xi$, $\nu > \eta + 1$ и любого достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Тогда функция $u(x, y)$, определённая равенством (16), является регулярным решением задачи (5) и (6).

Доказательство. Введём следующие обозначения:

$$\Phi(x, y) = \int_{-\infty}^y \varphi(t) w_0(x - r, y - t) dt, \quad F(x, y) = \int_r^x \int_{-\infty}^y f(s, t) w_0(x - s, y - t) dt ds.$$

Прежде всего отметим, что из неравенства (14) следует оценка

$$|D_{xs}^{-\xi} w_\eta(x - s, y - t)| \leq C(x - s)^{\xi - \theta} (y - t)^{\eta + \alpha\theta - 1}$$

для любого $\theta \in [0, 1)$. Отсюда в силу (21) и (22) получим

$$\begin{aligned} |F(x, y)| &\leq \int_r^x \int_{-\infty}^y |g(s, t) D_{xs}^{-\xi} w_\eta(x - s, y - t)| dt ds \leq C \int_r^x (s - r)^{-\mu} (x - s)^{\xi - \theta} ds \times \\ &\times \int_{-\infty}^y (b - t)^{-\nu} (y - t)^{\eta + \alpha\theta - 1} dt \leq C(x - r)^{\xi - \mu - \theta + 1} (b - y)^{\eta + \alpha\theta - \nu}. \end{aligned} \tag{23}$$

Кроме того, с учётом условия (20) нетрудно заметить, что

$$|\Phi(x, y)| \leq C \int_{-\infty}^y (b - t)^{-\delta} w_0(x - r, y - t) dt = C \int_0^\infty (b - y + t)^{-\delta} w_0(x - r, t) dt \leq C(b - y)^{-\delta}.$$

Из (23) и последнего неравенства следует, что $(R - y)^{-\alpha} u(x, y) \in L(-\infty, R)$ (как функция y) для любых $x \in (r, a)$ и $R < b$.

Далее, приняв во внимание (10), (11), (12) и (14), можно непосредственно проверить, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + D_{-\infty y}^\alpha\right) \Phi(x, y) = 0. \tag{24}$$

Аналогично с учётом равенств (10), (11), (22) и формулы дробного интегрирования по частям имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + D_{-\infty y}^\alpha\right) F(x, y) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + D_{-\infty y}^\alpha\right) \int_r^x \int_{-\infty}^y g(s, t) D_{xs}^{-\xi} w_\eta(x - s, y - t) dt ds = \\ &= \int_r^x \int_{-\infty}^y g(s, t) \left(-\frac{\partial}{\partial s} + D_{yt}^\alpha\right) D_{xs}^{-\xi} w_\eta(x - s, y - t) dt ds = \int_r^x \int_{-\infty}^y g(s, t) \frac{(x - s)^{\xi - 1} (y - t)^{\eta - 1}}{\Gamma(\xi)\Gamma(\eta)} dt ds. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (21) получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + D_{-\infty y}^\alpha\right)F(x, y) = f(x, y)$$

Это равенство вместе с (24) доказывает, что функция $u(x, y)$, определённая формулой (16), является решением уравнения (5).

Проверим выполнение условия (6). Из неравенства (23) следует предельное соотношение

$$\lim_{x \rightarrow r} F(x, y) = 0 \quad (y < b).$$

Поэтому для завершения доказательства теоремы необходимо показать, что

$$\lim_{x \rightarrow r} \Phi(x, y) = \varphi(y). \tag{25}$$

Для доказательства предельного равенства (25) рассмотрим выражение

$$\Phi(x, y) = \left(\int_{-\infty}^{y-\varepsilon} + \int_{y-\varepsilon}^y\right)[\varphi(t) - \varphi(y)]w_0(x-r, y-t) dt + \varphi(y) \int_{-\infty}^y w_0(x-r, y-t) dt = I_1 + I_2 + \varphi(y)I_3.$$

Из оценки (12) следует, что $\lim_{x \rightarrow r} I_1 = 0$. Для интеграла I_2 имеем $|I_2| \leq C \sup_{t \in (y-\varepsilon, y)} |\varphi(t) - \varphi(y)|$.

Из произвольности выбора ε и непрерывности функции $\varphi(y)$ следует, что $\lim_{x \rightarrow r} I_2 = 0$. И, наконец, из соотношения (10) получим

$$\int_{-\infty}^y w_0(x-r, y-t) dt = \int_0^\infty w_0(x-r, t) dt = \lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z w_0(x-r, t) dt = \lim_{z \rightarrow \infty} w_1(x-r, z) = 1.$$

Это подтверждает справедливость (25) и завершает доказательство теоремы.

7. Аналитичность решений. Докажем аналитичность по x решения однородного уравнения (5).

Лемма. Пусть $\varphi(y) \in L(-\infty, b - \varepsilon)$. Всякое регулярное в области Ω решение уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + D_{-\infty y}^\alpha\right)u(x, y) = 0, \tag{26}$$

удовлетворяющее условиям (6) и (15), может быть представлено в виде

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^\infty d_k(y)(x - x_0)^k \quad (r < x_0 < a), \tag{27}$$

где

$$d_k(y) = \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^\infty \varphi(y-t)w_{-\alpha k}(x_0 - r, t) dt,$$

причём

$$|d_k(y)| \leq C \xi^k \tag{28}$$

для некоторых $\xi > 0$ и $C = C(\alpha, x_0)$.

Доказательство. С учётом равенств (7) и (8) запишем разложение в ряд Тейлора функции $w_\mu(x-r, t)$ по степеням $(x-x_0)$:

$$w_\mu(x-r, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (x-x_0)^k w_{\mu-\alpha k}(x_0-r, t) \quad (t > 0). \quad (29)$$

Из свойств функции Райта (см. [25, формула (2.2.85)]) следует, что

$$|w_{\mu-\alpha k}(x_0-r, t)| \leq C \xi^k \Gamma\left(\frac{1-\mu}{\alpha} + k\right) w_1(x_1-r, t) \quad (\mu < 1),$$

где $x_1 \in (r, x_0)$, а $C = C(\alpha, \mu)$ и $\xi = \xi(\alpha, \mu, x_1)$ – положительные константы, не зависящие от x и t . Из этой оценки следует, что по крайней мере при $\mu < 1$ ряд (29) имеет положительный радиус сходимости, причём в силу неравенства (12) ряд сходится равномерно на множестве $t \in [0, \infty)$.

Далее запишем решение уравнения (26) с учётом (16) в виде

$$u(x, y) = \int_0^\infty \varphi(y-t) w_0(x-r, t) dt.$$

Подставив в последнее равенство разложение (29) и приняв во внимание (12), после некоторых преобразований получим (27) и (28). Лемма доказана.

Из леммы, в частности, следует, что решения уравнения (26) являются аналитическими функциями переменной x для каждого $y < b$, и это никак не связано с гладкостью $\varphi(y)$.

Отметим, что таким свойством решения уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + D_{cy}^\alpha\right) u(x, y) = 0$$

(в случае конечного c), также как и решения уравнения (2), не обладают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Clément Ph., Gripenberg G., Londen S-O. Schauder estimates for equations with fractional derivatives // Trans. of the American Math. Soc. 2000. V. 352. № 5. P. 2239–2260.
2. Псху А.В. Решение краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. акад. наук. 2000. Т. 5. № 1. С. 45–53.
3. Псху А.В. Решение краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 8. С. 1092–1099.
4. Псху А.В. Краевая задача для многомерного дифференциального уравнения дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 3. С. 385–395.
5. Псху А.В. О продолжении решений дифференциального уравнения в частных производных дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 1. С. 133–136.
6. Псху А.В. О краевой задаче для уравнения в частных производных дробного порядка в области с криволинейной границей // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 8. С. 1076–1082.
7. Богатырева Ф.Т. Краевая задача с интегральным условием Самарского для уравнения в частных производных первого порядка // Изв. Кабардино-Балкарского науч. центра РАН. 2017. № 6-1 (80). С. 10–14.
8. Мамчуев М.О. Нелокальная краевая задача для системы уравнений с частными производными дробного порядка // Мат. заметки Северо-Восточного федерал. ун-та. 2019. Т. 26. № 1. С. 23–31.
9. Псху А.В. Краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка // Изв. Кабардино-Балкарского науч. центра РАН. 2002. № 1 (8). С. 76–78.
10. Мамчуев М.О. Краевая задача для уравнения первого порядка с частной производной дробного порядка с переменными коэффициентами // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. акад. наук. 2009. Т. 11. № 1. С. 32–35.

11. *Мамчуев М.О.* Краевая задача для системы уравнений с частными производными дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 12. С. 1674–1686.
12. *Мамчуев М.О.* Краевая задача для многомерной системы уравнений с дробными производными Римана–Лиувилля // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 732–747.
13. *Псху А.В.* Краевая задача для уравнения в частных производных первого порядка с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1682–1694.
14. *Богатырева Ф.Т.* Краевая задача для уравнения в частных производных первого порядка с оператором Джрбашьяна–Нерсесяна // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. акад. наук. 2015. Т. 15. № 1. С. 9–16.
15. *Богатырева Ф.Т.* Краевые задачи для уравнения в частных производных первого порядка с операторами Джрбашьяна–Нерсесяна // Челябинский физ.-мат. журн. 2021. Т. 6. № 4. С. 403–416.
16. *Псху А.В.* Решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 9. С. 1286–1289.
17. *Лосанова Ф.М., Кенетова Р.О.* Нелокальная задача для обобщённого уравнения Маккендрика фон Фёрстера с оператором Капуто // Нелинейный мир. 2018. Т. 16. № 1. С. 49–53.
18. *Kilbas A.A., Pierantozzi T., Trujillo J.J., V'azquez L.* On the solution of fractional evolution equations // J. Phys. A: Math. Gen. 2004. V. 37. P. 3271–3283.
19. *Pskhu A.V., Rekhviashvili S.Sh.* Fractional diffusion-wave equation with application in electrodynamics // Mathematics. 2020. V. 8. № 11. P. 2086.
20. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М., 2003.
21. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
22. *Wright E.M.* On the coefficients of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc. 1933. V. s1-8. № 1. P. 71–79.
23. *Wright E.M.* The generalized Bessel function of order greater than one // Quart. J. Math. Oxford Ser. 1940. V. 11. № 1. P. 36–48.
24. *Stanković B.* On the function of E.M. Wright // Publications de L'institut Mathématique. Beograd. 1970. V. 10. № 24. P. 113–124.
25. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М., 2005.

Институт прикладной математики и автоматизации
Кабардино-Балкарского научного центра РАН,
г. Нальчик

Поступила в редакцию 28.04.2022 г.
После доработки 28.04.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.

УДК 517.956.35

О СУЩЕСТВОВАНИИ СЧЁТНОГО ЧИСЛА ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ С ОДНОРОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2022 г. И. А. Рудаков

Доказано существование бесконечного числа периодических решений квазилинейного уравнения колебаний балки, если нелинейное слагаемое является однородной нечётной функцией, имеющей степенной рост. Граничные условия соответствуют случаям шарнирно опирающимся и упруго закреплённым концам.

DOI: 10.31857/S0374064122080064, EDN: CFUKPN

Введение. Рассмотрим задачу о периодических решениях квазилинейного уравнения

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} + s(x, t)|u|^{r-2}u = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$u(x, t + T) = u(x, t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Допустим, что выполнено одно из двух граничных условий

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = u(\pi, t) = u_{xx}(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = u(\pi, t) = u_{xx}(\pi, t) + hu_x(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Константы h , a являются положительными, функция $s(x, t)$ в уравнении (1) T -периодична по времени. Константа r в показателе степени нелинейного слагаемого уравнения (1) удовлетворяет условию $r > 2$.

Уравнение (1) есть математическая модель колебаний проводов и балки [1, с. 439]. Граничные условия (3) соответствуют случаю шарнирно опирающихся концов, граничное условие (4) соответствует случаю, когда правый конец балки удерживается специальным пружинным устройством (см. [2]). При $a = 0$ (что соответствует условию отсутствия растяжения вдоль горизонтальной оси) задача о периодических и квазипериодических решениях уравнения (1) исследовалась во многих работах, например, [2–9]. В статье [10] при $a > 0$ доказано существование периодического решения малой амплитуды в случае граничных условий (3), когда нелинейное слагаемое удовлетворяет условию Липшица. В работе [11] также исследовалась задача о периодических решениях уравнения (1) при $a > 0$ с граничными условиями (3). Здесь при выполнении условий М. Yamaguchi [10] для константы a доказано существование бесконечного числа периодических решений в случае, когда нелинейное слагаемое имеет степенной рост. В [12] рассмотрено уравнение (1) также со значениями $a > 0$ и граничными условиями

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = u(\pi, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad (5)$$

соответствующими случаю жёстко закреплённого правого конца. Получены условия существования периодического решения в случае резонанса на произвольном собственном значении дифференциального оператора.

При исследовании задач (1)–(3); (1), (2), (4) возникает так называемая проблема “малых знаменателей”. В связи с этим для собственных значений соответствующей задачи Штурма–Лиувилля удобно представление (7.2) из работы [13]:

$$\lambda_n = (n + m_0 + \kappa + O(1/n))^4, \quad m_0 \in \mathbb{Z}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Для граничных условий (3)–(5) константа κ (“спектральный сдвиг”) согласно [13] принимает соответственно значения $0, 0, 1/4$. Для обоснования возможности обращения дифференциального оператора $D = \partial_{tt} + \partial_{xxxx} - a\partial_{xx}$ на дополнении к ядру потребовался первый член асимптотики (вывод см. в п. 1) слагаемого $O(1/n)$ в формуле (7.2) из работы [13]:

$$O(1/n) = \left(\frac{a}{4} + \frac{h}{2\pi} \right) \frac{1}{n} + o(1/n)$$

для граничных условий (4). Следствием формул (2.10), (2.12) из статьи [12] является тот факт, что при выполнении граничных условий (5) справедливо равенство

$$O(1/n) = \frac{a}{4n} + o(1/n).$$

Такое же представление для $O(1/n)$ имеет место и в случае граничных условий (3), что позволило получить значительно менее жёсткое условие (8) на константу a , чем условия М. Yamaguchi [10, 11].

Основным результатом данной работы является теорема о существовании счётного числа решений задач (1)–(3); (1), (2), (4). Статья организована следующим образом. В п. 1 исследуется соответствующая задача Штурма–Лиувилля на собственные функции и собственные значения и строится ортонормированная в пространстве L_2 система функций. Решения задач (1)–(3); (1), (2), (4) будут представлены в виде ряда Фурье по этой системе. В п. 2 рассматриваются свойства дифференциального оператора D с соответствующими граничными условиями. В п. 3 приведено доказательство основной теоремы, опирающееся на вариационный метод.

Обозначим $\Omega = [0, \pi] \times \mathbb{R}/(T\mathbb{Z})$; $(u, v) = \int_{\Omega} u(x, t)v(x, t) dx dt$, если $u \in L_p(\Omega)$, $v \in L_q(\Omega)$, $p > 1$, $q = p/(p-1)$; $\|u\|_p = \|u\|_{L_p(\Omega)}$, $\|u\| = \|u\|_2$.

Будем предполагать выполнение следующих условий:

$$T = 2\pi \frac{b}{c}, \quad b, c \in \mathbb{N}, \quad \text{НОД}(b, c) = 1, \quad (6)$$

$$\text{функция } s(x, t) \in C^1(\Omega) \text{ является } T\text{-периодичной по } t, \quad (7)$$

$$s(x, t) > 0 \quad \text{для всех } (x, t) \in \Omega. \quad (8)$$

При исследовании граничных условий (3) потребуем выполнения неравенств

$$a > 0, \quad \frac{1}{2}ab \notin \mathbb{N}; \quad (9)$$

в случае граничных условий (4) – выполнения условий

$$a > 0, \quad b \left(\frac{1}{2}a + \frac{h}{\pi} \right) \notin \mathbb{N}. \quad (10)$$

Пусть $H_1(\Omega) = W_2^1(\Omega)$, $H_2(\Omega) = W_2^2(\Omega)$ есть пространства Соболева. Обозначим

$$W_1 = \{ \varphi \in C^\infty(\Omega) : \varphi(0, t) = \varphi_{xx}(0, t) = 0, \quad \varphi(\pi, t) = \varphi_{xx}(\pi, t) = 0 \text{ для любого } t \},$$

$$W_2 = \{ \varphi \in C^\infty(\Omega) : \varphi(0, t) = \varphi_{xx}(0, t) = 0, \quad \varphi(\pi, t) = \varphi_{xx}(\pi, t) + hu_x(\pi, t) = 0 \text{ для любого } t \}.$$

Определение. Обобщённым решением задач (1)–(3) и (1), (2), (4) называется функция $u \in L_r(\Omega)$, удовлетворяющая равенству

$$\int_{\Omega} (u(\psi_{tt} + \psi_{xxxx} - a\psi_{xx}) + s(x, t)|u|^{r-2}u\psi) dx dt = 0$$

для любой функции $\psi \in W_1$ и $\psi \in W_2$ соответственно.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема. *Предположим, что выполнены либо условия (6)–(9), либо условия (6)–(8), (10). Тогда, соответственно, для любого $d > 0$ задачи (1)–(3) и (1), (2), (4) имеют обобщённое решение*

$$u \in H_2(\Omega) \cap C^1(\Omega) \quad (11)$$

такое, что $\|u\|_r \geq d$, $u_{xx} \in C(\Omega)$, и граничные условия выполнены в классическом смысле.

1. Свойства решений линейного уравнения. При исследовании нелинейного уравнения (1) будем использовать свойства дифференциального оператора этого уравнения. Для их изучения рассмотрим соответствующее линейное уравнение

$$u_{tt} + u_{xxxx} - au_{xx} = f(x, t),$$

в котором функция u удовлетворяет либо условиям (2), (3), либо условиям (2), (4). Соответствующая уравнению (1) задача Штурма–Лиувилля на нахождение собственных значений имеет вид

$$Y'''' - aY'' = \lambda Y, \quad 0 < x < \pi, \quad (12)$$

где функция $Y(x)$ удовлетворяет одному из граничных условий:

$$Y(0) = Y''(0) = Y(\pi) = Y''(\pi) = 0, \quad (13)$$

$$Y(0) = Y''(0) = Y(\pi) = Y''(\pi) + hY'(\pi) = 0. \quad (14)$$

Собственные значения задачи (12), (13) имеют вид (см. [11]) $\lambda_{1,n} = n^4 + an^2$, $n \in \mathbb{N}$, а соответствующие им нормированные в пространстве $L_2(0, \pi)$ функции определяются по формуле

$$Y_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx). \quad (15)$$

Легко видеть, что имеет место равенство

$$(\sqrt[4]{n^4 + an^2} - n)n = \frac{a}{4}(1 + O(1/n^2)),$$

поэтому для собственных значений будем иметь представление

$$\lambda_{1,n} = \left(n + \frac{a}{4n} + O(1/n^3) \right)^4. \quad (16)$$

Рассмотрим задачу (12), (14) с положительной константой h в условии (14). Умножив уравнение (12) на $Y(x)$ и проинтегрировав полученное соотношение по отрезку $[0, \pi]$, выведем равенство

$$h(Y'(\pi))^2 + \int_0^\pi ((y''(x))^2(x) + a(Y'(x))^2) dx = \lambda \int_0^\pi Y^2(x) dx.$$

Отсюда следует, что $\lambda \geq 0$. Если предположить, что $\lambda = 0$, то из полученного тождества вытекает $Y'(x) \equiv 0$. Тогда с учётом граничных условий (12) получим $\lambda > 0$. При $\lambda > 0$ общее решение дифференциального уравнения (12) имеет вид

$$Y = C_1 \sin(px) + C_2 \cos(px) + C_3 \operatorname{sh}(qx) + C_4 \operatorname{ch}(qx),$$

где

$$p = \left(\left(\frac{a^2}{4} + \lambda \right)^{1/2} - \frac{a}{2} \right)^{1/2}, \quad q = \left(\left(\frac{a^2}{4} + \lambda \right)^{1/2} + \frac{a}{2} \right)^{1/2}$$

и числа $\pm pi$, $\pm q$ являются корнями характеристического уравнения. Используя граничные условия (14), запишем уравнение, которому удовлетворяет собственное значение λ :

$$\operatorname{ctg}(p\pi) = f(p). \quad (17)$$

Здесь

$$f(p) = \frac{1}{h} \left(2p + \frac{a}{p} \right) + \frac{q}{p} \operatorname{cth}(q\pi).$$

Так как $q^2 = p^2 + a$, то

$$f'(p) = \frac{2}{h} - \frac{a}{hp^2} - \frac{a}{p^2\sqrt{p^2+a}} \operatorname{cth}(\pi\sqrt{p^2+a}) + \frac{\pi}{\operatorname{sh}^2(\pi\sqrt{p^2+a})}.$$

Отсюда следует, что при достаточно большом $p_0 > 0$ функция $f(p)$ возрастает на промежутке $[p_0, +\infty)$. Обозначим $F(p) = \operatorname{ctg}(p\pi) - f(p)$. Поскольку для любого числа $n \in \mathbb{Z}_+ \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеем $F(n+1/2) = -f(n+1/2) < 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} F(n+\varepsilon) = +\infty$, то на интервалах $I_n \equiv (n, n+1/2)$ уравнение (17) имеет решение. Легко видеть, что при $p > 0$ вне интервалов I_n функция F принимает отрицательные значения и уравнение (17) не имеет решений. При $p > p_0$ на интервале I_n функция $f(p)$ возрастает, а $\operatorname{ctg}(p\pi)$ убывает, поэтому на интервале I_n уравнение (17) имеет единственное решение p_n . Если положить $p_n = n + \tau_n$ ($\tau_n \in (0, 1/2)$), то из (17) получим соотношение

$$\operatorname{tg}(\pi\tau_n) = h \left(2(n + \tau_n) + \frac{a}{n + \tau_n} + h \frac{\sqrt{(n + \tau_n)^2 + a}}{n + \tau_n} \operatorname{cth}(\pi\sqrt{(n + \tau_n)^2 + a}) \right)^{-1},$$

из которого и из (17) выведем равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\tau_n = \frac{h}{2\pi}, \quad \tau_n = \frac{h}{2\pi} \frac{1}{n} + o(1/n).$$

Обозначим $n_0 = [p_0] + 1$. Таким образом, при $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$, на каждом интервале $I_n = (n, n+1/2)$ существует единственный корень p_n уравнения (17), которому соответствует собственное значение $\bar{\lambda}_n$ задачи (12), (14):

$$\bar{\lambda}_n = \left(n + \frac{h}{2\pi} \frac{1}{n} + o(1/n) \right)^4 + a \left(n + \frac{h}{2\pi} \frac{1}{n} + o(1/n) \right)^2. \quad (18)$$

Удобно будет также представление собственных значений $\bar{\lambda}_n$ по формуле (7.2) работы [13]:

$$\bar{\lambda}_n = (n + O(1/n))^4. \quad (19)$$

Используя равенство (18), вычислим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[4]{\bar{\lambda}_n} - n \right) n = \frac{1}{4}a + \frac{h}{2\pi},$$

откуда следует

$$\bar{\lambda}_n = \left(n + \left(\frac{1}{4}a + \frac{h}{2\pi} \right) \frac{1}{n} + o(1/n) \right)^4. \quad (20)$$

В равенстве (20) записан первый член асимптотики слагаемого $O(1/n)$ в формуле (19).

На промежутке $(0, n_0]$ задача (12), (14) имеет конечное число собственных значений [14, с. 78]. Пусть на промежутке $(0, n_0]$ имеется m ($m \in \mathbb{Z}_+ \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$) собственных значений задачи (12), (14) с учётом их кратностей. Обозначим через $\{\lambda_{2,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ и $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ соответственно

множества всех собственных значений задачи (12), (14), пронумерованных в порядке возрастания, и соответствующих им собственных функций. Система функций $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ является полной (см. [14, с. 91]) в $L_2(0, \pi)$. Из формулы (20) следует, что при $n \geq m + 1$ имеет место следующее представление:

$$\lambda_{2,n} = \left(n + n_0 - m - 1 + \left(\frac{1}{4}a + \frac{h}{2\pi} \right) \frac{1}{n} + o(1/n) \right)^4. \tag{21}$$

Соответствующие $\{\lambda_{2,n}\}$ собственные функции при $n \geq m + 1$ имеют вид

$$Y_n = A_n \left(\sin(\bar{p}_n x) - \sin(\bar{p}_n \pi) \frac{\text{sh}(\bar{q}_n x)}{\text{sh}(\bar{q}_n \pi)} \right). \tag{22}$$

Здесь $\bar{p}_n = \bar{n} + \tau_n$, $\bar{q}_n = \sqrt{\bar{p}_n^2 + a}$, $\bar{n} = n + n_0 - m - 1$. Если выбрать множители A_n с учётом условия нормировки $\|Y_n\| = 1$, то будем иметь представление

$$A_n = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2} + O(1/n)} \right)^{-1}.$$

Решения задач (1)–(3); (1), (2), (4) представим в виде ряда Фурье по следующей полной и ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системе функций:

$$\left\{ \sqrt{\frac{c}{\pi b}} Y_n(x) \cos\left(\frac{c}{b} kt\right), \sqrt{\frac{c}{\pi b}} Y_n(x) \sin\left(\frac{c}{b} kt\right), \sqrt{\frac{c}{2\pi b}} Y_n(x) \right\}_{n,k \in \mathbb{N}}, \tag{23}$$

в которой функции $Y_n(x)$ выражаются либо формулой (15), либо формулой (22), в соответствии с рассматриваемой задачей.

2. Исследование дифференциального оператора уравнения (1). Обозначим через $\bar{L}_i : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$, $i \in \{1, 2\}$, дифференциальные операторы, областью определения которых являются множества W_i соответственно, и $\bar{L}_i v = v_{tt} + v_{xxxx} - av_{xx}$ при $v \in W_i$. Пусть L_i есть сопряжённые к \bar{L}_i в $L_2(\Omega)$ операторы ($L_i = \bar{L}_i^*$). Операторы L_i , $i \in \{1, 2\}$, являются самосопряжёнными в $L_2(\Omega)$. Обозначим через $N(L_i)$, $R(L_i)$ ядро и образ операторов L_i соответственно.

Функции системы (23) являются собственными функциями операторов \bar{L}_i , L_i . Соответствующие им собственные значения имеют вид

$$\mu_{i,nk} = \lambda_{i,n} - \frac{c^2}{b^2} k^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Лемма. *Предположим, что выполнено либо условие (9), либо условие (10). Тогда ядра $N(L_i)$ соответствующих операторов L_i являются конечномерными, и операторы $L_i^{-1} : R(L_i) \rightarrow R(L_i)$ вполне непрерывны.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно проверить, что имеется не более конечного числа собственных значений $\mu_{i,nk}$, равных нулю. Обозначим $Q_{nk}^i = |b\sqrt{\lambda_{i,n}} - ck|$, $i \in \{1, 2\}$. Из формул (16), (20) выведем

$$Q_{nk}^i = |j_{i,nk} + R_i(a, b) + \gamma_{i,n}|,$$

где

$$j_{1,nk} = bn^2 - ck, \quad j_{2,nk} = b(n + n_0 - m + 1)^2 - ck, \quad \gamma_{i,n} = o(1),$$

$$R_1(a, b) = \frac{1}{2}ab, \quad R_2(a, b) = b\left(\frac{1}{2}a + \frac{h}{\pi}\right).$$

Из условий (9), (10) следует существование натуральных чисел $l_i, i \in \{1, 2\}$ таких, что $R_i(a, b) \in (l_i - 1, l_i)$. Обозначим

$$\varepsilon_{1,0} = \min\left(\frac{1}{2}ab - l_1 + 1, l_1 - \frac{1}{2}ab\right), \quad \varepsilon_{2,0} = \min\left(b\left(\frac{1}{2}a + \frac{h}{\pi}\right) - l_2 + 1, l_2 - b\left(\frac{1}{2}a + \frac{h}{\pi}\right)\right).$$

Поскольку $j_{i,nk} \in \mathbb{Z}$, $\gamma_{i,n} = o(1)$, то найдутся натуральные числа $n_{i,0}$ такие, что $|\gamma_{i,n}| < \varepsilon_{i,0}/2$ при $n \geq n_{i,0}$. Следовательно, при $n \geq n_{i,0}$ будут иметь место неравенства

$$|Q_{nk}^i| \geq \frac{1}{2}\varepsilon_{i,0}, \quad |\mu_{i,nk}| \geq \frac{1}{2b^2}\varepsilon_{i,0}(b\sqrt{\lambda_{i,n}} + ck), \quad i \in \{1, 2\}. \tag{24}$$

Из (24) следует, что равенства $\mu_{i,nk} = 0$ могут выполняться не более чем для конечного числа пар $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_+$. Поэтому $\dim \ker L_i < \infty$.

Для доказательства второго утверждения достаточно доказать сходимость рядов

$$S_i = \sum_{n=n_i}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_{i,nk}^2}.$$

Обозначим $z_{i,n} = b\sqrt{\lambda_{i,n}}/c$, $k_{i,n} = [z_{i,n}]$, $\delta_{i,n} = \{z_{i,n}\}$. Из (24) следует оценка

$$|m - z_{i,n}| \geq \frac{1}{2c}\varepsilon_{i,0}, \quad \delta_{i,n} \geq \frac{1}{2c}\varepsilon_{i,0} \quad \text{для любых } n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \tag{25}$$

Следовательно,

$$S_i = \sum_{n=n_i}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(b\sqrt{\lambda_{i,n}} - ck)^2(b\sqrt{\lambda_{i,n}} + ck)^2} \leq \frac{1}{b^2c^2} \sum_{n=n_i}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{i,n}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k - z_{i,n})^2} \right).$$

Используя (25), выведем неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k - z_{i,n})^2} &< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k - (1 - \delta_{i,n}))^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k - \delta_{i,n})^2} < \\ &< \frac{1}{(1 - \delta_{i,n})^2} + \int_1^{\infty} \frac{1}{(x - (1 - \delta_{i,n}))^2} dx + \frac{1}{\delta_{i,n}^2} + \int_1^{\infty} \frac{1}{(x - \delta_{i,n})^2} dx \leq 4c \frac{\varepsilon_{i,0} + 1}{\varepsilon_{i,0}^2}. \end{aligned}$$

Отсюда и из формул (16), (21) следует $S_i < \infty$. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы. Рассмотрим функционал

$$J(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}u_{xx}^2 + \frac{a}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{r}s(x, t)|u|^r \right) dx dt,$$

определённый на подпространствах $S_{i,k}$ ($k \in \mathbb{N}$) пространства $L_2(\Omega)$, имеющих базис

$$\left\{ Y_l(x) \cos\left(\frac{c}{b}jt\right), Y_l(x) \sin\left(\frac{c}{b}jt\right), Y_l(x) : 1 \leq j, l \leq k \right\}.$$

Докажем существование критических точек функционалов J на $S_{i,k}$ с помощью метода работы [3]. Представим подпространства $S_{i,k}$ в виде прямой суммы подпространств $S_{i,l}^d, S_{i,g}^d$, базисами в которых являются соответственно следующие системы функций:

$$\begin{aligned} &\left\{ Y_l(x) \cos\left(\frac{c}{b}jt\right), Y_l(x) \sin\left(\frac{c}{b}jt\right), Y_l(x) : \mu_{i,lj} \leq d, \quad 1 \leq j, l \leq k \right\}, \\ &\left\{ Y_l(x) \cos\left(\frac{c}{b}jt\right), Y_l(x) \sin\left(\frac{c}{b}jt\right), Y_l(x) : \mu_{i,lj} > d, \quad 1 \leq j, l \leq k \right\}. \end{aligned}$$

Через a_{lj} , b_{lj} обозначим коэффициенты разложения функции $u \in L_2(\Omega)$ в ряд Фурье по системе (23). С помощью неравенств Хаусдорфа-Юнга и Гёльдера стандартно доказывается существование констант $z_0 \in (0, 1)$, $C_0 \in (0, \infty)$, не зависящих от $k, i \in \{0, 1\}$, таких, что

$$\|u\|_r^2 \leq C_0 \sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^k |\mu_{i,lj}|^{z_0} (a_{lj}^2 + b_{lj}^2) \quad \text{для всех } u \in S_{i,k} \cap R(L_i). \tag{26}$$

Введём обозначения:

$$s_0 = \max_{\Omega} s(x, t), \quad s_1 = \min_{\Omega} s(x, t),$$

$$U_k = \left\{ v = \sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^k Y_l \left(a_{lj} \cos\left(\frac{c}{b}jt\right) + b_{lj} \sin\left(\frac{c}{b}jt\right) \right) : \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^k |\mu_{i,lj}|^{z_0} (a_{lj}^2 + b_{lj}^2) = 1 \right\}.$$

Используя (26), оценим значения функционала J на множествах $U_k \cap S_{i,l}^{-d}$, $d > 0$:

$$J(u) \leq -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^k |\mu_{i,lj}| (a_{lj}^2 + b_{lj}^2) + \frac{s_0}{r} \|u\|_r^r \leq -\frac{1}{2} d^{1-z_0} + \frac{s_0}{r} C_0^{r/2}$$

для каждой

$$u = \sum_{l=1}^k \sum_{j=0}^k Y_l \left(a_{ij} \cos\left(\frac{c}{b}jt\right) + b_{ij} \sin\left(\frac{c}{b}jt\right) \right) \in U_k \cap S_{i,l}^{-d}.$$

Если ввести обозначение $d(R) = (2(R + s_0 r^{-1} C_0^{r/2}))^{1/(1-z_0)}$ при $R > 0$, то для любой функции $u \in U_k \cap S_{i,l}^{-d(R)}$ будет иметь место неравенство

$$J(u) \leq -R. \tag{27}$$

Через C_1, C_2, \dots будем обозначать константы, не зависящие от k . Для произвольного положительного числа y и любой функции $u \in S_{i,g}^{-y}$ выведем оценку

$$J(u) \geq -\frac{1}{2} y \|u\|^2 + \frac{s_1}{r} \|u\|_r^r \geq C_1 \|u\|_r^r - \frac{1}{2} y \|u\|^2 \geq -C_2 y^{r/(r-2)} \quad \text{для всех } u \in S_{i,g}^{-y},$$

где $C_2 = (r - 2)/(2r^{r/(r-2)} C_1^{2/(r-2)})$.

Обозначим $l(y) = -C_2 y^{r/(r-2)} - 1$ и зафиксируем произвольное действительное число $R > 0$. Выберем действительное число $R_1 > d(R)$ такое, что $S_{i,l}^{-R_1}$ является собственным подпространством $S_{i,l}^{-d(R)}$. Тогда найдётся собственная функция $u_0(x, t) \in U_k$ оператора L_i с собственным значением $\mu_0 \in (-R_1, -d(R)]$. Следовательно, $l(R_1) < J(u_0) \leq -R$ и $l(R_1) < -R$.

Докажем, что отрезок $[l(R_1), -R]$ содержит значение функционала $J(u)$ в некоторой его критической точке. Если предположить противное, то из деформационной леммы работы [15] следует существование нечётного непрерывного отображения $F : S_{i,k} \rightarrow S_{i,k}$ такого, что

$$F(\{u \in S_{i,k} : J(u) \leq -R\}) \subset \{u \in S_{i,k} : J(u) \leq l(R_1)\}.$$

Каждую функцию $u \in S_{i,k}$ представим в виде $u = u^l + u^g$, где $u^l \in S_{i,l}^{-R_1}$, $u^g \in S_{i,g}^{-R_1}$. Через P обозначим линейный оператор из $S_{i,k}$ в $S_{i,l}^{-R_1}$ такой, что $Pu = u^l$ для любых функций $u = u^l + u^g \in S_{i,k}$. Рассмотрим нечётное непрерывное отображение $PF : S_{i,k} \rightarrow S_{i,l}^{-R_1}$. Поскольку $\dim S_{i,l}^{-d(R)} > \dim S_{i,l}^{-R_1}$, то из теоремы Борсук вытекает существование $v_0 \in U_k \cap S_{i,l}^{-d(R)}$ такого, что

$$PF(v_0) = 0.$$

Поэтому $F(v_0) = (F(v_0))^g \in S_{i,g}^{-R_1}$, и значит,

$$J(F(v_0)) > l(R_1). \tag{28}$$

Из (27) и включения (28) следует

$$J(v_0) < -R, \quad J(F(v_0)) \leq l(R_1).$$

Последнее неравенство противоречит (28). Противоречие получено в связи с предположением о том, что не существует критического значения функционала J на отрезке $[l(R_1), -R]$. Таким образом, доказано существование последовательности функций $u_k \in S_{i,k}$ (индекс i в записи u_k опущен для упрощения) такой, что

$$J'(u_k) = 0, \tag{29}$$

$$l(R_1) < J(u_k) \leq -R. \tag{30}$$

Осуществим предельный переход при $k \rightarrow \infty$. Для этого выведем оценку нормы $\|u_k\|_r$, не зависящую от k . Из (29) и (30) следуют соотношения

$$((u_k)_{tt} + (u_k)_{xxxx} - a(u_k)_{xx}, \psi) + \int_{\Omega} s(x, t)|u_k|^{r-2}u_k\psi \, dx \, dt = 0 \quad \text{для любой } \psi \in S_{i,k}, \tag{31}$$

$$l(R_1) \leq \frac{1}{2}((u_k)_{tt} + (u_k)_{xxxx} - a(u_k)_{xx}, u_k) + \frac{1}{r} \int_{\Omega} s(x, t)|u_k|^r \, dx \, dt \leq -R.$$

Если в (30) положить $\psi = u_k$, то из последнего неравенства и (30) получим оценки

$$C_4 \geq \|u_k\|_r \geq C_3, \tag{32}$$

где

$$C_3 = \left(\frac{2r}{r-2} \frac{R}{s_0} \right)^{1/r}, \quad C_4 = \left(\frac{2r}{2-r} \frac{l(R_1)}{s_1} \right)^{1/r}.$$

Из оценок (32) вытекает также ограниченность последовательности $\|s(x, t)|u_k|^{r-2}u_k\|_r$. Отсюда и из (32) следует существование слабо сходящейся в $L_r(\Omega)$ подпоследовательности последовательности u_k , для которой сходится слабо в $L_r(\Omega)$ также соответствующая подпоследовательность последовательности $\{s(x, t)|u_k|^{r-2}u_k\}$. Чтобы не вводить новый индекс, будем считать, что $u_k \rightarrow u$ слабо в $L_r(\Omega)$ и $s(x, t)|u_k|^{r-2}u_k \rightarrow v_0$ слабо в $L_r(\Omega)$.

Докажем, что $v_0 = s(x, t)|u|^{r-2}u$ и что функция u является обобщённым решением соответствующих задач (1)–(3); (1), (2), (4). Разложим функции u_k , u в ряд Фурье по системе (23) и обозначим через $\{a_{lj}^k, b_{lj}^k\}$, $\{a_{lj}, b_{lj}\}$ коэффициенты Фурье функций u_k и u соответственно. Обозначим

$$D_N^k = \sum_{|\mu_{i,lj}| \geq N} |\mu_{i,lj}|((a_{lj}^k)^2 + (b_{lj}^k)^2).$$

Покажем, что $D_N^k \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ равномерно по k . Обозначим

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ -1, & t \leq 0 \end{cases}$$

и подставим в (30) функцию

$$\psi_k = \sum_{|\mu_{i,lj}| \geq N} \theta(\mu_{i,lj}) Y_l(x) \left(a_{lj}^k \cos\left(\frac{c}{b}jt\right) + b_{lj}^k \sin\left(\frac{c}{b}jt\right) \right) \in S_{i,k}.$$

Если к полученному соотношению применить неравенство Гёльдера и воспользоваться оценкой (26), то получим

$$D_N^k \leq s_0 \int_{\Omega} |u_k|^{r-1} |\psi_0| dx dt \leq s_0 \left(\int_{\Omega} |u_k|^r \right)^{(r-1)/r} \left(\int_{\Omega} |\psi_k|^r \right)^{1/r} \leq \\ \leq s_0 C_4^{r-1} \left(C_0 \sum_{|\mu_{i,lj}| \geq N} |\mu_{i,lj}|^{z_0} ((a_{lj}^k)^2 + (b_{lj}^k)^2) \right)^{1/2} \leq s_0 C_4^{r-1} C_0^{1/2} \frac{1}{N^{(1-z_0)/2}} (D_n^k)^{1/2}.$$

Поэтому $D_N^k \leq s_0^2 C_4^{2(r-1)} C_0 / N^{1-z_0}$ и, следовательно, существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} ((u_k)_{tt} + (u_k)_{xxxx} - a(u_k)_{xx}, u_k) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mu_{i,lj} (a_{lj}^2 + b_{lj}^2). \tag{33}$$

Зафиксируем $k_0 \in \mathbb{N}$, $\psi \in S_{i,k_0}$ и перейдём в равенстве (31) к пределу при $k \rightarrow \infty$:

$$(u, \psi_{tt} + \psi_{xxxx} - a\psi_{xx}) + \int_{\Omega} v_0 \psi dx dt = 0. \tag{34}$$

Докажем, что имеет место равенство

$$v_0 = s(x, t) |u|^{r-2} u. \tag{35}$$

Подставим в равенство (31) $\psi = u_k$ и, используя (33), перейдём к пределу при $k \rightarrow \infty$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} s(x, t) |u_k|^r dx dt = - \lim_{k \rightarrow \infty} ((u_k)_{tt} + (u_k)_{xxxx} - a(u_k)_{xx}, u_k) = - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mu_{i,lj} (a_{lj}^2 + b_{lj}^2). \tag{36}$$

Покажем, что существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u, (u_k)_{tt} + (u_k)_{xxxx} - a(u_k)_{xx}) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mu_{i,lj} (a_{lj}^2 + b_{lj}^2). \tag{37}$$

Обозначим

$$G_L^K = \sum_{\substack{|\mu_{i,lj}| \geq L \\ l,j \leq K}} |\mu_{i,lj}| ((a_{lj})^2 + (b_{lj})^2), \quad K, L \in \mathbb{N}, \quad K > L, \quad r' = \frac{r}{r-1}.$$

Подставим в равенство (34) функцию

$$\psi_0 = \sum_{\substack{|\mu_{i,lj}| \geq L \\ l,j \leq K}} \theta(\mu_{i,lj}) Y_l(x) \left(a_{lj} \cos\left(\frac{c}{b} j t\right) + b_{lj} \sin\left(\frac{c}{b} j t\right) \right).$$

Воспользовавшись неравенством Гёльдера, получим

$$G_L^K = - \int_{\Omega} v_0 \psi_0 dx dt \leq \|v_0\|_{r'} \|\psi_0\|_r \leq \\ \leq \|v_0\|_{r'} \sqrt{C_0} \left(\sum_{\substack{|\mu_{i,lj}| \geq L \\ l,j \leq K}} |\mu_{i,lj}|^{z_0} ((a_{lj})^2 + (b_{lj})^2) \right)^{1/2} \leq \frac{\|v_0\|_{r'} \sqrt{C_0}}{L^{(1-z_0)/2}} \sqrt{G_L^K}.$$

Отсюда вытекает неравенство $G_L^K \leq C_0 \|v_0\|_{r'}^2 / L^{1-z_0}$. Таким образом, существует предел

$$\lim_{K \rightarrow \infty} G_L^K = \sum_{|\mu_{i,lj}| \geq L} |\mu_{i,lj}| (a_{lj})^2 + (b_{lj})^2 \equiv G_L$$

и $G_L \leq C_0 \|v_0\|_{r'}^2 / L^{1-z_0}$. Отсюда и из (36) следует равенство (37). Положим в (34) $\psi = u_k$ и, используя (37), перейдём к пределу при $k \rightarrow \infty$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (u, (u_k)_{tt} + (u_k)_{xxxx} - a(u_k)_{xx}) + \int_{\Omega} v_0 u \, dx \, dt = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mu_{i,lj} (a_{lj}^2 + b_{lj}^2) + \int_{\Omega} v_0 u \, dx \, dt = 0.$$

Из последнего равенства и из (36) получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} s(x, t) |u_k|^r \, dx \, dt = \int_{\Omega} v_0 u \, dx \, dt. \quad (38)$$

Для доказательства (35) воспользуемся неравенством

$$\int_{\Omega} s(x, t) (|v|^{r-2} v - |u_k|^{r-2} u_k) (v - u_k) \, dx \, dt \geq 0,$$

справедливым для произвольной функции $v \in L_r(\Omega)$, и перейдём в этом неравенстве к пределу, используя равенство (38):

$$\int_{\Omega} (s(x, t) |v|^{r-2} v - v_0) (v - u) \, dx \, dt \geq 0 \quad \text{для любой } v \in L_r(\Omega).$$

Отсюда выводится соотношение (35). Из (34) и (35) вытекает, что u является обобщённым решением. Из (32), (35) и (38) следует оценка

$$\|u\|_r \geq \left(\frac{2rs_0 R}{r-2s_1^2} \right)^{1/r}.$$

Аналогично доказательству леммы 2 в работе [16] обосновывается сходимость следующих рядов:

$$\sum_{\mu_{i,lj} \neq 0} \frac{l}{|\mu_{i,lj}|} (|a_{lj}| + |b_{lj}|), \quad \sum_{\mu_{i,lj} \neq 0} \frac{j^2}{|\mu_{i,lj}|} (|a_{lj}| + |b_{lj}|).$$

Отсюда, из (16), (21) и из конечномерности ядра $\ker L_i$ вытекают включения (11) и условие $u_{xx} \in C(\Omega)$. Теорема доказана.

Заключение. Для квазилинейного уравнения (1) доказано существование бесконечной неограниченной последовательности периодических решений на отрезке при выполнении граничных условий, соответствующих шарнирно опирающимся и упруго закреплённым концам.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 0705-2020-0047).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М., 1968.
2. Ji S., Wei H. Periodic solutions of a semilinear Euler–Bernoulli beam equation with variable coefficients // London J. Math. 2020. V. 53. P. 71–94.
3. Feireisl E. Time periodic solutions to a semilinear beam equations // Nonlin. Anal. 1988. V. 12. P. 279–290.

4. *Elishakoff I., Pentaras D.* Apparently the first closed-form solution of inhomogeneous elastically restrained vibrating beams // *J. Sound Vibration*. 2006. V. 298. № 1–2. P. 439–445.
5. *Eliasson L.H., Grebert B., Kuksin S.B.* KAM for the nonlinear beam equation // *Geom. Funct. Anal.* 2016. V. 26. № 6. P. 1588–1715.
6. *Wang Y., Ji S.* A result on quasi-periodic solutions of a nonlinear beam equation with a quasi-periodic forcing term // *Z. Angew. Math. Phys.* 2012. V. 63. № 1. P. 189–190.
7. *Chen B., Gao Y., Li Y.* Periodic solutions to nonlinear Euler–Bernoulli beam equations // *Dynam. Systems (Math. DS)*. 2018. № 1. P. 23–49.
8. *Wang Y.* Quasi-periodic solutions of a quasi-periodically forced nonlinear beam equation // *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* 2012. V. 17. P. 2682–2700.
9. *Рудаков И.А.* Периодические решения квазилинейного уравнения вынужденных колебаний балки // *Изв. РАН. Сер. мат.* 2015. Т. 79. № 5. С. 215–238.
10. *Yamaguchi M.* Existence of periodic solutions of second order nonlinear evolution equations and applications // *Funkc. Ekvacioj*. 1995. V. 38. P. 519–538.
11. *Рудаков И.А.* О периодических решениях одного уравнения колебаний балки // *Дифференц. уравнения*. 2018. Т. 54. № 5. С. 691–700.
12. *Рудаков И.А.* Задача о периодических колебаниях двутавровой балки с закреплённым концом в случае резонанса // *Дифференц. уравнения*. 2020. Т. 56. № 3. С. 343–352.
13. *Nazarov A.I., Nikitin Y.Y.* Exact L2-small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems // *Prob. Theory and Related Fields*. 2004. V. 129. № 4. P. 469–494.
14. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 2010.
15. *Nirenberg L.* Variational and topological methods in nonlinear problems // *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*. 1981. V. 4. № 3. P. 267–302.
16. *Рудаков И.А.* Периодические решения квазилинейного уравнения колебаний балки с однородными граничными условиями // *Дифференц. уравнения*. 2012. Т. 48. № 6. С. 811–825.

