Российская Академия Наук

Автоматика и Телемеханика

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

11

ноябрь

Москва

2020

Учредители журнала:
Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
Тел./факс: (495) 334-87-70
Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва
ООО «ИКЦ «АКАДЕМКНИГА»

Тематический выпуск

В.С. Пугачев
(25.03.1911—25.03.1998)

© 2020 г. А.И. КИБЗУН, д-р физ.-мат. наук (kibzun@mail.ru)
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)),
И.Н. СИНИЦЫН, д-р техн. наук (sinitsin@dol.ru)
(Федеральное государственное учреждение
"Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление"
Российской академии наук" (ФИЦ ИУ РАН), Москва)

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ОПТИМИЗАЦИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

Приводится обзор статей, посвященных современным проблемам теории оптимизации стохастических систем. В частности, в ряде статей исследуются задачи оптимального управления стохастическими системами. В другой группе статей рассматриваются задачи фильтрации и идентификации. Кроме того, изучаются задачи стохастического программирования для статических стохастических систем.

Ключевые слова: стохастические задачи, стохастическое оптимальное управление, теория фильтрации, теория идентификации, стохастическое программирование.

DOI: 10.31857/S000523102011001X

[1] Работа Кибзуна А.И. выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-07-00617 А).

1. Введение

Данный номер посвящен 110-летию со дня рождения (25 марта 1911 г.) академика В.С. Пугачева, являющегося выдающимся ученым, основоположником статистической теории управляемых систем, автором фундаментальных работ в области авиационной баллистики и динамики полета, теории управления и информатики, теории дифференциальных уравнений и теории вероятностей.

В номер включены статьи известных российских ученых, работающих в области оптимизации стохастических систем. Все авторы хорошо знали академика В.С. Пугачева, являясь его коллегами, учениками или учениками учеников.

Статьи отражают современное состояние теории оптимизации стохастических систем. В частности, в этих работах большое внимание уделяется постановкам, в которых присутствуют одновременно случайные и неопределенные факторы. В номере представлены как чисто теоретические работы, так и прикладные исследования, направленные на разработку вычислительных алгоритмов решения поставленных стохастических задач. В частности, исследуются задачи фильтрации и идентификации, задачи оптимального управления стохастическими динамическими системами, задачи стохастического программирования и задачи анализа стохастических систем.

2. Обзор полученных результатов

Рассмотрим основные результаты, полученные в представленных публикациях.

В рамках теории оптимального управления получены следующие результаты.

В [1] рассматривается задача оптимального управления дискретной стохастической системой с критерием в форме вероятности первого достижения границ заданной области. Формулируются и доказываются достаточные условия оптимальности в форме метода динамического программирования. С помощью поверхностей уровней 1 и 0 функции Беллмана находятся двусторонние оценки функции оптимального значения вероятностного критерия, и предлагается способ построения субоптимального управления. Формулируются условия эквивалентности с задачей оптимального управления с вероятностным терминальным критерием. Рассматривается пример.

В [2] рассматривается задача оптимального в среднем управления линейной гибридной системой, непрерывное движение которой чередуется с дискретными изменениями (переключениями) со сменой пространства состояний. Начальное состояние системы случайное. Качество управления характеризуется средним значением квадратичного функционала качества управления отдельной траекторией. Моменты переключений и их количество заранее не заданы. Они определяются в результате минимизации среднего значения функционала качества управления. Последняя задача минимизации конечномерная и может быть решена многими методами. Для рассматриваемой задачи классический принцип разделения не выполняется. Принцип разделения позволяет свести задачу оптимального в среднем управления детерминированной системой со случайным начальным состоянием к совокупности двух задач — оптимального управления одной траекторией и оптимального наблюдения. Решением задачи наблюдения служит оценка начального состояния, например его математическое ожидание. Эта оценка используется в оптимальном позиционном управлении, полученном при решении задачи управления одной траекторией. Обоснованием такого подхода для линейно-квадратичных задач (ЛКЗ) управления гибридной системой переменной размерности (ГСПР) служит доказанный в статье так называемый условный принцип разделения. По сравнению с обычным принципом разделения, справедливым для ЛКЗ оптимального в среднем управления непрерывными, дискретными и непрерывно-дискретными системами, условный принцип разделения сложнее с вычислительной точки зрения. Для его применения нужно вычислить и запомнить моментные функции цены, которые зависят от нарастающего количества моментов переключений. Это существенно повышает требования к вычислительным ресурсам, необходимым для численного решения задачи. Если количество допустимых переключений небольшое из-за технических ограничений, то решение задачи упрощается. Условный принцип разделения можно применять и для нелинейных ГСПР. Поскольку принцип разделения для нелинейных систем не выполняется, получаемое управление не будет оптимальным в среднем. Однако на практике это субоптимальное управление часто оказывается вполне приемлемым. Приводятся примеры применения условного и классического принципов разделения.

В [3] рассматриваются дискретные линейные системы с переключениями в повторяющемся режиме. Системы находятся под действием случайных внешних возмущений, и в измерениях присутствуют аддитивные шумы. Предлагаются два метода синтеза управления с итеративным обучением. Оба метода основаны на построении вспомогательной 2D-модели в форме дискретного повторяющегося процесса. Первый метод основан на установлении условий диссипативности указанной модели при специальном выборе функций запаса и накопления. Такой выбор позволяет затем найти управление, в общем случае нелинейное, которое гарантирует сходимость процесса обучения. Второй метод использует линейный закон коррекции управления с итеративным обучением заданного вида, при этом сходимость процесса обучения гарантируется условиями устойчивости вспомогательной 2D-модели. Оба предложенных закона управления используют в своей структуре стационарный фильтр Калмана. Для получения условий устойчивости используется дивергентный метод векторных функций Ляпунова. Приводится пример, демонстрирующий возможности и особенности нового метода. Приведенный пример показывает, что когда переключения наблюдаемы, управление с переключением позволяет ускорить сходимость процесса обучения. Дальнейшего исследования требует вопрос выбора некоторой нелинейной функции в методе синтеза на основе диссипативности. Открытым остался вопрос о влиянии динамики фильтра Калмана на скорость сходимости процесса обучения и точность. Значительный интерес представляют сетевые задачи управления с итеративным обучением, где переключения являются естественной моделью изменений информационной структуры сети. Комбинация управления с итеративным обучением и управления с обратной связью также представляет интересную задачу для дальнейших исследований.

В [4] сформулированы и доказаны достаточные условия терминальной инвариантности нелинейных динамических стохастических управляемых систем диффузионно-скачкообразного типа. Скачкообразная компонента имеет вид интеграла по случайной мере Пуассона. Предполагается, что параметры меры (интенсивность и распределение величин скачков) меняются со временем. Предлагаются как условия инвариантности по возмущениям при заданной начальной точке, так и условия абсолютной инвариантности, обеспечивающие постоянство значения терминального критерия при любых начальных данных. Применимость результатов продемонстрирована на ряде модельных примеров, включающих в себя результаты численного моделирования и аналитическое исследование построенных терминально инвариантных динамических систем. Теоретические исследования инвариантных по терминальному критерию систем далеки от завершения. Полученные в [4] общие достаточные условия инвариантности нелинейных стохастических систем в ряде частных случаев приобретают весьма интересные и неочевидные свойства. Однозначно подлежат внимательному исследованию линейные системы, а также системы с линейными по состоянию коэффициентами как в непрерывном случае, так и при наличии скачков, для которых условия в общем виде могут быть доведены до простых регулярных выражений. Еще больше предстоит сделать в практическом плане. Многие математические модели реальных физических процессов в настоящее время содержат случайные параметры, достаточно часто имеющие вид диффузионных или скачкообразных компонент стохастического уравнения. Условия терминальной инвариантности позволяют не приближенно, а точно решать на основе таких моделей множество актуальных прикладных проблем управления. Достаточно сказать, что некоторые модели, рассмотренные ранее, могут быть уточнены за счет введения параметров, учитывающих случайные внешние воздействия. Авторы [4] надеются охватить по крайней мере часть из указанных вопросов в своих дальнейших исследованиях.

В [5] было предложено новое позиционное управление, приближенное к оптимальному в многошаговой задаче портфельной оптимизации с вероятностным критерием. Критерием оптимальности выступает вероятность достижения и превышения капитала инвестора в терминальный момент времени некоторого заранее заданного уровня. Соотношения, на основании которых построено предлагаемое управление, получены с применением формулы полной вероятности и формирования управления в классе кусочно-постоянных управлений. На каждом шаге предлагаемое управление получается исходя из решения ряда задач одномерной условной нелинейной оптимизации. В рассмотренном примере продемонстрировано преимущество предлагаемого управления над известными универсальными управлениями. Рассмотренный подход и предлагаемое управление можно обобщить на случай произвольного количества рисковых активов на каждом шаге, не находя при поиске вероятностной стратегии на каждом шаге детерминированный эквивалент, как в [5], а, например, используя дискретизацию вероятностной меры, что является предметом дальнейших исследований, как и исследование статистических свойств предлагаемого управления.

В теории фильтрации и идентификации получены следующие результаты.

В [6] на примере решенной задачи оптимизации линейного выхода нелинейной дифференциальной системы по квадратичному критерию обсуждаются практические варианты решения аналогичной задачи для случая неполной информации о состоянии. На основе концепции разделения задач управления и фильтрации предложено два варианта субоптимального управления: путем формального разделения задач и на основании альтернативного представления переменной состояния, использующего метод условно-оптимальной фильтрации состояний стохастических дифференциальных систем наблюдения В.С. Пугачева. Любой из предложенных вариантов потребует существенных усилий для численной реализации и значительных вычислительных ресурсов. Предлагается альтернатива традиционному практическому подходу к синтезу субоптимального управления в задаче с неполной информацией, состоящему в формальной замене в решении состояния на его оценку. Вместо задачи оптимизации выхода, порождаемого исходной моделью дифференциального уравнения, в качестве состояния используется оценка условно-оптимального фильтра. Предложен вариант численной реализации предлагаемого алгоритма на основе имитационного компьютерного моделирования. Практическая реализация описанных алгоритмов и апробация их для оптимизации функционирования программных систем хотя бы в рамках модельных экспериментов — ближайшая перспектива.

В [7] предлагается новый подход для решения задачи фильтрации в линейных системах по неполным измерениям, где характеристики динамического шума точно неизвестны, а в измерениях могут присутствовать аномальные негауссовские ошибки. В основе предлагаемого алгоритма лежит идея совместного использования адаптивного фильтра Калмана и обобщенного метода наименьших модулей. На примерах численного моделирования показано, что в сравнении с классическим методом оптимальной линейной фильтрации решение обладает меньшей чувствительностью к кратковременным выбросам в измерениях и обеспечивает быструю настройку параметров динамики системы. Разработан алгоритм робастной фильтрации, который обладает свойством отказоустойчивости по отношению к аномальным ошибкам в измерениях и адаптивными свойствами по отношению к модели динамического шума системы. Было проведено численное моделирование решения задачи сопровождения цели в линейной системе с двукратным резервированием измерений. Результаты моделирования показали, что робастный фильтр повышает эффективность оценки по сравнению с классическим фильтром Калмана, когда цель выполняет неучтенные в модели маневры. Одновременно с этим обеспечивается устойчивость оценки к систематическим ошибкам в одном из источников измерений, а также к симметричным помехам, распределенным по закону Коши. Разработанный алгоритм устойчив к импульсным помехам в более чем 30 % измерений. В другой ситуации, когда в модели не учитывается увеличение дисперсии нормального шума по всем измерениям, эффективность оценки робастного фильтра снижается. В случае когда ошибки по всем источникам измерений содержат смещенную составляющую, отказоустойчивость обеспечивается только условно: существует пороговое значение вероятности появления смещенной ошибки в измерениях, для которой эффективность оценки резко снижается. Разработанный алгоритм неустойчив к медленному увеличению математического ожидания ошибки в одном из источников измерений. Для компенсации указанных недостатков может потребоваться использование дополнительных источников измерений, что является предметом дальнейших исследований. Другим направлением является использование разработанного метода в нелинейных системах. Так как разработанный алгоритм относится к классу алгоритмов «прогноз–коррекция», для работы с нелинейными системами достаточно заменить шаги прогноза и коррекции на соответствующие процедуры, например метода псевдоизмерений или сигма-точечного фильтра. Разработан алгоритм робастной фильтрации, который обладает свойством отказоустойчивости по отношению к аномальным ошибкам в измерениях и адаптивными свойствами по отношению к модели динамического шума системы. В другой ситуации, когда в модели не учитывается увеличение дисперсии нормального шума по всем измерениям, эффективность оценки робастного фильтра снижается. В случае когда ошибки по всем источникам измерений содержат смещенную составляющую, отказоустойчивость обеспечивается только условно: существует пороговое значение вероятности появления смещенной ошибки в измерениях, для которой эффективность оценки резко снижается. Предлагаемый алгоритм может быть использован для решения навигационной задачи на борту летательных аппаратов или для решения задачи сопровождения цели.

В [8] рассматривается один из возможных способов решения задачи оценки неизвестных параметров динамических моделей, описываемых дифференциально-алгебраическими уравнениями. Оценка параметров производится по результатам наблюдений за поведением математической модели. Значения параметров находятся в результате минимизации критерия, описывающего суммарное квадратическое отклонение значений координат вектора состояния от полученных при измерениях точных значений в различные моменты времени. На значения параметров наложены ограничения параллелепипедного типа. Для решения задачи оптимизации предлагается пакетный метод адаптивного случайного поиска, использующий идеи алгоритмов машинного обучения и анализа больших данных. Предложенный метод применен при решении трех модельных задач, их результаты сравнивались с полученными при помощи градиентных методов оптимизации, используемых в процедурах машинного обучения, а также метаэвристическими алгоритмами. Приведены результаты сравнения эффективности его применения по сравнению с известными градиентными методами оптимизации в машинном обучении: SGD, Classical Momentum, NAG, AdaGrad, RMSProp, Adam, Adamax, Nadam на трех модельных примерах.

В [9] на основе вейвлет канонических разложений (ВЛКР) рассматриваются задачи синтеза линейных оптимальных в среднем квадратическом (с. к.) фильтров. Разработано вейвлет методическое и инструментальное программное обеспечение для с. к. оптимального синтеза существенно нестационарных линейных фильтров на основе вейвлет канонических разложений в среде MATLAB. Для стохастических систем в условиях стохастических одно-и многократных ударных воздействий, описываемых каноническими разложениями (КР) и ВЛКР, разработано специальное инструментальное обеспечение для оптимизации фильтров, оценки и идентификации ударных воздействий. Эти результаты нашли применение в задачах анализа и моделирования, оценки и идентификации ударных воздействий — в прецизионных информационно-управляющих системах. Рассматриваются сложные виброударные одно- и многомерные виброударные воздействия, представимые с помощью КР и ВЛКР. Приводится тестовый пример с результатами работы инструментального программного обеспечения в среде MATLAB.

Статья [4] посвящена разработке класса алгоритмов численного решения задачи фильтрации состояний марковских скачкообразных процессов по косвенным непрерывным наблюдениям в присутствии винеровских шумов. В качестве критерия оптимальности выступает средняя L_1-норма ошибки оценки. Интенсивность шумов в наблюдениях может зависеть от оцениваемого состояния. Алгоритмы численного решения используют не исходные непрерывные, а дискретизованные по времени наблюдения. Особенностью предлагаемых алгоритмов является учет вероятности появления нескольких скачков оцениваемого состояния на интервале дискретизации наблюдений. Основным результатом являются утверждения о точности приближенного решения задачи фильтрации в зависимости от числа учитываемых скачков оцениваемого состояния, размера шага дискретизации по времени и применяемой схемы численного интегрирования. Эти утверждения служат теоретической основой последующего анализа конкретных численных схем реализации решения задачи фильтрации.

В теории стохастического программирования получены следующие результаты.

В [10] рассматривается задача о построении доверительного множества поглощения, представляющего собой множество начальных позиций системы, обеспечивающих с заданной вероятностью непревышение функцией потерь в терминальный момент времени некоторого фиксированного уровня. Описанная задача аналогична задаче построения множеств уровня функции вероятности в задачах стохастического программирования. Предлагается подход к построению внешних и внутренних аппроксимаций доверительного множества поглощения. В [10], по сути, предлагается статистический подход к построению внутренней и внешней статистических аппроксимаций доверительного множества поглощения. На первом этапе строятся детерминированные внутренняя и внешняя аппроксимации. Затем полученные аппроксимации уточняются с помощью выборочных оценок. Получены оценки объема выборки, достаточного для построения указанных аппроксимаций. Получены теоретические оценки достаточного объема выборки для построения аппроксимаций. Отметим, что данный объем выборки одновременно гарантирует с заданной вероятностью то, что два построенных множества являются внутренней и внешней аппроксимациями истинного доверительного множества поглощения. Данная оценка улучшается для случая звездчатой функции потерь. Предлагается алгоритм построения аппроксимаций доверительного множества поглощения в двумерном случае. На численном примере показано, что указанные аппроксимации строятся при приемлемом объеме выборки. При этом обеспечивается близость внутренней и внешней аппроксимаций друг к другу. Конечно, для ряда задач достаточный объем выборки может быть уменьшен. Описание классов таких задач может являться предметом дальнейших исследований. Полученные аппроксимации применяются в задаче планирования производства.

3. Заключение

Составители тематического выпуска АиТ надеются, что читателей журнала заинтересуют все представленные статьи, объединенные общей тематикой, и они смогут, хотя бы частично, оценить современное состояние теории оптимизации стохастических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азанов В.М.* Оптимальное управление дискретной стохастической системой с вероятностным критерием и нефиксированным временем окончания // АиТ. 2020. № 12. С. 3–23.
2. *Бортаковский А.С.* Теорема разделения для оптимального в среднем управления гибридными системами переменной размерности // АиТ. 2020. № 11. С. 48–91.
3. *Пакшин П.В., Емельянова Ю.П.* Управление с итеративным обучением дискретными стохастическими системами с переключениями // АиТ. 2020. № 11. С. 95–113.
4. *Борисов А.В.* L_1-оптимальная фильтрация марковских скачкообразных процессов I: точное решение и численные схемы реализации // АиТ. 2020. № 11. С. 11–33.
5. *Игнатов А.Н.* О формировании позиционного управления в многошаговой задаче портфельной оптимизации с вероятностным критерием // АиТ. 2020. № 12. С. 50–66.
6. *Босов А.В.* Применение условно-оптимального фильтра для синтеза субоптимального управления в задаче оптимизации выхода нелинейной дифференциальной стохастической системы // АиТ. 2020. № 11. С. 34–47.
7. *Миллер Б.М., Колосов К.С.* Робастное оценивание на основе метода наименьших модулей и фильтра Калмана // АиТ. 2020. № 11. С. 74–94.
8. *Пантелеев А.В., Лобанов А.В.* Минипакетный метод адаптивного случайного поиска для параметрической идентификации динамических систем // АиТ. 2020. № 11. С. 114–137.
9. *Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д.* Оптимизация стохастических систем на основе вейвлет канонических разложений // АиТ. 2020. № 11. С. 138–156.
10. *Кибзун А.И., Иванов С.В.* Построение доверительных множеств поглощения с помощью статистических методов // АиТ. 2020. № 12. С. 82–99.
11. *Хрусталев М.М., Царьков К.А.* Достаточные условия терминальной инвариантности стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа // АиТ. 2020. № 11. С. 157–173.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 25.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020

© 2020 г. **А.В. БОРИСОВ, д-р физ.-мат. наук (ABorisov@frccsc.ru)**
(Институт проблем информатики ФИЦ ИУ РАН, Москва;
Московский авиационный институт;
Центр фундаментальной и прикладной математики МГУ)

$\mathcal{L}_1$-ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ МАРКОВСКИХ СКАЧКООБРАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ I: ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ РЕАЛИЗАЦИИ[1]

Первая часть статьи посвящена разработке класса алгоритмов численного решения задачи фильтрации состояний марковских скачкообразных процессов по косвенным непрерывным наблюдениям в присутствии винеровских шумов. В качестве критерия оптимальности выступает средняя $\mathcal{L}_1$-норма ошибки оценки. Интенсивность шумов в наблюдениях может зависеть от оцениваемого состояния. Алгоритмы численного решения используют не исходные непрерывные, а дискретизованные по времени наблюдения. Особенностью предлагаемых алгоритмов является учет вероятности появления нескольких скачков оцениваемого состояния на интервале дискретизации наблюдений. Основным результатом являются утверждения о точности приближенного решения задачи фильтрации в зависимости от числа учитываемых скачков оцениваемого состояния, размера шага дискретизации по времени и применяемой схемы численного интегрирования. Они служат теоретической основой последующего анализа конкретных численных схем реализации решения задачи фильтрации.

Ключевые слова: марковский скачкообразный процесс, устойчивый алгоритм численного решения, локальная и глобальная точность аппроксимации.

DOI: 10.31857/S0005231020110021

1. Введение

Фильтр Вонэма [1] является одной из наиболее распространенных процедур обработки сигналов, используемых в технике, телекоммуникациях, экономике и финансах, биологии, медицине и в других областях [2–5]. Уравнения данного фильтра описывают решение задачи оптимального оценивания состояний *марковского скачкообразного процесса* (МСП) по его косвенным наблюдениям в присутствии аддитивных винеровских шумов. Оценки фильтрации представляют собой условное распределение состояния МСП относительно имеющихся наблюдений, обладающее очевидными свойствами покомпонентной неотрицательности и нормировки. Несмотря на элегантный вид

[1] Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-07-00187 А.

уравнений фильтра, его численная реализация сталкивается со значительными проблемами. Например, явные численные методы решения систем стохастических дифференциальных уравнений, основанные на разложении Ито–Тейлора [6], примененные к системе уравнений фильтра Вонэма, проявляют свойства неустойчивости и «разваливаются»: вычисленные с его помощью аппроксимации перестают удовлетворять условиям неотрицательности и нормировки и со временем достигают произвольно больших по модулю значений. Далее в статье будем называть *устойчивыми* алгоритмы численного решения уравнений фильтра Вонэма, сохраняющие свойства неотрицательности и нормировки для получаемых оценок, которые также будем называть устойчивыми. Для оценок – приближений условного распределения МСП сохранение введенного выше определения устойчивости представляется ключевым, так как этим свойством обладает и само приближаемое условное распределение. В данной работе термин «устойчивость» не используется как синоним слова «робастность», но близок по смыслу к устойчивости численных алгоритмов решения нелинейных дифференциальных уравнений [7, 8] и многошаговых нелинейных дискретных схем [9]. Устойчивость гарантирует, что $\mathcal{L}_1$-норма ошибки аппроксимации всегда ограничена сверху одной и той же константой.

Уравнения фильтра Вонэма являются частным случаем нелинейных стохастических уравнений типа Кушнера–Стратоновича. Для этого класса разработаны различные алгоритмы решения, обладающие свойством устойчивости:

- процедуры, основанные на слабой аппроксимации исходных процессов марковскими цепями [10, 11],
- варианты схемы дробных шагов [12],
- робастные процедуры, основанные на преобразовании Кларка [13, 14],
- схемы, связанные с представлением распределений через их логарифм [15],

и др. Все эти алгоритмы созданы для систем аддитивных винеровских шумов в наблюдениях и базируются на гирсановской замене вероятностной меры. Различные алгоритмы численного решения стохастических дифференциальных уравнений со скачками изложены в [16], а в приложении к решению задач оценивания и управления для систем с мультипликативными шумами – в [17–19].

Последние исследования заставляют вернуться к данной теме. В [20] представлено обобщение результата Вонэма на случай мультипликативных шумов в наблюдениях. Известно [24], что задачи фильтрации по наблюдениям с мультипликативными шумами сводятся к оцениванию по косвенным наблюдениям с вырожденными шумами: в их качестве выступают квадратические характеристики шумов в наблюдениях – процессы, не доступные прямому наблюдению, которые сами являются результатом некоторого предельного перехода. В заметке [25] предложена идея аппроксимации обобщенного фильтра Вонэма с помощью дискретизации наблюдений и их последующего оптимального использования, однако численно реализуемый алгоритм, равно как и его точностные характеристики, не представлены.

На проблему численной реализации алгоритма оптимальной фильтрации стохастической системы с непрерывным временем можно взглянуть с другой точки зрения. При решении современными средствами вычислительной техники задач фильтрации по имеющимся непрерывным наблюдениям на первом этапе их дискретизуют, либо они изначально поступают уже в дискретизованном виде со средств наблюдения. На следующем этапе обработки обычно подбираются численные методы, обеспечивающие при уменьшении шага дискретизации по времени сильную или слабую сходимость получаемых аппроксимаций к решению задачи оптимальной фильтрации по непрерывным наблюдениям. За редким исключением (см. [26, 27]) авторы не предпринимают попыток оптимизировать процесс обработки *дискретизованных* наблюдений. А ведь решение задачи оптимальной фильтрации состояний МСП по наблюдениям, дискретизованным по времени, во-первых, дало бы наилучшее приближение точного решения уравнений фильтра Вонэма и, во-вторых, гарантировало бы устойчивость этой аппроксимации. Более того, решение задачи оптимальной фильтрации по дискретизованным наблюдениям без дополнительных предположений о малости шага по времени имеет самостоятельную практическую ценность. Отказ от такого подхода объясняется узостью класса стохастических дифференциальных систем наблюдения, которые можно точно дискретизовать по времени так, чтобы итоговая система являлась рекуррентной системой с дискретным временем и некоторым белым шумом в правой части. Помимо этого, в ряде реальных задач шаг дискретизации наблюдений не может быть уменьшен в связи с техническими ограничениями используемых измерительных средств или из-за необходимости проведения некоторой предобработки (осреднения, сглаживания и т.д.) «сырых» наблюдений.

Целью первой части работы является представление решения задач $\mathcal{L}_1$-оптимальной фильтрации состояния МСП по непрерывным и дискретизованным наблюдениям с аддитивными и/или мультипликативными шумами, а также устойчивых аппроксимаций данного решения. Статья имеет следующую структуру. Раздел 2 содержит постановку задач фильтрации МСП. В разделе 3 представлены решения этих задач: $\mathcal{L}_1$-оптимальные оценки фильтрации совпадают с оценками максимума апостериорной вероятности. Это значит, что для их определения нужно знать условное распределение МСП относительно имеющихся наблюдений. Условное распределение вычисляется рекуррентно в виде некоторой дроби, представляющей собой формулу Байеса. Числитель и знаменатель в ней содержат интегралы – дисперсионно-сдвиговые смеси гауссовских распределений. Смешивающим в них является распределение времени пребывания МСП в том или ином состоянии на временном отрезке дискретизации наблюдений. Так как смешивающее распределение имеет громоздкий вид, оптимальную оценку предлагается приближать сходящейся последовательностью устойчивых аппроксимаций, ограничивающих возможное число скачков МСП на интервале дискретизации. Для этих аппроксимаций получены локальная и глобальная характеристики точности. Данные сведения изложены в разделе 4. В числителе и знаменателе аналитических аппроксимаций присутствуют слагаемые – интегралы, не вычисляемые аналитически. Выбор той или иной схемы их численной реализации влияет на итоговую точность полученных оценок. В разделе 5 представлены локальная и глобальная характеристики влияния ошибок численного интегрирования на отклонение приближенного решения от оптимального. Анализ полученных результатов и их обсуждение представлены в разделе 6.

2. Постановка задачи $\mathcal{L}_1$-оптимальной фильтрации

На полном вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$ рассматривается стохастическая динамическая система

$$X_t = X_0 + \int_0^t \Lambda^\top X_s ds + \mu_s, \tag{2.1}$$

$$Y_t = \int_0^t f X_s ds + \int_0^t \sum_{n=1}^N X_s^n g_n^{1/2} dW_s, \tag{2.2}$$

где

— $X_t \triangleq \operatorname{col}(X_t^1, \ldots, X_t^N) \in \mathbb{S}^N$ – ненаблюдаемое состояние системы, являющееся однородным МСП с конечным множеством состояний $\mathbb{S}^N \triangleq \triangleq \{e_1, \ldots, e_N\}$ ($\mathbb{S}^N$ – множество единичных векторов евклидова пространства $\mathbb{R}^N$), матрицей интенсивностей переходов Λ и начальным распределением π;

— $\mu_t \triangleq \operatorname{col}(\mu_t^1, \ldots, \mu_t^N) \in \mathbb{R}^N$ — $\mathcal{F}_t$-согласованный мартингал;

— $Y_t \triangleq \operatorname{col}(Y_t^1, \ldots, Y_t^M) \in \mathbb{R}^M$ — косвенные наблюдения, зашумленные $\mathcal{F}_t$-согласованным стандартным винеровским процессом $W_t \triangleq \operatorname{col}(W_t^1, \ldots, W_t^M) \in \mathbb{R}^M$; f — $(M \times N)$-мерная матрица плана наблюдений, а набор симметричных матриц $\{g_n\}_{n=\overline{1,N}}$ характеризует интенсивности шумов в зависимости от текущего состояния X_t.

Возможны два варианта статистической информации для последующего оценивания состояния МСП.

1. Наблюдению полностью доступен процесс Y; поток σ-алгебр, им порожденный, обозначен следующим образом: $\mathrm{O}_t \triangleq \sigma\{Y_s : 0 \leqslant s \leqslant t\}$.

2. Наблюдению доступны приращения исходного непрерывного процесса Y при равномерной дискретизации времени с шагом $h > 0$:

$$\mathcal{Y}_r = \int_{t_{r-1}}^{t_r} f X_s ds + \int_{t_{r-1}}^{t_r} \sum_{n=1}^N X_s^n g_n^{1/2} dW_s, \quad r \in \mathbb{N}, \tag{2.3}$$

где $t_r \triangleq rh$ – точки полученной сетки. Неубывающее семейство σ-алгебр, порожденное последовательностью $\{\mathcal{Y}_r\}_{r\in\mathbb{N}}$, обозначено следующим образом: $\mathcal{O}_r \triangleq \sigma\{\mathcal{Y}_\ell : 0 \leqslant \ell \leqslant r\}, \quad \mathcal{O}_0 \triangleq \{\varnothing, \Omega\}$.

Расстояние между точками $\alpha = \operatorname{col}(\alpha^1, \ldots, \alpha^N)$ и $\beta = \operatorname{col}(\beta^1, \ldots, \beta^N)$ в пространстве $\mathbb{R}^N$ определяется с помощью $\mathcal{L}_1$-нормы: $\|\alpha - \beta\|_1 \triangleq \sum_{n=1}^N |\alpha^n - \beta^n|$.

Задача $\mathcal{L}_1$-оптимальной фильтрации состояния X по непрерывным наблюдениям Y заключается в нахождении такой оценки $\widehat{\mathrm{X}}_t$, $t \geqslant 0$, что

$$\widehat{\mathrm{X}}_t \in \operatorname*{Argmin}_{\widetilde{X}_t \in \mathbf{X}_t} \mathsf{E}\left\{\|\widetilde{X}_t - X_t\|_1\right\}, \tag{2.4}$$

где $\mathbf{X}_t$ – множество всех таких O_t-согласованных процессов $\widehat{\mathrm{X}}_t$ с конечным первым моментом, что $\sum\limits_{n=1}^{N} \widehat{\mathrm{X}}_t^n \equiv 1$ с вероятностью 1.

Задача $\mathcal{L}_1$-оптимальной фильтрации состояния X по дискретным наблюдениям $\mathcal{Y}$ заключается в нахождении такой оценки $\widehat{X}_r$, $r \in \mathbb{N}$ состояния МСП X_{rh}, что

$$\widehat{X}_r \in \operatorname*{Argmin}_{\widetilde{X}_r \in \mathcal{X}_r} \mathsf{E}\left\{\|\widetilde{X}_r - X_{rh}\|_1\right\}, \tag{2.5}$$

где $\mathcal{X}_r$ – множество всех таких $\mathcal{O}_r$-согласованных последовательностей $\{\widehat{X}_r\}$ с конечным первым моментом, что $\sum\limits_{n=1}^{N} \widehat{X}_r^n \equiv 1$ с вероятностью 1.

В дальнейшем изложении, если какой-либо вектор-столбец α удовлетворяет условию нормировки, то это условие будет записываться в форме $\mathbf{1}\alpha = 1$, где $\mathbf{1}$ – вектор-строка подходящей размерности, состоящая из единиц.

Исследуемая частично наблюдаемая динамическая система и поставленные задачи фильтрации имеют некоторые особенности.

Во-первых, процесс непрерывных наблюдений Y_t может быть преобразован к виду

$$Y_t = \int\limits_0^t \sum_{n=1}^{N} X_s^n \left(f e_n ds + g_n^{1/2} dW_s\right).$$

Из него следует, что полезный сигнал X_t наблюдается в присутствии *мультипликативного шума* – процесса броуновского движения с известными неслучайными сносом и диффузией. В то же время в частном случае $g_n \equiv g$, $n = \overline{1, N}$ процесс Y_t может быть преобразован к виду

$$Y_t = \int\limits_0^t f X_s ds + g^{1/2} W_t$$

и рассматриваться как полезный сигнал, *аддитивно* зашумленный процессом броуновского движения с нулевым сносом и известной неслучайной диффузией. Поэтому в общем случае Y_t можно назвать наблюдениями с аддитивными/мультипликативными шумами.

Во-вторых, дополнительное требование выполнения условия нормировки для допустимых оценок представляется достаточно естественным, ведь все возможные значения оцениваемого состояния X_t, образующие множество $\mathbb{S}^N$ координатных ортов пространства $\mathbb{R}^N$, также удовлетворяют этому свойству.

3. Решение задач $\mathcal{L}_1$-оптимальной фильтрации

Решать задачи фильтрации будем в предположении, что для (2.1) и (2.2) выполняются следующие условия.

а. Исследуемое вероятностное пространство с фильтрацией имеет вид

$$\Bigl(\Omega^X \times \Omega^W,\ \ \mathcal{F}^X \times \mathcal{F}^W,\ \ \mathsf{P}^X \times \mathsf{P}^W,\ \ \bigl\{\mathcal{F}_t^X \times \mathcal{F}_t^W\bigr\}_{t\geqslant 0}\Bigr),$$

и процессы $X_t(\omega^X)$ и $W_t(\omega^W)$ независимы.

б. Шумы в наблюдениях равномерно невырожденные, т.е. $g_n > 0$ для всех $n = \overline{1, N}$.

Приведенные выше условия являются естественными для задач фильтрации и не обременительными.

Пусть $\widehat{\mathrm{x}}_t \triangleq \mathsf{E}\left\{X_t|\mathrm{O}_t\right\}$ и $\widehat{x}_r \triangleq \mathsf{E}\left\{X_{t_r}|\mathcal{O}_r\right\}$ – векторы *условных математических ожиданий* (УМО) состояния МСП X_t относительно непрерывных и дискретизованных наблюдений, которые в силу того, что $X_t \in \mathbb{S}^N$, совпадают с условными распределениями. Построим по этим условным распределениям $\widehat{\mathrm{x}}_t$ и $\widehat{x}_r$ оценки максимума апостериорной вероятности:

$$\widehat{\mathrm{X}}_t = e_{n^*}, \quad \text{где} \quad n^* \in \operatorname*{Argmax}_{n=\overline{1,N}} \widehat{\mathrm{x}}_t^n$$

— оценка максимума апостериорной вероятности по непрерывным наблюдениям,

$$\widehat{X}_r = e_{n^*}, \quad \text{где} \quad n^* \in \operatorname*{Argmax}_{n=\overline{1,N}} \widehat{x}_r^n$$

— оценка максимума апостериорной вероятности по дискретизованным наблюдениям.

Л е м м а 1. *Решение задач $\mathcal{L}_1$-оптимальной фильтрации по непрерывным и дискретизованным наблюдениям доставляется оценками максимальной апостериорной вероятности.*

Доказательство леммы 1 дано в [21, с. 125].

Результат леммы нуждается в некоторых комментариях. Во-первых, $\mathcal{L}_1$-оптимальная оценка не единственна. В качестве нее может выступать любой орт с номером, соответствующим максимальной условной вероятности, в случае, если таких компонент несколько. Более того, в качестве $\mathcal{L}_1$-оптимальной оценки может выступать любая выпуклая комбинация подобных ортов. Однако представляется, что практического значения такая неединственность не имеет. Ниже будет получен явный вид условного распределения как относительно непрерывных, так и дискретизованных наблюдений. Анализируя вид последних, можно сделать вывод: условные распределения получаются путем рекуррентного нелинейного преобразования невырожденных гауссовских случайных векторов, поэтому вероятность появления двух или более условных мод равна нулю. Поиск условий, при которых условные моды не единственны с положительной вероятностью, не входит в цели данной работы.

Во-вторых, факт, что $\mathcal{L}_1$-оптимальной оказалась оценка максимума апостериорной вероятности, является не вполне очевидным. Например, в классической статистической задаче оценивания скалярного параметра относительно $\mathcal{L}_1$-критерия [22] оптимальной оказывается выборочная медиана. Согласно классической монографии [23, Sect. 2.3, Problem 3.3] медиана апостериорного распределения также является $\mathcal{L}_1$-оптимальной оценкой случайного скалярного параметра. Кстати, к этому же случаю сведется $\mathcal{L}_1$-оптимальная фильтрация состояния МСП в случае, если его фазовым пространством выступит некоторое конечное подмножество числовой оси, например $\{1, 2, \ldots, N\}$. Результат леммы 1 базируется именно на том, что фазовым пространством для X_t выступает множество единичных ортов $\mathbb{S}^N$. Выбор такого фазового пространства вполне распространен (см., например, [5]) и весьма эффективен при математических выводах.

Стохастическая дифференциальная система, определяющая УМО $\widehat{\mathrm{x}}_t$ относительно непрерывных наблюдений, представлена в [20]. Рекуррентная схема вычисления УМО $\widehat{x}_t$ относительно дискретных наблюдений представлена в заметке [25]. Схема является основой построения алгоритмов численного решения задач фильтрации, представленных в данной работе, поэтому ниже приведен ее корректный вывод.

Воспользуемся подходом из [28]. Применим метод математической индукции. При $r = 0$

$$\widehat{x}_0 = \mathsf{E}\{X_0|\mathcal{O}_0\} = \mathsf{E}\{x_0\} = \pi. \tag{3.1}$$

Пусть для некоторого $r \in \mathbb{N}$ известно условное распределение $\widehat{x}_{r-1} = \mathsf{E}\left\{X_{t_{r-1}}|\mathcal{O}_{r-1}\right\}$. Определим УМО $\widehat{x}_r$ на следующем шаге. Для этого необходимо найти совместное распределение (X_{t_r}, Y_r) относительно $\mathcal{O}_{r-1}$. Из модели наблюдений и леммы 7.5 [29] следует, что распределение Y_r относительно σ-алгебры $\mathcal{F}^X_{t_r} \vee \mathcal{O}_{r-1}$ является гауссовским с параметрами

$$\mathsf{E}\left\{\mathcal{Y}_r|\mathcal{F}^X_{t_r}\right\} = f\tau_r, \qquad \mathrm{cov}(\mathcal{Y}_r, \mathcal{Y}_r|\mathcal{F}^X_{t_r}) = \sum_{n=1}^{N} \tau_r^n g_n, \tag{3.2}$$

где $\tau_r = \mathrm{col}\,(\tau_r^1, \ldots, \tau_r^N) \triangleq \int_{t_{r-1}}^{t_r} X_s ds$ – случайный вектор, n-я компонента которого равна случайному времени пребывания процесса X в состоянии e_n на отрезке $[t_{r-1}, t_r]$. Ниже в изложении будем использовать следующие обозначения:

— $\mathcal{D} \triangleq \left\{u = \mathrm{col}\,(u^1, \ldots, u^N) : \ u_n \geqslant 0, \ \sum\limits_{n=1}^{N} u^n = h\right\}$ – $(N-1)$-мерный симплекс в пространстве $\mathbb{R}^M$ – носитель распределения τ_r;

— $\Pi \triangleq \left\{\pi = \mathrm{col}\,(\pi^1, \ldots, \pi^N) : \ \pi_n \geqslant 0, \ \sum\limits_{n=1}^{N} \pi^n = 1\right\}$ – «вероятностный симплекс», множество возможных начальных распределений π;

— N_r^X – случайное число скачков состояния X_t, произошедших на отрезке времени $[t_{r-1}, t_r]$,

— $a_r^s \triangleq \left\{\omega \in \Omega : \ N_r^X(\omega) \leqslant s\right\}$, $A_r^s \triangleq \prod_{q=1}^{r} a_q^s$;

— $\rho^{k,\ell,q}(du)$ – распределение вектора $X^\ell_{t_r}\mathbf{I}_{\{q\}}(N^X_r)\tau_r$ при условии $X_{t_{r-1}} = e_k$, т.е. для любого $\mathcal{G} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$ верно равенство

$$\mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{\mathcal{G}}(\tau_r)\mathbf{I}_{\{q\}}(N^X_r)X^\ell_{t_r}|X_{t_{r-1}} = e_k\right\} = \int\limits_{\mathcal{G}} \rho^{k,\ell,q}(du);$$

— $\mathcal{N}(y, m, K) \triangleq (2\pi)^{-M/2}\det^{-1/2}K \exp\left\{-\frac{1}{2}\|y - m\|^2_{K^{-1}}\right\}$ — M-мерная плотность гауссовского распределения с математическим ожиданием m и невырожденной ковариационной матрицей K;

— $\|\alpha\|^2_K \triangleq \alpha^\top K\alpha, \quad \langle\alpha, \beta\rangle_K \triangleq \alpha^\top K\beta.$

В силу марковского свойства $\{(X_{t_r}, \mathcal{Y}_r)\}_{r\geqslant 0}$, формулы полной вероятности и теоремы Фубини для любого множества $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$ верна следующая цепочка равенств:

$$\mathsf{E}\left\{X_{t_r}\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(Y_r)\middle|\mathcal{O}_{r-1}\right\} = \mathsf{E}\left\{\mathsf{E}\left\{ X_{t_r}\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(Y_r)\middle|\mathcal{F}^X_{t_r} \vee \mathcal{O}_{r-1}\right\}\middle|\mathcal{O}_{r-1}\right\} =$$

$$= \mathsf{E}\left\{X_{t_r}\int\limits_{\mathcal{A}} \mathcal{N}\left(y, f\tau_r, \sum_{p=1}^N \tau^p_r g_p\right) dy\middle|\mathcal{O}_{r-1}\right\} =$$

$$= \mathsf{E}\left\{\mathsf{E}\left\{X_{t_r}\int\limits_{\mathcal{A}} \mathcal{N}\left(y, f\tau_r, \sum_{p=1}^N \tau^p_r g_p\right) dy\middle|X_{t_{r-1}} \vee \mathcal{O}_{r-1}\right\}\middle|\mathcal{O}_{r-1}\right\} =$$

$$= \mathsf{E}\left\{\sum_{\ell=1}^N e_\ell \sum_{q=0}^\infty \sum_{k=1}^N e^\top_k X_{t_{r-1}} \int\limits_{\mathcal{D}}\int\limits_{\mathcal{A}} \mathcal{N}\left(y, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p\right) dy\rho^{k,\ell,q}(du)\middle|\mathcal{O}_{r-1}\right\} =$$

$$= \sum_{\ell=1}^N e_\ell \int\limits_{\mathcal{A}}\left[\sum_{k=1}^N \widehat{x}^k_{r-1}\sum_{q=0}^\infty \int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(y, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p\right)\rho^{k,\ell,q}(du)\right] dy$$

из чего следует, что интегранд в квадратных скобках в последнем выражении определяет искомое совместное распределение $(X_{t_r}, \mathcal{Y}_r)$ относительно $\mathcal{O}_{r-1}$. Тогда условное распределение $\widehat{x}_r$ покомпонентно определяется с помощью обобщенного варианта формулы Байеса [29]

$$\widehat{x}^j_r = \frac{\sum\limits_{k=1}^N \widehat{x}^k_{r-1}\sum\limits_{q=0}^\infty \int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(\mathcal{Y}_r, fu, \sum\limits_{p=1}^N u^p g_p\right)\rho^{k,j,q}(du)}{\sum\limits_{i,\ell=1}^N \widehat{x}^i_{r-1}\sum\limits_{c=0}^\infty \int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(\mathcal{Y}_r, fv, \sum\limits_{n=1}^N v^n g_n\right)\rho^{i,\ell,c}(dv)}, \quad j = \overline{1, N}. \tag{3.3}$$

Таким образом, доказана следующая

Лемма 2. Если для системы наблюдения (2.1), (2.3) *верны условия* а *и* б, *то условное распределение* $\widehat{x}_r$ *определяется формулой* (3.1) *при* $r = 0$ *и рекуррентным соотношением* (3.3) *в моменты* t_r *получения наблюдений* $\mathcal{Y}_r$.

В [30] в качестве иллюстративного примера рассматривалась задача СК-оптимальной фильтрации состояний МСП по дискретизованным наблюдениям, полученным в некоторые неслучайные моменты времени. В этой работе оценка фильтрации определяется также с помощью некоторой рекуррентной процедуры. Однако в [30] эта процедура записана в абстрактной форме: интегранды в ее числителе и знаменателе содержат условные математические ожидания без указания, как их можно вычислить. В данной же работе все интегранды в числителе и знаменателе (3.3) явным образом определены и могут быть вычислены аналитически или численно сколь угодно точно.

4. Аналитическая аппроксимация условного распределения и ее точность

Рекурсия (3.3) не может быть непосредственно реализована в виде некоторой численной схемы: суммы бесконечных рядов из интегралов в числителе и знаменателе не могут быть вычислены аналитически. Поэтому их предлагается заменить конечными рядами, а векторную последовательность $\overline{x}_r(s)$, вычисляемую покомпонентно с помощью рекурсии

$$\overline{x}_r^j(s) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} \overline{x}_{r-1}^k(s) \sum\limits_{q=0}^{s} \int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(\mathcal{Y}_r, fu, \sum\limits_{p=1}^{N} u^p g_p\right) \rho^{k,j,q}(du)}{\sum\limits_{i,\ell=1}^{N} \overline{x}_{r-1}^i(s) \sum\limits_{c=0}^{s} \int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(\mathcal{Y}_r, fv, \sum\limits_{n=1}^{N} v^n g_n\right) \rho^{i,\ell,c}(dv)}, \quad j = \overline{1,N} \tag{4.1}$$

назовем *аналитической аппроксимацией s-го порядка* условного распределения. Легко видеть, что аппроксимация $\overline{x}_r(s)$ обладает свойством устойчивости.

Так как искомая $\mathcal{L}_1$-оптимальная оценка $\widehat{X}_r$ является функцией условного распределения $\widehat{x}_r$, которое может быть вычислено только приближенно в форме аппроксимации $\overline{x}_r$(s), то важным представляется определить степень близости $\widehat{x}_r$ и $\overline{x}_r$(s).