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет),
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 22.03.2022 г.
После доработки 09.06.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.

УДК 519.635.4

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНИКА РАССЕЯНИЯ В РАМКАХ ИНТЕГРОФУНКЦИОНАЛЬНОГО МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ

© 2022 г. Ю. А. Еремин, Е. В. Захаров

Получено аналитическое выражение для полного сечения рассеяния в методе дискретных источников, использующем представление диаграммы направленности рассеянного поля через неортогональные на единичной сфере функции. Последнее обстоятельство позволяет при численной реализации на порядок сократить время вычисления интегрального поперечника рассеяния. Кроме того, использование оптической теоремы и аналитических выражений для сечения экстинкции даёт возможность вычислять сечение поглощения излучения без процедуры интегрирования ближнего поля по поверхности рассеивателя.

DOI: 10.31857/S0374064122080076, EDN: CGAYAK

Введение. Интегрофункциональные методы, такие, например, как метод фундаментальных решений [1] и др., используются в многочисленных практических приложениях. Они объединяют целое семейство методов анализа задач рассеяния, которые ориентируются на представления полей через распределённые мультипольные источники (фундаментальные решения), локализованные внутри рассеивателя, среди которых можно выделить метод T -матриц [2], метод вспомогательных источников [3], метод дискретных источников (МДИ) [4] и метод множественных мультиполей [5], а также их модификации. Дело в том, что при использовании обобщений теории Ми (см. [6]) для решения задач рассеяния на проницаемых телах сталкиваются с серьёзными проблемами в случае анализа рассеивателей несферической геометрией в связи с несправедливостью гипотезы Рэлея [7]. В этих случаях приходится использовать представления для полей через распределённые мультиполи, локализованные в различных точках внутри рассеивателя. Вследствие последнего обстоятельства поле на бесконечности и диаграмма рассеяния представляются через неортогональные на единичной сфере функции, что требует выполнения численного интегрирования для вычисления интегрального поперечника рассеяния [4]. Однако процедура интегрирования по единичной сфере отнимает много ресурсов при рассмотрении атмосферных частиц или при исследовании эритроцитов, особенно если необходимо решать задачи рассеяния для набора углов падения плоской электромагнитной волны [8, 9]. Это обстоятельство существенно отличается от случая использования векторных сферических гармоник, ортогональных на единичной сфере, и позволяет вычислять полное сечение рассеяния в аналитическом виде, используя лишь амплитуды мультиполей, локализованных в одной единственной точке.

В настоящей работе показано, что аналогичное выражение можно получить и в случае использования неортогональных функций, т.е. распределённых мультипольных источников. Полученное аналитическое выражение для поперечника рассеяния позволяет не только на порядок снижать затраты на его вычисление, но и, используя оптическую теорему (см. работы [10, 11]), вычислять такую важную характеристику ближнего поля, как сечение поглощения без интегрирования ближнего поля по поверхности рассеивателя.

1. Постановка граничной задачи. Рассмотрим постановку задачи дифракции плоской электромагнитной волны на однородной осесимметричной проницаемой частице с внутренней областью D_i в пространстве \mathbb{R}^3 , ограниченной гладкой замкнутой поверхностью $\partial D_i \in C^{(2,\nu)}$, и внешней неограниченной областью D_e . Будем полагать, что плоская волна $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$ распространяется под углом $\pi - \theta_0$ по отношению к оси симметрии Oz . Тогда математическая постановка граничной задачи может быть записана в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_i = -jk_0 \mathbf{H}_i, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}_{i,e} = jk_0 \varepsilon_{i,e} \mathbf{E}_{i,e}, \quad M \in D_{i,e}, \quad D_e = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}_i,$$

$$\hat{\mathbf{n}}_i \times (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_e) = \hat{\mathbf{n}}_i \times \mathbf{E}^0, \quad \hat{\mathbf{n}}_i \times (\mathbf{H}_i - \mathbf{H}_e) = \hat{\mathbf{n}}_i \times \mathbf{H}^0, \quad Q \in \partial D_i,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{r} \cdot \left(\sqrt{\varepsilon_e} \mathbf{E}_e \times \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{H}_e \right) = 0, \quad r = |M|. \quad (1)$$

Здесь $\{\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i\}$ – полное поле в области D_i , $\{\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e\}$ – рассеянное поле в D_e , $\hat{\mathbf{n}}_i$ – единичная внешняя нормаль к поверхности ∂D_i , $\varepsilon_{i,e}$ – диэлектрические проницаемости сред в областях $D_{i,e}$ соответственно, при этом $\text{Im } \varepsilon_i \leq 0$, $\text{Im } \varepsilon_e = 0$, $k_0 = \omega/c$, ω – частота, c – скорость света, \mathbf{r} – радиус-вектор в точку M из начала координат, временная зависимость выбрана в виде $\exp(j\omega t)$. Как известно, поставленная граничная задача (1) имеет единственное классическое решение [12].

2. Метод дискретных источников. Будем строить приближённое решение граничной задачи (1) на основе метода дискретных источников [4]. Разделим поле падающей линейно поляризованной плоской волны $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$ на поля P - и S -поляризации, тогда соответствующие поля могут быть записаны как

$$\mathbf{E}^{0,P}(M) = (\cos \theta_0 \hat{\mathbf{e}}_x + \sin \theta_0 \hat{\mathbf{e}}_z) \psi(x, z), \quad \mathbf{H}^{0,P}(M) = -\sqrt{\varepsilon_e} \hat{\mathbf{e}}_y \psi(x, z), \quad (2)$$

$$\mathbf{E}^{0,S}(M) = \hat{\mathbf{e}}_y \psi(x, z), \quad \mathbf{H}^{0,S}(M) = \sqrt{\varepsilon_e} (\cos \theta_0 \hat{\mathbf{e}}_x + \sin \theta_0 \hat{\mathbf{e}}_z) \psi(x, z), \quad (3)$$

где $\psi(x, z) = e^{-jk_e(x \sin \theta_0 - z \cos \theta_0)}$, $k_e = k_0 \sqrt{\varepsilon_e}$, $(\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z)$ – базис декартовой системы координат. Будем строить поля в областях $D_{i,e}$ на основе векторных потенциалов следующего вида [4]:

$$\mathbf{A}_{mn}^{1\alpha}(M) = Y_m^\alpha(\zeta, z_n^\alpha) \cos[(m+1)\varphi] \hat{\mathbf{e}}_\rho - Y_m^\alpha(\zeta, z_n^\alpha) \sin[(m+1)\varphi] \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \quad \alpha = i, e,$$

$$\mathbf{A}_{mn}^{2\alpha}(M) = Y_m^\alpha(\zeta, z_n^\alpha) \sin[(m+1)\varphi] \hat{\mathbf{e}}_\rho + Y_m^\alpha(\zeta, z_n^\alpha) \cos[(m+1)\varphi] \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \quad (4)$$

$$\mathbf{A}_n^{3\alpha}(M) = Y_0^\alpha(\zeta, z_n^\alpha) \hat{\mathbf{e}}_z.$$

Здесь $Y_m^e(\zeta, z_n^e) = h_m^{(2)}(k_{e,l} R_{z_n^e}) (\rho/R_{z_n^e})^m$, $Y_m^i(\zeta, z_n^i) = j_m(k_i R_{z_n^i}) (\rho/R_{z_n^i})^m$, где $h_m^{(2)}$ – сферические функции Ханкеля, j_m – сферические функции Бесселя, $k_i = k_0 \sqrt{\varepsilon_i}$, $\zeta = (\rho, z)$, $\rho^2 = x^2 + y^2$, $R_{z_n}^2 = \rho^2 + (z - z_n)^2$, $\{z_n^\alpha\}_{n=1}^{N_\alpha^m}$ – координаты дискретных источников, распределённых вдоль оси вращения Oz , $(\hat{\mathbf{e}}_\rho, \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \hat{\mathbf{e}}_z)$ – базис цилиндрической системы координат. Отметим, что векторные потенциалы (4) удовлетворяют уравнениям Гельмгольца в соответствующих областях $D_{i,e}$.

Решение задачи дифракции (1) будем строить отдельно для P - и S -поляризаций. Тогда конкретные представления для полей в случае P -поляризации принимают вид (см. [4])

$$\mathbf{E}_\alpha^N(M) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N_\alpha^m} \left\{ p_{mn}^\alpha \frac{j}{k_0 \varepsilon_\alpha} \text{rot rot } \mathbf{A}_{mn}^{1\alpha} + q_{mn}^\alpha \frac{j}{\varepsilon_\alpha} \text{rot } \mathbf{A}_{mn}^{2\alpha} \right\} + \sum_{n=1}^{N_\alpha^0} r_n^\alpha \frac{j}{k_0 \varepsilon_\alpha} \text{rot rot } \mathbf{A}_n^{3\alpha},$$

$$\mathbf{H}_\alpha^N(M) = \frac{j}{k_0} \text{rot } \mathbf{E}_\alpha^N(M), \quad \alpha = i, e. \quad (5)$$

Аналогично для случая S -поляризации представления для полей могут быть записаны как

$$\mathbf{E}_\alpha^N(M) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N_\alpha^m} \left\{ p_{mn}^\alpha \frac{j}{k_0 \varepsilon_\alpha} \text{rot rot } \mathbf{A}_{mn}^{2\alpha} + q_{mn}^\alpha \frac{j}{\varepsilon_\alpha} \text{rot } \mathbf{A}_{mn}^{1\alpha} \right\} + \sum_{n=1}^{N_\alpha^0} r_n^\alpha \frac{j}{\varepsilon_\alpha} \text{rot } \mathbf{A}_n^{3\alpha},$$

$$\mathbf{H}_\alpha^N(M) = \frac{j}{k_0} \text{rot } \mathbf{E}_\alpha^N(M), \quad \alpha = i, e. \quad (6)$$

Легко убедиться в том, что построенные поля (5) и (6) для P - и S -поляризаций удовлетворяют системе уравнений Максвелла (1) и условиям излучения на бесконечности, а условия сопряжения на поверхности ∂D_i выполняются приближённо посредством выбора неизвестных амплитуд дискретных источников для фурье-гармоник по $\varphi : m = 0, 1, \dots, \vec{p}_m = = \{p_{mn}^i, q_{mn}^i, p_{mn}^e, q_{mn}^e\}$, а также вектора независимой от φ гармоники $\vec{r} = \{r_n^i, r_n^e\}$ (см. [4]).

После определения амплитуд дискретных источников вычисляются ближние поля (5), (6) и компоненты диаграммы направленности рассеянного поля $\mathbf{F}(\theta, \varphi)$, которая определяется на единичной сфере $\{0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ следующим образом [13, с. 131]:

$$\frac{\mathbf{E}(M)}{|\mathbf{E}^0(M)|} = \frac{e^{ik_e r}}{r} \mathbf{F}(\theta, \varphi) + o(r^{-1}), \quad r \rightarrow \infty.$$

В силу представления (5) выражения для компонент диаграммы направленности для P -поляризации имеют вид

$$F_\theta^P(\theta, \varphi) = jk_e \sum_{m=0}^M (j \sin \theta)^m \cos[(m+1)\varphi] \sum_{n=1}^{N_e^m} (p_{mn}^e \cos \theta + q_{mn}^e) e^{-jk_e z_n^e \cos \theta} - jk_e \sin \theta \sum_{n=1}^{N_e^0} r_n^e e^{-jk_e z_n^e \cos \theta},$$

$$F_\varphi^P(\theta, \varphi) = -jk_e \sum_{m=0}^M (j \sin \theta)^m \sin[(m+1)\varphi] \sum_{n=1}^{N_e^m} (p_{mn}^e + q_{mn}^e \cos \theta) e^{-jk_e z_n^e \cos \theta}. \quad (7)$$

Аналогично для S -поляризации:

$$F_\theta^S(\theta, \varphi) = jk_e \sum_{m=0}^M (j \sin \theta)^m \sin[(m+1)\varphi] \sum_{n=1}^{N_e^m} (p_{mn}^e \cos \theta - q_{mn}^e) e^{-jk_e z_n^e \cos \theta},$$

$$F_\varphi^S(\theta, \varphi) = jk_e \sum_{m=0}^M (j \sin \theta)^m \cos[(m+1)\varphi] \sum_{n=1}^{N_e^m} (p_{mn}^e \cos \theta - q_{mn}^e) e^{-jk_e z_n^e \cos \theta} +$$

$$+ jk_e \sin \theta \sum_{n=1}^{N_e^0} r_n^e e^{-jk_e z_n^e \cos \theta}. \quad (8)$$

Компоненты диаграммы определяются на единичной сфере.

3. Интегральный поперечник рассеяния. Определим интегральный поперечник рассеяния, который определяется через компоненты диаграммы направленности (7), (8) следующим образом:

$$\sigma_{scs}^{P,S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sigma^{P,S}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (9)$$

где $\sigma^{P,S}(\theta, \varphi) = |F_\theta^{P,S}(\theta, \varphi)|^2 + |F_\varphi^{P,S}(\theta, \varphi)|^2$.

Далее ограничимся случаем P -поляризации, так как компоненты диаграммы (7) и (8) содержат одинаковые выражения, если поменять местами их компоненты θ и φ . Прежде всего заметим, что

$$\int_0^{2\pi} \sigma^P(\theta, \varphi) d\varphi = \sigma(\theta) = 2\pi k_e^2 \sum_{m=0}^M (\sin^2 \theta)^m \sum_{n,l=1}^{N_e^m} (p_{mn}^e \cos \theta + q_{mn}^e) (p_{ml}^{e*} \cos \theta + q_{ml}^{e*}) \exp(j\beta_{nl} \cos \theta) +$$

$$+ 2\pi k_e^2 \sin^2 \theta \sum_{n,l=1}^{N_e^0} r_n^e r_l^{e*} \exp(j\beta_{nl} \cos \theta),$$

где введено обозначение $\beta_{nl} = -k_e(z_n^e - z_l^e)$. Тогда для вычисления интеграла

$$\int_0^\pi \sigma(\theta) \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 \sigma(x) dx$$

достаточно вычислить интегралы вида

$$I_m^{(k)}(\beta) = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^m x^k \exp(j\beta x) dx, \quad m = 0, 1, \dots, \quad k = 0, 1, 2. \tag{10}$$

Рассмотрим сначала базовый интеграл вида $I_m^{(0)}(\beta)$, значение которого приведено в таблице в [14, с. 335, № 3.387.2]:

$$I_m^{(0)}(\beta) = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^m \exp(j\beta x) dx = 2m! \left(\frac{2}{\beta}\right)^m j_m(\beta). \tag{11}$$

Выражение в правой части формулы (11) справедливо при всех β , отличных от нуля, в случае $\beta = 0$ для вычисления достаточно использовать асимптотику сферической функции Бесселя для малых аргументов [15, с. 256, № 10.1.4], т.е. $j_m(x) = x^m / (2m + 1)!! + o(x^m)$, $x \rightarrow 0$. Тогда интеграл (11) будет равен $I_m^{(0)}(0) = 2(2m)!! / (2m + 1)!!$. Легко видеть, что интегралы вида (10) для значений индекса $k = 1, 2$ получаются из $I_m^{(0)}(\beta)$ следующим образом:

$$I_m^{(1)} = \frac{\partial}{j\partial\beta} I_m^{(0)}, \quad I_m^{(2)} = -\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} I_m^{(0)}. \tag{12}$$

В результате получен следующий основной результат.

Теорема. Аналитическое представление для интегрального поперечника рассеяния (9) граничной задачи дифракции (1) в рамках метода дискретных источников принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{scs}} = & 2\pi k_e^2 \sum_{m=0}^M \sum_{n,l=1}^{N_e^m} (p_{mn}^e p_{ml}^{e*} I_m^{(2)}(\beta_{nl}) + 2 \operatorname{Re} (p_{mn}^e q_{ml}^{e*}) I_m^{(1)}(\beta_{nl}) + q_{mn}^e q_{ml}^{e*} I_m^{(0)}(\beta_{nl})) + \\ & + 2\pi k_e^2 \sum_{n,l=1}^{N_e^0} r_n^e r_l^{e*} I_1^{(0)}(\beta_{nl}), \end{aligned} \tag{13}$$

где значения $I_m^{(k)}(\beta)$, $k = 0, 1, 2$, задаются соотношениями (10)–(12), а коэффициенты p_{ml}^{e*} , q_{ml}^{e*} и r_l^{e*} – комплексно сопряжённые по отношению к p_{ml}^e , q_{ml}^e и r_l^e соответственно.

Таким образом, как только вычислены амплитуды дискретных источников \vec{p}_m и \vec{r} , сечение рассеяния вычисляется в аналитическом виде простым суммированием амплитуд, без интегрирования компонент диаграммы по единичной сфере.

Во многих практических приложениях возникает необходимость вычисления сечения поглощения электромагнитной энергии проникаемым рассеивателем с комплексным индексом рефракции, которое представляется в виде интеграла по внешней поверхности рассеивателя:

$$\sigma_{\text{abs}} = - \operatorname{Re} \int_{\partial D_e} [(\mathbf{E}_e^N + \mathbf{E}^0) \times (\mathbf{H}_e^N + \mathbf{H}^0)^*] \cdot \hat{\mathbf{n}}_j dS. \tag{14}$$

Вычислить сечение (14) можно с помощью либо интегрирования ближнего поля $\{\mathbf{E}_e^N, \mathbf{H}_e^N\}$ (5), (6), либо оптической теоремы [10], которая имеет вид

$$\sigma_{\text{ext}}(\lambda, \theta_0) = \sigma_{\text{abs}}(\lambda, \theta_0) + \sigma_{\text{sca}}(\lambda, \theta_0), \quad (15)$$

здесь σ_{ext} – сечение экстинкции (см. [10, 11]), которое показывает сколько энергии данный рассеиватель извлекает из поля плоской волны. В нашем случае сечение экстинкции для P -, S -поляризацій в рамках метода дискретного рассеяния может быть представлено в аналитическом виде [4]:

$$\sigma_{\text{ext}}^P = -\frac{4\pi}{k_e} \text{Im} [F_{\theta}^P(\pi - \theta_0, \pi)], \quad \sigma_{\text{ext}}^S = \frac{4\pi}{k_e} \text{Im} [F_{\varphi}^S(\pi - \theta_0, \pi)], \quad (16)$$

где $F_{\theta, \varphi}^{P, S}(\theta, \varphi)$ – соответствующие компоненты диаграммы направленности в направлении распространения плоской волны.

Таким образом, используя оптическую теорему (15), представления для сечения экстинкции (16) и аналитическую формулу для сечения рассеяния (13), можно легко вычислить сечение поглощения (14) без интегрирования ближнего поля по поверхности рассеивателя.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Еремин Ю.А., Захаров Е.В., Несмеянова Н.И.* Метод фундаментальных решений в задачах дифракции электромагнитных волн на телах вращения // Вычислит. методы и программирование. 1980. Т. 32. С. 28–44.
2. *Doicu A.* Null-field method with discrete sources // Generalized Multipole Techniques for Electromagnetic and Light Scattering / Ed. T. Wriedt. Amsterdam, 1999. P. 229–255.
3. *Tsitsas N.L., Zouros G.P., Fikioris G., Leviatan Y.* On methods employing auxiliary sources for 2-d electromagnetic scattering by non-circular shapes // IEEE Trans. AP. 2018. V. 66. № 10. P. 5443–5452.
4. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г.* Квазиклассические модели квантовой наноплазмоники на основе метода дискретных источников (обзор) // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2021. Т. 61. № 4. С. 34–62.
5. *Smajic J., Hafner C., Raguin L., et al.* Comparison of numerical methods for the analysis of plasmonic structures // J. Comput. Theor. Nanosci. 2009. V. 6. № 3. P. 763–774.
6. *Кюркчан А.Г., Стернин Б.Ю., Шталов В.Е.* Особенности продолжения волновых полей // Успехи физ. наук. 1996. Т. 166. № 12. С. 1285–1308.
7. *Farafonov V.G., Pin V.B., Vinokurov A.A.* Near- and far field light scattering by nonspherical particles: applicability of methods that involve a spherical basis // Opt. Spectr. 2010. V. 109. № 3. P. 432–443.
8. *Doicu A., Eremim Yu.A., Efremenko D., Trautmann T.* Methods with discrete sources for electromagnetic scattering by large axisymmetric particles with extreme geometries // J. Quantitat. Spectr. Radiative Transfer. 2015. V. 164. P. 137–146.
9. *Eremina E., Hellmers J., Eremim Yu.A., Wriedt T.* Different shape models for erythrocyte: light scattering analysis based on the discrete sources method // J. Quantitat. Spectr. Radiative Transfer. 2006. V. 102. № 1. P. 3–10.
10. *Newton R.G.* Optical theorem and beyond // Amer. J. Phys. 1976. V. 44. P. 639–642.
11. *Еремин Ю.А.* Обобщение оптической теоремы для мультиполя на основе интегральных преобразований // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 9. С. 1156–1161.
12. *Купрадзе В.Д.* О приближенном решении задач математической физики // Успехи мат. наук. 1967. Т. 22. Вып. 2. С. 59–107.
13. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.
14. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963.
15. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М., 1979.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 20.03.2022 г.
После доработки 20.03.2022 г.
Принята к публикации 25.05.2022 г.

УДК 517.96

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ДЛЯ НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТОК В ПРИЛОЖЕНИИ К ОДНОМЕРНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ С СИЛЬНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В ЯДРЕ

© 2022 г. А. С. Ненашев

Построены формулы приближённого вычисления одномерных сингулярных и гиперсингулярных интегралов на отрезке при произвольном разбиении. На основе построенных квадратурных формул разработана численная схема решения характеристического гиперсингулярного уравнения на отрезке, доказана оценка скорости сходимости приближённого решения к точному.

DOI: 10.31857/S0374064122080088, EDN: CGDVCE

Введение. Одномерные интегральные уравнения с сильной особенностью в ядре возникают в ряде прикладных задач математической физики, например, при моделировании излучения проволочных антенн [1], в двумерной задаче бесциркуляционного обтекания [2, с. 153–154] и др. Характеристическим уравнением, описывающим основные особенности решения таких задач, является гиперсингулярное интегральное уравнение на интервале (a, b) :

$$\int_a^b \frac{g(x)}{(x-x_0)^2} dx = f(x_0), \quad x_0 \in (a, b), \quad (1)$$

где интеграл в левой части уравнения (1) понимается в смысле конечного значения по Адамару (см. [3]):

$$\int_a^b \frac{g(x)}{(x-x_0)^2} dx \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{x_0-\varepsilon} \frac{g(x)}{(x-x_0)^2} dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b \frac{g(x)}{(x-x_0)^2} dx - \frac{g(x_0+\varepsilon) + g(x_0-\varepsilon)}{\varepsilon} \right\}.$$

Рассмотрению метода дискретных особенностей как метода решения уравнения (1) посвящён ряд работ [2, с. 353–355; 4, с. 84–86; 5]. В частности, И.К. Лифановым [2, с. 282–284] доказана сходимость квадратурных формул типа прямоугольников к интегралу (1), при этом принципиальное значение имеет характер разбиения отрезка $[a, b]$ на равные части $a = x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = b$ и выбор точек коллокации, являющихся серединами частичных отрезков $x_{0i} = (x_i + x_{i+1})/2$. В статье [5] представлены квадратурные формулы, позволяющие отказаться от жёстких ограничений на характер разбиения отрезка:

$$\int_a^b \frac{g(x)}{(x-x_{0j})^2} dx \approx \sum_{i=1}^N (a_{ij}g(x_{0i}) + b_{ij}g'(x_{0i})), \quad (2)$$

где

$$a_{ji} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{(x-x_{0j})^2}, \quad b_{ji} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x-x_{0i}}{(x-x_{0j})^2} dx.$$

Для применения квадратурной формулы (2) к решению интегрального уравнения (1) необходимо задать способ аппроксимации значения производной $g'(x_0)$ в точках коллокации. В работе [5] используется следующая аппроксимация:

$$g'(x_{0i}) \approx \frac{g(x_{0i+1}) - g(x_{0i-1})}{x_{0i+1} - x_{0i-1}}, \quad i = \overline{2, N-1}. \tag{3}$$

Там же приведена оценка скорости сходимости квадратурной формулы (3), однако отсутствует оценка сходимости приближённого решения уравнения (1), полученного на основе соответствующей численной схемы.

Метод коллокации, основанный на кусочно-линейной аппроксимации решения, предложен в статье [6]. Отличительной особенностью предложенного подхода является выбор точек коллокации не внутри участков разбиения, а на их границе.

В настоящей работе предлагается альтернативный подход к построению квадратурных формул для приближённого вычисления гиперсингулярного интеграла, использующий расположение точек коллокации в центрах отрезков разбиения. На основе квадратурных формул построена численная схема решения характеристического уравнения (3), дана оценка скорости сходимости его приближённого решения к точному.

1. Вычисление сингулярного интеграла на отрезке. Рассмотрим сначала формулы приближённого вычисления сингулярного интеграла по интервалу (a, b) , понимаемого в смысле главного значения по Коши:

$$\int_a^b \frac{g(x)}{x - x_0} dx \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{x_0 - \varepsilon} \frac{g(x)}{x - x_0} dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b \frac{g(x)}{x - x_0} dx \right\}.$$

Предположим, что функция $g(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера.

Определение 1. Будем обозначать, что $g(x) \in H(\alpha)$, если существуют константы $A > 0$ и $\alpha \in (0, 1]$ такие, что для любых $x, x_0 \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|g(x) - g(x_0)| \leq A|x - x_0|^\alpha.$$

В дальнейших рассуждениях будем использовать следующее неравенство из монографии [7, с. 21], справедливое для любых $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$ и $\theta \in (0, 1]$:

$$|\sigma_1^\theta - \sigma_2^\theta| \leq |\sigma_1 - \sigma_2|^\theta.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Для любого разбиения отрезка $[a, b]$ на N произвольных частей последовательностью точек $a = x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = b$, удовлетворяющего условию

$$h_{\max} \leq \gamma h_{\min}, \tag{4}$$

где $\gamma \geq 1$ не зависит от N , $h_{\max} = \max_{1 \leq i \leq N} \{h_i\}$, $h_{\min} = \min_{1 \leq i \leq N} \{h_i\}$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, и $g(x) \in H(\alpha)$, справедлива следующая оценка:

$$\left| \int_a^b \frac{g(x)}{x - x_{0j}} dx - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{g(x_{0i})}{x - x_{0j}} dx \right| \leq O\left(\frac{\ln N}{N^\alpha}\right), \quad j = \overline{1, N}, \tag{5}$$

где точки коллокации x_{0j} являются серединами отрезков $[x_j, x_{j+1}]$:

$$x_{0j} = \frac{x_j + x_{j+1}}{2}. \tag{6}$$

Доказательство. В первую очередь заметим, что с учётом условия (4) справедливы неравенства

$$h_j \leq h_{\max} \leq \gamma h_{\min} \leq \frac{\gamma(b-a)}{N} = O(1/N), \quad 1 \leq j \leq N.$$

Далее, представим левую часть соотношения (5) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b \frac{g(x) dx}{x-x_{0j}} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{g(x_{0i}) dx}{x-x_{0j}} \right| \leq \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{(g(x) - g(x_{0j})) dx}{x-x_{0j}} \right| + \\ & + \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{g(x_{0j}) dx}{x-x_{0j}} \right| + \left| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(g(x) - g(x_{0i})) dx}{x-x_{0j}} \right| = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Рассмотрим интегралы I_1 , I_2 и I_3 :

$$I_1 \leq A \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dx}{|x-x_{0j}|^{1-\alpha}} = \frac{2A}{\alpha} \left(\frac{h_j}{2}\right)^\alpha \leq O(1/N^\alpha),$$

$$I_2 = \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{g(x_{0j}) dx}{x-x_{0j}} \right| = \left| g(x_{0j}) \ln \left| \frac{x_{j+1}-x_{0j}}{x_j-x_{0j}} \right| \right| = 0,$$

$$\begin{aligned} I_3 & \leq A \left(\frac{h_{\max}}{2}\right)^\alpha \left(\int_a^{x_j} \frac{dx}{x_{0j}-x} + \int_{x_{j+1}}^b \frac{dx}{x-x_{0j}} \right) = \\ & = A \left(\frac{h_{\max}}{2}\right)^\alpha \left(\ln(b-x_{0j}) + \ln(x_{0j}-a) - 2 \ln(h_j/2) \right) \leq O\left(\frac{\ln N}{N^\alpha}\right). \end{aligned}$$

Объединяя результаты для I_1 , I_2 и I_3 , получаем утверждение теоремы.

Следствие (обобщение теоремы 1). Будем обозначать, что $G(x, x_0) \in H(\alpha, \rho(x_0))$, если существует функция $\rho(x_0) > 0$, заданная на интервале (a, b) , и константы $A > 0$ и $\alpha \in (0, 1]$, не зависящие от x_0 , такие, что для функции $G(\cdot, \cdot)$ выполняется неравенство

$$|G(x, x_0) - G(y, x_0)| \leq A\rho(x_0)|x-y|^\alpha.$$

Тогда справедлива следующая оценка:

$$\left| \int_a^b \frac{G(x, x_{0j})}{x-x_{0j}} dx - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{G(x_{0i}, x_{0j})}{x-x_{0j}} dx \right| \leq \rho(x_{0j}) O\left(\frac{\ln N}{N^\alpha}\right), \quad j = \overline{1, N}.$$

Рассмотрим теперь применимость предложенного подхода приближённого вычисления сингулярного интеграла для более широкого класса функций, имеющих интегрируемую особенность на концах интервала (a, b) .

Определение 2. Будем обозначать, что $g(x) \in H_{\lambda, \mu}^*(\alpha)$, если существуют константы $\lambda, \mu \in (0, 1)$ такие, что имеет место представление

$$g(x) = \frac{\psi(x)}{(x-a)^\lambda(b-x)^\mu},$$

где $\psi(x) \in H(\alpha)$ на отрезке $[a, b]$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Для любого разбиения отрезка $[a, b]$ на N произвольных частей последовательностью точек $a = x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = b$, удовлетворяющего условию (4), и для функции $g(x) \in H_{\lambda, \mu}^*(\alpha)$, справедлива следующая оценка:

$$\left| \int_a^b \frac{g(x) dx}{x - x_{0j}} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{g(x_{0i}) dx}{x - x_{0j}} \right| \leq \frac{1}{(x_{0j} - a)(b - x_{0j})} O\left(\frac{\ln N}{N^\beta}\right), \quad j = \overline{1, N}, \quad (7)$$

где $\beta = \min\{\alpha, 1 - \mu, 1 - \lambda\}$, а точки коллокации x_{0j} выбираются в соответствии с условием (6).

Доказательство. Представим функцию $g(x)$ следующим образом:

$$g(x) = \frac{\psi_1(x)}{b - a} \left(\frac{(b - x)^{1-\mu}}{(x - a)^\lambda} + \frac{(x - a)^{1-\lambda}}{(b - x)^\mu} \right) = \frac{\psi_1(x)}{(x - a)^\lambda} + \frac{\psi_2(x)}{(b - x)^\mu} = g_1(x) + g_2(x),$$

где $\psi_1(x) \in H(\beta_1)$, $\psi_2(x) \in H(\beta_2)$, $\beta_1 = \min\{\alpha, 1 - \mu\}$, $\beta_2 = \min\{\alpha, 1 - \lambda\}$.

Левая часть неравенства (7) представима в виде

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \frac{g(x) dx}{x - x_{0j}} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{g(x_{0i}) dx}{x - x_{0j}} \right| &\leq \left| \int_a^b \frac{g_1(x) dx}{x - x_{0j}} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{g_1(x_{0i}) dx}{x - x_{0j}} \right| + \\ &+ \left| \int_a^b \frac{g_2(x) dx}{x - x_{0j}} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{g_2(x_{0i}) dx}{x - x_{0j}} \right| = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Оценим интеграл

$$I_1 \leq \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{g_1(x) dx}{x - x_{0j}} \right| + \left| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{g_1(x) - g_1(x_{0i})}{x - x_{0j}} dx \right| = I_{1,1} + I_{1,2} \quad (8)$$

и слагаемое

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{\psi_1(x) dx}{(x - a)^\lambda (x - x_{0j})} \right| = \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{\psi_1(x)(x - a)^{1-\lambda} dx}{(x - a)(x - x_{0j})} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{x_{0j} - a} \left(\left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{\psi_1(x)(x - a)^{1-\lambda} - \psi_1(x_{0j})(x_{0j} - a)^{1-\lambda}}{x - x_{0j}} dx \right| + \right. \\ &+ \left. \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{\psi_1(x_{0j})(x_{0j} - a)^{1-\lambda} dx}{x - x_{0j}} \right| + \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{\psi_1(x)(x - a)^{1-\lambda} dx}{x - a} \right| \right) = \\ &= \frac{1}{x_{0j} - a} (I_{1,1,1} + I_{1,1,2} + I_{1,1,3}). \end{aligned}$$

С учётом выбора точек x_{0j} справедливо, что $I_{1,1,2} = 0$. Далее, так как $\psi_1(x) \in H(\beta_1)$ и $(x - a)^{1-\lambda} \in H(1 - \lambda)$, то $\psi_1(x)(x - a)^{1-\lambda} \in H(\beta)$, где $\beta = \min\{\alpha, 1 - \lambda, 1 - \mu\}$. Поэтому существует константа $B_1 > 0$ такая, что выполняется условие

$$|\psi_1(x)(x - a)^{1-\lambda} - \psi_1(x_{0j})(x_{0j} - a)^{1-\lambda}| \leq B_1 |x - x_{0j}|^\beta.$$

Тогда

$$I_{1,1,1} \leq B_1 \int_{x_j}^{x_{j+1}} |x - x_{0j}|^{\beta-1} dx = \frac{2B_1}{\beta} \left(\frac{h_j}{2}\right)^\beta = O(1/N^\beta).$$

Так как функция $\psi_1(x) \in H(\beta_1)$, то она ограничена на отрезке $[a, b]$, поэтому существует константа $B_2 > 0$ такая, что $|\psi_1(x)| \leq B_2$. Отсюда следует, что

$$I_{1,1,3} \leq B_2 \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{dx}{|x - a|^\lambda} = \frac{B_2}{1 - \lambda} ((x_{j+1} - a)^{1-\lambda} - (x_j - a)^{1-\lambda}) \leq \frac{B_2}{1 - \lambda} h_j^{1-\lambda} = O(1/N^{1-\lambda}).$$

Объединив результаты для интегралов $I_{1,1,1}$, $I_{1,1,2}$ и $I_{1,1,3}$, получим оценку

$$I_{1,1} \leq \frac{1}{x_{0j} - a} O(1/N^\beta). \tag{9}$$

Далее,

$$\begin{aligned} I_{1,2} &= \left| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\psi(x)}{(x-a)^\lambda} - \frac{\psi(x_{0i})}{(x_{0i}-a)^\lambda} \right) \frac{dx}{x - x_{0j}} \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \psi(x_{0i}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{1}{(x-a)^\lambda} - \frac{1}{(x_{0i}-a)^\lambda} \right) \frac{dx}{x - x_{0j}} \right| + \\ &+ \left| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\psi(x) - \psi(x_{0i})}{(x-a)^\lambda} \frac{dx}{x - x_{0j}} \right| = I_{1,2,1} + I_{1,2,2}, \\ I_{1,2,1} &\leq B_2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left((x-a)^{1-\lambda} - \frac{x-a}{(x_{0i}-a)^\lambda} \right) \frac{dx}{(x-a)(x-x_{0j})} \right| \leq \\ &\leq \frac{B_2}{x_{0j} - a} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| (x-a)^{1-\lambda} - \frac{x-a}{(x_{0i}-a)^\lambda} \right| \frac{dx}{|x-x_{0j}|} + \\ &+ \frac{B_2}{x_{0j} - a} \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| (x-a)^{1-\lambda} - \frac{x-a}{(x_{0i}-a)^\lambda} \right| \frac{dx}{x-a} + \\ &+ \frac{B_2}{x_{0j} - a} \int_a^{x_2} \left| \frac{1}{(x-a)^\lambda} - \frac{1}{(x_{01}-a)^\lambda} \right| dx = I_{1,2,1,1} + I_{1,2,1,2} + I_{1,2,1,3}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \left| (x-a)^{1-\lambda} - \frac{x-a}{(x_{0i}-a)^\lambda} \right| &= \left| (x-a)^{1-\lambda} - \frac{x_{0i}-a}{(x_{0i}-a)^\lambda} + \frac{x-x_{0i}}{(x_{0i}-a)^\lambda} \right| \leq \\ &\leq |(x-a)^{1-\lambda} - (x_{0i}-a)^{1-\lambda}| + \left| \frac{x-x_{0i}}{(x_{0i}-a)^\lambda} \right| \leq 2(h_i/2)^{1-\lambda}, \end{aligned}$$

ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned}
 I_{1,2,1,1} &\leq \frac{2B_2(h_{\max}/2)^{1-\lambda}}{x_{0j} - a} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{|x - x_{0j}|} = \\
 &= \frac{2B_2(h_{\max}/2)^{1-\lambda}}{x_{0j} - a} \left(\int_a^{x_j} \frac{dx}{x_{0j} - x} + \int_{x_{j+1}}^b \frac{dx}{x - x_{0j}} \right) = \\
 &= \frac{2B_2(h_{\max}/2)^{1-\lambda}}{x_{0j} - a} (\ln((b - x_{0j})(x_{0j} - a)) - 2 \ln(h_j/2)) = \frac{1}{x_{0j} - a} O\left(\frac{\ln N}{N^{1-\lambda}}\right), \\
 I_{1,2,1,2} &\leq \frac{2B_2(h_{\max}/2)^{1-\lambda}}{x_{0j} - a} \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{x - a} \leq \\
 &\leq \frac{2B_2(h_{\max}/2)^{1-\lambda}}{x_{0j} - a} \sum_{i=2}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{x - a} = \frac{2B_2(h_{\max}/2)^{1-\lambda}}{x_{0j} - a} \int_{x_2}^b \frac{dx}{x - a} = \\
 &= \frac{2B_2(h_{\max}/2)^{1-\lambda}}{x_{0j} - a} (\ln(b - a) - \ln h_1) = \frac{1}{x_{0j} - a} O\left(\frac{\ln N}{N^{1-\lambda}}\right), \\
 I_{1,2,1,3} &\leq \frac{B_2}{x_{0j} - a} \left(\int_a^{x_2} \frac{dx}{(x - a)^\lambda} + \int_a^{x_2} \frac{dx}{(x_{01} - a)^\lambda} \right) = \\
 &= \frac{B_2}{x_{0j} - a} \left(\frac{h_1^{1-\lambda}}{1 - \lambda} + \frac{h_1}{(h_1/2)^\lambda} \right) = \frac{1}{x_{0j} - a} O\left(\frac{1}{N^{1-\lambda}}\right).
 \end{aligned}$$

Объединив оценки для интегралов $I_{1,2,1,1}$, $I_{1,2,1,2}$ и $I_{1,2,1,3}$, имеем

$$I_{1,2,1} \leq \frac{1}{x_{0j} - a} O\left(\frac{\ln N}{N^{1-\lambda}}\right).$$

Далее, так как $\psi_1(x) \in H(\beta_1)$, то существует константа $B_3 > 0$ такая, что

$$|\psi_1(x) - \psi_1(y)| \leq B_3|x - y|^{\beta_1},$$

ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned}
 I_{1,2,2} &= \left| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(\psi(x) - \psi(x_{0i}))(x - a)^{1-\lambda}}{(x - a)(x - x_{0j})} dx \right| \leq \\
 &\leq \frac{1}{x_{0j} - a} \left(\left| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(\psi(x) - \psi(x_{0i}))(x - a)^{1-\lambda}}{x - x_{0j}} dx \right| + \left| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(\psi(x) - \psi(x_{0i}))(x - a)^{1-\lambda}}{x - a} dx \right| \right) \leq \\
 &\leq \frac{1}{x_{0j} - a} \left(B_3(h_i/2)^\alpha (b - a)^{1-\lambda} \left(\int_a^{x_j} \frac{dx}{x_{0j} - x} + \int_{x_{j+1}}^b \frac{dx}{x - x_{0j}} \right) + B_3(h_i/2)^{\beta_1} \int_a^b \frac{dx}{(x - a)^\lambda} \right) = \\
 &= \frac{B_3(h_i/2)^{\beta_1}}{x_{0j} - a} \left((b - a)^{1-\lambda} (\ln((x_{0j} - a)(b - x_{0j})) - 2 \ln(h_j/2)) + \frac{(b - a)^{1-\lambda}}{1 - \lambda} \right) = \frac{1}{x_{0j} - a} O\left(\frac{\ln N}{N^{\beta_1}}\right).
 \end{aligned}$$

Объединив результаты для интегралов $I_{1,2,1}$ и $I_{1,2,2}$, запишем

$$I_{1,2} \leq \frac{1}{x_{0j} - a} \left(O\left(\frac{\ln N}{N^{1-\lambda}}\right) + O\left(\frac{\ln N}{N^{\beta_1}}\right) \right) \leq \frac{1}{x_{0j} - a} O\left(\frac{\ln N}{N^\beta}\right).$$

Отсюда и из оценок (8), (9) следует, что

$$I_1 \leq \frac{1}{x_{0j} - a} O\left(\frac{\ln N}{N^\beta}\right).$$

С помощью аналогичных выкладок для оценки интеграла I_2 получим

$$I_2 \leq \frac{1}{b - x_{0j}} O\left(\frac{\ln N}{N^\beta}\right),$$

поэтому

$$I_1 + I_2 \leq \frac{1}{x_{0j} - a} O\left(\frac{\ln N}{N^\beta}\right) + \frac{1}{b - x_{0j}} O\left(\frac{\ln N}{N^\beta}\right) \leq \frac{1}{(x_{0j} - a)(b - x_{0j})} O\left(\frac{\ln N}{N^\beta}\right),$$

что завершает доказательство теоремы.

2. Вычисление гиперсингулярного интеграла на отрезке. Рассмотрим теперь задачу приближённого вычисления гиперсингулярного интеграла (1). Будем исследовать квадратурную формулу

$$\int_a^b \frac{g(x) dx}{(x - x_{0j})^2} \approx g(x_{0j}) \int_a^b \frac{dx}{(x - x_{0j})^2} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \frac{g(x_{0i}) - g(x_{0j})}{x_{0i} - x_{0j}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{x - x_{0j}}.$$

Нам потребуется следующий вспомогательный результат.

Лемма 1. Пусть функция $g(x)$ имеет производную $g'(x) \in H(\alpha)$ на интервале (a, b) , т.е.

$$|g'(x) - g'(y)| \leq A|x - y|^\alpha \quad \text{для всех } x, y \in (a, b).$$

Тогда для любых $x, y \in (a, b)$ справедлива оценка

$$|G(x, x_0) - G(y, x_0)| \leq \frac{A}{1 + \alpha} |x - y|^\alpha, \tag{10}$$

т.е. $G(x, x_0) \in H(\alpha, 1)$, где

$$G(x, x_0) = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \tag{11}$$

Доказательство. Воспользуемся соотношением, основанным на формуле производной сложной функции

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \int_0^1 g'(x_0 + (x - x_0)\theta) d\theta,$$

тогда

$$\begin{aligned} |G(x, x_0) - G(y, x_0)| &\leq \int_0^1 |g'(x_0 + (x - x_0)\theta) - g'(x_0 + (y - x_0)\theta)| d\theta \leq \\ &\leq A \int_0^1 |((x - y)\theta)|^\alpha d\theta = \frac{A}{1 + \alpha} |x - y|^\alpha, \end{aligned}$$

что доказывает утверждение леммы.

Справедлива следующая

Теорема 3. Для любого разбиения отрезка $[a, b]$ на N произвольных частей последовательностью точек $a = x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = b$, удовлетворяющего условию (4), и для функции $g'(x) \in H(\alpha)$ справедлива следующая оценка:

$$\left| \int_a^b \frac{g(x) dx}{(x - x_{0j})^2} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \frac{g(x_{0i}) - g(x_{0j})}{x_{0i} - x_{0j}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{x - x_{0j}} - g(x_{0j}) \int_a^b \frac{dx}{(x - x_{0j})^2} \right| \leq O\left(\frac{\ln N}{N^\alpha}\right), \quad j = \overline{1, N}, \tag{12}$$

где точки коллокации x_{0j} выбираются в соответствии с условием (6).

Доказательство. Представим левую часть соотношения (12) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b \frac{g(x) dx}{(x - x_{0j})^2} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \frac{g(x_{0i}) - g(x_{0j})}{x_{0i} - x_{0j}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{x - x_{0j}} - g(x_{0j}) \int_a^b \frac{dx}{(x - x_{0j})^2} \right| = \\ & = \left| \int_a^b \frac{g(x) - g(x_{0j})}{(x - x_{0j})^2} dx - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \frac{g(x_{0i}) - g(x_{0j})}{x_{0i} - x_{0j}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{x - x_{0j}} \right| = \\ & = \left| \int_a^b \frac{G(x, x_{0j}) dx}{x - x_{0j}} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N G(x_{0i}, x_{0j}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{x - x_{0j}} \right|, \end{aligned} \tag{13}$$

где функция $G(x, x_0)$ определяется по формуле (11).

Согласно лемме 1 функция $G(x, x_0)$ удовлетворяет условию Гёльдера по первому аргументу (10), откуда с учётом сформулированного выше следствия получаем утверждение теоремы.

Рассмотрим теперь применимость предложенного подхода приближённого вычисления гиперсингулярного интеграла для более широкого класса функций, имеющих интегрируемую особенность производных на концах интервала (a, b) .

Теорема 4. Для любого разбиения отрезка $[a, b]$ на N произвольных частей последовательностью точек $a = x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = b$, удовлетворяющего условию (4), и функции $g(x)$ такой, что её производная представима в виде

$$g'(x) = \frac{\psi(x)}{(x - a)^{1-\lambda}(b - x)^{1-\mu}}, \quad \psi(x) \in H(\alpha), \quad 0 < \lambda, \quad \mu \leq 1,$$

справедлива следующая оценка:

$$\left| \int_a^b \frac{g(x) dx}{(x - x_{0j})^2} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \frac{g(x_{0i}) - g(x_{0j})}{x_{0i} - x_{0j}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{x - x_{0j}} - g(x_{0j}) \int_a^b \frac{dx}{(x - x_{0j})^2} \right| \leq \frac{1}{(x_{0j} - a)(b - x_{0j})} O\left(\frac{\ln N}{N^\beta}\right), \quad j = \overline{1, N},$$

где $\beta = \min\{\alpha, \mu, \lambda\}$, а точки коллокации x_{0j} выбираются в соответствии с условием (6).

Доказательство. Для доказательства исследуем свойства функции $G(x, x_0)$, определяемой формулой (11). Представим производную функции $g(x)$ следующим образом:

$$g'(x) = \frac{1}{b-a} \left(\frac{\psi(x)(b-x)^\mu}{(x-a)^{1-\lambda}} + \frac{\psi(x)(x-a)^\lambda}{(b-x)^{1-\mu}} \right) = \frac{\psi_1(x)}{(x-a)^{1-\lambda}} + \frac{\psi_2(x)}{(b-x)^{1-\mu}} = g'_1(x) + g'_2(x),$$

где $\psi_1(x) \in H(\beta_1)$, $\beta_1 = \min\{\alpha, \mu\}$, и $\psi_2(x) \in H(\beta_2)$, $\beta_2 = \min\{\alpha, \lambda\}$.

Исследуем отдельно свойства функций $g_1(x)$ и $g_2(x)$. Для функции $g_1(x)$ справедлива оценка

$$|g_1(x) - g_1(y)| = \left| \int_y^x \frac{\psi_1(t)dt}{(t-a)^{1-\lambda}} \right| \leq \frac{B_1}{\lambda} |(x-a)^\lambda - (y-a)^\lambda| \leq \frac{B_1}{\lambda} |x-y|^\lambda,$$

где $B_1 = \max_{x \in [a,b]} \{|\psi_1(x)|\}$, поэтому $g_1(x) \in H(\lambda)$.

Далее рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} G_1(x, x_0) &= \frac{g_1(x) - g_1(x_0)}{x - x_0} = \int_0^1 g'_1(x_0 + (x - x_0)\theta) d\theta = \int_0^1 \frac{\psi_1(x_0 + (x - x_0)\theta)}{(x_0 + (x - x_0)\theta - a)^{1-\lambda}} d\theta = \\ &= \frac{1}{x_0 - a} \left(\int_0^1 \psi_1(x_0 + (x - x_0)\theta)(x_0 + (x - x_0)\theta - a)^\lambda d\theta - \right. \\ &\left. - \int_0^1 \frac{\psi_1(x_0 + (x - x_0)\theta)(x - x_0)\theta}{(x_0 + (x - x_0)\theta - a)^{1-\lambda}} d\theta \right) = \frac{1}{x_0 - a} (F_{1,1}(x, x_0) - F_{1,2}(x, x_0)). \end{aligned}$$

Согласно свойству гёльдеровский функций (см. [7, с. 22]) справедливо, что $\psi_1(x)(x-a)^\lambda \in H(\beta)$, т.е.

$$|\psi_1(x)(x-a)^\lambda - \psi_1(y)(y-a)^\lambda| \leq C_1|x-y|^\beta,$$

поэтому

$$|F_{1,1}(x, x_0) - F_{1,1}(y, x_0)| \leq C_1 \int_0^1 |(x-y)\theta|^\beta d\theta = \frac{C_1}{1+\beta} |x-y|^\beta.$$

Далее преобразуем функцию $F_{1,2}$:

$$\begin{aligned} F_{1,2}(x, x_0) &= \int_0^1 g'_1(x_0 + (x - x_0)\theta)(x - x_0)\theta d\theta = \\ &= \int_0^1 \frac{dg_1(x_0 + (x - x_0)\theta)}{d\theta} \theta d\theta = g_1(x) - \int_0^1 g_1(x_0 + (x - x_0)\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Используя тот факт, что $g_1(x) \in H(\lambda)$, имеем

$$\begin{aligned} |F_{1,2}(x, x_0) - F_{1,2}(y, x_0)| &\leq |g_1(x) - g_1(y)| + \int_0^1 |g_1(x_0 + (x - x_0)\theta) - g_1(x_0 + (y - x_0)\theta)| d\theta \leq \\ &\leq \frac{B_1}{\lambda} |x-y|^\lambda + \frac{B_1}{\lambda} \int_0^1 |(x-y)\theta|^\lambda d\theta = \frac{B_1}{\lambda} |x-y|^\lambda \left(1 + \frac{1}{1+\lambda} \right). \end{aligned}$$

Объединяя полученные оценки гёльдеровости функций $F_{1,1}$ и $F_{1,2}$, запишем неравенство

$$|G_1(x, x_0) - G_1(y, x_0)| \leq \frac{A_1|x - y|^\beta}{x_0 - a}. \tag{14}$$

Рассуждая аналогичным образом относительно функции $g_2(x)$, получаем, что для

$$G_2(x, x_0) = \frac{g_2(x) - g_2(x_0)}{x - x_0}$$

справедлива оценка

$$|G_2(x, x_0) - G_2(y, x_0)| \leq \frac{A_2|x - y|^\beta}{b - x_0}. \tag{15}$$

Так как

$$G(x, x_0) = G_1(x, x_0) + G_2(x, x_0),$$

то из оценок (14) и (15) следует

$$|G(x, x_0) - G(y, x_0)| \leq \frac{A|x - y|^\beta}{(x_0 - a)(b - x_0)}.$$

Из разложения аналогичного (13) и следствия получим утверждение теоремы.

3. Численное решение гиперсингулярного интегрального уравнения на отрезке.

Рассмотрим вопрос численного решения интегрального уравнения (1). Запишем уравнение в операторной форме

$$Ag = f. \tag{16}$$

Пусть задано разбиение отрезка $[a, b]$ на N произвольных частей последовательностью точек

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = b,$$

которое будем обозначать как E^N . С ним связана последовательность точек коллокации $E_0^N = (x_{01}, \dots, x_{0N})$, где $x_{0i} = (x_i + x_{i+1})/2$, $i = \overline{1, N}$.

Введём оператор дискретизации T_N , формирующий вектор-столбец значений функции g :

$$T_N g = (g(x_{01}), \dots, g(x_{0N}))^T.$$

Будем искать приближённое решение уравнения (16) в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$\bar{A}_N \bar{g}_N = T_N f, \tag{17}$$

где

$$\bar{g}_N = (g_1, \dots, g_N)^T, \quad \bar{A}_N = \{a_{ji}\}, \quad i, j = \overline{1, N},$$

$$a_{jj} = \int_a^b \frac{dx}{(x - x_{0j})^2} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N a_{ji}, \quad a_{ji} = \frac{1}{x_{0i} - x_{0j}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{x - x_{0j}}, \quad j \neq i.$$

Обозначим через X_N и Y_N конечномерные пространства, в которых действует оператор \bar{A}_N , т.е. $X_N \xrightarrow{\bar{A}_N} Y_N$. Введём следующие нормы в пространствах X_N и Y_N :

$$\|\bar{g}_N\|_{X_N} = \max_{1 \leq i \leq N} \{|g_i|\}, \quad \|\bar{f}_N\|_{Y_N} = \max_{1 \leq i \leq N} \{(x_{0i} - a)(b - x_{0i})|f_i|\}.$$

Лемма 2. Для нормы оператора \bar{A}_N справедлива оценка

$$\|\bar{A}_N \bar{g}_N\|_{Y_N} \geq (b - a) \|\bar{g}_N\|_{X_N}.$$

Доказательство. Заметим, что справедливы следующие неравенства:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x - x_{0j})^2} < 0, \quad j = \overline{1, N},$$

$$\frac{1}{x_{0i} - x_{0j}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{x - x_{0j}} > 0, \quad j \neq i,$$

поэтому

$$a_{jj} < 0, \quad a_{ji} > 0, \quad j \neq i, \quad a_{jj} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N a_{ji} = \int_a^b \frac{dx}{(x - x_{0j})^2} < 0.$$

Выберем такой индекс j , что $|g_j|$ принимает максимальное значение. Тогда

$$\begin{aligned} \|\bar{A}_N \bar{g}_N\|_{Y_N} &\geq (x_{0j} - a)(b - x_{0j}) \left| \sum_{i=1}^N g_i a_{ji} \right| \geq \|\bar{g}_N\|_{X_N} (x_{0j} - a)(b - x_{0j}) \left(|a_{jj}| - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N |a_{ji}| \right) = \\ &= \|\bar{g}_N\|_{X_N} (x_{0j} - a)(b - x_{0j}) \left| \int_a^b \frac{dx}{(x - x_{0j})^2} \right| = (b - a) \|\bar{g}_N\|_{X_N}, \end{aligned}$$

что доказывает утверждение леммы.

Теперь можем сформулировать теорему относительно оценки точности приближённого решения уравнения (16).

Теорема 5. Пусть задано точное решение $g(x)$ уравнения (16), производная которого имеет представление

$$g'(x) = \frac{\psi(x)}{(x - a)^{1-\lambda}(b - x)^{1-\mu}}, \quad \psi(x) \in H(\alpha), \quad 0 < \lambda, \quad \mu \leq 1.$$

Тогда справедлива следующая оценка точности приближённого решения, полученного из уравнения (17):

$$\|\bar{g}_N - T_N g\|_{X_N} \leq O\left(\frac{\ln N}{N^\beta}\right),$$

где $\beta = \min\{\alpha, \mu, \lambda\}$.

Доказательство. Из леммы 2 и оценки теоремы 4 следует

$$\begin{aligned} \|\bar{g}_N - T_N g\|_{X_N} &\leq \frac{\|\bar{A}_N \bar{g}_N - \bar{A}_N T_N g\|_{Y_N}}{b - a} = \frac{\|T_N A g - \bar{A}_N T_N g\|_{Y_N}}{b - a} \leq \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq N} \left\{ \left| \frac{(x_{0j} - a)(b - x_{0j})}{b - a} \frac{1}{(x_{0j} - a)(b - x_{0j})} O\left(\frac{\ln N}{N^\beta}\right) \right| \right\} \leq O\left(\frac{\ln N}{N^\beta}\right), \end{aligned}$$

что доказывает утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лифанов И.К., Ненашев А.С.* Гиперсингулярные интегральные уравнения и теория проволочных антенн // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 1. С. 121–137.
2. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995.
3. *Сетуха А.В.* Метод граничных интегральных уравнений с гиперсингулярными интегралами в краевых задачах // Итоги науки и техн. Сер. Совр. математика и её прил. Темат. обз. 2019. Т. 160. С. 114–125.
4. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М., 1985.
5. *Дворак А.В., Ивенина С.В., Филлимонов С.В.* Модифицированный метод дискретных вихрей для решения сингулярных интегральных уравнений на отрезке // Науч. вестн. Московского гос. техн. ун-та гражданской авиации. 2011. С. 103–106.
6. *Сетуха А.В.* Сходимость численного метода решения гиперсингулярного интегрального уравнения на отрезке с применением кусочно-линейных аппроксимаций на неравномерной сетке // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 2. С. 237–249.
7. *Мухомелшвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.

Научно-технологический университет
“Сириус”, пгт. Сириус, Краснодарский край

Поступила в редакцию 03.04.2022 г.
После доработки 21.04.2022 г.
Принята к публикации 25.05.2022 г.

УДК 517.968.7+537.876

ГРАНИЧНОЕ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ РАССЕЙНИЯ НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИХ ТЕЛАХ

© 2022 г. А. Б. Самохин, А. В. Сетуха

Рассмотрено приложение метода граничных интегральных уравнений к задаче рассеяния на системе идеально проводящих объектов электромагнитного поля, подчиняющегося нестационарным уравнениям Максвелла. Использовано интегральное представление электромагнитного поля через поверхностные токи. Основным результатом статьи состоит в том, что доказано существование краевых значений у электрического поля, определяемого таким интегральным представлением, которые выражаются через гиперсингулярный интеграл, понимаемый в смысле конечной части по Адамару. Это позволило свести задачу к интегро-дифференциальному уравнению эволюционного типа с запаздыванием, содержащему гиперсингулярный поверхностный интеграл. Также доказано, что если это уравнение имеет решение в определённом классе функций, то электрическое и магнитное поля, определяемые соответствующими интегральными представлениями, являются решением исходной задачи рассеяния для уравнений Максвелла.

DOI: 10.31857/S037406412208009X, EDN: CGFSFT

Введение. Метод граничных интегральных уравнений имеет широкое применение при решении задач рассеяния электромагнитных волн в монохроматическом случае, когда возникает краевая задача относительно составляющих электрического и магнитного полей, зависящих только от пространственных координат. В случае однородной среды, в которую помещены идеально проводящие или однородные диэлектрические объекты, известны интегральные представления для электромагнитного поля через поверхностные токи, что позволяет свести задачу рассеяния к решению интегральных уравнений, записанных на поверхности объекта, относительно этих токов [1, с. 262–342; 2, с. 25–26, 167; 3, с. 23; 4, с. 177–306].

Такой подход имеет целый ряд достоинств при численном моделировании электромагнитных процессов по сравнению с методами, основанными на непосредственном решении исходной краевой задачи в пространственной области. Здесь снижается размерность задачи: неизвестные функции ищутся только на граничной поверхности. При этом автоматически выполняются условия на бесконечности, что снимает проблему необходимости построения расчётной сетки в пространственной области больших размеров, актуальную при применении различных сеточных методов к исходной краевой задаче.

Значительный интерес представляет распространение метода граничных интегральных уравнений на нестационарные задачи для уравнений Максвелла во временной области. Однако это направление электродинамики значительно менее исследовано. В настоящей работе рассматривается задача рассеяния заданного первичного электромагнитного поля на системе идеально проводящих объектов (тел или экранов), помещённых в однородную внешнюю среду в нестационарной постановке. Распространение электромагнитного поля в окружающей среде описывается уравнениями Максвелла. Для такой задачи известен подход, основанный на применении интегрального представления электромагнитного поля через поверхностные токи (касательное векторное поле) и заряды (скалярная функция, заданная на поверхности) с использованием запаздывающих потенциалов. При этом задача сводится к системе из эволюционного интегро-дифференциального уравнения со слабо сингулярными поверхностными интегралами и дифференциального уравнения, связывающего токи и заряды [4, с. 200–203]. Также отметим, что для задачи рассеяния электромагнитной волны на неоднородном диэлектрическом теле интегро-дифференциальное уравнение эволюционного типа с запаздыванием и с интегралами по объёму получено в [5].

В настоящей работе нестационарные уравнения Максвелла для электромагнитного поля вне системы идеально проводящих тел и экранов сведены к граничному интегральному уравнению с применением интегрального представления только через поверхностные токи. При этом ядро интегрального уравнения имеет сильную особенность.

1. Постановка задачи для уравнений Максвелла. Рассматривается трёхмерная задача рассеяния электромагнитной волны, порождённой заданным первичным полем, на системе идеально проводящих объектов. Предполагается, что облучаемая система объектов может включать в себя идеально проводящие тела, каждое из которых ограничено замкнутой поверхностью, и идеально проводящие экраны, каждый из которых моделируется как незамкнутая поверхность с краем. Предположим, что поверхности тел образуют заданную суммарную поверхность Σ , которая может быть замкнутой (поверхность телесного объекта), незамкнутой (экраном), или состоять из нескольких замкнутых и незамкнутых ограниченных компонент. Обозначим также через Σ^{in} множество точек гладкости поверхности Σ , не лежащих на краю поверхности. Пусть Ω – область вне идеально проводящих объектов (область, образованная точками пространства, не лежащими на поверхности Σ и в областях, ограниченных замкнутыми компонентами этой поверхности).

Пусть окружающая среда является изотропной и однородной без проводимости, вне источников первичного поля отсутствуют токи и заряды. При этом электромагнитное поле вне облучаемых объектов и источников излучения описывается уравнениями Максвелла для напряжённости электрического и магнитного полей [6, с. 17] $\vec{E} = \vec{E}(x, t)$ и $\vec{H} = \vec{H}(x, t)$, t – время, $x = (x_1, x_2, x_3)$ – точки пространства:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2)$$

где ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости внешней среды, которые предполагаются константами.

Будем считать, что первичное поле, описываемое напряжённостями \vec{E}_{inc} , \vec{H}_{inc} , является заданным, это поле определено и удовлетворяет уравнениям (1), (2) в области вне источников поля (либо во всем пространстве), причём эта область включает в себя облучаемые объекты вместе с некоторой их окрестностью. Задача состоит в отыскании напряжённостей вторичных (отражённых) электрического и магнитного полей \vec{E} и \vec{H} , которые должны быть определены в области Ω вне облучаемых объектов. На поверхности облучаемых объектов должно выполняться граничное условие

$$\vec{n} \times \vec{E}_{\text{tot}} = 0, \quad (3)$$

где $\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_{\text{inc}} + \vec{E}$ – полное электрическое поле, \vec{n} – орт вектора нормали на поверхности Σ . На каждой замкнутой компоненте поверхности Σ вектор \vec{n} выбирается как вектор внешней нормали, условие (3) задаётся с внешней стороны поверхности. На каждой незамкнутой компоненте поверхности Σ вектор нормали выбирается на одной из сторон поверхности, при этом граничное условие должно выполняться для краевых значений электрического поля на обеих сторонах поверхности. Условие (3) должно быть выполнено в каждой точке $x \in \Sigma^{\text{in}}$.

Также на вторичное поле \vec{E} , \vec{H} ставятся: условие конечности энергии поля в любой ограниченной области, условия стремления к нулю на бесконечности и условие отсутствия волн, приходящих из бесконечности. Последнее условие можно записать в форме Мюллера [6, с. 45] (с учётом проведённого в [6, с. 18] обезразмеривания):

$$\begin{aligned} \vec{E} \rightarrow 0, \quad \vec{H} \rightarrow 0, \quad \left(|x| \vec{E} + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} [x \times \vec{H}] \right) \rightarrow 0, \\ \left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} |x| \vec{H} - [x \times \vec{E}] \right) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4)$$

2. Преобразование Фурье и некоторые его свойства. Для сведения задачи к нестационарному граничному интегро-дифференциальному уравнению будем использовать прямое и обратное преобразования Фурье

$$\hat{f}(\omega) \equiv F[f](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t} dt, \quad f(t) \equiv F^{-1}[\hat{f}](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{-i\omega t} d\omega. \tag{5}$$

При этом имеют место следующие свойства преобразования Фурье [7, с. 441, 445–447]:

$$F^{-1}[-i\omega \hat{f}(\omega)] = \frac{df(t)}{dt}, \quad F^{-1}[-\omega^2 \hat{f}(\omega)] = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}, \tag{6}$$

$$F^{-1}[e^{i\omega \Delta} \hat{f}(\omega)] = f(t - \Delta). \tag{7}$$

Заметим, что если $f \in L_2(\mathbb{R})$, то существует функция $\hat{f} = F[f] \in L_2(\mathbb{R})$ и $f = F^{-1}[\hat{f}]$, интегралы в формуле (5) существуют в смысле главного значения. Формулы (6) выполнены при условии $f' \in L_2(\mathbb{R})$ (для первой формулы) и $f'' \in L_2(\mathbb{R})$ (для второй формулы) [7, с. 441, 455–458].

Рассмотрим функцию $f(x, t)$, $x \in D$, где D – область в \mathbb{R}^n , скалярную или векторную: $f : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$. Пусть функция $f \in C[D \times \mathbb{R}]$ и удовлетворяет условию: существует функция $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ такая, что

$$|f(x, t)| \leq \varphi(t) \quad \text{для всех } x \in D, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Тогда функция $\hat{f}(x, \omega) \equiv F[f]$ есть функция, которая при каждом $\omega \in \mathbb{R}$ непрерывна по параметру x в области D . Если существует производная $f'_i(x, t) = \partial f(x, t)/\partial x_i$ такая, что $f'_i \in C[D \times \mathbb{R}]$, и функции f и f'_i удовлетворяют условию (8), то при каждом $\omega \in \mathbb{R}$ существует производная $\hat{f}'_i(x, \omega) = \partial \hat{f}(x, \omega)/\partial x_i$, причём $\hat{f}'_i = F[f'_i]$ и $\hat{f}'_i \in C[D \times \mathbb{R}]$.

Для доказательства этих свойств достаточно заметить, что при выполнении условия (8) для любых точек $x, y \in D$ имеем

$$|\hat{f}(y, \omega) - \hat{f}(x, \omega)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(y, t) - f(x, t))e^{i\omega t} dt \right| \leq I_1 + I_2 + I_3, \tag{9}$$

где

$$I_1 = \int_{|t|>R} |f(x, t)|e^{i\omega t} dt, \quad I_2 = \int_{|t|>R} |f(y, t)|e^{i\omega t} dt, \quad I_3 = \int_{|t|<R} |f(y, t) - f(x, t)|e^{i\omega t} dt,$$

R – некоторая константа. Для любого R найдётся окрестность $U(x)$ точки x такая, что функция $f(y, t)$ равномерно непрерывна как функция аргументов $(y, t) \in U(x) \times [-R, R]$. Тогда в силу условия (8) для любого $\varepsilon > 0$ найдётся константа R такая, что $I_1 + I_2 < \varepsilon/2$ при $y \in U(x)$, и для найденного R найдётся число $\delta > 0$ такое, что $I_3 < \varepsilon/2$ при $|x - y| < \delta$. Тогда $\hat{f}(y, \omega) \rightarrow \hat{f}(x, \omega)$ при $y \rightarrow x$, причём равномерно по переменной $\omega \in \mathbb{R}$.

Если функции f и f'_i удовлетворяют условию (8), то при $x \in D$ имеем

$$\hat{f}'_i(x, \omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x + \xi \vec{e}_i, t) - f(x, t)}{\xi} e^{i\omega t} dt,$$

\vec{e}_i , $i = 1, 2, 3$, – орты декартовой системы координат.

Заметим, что

$$\frac{f(x + \xi \vec{e}_i, t) - f(x, t)}{\xi} = f'_i(x^*, t),$$

где $x^* = x^*(\xi, t)$, $|x^* - x| \leq \xi$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x + \xi \vec{e}_i, t) - f(x, t)}{\xi} e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f'_i(x, t) e^{i\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} (f'_i(x^*, t) - f'_i(x, t)) e^{i\omega t} dt.$$

Оценивая второй интеграл так же, как интеграл в формуле (9), получаем, что $\hat{f}'_i = F[f'_i]$.

Непрерывность функции \hat{f}' следует из выполнения условия (8) для функции f' .

3. Уравнения Максвелла в частотной области. Вернёмся к рассматриваемой задаче для уравнений Максвелла (1), (2). Предположим, что $\vec{E} = \vec{E}(x, t)$ и $\vec{H} = \vec{H}(x, t)$ есть решение поставленной задачи на множестве $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, дважды непрерывно дифференцируемое на этом множестве, и такое, что сами поля \vec{E} и \vec{H} и все их первые производные по пространственным координатам и времени удовлетворяют условию (8). Тогда определены функции $\vec{E}_\omega(x)$ и $\vec{H}_\omega(x)$, $(x, \omega) \in \Omega \times \mathbb{R}$, – преобразования фурье-функций $\vec{E}(x, t)$ и $\vec{H}(x, t)$, для которых возникают уравнения, называемые уравнениями Максвелла в частотной области [6, с. 17]:

$$\text{rot } \vec{E}_\omega = i\omega\mu\vec{H}_\omega, \quad \text{rot } \vec{H}_\omega = -i\omega\varepsilon\vec{E}_\omega. \tag{10}$$

Также считаем, что существует функция $\vec{E}_{\omega,inc}(x)$, являющаяся преобразованием фурье-функции $\vec{E}_{inc}(x, t)$.

Заметим, что уравнения (10) равносильны уравнениям (1), (2) для функций $\vec{E} = \vec{E}_\omega(x)e^{-i\omega t}$ и $\vec{H} = \vec{H}_\omega(x)e^{-i\omega t}$. При этом на поверхности Σ возникает условие

$$\vec{n} \times (\vec{E}_\omega + \vec{E}_{\omega,inc}) = 0, \tag{11}$$

и должно быть выполнено условие (4) на бесконечности для полей \vec{E}_ω и \vec{H}_ω .

4. Интегральное представление для электрического поля во временной области.

Электрическое поле в задаче (10), (11), удовлетворяющее условию на бесконечности (4), можно искать в виде [6, с. 115–116; 1, с. 262–263]

$$\vec{E}_\omega(x) = \vec{K}[\Sigma, \vec{j}_\omega](x) \equiv \int_{\Sigma} \{ \text{grad}_x \text{div}_x [\vec{j}_\omega(y)F(x-y)] + k^2 \vec{j}_\omega(y)F(x-y) \} d\sigma_y, \tag{12}$$

где

$$F(x-y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R}, \quad R = |x-y|,$$

$k = \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu} = \omega/c$ – волновое число, $c = 1/\sqrt{\varepsilon \mu}$ – скорость света, \vec{j}_ω – неизвестное касательное векторное поле на поверхности Σ .

Поле \vec{j}_ω определено в точках $x \in \Sigma^{\text{in}}$ и пусть $\vec{j}_\omega \in L_1(\Sigma)$, а функции $\vec{j}_\omega(y)$ являются фурье-образом некоторой функции $\vec{j}(y, t)$, $y \in \Sigma^{\text{in}}$, $t \in \mathbb{R}$, для которой выполнено условие: у функции $\vec{j} = \vec{j}(y, t)$ существуют производные

$$\vec{j}'_t(y, t) = \frac{\partial \vec{j}(y, t)}{\partial t} \quad \text{и} \quad \vec{j}''_{tt}(y, t) = \frac{\partial^2 \vec{j}(y, t)}{\partial t^2},$$

причём при каждом $y \in \Sigma^{\text{in}}$ функции \vec{j} , \vec{j}'_t , \vec{j}''_{tt} являются непрерывными функциями от t , лежащими в классе $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$.

Осуществим обратное преобразование Фурье для интегрального представления (12). Пусть $x \notin \Sigma$. Формулу (12) запишем в виде

$$\vec{E}_\omega(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \mathbf{G}(x-y)\vec{j}_\omega(y) dy,$$

где $\mathbf{G}(x)$ – оператор: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ с матрицей $(G_{nm}(x))_{3 \times 3}$, коэффициенты которой имеют вид

$$G_{nm}(x, y) = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{e^{i\omega R/c}}{R} \delta_m^n + \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_m} \left(\frac{e^{i\omega R/c}}{R} \right), \quad R = |x - y|,$$

δ_m^n – символ Кронекера ($\delta_m^n = 1$ при $m = n$, $\delta_m^n = 0$ при $m \neq n$).

Матрицу G_{nm} можно записать в виде

$$G_{nm}(x) = e^{i\omega R/c} G_{nm}^3(x) - \frac{i\omega}{c} e^{i\omega R/c} G_{nm}^2(x) - \frac{\omega^2}{c^2} e^{i\omega R/c} G_{nm}^1(x),$$

где

$$G_{nm}^1(x) = \frac{1}{R} \left(-\delta_n^m + \frac{\partial R}{\partial x_n} \frac{\partial R}{\partial x_m} \right) = -\frac{\delta_n^m}{R} + \frac{x_n x_m}{R^3}, \tag{13}$$

$$G_{nm}^2(x) = -\frac{\partial}{\partial x_n} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial x_m} \right] - \frac{\partial R}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{1}{R} = -\frac{\delta_n^m}{R^2} + 3 \frac{x_m x_n}{R^4}, \tag{14}$$

$$G_{nm}^3(x) = \frac{\partial}{\partial x_n} \left[\frac{\partial}{\partial x_m} \frac{1}{R} \right] = -\frac{\delta_n^m}{R^3} + 3 \frac{x_m x_n}{R^5}. \tag{15}$$

Тогда функция $\vec{E}_\omega(x)$ представима в виде

$$\vec{E}_\omega(x) = \frac{1}{4\pi} (\vec{S}_{1,\omega}(x) + \vec{S}_{2,\omega}(x) + \vec{S}_{3,\omega}(x)), \tag{16}$$

где

$$\vec{S}_{1,\omega}(x) = \frac{-\omega^2}{c^2} \int_{\Sigma} \mathbf{G}_1(x-y)\vec{j}_\omega(y) e^{i\omega R/c} dy, \quad \vec{S}_{2,\omega}(x) = \frac{-i\omega}{c} \int_{\Sigma} \mathbf{G}_2(x-y)\vec{j}_\omega(y) e^{i\omega R/c} dy,$$

$$\vec{S}_{3,\omega}(x) = \int_{\Sigma} \mathbf{G}_3(x-y)\vec{j}_\omega(y) e^{i\omega R/c} dy,$$

$\mathbf{G}_k(x-y) = (G_{nm}^k(x-y))$ – матрица размера $(k \times k)$, $\mathbf{G}_k(x-y)\vec{j}_\omega(y)$ – результат умножения матрицы $\mathbf{G}_k(x-y)$ на вектор $\vec{j}_\omega(y)$, $k = 1, 2, 3$.

Применим обратное преобразование Фурье к правой части и интегралам, входящим в выражение (16). Здесь также предположим, что функция $\omega^2 \vec{j}_\omega(y)$, как функция переменных (y, ω) , лежит в классе $L_1(\Sigma \times \mathbb{R})$. Тогда функции $\vec{j}_\omega(y)$ и $\omega \vec{j}_\omega(y)$ также лежат в классе $L_1(\Sigma \times \mathbb{R})$, и для любой матрицы $\mathbf{A}(y) = (a_{ij}(y))_{3 \times 3}$ с коэффициентами $a_{ij}(y) \in (\Sigma)$ справедливы соотношения

$$F^{-1} \left[\int_{\Sigma} \mathbf{A}(y) \vec{g}(y, \omega) dy \right] (t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left(\int_{\Sigma} \mathbf{A}(y) \hat{g}(y, \omega) dy \right) d\omega = \int_{\Sigma} \mathbf{A}(y) F^{-1}[\vec{g}](y, t) dy$$

для $\vec{g}(y, \omega) = \vec{j}_\omega(y)$, $\omega \vec{j}_\omega(y)$, $\omega^2 \vec{j}_\omega(y)$.

Тогда, используя свойства (5)–(7), получим, что электрическое поле $\vec{E}(x, t)$ имеет вид

$$\vec{E}(x, t) = \frac{1}{4\pi} \vec{S}[\Sigma, \vec{j}](x, t), \quad \vec{S}[\Sigma, \vec{j}] = \vec{S}_1[\Sigma, \vec{j}](x, t) + \vec{S}_2[\Sigma, \vec{j}](x, t) + \vec{S}_3[\Sigma, \vec{j}](x, t), \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{S}_1[\Sigma, \vec{j}](x, t) &= \frac{1}{c^2} \int_{\Sigma} \mathbf{G}_1(x - y) \frac{\partial^2 \vec{j}(y, t - R/c)}{\partial t^2} dy, \\ \vec{S}_2[\Sigma, \vec{j}](x, t) &= \frac{1}{c} \int_{\Sigma} \mathbf{G}_2(x - y) \frac{\partial \vec{j}(y, t - R/c)}{\partial t} dy, \\ \vec{S}_3[\Sigma, \vec{j}](x, t) &= \int_{\Sigma} \mathbf{G}_3(x - y) \vec{j}(y, t - R/c) dy, \quad R = |x - y|. \end{aligned}$$

5. Краевые значения электрического поля. Рассмотрим вопрос о краевых значениях векторного поля $\vec{E}(x, t)$, определяемого выражением (17), в котором функция \vec{j} предполагается заданной и достаточно гладкой.

Теорема 1. Пусть Σ – гладкая простая поверхность класса C^2 , замкнутая или незамкнутая с краем, $\vec{j}(x, t) \in C^2(\Sigma \times \mathbb{R})$ – касательное векторное поле на поверхности Σ (в каждой точке $x \in \Sigma$ вектор $\vec{j}(x, t)$ лежит в касательной плоскости), электрическое поле определяется по формуле

$$\vec{E}(x, t) = \vec{S}[\Sigma, \vec{j}](x, t). \quad (18)$$

Тогда в каждой точке $x \in \Sigma$, не являющейся точкой края, для каждого $t \in \mathbb{R}$ существуют краевые значения поля $\vec{E}(x, t)$:

$$\vec{E}^{\pm}(x, t) = \vec{S}[\Sigma, \vec{j}](x, t) \mp 2\pi \vec{n}(x) \operatorname{Div} \vec{j}(x, t), \quad (19)$$

где $\vec{n}(x)$ – орт вектора нормали к поверхности Σ в точке x , \vec{E}^+ и \vec{E}^- – краевое значение поля \vec{E} на поверхности Σ со стороны вектора \vec{n} и с противоположной стороны, $\operatorname{Div} \vec{j}$ – поверхностная дивергенция поля \vec{j} , $\vec{S}[\Sigma, \vec{j}](x, t)$ – значение, определяемое в смысле конечной части по Адамару:

$$\vec{S}[\Sigma, \vec{j}](x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \vec{S}[\Sigma_{\varepsilon}, \vec{j}](x, t) - \frac{\pi \vec{j}(x, t)}{\varepsilon} \right\}, \quad (20)$$

где $\Sigma_{\varepsilon} = \Sigma \setminus U_{\varepsilon}(x)$, $U_{\varepsilon}(x) = \{y \in \mathbb{R}^3 : |y - x| < \varepsilon\}$ – окрестность точки x радиуса ε , величина $\vec{S}[\Sigma_{\varepsilon}, \vec{j}](x, t)$ определяется формулой (17).

Замечание 1. В записи $\vec{j}(x, t) \in C^2(\Sigma \times \mathbb{R})$ в случае, когда Σ есть поверхность с краем, предполагается, что край является частью поверхности и, таким образом, поверхность Σ как множество точек в пространстве \mathbb{R}^3 является компактом.

Замечание 2. В формуле (20) предел вычисляется от всей суммы \vec{S} , определяемой вторым равенством в (17). При этом, как будет видно ниже из доказательства теоремы 1, при $x \in \Sigma$ интеграл \vec{S}_1 существует как несобственный и может быть рассмотрен отдельно. Сумма слагаемых \vec{S}_2 и \vec{S}_3 существует как интеграл в смысле конечной части по Адамару при условии, что эти два слагаемых рассматриваются совместно.

Для доказательства теоремы 1 сначала докажем лемму.

Лемма 1. Пусть Σ – поверхность из теоремы 1, функция $K(x, y)$ определена и непрерывна при $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x \neq y$, и подчинена оценке

$$|K(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^{\beta}}, \quad x, y \in \mathbb{R}^3, \quad x \neq y,$$

$\beta \in (0, 2)$ и C – некоторые константы.

Тогда функция

$$u(x) = \int_{\Sigma} K(x, y) dy \tag{21}$$

определена при всех $x \in \mathbb{R}^3$ и непрерывна в каждой точке $x \in \Sigma$.

Доказательство. При всех $x \in \mathbb{R}^3$ интеграл в правой части выражения (21) существует, и значит значение функции $u(x)$ определено. Далее докажем непрерывность этой функции на поверхности.

Возьмём число α такое, что $\beta < \alpha < 2$, и представим ядро $K(x, y)$ в виде

$$|K(x, y)| \leq \frac{K^*(x, y)}{|x - y|^\alpha},$$

где $K^*(x, y) = K(x, y)|x - y|^\alpha$. Функция $K^*(x, y)$ непрерывна при всех $x, y \in \mathbb{R}^3$, если доопределить её значение $K^*(x, y)$ нулём при $x = y$.

Пусть $x \in \Sigma$ и $z \in \mathbb{R}^3$. Рассмотрим разность $\Delta = u(x) - u(z)$, которую представим в виде

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2, \quad \Delta_1 = \int_{\Sigma} \frac{K^*(x, y) - K^*(z, y)}{|x - y|^\alpha} dy, \quad \Delta_2 = \int_{\Sigma} K^*(z, y) \left\{ \frac{1}{|x - y|^\alpha} - \frac{1}{|z - y|^\alpha} \right\} dy.$$

Пусть $U(x)$ – некоторая окрестность точки x . Функция $K^*(z, y)$ равномерно непрерывна на множестве аргументов $(z, y) \in U(x) \times \Sigma$, поэтому найдётся функция $\omega(\delta)$, стремящаяся к нулю при $\delta \rightarrow 0$, такая, что $|K^*(x, y) - K^*(z, y)| \leq \omega(|x - z|)$ при всех $(z, y) \in U(x) \times \Sigma$. Тогда

$$|\Delta_1| \leq \omega(|x - z|)I(x), \quad I(x) = \int_{\Sigma} \frac{dy}{|x - y|^\alpha}.$$

При этом найдётся константа C , зависящая от поверхности Σ и параметра α , такая, что $|I(x)| \leq C$ (см., например, [8, с. 52, теорема 2.6]). Тогда $|\Delta_1| \rightarrow 0$ при $z \rightarrow x$.

Далее, разность Δ_2 представим в виде

$$\Delta_2 = \mathbf{A}[\psi_z](x) - \mathbf{A}[\psi_z](z), \tag{22}$$

где $\mathbf{A}[\psi]$ – оператор, ставящий в соответствие функции $\psi \in C(\Sigma)$ функцию

$$w(z) \equiv \mathbf{A}[\psi](z) = \int_{\Sigma} A(x, y)\psi(y) dy, \quad A(x, y) = \frac{1}{|x - y|^\alpha}.$$

В формуле (22) $\psi_z(y) = K^*(z, y)$. Для ядра $A(x, y)$ легко доказать оценку

$$|A(x, y) - A(z, y)| \leq \frac{M|x - z|^\varepsilon}{|x - y|^{\alpha+\varepsilon}},$$

справедливую при всех $y \in \Sigma$, $|x - z| < |x - y|/2$, где ε – число, удовлетворяющее условиям $\alpha < \alpha + \varepsilon < 2$, M – некоторая константа, зависящая только от α и ε . Тогда из [8, с. 52–53, теорема 2.7] следует, что при каждом $z \in U(x)$ функция $w(z') = \mathbf{A}[\psi_z](z')$, порождаемая функцией ψ_z , непрерывна по Гёльдеру в окрестности $U(x)$ с некоторым показателем γ и некоторой константой C_γ , зависящей от γ , т.е. справедливо неравенство

$$|w(z') - w(z'')| \leq C_\gamma \|\psi_z\|_\infty |z' - z''|^\gamma, \quad z', z'' \in U(x), \quad \|\psi\|_\infty = \max_{y \in \Sigma} |\psi(y)|.$$

Остаётся заметить, что при любом $z \in U(x)$ выполнена оценка $\|\psi_z\|_\infty \leq C_1$, в которой $C_1 = \sup_{z' \in U(x), y \in \Sigma} |K^*(z', y)|$. Тогда $|\Delta_2| \leq C_\gamma C_1 |x - z|^\gamma$ и $|\Delta_1| \rightarrow 0$ при $z \rightarrow x$, а значит, $u(z) \rightarrow u(x)$ при $z \rightarrow x$. Лемма доказана.

Замечание 3. В теоремах 2.6 и 2.7 из работы [8] рассматривается случай, когда поверхность, обозначенная нами как Σ , есть граница некоторой ограниченной области D , т.е. эта поверхность является замкнутой. Однако несложно увидеть, что при доказательстве этих теорем в [8] свойство замкнутости поверхности не используется, и для незамкнутой поверхности эти теоремы применимы.

Доказательство теоремы 1. Пусть поле $\vec{E}(x, t)$ определяется выражением (18) при $x \notin \Sigma$. Используя выражение (17) и учитывая соотношение

$$\mathbf{G}_2(x - y) = R\mathbf{G}_3(x - y), \quad R = |x - y|,$$

представим поле $\vec{E}(x, t)$ в виде

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_1(x, t) + \vec{E}_2(x, t) + \vec{E}_3(x, t),$$

где

$$\vec{E}_1(x, t) = \vec{S}_1[\Sigma, \vec{j}](x, t) = \frac{1}{c^2} \int_{\Sigma} \mathbf{G}_1(x - y) \vec{j}_{tt}''(y, \tau) dy, \tag{23}$$

$$\vec{E}_2(x, t) = \int_{\Sigma} \mathbf{G}_3(x - y) \left\{ \vec{j}(y, \tau) + \frac{R}{c} \vec{j}_t'(y, \tau) - \vec{j}(y, t) \right\} dy, \tag{24}$$

$$\vec{E}_3(x, t) = \int_{\Sigma} \mathbf{G}_3(x - y) \vec{j}(y, t) dy,$$

$$\vec{j}_t'(y, t) = \frac{\partial \vec{j}(y, t)}{\partial t}, \quad \vec{j}_{tt}''(y, t) = \frac{\partial^2 \vec{j}(y, t)}{\partial t^2}, \quad R = |x - y|, \quad \tau = t - \frac{R}{c}.$$

Функции

$$\vec{K}_1(x, y, t) = \mathbf{G}_1(x - y) \vec{j}_{tt}''(y, \tau)$$

и

$$\vec{K}_2(x, y, t) = \mathbf{G}_3(x - y) \left\{ \vec{j}(y, \tau) + \frac{R}{c} \vec{j}_t'(y, \tau) - \vec{j}(y, t) \right\}$$

при каждом $t \in (t_1, t_2)$ являются непрерывными функциями от $x, y \in \mathbb{R}^3$ (при $x \neq y$) и подчинены оценкам

$$|\vec{K}_1(x, y, t)| \leq O(1/R), \quad |\vec{K}_2(x, y, t)| \leq O(1/R).$$

Тогда по лемме 1 при каждом $t \in (t_1, t_2)$ и в каждой точке $x \in \Sigma$ функции $\vec{E}_1(x, t)$, $\vec{E}_2(x, t)$, определённые выражениями (23), (24), являются непрерывными в этой точке.

Функцию $\vec{E}_3(x, t)$ при $x \notin \Sigma$ можно записать в виде

$$\vec{E}_3(x, t) = \text{grad div} \int_{\Sigma} \vec{j}(y, t) F(x - y) dy, \quad F(x - y) = \frac{e^{i\omega R/c}}{R}, \quad R = |x - y|.$$

Преобразуем последнее выражение:

$$\vec{E}_3(x, t) = \vec{E}_{31}(x, t) + \vec{E}_{32}(x, t),$$

$$\vec{E}_{31}(x, t) = \text{grad div} \int_{\Sigma} \vec{j}(y, t) F_0(x - y) dy, \tag{25}$$

$$\vec{E}_{32}(x, t) = \text{grad div} \int_{\Sigma} \vec{j}(y, t) \tilde{F}(x - y) dy, \tag{26}$$

$$F_0(x - y) = \frac{1}{R}, \quad \tilde{F}(x - y) = \frac{e^{i\omega R/c} - 1}{R}, \quad R = |x - y|.$$

При этом функция

$$\vec{K}_{32}(x, y, t) = \text{grad}_x \text{div}_x [\vec{j}(y, t) \tilde{F}(x - y)]$$

при каждом $t \in (t_1, t_2)$ является непрерывной функцией от $x, y \in \mathbb{R}^3$ (при $x \neq y$) и подчинена оценке

$$|\vec{K}_{32}(x, y, t)| \leq O(1/R).$$

Поэтому по лемме 1 функция $\vec{E}_{32}(x, t)$ при каждом $t \in (t_1, t_2)$ и в каждой точке $x \in \Sigma$ определённая выражением (26), является непрерывной в этой точке.

Наконец, функция $\vec{E}_{31}(x, t)$, определяемая выражением (25), была рассмотрена в теореме 1 статьи [9], из которой следует, что при каждом значении параметра t в каждой точке $x \in \Sigma$, не являющейся точкой края, существуют краевые значения поля $\vec{E}_{31}(x, t)$:

$$\vec{E}_{31}^{\pm}(x, t) = \vec{E}_{31}(x, t) \mp 2\pi \vec{n}(x) \text{Div} \vec{j}(x),$$

где $\vec{E}_{31}(x, t)$ – прямое значение, получаемое непосредственно из выражения (25), если интеграл в нем понимать в смысле конечной части по Адамару:

$$\vec{E}_{31}(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \text{grad div} \int_{\Sigma_{\varepsilon}} \vec{j}(y, t) F_0(x - y) dy - \frac{\pi \vec{j}(x, t)}{\varepsilon} \right\},$$

поверхность Σ_{ε} определена в формуле (20). Теорема доказана.

6. Интегро-дифференциальное уравнение для поверхностных токов. Вернёмся к исходной задаче (1)–(4) для уравнений Максвелла. Предположим, что суммарная поверхность идеально проводящих тел Σ является кусочно-гладкой и состоит из конечного числа компонент, каждая из которых есть гладкая поверхность класса C^2 , замкнутая или незамкнутая с краем. Предположим, что у каждой точки $x \in \Sigma^{\text{in}}$ существует окрестность $U(x)$ такая, что множество

$$\Sigma_x = \Sigma \cap \bar{U}(x), \tag{27}$$

где $\bar{U}(x)$ – замыкание окрестности $U(x)$, есть простая гладкая поверхность с краем класса C^2 , состоящая только из точек гладкости поверхности Σ .

В дальнейших рассуждениях считаем, что поверхность Σ как множество точек в пространстве \mathbb{R}^3 замкнуто и ограничено, что означает, в частности, что точки края относятся к поверхности Σ .

Решение задачи (1)–(4) на временном интервале $t \in \mathbb{R}$ ищем в виде (17), где $\vec{j}(x, t)$ – неизвестное касательное поле (поверхностные токи), которое ищется в классе функций, удовлетворяющих условиям:

i1) в каждый момент времени $t \in \mathbb{R}$ функция $\vec{j}(x, t)$ интегрируема на поверхности Σ ;

i2) для каждой точки $x \in \Sigma$, являющейся точкой гладкости поверхности Σ , поле \vec{j} удовлетворяет условию $\vec{j} \in C^2[\Sigma_x \times \mathbb{R}]$, Σ_x – участок поверхности Σ вида (27).

Если касательное поле $\vec{j}(x, t)$ удовлетворяет условиям i1), i2), то формула (17) определяет поле \vec{E} , определённое при $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$. При этом в каждой точке $x \in \Sigma$, являющейся точкой гладкости, это поле имеет краевые значения на обеих сторонах поверхности Σ , для которых справедливы формулы (19), (20). Это следует из теоремы 1, если учесть, что поле \vec{E} имеет вид $\vec{E} = \vec{S}[\Sigma_x, \vec{j}] + \vec{S}[\Sigma \setminus \Sigma_x, \vec{j}]$, где к первому слагаемому применима теорема 1, второе слагаемое – непрерывная в окрестности точки x функция.

Тогда выполнение граничного условия (3) равносильно уравнению относительно поверхностных токов

$$\vec{n}(x) \times \frac{1}{4\pi} \vec{S}[\Sigma, \vec{j}](x, t) = -\vec{n}(x) \times \vec{E}_{\text{inc}}(x, t), \quad x \in \Sigma^{\text{in}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

которое можно записать в виде

$$\vec{n}(x) \times \int_{\Sigma} \left[\frac{1}{c^2} \mathbf{G}_1(x-y) \vec{j}_{tt}''(y, \tau) + \frac{1}{c} \mathbf{G}_2(x-y) \vec{j}_t'(y, \tau) + \mathbf{G}_1(x-y) \vec{j}(y, \tau) \right] dy = \vec{f}(x, t), \quad (28)$$

$$\vec{f}(x, t) = -4\pi \vec{n}(x) \times \vec{E}_{\text{inc}}(x, t),$$

интеграл в уравнении (28) понимается в смысле конечной части по Адамару, уравнение (28) должно выполняться при всех $t \in T$ и для всех точек $x \in \Sigma^{\text{in}}$.

Формула (17) даёт выражение через поверхностные токи для электрического поля $\vec{E}(x, t)$. Получим соответствующее выражение для магнитного поля $\vec{H}(x, t)$.

Пусть $\vec{H}_{\omega}(x)$, $x \in \Omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, – преобразование фурье-поля $\vec{H}(x, t)$. Из первого уравнения в системе (10) и формулы (12) следует

$$\vec{H}_{\omega}(x) = -\frac{i}{\omega\mu} \text{rot } \vec{K}[\Sigma, \vec{j}_{\omega}](x) = -i\omega\varepsilon \text{rot } \int_{\Sigma} \vec{j}_{\omega}(y) F(x-y) d\sigma_y. \quad (29)$$

Последнее выражение запишем в виде

$$\vec{H}_{\omega}(x) = i\omega\varepsilon \int_{\Sigma} \vec{j}_{\omega}(y) \times \text{grad}_x F(x-y) d\sigma_y,$$

$$\text{grad}_x F(x-y) = (x-y) \frac{e^{i\omega R/c}}{4\pi} \left(i\frac{\omega}{c} \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R^3} \right), \quad R = |x-y|.$$

Тогда

$$\vec{H}_{\omega}(x) = -i\omega \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{\Sigma} \vec{j}_{\omega}(y) \times \frac{x-y}{R^3} e^{i\omega R/c} d\sigma_y - \frac{\omega^2}{c} \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{\Sigma} \vec{j}_{\omega}(y) \times \frac{x-y}{R^2} e^{i\omega R/c} d\sigma_y. \quad (30)$$

Применяя обратное преобразование Фурье и используя формулы (5)–(7), получаем

$$\vec{H}(x, t) = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{\Sigma} \vec{j}_t'(y, \tau) \times \frac{x-y}{R^3} d\sigma_y + \frac{\varepsilon}{4\pi c} \int_{\Sigma} \vec{j}_{tt}''(y, \tau) \times \frac{x-y}{R^2} d\sigma_y, \quad \tau = t - \frac{R}{c}, \quad R = |x-y|. \quad (31)$$

Теперь докажем, что если касательное поле \vec{j} является решением уравнения (28), то поля $\vec{E}(x, t)$ и $\vec{H}(x, t)$, определяемые выражениями (17) и (31) соответственно, являются решением исходной электродинамической задачи.