Введем следующие обозначения для неотрицательных случайных величин и матриц из них:

$$\begin{gathered}
\xi_q^{kj} \triangleq \sum_{m=0}^{s} \int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(\mathcal{Y}_q, fu, \sum_{p=1}^{N} u^p g_p\right) \rho^{k,j,m}(du), \\
\theta_q^{kj} \triangleq \sum_{m=0}^{\infty} \int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(\mathcal{Y}_q, fu, \sum_{p=1}^{N} u^p g_p\right) \rho^{k,j,m}(du), \\
\xi_q \triangleq \|\xi_q^{kj}\|_{k,j=\overline{1,N}}, \qquad \theta_q \triangleq \|\theta_q^{kj}\|_{k,j=\overline{1,N}}.
\end{gathered} \tag{4.2}$$

Оценки $\widehat{x}_r$ (3.3) и $\overline{x}_r(s)$ (4.1) могут быть записаны в рекуррентной форме:

$$\widehat{x}_r = \left(\mathbf{1}\theta_r^\top \widehat{x}_{r-1}\right)^{-1} \theta_r^\top \widehat{x}_{r-1}, \tag{4.3}$$

$$\overline{x}_r(s) = \left(\mathbf{1}\xi_r^\top \overline{x}_{r-1}(s)\right)^{-1} \xi_r^\top \overline{x}_{r-1}(s). \tag{4.4}$$

Определим характеристики близости оценок $\{\overline{x}_r(s)\}$ и $\{\widehat{x}_r\}$. Так как система (2.1), (2.3) является автономной, то в качестве локальной характеристики точности аппроксимации $\{\overline{x}_r(s)\}$ может быть выбрана величина

$$\sigma(s) \triangleq \sup_{\pi\in\Pi} \mathsf{E}\left\{\|\widehat{x}_1 - \overline{x}_1(s)\|_1\right\} = \sup_{\pi\in\Pi} \sum_{j=1}^{N} \mathsf{E}\left\{|\widehat{x}_1^j - \overline{x}_1^j(s)|\right\}, \tag{4.5}$$

определяющая, насколько сильно рекурсии (3.3) и (4.1) разойдутся за один шаг, стартуя из одной точки π.

Обе схемы, примененные r раз, позволяют вычислить и оценки $\widehat{x}_r$ и $\overline{x}_r(s)$ в точке t_r. В качестве глобальной характеристики точности аппроксимации в этом случае естественно рассмотреть величину

$$\Sigma_r(s) \triangleq \sup_{\pi\in\Pi} \mathsf{E}\left\{\|\widehat{x}_r - \overline{x}_r(s)\|_1\right\} = \sup_{\pi\in\Pi} \sum_{j=1}^{N} \mathsf{E}\left\{|\widehat{x}_r^j - \overline{x}_r^j(s)|\right\}, \tag{4.6}$$

определяющую, насколько сильно рекурсии (3.3) и (4.1) разойдутся за r шагов, стартуя из единой точки π.

В отличие от традиционных показателей точности [6], представляющих собой $\mathcal{L}_2$-норму ошибок аппроксимации, предлагаемые характеристики связаны с $\mathcal{L}_1$-нормой.

Следующее утверждение определяет верхние оценки величин $\sigma(s)$ и $\Sigma_r(s)$.

Теорема 1. *В условиях леммы 2 верны неравенства*

$$\sigma(s) \leqslant 2C_1 \frac{(\overline{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!} \tag{4.7}$$

и

$$\Sigma_r(s) \leqslant 2 - 2\left(1 - C_1 \frac{(\overline{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!}\right)^r, \tag{4.8}$$

где $\overline{\lambda} \triangleq \max_{1\leqslant n\leqslant N} |\lambda_{nn}|$, *а* $C_1 = C_1(h,\overline{\lambda}) \in (0,1)$ *– параметр*

$$C_1 \triangleq e^{-\overline{\lambda}h} \frac{(s+1)!}{(\overline{\lambda}h)^{s+1}} \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{(\overline{\lambda}h)^k}{k!}. \tag{4.9}$$

При этом верно неравенство

$$C_1 \frac{(\overline{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!} < 1.$$

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Неравенства (4.7) и (4.8) имеют следующую интерпретацию. Для произвольной устойчивой оценки $\breve{x}_r$ ее отклонение от оптимальной $\widehat{x}_r$ не превосходит 2:

$$\max_{\breve{x},r,\pi} \mathsf{E}\left\{\|\breve{x}_r - \widehat{x}_r\|_1\right\} = 2.$$

Аппроксимация $\overline{x}_1(s)$ построена в предположении, что на интервале дискретизации наблюдений длиной h состояние МСП совершит не более s скачков. При этом величина $C_1\frac{(\overline{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!}$ ограничивает сверху вероятность того, что число скачков превзойдет порог s. Правая часть неравенства (4.7) является произведением максимально возможного промаха на вероятность превышения порога s числом скачков. Глобальная оценка (4.8) построена аналогично: предполагается, что максимальное расхождение $\overline{x}_r(s)$ и $\widehat{x}_r$ может произойти в том случае, если хотя бы на одном из r отрезков длины h МСП X совершит более s скачков.

Утверждения теоремы 1 имеют практическую пользу. В них нет требований асимптотики по параметрам s и h: представленные оценки точности носят универсальный характер. В подавляющем большинстве современных цифровых систем управления частота съема измерений фиксирована или ограничена сверху. В некоторых случаях имеются дополнительные алгоритмические ограничения на интервал дискретизации: исходные «сырые» данные должны быть подвергнуты предварительной обработке типа сглаживания, осреднения и т.п. Например, использование диффузионной аппроксимации процессов восстановления [31] правомерно лишь при значительных интервалах осреднения, длина которых зависит от моментных характеристик времени между скачками.

Неравенство (4.8) позволяет также получить следующие асимптотические результаты. При фиксированных (h, s) и $r \to +\infty$ глобальная ошибка $\Sigma_r(s)$ экспоненциально стремится к своему максимально возможному значению 2, причем делает это тем медленнее, чем меньше показатель локальной ошибки $C_1\frac{(\overline{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!}$.

Рассмотрим глобальный показатель точности аппроксимации в фиксированный момент времени T при асимптотике $h \to 0$. В этом случае $r = \frac{T}{h}$, и из (4.8) следует цепочка неравенств

$$\Sigma_r(s) \leqslant 2 - 2\left(1 - \frac{(\overline{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!}\right)^r =$$

$$= 2\left[1 - \exp\left(r\ln\left(1 - \frac{(\overline{\lambda}T)^{s+1}}{(s+1)!r^{s+1}}\right)\right)\right] \triangleq \overline{\mathcal{S}}_r(s).$$

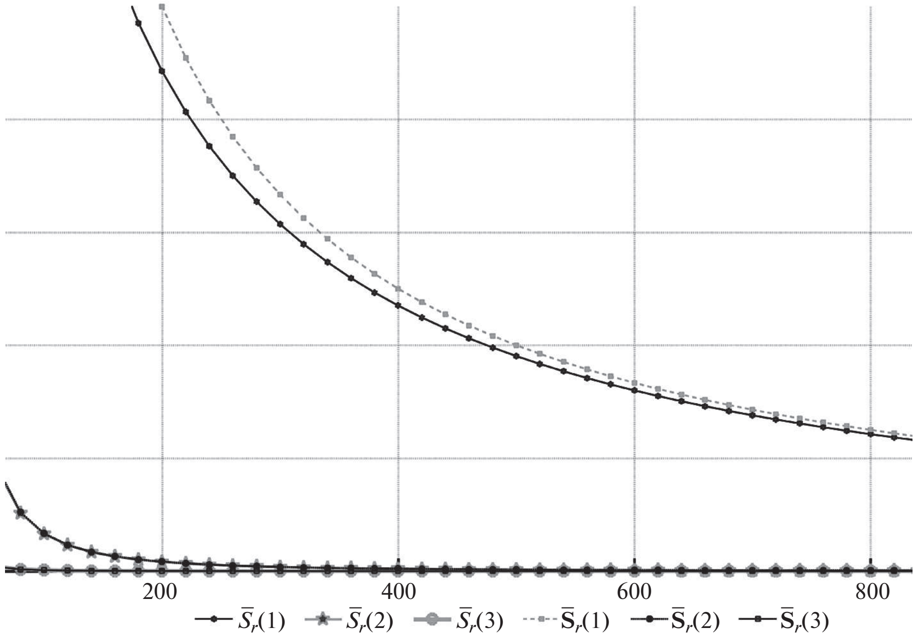
При достаточно больших r имеет место эквивалентность

$$\ln\left(1 - \frac{(\overline{\lambda}T)^{s+1}}{(s+1)!r^{s+1}}\right) \sim -\frac{(\overline{\lambda}T)^{s+1}}{(s+1)!r^{s+1}},$$

т.е.

$$\overline{\mathcal{S}}_r(s) \sim 2\left[1 - \exp\left(-r\frac{(\overline{\lambda}T)^{s+1}}{(s+1)!r^{s+1}}\right)\right] = 2\left[1 - \exp\left(-\overline{\lambda}T\frac{\left(\frac{\overline{\lambda}T}{r}\right)^s}{(s+1)!}\right)\right].$$

В то же время, чтобы сохранить свойство оценки сверху, можно воспользоваться неравенством $\ln(1-x) > -x - x^2$, верным для любых $x \in (0, \frac{1}{2})$: как



Сравнение показателей глобальной точности $\overline{\mathbb{S}}_r(s)$ и $\overline{\mathbf{S}}_r(s)$ аналитических аппроксимаций порядков $s = 1, 2, 3$.

только r станет настолько велико, что $\frac{(\overline{\lambda}T)^{s+1}}{(s+1)!r^{s+1}} < \frac{1}{2}$, то

$$\Sigma_r(s) \leqslant 2\left\{1 - \exp\left[-\overline{\lambda}T\frac{\left(\frac{\overline{\lambda}T}{r}\right)^s}{(s+1)!}\left(1 + \frac{\left(\frac{\overline{\lambda}T}{r}\right)^{s+1}}{(s+1)!}\right)\right]\right\}.$$

Для определения порядка точности более предпочтительна верхняя оценка точности $\Sigma_r(s)$ в виде степенной функции шага дискретизации h. Используя неравенство $(1-x)^r > 1 - rx$, верного для любого $x \in (0,1)$ и $r > 1$, можно получить следующую оценку сверху

$$\overline{\mathbb{S}}_r(s) \leqslant 2\overline{\lambda}T\frac{(\overline{\lambda}T)^s}{(s+1)!r^s} \triangleq \overline{\mathbf{S}}_r(s).$$

Для иллюстрации влияния порядка аппроксимации s на показатель глобальной точности на рисунке приведены зависимости от r величины $\overline{\mathbb{S}}_r(s)$ и $\overline{\mathbf{S}}_r(s)$ для $\overline{\lambda} = 10$, $T = 1$ и $s = 1, 2, 3$.

Из рисунка следуют два вывода. Во-первых, показатели $\overline{\mathbb{S}}_r(s)$ и $\overline{\mathbf{S}}_r(s)$ очень близки друг к другу за исключением случая $s = 1$. Во-вторых, увеличение степени аппроксимации значительно повышает ее точность, например, при $s = 2$ и $r = 100$ (т.е. $h = 0{,}1$) показатель точности составляет 0,33, что для порядка $s = 1$ не достигается даже при $r = 1000$ (т.е. при $h = 0{,}01$): $\overline{\mathbb{S}}_{1000}(1) = 0{,}1$.

5. Численная аппроксимация условного распределения и ее точность

В рекуррентной схеме (4.4) требуется вычисление интегралов ξ_r^{ij}, что невозможно сделать аналитически. Использование численного интегрирования вносит дополнительные ошибки. Исследуем их влияние на общую точность аппроксимации условного распределения.

Значения интегралов $\xi^{ij}(y)$ аппроксимируются суммами

$$\xi^{ij}(y) \approx \psi^{ij}(y) \triangleq \sum_{\ell=1}^{L} \mathcal{N}\left(y, f w_\ell, \sum_{p=1}^{N} w_\ell^p g_p\right) \varrho_\ell^{ij}, \tag{5.1}$$
$$\psi(y) \triangleq \|\psi^{ij}(y)\|_{i,j=\overline{1,N}},$$

определяемыми множеством пар $\{(w_\ell, \varrho_\ell^{ij})\}_{\ell=\overline{1,L}}$. Здесь $\varrho_\ell^{ij} \geqslant 0$ $(\ell = \overline{1,L})$ – веса, $\sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{\ell=1}^{L} \varrho_\ell^{ij} \leqslant \mathfrak{W} \leqslant 1$, а $w_\ell \triangleq \mathrm{col}\,(w_\ell^1, \ldots, w_\ell^N) \in \mathcal{D}$ – точки. Аналогично матрицам ξ_q строятся их аппроксимации $\psi_q \triangleq \|\psi^{ij}(\mathcal{Y}_q)\|_{i,j=\overline{1,N}}$.

По построению элементы матрицы ψ_q являются положительными случайными величинами, поэтому приближенная оценка $\widetilde{x}_r$, вычисляемая рекуррентно по формуле

$$\widetilde{x}_r \triangleq \left(\mathbf{1}\psi_r^\top \widetilde{x}_{r-1}\right)^{-1} \psi_r^\top \widetilde{x}_{r-1}, \tag{5.2}$$

обладает свойством устойчивости.

Обозначим

$$\gamma^{kj} \triangleq \psi^{kj} - \xi^{kj}, \qquad \gamma_r \triangleq \left\|\gamma^{kj}(\mathcal{Y}_r)\right\|_{k,j=\overline{1,N}}, \tag{5.3}$$

$$\overline{\gamma}^{kj} \triangleq |\gamma^{kj}|, \qquad \overline{\gamma}_r \triangleq \left\||\gamma^{kj}(\mathcal{Y}_r)|\right\|_{k,j=\overline{1,N}} \tag{5.4}$$

— ошибки аппроксимации интегралов и их абсолютные значения.

Рекуррентная схема вычисления $\overline{x}_r$ (4.4) заменяется на схему (5.2), при этом обе рекурсии стартуют из одного и того же начального условия π.

Схемы (4.4) и (5.2) строились в расчете на выполнение события A_r^s, т.е. на непревышение числом скачков порога s на всех интервалах $[t_{q-1}, t_q]$, принадлежащих отрезку $[0, t_r]$. Поэтому показатель близости $\widetilde{x}_r$ и $\overline{x}_r(s)$ нужно выбирать с учетом этого ограничения. В качестве локальной характеристики будем рассматривать псевдометрику

$$\varepsilon(s) \triangleq \sup_{\pi\in\Pi} \mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{a_1^s}(\omega)\|\widetilde{x}_1 - \overline{x}_1(s)\|_1\right\} = \sup_{\pi\in\Pi} \sum_{j=1}^{N} \mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{a_1^s}(\omega)|\widetilde{x}_1^j - \overline{x}_1^j(x)|\right\}. \tag{5.5}$$

Глобальный показатель близости определяется аналогично:

$$\mathcal{E}_r(s) \triangleq \sup_{\pi\in\Pi} \mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{A_r^s}(\omega)\|\widetilde{x}_r - \overline{x}_1(x)\|_1\right\} = \sup_{\pi\in\Pi} \sum_{n=1}^{N} \mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{A_r^s}(\omega)|\widetilde{x}_r^n - \overline{x}_r^n(x)|\right\}. \tag{5.6}$$

Эти величины характеризуют разницу применения алгоритмов (4.4) и (5.2) за один и r шагов при выполнении ограничений на число скачков состояния, описанных выше.

Т е о р е м а 2. *Если для схемы* (5.1) *приближенного вычисления интеграла* (4.2) *выполняется неравенство*

$$\max_{i=\overline{1,N}} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^M} |\psi^{ij}(y) - \xi^{ij}(y)| dy < \delta, \tag{5.7}$$

то для локального и глобального показателей близости верны оценки сверху

$$\varepsilon(s) \leqslant 2\delta, \qquad \mathcal{E}_r(s) \leqslant 2r\mathfrak{W}^{r-1}\delta. \tag{5.8}$$

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

Возможность характеризации точности численного решения задачи фильтрации, стохастической по своей природе, с помощью условия (5.7), относящегося к чистому математическому анализу, представляется замечательной. Далее, если сумма весов $\mathfrak{W} = \sum_{\ell,j} \varrho_\ell^{ij}$ отделена от единицы, т.е. $\mathfrak{W} < 1$, глобальный показатель ошибки численного интегрировния $\mathcal{E}_r(s)$ растет с увеличением r *сублинейно*, так же как и глобальный показатель ошибки аналитической аппроксимации $\Sigma_r(s)$. При этом следует отметить, что в классических численных методах решения стохастических дифференциальных уравнений глобальная ошибка растет линейно с ростом времени интегрирования [6].

Характеристики точности аналитической аппроксимации и ее численной реализации должны быть объединены в единый показатель. Если выполняются условия теорем 1 и 2, то

$$\begin{gathered}
\tau(s) \triangleq \sup_{\pi\in\Pi} \mathsf{E}\Big\{ \|\widehat{x}_1 - \widetilde{x}_1\|_1 \Big\} \leqslant \\
\leqslant \sup_{\pi\in\Pi} \mathsf{E}\Big\{ \mathbf{I}_{a_1^s}(\omega)\|\widetilde{x}_1 - \overline{x}_1(s) + \overline{x}_1(s) - \widehat{x}_1\|_1 + \mathbf{I}_{\overline{a}_1^s}(\omega)\|\widetilde{x}_1 - \overline{x}_1(s)\|_1 \Big\} \leqslant \\
\leqslant 2\mathsf{P}\left\{\overline{a}_1^s\right\} + \sup_{\pi\in\Pi} \mathsf{E}\Big\{ \|\overline{x}_1(s) - \widehat{x}_1\|_1 \Big\} + \sup_{\pi\in\Pi} \mathsf{E}\Big\{ \mathbf{I}_{a_1^s}(\omega)\|\widetilde{x}_1 - \overline{x}_1(s)\|_1 \Big\} = \\
= 2\mathsf{P}\left\{\overline{a}_1^s\right\} + \sigma(s) + \varepsilon(s) \leqslant 4\frac{(\overline{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!} + 2\delta.
\end{gathered} \tag{5.9}$$

Итоговый глобальный показатель близости условного распределения $\widehat{x}_r \triangleq \triangleq \mathsf{E}\left\{X_r|\mathcal{O}_r\right\}$ и его приближения $\widetilde{x}_r$ может быть ограничен сверху аналогичным образом:

$$\mathcal{T}(s) \triangleq \sup_{\pi\in\Pi} \mathsf{E}\left\{\|\widehat{x}_r - \widetilde{x}_r\|_1\right\} \leqslant 4\left[1 - \left(1 - \frac{(\overline{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!}\right)^r\right] + 2r\mathfrak{W}^{r-1}\delta. \tag{5.10}$$

Вообще говоря, параметры аналитической аппроксимации (h, s) и численного интегрирования δ могут выбираться независимо друг от друга. Однако наличие ограничений по доступным вычислительным ресурсам и требований к точности аппроксимации ведут к совместной оптимизации данных параметров.

Тем не менее при разработке эффективных алгоритмов численного решения задачи фильтрации состояний МСП по непрерывным наблюдениям эти параметры нуждаются в совместном оптимальном выборе. Зафиксируем некоторый горизонт T и порядок аналитической аппроксимации s. Будем увеличивать число шагов $r \to \infty$, а значит уменьшать шаг дискретизации $h = \frac{T}{r} \to 0$. В этом случае в силу неравенства Бернулли и неравенства $0 < \mathfrak{W} \leqslant 1$

$$\sup_{\pi\in\Pi} \mathsf{E}\left\{ \left\|\widetilde{x}_{T/h} - \widehat{x}_{T/h}\right\|_1 \right\} \leqslant 4 \left[1 - \left(1 - \frac{(\overline{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!}\right)^r\right] + 2r\mathfrak{W}^{r-1}\delta \leqslant$$

$$\leqslant 4r\frac{(\overline{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!} + 2r\mathfrak{W}^{r-1}\delta = 4\overline{\lambda}T\frac{(\overline{\lambda}h)^{s}}{(s+1)!} + 2r\mathfrak{W}^{r-1}\delta \leqslant \tag{5.11}$$

$$\leqslant 2T\left(2\overline{\lambda}\frac{(\overline{\lambda}h)^{s}}{(s+1)!} + \frac{\delta}{h}\right).$$

Первое слагаемое в скобках соответствует вкладу в суммарную ошибку, определяемую аналитической аппроксимацией, второе – вкладу ошибки численного интегрирования. Ясно, что оптимальным будет выбор параметров, обеспечивающий обоим слагаемым одинаковый порядок малости, который достигается при $\delta \sim \frac{(\overline{\lambda}h)^{s+1}}{\overline{\lambda}}$.

6. Заключение

Решение задачи $\mathcal{L}_1$-оптимальной фильтрации состояний МСП по непрерывным или дискретизованным наблюдениям не может быть получено в явной аналитической форме. Для реализации решения средствами вычислительной техники требуются классы специальных алгоритмов приближенного решения. Основным результатом данной статьи являются теоремы 1, 2 и формула (5.11), описывающие влияние выбранных аналитической аппроксимации и схемы численного интегрирования на итоговую точность приближения условного распределения. Сравнительный численный анализ конкретных алгоритмов, используемых для фильтрации состояний МСП по наблюдениям с аддитивными и мультипликативными шумами, будет представлен во второй части работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Используя обозначения $\Xi_r \triangleq \xi_1\xi_2\ldots\xi_r$ и $\Theta_r \triangleq \theta_1\theta_2\ldots\theta_r$ для матриц со случайными элементами, оценки $\widehat{x}_r$ и $\overline{x}_r(s)$ можно выписать в явной форме:

$$\widehat{x}_r = \left(\mathbf{1}\Theta_r^\top\pi\right)^{-1}\Theta_r^\top\pi, \qquad \overline{x}_r(s) = \left(\mathbf{1}\Xi_r^\top\pi\right)^{-1}\Xi_r^\top\pi.$$

Из определения (4.2) следует, что $\xi_q^{kj} \leqslant \theta_q^{kj}$, поэтому матрица $\Theta_r - \Xi_r$ содержит только неотрицательные элементы. Для краткости запись зависимости от r в обозначениях Ξ_r и Θ_r будет опущена. Верна следующая цепочка неравенств

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\left\{\|\widehat{x}_r - \overline{x}_r(s)\|_1\right\} = \mathsf{E}\left\{\left\|\frac{1}{\mathbf{1}\Theta^\top\pi}\Theta^\top\pi - \frac{1}{\mathbf{1}\Xi^\top\pi}\Xi^\top\pi\right\|_1\right\} = \\
&= \mathsf{E}\left\{\frac{1}{\mathbf{1}\Theta^\top\pi\mathbf{1}\Xi^\top\pi}\left\|\mathbf{1}\Xi^\top\pi(\Theta-\Xi)^\top\pi - \mathbf{1}(\Theta-\Xi)^\top\pi\Xi^\top\pi\right\|_1\right\} \leqslant \\
&\leqslant \mathsf{E}\left\{\frac{1}{\mathbf{1}\Theta^\top\pi\mathbf{1}\Xi^\top\pi}\left(\mathbf{1}\Xi^\top\pi\|(\Theta-\Xi)^\top\pi\|_1 + \mathbf{1}(\Theta-\Xi)^\top\pi\|\Xi^\top\pi\|_1\right)\right\} = \\
&= 2\mathsf{E}\left\{\frac{1}{\mathbf{1}\Theta^\top\pi}\mathbf{1}(\Theta-\Xi)^\top\pi\right\}.
\end{aligned}
\tag{П.1}
$$

Рассмотрим вспомогательную оценку

$$\breve{x}_r \triangleq \mathsf{E}\left\{X_{t_r}\mathbf{I}_{A_r^s}(\omega)|\mathcal{O}_r\right\}.$$

Из абстрактного варианта формулы Байеса следует, что $\breve{x}_r = \frac{1}{\mathbf{1}\Theta^\top\pi}\Xi^\top\pi$ и

$$\widehat{x}_r - \breve{x}_r = \mathsf{E}\left\{X_{t_r}\mathbf{I}_{\overline{A}_r^s}(\omega)|\mathcal{O}_r\right\} = \frac{1}{\mathbf{1}\Theta^\top\pi}(\Theta-\Xi)^\top\pi. \tag{П.2}$$

Из (П.1) и (П.2) следует, что для $r = 1$ и $\forall\, \pi \in \Pi$

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\Big\{\,\|\widehat{x}_1 - \overline{x}_1(s)\|_1\,\Big\} \leqslant 2\mathsf{E}\Big\{\,\left\|\mathsf{E}\left\{X_{t_1}\mathbf{I}_{\overline{a}_1^s}(\omega)|\mathcal{O}_1\right\}\right\|_1\,\Big\} = \\
&= 2\mathsf{E}\left\{\sum_{n=1}^N \mathsf{E}\Big\{X_{t_1}^n\mathbf{I}_{\overline{a}_1^s}(\omega)|\mathcal{O}_1\Big\}\right\} = 2\mathsf{E}\Big\{\mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{\overline{a}_1^s}(\omega)|\mathcal{O}_1\right\}\Big\} = 2\mathsf{P}\left\{\overline{a}_1^s\right\}.
\end{aligned}
\tag{П.3}
$$

Процесс N_t^X общего числа скачков состояния X_t является считающим, и его квадратическая характеристика равна

$$\langle N^X, N^X\rangle_t = -\int_0^t \sum_{n=1}^N \lambda_{nn}X_s^n ds,$$

поэтому искомую вероятность можно оценить сверху следующим образом

$$\mathsf{P}\left\{\overline{a}_1^s\right\} \leqslant e^{-\overline{\lambda}h}\sum_{k=s+1}^\infty \frac{(\overline{\lambda}h)^k}{k!} = C_1\frac{(\overline{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!}. \tag{П.4}$$

Из последнего неравенства и (П.3) следует истинность неравенства $\sigma(s) \leqslant 2C_1\frac{(\overline{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!}$, т.е. оценка локальной точности (4.7) верна.

С помощью марковского свойства пары (X_t, N_t^X) и (П.4) можно оценить сверху и вероятность $\mathsf{P}\left\{\overline{A}_r^s\right\}$: $\mathsf{P}\left\{\overline{A}_r^s\right\} \leqslant 1 - \left(1 - C_1 \frac{(\overline{\lambda} h)^{s+1}}{(s+1)!}\right)^r$, из чего следует истинность оценки глобальной точности (4.8). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Итак, $\widetilde{x}_1 = (\mathbf{1}\psi_1^\top \pi)^{-1}\psi_1^\top \pi$, $\overline{x}_1 = (\mathbf{1}\xi_1^\top \pi)^{-1}\xi_1^\top \pi$ и $\Delta_1 = \widetilde{x}_1 - \overline{x}_1$. Используя свойства матричных операций, легко показать, что $[\gamma^\top \pi \mathbf{1} - \mathbf{1}\gamma^\top \pi I]\gamma^\top \pi = 0$. Обе оценки обладают свойством устойчивости, поэтому $\|\widetilde{x}_1\|_1 = \|\overline{x}_1\|_1 = 1$. Верна следующая цепочка неравенств:

$$\|\Delta_1\|_1 = \frac{1}{\mathbf{1}\psi_1^\top \pi \mathbf{1}\xi_1^\top \pi} \left\| \mathbf{1}\xi_1^\top \pi \psi_1^\top \pi - \mathbf{1}\psi_1^\top \pi \xi_1^\top \pi \right\|_1 =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{1}\psi_1^\top \pi \mathbf{1}\xi_1^\top \pi} \left\| \mathbf{1}\xi_1^\top \pi \gamma_1^\top \pi - \mathbf{1}\gamma_1^\top \pi \xi_1^\top \pi \right\|_1 =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{1}\psi_1^\top \pi \mathbf{1}\xi_1^\top \pi} \left\| \left[\gamma_1^\top \pi \mathbf{1} - \mathbf{1}\gamma_1^\top \pi I\right] \xi_1^\top \pi \right\|_1 =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{1}\psi_1^\top \pi \mathbf{1}\xi_1^\top \pi} \left\| \left[\gamma_1^\top \pi \mathbf{1} - \mathbf{1}\gamma_1^\top \pi I\right] \left[\xi_1^\top \pi + \gamma_1^\top \pi\right] \right\|_1 =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{1}\xi_1^\top \pi} \left\| \left[\gamma_1^\top \pi \mathbf{1} - \mathbf{1}\gamma_1^\top \pi I\right] \widetilde{X}_1 \right\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\mathbf{1}\xi_1^\top \pi} \left\| \left[\gamma_1^\top \pi \mathbf{1} - \mathbf{1}\gamma_1^\top \pi I\right] \right\|_1 \left\| \widetilde{X}_1 \right\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant 2\frac{\mathbf{1}\overline{\gamma}_1^\top \pi}{\mathbf{1}\xi_1^\top \pi} = \sum_{i=1}^N \pi_i \frac{\sum\limits_{j=1}^N \overline{\gamma}_1^{ij}}{\sum\limits_{k,\ell=1}^N \xi_1^{k\ell}\pi_k}.$$

Используя последнее неравенство, (5.7) и (П.7), можно показать, что

$$\mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{a_1^s}(\omega)\|\Delta_1\|_1\right\} \leqslant 2\sum_{i=1}^N \pi_i \int\limits_{\mathbb{R}^M} \sum_{i=1}^N \overline{\gamma}^{ij}(y)dy \leqslant 2\delta.$$

Истинность первого неравенства (5.8) следует из того, что неравенство вверху выполняется для любого $\pi \in \Pi$.

Определим матрицы со случайными элементами – функции от ξ_r и ψ_r:

$$\Xi_{q,r} \triangleq \begin{cases} \xi_q \xi_{q+1} \dots \xi_r, & \text{если } q \leqslant r, \\ I & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\Psi_{q,r} \triangleq \begin{cases} \psi_q \xi_{q+1} \dots \psi_r, & \text{если } q \leqslant r, \\ I & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\Gamma_{q,r} \triangleq \Psi_{q,r} - \Xi_{q,r}.$$

Для доказательства теоремы 2 потребуется вспомогательная

Лемма 3. Если $\phi_r \triangleq \phi_r(\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_r)$ – неотрицательная $\mathcal{O}_r$-измеримая случайная величина и $\Phi_r \triangleq \frac{\phi_r}{\mathbf{1}\Xi_{1,r}^\top \pi}$, то

$$\mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{A_r^s}(\omega)\Phi_r\right\} = \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathrm{M}}} \dots \int\limits_{\mathbb{R}^{\mathrm{M}}} \phi_r(y_1, \dots, y_r) dy_r \dots dy_1. \tag{П.5}$$

Доказательство леммы 3. Рассмотрим неотрицательную интегрируемую функцию $\phi_1 = \phi_1(y) : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}_+$ и $\mathcal{O}_1$-измеримую случайную величину

$$\Phi_1 \triangleq \frac{\phi_1(\mathcal{Y}_1)}{\mathbf{1}\xi_1^\top(\mathcal{Y}_1)\pi} = \frac{\phi_1(\mathcal{Y}_1)}{\sum\limits_{i,j=1}^N \sum\limits_{m=0}^s \int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(\mathcal{Y}_1, fu, \sum\limits_{p=1}^N u^p g_p\right) \rho^{i,j,m}(du)\pi_i}. \tag{П.6}$$

Найдем $\mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{a_1^s}(\omega)\Phi_1\right\}$:

$$\mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{a_1^s}(\omega)\Phi_1\right\} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^M} \int\limits_{\mathcal{D}} \frac{\phi_1(y) \sum\limits_{k,\ell=1}^N \sum\limits_{n=0}^s \mathcal{N}\left(y, fv, \sum\limits_{q=1}^N v^q g_q\right) \rho^{k,\ell,n}(dv)\pi_k}{\sum\limits_{i,j=1}^N \sum\limits_{m=0}^s \int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(y, fu, \sum\limits_{p=1}^N u^p g_p\right) \rho^{i,j,m}(du)\pi_i} dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^M} \phi_1(y) \frac{\sum\limits_{k,\ell=1}^N \sum\limits_{n=0}^s \int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(y, fv, \sum\limits_{q=1}^N v^q g_q\right) \rho^{k,\ell,n}(dv)\pi_k}{\sum\limits_{i,j=1}^N \sum\limits_{m=0}^s \int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(y, fu, \sum\limits_{p=1}^N u^p g_p\right) \rho^{i,j,m}(du)\pi_i} dy = \tag{П.7}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^M} \phi_1(y) dy.$$

Рассмотрим неотрицательную интегрируемую функцию $\phi_2 = \phi_1(y_1, y_2) : \mathbb{R}^{2M} \to \mathbb{R}_+$ и $\mathcal{O}_2$-измеримую случайную величину

$$\Phi_2 \triangleq \frac{\phi_1(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2)}{\mathbf{1}\Xi_{1,2}^\top(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2)\pi} =$$

$$= \frac{\phi_2(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2)}{\sum\limits_{i,i_2,j=1}^N \sum\limits_{m_1,m_2=0}^s \int\limits_{\mathcal{D}} \int\limits_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(\mathcal{Y}_1, fu_1, \sum\limits_{p_1=1}^N u^{p_1} g_{p_1}\right) \mathcal{N}\left(\mathcal{Y}_2, fu_2, \sum\limits_{p_2=1}^N u^{p_2} g_{p_2}\right) \rho^{i,i_2,m_1}(du_1)\rho^{i_2,j,m_2}(du_2)\pi_i}$$

и найдем $\mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{A_2^s}(\omega)\Phi_2\right\}$:

$$\mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{A_2^s}(\omega)\Phi_2\right\} = \int\limits_{\mathbb{R}^M}\int\limits_{\mathbb{R}^M} \phi_2(y_1, y_2) \times$$

$$\times \frac{\sum\limits_{k,k_2,\ell=1}^{N}\sum\limits_{n_1,n_2=0}^{s}\int\limits_{\mathcal{D}}\int\limits_{\mathcal{D}}\mathcal{N}\left(y_1, fv_1, \sum\limits_{q_1=1}^{N} v^{q_1} g_{q_1}\right)\mathcal{N}\left(y_2, fv_2, \sum\limits_{q_2=1}^{N} v^{q_2} g_{q_2}\right)\rho^{k,k_2,n_1}(dv_1)\rho^{k_2,\ell,n_2}(dv_2)\pi_k}{\sum\limits_{i,i_2,j=1}^{N}\sum\limits_{m_1,m_2=0}^{s}\int\limits_{\mathcal{D}}\int\limits_{\mathcal{D}}\mathcal{N}\left(y_1, fu_1, \sum\limits_{p_1=1}^{N} u^{p_1} g_{p_1}\right)\mathcal{N}\left(y_2, fu_2, \sum\limits_{p_2=1}^{N} u^{p_2} g_{p_2}\right)\rho^{i,i_2,m_1}(du_1)\rho^{i_2,j,m_2}(du_2)\pi_i}\times$$

$$\times\, dy_2 dy_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^M}\int\limits_{\mathbb{R}^M} \phi_2(y_1, y_2) dy_2 dy_1.$$

Справедливость утверждения леммы в общем случае $\mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{A_r^s}(\omega)\Phi_r\right\}$ проверяется аналогично. Лемма 3 доказана.

Оценим сверху норму ошибки $\Delta_r = \widetilde{x}_r - \overline{x}_r$. Из определения матриц Ξ, Ψ и Γ следует, что

$$\Gamma_{1,r} \triangleq \Psi_{1,r} - \Xi_{1,r} = \sum_{t=1}^{r} \Psi_{1,t-1}\gamma_t \Psi_{t+1,r}. \tag{П.8}$$

Проводя преобразования, аналогичные выкладкам для Δ_1, получаем, что

$$\begin{aligned} \|\Delta_r\|_1 &\leqslant \frac{1}{\mathbf{1}\Xi_{1,r}^\top \pi}\left\|\left[\Gamma_{1,r}^\top \pi \mathbf{1} - \mathbf{1}\Gamma_{1,r}^\top \pi I\right]\right\|_1 \leqslant \\ &\leqslant 2\sum_{t=1}^{r} \frac{1}{\mathbf{1}\Xi_{1,r}^\top \pi}\mathbf{1}\Psi_{t+1,r}^\top \overline{\gamma}_t^\top \Psi_{1,t-1}^\top \pi. \end{aligned} \tag{П.9}$$

Для оценки вклада каждого слагаемого в (П.9) используем (П.5). Для простоты изложения рассмотрим случай $r = 3$, функцию $\phi(y_1, y_2, y_3) : \mathbb{R}^{3M} \to$ $\to \mathbb{R}_+$

$$\phi(y_1, y_2, y_3) = \mathbf{1}\psi^\top(y_3)\overline{\gamma}^\top(y_2)\psi^\top(y_1)\pi$$

и O_3-измеримую случайную величину $\Phi \triangleq \frac{\phi(\mathcal{Y}_1,\mathcal{Y}_2,\mathcal{Y}_3)}{\mathbf{1}\Xi_{1,3}^\top(\mathcal{Y}_1,\mathcal{Y}_2,\mathcal{Y}_3)\pi}$. Оценим сверху следующее математическое ожидание:

$$\mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{A_3^s}(\omega)\Phi\right\} = \int\limits_{\mathbb{R}^M}\int\limits_{\mathbb{R}^M}\int\limits_{\mathbb{R}^M}\sum_{i,j,k,m=1}^{N} \pi_i \psi^{ij}(y_1)\overline{\gamma}^{jk}(y_2)\psi^{km}(y_3) dy_3 dy_2 dy_1 =$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{N} \pi_i \sum_{\ell=1}^{L} \varrho_\ell^{ij} \int\limits_{\mathbb{R}^M} \overline{\gamma}^{jk}(y_2) dy_2 \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{L} \varrho_n^{km} =$$

$$= \mathfrak{W}\sum_{i,j=1}^{N} \pi_i \sum_{\ell=1}^{L} \varrho_\ell^{ij} \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{\mathbb{R}^M} \overline{\gamma}^{jk}(y_2) dy_2 \leqslant \mathfrak{W}\delta \sum_{i=1}^{N}\pi_i \sum_{j=1}^{N}\sum_{\ell=1}^{L} \varrho_\ell^{ij} \leqslant \mathfrak{W}^2\delta.$$

Действуя аналогичным образом, можно показать, что для произвольного $r \geqslant 2$

$$\mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{A_r^s}(\omega)\frac{\mathbf{1}\Psi_{t+1,r}^{\top}\overline{\gamma}_t^{\top}\Psi_{1,t-1}^{\top}\pi}{\mathbf{1}\Xi_{1,r}^{\top}\pi}\right\} \leqslant \mathfrak{W}^{r-1}\delta.$$

Тогда окончательно $\mathsf{E}\Big\{\mathbf{I}_{A_r^s}(\omega)\|\Delta_r\|_1\Big\} \leqslant 2r\mathfrak{W}^{r-1}\delta$, и истинность второго неравенства (5.8) следует из того, что неравенство вверху выполняется для любого $\pi \in \Pi$.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wonham W.* Some applications of stochastic differential equations to optimal nonlinear filtering // SIAM J. Contr. Optim. 1964. P. 347–369.
2. *Rabiner L.R.* A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition // Proc. IEEE. 1989. V. 77. P. 257–286.
3. *Ephraim Y., Merhav N.* Hidden Markov processes // IEEE Transactions on Information Theory. 2002. V. 48. No. 6. P. 1518–1569.
4. *Cappé O., Moulines E., Ryden T.* Inference in Hidden Markov Models. Berlin: Springer, 2005.
5. *Elliott R.J., Aggoun L., Moore J.B.* Hidden Markov Models: Estimation and Control. New York: Springer, 2008.
6. *Kloeden P., Platen E.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer, 1992.
7. *Kahaner D., Moler C., Nash S.* Numerical Methods and Software. New Jersey: Prentice Hill, 1989.
8. *Isaacson E., Keller H.* Analysis of Numerical Methods. New York: Dover Publications, 1994.
9. *Stoer J., Bulirsch R.* Introduction to Numerical Analysis. New York: Springer, 1993.
10. *Кушнер Г.* Вероятностные методы аппроксимации в стохастических задачах управления и теории эллиптических уравнений. М.: Физматлит, 1985.
11. *Kushner H., Dupuis P.* Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time. New York: Springer, 2001.
12. *Ito K., Rozovskii B.* Approximation of the Kushner Equation for Nonlinear Filtering // SIAM J. Contr. Optim. 2000. V. 38. No. 3. P. 893–915.
13. *Clark J.* The design of robust approximations to the stochastic differential equations of nonlinear filtering / J.K. Skwirzynski (ed.), Communication systems and random process theory. Amsterdam. Sijthoff and Noordhoff, 1978.
14. *Malcolm V., Elliott R., van der Hoek J.* On the numerical stability of time-discretized state estimation via Clark transformations // Proc. 42nd IEEE Conf. Decis. Contr. 2003. Maui. P. 1406–1412.
15. *Yin G., Zhang Q., Liu Y.* Discrete-time approximation of Wonham filters // J. Control Theory Appl. 2004. No. 2. P. 1–10.
16. *Platen E., Bruti-Liberati N.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance. Berlin: Springer, 2010.

17. *Crisan D., Kouritzin M., Xiong J.* Nonlinear filtering with signal dependent observation noise // Electron. J. Probab. 2009. No. 14. P. 1863–1883.

18. *Dragan V., Morozan T., Stoica A.* Mathematical Methods in Robust Control of Discrete-Time Linear Stochastic Systems. New York: Springer, 2010.

19. *Dragan V., Aberkane S.* $\mathcal{H}_2$-Optimal Filtering for Continuous-Time Periodic Linear Stochastic Systems with State-Dependent Noise // Syst. Control Lett. 2014. No. 66. P. 35–42.

20. *Борисов А.В.* Фильтрация Вонэма по наблюдениям с мультипликативными шумами // АиТ. 2018. № 1. С. 52–65.

    Borisov A.V. Wonham Filtering by Observations with Multiplicative Noises // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 1. P. 39–50.

21. *Борисов А.В.* Применение методов оптимальной фильтрации для оперативного оценивания состояний сетей массового обслуживания // АиТ. 2016. № 2. С. 115–141.

    Borisov A.V. Application of Optimal Filtering Methods for On-Line of Queueing Network States // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 2. P. 277–296.

22. *Хубер П.* Робастность в статистике. М.: Мир, 1984.

23. *Anderson B., Moore J.* Optimal Filtering. New Jersey: Prentice Hill, 1979.

24. *Takeuchi Y., Akashi H.* Least-squares state estimation of systems with state-dependent observation noise // Automatica. 1985. V. 21. No. 3. P. 303–313.

25. *Борисов А.В.* Фильтрация состояний марковских скачкообразных процессов по дискретизованным наблюдениям // Информатика и ее применения. 2018. Т. 12. №. 3. С. 115–121.

26. *Bäuerle N., Gilitschenski I., Hanebeck U.* Exact and Approximate Hidden Markov Chain Filters Based on Discrete Observations // Statistics & Risk Modeling. 2016. V. 32. No. 3–4. P. 159–176.

27. *James M., Krishnamurthy V., Le Gland F.* Time Discretization of Continuous-Time Filters and Smoothers for HMM Parameter Estimation // IEEE Trans. Autom. Contr. 1996. V. 42. No. 2. P. 593–605.

28. *Бертсекас Д., Шрив С.* Стохастическое оптимальное управление. Случай дискретного времени. М.: Физматлит, 1985.

29. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.

30. *Cvitanić J., Liptser R., Rozovskii B.* A filtering approach to tracking volatility from prices observed at random times //Annals Appl. Probab. 2006. V. 16. No. 3. P. 1633–1652.

31. *Боровков А.А.* Асимптотические методы в теории массового обслуживания. М.: Физматлит, 1995.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 20.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020

© 2020 г. А.В. БОСОВ, д-р техн. наук (abosov@frccsc.ru)
(Институт проблем информатики Федерального исследовательского центра "Информатика и управление" РАН, Москва;
Московский авиационный институт)

ПРИМЕНЕНИЕ УСЛОВНО-ОПТИМАЛЬНОГО ФИЛЬТРА ДЛЯ СИНТЕЗА СУБОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ВЫХОДА НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ[1]

Предложено субоптимальное решение задачи управления для диффузионного процесса Ито и линейного управляемого выхода с квадратичным критерием качества для случая косвенных наблюдений за состоянием. Используется полученное ранее решение задачи с полной информацией, концепция разделения задач управления и фильтрации и метод условно-оптимальной фильтрации В.С. Пугачева. Предлагается альтернатива традиционному практическому подходу к синтезу субоптимального управления в задаче с неполной информацией, состоящему в формальной замене в решении состояния на его оценку. Вместо задачи оптимизации выхода, порождаемого исходной моделью дифференциального уравнения, в качестве состояния используется оценка условно-оптимального фильтра. Предложен вариант численной реализации предлагаемого алгоритма на основе метода Монте-Карло и компьютерного моделирования.

Ключевые слова: стохастическое дифференциальное уравнение; стохастическая дифференциальная система; оптимальное управление; стохастическая фильтрация; условно-оптимальная фильтрация; метод Монте-Карло.

DOI: 10.31857/S0005231020110033

1. Введение

Рассматриваемая в статье задача может быть отнесена к традиционной задаче оптимального управления дифференциальными стохастическими системами. Не претендуя на полный обзор, упомянем некоторые результаты и методы, важные в контексте данной статьи. Заметим, что рассматриваемая задача в постановке с полной информацией о состоянии решается классическими методами, так же как и основанными на них приближенными методами поиска оптимальных управлений (см., например, [1–3]). Наибольшей полнотой и результативностью обладает задача управления линейно-гауссовскими стохастическими системами по квадратичному критерию [4]. Классические модели и методы сохраняют актуальность и составляют источники вполне

[1] Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19-07-00187-А).

современных исследований. Например, метод динамического программирования применяется в [5] для сравнительно нового класса логико-динамических систем, квадратичный критерий для квазилинейных систем используется, например, в [6], традиционные описания нелинейных систем управления в пространстве состояний дополняются альтернативными методами, например спектральным [7].

Существенно меньшее внимание привлекают постановки, в которых доступность состояния ограничивается. Здесь имеются результаты для моделей, в которых известными предполагается лишь часть координат вектора состояния (пионерская публикация [8], также см., например, [9, 10]). И, конечно, основополагающее значение имеет теорема разделения задач управления и фильтрации состояния в классической линейно-гауссовской задаче с минимальными обобщениями на функционал [11] (см. также обзор [12]). Следует упомянуть также о результатах применения принципа разделения в задачах управления пучками траекторий детерминированных систем [13, 14]. Общая теория стохастического управления для случая косвенных наблюдений основана на уравнении Дункана–Мортенсена–Закаи, описывающего эволюцию апостериорной плотности вероятности и уравнение динамического программирования в вариационных производных [15], развивался этот подход в [16–18]. Исследования в этой области остаются актуальными – один из примеров современных работ в данной области это решение, полученное в [19] для модели управляемой марковской цепи.

Практически востребованными являются именно задачи с неполной информацией о состоянии, с косвенными наблюдениями. В этих задачах ключевую роль играют уже методы стохастической фильтрации. Задача фильтрации, конечно, имеет собственное значение как инструмент обработки результатов экспериментов, идентификации параметров математических моделей. Но важна и вспомогательная функция фильтров, оценками которых заменяют значения фазовых координат в синтезированных по полной информации управлениях. Используемые при этом оценки фильтрации, как правило, не являются оптимальными. Их характеризуют термином “субоптимальность”, который означает, что эти оценки, хотя и не являются оптимальными, но обладают точностью, достаточной для решения некоторого класса практических задач оценивания. Такой подход к управлению уместно охарактеризовать как применение принципа разделения, т.е. обособленного решения задач управления и оценивания состояний с последующим объединением решений, подсказываемого теоремой разделения [11]. При этом понятие субоптимальности оценок фильтрации уместно распространить и на управление. Разделение, однако, далеко не всегда имеет место, и вопрос о потерях качества при формальном разделении останется, по-видимому, открытым в обозримом будущем. И это обстоятельство делает актуальным любые альтернативные подходы к синтезу субоптимальных управлений в задачах оптимизации нелинейных стохастических систем.