Лемма 2. Пусть $\vec{j}(y, t)$, $y \in \Sigma$, $t \in \mathbb{R}$, – касательное векторное поле, удовлетворяющее условиям:

1) $\vec{j} \in L_1[\Sigma \times \mathbb{R}] \cap C[\Sigma^{\text{in}} \times \mathbb{R}]$;

2) существует функция $g(t)$, $g \in C(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$, такая, что для каждого $t \in \mathbb{R}$ существует интеграл

$$\int_{\Sigma} |\vec{j}(y, t)| d\sigma_y \leq g(t).$$

Пусть

$$\vec{E}(x, t) = \int_{\Sigma} \mathbf{K}(x, y) \vec{j}(y, \tau) d\sigma_y, \quad \tau = t - \frac{R}{c}, \quad R = |x - y|, \tag{32}$$

где $\mathbf{K}(x, y)$ – оператор, определяемый матрицей $(K_{ij}(x, y))_{3 \times 3}$, $x \in \Omega$, $y \in \Sigma$, Ω – область в \mathbb{R}^3 , причём $K_{ij}(x, y) \in C(\Omega \times \Sigma)$, C – заданная константа.

Тогда:

1) для любого $y \in \Sigma$ существует функция $\vec{j}_{\omega}(y) = F[\vec{j}]$ (как функция от $\omega \in \mathbb{R}$), при каждом $\omega \in \mathbb{R}$ выполнено условие $\vec{j}_{\omega} \in L_1[\Sigma]$ (как функции от $y \in \Sigma$) и

$$\int_{\Sigma} |\vec{j}_{\omega}(y)| d\sigma_y \leq \int_{\Sigma \times (-\infty, \infty)} |\vec{j}(y, t)| d\sigma_y dt;$$

2) функция $\vec{E}(x, t)$, определённая выражением (32) для $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяет условию $\vec{E}(x, t) \in C(\Omega, \mathbb{R})$. Для любого $x \in \Omega$ существует функция $\vec{E}_{\omega}(x) = F[\vec{E}]$ аргумента $\omega \in \mathbb{R}$. При каждом $\omega \in \mathbb{R}$ функция $\vec{E}_{\omega}(x)$ удовлетворяет условию $\vec{E}_{\omega} \in C(\Omega)$ и справедлива формула

$$\vec{E}_{\omega}(x) = \int_{\Sigma} \mathbf{K}(x, y) \vec{j}_{\omega}(y) e^{i\omega R/c} d\sigma_y, \quad R = |x - y|. \tag{33}$$

Кроме того, справедлива формула

$$\vec{E} = F^{-1}[\vec{E}_{\omega}]. \tag{34}$$

Доказательство. Из условия 12) следует, что при каждом $y \in \Sigma$ функция $\vec{j}_{\omega}(y) = F[\vec{j}]$ определена. По условию 11) существует интеграл

$$I = \int_{\Sigma \times (-\infty, \infty)} \vec{j}(y, t) e^{i\omega t} d\sigma_y dt.$$

Пусть $T_m = [-m, m]$, $m \in \mathbb{N}$. Используя условие 12) и теорему Фубини для интеграла по произведению множеств ограниченной меры [7, с. 335], имеем

$$\begin{aligned} I &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Sigma \times T_m} \vec{j}(y, t) e^{i\omega t} d\sigma_y dt = \int_{\Sigma} \left[\int_{(-\infty, \infty)} \vec{j}(y, t) e^{i\omega t} dt \right] d\sigma_y = \\ &= \int_{\Sigma} \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{T_m} \vec{j}(y, t) dt \right] d\sigma_y = \int_{\Sigma} \vec{j}_{\omega}(y) d\sigma_y. \end{aligned}$$

Тогда $\vec{j}_{\omega} \in L_1[\Sigma]$ и справедливы неравенства

$$\int_{\Sigma} |\vec{j}_{\omega}(y)| d\sigma_y \leq \int_{\Sigma \times (-\infty, \infty)} |\vec{j}(y, t) e^{i\omega t}| d\sigma_y dt \leq \int_{\Sigma \times (-\infty, \infty)} |\vec{j}(y, t)| d\sigma_y dt.$$

Тем самым утверждение 1) доказано.

Перейдём к доказательству утверждения 2). Можно построить систему измеримых поверхностей $\Sigma_m \subset \Sigma^{\text{in}}$, $m \in \mathbb{N}$, такую, что каждая поверхность Σ_m есть замкнутое множество в пространстве \mathbb{R}^3 и $\mu(\Sigma \setminus \Sigma_m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, где μ – площадь поверхности. Пусть

$$\vec{E}(x, t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \vec{E}_m(x, t), \quad \vec{E}_m(x, t) = \int_{\Sigma_m} \mathbf{K}(x, y) \vec{j}(y, \tau) d\sigma_y.$$

При каждом m выполнено условие $\vec{E}_m(x, t) \in C(\Omega \times \mathbb{R})$, так как для любых $x_0 \in \Omega$ и $t_0 \in \mathbb{R}$ найдутся окрестности $U(x_0) \subset \Omega$ и $U(t_0) \subset \mathbb{R}$ такие, что функция $\mathbf{K}(x, y)\vec{j}(y, \tau)$ есть равномерно непрерывная функция аргументов x, y, t на множестве $U(x_0) \times \Sigma_m \times U(t_0)$. Тогда в силу условия 1) интеграл в правой части выражения (32) существует при каждом $(x, t) \in U(x_0) \times U(t_0)$, причём

$$\vec{E}(x, t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \vec{E}_m(x, t),$$

и выполнено условие $\vec{E}(x, t) \in C(U(x_0) \times U(t_0))$, так как последний предел существует на данном множестве аргументов (x, t) в смысле равномерной сходимости.

Таким образом, функция $\vec{E}(x, t)$ определена и $\vec{E}(x, t) \in C(\Omega, t)$.

Рассмотрим для произвольного $x \in \Omega$ интеграл

$$J(x) = \int_{\Sigma \times (-\infty, \infty)} \mathbf{K}(x, y)\vec{j}(y, \tau)e^{i\omega(\tau+R/c)} d\sigma_y d\tau.$$

Этот интеграл существует в силу условия 1). Опять обозначив $T_m = [-m, m]$, $m \in \mathbb{N}$, и применив теорему Фубини, можем записать

$$J(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{T_m} \left[\int_{\Sigma} \mathbf{K}(x, y)\vec{j}(y, t) d\sigma_y \right] e^{i\omega(\tau+R/c)} dt = \vec{E}_\omega(x).$$

С другой стороны,

$$J(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Sigma} \mathbf{K}(x, y) \left[\int_{T_m} \vec{j}(y, \tau)e^{i\omega(\tau+R/c)} d\tau \right] d\sigma_y = \int_{\Sigma} \mathbf{K}(x, y)\vec{j}_\omega(y)e^{i\omega R/c} d\sigma_y.$$

При этом непрерывность функции $\vec{E}_\omega(x)$ по переменной x следует из представления этой функции в виде последнего интеграла и условия $\vec{j}_\omega \in L_1[\Sigma]$.

Докажем теперь, что при каждом $x \in \Omega$ выполнено условие $\vec{E}(x, t) \in L_2(\mathbb{R})$ как функция от аргумента t . Для этого заметим, что для рассматриваемой точки $x \in \Omega$ и для каждого отрезка $T_m = [-m, m]$, $m \in \mathbb{N}$, существует интеграл

$$\int_{T_m} |\vec{E}(x, t)|^2 dt = \int_{T_m} \left| \int_{\Sigma} \mathbf{K}(x, y)\vec{j}(y, \tau) d\sigma_y \right|^2 dt.$$

Для рассматриваемой точки x найдётся константа $M = M(x)$ такая, что $|\mathbf{K}(x, y)| \leq M$ для всех $y \in \Sigma$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{T_m} |\vec{E}(x, t)|^2 dt &\leq M^2 \int_{T_m} \int_{\Sigma} |\vec{j}(y, \tau)|^2 d\sigma_y dt \leq M^2 \int_{\Sigma} \left(\int_{T_m} |\vec{j}(y, \tau)|^2 dt \right) d\sigma_y \leq \\ &\leq M^2 \int_{\Sigma} \left(\int_{(-\infty, \infty)} |g(t)|^2 dt \right) d\sigma_y. \end{aligned}$$

Значит, существует интеграл

$$\int_{(-\infty, \infty)} |\vec{E}(x, t)|^2 dt = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{T_m} |\vec{E}(x, t)|^2 dt.$$

Тем самым условие $\vec{E}(x, t) \in L_2(\mathbb{R})$ для каждой точки x выполнено, и тогда справедлива формула (34). Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $\vec{j}(y, t)$, $y \in \Sigma$, $t \in \mathbb{R}$, – касательное векторное поле такое, что при всех $y \in \Sigma$, $t \in \mathbb{R}$ существует производная $\vec{j}'_t(y, t)$ и для функций $\vec{j}(y, t)$ и $\vec{j}'_t(y, t)$ выполнены условия l1) и l2) из леммы 2.

Рассмотрим поле $\vec{E}(x, t)$, определяемое формулой (32), где $K_{ij}(x, y) \in C(\Omega \times \Sigma)$ и существуют частные производные $\partial K_{ij}(x, y)/\partial x_m \in C(\Omega \times \Sigma)$, $m = 1, 2, 3$.

Тогда существуют производные $\partial \vec{E}(x, t)/\partial t \in C(\Omega, \mathbb{R})$ и $\partial \vec{E}(x, t)/\partial x_m \in C(\Omega, \mathbb{R})$, $m = 1, 2, 3$. Для каждого $x \in \Omega$ существуют образы фурье-функций $\partial \vec{E}(x, t)/\partial t$ и $\partial \vec{E}(x, t)/\partial x_n$, $n = 1, 2, 3$, причём справедливы формулы

$$F\left[\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right] = -i\omega \vec{E}_\omega, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega F^{-1}[\vec{E}_\omega], \tag{35}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_n} F[\vec{E}](x) = \frac{\partial \vec{E}_\omega}{\partial x_n}(x) = \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial x_n} (\mathbf{K}(x, y) e^{i\omega R/c}) \vec{j}_\omega(y) d\sigma_y, \tag{36}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x_n} = F^{-1} \left[\frac{\partial \vec{E}_\omega}{\partial x_n} \right], \tag{37}$$

где $\vec{E}_\omega(x) = F[\vec{E}]$ – функция, определяемая выражением (33).

Доказательство. А) Рассмотрим производную $\partial \vec{E}(x, t)/\partial t$. Введём, как и при доказательстве леммы 1, систему поверхностей $\Sigma_m \subset \Sigma^{\text{in}}$, $m \in \mathbb{N}$, исчерпывающую поверхность Σ , и в результате получим

$$\partial \vec{E}(x, t)/\partial t = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_m} \mathbf{K}(x, y) \vec{j}'_t(y, \tau) d\sigma_y = \int_{\Sigma} \mathbf{K}(x, y) \vec{j}'_t(y, \tau) d\sigma_y.$$

Тогда выполнение формул (35) сразу следует из леммы 2.

Б) Рассмотрим производные $\partial \vec{E}(x, t)/\partial x_n$, $n = 1, 2, 3$. Продифференцируем под знаком интеграла и запишем

$$\frac{\partial \vec{E}(x, t)}{\partial x_n} = \int_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{K}(x, y)}{\partial x_n} \vec{j}(y, \tau) d\sigma_y + \int_{\Sigma} \mathbf{K}(x, y) \vec{j}'_t(y, \tau) \frac{x_n - y_n}{cR} d\sigma_y \tag{38}$$

(существование интегралов в правой части и возможность внесения производной под знак интеграла можно доказать, заменив интегралы по поверхности Σ на интегралы по поверхностям $\Sigma_m \subset \Sigma^{\text{in}}$, исчерпывающим поверхность Σ , с помощью перехода к пределу при $m \rightarrow \infty$).

Применяя к каждому из полей, определяемых интегралами в правой части равенства (38), лемму 2 и учитывая равенство

$$F[\vec{j}'_t] = -i\omega F[\vec{j}],$$

заключаем, что

$$\begin{aligned} F[\partial \vec{E}/\partial x_n] &= \int_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{K}(x, y)}{\partial x_n} \vec{j}_\omega(y) e^{i\omega R/c} d\sigma_y + i\omega \int_{\Sigma} \mathbf{K}(x, y) \vec{j}_\omega(y) \frac{x_n - y_n}{cR} e^{i\omega R/c} d\sigma_y = \\ &= \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial x_n} (\mathbf{K}(x, y) e^{i\omega R/c}) \vec{j}_\omega(y) d\sigma_y. \end{aligned}$$

В силу условия $\vec{j}_\omega \in L_1[\Sigma]$, выполненного при каждом значении ω , приходим к равенствам

$$F[\partial\vec{E}/\partial x_n] = \frac{\partial}{\partial x_n} \int_{\Sigma} \mathbf{K}(x, y) e^{i\omega R/c} \vec{j}_\omega(y) d\sigma_y = \frac{\partial}{\partial x_n} E_\omega(x).$$

Последние равенства означают выполнение формул (36). Наконец, из леммы 2, применённой к полю $\partial\vec{E}/\partial x_n$ в виде (38), следует формула (37). Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть касательное поле \vec{j} лежит в классе функций, удовлетворяющих условиям *i1*) и *i2*), удовлетворяет уравнению (28) при $t \in \mathbb{R}$, и дополнительно функция \vec{j} и её производные $\vec{j}_t^{(k)} = \partial^k \vec{j}(y, t) / \partial t^k$, $k = \overline{1, 4}$, определены и удовлетворяют условиям *l1*) и *l2*) из леммы 2.

Тогда поля $\vec{E}(x, t)$, $\vec{H}(x, t)$, определяемые выражениями (17) и (31) для всех $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$, являются решением уравнений (1), (2), удовлетворяющим условиям (3), (4).

Доказательство. Пусть поле \vec{j} – решение уравнения (28) в указанном классе функций. Построим поля $\vec{E}(x, t)$, $\vec{H}(x, t)$, определяемые выражениями (17) и (31) для любых $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$. По теореме 1 выполнено граничное условие (3), а из лемм 2 и 3 следует, что поля $\vec{E}(x, t)$ и $\vec{H}(x, t)$ лежат в классе $C^2(\Omega \times \mathbb{R})$.

Докажем, что уравнения (1), (2) выполняются в области Ω .

По лемме 2, во-первых, существуют фурье-образы функций \vec{j} и $\vec{j}_t^{(k)}$, $k = \overline{1, 4}$, причём если $\vec{j}_\omega = F[\vec{j}]$, то $F[\vec{j}_t^{(k)}] = (i\omega)^k \vec{j}_\omega$, и при каждом $\omega \in \mathbb{R}$ выполнено условие $\vec{j}_\omega \in L_1[\Sigma]$.

Далее, при каждом $x \in \Omega$ существуют фурье-образы функций $\vec{E}(x, t)$ и $\vec{H}(x, t)$: $\vec{E}_\omega(x) = F[\vec{E}]$ и $\vec{H}_\omega(x) = F[\vec{H}]$. При этом функции $\vec{E}_\omega(x)$ и $\vec{H}_\omega(x)$ дважды дифференцируемы по переменной x в области Ω , и из леммы 3 следует, что для функций $\vec{E}_\omega(x)$ и $\vec{H}_\omega(x)$ справедливы выражения (16) и (30) соответственно, где $\vec{j}_\omega \in L_1(\Sigma)$. Но тогда для этих полей справедливы и выражения (12) и (29) соответственно. Значит, поля $\vec{E}_\omega(x)$ и $\vec{H}_\omega(x)$ удовлетворяют уравнениям (10).

Из лемм 2 и 3 следует, что

$$\begin{aligned} \vec{E} &= F^{-1}[\vec{E}_\omega], & \vec{H} &= F^{-1}[\vec{H}_\omega], \\ \partial\vec{E}/\partial x_i &= F^{-1}[\partial\vec{E}_\omega/\partial x_i], & \partial\vec{H}/\partial x_i &= F^{-1}[\partial\vec{H}_\omega/\partial x_i], \\ \partial\vec{E}/\partial t &= -F^{-1}[i\omega\vec{E}_\omega], & \partial\vec{H}/\partial t &= -F^{-1}[i\omega\vec{H}_\omega]. \end{aligned}$$

Применяя обратное преобразование Фурье к уравнениям (10), доказываем выполнение уравнений (1), (2).

Наконец, докажем выполнение условий (4) на бесконечности.

Из формул (17) и (31) с учётом выражений (13)–(15) следует, что

$$\vec{E}(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{\Sigma} \left(-\frac{\vec{j}_{tt}''(y, \tau)}{|x|} + \frac{x}{|x|^2} (x, \vec{j}_{tt}''(y, \tau)) \right) dy + o(1/|x|^2),$$

$$\vec{H}(x, t) = \frac{\varepsilon}{4\pi c} \int_{\Sigma} \vec{j}_t''(y, \tau) \times \frac{x}{|x|^2} d\sigma_y + o(1/|x|^2).$$

Тогда, учитывая равенство $1/(\varepsilon c) = \sqrt{\mu/\varepsilon}$, получаем

$$\left[\frac{x}{|x|} \times \vec{E} \right] = -\frac{1}{4\pi c^2} \int_{\Sigma} \left(\frac{x}{|x|^2} \times \vec{j}_{tt}''(y, \tau) \right) dy + o(1/|x|^2) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \vec{H}(x, t) + o(1/|x|^2),$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{|x|} \times \vec{H}(x, t) &= \frac{\varepsilon}{4\pi c|x|^3} \int_{\Sigma} x \times [\vec{j}_t''(y, \tau) \times x] d\sigma_y + o(1/|x|^2) = \\ &= \frac{\varepsilon}{4\pi c} \int_{\Sigma} \left(\frac{\vec{j}_t''(y, \tau)}{|x|} - \frac{x}{|x|^2} (x, \vec{j}_{tt}''(y, \tau)) \right) d\sigma_y + o(1/|x|^2), \\ \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left[\frac{x}{|x|} \times \vec{H}(x, t) \right] &= -\vec{E}(x, t) + o(1/|x|^2), \end{aligned}$$

откуда следует, что условия (4) выполнены. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20087), а также при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-286.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Volakis J.L., Sertel K.* Integral Equation Methods for Electromagnetics. Raleigh, 2012.
2. *Gibson W.* The Method of Moments in Electromagnetics. Boca Raton, 2008.
3. Вычислительные методы в электродинамике / Под. ред. Р.М. Митра. М., 1977.
4. *Смирнов Ю.Г.* Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза, 2009.
5. *Самохин А.Б.* Объемные сингулярные интегральные уравнения электродинамики. М., 2021.
6. *Хёни Х., Мауэ А., Веспфаль К.* Теория дифракции. М., 1964.
7. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 2004.
8. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.
9. *Захаров Е.В., Рыжаков Г.В., Сетуха А.В.* Численное решение трёхмерных задач дифракции электромагнитных волн на системе идеально проводящих поверхностей методом гиперсингулярных интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 9. С. 1253–1263.

МИРЭА – Российский технологический университет,
г. Москва,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Институт вычислительной математики
имени Г.И. Марчука РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 30.03.2022 г.
После доработки 30.03.2022 г.
Принята к публикации 25.05.2022 г.

УДК 517.977.1

СИНТЕЗ СУБОПТИМАЛЬНЫХ ФИЛЬТРОВ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

© 2022 г. В. В. Фомичев, М. А. Каменщиков

Рассматривается проблема построения субоптимальных фильтров (оптимальных фильтров пониженного порядка, т.е. фильтров для линейных векторных функционалов от фазового вектора системы) для стохастических многосвязных объектов управления. Способ построения таких фильтров представлен в каноническом базисе Люенбергера. На численном примере системы седьмого порядка показано, что с помощью предложенного подхода повышается оптимальность фильтров по сравнению с фильтрами на основе скалярных наблюдателей.

DOI: 10.31857/S0374064122080106, EDN: CGZDBG

Введение. Рассмотрена задача о построении субоптимальных фильтров, восстанавливающих по измеряемому векторному выходу несмещённую и оптимальную оценку векторного линейного функционала от фазового вектора состояния объектов управления со стохастическими возмущениями. Возмущения в системе представляют некоррелированные между собой в разные моменты времени белые аддитивные шумы с априорно известными вероятностными характеристиками, некоррелированные с начальным состоянием системы и воздействующие как на объект, так и на канал измерений. В качестве критерия оптимальности выбрана среднеквадратичная ошибка в установившемся режиме. Для вычисления критерия применён метод интегральных квадратичных оценок качества.

Ранее для решения задачи о построении минимального функционального наблюдателя для детерминированных линейных стационарных систем был предложен метод, основанный на скалярных наблюдателях [1, с. 80] для различных случаев: скалярный и векторных выходов, скалярный и векторный функционал. Кроме того, были предложены использующие канонические представления методы синтеза субоптимальных фильтров для стохастических систем со скалярным выходом и скалярным функционалом как в непрерывном [2], так и в дискретном времени [3, 4].

Для стохастических многосвязных систем (векторный выход и векторный функционал) в настоящей работе предлагается подход для синтеза субоптимальных фильтров в каноническом базисе Люенбергера (см. [5]). Предложенный подход позволяет улучшить оптимальность фильтров по сравнению с фильтрами на основе скалярных наблюдателей. В отличие от существующих подходов [6, 7] к построению функциональных наблюдателей, динамический порядок субоптимальных фильтров не обязательно совпадает с размерностью векторного функционала от фазового вектора состояния. Кроме того, в работе представлена формула для нахождения общего количества неизвестных параметров субоптимальных фильтров в канонической форме и предложено левое матричное дробное описание передаточной функции для системы в отклонениях.

1. Постановка задачи. Ставится задача субоптимальной фильтрации для многосвязной динамической системы, заданной системой разностных уравнений

$$x_{i+1} = Ax_i + w_i, \quad y_i = Cx_i + v_i; \quad i = 0, 1, 2, \dots; \quad (1)$$

где $x_i \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор состояния, $y_i \in \mathbb{R}^l$ – известный вектор измерений; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ – постоянные матрицы; w_i и v_i – некоррелированные между собой случайные процессы, которые имеют следующие вероятностные характеристики: $\mathbb{E}[w_i] = 0$, $\mathbb{E}[v_i] = 0$, $\mathbb{E}[w_i w_j^T] = Q\delta_{ij}$, $\mathbb{E}[v_i v_j^T] = R\delta_{ij}$, δ_{ij} – символ Кронекера; начальное условие x_0 – случайная величина, некоррелированная со случайными процессами w_i и v_i и имеющая следующие вероятностные характеристики: $\mathbb{E}[x_0] = \bar{x}_0$, $\mathbb{E}[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T] = P_0$; здесь Q , P_0 – положительно полуопределённые матрицы, R – положительно определённая матрица.

Требуется на основе наблюдения выхода y_i определить несмещённую оценку $\tilde{\sigma}_i$ векторного линейного функционала от неизвестного фазового вектора

$$\sigma_i = Fx_i, \quad F \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad \sigma_i \in \mathbb{R}^p, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \tag{2}$$

обеспечивающую минимум установившегося среднего значения квадрата ошибки наблюдения:

$$J = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\sigma_i - \tilde{\sigma}_i)^T (\sigma_i - \tilde{\sigma}_i)]. \tag{3}$$

Не ограничивая общности рассуждений, считаем, что $\text{rank } C = l$ и пара $\{C, A\}$ наблюдаема и задана в каноническом базисе Люенбергера [1, с. 31; 8, с. 44]:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{ll} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_l \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times n},$$

$$A_{jj} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{\theta_{j-1}+1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{\theta_{j-1}+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{\theta_{j-1}+\nu_j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\nu_j \times \nu_j}, \quad C_j = (0 \ \dots \ 0 \ 1) \in \mathbb{R}^{1 \times \nu_j}, \quad j = \overline{1, l}, \tag{4}$$

где $\nu_j \geq 1$ – индексы наблюдаемости пары $\{C_j, A_{jj}\}$; $\theta_0 = 0$, $\theta_j = \sum_{i=1}^j \nu_i$, $j = \overline{1, l}$, – суммы индексов наблюдаемости, причём $\theta_l = n$; $\alpha_{\theta_{j-1}+\eta_j}$, $\eta_j = \overline{1, \nu_j}$, – коэффициенты характеристического полинома матрицы A_{jj} , т.е.

$$\alpha_j(z) = \det(zI_{\nu_j} - A_{jj}) = z^{\nu_j} + \alpha_{\theta_{j-1}+\nu_j} z^{\nu_j-1} + \dots + \alpha_{\theta_{j-1}+1}.$$

Характеристический полином матрицы A при этом равен

$$\alpha(z) = \det(zI_n - A) = \prod_{j=1}^l \alpha_j(z) = \prod_{j=1}^l \det(zI_{\nu_j} - A_{jj}).$$

2. Построение фильтров. Пусть при некотором k для матрицы F имеет место разложение

$$F = PT + VC,$$

где $P \in \mathbb{R}^{p \times k}$, $T \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $V \in \mathbb{R}^{p \times l}$ – неизвестные постоянные матрицы, подлежащие дальнейшему нахождению. Тогда для восстановления неизвестного вектора $q_i = Tx_i \in \mathbb{R}^k$ используется субоптимальный фильтр порядка k вида

$$\tilde{q}_{i+1} = N\tilde{q}_i + My_i, \quad \tilde{q}_0 = T\bar{x}_0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \tag{5}$$

где $\tilde{q}_i \in \mathbb{R}^k$ – фазовый вектор состояния фильтра; $M \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $N \in \mathbb{R}^{k \times k}$ – неизвестные постоянные матрицы, также подлежащие дальнейшему нахождению. При этом в качестве оценки

$$\sigma_i = Fx_i = PTx_i + VCx_i = Pq_i + Vy_i - Vv_i$$

используется выход фильтра

$$\tilde{\sigma}_i = P\tilde{q}_i + Vy_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \tag{6}$$

Для минимизации числа ненулевых элементов неизвестные матрицы P и N фильтра ищутся в каноническом представлении Люенбергера [1, с. 31; 8, с. 44]:

$$N = \begin{pmatrix} N_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & N_{pp} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times k}, \quad P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & P_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times k},$$

$$N_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -l_{\varkappa_{i-1}+1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -l_{\varkappa_{i-1}+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -l_{\varkappa_{i-1}+k_i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k_i \times k_i}, \quad P_i = (0 \ \dots \ 0 \ 1) \in \mathbb{R}^{1 \times k_i}, \quad i = \overline{1, p}, \quad (7)$$

где $k_i \geq 1$ – индексы наблюдаемости пары $\{P_i, N_{ii}\}$; $\varkappa_0 = 0$, $\varkappa_i = \sum_{j=1}^i k_j$, $i = \overline{1, p}$, – суммы индексов наблюдаемости, причём $\varkappa_p = k$; $l_{\varkappa_{i-1}+\mu_i}$, $\mu_i = \overline{1, k_i}$, – коэффициенты характеристического полинома матрицы N_{ii} , т.е.

$$\beta_i(z) = \det(zI_{k_i} - N_{ii}) = z^{k_i} + l_{\varkappa_{i-1}+k_i}z^{k_i-1} + \dots + l_{\varkappa_{i-1}+1}.$$

Характеристический полином матрицы N при этом равен

$$\beta(z) = \det(zI_k - N) = \prod_{i=1}^p \beta_i(z) = \prod_{i=1}^p \det(zI_{k_i} - N_{ii}).$$

Пусть матрицы $F = (f_{i,j})$, $T = (t_{i,j})$, $M = (m_{i,j})$, $V = (v_{i,j})$ в позициях (i, j) содержат элементы $f_{i,j}$, $t_{i,j}$, $m_{i,j}$, $v_{i,j}$ соответственно.

Используя стохастические разностные уравнения системы (1) и уравнения фильтра (5), (6), нетрудно получить, что ошибка $\varepsilon_i = q_i - \tilde{q}_i$ описывается уравнением

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1} = q_{i+1} - \tilde{q}_{i+1} &= Tx_{i+1} - N\tilde{q}_i - My_i = TAx_i - N(q_i - \varepsilon_i) - MCx_i + Tw_i - Mv_i = \\ &= N\varepsilon_i + (TA - MC - NT)x_i + Tw_i - Mv_i; \quad \varepsilon_0 = T(x_0 - \bar{x}_0); \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение для ошибки $e_i = \sigma_i - \tilde{\sigma}_i$ имеет вид

$$e_i = \sigma_i - \tilde{\sigma}_i = Pq_i + Vy_i - Vv_i - (P\tilde{q}_i + Vy_i) = P\varepsilon_i - Vv_i; \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

На основании известных результатов [8, с. 55] можно сделать вывод, что для того чтобы оценки \tilde{q}_i и $\tilde{\sigma}_i$ являлись несмещёнными для q_i и σ_i соответственно, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

$$F = PT + VC, \quad TA - MC - NT = 0, \quad N - \text{шуровская матрица.} \quad (10)$$

Более того, если матрица N – шуровская, то (см. [9, с. 537]) ошибка ε_i в установившемся режиме является стационарным в широком смысле случайным процессом, в котором математическое ожидание постоянно, а корреляционная функция зависит от одной переменной.

Условия (10) в предположениях о канонических представлениях исходной системы (4) и искомого фильтра (7) могут быть сформулированы в виде следующего утверждения.

Теорема. Пусть система (1) наблюдаема, $\text{rank } C = l$, и пара $\{C, A\}$ находится в каноническом представлении Люенбергера (4). Векторный функционал (2), в котором в каноническом базисе матрица $F = (f_{i,j}) \in \mathbb{R}^{p \times n}$, может быть восстановлен субоптимальным фильтром (5), (6) порядка k , искомым в канонической форме Люенбергера (7), тогда и только тогда, когда относительно неизвестных элементов матриц $T = (t_{i,j}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $M = (m_{i,j}) \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $V = (v_{i,j}) \in \mathbb{R}^{p \times l}$ выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} t_{\varkappa_i, \theta_{j-1} + \eta_j} &= f_{i, \theta_{j-1} + \eta_j}, \quad t_{\varkappa_{i-1} + 1, \theta_{j-1} + \eta_j + 1} = -l_{\varkappa_{i-1} + 1} t_{\varkappa_i, \theta_{j-1} + \eta_j} \quad \text{для } \nu_j > 1; \\ t_{\varkappa_{i-1} + \mu_i + 1, \theta_{j-1} + \eta_j + 1} &= t_{\varkappa_{i-1} + \mu_i, \theta_{j-1} + \eta_j} - l_{\varkappa_{i-1} + \mu_i + 1} t_{\varkappa_i, \theta_{j-1} + \eta_j} \quad \text{для } \nu_j > 1, \quad k_i > 1; \\ m_{\varkappa_{i-1} + \mu_i + 1, j} &= - \sum_{\eta=1}^{\nu_j} \alpha_{\theta_{j-1} + \eta} t_{\varkappa_{i-1} + \mu_i + 1, \theta_{j-1} + \eta} - t_{\varkappa_{i-1} + \mu_i, \theta_j} + l_{\varkappa_{i-1} + \mu_i + 1} t_{\varkappa_i, \theta_j} \quad \text{для } k_i > 1; \\ m_{\varkappa_{i-1} + 1, j} &= - \sum_{\eta=1}^{\nu_j} \alpha_{\theta_{j-1} + \eta} t_{\varkappa_{i-1} + 1, \theta_{j-1} + \eta} + l_{\varkappa_{i-1} + 1} t_{\varkappa_i, \theta_j}, \quad v_{i,j} = f_{i, \theta_j} - t_{\varkappa_i, \theta_j}, \end{aligned}$$

где $\mu_i = \overline{1, k_i - 1}$, $\eta_j = \overline{1, \nu_j - 1}$, $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, l}$; $\beta(z)$ – дискретно устойчивый полином.

Следствие 1. Пусть $\Delta_{i,j} = \max(\nu_j - k_i - 1, 0)$, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,l}$, тогда количество неизвестных параметров субоптимального фильтра (5), (6) порядка k в канонической форме Люенбергера (7) равно

$$\chi = \sum_{i=1}^p \left(k_i - r_i + \sum_{j=1}^l \max(k_i - \nu_j + 1, 0) \right), \tag{11}$$

где r_i – количество базисных строк в системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} f_{i,1} & \dots & f_{i,k_i} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{i,\Delta_{i,1}} & \dots & f_{i,\Delta_{i,1}+k_i-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{i,\theta_{l-1}+1} & \dots & f_{i,\theta_{l-1}+k_i} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{i,\theta_{l-1}+\Delta_{i,l}} & \dots & f_{i,\theta_{l-1}+\Delta_{i,l}+k_i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{\chi_{i-1}+1} \\ \vdots \\ l_{\chi_{i-1}+k_i} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_{i,k_i+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{i,k_i+\Delta_{i,1}} \\ \vdots \\ f_{i,\theta_{l-1}+k_i+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{i,\theta_{l-1}+k_i+\Delta_{i,1}} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

причём $r_i = \text{rank}[A_i] = \text{rank}[A_i|B_i]$, где A_i и B_i – матрица и столбец свободных членов системы (12), при этом блоки матриц A_i имеют ганкелеву структуру. Если $\Delta_{i,j} = 0$, то соответствующие строки в системе (12) отсутствуют. Если $\Delta_{i,j} = 0$, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,l}$, то $r_i = 0$. Кроме того, если $\text{rank}[A_i] \neq \text{rank}[A_i|B_i]$, то условия теоремы несовместны.

Относительно матричных передаточных функций от шумов w_i , v_i к ошибке e_i

$$W_{ew}(z) = P(zI_k - N)^{-1}T, \quad W_{ev}(z) = -P(zI_k - N)^{-1}M - V$$

для теоремы имеет место

Следствие 2. Для системы в отклонениях (8), (9) левое матричное дробное описание передаточной функции от шумов w_i , v_i к ошибке фильтрации e_i в каноническом базисе Люенбергера (7) имеет вид

$$(W_{ew}(z) \quad W_{ev}(z)) = \mathcal{D}^{-1}(z) (\mathcal{N}_{ew}(z) \quad \mathcal{N}_{ev}(z)), \tag{13}$$

$$\mathcal{D}(z) = \begin{pmatrix} \beta_1(z) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \beta_p(z) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{N}_{ew}(z) = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{ew}^{1,1}(z) & \dots & \mathcal{N}_{ew}^{1,l}(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{N}_{ew}^{p,1}(z) & \dots & \mathcal{N}_{ew}^{p,l}(z) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N}_{ev}(z) = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{ev}^{1,1}(z) & \dots & \mathcal{N}_{ev}^{1,l}(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{N}_{ev}^{p,1}(z) & \dots & \mathcal{N}_{ev}^{p,l}(z) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{N}_{ew}^{i,j}(z) = \left(\sum_{\mu_i=1}^{k_i} t_{\chi_{i-1}+\mu_i, \theta_{j-1}+1} z^{\mu_i-1} \quad \dots \quad \sum_{\mu_i=1}^{k_i} t_{\chi_{i-1}+\mu_i, \theta_{j-1}+\nu_j} z^{\mu_i-1} \right),$$

$$\mathcal{N}_{ev}^{i,j}(z) = - \left(\sum_{\mu_i=1}^{k_i} m_{\chi_{i-1}+\mu_i, j} z^{\mu_i-1} + v_{i,j} \beta_i(z) \right), \quad i = \overline{1,p}, \quad j = \overline{1,l}.$$

Причём если пара $\{N, (T \quad -M)\}$ управляема, то передаточная матрица (13) имеет порядок k .

3. Вычисление критерия оптимальности. Так как шумы w_i и v_i не коррелированы между собой, то (см. [10, с. 22])

$$J = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e_i^T e_i] = \frac{1}{2\pi} \text{trace} \int_{-\pi}^{\pi} (W_{ew}(e^{j\omega}) \quad W_{ev}(e^{j\omega})) \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{ew}^T(e^{-j\omega}) \\ W_{ev}^T(e^{-j\omega}) \end{pmatrix} d\omega, \tag{14}$$

если передаточные матричные функции $W_{ew}(z)$ и $W_{ev}(z)$ устойчивы. По следствию 2 из теоремы это условие устойчивости выполняется, если полином $\beta(z)$ дискретно устойчив.

Вычисление J можно свести к вычислению интегралов вида

$$\bar{J}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{b_0 e^{j\omega k} + b_1 e^{j\omega(k-1)} + \dots + b_k}{a_0 e^{j\omega k} + a_1 e^{j\omega(k-1)} + \dots + a_k} \right|^2 d\omega, \tag{15}$$

где коэффициенты a_i, b_i зависят согласно следствию 2 от неизвестных параметров фильтра (5), (6), количество которых указано в следствии 1. При этом для расчёта интегралов (15) существует специальная формула [11, с. 204]. Для случаев $k = 1$ и $k = 2$ значения интеграла (15) имеют вид

$$\bar{J}_1 = \frac{a_0 b_0^2 - 2a_1 b_0 b_1 + a_0 b_1^2}{a_0(a_0^2 - a_1^2)}, \tag{16}$$

$$\bar{J}_2 = \frac{a_0(b_0^2 + b_1^2 + b_2^2)(a_0 + a_2) - 2(b_0 b_1 + b_1 b_2)a_0 a_1 + 2b_0 b_2(a_1^2 - a_2(a_0 + a_2))}{a_0[(a_0^2 - a_2^2)(a_0 + a_2) - (a_0 a_1 - a_1 a_2)a_1]}. \tag{17}$$

Таким образом, из вида (13) матричной передаточной функции следует, что функционал (14) в задаче оптимизации является рациональной функцией, т.е. отношением двух полиномов от переменных параметров.

4. Пример. Для сравнения между собой предложенного способа построения субоптимальных фильтров с методом скалярных наблюдателей проведём численный эксперимент на примере системы (1), (2) седьмого порядка ($n = 7$) с выходом третьего порядка ($l = 3$), заданной в каноническом представлении (4), в котором

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{33} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

индексы наблюдаемости $\nu_1 = 3, \nu_2 = 2, \nu_3 = 2$,

$$\bar{x}_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0]^T, \quad Q = P_0 = I_7, \quad R = I_3.$$

Для восстановления векторного функционала (2) второго порядка ($p = 2$) с матрицей

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

будем искать фильтр третьего порядка ($k = 3$) с индексами наблюдаемости $k_1 = 2, k_2 = 1$.

Используя метод, основанный на скалярных наблюдателях, получим следующие матрицы функционального фильтра (5), (6) третьего порядка:

$$N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \lambda_2 - \lambda_1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 6 + \lambda_1 + \lambda_2 & -1 - \lambda_3 & -1 - \lambda_2 \\ & -1 & -\lambda_3 \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} -\alpha_1(\lambda_1) & 0 & 0 \\ -\alpha_1(\lambda_2) & 0 & (\lambda_2 - \lambda_1)\alpha_3(\lambda_2) \\ 0 & -\alpha_2(\lambda_3) & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & (\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – различные вещественные собственные значения функционального фильтра; $\alpha_1(z) = z^3 + 6z^2 + 12z + 1, \alpha_2(z) = z^2 + 3, \alpha_3(z) = z^2 + 1$. Передаточные матрицы имеют вид

$$W_{ew}(z) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)} & \frac{-z}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)} & \frac{\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1+\lambda_2)z}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)} & \frac{1}{z-\lambda_3} & \frac{\lambda_3}{z-\lambda_3} & \frac{1}{z-\lambda_2} & \frac{\lambda_2}{z-\lambda_2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{z-\lambda_3} & \frac{\lambda_3}{z-\lambda_3} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$W_{ev}(z) = \begin{bmatrix} \frac{(-\lambda_1 - \lambda_2 - 6)z^2 + (\lambda_1\lambda_2 - 12)z - 1}{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)} & \frac{(1 + \lambda_3)z - \lambda_3 + 3}{z - \lambda_3} & \frac{(1 + \lambda_2)z - \lambda_2 + 1}{z - \lambda_2} \\ 1 & \frac{\lambda_3 z + 3}{z - \lambda_3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Используя формулы (14), (16), (17), получим, что критерий оптимальности (3) является рациональной функцией от параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Для поиска этих параметров решается задача минимизации критерия оптимальности с ограничением устойчивости характеристического полинома: $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1, |\lambda_3| < 1$. Численные результаты, которые получены с помощью метода последовательного квадратичного программирования [12, гл. 18], имеют вид

$$\lambda_1 \approx -0.3296; \quad \lambda_2 \approx -0.2403; \quad \lambda_3 \approx -0.0277; \quad J \approx 159.2793.$$

Матрицы субоптимального фильтра третьего порядка, полученные предложенным в статье методом, равны

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -l_1 & 0 \\ 1 & -l_2 & 0 \\ 0 & 0 & -l_3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 6 - l_2 & -1 + l_2 - t_{14} & -1 + l_2 - t_{16} \\ -1 & l_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 - 6l_1 + l_1l_2 & -3t_{14} + l_1(t_{14} - l_2) & -t_{16} + l_1(t_{16} - l_2) \\ 12 - 6l_2 - l_1 + l_2^2 & -3 + l_1 + l_2(t_{14} - l_2) & -1 + l_1 + l_2(t_{16} - l_2) \\ 0 & -3 - l_3^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & l_1 & t_{14} & -l_1 & t_{16} & -l_1 \\ 0 & -1 & l_2 & 1 & t_{14} - l_2 & 1 & t_{16} - l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -l_3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $l_1, l_2, l_3, t_{14}, t_{16}$ – пять (согласно формуле (11) количество параметров $\chi = 5$) переменных параметров субоптимального фильтра, первые три из которых удовлетворяют условию дискретной устойчивости полиномов $\beta_1(z) = z^2 + l_2z + l_1$ и $\beta_2(z) = z + l_3$, т.е.

$$1 + l_2 + l_1 > 0, \quad 1 - l_2 + l_1 > 0, \quad l_1 < 1; \quad |l_3| < 1.$$

Левое матричное дробное описание передаточных функций имеет вид (13), в котором

$$\mathcal{N}_{ev}(z) = \begin{bmatrix} -1 & -z & l_1 + l_2z & t_{14} + z & -l_1 - (l_2 - t_{14})z & t_{16} + z & -l_1 - (l_2 - t_{16})z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -l_3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{N}_{ev}(z) = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{ev}^{1,1}(z) & \mathcal{N}_{ev}^{1,2}(z) & \mathcal{N}_{ev}^{1,3}(z) \\ \mathcal{N}_{ev}^{2,1}(z) & \mathcal{N}_{ev}^{2,2}(z) & \mathcal{N}_{ev}^{2,3}(z) \end{bmatrix}; \quad \mathcal{D}(z) = \begin{bmatrix} \beta_1(z) & 0 \\ 0 & \beta_2(z) \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{N}_{ev}^{1,1}(z) = (l_2 - 6)z^2 + (l_1 - 12)z - 1, \quad \mathcal{N}_{ev}^{1,2}(z) = (t_{14} - l_2 + 1)z^2 + (3 - l_1 + l_2)z + 3t_{14} + l_1,$$

$$\mathcal{N}_{ev}^{1,3}(z) = (t_{16} - l_2 + 1)z^2 + (1 - l_1 + l_2)z + t_{16} + l_1, \quad \mathcal{N}_{ev}^{2,1}(z) = z + l_3, \quad \mathcal{N}_{ev}^{2,2}(z) = -l_3z + 3, \quad \mathcal{N}_{ev}^{2,3}(z) = 0.$$

Найденные с помощью формул (14), (16), (17) и метода последовательного квадратичного программирования [12, гл. 18], численные значения оптимальных параметров и критерия оптимальности имеют вид

$$l_1 \approx 0.135, \quad l_2 \approx 0.5882, \quad l_3 = 0, \quad t_{14} \approx 0.5488, \quad t_{16} \approx 0.4385, \quad J \approx 158.3497.$$

При этом коэффициенты l_1, l_2, l_3 характеристического полинома соответствуют корням, среди которых один вещественный и пара комплексно-сопряжённых.

Таким образом, предложенный подход позволяет снять ограничение на вещественность спектра и увеличить оптимальность фильтра в сравнении с фильтром, полученным методом скалярных наблюдателей.

Заключение. В статье в каноническом базисе предложены необходимые и достаточные условия существования дискретных субоптимальных фильтров. Предложена формула нахождения количества неизвестных параметров субоптимальных фильтров для восстановления векторного функционала от состояния стохастической системы с векторным выходом. Дано левое матричное дробное описание передаточной функции для системы, описывающей ошибку фильтрации. На численном примере системы седьмого порядка построены фильтры третьего порядка методом скалярных наблюдателей и методом канонической формы Люенбергера. Показано, что по сравнению с фильтром на основе скалярных наблюдателей фильтр, использующий фробениусову нормальную форму, может дать выигрыш по квадратичному критерию оптимальности в установившемся режиме.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284 и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 20-37-90065-Аспиранты, 20-08-00073-А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коровин С.К., Фомичев В.В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М., 2007.
2. *Фомичев В.В., Каменщиков М.А.* Сравнительный анализ оптимальных фильтров второго и третьего порядков для непрерывных систем // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1546–1554.
3. *Каменщиков М.А.* Передаточные функции оптимальных фильтров различных динамических порядков для дискретных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 2021. № 2. С. 19–28.
4. *Kamenshchikov M.* Conditions for existence of second-order and third-order filters for discrete systems with additive noises // Math. 2022. V. 10. № 3.
5. *Luenberger D.* Canonical forms for linear multivariable systems // IEEE Trans. on Autom. Contr. 1967. V. 12. № 3. P. 290–293.
6. *Каменщиков М.А., Капалин И.В.* Метод построения оптимального функционального фильтра для линейных стационарных стохастических систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 2018. № 4. С. 19–26.
7. *Darouach M., Fernando T.* Functional detectability and asymptotic functional observer design // IEEE Trans. on Autom. Contr. Early Access 16 February 2022.
8. *O'Reilly J.* Observers for Linear Systems. London, 1983.
9. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М., 1977.
10. *Saberi A., Stoorvogel A.A., Sannuti P.* Filtering Theory. With Applications to Fault Detection, Isolation, and Estimation. Basel, 2007.
11. *Цыпкин Я.З.* Теория линейных импульсных систем. М., 1963.
12. *Nocedal J., Wright S.* Numerical Optimization. New York, 2006.

Электротехнический университет,
г. Ханчжоу, Китай,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва,
Институт проблем управления
имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
Национальный исследовательский технологический
университет “МИСиС”, г. Москва

Поступила в редакцию 25.05.2022 г.
После доработки 25.05.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.

УДК 519.63+517.958:533.9

ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ РАЗВИТИЯ ДВУМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В МАГНИТНЫХ ЛОВУШКАХ-ГАЛАТЕЯХ

© 2022 г. К. В. Брушлинский, Е. В. Степин

Исследование устойчивости ловушек для магнитного удержания плазмы является одной из главных задач в решении проблемы управляемого термоядерного синтеза. Основные тенденции, качественные и количественные закономерности в этом вопросе могут быть получены в терминах математического моделирования и вычислительного эксперимента. Объектом моделирования в настоящей работе являются магнитоплазменные конфигурации в распрямлённой в цилиндр тороидальной ловушке “Галатей-Полюс”, которые выводятся из состояния равновесия малыми возмущениями. Математический аппарат исследования составляют задачи с двумерными нестационарными дифференциальными уравнениями магнитной газодинамики для возмущений основных параметров плазмы и магнитного поля, полученными в линейном приближении. В серии расчётов с различными начальными данными в работе изучена картина развития возмущений с течением времени и описаны её основные закономерности. Получено ограничение на максимальное давление плазмы, выраженное в безразмерных единицах, в пределах которого возмущения не растут со временем, т.е. устойчивость обсуждаемых конфигураций сохраняется.

DOI: 10.31857/S0374064122080118, EDN: CGZSZO

Введение. Настоящая статья продолжает серию работ по численным исследованиям равновесных плазменных конфигураций в магнитных ловушках, которые являются постоянным объектом внимания в программах реализации управляемого термоядерного синтеза. Конкретно рассматривается класс ловушек, в которых удерживающее плазму магнитное поле создаётся токнесущими проводниками, погружёнными в плазменный объём, но не соприкасающимися с горячей плазмой. Они иницированы А.И. Морозовым и названы “галатейми” [1]. Отличительной особенностью этих устройств является большое разнообразие геометрии магнитного поля и, следовательно, богатый спектр возможных равновесных плазменных конфигураций в них. С примерами технологической реализации галатей можно ознакомиться в работах [2–4]. Работы предшествующих лет и общая идеология многосвязных ловушек обсуждаются в монографии [5, с. 545]. Теория используемых математических моделей процессов в галатейях предполагает плазму достаточно плотной, допускающей приближения механики сплошной среды. Математический аппарат моделей составляют задачи для дифференциальных уравнений магнитной газодинамики (МГД), в приближённом решении которых значительную роль играют численные методы и расчёты с применением современной высокопроизводительной вычислительной техники.

Исследования магнитоплазменных конфигураций в ловушках направлены в основном на решение двух групп вопросов. Во-первых, определяются геометрия и количественные характеристики равновесных конфигураций. Рассматриваемые конфигурации в значительной части установок обладают симметрией (плоской, осевой, винтовой) или допускают её, что существенно упрощает описание математических моделей и процесс их исследования. Система уравнений плазмостатики, благодаря симметрии, сводится к одному скалярному дифференциальному уравнению второго порядка для функции потока магнитного поля – хорошо известному уравнению Грэда–Шафранова [6, 7], двумерные краевые задачи для которой решаются численно итерационными методами установления. Решения задач для этого уравнения в применении к ловушкам-галатейям представлены в работах [8–14] и монографиях [15, 16]. Уравнение Грэда–Шафранова хорошо описывает идеализированную ситуацию строгого равновесия, в котором игнорируется высокая конечная проводимость плазмы и связанная с ней медленная диффузия магнитного поля.

Во-вторых, существенным в проблеме удержания плазмы на протяжении необходимого времени становится общий для современной физики плазмы вопрос об устойчивости рассматриваемых равновесных конфигураций (см. [17–19]).

В применении к галатеем, а более конкретно – к галатее-поясу [3], в наших предшествующих работах поставлены и частично решены следующие вопросы:

1) определено необходимое, но не достаточное условие “диффузионной устойчивости”, связанное со сходимостью итерационных методов решения задач с уравнением Грэда–Шафранова и, как выяснилось, со спектральным свойством дифференциального оператора линеаризованной задачи [15, 16];

2) найдено условие устойчивости кольцевых одномерных конфигураций, окружающих один прямой проводник с током – основной элемент конструкций всех галатей; условия устойчивости получены в терминах спектральных задач с линеаризованными МГД-уравнениями, сведёнными к одному уравнению второго порядка для вектора скорости [20–22], а именно, численно найдена “граница устойчивости”, при которой дифференциальный оператор имеет нулевое собственное значение;

3) численно решена аналогичная двумерная задача с галатеей-поясом и показано, что эта “граница устойчивости” усиливает ограничение на максимальное давление, отнесённое к магнитным единицам, связанное с требованием “диффузионной устойчивости” [23].

В настоящей работе рассмотрена двумерная задача об устойчивости галатее-пояса, распрямлённой в цилиндр квадратного сечения, без перехода к двумерной линеаризованной задаче с возмущённым вектором скорости. Малые возмущения равновесной конфигурации описываются системой в общем случае семи линеаризованных МГД-уравнений, которая распадается на две независимые друг от друга системы: одна содержит пять уравнений для возмущений v_{1x} , v_{1y} , p_1 , H_{1x} , H_{1y} в плоскости (x, y) , а другая – два уравнения для возмущения скорости и магнитного поля в осевом направлении: v_{1z} и H_{1z} . Основной интерес представляет первая система, для которой ставится и численно решается начально-краевая задача в квадрате. Здесь не требуется искать спектр задачи, поскольку зависимость возмущений от времени имеет вид $\exp(i\omega t)$, и устойчивость проявляется в том, что решение задачи не растёт со временем.

В результате серии расчётов качественно получен следующий результат: устойчивость имеет место только при обсуждаемом выше ограничении на отношение характерных значений газового давления плазмы к её магнитному давлению, которое сильнее, чем условие “диффузионной” устойчивости и практически не зависит от выбора начальных условий и других деталей постановки задачи.

Сопоставление двух различных методов исследования и совпадение основного результата, во-первых, подтверждает сам результат, во-вторых, представляет самостоятельный методический интерес в вопросах численного моделирования актуальных задач современной физики.

1. Постановка задачи и метод решения. Математическая модель исследуемого объекта – распрямлённой в цилиндр квадратного сечения ловушки “Галатее-Пояс” с двумя прямыми проводниками и равновесной конфигурации плазмы, магнитного поля и электрического тока в ней получена ранее (см., например, [13, 23]) в процессе численного решения краевой задачи с уравнением Грэда–Шафранова для функции магнитного потока $\psi(x, y)$:

$$\Delta\psi + \frac{dp}{d\psi} + j^{\text{ex}} = 0 \tag{1}$$

в квадрате $-2 < x, y < 2$ с граничным условием $\psi|_{\Gamma} = 0$. Здесь и ниже все величины приведены к безразмерной форме, т.е. отнесены к естественным единицам, составленным из размерных параметров задачи:

$$x_u = y_u = x_0, \quad H_u = \frac{2J_c}{cx_u}, \quad j_u = \frac{c}{4\pi} \frac{H_u}{x_u}, \quad p_u = \frac{H_u^2}{4\pi},$$

где x_0 – расстояние от оси до центров токонесущих проводников, J_c – величина полного электрического тока в каждом из них.

Равновесная конфигурация магнитного поля при этом может быть найдена с помощью следующих соотношений:

$$H_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Предполагается, что давление плазмы между магнитными силовыми линиями $\psi(x, y) = \text{const}$ задаётся в виде функции

$$p(\psi) = p_0 \exp\left(-\frac{(\psi - \psi_0)^2}{q^2}\right), \tag{2}$$

где $\psi_0 = \psi(0, 0)$ – равенство, обеспечивающее сосредоточение плазмы в центре и на проходящей через него сепаратрисе поля в соответствии с идеологией магнитного удержания плазмы, без соприкосновения с конструктивными элементами ловушки. Величина p_0 является одним из основных параметров задачи и соответствует максимальному давлению плазмы, выраженному в безразмерных единицах, которое достигается в ловушке.

Электрический ток в проводниках условного радиуса r_c с центрами $x_1 = 1, x_2 = -1$, погружённых в плазменный объём, моделируется с помощью функции j^{ex} в уравнении (1) в следующем виде:

$$j^{\text{ex}} = j_0 \sum_{k=1}^2 \exp\left(-\frac{(x - x_k)^2 + y^2}{r_c^2}\right), \quad j_0 = \frac{2}{r_c^2}.$$

Решение этой задачи существует, т.е. итерационный метод решения сходится, при ограничении $p_0 < p_0^{\text{diff}}$, которое названо условием “диффузионной” устойчивости. Этот тип соответствует устойчивости рассматриваемых двумерных конфигураций относительно возмущений магнитного поля той же размерности.

В качестве примера равновесной магнитоплазменной конфигурации, исследованию устойчивости которой посвящена настоящая работа, на рис. 1 представлен результат расчёта обсуждаемой задачи с уравнением (1) при максимальном значении безразмерного давления плазмы $p_0 = 1.5$.

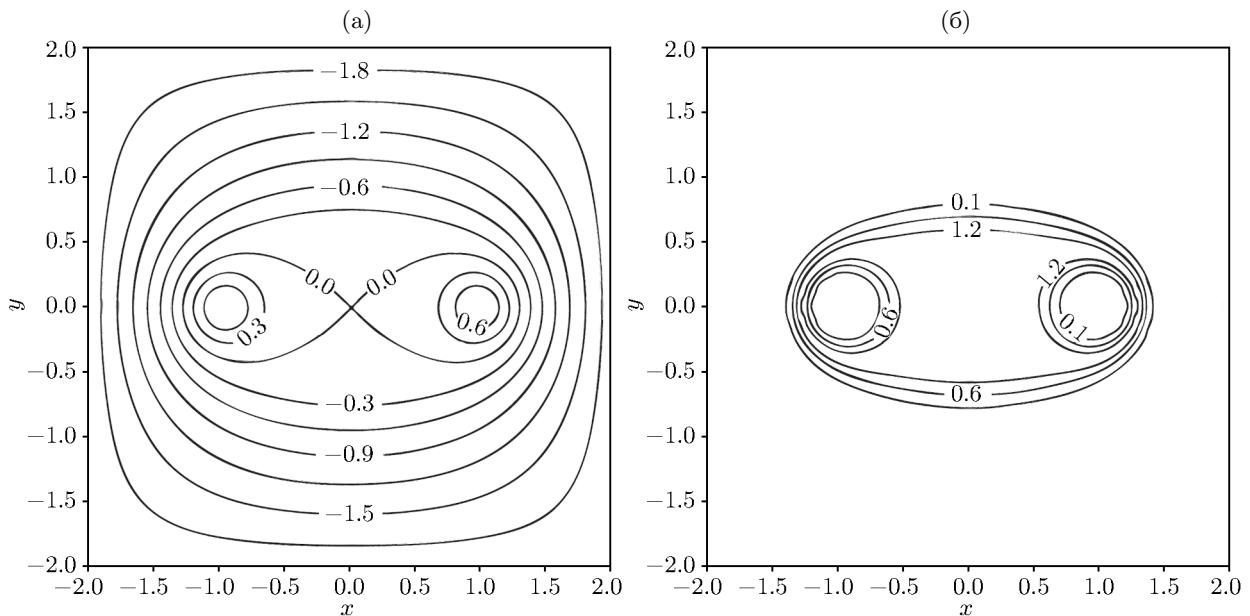


Рис. 1. Равновесная магнитоплазменная конфигурация в цилиндрическом аналоге ловушки “Галатей-Пояс” квадратного сечения при $p_0 = 1.5$: (а) – линии уровня функции магнитного потока $\psi(x, y)$; (б) – линии уровня безразмерного давления плазмы $p(x, y)$.

Как уже неоднократно обсуждалось в предыдущих работах, на рисунке видно, что основной объём плазмы сосредоточен в центре ловушки в окрестности сепаратрисы магнитного

поля в соответствии с видом функции (2), и плазма не соприкасается с внешней границей установки и токонесущими проводниками, создающими удерживающее магнитное поле. Отметим, что здесь представлена конфигурация при значении давления p_0 почти в два раза большим, чем рассмотренным в работе [23], при этом плазменный объём приобрел выпуклый в сторону внешней границы ловушки вид. Изменение давления плазмы наиболее интенсивно вблизи проводников и внешней границы равновесной конфигурации. Подробное исследование зависимости свойств равновесных магнитоплазменных конфигураций в ловушке “Галатеея-Пояс” от основных параметров задачи, включая p_0 , r_c и q , содержится в статье [24].

Отдельный интерес, в контексте проводимых в данной работе исследований устойчивости равновесных конфигураций в галатее-поясе, представляет вид векторного поля напряжённости магнитного поля $\mathbf{H} = (H_x, H_y)$ в рассматриваемой системе, представленный на рис. 2. Магнитное поле направлено против часовой стрелки вокруг плазменного объёма и на его внешней границе. Такое же направление оно имеет и вокруг проводников с током. Именно такая конфигурация магнитного поля обеспечивает условие несприкосновения плазмы с конструктивными элементами ловушки: результирующая амперова сила $\mathbf{F}_A = \mathbf{j} \times \mathbf{H}$ направлена в сторону сепаратрисы магнитного поля в области, занимаемой плазмой, и при этом в окрестности проводников изотропно обращена от них.

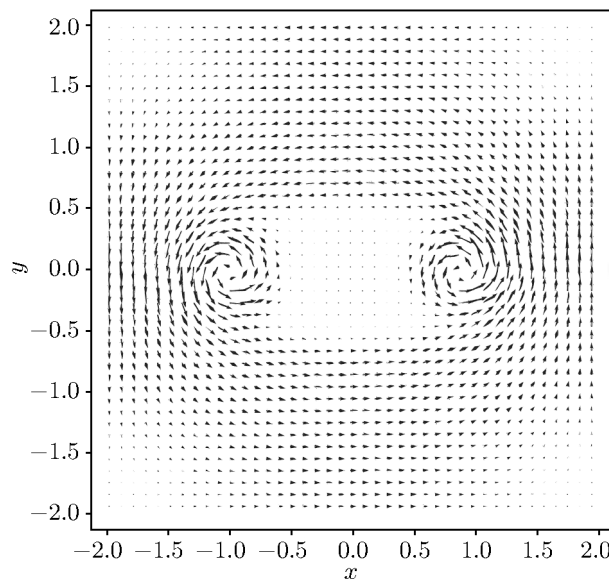


Рис. 2. Векторное поле напряжённости магнитного поля $\mathbf{H} = (H_x, H_y)$ в равновесной магнитоплазменной конфигурации при $p_0 = 1.5$.

Исследование устойчивости этих конфигураций ведётся в терминах линеаризованных на состоянии покоя дифференциальных уравнений магнитной газодинамики

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \nabla p_1 = \mathbf{j}_1 \times \mathbf{H} + (\mathbf{j} - \mathbf{j}^{\text{ex}}) \times \mathbf{H}_1, \quad \frac{\partial p_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla p + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = \operatorname{rot} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{H}), \quad \mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad (3)$$

где величины без индекса соответствуют состоянию равновесия, а индексом “1” отмечены малые возмущения.

В отличие от предыдущих работ, уравнения (3) сводятся не к уравнениям второго порядка только для скорости, а к полной системе семи уравнений первого порядка. В условиях симметрии рассматриваемой задачи невозмущённые величины p , \mathbf{H} , \mathbf{j} зависят только от переменных x , y . Возмущения будем предполагать тоже двумерными, т.е. зависящими от (t, x, y) .

В этих предположениях уравнения (3) распадаются на две независимые системы, одна из которых содержит пять уравнений для векторов возмущений в плоскости (x, y) , а другая – два уравнения только для z -компонент векторов \mathbf{v}_1 и \mathbf{H}_1 :

$$\rho \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} + H_y \left(\frac{\partial H_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial H_{1x}}{\partial y} \right) + j^{\text{pl}} H_{1y} = 0,$$

$$\rho \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial y} - H_x \left(\frac{\partial H_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial H_{1x}}{\partial y} \right) - j^{\text{pl}} H_{1x} = 0,$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} u_1 + \frac{\partial p}{\partial y} v_1 + \gamma p \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial H_{1x}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (H_x v_1 - H_y u_1) = 0, \quad \frac{\partial H_{1y}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (H_x v_1 - H_y u_1) = 0, \tag{4}$$

$$\rho \frac{\partial w_1}{\partial t} - \left(H_x \frac{\partial H_{1z}}{\partial x} + H_y \frac{\partial H_{1z}}{\partial y} \right) = 0, \quad \frac{\partial H_{1z}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (H_x w_1) - \frac{\partial}{\partial y} (H_y w_1) = 0, \tag{5}$$

где (u_1, v_1, w_1) – компоненты вектора скорости возмущений \mathbf{v}_1 , $j^{\text{pl}} = j_z - j^{\text{ex}}$.

Система (5) фактически является вариантом хорошо известной системы уравнений акустики, решения которой не растут со временем. Поэтому для исследования эволюции двумерных возмущений сосредоточимся на решении основной системы (4). Её разностный аналог легко построить с помощью разностной сетки “шахматного” типа (рис. 3), состоящей из целых (кружки) и полуцелых (кресты) точек, смещённых друг относительно друга на полшага по x , y и t . Расчёт ведётся в квадратной области $-2 < x, y < 2$ с граничным условием $v_{1n} = 0$.

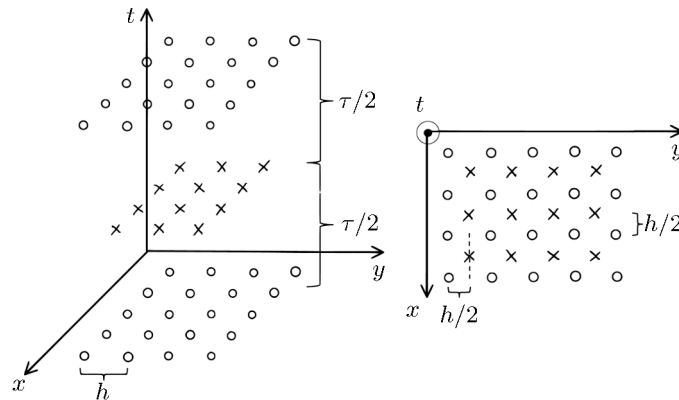


Рис. 3. Равномерная разностная сетка “шахматного” типа. h – шаг по пространственным координатам x и y , τ – шаг по времени t .

Вопрос об устойчивости равновесия относительно двумерных возмущений здесь решается напрямую, т.е. без спектрального анализа дифференциального оператора второго порядка в уравнениях только для скорости возмущений. В расчётах основной интерес представляет поведение возмущений со временем на качественном уровне: растут или не растут они со временем. В результате этот подход, несмотря на кажущуюся внешне громоздкость (исследуется задача для пяти уравнений вместо двух или трёх), оказался логически проще и легче реализуемым в расчётах.

2. Результаты численного моделирования. В серии расчётов получены основные закономерности, качественные и количественные выводы об устойчивости двумерных равновесных магнитоплазменных конфигураций в распрямлённой в цилиндр квадратного сечения ловушке “Галатей-Пояс” относительно малых возмущений параметров задачи, включая динамические, той же размерности.

Отметим, что, в отличие от статьи [23], используемый в настоящем исследовании подход позволяет напрямую проследить эволюцию параметров возмущений с ростом времени. В дан-

ной работе выбраны такие начальные условия задачи с уравнениями (4), которые отвечают выводу из состояния равновесия самой среды кинематическим способом, т.е. эти условия соответствуют начальному профилю возмущений скорости, но при этом предполагается, что в начальный момент времени возмущения магнитного поля и давления плазмы отсутствуют. Такая ситуация может возникать в реальных условиях, когда магнитная ловушка, например, приводится в движение.

На рис. 4 на примере равновесной магнитоплазменной конфигурации с $p_0 = 1.5$ (см. рис. 1, 2) представлены различные варианты начального профиля возмущений скорости плазмы, которые были использованы в расчётах. На рис. 4, а векторное поле скорости возмущений v_1 сонаправлено с магнитным полем равновесной конфигурации (см. рис. 2), на рис. 4, б плазма приобретает начальный импульс в направлении верхнего правого угла ловушки, и, наконец, на рис. 4, в скорость возмущений направлена по часовой стрелке, т.е. противоположно магнитному полю.

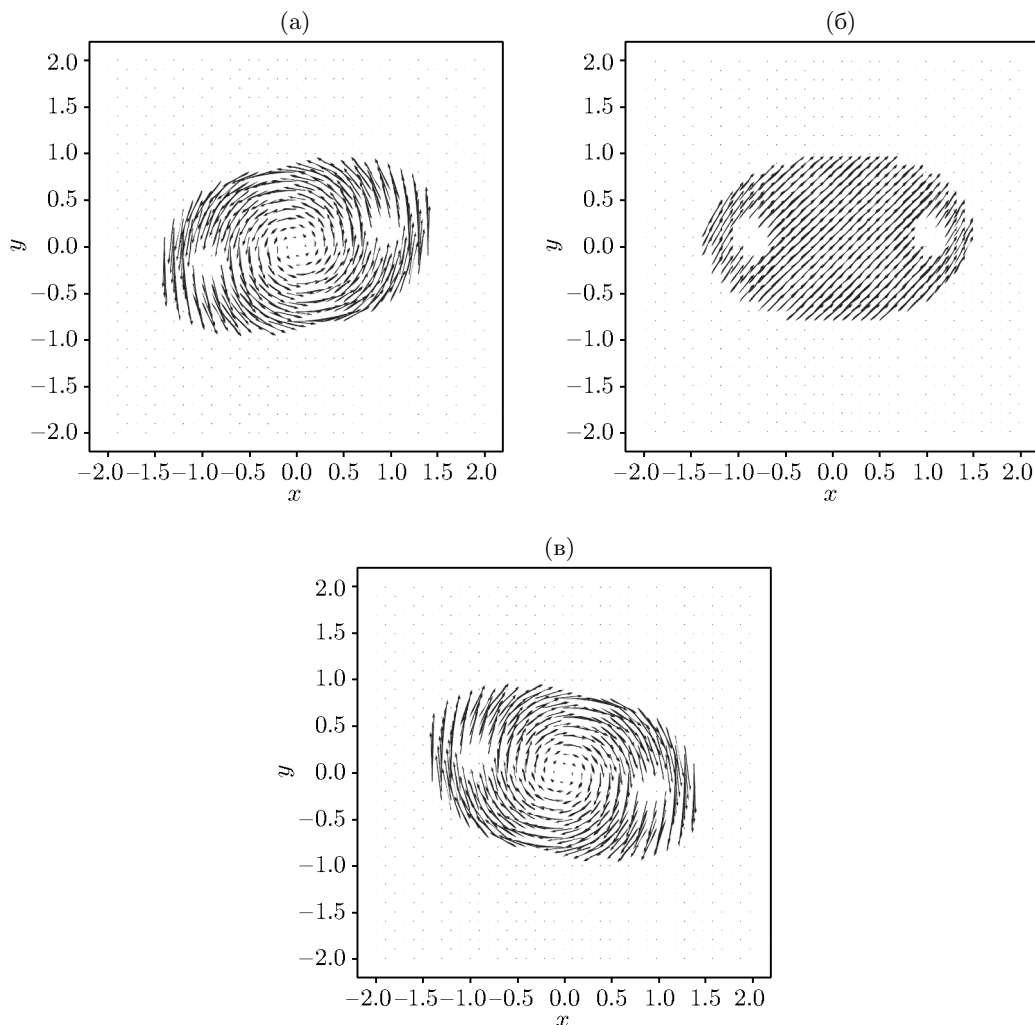


Рис. 4. Начальные профили векторного поля возмущений скорости плазмы в магнитоплазменной конфигурации с $p_0 = 1.5$.

Расчёты показали, что динамика возмущений сильно зависит от начальных данных. Отдельно стоит отметить, что, несмотря на отсутствие возмущений магнитного поля в начальный момент времени, они появляются уже на первых итерациях численного решения задачи и развиваются с течением времени. Этот результат согласуется с физической природой процесса: движение плазмы как электропроводной среды приводит к перераспределению магнитной конфигурации ловушки.

На рис. 5 представлена картина возмущений магнитного поля при фиксированном значении времени расчёта для начальных данных, соответствующих рис. 4.

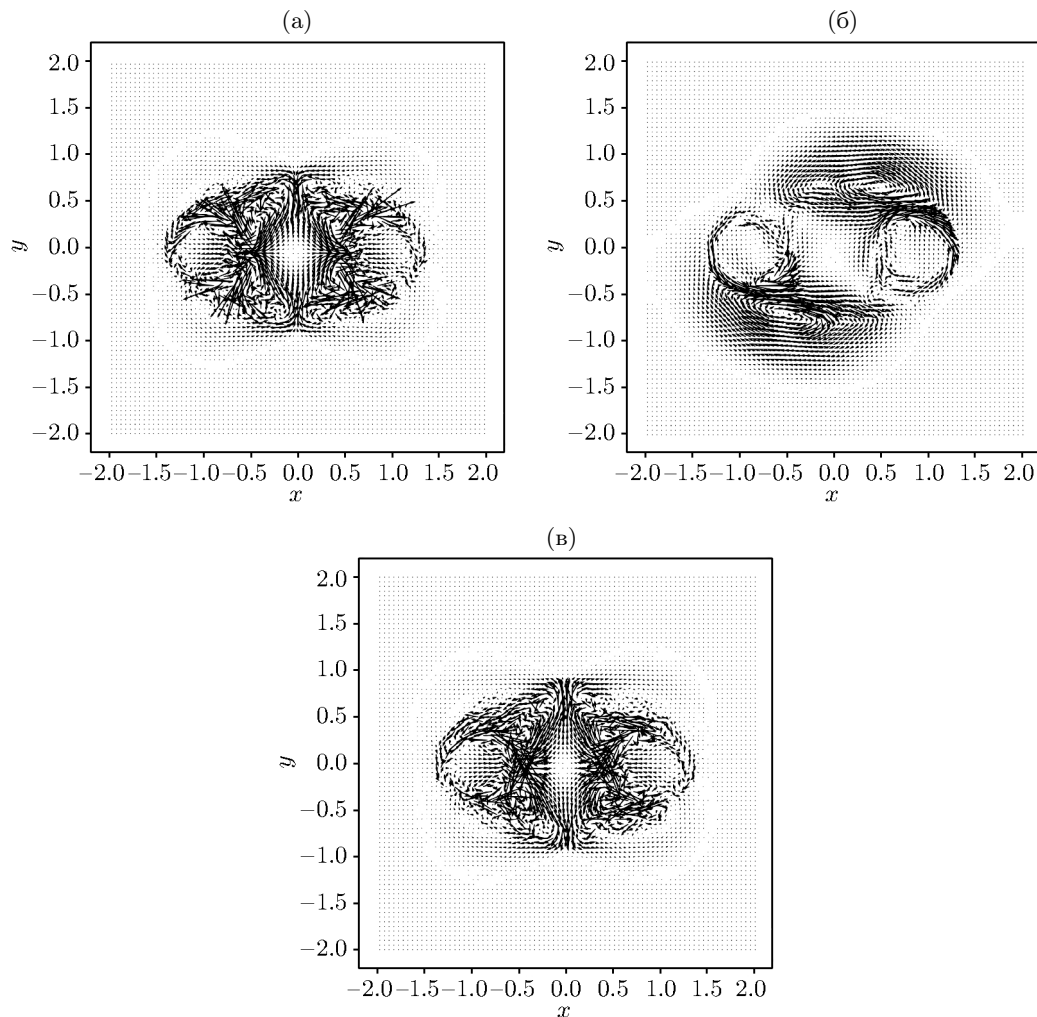


Рис. 5. Развитие возмущений магнитного поля в конфигурации с $p_0 = 1.5$ при различных начальных условиях на возмущение скорости. Срез по времени $T = 1$.

В случае, когда начальный профиль возмущений скорости плазмы сонаправлен с магнитным полем равновесной конфигурации, наблюдается “втекание” магнитного поля внутрь ловушки в центр со стороны её верхней и нижней границ, при этом в центральной области ловушки магнитное поле поворачивается в сторону проводников и приобретает тенденцию к их огибанию (рис. 5, а). В расчётах также наблюдается образование на периферии плазменной конфигурации симметрично расположенных в каждом из её квадрантов вихрей возмущений магнитного поля. Если плазма начинает смещение вдоль диагонали ловушки (рис. 5, б), то картина относительно предыдущего случая качественно меняется. Вблизи правого проводника с центром в точке $x_1 = 1$ на верхней границе плазменного объёма наблюдается развитие вихря возмущений магнитного поля, отвечающее, по всей видимости, суперпозиции влияния магнитного поля равновесной конфигурации, направленного против часовой стрелки, и начального профиля поля скорости возмущений. Такой же вихрь симметричным образом возникает в области левого проводника на нижней границе ловушки. Наконец, характер развития возмущений в случае, когда начальный профиль скорости имеет противоположное магнитному полю равновесной конфигурации направление (рис. 5, в), с точностью да наоборот повторяет картину, представленную на рис. 5, а: магнитное поле “вытекает” из плазменного объёма через середину верхней и нижней границы ловушки, при этом в области проводников возмущения магнитного поля направлены в центр плазменного объёма.

В основе таких сложных картин развития возмущений магнитного поля лежит тенденция магнитоплазменной конфигурации восстановить изначальное равновесие. Динамика развития возмущений скорости имеет более простой характер, поэтому соответствующие графики в данной работе не приводятся. Отметим лишь, что плазма обтекает области, занятые проводниками, не соприкасаясь с ними. Наибольшую скорость имеют возмущения на внешней границе плазменного объёма, где давление плазмы интенсивно падает.

Очевидно, что картина развития возмущений будет уникальна для каждого конкретного варианта начальных данных. Если учитывать также начальные возмущения магнитного поля \mathbf{H}_1 и давления плазмы p_1 , то можно моделировать практически любые ситуации, при которых магнитные ловушки подвергаются тому или иному воздействию.

В конечном итоге, как это уже было отмечено выше, устойчивость той или иной магнито-плазменной конфигурации оказывается напрямую связанной с вопросом: растут ли обсуждаемые возмущения со временем или нет? В настоящей работе результаты расчётов показали, что возмущения параметров плазмы, какую бы сложную картину развития, связанную со способом задания начальных данных, они ни имели, не растут со временем, если максимальное давление плазмы p_0 , выраженное в магнитных единицах, не превышает некоторого критического значения p_0^{cr} . При этом обнаруженное критическое значение p_0^{cr} оказалось меньше p_0^{diff} , соответствующего “диффузионной” устойчивости, т.е. устойчивости относительно возмущений только магнитного поля той же размерности, что и изучаемые конфигурации. Этот результат качественно совпадает с полученным ранее в работе [23], но совсем из других соображений, а именно, из численного анализа спектральных свойств дифференциального оператора второго порядка для вектора скорости возмущений. Совпадение результатов говорит о состоятельности обеих математических моделей устойчивости равновесных магнитоплазменных конфигураций в ловушках, создаваемых для удержания плотной горячей плазмы. В расчётах значение критического давления было уточнено до $p_0^{\text{cr}} \approx 4$. Важно также отметить, что неустойчивость обсуждаемых конфигураций в ловушке “Галатейя-Пояс” проявляется в неограниченном росте амплитуды возмущений именно на периферии плазменного объёма, где давление плазмы интенсивно убывает, и этот результат также подтверждается выводами из исследований одномерных конфигураций, окружающих прямой проводник с током, опубликованных в работах [20–22].

Утверждение. *Для исследования малых двумерных возмущений равновесных магнито-плазменных конфигураций в ловушке “Галатейя-Пояс” сформулирована и численно реализована в программном коде нестационарная МГД-модель, позволяющая проследить их развитие во времени. Установлено, что возмущения не растут при более сильном ограничении на максимальное давление плазмы, измеренное в магнитных единицах, чем для “диффузионной” устойчивости, т.е. устойчивости относительно возмущений магнитного поля. Представленные выводы качественно совпадают и количественно уточняют предыдущие результаты, полученные с помощью спектрального метода.*

Заключение. В работе представлена двумерная нестационарная модель устойчивости равновесных конфигураций в ловушках-галатейях – перспективных установках для магнитного удержания плазмы, разрабатываемых в рамках решения проблемы управляемого термоядерного синтеза. Модель позволяет проследить эволюцию возмущений параметров плазмы и магнитного поля, а также качественно и количественно оценить критерии, способствующие или препятствующие устойчивости рассматриваемых ловушек. На примере ловушки “Галатейя-Пояс” с двумя токонесящими проводниками, погружёнными в плазменный объём, выполнена серия расчётов с различными способами задания начальных профилей скорости возмущений и выявлены основные закономерности в характере их развития. Получен критерий МГД-устойчивости, связанный с ограничением на максимальное давление плазмы в ловушке, выраженное в безразмерных единицах. Эти результаты качественно совпадают и количественно уточняют полученные ранее результаты в цикле исследований устойчивости ловушек-галатей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-283.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов А.И. О галатях – плазменных ловушках с омываемыми плазмой проводниками // Физика плазмы. 1992. Т. 18. Вып. 3. С. 305–316.
2. Морозов А.И., Пустовитов В.Д. О стеллараторе с левитирующими обмотками // Физика плазмы. 1991. Т. 17. Вып. 10. С. 1276.
3. Морозов А.И., Франк А.Г. Тороидальная магнитная ловушка-галатhea с азимутальным током // Физика плазмы. 1994. Т. 20. № 11. С. 982–989.
4. Морозов А.И., Бугрова А.И., Бишаев А.М., Липатов А.С., Козинцева М.В. Параметры плазмы в модернизированной ловушке-галатее “Тримикс” // Журн. техн. физики. 2007. Т. 77. № 12. С. 15–20.
5. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. М., 2008.
6. Grad H., Rubin H. Hydrodynamic equilibria and force-free fields // Proc. 2nd United Nations Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy. Geneva. 1958. V. 31. P. 190–197 / N.Y. Columbia Univ. Press, 1959.
7. Шафранов В.Д. Равновесие плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М., 1963. Вып. 2. С. 92–131.
8. Брушлинский К.В., Зуева Н.М., Михайлова М.С., Морозов А.И., Пустовитов В.Д., Тузова Н.Б. Численное моделирование прямых винтовых шнуров с проводниками, погруженными в плазму // Физика плазмы. 1994. Т. 20. № 3. С. 284–292.
9. Брушлинский К.В., Морозов А.И., Петровская Н.Б. Численное моделирование винтовой равновесной конфигурации с плазмой на сепаратрисе // Мат. моделирование. 1998. Т. 10. № 11. С. 29–36.
10. Морозов А.И., Савельев В.В. О галатях-ловушках с погруженными в плазму проводниками // Успехи физ. наук. 1998. Т. 168. № 11. С. 1153–1194.
11. Брушлинский К.В., Игнатов П.А. Плазмостатическая модель магнитной ловушки “Галатhea-Пояс” // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2010. Т. 50. № 12. С. 2184–2194.
12. Брушлинский К.В., Гольдич А.С., Десятова А.С. Плазмостатические модели магнитных ловушек-галатей // Мат. моделирование. 2012. Т. 24. № 8. С. 81–86.
13. Брушлинский К.В., Кондратьев И.А. Сравнительный анализ расчётов равновесия плазмы в тороидальных и цилиндрических магнитных ловушках // Мат. моделирование. 2018. Т. 30. № 6. С. 76–94.
14. Tao B., Jin X., Li Z., Tong W. Equilibrium configuration reconstruction of multipole galatea magnetic trap based on magnetic measurement // IEEE Transactions on Plasma Science. 2019. V. 47. № 7. P. 3114–3123.
15. Брушлинский К.В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. М., 2009.
16. Брушлинский К.В. Математические основы вычислительной механики жидкости, газа и плазмы. М., 2017.
17. Кадомцев Б.Б. Гидромагнитная устойчивость плазмы // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М., 1963. Вып. 2. С. 132–176.
18. Соловьёв Л.С. Гидромагнитная устойчивость замкнутых плазменных конфигураций // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М., 1972. Вып. 6. С. 210–290.
19. Бейтман Г. МГД-неустойчивости. М., 1982.
20. Брушлинский К.В., Кривцов С.А., Степин Е.В. Об устойчивости равновесия плазмы в окрестности прямого проводника с током // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2020. Т. 60. № 4. С. 153–163.
21. Брушлинский К.В., Степин Е.В. Математические модели равновесных конфигураций плазмы, окружающей проводники с током // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 7. С. 901–909.
22. Brushlinskii K. V., Stepin E. V. Plasma equilibrium and stability in a current-carrying conductor vicinity // J. Phys.: Conf. Ser. 2020. V. 1640. P. 012018.
23. Брушлинский К.В., Степин Е.В. Вопросы устойчивости в двумерных математических моделях равновесия плазмы в магнитных ловушках-галатях // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 7. С. 867–879.
24. Brushlinskii K. V., Stepin E. V. On equilibrium magnetoplasma configurations in “Galatea-Belt” magnetic traps // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. V. 2028. P. 012026.

Институт прикладной математики
имени М.В. Келдыша РАН, г. Москва,
Национальный исследовательский ядерный
университет “МИФИ”, г. Москва,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 22.02.2022 г.
После доработки 22.02.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.

УДК 517.923+517.925.54

КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ С ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

© 2022 г. П. А. Крутицкий, И. О. Резниченко

Выводится квадратурная формула для потенциала двойного слоя с дифференцируемой плотностью, заданной на гладкой замкнутой либо незамкнутой поверхности. Проведённые численные тесты показывают, что эта формула даёт более высокую точность вычислений вблизи поверхности, где задана плотность потенциала, чем квадратурные формулы, в которых дифференцируемость плотности не учитывается и плотность предполагается лишь непрерывной. Преимущество квадратурной формулы в данной работе особенно заметно в случае, когда плотность потенциала представлена гладкими осциллирующими функциями, так как она позволяет повысить точность вычисления потенциала без увеличения стоимости вычислений.

DOI: 10.31857/S037406412208012X, EDN: CGZXVB

Введение. Потенциал двойного слоя для уравнений Лапласа и Гельмгольца используется при решении краевых задач математической физики методом интегральных уравнений [1, раздел IV; 2, раздел II; 3, гл. 5]. Для вычисления потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью в прикладных расчётах применяют стандартную квадратурную формулу [4, гл. 2] либо формулу, основанную на определении телесного угла [5], однако они не позволяют повысить точность вычислений при дифференцируемой плотности, так как не допускают обобщений на этот случай. В работе [6] предложена новая квадратурная формула для гармонического потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью, которую можно обобщить на случай дифференцируемой плотности, что позволит повысить точность вычислений потенциала двойного слоя, если плотность в потенциале дифференцируема. Указанному обобщению и посвящена настоящая работа. Улучшение точности вычислений потенциала подтверждается численными расчётами.

В двумерном случае улучшенная квадратурная формула для потенциала простого слоя с плотностью, заданной на незамкнутых кривых и имеющей степенные особенности на их концах, построена в статьях [7, 8] и может применяться для нахождения численных решений краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца вне разрезов и незамкнутых кривых на плоскости. Такие задачи изучались в работах [9–15].

1. Постановка задачи. Введём декартову систему координат $x = (x_1, x_2, x_3)$ в пространстве \mathbb{R}^3 . Пусть Γ – простая гладкая замкнутая поверхность класса C^2 либо простая гладкая ограниченная незамкнутая ориентированная поверхность класса C^2 , содержащая свои предельные точки [16, гл. 14, § 1]. Если поверхность Γ замкнутая, то она должна ограничивать объёмно-односвязную внутреннюю область [17, с. 201]. Предположим, что поверхность Γ параметризована так, что на неё отображается прямоугольник $[0, A] \times [0, B]$:

$$y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma, \quad y_1 = y_1(u, v), \quad y_2 = y_2(u, v), \quad y_3 = y_3(u, v); \quad u \in [0, A], \quad v \in [0, B];$$

$$y_j(u, v) \in C^2([0, A] \times [0, B]), \quad j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Сферу, поверхность эллипсоида, гладкие поверхности фигур вращения, поверхность тора и многие другие более сложные поверхности можно параметризовать таким образом.

Введём N точек u_n с шагом h на отрезке $[0, A]$ и M точек v_m с шагом H на отрезке $[0, B]$ и рассмотрим разбиение прямоугольника $[0, A] \times [0, B]$

$$A = Nh, \quad B = MH, \quad u_n = (n + 1/2)h, \quad n = \overline{0, N-1}; \quad v_m = (m + 1/2)H, \quad m = \overline{0, M-1},$$

на $N \times M$ прямоугольников с центрами (u_n, v_m) .

Известно [16, гл. 14, § 1], что компоненты вектора нормали (не единичного)

$$\eta(y) = (\eta_1(y), \eta_2(y), \eta_3(y))$$

в точке поверхности $y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma$ выражаются через определители второго порядка формулами

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} (y_2)_u & (y_3)_u \\ (y_2)_v & (y_3)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{vmatrix} (y_3)_u & (y_1)_u \\ (y_3)_v & (y_1)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{vmatrix} (y_1)_u & (y_2)_u \\ (y_1)_v & (y_2)_v \end{vmatrix},$$

а длина этого вектора равна $|\eta(y)| = \sqrt{(\eta_1(y))^2 + (\eta_2(y))^2 + (\eta_3(y))^2}$.

Известно [16, гл. 14, §§ 1, 2], что справедливо равенство

$$\int_{\Gamma} F(y) ds_y = \int_0^A du \int_0^B F(y(u, v)) |\eta(y(u, v))| dv.$$

Потребуем, чтобы

$$|\eta(y(u, v))| > 0 \quad \text{для любых точек } (u, v) \in ((0, A) \times (0, B)). \tag{2}$$

Из условия (2) следует, что $|\eta(y(u, v))| \in C^1((0, A) \times (0, B))$.

Через \mathbf{n}_y обозначим единичную нормаль в точке $y \in \Gamma$, т.е. $\mathbf{n}_y = \eta(y)/|\eta(y)|$. Производная по нормали \mathbf{n}_y имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} = |\eta(y)|^{-1} (\eta(y), \nabla_y).$$

Обозначим $|x - y(u, v)| = \sqrt{(x_1 - y_1(u, v))^2 + (x_2 - y_2(u, v))^2 + (x_3 - y_3(u, v))^2}$ и заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} |x - y| = \frac{1}{|\eta(y)|} \sum_{j=1}^3 \eta_j(y) \frac{y_j - x_j}{|x - y|}.$$

Пусть $x \notin \Gamma$. Рассмотрим потенциал двойного слоя для уравнения Гельмгольца с заданной на поверхности Γ дифференцируемой плотностью $\mu(y) \in C^1(\Gamma)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_k[\mu](x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds_y = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \mu(y) \frac{1}{|\eta(y)|} \frac{\exp(ik|x-y|)(ik|x-y| - 1)}{|x-y|^2} \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(y)(y_j - x_j)}{|x-y|} ds_y = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^A du \int_0^B \mu(y(u, v)) \exp(ik|x-y(u, v)|) (ik|x-y(u, v)| - 1) \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(y(u, v))(y_j(u, v) - x_j)}{|x-y(u, v)|^3} dv = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} \mu(y(u, v)) \times \\ &\quad \times \exp(ik|x-y(u, v)|) (ik|x-y(u, v)| - 1) \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(y(u, v))(y_j(u, v) - x_j)}{|x-y(u, v)|^3} dv, \tag{3} \end{aligned}$$

где $k \geq 0$. При $k = 0$ потенциал (3) переходит в потенциал двойного слоя для уравнения Лапласа.

При $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$ и $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$ так же, как и в работе [18], можно показать, что справедливы равенства

$$|x - y(u, v)| = |x - y(u_n, v_m)| + O(h + H), \quad \exp(ik|x - y(u, v)|) = \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) + O(h + H)$$

для любого $x \notin \Gamma$. Константы в оценках функций $O(h + H)$ не зависят от n, m и от расположения $x \notin \Gamma$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_k[\mu](x) &\approx \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|)(ik|x - y(u_n, v_m)| - 1) \times \\ &\times \int_{u_n - h/2}^{u_n + h/2} du \int_{v_m - H/2}^{v_m + H/2} \mu(y(u, v)) \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(y(u, v))(y_j(u, v) - x_j)}{|x - y(u, v)|^3} dv. \end{aligned} \tag{4}$$

Таким образом, чтобы получить квадратурную формулу для потенциала двойного слоя при $x \notin \Gamma$ необходимо вычислить следующий интеграл:

$$\int_{u_n - h/2}^{u_n + h/2} du \int_{v_m - H/2}^{v_m + H/2} \mu(y(u, v)) \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(y(u, v))(y_j(u, v) - x_j)}{|x - y(u, v)|^3} dv. \tag{5}$$

2. Вычисление интеграла. Пусть точка x не принадлежит части поверхности Γ , на которой изменяется точка $y = y(u, v)$ при $(u - u_n) \in [-h/2, h/2]$ и $(v - v_m) \in [-H/2, H/2]$. Разложим $y_j(u, v)$ по формуле Тейлора с центром в точке (u_n, v_m) , тогда для $j = 1, 2, 3$ получим

$$y_j(u, v) = y_j(u_n, v_m) + D_j + O(H^2 + h^2),$$

где

$$D_j = (y_j)'_u(u - u_n) + (y_j)'_v(v - v_m).$$

Здесь и далее все производные по u и v берутся в точке (u_n, v_m) . Положим

$$r^2 = |x - y(u_n, v_m)|^2 = \sum_{j=1}^3 r_j^2 \neq 0, \quad r_j = y_j(u_n, v_m) - x_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

тогда

$$y_j(u, v) - x_j = r_j + D_j + O(H^2 + h^2), \quad j = 1, 2, 3.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |x - y(u, v)|^2 &= \sum_{j=1}^3 (x_j - y_j(u, v))^2 \approx \sum_{j=1}^3 (r_j^2 + 2r_j D_j + D_j^2) = \\ &= r^2 + 2P(u - u_n) + 2Q(v - v_m) + \alpha^2(u - u_n)^2 + \beta^2(v - v_m)^2 + 2\delta(u - u_n)(v - v_m) = \\ &= \beta^2(V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2/\beta^2 + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2, \end{aligned}$$

где

$$U = u - u_n, \quad V = v - v_m, \quad P = \sum_{j=1}^3 r_j (y_j)'_u, \quad Q = \sum_{j=1}^3 r_j (y_j)'_v,$$

$$\alpha^2 = \sum_{j=1}^3 ((y_j)'_u)^2, \quad \beta^2 = \sum_{j=1}^3 ((y_j)'_v)^2, \quad \delta = \sum_{j=1}^3 (y_j)'_u (y_j)'_v.$$

Можно показать [16, гл. 14, § 1], что справедливо равенство

$$\alpha^2\beta^2 - \delta^2 = |\eta(y(u_n, v_m))|^2.$$

Согласно условию (2) $|\eta(y(u_n, v_m))| > 0$ для всех возможных n, m , поэтому

$$\alpha^2\beta^2 - \delta^2 > 0,$$

откуда следует, что $\alpha^2 > 0$ и $\beta^2 > 0$.

Применив формулу Тейлора в точке (u_n, v_m) с остаточным членом в форме Пеано [16, гл. 10, § 5.3], находим

$$\eta_j(y(u, v)) = \eta_j(y(u_n, v_m)) + (\eta_j)'_u(u - u_n) + (\eta_j)'_v(v - v_m) + o(\sqrt{(u - u_n)^2 + (v - v_m)^2}).$$

Поскольку $\mu(y(u, v)) \in C^1(\Gamma)$, аналогично получим

$$\mu(y(u, v)) = \mu(y(u_n, v_m)) + \mu'_u(u - u_n) + \mu'_v(v - v_m) + o(\sqrt{(u - u_n)^2 + (v - v_m)^2}),$$

где $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$ и $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$.