Одна из таких задач и альтернативный формальному разделению подход рассматриваются в данной статье. Это задача оптимизации линейного выхода, порождаемого состоянием, моделью которого является нелинейное стохастическое дифференциальное уравнение Ито, по квадратичному критерию качества. Используемое оптимальное решение этой задачи [20] в данной статье анализируется в предположении отсутствия информации о состоянии и интерпретации имеющегося выхода как косвенных наблюдений. Свойства квадратичного критерия выглядят хорошим основанием для того, чтобы попытаться разделить задачи управления и фильтрации в стиле классического подхода [11]. Однако структура оценки оптимальной фильтрации [21] этого сделать не позволяет, что делает логичным отказ от использования уравнений оптимальной фильтрации. Применение же вместо оптимального фильтра оценки по методу условно-оптимальной фильтрации (УОФ) В.С. Пугачева [22] позволяет не только получить практически реализуемый подход к синтезу субоптимального управления в рассматриваемой постановке на основе разделения, но и предложить альтернативный подход, заменив исходную задачу задачей оптимизации выхода, порождаемого оценкой УОФ. Описание соответствующего алгоритма и варианта его численной реализации и составляют основную цель статьи.

Изложение организовано следующим образом. Используемый результат решения рассматриваемой задачи управления для случая полной информации кратко приведен в разделе 3, вопросам разделения и оптимальной фильтрации в задаче с косвенными наблюдениями посвящен раздел 4, в разделе 5 описан предлагаемый подход к синтезу субоптимального управления на основе УОФ. В разделе 2 кратко обсуждается предполагаемая область практического применения обсуждаемой постановки, в заключении сформулированы задачи ближайшей перспективы.

2. Перспективная область практического применения задачи управления выходом

Задачи стохастического оптимального управления изучаются давно и имеют множество прикладных интерпретаций. Сравнительно новую область применения обеспечило развитие информационных технологий (ИТ) и исследования математических моделей для информационно-телекоммуникационных систем. Прообразом современных исследований можно, видимо, считать публикации [23, 24], предложившие модели для описания функционирования телефонных сетей. Эти простые модели можно рассматривать как прототип для моделей на основе цепей Маркова [25, 19], используемых для описания процессов пересылки пакетов в компьютерных сетях, управляемых протоколами стека TCP/IP, в том числе и моделей протоколов на основе скачкообразных марковских процессов [26, 27]. Использование таких моделей существенно усложняется с ростом числа возможных состояний, поэтому применение в этой области нашли диффузионные аппроксимации [28, 29].

Но одними телекоммуникациями область ИТ не исчерпывается. К другому кругу относятся, например, задачи распределения ресурсов программных систем. Надо отметить, что понятие ИТ-ресурса имеет довольно специфическое содержание. Так говорят про сайты, базы данных и банки знаний, наконец, про вычислительные ресурсы, узлы распределенных систем, компоненты центров обработки данных и т.д. Не все такие ресурсы материальны, часть – виртуальны по сути (программа, сайт, виртуальная машина, банк данных, поисковый запрос и т.п.). Все такие виртуальные ресурсы, как нетрудно заметить, объединяет то, что реализуются они некоторыми программными средствами, системами: или сами являются элементами программ или ими обслуживаются. В рамках таких программных систем процедуры управления ресурсами реализуются повсеместно. Традиционные примеры – это менеджеры задач, оптимизаторы запросов в системах управления базами данных, системы балансировки нагрузки [30–32]. В качестве моделей для постановки задач оптимизации функционирования программных систем, конечно, наиболее естественными представляются системы массового обслуживания, т.е. уже упомянутые модели на основе цепей Маркова. Аргумент против этих моделей тот же – большие значения для числа состояний, принимающие в реальных задачах значения порядка сотен тысяч и более, например, если речь идет об обработке пользовательских запросов в часы пиковых нагрузок. К применению альтернативного описания процессов в таких задачах в форме диффузионной аппроксимации подталкивают хорошо известные классические результаты о сходимости марковских процессов к диффузионным [34]. А практическую применимость такого подхода к моделированию процессов в ИТ показывают, например, уже цитированные публикации [28, 29], инициированные тем же обстоятельством – значительным ростом числа состояний цепи из-за роста числа пакетов, обслуживаемых сетевым протоколом.

Таким образом, обозначая распределение ресурсов программной системы в качестве области для практического применения рассматриваемой в данной статье задачи оптимизации, можно обоснованно использовать в качестве модели состояния такой системы (переменой, характеризующей число пользователей, запросов, буферов памяти, процессорного времени и т.п.) диффузионный процесс, описываемый стохастическим дифференциальным уравнением Ито. При этом под объемом ресурсов можно понимать линейное выражение, связывающее состояние и переменную, определяющую активное действие программной системы – объем выделенных или освобожденных ресурсов. Наконец, надо заметить, что рассматриваемая задача порождена именно такой практической интерпретацией, представленной в [35] для случая дискретного времени.

3. Постановка и решение задачи управления выходом

Решение рассматриваемой в данной статье задачи управления линейным выходом стохастической дифференциальной системы по квадратичному критерию качества при наличии полной информации получено в [20] для скалярного случая. Используя здесь этот результат, отметим, что метод УОФ ограничений на размерности системных переменных не предъявляет, поэтому рассмотрение скалярной постановки не ограничит его применимость в дальнейшем, а для целей данной статьи скалярного случая достаточно. В обсуждаемой постановке задачи управления выходом используются описываемые уравнениями Ито переменная состояния y_t и связанный с ней линейно выход z_t:

$$dy_t = A_t\left(y_t\right)dt + \Sigma_t\left(y_t\right)dv_t, \quad y_0 = Y, \tag{1}$$

$$dz_t = a_t y_t dt + b_t z_t dt + c_t u_t dt + \sigma_t dw_t, \quad z_0 = Z, \tag{2}$$

где v_t, w_t — стандартные независимые винеровские процессы, начальные условия Y, Z — независимые друг от друга и от v_t, w_t случайные величины с конечным вторым моментом. Предполагается, что функции A_t, Σ_t удовлетворяют условиям Ито [3]

$$|A_t(y)| + |\Sigma_t(y)| \le C(1 + |y|) \quad \text{для всех} \quad 0 \le t \le T, \quad y \in \mathbb{R}^1,$$
$$|A_t(y_1) - A_t(y_2)| + |\Sigma_t(y_1) - \Sigma_t(y_2)| \le C|y_1 - y_2|$$
$$\text{для всех} \quad 0 \le t \le T \quad \text{и} \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R}^1,$$

обеспечивающим существование единственного решения уравнения (1), функции a_t, b_t, c_t, σ_t являются ограниченными, процесс управления u_t – допустимым неупреждающим [3]. Предположение наличия полной информации о состоянии y_t и выходе z_t означает, что допустимое управление ищется в классе $\mathcal{F}_t^{y,z}$-измеримых неупреждающих функций (далее через $\mathcal{F}_t^x$ обозначается σ-алгебра, порожденная компонентами x_s, $0 \le s \le t$), обеспечивающих существование решения (2).

Оптимизируется квадратичный целевой функционал вида:

$$(3)\quad J\left(U_0^T\right) = \mathrm{E}\left\{\int_0^T \Big(S_t(s_t y_t - g_t z_t - h_t u_t)^2 + G_t z_t^2 + H_t u_t^2\Big)dt + \right.$$
$$\left. + S_T(s_T y_T - g_T z_T)^2 + G_T z_T^2\right\}, \quad U_0^T = \{u_t,\, 0 \le t \le T\},$$

где S_t, G_t, H_t – неотрицательные ограниченные функции.

Такой функционал отражает практическое содержание обсуждаемой выше задачи распределения ресурсов. Так, (3) позволяет ставить задачи отслеживания выходом состояния $(y_t - z_t)^2$ или управлением выхода $(z_t - u_t)^2$, учитывая при этом расходы на управляющее воздействие u_t^2 и/или значение выходной переменной z_t^2.

Решение задачи дает метод динамического программирования. Удается показать, что функция Беллмана имеет вид $V_t(y,z) = \alpha_t z^2 + \beta_t(y)z + \gamma_t(y)$. Задача, таким образом, сводится к выводу уравнений для коэффициентов α_t, $\beta_t(y)$, $\gamma_t(y)$, который выполнен в [20]. Именно: для коэффициента α_t получено уравнение Риккати, для коэффициентов $\beta_t(y)$, $\gamma_t(y)$ – линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка параболического типа, при этом оптимальным оказалось управлением с обратной связью

$$(4)\quad u_t^* = u_t^*(y_t, z_t) = -\frac{1}{2}\left(S_t h_t^2 + H_t\right)^{-1}\left(c_t(2\alpha_t z_t + \beta_t(y_t)) + 2S_t(s_t y_t - g_t z_t)h_t\right).$$

Постановка рассматриваемой далее задачи включает те же элементы (1)–(3) с тем отличием, что допустимыми считаются управления из класса $\mathcal{F}_t^z$-измеримых неупреждающих функций, т.е. в отношении переменной состояния y_t отсутствует точная информация, а выходная переменная z_t интерпретируется как косвенное наблюдение.

4. Управление на основе принципа разделения

В данном разделе дополнительно используется обозначение $\mathrm{E}\{\bullet\,|\mathcal{F}_t^x\}$ – условное математическое ожидание относительно $\mathcal{F}_t^x$.

Согласно классической теореме разделения в линейно-гауссовской стохастической системе [11] задачу управления можно решать в два этапа: сначала решить задачу с полной информацией, определившись с законом управления в форме обратной связи от текущего состояния, затем решить задачу фильтрации и заменить полученной оценкой состояние в решении задачи управления по полной информации. В рассматриваемой здесь задаче имеется результат для случая полной информации $u_t^* = u_t^*(y_t, z_t)$, оценка фильтрации пусть будет обозначена через $\widetilde{y}_t = \mathrm{E}\{y_t\,|\mathcal{F}_t^z\}$, а соответствующее управление $u_t^s = u_t^*(\widetilde{y}_t, z_t)$ следует интерпретировать как субоптимальное решение рассматриваемой задачи с неполной информацией, полученное согласно принципу разделения (индекс s принят от английского separation). Обозначение $\widetilde{y}_t$ для оптимальной оценки вместо традиционного $\widehat{y}_t$ использовано здесь с целью сохранить последнее для обозначения оценки УОФ. При этом задача фильтрации, т.е. вычисления $\widetilde{y}_t$, не совсем “отделена” от задачи управления, так как имеется зависимость оценки $\widetilde{y}_t$ от реализуемого закона управления, поскольку u_t явно входит в уравнение (2) для z_t. Более того, это делает возможным наличие в задаче дуального эффекта [36], т.е. влияния закона управления на качество оценивания состояния. Этот аспект в задаче оценивания состояния (1) по наблюдениям (2) требует отдельного обсуждения. В рамках обсуждения, во-первых, предлагается выполнить замену переменных в (2), избавляясь от слагаемых $b_t z_t dt$ и $c_t u_t dt$. Для выполнения замены обозначим

$$B_t = \exp\left\{-\int_0^t b_s ds\right\} \quad \text{и} \quad \widetilde{z}_t = B_t z_t - \int_0^t B_s c_s u_s ds.$$

Учитывая далее, что $dB_t = -b_t B_t dt$, получаем $d\widetilde{z}_t = a_t B_t y_t dt + \sigma_t B_t dw_t$ или

$$d\widetilde{z}_t = \widetilde{a}_t y_t dt + \widetilde{\sigma}_t dw_t \tag{5}$$

с дополнительными обозначениями $\widetilde{a}_t = a_t B_t$, $\widetilde{\sigma}_t = \sigma_t B_t$. Выполненные преобразования при этом не влияют на решение задачи фильтрации в том смысле, что $\widetilde{y}_t = \mathrm{E}\{y_t\,|\mathcal{F}_t^z\} = \mathrm{E}\left\{y_t\,\middle|\mathcal{F}_t^{\widetilde{z}}\right\}$, поскольку использованная для получения $\widetilde{z}_t$ замена является линейным невырожденным преобразованием z_t.

Таким образом, $\widetilde{y}_t$ не зависит от u_t, и в качестве наблюдений можно использовать $\widetilde{z}_t$, получая одну и ту же оценку состояния для любого допустимого управления. Соответственно вместо задачи оценивания состояния по наблюдениям z_t, зависящим от реализуемого закона управления, можно рассматривать эквивалентную задачу оценивания y_t по наблюдениям $\widetilde{z}_t$, описываемым уравнением (5) и не зависящим от u_t.

Второй обсуждаемый аспект разделения – это вычисление оптимальной оценки состояния системы (1) по наблюдениям (5). Наложенные выше ограничения обеспечивают существование этой оценки и принципиальную возможность использования для нее общих уравнений нелинейной фильтрации на основе обновляющих процессов [21], имеющих в рассматриваемом случае вид

$$
d\widetilde{y}_t = \widetilde{A}_t dt + \frac{\widetilde{\Sigma}_t}{\widetilde{\sigma}_t} d\widetilde{v}_t, \quad \widetilde{y}_0 = \mathrm{E}\left\{ Y \right\}, \tag{6}
$$

где

$$
\widetilde{A}_t = \mathrm{E}\left\{ A_t\left(y_t\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_t^{\widetilde{z}} \right\}, \quad \widetilde{\Sigma}_t = \widetilde{a}_t \mathrm{E}\left\{ y_t\left(y_t - \widetilde{y}_t\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_t^{\widetilde{z}} \right\},
$$

$$
d\widetilde{v}_t = \frac{1}{\widetilde{\sigma}_t}\Big(d\widetilde{z}_t - \widetilde{a}_t \widetilde{y}_t dt \Big).
$$

Обновляющий процесс $\widetilde{v}_t$ является стандартным винеровским относительно $\mathcal{F}_t^{\widetilde{z}}$.

Разделяя задачи, следует рассматривать (6) как уравнение состояния, учитывая, что наблюдения (5) переписывается в виде

$$
d\widetilde{z}_t = \widetilde{a}_t \widetilde{y}_t dt + \widetilde{\sigma}_t d\widetilde{v}_t, \quad \widetilde{z}_0 = Z. \tag{7}
$$

Таким образом, имеются уравнение состояния (6) для переменной $\widetilde{y}_t$ и линейное уравнение наблюдения (7) для переменной $\widetilde{z}_t$, которые можно использовать для постановки эквивалентной задачи оптимизации линейного выхода по полной информации. Поддерживает это и возможность представления целевого функционала (3) в виде

$$
J\left(U_0^T\right) = \mathrm{E}\left\{ \int_0^T \Big(S_t\left(s_t \widetilde{y}_t - g_t z_t - h_t u_t\right)^2 + G_t z_t^2 + H_t u_t^2 \Big) dt + \right.
$$

$$
\left. + S_T\left(s_T \widetilde{y}_T - g_T z_T\right)^2 + G_T z_T^2 \right\} +
$$

$$
+ \mathrm{E}\left\{ \int_0^T S_t s_t^2 \left(y_t - \widetilde{y}_t\right)^2 dt + S_T s_T^2 \left(y_t - \widetilde{y}_T\right)^2 \right\}.
$$

Здесь оставлена без замены переменная $z_t = B_t^{-1}\left(\widetilde{z}_t + \int_0^t B_s c_s u_s ds\right)$, которую не трудно выполнить, дополнив выход вспомогательной переменной, но главное – это выделено второе слагаемое, определяющее вклад в целевой функционал ошибки оценивания, который можно исключить из эквивалентной оптимизационной постановки.

Перечисленное исчерпывает обсуждение принципа разделения в рассматриваемой задаче, поскольку, даже сохранив структуру наблюдений и целевого функционала, получить уравнение оценки в дифференциальной форме (1) не удастся, а значит, отсутствует главное условие разделения – готовое решение задачи управления по полной информации. Единственным результатом обсуждения можно считать предположение о целесообразности использования в рассматриваемой задаче управления оценки фильтрации и если эта оценка будет неоптимальной, то результат управления будет тем лучше, чем ближе оценка к оптимальной. В отношении же управления u_t^s остается заметить, что оно было бы оптимальным для задачи с полной информацией с состоянием y_t вида $dy_t = A_t\left(y_t\right)dt + \frac{\Sigma_t(y_t)}{\sigma_t}dv_t$, выходом (2) и целевым функционалом (3). Такое уравнение состояния можно интерпретировать как нулевое приближение решения задачи оптимальной фильтрации (6).

5. Управление на основе условно-оптимального фильтра

Основной проблемой реализации принципа разделения в рассматриваемой задаче все-таки представляются сложности реализации оптимальной оценки $\widetilde{y}_t$. Отказаться от нее предлагается в пользу решения задачи оценивания методом УОФ В.С. Пугачева [22]. Условно-оптимальная оценка $\widehat{y}_t$ состояния системы (1) по наблюдениям (5), не зависящим от выбора допустимого управления, ищется в виде

$$d\widehat{y}_t = \widehat{\alpha}_t\xi_t\left(\widehat{y}_t, \widetilde{z}_t\right)dt + \widehat{\beta}_t\zeta_t\left(\widehat{y}_t, \widetilde{z}_t\right)dz_t + \widehat{\gamma}_t dt, \quad \widehat{y}_0 = \mathrm{E}\left\{Y\right\}, \tag{8}$$

где $\widehat{\alpha}_t,\ \widehat{\beta}_t,\ \widehat{\gamma}_t$ – ограниченные функции времени, выполняющие роль параметров, функции $\xi_t\left(y,z\right)$ и $\zeta_t\left(y,z\right)$ – заданные структурные функции, выбираемые из эмпирических соображений. Будем предполагать, что для обеспечения условий существования решения (8) на структурные функции ξ_t, ζ_t наложены те же ограничения, что и в (1), т.е.

$$\begin{gathered}
\left|\xi_t\left(y,z\right)\right| + \left|\zeta_t\left(y,z\right)\right| \le C\left(1 + |y| + |z|\right) \quad \text{для всех} \quad 0 \le t \le T, \quad y, z \in \mathbb{R}^1, \\
\left|\xi_t\left(y_1,z_1\right) - \xi_t\left(y_1,z_1\right)\right| + \left|\zeta_t\left(y_1,z_1\right) - \zeta_t\left(y_2,z_2\right)\right| \le C\left(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|\right) \\
\text{для всех} \quad 0 \le t \le T \quad \text{и} \quad y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}^1.
\end{gathered}$$

Рекомендации в части выбора структурных функций для рассматриваемой модели наблюдения можно, например, сформулировать на основании структуры оптимальной оценки (6), а именно положить

$$\xi_t = A_t\left(\widehat{y}_t\right) - \frac{\Sigma_t\left(\widehat{y}_t\right)}{\widetilde{\sigma}_t^2}\widetilde{a}_t\widehat{y}_t$$

и

$$\zeta_t = \frac{\Sigma_t\left(\widehat{y}_t\right)}{\widetilde{\sigma}_t^2},$$

т.е. искать оценку УОФ в виде

$$d\widehat{y}_t = \widehat{\alpha}_t\left(A_t\left(\widehat{y}_t\right) - \frac{\Sigma_t\left(\widehat{y}_t\right)}{\widetilde{\sigma}_t^2}\widetilde{a}_t\widehat{y}_t\right)dt + \widehat{\beta}_t\frac{\Sigma_t\left(\widehat{y}_t\right)}{\widetilde{\sigma}_t^2}d\widetilde{z}_t + \widehat{\gamma}_t dt, \quad \widehat{y}_0 = \mathrm{E}\left\{Y\right\}. \tag{9}$$

При этом коэффициенты $\widehat{\alpha}_t$, $\widehat{\beta}_t$, $\widehat{\gamma}_t$ УОФ выбираются так, что обеспечивают оценке фильтра (9) несмещенность и гарантированное качество, лучшее на некотором классе допустимых фильтров [22]. Такой выбор структурных функций обосновывается представлением оценки УОФ (9) в виде

$$d\widehat{y}_t = \left(\widehat{\alpha}_t A_t\left(\widehat{y}_t\right) + \widehat{\gamma}_t\right) dt + \frac{\Sigma_t\left(\widehat{y}_t\right)}{\widetilde{\sigma}_t}\left(\frac{1}{\widetilde{\sigma}_t}\left(\widehat{\beta}_t d\widetilde{z}_t - \widehat{\alpha}_t \widetilde{a}_t \widehat{y}_t dt\right)\right),$$

воспроизводящем структуру оптимального фильтра (6). Другое представление (9)

$$\begin{aligned} d\widehat{y}_t = &\left(\widehat{\alpha}_t A_t\left(\widehat{y}_t\right) + \left(\widehat{\beta}_t - \widehat{\alpha}_t\right)\frac{\Sigma_t\left(\widehat{y}_t\right)}{\widetilde{\sigma}_t^2}\widetilde{a}_t\widehat{y}_t + \widehat{\gamma}_t\right) dt + \\ &+ \widehat{\beta}_t \frac{\Sigma_t\left(\widehat{y}_t\right)}{\widetilde{\sigma}_t}\left(\frac{1}{\widetilde{\sigma}_t}\left(d\widetilde{z}_t - \widetilde{a}_t\widehat{y}_t dt\right)\right) \end{aligned} \tag{10}$$

позволяет предложить замену в рассматриваемой задаче управления уравнению состояния, положив

$$dy_t = \left(\widehat{\alpha}_t A_t\left(y_t\right) + \left(\widehat{\beta}_t - \widehat{\alpha}_t\right)\frac{\Sigma_t\left(y_t\right)}{\widetilde{\sigma}_t^2}\widetilde{a}_t y_t + \widehat{\gamma}_t\right) dt + \widehat{\beta}_t\frac{\Sigma_t\left(y_t\right)}{\widetilde{\sigma}_t} dv_t \tag{11}$$

при сохранении выхода (2) и целевого функционала (3) и предполагая наличие полной информации. Такое представление уравнения состояния основано на аппроксимации процесса $d\widehat{v}_t = \frac{1}{\widetilde{\sigma}_t}\left(d\widetilde{z}_t - \widetilde{a}_t\widehat{y}_t dt\right)$ стандартным винеровским процессом v_t. Последнее точно имеет место в случае оптимального фильтра $\widetilde{y}_t$, а значит, можно рассчитывать на качественную аппроксимацию в случае, когда оценка УОФ $\widehat{y}_t$ близка к оптимальной $\widetilde{y}_t$.

Таким образом, по аналогии с управлением u_t^s получается еще один вариант неформального применения принципа разделения – субоптимальное управление u_t^c вида $u_t^c = u_t^*(\widehat{y}_t, z_t)$, где $\widehat{y}_t$ – оценка УОФ (10), u_t^* определено соотношением (4) – решением исходной задачи оптимизации с полной информацией для состояния y_t, заданного уравнением (11), т.е. в уравнениях для коэффициентов α_t, $\beta_t\left(y\right)$ вместо $A_t\left(y_t\right)$ используется $\widehat{\alpha}_t A_t\left(y_t\right) + \left(\widehat{\beta}_t - \widehat{\alpha}_t\right) \times$ $\times\frac{\Sigma_t(y_t)}{\widetilde{\sigma}_t^2}\widetilde{a}_t y_t + \widehat{\gamma}_t$, а вместо $\Sigma_t\left(y_t\right)$ используется $\widehat{\beta}_t\frac{\Sigma_t(y_t)}{\widetilde{\sigma}_t}$.

Нетрудно видеть, что для использования имеющегося решения (4) требуется, чтобы коэффициенты $\widehat{\alpha}_t$, $\widehat{\beta}_t$, $\widehat{\gamma}_t$ в уравнении (11) были заданы. Соответствующие соотношения для УОФ приведены в [22]. Соотношения представляют собой комбинации моментных характеристик состояния y_t, наблюдений $\widetilde{z}_t$, структурных функций ξ_t, ζ_t и не зависят, как показано выше, от реализуемого закона управления u_t, т.е. могут быть вычислены заранее, отдельно от расчетов в целях управления.

6. Численная реализация управления u_t^c

Подведем итог рассуждениям раздела 5, перечислив формальные шаги, выполняемые для реализации варианта управления u_t^c для субоптимального решения исходной задачи оптимизации, включающей уравнение (1) ненаблюдаемого состояния, уравнение (2) выхода, псевдонаблюдения (5) и целевой функционал (3), минимизируемый на классе $\mathcal{F}_t^z$-измеримых неупреждающих управлений.

Шаг 1. Рассматривается вспомогательная задача УОФ для системы наблюдения и фильтра вида:

$$
\begin{gathered}
dy_t = A_t\left(y_t\right)dt + \Sigma_t\left(y_t\right)dv_t, \quad y_0 = Y, \\
d\widetilde{z}_t = \widetilde{a}_t y_t dt + \widetilde{\sigma}_t dw_t, \quad z_0 = Z, \\
d\widehat{y}_t = \widehat{\alpha}_t \xi_t\left(\widehat{y}_t\right)dt + \widehat{\beta}_t \zeta_t\left(\widehat{y}_t\right)d\widetilde{z}_t + \widehat{\gamma}_t dt, \quad \widehat{y}_0 = \mathrm{E}\left\{Y\right\}, \\
\xi_t\left(\widehat{y}_t\right) = A_t\left(\widehat{y}_t\right) - \frac{\Sigma_t\left(\widehat{y}_t\right)}{\widetilde{\sigma}_t^2}\widetilde{a}_t\widehat{y}_t, \quad \zeta_t\left(\widehat{y}_t\right) = \frac{\Sigma_t\left(\widehat{y}_t\right)}{\widetilde{\sigma}_t^2},
\end{gathered} \tag{12}
$$

где обозначено $\widetilde{a}_t = a_t B_t$, $\widetilde{\sigma}_t = \sigma_t B_t$, $B_t = \exp\left\{-\int_0^t b_s ds\right\}$.

Решение – коэффициенты $\widehat{\alpha}_t$, $\widehat{\beta}_t$, $\widehat{\gamma}_t$ УОФ определяются системой уравнений (это частный случай решения задачи УОФ для системы наблюдения общего вида [22])

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\widehat{\gamma}_t = \mathrm{E}\left\{A_t\right\} - \widehat{\alpha}_t \mathrm{E}\left\{\xi_t\right\} - \widehat{\beta}_t\widetilde{a}_t\mathrm{E}\left\{y_t\right\}, \\
&\widehat{\beta}_t = \widetilde{a}_t\mathrm{E}\left\{\left(y_t-\widehat{y}_t\right)y_t\zeta_t\right\}/\widetilde{\sigma}_t^2\mathrm{E}\left\{\zeta_t^2\right\}, \\
&\widehat{\alpha}_t = \frac{\mathrm{E}\left\{\begin{gathered}\left(y_t-\widehat{y}_t\right)\left(\dfrac{\partial\xi_t}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\xi_t}{\partial\left(\widehat{y}_t\right)^2}(\widehat{\beta}_t\zeta_t\widetilde{\sigma}_t)^2\right) + \\ +\left(y_t-\widehat{y}_t\right)\dfrac{\partial\xi_t}{\partial\widehat{y}_t}\left(\mathrm{E}\left\{A_t\right\} + \widehat{\beta}_t\widetilde{a}_t\overline{\zeta_t y_t}\right) - \\ -\dfrac{\partial\xi_t}{\partial\widehat{y}_t}(\widehat{\beta}_t\zeta_t\widetilde{\sigma}_t)^2 + \xi_t\left(\overline{A}_t - \widehat{\beta}_t\widetilde{a}_t\overline{\zeta_t y_t}\right)\end{gathered}\right\}}{\mathrm{E}\left\{\xi_t\overline{\xi}_t - \left(y_t-\widehat{y}_t\right)\frac{\partial\xi_t}{\partial\widehat{y}_t}\overline{\xi}_t\right\}},
\end{aligned}
\right. \tag{13}
$$

где $A_t = A_t\left(y_t\right)$, $\overline{A}_t = A_t - \mathrm{E}\left\{A_t\right\}$, $\xi_t = \xi_t\left(\widehat{y}_t\right)$, $\overline{\xi}_t = \xi_t - \mathrm{E}\left\{\xi_t\right\}$, $\zeta_t = \zeta_t\left(\widehat{y}_t\right)$, $\overline{\zeta_t y_t} = \zeta_t y_t - \mathrm{E}\left\{\zeta_t y_t\right\}$.

В качестве численной реализации вычислений (13) предлагается использовать метод Монте-Карло и компьютерное моделирование. Для этого интервал управления $[0,T]$ следует разбить на отрезки равной (для простоты) малой длины Δt и смоделировать пучок траекторий для y_t и $\widetilde{z}_t$, заменив уравнения (12) их разностным аналогом, используя любую (предпочтительно явную) схему численного интегрирования [37]. Для вычисления коэффициентов $\widehat{\alpha}_t$, $\widehat{\beta}_t$, $\widehat{\gamma}_t$ в (13) в правой части использовать уже вычисленные $\widehat{\alpha}_{t-\Delta t}$, $\widehat{\beta}_{t-\Delta t}$, $\widehat{\gamma}_{t-\Delta t}$, операции $\mathrm{E}\{\bullet\}$ заменять их статистическим аналогом, для чего использовать смоделированный пучок траекторий переменных y_t, $\widetilde{z}_t$ и вычисленные с помощью $\widehat{\alpha}_{t-\Delta t}$, $\widehat{\beta}_{t-\Delta t}$, $\widehat{\gamma}_{t-\Delta t}$ приближенные оценки $\widehat{y}_t$.

Шаг 2. Рассматривается вспомогательная задача управления с целевым функционалом (3), наблюдаемым состоянием и линейным выходом вида

$$dy_t = \left(\widehat{\alpha}_t A_t(y_t) + \left(\widehat{\beta}_t - \widehat{\alpha}_t\right)\frac{\Sigma_t(y_t)}{\widetilde{\sigma}_t^2}\widetilde{a}_t y_t + \widehat{\gamma}_t\right)dt + \widehat{\beta}_t \frac{\Sigma_t(y_t)}{\widetilde{\sigma}_t} dv_t, \tag{14}$$
$$dz_t = a_t y_t dt + b_t z_t dt + c_t u_t dt + \sigma_t dw_t,$$

в которой используются вычисленные на шаге 1 коэффициенты $\widehat{\alpha}_t$, $\widehat{\beta}_t$, $\widehat{\gamma}_t$. Решение – коэффициенты α_t, $\beta_t(y)$, формирующие закон управления $u_t^* = u_t^*(y_t, z_t)$ согласно (4) вычисляются любым численным методом [38].

Шаг 3. Формируется расширенная модель для исходной задачи, включающая уравнение состояния (1), линейный выход (2) и псевдонаблюдения (6). Предложенный вариант управления u_t^c вычисляется по формуле (4) $u_t^c = u_t^*(\widehat{y}_t, z_t)$, где используются параметры управления α_t, $\beta_t(y)$, вычисленные на шаге 2, и оценка УОФ $\widehat{y}_t$ по наблюдениям $\widetilde{z}_t$ с коэффициентами $\widehat{\alpha}_t$, $\widehat{\beta}_t$, $\widehat{\gamma}_t$, вычисленными на шаге 1.

Заметим, что в [38] имеется значительный иллюстративный материал и обсуждаются различные практические детали реализации данного алгоритма в постановке с полной информацией.

7. Заключение

В статье на примере решенной задачи оптимизации линейного выхода нелинейной дифференциальной системы по квадратичному критерию обсуждается возможность приближенного решения аналогичной задачи для случая неполной информации о состоянии. На основе концепции разделения задач управления и фильтрации предложено два варианта субоптимального управления: путем формального разделения задач и на основании альтернативного представления переменной состояния, использующего метод условно-оптимальной фильтрации состояний стохастических дифференциальных систем наблюдения В.С. Пугачева. Любой из предложенных вариантов потребует существенных усилий для численной реализации, детализации и адаптации приведенного в статье принципиального алгоритма расчета управления u_t^c и значительных вычислительных ресурсов. Практическая реализация описанных алгоритмов и апробация их для оптимизации функционирования программных систем, хотя бы в рамках модельных экспериментов, – ближайшая перспектива.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kushner H.J., Dupuis P.G.* Numerical methods for stochastic control problems in continuous time. N.Y.: Springer-Verlag, 2001.
2. *Bertsekas D.P.* Dynamic programming and optimal control. Cambridge: Athena Scientific, 2013.
3. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами / Пер. с англ. М.: Мир, 1978.

   Fleming W.H., Rishel R.W. Deterministic and stochastic optimal control. N.Y.: Springer-Verlag, 1975.

4. *Athans M.* Editorial on the LQG Problem // IEEE Trans. Automat. Control. 1971. V. 16. No. 6. P. 528–552.

5. *Бортаковский А.С.* Достаточные условия оптимальности управления переключаемыми системами // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2017. № 4. С. 86–103.

   Bortakovskii A.S. Sufficient Optimality Conditions for Controlled Switched Systems // J. Comput. Syst. Sci. 2017. V. 56. No. 4. P. 636–651.

6. *Хрусталёв М.М., Онегин Е.Е.* Необходимые и достаточные условия в задаче оптимальной стабилизации квазилинейных стохастических систем // АиТ. 2019. No. 7. С. 89–104.

   Khrustalev M.M., Onegin E.E. Necessary and Sufficient Conditions for Optimal Stabilization of Quasi-linear stochastic Systems // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 7. P. 1252–1264.

7. *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.* Синтез оптимальных нелинейных стохастических систем управления спектральным методом // Информатика и ее применения. 2011. Т. 5. Вып. 2. С. 69–81.

8. *Fleming W.H.* Stochastic Control of Partially Observable Diffusions // SIAM J. Control. 1968. V. 6. No. 2. P. 194–214.

9. *Хрусталев М.М.* Синтез оптимальных и устойчивых управляемых стохастических систем при неполной информации о состоянии на неограниченном интервале времени // АиТ. 2011. No. 11. С. 174–190.

   Khrustalev M.M. Optimal and Stable Controllable Stochastic Systems Synthesis with Incomplete State Information on an Unbounded Time Interval // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 11. P. 2379–2394.

10. *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.* Приближенный синтез оптимальных непрерывных стохастических систем управления с неполной обратной связью // АиТ. 2018. No. 1. С. 130–146.

    Panteleev A.V., Rybakov K.A. Optimal Continuous Stochastic Control Systems with Incomplete Feedback: Approximate Synthesis // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 1. P. 103–116.

11. *Wonham W.M.* On the Separation Theorem of Stochastic Control // SIAM J. Control. 1968. V. 6. No. 2. P. 312–326.

12. *Georgiou T.T., Lindquist A.* The Separation Principle in Stochastic Control, redux // IEEE Trans. Automat. Control. 2013. V. 58. No. 10. P. 2481–2494.

13. *Бортаковский А.С., Немыченков Г.И.* Оптимальное в среднем управление детерминированными переключаемыми системами при наличии дискретных измерений // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2019. No. 1. С. 52–77.

    Bortakovskii A.S., Nemychenkov G.I. Optimal in the Mean Control of Deterministic Switchable Systems Given Discrete Inexact Measurements // J. Comput. Syst. Sci. 2019. V. 58. No. 1. P. 50–74.

14. *Давтян Л.Г., Пантелеев А.В.* Метод параметрической оптимизации нелинейных непрерывных систем совместного оценивания и управления //Изв. РАН. Теория и системы управления. 2019. No. 3. С. 34–47.

    Davtyan L.G., Panteleev A.V. Method of Parametric Optimization of Nonlinear Continuous Systems of Joint Estimation and Control // J. Comput. Syst. Sci. 2019. V. 58. No. 3. C. 360–373.

15. *Mortensen R.E.* Stochastic Optimal Control with Noisy Observations // Int. J. Control. 1966. V. 4. No. 5. P. 455–464.

16. *Bensoussan A.* Stochastic control of partially observable systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

17. *Davis M.H.A., Varaiya P.P.* Dynamic Programming Conditions for Partially Observable Stochastic Systems // SIAM J. Control. 1973. V. 11. No. 2. P. 226–262.

18. *Benes V.E., Karatzas I.* On the Relation of Zakai's and Mortensen's Equations // SIAM J. Control Optim. 1983. V. 21. No. 3. P. 472–489.

19. *Миллер Б.М., Авраченков К.Е., Степанян К.В., Миллер Г.Б.* Задача оптимального стохастического управления потоком данных по неполной информации // Пробл. передачи информ. 2005. Т. 41. No. 2. С. 89–110.

    Miller B.M., Avrachenkov K.E., Stepanyan K.V., Miller G.B. The Problem of Optimal Stochastic Data Flow Control Based Upon Incomplete Information // Problems Inform. Transmission. 2005. V. 41. No. 2. P. 150–170.

20. *Босов А.В., Стефанович А.И.* Управление выходом стохастической дифференциальной системы по квадратичному критерию. I. Оптимальное решение методом динамического программирования // Информатика и ее применения. 2018. Т. 12. Вып. 3. С. 99–106.

21. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). М.: Наука, 1974.

    Liptser R.S., Shiryaev A.N. Statistics of random processes. II. Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2001.

22. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1990.

    Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. Stochastic differential systems. Analysis and filtering. Chichester–N.Y.: Wiley & Sons, 1987.

23. *Gilbert E.N.* Capacity of a Burst-noise Channel // Bell Syst. Tech. J. 1960. V. 39. P. 1253–1265.

24. *Elliott E.O.* Estimates of Error Rates for Codes on Burst-noise Channels // Bell Syst. Tech. J. 1963. V. 42. P. 1977–1997.

25. *Altman E., Avrachenkov K., Barakat C.* TCP in Presence of Bursty Losses // Perform. Evaluation. 2000. V. 42. P. 129–147.

26. *Borisov A., Bosov A., Miller G.* Modeling and Monitoring of RTP Link on the Receiver Side // Lect. Notes Comput. Sci. 2015. V. 9247. P. 229–241.

27. *Борисов А.В.* Применение методов оптимальной фильтрации для оперативного оценивания состояний сетей массового обслуживания // АиТ. 2016. No. 2. С. 115–141.

    Borisov A.V. Application of Optimal Filtering Methods for On-line of Queueing Network States // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 2. P. 277–296.

28. *Whitt W.* Stochastic-process limits. An introduction to stochastic-process limits and their application to queues. N.Y.: Springer, 2002.

29. *Bohacek S.* A Stochastic Model of TCP and Fair Video Transmission // 22nd Annual Joint Conf. of the IEEE Computer and Communications (INFOCOM) Proc. IEEE, 2003. V. 2. P. 1134–1144.

30. *Таненбаум Э.С., Вудхалл А.С.* Операционные системы. Разработка и реализация / Пер. с англ. 3-е изд. СПб.: Питер, 2007.

    Tanenbaum A.S., Woodhull A.S. Operating systems: design and implementation. 3rd ed. Upper Saddle River. NJ: Prentice Hall, 2006.

31. *Дейт К.Дж.* Введение в системы баз данных / Пер. с англ. 8-е изд. М.: Вильямс, 2005.

Date C.J. An introduction to database systems. 8th ed. Reading–MA: Addison-Wesley, 2004.

32. *Elsässer R., Monien B., Preis R.* Diffusion Schemes for Load Balancing on Heterogeneous Networks // Theor. Comput. Syst. 2002. V. 35. No. 3. P. 305–320.

33. *Welzl M.* Network congestion control. N.Y.: Wiley, 2005.

34. *Боровков А.А.* Асимптотические методы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1980.

Borovkov A.A. Asymptotic methods in queuing theory. N.Y.: Wiley, 1984.

35. *Босов А.В.* Управление линейным выходом дискретной стохастической системы по квадратичному критерию // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2016. No. 3. С. 19–35.

Bosov A.V. Discrete Stochastic System Linear Output Control with Respect to a Quadratic Criterion // J. Comput. Syst. Sci. 2016. V. 55. No. 3. P. 349–364.

36. *Фельдбаум А.А.* Основы теории оптимальных автоматических систем. Изд. 2, испр. и доп. М.: Наука, 1966.

37. *Kloden P.E., Platen E.* Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1992.

38. *Босов А.В., Стефанович А.И.* Управление выходом стохастической дифференциальной системы по квадратичному критерию. IV. Альтернативное численное решение // Информатика и ее применения. 2020. Т. 14. Вып. 14. С. 24–30.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 20.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020

© 2020 г. А.С. БОРТАКОВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук (asbortakov@mail.ru)
(Московский авиационный институт)

ТЕОРЕМА РАЗДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО В СРЕДНЕМ УПРАВЛЕНИЯ ГИБРИДНЫМИ СИСТЕМАМИ ПЕРЕМЕННОЙ РАЗМЕРНОСТИ[1]

Рассматривается задача оптимального в среднем управления линейной гибридной системой, непрерывное движение которой чередуется с дискретными изменениями (переключениями) со сменой пространства состояний. Начальное состояние системы случайное. Качество управления характеризуется средним значением квадратичного функционала. Моменты переключений и их количество заранее не заданы. Они определяются в результате минимизации функционала. Для рассматриваемой задачи классический принцип разделения не выполняется. Доказан так называемый условный принцип разделения. Приводятся примеры применения условного и классического принципов разделения.

Ключевые слова: гибридные системы, изменение размерности пространства состояний, оптимальное в среднем управление, теорема разделения.

DOI: 10.31857/S0005231020110045

1. Введение

Задачи оптимального управления пучками траекторий непрерывных детерминированных систем были исследованы в [1, 2]. При дальнейших исследованиях были получены достаточные условия оптимальности в среднем управления пучками траекторий непрерывно-дискретных [3] и переключаемых [4]. В [5] для линейных гибридных систем постоянной размерности была доказана теорема разделения. В настоящей статье эта теорема доказывается для гибридных систем переменной размерности (ГСПР).

Непрерывное движение ГСПР описывается дифференциальными уравнениями, а мгновенные изменения состояния (переключения) — рекуррентными уравнениями или включениями. В момент переключения меняется пространство состояний системы, в частности его размерность. Системы управления с изменяемым пространством состояний исследовались под разными названиями: составные системы [6], ступенчатые системы [7], системы со сменой фазового пространства [8], сложные (многоэтапные) процессы [9], системы с переменной структурой и размерностью [10, 11], гибридные системы с промежуточными условиями [12, 13]. В задачах оптимального управления [6–8, 12, 13], как правило, моменты смены фазового пространства фиксированы или определяются промежуточными условиями, а переключения состояний неуправляемы. Количество переключений задано, а в первых публикациях [6–8] по этой тематике переключение единственное. Необходимые условия для ги-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-128-а).

бридных систем с промежуточными условиями, обобщающие принцип максимума, получены в [12, 13], где количество переключений задано, моменты переключений не фиксированы, а сами переключения неуправляемы. Другой подход к исследованию гибридных систем заключается в использовании дискретно-непрерывных и импульсных систем управления [14].

Достаточные условия оптимальности ГСПР получены в [15, 16] для задач, в которых количество и моменты переключений заранее не заданы, а переключения управляемы. При этом допускались процессы с мгновенными многократными переключениями. Однако применение этих условий для линейно-квадратичных задач (ЛКЗ) затруднительно. Причина этого заключается в том, что функция цены (функция Гамильтона–Якоби–Беллмана (ГЯБ)) в ЛКЗ управления ГСПР не является квадратичной [17]. Начиная с ЛКЗ управления непрерывными системами [18] квадратичность функции цены была доказана для дискретных и непрерывно-дискретных систем. Отметим, что в этих системах либо нет переключений, либо они происходят в заданные моменты времени. В гибридных системах моменты переключений не фиксированы, и их оптимизация приводит к неквадратичным функциям цены. Поэтому для синтеза оптимальных линейных ГСПР с квадратичным функционалом качества нужны новые достаточные условия, которые получены в настоящей статье.

Для ЛКЗ управления непрерывными стохастическими системами доказана теорема разделения [19]: оптимальное в среднем управление стохастической системой совпадает с оптимальным позиционным управлением соответствующей детерминированной системой, в котором используется оптимальная оценка состояния стохастической системы. При таком способе формирования управления задачи оптимального управления и наблюдения можно решать отдельно. Этот подход получил название принципа разделения. Он широко применяется на практике, часто без обоснования, даже для нелинейных систем. В частном случае для детерминированной непрерывной системы, начальное состояние которой не определено, теорема разделения доказана в [1]: оптимальное в среднем управление линейной системой с квадратичным функционалом качества совпадает с оптимальным управлением одной траекторией этой системы, исходящей из геометрического центра тяжести множества возможных начальных состояний. В этом детерминированном случае задача наблюдения тривиальная. Она сводится к нахождению центра тяжести множества возможных состояний.

В настоящей статье рассматривается задача управления линейной ГСПР, начальное состояние которой представляет собой случайный вектор с заданной плотностью вероятности. Качество управления характеризуется средним значением квадратичного функционала качества управления отдельной траекторией. Эту задачу можно рассматривать как задачу оптимального в среднем управления пучком траекторий детерминированной ГСПР. Для таких ЛКЗ классический принцип разделения не выполняется, поскольку, как указано выше, функция цены не является квадратичной. Однако оказывается справедливым *условный* принцип разделения: *оптимальное в среднем управление пучком траекторий совпадает с условным оптимальным управлением траекторией, исходящей из математического ожидания вектора началь-*

ного состояния системы. Условное оптимальное управление отличается от оптимального дополнительным условием — фиксированными моментами переключений. Согласно условному принципу задача наблюдения отделена от задачи условного оптимального управления, т.е. математическое ожидание начального состояния системы находится отдельно от оптимального управления с фиксированными моментами переключений. Однако оптимальные моменты переключений определяются при минимизации среднего значения функционала. Последняя задача минимизации конечномерная и может быть решена многими методами.

В статье доказывается теорема разделения для оптимального в среднем управления линейной ГСПР с квадратичным критерием качества. Получены уравнения для нахождения оптимальных законов управления. Выделен класс ЛКЗ, в котором выполняется классический принцип разделения. Рассмотрены академические примеры, демонстрирующие применение условного и классического принципов разделения для ГСПР. В частности, приведен контрпример ЛКЗ задачи управления гибридной системой, в котором классический принцип разделения не выполняется, а условный принцип разделения выполняется.

2. Постановки задач

Пусть на заданном промежутке времени $T = [t_0, t_F]$ динамическая система совершает N переключений в моменты времени $t_1, \ldots, t_N$, образующие неубывающую конечную последовательность $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots t_N\}$:

$$t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_N \leqslant t_F. \tag{2.1}$$

Между неравными последовательными моментами переключений состояние системы изменяется непрерывно, согласно линейному дифференциальному уравнению:

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i(t) + B_i(t)u_i(t), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}, \tag{2.2}$$

а в моменты переключений — дискретно, в соответствии с рекуррентным уравнением

$$x_i(t_i) = \widehat{A}_i(t_i)x_{i-1}(t_i) + \widehat{B}_i(t_i)v_i, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{2.3}$$

В соотношениях (2.2): $\mathcal{N} \triangleq \{i = 0, 1, \ldots, N \,| t_i < t_{i+1}\}$ — множество номеров ненулевых (по длине) частичных промежутков $T_i = [t_i, t_{i+1}]$ непрерывного изменения системы; $x_i(t)$ — состояние системы в момент времени $t \in T_i$, $x_i(t) \in X_i = \mathbb{R}^{n_i}$; $u_i(t)$ — управление непрерывным движением системы в момент времени $t \in T_i$, $u_i(t) \in U_i = \mathbb{R}^{p_i}$, $i \in \mathcal{N}$. Элементы матриц $A_i(\cdot)$ и $B_i(\cdot)$ суммируемы на T_i, $i \in \mathcal{N}$. При $t_i = t_{i+1}$ промежуток T_i, $i \notin \mathcal{N}$, представляет собой точку $T_i = \{t_i\}$, функция $x_i(\cdot)$ определена в одной точке t_i, а значение $u(t_i)$ управления несущественно. В уравнении (2.3): v_i — управление переключением системы в момент $t_i \in \mathcal{T}$, $v_i \in V_i = \mathbb{R}^{q_i}$, $i = 1, \ldots, N$. Возможное равенство последовательных моментов в (2.1) означает, что система совершает мгновенные многократные переключения [15, 16].

Множество допустимых программных управлений $\mathcal{W}(t_0, x_0)$ составляют пары $w = (u(\cdot), v(\cdot))$, включающие управление непрерывным движением – последовательность $u(\cdot) \triangleq \{u_i(\cdot)\}_{i=0}^{N}$ ограниченных измеримых функций $u_i : T_i \to \to U_i$; управление переключениями – последовательность $v(\cdot) \triangleq \{(t_i, v_i) | t_i \in \mathcal{T}, v_i \in V_i, i = 1, \ldots, N\}$. Подчеркнем, что последовательность $v(\cdot)$ фактически определяет множество переключений $\mathcal{T}$, причем у разных допустимых управлений $v(\cdot)$ количество N переключений и моменты $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots t_N\}$ переключений могут не совпадать. При этом не исключается случай отсутствия переключений, когда $N = 0$ и $\mathcal{T} = \varnothing$ по определению. Допустимое управление $w \in \mathcal{W}(t_0, x_0)$ согласно [20] порождает для любого начального условия $x_0(t_0) = x_0$ единственную допустимую траекторию $x(\cdot) \triangleq x_i(\cdot)_{i=0}^{N}$, которая на каждом ненулевом (по длине) промежутке T_i, $i \in \mathcal{N}$, представляет собой абсолютно непрерывную функцию $x_i \colon T_i \to X_i$, удовлетворяющую почти всюду T_i дифференциальному уравнению (2.2). В каждый момент переключения $t_i \in \mathcal{T}$ скачки $x_{i-1}(t_i) \to x_i(t_i)$ допустимой траектории удовлетворяют рекуррентному уравнению (2.3). На множестве $\mathcal{W}(t_0, x_0)$ допустимых управлений задан квадратичный функционал качества

$$I(t_0, x_0, w) = \sum_{i=0}^{N} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\frac{1}{2} x_i^{\mathrm{T}}(t) C_i(t) x_i(t) + \frac{1}{2} u_i^{\mathrm{T}}(t) D_i(t) u_i(t) \right] dt + \tag{2.4}$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} \left[\lambda_i(t_i) + \frac{1}{2} x_{i-1}^{\mathrm{T}}(t_i) \widehat{C}_i(t_i) x_{i-1}(t_i) + \frac{1}{2} v_i^{\mathrm{T}} \widehat{D}_i(t_i) v_i \right] +$$
$$+ \frac{1}{2} x_N^{\mathrm{T}}(t_F) F x_N(t_F),$$

где $t_{N+1} \triangleq t_F$. Все матрицы в (2.4) – симметрические соответствующих порядков. Матрицы $C_i(t)$, $\widehat{C}_i(t)$, F — неотрицательно определенные, а $D_i(t)$ и $\widehat{D}_i(t)$ — положительно определенные. Функции $C_i(\cdot)$, $D_i(\cdot)$ — измеримые ограниченные, а $\widehat{C}_i(\cdot)$, $\widehat{D}_i(\cdot)$ — ограниченные. Величины $\lambda_i(t)$ — положительные, точнее

$$\lambda_i(t) \geqslant \lambda^{+} > 0 \tag{2.5}$$

при всех $t \in T$, $i = 1, \ldots, N$, для некоторого положительного числа λ^{+}. Слагаемые, зависящие от момента t_i, можно рассматривать как затраты (или “штраф”) на переключение $x_{i-1}(t_i) \to x_i(t_i)$ состояния системы. При условии (2.5) затраты будут не меньше $\lambda^{+} > 0$. Отметим, что в функционале (2.4) количество переключений N и моменты переключений t_i, $i = 1, \ldots, N$, являются управляющими параметрами, относящимися к управлению переключениями $v(\cdot)$.

Задача 1 (оптимального управления). Требуется найти наименьшее значение функционала (2.4) и оптимальное управление $w^* \in \mathcal{W}(t_0, x_0)$, на котором это значение достигается:

$$I(t_0, x_0, w^*) = \min_{w \in \mathcal{W}(t_0, x_0)} I(t_0, x_0, w). \tag{2.6}$$

Подчеркнем, что при минимизации (2.6) определяются количество переключений N, моменты переключений $\mathcal{T}$, управление $u(\cdot)$ непрерывным движением системы, а также управление $v(\cdot)$ переключениями. При этом количество переключений N будет конечным из-за положительности затрат на каждое переключение. Кроме того, условие (2.5) исключает у оптимальных процессов так называемые *фиктивные* переключения, при которых состояние системы не изменяется $x_i(t_i) = x_{i-1}(t_i)$ и фактического переключения нет. При положительных затратах на переключение процессы с фиктивными переключениями, разумеется, не будут оптимальными.

В теории и на практике нередко возникают задачи управления с фиксированными моментами переключений, например задачи управления дискретными или непрерывно-дискретными системами. Пусть $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots, t_N\}$ — заданное множество моментов переключений (2.1). Обозначим через $I(t_0, x_0, w|\mathcal{T})$ функционал качества управления (2.4) при фиксированных моментах переключений. Задача минимизации условного функционала качества $I(t_0, x_0, w|\mathcal{T})$ на множестве $\mathcal{W}(t_0, x_0|\mathcal{T})$ допустимых управлений из $\mathcal{W}(t_0, x_0)$ с заданными моментами переключений (2.1) формулируется следующим образом.

З а д а ч а 2 (условного оптимального управления). Требуется найти наименьшее значение функционала $I(t_0, x_0, w|\mathcal{T})$ при заданных моментах переключений $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots t_N\}$ и условное оптимальное управление $w_{\mathcal{T}} \in \mathcal{W}(t_0, x_0|\mathcal{T})$, на котором это значение достигается:

$$I(t_0, x_0, w_{\mathcal{T}}|\mathcal{T}) = \min_{w \in \mathcal{W}(t_0, x_0|\mathcal{T})} I(t_0, x_0, w|\mathcal{T}). \tag{2.7}$$

Такое управление $w_{\mathcal{T}}$ называется *условным* оптимальным, поскольку оно находится при дополнительном условии — заданных моментах переключений $\mathcal{T}$.

Задачи (2.6) и (2.7) связаны. Оптимальное управление $w^* \in \mathcal{W}(t_0, x_0)$ получается из условного оптимального управления $w_{\mathcal{T}} \in \mathcal{W}(t_0, x_0|\mathcal{T})$ после дополнительной минимизации по моментам переключений $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots, t_N\}$:

$$I(t_0, x_0, w^*) = \min_{N \in \mathbb{Z}_+} \min_{t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_N \leqslant t_F} I(t_0, x_0, w|\mathcal{T}).$$

Пусть в отличие от задачи (2.6) начальное состояние x_0 системы точно неизвестно, а является случайным вектором с известной плотностью распределения $p_0 : X_0 \to \mathbb{R}$. Предполагается, что в процессе управления никакой дополнительной информации, уточняющей состояние системы, не поступает. Обозначим через $\mathcal{W}(t_0, p_0)$ множество допустимых управлений $w = (u(\cdot), v(\cdot))$, каждое из которых порождает допустимую траекторию для любого начального состояния $x_0 \in X_0$. Пусть по-прежнему качество управления одной траекторией характеризуется функционалом (2.4), а качество управления системой со случайным начальным состоянием оценивается средним значением этого функционала

$$\overline{I}(t_0, p_0, w) = \int\limits_{X_0} p_0(x_0) I(t_0, x_0, w) dx_0. \tag{2.8}$$

Предполагаем, что это среднее значение существует. Функционалы вида (2.8) применяются и для детерминированных задач управления пучками траекторий [21]. В этом случае функция $p_0(\cdot)$ играет роль начальной плотности пучка частиц.

Задача 3 (оптимального в среднем управления). Требуется найти наименьшее среднее значение (2.8) функционала (2.4) и оптимальное в среднем управление $\overline{w} \in \mathcal{W}(t_0, p_0)$, на котором это значение достигается:

$$\overline{I}(t_0, p_0, \overline{w}) = \min_{w \in \mathcal{W}(t_0, p_0)} \overline{I}(t_0, p_0, w).$$

Как и в случае управления одной траекторией, задачу оптимального в среднем управления можно рассматривать при дополнительном условии — заданных моментах переключений $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots, t_N\}$. При этом качество управления характеризуется средним значением

$$\overline{I}(t_0, p_0, w|\mathcal{T}) = \int\limits_{X_0} p_0(x_0) I(t_0, x_0, w|\mathcal{T}) dx_0. \tag{2.9}$$

условного функционала качества $I(t_0, x_0, w|\mathcal{T})$. Задача минимизации этого функционала на множестве $\mathcal{W}(t_0, p_0|\mathcal{T})$ допустимых управлений из $\mathcal{W}(t_0, x_0)$ с заданными моментами переключений (2.1) формулируется следующим образом.

Задача 4 (условного оптимального в среднем управления). Требуется найти наименьшее среднее значение функционала (2.9) при заданных моментах переключений $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots t_N\}$ и условное оптимальное в среднем управление $\overline{w}_{\mathcal{T}} \in \mathcal{W}(t_0, p_0)$, на котором это значение достигается:

$$\overline{I}(t_0, p_0, \overline{w}_{\mathcal{T}}) = \min_{w \in \mathcal{W}(t_0, p_0|\mathcal{T})} \overline{I}(t_0, p_0, w).$$

3. Оптимальное управление

Сначала выясним характер зависимости функционала (2.4) от начального состояния. Пусть $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots t_N\}$ — фиксированное множество моментов переключений (2.1). На участках непрерывного движения (2.2) и при переключениях (2.3) текущее состояние ГСПР является аффинной функцией начального состояния x_0:

$$x_i(t) = k(t|t_1, \ldots, t_i) x_0 + l(t, w|t_1, \ldots, t_i), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}. \tag{3.1}$$

Функции k и l зависят от всех моментов переключений $t_1, \ldots, t_i$, принадлежащих промежутку $[t_0, t]$, причем функционал $w \to l(t, w|t_1, \ldots, t_i)$ — линейный по управлению $w = (u(\cdot), v(\cdot))$, определенному на $[t_0, t]$. Подставляя (3.1) в условный функционал качества (2.6), получаем

$$I(t_0, x_0, w|\mathcal{T}) = \frac{1}{2} x_0^{\mathrm{T}} K(t_0|\mathcal{T}) x_0 + L(t_0, w|\mathcal{T}) x_0 + M(t_0, w|\mathcal{T}). \tag{3.2}$$

Здесь $K(t_0|\mathcal{T})$ — симметрическая неотрицательно определенная матрица порядка n_0, $L(t_0,w|\mathcal{T})$ – векторная функция (строка), линейно зависящая от управления w, $M(t_0,w|\mathcal{T})$ — положительно определенный квадратичный функционал от управления w. Заметим, что при фиксированных моментах переключений $\mathcal{T}$ множество допустимых управлений можно считать линейным нормированным пространством, поскольку его составляют пары $w=(u(\cdot),v(\cdot))$ с измеримым ограниченным управлением $u(\cdot)$ непрерывным движением и конечной последовательностью $v(\cdot)$ векторов управления переключениями. На множестве $\mathcal{W}(t_0,x_0)$ функционал (3.2) дифференцируем по управлению, причем производная (Фреше) имеет вид

$$I'(t_0,x_0,w|\mathcal{T})=L'(t_0|\mathcal{T})x_0+M'(t_0,w|\mathcal{T}). \tag{3.3}$$

Обозначение $L'(t_0|\mathcal{T})=L'(t_0,w|\mathcal{T})$ подчеркивает, что производная линейной функции $w\to L(t_0,w|\mathcal{T})$ не зависит от управления.

Условное оптимальное программное управление $w_{\mathcal{T}}$ одной траекторией, исходящей из начальной позиции (t_0,x_0), удовлетворяет необходимому условию оптимальности: $I'(t_0,x_0,w|\mathcal{T})=0$. Для положительно определенного квадратичного функционала (3.2) это условие будет также и достаточным. Записывая производную (3.3), вычисленную на условном оптимальном управлении $w_{\mathcal{T}}$, получаем

$$L'(t_0|\mathcal{T})x_0+M'(t_0,w_{\mathcal{T}}|\mathcal{T})=0. \tag{3.4}$$

Поскольку функционал $w\to M(t_0,w|\mathcal{T})$ квадратичный, то уравнение (3.4) представляет собой линейное функциональное уравнение относительно условного оптимального управления $w_{\mathcal{T}}$. Заметим, что оптимальное управление $w^*\in\mathcal{W}(t_0,x_0)$ также удовлетворяет уравнению (3.4), поскольку оно является условным оптимальным при наилучшем выборе моментов переключений $\mathcal{T}^*$, т.е.

$$L'(t_0|\mathcal{T}^*)x_0+M'(t_0,w^*|\mathcal{T}^*)=0.$$

4. Оптимальное в среднем управление

Запишем выражение для среднего значения функционала (3.2):

$$\overline{I}(t_0,p_0,w|\mathcal{T})=\int\limits_{X_0}p_0(x_0)\left\{\frac{1}{2}x_0^{\mathrm{T}}K(t_0|\mathcal{T})x_0+L(t_0,w|\mathcal{T})x_0+M(t_0,w|\mathcal{T})\right\}dx_0.$$

Найдем производную этого функционала по управлению

$$\begin{aligned}\overline{I}\,'(t_0,p_0,w|\mathcal{T})&=L'(t_0|\mathcal{T})\int\limits_{X_0}p_0(x_0)x_0dx_0+M'(t_0,w|\mathcal{T})=\\&=L'(t_0|\mathcal{T})\overline{x}_0+M'(t_0,w|\mathcal{T}),\end{aligned}$$

где $\overline{x}_0$ — математическое ожидание начального состояния системы. Условное оптимальное в среднем управление $\overline{w}_{\mathcal{T}}$ удовлетворяет необходимому условию экстремума:

$$L'(t_0|\mathcal{T})\overline{x}_0 + M'(t_0, \overline{w}_{\mathcal{T}}|\mathcal{T}) = 0. \tag{4.1}$$

Оптимальное в среднем управление $\overline{w}$ также является условным оптимальным в среднем управлением $\overline{w} = \overline{w}_{\overline{\mathcal{T}}}$ при наилучшем выборе моментов переключений $\overline{\mathcal{T}}$. Поэтому оно удовлетворяет уравнению (4.1)

$$L'(t_0|\overline{\mathcal{T}})\overline{x}_0 + M'(t_0, \overline{w}|\overline{\mathcal{T}}) = 0. \tag{4.2}$$

Сравнивая (4.2) с (3.4), заключаем, что оптимальное в среднем управление $\overline{w} = \overline{w}_{\overline{\mathcal{T}}}$ совпадает с условным оптимальным управлением $w_{\mathcal{T}}$ для начального состояния $\overline{x}_0$. Отсюда следует справедливость утверждения.

Теорема 1 (теорема разделения). *Оптимальное в среднем управление линейной ГСПР с квадратичным функционалом качества совпадает с условным оптимальным управлением одной траекторией, исходящей из математического ожидания начального состояния системы.*

Как видим, для поставленной задачи выполняется так называемый *условный* принцип разделения. Оптимальное в среднем управление может не совпадать с оптимальным управлением траекторией, исходящей из математического ожидания начального состояния системы. Эти управления могут отличаться моментами переключений или даже количеством переключений. Для детерминированных ЛКЗ управления непрерывными, дискретными, непрерывно-дискретными системами принцип разделения выполняется, поскольку моменты переключений фиксированы или переключений нет вовсе.

Отметим, что задача наблюдения в рассматриваемом случае тривиальная. Она сводится к нахождению среднего значения начального состояния системы. Аналогичная оценка множества возможных состояний применяется в задачах управления пучками траекторий детерминированных систем. В качестве оценки выбирается геометрический центр тяжести (барицентр). Такая задача наблюдения существенно проще традиционного наблюдения в стохастических системах, непременно связанного со стохастической фильтрацией.

5. Синтез оптимального управления

Применение метода динамического программирования [22] опирается на понятие функции цены (функции Гамильтона–Якоби–Беллмана (ГЯБ)), которая определяется минимальным значением функционала оставшихся потерь. Обозначим через $\mathcal{W}_i(t, x_i)$ множество допустимых программных управлений после i-го переключения для процессов, удовлетворяющих условию $x_i(t) = x_i$. Оставшиеся переключения происходят в моменты $t_{i+1}, \ldots, t_N$, которые образуют неубывающую конечную последовательность на промежутке $[t, t_F]$:

$$t \triangleq t_i \leqslant t_{i+1} \leqslant \ldots \leqslant t_N \leqslant t_{N+1} \triangleq t_F. \tag{5.1}$$

Количество $k = N - i$ оставшихся переключений и сами моменты переключений $t_{i+1}, \ldots, t_N$ не фиксированы и у разных допустимых процессов могут не совпадать.

На множестве $\mathcal{W}_i(t, x_i)$ определим функционал оставшихся потерь:

$$I_i(t, x_i, w) = \sum_{j=i}^{N} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[\frac{1}{2}x_j^{\mathrm{T}}(t)C_j(t)x_j(t) + \frac{1}{2}u_j^{\mathrm{T}}(t)D_j(t)u_j(t)\right] dt + \tag{5.2}$$

$$+ \sum_{j=i+1}^{N} \left[\lambda_j\left(t_j\right) + \frac{1}{2}x_{j-1}^{\mathrm{T}}\left(t_j\right)\widehat{C}_j\left(t_j\right)x_{j-1}\left(t_j\right) + \frac{1}{2}v_j^{\mathrm{T}}\widehat{D}_j\left(t_j\right)v_j\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}x_N^{\mathrm{T}}\left(t_F\right)Fx_N\left(t_F\right).$$

Функция цены $\varphi_i(t, x_i)$ после i-го переключения по определению равна значению функционала оставшихся потерь (5.2), вычисленному на оптимальном процессе, удовлетворяющем начальному условию $x_i(t) = x_i$. Иначе говоря, функция цены равна минимальному значению функционала оставшихся потерь (5.2) на множестве допустимых управлений $\mathcal{W}_i(t, x_i)$:

$$\varphi_i(t, x_i) = \min_{w \in \mathcal{W}_i(t, x_i)} I_i(t, x_i, w).$$

При фиксированных моментах переключений функционал (5.2) и множество допустимых программных управлений будем обозначать, указывая дополнительно последовательность $\mathcal{T} = \{t_{i+1}, \ldots, t_N\}$ моментов переключений: $I_i(t, x_i, w|\mathcal{T})$ и $\mathcal{W}(t, x_i, w|\mathcal{T})$ соответственно. Функция $\varphi_i(t, x_i|t_{i+1}, \ldots, t_N)$, равная значению функционала оставшихся потерь $I_i(t, x_i, w|\mathcal{T})$, вычисленному на процессе, исходящем из стартовой позиции (t, x_i), при управлении, которое оптимально среди всех допустимых управлений, имеющих $k = N - i$ переключений, быть может фиктивных, в моменты времени $t_{i+1}, \ldots, t_N$, образующие неубывающую последовательность (5.1), называется *k-моментной функцией цены* [17]. Для процессов без переключений, когда $k = 0$ и $\mathcal{T} = \varnothing$, нульмоментную функцию цены обозначим через $\varphi_i(t, x_i|\varnothing)$. Функцию цены можно выразить через ее моментные функции

$$\varphi_i(t, x_i) = \min_{N \in \mathbb{Z}_+} \min_{t \leqslant t_{i+1} \leqslant \ldots \leqslant t_N \leqslant t_F} \varphi_i(t, x_i|t_{i+1}, \ldots, t_N).$$

Рекуррентная процедура нахождения моментных функций цены для гибридных систем постоянной размерности представлена в [17]. Опишем аналогичную процедуру для ГСПР. Согласно определению моментная функция цены $(t, x_i) \to \varphi_i(t, x_i|t_{i+1}, \ldots, t_N)$ на $[t_i, t_{i+1}] \times X_i$ удовлетворяет уравнению ГЯБ

$$\min_{u_i \in U_i} \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}\left[A_i\left(t\right)x_i + B_i\left(t\right)u_i\right] + \right. \tag{5.3}$$

$$\left. + \frac{1}{2}\,x_i^{\mathrm{T}}C_i\left(t\right)x_i + \frac{1}{2}\,u_i^{\mathrm{T}}D_i\left(t\right)u_i \right\} = 0$$

с терминальным условием в момент переключения t_{i+1}:

$$\varphi_i(t_{i+1}, x_i | t_{i+1}, \dots, t_N) = \tag{5.4}$$
$$= \min_{v_{i+1} \in V_{i+1}} \left\{ \varphi_{i+1}(t_{i+1}, \widehat{A}_{i+1} x_i + \widehat{B}_{i+1} v_{i+1} | t_{i+2}, \dots, t_N) \lambda_{i+1} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} x_i^{\mathrm{T}} \widehat{C}_{i+1} x_i + \frac{1}{2} v_{i+1}^{\mathrm{T}} \widehat{D}_{i+1} v_{i+1} \right\}.$$

Рекуррентное уравнение (5.4) связывает k-моментную функцию цены ($k = N - i$) после i-го переключения с $(k-1)$-моментной функцией цены после $(i+1)$-го переключения. Здесь и далее для сокращения записи рекуррентных уравнений аргумент t_{i+1} у матриц опускаются.

Для ЛКЗ моментные функции цены будут квадратичными:

$$\begin{gathered} \varphi_i(t, x_i | t_i, \dots, t_N) = \\ = \frac{1}{2} x_i^{\mathrm{T}} \Phi_i(t | t_{i+1}, \dots, t_N) x_i + \lambda_{i+1}(t_{i+1}) + \ldots + \lambda_N(t_N), \end{gathered} \tag{5.5}$$

где Φ_i — симметрическая неотрицательно определенная матрица порядка n_i, абсолютно непрерывная по t на $[t_i, t_{i+1}]$. Подставляя (5.5) в уравнения (5.3), (5.4), получаем для нахождения матриц Φ_i, $i = 0, 1, \dots, N$, следующую рекуррентную процедуру.

Матрица $\Phi_i(t)$ нульмоментной функции цены $\varphi_i(t, x_i | \varnothing)$ после i-го переключения (без последующих переключений) удовлетворяет на $[t_0, t_F]$ матричному дифференциальному уравнению Риккати:

$$\dot{\Phi}_i + A_i^{\mathrm{T}}(t) \Phi_i + \Phi_i A_i(t) + C_i(t) - \Phi_i B_i(t) D_i^{-1}(t) B_i^{\mathrm{T}}(t) \Phi_i = 0 \tag{5.6}$$

с терминальным условием $\Phi_i(t_F) = F$. Оптимальное управление непрерывным движением линейно по состоянию системы

$$\mathbf{u}_i(t, x_i) = -D_i^{-1}(t) B_i^{\mathrm{T}}(t) \Phi_i(t) x_i. \tag{5.7}$$

Матрица $\Phi_i(t | t_{i+1}, \dots, t_N)$ k-моментной функции цены ($k = N - i$) после i-го переключения находится по матрице Φ_{i+1} предыдущей $(k-1)$ моментной функции. В момент t_{i+1} первого из оставшихся переключений эта матрица удовлетворяет рекуррентному уравнению

$$\Phi_i(t_{i+1} | t_{i+1}, \dots, t_N) = \tag{5.8}$$
$$= -\widehat{A}_{i+1}^{\mathrm{T}} \Phi_{i+1}^{k-1} \widehat{B}_{i+1} \left[\widehat{D}_{i+1} + \widehat{B}_{i+1}^{\mathrm{T}} \Phi_{i+1}^{k-1} \widehat{B}_{i+1} \right]^{-1} \widehat{B}_{i+1}^{\mathrm{T}} \Phi_{i+1}^{k-1} \widehat{A}_{i+1} +$$
$$+ \widehat{C}_{i+1} + \widehat{A}_{i+1}^{\mathrm{T}} \Phi_{i+1}^{k-1} \widehat{A}_{i+1},$$

а условное оптимальное управление переключениями линейно по состоянию системы

$$\begin{gathered} \mathbf{v}_{i+1}(t_{i+1}, x_i | t_{i+2}, \dots, t_N) = \\ = -\left[\widehat{D}_{i+1} + \widehat{B}_{i+1}^{\mathrm{T}} \Phi_{i+1}^{k-1}\ \widehat{B}_{i+1} \right]^{-1} \widehat{B}_{i+1}^{\mathrm{T}} \Phi_{i+1}^{k-1} \widehat{A}_{i+1} x_i. \end{gathered} \tag{5.9}$$

В правых частях уравнений (5.8), (5.9) матрица $\Phi_{i+1}^{k-1} = \Phi_{i+1}(t_{i+1}|t_{i+2},\dots,t_N)$ – это матрица $(k-1)$-моментной функции цены после $(i+1)$-го переключения, $k = N - i$. При $i = N-1$ аргументы $t_{i+2},\dots,t_N$ отсутствуют и матрица $\Phi_i(t_{i+1}|t_{i+2},\dots,t_N) = \Phi_i(t_{i+1})$, т.е. совпадает с матрицей нульмоментной функции цены.

На промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ матрица $\Phi_i(t|t_{i+1},\dots,t_N)$ как функция времени t удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению Риккати (5.6) с терминальным условием (5.8). Оптимальное управление непрерывным движением на этом промежутке линейно по состоянию системы

$$\mathbf{u}_i(t, x_i|t_{i+1},\dots,t_N) = -D_i^{-1}(t)B_i^{\mathrm{T}}(t)\Phi_i(t|t_{i+1},\dots,t_N)x_i. \tag{5.10}$$

При $k = 0$ управление (5.10) совпадает с (5.7).

В результате рекуррентной процедуры находятся матрицы $\Phi_i(t), \Phi_i(t|t_1),\dots$ $\dots,\Phi_i(t|t_1,\dots,t_N)$ моментных функции цены (5.5), а также соответствующие условные оптимальные управления (5.9), (5.10). Для завершения синтеза оптимального управления остается определить количество переключений N и сами моменты переключений $t_1,\dots,t_N$, решая задачу конечномерной минимизации

$$\min I = \min_{N\in\mathbb{Z}_+} \min_{t_0\leqslant t_1\dots\leqslant t_N\leqslant t_F} \left\{\frac{1}{2}x_0^{\mathrm{T}}\Phi_0(t_0|t_1,\dots,t_N)x_0 + \lambda_1(t_1) + \dots \right.$$
$$\left. \dots + \lambda_N(t_N)\right\}. \tag{5.11}$$

Заметим, что из-за положительности затрат (2.5) минимум (5.11) достигается при конечном числе переключений N.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2 (оптимальное управление). *Оптимальное управление линейной ГСПР* (2.1)–(2.3) *с квадратичным функционалом качества* (2.4) *имеет вид*

$$\begin{gathered} u_i^*(t) = -D_i^{-1}(t)B_i^{\mathrm{T}}(t)\Phi_i(t|t_{i+1}^*,\dots,t_{N^*}^*)x_i^*(t), \\ t\in\left[t_i^*, t_{i+1}^*\right], \quad i = 0,1,\dots,N^*, \end{gathered} \tag{5.12}$$

$$\begin{gathered} v_i^*(t_i^*) = -\left[\widehat{D}_i + \widehat{B}_i^{\mathrm{T}}\Phi_i(t_i^*|t_{i+1}^*,\dots,t_{N^*}^*)\widehat{B}_i\right]^{-1}\times \\ \times\widehat{B}_i^{\mathrm{T}}\Phi_i(t_i^*|t_{i+1}^*,\dots,t_{N^*}^*)\widehat{A}_i x_{i-1}^*(t_i^*). \end{gathered} \tag{5.13}$$

Наименьшее значение функционала, оптимальное количество переключений N^* и оптимальные моменты переключений $t_1^*,\dots,t_{N^*}^*$ являются решением задачи минимизации (5.11).

Подчеркнем, что условные оптимальные управления (5.9), (5.10) линейны по состоянию системы. Однако количество переключений N^* и моменты переключений $t_1^*,\dots,t_{N^*}^*$, которые находятся в (5.11), в общем случае нелинейно зависят от начального состояния x_0. Поэтому оптимальные управления (5.12), (5.13) ГСПР оказывается нелинейными по состоянию в отличие от классических ЛКЗ оптимального управления.

6. Синтез оптимального в среднем управления

Как было показано выше, оптимальное в среднем управление совпадает с условным оптимальным управлением $\overline{w}_{\mathcal{T}}$ одной траекторией, исходящей из математического ожидания $\overline{x}_0$ начального состояния системы. Для синтеза такого управления используем так называемую функцию стоимости полуоптимального процесса [5], значение $\beta_i(t, x_i, \overline{x})$ которой по определению равно значению функционала оставшихся потерь (5.2), вычисленному на траектории $x(\cdot)$, исходящей из позиции (t, x_i), при управлении $\overline{w}$, оптимальном для траектории $\overline{x}(\cdot)$, исходящей из позиции $(t, \overline{x}_i)$. Иначе говоря, функция $\beta_i(t, x_i, \overline{x})$ равна значению функционала оставшихся потерь на полуоптимальном процессе $(x(\cdot), \overline{w})$, в котором управление $\overline{w}$ оптимальное (правда, для траектории $\overline{x}(\cdot)$), а траектория $x(\cdot)$ неоптимальная, хотя получается при управлении $\overline{w}$. При совпадении аргументов $x_i = \overline{x}_i$ имеет место равенство

$$\varphi_i(t, \overline{x}_i) = \beta_i(t, \overline{x}_i, \overline{x}_i). \tag{6.1}$$

Чтобы получить функцию стоимости $\beta_i(t, x_i, \overline{x})$, будем использовать, как и для функции цены, вспомогательные функции. Функцию $\beta_i(t, x_i, \overline{x}_i | t_{i+1}, \ldots$ $\ldots, t_N)$, равную (по определению) значению функционала оставшихся потерь (5.2), вычисленному на траектории, исходящей из позиции (t, x_i), при условном оптимальном управлении $\overline{w}_{\mathcal{T}}$, имеющем $k = N - i$ переключений в моменты $\mathcal{T} = \{t_{i+1}, \ldots, t_N\}$, для траектории, исходящей из позиции $(t, \overline{x}_i)$, будем называть *k-моментной функцией стоимости полуоптимального процесса* после i-го переключения.

Рекуррентная процедура нахождения моментных функций стоимости полуоптимального процесса для гибридных систем постоянной размерности представлена в [5]. Опишем аналогичную процедуру для ГСПР. Согласно определению моментная функция стоимости $(t, x_i) \to \beta_i(t, x_i, \overline{x}_i | t_{i+1}, \ldots, t_{i+k})$ на $[t_i, t_{i+1}] \times X_i \times X_i$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial t} + \frac{\partial \beta_i}{\partial x_i}\left[A_i(t)x_i + B_i(t)\overline{u}_i\right] + \frac{\partial \beta_i}{\partial \overline{x}_i}\left[A_i(t)\overline{x}_i + B_i(t)\overline{u}_i\right] + \\ + \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}} C_i(t) x_i + \frac{1}{2}\overline{u}_i^{\mathrm{T}} D_i(t)\overline{u}_i = 0 \tag{6.2}$$

с терминальным условием в момент переключения t_{i+1}:

$$\beta_i(t_{i+1}, x_i, \overline{x}_i | t_{i+1}, \ldots, t_N) = \frac{1}{2}x_i^{\mathrm{T}} \widehat{C}_{i+1} x_i + \frac{1}{2}\overline{v}_{i+1}^{\mathrm{T}} \widehat{D}_{i+1}\overline{v}_{i+1} + \\ + \beta_{i+1}\left(t_{i+1}, \widehat{A}_{i+1}x_i + \widehat{B}_{i+1}\overline{v}_{i+1}, \widehat{A}_{i+1}\overline{x}_i + \widehat{B}_{i+1}\overline{v}_{i+1} | t_{i+2}, \ldots, t_N\right). \tag{6.3}$$

В уравнениях (6.2), (6.3) условные оптимальные управления $\overline{u}_i$ и $\overline{v}_i$ имеют вид (5.10) и (5.9) соответственно для состояния $x_i = \overline{x}_i$. Как и ранее, для сокращения записи рекуррентных уравнений аргумент t_{i+1} у матриц не указывается.

Для ЛКЗ моментная функция стоимости будет квадратичной:

$$\beta_i\,(t, x_i, \overline{x}_i \,|\, t_{i+1}, \ldots, t_N) = \tag{6.4}$$
$$= \frac{1}{2}\,\overline{x}_i^{\mathrm{T}}\Phi_i\overline{x}_i + \frac{1}{2}\,\overline{x}_i^{\mathrm{T}}\Phi_i\Delta x_i + \frac{1}{2}\Delta x_i^{\mathrm{T}}\Phi_i\overline{x}_i + \frac{1}{2}\,\Delta x_i^{\mathrm{T}}\Gamma_i\Delta x_i +$$
$$+ \lambda_{i+1}\,(t_{i+1}) + \ldots + \lambda_N\,(t_N)\,.$$

Здесь $\Gamma_i = \Gamma_i(t|t_{i+1}, \ldots, t_N)$ — симметрическая неотрицательно определенная матрица порядка n_i, абсолютно непрерывная по t на $[t_i, t_{i+1}]$; $\Delta x_i = x_i - \overline{x}_i$; $\Phi_i = \Phi_i(t|t_{i+1}, \ldots, t_N)$ — матрица k-моментной функции цены (5.3), $k = N - i$. При $\Delta x = 0$ получаем равенство (6.1). Подставляем (6.4) в уравнения (6.2), (6.3). Учитывая, что матрицы Φ_i удовлетворяют уравнениям (5.6), (5.8), для нахождения матриц Γ_i, $i = 0, 1, \ldots$, имеем следующую рекуррентную процедуру.

Матрица Γ_i как функция времени $t \to \Gamma_i(t|t_{i+1}, \ldots, t_N)$ на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\Gamma}_i + A_i^{\mathrm{T}}(t)\Gamma_i + \Gamma_i A_i(t) - C_i(t) = 0 \tag{6.5}$$

с терминальным условием в момент переключения t_{i+1}:

$$\Gamma_i\,(t_{i+1} \,|\, t_{i+1}, \ldots, t_N) = \tag{6.6}$$
$$= \widehat{A}_{i+1}^{\mathrm{T}}\,\Gamma_{i+1}\,(t_{i+1} \,|\, t_{i+2}, \ldots, t_N)\,\widehat{A}_{i+1} + \widehat{C}_{i+1}.$$

Здесь $\Gamma_{i+1}(t_{i+1}|t_{i+2}, \ldots, t_N)$ — матрица $(N - i - 1)$-моментной функции стоимости после $(i + 1)$-го переключения. Матрица $\Gamma_i(t)$ нульмоментной функции стоимости удовлетворяет уравнению (6.5) с терминальным условием $\Gamma_i(t_F) = F$. В отличие от уравнения Риккати (5.6) и рекуррентного уравнения (5.8) дифференциальное уравнение (6.5) и рекуррентное уравнение (6.6) линейные, что упрощает процедуру решения.

По функции стоимости находим среднее значение (2.8) функционала качества

$$\overline{I}(t_0, p_0, \overline{w}_{\mathcal{T}}) = \int\limits_{X_0} p_0(x_0)\beta_0(t_0, x_0, \overline{x}_0)dx_0. \tag{6.7}$$

Упростим (6.7) для условного оптимального управления $\overline{w}_{\mathcal{T}}$, $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots, t_N\}$, траекторией, исходящей из математического ожидания $\overline{x}_0$ начального состояния системы. Подставляя (6.4) в (6.7) и учитывая, что среднее значение $\overline{\Delta x} = 0$, получаем

$$\overline{I}(t_0, p_0, \overline{w}_{\mathcal{T}}) = \frac{1}{2}\overline{x}_0^{\mathrm{T}}\Phi_0(t_0|t_1, \ldots, t_N)\overline{x}_0 + \tag{6.8}$$
$$+ \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,[\Gamma_0(t_0|t_1, \ldots, t_N)K_0] + \sum_{i=1}^{N}\lambda_i(t_i).$$

Здесь K_0 — матрица ковариации случайного вектора x_0:

$$K_0 = \overline{(x_0 - \overline{x}_0)(x_0 - \overline{x}_0)^{\mathrm{T}}}.$$

Для завершения синтеза оптимального в среднем управления остается определить количество переключений N и сами моменты переключений $t_1, \ldots, t_N$, решая задачу конечномерной минимизации

$$\text{(6.9)} \quad \min \overline{I} = \min_{N \in \mathbb{Z}_+} \min_{t_0 \leqslant t_1 \ldots \leqslant t_N \leqslant t_F} \left\{ \frac{1}{2} \overline{x}_0^{\mathrm{T}} \Phi_0(t_0 | t_1, \ldots, t_N) \overline{x}_0 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(t_i) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \mathrm{tr} \left[\Gamma_0(t_0 | t_1, \ldots, t_N) K_0 \right] \right\}.$$

Заметим, что из-за положительности затрат (2.5) минимум (6.9) достигается при конечном числе переключений N.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 3 (оптимальное в среднем управление). *Оптимальное в среднем управление линейной ГСПР* (2.1)–(2.3) *с квадратичным функционалом качества* (2.4) *имеет вид*

$$\overline{u}_i(t) = -D_i^{-1}(t) B_i^{\mathrm{T}}(t) \Phi_i \left(t \,|\, \overline{t}_{i+1}, \ldots, \overline{t}_{\overline{N}} \right) \overline{x}_i(t),$$
$$t \in \left[\overline{t}_i, \overline{t}_{i+1} \right], \quad i = 0, 1, \ldots, \overline{N},$$

$$\overline{v}_i(\overline{t}_i) = -\left[\widehat{D}_i + \widehat{B}_i^{\mathrm{T}} \Phi_i \left(\overline{t}_i \,|\, \overline{t}_{i+1}, \ldots, \overline{t}_{\overline{N}} \right) \widehat{B}_i \right]^{-1} \times$$
$$\times \widehat{B}_i^{\mathrm{T}} \Phi_i \left(t_i^* \,|\, \overline{t}_{i+1}, \ldots, \overline{t}_{\overline{N}} \right) \widehat{A}_i \overline{x}_{i-1}(\overline{t}_i).$$

Наименьшее среднее значение функционала, оптимальное количество переключений $\overline{N}$ и оптимальные моменты переключений $\overline{t}_1, \ldots, \overline{t}_{\overline{N}}$ являются решением задачи минимизации (6.9).

Как видим, при синтезе оптимального в среднем управления задача наблюдения — нахождение математического ожидания начального состояния системы — вполне тривиальная и решается отдельно от задачи управления. Задача синтеза условного оптимального управления также решается независимо от задачи наблюдения. Однако завершающая операция синтеза оптимального в среднем управления — поиск оптимальных моментов переключений (6.9) — выполняется при известных математическом ожидании и ковариационной матрице вектора начального состояния. Иначе говоря, последнюю операцию синтеза оптимального в среднем управления нельзя отделить от задачи наблюдения.

Отметим случай, когда выполняется классический принцип разделения.

С л е д с т в и е. *Если матрица $\Gamma_0(t_0|t_1, \ldots, t_N)$, удовлетворяющая уравнениям* (6.5), (6.6), *не зависит от моментов переключений $t_1, \ldots, t_N$, то оптимальное в среднем управление линейной ГСПР с квадратичным функционалом качества совпадает с оптимальным управлением одной траекторией, исходящей из математического ожидания начального состояния системы.*

Доказательство. В самом деле, подставляя в (6.9) $\Gamma_0(t_0|t_1,\ldots,t_N) = \Gamma_0(t_0)$, получаем задачу минимизации

$$\min \overline{I} = \min_{N\in\mathbb{Z}_+} \min_{t_0\leqslant t_1\ldots\leqslant t_N} \left\{ \frac{1}{2}\overline{x}_0^{\mathrm{T}}\Phi_0(t_0|t_1,\ldots,t_N)\overline{x}_0 + \sum_{i=1}^{N}\lambda_i(t_i) \right\} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,[\Gamma(t_0)K_0]\,. \tag{6.10}$$

Последнее слагаемое не зависит от переключений. Поэтому решение задачи минимизации (6.10) совпадает с решением задачи (5.11) при $x_0 = \overline{x}_0$. Значит, оптимальное в среднем управление и оптимальное управление для траектории, исходящей из математического ожидания начального состояния, совпадают, так как имеют одинаковое количество переключений и одинаковые моменты переключений, что и требовалось доказать.

7. Примеры

Рассмотрим две ЛКЗ управления в среднем гибридными системами. В первом примере для ГСПР выполняется классический принцип разделения. Во втором примере для гибридной системы второго порядка классический принцип не выполняется, а условный — оказывается справедливым.

Пример 1 (движение носителя с отделением управляемых объектов). Гибридная система представляет собой группу объектов, количество которых увеличивается с каждым переключением. Движение начинает один составной объект (носитель) массы M. При каждом переключении от него отделяется один простой объект массы m, который продолжает самостоятельное управляемое движение. Количество управляемых объектов, а следовательно, и размерность гибридной системы, увеличивается с каждым переключением. Сформулируем постановку задачи.

Пусть на заданном промежутке времени $T = [t_0, t_F]$ динамическая система совершает N переключений в моменты времени $t_1,\ldots,t_N$: $t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_N \leqslant t_F$.

Между неравными последовательными моментами переключений $t_i < t_{i+1}$ движение носителя и отделившихся простых объектов описываются дифференциальными уравнениями:

$$\begin{gathered} \dot{x} = y(t), \quad (M - im)\dot{y} = u(t), \\ \dot{x}_j = y_j(t), \quad m\dot{y}_j = u_j(t), \quad t \in [t_i, t_{i+1}]\,. \end{gathered} \tag{7.1}$$

Здесь x, y, u — координаты состояния носителя и его управление, $(M - im)$ — масса носителя после отделения от него i объектов; x_j, y_j, u_j — координаты и управление j-го объекта, $j = 1,\ldots,i$; m — масса каждого простого объекта. Ограничения на координаты и управления отсутствуют. Масса носителя не меньше суммарной массы переносимых объектов $M \geqslant Nm$.

В момент переключения t_i от носителя отделяется i-й объект под действием управления v_i, а состояния носителя и ранее отделившихся объектов не меняются:

$$
\begin{gathered}
x(t_i) = x(t_i - 0), \quad y(t_i) = y(t_i - 0);\\
x_i(t_i) = x(t_i), \quad y_i(t_i) = y(t_i) + v_i;\\
x_j(t_i) = x_j(t_i - 0), \quad y_j(t_i) = y_j(t_i - 0), \quad j = 1, \dots, i-1.
\end{gathered} \tag{7.2}
$$

Качество управления оценивается квадратичным функционалом

$$
\begin{gathered}
I\left(t_0, x_0, y_0, w\right) = \\
= \sum_{i=0}^{N} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left\{ \frac{(M - im)}{2M} u^2\left(t\right) + \frac{m}{2M}\left[u_1^2\left(t\right) + \ldots + u_i^2\left(t\right)\right]\right\} dt + \\
+ \sum_{i=1}^{N} \left\{ \lambda_i\left(t_i\right) + \frac{m}{2M} v_i^2 + \frac{m}{2M}\left[x_i^2\left(t_F\right) + y_i^2\left(t_F\right)\right]\right\} + \\
+ \frac{M - Nm}{2M}\left[x^2\left(t_F\right) + y^2\left(t_F\right)\right],
\end{gathered} \tag{7.3}
$$

где (x_0, y_0) — начальное состояние носителя, $\lambda_i(t_i) = \alpha_i(t_F - t)^2 + \beta_i$ — положительные затраты на i-е переключение, $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $i = 1, \dots, N$. Весовые коэффициенты в (7.3) перед квадратами переменных пропорциональны массам простых объектов и массе носителя после отделения простых объектов соответственно.

Начальное состояние (x_0, y_0) носителя является случайным вектором, имеющим равномерное распределение на квадрате $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$. Качество управления системой со случайным начальным состоянием оценивается средним значением функционала (7.3):

$$
\overline{I}(t_0, w) = \frac{1}{4} \int\limits_0^2 \int\limits_0^2 I(t_0, x_0, w) dx_0 dy_0. \tag{7.4}
$$

Требуется найти:

1) наименьшее значение функционала (7.3) и оптимальное управление для процесса, удовлетворяющего начальному условию $x_0 = 1$, $y_0 = 1$;

2) наименьшее среднее значение (7.4) функционала (7.3) и оптимальное в среднем управление, на котором это значение достигается.

Будем искать решение задачи при следующих значениях параметров: $t_0 = 0$, $t_F = 10$, $M = 3$, $m = 1$, $\alpha_1 = 0{,}012$, $\alpha_2 = 0{,}0145$, $\beta_1 = \beta_2 = 0{,}01$. Поскольку $M = 3m$, то количество отделяемых объектов не более двух ($N \leqslant 2$). По сравнению с общей постановкой задачи вектор состояния системы до первого переключения имеет вид $(x, y)^{\mathrm{T}}$, между переключениями — $(x, y, x_1, y_1)^{\mathrm{T}}$, после второго переключения — $(x, y, x_1, y_1, x_2, y_2)^{\mathrm{T}}$. Матрицы в уравнениях движения (2.2), (2.3) для рассматриваемой задачи имеют соответствующие размеры. Например, в момент первого переключения $\widehat{A}_1 = \mathrm{diag}(E_2, E_2)$, где

E_2 — единичная матрица второго порядка, $\widehat{B}_1 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$; после второго переключения

$$A_2 = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right), \quad B_2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

1. Перед синтезом оптимального управления ГСПР рассмотрим две простые вспомогательные задачи. Первая задача — это ЛКЗ Больца

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad M\dot{y}(t) = u, \tag{7.5}$$

$$I = \int\limits_t^{t_F} \frac{1}{2}u^2(t)dt + \frac{1}{2}F_{11}x^2(t_F) + F_{12}x(t_F)y(t_F) + \frac{1}{2}F_{22}y^2(t_F) \to \min.$$

В этой задаче функция цены квадратичная $\varphi(t,x,y) = \frac{1}{2}\varphi_{11}x^2 + \varphi_{12}xy + \frac{1}{2}\varphi_{22}y^2$, причем матрица $\mathbf{\Phi} = (\varphi_{ij})$ квадратичной формы удовлетворяет уравнению Риккати, аналогичному (5.6). Записывая для элементов матрицы $\mathbf{\Phi}$ дифференциальные уравнения, получаем систему

$$\dot{\varphi}_{11}(t) - \frac{\varphi_{12}^2}{M^2} = 0, \quad \dot{\varphi}_{12}(t) + \varphi_{11} - \frac{\varphi_{12}\varphi_{22}}{M^2} = 0, \quad \dot{\varphi}_{22}(t) + 2\varphi_{12} - \frac{\varphi_{22}^2}{M^2} = 0.$$

Решение этой системы с терминальными условиями $\varphi_{11}(t_F) = F_{11}$, $\varphi_{12}(t_F) = F_{12}$, $\varphi_{22}(t_F) = F_{22}$ имеет вид

$$\varphi_{11}(t) = M^2\frac{M^2F_{11} + |F|\tau}{\Delta}, \qquad \varphi_{12}(t) = M^2\frac{M^2(F_{11}\tau + F_{12}) + |F|\frac{\tau^2}{2}}{\Delta},$$
$$\varphi_{22}(t) = M^2\frac{M^2(F_{11}\tau^2 + 2F_{12}\tau + F_{22}) + |F|\frac{\tau^3}{3}}{\Delta},$$

где $\Delta = M^4 + M^2\left(F_{11}\frac{\tau^3}{3} + F_{12}\tau^2 + F_{22}\tau) + \frac{\tau^4}{12}|F|\right)$, $\tau = t_F - t$, $|F| = F_{11}F_{22} - F_{12}^2$ — определитель симметрической матрицы $F = (F_{ij})$. Оптимальное позиционное управление линейное по состоянию системы

$$\mathbf{u}(t,x,y) = -\frac{\varphi_{12}(t)x + \varphi_{22}(t)y}{M}. \tag{7.6}$$

Обозначим через $\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}(t|t_F, M, F)$ матрицу квадратичной функции цены φ.