Для вычисления выражения $\sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u, v))(y_j(u, v) - x_j)$ с учётом формул

$$\sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)'_u = \sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)'_v = 0,$$

отражающих ортогональность вектора нормали и касательных векторов к поверхности (см. [16, гл. 14, § 1.2]), воспользуемся разложением по формуле Тейлора в точке (u_n, v_m) с остаточным членом в форме Пеано

$$y_j(u, v) - x_j = r_j + (y_j)'_u(u - u_n) + (y_j)'_v(v - v_m) + \\ + \frac{1}{2}(y_j)''_{uu}(u - u_n)^2 + \frac{1}{2}(y_j)''_{vv}(v - v_m)^2 + (y_j)''_{uv}(u - u_n)(v - v_m) + o((u - u_n)^2 + (v - v_m)^2),$$

тогда

$$\mu(y(u, v)) \sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u, v))(y_j(u, v) - x_j) \approx R + \xi_4 U + \xi_5 V + \xi_1 U^2 + \xi_2 V^2 + \xi_3 UV,$$

где $U = u - u_n, V = v - v_m$,

$$\xi_1 = \sum_{j=1}^3 \left(\mu(y(u_n, v_m)) \left(\frac{1}{2} \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)''_{uu} + (\eta_j)'_u (y_j)'_u \right) + \mu'_u (\eta_j)'_u r_j \right),$$

$$\xi_2 = \sum_{j=1}^3 \left(\mu(y(u_n, v_m)) \left(\frac{1}{2} \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)''_{vv} + (\eta_j)'_v (y_j)'_v \right) + \mu'_v (\eta_j)'_v r_j \right),$$

$$\xi_3 = \sum_{j=1}^3 \left(\mu(y(u_n, v_m)) (\eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)''_{uv} + (\eta_j)'_u (y_j)'_v + (\eta_j)'_v (y_j)'_u) + \mu'_u (\eta_j)'_v r_j + \mu'_v (\eta_j)'_u r_j \right),$$

$$\xi_4 = \sum_{j=1}^3 \left(\mu(y(u_n, v_m)) (\eta_j)'_u r_j + \mu'_u \eta_j(y(u_n, v_m)) r_j \right),$$

$$\xi_5 = \sum_{j=1}^3 \left(\mu(y(u_n, v_m)) (\eta_j)'_v r_j + \mu'_v \eta_j(y(u_n, v_m)) r_j \right), \quad R = \mu(y(u_n, v_m)) \sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u_n, v_m)) r_j.$$

Из приведённых соотношений вытекает, что интеграл (5) приближённо равен следующему интегралу, который обозначим через $K_{nm}(x)$:

$$\begin{aligned} & \int_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} \frac{\mu(y(u, v))}{|x - y(u, v)|^3} \sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u, v))(y_j(u, v) - x_j) dv \approx \\ & \approx \int_{-h/2}^{h/2} dU \int_{-H/2}^{H/2} \frac{R + \xi_4 U + \xi_5 V + \xi_1 U^2 + \xi_2 V^2 + \xi_3 UV}{\beta^3((V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2/\beta^4 + (\alpha^2 U^2 + 2PU + r^2)/\beta^2)^{3/2}} dV = \\ & = K_{nm}(x). \end{aligned} \tag{6}$$

Следовательно, чтобы вывести квадратурную формулу для потенциала двойного слоя, необходимо вычислить интеграл $K_{nm}(x)$ в явном виде. Этот интеграл вычислен в работе [6].

3. Основной результат.

Теорема. Пусть Γ – простая гладкая замкнутая поверхность класса C^2 , ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область, либо простая гладкая ограниченная незамкнутая ориентированная поверхность класса C^2 , содержащая свои предельные точки. Пусть Γ допускает параметризацию (1) со свойством (2) и $\mu(y) \in C^1(\Gamma)$. Тогда для потенциала двойного слоя (3) при $x \notin \Gamma$ и $k \geq 0$ имеет место квадратурная формула

$$W_k[\mu](x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|)(ik|x - y(u_n, v_m)| - 1)K_{nm}(x) + \varepsilon_{NM}(x), \tag{7}$$

где $\varepsilon_{NM}(x) \rightarrow 0$ при $N, M \rightarrow \infty$. Интеграл $K_{nm}(x)$, записанный в (6), вычислен в явном виде в статье [6], а коэффициенты в $K_{nm}(x)$ берутся из п. 2.

При $k = 0$ потенциал двойного слоя для уравнения Гельмгольца переходит в потенциал двойного слоя для уравнения Лапласа, а квадратурная формула (7) принимает вид квадратурной формулы для гармонического потенциала двойного слоя.

Если в формуле (7) при вычислении коэффициентов в $K_{nm}(x)$ в п.2 положить $\mu'_u = \mu'_v = 0$, то она при $k = 0$ переходит в квадратурную формулу для потенциала двойного слоя из [6], где плотность $\mu(y)$ не предполагается дифференцируемой, а считается всего лишь непрерывной. Тем самым формула (7) обобщает прежнюю квадратурную формулу для потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью на случай дифференцируемой плотности. Ниже эффективность формулы (7) оценивается на тестовых примерах и сравнивается с эффективностью других формул.

4. Квадратурная формула, основанная на свойствах телесного угла. Рассмотрим треугольник с вершинами x^1, x^2, x^3 . Известно [19, с. 253], что телесный угол $\Omega(x; x^1, x^2, x^3)$, под которым этот треугольник виден из точки x , с точностью до знака, зависящего от выбранного на треугольнике направления нормали, равен определённому на этом треугольнике потенциалу двойного слоя с единичной плотностью, умноженному на 4π . С другой стороны, для телесного угла, под которым треугольник с вершинами x^1, x^2, x^3 виден из точки x , имеется явная формула [20; 21, результат (359)]:

$$\begin{aligned} \Omega(x; x^1, x^2, x^3) &= 2 \arccos \left(\sqrt{|R_1||R_2||R_3|}/2 \times \right. \\ & \times \frac{|R_1||R_2||R_3| + (R_1, R_2)|R_3| + (R_2, R_3)|R_1| + (R_3, R_1)|R_2|}{\sqrt{|R_1||R_2||R_3| + (R_1, R_2)|R_3|}} \times \\ & \left. \times \frac{1}{\sqrt{|R_1||R_2||R_3| + (R_2, R_3)|R_1|}} \frac{1}{\sqrt{|R_1||R_2||R_3| + (R_3, R_1)|R_2|}} \right), \end{aligned}$$

где через $R_1 = x^1 - x$, $R_2 = x^2 - x$, $R_3 = x^3 - x$ обозначены векторы, а через (\cdot, \cdot) – скалярное произведение. Используя указанную формулу для телесного угла и параметризацию (1), можно вывести следующую квадратурную формулу для потенциала двойного слоя с плотностью $\mu(y)$ на поверхности Γ :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_k[\mu](x) \approx & \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \mu(y(u_n, v_m)) \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) (ik|x - y(u_n, v_m)| - 1) \times \\ & \times [\Omega(x; y(u_n - h/2, v_m - H/2), y(u_n - h/2, v_m + H/2), y(u_n + h/2, v_m - H/2)) + \\ & + \Omega(x; y(u_n + h/2, v_m + H/2), y(u_n - h/2, v_m + H/2), y(u_n + h/2, v_m - H/2))] \times \\ & \times \operatorname{sgn} \left(\sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j(u_n, v_m) - x_j) \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Квадратурная формула (8) используется в инженерных расчётах, однако она не допускает улучшения за счёт учёта производных в случае дифференцируемой плотности в потенциале двойного слоя.

5. Численные расчёты для диска. В данных расчётах оценивается эффективность квадратурных формул вблизи поверхности Γ , когда поверхность Γ является круговым диском единичного радиуса, расположенным в плоскости $x_3 = 0$ с центром в начале координат. Тем самым Γ является незамкнутой поверхностью, заданной уравнениями

$$y_1(u, v) = u \cos v, \quad y_2(u, v) = u \sin v, \quad y_3(u, v) = 0, \quad (9)$$

причём $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$. Отметим, что в этом случае $|\eta(y(u, v))| = u$ и направление нормали $\eta(y)$ на диске Γ совпадает с направлением оси Ox_3 . Кроме того, $|\eta(y(0, v))| = 0$ для всех $v \in [0, 2\pi]$, иначе говоря, $|\eta(y)| = 0$ в центре диска при такой параметризации. Согласно [22, § 27.6] плотность потенциала двойного слоя на диске Γ можно найти по формуле

$$\mu(x)|_{\Gamma} = 2\mathcal{W}_k[\mu](x)|_{\Gamma^-}. \quad (10)$$

Здесь диск Γ рассматривается как двусторонняя поверхность, через Γ^- обозначена сторона, которую мы видим, смотря навстречу вектору нормали \mathbf{n}_y . Направление единичной нормали \mathbf{n}_y совпадает с направлением нормали η , так как вектор \mathbf{n}_y получается из η в результате нормировки. В формуле (10) берётся предельное значение потенциала двойного слоя на верхней стороне Γ , т.е. на Γ^- . Отметим, что потенциал двойного слоя $\mathcal{W}_k[\mu](x)$ равен нулю в плоскости $x_3 = 0$ вне диска Γ .

Эффективность квадратурных формул вблизи поверхности Γ можно оценивать следующим образом. В тестовых примерах известно явное выражение плотности потенциала $\mu(y)$ на диске Γ . Для точек x , расположенных над диском Γ , значение потенциала $\mathcal{W}_k[\mu](x_1, x_2, x_3)$ при уменьшении $x_3 > 0$ должно сходиться к значению $(1/2)\mu(x_1, x_2)$ согласно формуле (10) в силу непрерывности потенциала вплоть до границы. Поэтому приближённые значения потенциала, вычисленные по квадратурным формулам, также должны стремиться к известному значению $(1/2)\mu(x_1, x_2)$. Однако для совсем малых величин $x_3 > 0$ значения, вычисленные по квадратурным формулам, перестают приближаться к $(1/2)\mu(x_1, x_2)$ из-за дискретности квадратурных формул. Тесты позволяют оценить расстояния до границы, на которых квадратурные формулы приближаются к предельным значениям потенциала, и расстояние, с которого они перестают приближаться. Кроме того, тесты показывают, насколько хорошо квадратурные формулы аппроксимируют предельные значения потенциала вблизи границы.

Во всех тестах приближённое значение потенциала двойного слоя вычислялось по прежней квадратурной формуле из работы [6], по новой квадратурной формуле (7) и по формуле (8) в некоторых точках на единичных вспомогательных дисках, имеющих центры с координатами $(0, 0, x_3)$ и расположенных параллельно плоскости $x_3 = 0$ над диском Γ . Затем в

каждой такой точке (x_1, x_2, x_3) на вспомогательном диске был найден модуль разности между значением квадратурной формулы в данной точке и явным значением $(1/2)\mu(x_1, x_2)$ при $x_3 = 0$, x_3 – расстояние от вспомогательного диска до диска Γ . На каждом вспомогательном диске был найден максимум модуля таких разностей по всем указанным точкам для каждой формулы. Результаты представлены в таблицах.

Координаты точек, которые использовались для оценки максимального модуля разности:

$$x_j^{ql} = y_j(u_q, v_l), \quad j = 1, 2,$$

$$u_q = \frac{1}{2N}q, \quad q = \overline{0, 2N}; \quad v_l = \frac{2\pi}{2M}l, \quad l = 0, 1, 2, \quad (11)$$

где $y_j(u, v)$ определяются формулами (9), т.е. эти точки расположены над центрами участков разбиения диска Γ , серединами границ между такими участками и пересечениями этих границ. Отметим, что данные точки распределены не по всему вспомогательному диску, а находятся вблизи радиуса с полярным углом $v = H/2$.

Вычисления проводились для различных значений M и N . Значения шагов определяются формулами

$$h = 1/N, \quad H = 2\pi/M.$$

Если $N = M/5 = 10$, то $h \approx 0.1$, $H \approx 0.13$; если $N = M/5 = 20$, то $h \approx 0.05$, $H \approx 0.063$; если $N = M/5 = 40$, то $h \approx 0.025$, $H \approx 0.03$.

В таблицах для каждого вспомогательного диска с координатой x_3 приведены рассчитанные максимальные абсолютные отклонения значений квадратурных формул от явных предельных значений потенциала двойного слоя на Γ по точкам (11). Первое число в ячейках таблицы – максимальное отклонение для новой формулы (7) на данном вспомогательном диске, второе число – максимальное отклонение для прежней квадратурной формулы из статьи [6] на данном диске, третье число – максимальное отклонение для формулы (8).

В численных тестах квадратурные формулы сравниваются при $k = 0$, т.е. для потенциала двойного слоя в случае уравнения Лапласа.

Тест 1. В данном тесте использовалась плотность потенциала

$$\mu(y(u, v)) = 1 - u^2.$$

При этом потенциал двойного слоя непрерывен на кромке диска Γ , но его производные терпят разрыв, хотя и ограничены. Потенциал в рассматриваемом случае не зависит от полярного угла v , как и его плотность. В табл. 1 приведены рассчитанные максимальные абсолютные отклонения квадратурных формул от предельных значений потенциала.

Таблица 1. Максимальные абсолютные отклонения квадратурных формул в тесте 1

x_3	$M/5 = N = 10$	$M/5 = N = 20$	$M/5 = N = 40$
0.03	0.029; 0.034; 0.033	0.029; 0.029; 0.029	0.029; 0.029; 0.029
0.01	0.017; 0.028; 0.22	0.012; 0.018; 0.017	0.012; 0.014; 0.014
0.008	0.019; 0.028; 0.41	0.01; 0.017; 0.016	0.01; 0.012; 0.012
0.006	0.026; 0.031; 0.47	0.0082; 0.016; 0.015	0.0081; 0.011; 0.011
0.004	0.044; 0.051; 0.49	0.0069; 0.015; 0.022	0.0059; 0.0092; 0.0092
0.002	0.1; 0.11; 0.5	0.014; 0.016; 0.49	0.0034 0.0078; 0.0077

Тест 2. В данном тесте плотность потенциала равна $\mu(y(u, v)) = \sin(3\pi u)$. При этом потенциал двойного слоя непрерывен на кромке диска Γ , но его производные терпят разрыв, как и в предыдущем тесте. Плотность потенциала не зависит от полярного угла v , поэтому и сам потенциал от него не зависит. В табл. 2 приведены рассчитанные максимальные абсолютные отклонения квадратурных формул от предельных значений потенциала.

Таблица 2. Максимальные абсолютные отклонения квадратурных формул в тесте 2

x_3	$M/5 = N = 10$	$M/5 = N = 20$	$M/5 = N = 40$
0.03	0.11; 0.15; 0.15	0.12; 0.13; 0.13	0.15; 0.15; 0.15
0.01	0.047; 0.12; 0.53	0.05; 0.069; 0.068	0.074; 0.073; 0.073
0.008	0.042; 0.12; 0.53	0.041; 0.067; 0.066	0.062; 0.06; 0.06
0.006	0.036; 0.12; 0.55	0.032; 0.065; 0.063	0.049; 0.047; 0.047
0.004	0.057; 0.13; 0.54	0.023; 0.063; 0.11	0.034; 0.038; 0.037
0.002	0.15; 0.21; 0.52	0.023; 0.062; 0.51	0.018; 0.034; 0.033

Тест 3. В этом тесте использовалась плотность потенциала

$$\mu(y(u, v)) = (u(1 - u))^2 \cos(10v),$$

первые производные которого являются непрерывными функциями на кромке диска Γ . В отличие от предыдущих тестов здесь в формуле (11) вместо $l = 0, 1, 2$ взяты значения $l = \overline{0, 2M}$ для учёта зависимости потенциала двойного слоя от полярного угла v . В первых двух тестах плотность потенциала двойного слоя от v не зависит, поэтому и сам потенциал не зависит от v .

В табл. 3 приведены данные расчётов максимальных абсолютных отклонений квадратурных формул от предельных значений потенциала.

Таблица 3. Максимальные абсолютные отклонения квадратурных формул в тесте 3

x_3	$M/5 = N = 10$	$M/5 = N = 20$	$M/5 = N = 40$
0.03	0.014; 0.017; 0.017	0.015; 0.015; 0.015	0.015; 0.015; 0.015
0.01	0.0056; 0.01; 0.02	0.0061; 0.007; 0.007	0.0064; 0.0065; 0.0065
0.008	0.0045; 0.01; 0.036	0.0049; 0.006; 0.0059	0.0052; 0.0054; 0.0054
0.006	0.0034; 0.01; 0.034	0.0037; 0.005; 0.0049	0.004; 0.0042; 0.0042
0.004	0.0027; 0.011; 0.034	0.0024; 0.004; 0.0038	0.0027; 0.003; 0.0029
0.002	0.0071; 0.014; 0.032	0.0014; 0.0037; 0.031	0.0014; 0.0017; 0.0017

6. Численные расчёты для сферы. В тестах для сферы оценивается эффективность квадратурных формул вблизи поверхности Γ , которая является сферой единичного радиуса и задана параметрически уравнениями

$$y_1(u, v) = \cos u \sin v, \quad y_2(u, v) = \sin u \sin v, \quad y_3(u, v) = \cos v, \tag{12}$$

причём $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Отметим, что в данном случае $|\eta(y(u, v))| = \sin v$ и $|\eta(y(u, 0))| = |\eta(y(u, \pi))| = 0$ для всех $u \in [0, 2\pi]$. Иначе говоря, $|\eta(y)| = 0$ на полюсах сферы при такой параметризации, но условия теоремы выполняются.

В тестах для диска явные значения для потенциала двойного слоя были известны только на поверхности диска. В отличие от тестов для диска в тестах для сферы известно явное выражение потенциала двойного слоя во всех точках внутри единичной сферы, поэтому точные значения потенциала можно сравнить с приближёнными, вычисленными по квадратурным формулам. Во всех тестах приближённое значение потенциала двойного слоя вычислялось по новой квадратурной формуле (7), в которой учитывается, что плотность $\mu(y(u, v))$ дифференцируема на Γ , по прежней квадратурной формуле из работы [6], в которой плотность $\mu(y(u, v))$ считается всего лишь непрерывной на Γ и её дифференцируемость не учитывается, а также по формуле (8). Вычисления проводились в некоторых точках на вспомогательных сферах, имеющих центры в начале координат и радиусы, равные $1 - \Delta R$. Тем самым вспомогательные сферы находятся внутри сферы единичного радиуса, на которой задана плотность потенциала на расстоянии ΔR от неё. Затем были рассчитаны значения абсолютных погрешностей в этих точках, и для каждой вспомогательной сферы определялись максимумы значений этих погрешностей.

Координаты точек, которые использовались для оценки максимальной абсолютной погрешности, равны

$$x_j^{ql} = Ry_j(u_q, v_l), \quad j = 1, 2, 3,$$

$$u_q = \frac{2\pi}{2N}q, \quad q = \overline{0, 2N}; \quad v_l = \frac{\pi}{2M}l, \quad l = \overline{1, 2M-1},$$

где $y_j(u, v)$ определяются формулами (12), R – радиус вспомогательной сферы, т.е. эти точки расположены под центрами участков разбиения единичной сферы, серединами границ между такими участками и пересечениями этих границ. Отметим, что эти точки распределены по всей сфере.

Вычисления проводились для различных значений M и N . Значения шагов определяются формулами $h = 2\pi/N$, $H = \pi/M$. Если $N/2 = M = 16$, то $h = H \approx 0.2$; если $N/2 = M = 32$, то $h = H \approx 0.098$; если $N/2 = M = 64$, то $h = H \approx 0.049$.

В таблицах приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей. В первом столбце указано отличие радиуса на ΔR вспомогательной сферы от единицы, тем самым её радиус будет равен $1 - \Delta R$. В верхней строке указаны значения M , N . Первое число в ячейках таблицы – максимальная погрешность для новой формулы (7) на данной вспомогательной сфере, второе число – максимальная погрешность для прежней квадратурной формулы из [6] на данной сфере, третье число – максимальная погрешность для формулы (8).

В численных тестах квадратурные формулы сравниваются при $k = 0$, т.е. для потенциала двойного слоя в случае уравнения Лапласа.

Тест 4. В данном тесте использовалась плотность потенциала $\mu(y(u, v)) = P_{10}(\cos v)$, тогда гармонический потенциал двойного слоя внутри единичной сферы Γ имеет вид

$$\mathcal{W}_0[\mu](x) = \frac{11|x|^{10}}{21}P_{10}(\cos \vartheta), \quad |x| < 1,$$

где

$$P_{10}(\cos v) = \frac{1}{256}(46189 \cos^{10} v - 109395 \cos^8 v + 90090 \cos^6 v - 30030 \cos^4 v + 3465 \cos^2 v - 63)$$

– полином Лежандра десятой степени от $\cos v$, ϑ – зенитный угол в сферических координатах с центром в начале координат. В табл. 4 приведены максимальные значения абсолютных погрешностей.

Таблица 4. Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 4

ΔR	$N/2 = M = 16$	$N/2 = M = 32$	$N/2 = M = 64$
0.2	0.0077; 0.01; 0.01	0.0022; 0.0026; 0.0024	0.00056; 0.00065; 0.00059
0.1	0.012; 0.025; 0.024	0.0036; 0.0053; 0.0045	0.00094; 0.0014; 0.0011
0.06	0.013; 0.045; 0.041	0.0043; 0.0084; 0.0067	0.0012; 0.0023; 0.0015
0.03	0.019; 0.074; 0.063	0.0048; 0.017; 0.011	0.0018; 0.0046; 0.0022

Тест 5. В этом тесте использовалась плотность потенциала

$$\mu(y(u, v)) = \cos(10u) \sin^{10} v.$$

Гармонический потенциал двойного слоя внутри единичной сферы Γ в данном случае имеет вид

$$\mathcal{W}_0[\mu](x) = \frac{11|x|^{10} \cos(10\varphi) \sin^{10} \vartheta}{21}, \quad |x| < 1,$$

где ϑ и φ – зенитный и азимутальный углы соответственно в сферических координатах с центром в начале координат. В табл. 5 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей.

Таблица 5. Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 5

ΔR	$N/2 = M = 16$	$N/2 = M = 32$	$N/2 = M = 64$
0.2	0.0046; 0.013; 0.0093	0.0016; 0.0031; 0.002	0.00043; 0.00078; 0.0005
0.1	0.012; 0.058; 0.046	0.0044; 0.011; 0.0068	0.0012; 0.0027; 0.0016
0.06	0.013; 0.11; 0.09	0.0055; 0.021; 0.013	0.0015; 0.0046; 0.0026
0.03	0.061; 0.2; 0.15	0.0047; 0.046; 0.026	0.0011; 0.0085; 0.0042

Заключение. Во всех тестах для диска максимальные отклонения квадратурной формулы (7) от предельных значений потенциала существенно меньше, чем отклонения у двух остальных формул. В тестах 2 и 3, когда плотность $\mu(y(u, v))$ задана осциллирующими функциями, на расстояниях от диска $x_3 \approx H^2$ отклонения формулы (7) от предельных значений потенциала в 2–3 раза меньше, чем у остальных формул. В тесте 1 на таких же расстояниях от диска отклонения формулы (7) от предельных значений потенциала в 1.5–2 раза меньше, чем у двух других формул.

В тестах для сферы из табл. 4 и 5 следует, что квадратурная формула для потенциала двойного слоя из [6], как и квадратурная формула с телесным углом (8), на расстоянии H от сферы дают погрешность $O(H^2)$, а на расстоянии H^2 от сферы – погрешность $O(H)$.

Как видно из табл. 4 и 5, в тестах для сферы погрешность новой квадратурной формулы (7) значительно меньше погрешностей двух других формул для всех приведённых величин M и N . На расстояниях порядка H от сферы погрешность формулы (7) в 1.3–2 раза меньше, а на расстояниях порядка H^2 от сферы – в 2–3 раза меньше, чем у двух других квадратурных формул.

Таким образом, сделанные тесты показывают, что новая квадратурная формула (7) обеспечивает более высокую точность вычислений вблизи границы Γ , чем квадратурная формула из [6] и формула с телесным углом. Эффективность формулы (7) для потенциала двойного слоя с дифференцируемой плотностью особенно заметна, если плотность в потенциале представлена гладкими осциллирующими функциями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М., 1985.
2. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995.
3. Сетуха А.В. Численные методы в интегральных уравнениях и их приложения. М., 2016.
4. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М., 1987.
5. Гутников В.А., Лифанов И.К., Сетуха А.В. О моделировании аэродинамики зданий и сооружений методом замкнутых вихревых рамок // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. Т. 2006. № 4. С. 78–93.
6. Крутицкий П.А., Резниченко И.О. Квадратурная формула для гармонического потенциала двойного слоя // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 7. С. 932–950.
7. Krutitskii P.A., Kwak D.Y., Hyon Y.K. Numerical treatment of a skew-derivative problem for the Laplace equation in the exterior of an open arc // J. of Eng. Math. 2007. V. 59. P. 25–60.
8. Крутицкий П.А., Колыбасова В.В. Численный метод решения интегральных уравнений в задаче с наклонной производной для уравнения Лапласа вне разомкнутых кривых // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 9. С. 1262–1276.
9. Krutitskii P.A. The Dirichlet problem for dissipative Helmholtz equation in a plane domain bounded by closed and open curves // Hiroshima Math. J. 1998. V. 28. № 1. P. 149–168.
10. Krutitskii P.A. The Neumann problem for the 2-D Helmholtz equation in a domain bounded by closed and open curves // Int. J. of Math. and Math. Sci. 1998. V. 21. № 2. P. 209–216.
11. Krutitskii P.A. The skew derivative problem in the exterior of open curves in a plane // Zeitschrift fur Analysis und Ihre Anwendungen. 1997. Bd. 16. № 3. S. 739–747.
12. Krutitskii P.A. The 2-dimensional Dirichlet problem in an external domain with cuts // Zeitschrift fur Analysis und Ihre Anwendungen. 1998. Bd. 17. № 2. S. 361–378.

13. *Krutitskii P.A.* The Neumann problem in a 2-D exterior domain with cuts and singularities at the tips // *J. of Differ. Equat.* 2001. V. 176. № 1. P. 269–289.
14. *Krutitskii P.A.* The 2-D Neumann problem in a domain with cuts // *Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni. Ser. VII.* 1999. V. 19. № 1. P. 65–88.
15. *Krutitskii P.A.* The mixed harmonic problem in an exterior cracked domain with Dirichlet condition on cracks // *Comput. and Math. with Appl.* 2005. V. 50. P. 769–782.
16. *Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шликин А.А.* Математический анализ в вопросах и задачах. М., 2000.
17. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Ч. 2. М., 1973.
18. *Крутицкий П.А., Федотова А.Д., Колыбасова В.В.* Квадратурная формула для потенциала простого слоя // *Дифференц. уравнения.* 2019. Т. 55. № 9. С. 1269–1284.
19. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. М., 1977.
20. *Van Oosterom A., Strackee J.* The solid angle of a plane triangle // *IEEE Trans. on Biomedical Eng.* 1983. V. 30. P. 125–126.
21. *Casey J.* A Treatise on Spherical Trigonometry. Dublin, 1889.
22. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1981.

Институт прикладной математики
имени М.В. Келдыша РАН, г. Москва,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 16.02.2022 г.
После доработки 24.04.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.

УДК 517.958:582+517.968.23

ДВУМЕРНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ С ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ В НЕОДНОРОДНОМ ПОРИСТОМ СЛОЕ

© 2022 г. В. Ф. Пивень

Исследуются первая и вторая краевые задачи и задача сопряжения для комплексного потенциала двумерного фильтрационного течения в пористом тонком слое, в общем случае неоднородном (переменные толщина и проницаемость). Источники течения произвольные дискретные и могут располагаться как на границах, так и вне границ области течения. Границы моделируются произвольными, гладкими, замкнутыми кривыми линиями (контурами), а источники – сингулярностями (изолированными особыми точками логарифмического типа и полюсами) комплексного потенциала. Наличие источников на границах приводит к принципиально новому обобщению (усложнению) граничных условий, которые характеризуются заданными сингулярными функциями. Решения поставленных задач представлены в конечном виде для слоёв некоторых классов проводимостей, что продемонстрировано на примере слоя с проводимостью, моделируемой степенной функцией координат. В случае когда проводимость слоя моделируется произвольной гладкой функцией, а границы – произвольные гладкие замкнутые кривые, использован обобщённый интеграл типа Коши для комплексного потенциала. Это позволило вторую краевую задачу и задачу сопряжения (при наличии на границах стока особенности логарифмического типа и произвольных источников вне границ) редуцировать к граничным сингулярным интегральным уравнениям со слабой сингулярностью. Исследованные задачи являются математическими моделями двумерных фильтрационных процессов в слоистых пористых средах и представляют интерес, например, для практики добычи нефти (воды) из природных пластов грунта сложной геологической структуры.

DOI: 10.31857/S0374064122080131, EDN: CHCDYW

Введение. Известны граничные задачи аэродинамики и теории фильтрации, для которых характерны сингулярные (негладкие) условия на границах. Плоские и трёхмерные задачи обтекания непроницаемых поверхностей летательных аппаратов при наличии отсоса внешнего потока исследуются в работах [1, с. 164; 2; 3]. Поставленная краевая задача Неймана для уравнения Лапласа с обобщёнными краевыми условиями редуцируется к гиперсингулярному интегральному уравнению, решение которого получено численным методом дискретных вихрей. В работах [4, с. 87; 5; 6] изучаются плоские задачи фильтрации в однородной пористой среде (в грунте) с источниками на непроницаемых границах, моделируемых отрезком прямой и окружностью.

Первая и вторая краевые задачи и задача сопряжения плоского фильтрационного течения в пористом слое постоянной толщины и проницаемости исследуются в статье [7], а трёхмерного течения в неслоистой пористой среде при наличии источников на границе и вне их – в [8]. Решения задач в случае канонических границ представлены в конечном виде, а в общем случае произвольных гладких границ задачи редуцируются к граничным сингулярным (гиперсингулярным) интегральным уравнениям. Аналогичный подход используется в предлагаемой статье для исследования двумерных граничных задач фильтрации с новыми (усложнёнными) представлениями граничных условий, характеризующихся сингулярными (негладкими) функциями координат; обобщаются исследования [7] на случай тонких и неоднородных (переменных толщины и проницаемости) пористых слоёв. При этом источники течения располагаются произвольно как на границах, так и вне границ.

1. Основные уравнения и граничные условия. Рассмотрим двумерное фильтрационное течение в тонком неоднородном пористом слое переменной малой толщины H и проницаемости K . Течение характеризуется обобщённым потенциалом φ и функцией тока ψ , которые, как функции декартовых координат x, y точек плоскости основания слоя, определяют скорость фильтрации $\vec{v} = (v_x, v_y)$ в области D течения [9, с. 274]:

$$v_x = K \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = K \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in D. \quad (1.1)$$

Здесь $\varphi = -(p + \rho\Pi)/\mu$, p – давление, ρ и μ – плотность и вязкость жидкости соответственно, Π – потенциал массовых сил.

Равенства (1.1) записаны в безразмерных величинах [10, с. 10], из которых следует, что функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ удовлетворяют всюду в области D течения, за исключением сингулярностей (изолированных особых точек) этих функций, эллиптической системе уравнений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{P} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{P} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in D, \quad (1.2)$$

где $P = HK > 0$ – проводимость слоя, которая моделируется гладкой (непрерывно дифференцируемой хотя бы один раз) функцией координат $P = P(x, y)$.

Наряду с функциями $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ для исследования течения используем также комплексный потенциал

$$W = \varphi + i \frac{\psi}{P} \quad \left(\varphi = \frac{W + \bar{W}}{2}, \quad \psi = \frac{P(W - \bar{W})}{2i} \right). \quad (1.3)$$

Он характеризует в комплексной плоскости $z = x + iy$ течение и удовлетворяет всюду в области D плоскости z , за исключением его особых точек, следующему из системы (1.2) уравнению

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} + A(W - \bar{W}) = 0, \quad z \in D. \quad (1.4)$$

Здесь $A = \frac{\partial \ln \sqrt{P}}{\partial \bar{z}}$, $2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$.

Удовлетворяющий уравнению (1.4) комплексный потенциал $W(z)$ течения в неоднородном слое является обобщённой аналитической функцией (см. [11, с. 110]). В частности, для течения в однородном слое, когда его толщина H и проницаемость K постоянные (проводимость слоя $P = \text{const}$, следовательно, $A = 0$), комплексный потенциал $W(z)$ есть аналитическая функция ($\partial W / \partial \bar{z} = 0$).

Течение, как правило, происходит в ограниченной части (области) слоя, причём в силу слоистости пористой среды её коэффициент проницаемости (проницаемость) K может иметь разрывы, в двумерном случае – на некоторых кривых. В связи с этим укажем основные граничные условия, характерные при исследовании фильтрационных процессов в пористых слоях. Запишем условия согласно (1.3) в плоскости z для комплексного потенциала $W(z)$ (функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$). Границы моделируем в плоскости z простыми (без самопересечений) гладкими кривыми (контурами).

Пусть на границе σ_1 области D задан обобщённый потенциал φ (давление p и потенциал Π). Тогда имеем условие

$$W^+(z) + \bar{W}^+(z) = 2\alpha_1(z), \quad (\varphi^+(z) = \alpha_1(z)), \quad z \in \sigma_1, \quad (1.5)$$

где $\alpha_1(z)$ – непрерывная, а в случае замкнутого контура σ_1 также и периодическая, функция. Здесь и далее знаком “+” (знаком “–”) отмечаются предельные значения функций на границе при подходе к ней со стороны (противоположной стороны) орта \vec{n} нормали границы, который направлен внутрь области D .

В частности, для напорной фильтрации, когда массовые силы пренебрежимо малы ($\rho|\nabla\Pi \ll |\nabla p|$) и давление на границе σ_1 постоянное, в условии можно принять $\alpha_1 = \text{const}$.

Если область D имеет непроницаемую для жидкости границу σ_2 , являющуюся линией тока, то с учётом $P^+(z) = P(z)$, $z \in \sigma_2$, имеем условие

$$P(z)[W^+(z) - \overline{W}^+(z)] = i2\alpha_2 \quad (\psi^+(z) = \text{const} \equiv \alpha_2), \quad z \in \sigma_2. \tag{1.6}$$

Пусть Γ – граница сопряжения областей D_1 и D_2 течения, проводимость слоя в которых P_1 и P_2 , причём $P_\nu = HK_\nu = k_\nu HK = k_\nu P$ ($P = HK$, $k_\nu = \text{const} > 0$, $\nu = 1, 2$), а течение характеризуют комплексные потенциалы W_1 и W_2 (т.е. обобщённые потенциалы φ_ν и функции тока ψ_ν):

$$W_\nu = k_\nu\varphi_\nu + i\frac{\psi_\nu}{P} \quad \left(\varphi_\nu = \frac{W_\nu + \overline{W}_\nu}{2k_\nu}, \quad \psi_\nu = \frac{P(W_\nu - \overline{W}_\nu)}{2i} \right), \quad \nu = 1, 2. \tag{1.7}$$

На границе Γ имеют место условия непрерывности давления и расхода жидкости (условия сопряжения):

$$\varphi_1^+(z) = \varphi_2^-(z), \quad \psi_1^+(z) = \psi_2^-(z), \quad z \in \Gamma,$$

которые, учитывая $P_\nu^\pm(z) = k_\nu P(z)$, $\nu = 1, 2$, $z \in \Gamma$, запишем для комплексных потенциалов (1.7):

$$\frac{W_1^+(z) + \overline{W}_1^+(z)}{k_1} = \frac{W_2^-(z) + \overline{W}_2^-(z)}{k_2}, \quad W_1^+(z) - \overline{W}_1^+(z) = W_2^-(z) - \overline{W}_2^-(z), \quad z \in \Gamma.$$

Исключим отсюда $W_1^+(z)$ и получим условия сопряжения в виде

$$(1 - \lambda)W_1^+(z) = W_2^-(z) + \lambda\overline{W}_2^-(z), \quad z \in \Gamma, \tag{1.8}$$

где орт нормали $\vec{n} \in \Gamma$ направлен внутрь области D_1 , а $\lambda = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$, $\lambda \in (-1, 1)$.

Так как слой в общем неоднородный, его проводимость $P = P(z) = P(x, y)$, то в слое может быть сингулярная линия $\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$, на которой $P(z) = \infty$ (проницаемость слоя $K = \infty$, его толщина H конечная), $z \in \sigma_{01}$ и $P(z) = 0$ ($K = 0$ или $H = 0$), $z \in \sigma_{02}$. Поэтому на линии σ_0 должны выполняться условия

$$\begin{aligned} \frac{[W(z) + \overline{W}(z)]^+}{2} &= \text{const} \quad (\varphi^+(z) = \text{const}), \quad z \in \sigma_{01}, \\ \frac{[P(z)(W(z) - \overline{W}(z))]^+}{2i} &= \text{const} \quad (\psi^+(z) = \text{const}), \quad z \in \sigma_{02}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Отметим, что если имеются дискретные источники на границах, то заданные на них условия справедливы всюду на границах за исключением точек расположения источников.

Итак, исследование фильтрационного процесса в неоднородном пористом слое сводится к отысканию комплексного потенциала $W(z)$, удовлетворяющего уравнению (1.4) и указанным граничным условиям. Сформулируем конкретные математические модели (граничные задачи) процесса с учётом заданных источников процесса и граничных условий, в которых он протекает.

2. Постановка граничных задач. Пусть заданы источники течения в слое проводимости P , которые моделируем в плоскости z сингулярными (изолированными) особыми точками логарифмического типа и полюсами комплексного потенциала W_0 (обобщённого потенциала φ_0 и функции тока ψ_0):

$$W_0(z) = \varphi_0 + i\frac{\psi_0}{P} \quad \left(\varphi_0 = \frac{W_0 + \overline{W}_0}{2}, \quad \psi_0 = \frac{P(W_0 - \overline{W}_0)}{2i} \right). \tag{2.1}$$

Представим $W_0(z)$ в виде

$$W_0(z) = f_0(z) + f(z), \tag{2.2}$$

где сингулярности функции $f_0(z)$ расположены на заданных в плоскости z кривых σ_1 , σ_2 и Γ , а сингулярности функции $f(z)$ – вне кривых.

Учтём источники течения. Когда область D течения ограничена кривой σ_1 или σ_2 , представим комплексный потенциал (1.3) в виде

$$W(z) = W_0(z) + W_*(z) = f_0(z) + f(z) + W_*(z), \quad z \in D. \tag{2.3}$$

Если кривая Γ – граница сопряжения областей D_1 и D_2 , то комплексный потенциал (1.7) запишем как

$$W_\nu(z) = W_0(z) + W_*(z) = f_0(z) + f(z) + W_*(z), \quad z \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2. \tag{2.4}$$

Здесь

$$W_*(z) = \varphi_* + i \frac{\psi_*}{P} \left(\varphi_* = \frac{W_* + \overline{W_*}}{2}, \quad \psi_* = \frac{P(W_* - \overline{W_*})}{2i} \right), \tag{2.5}$$

$W_*(z)$ – комплексный потенциал (φ_* – обобщённый потенциал, ψ_* – функция тока) возмущений, обусловленных наличием каждой из границ σ_1 , σ_2 и Γ .

Уравнению (1.4) удовлетворяет комплексный потенциал $W_0(z)$ на всей плоскости z за исключением особых точек функций $f_0(z)$ и $f(z)$, а комплексный потенциал $W_*(z)$ удовлетворяет всюду в области D течения плоскости z за исключением границ.

С учётом представлений (2.1)–(2.5) запишем для комплексного потенциала $W_*(z)$ возмущений условия на границах, а также в бесконечности. Полагаем, что для заданного комплексного потенциала $W_0(z)$ предельное значение $W_0^+(z)$ со стороны орта нормали границы (противоположной стороны $W_0^-(z)$) равны $W_0(z)$: $W_0^\pm(z) = W_0(z)$ и, следовательно, $f_0^\pm(z) = f_0(z)$, $f^\pm(z) = f(z)$. Условия (1.5) и (1.6) принимают вид

$$\begin{aligned} W_*^+(z) + \overline{W_*^+}(z) &= 2\alpha_1(z) - [f_0(z) + \overline{f_0}(z) + f(z) + \overline{f}(z)] \\ (\varphi_*^+(z) &= \alpha_1(z) - \operatorname{Re} f_0(z) - \operatorname{Re} f(z)), \quad z \in \sigma_1, \end{aligned} \tag{2.6}$$

и

$$\begin{aligned} P(z)[W_*^+(z) - \overline{W_*^+}(z)] &= i2\alpha_2 - P(z)[f_0(z) + \overline{f_0}(z) + f(z) + \overline{f}(z)] \\ (\psi_*^+(z) &= \alpha_2 - P(z)[\operatorname{Im} f_0(z) + \operatorname{Im} f(z)]), \quad z \in \sigma_2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

На границе Γ условия сопряжения (1.8) запишем как

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)W_*^+(z) - W_*^-(z) - \lambda\overline{W_*^-}(z) &= \lambda[f_0(z) + \overline{f_0}(z) + f(z) + \overline{f}(z)], \quad z \in \Gamma \\ ((1 - \lambda)\varphi_*^+(z) - (1 + \lambda)\varphi_*^-(z) &= 2\lambda[\operatorname{Re} f_0(z) + \operatorname{Re} f(z)], \quad \psi_*^+(z) = \psi_*^-(z)). \end{aligned} \tag{2.8}$$

На границе Γ функция тока $\psi_*(z)$ непрерывна, а обобщённый потенциал $\varphi_*(z)$ имеет разрыв, определяемый функциями $f_0(z)$, $f(z)$, $z \in \Gamma$, и параметром $\lambda \in (-1, 1)$. Заметим, что условия (2.6)–(2.8) принципиально усложнены: комплексный потенциал $W_*(z)$ характеризуется на границах сингулярностями заданной функции $f_0(z)$, т.е. заданными на границах источниками течения. Условия справедливы всюду на границах за исключением изолированных особых точек функции $f_0(z)$.

Пусть функции $f_0(z)$ и $f(z)$ удовлетворяют условиям (1.9), тогда находим

$$\begin{aligned} [W_*(z) + \overline{W_*}(z)]^+ &= 0 \quad (\varphi_*^+(z) = 0), \quad z \in \sigma_{01}, \\ [P(z)(W_*(z) - \overline{W_*}(z))]^+ &= 0 \quad (\psi_*^+(z) = 0), \quad z \in \sigma_{02}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Комплексный потенциал возмущений $W_*(z)$ не имеет сингулярностей на бесконечности, так как все заданные сингулярности содержат комплексный потенциал $W_0(z)$. Потребуем для $W_*(z)$ условий в бесконечно удалённой точке

$$W_*(z) = O(|z|^{-1}), \quad P(z)|\nabla \operatorname{Re} W_*(z)| = O(|z|^{-2}) \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty, \quad (2.10)$$

которые означают затухание возмущений. При $|z| \rightarrow \infty$ комплексный потенциал $W_*(z)$ стремится к нулю и поток скорости $\vec{v}_* = K \nabla \varphi_*$ через замкнутый контур L удовлетворяет условию

$$\int_L H \vec{v}_* \cdot d\vec{l} = \int_L P \nabla \varphi_* \cdot d\vec{l} \rightarrow 0,$$

где ∇ – оператор Гамильтона.

Выполнение условий (2.10) обеспечивает единственность решения исследуемых далее задач (см. [10, с. 33]).

Поставим граничные задачи для комплексного потенциала возмущений $W_*(z)$. Заданы источники течения (в плоскости z задан комплексный потенциал $W_0(z)$) и проводимость P (проводимости $P_\nu = k_\nu P$, $k_\nu = \text{const} > 0$, $\nu = 1, 2$) слоя. Найти $W_*(z)$, удовлетворяющий уравнению (1.4) и одному из условий: (2.6) (первая краевая задача), (2.7) (вторая краевая задача) или (2.8) (задача сопряжения). Если область D течения ограничена сингулярной линией σ_0 или/и содержит бесконечно удалённую точку, то $W_*(z)$ должен удовлетворять также условиям (2.9) или/и (2.10).

Тогда по найденному $W_*(z)$ можно найти, используя представления (2.3) и (2.4), искомые комплексные потенциалы $W(z)$, $W_\nu(z)$, $\nu = 1, 2$, и соответствующие им согласно формулам (1.3) и (1.7) обобщённые потенциалы и функции тока течения.

Отметим, что для разрешимости второй внутренней краевой задачи согласно уравнению неразрывности суммарный поток жидкости от всех заданных источников течения, расположенных внутри и на замкнутом непроницаемом контуре границы σ_2 , должен быть равен нулю. Это означает, что характеризующий заданные источники комплексный потенциал $W_0(z) = f_0(z) + f(z)$ должен удовлетворять условию

$$\int_{\sigma_2} H \vec{v}_0 \cdot d\vec{l} = \int_{\sigma_2} P \frac{\partial \operatorname{Re} W_0(z)}{\partial n} dl = \int_{\sigma_2} P \frac{\partial}{\partial n} [\operatorname{Re} f_0(z) + \operatorname{Re} f(z)] dl = 0, \quad (2.11)$$

которое выражает отсутствие потока скорости $\vec{v}_0 = K \nabla \varphi_0 = K \nabla (\operatorname{Re} W_0)$ через границу σ_2 .

3. Некоторые граничные задачи о течениях в степенном слое. Решения поставленных граничных задач удаётся представить в конечном виде для слоёв некоторых классов проводимостей P . Такие представления решений получены в случае однородного слоя ($P = \text{const}$) (см. [7]). Найдём представления решений задач в конечном виде, когда проводимость слоя моделируется степенной функцией

$$P = y^s \quad (s = \text{const}) \quad (3.1)$$

при $s > 0$ или $s < 0$.

Течение в слое проводимости (3.1), называемом степенным слоем, подробно изучено в монографии [10, с. 201]. Характерной особенностью слоя является наличие сингулярной линии $\sigma_0 = \{(x, y) : y = 0, x \in (-\infty, \infty)\}$, на которой проводимость $P = \infty$ (проницаемость слоя $K = \infty$, его толщина H конечная) при $s < 0$ либо $P = 0$ (проницаемость $K = 0$ или/и толщина $H = 0$) при $s > 0$. Течение исследуется в комплексной полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$.

Изучение течения в слое проводимости (3.1) имеет принципиальное значение, так как на примере простейшего вида сингулярной линии $\sigma_0 = \{(x, y) : y = 0, x \in (-\infty, \infty)\}$ удаётся развить метод исследования двумерных граничных задач фильтрационных процессов в неоднородных слоях, содержащих сингулярные линии. Кроме того, интересен частный случай, когда $s = 1$, отвечающий осесимметричному процессу в пространстве.

Рассмотрим случай, когда полупрямая линия $x = 0, y \geq 0$ (полуось Oy), ортогональная сингулярной линии $\sigma_0 = \{(x, y) : y = 0, x \in (-\infty, \infty)\}$, моделирует каждую из границ σ_1, σ_2 и Γ . Предположим сначала, что $\Gamma = \{(x, y) : x = 0, y \in [0, \infty)\}$ – граница сопряжения областей $D_1(x > 0)$ и $D_2(x < 0)$, проводимости слоя в которых равны P_1 и P_2 ($P_\nu = k_\nu P, k_\nu = \text{const} > 0, \nu = 1, 2$).

Пусть полуось $Oy, y \geq 0$, моделирует границу Γ . Справедлива

Теорема 1 (сопряжения на полупрямой линии). Пусть в слое проводимости $P = y^s$ ($s = \text{const}$) источники течения располагаются произвольно и характеризуются в полуплоскости $\text{Im } z > 0$ комплексным потенциалом $W_0(z) = f_0(z) + f_1(z) + f_2(z)$, в котором сингулярности (изолированные особые точки) функции $f_0(z)$ лежат на полуоси $Oy, y > 0$, а функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ – соответственно в области $x > 0, y > 0$ и в области $x < 0, y > 0$ полуплоскости $\text{Im } z > 0$. Причём $W_0(z)$ удовлетворяет условиям (2.9) и (2.10). Тогда течения в областях $D_1 = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ и $D_2 = \{(x, y) : x < 0, y > 0\}$, проводимости слоя в которых равны P_1 и P_2 ($P_\nu = k_\nu y^s, k_\nu = \text{const} > 0, \nu = 1, 2$), характеризуют комплексные потенциалы

$$\begin{aligned} W_1(z) &= W_0(z) + \lambda[\overline{f_0(-\bar{z})} + \overline{f_1(-\bar{z})} + f_2(z)], \quad z \in D_1, \\ W_2(z) &= W_0(z) - \lambda[f_0(z) + f_1(z) + \overline{f_2(-\bar{z})}], \quad z \in D_2, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $\lambda = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2), \lambda \in (-1, 1)$, а точки $z = x + iy$ и $-\bar{z} = -x + iy$ полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$ симметричны относительно полуоси $Oy, y > 0$.