Вторая вспомогательная задача — это дискретная одношаговая ЛКЗ Больца

$$x_1 = x_0, \quad y_1 = y_0 + v, \quad I = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}F_{11}x_1^2 + F_{12}x_1y_1 + \frac{1}{2}F_{22}y_1^2 \to \min.$$

Функция цены в этой задаче квадратичная $\widehat{\varphi}(x,y) = \frac{1}{2}\widehat{\varphi}_{11}x^2 + \widehat{\varphi}_{12}xy + \frac{1}{2}\widehat{\varphi}_{22}y^2$, ее коэффициенты находятся по формулам

$$\widehat{\varphi}_{11} = F_{11} - \frac{F_{12}^2}{1 + F_{22}}, \quad \widehat{\varphi}_{12} = \frac{F_{12}}{1 + F_{22}}, \quad \widehat{\varphi}_{22} = \frac{F_{22}}{1 + F_{22}}.$$

Оптимальное позиционное управление линейно по состоянию

$$\mathbf{v}(x, y) = -\frac{F_{12}x + F_{22}y}{1 + F_{22}}. \tag{7.7}$$

Обозначим через $\widehat{\mathbf{\Phi}} = \widehat{\mathbf{\Phi}}(F)$ матрицу квадратичной функции цены $\widehat{\varphi}$.

При помощи матриц $\mathbf{\Phi}(t|t_F, M, F)$ и $\widehat{\mathbf{\Phi}}(F)$ можно выразить матрицы квадратичных форм моментных функций цены (5.5). Записывая эти выражения, матрицы, соответствующие носителю, будем указывать без индекса, а соответствующие простым объектам — с индексом, равным номеру объекта. Например, матрица нульмоментной функции цены после второго переключения имеет вид $\mathrm{diag}(\Phi(t), \Phi_1(t), \Phi_2(t))$; матрица одномоментной функции цены между переключениями — $\mathrm{diag}(\Phi(t|t_2), \Phi_1(t))$.

Для нульмоментной функции цены $\varphi_0(t_0, x_0, y_0)$ матрица $\Phi_0(t_0)$ находится по формуле $\Phi_0(t_0) = \mathbf{\Phi}(t_0|t_F, M, E_2)$, так как задача без переключений совпадает с задачей Больца (7.5) при $F = E_2$.

Матрица $\Phi_0(t_0|t_1)$ одномоментной функции цены $\varphi_0(t_0, x_0, y_0|t_1)$ находится следующим образом. Сначала определяются матрицы нульмоментных функций цены для носителя $\Phi(t_1) = \mathbf{\Phi}(t_1|t_F, M - m, E_2)$ и для простого объекта $\Phi_1(t_1) = \mathbf{\Phi}(t_1|t_F, m, E_2)$ в момент t_1 после переключения. Затем находим матрицу $\Phi_0(t_1|t_1) = \frac{M-m}{M}\Phi(t_1) + \frac{m}{M}\widehat{\mathbf{\Phi}}(\Phi_1(t_1))$ одномоментной функции цены в момент t_1 перед переключением. И по формуле $\Phi_0(t_0|t_1) = \mathbf{\Phi}(t_0|t_1, M, \Phi_0(t_1|t_1))$ получаем искомую матрицу.

Для двухмоментной функции цены $\varphi_0(t_0, x_0, y_0|t_1, t_2)$ процедура нахождения матрицы $\Phi_0(t_0|t_1, t_2)$ аналогичная. Сначала определяются матрицы нульмоментных функций цены для носителя $\Phi(t_2) = \mathbf{\Phi}(t_2|t_F, M - 2m, E_2)$, первого $\Phi_1(t_1) = \mathbf{\Phi}(t_1|t_F, m, E_2)$ и второго $\Phi_2(t_2) = \mathbf{\Phi}(t_2|t_F, m, E_2)$ простых объектов. Затем находим матрицу одномоментной функции цены для носителя в момент t_2 перед переключением $\Phi(t_2|t_2) = \frac{M-2m}{M}\Phi(t_2) + \frac{m}{M}\widehat{\mathbf{\Phi}}(\Phi_2(t_2))$. Потом находим матрицу $\Phi(t_1|t_2) = \mathbf{\Phi}(t_1|t_2, M - m, \Phi(t_2|t_2))$ одномоментной функции цены для носителя в момент t_1 после первого переключения. Далее определяем матрицу двухмоментной функции цены в момент t_1 перед первым переключением $\Phi_0(t_1|t_1, t_2) = \frac{M-m}{M}\Phi(t_1|t_1, t_2) + \frac{m}{M}\widehat{\mathbf{\Phi}}(\Phi_1(t_1))$. И по формуле $\Phi_0(t_0|t_1, t_2) = \mathbf{\Phi}(t_0|t_1, M, \Phi(t_1|t_1, t_2))$ получаем искомую матрицу.

В результате описанной процедуры находятся моментные функции цены. В задаче без переключений наименьшее значение функционала качества (7.3) для заданного начального состояния $(x_0, y_0) = (1, 1)^{\mathrm{T}}$ вычисляется по нульмоментной функции цены $\min I_0 = \varphi_0(0, 1, 1) = 1{,}7321$. Для задач с переключениями нужно выполнить оптимизацию моментов переключений, решая соответственно задачи

$$\min I_1 = \min_{0 \leqslant t_1 \leqslant t_F} \varphi_0(0, 1, 1|t_1), \quad \min I_2 = \min_{0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_F} \varphi_0(0, 1, 1|t_1, t_2).$$

В первой задаче получаем $\min I_1 = 1{,}7231$ при $t_1 = 2{,}163$; во второй — $\min I_2 = 1{,}7031$ при $t_1 = 2{,}32$, $t_2 = 9{,}72$.

При численном решении задачи моментные функции находились по точным формулам, а оптимизация моментов переключений выполнялась приближенно перебором на сетке с шагом 0,001 для одного переключения и с

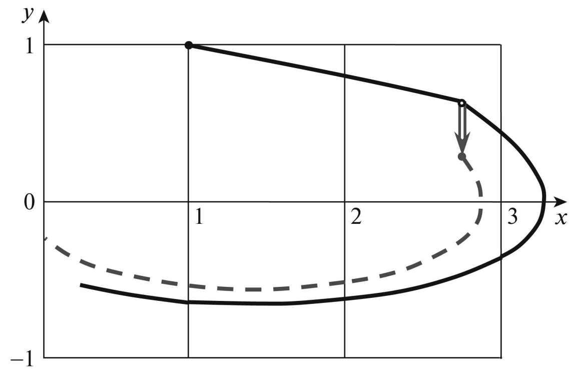


Рис. 1.

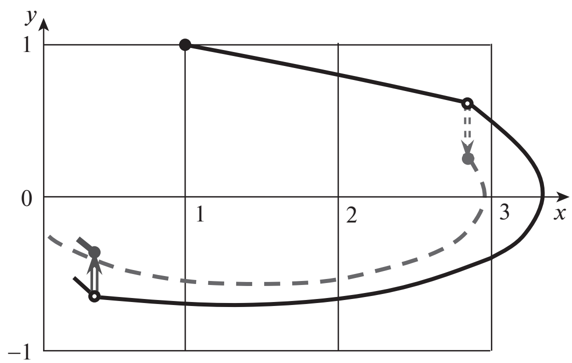


Рис. 2.

шагом 0,01 с двумя переключениями. Условные оптимальные траектории с одним и двумя переключениями представлены на рис. 1 и 2 соответственно. Сплошной линией изображается движение носителя и второго объекта, штриховой — первого объекта, двойными стрелками — отделение объекта от носителя. Условные оптимальные управления определяются формулами (7.6), (7.7). Таким образом, оптимальным является процесс с двумя переключениями.

2. Для решения задачи оптимального в среднем управления ГСПР нужно найти моментные функции стоимости (6.4). Разумеется, речь идет о матрицах Г, так как матрицы Ф моментных функций цены уже найдены в п. 1. В рассматриваемом функционале (7.3) матрицы C_i и $\widehat{C}_i$ нулевые, а собственные движения (без управления) носителя и простых объектов описываются одинаковыми уравнениями. Поэтому матрицы Г для носителя и простых объектов будут отличаться только коэффициентами, пропорциональными массам.

Обозначим через $\mathbf{\Gamma}(t|t_F, F)$ симметрическую матрицу второго порядка с элементами

$$\gamma_{11}(t) = F_{11}, \quad \gamma_{12}(t) = F_{12} + F_{11}\tau, \quad \gamma_{22}(t) = F_{22} + 2F_{12}\tau + F_{11}\tau^2,$$

где $\tau = t_F - t$. Эта матрица удовлетворяет уравнению (6.5) для нульмоментной функции стоимости с терминальным условием $\mathbf{\Gamma}(t_F|t_F, F) = F$.

С помощью этой матрицы выразим все матрицы Γ для моментных функций стоимости. Как и ранее, матрицы, соответствующие носителю, будем писать без индекса, а соответствующие простым объектам — с индексами, равными номеру объекта.

Для нульмоментной функции стоимости $\beta_0(t_0, x_0, y_0, \overline{x}_0, \overline{y}_0)$ матрица $\Gamma_0(t_0)$ находится по формуле $\Gamma_0(t_0) = \mathbf{\Gamma}(t_0|t_F, E_2)$.

Матрица $\Gamma_0(t_0|t_1)$ одномоментной функции стоимости $\beta_0(t_0, x_0, y_0, \overline{x}_0, \overline{y}_0|t_1)$ находится следующим образом. Сначала определяются матрицы нульмоментных функций стоимости для носителя $\Gamma(t_1) = \frac{(M-m)}{M}\mathbf{\Gamma}(t_1|t_F, E_2)$ и для простого объекта $\Gamma_1(t_1) = \frac{m}{M}\mathbf{\Gamma}(t_1|t_F, E_2)$ в момент t_1 после переключения. В момент переключения эти матрицы складываются: $\Gamma_0(t_1|t_1) = \Gamma(t_1) + \Gamma_1(t_1) = \mathbf{\Gamma}(t_1|t_F, E_2)$ — матрица одномоментной функции стоимости в момент t_1 перед переключением. Последнее равенство записано, так как сумма весовых коэффициентов равна единице. Наконец, по формуле $\Gamma_0(t_0|t_1) = \mathbf{\Gamma}(t_0|t_1, \Gamma_0(t_1|t_1))$ получаем искомую матрицу. Отметим, что из-за непрерывности продолжения решения дифференциальных уравнений имеем равенство $\mathbf{\Gamma}(t_0|t_1, \Gamma_0(t_1|t_1)) = \mathbf{\Gamma}(t_0|t_1, \mathbf{\Gamma}(t_1|t_F, E_2)) = \mathbf{\Gamma}(t_0|t_F, E_2)$. Поэтому матрица Γ_0 одномоментной функции стоимости не зависит от момента переключения t_1: $\Gamma_0(t_0|t_1) = \Gamma_0(t_0)$.

Аналогично доказывается, что матрица $\Gamma_0(t_0|t_1, t_2)$ двухмоментной функции стоимости $\beta_0(t_0, x_0, y_0, \overline{x}_0, \overline{y}_0|t_1, t_2)$ также не зависит от моментов переключений t_1,t_2.

Таким образом, согласно следствию, в рассматриваемой ЛКЗ принцип разделения выполняется. Поэтому оптимальное управление (с двумя переключениями), наденное в п. 1 для математического ожидания $(\overline{x}_0, \overline{y}_0) = (1, 1)$ начального состояния, является оптимальным в среднем управлением ГСПР. Наименьшее среднее значение функционала вычисляется по формуле (6.10):

$$\min \overline{I}_2 = \frac{1}{2}(\overline{x}_0, \overline{y}_0)^{\mathrm{T}} \Phi_0(t_0|t_1, t_2)(\overline{x}_0, \overline{y}_0) + \lambda_1(t_1) + \lambda_2(t_2) + \\ + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,[\Gamma(t_0)K_0] = 18{,}7031,$$

где $K_0 = \frac{1}{3}E_2$, а моменты переключений — такие же как в п. 1: $t_1 = 2{,}32$, $t_2 = 9{,}72$.

Пример 2 (движение с переключениями канала управления). Пусть на заданном промежутке времени $[0, 3]$ гибридная система постоянной размерности совершает N переключений (скачков) в моменты времени t_i, $i = 1, \ldots, N$, которые образуют неубывающую конечную последовательность: $0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_N \leqslant t_{N+1} \triangleq 3$. Между неравными последовательными моментами переключений состояние системы изменяется непрерывно, согласно дифференциальным уравнениям:

$$\dot{x}_1(t) = u(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_2(t), \quad t \in T_i, \quad i \in \mathcal{N}, \tag{7.8}$$

а в моменты переключений — дискретно в соответствии с рекуррентными уравнениями

$$x_{1i} = x_{2i-} + v_i, \quad x_{2i} = x_{1-}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{7.9}$$

Здесь, как и ранее, $\mathcal{N} \triangleq \{i=0,1,\ldots,N \,|\, t_i<t_{i+1}\}$ – множество номеров ненулевых (по длине) частичных промежутков $T_i=[t_i,t_{i+1}]$ непрерывного движения системы; $x(t)$ – состояние системы в момент времени $t\in T_i$, $x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in X = \mathbb{R}^2$; $u(t)$ — значение управления непрерывным движением системы в момент времени $t \in T_i$, $u \in \mathbb{R}$. В уравнении (7.9): $x_i = (x_{1i}, x_{2i}) = x(t_i)$ — состояние системы сразу после i-го переключения, $x_{i-} = (x_{1i-}, x_{2i-})$ — состояние системы непосредственно перед i-м переключением; v_i — управление переключением системы в момент $t_i \in \mathcal{T}$, $v_i \in \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{t_1, \ldots, t_N\}$.

Качество процесса управления оценивается квадратичным функционалом

$$I(x_0, w) = \int\limits_0^3 \frac{1}{2}\left[u^2(t) + x_1^2(t) + x_2^2(t)\right] dt + \sum_{i=1}^{N} \left(\lambda + \frac{\eta}{2} v_i^2\right), \tag{7.10}$$

где x_0 — начальное состояние системы, $w = (u(\cdot), v(\cdot))$ — допустимое управление. Коэффициенты λ и η определяют затраты на каждое переключение. Количество N и моменты переключений $t_1, \ldots, t_N$ заранее не заданы и подлежат оптимизации.

Начальное состояние (x_0, y_0) является случайным вектором, имеющим равномерное распределение на параллелограмме с вершинами $A(7{,}5; 5)$, $B(8{,}5; 5)$, $C(7{,}5; 6)$, $D(6{,}5; 6)$. Качество управления системой со случайным начальным состоянием оценивается средним значением функционала (7.10):

$$\overline{I}(t_0, w) = \int\limits_{ABCD} I(x_0, w) dx_0. \tag{7.11}$$

Требуется найти:

1) оптимальное управление w для траектории, исходящей из центра $\overline{x}_0 = (7{,}5; 5{,}5)$ параллелограмма $ABCD$, и соответствующее этому управлению значение функционала (7.10);

2) оптимальное в среднем управление $\overline{w}$ и соответствующее этому управлению среднее значение (7.11) функционала (7.10).

В системе (7.8), (7.9) имеется один канал управления: первая координата управляема при непрерывном движении, а вторая – нет (она экспоненциально отклоняется от нуля). В момент переключения фактически происходит взаимная замена координат состояния — неуправляемая координата становится управляемой и наоборот, причем значение первой управляемой координаты корректируется при помощи управления. Таким образом, совершая переключения (т.е. меняя канал управления), можно попеременно управлять координатами состояния системы.

По сравнению с общей постановкой задачи имеем гибридную систему постоянной размерности (второго порядка) со скалярными управлениями: $X = \mathbb{R}^2$, $U = V = \mathbb{R}$, $t_0 = 0$, $t_F = 3$. Нижнюю индексацию количества сделанных переключений у вектора состояния $x_i(t)$, функций цены φ_i (стоимости β_i) и моментных функций цены (стоимости), а также соответствующих матриц опускаем.

1. Перед синтезом оптимального управления ГСПР рассмотрим вспомогательную ЛКЗ Больца

$$\dot{x}_1(t) = u(t), \quad \dot{x}_2(t) = x_2(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_F, \quad x(t_0) = (x_{10}, x_{20})^{\mathrm{T}},$$

$$I(x_0, w) = \int\limits_{t_0}^{t_F} \frac{1}{2}\left[u^2(t) + x_1^2(t) + x_2^2(t)\right] dt + \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}}(t_F) F x(t_F) \to \min,$$

где F — симметрическая неотрицательно определенная матрица второго порядка. Функция цены в этой задаче квадратичная $\varphi(t,x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}(t|t_F, F)x$. Элементы симметрической матрицы $\mathbf{\Phi}$ имеют вид [17]:

$$\Phi_{11} = \frac{1}{2\Delta^2}\left[(1+F_{11}^2)\operatorname{sh} 2\tau + 2F_{12}\operatorname{ch} 2\tau\right], \quad \Phi_{12} = \frac{F_{12}}{\Delta}e^{\tau},$$

$$\Phi_{22} = -\frac{F_{12}^2 e^{2\tau}}{\Delta}\operatorname{sh}\tau + \frac{1}{2}\left(e^{2\tau} - 1\right) + F_{22}e^{2\tau},$$

где $\tau = t_F - t$, $\Delta = \operatorname{ch}\tau + \Phi_{11}\operatorname{sh}\tau$. Оптимальное позиционное управление линейно по состоянию $\mathbf{u}(t,x) = -\Phi_{11}(t)x_1 - \Phi_{12}(t)x_2$.

Перейдем к нахождению моментных функций цены, которые имеют вид:

$$\varphi(t_0, x|t_1, \ldots, t_k) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\Phi(t|t_1, \ldots, t_k)x + k\lambda.$$

Непрерывное изменение матриц Φ моментных функций цены выражается при помощи матрицы $\mathbf{\Phi}$, а скачки при переключениях определяются рекуррентным уравнением

$$\Phi(t_1|t_1, \ldots, t_N) = \frac{1}{\eta + \Phi_{11}}\begin{pmatrix} \eta\Phi_{22} + \Phi_{11}\Phi_{22} - \Phi_{12}^2 & \eta\Phi_{12} \\ \eta\Phi_{12} & \eta\Phi_{11}\end{pmatrix}. \tag{7.12}$$

В правой части уравнения (7.12) стоят элементы матрицы $\Phi(t_1|t_2, \ldots, t_N)$, предшествующей $(N-1)$-моментной функции цены. Условное оптимальное позиционное управление переключением системы $\mathbf{v}(t_1, x|t_2, \ldots, t_N) = -\Phi_{12}x_1 - \Phi_{11}x_2$.

Для нульмоментной функции цены $\varphi(t_0, x_0)$ матрица $\Phi(t_0)$ получается по формуле $\Phi(t_0) = \mathbf{\Phi}(t_0|t_F, O)$, где O — нулевая квадратная матрица второго порядка.

Матрица $\Phi(t_0|t_1)$ одномоментной функции цены $\varphi(t_0, x_0, y_0|t_1)$ находится следующим образом. Сначала определяется матрица нульмоментной функции цены $\Phi(t_1) = \mathbf{\Phi}(t_1|t_F, O)$ в момент t_1 после переключения. Затем матрица $\Phi(t_1|t_1)$ одномоментной функции цены в момент t_1 перед переключением, которая определяется рекуррентным уравнением (7.12) с элементами матрицы $\Phi(t_1)$ в правой части. Наконец, по формуле $\Phi(t_0|t_1) = \mathbf{\Phi}(t_0|t_1, \Phi_0(t_1|t_1))$ получаем искомую матрицу. Продолжая аналогичным образом, получаем следующие моментные функции цены [17].

На каждом шаге рекуррентной процедуры определяем наименьшее значение функционала (7.10) при фиксированном числе переключений

$$I_k = \min_{t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_k \leqslant t_F}\left\{\frac{1}{2}x_0^{\mathrm{T}}\Phi(t_0|t_1, \ldots, t_k)x_0 + k\lambda\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{7.13}$$

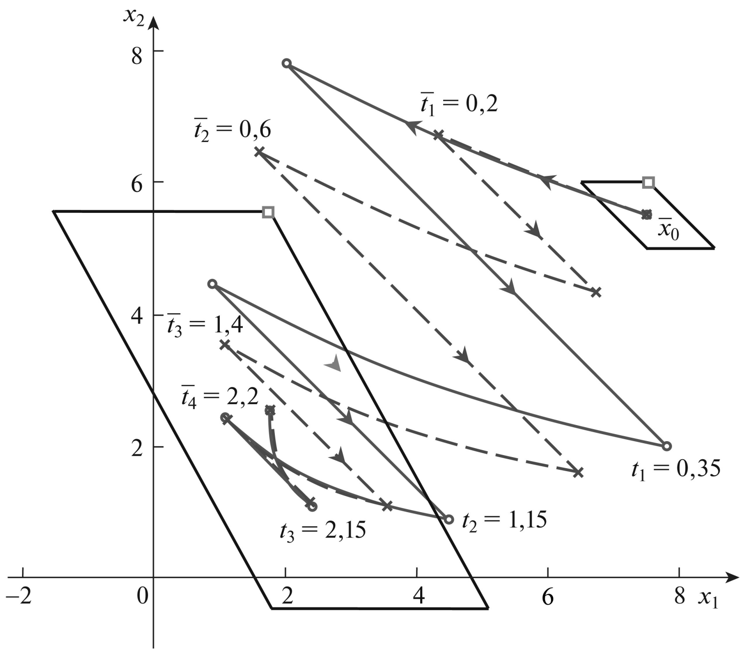


Рис. 3.

Условием окончания служит неравенство $I_k \leqslant I_{k+1}$, т.е. шаг k, после которого наименьшие значения (7.13) перестают убывать. Проверку нужно начинать с неравенства $I_0 \leqslant I_1$, где $I_0 = \varphi(t_0, x_0)$ — наименьшее значение функционала в задаче без переключений.

При численном решении задачи моментные функции находились по точным формулам, а оптимизация моментов переключений выполнялась приближенно перебором на сетке с шагом 0,01. Для заданного начального состояния были получены следующие значения функционалов:

$$I_0 = 2547{,}0217, \quad I_1 = 111{,}97371, \quad I_2 = 111{,}74633,$$
$$I_3 = 111{,}70389, \quad I_4 = 111{,}76546.$$

Так как $I_3 < I_4$, то оптимальной оказывается траектория с тремя переключениями в моменты времени: $t_1 = 0{,}35$, $t_2 = 1{,}15$, $t_3 = 2{,}15$. На рис. 3 оптимальная фазовая траектория изображена сплошной линией, начинающейся в точке $\overline{x}_0$, состояния непосредственно до и после переключений отмечены маленькими окружностями, направление движения указано стрелками.

2. Для решения задачи оптимального в среднем управления нужно найти моментные функции стоимости (6.4), которые для рассматриваемой задачи имеют вид

$$\beta(t, x, \overline{x}|t_1, \ldots, t_N) = \frac{1}{2}\overline{x}^{\mathrm{T}}\Phi\overline{x}_i + \frac{1}{2}\overline{x}^{\mathrm{T}}\Phi\Delta x_i + \\ + \frac{1}{2}\Delta x^{\mathrm{T}}\Phi\overline{x} + \frac{1}{2}\Delta x^{\mathrm{T}}\Gamma\Delta x + N\lambda. \tag{7.14}$$

Матрицы Φ моментных функций цены найдены в п. 1 решения. Поэтому для формирования (7.14) остается получить матрицы Γ. В формуле (7.14) учитывается, что при $\Delta x = 0$ выполняется равенство (6.1).

Обозначим через $\mathbf{\Gamma}(t|t_F, F)$ симметрическую матрицу второго порядка с элементами

$$\mathbf{\Gamma}_{11} = F_{11} + \tau, \quad \mathbf{\Gamma}_{12} = F_{12} e^{\tau}, \quad \mathbf{\Gamma}_{22} = F_{22} + e^{2\tau} + \frac{1}{2}\left(e^{2\tau} - 1\right).$$

Эта матрица удовлетворяет уравнению (6.5), соответствующему решаемой задаче, с терминальным условием $\mathbf{\Gamma}(t_F|t_F, F) = F$.

Запишем также рекуррентное уравнение (6.6) для рассматриваемой ЛКЗ

$$\Gamma(t_1|t_1, \ldots, t_N) = \begin{pmatrix} \Gamma_{22} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{11} \end{pmatrix}. \tag{7.15}$$

В правой части уравнения (7.15) стоят элементы матрицы $\Gamma(t_1|t_2, \ldots, t_N)$, предшествуюшей $(N-1)$-моментной функции стоимости $\beta(t_1, x, \overline{x}|t_2, \ldots, t_N)$.

Для нульмоментной функции стоимости $\beta(t_0, x_0, \overline{x}_0)$ матрица $\Gamma(t_0)$ получается по формуле $\Gamma(t_0) = \mathbf{\Gamma}(t_0|t_F, O)$, где O — нулевая квадратная матрица второго порядка.

Матрица $\Gamma(t_0|t_1)$ одномоментной функции стоимости $\beta(t_0, x_0, \overline{x}_0|t_1)$ находится следующим образом. Сначала определяется матрица нульмоментной функции стоимости $\Gamma(t_1) = \mathbf{\Gamma}(t_1|t_F, O)$ в момент t_1 после переключения. Затем получаем матрицу $\Gamma(t_1|t_1)$ одномоментной функции стоимости в момент t_1 перед переключением, которая определяется рекуррентным уравнением (7.15) с элементами матрицы $\Gamma(t_1)$ в правой части. Наконец, по формуле $\Gamma(t_0|t_1) = \mathbf{\Gamma}(t_0|t_1, \Gamma(t_1|t_1))$ получаем искомую матрицу. Продолжая аналогичным образом, получаем моментные функции стоимости.

На каждом шаге рекуррентной процедуры определяем наименьшее среднее значение функционала (7.10) при фиксированном числе переключений. Для этого решаем задачу минимизации, используя формулу (6.8):

$$\overline{I}_k = \min_{t_0 \leqslant t_1 \ldots \leqslant t_k} \left\{ \frac{1}{2} \overline{x}_0^{\mathrm{T}} \Phi(t_0|t_1, \ldots, t_k) \overline{x}_0 + \frac{1}{2} \mathrm{tr} \left[\Gamma_0(t_0|t_1, \ldots, t_N) K_0 \right] + k\lambda \right\}.$$

Для заданного распределения начального состояния были получены следующие значения функционалов:

$$\overline{I}_0 = 3076{,}988, \quad \overline{I}_1 = 119{,}663, \quad \overline{I}_2 = 115{,}185,$$
$$\overline{I}_3 = 115{,}066, \quad \overline{I}_4 = 115{,}016, \quad \overline{I}_5 = 115{,}058.$$

Так как $\overline{I}_4 < \overline{I}_5$, то оптимальным в среднем оказывается управление с четырьмя переключениями в моменты времени $\overline{t}_1 = 0{,}2$, $\overline{t}_2 = 0{,}6$, $\overline{t}_3 = 1{,}4$, $\overline{t}_4 = 2{,}2$. Для этого управления на рис. 3 изображены множества возможных состояний системы в начальный и конечный моменты времени, представляющие собой параллелограммы, а также траектория, исходящая из математического ожидания $\overline{x}_0 = (7{,}5; 5{,}5)^{\mathrm{T}}$. Отметим, что эта траектория (штриховая линия) отличается от оптимальной траектории для того же начального состояния (сплошная линия). У этих процессов даже разное количество переключений. Значит, классический принцип разделения не выполняется. Условный принцип разделения выполняется, так как оптимальное в среднем управление является условным оптимальным для траектории, исходящей из центра тяжести.

8. Заключение

Принцип разделения позволяет свести задачу оптимального в среднем управления детерминированной системой со случайным начальным состоянием к совокупности двух задач — оптимального управления одной траекторией и оптимального наблюдения. Решением задачи наблюдения служит оценка начального состояния, например его математическое ожидание. Эта оценка используется в оптимальном позиционном управлении, полученном при решении задачи управления одной траекторией. Обоснованием такого подхода для ЛКЗ управления ГСПР служит доказанный в статье так называемый условный принцип разделения. По сравнению с обычным принципом разделения, справедливым для ЛКЗ оптимального в среднем управления непрерывными, дискретными и непрерывно-дискретными системами, условный принцип разделения сложнее с вычислительной точки зрения. Для его применения нужно вычислить и запомнить моментные функции цены, которые зависят от нарастающего количества моментов переключений. Это существенно повышает требования к вычислительным ресурсам, необходимым для численного решения задачи. Если количество допустимых переключений небольшое из-за технических ограничений, то решение задачи упрощается. Условный принцип разделения можно применять и для нелинейных ГСПР. Поскольку принцип разделения для нелинейных систем не выполняется, получаемое управление не будет оптимальным в среднем. Однако на практике это субоптимальное управление часто оказывается вполне приемлемым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Д.А.* Математические методы управления пучками. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
2. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
3. *Бортаковский А.С.* Оптимальное и субоптимальное управления пучками траекторий детерминированных непрерывно-дискретных систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 1. С. 18–33.
4. *Бортаковский А.С., Немыченков Г.И.* Оптимальное в среднем управление детерминированными переключаемыми системами при наличии дискретных неточных измерений // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2019. № 1. С. 52–77.
5. *Бортаковский А.С.* Теорема разделения в задачах управления пучками траекторий детерминированных линейных переключаемых систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2020. № 2. С. 37–63.
6. *Величенко В.В.* Оптимальное управление составными системами // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. № 4. С. 754–756.
7. *Медведев В.А., Розова В.Н.* Оптимальное управление ступенчатыми системами // АиТ. 1972. № 3. С. 15–23.

Medvedev V.A., Rozova V.N. Optimal Control of Incremental Systems // Autom. Remote Control. 1972. V. 33. No. 3. P. 359–366.

8. *Болтянский В.Г.* Задача оптимизации со сменой фазового пространства // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 3. С. 518–521.
9. *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1985.
10. *Емельянов С.В., Уткин В.И., Таран В.А. и др.* Теория систем с переменной структурой. М.: Наука, 1970.
11. *Кириллов А.Н.* Динамические системы с переменной структурой и размерностью // Изв. вузов. Сер. Приборостроение. 2009. Т. 52. № 3. С. 23–28.
12. *Sussmann H.J.* A maximum principle for hybrid optimal control problems / Proc. of 38th IEEE Conf. on Decision and Control. Phoenix, 1999.
13. *Dmitruk A.V., Kaganovich A.M.* The Hybrid Maximum Principle is a consequence of Pontryagin Maximum Principle // Syst. Control Lett. 2008. V. 57. P. 964–970.
14. *Миллер Б.М., Рубинович Е.Я.* Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М.: Наука, 2005.
15. *Бортаковский А.С.* Синтез оптимальных систем управления со сменой моделей движения // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2018. № 4. С. 57–74.
16. *Бортаковский А.С.* Достаточные условия оптимальности гибридных систем переменнной размерности // Тр. МИАН. 2020. Т. 308. № 2. С. 88–100.
17. *Бортаковский А.С., Урюпин И.В.* Минимизация количества переключений оптимальных непрерывно-дискретных управляемых процессов // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2019. № 4. С. 29–46.
18. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. М.: Наука, 1973.
19. *Wonham W.M.* On the Separation Theorem of Stochastic Control // SIAM J. Control. 1968. V. 6. P. 312–326.
20. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
21. *Овсянников Д.А.* Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990.
22. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит. 1960.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 18.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020

© 2020 г. **Б.М. МИЛЛЕР, д-р физ.-мат. наук (bmiller@iitp.ru)**
(Институт проблем передачи информации РАН, Москва;
Казанский федеральный университет),
К.С. КОЛОСОВ (kirill.kolosov.com@mail.ru)
(Институт проблем передачи информации РАН, Москва)

РОБАСТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НА ОСНОВЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ МОДУЛЕЙ И ФИЛЬТРА КАЛМАНА[1]

Предлагается новый подход для решения задачи фильтрации в линейных системах по неполным измерениям, где характеристики динамического шума точно неизвестны, а в измерениях могут присутствовать аномальные негауссовские ошибки. В основе предлагаемого алгоритма лежит идея совместного использования адаптивного фильтра Калмана и обобщенного метода наименьших модулей. На примерах численного моделирования показано, что в сравнении с классическим методом оптимальной линейной фильтрации решение обладает меньшей чувствительностью к кратковременным выбросам в измерениях и обеспечивает быструю настройку параметров динамики системы. Предлагаемый алгоритм может быть использован для решения навигационной задачи на борту летательных аппаратов или для решения задачи сопровождения цели. Для реализации метода наименьших модулей используется эффективный алгоритм L_1-оптимизации.

Ключевые слова: фильтр Калмана, метод наименьших модулей, L_1-оптимизация, адаптивная фильтрация, робастная фильтрация, навигация, отказоустойчивость, негауссовские шумы.

DOI: 10.31857/S0005231020110057

1. Введение

Методы фильтрации широко используются в задачах, где необходимо получать оценку состояния системы в реальном времени на основе выборки измерений нарастающего объема. Более точно, предположим, что на момент t_i, $i \in N$, имеется выборка наблюдений $Y_i = y(t_0), \ldots, y(t_i)$, каждое наблюдение является реализацией случайной величины с условной плотностью распределения $f(y(t_i) \mid x(t_i), Y_{i-1})$, где $x(t_i) \in \mathbf{X}$, а $\mathbf{X}$ – пространство состояний системы. Динамика системы описывается марковским процессом, в котором состояние системы $x(t_i)$ в момент времени t_i связано с состоянием системы $x(t_{i-1})$ в момент времени t_{i-1} через условную плотность распределения $\phi(x(t_i) \mid x(t_{i-1}))$. При решении задачи фильтрации основной интерес представляет апостериорная плотность распределения $p(x(t_i) \mid Y_i)$. Известно, что

[1] Работа выполнена частично за счет средств субсидии, выделенной в рамках Государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

когда наблюдения и динамика системы описываются линейными уравнениями, а f и ϕ представляют собой гауссовские распределения, искомая плотность $p(x(t_i) \mid Y_i)$ также является гауссовской и задача имеет аналитическое решение. В этом случае уравнения динамики и наблюдений имеют вид:

$$\begin{gathered} x(t_i) = F(t_{i-1}, t_i)x(t_{i-1}) + n(t_{i-1}, t_i), \\ y(t_i) = Hx(t_i) + \xi(t_i), \end{gathered} \tag{1}$$

где $F(t_{i-1}, t_i)$ – матрица прогноза состояния; H – постоянная матрица наблюдений; $n(t_i)$ и $\xi(t_i)$ – векторы нормально распределенных случайных величин, таких что

$$\begin{gathered} \operatorname{cov}(n(t_{i-1}, t_i), n(t_{i-1}, t_i)) = Q(t_{i-1}, t_i), \\ \operatorname{cov}(\xi(t_i), \xi(t_i)) = R(t_i). \end{gathered} \tag{2}$$

Параметры апостериорной плотности распределения $p(x(t) \mid Y_t)$ – вектор математических ожиданий и ковариационная матрица – рассчитываются в соответствии с рекуррентным алгоритмом Калмана, который состоит из двух шагов:

- Прогнозирование:

$$\begin{gathered} \widetilde{x}(t_i) = F(t_{i-1}, t_i)\hat{x}(t_{i-1}), \\ \widetilde{P}(t_i) = F(t_{i-1}, t_i)\hat{P}(t_{i-1})F^{\mathrm{T}}(t_{i-1}, t_i) + Q(t_{i-1}, t_i); \end{gathered} \tag{3}$$

- Коррекция оценки состояния по текущим измерениям:

$$\begin{gathered} K = \widetilde{P}(t_i)H^{\mathrm{T}}(H\widetilde{P}(t_i)H^{\mathrm{T}} + R)^{-1}, \\ \hat{x}(t_i) = \widetilde{x}(t_i) + K(y(t_i) - H\widetilde{x}(t_i)), \\ \hat{P}(t_i) = (I - KH)\widetilde{P}(t_i). \end{gathered} \tag{4}$$

Такая оценка является оптимальной по критерию минимума дисперсии ошибки оценивания [1, 2]. Фильтр Калмана нашел широчайшее применение в задачах навигации [3–5]. Но предположение о нормальности распределений не всегда является адекватным. Например, в навигационных системах ЛА для коррекции инерциальных датчиков нужно использовать радионавигационные системы, измерения которых могут быть подвержены помехам. Под воздействием помех вид распределения ошибок измерений $f(y(t) \mid x(t), Y_{t-1})$ может существенно отличаться от нормального. В таких условиях применение фильтра Калмана в оригинальном виде в системах с избыточными измерениями снижает надежность решения в целом, так как наличие аномальных ошибок хотя бы в одном измерении приводит к аномальным ошибкам в оценке всех компонент вектора состояния. Для повышения устойчивости оценки к аномальным ошибкам измерений необходимо использовать робастные методы фильтрации.

Модель динамики системы также может стать источником аномальных ошибок оценки. Такая проблема возникает, например, в задаче сопровождения маневрирующей цели, где модель динамики системы может существенно изменяться во времени. В работах [2, 6] приводится описание адаптивных алгоритмов, нацеленных на решение задачи оптимальной фильтрации в условиях неопределенности модели динамики системы и модели измерений. Фильтры Лайниотиса–Калмана хорошо решают задачу идентификации систем с гауссовскими шумами, но применение этих алгоритмов в системах, где ошибки измерений могут быть существенно негауссовскими, мало изучено. Существуют адаптивные алгоритмы, которые основаны на сопоставлении теоретических значений ковариационных матриц ошибок измерений и ошибок оценки с фактическими, рассчитанными по выборке измерений. Такие алгоритмы рассматриваются в публикациях [4, 7–9]. В [10] рассматривается алгоритм робастной фильтрации с использованием квадратичного критерия. В [11–13] предлагается робастная форма фильтра Калмана, где используется М-оценка для обнаружения и устранения аномальных измерений. Отмечается, что использование L_1-нормы ошибок в штрафной функции для М-оценки существенно повышает устойчивость решения по отношению к аномальным ошибкам негауссовского типа [14].

В [14] также отмечается, что одновременное достижение свойств робастности и адаптивности в общем случае не представляется возможным: свойство адаптивности обычно рассматривается в контексте повышения эффективности оценки при условии симметричных распределений ошибок, а свойство робастности рассматривается в контексте повышения стабильности решения в случае асимметричных распределений. При этом рассматривать адаптивность в контексте асимметричных распределений не имеет смысла. Цель данной статьи – разработка такого метода фильтрации, который в один момент времени будет обладать либо свойством адаптивности, либо свойством робастности, но выполняться это переключение должно автоматически.

Предлагается новый подход, в котором для обнаружения и устранения аномальных измерений на каждой итерации используется метод наименьших модулей. Одновременно с этим используется метод сопоставления ковариационных матриц для настройки параметров динамики системы и метод фильтрации Калмана для получения оценки текущего состояния. На численных примерах будет показано, что предлагаемый алгоритм повышает устойчивость решения к асимметричным помехам в измерениях и повышает эффективность решения в некоторых случаях симметричных негауссовских помех.

Используемый в алгоритме метод наименьших модулей минимизирует L_1-норму ошибок в избыточной системе линейных уравнений. Эта процедура требует применения специальных методов оптимизации, так как рекурсивный метод наименьших квадратов, применяемый в [11–13], не дает точного решения и обладает численной нестабильностью, которая приводит к проблеме выбора критерия сходимости [15]. Поэтому в статье уделяется внимание численным методам, которые могут быть использованы для эффективной реализации алгоритма на ЭВМ (см. подраздел 3.1).

В разделе 2 рассматриваются основные соотношения адаптивных алгоритмов, основанных на принципе сопоставления ковариационных матриц. В разделе 3 дается описание предлагаемого алгоритма, который основан на методе наименьших модулей. В разделе 4 представлены результаты моделирования и сравнение характеристик предлагаемого алгоритма с методом оптимальной фильтрации Калмана.

2. Адаптивный фильтр Калмана, основанный на сопоставлении ковариационных матриц

Адаптивные алгоритмы разделяются на две категории. К первой относятся алгоритмы, в которых оцениваются элементы матриц F и H в уравнениях (1). Эти алгоритмы разрабатываются в контексте задач идентификации системы. Ко второй категории относятся алгоритмы, где оцениваемыми параметрами являются элементы матриц Q и R, т.е. предполагается, что характеристики динамического шума и шума измерений точно неизвестны. Будем рассматривать алгоритмы, относящиеся ко второй категории.

Предположим, что в модели (1)–(2) в матрицах Q и R содержится p неизвестных элементов a_i, $i = 1, \ldots, p$. Расположим их в векторе $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_p]^{\mathrm{T}}$ размерности p. С учетом (3)–(4) и в соответствии с [16] оценка вектора $\mathbf{a}$ по критерию максимума правдоподобия может быть получена на основе уравнения:

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left\{P(t_i)^{-1}\frac{\partial P(t_i)}{\partial a_k}\right\} - 2\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial \widetilde{x}(t_i)^{\mathrm{T}}}{\partial a_k}H^{\mathrm{T}}P_r(t_i)^{-1}r(t_i) + \\ + \sum_{i=1}^{N}\operatorname{tr}\left\{\left[P_r(t_i)^{-1} - P_r(t_i)^{-1}r(t_i)r(t_i)^{\mathrm{T}}P_r(t_i)^{-1}\right]\frac{\partial P_r(t_i)}{\partial a_k}\right\}\Bigg|_{\mathbf{a}=\mathbf{a}^*(t_i)} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

для $k = 1, 2, \ldots, p$, где

$$\begin{aligned} r(t_i) &= y(t_i) - H\widetilde{x}(t_i), \\ P_r(t_i) &= H\widetilde{P}(t_i)H^{\mathrm{T}} + R. \end{aligned} \tag{6}$$

Но решения уравнения (5) в замкнутой форме не существует. В [16] приводится упрощенное уравнение для субоптимальной оценки матриц Q и R с осреднением на скользящем окне фиксированной ширины N:

$$\begin{aligned}\hat{R}(t_i) &= \frac{1}{N}\sum_{j=i-N+1}^{i}\left[r(t_j)\,r(t_j)^{\mathrm{T}} - H\widetilde{P}(t_j)\,H^{\mathrm{T}}\right] \cong \\ &\cong \frac{1}{N}\sum_{j=i-N+1}^{i} r(t_j)r(t_j)^{\mathrm{T}} - H\widetilde{P}(t_i)H^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\hat{Q}(t_i) = \frac{1}{N}\sum_{j=i-N+1}^{i}\Big[K(t_j)\,r(t_j)\,r(t_j)^{\mathrm{T}}\,K(t_j)^{\mathrm{T}} + \\ + P(t_j) - F(t_{j-1}, t_j)\,P(t_{j-1})\,F(t_{j-1}, t_j)^{\mathrm{T}}\Big]. \end{aligned} \tag{8}$$

В уравнении (7) предполагается, что матрица Q известна. В уравнении (8), наоборот, полагается, что матрица R известна. Осреднение (7) и (8) справедливо для установившегося режима, ширина окна N в этом случае выбирается такой, что дальнейшее увеличение ширины не приводит к существенному увеличению эффективности оценки. Чтобы использовать адаптивный фильтр в нестационарной задаче, ширина окна должна подбираться эмпирически – большие значения N будут приводить к инерционности оценки, а маленькие значения увеличат шум оценки. В нестационарной задаче осреднение на скользящем окне можно заменить простым α-фильтром:

$$\hat{R}(t_i) = (1-\alpha)\hat{R}(t_{i-1}) + \alpha\left(r(t_j)r(t_j)^{\mathrm{T}} - H\widetilde{P}(t_i)H^{\mathrm{T}}\right), \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\hat{Q}(t_i) = (1-\alpha)\hat{Q}(t_{i-1}) + \\ + \alpha\Big(K(t_i)r(t_i)r(t_i)^{\mathrm{T}}K(t_i)^{\mathrm{T}} + P(t_i) - F(t_{i-1},t_i)P(t_{i-1})F(t_{i-1},t_i)^{\mathrm{T}}\Big),\end{gathered} \tag{10}$$

где $0 < \alpha < 1$ – настраиваемый коэффициент. Так как на момент t_i для расчета $\hat{Q}(t_i)$ необходимо знать $P(t_i)$, оценка находится в две итерации: сначала осуществляется оценка в соответствии с (3)–(4), где матрица Q задана в соответствии с априорной моделью (2), затем рассчитывается оценка $\hat{Q}(t_i)$, после чего вновь применяется алгоритм (3)–(4), где матрица Q уже заменена на $\hat{Q}(t_i)$.

Алгоритмы, основанные на оценке (7) и (8) в различных вариациях используются в публикациях [7–9]. Необходимо иметь в виду, что при попытке одновременной оценки R и Q могут возникнуть проблемы, так как в этом случае ошибки в $\hat{R}$ будут неотличимы от ошибок в $\hat{Q}$ и оценка может быть смещенной.

3. Робастный фильтр Калмана с идентификацией отказов на основе метода наименьших модулей

Предлагаемый в настоящей статье метод отличается от адаптивного алгоритма (6)–(10) публикации [16] тем, что для оценки дисперсии измерений вместо (9) используется апостериорная невязка измерений, полученная после применения метода наименьших модулей (МНМ).