Доказательство. Представим комплексные потенциалы (3.2) формулой (2.4), в которой

$$W_*(z) = \begin{cases} AU_1(z), & z \in D_1, \\ BU_2(z), & z \in D_2. \end{cases}$$

Здесь $U_1(z) = \overline{f_0(-\bar{z})} + \overline{f_1(-\bar{z})} + f_2(z), U_2(z) = f_0(z) + f_1(z) + \overline{f_2(-\bar{z})}$, A и B – в общем случае комплексные постоянные.

Функция $\overline{f_0(-\bar{z})}$ также как и заданная функция $f_0(z)$ имеет сингулярности только на границе $\Gamma = \{(x, y) : x = 0, y \in (0, \infty)\}$. Поэтому $\overline{f_0(-\bar{z})}$ – обобщённая аналитическая функция, удовлетворяющая уравнению (1.4) всюду в полуплоскости $\text{Im } z > 0$.

Функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ имеют заданные сингулярности в областях $D_1 = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ и $D_2 = \{(x, y) : x < 0, y > 0\}$ соответственно. Поэтому функции $\overline{f_1(-\bar{z})}, z \in D_2$, и $\overline{f_2(-\bar{z})}, z \in D_1$, имеют сингулярности в областях D_2 и D_1 , так как они являются аналитическими продолжениями в эти области функций $f_1(z), z \in D_1$, и $f_2(z), z \in D_2$, соответственно. Следовательно, $\overline{f_1(-\bar{z})}$ и $\overline{f_2(-\bar{z})}$ – обобщённые аналитические функции соответственно в областях D_1 и D_2 . Тогда $U_1(z), z \in D_1$, и $U_2(z), z \in D_2$, – обобщённые аналитические функции, удовлетворяющие в областях D_1 и D_2 уравнению (1.4).

Найдём константы A и B , подставив комплексный потенциал $W_*(z)$ в условие (2.8). В результате получим равенство

$$(1 - \lambda)AU_1(0, y) - BU_2(0, y) - \lambda\overline{BU_2(0, y)} = \lambda[W_0(0, y) + \overline{W_0(0, y)}], \quad y > 0,$$

в котором $W_0(0, y) = f_0(0, y) + f_1(0, y) + f_2(0, y), \overline{W_0(0, y)} = \overline{f_0(0, y)} + \overline{f_1(0, y)} + \overline{f_2(0, y)}$. Так как $U_1(0, y) = \overline{U_2(0, y)}$ и $W_0(0, y) + \overline{W_0(0, y)} = U_1(0, y) + U_2(0, y)$, то имеем выражение

$$[(1 - \lambda)A - \lambda(1 + \overline{B})]U_1(0, y) - (B + \lambda)U_2(0, y) = 0, \quad y > 0,$$

которое обращается в тождество при $A = \lambda$ и $B = -\lambda$. Следовательно, $W_*(z)$ – обобщённая аналитическая функция в областях D_1 и D_2 :

$$W_*(z) = \begin{cases} \lambda U_1(z) = \lambda[\overline{f_0(-\bar{z})} + \overline{f_1(-\bar{z})} + f_2(z)], & z \in D_1, \\ -\lambda U_2(z) = -\lambda[f_0(z) + f_1(z) + \overline{f_2(-\bar{z})}], & z \in D_2, \end{cases}$$

удовлетворяющая условиям (2.9) и (2.10), которым в силу предположений теоремы удовлетворяет заданный комплексный потенциал $W_0(z)$. С учётом вида функции $W_*(z)$ согласно представлению (2.4) имеем искомые комплексные потенциалы (3.2) течения. Теорема доказана.

Из комплексных потенциалов (3.2) найдём обобщённые потенциалы и функции тока течения. Для этого представим функции в виде

$$f_j = u_j + i\frac{v_j}{P} \quad \left(u_j = \frac{f_j + \bar{f}_j}{2}, \quad v_j = \frac{P(f_j - \bar{f}_j)}{2i} \right), \quad j = 0, 1, 2, \tag{3.3}$$

где P – проводимость слоя (3.1).

Тогда, используя комплексные потенциалы (1.7) и (2.1), имеем

$$\begin{aligned} k_1\varphi_1(x, y) &= \varphi_0(x, y) + \lambda[u_0(-x, y) + u_1(-x, y) + u_2(x, y)], \\ \psi_1(x, y) &= \psi_0(x, y) - \lambda[v_0(-x, y) + v_1(-x, y) - v_2(x, y)], \quad (x, y) \in D_1, \\ k_2\varphi_2(x, y) &= \varphi_0(x, y) - \lambda[u_0(x, y) + u_1(x, y) + u_2(-x, y)], \\ \psi_2(x, y) &= \psi_0(x, y) - \lambda[v_0(x, y) + v_1(x, y) - v_2(-x, y)], \quad (x, y) \in D_2, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $\varphi_0(x, y) = u_0(x, y) + u_1(x, y) + u_2(x, y)$, $\psi_0(x, y) = v_0(x, y) + v_1(x, y) + v_2(x, y)$.

Рассмотрим частные случаи задания источников течения и запишем для них комплексные потенциалы (3.2). Если источники течения на границе Γ отсутствуют ($f_0(z) = 0$), то имеем (см. [10, с. 275])

$$\begin{aligned} W_1(z) &= f_1(z) + (1 + \lambda)f_2(z) + \lambda\overline{f_1(-\bar{z})}, \quad z \in D_1, \\ W_2(z) &= (1 - \lambda)f_1(z) + f_2(z) - \lambda\overline{f_2(-\bar{z})}, \quad z \in D_2. \end{aligned}$$

Когда источники располагаются только на границе Γ , а вне Γ источников нет ($f_1(z) = 0$ и $f_2(z) = 0$), то

$$\begin{aligned} W_1(z) &= f_0(z) + \lambda\overline{f_0(-\bar{z})}, \quad z \in D_1, \\ W_2(z) &= (1 - \lambda)f_0(z), \quad z \in D_2. \end{aligned}$$

Для этих частных случаев обобщённые потенциалы и функции тока течений нетрудно найти из комплексных потенциалов (3.4).

Полагаем теперь, что полуось Oy , $y \geq 0$, моделирует границу σ_1 или σ_2 .

Теорема 2. Пусть течение в слое проводимости $P = y^s$ ($s = \text{const}$) характеризует в полуплоскости $\text{Im } z > 0$ комплексный потенциал $W_0(z) = f_0(z) + f_1(z)$, в котором моделирующие источники течения сингулярности функции $f_0(z)$ расположены на полуоси Oy , $y > 0$, а функции $f_1(z)$ – в области $x > 0$, $y > 0$ полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$. Причём $W_0(z)$, а значит и функции $f_0(z)$ и $f_1(z)$, удовлетворяют условиям (2.9) и (2.10). Тогда течение в области $D = \{(x, y) : x \in (0, \infty), y \in (0, \infty)\}$ с границей $\sigma_1 = \{(x, y) : x = 0, y \geq 0\}$ определяет комплексный потенциал

$$W(z) = W_0(z) - \overline{W_0(-\bar{z})}, \quad z \in D, \tag{3.5}$$

а с границей $\sigma_2 = \{(x, y) : x = 0, y \geq 0\}$ – комплексный потенциал

$$W(z) = W_0(z) + \overline{W_0(-\bar{z})}, \quad z \in D. \tag{3.6}$$

Здесь $\overline{W_0(-\bar{z})} = \overline{f_0(-\bar{z})} + \overline{f_1(-\bar{z})}$; $z = x + iy$ и $-\bar{z} = -x + iy$ – симметричные точки относительно полуоси Oy , $y > 0$.

Доказательство. Сингулярности функции $\overline{W_0(-\bar{z})}$ (функций $\overline{f_0(-\bar{z})}$ и $\overline{f_1(-\bar{z})}$) расположены в области $x \leq 0$, $y > 0$ полуплоскости $\text{Im } z > 0$. Поэтому комплексные потенциалы возмущений $W_*(z) = -\overline{W_0(-\bar{z})}$ и $W_*(z) = \overline{W_0(-\bar{z})}$ – обобщённые аналитические функции, удовлетворяющие уравнению (1.4) в области $D = \{(x, y) : x \in (0, \infty), y \in (0, \infty)\}$.

Так как на полуоси Oy при $x = 0, y > 0$ справедливы равенства

$$W_0(z) = \overline{W_0(-\bar{z})} \quad (f_0(z) = \overline{f_0(-\bar{z})}, \quad f_1(z) = \overline{f_1(-\bar{z})}),$$

то условие (2.6) при $\alpha_1(z) = 0$ и условие (2.7) при $\alpha_2 = 0$ тождественно выполняются. Комплексные потенциалы $W_*(z) = -\overline{W_0(-\bar{z})}$ и $W_*(z) = \overline{W_0(-\bar{z})}$ удовлетворяют условиям (2.9), (2.10), так как им по условию теоремы удовлетворяет заданный комплексный потенциал $W_0(z)$. Тогда выражения (3.5) и (3.6) – действительно искомые комплексные потенциалы течений. Теорема доказана.

Отметим, что комплексные потенциалы (3.5) и (3.6) можно рассматривать как предельные случаи комплексного потенциала $W_1(z)$ из представления (3.2) при $\lambda \rightarrow -1$ и $\lambda \rightarrow 1$, когда $k_1 = 1$ и $W_0(z) = f_0(z) + f_1(z)$ ($f_2(z) = 0$).

Из вида комплексных потенциалов (3.5) и (3.6) следуют их частные выражения в зависимости от задания источников течения: если на границах σ_1 и σ_2 источники отсутствуют ($f_0(z) = 0$), то в комплексных потенциалах (3.5) и (3.6) $W_0(z) = f_1(z)$ [10, с. 277]; когда источники располагаются только на этих границах, вне их источников нет ($f_1(z) = 0$), то $W_0(z) = f_0(z)$.

Используя представления (1.3), (2.1) и (3.3), находим из комплексных потенциалов (3.5) и (3.6) обобщённые потенциалы и функции тока

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= u_0(x, y) - u_0(-x, y) + u_1(x, y) - u_1(-x, y), \\ \psi(x, y) &= v_0(x, y) + v_0(-x, y) + v_1(x, y) + v_1(-x, y), \quad (x, y) \in D, \end{aligned} \quad (3.7)$$

и

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= u_0(x, y) + u_0(-x, y) + u_1(x, y) + u_1(-x, y), \\ \psi(x, y) &= v_0(x, y) - v_0(-x, y) + v_1(x, y) - v_1(-x, y), \quad (x, y) \in D. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Применим теоремы 1 и 2 для исследования конкретных двумерных течений в слое проводимости $P = y^s$ ($s = \text{const}$) с границами $\Gamma, \sigma_1, \sigma_2$, моделируемых прямой линией $x = 0, y \geq 0$. Ряд течений с источниками вне границ изучен в монографии [10, с. 286]. Исследуем некоторые течения с источниками, заданными на границах. Пусть течение в слое проводимости $P = y^s$ ($s = \text{const}$) вызвано расположенным в точке (x_0, y_0) стоком полной мощности $\Pi_0 > 0$ (для источника $\Pi_0 < 0$) и характеризуется обобщёнными потенциалами [10, с. 209]:

$$u_0(x, y) = \frac{\Pi_0}{2\pi(yy_0)^{s/2}} Q_{s/2-1}(\omega), \quad s > 0, \quad (3.9)$$

$$u_0(x, y) = \frac{\Pi_0(yy_0)^{|s|/2}}{2\pi} Q_{|s|/2}(\omega), \quad s < 0. \quad (3.10)$$

Здесь $Q_\nu(\omega)$ – функция Лежандра второго рода степени ν (где ν принимает одно из значений: $s/2, |s|/2$ или $s/2 - 1$) аргумента $\omega = 1 + R^2/(2yy_0)$, $R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$. С учётом известных свойств функции $Q_\nu(\omega)$ при $\omega \rightarrow 1$ (см. [12, с. 165]) в малой окрестности точки (x_0, y_0) запишем

$$Q_\nu(\omega) = \ln \frac{1}{R} - \gamma + \psi(\nu + 1), \quad \nu \neq -1, -2, \dots, \quad \text{при } R \rightarrow 0,$$

а также при $\omega \rightarrow \infty$ асимптотическое приближение

$$Q_\nu(\omega) \sim \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu + 3/2)} \left(\frac{yy_0}{R^2}\right)^{\nu+1} \quad \text{при } R^2/(2yy_0) \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

Здесь γ – постоянная Эйлера–Маскерони, $\psi(\nu + 1)$ – логарифмическая производная гамма-функции $\Gamma(\nu + 1)$. Видно, что обобщённые потенциалы (3.9) и (3.10) имеют в точке (x_0, y_0)

сингулярность логарифмического типа и удовлетворяют на сингулярных линиях σ_{01} и σ_{02} условиям (см. [10, с. 108])

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[y^s \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} \right] = 0, \quad s > 0 \quad \text{на} \quad \sigma_{02}; \quad \lim_{y \rightarrow 0} u_0(x, y) = 0, \quad s < 0 \quad \text{на} \quad \sigma_{01}, \quad (3.12)$$

а также при $s > 0$ и $s < 0$ условию на бесконечности

$$u_0(x, y) = O(1/r^2) \quad \text{при} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty. \quad (3.13)$$

В силу условий (3.12) и (3.13) будут выполняться требования (2.9) и (2.10), при которых справедливы теоремы 1 и 2.

В случае задачи сопряжения имеем согласно представлению (3.4) и с учётом $u_1(x, y) = 0$, $u_2(x, y) = 0$ выражения для обобщённых потенциалов течения к стоку, расположенному в точке $(0, y_0)$ границы $\Gamma = \{(x, y) : x = 0, y \geq 0\}$:

$$k_1 \varphi_1(x, y) = u_0(x, y) + \lambda u_0(-x, y), \quad x \in (0, \infty), \quad y \in (0, \infty),$$

$$k_2 \varphi_2(x, y) = (1 - \lambda) u_0(x, y), \quad x \in (-\infty, 0), \quad y \in (0, \infty).$$

Здесь обобщённый потенциал $u_0(x, y)$ представлен формулами (3.9) и (3.10), в которых аргумент функции Лежандра $\omega = 1 + R^2/(2yy_0) = 1 + [x^2 + (y - y_0)^2]/(2yy_0)$ симметричен: $\omega(x, y) = \omega(-x, y)$ и, следовательно, $u_0(x, y) = u_0(-x, y)$. Поэтому $\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y) = \varphi(x, y)$,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{\Pi_0}{\pi(k_1 + k_2)(yy_0)^{s/2}} Q_{s/2-1}(\omega), \quad s > 0, \\ \varphi(x, y) &= \frac{\Pi_0(yy_0)^{|s|/2}}{\pi(k_1 + k_2)} Q_{|s|/2}(\omega), \quad s < 0, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad y \in (0, \infty). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Обобщённые потенциалы (3.14) характеризуют течение к стоку ($\Pi_0 > 0$) (от источника, $\Pi_0 < 0$) мощности $2\Pi_0/(k_1 + k_2)$.

Пусть теперь сток расположен в точке $(0, y_0)$ границ σ_1 или σ_2 , моделируемых прямой $x = 0, y \geq 0$. Тогда согласно представлениям (3.7) и (3.8), в которых $u_1(x, y) = 0$, а функция $u_0(x, y)$ имеет вид (3.9) и (3.10), получаем

$$\varphi(x, y) = u_0(x, y) - u_0(-x, y) \quad \text{и} \quad \varphi(x, y) = u_0(x, y) + u_0(x, y), \quad x, y \in (0, \infty).$$

В силу симметрии $u_0(x, y) = u_0(-x, y)$ находим в случае границы σ_1 обобщённый потенциал $\varphi(x, y) = 0$ (течение отсутствует) и границы σ_2 –

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{\Pi_0}{\pi(yy_0)^{s/2}} Q_{s/2-1}, \quad s > 0, \\ \varphi(x, y) &= \frac{\Pi_0(yy_0)^{|s|/2}}{\pi} Q_{|s|/2}(\omega), \quad s < 0, \quad x, y \in (0, \infty). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Обобщённые потенциалы (3.15) характеризуют течение к стоку ($\Pi_0 > 0$) (от источника, $\Pi_0 < 0$) мощности $2\Pi_0$. Заметим, что эти потенциалы следуют из выражений (3.14) при $k_1 = 1$ и $k_2 \rightarrow 0$.

Найдём предельные выражения обобщённых потенциалов (3.14) и (3.15), $s > 0$, когда $y_0 \rightarrow 0$ ($R \rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$). Используя асимптотическое приближение функции Лежандра (3.11), имеем

$$\varphi(x, y) = \frac{\Pi_0 \Gamma(s/2)}{\pi(k_1 + k_2)((s + 1)/2)r^s}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad y \in (0, \infty), \quad (3.16)$$

и

$$\varphi(x, y) = \frac{\Pi_0 \Gamma(s/2)}{\pi((s+1)/2)r^s}, \quad x, y \in (0, \infty), \quad (3.17)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Обобщённые потенциалы (3.16) и (3.17) описывают течения к стоку (от источника), расположенному в начале координат, на пересечении сингулярной линии $\sigma_{02} = \{(x, y) : x \in (-\infty, \infty), y = 0\}$ с границами Γ и σ_2 соответственно, моделируемыми прямой линией $x = 0, y \geq 0$.

Решения (3.14)–(3.17) при $s = 1$ характеризуются гармоническими функциями $\varphi(x, y)$ – потенциалами пространственных осесимметричных течений, когда стоки (источники) расположены на границах Γ и σ_2 , моделируемых плоскостью $x = 0$. А именно, при $s = 1$ потенциалы (3.14) и (3.15) описывают кольцевые стоки (источники) радиуса y_0 с центром в начале координат, а потенциалы (3.16) и (3.17) – точечные стоки (источники), находящиеся в начале координат.

Рассмотренные примеры не исчерпывают возможностей использования теорем 1 и 2 для нахождения в конечном виде обобщённых потенциалов течений от других источников в слое проводимости (3.1). В слое такой проводимости имеют место другие представления решений в конечном виде граничных задач [10, с. 290], допускающих обобщения на случай, когда стоки (источники) течения располагаются на границах.

4. Задачи с произвольными замкнутыми гладкими границами. Рассмотрим общий случай течения в слое проводимости $P(z)$, когда сток или источник располагается на границе Γ или σ_2 , каждая из которых моделируется произвольной замкнутой гладкой кривой (контуром) L . Для исследования граничных задач принципиальное значение имеют первое ($k = 1$) и второе ($k = 2$) комплексные фундаментальные решения

$$F_k(z, z_0) = \Phi_k(z, z_0) + i \frac{\Psi_k(z, z_0)}{P(z)}, \quad k = 1, 2,$$

которые по координатам точки $z = x + iy$ ($z \neq z_0, z_0 = x_0 + iy_0$ – точка-параметр) удовлетворяют в области D течения уравнению (1.4) и имеют в точке $z = z_0$ согласно асимптотике

$$F_1(z, z_0) \sim \frac{1}{2\pi P(z_0)} \ln \frac{1}{z - z_0}, \quad F_2(z, z_0) \sim \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{1}{z - z_0} \quad \text{при } z \rightarrow z_0 \quad (4.1)$$

сингулярности логарифмического типа.

Полагаем, что согласно представлениям (2.9) решения $F_k(z, z_0)$ (функции $\Phi_k(z, z_0)$ и $\Psi_k(z, z_0)$, $k = 1, 2$) удовлетворяют на сингулярной линии $\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$ условиям

$$[F_k(z, z_0) + \bar{F}_k(z, z_0)]^+ = 0 \quad (\Phi_k^+(z, z_0) = 0), \quad k = 1, 2, \quad z \in \sigma_{01}, \quad (4.2)$$

$$[P(z)(F_k(z, z_0) - \bar{F}_k(z, z_0))]^+ = 0 \quad (\Psi_k^+(z, z_0) = 0), \quad k = 1, 2, \quad z \in \sigma_{02}.$$

Решения $F_1(z, z_0)$ и $F_2(z, z_0)$ – комплексные потенциалы течений, вызванные нормированным стоком и вихрем соответственно, известны для слоёв широких классов проводимостей $P(z)$ [10, с. 94].

Пусть течение в слое проводимости $P(z)$ обусловлено стоком суммарной мощности Π_0 , а также другими источниками. Сток расположен в точке z_0 контура L и характеризуется комплексным потенциалом

$$f_0(z) = \Pi_0 F_1(z, z_0) = \Pi_0 \left(\Phi_1(z, z_0) + i \frac{\Psi_1(z, z_0)}{P(z)} \right),$$

а другие источники течения заданы вне и внутри контура L . Начало координат выберем внутри контура L . Течение описываем комплексным потенциалом

$$W_0(z) = \Pi_0 F_1(z, z_0) + f(z), \quad (4.3)$$

в котором сингулярности (изолированные особые точки) функции $f(z)$ характеризуют источники, расположенные вне и внутри контура L .

Искомый комплексный потенциал $W(z)$ течения представим в виде (2.3), в котором комплексный потенциал возмущения $W_*(z)$ выразим обобщённым интегралом типа Коши [10, с. 166], а именно, когда на всём контуре L , за исключением точки $z_0 \in L$, функция тока непрерывна (непрерывен расход жидкости):

$$W_*(z) = - \int_L P(\zeta) w'_2(z, \zeta) [g(\zeta) + A_0 \Phi_1(\zeta, z_0)] d\zeta, \quad z \notin L, \quad (4.4)$$

и если контур L – непроницаемый для жидкости (нет потока через L), то

$$W_*(z) = \int_L P(\zeta) w'_1(z, \zeta) \left[h(\zeta) + B_0 \frac{\Psi_1(\zeta, z_0)}{P(\zeta)} \right] d\zeta, \quad z \notin L. \quad (4.5)$$

Здесь A_0 и B_0 – вещественные постоянные; $g(\zeta)$ и $h(\zeta)$ – непрерывные вещественные функции переменной $\zeta \in L$; $w'_1(z, \zeta)$ и $w'_2(z, \zeta)$ – главные решения уравнения (1.4) по переменной z (ζ – точка-параметр), которые связаны с фундаментальными решениями $F_k(z, \zeta)$, $k = 1, 2$, равенствами

$$w'_1 = (z, \zeta) = - \frac{\partial F_1(z, \zeta)}{\partial l_\zeta} = - \frac{1}{P(\zeta)} \frac{\partial F_2(z, \zeta)}{\partial n_\zeta},$$

$$w'_2 = (z, \zeta) = - \frac{\partial F_1(z, \zeta)}{\partial n_\zeta} = \frac{1}{P(\zeta)} \frac{\partial F_2(z, \zeta)}{\partial l_\zeta}.$$

Рассмотрим подынтегральные выражения (4.4) и (4.5), содержащие функции $\Phi_1(\zeta, z_0)$ и $\Psi_1(\zeta, z_0)$, и убедимся, что при $\zeta \rightarrow z_0$ они принимают ограниченные значения. Согласно асимптотике (4.1) имеем

$$\Phi_1(\zeta, z_0) \sim \frac{1}{2\pi P(z_0)} \ln \frac{1}{|\zeta - z_0|}, \quad \Psi_1(\zeta, z_0) \sim - \frac{P(\zeta)}{2\pi P(z_0)} \arg(\zeta - z_0) \quad \text{при } \zeta \rightarrow z_0.$$

Так как

$$\lim_{\zeta \rightarrow z_0} [|\zeta - z_0|^\varepsilon \Phi_1(\zeta, z_0)] = 0, \quad \text{то } \Phi_1(\zeta, z_0) = O(1/|\zeta - z_0|^\varepsilon) \quad \text{при } \zeta \rightarrow z_0, \quad (4.6)$$

где ε – сколь угодно малое положительное число ($\varepsilon < 1$). Функция $\Psi_1(\zeta, z_0)$ принимает при $\zeta \rightarrow z_0$ конечные значения. Поэтому интегралы, содержащие $\Phi_1(\zeta, z_0)$ и $\Psi_1(\zeta, z_0)$, сходятся (существуют) и, следовательно, комплексные потенциалы (4.4) и (4.5) удовлетворяют уравнению (1.4).

Комплексные потенциалы (4.4) и (4.5) удовлетворяют условиям (2.9), так как решения $F_k(z, \zeta)$, $k = 1, 2$, удовлетворяют условиям (4.2). Поскольку эти комплексные потенциалы представлены обобщёнными интегралами типа Коши, то согласно [11, с. 144] они удовлетворяют на бесконечности условию

$$W_*(z) = O(1/|z|) \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty. \quad (4.7)$$

Согласно монографии [10, с. 158] непрерывно продолжим комплексные потенциалы (4.4) и (4.5) на контур L . Положив, что $g(\zeta)$ и $h(\zeta)$ – функции класса Гёльдера, находим предельные значения во всех точках контура L , кроме точки $z_0 \in L$:

$$W_*^\pm(z) = - \int_L P(\zeta) w'_2(z, \zeta) [g(\zeta) + A_0 \Phi_1(\zeta, z_0)] d\zeta \pm \frac{g(z) + A_0 \Phi_1(z, z_0)}{2}, \quad z \in L, \quad z \neq z_0, \quad (4.8)$$

$$W_*^\pm(z) = \int_L P(\zeta)w'_1(z, \zeta) \left[h(\zeta) + B_0 \frac{\Psi_1(\zeta, z_0)}{P(\zeta)} \right] d\zeta \pm \frac{i}{2} \left[h(z) + \frac{B_0 \Psi_1(z, z_0)}{P(z)} \right], \quad z \in L, \quad z \neq z_0, \quad (4.9)$$

где интегралы понимаются в смысле главных значений по Коши.

Применим представления (4.4) и (4.5) комплексных потенциалов возмущений для исследования задач с границами Γ и σ_2 , которые моделируем гладкими замкнутыми кривыми (контурами) класса Ляпунова.

Теорема 3 (сопряжения на произвольном гладком контуре). Пусть течение в слое проводимости $P(z)$ характеризуется в плоскости z комплексным потенциалом (4.3), в котором Π_0 – мощность стока, расположенного в точке z_0 произвольного гладкого замкнутого контура Γ . Другие источники течения расположены вне и внутри контура Γ и характеризуются сингулярностями функции $f(z)$. Тогда течение в областях D_1 и D_2 (вне и внутри контура Γ), проводимости слоя в которых равны P_1 и P_2 ($P_\nu = k_\nu P(z)$, $k_\nu = \text{const} > 0$, $\nu = 1, 2$), описывают комплексные потенциалы $W_1(z)$ и $W_2(z)$:

$$W_\nu(z) = \Pi_0 F_1(z, z_0) + f(z) - \int_\Gamma P(\zeta)w'_2(z, \zeta) [g(\zeta) + 2\lambda \Pi_0 \Phi_1(\zeta, z_0)] d\zeta, \quad z \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2, \quad (4.10)$$

если функция $g(z)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$g(z) + 2\lambda \int_\Gamma \mathcal{K}_1(z, \zeta)g(\zeta) d\zeta + 4\lambda^2 \Pi_0 \int_\Gamma \mathcal{K}_1(z, \zeta)\Phi_1(\zeta, z_0) d\zeta = 2\lambda \text{Re } f(z), \quad z \in \Gamma, \quad z \neq z_0. \quad (4.11)$$

Здесь

$$\mathcal{K}_1(z, \zeta) = P(\zeta) \text{Re } w'_2(z, \zeta) = -P(\zeta) \frac{\partial \Phi_1(z, \zeta)}{\partial n_\zeta} = \frac{\partial \Phi_2(z, \zeta)}{\partial l_\zeta},$$

орт нормали $\vec{n}_\zeta \in \Gamma$ направлен внутрь области D_1 , $\lambda = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$, $\lambda \in (-1, 1)$.

Доказательство. Согласно представлению (4.4) имеем в случае контура Γ комплексный потенциал возмущений

$$W_*(z) = - \int_\Gamma P(\zeta)w'_2(z, \zeta) [g(\zeta) + A_0 \Phi_1(\zeta, z_0)] d\zeta, \quad z \notin \Gamma.$$

Комплексный потенциал $W_*(z)$ является решением уравнения (1.4), удовлетворяющим условию (2.9), а также условию (4.7), поскольку возможные на бесконечности источники течения заданы сингулярностями комплексного потенциала $W_0(z)$ из (4.3).

Найдём константу A_0 , подставив комплексный потенциал $W_*(z)$ в условия (2.8). С учётом его предельных значений (4.8) на контуре Γ получим равенство

$$\begin{aligned} g(z) + 2\lambda \int_\Gamma P(\zeta) \text{Re } w'_2(z, \zeta) [g(\zeta) + A_0 \Phi_1(\zeta, z_0)] d\zeta + (A_0 - 2\lambda \Pi_0) \Phi_1(z, z_0) = \\ = 2\lambda \text{Re } f(z), \quad z \in \Gamma, \quad z \neq z_0. \end{aligned}$$

Это равенство тождественно выполняется, если $A_0 = 2\lambda \Pi_0$, а функция $g(z)$ удовлетворяет интегральному уравнению (4.11). Подставив $A_0 = 2\lambda \Pi_0$ в комплексный потенциал $W_*(z)$ и учтя равенства (2.3), имеем искомые комплексные потенциалы (4.10). Теорема доказана.

Исследуем интегральное уравнение (4.11). Оценим его ядро

$$\mathcal{K}_1(z, \zeta) = -P(\zeta) \frac{\partial \Phi_1(z, \zeta)}{\partial n_\zeta}$$

при условии, что функцию $\Phi_1(z, \zeta)$ можно представить в виде [10, с. 111]

$$\Phi_1(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{P(z)P(\zeta)}} \left[f_1(z, \zeta) \ln \frac{1}{|z - \zeta|} + g_1(z, \zeta) \right].$$

Здесь P – проводимость слоя, $f_1(z, \zeta)$ и $g_1(z, \zeta)$ – гладкие (непрерывно дифференцируемые) функции переменных z и ζ в областях D_1, D_2 и на контуре Γ , причём $f_1(z, z) = 1$. Так как контур Γ моделируется кривой класса Ляпунова, то согласно монографии [10, с. 398] для ядра $\mathcal{K}_1(z, \zeta)$ справедлива оценка $|\mathcal{K}_1(z, \zeta)| = O(|z - \zeta|^{1-\mu})$, $\mu \in (0, 1]$, при $\zeta \rightarrow z$. Тогда с учётом оценки (4.6) для функции $\Phi_1(\zeta, z_0)$ находим

$$|\mathcal{K}_1(z, \zeta)\Phi_1(\zeta, z_0)| = O(|z - \zeta|^{1-\mu-\varepsilon}) \quad \text{при } \zeta \rightarrow z = z_0 \in \Gamma.$$

Поскольку $g(\zeta)$ – функция класса Гёльдера, то подынтегральное выражение в уравнении (4.11) имеет согласно оценок слабые (интегрируемые) особенности и, следовательно, интегралы сходятся (существуют).

Таким образом, исследование задачи сопряжения редуцируется к граничному неоднородному интегральному уравнению второго рода со слабой сингулярностью (типа Фредгольма).

Представление (4.10) задачи сопряжения получено для произвольно заданных источников течения. В частности, когда сток на границе Γ отсутствует ($\Pi_0 = 0$), то [10, с. 390]

$$W_\nu(z) = f(z) - \int_\Gamma P(\zeta)w'_2(z, \zeta)g(\zeta) dl_\zeta, \quad z \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2,$$

если функция $g(z)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$g(z) + 2\lambda \int_\Gamma \mathcal{K}_1(z, \zeta)g(\zeta) dl_\zeta = 2\lambda \text{Re } f(z), \quad z \in \Gamma.$$

Когда имеется сток мощности Π_0 только на границе Γ , а другие источники вне границы Γ отсутствуют ($f(z) = 0$), то

$$W_\nu(z) = \Pi_0 F_1(z, z_0) - \int_\Gamma P(\zeta)w'_2(z, \zeta)[g(\zeta) + 2\lambda \Pi_0 \Phi_1(\zeta, z_0)] dl_\zeta, \quad z \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2,$$

если для функции $g(z)$ справедливо интегральное уравнение

$$g(z) + 2\lambda \int_\Gamma \mathcal{K}_1(z, \zeta)g(\zeta) dl_\zeta + 4\lambda^2 \Pi_0 \int_\Gamma \mathcal{K}_1(z, \zeta)\Phi_1(\zeta, z_0) dl_\zeta = 0, \quad z \in \Gamma, \quad z \neq z_0,$$

которое неоднородно в силу последнего слагаемого, стоящего слева.

Пусть теперь замкнутый контур L моделирует непроницаемую границу σ_2 ($L = \sigma_2$). Течение в слое проводимости $P(z)$ характеризуется комплексным потенциалом (4.3), в котором Π_0 – мощность стока, расположенного в точке z_0 контура σ_2 , а сингулярности функции $f(z)$ моделируют другие источники течения, лежащие вне либо внутри контура σ_2 . В силу уравнения неразрывности комплексный потенциал (4.3) должен удовлетворять условию (2.11), т.е.

$$\int_{\sigma_2} P(\zeta) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} [\Pi_0 \Phi_1(\zeta, z_0) + \text{Re } f(\zeta)] dl_\zeta = 0, \tag{4.12}$$

где функция $f(\zeta)$ имеет сингулярности внутри контура σ_2 .

Теорема 4. Пусть течение в слое проводимости $P(z)$ характеризует комплексный потенциал (4.3), сингулярности которого моделируют сток мощности Π_0 , расположенный

на контуре σ_2 , а также другие источники, лежащие вне либо внутри контура (функция $f(z)$). Причём этот комплексный потенциал удовлетворяет условию (4.12). Если контур σ_2 – непроницаемый для жидкости, то течение в области D (вне или внутри контура σ_2) описывает комплексный потенциал

$$W(z) = \Pi_0 F_1(z, z_0) + f(z) + \int_{\sigma_2} P(\zeta) w'_1(z, \zeta) \left[h(\zeta) - \frac{2\Pi_0 \Psi_1(\zeta, z_0)}{P(\zeta)} \right] dl_\zeta, \quad z \in D, \quad (4.13)$$

если функция $h(z)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{aligned} h(z) + 2 \int_{\sigma_2} \mathcal{K}_2(z, \zeta) h(\zeta) dl_\zeta - 4\Pi_0 \int_{\sigma_2} \mathcal{K}_2(z, \zeta) \frac{\Psi_1(\zeta, z_0)}{P(\zeta)} dl_\zeta = \\ = 2 \left[\frac{\alpha_2}{P(z)} - \text{Im } f(z) \right], \quad z \in \sigma_2, \quad z \neq z_0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Здесь

$$\mathcal{K}_2(z, \zeta) = P(\zeta) \text{Im } w'_1(z, \zeta) = -\frac{P(\zeta)}{P(z)} \frac{\partial \Psi_1(z, \zeta)}{\partial l_\zeta} = -\frac{1}{P(z)} \frac{\partial \Psi_2(z, \zeta)}{\partial n_\zeta},$$

орт $\vec{n}_\zeta \in \sigma_2$ направлен внутрь области D .

Доказательство. Согласно представлению (4.5) комплексный потенциал возмущений $W_*(z)$ запишем в виде

$$W_*(z) = \int_{\sigma_2} P(\zeta) w'_1(z, \zeta) \left[h(\zeta) + B_0 \frac{\Psi_1(\zeta, z_0)}{P(\zeta)} \right] dl_\zeta, \quad z \in D,$$

где контур σ_2 обходится по часовой стрелке для внешней задачи и против часовой стрелки для внутренней задачи. Комплексный потенциал $W_*(z)$ есть решение уравнения (1.4), которое удовлетворяет условию (2.9), а также условию (4.7) в случае внешней задачи.

Найдём константу B_0 , подставив комплексный потенциал $W_*(z)$ в условие (2.7). С учётом его предельных значений (4.9) на контуре σ_2 находим равенство

$$\begin{aligned} h(z) + 2 \int_{\sigma_2} P(\zeta) \text{Im } w'_1(z, \zeta) \left[h(\zeta) + B_0 \frac{\Psi_1(\zeta, z_0)}{P(\zeta)} \right] dl_\zeta + (B_0 + 2\Pi_0) \frac{\Psi_1(z, z_0)}{P(z)} = \\ = 2 \left[\frac{\alpha_2}{P(z)} - \text{Im } f(z) \right], \quad z \in \sigma_2, \quad z \neq z_0, \end{aligned}$$

которое обращается в тождество, если $B_0 = -2\Pi_0$, а функция $h(z)$ удовлетворяет уравнению (4.14). Подставив $B_0 = -2\Pi_0$ в комплексный потенциал $W_*(z)$, согласно представлению (2.3) имеем искомый комплексный потенциал (4.13). Теорема доказана.

Интегральное уравнение (4.14) имеет слабую сингулярность. Действительно, оценим ядро уравнения

$$\mathcal{K}_2(z, \zeta) = -\frac{1}{P(z)} \frac{\partial \Psi_2(z, \zeta)}{\partial n_\zeta},$$

исходя из представления функции [10, с. 111]

$$\Psi_2(z, \zeta) = -\frac{\sqrt{P(z)P(\zeta)}}{2\pi} \left[f_2(z, \zeta) \ln \frac{1}{|z - \zeta|} + g_2(z, \zeta) \right].$$

Здесь P – проводимость слоя, $f_2(z, \zeta)$ и $g_2(z, \zeta)$ – гладкие функции переменных z и ζ , причём $f_2(z, z) = 1$. Тогда в случае контура σ_2 класса Ляпунова справедлива такого же порядка сингулярности оценка

$$|\mathcal{K}_2(z, \zeta)| = O(|z - \zeta|^{1-\mu}), \quad \mu \in (0, 1],$$

при $\zeta \rightarrow z$, что и для ядра $\mathcal{K}_1(z, \zeta)$ уравнения (4.11). Так как функция $\Psi_1(\zeta, z_0)$ при $\zeta \rightarrow z_0$ ограничена, а $h(\zeta)$ – функция класса Гёльдера, то подынтегральные выражения в уравнении (4.14) имеют слабую (интегрируемую) особенность и, следовательно, интегралы существуют.

Итак, исследование второй внешней и внутренней краевых задач редуцируется к граничному неоднородному интегральному уравнению второго рода со слабой сингулярностью.

Рассмотрим частные случаи представления (4.13) решения второй краевой задачи в зависимости от задания источников течения. Пусть на границе σ_2 сток отсутствует ($\Pi_0 = 0$). Тогда [10, с. 392]

$$W(z) = f(z) + \int_{\sigma_2} P(\zeta) w'_2(z, \zeta) h(\zeta) dl_\zeta, \quad z \in D,$$

если функция $h(z)$ является решением интегрального уравнения

$$h(z) + 2 \int_{\sigma_2} \mathcal{K}_2(z, \zeta) h(\zeta) dl_\zeta = 2 \left[\frac{\alpha_2}{P(z)} - \text{Im} f(z) \right], \quad z \in \sigma_2.$$

Когда имеется сток мощности Π_0 только на границе σ_2 , а вне границы σ_2 нет источников течения ($f(z) = 0$), то

$$W(z) = \Pi_0 F_1(z, z_0) + \int_{\sigma_2} P(\zeta) w'_2(z, \zeta) \left[h(\zeta) - \frac{2\Pi_0 \Psi_1(\zeta, z_0)}{P(\zeta)} \right] dl_\zeta, \quad z \in D,$$

если функция $h(z)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$h(z) + 2 \int_{\sigma_2} \mathcal{K}_2(z, \zeta) h(\zeta) dl_\zeta - 4\Pi_0 \int_{\sigma_2} \mathcal{K}_2(z, \zeta) \frac{\Psi_1(\zeta, z_0)}{P(\zeta)} dl_\zeta = \frac{2\alpha_2}{P(z)}, \quad z \in \sigma_2, \quad z \neq z_0.$$

Задачу сопряжения и вторую краевую задачу нетрудно обобщить согласно принципу наложения течений на случай, когда на границах Γ и σ_2 располагаются несколько дискретных источников течения, характеризующихся сингулярностями логарифмического типа.

Заключение. Подводя итоги, отметим, что решения первой и второй краевых задач и задачи сопряжения с произвольно расположенными дискретными источниками течения удаётся представить в конечном виде для слоёв некоторых классов проводимостей. Это продемонстрировано на примере слоя, проводимость которого моделируется степенной функцией координат, а границы – прямолинейные. В общем случае, когда проводимость слоя моделируется произвольной гладкой функцией координат, а границы – произвольными гладкими замкнутыми кривыми, вторая краевая задача и задача сопряжения редуцированы к граничным сингулярным интегральным уравнениям. Эти уравнения могут быть решены, например, численным методом дискретных особенностей [1, с. 433].

Исследованные задачи являются математическими моделями двумерных фильтрационных процессов, имеющих место, например, при разработке водоносных (нефтеносных) неоднородных пластов грунта. Они могут представлять интерес при изучении процессов теплопроводности, электропроводности, электро- и магнитостатики в слоистых структурах, характеризующихся законами и граничными условиями, аналогичными законам (1.1) и указанным граничным условиям фильтрационных процессов.

Автор благодарит А.В. Сегуху за содержательное и полезное обсуждение результатов статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995.
2. *Dimitroglou M.G., Setukha A.V., Lifanov I.K.* On numerical modeling of a three-dimensional flow past a wing with external flow suction and on the effect of flow suction on trailing vortices // *Rus. J. of Numer. Anal. and Math. Model.* 2004. V. 19. № 2. P. 109–129.
3. *Лифанов И.К., Сетуха А.В.* О сингулярных решениях некоторых краевых задач и сингулярных интегральных уравнений // *Дифференц. уравнения.* 1999. Т. 35. № 9. С. 1227–1241.
4. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М., 1977.
5. *Пивень В.Ф., Костин О.В.* Фильтрационные течения с источниками на непроницаемых канонических границах // *Тр. Междунар. школ-семинаров “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики”.* Вып. 8. Орёл, 2009. С. 92–98.
6. *Деткова Ю.В., Никольский Д.Н.* Исследование работы водозабора вблизи источника загрязнения, расположенного на окружности // *Тр. Междунар. школ-семинаров “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики”.* Вып. 8. Орёл, 2009. С. 46–51.
7. *Пивень В.Ф.* Задачи о плоскопараллельных фильтрационных течениях с источниками на границах // *Дифференц. уравнения.* 2020. Т. 56. № 9. С. 1214–1225.
8. *Пивень В.Ф.* Исследование трёхмерных задач фильтрации жидкости с источниками на границах // *Дифференц. уравнения.* 2021. Т. 57. № 9. С. 1238–1254.
9. *Голубева О.В.* Курс механики сплошных сред. М., 1972.
10. *Пивень В.Ф.* Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости. Орёл, 2006.
11. *Вакуа И.А.* Обобщенные аналитические функции. М., 1988.
12. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М., 1973.

Орловский государственный университет
имени И.С. Тургенева

Поступила в редакцию 02.03.2022 г.
После доработки 24.04.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.

УДК 519.63

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНДУКТИВНОСТИ НОРМАЛЬНЫХ ПРОВОДНИКОВ И СВЕРХПРОВОДНИКОВ

© 2022 г. М. М. Хапаев, М. Ю. Куприянов

Рассматривается задача вычисления матриц погонных индуктивности и сопротивления, а также распределения тока и магнитного потенциала в протяжённой однородной линии передачи, структура которой может состоять из сверхпроводников и нормальных проводников произвольного сечения, характеризующихся некоторой комплексной проводимостью. Дается математическая постановка задачи и формулируется вычислительный алгоритм граничных элементов, основанный на редукции задачи к системе граничных интегральных уравнений. Приводятся вычислительные альтернативы данному подходу и результаты расчётов по разработанной программе TLZ (Transmission Line Z), а также предлагается простой способ визуализации решений метода граничных элементов с помощью графического пакета Gnuplot.

DOI: 10.31857/S0374064122080143, EDN: CHESMG

Введение. В работе рассматривается задача математического моделирования распределения электрического тока и электромагнитных полей в сечении двумерных проводящих структур, которые являются протяжёнными и однородными вдоль своей длины, так что проблема сводится к решению двумерной краевой задачи в плоскости поперечного сечения. Образующие структуру проводники могут быть нормальными металлами, сверхпроводниками и любыми другими материалами, характеризующимися некоторой комплексной проводимостью.

Интерес к таким задачам обусловлен развитием технологий сверхпроводниковой микроэлектроники [1–4]. Целью данной работы является разработка вычислительного метода и достаточно универсальной программы для вычисления матриц погонных частотно-зависимых индуктивности и сопротивления произвольных структур, характеризующихся комплексной проводимостью.

Рассматриваемая задача может быть решена с помощью метода конечных элементов или конечных разностей (см. [5, 6]) путём сведения к объёмному интегральному уравнению [7–9] или с применением метода граничных элементов [7, 10, 11]. Ни один из этих подходов не является стандартным, так как изучаемая задача, как это будет показано, является нелокальной. Однако прямой метод граничных элементов обладает рядом преимуществ, например, точным учётом скин-эффекта при расчёте пространственного распределения плотности тока в поперечном сечении изучаемых структур.

Ранее метод граничных элементов был применён для вычисления индуктивности сверхпроводниковых линий передач без учёта диссипативных потерь [7, 11]. В данной статье метод граничных элементов совершенствуется для вычисления комплексных частотно-зависимых матричных индуктивных и резистивных составных частей комплексного импеданса исследуемых объектов. Исследовано совершенствование этого алгоритма с помощью использования частичной заполненности матриц сеточных уравнений. Показано, как можно визуализировать поля и токи любого метода граничных элементов с помощью технологий известной программы Gnuplot [12].

1. Общая постановка физической задачи. Математическая модель задачи основана на уравнениях Максвелла для комплексных амплитуд ($j = \sqrt{-1}$) электрического поля \vec{E} , магнитного поля \vec{H} , магнитной индукции \vec{B} , $\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$, векторного потенциала \vec{A} , $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ в калибровке $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, тока \vec{J} и закона Ома $\vec{J} = \sigma(\omega) \vec{E}$, где ω является угловой частотой, а $\sigma(\omega)$ – комплексной проводимостью, μ_r – относительная магнитная проницаемость, которую будем считать кусочно-постоянной и равной единице вне проводников. Для упрощения будем пренебрегать током смещения.

Пусть $\varkappa^2 = -j\omega\mu_r\mu_0\sigma(\omega)$, тогда для векторного потенциала \vec{A} в проводнике получим уравнение

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} - \varkappa^2 \vec{A} = -\frac{\varkappa^2}{j\omega} \nabla V, \quad \Delta V = 0, \tag{1}$$

где V – потенциал электрического поля. В окружающей проводники среде уравнение для векторного потенциала имеет вид

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = 0.$$

Задача должна быть дополнена условиями на границах Γ сред с различной относительной магнитной проницаемостью μ_r , \vec{n} – нормаль к границе:

$$[\vec{n} \times \vec{A}] = 0, \quad [\vec{n} \times (\mu_r^{-1} \nabla \times \vec{A})] = 0. \tag{2}$$

При описании сверхпроводников будем использовать двухжидкостную модель, в которой проводимость задаётся выражением

$$\sigma(\omega) = \sigma_n + \frac{1}{j\omega\mu_0\lambda^2},$$

где λ – лондоновская глубина проникновения [13], σ_n – нормальная проводимость [13]. Более сложные модели проводимости в сверхпроводниках приведены, например, в [5], [14].

Для нормальных проводников известна модель Друде и её обобщения, согласно которой проводимость определяется по формуле

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_n}{1 - j\omega\mu_0\tau},$$

где τ – характерное время рассеяния электрона на примесях.