Рассмотрим линейную систему (1). На каждом шаге фильтрации известен вектор измерений $y(t_i)$, прогнозное значение вектора состояния $\widetilde{x}(t_i)$, ковариационные матрицы $R(t_i)$ и $\widetilde{P}(t_i)$. Робастный алгоритм состоит из следующих шагов:

1. Прогноз состояния в соответствии с (1)–(2);

2. Используя измерения на текущем шаге $y(t_i)$ и прогноз состояния $\widetilde{x}(t_i)$, находим оценку вектора состояния $\hat{x}_{L1}(t_i)$ по методу наименьших модулей;

3. Обнаружение и идентификация отказов. Для обнаружения отказа используем критерий Неймана–Пирсона и в случае обнаружения вычисляем оценку ковариационной матрицы измерений $\hat{R}(t_i)$ в зависимости от величины невязок $y(t_i) - H\hat{x}_{L1}(t_i)$;

4. Используя оценку ковариационной матрицы измерений $\hat{R}(t_i)$, находим значение ковариационной матрицы динамического шума $\hat{Q}(t_i)$ в соответствии с (10);

5. Вычисляем оценку текущего состояния системы в соответствии с (3)–(4), заменив $Q(t_{i-1}, t_i)$ и R на их оценки $\hat{Q}$ и $\hat{R}$ соответственно.

Пункт 1 эквивалентен оптимальному алгоритму фильтрации Калмана. Далее рассмотрим пп. 2–5 более подробно. Точное описание шагов представлено в алгоритме 1.

3.1. Оценка состояния по методу наименьших модулей

Целью метода наименьших модулей является минимизация L_1-нормы вектора ошибок. L_1-норма вектора рассчитывается как сумма модулей его элементов, и для одномерного случая решением задачи минимизации будет медианное значение

$$\hat{\theta}_{L_1} = Median(z) = \arg\min_{\theta} \left[L_1(z-\theta)\right], \tag{11}$$

где z – вектор, θ – скаляр и $L_1(z-\theta) = \sum_{i=1}^{N} |z_{(i)} - \theta|$.

Если элементы вектора z – независимые случайные величины, распределенные по закону Лапласа с одинаковыми параметрами

$$z_{(i)} \sim Laplace(y; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}|y-\mu|\right), \quad i = 1, \ldots, N,$$

то медиана (11) является оценкой максимума правдоподобия центрального параметра распределения. В [14, 17] отмечается свойство робастности статистик, основанных на L_1-метрике, которые оказываются более устойчивыми к выбросам в больших выборках. Несмотря на то, что для случая нормального распределения вектора z оценка (11) является менее эффективной по сравнению со средним арифметическим, именно свойство робастности делает (11) предпочтительной в задачах, где в выборке могут присутствовать аномальные ошибки.

Рассмотрим применение L_1-метрики на примере системы линейных уравнений

$$z = Hx + \epsilon, \tag{12}$$

где H – матрица наблюдений, x – вектор оцениваемых параметров, ϵ – ошибки измерений, z – вектор измерений (размерность $z \geqslant$ размерности x). Оценкой $\hat{x}_{L1}$ вектора x по методу наименьших модулей будем называть оценку

$$\hat{x}_{L1} = \arg\min_{x} \left[L_1(z - Hx)\right] \tag{13}$$

при условии, что ошибки измерений независимые и с единичной дисперсией

$$C = E\left[\epsilon\epsilon^{\mathrm{T}}\right] = \mathbf{I}.$$

В общем случае, когда ковариационная матрица ошибок измерений $C \neq \mathbf{I}$, задача может быть сведена к (12)–(13) через процедуру декорреляции измерений. Так как ковариационная матрица положительно определенная и симметричная, она допускает разложение

$$LDL^{\mathrm{T}} = C, \tag{14}$$

где D – диагональная матрица со строго положительными диагональными элементами. Это означает, что матрицу D можно представить в виде произведения $D = D^{1/2}D^{1/2}$. Тогда справедливо:

$$\begin{aligned}\epsilon_d &= D^{-1/2}L^{-1}\epsilon,\\ E\left[\epsilon_d\epsilon_d^{\mathrm{T}}\right] &= D^{-1/2}L^{-1}C\left(L^{-1}\right)^{\mathrm{T}}D^{-1/2} =\\ &= \left(D^{-1/2}L^{-1}LD^{1/2}\right)\left(D^{1/2}L^{\mathrm{T}}\left(L^{\mathrm{T}}\right)^{-1}D^{-1/2}\right) = \mathbf{I}.\end{aligned}$$

Таким образом, для произвольной ковариационной матрицы C можно свести задачу к (12)–(13), заменив z, H, ϵ на z_d, H_d, ϵ_d соответственно:

$$\begin{aligned}z_d &= D^{-1/2}L^{-1}z,\\ H_d &= D^{-1/2}L^{-1}H.\end{aligned}$$

Разложение (14) может быть получено также через разложение Холецкого

$$L = \mathrm{chol}(C), \quad LL^{\mathrm{T}} = C,$$

где матрица L – нижняя треугольная со строго положительными элементами на диагонали. Самым простым подходом к решению задачи минимизации является итерационный метод наименьших квадратов, который предлагалось использовать в [11–13] для получения М-оценки. Но при решении задачи L_1-оптимизации итерационный метод наименьших квадратов обладает численной нестабильностью, которая приводит к проблеме выбора критерия сходимости [15]. В [18, 19] показано, что задача (12)–(13) сводится к задаче линейного программирования, решение которой может быть получено более эффективными алгоритмами, чем итерационный метод наименьших квадратов. Минимизируемая функция представляется в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\epsilon_{d(i)}\right| = \left(\sum_{i=1}^{n}\epsilon_{1(i)} + \sum_{i=1}^{n}\epsilon_{2(i)}\right) \to \min \tag{15}$$

с ограничениями

$$\begin{gathered}\left[H_d, \mathbf{I}_{(n\times n)}, -\mathbf{I}_{(n\times n)}\right]\cdot\begin{bmatrix}x\\ \epsilon_1\\ \epsilon_2\end{bmatrix} = z_d,\\ \epsilon_{1(i)} \geqslant 0, \quad \epsilon_{2(i)} \geqslant 0, \quad i = 1,\ldots,n.\end{gathered} \tag{16}$$

Для повышения эффективности алгоритма в [20] осуществляется переход к двойственной форме задачи (15)–(16)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} z_{d(i)}\left(b_i - 1\right)\right) \to \max \tag{17}$$

для системы

$$
H_d^{\mathrm{T}} b = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} H_{d(i,1)} \\ \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} H_{d(i,m)} \end{bmatrix}, \tag{18}
$$
$$
0 \leqslant b_{(i)} \leqslant 2, \quad i = 1, \dots, n.
$$

Далее, для решения задачи (17)–(18) можно применить симплекс-метод. Чтобы повысить скорость сходимости в [20] предложена специальная модификация симплекс-метода. Подробное описание алгоритма L_1-оптимизации можно найти в [20].

Теперь рассмотрим применение метода наименьших модулей в задаче фильтрации. На каждом шаге имеется вектор измерений $y(t_i)$ и прогноз вектора состояния $\widetilde{x}(t_i)$, а также их ковариационные матрицы $R(t_i)$ и $\widetilde{P}(t_i)$ соответственно. Составим из этих векторов один и назовем его расширенным вектором измерений:

$$
\begin{gathered}
z_e(t_i) = \left[y(t_i)^{\mathrm{T}}, \widetilde{x}(t_i)^{\mathrm{T}} \right]^{\mathrm{T}}, \\
C_e(t_i) = \begin{bmatrix} R(t_i) & \mathbf{0}_{(m\times n)} \\ \mathbf{0}_{(n\times m)} & \widetilde{P}(t_i) \end{bmatrix},
\end{gathered} \tag{19}
$$

где C_e – ковариационная матрица расширенного вектора измерений z_e. С учетом (1)

$$
\begin{gathered}
z_e(t_i) = H_e x(t_i) + \epsilon(t_i), \\
H_e(t_i) = \left[H(t_i)^{\mathrm{T}}, \mathbf{I}_{(n\times n)} \right]^{\mathrm{T}},
\end{gathered} \tag{20}
$$

где $\epsilon(t_i)$ – вектор случайных величин с ковариационной матрицей $\operatorname{cov}(\epsilon(t_i), \epsilon(t_i)) = C_e(t_i)$.

Используя разложение Холецкого $LL^{\mathrm{T}} = \operatorname{chol}(C_e(t_i))$ для ковариационной матрицы расширенного вектора измерений, осуществим декоррелирующее преобразование:

$$
\begin{gathered}
z_d\left(t_i\right) = H_d\left(t_i\right) x\left(t_i\right) + \epsilon_d\left(t_i\right) = L^{-1} z_e\left(t_i\right), \\
H_d\left(t_i\right) = L^{-1} H_e\left(t_i\right), \\
\epsilon_d\left(t_i\right) = L^{-1} \epsilon\left(t_i\right),
\end{gathered}
$$

причем

$$
\begin{gathered}
\operatorname{cov}\left(\epsilon_d\left(t_i\right), \epsilon_d\left(t_i\right)^{\mathrm{T}}\right) = L^{-1} \operatorname{cov}\left(\epsilon\left(t_i\right), \epsilon\left(t_i\right)^{\mathrm{T}}\right) L^{-\mathrm{T}} = \\
= L^{-1} C_e L^{-\mathrm{T}} = L^{-1} L L^{\mathrm{T}} L^{-\mathrm{T}} = \mathbf{I}.
\end{gathered} \tag{21}
$$

Таким образом, задача сведена к задаче (15)–(16), и теперь, применив метод L_1-оптимизации, можно получить оценку вектора состояния $x(t_i)$ по методу наименьших модулей

$$\hat{x}_{L1}(t_i) = \arg\min_x \left(L_1(z_d(t_i) - H_d(t_i)x)\right). \tag{22}$$

Для реализации разложения Холецкого на ЭВМ рекомендуется использовать алгоритм, приведенный в [21].

3.2. Обнаружение отказов и расчет ковариационной матрицы измерений

При нормальном функционировании системы распределение ошибок измерений и ошибок прогноза состояния предполагается гауссовским с нулевым математическим ожиданием. В случае отклонений от модели будем полагать, что ошибка соответствующего измерения имеет ненулевое математическое ожидание. Рассмотрим две конкурирующие гипотезы

$$\begin{aligned} H_0 &: E\left[z_d(t_i)\right] = H_d x(t_i), \\ H_1 &: E\left[z_d(t_i)\right] = H_d x(t_i) + A\Delta, \end{aligned}$$

где A – матрица коэффициентов (модель отклонений), Δ – параметры модели отклонений. Учитывая, что $\mathrm{cov}(\epsilon_d(t_i), \epsilon_d(t_i)^{\mathrm{T}}) = \mathbf{I}$, подходящая для проверки гипотез статистика может быть получена в виде [22]

$$T = z_d^{\mathrm{T}} B_k (B_k^{\mathrm{T}} B_k)^{-1} B_k^{\mathrm{T}} z_d, \tag{23}$$

где $\mathrm{rank}(B_k) = (m+n) - n = m$, m – размерность вектора измерений, n – размерность вектора состояния, $(m+n)$ – размерность расширенного вектора измерений и $B_k^{\mathrm{T}} H_d = 0$. Матрица B_k может быть получена через QR-разложение матрицы H_d:

$$[Q_k, B_k] \begin{bmatrix} R_k \\ \mathbf{0}_{(m-n\times n)} \end{bmatrix} = qr(H_d).$$

Для реализации QR-разложения рекомендуется использовать алгоритм, приведенный в [21]. В зависимости от принятой гипотезы статистика (23) будет иметь нецентральное распределение хи-квадрат с m степенями свободы и различным значением параметра нецентральности [22, 23]:

$$\begin{aligned} H_0 &: T \sim \chi^2(m, 0); \\ H_1 &: T \sim \chi^2(m, \lambda). \end{aligned}$$

Здесь λ – параметр нецентральности, рассчитываемый в зависимости от принятой модели отказа. В соответствии с леммой Неймана–Пирсона наиболее мощным критерием выбора гипотез является критерий вида

$$\begin{aligned} H_0 &: T \leqslant c(m); \\ H_1 &: T > c(m); \end{aligned} \tag{24}$$

где пороговое значение $c(m)$ рассчитывается как значение аргумента функции распределения $\chi^2(m,0)$, при котором эта функция равна заданному значению вероятности ошибок первого рода η:

$$c(m) = F^{-1}_{\chi^2}(m,\eta,0). \tag{25}$$

Вероятность ошибок второго рода рассчитывается как

$$\beta = F_{\chi^2}(c(m),m,\lambda),$$

где $F_{\chi^2}(c(m),m,\lambda)$ – значение функции вероятности нецентрального χ^2-распределения с m степенями свободы и параметром нецентральности λ в точке $c(m)$. Значение параметра нецентральности с учетом (21) рассчитывается в соответствии [22]:

$$\lambda = z_d^{\mathrm{T}} B_k^{\mathrm{T}} A \left(A^{\mathrm{T}} B_k B_k^{\mathrm{T}} A\right)^{-1} A^{\mathrm{T}} B_k z_d.$$

Для обнаружения отказа используется единичная матрица $A = \mathbf{I}$. Тогда применение критерия (24) решает задачу обнаружения отказа с минимальным значением вероятности ошибок второго рода при $\lambda = c(m)$:

$$\beta_{\min} = F_{\chi^2}(c(m),m,c(m)).$$

На практике эта вероятность ограничивается сверху значением β_{TH} в соответствии с требованиями, предъявляемыми к системе. Случай когда $\beta_{\min} > \beta_{TH}$, означает, что конфигурация системы в принципе не может обеспечить достаточно низкий уровень ошибок второго рода.

В зависимости от того, обнаружен ли отказ (принята гипотеза H_1) или не обнаружен (принята гипотеза H_0), вычисляется оценка ковариационной матрицы измерений

$$\hat{R}(t_i) = (LDL^{\mathrm{T}})_{(1:m,1:m)}, \tag{26}$$

где $LL^{\mathrm{T}} = \mathrm{chol}(C_e(t_i))$ (см. (19)), D – диагональная матрица, элементы которой рассчитываются по невязкам измерений по методу наименьших модулей:

$$D_{(j,j)} = \begin{cases} \rho(\Delta_{(j)}), & \text{если } H_1, \\ 1 & \text{иначе} \end{cases}$$

для $j = 1,\ldots,m$ и $\Delta = z_d - H_d\hat{x}_{L1}(t_i)$. Вид функции ρ нужно подобрать так, чтобы условие $\rho(x) > 1$ выполнялось только с вероятностью ложной тревоги α при условии выбора H_0. Аналитическое решение такой задачи выходит за рамки данного исследования, поэтому использовалась эмпирическая кусочно гладкая функция:

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 5, \\ (1 + (|x| - 5)), & \text{если } 10 > |x| \geqslant 5, \\ (1 + (|x| - 5)) \cdot (1 + 4\sqrt{|x| - 10}), & \text{если } |x| \geqslant 10. \end{cases} \tag{27}$$

Для получения оценки $\hat{Q}$ сначала нужно рассчитать коэффициент усиления калмановского фильтра K и апостериорную ковариационную матрицу P. Для их вычисления используется априорно заданная ковариационная матрица динамического шума Q и рассчитанная с использованием (26)–(27) ковариационная матрица измерений R:

$$\widetilde{P} = F\left(t_{i-1}, t_i\right) \hat{P}\left(t_{i-1}\right) F^{\mathrm{T}}\left(t_{i-1}, t_i\right) + Q\left(t_{i-1}, t_i\right),$$
$$\widetilde{K} = \widetilde{P} H^{\mathrm{T}} \left(H \widetilde{P} H^{\mathrm{T}} + \hat{R}\left(t_i\right)\right)^{-1},$$
$$P\left(t_i\right) = \left(I - \widetilde{K} H\right) \widetilde{P}.$$

Введем обозначения:

$$\begin{gathered} dx = \widetilde{K} r(t_i), \\ Q_{dx} = dx \cdot dx^{\mathrm{T}}, \\ Q_p = P(t_i) - F(t_{i-1}, t_i) P(t_{i-1}) F(t_{i-1}, t_i)^{\mathrm{T}}, \end{gathered} \tag{28}$$

где $r(t_i)$ – априорная невязка измерений, вычисляемая в соответствии с (6). Тогда соотношение (10) можно записать в виде

$$\hat{Q}(t_i) = (1 - \alpha) \hat{Q}(t_{i-1}) + \alpha \left(Q_{dx} + Q_p\right). \tag{29}$$

Вычисление оценки $\hat{Q}(t_i)$ через соотношение (29) может привести к программным ошибкам, так как оно не гарантирует положительной определенности результирующей матрицы. Чтобы избежать этих проблем, будем искать оценку в следующей форме:

$$\hat{Q}(t_i) = V Q(t_{i-1}, t_i) V^{\mathrm{T}},$$
$$V_{(l,l)} > 0,$$
$$V_{(l,j)} = 0 \text{ при } l \neq j,$$

где $l = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, V – диагональная матрица со строго положительными элементами на диагонали. Обозначим через γ_j отношение j-го диагонального элемента матрицы в правой части (29) к j-му диагональному элементу номинальной матрицы динамического шума:

$$\gamma_j = \frac{(1 - \alpha) \hat{Q}(t_{i-1})_{(j,j)} + \alpha \left(Q_{dx,(j,j)} + Q_{p,(j,j)}\right)}{Q(t_{i-1}, t_i)_{(j,j)}}.$$

Если значения элементов матрицы V рассчитывать по правилу

$$V_{(j,j)} = \begin{cases} 1, & \text{если } \gamma_j < 1, \\ \sqrt{\gamma_j} & \text{иначе,} \end{cases} \tag{30}$$

то, в случае когда $\gamma_j > 1$ для всех $j = 1, \ldots, n$, выполняется условие

$$\operatorname{trace}\Big\{VQ(t_{i-1}, t_i)V^{\mathrm{T}}\Big\} = \operatorname{trace}\Big\{(1-\alpha)\hat{Q}(t_{i-1}) + \alpha\,(Q_{dx} + Q_p)\Big\}. \tag{31}$$

В остальных случаях диагональные элементы матрицы $\hat{Q}$ ограничиваются снизу соответствующими значениями диагональных элементов матрицы Q.

В соответствии с (31) необходимо вычислять приближенное значение дисперсий элементов вектора dx. Чтобы сделать оценку более робастной, воспользуемся известным фактом, что для нормального распределения отношение среднеквадратического отклонения (RMS) к среднему абсолютному отклонению (MAD) является постоянной величиной RMS/MAD $= \sqrt{(\pi/2)}$. Это нетрудно доказать:

$$\mathbf{E}[|x-\mu|] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |a-\mu| \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) da =$$

$$= 2\int\limits_{\mu}^{\infty} \frac{a-\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) da = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \int\limits_{0}^{\infty} b\exp(-b^2)db = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma.$$

В то же время MAD является более робастной статистикой, когда в выборке присутствуют выбросы. Для применения робастной статистики при вычислении $\hat{Q}$ перепишем (29) в виде:

$$\begin{gathered} G\left(t_i\right)_{(j,j)} = (1-\alpha)\, G\left(t_{i-1}\right)_{(j,j)} + \alpha \cdot \left|dx_{(j)}\right|, \quad j = 1, \ldots, n, \\ \hat{Q}_p\left(t_i\right) = (1-\alpha)\, \hat{Q}_p\left(t_{i-1}\right) + \alpha Q_p, \\ \gamma_j = \frac{\frac{\pi}{2}\left(G\left(t_i\right)_{(j,j)}\right)^2 + \hat{Q}_p\left(t_i\right)_{(j,j)}}{Q\left(t_{i-1}, t_i\right)_{(j,j)}}. \end{gathered} \tag{32}$$

Далее выполняем основной шаг фильтрации:

$$\begin{gathered} \hat{Q}(t_i) = VQ(t_{i-1}, t_i)V^{\mathrm{T}}; \\ P_a = F(t_{i-1}, t_i)\hat{P}(t_{i-1})F^{\mathrm{T}}(t_{i-1}, t_i) + \hat{Q}(t_i); \\ K = P_a H^{\mathrm{T}}(HP_aH^{\mathrm{T}} + \hat{R}(t_i))^{-1}; \\ \hat{x}(t_i) = \widetilde{x}(t_i) + Kr(t_i); \\ \hat{P}(t_i) = (I - KH)P_a. \end{gathered} \tag{33}$$

Здесь V вычисляется в соответствии с (30) и (32), а $\hat{R}$ вычисляется в соответствии с (26). На основе приведенных выше соотношений строится алгоритм 1, который обеспечивает рекуррентную оценку состояния системы, идентификацию отказов в измерениях и адаптивную настройку коэффициента обратной связи.

А л г о р и т м 1 (одна итерация робастного фильтра).

Входные данные:

текущее время t_i;

оценка состояния с предыдущего шага $\hat{x}(t_{i-1}), \hat{P}(t_{i-1})$;

оценка составляющих ковариационной матрицы прогноза с предыдущего шага $\hat{Q}_p(t_{i-1})$, $G(t_{i-1})$;

матрица наблюдений H и матрица прогноза $F(t_{i-1}, t_i)$;

номинальная ковариационная матрица динамического шума $Q(t_{i-1}, t_i)$;

вектор измерений $y(t_i)$ и его номинальная ковариационная матрица $R(t_i)$.

Выходные данные:

оценка состояния $\hat{x}(t_i), \hat{P}(t_i)$;

оценка составляющих ковариационной матрицы прогноза $\hat{Q}_p(t_i), G(t_i)$.

1. Прогноз состояния на текущий момент.

$\widetilde{x} = F(t_{i-1}, t_i)\hat{x}(t_{i-1})$;

$\widetilde{P} = F(t_{i-1}, t_i)\hat{P}(t_{i-1})F^{\mathrm{T}}(t_{i-1}, t_i) + Q(t_{i-1}, t_i)$.

2. Составить расширенный вектор измерений $z_e(t_i)$ и его ковариационную матрицу $C_e(t_i)$ в соответствии с (19).

3. Составить матрицу наблюдений H_e для расширенного вектора измерений в соответствии с (20).

4. Осуществить разложение Холецкого матрицы C_e:

$C_e = \mathrm{chol}(C_e) = LL^{\mathrm{T}}$.

5. Осуществить декорреляцию вектора псевдоизмерений:

$z_d = L^{-1}z_e$; $H_d = L^{-1}H_e$.

6. С использованием симплекс-метода L_1-оптимизации (см. [20]) решить задачу:

$\hat{x}_{L1}(t_i) = \arg\min\limits_x \left(L_1(z_d(t_i) - H_d(t_i)x)\right)$.

7. Осуществить QR разложение матрицы H_d:

$H_d = qr(H_d) = [Q_k, B_k]\begin{bmatrix} R_k \\ \mathbf{0}_{(m-n\times n)} \end{bmatrix}$.

8. Рассчитать тестовую статистику:

$T = z_d^{\mathrm{T}}B_k(B_k^{\mathrm{T}}B_k)^{-1}B_k^{\mathrm{T}}z_d$.

9. Рассчитать пороговое значение $c(r)$ для заданного значения вероятности ложной тревоги α в соответствии с (25) (в данном случае число степеней свободы равно числу измерений, т.е. размерности вектора y).

10. Если $(T \geqslant c(r))$, то принимается гипотеза H_1, ковариационная матрица измерений $\hat{R}(t_i)$ рассчитывается в соответствии с (26) для $\Delta = z_d - H_d\hat{x}_{L1}(t_i)$.

11. Иначе принимается гипотеза H_0, ковариационная матрица измерений остается номинальной: $\hat{R}(t_i) = R(t_i)$;

12. Осуществить шаг фильтрации с использованием номинального значения ковариационной матрицы динамического шума:

$\widetilde{P} = F(t_{i-1}, t_i)\hat{P}(t_{i-1})F^{\mathrm{T}}(t_{i-1}, t_i) + Q(t_{i-1}, t_i)$;

$\widetilde{K} = \widetilde{P}H^{\mathrm{T}}(H\widetilde{P}H^{\mathrm{T}} + \hat{R}(t_i))^{-1}$;

$P(t_i) = (I - \widetilde{K}H)\widetilde{P}$.

13. Рассчитать адаптивные параметры:

$dx = \widetilde{K}(y(t_i) - H\widetilde{x})$;

$Q_p = P(t_i) - F(t_{i-1}, t_i)\hat{P}(t_{i-1})F^{\mathrm{T}}(t_{i-1}, t_i)$.

14. Рассчитать $G(t_i)$, $\hat{Q}_p(t_i)$ и γ в соответствии с (32).

15. Рассчитать V в соответствии с (30).

16. Рассчитать оценку ковариационной матрицы динамического шума:

$\hat{Q}(t_i) = VQ(t_{i-1}, t_i)V^{\mathrm{T}}$.

17. Рассчитать оценку текущего состояния и его ковариационной матрицы (33):

$P_a = F(t_{i-1}, t_i)\hat{P}(t_{i-1})F^{\mathrm{T}}(t_{i-1}, t_i) + \hat{Q}(t_i)$; $K = P_a H^{\mathrm{T}}(HP_aH^{\mathrm{T}} + \hat{R}(t_i))^{-1}$;

$\hat{x}(t_i) = \widetilde{x} + K(y(t_i) - H\widetilde{x})$; $\hat{P}(t_i) = (I - KH)P_a$.

18. Конец.

4. Результаты тестирования

Для проверки рабочих характеристик алгоритма моделировалось движение цели в одномерном пространстве. Задача состояла в оценке текущей координаты цели, а также ее скорости и ускорения по зашумленным измерениям координаты, т.е. решалась задача фильтрации по неполным измерениям. Использовалась следующая модель динамики системы в непрерывном времени:

$$dx(t) = \begin{bmatrix} dh(t) \\ dv(t) \\ da(t) \end{bmatrix} = Ax(t)dt + Bdw(t);$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{s} \end{bmatrix}.$$

Здесь $h(t)$ – координата цели, $v(t)$ – скорость цели, $a(t)$ – ускорение цели, $w(t)$ – винеровский случайный процесс, $s > 0$ – интенсивность динамического шума. В дискретном времени модель динамики принимает вид:

$$x(t_i) = F(t_{i-1}, t_i)x(t_{i-1}) + n_i;$$

$$F(0, \Delta t) = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2/2 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$Q(0, \Delta t) = \mathrm{cov}(n_i, n_i) = \int\limits_0^{\Delta t} F(0,t)BB^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(0,t)dt =$$

$$= s \cdot \begin{bmatrix} (\Delta t^5)/20 & (\Delta t^4)/8 & (\Delta t^3)/6 \\ (\Delta t^4)/8 & (\Delta t^3)/3 & (\Delta t^2)/2 \\ (\Delta t^3)/6 & (\Delta t^2)/2 & \Delta t \end{bmatrix}.$$

Для проверки отказоустойчивости алгоритма использовалась модель системы с двукратным резервированием (два датчика с одинаковыми номинальными характеристиками синхронно измеряют координату цели):

$$y(t_i) = Hx(t_i) + \xi_i;$$
$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$
$$R = \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_i) = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Использовались следующие значения параметров: вероятность ложной тревоги $\eta = 5 \cdot 10^{-4}$, параметр сглаживания $\alpha = 0{,}01$ (см. (32)), параметр динамики системы $s = 0{,}1$. Частота измерений 10 Гц ($t_i - t_{i-1} = 0{,}1$). В ходе тестирования истинная траектория и фактические наблюдения формировались в соответствии с соотношениями:

$$dx_{\text{true}}(t) = Ax_{\text{true}}(t)dt + Bdw(t) + u(t),$$
$$y(t_i) = Hx(t_i) + \xi_i + \delta_i.$$

Здесь $u(t)$ и δ_i имитировали неучтенные ошибки.

Для демонстрации адаптивных и робастных свойств фильтра были разработаны различные сценарии моделирования:

Сценарий 1. Маневр цели в виде полета по кругу с постоянным центростремительным ускорением $a_{\max} = 20$ ед/с^2 и угловой скоростью $\omega = 2\pi/10$ рад/с. В этом случае проекция траектории на одну из осей декартовой системы координат представляет собой гармонические колебания во времени ($u(t) = a_{\max} \cdot \sin(\omega t)$).

Сценарий 2. В одном из измерений присутствует аддитивный гауссовский шум $\delta_{i,(1)} \sim \mathcal{N}(0, 100)$ (первый параметр – математическое ожидание, второй – среднеквадратическое отклонение (СКО)), $\delta_{i,(2)} = 0$.

Сценарий 3. Оба измерения содержат аддитивный некоррелированный гауссовский шум: $\delta_{i,(1)} \sim \mathcal{N}(0, 100)$, $\delta_{i,(2)} \sim \mathcal{N}(0, 100)$.

Сценарий 4. Ошибки измерений δ_i представляют собой независимые случайные величины (с.в.), распределенные по закону Коши. Для такого распределения дисперсия и математическое ожидание не определены, но определена медиана.

Сценарий 5. Для одного из измерений добавочная ошибка представляет собой кусочно линейную функцию $\delta_{i,(1)} = 0$ для $t_i < t_s$ и $\delta_{i,(1)} = k(t_i - t_s)$ для $t_i \geqslant t_s$, $t_s = 50$, $k = 0{,}4$.

Сценарий 6. В измерениях с заданной вероятностью присутствует смещенная гауссовская ошибка: $\delta_i = \Lambda\psi_i$, где Λ – диагональная матрица, на диагонали которой располагаются независимые дискретные с.в. принимающие значения либо 0, либо 1 с заданной вероятностью $\mathbf{P}_j$; ψ – вектор независимых гауссовских с.в. $\psi_i \sim \mathcal{N}(100, 3)$.

В задаче навигации в качестве датчиков, измеряющих положение объекта, могут выступать приемники сигналов глобальных навигационных спутнико-

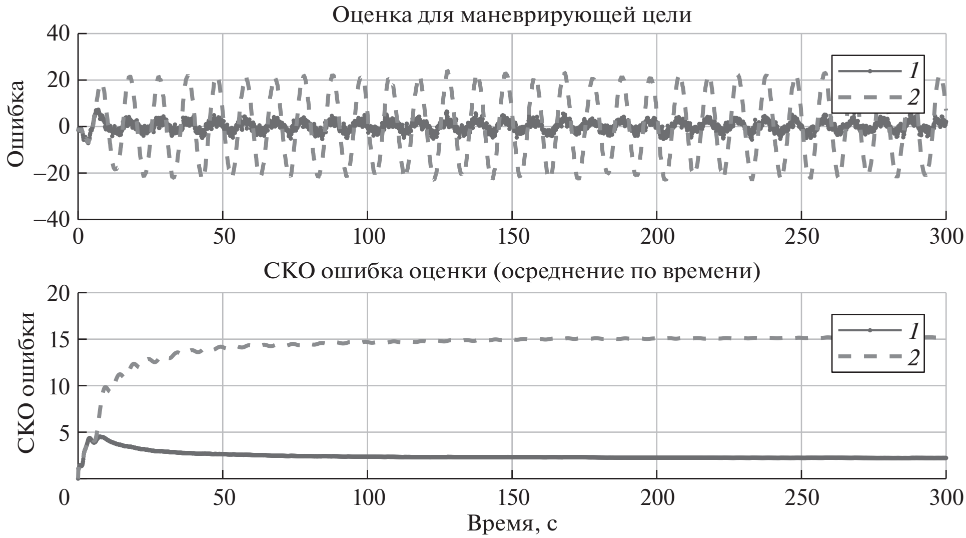


Рис. 1. Имитация маневра цели по сценарию 1. Показана проекция на одну ось декартовой системы координат. *1* – робастный фильтр, *2* – фильтр Калмана.

Рис. 2. Моделирование по сценарию 2 с загрязнением измерений одного из источников аддитивным гауссовским шумом. *1* – робастный фильтр, *2* – фильтр Калмана.

вых систем. Известно, что сигналы спутниковых навигационных систем обладают низкой помехозащищенностью. В последнее время ведутся активные исследования в направлении борьбы с так называемым “спуфингом” – типом помех, которые имитируют ложный сигнал (в качестве примера можно привести публикацию [24]). Сценарии 5 и 6 моделируют именно такой тип ошибок.

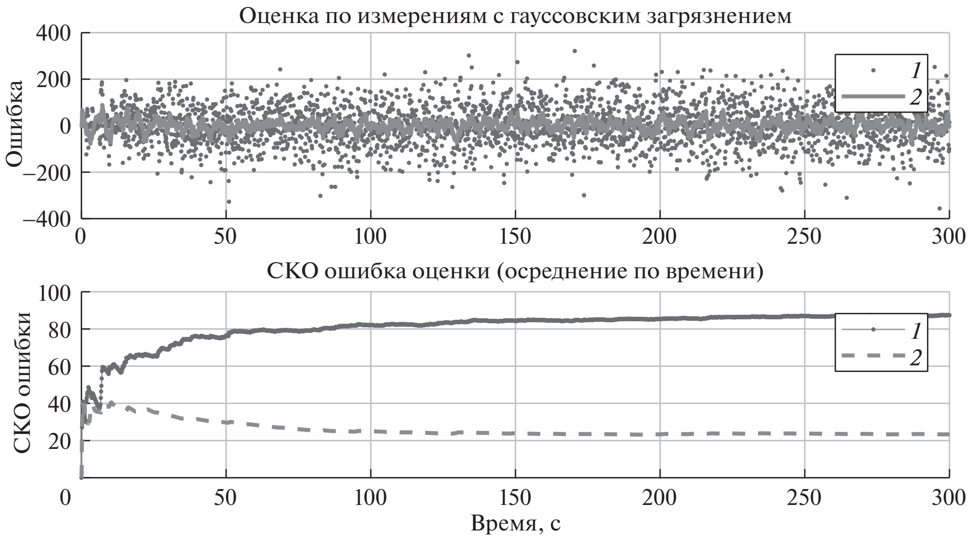


Рис. 3. Моделирование по сценарию 3 с загрязнением всех измерений аддитивным гауссовским шумом. *1* – робастный фильтр, *2* – фильтр Калмана.

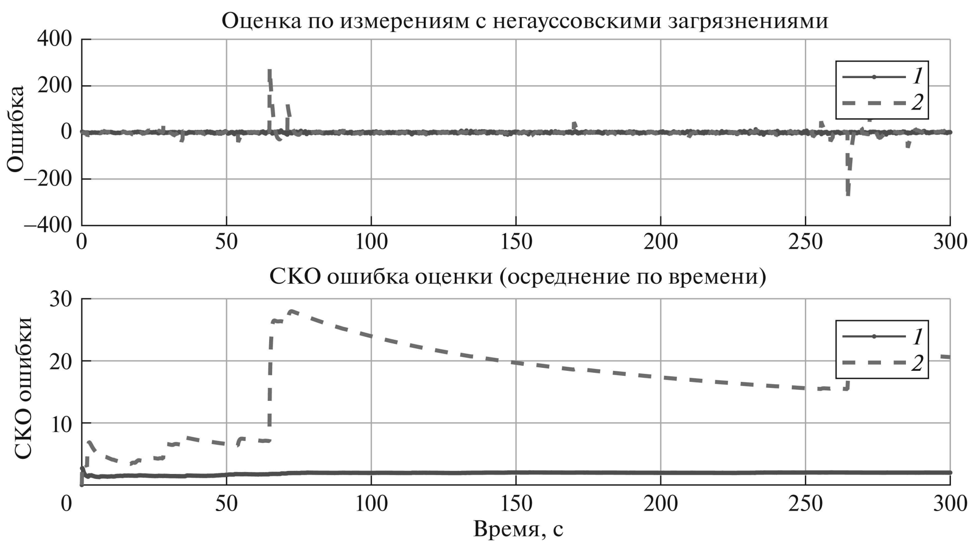


Рис. 4. Моделирование по сценарию 4 с загрязнением измерений ошибками, распределенными по закону Коши. *1* – робастный фильтр, *2* – фильтр Калмана.

Результаты моделирования по сценариям 1–5 показаны на рисунках 1–5 соответственно. Робастный фильтр обладает адаптивными свойствами и существенно повышает эффективность в смысле уменьшения дисперсии ошибок оценки в сценариях 1, 2 и 4. Моделирование по сценарию 3 показывает, что эффективность робастного фильтра снижается по сравнению с фильтром Калмана. Такой результат объясняется тем, что алгоритм со временем спи-

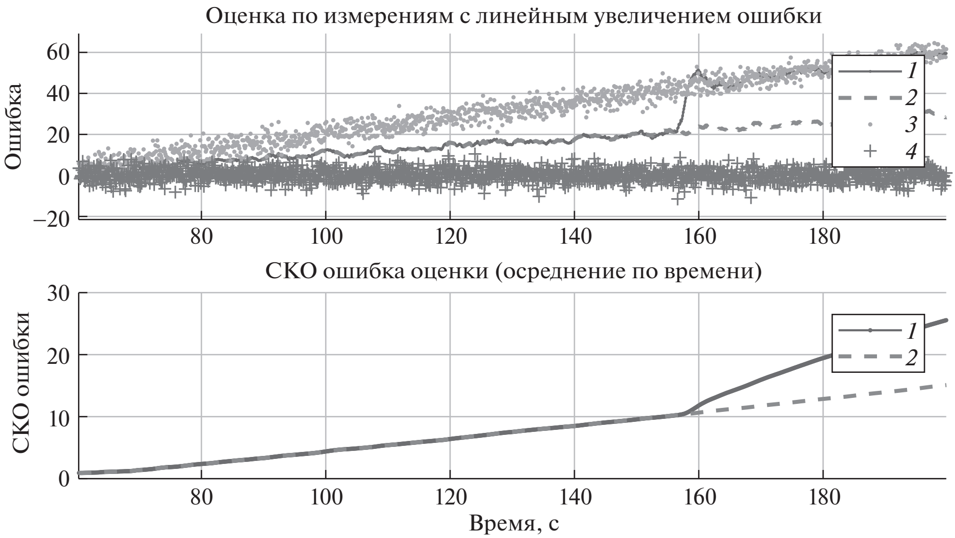


Рис. 5. Моделирование по сценарию 5 с нарастающим математическим ожиданием ошибки в одном источнике измерений. *1* – робастный фильтр, *2* – фильтр Калмана, *3* – измерения первого источника, *4* – измерения второго источника.

сывает большие невязки измерений на ошибки модели, что приводит к увеличению коэффициента обратной связи. Интересно, что результаты моделирования по сценарию 4 существенно отличаются от результатов моделирования по сценарию 3, хотя и в том и в другом случае моделируется симметричное распределение неучтенных ошибок. Возможно, различия связаны с тем, что для распределения Коши не определены математическое ожидание и дисперсия, и поэтому неустойчивость оценки калмановского фильтра объясняется применением квадратичного критерия. В разработанном алгоритме робастной фильтрации применяется метод наименьших модулей, который в одномерном случае дает оценку медианы (о связи метода наименьших модулей с медианой говорилось в подразделе 3.1). Можно предположить, что именно это свойство делает робастный фильтр более устойчивым к распределению Коши.

Моделирование по сценарию 5 продемонстрировало специфику работы фильтра в условиях медленного увеличения систематической ошибки в одном

Сравнения СКО оценок $h(t)$ робастного фильтра и фильтра Калмана при обработке загрязненных измерений по сценарию 6

Вероятность загрязнения		СКО оценки	
источник 1	источник 2	робастный фильтр	фильтра Калмана
1	0	1,02	45,7
0	1	1,04	45,6
0,1	0,1	0,7	11,5
0,3	0,3	0,9	28,9
0,5	0,5	60,8	47,7
0,7	0,7	83,7	65,9

измерении. Робастный фильтр равновероятно выбирает один из источников и отслеживает его измерения как достоверные, снижая вес измерений другого источника. На рис. 5 показан пример, когда алгоритмом был выбран источник, содержащий ошибку.

По результатам моделирования сценария 6 составлена таблица. Данные таблицы показывают, что устойчивость робастного фильтра к моделируемым помехам зависит от вероятности, с которой помехи появляются в измерениях. Если помехи присутствуют только в одном источнике измерений, то робастный фильтр существенно повышает точность оценки. Если же помехи присутствуют во всех источниках с вероятностью больше 0,5, точность оценки резко ухудшается.

5. Заключение

Разработан алгоритм робастной фильтрации, который обладает свойством отказоустойчивости по отношению к аномальным ошибкам в измерениях и адаптивными свойствами по отношению к изменяющимся параметрам модели динамического шума системы. Было проведено численное моделирование решения задачи сопровождения цели в линейной системе с двукратным резервированием измерений.

Результаты моделирования показывают, что робастный фильтр повышает эффективность оценки по сравнению с классическим фильтром Калмана, когда цель выполняет неучтенные в модели маневры. Одновременно с этим обеспечивается устойчивость оценки к систематическим ошибкам в одном из источников измерений, а также к симметричным помехам, распределенным по закону Коши. Разработанный алгоритм устойчив к импульсным помехам в более чем 30 % измерений.

В другой ситуации, когда в модели не учитывается увеличение дисперсии нормального шума по всем измерениям, эффективность оценки робастного фильтра снижается. В случае когда ошибки по всем источникам измерений содержат смещенную составляющую, отказоустойчивость обеспечивается только условно: существует пороговое значение вероятности появления смещенной ошибки в измерениях, для которой эффективность оценки резко снижается. Разработанный алгоритм неустойчив к медленному увеличению математического ожидания ошибки в одном из источников измерений.

Для компенсации указанных недостатков может потребоваться использование дополнительных источников измерений, что является предметом дальнейших исследований. Другим направлением дальнейших исследований является использование разработанного метода в нелинейных системах. Так как разработанный алгоритм относится к классу алгоритмов “прогноз–коррекция”, для работы с нелинейными системами можно попробовать заменить шаги прогноза и коррекции на соответствующие процедуры, например метода псевдоизмерений [3] или сигма-точечного фильтра [25].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.
2. *Синицын И.Н.* Фильтры Калмана и Пугачева. М.: Логос, 2006.

3. *Miller A.B., Miller B.M.* Tracking of the UAV trajectory on the basis of bearing-only observations // 53rd IEEE Conf. on Decision and Control. Los Angeles, CA. 2014. P. 4178–4184.
4. *Salychev O.S.* Mems-based Inertial Navigation: Expectations and Reality. M.: Bauman Moscow State Technical University, 2012.
5. *Времеенко К.К., Желтов С.Ю., Ким Н.В., Козорез Д.А., Красильщиков М.Н., Себряков Г.Г., Сыпало К.И., Черноморский А.И.* Современные информационные технологии в задачах навигации и наведения беспилотных маневренных летательных аппаратов. М.: Физматлит, 2009.
6. *Lainiotis D.* Optimal adaptive estimation: Structure and parameter adaption // IEEE T. Autom. Contr. 1971. No. 16. P. 160–170.
7. *Yang Y., Gao W.* An Optimal Adaptive Kalman Filter // J. Geodesy. 2006. No. 80. P. 177–183.
8. *Mohamed A.H., Schwarz K.P.* Adaptive Kalman Filtering for INS/GPS // J. Geodesy. 1999. No. 73. P. 193–203.
9. *Reina G., Vargas A., Nagatani K., Yoshida K.* Adaptive Kalman Filtering for GPS-based Mobile Robot Localization // Int. Workshop on Safety, Security and Rescue Robotics. Rome, Italy, September 2007.
10. *Босов А.В., Панков А.Р.* Робастное рекуррентное оценивание процессов в стохастических системах // АиТ. 1992. № 9. С. 102–110.

    Bosov A.V., Pankov A.R. Robust Recurrent Estimations of Processes in Stochastic Systems // Autom. Remote Control. 1992. V. 53. No. 9. P. 1395–1402
11. *Koch K.R., Yang Y.* Robust Kalman Filter for Rank Deficient Observation Models // J. Geodesy. 1998. No. 72. P. 436–441.
12. *Chang Guobin, Liu Ming.* M-estimator-based Robust Kalman Filter for Systems with Process Modeling Errors and Rank Deficient Measurement Models // Nonlinear Dynam. 2015. No. 80. P. 1431–1449.
13. *Cao L., Qiao D., Chen X.* Laplace L1 Huber Based Cubature Kalman Filter for Attitude Estimation of Small Satellite // Acta Astronaut. 2018. V. 148. http://10.1016/j.actaastro.2018.04.020.
14. *Huber P.J.* Robust statistics. Wiley series in probability and mathematical statistics. 1981.
15. *Armstrong R.D., Frome E.L.* A Comparison of Two Algorithms for Absolute Deviation Curve Fitting // J. Amer. Statist. Association. 1976. V. 71:354. P. 328–330
16. *Maybeck P.S.* Stochastic Models, Estimation, and Control. Academic Press. 1982. V. 2. P. 70–129.
17. *Kotz Samuel, Kozubowski Tomasz J., Podgorski Krzysztof.* The Laplace Distribution and Generalizations. Springer, 2001.
18. *Barrodale Ian, Roberts F.* An Improved Algorithm for Discrete L1 Linear Approximation // Siam J. Numer. Anal. 1973. No. 10. P. 839–848.
19. *Abdelmalek Nabih N.* On the Discrete Linear L1 Approximation and L1 Solutions of Overdetermined Linear Equations // J. Approx. Theory. 1974. No. 11. P. 38–53.
20. *Abdelmalek Nabih N.* An Efficient Method for the Discrete Linear L1 Approximation Problem // Math. Comput. 1975. V. 29. No. 131. P. 844–850.
21. *Hogben L.* Handbook of Linear Algebra. Second Edition. CRC Press, 2013.
22. *Teunissen P.J.G.* Distributional Theory for the DIA Method // J. Geodesy. 2018. V. 92. P. 59–80.

23. *Xu Changhui, Rui Xiaoping, Song Xianfeng, Gao Jingxiang* Generalized Reliability Measures of Kalman Filtering for Precise Point Positioning // J. Systems Engineering and Electronics. 2013. V. 24. No. 4. P. 699–705.

24. *Seo Seong-Hun, Jee Gyu-In, Lee Byung-Hyun, Im Sung-Hyuck, Kim Kwan-Sung.* Hypothesis Test for Spoofing Signal Identification using Variance of Tangent Angle of Baseline Vector Components // Proc. 30th Int. Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS+ 2017). Portland, Oregon, September 2017. P. 1229–1240.

25. *Julier S.J., Uhlmann J.K., Durrant-Whyte H.F.* A New Approach for Filtering Nonlinear Systems // Proc. IEEE Amer. Control Conf. 1995. P. 1628–1632.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 28.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020

© 2020 г. П.В. ПАКШИН, д-р физ.-мат. наук (pakshinpv@gmail.com),
Ю.П. ЕМЕЛЬЯНОВА, канд. физ.-мат. наук (emelianovajulia@gmail.com)
(Арзамасский политехнический институт (филиал)
Нижегородского государственного технического
университета им. Р.Е. Алексеева)

УПРАВЛЕНИЕ С ИТЕРАТИВНЫМ ОБУЧЕНИЕМ ДИСКРЕТНЫМИ СТОХАСТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ[1]

Рассматриваются дискретные линейные системы с переключениями в повторяющемся режиме. Системы находятся под действием случайных внешних возмущений, и в измерениях присутствуют аддитивные шумы. Предлагаются два метода синтеза управления с итеративным обучением. Оба метода основаны на построении вспомогательной 2D-модели в форме дискретного повторяющегося процесса. Первый метод основан на установлении условий диссипативности указанной модели при специальном выборе функций запаса и накопления. Такой выбор позволяет затем найти управление, в общем случае нелинейное, которое гарантирует сходимость процесса обучения. Второй метод использует линейный закон коррекции управления с итеративным обучением заданного вида, при этом сходимость процесса обучения гарантируется условиями устойчивости вспомогательной 2D-модели. Оба предложенных закона управления используют в своей структуре стационарный фильтр Калмана. Для получения условий устойчивости используется дивергентный метод векторных функций Ляпунова. Приводится пример, демонстрирующий возможности и особенности нового метода.

Ключевые слова: управление с итеративным обучением, стохастические системы, системы с переключениями, повторяющиеся процессы, 2D-системы, устойчивость, диссипативность, векторная функция Ляпунова.

DOI: 10.31857/S0005231020110069

1. Введение

Управление с итеративным обучением играет важную роль в повышении точности систем, функционирующих в повторяющемся режиме, в частности в разработке высокоточных роботов-манипуляторов. В связи с высокой эффективностью и относительно простой формой такого управления оно привлекает широкий интерес как теоретиков, так и практиков. Начиная с конца 80-х гг. XX в. на крупнейших международных конференциях регулярно организуются сессии, посвященные проблемам управления с итеративным обучением.

Реальные системы находятся под действием случайных возмущений, и в системах всегда присутствуют как систематические, так и случайные погрешности измерений. Эти факторы снижают точность управления, к тому же

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00528_а).

следует учесть, что одним из условий эффективности итеративного обучения является то, что для каждого повторения процесса начальные условия должны быть одинаковыми. Таким образом, учет упомянутых случайных факторов имеет существенное значение.

Впервые идея управления с итеративным обучением была предложена в патенте США [1] с приоритетом от 1967 г., затем концепция такого управления была сформулирована в [2] на японском языке. Эти результаты не были востребованы, пока не появилась серия публикаций [3–6], вызвавшая широкий интерес как теоретиков, так и практиков. В дальнейшем, по различным вопросам управления с итеративным обучением было опубликовано большое количество работ, в том числе монографии [7, 8], обзорные статьи [9, 10] и специальные выпуски журналов (Int. J. Control. 2000, 2011; Asian J. Control. 2002, 2011). В настоящее время управление с итеративным обучением стало важным направлением интеллектуального управления, и оно широко используется во многих практических приложениях, в первую очередь в робототехнике.

Обзор результатов по стохастическому управлению с итеративным обучением представлен в [11, 12]. Эти обзоры и самостоятельный анализ публикаций в базе SCOPUS показывают, что решению задачи стохастического управления с итеративным обучением в классической постановке (измерения содержат шумы и на объект управления действуют случайные возмущения) посвящено небольшое число работ, основное внимание уделяется учету случайных потерь информационных пакетов в канале связи между измеряемым выходом и входом (random packet losses, data dropouts). Исследование этих вопросов, безусловно, важно, но оно не заменяет и не исключает исследований упомянутых классических задач.

Анализ упомянутых публикаций показывает, что конструктивные методы синтеза стохастического управления с итеративным обучением в рамках классической постановки предложены в [13–18] для линейных систем с дискретным временем, другие работы учитывают только дополнительные к классической постановке случайные факторы. В этих работах предложены алгоритмы двух типов. В [13, 14] предложен так называемый алгоритм D-типа, использующий для построения алгоритма управления с итеративным обучением аналог производной ошибки обучения, в [15], дополнительно предложен алгоритм P-типа, непосредственно использующий ошибку обучения, этот алгоритм затем был расширен и усовершенствован в [16], в [17, 18] рассмотрены некоторые специальные вопросы, связанные со сходимостью и оптимизацией этих алгоритмов.

В [19–21] задача управления с итеративным обучением решается на основе предложенного авторами дивергентного метода векторных функций Ляпунова в сочетании с использованием фильтра Калмана. Сравнительный анализ показал, что полученные результаты позволяют во много раз увеличить скорость сходимости ошибки обучения по сравнению с [13–16], кроме того, за счет применения фильтра Калмана существенно уменьшается дисперсия ошибки.

В [22] для дискретных линейных систем с постоянными параметрами предложен алгоритм управления с итеративным обучением на основе совместного применения метода супервектора [8] и фильтра Калмана. В силу того что в [22] решается специальная задача, связанная с вариациями эталонной траектории, сравнить результаты этой работы с [13–16] и [19–21] не представляется возможным. По-видимому, по этой причине в [22] публикации [13–16] даже не упоминаются.

В данной статье результаты [19, 20] распространяются на системы с переключениями. В современной теории управления под системами с переключениями обычно понимают класс моделей динамических систем, состоящих из конечного числа подсистем, из которых в текущий момент времени функционирует лишь одна, называемая активной подсистемой, при этом выбор активной подсистемы определяется некоторым логическим правилом. Простейшим примером может служить многорежимная система, в которой подсистемы интерпретируются как отдельные режимы этой системы. Обычно подсистемы описываются индексированным множеством дифференциальных или разностных уравнений. Для первоначального знакомства с результатами теории систем с переключениями можно рекомендовать [23–27]. При управлении с итеративным обучением переключения возникают естественным образом при начальной настройке системы. Например, в случае манипулятора, перемещающего грузы на конвейер, целесообразно делать несколько повторений без нагрузки и запускать рабочий режим при достижении требуемой точности.

2. Постановка задачи

Рассмотрим дискретную стохастическую систему в повторяющемся режиме, описываемую линейной моделью с переключениями

$$\begin{aligned} x_k(p+1) &= A(k)x_k(p) + B(k)u_k(p) + v_k(p), \quad (A(k), B(k)) \in \mathcal{F}, \\ y_k(p) &= Cx_k(p), \\ y_{wk}(p) &= Cx_k(p) + w_k(p), \quad p \in [0, T-1], \quad k = 0, 1, \ldots, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $x_k(p) \in \mathbb{R}^{n_x}$ – вектор состояния, $y_k(p) \in \mathbb{R}^{n_y}$ – вектор выходных переменных, $y_{wk}(p) \in \mathbb{R}^{n_y}$ – вектор измеряемых переменных, $u_k(p) \in \mathbb{R}^{n_u}$ – вектор управления, $v_k(p) \in \mathbb{R}^{n_v}$ – вектор возмущений, действующих на объект, $w_k(p) \in \mathbb{R}^{n_w}$ – вектор шумов измерений, $\mathcal{F} = \{(A_1, B_1), (A_2, B_2), \ldots, (A_N, B_N)\}$ – множество пар матриц согласованных размеров. Предполагается, что $v_k(p)$ и $w_k(p)$ – независимые гауссовские белые шумы с ковариационными матрицами $\mathrm{E}[v_k(p)v_k^T(p)] = S_v$, $\mathrm{E}[w_k(p)w_k^T(p)] = S_w$.

Следуя понятиям, принятым в теории систем с переключениями [23], рассмотрим кусочно постоянное отображение множества неотрицательных целых чисел $\mathbb{Z}^+ \to \mathcal{F}$. Такое отображение задается кусочно постоянной функцией $\sigma : \mathbb{Z}^+ \to \mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}$ так, что $A(k) = A_{\sigma(k)}$ и $B(k) = B_{\sigma(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Функцию σ можно рассматривать как *сигнал переключения относительно повторений*. Предположим, что переключения происходят в начале каждого повторения, и определим моменты переключения $k_1, k_2, \ldots$ как номера повторений, на которых в системе (2.1) происходят переключения. Таким образом, сигнал переключения определяет на каждом повторении k индекс $i = \sigma(k) \in \mathcal{N}$ активной подсистемы, динамика которой описывается уравнениями

$$
\begin{aligned}
x_k(p+1) &= A_i x_k(p) + B_i u_k(p) + v_k(p), \quad i \in \mathcal{N}, \\
y_k(p) &= C x_k(p), \\
y_{wk}(p) &= C x_k(p) + w_k(p), \quad p \in [0, T-1], \quad k = 0, 1, \ldots
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

Выходная переменная системы (2.1) на каждом повторении должна воспроизводить желаемую траекторию $y_{ref}(p)$, $0 \leqslant p \leqslant N-1$. Для достижения этой цели можно использовать управление с обратной связью. Обозначим через $e_k(p)$ ошибку воспроизведения желаемой траектории на k-м повторении:

$$
e_k(p) = y_{ref}(p) - y_k(p), \quad 0 \leqslant p \leqslant T-1. \tag{2.3}
$$

Если начальные условия на каждом повторении одинаковы, такое управление будет обеспечивать одинаковую ошибку воспроизведения желаемой траектории на всех шагах, причем может оказаться, что величина этой ошибки не соответствует требованиям по точности. Поставим задачу найти такое управление, которое последовательно уменьшает ошибку с увеличением числа повторений. Такую задачу может решить управление с итеративным обучением, которое на очередном повторении определяется соотношением

$$
u_{k+1}(p) = u_k(p) + \Delta u_{k+1}(p), \tag{2.4}
$$

где $\Delta u_{k+1}(p)$ – корректирующая поправка, формируемая на основе информации с предыдущего повторения. Эту поправку будем находить из условия выполнения соотношений

$$
\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}\,[\,||\,e_k(p)\,||\,] = \mathrm{E}\,||\,e_\infty(p)\,||, \quad \mathrm{E}\,[\,||\,e_{k+1}(p)\,||\,] \leqslant \mathrm{E}\,[\,||\,e_k(p)\,||\,] \quad \forall\, k, \\
&\qquad\qquad \lim_{k\to\infty} \mathrm{E}\,[\,||\,u_k(p)\,||\,] = \mathrm{E}\,[\,||\,u_\infty(p)\,||\,], \quad 0 \leqslant p \leqslant T-1,
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

при этом $\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}\,[\,||\,e_k(p)\,||^2\,]$ и $\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}\,[\,||\,u_k(p)\,||\,] = \mathrm{E}\,[\,||\,u_\infty(p)\,||^2\,]$ должны оставаться ограниченными для всех $0 \leqslant p \leqslant T-1$. Соотношение (2.4) может рассматриваться как алгоритм итеративного обучения, а значение $u_\infty(p)$ называется обученным управлением.

З а м е ч а н и е 1. В приложениях процесс обучения считается завершенным, когда достигнута требуемая точность. В рассматриваемом случае, когда система находится под воздействием шумов, адекватной мерой точности может служить среднее или среднеквадратичное значение ошибки на интервале изменения выходной переменной и условие (2.5) является необходимым для достижения требуемой точности.

Таким образом, задача состоит в нахождении корректирующей поправки $\Delta u_{k+1}(p)$, обеспечивающей выполнение (2.5) при ограниченности

$\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}[\,||\, e_k(p)\,||^2\,]$ и $\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}[\,||\, u_k(p)\,||^2\,] = \mathrm{E}[\,||\, u_\infty(p)\,||^2\,]$ для всех $0 \leqslant \leqslant p \leqslant T-1$.

Будем предполагать, что моменты переключений наблюдаемы. Поскольку вектор выходных переменных измеряется с шумами, для его предварительной обработки используем фильтр Калмана

$$\begin{gathered}\hat{x}_k(p+1) = A_i\hat{x}_k(p) + B_iu_k(p) + F_i(y_{wk}(p) - C\hat{x}_k(p)),\\ \hat{x}_k(0) = F_iy_{wk}(0), \quad i \in \mathcal{N},\end{gathered} \tag{2.6}$$

где $\hat{x}_k(p)$ – оценка вектора состояния и $\hat{y}_k(p) = C\hat{x}_k(p)$,

$$F_i = A_iS_iC^{\mathrm{T}}[CS_iC^{\mathrm{T}} + S_w]^{-1}$$

и S_i – решение алгебраического уравнения Риккати

$$S_i = A_iS_iA_i^{\mathrm{T}} - A_iS_iC^{\mathrm{T}}[CS_iC^{\mathrm{T}} + S_w]^{-1}CS_iA_i^{\mathrm{T}} + S_w. \tag{2.7}$$

Введем в рассмотрение ошибку оценивания $\tilde{x}_k(p) = x_k(p) - \hat{x}_k(p)$ и вспомогательные векторы приращений по переменной k оценки вектора состояния и ошибки оценивания,

$$\hat{\eta}_{k+1}(p+1) = \hat{x}_{k+1}(p) - \hat{x}_k(p), \quad \tilde{\eta}_{k+1}(p+1) = \tilde{x}_{k+1}(p) - \tilde{x}_k(p). \tag{2.8}$$

Поскольку $y_k(p)$ недоступен для наблюдения, ошибка обучения

$$e_k(p) = y_{ref}(p) - y_k(p)$$

не может быть непосредственно использована для управления. Вместо нее будем далее использовать оценку

$$\hat{e}_k(p) = y_{ref}(p) - C\hat{x}_k(p).$$

Запишем уравнения относительно приращений:

$$\begin{gathered}\bar{\eta}_{k+1}(p+1) = A_{i11}\bar{\eta}_{k+1}(p) + A_{i12}\hat{e}_k(p) + B_{i1}\nu_{k+1}(p) + D_{i1}\bar{w}_{k+1}(p),\\ \hat{e}_{k+1}(p) = A_{i21}\bar{\eta}_{k+1}(p) + A_{i22}\hat{e}_k(p) + B_{i2}\nu_{k+1}(p) + D_{i2}\bar{w}_{k+1}(p), \quad i \in \mathcal{N},\end{gathered} \tag{2.9}$$

где

$$\bar{\eta}_{k+1}(p) = \left[\tilde{\eta}_{k+1}(p)^{\mathrm{T}}\ \hat{\eta}_{k+1}(p)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}, \quad \nu_{k+1}(p) = \Delta u_{k+1}(p-1),$$

$$\bar{w}_{k+1}(p) = \left[\Delta v_{k+1}(p-1)^{\mathrm{T}}\ \Delta w_{k+1}(p-1)\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\Delta v_{k+1}(p-1) = v_{k+1}(p-1) - v_k(p-1),$$

$$\Delta w_{k+1}(p-1) = w_{k+1}(p-1) - w_k(p-1),$$

$$A_{i11} = \begin{bmatrix} A_i - F_iC & 0 \\ F_iC & A_i \end{bmatrix}, \quad B_{i1} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_i \end{bmatrix}, \quad D_{i1} = \begin{bmatrix} I & -F_i \\ 0 & F_i \end{bmatrix},$$

$$A_{i12} = 0, \quad A_{i22} = I, \quad A_{i21} = [-CF_iC \;\; -CA],$$
$$B_{i2} = -CB_i, \quad D_{i2} = [0 \;\; -CF_i].$$

Система (2.9) относится к классу дискретных повторяющихся процессов, представляющих собой одну из разновидностей так называемых 2D-систем [28]. Особенность таких систем состоит в том, что они разрешены относительно частных приращений переменных состояния, в случае дискретного времени, или относительно частных производных переменных состояния, в случае непрерывного времени, по каждому из независимых аргументов, и стандартные методы классической и современной теории управления становятся неприменимыми для их исследования. В последние годы авторы систематически развивали теорию устойчивости, диссипативности и стабилизации таких систем на основе свойств дивергенции векторных функций Ляпунова [20, 21, 29–32]. Этот подход, названный дивергентным методом векторных функций Ляпунова, далее используется для решения поставленной задачи.

3. Устойчивость и диссипативность

Корректирующую поправку будем строить как управление с обратной связью для системы (2.9) относительно приращений. Развиваемый далее подход открывает возможность искать это управление в достаточно общем виде

$$\nu_{k+1}(p) = \varphi(\bar{\eta}_{k+1}(p), \hat{e}_k(p)), \quad \varphi(0,0) = 0. \tag{3.1}$$

В частности, как показано в [19, 20], такая форма корректирующей поправки расширяет возможности синтеза в случае линейных систем без переключений.

Определение 1. Дискретный повторяющийся процесс (2.9), (3.1) *называется устойчивым вдоль повторений по второму моменту, если*

$$\lim_{k+p\to\infty} \mathrm{E}\,[\,||\bar{\eta}_k(p)||^2 + ||\hat{e}_k(p)||^2\,] \leqslant \Gamma < \infty, \tag{3.2}$$

где Γ *не зависит от* T.

Дальнейший анализ основан на векторной функции Ляпунова

$$V_i(\xi, \epsilon) = \begin{bmatrix} V_1(\xi) \\ V_{2i}(\epsilon) \end{bmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}^{2n_x}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}^{n_y}, \quad i \in \mathcal{N}, \tag{3.3}$$

где

$$V_1(\xi) > 0, \quad \xi \neq 0, \quad V_{2i}(\epsilon) > 0, \quad \epsilon \neq 0, \quad V_1(0) = 0, \quad V_{2i}(0) = 0, \quad i \in \mathcal{N}.$$

Стохастический аналог дивергенции этой функции вдоль траекторий системы (2.9), (3.1) определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{D}V_i(\xi,\epsilon) = {} & \mathrm{E}\,[V_1(\bar{\eta}_{k+1}(p+1))\,|\,\bar{\eta}_{k+1}(p) = \xi,\, \hat{e}_k(t) = \epsilon\,] - V_1(\xi) + \\ & + \mathrm{E}\,[\,V_{2i}(\hat{e}_{k+1}(p))\,|\,\bar{\eta}_{k+1}(p) = \xi,\, \hat{e}_k(p) = \epsilon\,] - V_{2i}(\epsilon), \quad i \in \mathcal{N}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Этот оператор представляет сумму средних частных приращений по переменным k и p функции V_i при условии, что аргументы на предыдущем шаге принимают фиксированные значения ξ и ϵ, и, таким образом, является естественным обобщением дивергенции на рассматриваемый случай стохастической системы.

Обозначим число переключений сигнала σ на интервале (k_s, k_f) через $N_\sigma(k_f, k_s)$ и, следуя общим принципам теории систем с переключением [23–25], введем в рассмотрение *среднее время ожидания* в соответствии со следующим определением.

Определение 2. Положительное число $\kappa_a \in \mathbb{Z}^+$ называется средним временем ожидания для сигнала переключения относительно повторений σ, если для некоторого $N_0 \geqslant 0$

$$N_\sigma(k_f, k_s) \leqslant N_0 + \frac{k_f - k_s}{\kappa_a}, \quad k_f \geqslant k_s \geqslant 0. \tag{3.5}$$

Неравенство (3.5) означает, что в среднем число шагов между любыми двумя последовательными переключениями на рассматриваемом интервале не меньше κ_a.

Теорема 1. Если существует векторная функция (3.3) *и положительные скаляры c_1, c_2, c_3 и γ, такие что*

$$c_1||\xi||^2 \leqslant V_1(\xi) \leqslant c_2||\xi||^2, \tag{3.6}$$

$$c_1||\epsilon||^2 \leqslant V_{2i}(\epsilon) \leqslant c_2||\epsilon||^2, \tag{3.7}$$

$$\mathcal{D}V_i(\xi, \epsilon) \leqslant \gamma - c_3(||\xi||^2 + ||\epsilon||^2), \quad i \in \mathcal{N}, \tag{3.8}$$

то дискретный повторяющийся процесс (2.9), (3.1) *является устойчивым вдоль повторений по второму моменту для любого сигнала переключения относительно повторений σ со средним временем ожидания*

$$\kappa_a > \ln\left(\frac{c_1}{c_2}\right)\left(\ln\left(1 - \frac{c_3}{c_1}\right)\right)^{-1} \tag{3.9}$$

и произвольным N_0.

Доказательство. Рассмотрим интервал $(0, k_f)$ и обозначим через $N_\sigma = N_\sigma(k_f, 0)$ число переключений на этом интервале. Обозначим

$$\bar{V}_1(\bar{\eta}_{k+1}(p)) = \mathrm{E}[V_1(\bar{\eta}_{k+1}(p))], \quad \bar{V}_{2i}(\hat{e}_k(p)) = \mathrm{E}[V_{2i}(\hat{e}_k(p))].$$

Применяя к обеим частям (3.8) оператор математического ожидания и учитывая (3.4), получим, что

$$\begin{gathered}\bar{V}_1(\bar{\eta}_{k+1}(p+1)) + \bar{V}_{2\sigma(k+1)}(\hat{e}_{k+1}(p)) \leqslant \\ \leqslant \left(1 - \frac{c_3}{c_2}\right)(\bar{V}_1(\bar{\eta}_{k+1}(p) + \bar{V}_{2\sigma(k)}(\hat{e}_k(p)) + \gamma.\end{gathered} \tag{3.10}$$

Левая часть (3.10) является положительно определенной и поскольку $c_2 > 0$ и $c_3 > 0$, из (3.10) следует, что $0 < 1 - \frac{c_3}{c_2} < 1$. Обозначим $\lambda = 1 - \frac{c_3}{c_2}$ и перепишем (3.10) в виде

$$\begin{gathered}\bar{V}_1(\bar{\eta}_{k+1}(p+1)) \leqslant \\ \leqslant \lambda\bar{V}_1(\bar{\eta}_{k+1}(p)) + \lambda\bar{V}_{2\sigma(k)}(\hat{e}_k(p)) - \bar{V}_{2\sigma(k+1)}(\hat{e}_{k+1}(p)) + \gamma.\end{gathered} \tag{3.11}$$

Решая неравенство (3.11) относительно $\bar{V}_1(\bar{\eta}_{k+1}(p))$, имеем

$$\begin{gathered}\bar{V}_1(\bar{\eta}_{k+1}(p)) \leqslant \bar{V}_1(\bar{\eta}_{k+1}(0))\lambda^p + \\ + \sum_{h=0}^{p-1}\Big[\lambda\bar{V}_{2\sigma(k)}(\hat{e}_k(h)) - \bar{V}_{2\sigma(k+1)}(\hat{e}_{k+1}(h))\Big]\lambda^{p-1-h} + \\ + \gamma\sum_{q=0}^{p-1}\lambda^{p-1-q}.\end{gathered} \tag{3.12}$$

Обозначим

$$H_k(p) = \sum_{q=0}^{p-1}\bar{V}_{2,\sigma(k)}(\hat{e}_k(p))\lambda^{p-1-q},$$

тогда из (3.12) следует, что

$$\begin{gathered}H_{k+1}(p) \leqslant \lambda H_{k,\sigma(k)}(p) + \lambda^p\bar{V}_1(\bar{\eta}_{k+1}(0)) - \\ - \bar{V}_1(\bar{\eta}_{k+1}(p)) + \gamma\sum_{q=0}^{p-1}\lambda^{p-1-q}.\end{gathered} \tag{3.13}$$

Пусть на повторении k_n происходит переключение с активной системы i на активную систему j. Тогда в соответствии с (3.7)

$$V_{2j}(y) \leqslant \mu V_{2i}(y), \quad i, j \in \mathcal{N}, \tag{3.14}$$

где

$$\mu = \frac{c_2}{c_1} \geqslant 1.$$

Решая неравенство (3.13) и учитывая (3.14), получим

$$\begin{gathered}H_k(t) \leqslant \mu^{N_\sigma}\lambda^k H_{0,\sigma(0)}(p) + \\ + \sum_{n=0}^{k-1}\lambda^{k-1-n}\Big[\lambda^p\bar{V}_1(\bar{\eta}_{n+1}(0)) - \bar{V}_1(\bar{\eta}_{n+1}(p))\Big] + \\ + \gamma\sum_{n=0}^{k-1}\left(\sum_{q=0}^{p-1}\lambda^{p-1-q}\right)\lambda^{k-1-n},\end{gathered}$$

откуда

$$\sum_{n=0}^{k-1}\lambda^{k-1-n}\bar V_1(\bar\eta_{n+1}(p))+\sum_{h=0}^{p-1}\lambda^{p-1-h}\bar V_{2\sigma(k)}(\hat e_k(h))\leqslant$$

$$\leqslant\mu^{N_\sigma}\sum_{n=0}^{k-1}\lambda^{k-1-n}V_1(\bar\eta_{n+1}(p))+\sum_{h=0}^{p-1}\lambda^{p-1-h}\bar V_{2\sigma(k)}(\hat e_k(h))\leqslant$$

$$\leqslant\mu^{N_\sigma}\left(\lambda^p\sum_{n=0}^{k-1}\lambda^{k-1-n}\bar V_1(\bar\eta_{n+1}(0))+\lambda^k\sum_{h=0}^{p-1}\lambda^{p-1-h}\bar V_{2,\sigma(0)}(\hat e_0(h))\right)+ \tag{3.15}$$

$$+\gamma\sum_{n=0}^{k-1}\left(\sum_{q=0}^{p-1}\lambda^{p-1-q}\right)\lambda^{k-1-n}.$$

Из неравенства (3.15) с учетом (3.6), (3.7) и того, что $\bar\eta_{n+1}(0))=0$, следует, что

$$\mathrm{E}[|\bar\eta_k(p))|^2]\leqslant\frac{\mu^{N_\sigma}}{c_1}\left[\lambda^k\sum_{q=0}^{p-1}\lambda^{p-1-q}\bar V_2(\hat e_0(q))\right]+\frac{\gamma}{c_1(1-\lambda)^2} \tag{3.16}$$

и

$$\mathrm{E}[|\hat e_k(p-1))|^2]\leqslant\frac{\mu^{N_\sigma}}{c_1}\left[\lambda^k\sum_{q=0}^{p-1}\lambda^{p-1-q}\bar V_2(\hat e_0(q))\right]+\frac{\gamma}{c_1(1-\lambda)^2}. \tag{3.17}$$

Поскольку величина $\hat e_0(p)=y_{ref}(p)-C\hat x_0(p)$ ограничена для всех $0\leqslant p\leqslant$ $\leqslant T-1$, то правые части (3.16) и (3.17) будут ограничены тогда и только тогда, когда $\mu^{N_\sigma}\lambda^k<1$. Отсюда с учетом (3.5) следует (3.9). Это означает, что повторяющийся процесс (2.9), (3.1) является устойчивым вдоль повторений по второму моменту для любого сигнала переключения относительно повторений σ со средним временем ожидания, удовлетворяющим (3.9), и произвольным N_0. Теорема 1 доказана.

Из доказательства теоремы вытекает следующий результат.

С л е д с т в и е. *Дискретный повторяющийся процесс* (2.9), (3.1) *является устойчивым вдоль повторений по второму моменту для произвольного сигнала переключения относительно повторений σ, если существует векторная функция*

$$V(\xi,\epsilon)=[V_1(\xi)\ V_2(\epsilon)]^{\mathrm T} \tag{3.18}$$

и положительные скаляры c_1, c_2, c_3, и γ, такие что

$$\begin{gathered}c_1||\xi||^2\leqslant V_1(\xi)\leqslant c_2||\xi||^2,\\ c_1||\epsilon||^2\leqslant V_2(\epsilon)\leqslant c_2||\epsilon||^2,\\ \mathcal{D}V(\xi,\epsilon)\leqslant\gamma-c_3(||\xi||^2+||\epsilon||^2).\end{gathered} \tag{3.19}$$

Сформируем для системы (2.9) дополнительный вектор выхода $z_{k+1}(p) \in \in \mathbb{R}^{n_z}$, определяемый выражением

$$z_{k+1}(p) = C_1\bar{\eta}_{k+1}(p) + C_2\hat{e}_k(p) + C_3 v_{k+1}(p), \tag{3.20}$$

где C_1, C_2 и C_3 – постоянные матрицы согласованных размеров. Следуя [20], введем определение диссипативности вдоль повторений.

Определение 3. *Дискретный повторяющий процесс* (2.9) *называется диссипативным вдоль повторений по второму моменту относительно входной переменной* $\nu_{k+1}(t)$ *и выходной переменной* $z_{k+1}(t)$, *определенной в* (3.20), *если существуют векторная функция вида* (3.3), *скалярная функция* $S_i(\nu_{k+1}(p), z_{k+1}(p))$, $i \in \mathcal{N}$, *положительные скаляры* c_1, c_2, c_3 *и* γ, *удовлетворяющие условиям* (3.6), (3.7) *и*

$$\mathcal{D}V_i(\xi, \epsilon) \leqslant S_i(\nu_{k+1}(p), z_{k+1}(p)) + \gamma - c_3(||\xi||^2 + ||\epsilon||^2), \quad i \in \mathcal{N}. \tag{3.21}$$

4. Синтез управления

4.1. Синтез нелинейного управления с переключениями

В теории диссипативности по Виллемсу функции S_i и V_i называются функцией запаса и функцией накопления. Нетрудно видеть, что если при некотором выборе z корректирущая поправка (3.1) удовлетворяет условию

$$S_i(z_{k+1}(p), \nu_{k+1}(p)) \leqslant 0, \quad i \in \mathcal{N},$$

то система (2.9), (3.1) в соответствии с теоремой 1 будет устойчивой вдоль повторений по второму моменту для любого сигнала переключения относительно повторений σ со средним временем ожидания, удовлетворяющим (3.9) и произвольным N_0. Таким образом, задача сводится к нахождению *стабилизирующей тройки* $\{V, z, \nu\}$.

Обозначим

$$\zeta_{k+1}(p) = \begin{bmatrix} \bar{\eta}_{k+1}(p) \\ \hat{e}_k(p) \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_{i11} & A_{i12} \\ A_{i21} & A_{i22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_i = \begin{bmatrix} B_{i1} \\ B_{i2} \end{bmatrix}, \quad i \in \mathcal{N},$$

и определим блочно-диагональную матрицу $P_i = \mathrm{diag}[P_1\ P_{2i}] \succ 0$ как решение неравенства Риккати

$$\bar{A}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{A} - (1-\sigma)P_i - \bar{A}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i[\bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i + R]^{-1}\bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{A}_i + Q \preceq 0, \quad i \in \mathcal{N}, \tag{4.1}$$

где $0 < \delta < 1$ – положительный скаляр, $Q \succ 0$ и $R \succ 0$ – весовые матрицы. Нетрудно видеть, что если система линейных матричных неравенств

$$\begin{bmatrix} (1-\delta)X_i & X\bar{A}^{\mathrm{T}} & X_i \\ \bar{A}_i X_i & X_i + \bar{B}_i R^{-1}\bar{B}_i^{\mathrm{T}} & 0 \\ X_i & 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad X_i \succ 0, \quad i \in \mathcal{N}, \tag{4.2}$$

разрешима относительно

$$X_i = \mathrm{diag}[X_1 \ X_{2i}] \succ 0,$$

то

$$P_i = X_i^{-1}, \quad i \in \mathcal{N}.$$

Следующая теорема 2 предлагает одно из возможных множеств стабилизирующих троек.

Теорема 2. Дискретный повторяющийся процесс (2.9) *является диссипативным вдоль повторений по второму моменту с функцией запаса*

$$S_i(\nu_{k+1}(p), z_{k+1}(p)) = z_{k+1}^{\mathrm{T}}(p)(\bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i + R)^{-1} z_{k+1}(p) + \\ + 2z_{k+1}(p)^{\mathrm{T}} \nu_{k+1}(p) + \nu_{k+1}(p)^{\mathrm{T}} [\bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i + R] \nu_{k+1}(p), \quad i \in \mathcal{N}, \tag{4.3}$$

относительно входной переменной $\nu_{k+1}(t)$ *и выходной переменной*

$$z_{k+1}(p) = \bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{A}_i \zeta_{k+1}(p), \quad i \in \mathcal{N}, \tag{4.4}$$

где $P_i = X_i^{-1}$, *а* $X_i = \mathrm{diag}[X_1 \ X_2 i] \succ 0$, $i \in \mathcal{N}$, *является решением* (4.1). *Множество корректирующих поправок* (3.1), *обеспечивающих устойчивость вдоль повторений по второму моменту системы* (2.9), (3.1), *определяется соотношением*

$$\nu_{k+1}(p) = -[\bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i + R]^{-1} \bar{B}_i^{\mathrm{T}} P \bar{A}_i \Theta_i(\zeta_{k+1}(p)) \zeta_{k+1}(p), \quad i \in \mathcal{N}, \tag{4.5}$$

где $\Theta(\zeta)$ – *симметричная матричная функция, удовлетворяющая соотношению*

$$M_i - M_i\Theta_i(\zeta) - \Theta_i(\zeta) M_i - \Theta_i(\zeta) M_i + \Theta_i(\zeta) M_i \Theta_i(\zeta) - Q - (\delta - \mu) P_i \preceq 0, \\ i \in \mathcal{N}, \tag{4.6}$$

для всех $\zeta \in \mathbb{R}^{2n_x+n_y}$, *где* $M_i = \bar{A}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i [\bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i + R]^{-1} \bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{A}_i$, $0 < \mu < \sigma$, $i \in \mathcal{N}$.

Доказательство. Выберем компоненты функции (3.3) в виде квадратичных форм

$$V_1(\xi) = \xi^{\mathrm{T}} P_1 \xi, \quad V_2(\epsilon) = \epsilon^T P_{2i} \epsilon,$$

где $P_1 \succ 0$ и $P_{2i} \succ 0$ – соответствующие диагональные блоки матрицы P_i, являющейся решением (4.1). Обозначим $\bar{\xi} = [\xi^{\mathrm{T}} \ \epsilon^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$. Последовательно оценивая дивергенцию (3.3) вдоль траекторий (2.9), получим

$$\mathcal{D}V_i(\xi, \epsilon) = \\ = \bar{\xi}^{\mathrm{T}} \Big(\bar{A}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{A}_i - (1-\delta) P_i - \bar{A}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i \left[\bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i + R \right]^{-1} \bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{A}_i + Q \Big) \bar{\xi} + \\ + \bar{\xi}^{\mathrm{T}} \bar{A}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i \left[\bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i + R \right]^{-1} \bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{A}_i \bar{\xi} - \\ - \bar{\xi}^{\mathrm{T}} \left(Q + \delta P_i \right) \bar{\xi} + 2\bar{\xi}^{\mathrm{T}} \bar{A}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i \nu_{k+1}(p) + \\ + \nu_{k+1}(p)^{\mathrm{T}} \bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i \nu_{k+1}(p) + 2\Big[\mathrm{tr}[P_1 S_{1i}] + \mathrm{tr}[P_{2i} S_{2i}] \Big] \leqslant \\ \leqslant \bar{\xi}^{\mathrm{T}} \bar{A}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i [\bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i + R]^{-1} \bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{A} \bar{\xi} + 2\bar{\xi}^{\mathrm{T}} \bar{A}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B} \nu_{k+1}(p) + \\ + \nu_{k+1}(p)^{\mathrm{T}} \bar{B}_i^{\mathrm{T}} P_i \bar{B}_i \nu_{k+1}(p) - \bar{\xi}^{\mathrm{T}} (Q + \delta P_i) \bar{\xi} + 2\Big[\mathrm{tr}[P_1 S_{1i}] + \mathrm{tr}[P_{2i} S_{2i}] \Big], \tag{4.7}$$

где

$$S_{1i} = \begin{bmatrix} S_v + F_i S_w F_i^{\mathrm{T}} & -F_i S_w F_i^{\mathrm{T}} \\ -F_i S_w F_i^{\mathrm{T}} & F_i S_w F_i^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad S_{2i} = C F_i S_w F_i^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}}.$$

Из (4.7) следует, что система (2.9) является диссипативной вдоль повторений по второму моменту относительно входа $\nu_{k+1}(p)$ и выхода (4.4) с функцией запаса (4.3) и

$$\gamma = \max_{i\in\mathcal{N}} \Big\{ 2[\mathrm{tr}[P_1 S_{1i}] + \mathrm{tr}[P_2 i S_{2i}]] \Big\}, \quad c_3 = \mu \min_{i\in\mathcal{N}} \{\lambda_{\min}(P_i)\}.$$

Для корректирующей поправки в виде (4.5) из (4.7) с учетом (4.6) и принятых обозначений следует, что

$$\mathcal{D}V_i(\bar{\eta}, \hat{e}) \leqslant -c_3 \left(||\xi||^2 + ||\epsilon||^2 \right) + \gamma.$$

Следовательно, в соответствии с теоремой 1, система (4.5), (2.9) устойчива вдоль повторений по второму моменту для любого сигнала переключения относительно повторений σ со средним временем ожидания, удовлетворяющим (3.9) и произвольным N_0. Постоянные c_1 и c_2 в (3.9) определятся выражениями

$$c_1 = \min\Big\{ \lambda_{\min}(P_1), \min_{i\in\mathcal{N}} \{\lambda_{\min}(P_{2i})\} \Big\}, \quad c_2 = \max\Big\{ \lambda_{\max}(P_1), \max_{i\in\mathcal{N}} \{\lambda_{\max}(P_{2i})\} \Big\}.$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Поскольку приращение ошибки оценивания $\tilde{\xi}_{k+1}(p)$ недоступно для формирования корректирующей поправки, матрица Θ_i всегда должна иметь вид $\Theta_i(\zeta) = \mathrm{diag}[0_{n_x}\ \Theta_{i1}(\zeta)]$. В простейшем случае матрица Θ_{i1} может быть выбрана не зависящей от ζ, и тогда, после нахождения матрицы P_i, условие (4.6) сводится к системе линейных матричных неравенств, при этом теорема 1 дает линейную корректирующую поправку. В общем случае $\Theta_i(\zeta)$ зависит от изменения ошибки относительно повторений и можно пытаться уменьшать значения коэффициентов корректирующих поправок после достижения требуемой точности и, наоборот, увеличивать эти коэффициенты, когда ошибка велика, другими словами, вводить адаптацию к величине ошибки. Такой подход позволит найти разумный компромисс между скоростью обучения и энергозатратами на управление. Наиболее просто это можно сделать за счет кусочно-постоянного изменения Θ в зависимости от достигнутой точности. Такое решение для систем без переключений рассмотрено в [20].

4.2. Синтез линейного управления без переключений

В ряде случаев представляет интерес построить управление без переключений. Здесь более эффективным представляется другой подход к решению. Рассмотрим функцию Ляпунова (3.18) с компонентами $V_1(\xi) = \xi^{\mathrm{T}} P_1 \xi$,

$V_2(\epsilon) = \epsilon^{\mathrm{T}} P_2 \epsilon$, где $P_1 \succ 0$ и $P_2 \succ 0$ – постоянные матрицы. Закон коррекции будем искать в виде линейной обратной связи по приращениям доступных для измерения переменных и по ошибке:

$$
v_{k+1}(p) = K_1 \hat{\xi}_{k+1}(p) + K_2 \hat{e}_k(p) = KH\zeta_{k+1}(p), \tag{4.8}
$$

где $K = [K_1 \ K_2]$, $H = [0 \ I_{n_x+n_y}]$. Вычисляя дивергенцию (3.18) вдоль траекторий (2.9), (4.8), получим

$$
\mathcal{D}V = \bar{\xi}^{\mathrm{T}}(\bar{A}_{ci}^{\mathrm{T}} P \bar{A}_{ci} - P)\bar{\xi} + 2[\mathrm{tr}[P_1 S_{1i}] + \mathrm{tr}[P_2 S_{2i}]], \quad i \in \mathcal{N}, \tag{4.9}
$$

где

$$
P = \mathrm{diag}[P_1 \ \ P_2],
$$

$$
\bar{A}_{ci} = \begin{bmatrix} A_i - F_i C & 0 & 0 \\ F_i C & A_i + B_i K_1 & B_i K_2 \\ -CF_i C & -C(A_i + B_i K_1) & I - CB_i K_2 \end{bmatrix}, \quad i \in \mathcal{N}.
$$

Предположим, что матрицы $P \succ 0$ и K удовлетворяют системе неравенств

$$
(\bar{A}_i + \bar{B}_i KH)^{\mathrm{T}} P (\bar{A}_i + \bar{B}_i KH) - P_i + Q + H^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} RKH \preceq 0, \quad i \in \mathcal{N}, \tag{4.10}
$$

где $Q \succ 0$ и $R \succ 0$ – матрицы, аналогичные весовым матрицам в теории линейно-квадратичного регулятора. Поскольку выполняется (4.10), то выполняются условия следствия теоремы 1 с параметрами

$$
\gamma = \max_{i \in \mathcal{N}} \Big\{ 2\big[\mathrm{tr}[P_1 S_{1i}] + \mathrm{tr}[P_2 S_{2i}]\big] \Big\}, \quad c_3 = \lambda_{\min}\big(Q + H^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} RKH\big)
$$

и, таким образом, система (2.9), (4.8) является устойчивой вдоль повторений по второму моменту для произвольного сигнала переключения относительно повторений σ. Неравенства (4.10) с помощью известной леммы о дополнении Шура сводятся к линейным матричным неравенствам и уравнению относительно переменных $X = \mathrm{diag}[P_1^{-1} \ P_2^{-1}]$, Y, и Z:

$$
\begin{bmatrix} X & (\bar{A}_i X + \bar{B}_i YH)^{\mathrm{T}} & X & (YH)^{\mathrm{T}} \\ \bar{A}_i X + \bar{B}_i YH & X & 0 & 0 \\ X & 0 & Q^{-1} & 0 \\ YH & 0 & 0 & R^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0, \tag{4.11}
$$

$$
X \succ 0, \quad HX = ZH, \quad i \in \mathcal{N}.
$$

Если неравенства и уравнение (4.11) совместны, то $K = [K_1 \ K_2] = YZ^{-1}$, поскольку в силу структуры матрицы H матрица Z является невырожденной.

5. Пример

Рассмотрим модель манипулятора с одним гибким звеном [33], функционирующего в повторяющемся режиме с постоянным периодом повторения в условиях действия внешних возмущений и шумов измерений. Динамика движения манипулятора в пространстве состояний описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= A_0 x_k(t) + B_0(u_k(t) + \mu_k(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant T_f, \\ y_k(t) &= C x_k(t) + \omega_k(t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где на k-м повторении $x_k(t) = \begin{bmatrix} \theta_k(t) & \alpha_k(t) & \dot{\theta}_k(t) & \dot{\alpha}(t)_k \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\theta_k(t)$ – угол поворота сервопривода, $\alpha_k(t)$ – угол отклонения гибкого звена,

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{K_s}{J_{eq}} & -\dfrac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{K_s(J_l + J_{eq})}{J_l J_{eq}} & \dfrac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{J_{eq}} \\ -\dfrac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

B_{eq} – коэффициент вязкого трения сервопривода, K_s – жесткость гибкого звена, J_l – момент инерции гибкого звена относительно центра масс, J_{eq} – момент инерции сервопривода, $\mu_k(t)$ и $\omega_k(t)$ – независимые последовательности непрерывных гауссовских шумов с постоянными интенсивностями Q_n и R_n. Движение гибкого звена происходит в горизонтальной плоскости. Для построения и анализа управления с итеративным обучением перейдем к эквивалентной дискретной модели с постоянным периодом T_s

$$\begin{aligned} x_k(p+1) &= A x_k(p) + B u_k(p) + v_k(p), \\ y_{wk}(p) &= C x_k(p) + w_k(p), \quad p = 0, 1, \ldots, N_{T_f}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{5.2}$$

где $A = \exp(A_0 T_s)$, $B = \int_0^{T_s} \exp(A_0 \tau) B_0 d\tau$, p – номер периода дискретности, N_{T_f} – число периодов дискретности на отрезке $[0,\ T_f]$, $v_k(p)$ и $w_k(p)$ – независимые последовательности гауссовских дискретных белых шумов с ковариациями

$$S_v = \int\limits_0^{T_s} \exp(A_0 \tau) B_0 Q_n B_0^{\mathrm{T}} \exp(A_0^T \tau) d\tau, \quad S_w = R_n / T_s. \tag{5.3}$$

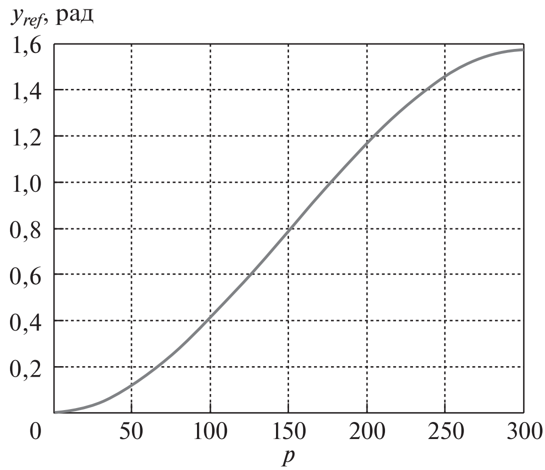


Рис. 1. Желаемая траектория изменения угла поворота вала сервомотора.

Задача состоит в нахождении алгоритма управления с итеративным обучением, при котором выходная переменная $y_k(p) = \theta_k(p)$ воспроизводила бы желаемую траекторию $y_{ref}(t)$ с заданной точностью e^*. Для формирования управления доступен только угол $\theta_k(p)$, который в соответствии с (5.2) измеряется с шумами. Точность будем оценивать по выборочному среднеквадратическому отклонению

$$E(k) = \sqrt{\frac{1}{N_{T_f}} \sum_{p=0}^{N_{T_f}} ||\hat{e}_k(p)||^2}. \tag{5.4}$$

Для расчетов и моделирования были приняты следующие номинальные значения параметров из [33]: $B_{eq} = 0{,}004$ Н·м/(рад/с), $K_s = 1{,}3$ Н·м/рад, $J_l = 0{,}0038$ кг·м^2, $J_{eq} = 2{,}08 \cdot 10^{-3}$ кг·м^2. Продолжительность цикла повторения T_f составляет 3 с, требуемая точность $e^* = 1$град. $= 0{,}0175$ рад., постоянные интенсивности шумов имеют величины $Q_n = 0{,}16 \cdot 10^{-4}$ и $R_n = 0{,}2 \cdot 10^{-5}$.

Желаемая траектория изменения выходной переменной описывается уравнением

$$y_{ref}(t) = \frac{\pi t^2}{6} - \frac{\pi t^3}{27}, \quad t \in [0; T],$$

и представлена на рис. 1

При начале работы манипулятора несколько первых повторений проходят без нагрузки для предварительной настройки, при этом значения параметров соответствуют номинальным. После трех повторений манипулятор нагружается, при этом изменяется значение J_l, которое становится равным $0{,}1038$кг $\cdot$ м^2. Исходя из физического смысла переменных состояния зададим весовые матрицы

$$Q = \mathrm{diag}[10^{-4} \quad 10^{-3} \quad 10^{-2} \quad 10^{-4} \quad 10^{-4} \quad 10^{-3} \quad 10^{-2} \quad 10^{-4} \quad 10^{6}], \quad R = 1$$

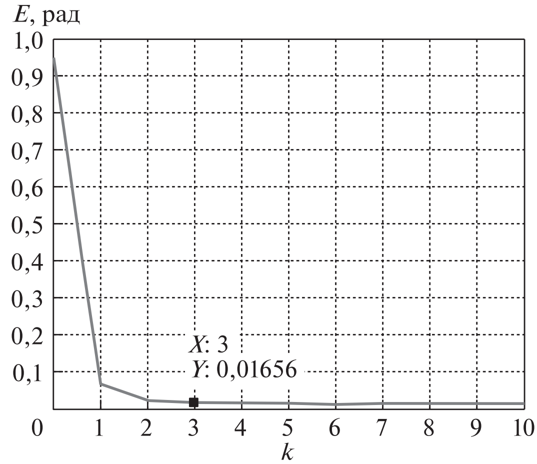


Рис. 2. Изменение среднеквадратической ошибки в зависимости от числа повторений для управления с переключением.

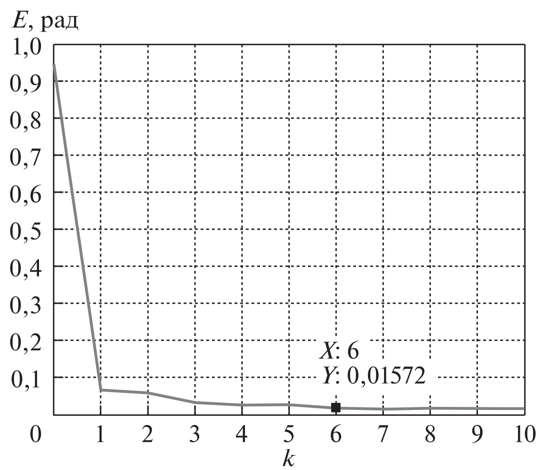


Рис. 3. Изменение среднеквадратической ошибки в зависимости от числа повторений для управления без переключения.