2. Постановка двумерной задачи для векторного потенциала. Получим из уравнения (1) двумерную постановку задачи.

Будем считать, что имеется $N+1$ протяжённый вдоль оси z и однородный в сечении (x, y) проводник. Проводник 0 служит для замыкания всех токовых петель и, таким образом, несет возвратный ток. Каждый проводник не обязательно является односвязным. Каждая компонента связности характеризуется своей постоянной комплексной проводимостью и соответственно параметром k , а также относительной магнитной проницаемостью μ_m .

Пусть векторный потенциал \vec{A} и ток J_m имеют только z -компоненту:

$$\vec{J} = \{0, 0, J_m(x, y)\}, \quad \vec{A} = \{0, 0, A(x, y)\}. \tag{3}$$

Пусть S_m – сечение каждого проводника с границей Γ_m , нормаль \vec{n} к которой будем считать внешней, $r = (x, y)$ – радиус-вектор в плоскости поперечного сечения структуры, $A_m(r)$ – z -компонента векторного потенциала при $r \in S_m$ и $A(r)$ в остальном пространстве, I_m – соответствующий полный ток, определяемый формулой

$$I_m = \iint_{S_m} J_m(r) dx dy, \quad m = \overline{0, N}.$$

Введём функцию $\varphi = V_m/(j\omega)$, которая для сверхпроводников имеет смысл функции фазы их параметров порядка [13]. Из (1) и (3) следует, что $\nabla_{xy}\varphi_m(x, y, z) = 0$. Справедливо следующее

Утверждение 1. Для каждого проводника m ($m = \overline{0, N}$) имеет место равенство

$$\varphi_m(x, y, z) = \varphi_m(z).$$

В двумерном случае функция $\varphi_m(x, y, z)$ не зависит от переменных (x, y) . Это обстоятельство позволяет значительно упростить постановку задач работ [5, 10, 15–19].

Далее положим

$$\varphi_m(z) = z\Phi_m, \quad \Phi_m \equiv \text{const}, \quad (4)$$

что соответствует однородному распределению тока и электрического потенциала по длине проводников и условию гармоничности потенциала $\Delta V = 0$.

Можно определить зависимость от переменной z иначе (см. [5, 15]):

$$\varphi_m(z) = e^{-\gamma z}\Phi_m, \quad \Phi_m \equiv \text{const}. \quad (5)$$

Комплексный параметр разделения переменных γ согласно работе [15] определим позднее.

В случае зависимости (4) постановка задачи относительно компоненты векторного потенциала $A(r)$ имеет вид

$$\Delta A_m(r) + \varkappa_m^2 A_m(r) = \varkappa_m^2 \Phi_m, \quad r \in S_m, \quad m = \overline{0, N}, \quad (6)$$

$$\Delta A(r) = 0, \quad r \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{m=0}^N S_m, \quad (7)$$

$$A_m(r) = A(r), \quad \frac{1}{\mu_m} \frac{\partial A_m(r)}{\partial n} = \frac{\partial A(r)}{\partial n}, \quad r \in \Gamma_m, \quad (8)$$

$$\int_{\Gamma_m} \frac{1}{\mu_m} \frac{\partial A_m(r)}{\partial n} ds = \mu_0 I_m, \quad m = \overline{0, N}, \quad (9)$$

$$\sum_{m=0}^N I_m = 0. \quad (10)$$

Условия сопряжения (8) следуют из (2). В равенстве (10) токи в проводниках I_m , $m = \overline{1, N}$, замыкаются с помощью тока I_0 . Следствием баланса токов (10) является следующее

Утверждение 2. В задаче (6)–(10) справедливо предельное равенство

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = 0. \quad (11)$$

С помощью потенциала A_m можно вычислить плотность тока в проводниках следующим образом:

$$\mu_0 J_m(r) = \varkappa_m^2 (A_m(r) - \Phi_m). \quad (12)$$

Исключив в (6) константу Φ_m с помощью формулы (12) (см. [20]), запишем это уравнение в виде

$$\Delta A_m(r) + \varkappa_m^2 A_m(r) - \frac{\varkappa_m^2}{|S_m|} \iint_{S_m} A_m(r) ds + \frac{\varkappa_m^2}{|S_m|} I_m = 0, \quad r \in S_m. \quad (13)$$

В поставленной задаче (6)–(10) полные токи I_m удобно считать заданными, а величины Φ_m искомыми, в результате чего легко устанавливается связь между ними.

Заметим, что если выполняется зависимость (5), то постановка задачи остаётся такой же, но для функций $A(r)/\gamma$ и $A_m(r)/\gamma$.

Величины Φ_m имеют смысл погонного потока магнитного поля или флюксоида в сверхпроводимости. С помощью Φ_m нетрудно вычислить индуктивность и сопротивление, которые в случае нескольких проводников имеют форму матриц.

3. Матрица импедансов. Традиционно индуктивность и сопротивление находятся с помощью вычисления полей и токов [9, 15] из энергетических соображений. Между тем при полной постановке задачи (6)–(10) с заданными токами I_m и искомыми величинами Φ_m матрица импедансов может быть определена более простым и точным способом.

Так как задача (6)–(10) линейна, то существует такая комплексная матрица \mathbf{M} размерности $N \times N$, что

$$\Phi_i - \Phi_0 = \sum_{j=1}^N \mathbf{M}_{ij} I_j.$$

Матрица импедансов $\mathbf{Z}(\omega) = j\omega\mathbf{M}(\omega)$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{Z}(\omega) = j\omega\mathbf{M}(\omega) = \mathbf{R}(\omega) + j\omega\mathbf{L}(\omega),$$

где $\mathbf{R}(\omega)$ и $\mathbf{L}(\omega)$ являются действительными $N \times N$ -матрицами погонных сопротивлений и индуктивностей. Если размеры структуры в сечении приведены в микронах, то физической размерностью этих матриц являются ом/микрон и пикогенри/микрон.

В работе [11] матрица индуктивностей для сверхпроводников получена с помощью функционала полной энергии.

Основной задачей вычислений настоящей работы является матрица комплексных импедансов $Z(\omega)$, которая может быть использована как составная часть модели телеграфных уравнений протяжённой линии передачи (см. [15]) или иным образом.

4. Постановка задачи для вычислительного алгоритма. Задача (6)–(10) обладает рядом особенностей, которые должны быть учтены при численном её решении. Особенностью постановки задачи являются неизвестные величины Φ_m , которые должны быть определены с помощью дополнительных соотношений (9). Другая особенность – наличие малого параметра. Этим параметром в случае сверхпроводников является лондоновская глубина проникновения λ , которая может принимать значение 0.1 микрон, в то время как толщина и ширина проводников могут быть порядка единиц и десятков микрон, что приводит к существенной концентрации тока в окрестности границ на расстояниях порядка λ .

Аналогичная проблема может возникнуть в случае нормальных металлов на больших частотах ω , где также возникает заметная концентрация тока вблизи границ проводников. Вычислительный алгоритм должен достаточно точно моделировать эти особенности.

Задача (6)–(10) может быть численно решена с помощью метода конечных элементов [5] или конечных разностей [6]. Для этого уравнения (6) следует записать в более удобном для решения виде – в виде интегро-дифференциальных уравнений (13).

Необходимость в таком подходе может возникнуть в случае пространственной неоднородности проводимости $\sigma(\omega, r)$. Такой подход требует построения алгоритма разрешения зависимости Φ_m от I_m , что приводит либо к итерационному процессу [5, 6], либо требует окаймления матрицы сеточных уравнений строками и столбцами для аппроксимации соотношений с Φ_m и I_m в случае алгебраического подхода к сборке системной матрицы. Что касается сеток, то проблема концентрирования тока приводит к их сильному сгущению, которое показано в статье [21]. Существует также проблема выбора достаточно большого вмещающего окна для решения задачи во всем пространстве.

Другим простым и достаточно очевидным вычислительным методом является сведение задачи к уравнению по объёму проводника [9, 15], которое в случае задачи (6)–(10) приведёт к объёмному интегральному уравнению по сечениям проводников

$$\frac{1}{z_m^2} J_m(r_0) + \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^N \iint_{S_l} \ln\left(\frac{1}{|r - r_0|}\right) J_l(r) dx dy - \Phi_m = 0, \tag{14}$$

$$\iint_{S_m} J_m(r) dx dy = I_m, \quad m = \overline{0, N}. \tag{15}$$

В отличие от работы [15] данная постановка явно включает константы Φ_m и соотношения полного тока (15).

Численное решение уравнения (14) требует дискретизации сечений проводников и применения какого-либо проекционного метода: коллокации или Галёркина. Проблемой в этом

случае является очень большая размерность матрицы системы сеточных уравнений (см. [7]), вызванная двумерной дискретизацией областей S_m . Вместе с тем проблема концентрирования тока требует применения достаточно мелких сеток для точной аппроксимации решения вблизи поверхности проводников. Имеется также трудность, связанная с недостаточной численной устойчивостью такого алгоритма, так как коэффициент при внеинтегральном члене обычно мал и задача близка к классической некорректной задаче.

Другим известным подходом является алгоритм, в котором объёмное интегральное уравнение (14) преобразуется к интегральному уравнению по границе проводников со сложным нестандартным ядром [16] и новой плотностью, относительно которой записывается уравнение по поверхности проводников. Согласно этому подходу внутри каждого проводника для плотности тока используется представление типа потенциала простого слоя, а z -компонента электрического поля удовлетворяет уравнению Гельмгольца $\Delta E_{z,m} + \varkappa_m^2 E_{z,m} = 0$, решение которого представимо в виде потенциала простого слоя с плотностью $s(q)$ и ядром $M_m(p, q)$:

$$E_{z,m}(p) = \frac{J_m(p)}{\sigma(\omega)} = \oint_{\Gamma_m} M_m(p, q) s(q) dl_q, \quad M_m(r, r_0) = -\frac{j\pi}{2} H_0^{(2)}(\varkappa_m |r - r_0|).$$

Подставив выражение $J_m(r) = \sigma(\omega) E_{z,m}(r)$ в (14), получим интегральное уравнение с ядром

$$G_k(r_0, p) = \iint_{S_k} \ln \frac{1}{|r - r_0|} M_k(r, p) ds_r. \quad (16)$$

Ядро (16) представляет собой интеграл по сечению проводников, который в работе [16] предлагается вычислять с помощью квадратур и сетки, введённой в S_m , что значительно увеличивает время на формирование матрицы системы сеточных уравнений, полученных тем или иным способом.

Наконец, для задачи (6)–(10) может быть сформулирован прямой метод граничных элементов. Для сверхпроводников этот подход ранее был применён в [7, 11]. В данной работе он перенесён на случай проводников с комплексной проводимостью. Известны и другие реализации прямого метода граничных элементов для случая нормальных проводников [10, 18, 20], в отличие от которых в настоящей работе явно используются величины Φ_m и I_m и простой метод вычисления матрицы импедансов с помощью потоков Φ_m .

5. Интегральные уравнения прямого метода граничных элементов. Прямой метод граничных элементов состоит в применении третьей формулы Грина для редукции дифференциальной задачи (6)–(10) к интегральным уравнениям по границе проводников Γ_m .

Интегральные уравнения прямого метода граничных элементов относительно искомым функций $A_m(r)$ и $\partial A_m(r)/\partial n$, где $\vec{n}(r)$ – внешняя нормаль к S_m , а также искомым величин Φ_m , имеют вид

$$\pi A_m(r_0) + \sum_{l=0}^N \int_{\Gamma_l} \left(A_l(r) \frac{\partial G(r, r_0)}{\partial n} - \frac{1}{\mu_l} \frac{\partial A_l(r)}{\partial n} G(r, r_0) \right) dl_r = 0, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \pi A_m(r_0) - \int_{\Gamma_m} \left(A_m(r) \frac{\partial M_m(r, r_0)}{\partial n} - \frac{\partial A_m(r)}{\partial n} M_m(r, r_0) \right) dl_r + \\ + \left(\pi - \int_{\Gamma_m} \frac{\partial M_m(r, r_0)}{\partial n} dl_r \right) \Phi_m = 0, \quad r_0 \in \Gamma_m, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\int_{\Gamma_m} \frac{1}{\mu_m} \frac{\partial A_m(r)}{\partial n} dl_r = \mu_0 I_m, \quad m = \overline{0, N}, \quad (19)$$

$$G(r, r_0) = \ln \frac{1}{|r - r_0|}, \quad M_m(r, r_0) = -\frac{j\pi}{2} H_0^{(2)}(\alpha_m |r - r_0|), \quad (20)$$

где r_0 – точка на Γ_m , отличная от угловой.

В этих уравнениях $G(r, r_0)$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа (7), $M_m(r, r_0)$ – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца (6) ($\text{Im}(\alpha_m) < 0$).

Для сверхпроводника при $\omega = 0$ имеем $M_m(r, r_0) = K_0(|r - r_0|/\lambda)$, где $K_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Уравнение (17) является третьей формулой Грина для неограниченной области (см. [22]), в которой учтено условие (11), следующее из баланса полных токов (10), а также равенства (8).

Уравнение (18) является третьей формулой Грина для сечения проводника S_m , записанной для функции $u(r) = A_m(r) - \Phi_m$ следующим образом:

$$\alpha(r_0)(A_m(r_0) - \Phi_m) - \int_{\Gamma_m} \left((A_m(r) - \Phi_m) \frac{\partial M_m(r, r_0)}{\partial n} - \frac{\partial A_m(r)}{\partial n} M_m(r, r_0) \right) ds_r = 0,$$

где $\alpha(r)$ ($r \in \Gamma_m$) – угол видимости кривой Γ_m из точки r .

Окончательно приходим к уравнениям (17)–(20), в которых заданы полные токи I_m , а величины Φ_m , наряду с функциями $A_m(r)$ и $\partial A_m(r)/\partial n$, на границах проводников Γ_m являются искомыми.

Задав $I_m = \delta_m^k$ ($m, k = \overline{1, N}$) и решив поставленную задачу (17)–(20), можно построчно вычислить матрицу импедансов $\mathbf{Z} = \mathbf{R} + j\omega\mathbf{L}$.

6. Вычислительный метод для системы граничных интегральных уравнений.

В вычислительном алгоритме данной работы и программе граница каждого из проводников имеет следующую составную структуру:

$$\Gamma_k = \bigcup_{i=1}^{N_k} \gamma_i,$$

где каждая из элементарных кривых γ_i может быть отрезком прямой, дугой окружности, окружностью либо кривой второго порядка, проходящей через три заданные точки. Все эти элементарные кривые не имеют общих точек, кроме концов.

Далее, на каждой из кривых γ_i вводится сетка, которая может быть как равномерной, так и неравномерной, причём угловые точки, являющиеся концами γ_i , узлами сетки не являются. На этой сетке аппроксимируются уравнения (17)–(20) с помощью метода коллокации. Интегралы в соотношениях (19) для полного тока аппроксимируются с помощью квадратуры трапеций. Искомыми величинами являются функции $A_m(r)$ и $(\partial A_m(r)/\partial n)/\mu_m$ в узлах сетки, а также константы Φ_m .

Более подробно аппроксимация интегральных уравнений описана в статьях [7, 11]. В настоящей работе используется тот же подход.

Вычислительный метод приводит к системе линейных сеточных уравнений $\mathbf{K}u = f$, в правой части которой оказываются заданы полные токи I_m . Матрица \mathbf{K} не имеет специальной структуры, однако обладает некоторой разреженностью, которая может быть использована при численном решении. Структура этой разреженности хорошо известна и обусловлена тем, что векторный потенциал $A(r)$ в каждом проводнике не связан непосредственно с потенциалом в других проводниках. Все проводники в единую систему уравнений объединяет потенциал во вмещающей среде.

Основной целью вычислений является матрица импедансов, но также важной задачей является визуализация векторного потенциала и распределения тока. Для этого можно использовать известную программу Gnuplot [12]. Обычно эта программа используется для построения графиков, в том числе достаточно сложных [23]. В [24] показано как можно применить Gnuplot для визуализации конечно-элементных решений, использовав вычислительную сетку и правильную раскраску ячеек в зависимости от значений решения. В рассматриваемом в работе случае сетка в области решения не строится, что является преимуществом метода

граничных интегральных уравнений. Тем не менее можно достаточно просто построить визуализацию решения с помощью алгоритма `dgrid3d` интерполяции нерегулярно распределённых данных, реализованного в `Gnuplot`.

В методах граничных интегральных уравнений легко реализуется вычисление решения в заданной точке пространства. Векторный потенциал $A(x, y)$ в случае вакуума вычисляется по формуле

$$A(r_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^N \int_{\Gamma_l} \left(\frac{1}{\mu_l} \frac{\partial A_l(r)}{\partial n} G(r, r_0) - A_l(r) \frac{\partial G(r, r_0)}{\partial n} \right) dl_r. \quad (21)$$

Для каждого проводника справедливо представление

$$A_m(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_m} \left((A_m(r) - \Phi_m) \frac{\partial M_m(r, r_0)}{\partial n} - \frac{\partial A_m(r)}{\partial n} M_m(r, r_0) \right) dl_r + \Phi_m, \quad r_0 \in S_m. \quad (22)$$

Интегралы в формулах (21), (22) аппроксимируются численно, аналогично аппроксимации уравнений (17)–(20). С помощью этих выражений можно вычислить $A(r)$, $A_m(r)$ и $J_m(r)$ по формуле (12) на различных сетках, пропустив точки вблизи или на границах Γ_m . В этом случае ядра интегральных представлений решения (21), (22) не сингулярны и численно интегрируются с достаточной для визуализации точностью. Кроме того, при решении задачи вычисляются $A_m(r)$ в определённых точках Γ_m . Все эти величины со своими координатами образуют нерегулярно распределённые данные, по которым можно построить то или иное графическое представление результатов. Пример таких сеток в простом случае одного проводника в пространстве приведён на рис. 1.

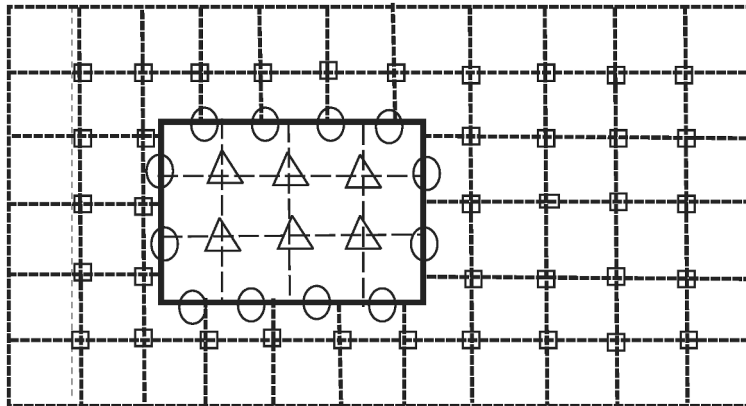


Рис. 1. Сетка с узлами трёх видов, используемых для визуализации. Узлы, отмеченные квадратами, используются для значений во вмещающей среде и вычисляются с помощью формулы (21). Значения, отмеченные кружками, вычисляются при решении граничных интегральных уравнений. Узлы, отмеченные треугольниками, содержат значения, вычисленные с помощью (22).

Таким образом, все данные, вычисленные на различных сетках, могут быть переданы и нарисованы программой `Gnuplot` с помощью алгоритма интерполяции нерегулярных данных.

Этот подход для визуализации полей применим для любого метода граничных интегральных уравнений.

Описанный вычислительный подход был реализован в C++ программе TLZ (Transmission Line Z), которая может быть скомпилирована для операционных систем Windows и Linux. Для работы с разреженными матрицами использовался пакет Eigen [25].

7. Результаты расчётов. Для проверки точности алгоритма и программы были проведены расчёты для нормальных проводников, имеющих коаксиальную структуру. В этом случае известно аналитическое решение, которое воспроизводилось программой с хорошей

точностью. Прочие результаты для нормальных проводников были опубликованы в [19] и получены несколько другим методом граничных интегральных уравнений, в котором условия $\Phi_m = \text{const}$ учитывались не вполне точно. Рассматривались два симметрично расположенных проводника с размерами сечений $[0, 2] \times [-0.6, -0.4]$ мм и $[0, 2] \times [0.4, 0.6]$ мм и с проводимостью 56 МСм/м. Результаты расчётов приведены в таблице.

Таблица. Значение параметров для двух широких тонких проводников с сечениями $[0, 2] \times [-0.6, -0.4]$ мм и $[0, 2] \times [0.4, 0.6]$ мм и с проводимостью 56 МСм/м

Частота, Гц	TLZ		Метод [20]	
	R , МОм/м	L , нГн/м	R , МОм/м	L , нГн/м
10^3	89.1	357	87.6	357.1
10^6	181.7	335	175.3	333.9
10^9	5688	311	5790	310

Хотя были использованы различные вычислительные методы и подбора сетки не производилось, результаты совпали с относительной точностью 3.6 % для сопротивлений R и менее 1 % для индуктивностей L .

8. Простая сверхпроводниковая структура. Рассмотрим известный пример (см. работы [4, 26]) структуры из двух сверхпроводящих прямоугольных проводников, нижний из которых несет возвратный ток (рис. 2). В [26] в одной из задач проводники имеют размеры $[-4, 4] \times [0.2, 0.5]$ мкм (нижний) и $[-1.25, 1.25] \times [0.6775, 0.8975]$ мкм (верхний). Для верхнего проводника лондоновская глубина проникновения $\lambda = 0.137$ мкм, для нижнего – 0.086 мкм. Результат измерения индуктивности в работе [26]: 0.1599 пГн/мкм, результат данной статьи – 0.1593 пГн при шаге дискретизации интегральных уравнений 0.25 мкм.

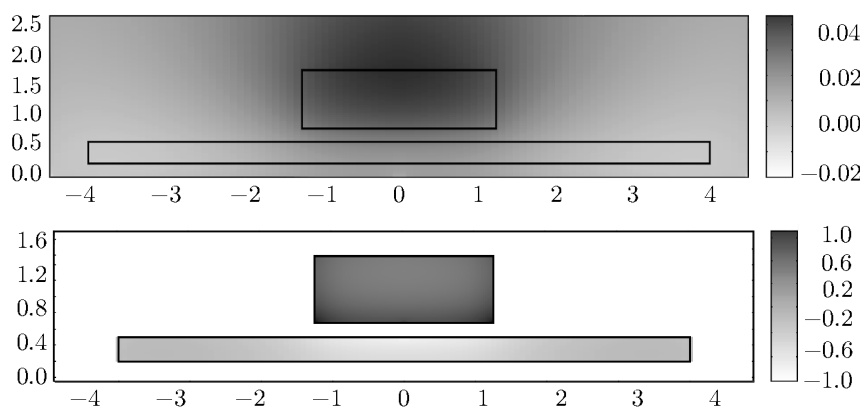


Рис. 2. Распределение действительной части z -компоненты векторного потенциала $A(r)$ (сверху) и тока (снизу) – чем темнее область, тем больше значение потенциала. Размеры представлены в мкм. Для визуализации использовалась программа Gnuplot с опцией dgrid3d (интерполяция нерегулярно распределённых данных).

В настоящей работе на рис. 2 представлена немного другая структура. Для лучшего представления скинирования тока толщина верхнего проводника была увеличена, так что по высоте проводник занимал область $[0.6775, 1.25]$, $\lambda = 0.15$ мкм. Результаты вычислений были экспортированы в файл и на рисунке представлена визуализация этих данных.

Для задачи рис. 2 шаг сетки дискретизации интегральных уравнений 0.025 мкм привёл к матрице размерности 1862×1862 . Заполненность этой плотной матрицы сеточных уравнений составила 57%. Стандартный алгоритм LU факторизации (метод Гаусса) с выбором ведущего элемента потребовал для нее 15.2 с. Затем та же матрица сеточных уравнений была представлена в компактном разреженном формате, переупорядочена и факторизована с помощью пакета Eigen [25]. Операция разреженной факторизации длилась 1.7 с. Таким образом,

для сеточных уравнений прямого метода граничных элементов с помощью аппарата разреженных матриц можно добиться значительного ускорения решения.

Заключение. В данной работе представлена постановка задачи для векторного потенциала в протяжённых линиях передачи, состоящих из проводников с комплексной проводимостью, в частности, сверхпроводников. Особенностью предложенного метода решения задачи является использование интегро-дифференциальных уравнений для векторного потенциала, содержащих величины типа интегральных погонных потоков, с помощью которых легко вычисляется матрица погонных импедансов.

Показано как свести поставленную задачу к граничным интегральным уравнениям по границе проводящих структур и ускорить численное решение этих интегральных уравнений, используя их определённую разреженность.

Простая визуализация решения методом граничных элементов получена с помощью программы Gnuplot с опцией dgrid3d.

В дальнейшем планируется усовершенствовать алгоритм для случая составных проводников и неоднородной вмещающей среды.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-12-00130).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Krylov G., Kawa J., Friedman E.G. Design automation of superconductive digital circuits: a review // IEEE Nanotechnology Magazine. 2021. V. 15. № 6. P. 54–67.
2. Tolpygo S.K. Advanced fabrication processes for superconductor electronics: current status and new developments // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. 2019. V. 29. № 5. P. 1–13.
3. Oates D.E., Tolpygo S.K., Bolkhovskiy V. Submicron Nb microwave transmission lines and components for single-flux-quantum and analog large-scale superconducting integrated circuits // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. 2017. V. 27. № 4. P. 1–5.
4. Tolpygo S.K., Golden E.B., Weir T., Bolkhovskiy V. Inductance of superconductor integrated circuit features with sizes down to 120 nm // Superconductor Science and Technology. V. 34. P. 085005.
5. Roux P.L., Jackman K., Delpont J.A., Fourie C.J. Modeling of superconducting passive transmission lines // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. 2019. V. 29. № 5. P. 1–5.
6. Alsop L.E., Goodman A.S., Gustavson F.G., Miranker W.L. A numerical solution of a model for a superconductor field problem // J. of Comput. Phys. 1979. V. 31. № 2. P. 216–239.
7. Хапаев М.М. Метод граничных интегральных уравнений для одной модели электрического тока в сверхпроводниках // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1998. Т. 38. № 1. С. 115–121.
8. Sheen D.M., Ali S.M., Oates D.E., Withers R.S., Kong J.A. Current distribution, resistance, and inductance for superconducting strip transmission lines // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. 1991. V. 1. № 2. P. 108–115.
9. Tsuk M.J., Kong J.A. A hybrid method for the calculation of the resistance and inductance of transmission lines with arbitrary cross sections // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 1991. V. 39. № 8. P. 1338–1347.
10. Ruey-Beei Wu, Jin-Chum Yang. Boundary integral equation formulation of skin effect problems in multiconductor transmission lines // IEEE Trans. on Magn. 1989. V. 25. № 4. P. 3013–3015.
11. Хапаев М.М. Extraction of inductances of a multi-superconductor transmission line // Supercond. Sci. Technol. 1996. V. 9. P. 729.
12. <http://www.gnuplot.info> (дата доступа 16.03.2022).
13. Orlando T.P., Delin K.A. Foundations of Applied Superconductivity. Austin, 1991.
14. Zimmermann W., Brandt E., Bauer M., Seider E., Genzel L. Optical conductivity of BCS superconductors with arbitrary purity // Physica C: Superconductivity. 1991. V. 183. № 1–3. P. 99–104.
15. Plaza G., Marques R., Medina F. Quasi-TM MoL/MoM approach for computing the transmission-line parameters of lossy lines // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2006. V. 54. № 1. P. 198–209.
16. Menshov A., Okhmatovski V. Novel surface integral equation formulation for accurate broadband RL extraction in transmission lines of arbitrary cross-section // IEEE/MTT-S Int. Microwave Symposium Digest. 2012. P. 1–3.

17. *Coperich K.M., Morsey J., Okhmatovski V.I., Cangellaris A.C., Ruehli A.E.* Systematic development of transmission-line models for interconnects with frequency-dependent losses // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2001. V. 49. № 10. P. 1677–1685.
18. *Patel U.R., Triverio P.* Skin effect modeling in conductors of arbitrary shape through a surface admittance operator and the contour integral method // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2016. V. 64. № 9. P. 2708–2717.
19. *Djordjevic A.R., Sarkar T.K., Rao S.M.* Analysis of Finite Conductivity Cylindrical Conductors Excited by Axially-Independent TM Electromagnetic Field // IEEE Trans. Microwave Theory and Techn. 1985. V. 33. P. 960–966.
20. *Konrad A.* Integrodifferential finite element formulation of twodimensional steady-state skin effect problems // IEEE Trans. on Magn. 1985. V. 18. P. 284–292.
21. *Herbst H.F., Roux P.L., Jackman K., Fourie C.J.* Improved transmission line parameter calculation through tcad process modeling for superconductor integrated circuit interconnects // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. 2020. V. 30. № 7. P. 1–4.
22. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. М., 1970.
23. <http://www.gnuplotting.org> (дата доступа 16.03.2022).
24. *Glanzel J., Unger R.* High quality FEM-postprocessing and visualization using a gnuplot based toolchain // Chemnitz Scientific Computing Preprints. 2014.
25. <http://eigen.tuxfamily.org> (дата доступа 16.03.2022).
26. *Chang W.H.* The inductance of a superconducting strip transmission line // J. of Appl. Phys. 1979. V. 50. № 12. P. 8129–8134.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Научно-исследовательский институт ядерной физики
имени Д.В. Скобельцына (НИИЯФ МГУ), г. Москва

Поступила в редакцию 05.03.2022 г.
После доработки 26.04.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.

О СЕМИНАРЕ ПО ПРОБЛЕМАМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ ПРИ МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ им. М.В. ЛОМОНОСОВА*)

Ниже публикуются краткие аннотации докладов, состоявшихся в весеннем семестре 2022 г. (предыдущее сообщение о работе семинара дано в журнале “Дифференц. уравнения”. 2022. Т. 58. № 2; за дополнительной информацией обращаться по адресу: nds@cs.msu.su**) .

DOI: 10.31857/S0374064122080155, EDN: CHILHW

А. С. Фурсов, П. А. Крылов (МГУ ВМК, Москва, Россия) “Об устойчивости переключаемой аффинной системы для некоторого класса переключающих сигналов” (14.02.2022).

В настоящее время теория кусочно-линейных систем является динамично развивающимся направлением в рамках современной теории автоматического управления. И, в первую очередь, это объясняется эффективностью использования таких систем для аппроксимации нелинейных аффинных систем управления [1]. Алгоритмы управления, разработанные для кусочно-линейных аппроксимаций, позволяют успешно применять их и для исходных нелинейных систем [2, с. 97; 3]. Если для нелинейной системы рассматривается некоторое семейство аппроксимирующих кусочно-линейных систем, то такое семейство фактически представляет собой переключаемую аффинную систему с заданным множеством переключающих сигналов. Исследование свойств таких систем, в частности, устойчивости, является одной из актуальных задач в рамках современной теории стабилизации динамических систем.

Прежде чем перейти к постановке задачи, введём некоторые необходимые понятия. Рассмотрим разбиение евклидова пространства \mathbb{R}^n на m замкнутых выпуклых многогранников \overline{M}_i ($i = \overline{1, m}$). При этом считаем, что $0 \in M_1$ (через M_i обозначаем множество внутренних точек многогранника \overline{M}_i). Так как пара выпуклых многогранников, не имеющих общих внутренних точек, может иметь не более одной общей грани, то в описанном разбиении каждый многогранник имеет не более $m - 1$ граней. Обозначим через P_{ij} ($i \neq j$) плоскость, разделяющую соприкасающиеся многогранники \overline{M}_i и \overline{M}_j . Тогда $P_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle n_{ij}, x \rangle = d_{ij}\}$, где n_{ij} – нормаль к плоскости P_{ij} , направленная в сторону многогранника \overline{M}_j , $d_{ij} \in \mathbb{R}$. Для определённости будем полагать, что $n_{ij} = 0$, $d_{ij} = 1$, если многогранники \overline{M}_i и \overline{M}_j не пересекаются. Таким образом, $\overline{M}_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle n_{ij}, x \rangle \leq d_{ij}, j = \overline{1, m}\}$. Определим общую для многогранников \overline{M}_i , \overline{M}_j грань $\overline{\Gamma}_{ij}$ и её внутренность Γ_{ij} следующим образом: $\overline{\Gamma}_{ij} = \overline{M}_i \cap \overline{M}_j$, $\Gamma_{ij} = \overline{\Gamma}_{ij} \setminus \bigcup_{k \neq i, j} \overline{M}_k$. Пусть $\Gamma(Z, D) = \bigcup_{i, j} \overline{\Gamma}_{ij}$. Обозначим через $Z = [n_{ij}]_{i, j=1}^n$ массив размера $m \times m$, состоящий из векторов $n_{ij} \in \mathbb{R}^n$, через $D = (d_{ij})$ – матрицу из $\mathbb{R}^{m \times m}$ (при этом для удобства полагаем, что $n_{ii} = 0$, $d_{ii} = 1$) и, наконец, через F – множество всевозможных пар (Z, D) , задающих различные разбиения пространства \mathbb{R}^n на m выпуклых многогранников.

Теперь рассмотрим переключаемую скалярную по входу аффинную систему

$$\dot{x} = A_\sigma x + v_\sigma + b_\sigma u, \quad \sigma \in S(F), \quad (1)$$

где $\sigma(x; Z, D) : \mathbb{R}^n \rightarrow I = \{1, \dots, m\}$ – кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал), принимающая постоянное значение i на каждом открытом выпуклом многограннике M_i ,

*) Семинар основан академиками РАН С.В. Емельяновым и С.К. Коровиным.

**) Составитель хроники А.В. Ильин.

задаваемом парой (Z, D) ; $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $u \in \mathbb{R}$ – управляющий вход; $A_\sigma = A \circ \sigma$ – композиция отображения $A : I \rightarrow \{A_1, \dots, A_m\}$ и переключающего сигнала σ ; $b_\sigma = b \circ \sigma$ и $v_\sigma = v \circ \sigma$ – аналогичные композиции для отображений $b : I \rightarrow \{b_1, \dots, b_m\}$, $v : I \rightarrow \{v_1, \dots, v_m\}$, причём считаем, что $v_1 = 0$.

Значение функции $\sigma(x; Z, D)$ в каждой точке x определяет активный режим (подсистему) функционирования (A_i, b_i, v_i) переключаемой системы (1), описываемый аффинной системой

$$\dot{x} = A_i x + v_i + b_i u.$$

Замкнём систему (1) обратной связью $u = -kx$:

$$\dot{x} = A_\sigma x + v_\sigma - b_\sigma kx, \quad \sigma \in S(F). \quad (2)$$

Рассматриваемую обратную связь будем считать допустимой, если в каждой точке общей границы любых двух соприкасающихся многогранников существует единственный способ выбрать режим i (соответствующий одному из этих многогранников) таким образом, чтобы векторное поле выбранного режима в данной точке было направлено строго внутрь соответствующего многогранника \overline{M}_i . Указанное ограничение на допустимые управления позволяет доопределить переключающий сигнал $\sigma(x; Z, D)$ (положив его равным i) на гиперплоскостях переключения таким образом, что решение системы (2) существует и единственно для любых начальных условий.

Будем говорить, что нулевое решение системы (2) глобально равномерно устойчиво, если для любого $\sigma \in S(F)$ нулевое решение соответствующей системы глобально асимптотически устойчиво.

Постановка задачи. Исследуем нулевое решение замкнутой системы (2) на глобальную равномерную устойчивость.

Сопоставим системе (2) множество ориентированных графов $G(\sigma)$, вершинами каждого из которых (для данного σ) являются номера режимов этой системы, а наличие ребра $i \rightarrow j$ будет означать существование траектории соответствующей системы (для данного σ), при движении вдоль которой режим i сменяется режимом j .

Теорема. Пусть матрицы $(A_i - b_i k)$ ($i = \overline{1, m}$) не имеют чисто мнимых собственных значений и при всех $\sigma \in S(F)$ соответствующий ориентированный граф $G(\sigma)$ является слабо-связным и не содержит циклов. Пусть подсистема системы (2) с индексом единица устойчива, а для остальных режимов ($i = \overline{2, m}$) и для любого $\sigma \in S(F)$ выполнены следующие условия:

1) либо матрица $(A_i - b_i k)$ устойчива, либо область функционирования режима i (многогранник M_i) ограничена;

2) $x_0^i \notin \Gamma(Z, D)$, где $x_0^i \equiv (A_i - b_i k)^{-1} v_i$ – стационарное решение аффинной системы, являющейся i -м режимом переключаемой системы (2);

3) $\sigma(x_0^i; Z, D) \neq i$.

Тогда нулевое решение системы (2) глобально равномерно устойчиво.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00162) и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение № 075-15-2022-284).

Литература. 1. Rewinski M., White J. Model order reduction for nonlinear dynamical systems based on trajectory piecewise-linear approximations // Linear Algebra and its Appl. 2006. V. 415. P. 426–454. 2. Johansson M. Piecewise Linear Control System. Berlin; Heidelberg, 2003. 3. Rodrigues L., How J. Synthesis of piecewise-affine controllers for stabilization of nonlinear systems // Proc. of the IEEE Conf. on Decision and Control. January, 2004. V. 3. P. 2071–2076.

В. В. Фомичев, Н. И. Денисова (МГУ ВМК, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия) “Подходы к построению наблюдателей для нестационарных систем при внешних возмущениях” (14.03.2022).

В современной теории управления хорошо известны подходы для построения наблюдателей как для линейных стационарных систем [1], так и для нестационарных [2–4].

Куда интереснее обстоит вопрос о синтезе наблюдателей для систем с возмущениями. Для нестационарного случая задача ещё недостаточно изучена.

В данной работе была предпринята попытка перенести некоторые результаты, полученные для линейных стационарных систем с возмущением, на нестационарный случай. Итак, имеем систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + Df, \quad y = C(t)x,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^k$, $f \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^l$; известные матрицы $A(t)$, $C(t)$, $D(t)$ имеют соответствующие порядки, непрерывны, а при необходимости – достаточно гладкие по переменной t ; возмущение f мажорируется известной константой.

Так как влияние известного управления всегда можно компенсировать в наблюдателе, то далее для упрощения дальнейших выкладок будем полагать, что $u \equiv 0$.

Требуется по информации об известном выходе $y(t)$ построить асимптотическую оценку $\tilde{x}(t)$ вектора состояния $x(t)$.

Рассматривается гипервыходная система, т.е. система при условии $l > m$, когда число известных выходов больше числа неизвестных входов. Кроме того, будем предполагать, что $\text{rank}(C(t)D) = m$, $\text{rank} D = m$ и $\text{rank} C(t) = l$ (подразумевается равномерная полнота ранга, т.е. в указанных матрицах можно выделить миноры максимального порядка, невырожденные при всех $t > 0$). Более того, считаем что условие “равномерно по выходам”. Это означает, что путём перенумерации можно разделить выход:

$$y = \begin{pmatrix} C' \\ C'' \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix}, \quad \det(C'(t)D(t)) \neq 0 \quad \text{для любого } t.$$

Применяя сначала стационарное преобразование координат произвольной стационарной матрицей F такой, что $FD = 0$ и

$$T = \begin{pmatrix} F \\ C' \end{pmatrix} : \det(T) \neq 0 \quad \text{при всех } t, \quad Tx = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = T'x' + T''y',$$

получаем систему

$$\dot{x}' = A_{11}(t)x' + A_{12}(t)y', \quad \dot{y}' = A_{21}(t)x' + A_{22}(t)y' + C'(t)Df.$$

Рассмотрим “запасные” выходы, которые после преобразований принимают вид

$$y'' = C''(t)x' = C''(t)T'(t)x' + C''(t)T''(t)y' \Rightarrow \tilde{y} = C''(t)T'(t)x' = y'' - C''(t)T''(t)y'.$$

Переобозначив $\tilde{C}(t) = C''(t)T'(t)$, получаем полностью определённую систему

$$\dot{\tilde{x}}' = A_{11}(t)\tilde{x}' + A_{12}(t)y', \quad \tilde{y} = \tilde{C}(t)\tilde{x}',$$

для которой в случае наблюдаемости пары $\{A_{11}(t), \tilde{C}(t)\}$ можно строить асимптотический наблюдатель.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение № 075-15-2022-284).

Литература. 1. Fomichev V.V., Vysotskii A.O. Algorithm for designing a cascade asymptotic observer for a system of maximal relative order // Differ. Equat. 2019. V. 67. № 3. P. 553–560. 2. Куок Дат Во, Бобцов А.А. Адаптивный наблюдатель переменных состояния линейных нестационарных систем с параметрами, заданными не точно // Автоматика и телемеханика. 2020. Т. 12. С. 100–110. 3. Гайшун И.В. Об асимптотическом оценивании состояний линейных нестационарных систем со скалярным выходом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12. № 2. С. 45–51. 4. Андриевский Б.Р., Фургат И.Б. Наблюдатели возмущений: методы и приложения. Ч. 1. Методы // Автоматика и телемеханика. 2020. Т. 9. С. 3–61.

А. К. Деменчук (ИМ НАН Беларуси, Минск) “Управление асинхронным спектром линейных периодических систем с вырожденным блоком усреднения матрицы коэффициентов” (16.05.2022).

Будем рассматривать линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

в которой $A(t)$ – непрерывная ω -периодическая $n \times n$ -матрица, B – постоянная $n \times r$ -матрица ($r \leq n$), $u(t)$ – управление. Вопросы управляемости линейных систем изучались во многих работах (см., например [1]), при этом в периодическом случае, как правило, множества частот решения и самой системы предполагались совпадающими.

Вместе с тем, как показали Х. Массера [2], Я. Курцвейль и О. Вейвода [3], и др., система обыкновенных дифференциальных периодических (почти периодических) уравнений может допускать решения, пересечение частотного модуля которых с модулем частот системы тривиально. Такого рода решения позднее были названы *сильно нерегулярными*, их частотный спектр – *асинхронным*, а описываемые ими колебания – *асинхронными*. Отметим, что случае периодических систем нерегулярность означает несоизмеримость периодов решения и системы.

Задача синтеза периодических дифференциальных систем, обладающих сильно нерегулярными решениями, была сформулирована в работе [4] как *задача управления асинхронным спектром*. В монографии [5, гл. III] исследована разрешимость такой задачи для некоторых классов линейных периодических систем с линейной по фазовым переменным периодической обратной связью.

В дальнейшем в качестве управляющего воздействия $u(\cdot)$ в системе (1) будем использовать непрерывные на вещественной оси периодические r -вектор-функции, множество показателей Фурье которых содержится в модуле частот матрицы коэффициентов $A(t)$. Тогда применительно к системе (1) задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L состоит в следующем: выбрать такое программное управление $u(t)$ из указанного допустимого множества, чтобы система (1) имела сильно нерегулярное периодическое решение с заданным спектром частот L (целевым множеством).

Вопросы разрешимости сформулированной задачи для системы (1) с программным управлением и нулевым средним значением матрицы коэффициентов исследованы в статье [6]. В настоящем докладе приведём решение задачи управления асинхронным спектром для системы (1), среднее значение матрицы коэффициентов которой имеет вырожденный ненулевой левый верхний диагональный блок, а остальные её блоки являются нулевыми.

Пусть $P = (p_{ij})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, – некоторая матрица и $1 \leq k_1 < \dots < k_s \leq n$, $1 \leq l_1 < \dots < l_q \leq m$ – две упорядоченные последовательности натуральных чисел. Через $P_{k_1 \dots k_s}^{l_1 \dots l_q}$ обозначим $s \times q$ -матрицу, образованную из элементов матрицы P , стоящих на пересечении строк с номерами k_1, \dots, k_s и столбцов с номерами l_1, \dots, l_q .

Для непрерывной на всей числовой оси ω -периодической вещественнозначной матрицы $F(t)$ определим её среднее значение $\hat{F} = \omega^{-1} \int_0^\omega F(t) dt$ и осциллирующую часть $\tilde{F}(t) = F(t) - \hat{F}$. Через $\text{rank}_{\text{col}} F$ обозначим столбцовый ранг матрицы $F(t)$, т.е. наибольшее число её линейно независимых столбцов. Подобным образом можно определить и строчный ранг матрицы. Отметим, что в общем случае строчный и столбцовый ранги матрицы $F(t)$ не обязаны совпадать.

Далее считаем, что ранг постоянной матрицы B при управлении не является максимальным и строки с номерами k_1, \dots, k_d , $1 \leq k_1 < \dots < k_d \leq n$ – нулевые:

$$\text{rank } B = r_1 < r, \quad B_{k_1 \dots k_d}^{1 \dots r} = 0 \quad (d = n - r_1). \quad (2)$$

Последнее ограничение не является потерей общности рассуждений, так как этого можно добиться с помощью линейного неособенного преобразования системы (1), используя алгоритмы элементарных преобразований строк матрицы.

Будем также предполагать, что среднее значение матрицы коэффициентов в результате перестановки её строк и столбцов представимо в виде

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_{k_1 \dots k_d}^{k_1 \dots k_d} & \hat{A}_{k_1 \dots k_d, k_{d+1} \dots k_n}^{k_{d+1} \dots k_n} \\ \hat{A}_{k_{d+1} \dots k_n, k_1 \dots k_d}^{k_1 \dots k_d} & \hat{A}_{k_{d+1} \dots k_n}^{k_{d+1} \dots k_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}_{k_1 \dots k_d}^{k_1 \dots k_d} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_{k_1 \dots k_d}^{k_1 \dots k_d} = \text{diag}(\hat{a}_{k_1 k_1}, \dots, \hat{a}_{k_d k_d}), \quad (3)$$

причём $\hat{a}_{k_1 k_1} \cdots \hat{a}_{k_d k_d} = 0$. Последнее условие означает, что среди диагональных элементов блока $\hat{A}_{k_1 \dots k_d}^{k_1 \dots k_d}$ имеются нулевые. Для определённости можно считать, что они расположены

$$\hat{a}_{k_{1+i-1} k_{1+i-1}} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad 1 \leq m < d, \quad (4)$$

а остальные элементы ненулевые. В противном случае этого можно добиться с помощью линейного невырожденного преобразования системы (1), равносильного перестановке первых d её уравнений в требуемом порядке.

Пусть k_{d+1}, \dots, k_n , $1 \leq k_{d+1} < \dots < k_n \leq n$ – номера ненулевых строк матрицы B . С учётом нумерации нулевых и ненулевых строк этой матрицы для упрощения записи введём следующие обозначения: $A_{11}(t) = A_{k_1 \dots k_d}^{k_1 \dots k_d}(t)$, $A_{12}(t) = A_{k_1 \dots k_d, k_{d+1} \dots k_n}^{k_{d+1} \dots k_n}(t)$, $\tilde{A}_{11}^{(1)}(t)$ – $d \times m$ -матрица, составленная из первых m столбцов $d \times d$ -блока $A_{11}(t)$. Построим $d \times (m + r_1)$ -матрицу $\tilde{A}_*(t) = [\tilde{A}_{11}^{(1)}(t), A_{12}(t)]$.

Справедлива

Теорема. Для линейных систем (1)–(4) задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L разрешима тогда и только тогда, когда $L = \{0\}$ и выполняется неравенство $\text{rank}_{\text{col}} \tilde{A}_*(t) < r_1 + m$.

Литература. 1. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М., 1975. 2. Massera J.L. Observaciones sobre las soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales // Bol. de la Facultad de Ingenieria. 1950. V. 4. № 1. P. 37–45. 3. Курцвейль Я., Вейвода О. О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Чехосл. мат. журн. 1955. Т. 5. № 3. С. 362–370. 4. Деменчук А.К. Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53. № 4. С. 37–42. 5. Деменчук А.К. Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Saarbrücken, 2012. 6. Деменчук А.К. Управление асинхронным спектром линейных систем с нулевым средним значением матрицы коэффициентов // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2018. Т. 26. № 1. С. 31–34.