и примем $T_s = 0{,}01$ с. Рассматривая скачкообразное изменение нагрузки на манипулятор как переключение, воспользуется результатами подраздела 4.2, которые удобны для сравнительного анализа. Обозначим матрицы ненагруженного манипулятора через $A_1,\ B_1$ и матрицы нагруженного манипулятора — $A_2,\ B_2$. Переключаемый алгоритм управления с итеративным обучением имеет вид

$$\hat{x}_k\,(p) = A_i \hat{x}_k\,(p-1) + B_i u_k\,(p-1) + F_i\,(y_k\,(p-1) - C\hat{x}_k\,(p-1))\,,$$

$$i = \begin{cases} 1, & \text{если } k < 3, \\ 2, & \text{если } k \geqslant 3, \end{cases}$$

$$F_i = \begin{cases} F_1 = [0{,}4321 \quad -0{,}2936 \quad 6{,}1515 \quad -4{,}0246]^{\mathrm{T}}, & \text{если } k < 3, \\ F_2 = [0{,}3950 \quad -0{,}3667 \quad 4{,}5955 \quad -4{,}4811]^{\mathrm{T}}, & \text{если } k \geqslant 3, \end{cases}$$

$$u_k(p) = u_{k-1}(p) + K_1(\hat{x}_k(p) - \hat{x}_{k-1}(p)) + K_{2i}(y_{ref}(p) - y_{k-1}(p+1)),$$

$$K_1 = [-29{,}5324 \quad 6{,}1375 \quad -1{,}1415 \quad -0{,}7588],$$

$$K_{2i} = \begin{cases} 27{,}8263, & \text{если } k < 3, \\ 26{,}6316, & \text{если } k \geqslant 3. \end{cases}$$

При использовании алгоритма без переключений

$$u_k(p) = u_{k-1}(p) + K_1(\hat{x}_k(p) - \hat{x}_{k-1}(p)) + K_2(y_{ref}(p) - y_{k-1}(p+1)),$$

$$K_1 = [-21{,}1783 \quad 14{,}6783 \quad -2{,}0471 \quad -1{,}6679], \quad K_2 = 20{,}8358.$$

На рис. 2, 3 показано изменение среднеквадратической ошибки в зависимости от числа повторений для управления с переключением и без переключения соответственно.

Анализ полученных зависимостей показывает, что в случае управления с переключением требуемая точность достигается сразу же после настроечных повторений, в то время как в случае управления без переключений для достижения нужной точности требуются дополнительные шаги в рабочем режиме, что, очевидно, нежелательно.

6. Заключение

В данной статье предложены методы синтеза управления с итеративным обучением для стохастических систем с переключениями на основе теории 2D-систем в форме дискретных повторяющихся процессов. Приведенный пример показывает, что когда переключения наблюдаемы, управление с переключением поволяет ускорить сходимость процесса обучения. Дальнейшего исследования требует вопрос выбора нелинейной функции $\Theta_i(\zeta)$ в методе синтеза на основе диссипативности (теорема 2 и замечание 2). Открытым остался вопрос о влиянии динамики фильтра Калмана на скорость сходимости процесса обучения и точность. Значительный интерес представляют сетевые задачи управления с итеративным обучением, где переключения являются естественной моделью изменений информационной структуры сети. Комбинация управления с итеративным обучением и управления с обратной связью также представляет интересную задачу для дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Garden M.* Learning Control of Actuators in Control Systems. U.S. Patent 3555252, 1971.
2. *Uchiyama M.* Formulation of High-Speed Motion Pattern of a Mechanical Arm by Trial // Trans. SICE (Soc. Instrum. Contr. Eng.). 1978. V. 14. No. 6. P. 706–712.
3. *Arimoto S., Kawamura S., Miyazaki F.* Bettering Operation of Robots by Learning // J. Robot. Syst. 1984. V. 1. P. 123–140.

4. *Arimoto S., Kawamura S., Miyazaki F.* Bettering Operation of Dynamic Systems by Learning: A New Control Theory for Servomechanism or Mechatronic Systems // Proc. 23rd Conf. Decicion Control. Las Vegas. 1984. P. 1064–1069.
5. *Craig J.J.* Adaptive Control of Manipulators through Repeated Trials // Proc. Amer. Control Conf. 1984. P. 1566–1573.
6. *Casalino G., Bartolini G.* A Learning Procedure for the Control of Movements of Robotic Manipulators // Proc. IASTED Symp. Robot. Autom. 1984. P. 108–111.
7. *Xu J.-X., Tan Y.* Linear and Nonlinear Iterative Learning Control. Lecture Notes in Control and Information Sciences. N.Y.: Springer, 2003.
8. *Ahn H.-S., Moore K.L., Chen Y.Q.* Iterative Learning Control. Robustness and Monotonic Convergence for Interval Systems. London: Springer-Verlag, 2007.
9. *Bristow D.A., Tharayil M., Alleyne A.G.* A Survey of Iterative Learning Control // IEEE Control Syst. Mag. 2006. V. 23. No. 3. P. 96–114.
10. *Ahn H.-S., Chen Y.Q., Moore K.L.* Iterative Learning Control: Brief Survey and Categorization // IEEE Trans. Syst. Man. Cybernet. Part C: Applications and Reviews. 2007. V. 37. No. 6. P. 1099–1121.
11. *Shen D., Wang Y.* Survey on Stochastic Iterative Learning Control // J. Process Control. 2014. V. 24. P. 64–77.
12. *Shen D.* A Technical Overview of Recent Progresses on Stochastic Iterative Learning Control // UST. 2018. V. 6. No. 3. P. 147–164.
13. *Saab S.S.* A Discrete-Time Stochastic Learning Control Algorithm // IEEE Trans. Autom. Control. 2001. V. 46. No. 6. P. 877–887.
14. *Saab S.S.* On a Discrete-Time Stochastic Learning Control Algorithm // IEEE Trans. Autom. Control. 2001. V. 46. No. 8. P. 1333–1336.
15. *Saab S.S.* Stochastic P-type/D-type Iterative Learning Control Algorithms // Int. J. Control. 2003. V. 76. No. 2. P. 139–148.
16. *Saab S.S.* A Stochastic Iterative Learning Control Algorithm with Application to an Induction Motor // Int. J. Control. 2004. V. 77. No. 2. P. 144–163.
17. *Saab S.S.* Optimal Selection of the Forgetting Matrix into an Iterative Learning Control Algorithm // IEEE Trans. Autom. Control. 2005. V. 50. No. 12. P. 2039–2043.
18. *Saab S.S.* Optimality of First-Order ILC among Higher Order ILC // IEEE Trans. Autom. Control. 2006. V. 51. No. 8. P. 1332–1336.
19. *Pakshin P., Emelianova J., Gałkowski K., Rogers E.* Iterative Learning Control Design for Discrete Stochastic Linear Systems // Proc. 18th Eur. Control Conf. Napoli, Italy. 2019. P. 3776–3771.
20. *Pakshin P., Emelianova J., Rogers E., Gałkowski K.* Repetitive Process Based Stochastic Iterative Learning Control Design for Linear Dynamics // Syst. Control Lett. 2020. V. 137. https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2020.104625
21. *Пакшин П.В., Копосов А.С., Емельянова Ю.П.* Управление с итеративным обучением мультиагентной системой в условиях случайных возмущений // АиТ. 2020. № 3. С. 132–156.

    Pakshin P.V., Koposov A.S., Emelianova J.P. Iterative Learning Control of a Multiagent System under Random Perturbations // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 3. P. 483–502.
22. *Oh S-K, Lee J.M.* Stochastic Iterative Learning Control for Discrete Linear Time-Invariant System with Batch-Varying Reference Trajectories // J. Process Control. 2015. V. 36. P. 64–78.
23. *Liberzon D.* Switching in Systems and Control. Boston, MA: Birkhäuser, 2003.

24. *Shorten R., Wirth F., Mason O., Wulff K., King C.* Stability Criteria for Switched and Hybrid Systems // SIAM Rev. 2007. V. 49. P. 545–592.

25. *Lin H., Antsaklis P.J.* Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results // IEEE Trans. Autom. Control. 2009. V. 54. P. 308–321.

26. *Sun Z., Ge S.S.* Stability Theory of Switched Dynamical Systems. London: Springer-Verlag, 2011.

27. *Alwan M.S, Liu X.* Theory of Hybrid Systems:Deterministic and Stochastic. Beijing: Springer Nature Singapore Pte Ltd. and Higher Education Press, 2018.

28. *Rogers E., Galkowski K., Owens D.H.* Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes / Lect. Notes Control Inform. Sci. Berlin: Springer-Verlag, 2007. V. 349.

29. *Pakshin P., Emelianova J., Emelianov M., Gałkowski K., Rogers E.* Dissipivity and Stabilization of Nonlinear Repetitive Processes // Syst. Control Lett. 2016. V. 91. P. 14–20.

30. *Пакшин П.В., Емельянова Ю.П., Емельянов М.А., Галковский К., Роджерс Э.* Стохастическая устойчивость некоторых классов 2D-систем // АиТ. 2018. № 1. С. 113–129.

Pakshin P., Emelianova J., Emelianov M., Gałkowski K., Rogers E. Stochastic Stability of Some Classes of Nonlinear 2D Systems // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 1. P. 89–102.

31. *Pakshin P., Emelianova J., Gałkowski K., Rogers E.* Stabilization of Two-Dimensional Nonlinear Systems Described by Fornasini-Marchesini and Roesser models //SIAM J. Control Optim. 2018. V. 56. P. 3848–3866.

32. *Pakshin P., Emelianova J., Emelianov M., Gałkowski K., Rogers E.* Passivity Based Stabilization of Repetitive Processes and Iterative Learning Control Design // Syst. Control Lett. 2018. V. 122. P. 101–108.

33. *Apkarian J., Karam P., Levis M.* Workbook on Flexible Link Experiment for Matlab/Simulink Users. Quanser, 2011.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 27.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020

© 2020 г. А.В. ПАНТЕЛЕЕВ, д-р физ.-мат. наук (avpanteleev@inbox.ru),
А.В. ЛОБАНОВ (lobbsasha@mail.ru)
(Московский авиационный институт)

МИНИПАКЕТНЫЙ МЕТОД АДАПТИВНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА ДЛЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается один из возможных способов решения задачи оценки неизвестных параметров динамических моделей, описываемых дифференциально–алгебраическими уравнениями. Оценка параметров производится по результатам наблюдений за поведением математической модели. Значения параметров находятся в результате минимизации критерия, описывающего суммарное квадратическое отклонение значений координат вектора состояния от полученных при измерениях точных значений в различные моменты времени. На значения параметров наложены ограничения параллелепипедного типа. Для решения задачи оптимизации предлагается пакетный метод адаптивного случайного поиска, развивающий идеи методов оптимизации, применяемых в машинном обучении. Предложенный метод применен при решении трех модельных задач, их результаты сравнивались с полученными при помощи градиентных методов оптимизации, используемых в процедурах машинного обучения, и метаэвристических алгоритмов.

Ключевые слова: параметрическая идентификация, динамическая система, градиентные методы оптимизации, минипакетный метод, адаптивный случайный поиск.

DOI: 10.31857/S0005231020110070

1. Введение

В статье рассматривается математическая модель динамической системы с неизвестными параметрами, описываемая системой дифференциально-алгебраических уравнений. На каждый параметр могут быть наложены ограничения в виде отрезка возможных значений с фиксированными концами. Известны результаты наблюдения за состоянием системы в определенные моменты времени функционирования системы. Целевая функция представляется в виде суммы квадратов отклонений значений всех компонент решения системы дифференциальных уравнений в заданные моменты времени от полученных в результате точных измерений значений координат вектора состояния модели. Ставится задача минимизации целевой функции на множестве возможных значений параметров, удовлетворяющих заданным ограничениям.

Большинство публикаций в области идентификации параметров основано на вероятностном подходе (метод максимального правдоподобия, построение доверительных интервалов и т.д.) [1, 2]. Другим направлением исследований является применение методов оптимизации [3, 4]. Применяются метод коллокаций совместно с линеаризацией и последовательным квадратичным программированием, методы Гаусса–Ньютона, генетические алгоритмы с уточнением на основе алгоритма Левенберга–Марквардта, метод ветвей и границ, метод Лууса и др. [5–14]. Могут быть использованы классические методы нулевого, первого и второго порядков, однако их реализация при больших объемах измерений может быть затруднительной. Альтернативой является применение метаэвристических алгоритмов [15–17], которые при отсутствии теоретического доказательства сходимости позволяют получить решение достаточно хорошего качества за приемлемое время. Однако с ростом числа переменных их эффективное применение требует значительных вычислительных ресурсов.

Поскольку в решаемой задаче целевая функция представляется суммой некоторых функций, то задача параметрической идентификации может быть решена с помощью алгоритмов оптимизации, применяемых в машинном обучении, в частности градиентных методов оптимизации, таких как: метод стохастического градиентного спуска (Stochastic Gradient Descent, SGD), минипакетный метод градиентного спуска (Mini-batch Gradient Descent), классический метод моментов (Classical Momentum), ускоренный градиентный метод Нестерова (Nesterov Accelerated Gradient, NAG), метод адаптивного градиента (Adaptive Gradient, AdaGrad), метод скользящего среднего (Root Mean Square Propagation, RMSProp), метод адаптивной оценки моментов (Adaptive Moment Estimation, Adam), модификация метода Adam (Adamax), ускоренный по Нестерову метод адаптивной оценки моментов (Nesterov–accelerated Adaptive Moment Estimation, Nadam) [18–21]. В градиентных методах, применяемых в машинном обучении, упрощается процедура поиска за счет вычисления градиента по одной (SGD) или нескольким реализациям (минипакетный метод градиентного спуска), накапливания информации о величине составляющей градиента или ее квадрате по соответствующей координате вектора неизвестных параметров, покоординатной организации вычислений за счет применения операций поэлементного деления и умножения векторов (по Адамару).

Предлагается распространить идею методов стохастического и минипакетного градиентного спуска на методы нулевого порядка, использующие при поиске информацию только о величине функции. Среди методов этой группы выбран адаптивный метод случайного поиска [22], хорошо зарекомендовавший себя при решении классических задач оптимизации. При подсчете значения целевой функции предлагается выбирать случайным образом одну, две, три и т.д. реализации, образующие минипакет. За счет этого вычислительные затраты могут существенно сокращаться, однако с уменьшением числа реализаций может убывать точность решения задачи и ухудшаться сходимость. Кроме изменения способа вычисления целевой функции в методе должны учитываться ограничения параллелепипедного типа, накладываемые на множество возможных значений оцениваемых параметров. По сравнению с градиентными процедурами и методами второго порядка (Ньютона, Левенберга–Марквардта, Ньютона–Гаусса) нет необходимости приближенно вычислять градиент и аппроксимацию матрицы Гессе. Статья посвящена исследованию предложенной минипакетной модификации адаптивного метода случайного поиска в приложении к задачам идентификации параметров динамических систем, описываемых дифференциально-алгебраическими уравнениями.

2. Постановка задачи

Сформулируем задачу параметрической идентификации параметров нелинейных динамических систем по результатам измерений.

Пусть заданы:
целевая функция

$$E(\theta) = \sum_{j=1}^{T} \sum_{i=1}^{n} (\hat{x}_i(t_j) - x_i(\theta, t_j))^2 \to \min_{\theta \in \Theta}, \tag{1}$$

и ограничения

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), \theta), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2}$$

$$\theta \in \Theta = \Big\{ \theta \in \mathrm{R}^p | a_i \leqslant \theta_i \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, p \Big\}. \tag{3}$$

где $x \in \mathrm{R}^n$ – вектор состояния системы, $x_0 \in \mathrm{R}^n$ – вектор начального состояния; θ – вектор неизвестных параметров системы, $\Theta \subseteq \mathrm{R}^p$ – множество возможных значений параметров, определяемое параллелепипедными ограничениями (3); $t \in [t_0, t_T]$ – время функционирования системы, $f(t, x, \theta)$ – известная непрерывно-дифференцируемая вектор-функция. На промежутке времени $[t_0, t_T]$ известны наблюдения $\hat{x}(t)$ за вектором состояния системы в моменты времени $t = t_j \in [t_0, t_T]$, $j = 1, \ldots, T$; T – заданное число реализаций. При фиксированном векторе параметров θ можно найти решение $x(\theta, t)$ системы дифференциальных уравнений аналитически или численным методом.

Требуется найти оценку $\hat{\theta}$ вектора неизвестных параметров θ, при которой $x(\theta, t)$ наилучшим образом согласуется с наблюдениями, т.е. обеспечивается минимальное значение целевой функции $E(\theta)$.

3. Минипакетный адаптивный метод случайного поиска

3.1. Стратегия поиска

Задается объем минипакета $d (1 \leqslant d \leqslant T)$, определяющий способ вычисления целевой функции $E_d(\theta)$ (при $d = T$ справедливо $E_d(\theta) = E(\theta)$). Минипакет образуют попарно несовпадающие моменты времени $t_{q_j} \in [t_0, t_T]$ со случайными номерами. Случайный номер q_j $(j = 1, 2, \ldots, T)$ выбирается из множества возможных номеров $q_j \in \{1, \ldots, T\}$ с равной вероятностью, затем он исключается из множества, и процесс выбора продолжается, т.е. $q_1 \neq q_2 \neq \ldots$
$\ldots \neq q_d$:

$$E_d(\theta) = \sum_{j=1}^{d} \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{x}_i(t_{q_j}) - x_i(\theta, t_{q_j}) \right)^2 \to \min_{\theta \in \Theta}, \tag{4}$$

где $x_i(\theta, t_{q_j})$ – значение соответствующей координаты решения задачи Коши (2), определяемое одним из известных численных методов в случае системы нелинейных дифференциальных уравнений или аналитически (если возможно) в случае линейных систем. Выражение (4) используется вместо (1) в ходе поиска вектора наилучших оценок $\hat{\theta}_d$.

При решении задачи идентификации параметров возможны следующие варианты задания минипакета:

- фиксировать число d;
- последовательно увеличивать число d, т.е. $d = 1, 2, \ldots, T$ (этот способ применяется в описанной далее методике для проведения сравнения работоспособности метода при различных объемах минипакета);
- изменять объем пакета динамически в зависимости от достижения заданной точности оценивания, определяемой величиной критерия (1).

Если объем минипакета и суммарное число итераций применяемого алгоритма оптимизации фиксированы, то результат применения алгоритма может изменяться при каждом его новом запуске в силу случайного характера выбора моментов t_{q_j}, входящих в минипакет. Поэтому предлагается выполнить заданное число запусков метода $S_{\max}$, найти наилучшую оценку $\hat{\theta}_d$ по всем запускам, а с целью анализа процесса поиска найти оценку среднего значения критерия (4) по всем запускам и оценку среднеквадратического отклонения:

$$\overline{E_d} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{S_{\max}} E_d^s}{S_{\max}}, \quad \sigma_{E_d} = \sqrt{\frac{1}{S_{\max}-1} \sum_{s=1}^{S_{\max}} \left[E_d^s - \overline{E_d}\right]^2}, \tag{5}$$

где $\hat{\theta}_d^s$ и $E_d^s = E_d^s(\hat{\theta}_d^s)$ – вектор оценок и значение целевой функции (4), полученные в результате s-го запуска ($s = 1, \ldots, S_{\max}$). По завершении $S_{\max}$ запусков алгоритма завершается проход.

Поскольку численные значения показателей $\overline{E_d}$ и σ_{E_d} меняются при реализации независимых проходов, для проведения более детального анализа влияния объема минипакета предлагается провести повторное осреднение по заданному числу проходов $B_{\max}$ и найти оценку математического ожидания и оценку среднеквадратического отклонения оценок средних значений критерия (4):

$$\overline{\overline{E_d}} = \frac{\sum\limits_{b=1}^{B_{\max}} \overline{E_d^b}}{B_{\max}}, \quad \sigma_{\overline{E_d}} = \sqrt{\frac{1}{B_{\max}-1} \sum_{b=1}^{B_{\max}} \left[\overline{E_d^b} - \overline{\overline{E_d}}\right]^2}, \tag{6}$$

где $\overline{E_d^b}$ – значение $\overline{E_d}$ после b-го прохода ($b = 1, \ldots, B_{\max}$). В итоге можно найти наилучшую оценку $\hat{\theta}_d^*$ после $B_{\max}$ проходов, в каждом из которых реализуется $S_{\max}$ запусков алгоритма минимизации, и ее рассматривать в качестве финального результата поиска. Для анализа результирующей точности оценивания находится значение $E(\hat{\theta}_d^*)$ целевой функции (1).

Для решения задачи (4) применяется известный метод адаптивного случайного поиска [22], относящийся к методам минимизации нулевого порядка (без использования информации о производных), модифицированный проверкой, процедурами обеспечения выполнения ограничений и минипакетным способом вычисления значений целевой функции. При выполнении одного s-го запуска алгоритма выполняются следующие операции.

Задается начальная точка $\theta_d^{s,0}$. Каждая последующая точка находится по формуле

$$\theta_d^{s,k+1} = \theta_d^{s,k} + t_k \xi^k,$$

где $t_k > 0$ – величина шага; ξ^k – случайный вектор единичной длины, определяющий направление поиска; k – номер итерации. На текущей итерации при помощи генерирования случайных векторов ξ^k получаются точки, лежащие на гиперсфере радиуса t_k с центром в точке $\theta_d^{s,k}$. Полученная точка проверяется на принадлежность множеству допустимых решений, определяемому параллелепипедными ограничениями (3). Если по какой-либо i-й координате ограничения не выполняются, то возможны несколько последовательных вариантов: генерировать решение заново, взять в качестве координаты положение ближайшей границы отрезка $[a_i, b_i]$, генерировать случайную точку согласно равномерному распределению на отрезке $[a_i, b_i]$. Значение функции находится по формуле (4).

Если значение функции в полученной точке $\theta_d^{s,k+1}$ не меньше, чем в центре, шаг считается неудачным. Если число неудачных шагов из текущей точки достигает некоторого числа M, дальнейший поиск продолжается из той же точки, но с меньшим шагом до тех пор, пока он не станет меньше заранее заданной величины R. Если же значение функции в полученной точке меньше, чем в центре, шаг считается удачным и в найденном направлении делается увеличенный шаг, играющий роль ускоряющего шага (как при поиске по образцу в известном методе конфигураций [22]). Если при этом значение функции снова меньше, чем в центре, направление считается удачным, и дальнейший поиск продолжается из этой точки. Если же значение функции стало не меньше, чем в центре, направление считается неудачным, и поиск продолжается из старого центра.

Процедура завершается либо при достижении заданного максимального числа итераций N, либо в случае, если радиус окрестности текущего решения станет меньше величины R. В результате запуска находятся наилучшее решение $\hat{\theta}_d^s$ и соответствующее значение $E_d^s = E_d^s(\hat{\theta}_d^s)$ целевой функции (4).

3.2. Методика решения задачи

Обозначим: E_d^s – минимальное значение функции после s-го запуска; $\hat{\theta}_d^s$ – наилучший вектор параметров после запуска.

Шаг 0. Задать:

$d = 1$ – начальное число реализаций (в общем случае можно начать с любого значения $1 \leqslant d \leqslant T$);

$S_{\max}$ – максимальное число запусков;

$B_{\max}$ – максимальное число проходов;

$\alpha \geqslant 1$ – коэффициент расширения;

$0 < \beta < 1$ – коэффициент сжатия;

M – максимальное число неудачно выполненных испытаний на текущей итерации;

$t_0 = 1$ – начальную величину шага (можно задать любую величину $t_0 > R$);

R – минимальную величину шага;

N – максимальное число итераций в процедуре запуска.

Шаг 1. Положить:

$b = 1$ (счетчик числа проходов);

$P_d = 0$ (начальная величина суммы средних значений целевой функции).

Шаг 2. Положить:

$s = 1$ (счетчик числа запусков);

$E_d^1 = 10^8 \div 10^{10}$ (начальное значение критерия);

$S_d = 0$ (начальная величина суммы значений целевой функции).

Шаг 3. Задать начальную точку $\theta_d^{s,0}$, удовлетворяющую параллелепипедным ограничениям (3). Положить $k = 0,\ j = 1$.

Шаг 4. Получить случайный вектор $\xi^j = \left({\xi_1}^j, \ldots, {\xi_n}^j\right)^{\mathrm{T}}$, где ${\xi_i}^j$ – случайная величина, равномерно распределенная на промежутке $[-1, 1]$.

Шаг 5. Вычислить $y^j = \theta_d^{s,k} + t_k \dfrac{\xi^j}{\| \xi^j \|}$.

Проверить принадлежность решения y^j множеству допустимых решений Θ. При негативном результате возможны следующие варианты действий:

а) выбрать в качестве нового положения ближайшую граничную точку множества допустимых решений;

б) генерировать новое положение заново, так как в расчетных формулах используются случайные величины и есть вероятность, что при других их реализациях новое решение будет принадлежать множеству допустимых решений;

в) если вне множества Θ оказывается i-я компонента вектора y^j, т.е. y_i^j, в качестве нового положения выбрать точку на отрезке, соединяющем y_i^j и a_i, если $y_i^j > b_i$ (y_i^j и b_i, если $y_i^j < a_i$):

$$y_i^{j,New} = a_i + \gamma \left(y_i^j - a_i\right), \text{ если } y_i^j > b_i;$$

$$y_i^{j,New} = b_i - \gamma \left(b_i - y_i^j\right), \text{ если } y_i^j < a_i;$$

параметр γ можно задать, например, случайным образом на основе закона равномерного распределения, $\gamma \sim R[0, 1]$;

г) комбинировать описанные выше способы, например несколько раз пробовать сгенерировать положение заново и если после определенного количества попыток новое решение все равно оказывается вне множества Θ, положить $y_i^j = a_i$, если $y_i^j < a_i$ ($y_i^j = b_i$, если $y_i^j > b_i$).

Ш а г 6. Генерировать минипакет $(t_{q_1}, \ldots, t_{q_d})$ объема d, где $t_{q_1}, \ldots, t_{q_d}$ – попарно несовпадающие моменты времени из множества $(t_1, \ldots, t_T)$. Подсчитать величину $E_d(y^j)$ по формуле (4).

Проверить выполнение условий:

а) если $E_d(y^j) < E_d(\theta_d^{s,k})$, шаг удачный. Положить $z^j = \theta_d^{s,k} + \alpha\left(y^j - \theta_d^{s,k}\right)$.

Определить, является ли текущее направление $y^j - \theta_d^{s,k}$ удачным:

- если $E_d(z^j) < E_d(\theta_d^{s,k})$, направление поиска удачное.
  Положить $\theta_d^{s,k+1} = z^j, t_{k+1} = \alpha t_k, k = k + 1$ и проверить условие окончания. Если $k < N$, положить $j = 1$ и перейти к шагу 4. Если $k = N$, поиск завершить: $\hat{\theta}_d^s = \theta_d^{s,k}$, перейти к шагу 8;
- если $E_d(z^j) \geqslant E_d(\theta_d^{s,k})$, направление поиска неудачное, перейти к шагу 7;

б) если $E_d(y^j) \geqslant E_d(\theta_d^{s,k})$, шаг неудачный и перейти к шагу 7.

Ш а г 7. Оценить число неудачных шагов из текущей точки:

а) если $j < M$, следует положить $j = j + 1$ и перейти к шагу 4;

б) если $j = M$, проверить условие окончания:

- если $t_k \leqslant R$, процесс закончить: $\hat{\theta}_d^s = \theta_d^{s,k}$, $E_d^s = E_d(\theta_d^{s,k})$, перейти к шагу 8;
- если $t_k > R$, положить $t_k = \beta t_k, j = 1$ и перейти к шагу 4.

Ш а г 8. Проверить улучшение значения целевой функции в результате s-го запуска:

- если $E_d(\theta_d^{s,k}) < E_d^s$, следует положить $E_d^s = E_d(\theta_d^{s,k})$, $\hat{\theta}_d^s = \theta_d^{s,k}$ и перейти к шагу 9;
- если $E_d(\theta_d^{s,k}) \geqslant E_d^s$, перейти к шагу 9;

Ш а г 9. Вычислить $S_d = S_d + E_d^s$ и проверить выполнение условий окончания числа запусков:

а) если $s < S_{\max}$, следует положить $s = s + 1$ и перейти к шагу 3;

б) если $s = S_{\max}$, то положить $\hat{\theta}_d = \hat{\theta}_d^s$ – наилучшее решение в течение b-го прохода при заданном d; вычислить

$$\overline{E_d} = \frac{S_d^s}{S_{\max}}, \quad \sigma_{E_d} = \sqrt{\frac{1}{S_{\max} - 1} \sum_{s=1}^{S_{\max}} \left[E_d^s - \overline{E_d}\right]^2}$$

и перейти к шагу 10.

Ш а г 10. Положить $P_d = P_d + \overline{E_d}$, $\overline{E_d^b} = \overline{E_d}$ и проверить условие завершения заданного числа проходов:

а) если $b < B_{\max}$, следует положить $b = b + 1$ и перейти к шагу 2;

б) если $b = B_{\max}$, вычислить:

$$\overline{\overline{E_d}} = \frac{P_d}{B_{\max}}, \quad \sigma_{\overline{E_d}} = \sqrt{\frac{1}{B_{\max} - 1} \sum_{b=1}^{B_{\max}} \left[\overline{E_d^b} - \overline{\overline{E_d}}\right]^2}.$$

Шаг 11. Проверить условие завершения исследований влияния объема минипакета:

- если $d < T$, положить $d = d + 1$, $s = 1$ и перейти к шагу 1;
- если $d = T$, перейти к шагу 12.

Шаг 12. В результате найти наилучшую оценку $\hat{\theta}^*_d$ после $B_{\max}$ проходов и показатели $\overline{\overline{E_d}}$, $\sigma_{\overline{E_d}}$ при каждом значении объема минипакета d. Для анализа результирующей точности оценивания найти значение $E(\hat{\theta}^*_d)$ критерия точности оценивания (1):

$$E(\hat{\theta}^*_d) = \sum_{j=1}^{T} \sum_{i=1}^{n} \Big(\hat{x}_i(t_j) - x_i(\hat{\theta}^*_d, t_j) \Big)^2 .$$

Шаги 10 и 11 выполняются при необходимости.

Рекомендации по выбору параметров метода. Величина ξ_i^j, равномерно распределенная на отрезке $[-1, 1]$, генерируется обычно с помощью датчиков псевдослучайных чисел. Вырабатывается случайная величина η_i^j, равномерно распределенная на $[0, 1]$, а затем используется линейное преобразование: $\xi_i^j = 2\eta_i^j - 1$. Параметры алгоритма: коэффициент расширения $\alpha \geqslant 1$: $\alpha = 1{,}618$; коэффициент сжатия $0 < \beta < 1$: $\beta = 0{,}618$; максимальное число неудачно выполненных испытаний на текущей итерации $M = 3n$; начальный шаг $t_0 > R$ можно задавать произвольно.

4. Модельные примеры

Пример 1. Математическая модель описывает необратимую реакцию первого порядка, в которой измеряются концентрации x_1, x_2 компонент веществ, а θ_1, θ_2 – коэффициенты скоростей реакций соответственно [7, 8]:

$$\left\{ \begin{aligned} &\dot{x}_1(t) = -\theta_1 x_1(t), && x_1(0) = 1, \\ &\dot{x}_2(t) = \theta_1 x_1(t) - \theta_2 x_2(t), && x_2(0) = 0. \end{aligned} \right. \tag{7}$$

Целевая функция имеет вид:

$$E(\theta) = \sum_{j=1}^{10} \sum_{i=1}^{2} [\hat{x}_i(t_j) - x_i(\theta, t_j)]^2 \to \min_{\theta \,\in\, \Theta}, \tag{8}$$

где $T = 10$, $n = 2$. Ограничения на параметры: $0 \leqslant \theta_1 \leqslant 10$, $0 \leqslant \theta_2 \leqslant 10$.

В табл. 1 представлены результаты наблюдений за реакцией.

Таблица 1. Наблюдения

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_j	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	0,800	0,900	1
$\hat{x}_1$	0,606	0,368	0,223	0,135	0,082	0,050	0,030	0,018	0,011	0,007
$\hat{x}_2$	0,373	0,564	0,647	0,669	0,656	0,624	0,583	0,539	0,494	0,451

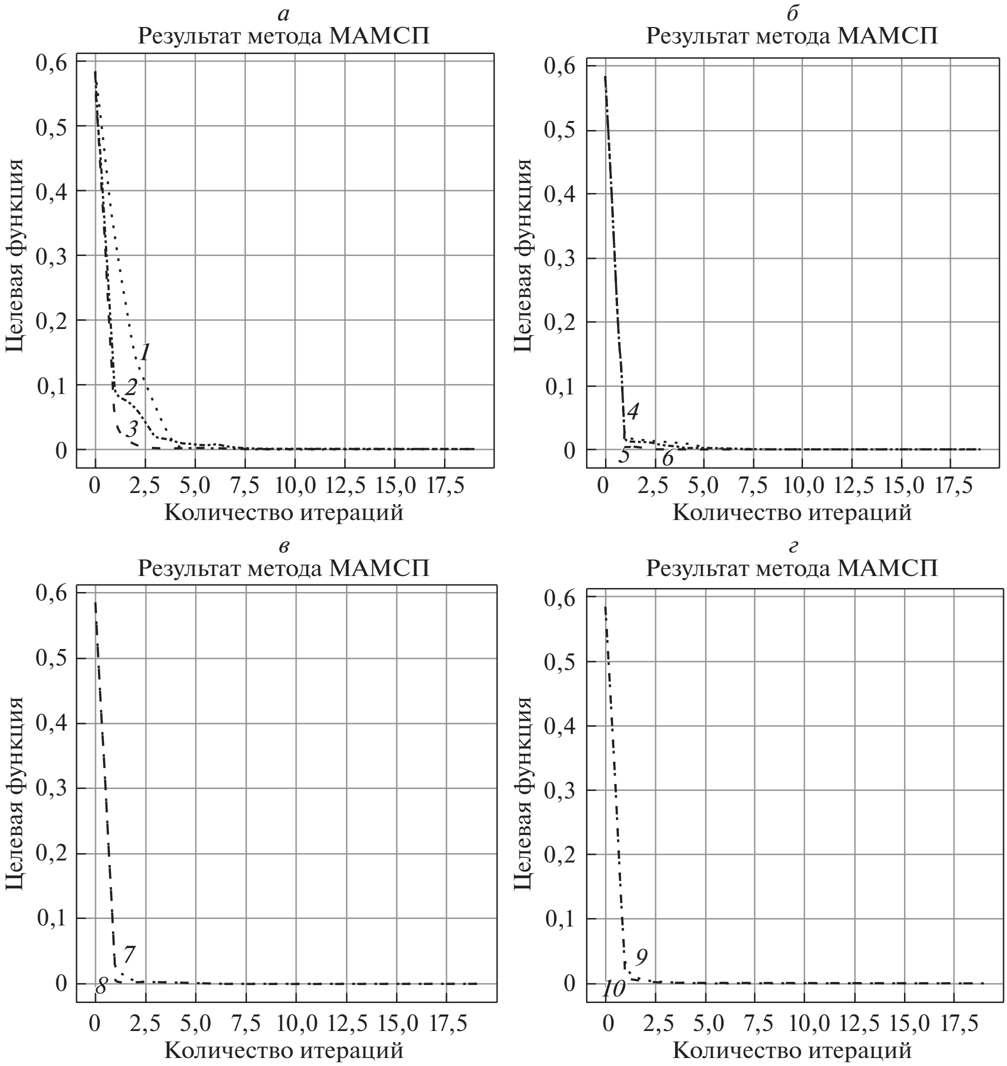


Рис. 1. Результат работы минипакетного адаптивного метода случайного поиска в зависимости от объема минипакета: *1* – $[d = 1]$, *2* – $[d = 2]$, *3* – $[d = 3]$, *4* – $[d = 4]$, *5* – $[d = 5]$, *6* – $[d = 6]$, *7* – $[d = 7]$, *8* – $[d = 8]$, *9* – $[d = 9]$, *10* – $[d = 10]$.

Наилучшее известное решение [7, 8]: значение целевой функции (1) $1{,}18584 \cdot 10^{-6}$; вектор параметров: $\theta = (5{,}0035; 1{,}0000)^{\mathrm{T}}$. Сравнимые результаты, полученные с помощью метаэвристических алгоритмов без использования минипакетов: методом фейерверков, методом большого взрыва – большого сжатия и методом гранат, приведены в [17].

Результаты решения минипакетным адаптивным методом случайного поиска представлены на рис. 1 и в табл. 2. На рис. 1 приведены решения в зависимости от объема минипакета. В табл. 2 показаны лучшие результаты в зависимости от объема минипакета. Во всех тестах $N = 150$ – максимальное число итераций, $M = 10$ – максимальное число неудачно выполненных ис-

Таблица 2. Результат решения минипакетным адаптивным методом случайного поиска (МАМСП)

d	θ_d^{*1}	θ_d^{*2}	$E(\hat{\theta}_d^*)$	$\overline{\overline{E_d}}$	$\sigma_{\overline{E_d}}$
1	5,00486	1,00006	$1{,}24600 \cdot 10^{-6}$	0,02034	0,25643
2	5,00269	0,99998	$1{,}20612 \cdot 10^{-6}$	0,00513	0,15234
3	5,00343	0,99999	$1{,}18608 \cdot 10^{-6}$	0,00149	0,09354
4	5,00323	0,99997	$1{,}18844 \cdot 10^{-6}$	0,00034	0,04729
5	5,00365	1,00001	$1{,}18673 \cdot 10^{-6}$	0,00025	0,03888
6	5,00342	1,00003	$1{,}18663 \cdot 10^{-6}$	$1{,}30989 \cdot 10^{-6}$	0,00115
7	5,00350	1,00000	$1{,}18595 \cdot 10^{-6}$	$1{,}25257 \cdot 10^{-6}$	0,00112
8	5,00346	1,00002	$1{,}18623 \cdot 10^{-6}$	$1{,}22674 \cdot 10^{-6}$	0,00111
9	5,00341	1,00001	$1{,}18624 \cdot 10^{-6}$	$1{,}20433 \cdot 10^{-6}$	0,00110
10	5,00349	1,00000	$1{,}18595 \cdot 10^{-6}$	$1{,}18595 \cdot 10^{-6}$	0,00109

Таблица 3. Результаты сравнения МАМСП ($E(\hat{\theta}_{10}^*) = 1,18595 \cdot 10^{-6}$) с градиентными методами по наилучшей достигнутой величине критерия (1) (наилучшее известное решение $E(\hat{\theta}) = 1,18584 \cdot 10^{-6}$)

SGD	ClassMom	NAG	AdaGrad
$1{,}37131 \cdot 10^{-6}$	$1{,}05923 \cdot 10^{-6}$	$9{,}32474 \cdot 10^{-7}$	$1{,}82699 \cdot 10^{-6}$

RMSProp	ADAM	AdaMax	Nadam
$7{,}13530 \cdot 10^{-5}$	$9{,}83579 \cdot 10^{-7}$	$1{,}18653 \cdot 10^{-6}$	$1{,}33935 \cdot 10^{-6}$

пытаний на текущей итерации, $R = 8 \cdot 10^{-10}$ – минимальная величина шага, $S_{\max} = 100$ – максимальное число запусков, $B_{\max} = 100$ – максимальное число проходов, $\alpha = 1{,}618$ – коэффициент расширения, $\beta = 0{,}618$ – коэффициент сжатия, $\overline{\overline{E_d}}$ и $\sigma_{\overline{E_d}}$ – оценка математического ожидания и оценка среднеквадратического отклонения оценок средних значений критерия (4), $\theta_d^{s,0} = (2,3)^{\mathrm{T}}$ – начальная точка.

В табл. 2 представлены результаты решения примера 1 минипакетным адаптивным методом случайного поиска при различных объемах минипакета $1 \leqslant d \leqslant 10$ (суммарное время работы алгоритма составило 57 с (процессор intel CORE i5 2.10 GHz)).

Анализ табл. 2 позволяет сделать вывод о том, что сходимость к известному результату достигается при всех объемах минипакета, точность оценок возрастает с увеличением d, при $d = 10$ ответ практически совпадает с известным. Следует отметить, что зависимость величины показателя $\overline{\overline{E_d}}$ от объема минипакета, как правило, является монотонной, а показателя $\overline{E_d}$ может быть не монотонной в силу случайности генерации минипакета.

Так как система дифференциальных уравнений (7) линейная, то удается найти ее аналитическое решение, что позволяет находить производные целевой функции по параметру θ и пользоваться градиентными методами оптимизации процедур машинного обучения. В табл. 3 представлены результаты сравнения решений, полученных предложенным методом и известными градиентными методами машинного обучения.

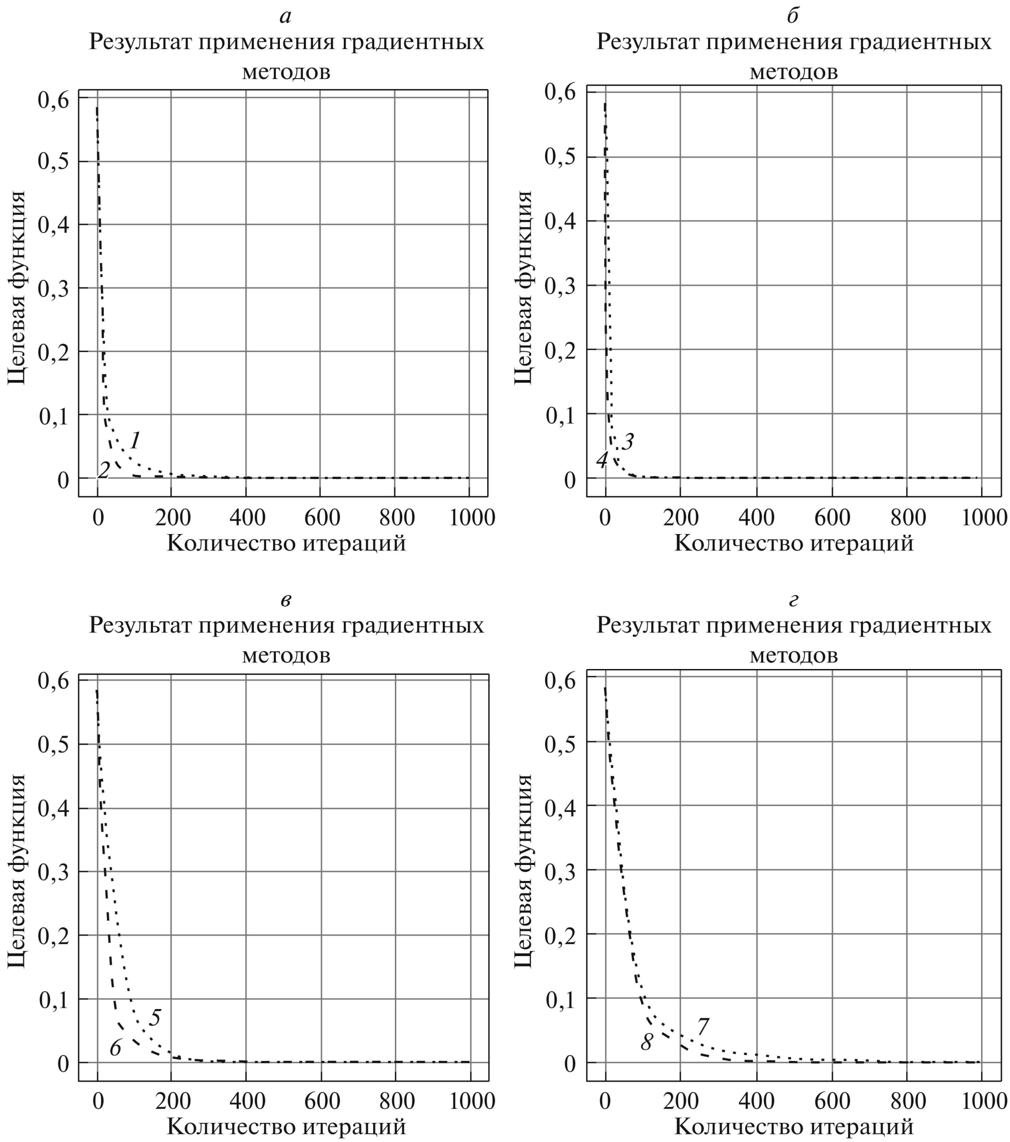


Рис. 2. Результаты применения градиентных методов оптимизации: *1* – SGD, *2* – ClasMom, *3* – NAG, *4* – AdaGrad, *5* – RMSProp, *6* – ADAM, *7* – AdaMax, *8* – Nadam.

На рис. 2 приведены результаты решения примера 1 (изменение целевой функции с ростом числа итераций) при выбранных для обеспечения сходимости значениях шага градиентных методов машинного обучения. Рисунок 2 соответствует начальной точке $\theta_d^{s,0} = (2, 3)^{\mathrm{T}}$, значениям шага SGD – 0,2; ClassMom – 0,2; NAG – 0,2; AdaGrad – 0,3; RMSProp – 0,02; ADAM – 0,02; AdaMax – 0,02; Nadam – 0,02 (краткое описание методов приведено в Приложении).

Пример 2. Модель описывает каталитический крекинг для превращения газойля в бензин. x_1, x_2 – концентрации компонент, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ – коэффициенты

Таблица 4. Наблюдения

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_j	0,0250	0,0500	0,0750	0,1000	0,1250	0,1500	0,1750	0,2000	0,2250	0,2500
$\hat{x}_1$	0,7307	0,5982	0,4678	0,4276	0,3436	0,3126	0,2808	0,2692	0,2210	0,2122
$\hat{x}_2$	0,1954	0,2808	0,3175	0,3047	0,2991	0,2619	0,2391	0,2210	0,1898	0,1801

j	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
t_j	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500	0,5000	0,5500	0,6500	0,7500	0,8500	0,9500
$\hat{x}_1$	0,1903	0,1735	0,1615	0,1240	0,1190	0,1109	0,0890	0,0820	0,0745	0,0639
$\hat{x}_2$	0,1503	0,1030	0,0964	0,0581	0,0417	0,0413	0,0367	0,0219	0,0124	0,0089

Таблица 5. Результат решения минипакетным адаптивным методом случайного поиска

d	θ_d^{*1}	θ_d^{*2}	θ_d^{*3}	$E(\hat{\theta}_d^*)$	$\overline{E_d}$	σ_{E_d}	L
1	12,71954	8,62194	1,94031	$3{,}87373 \cdot 10^{-3}$	0,09323	0,24901	4
2	12,19646	8,30268	2,10194	$3{,}15674 \cdot 10^{-3}$	0,02092	0,07256	19
3	12,31779	8,13561	2,04472	$2{,}77824 \cdot 10^{-3}$	0,01287	0,04473	21
4	12,41866	8,13885	2,03050	$2{,}78531 \cdot 10^{-3}$	0,00421	0,00457	52
5	12,13970	7,97463	2,15734	$2{,}81254 \cdot 10^{-3}$	0,00391	0,00408	56
6	12,26164	8,07087	2,17864	$2{,}76099 \cdot 10^{-3}$	0,00352	0,00361	72
7	12,21603	8,01094	2,10274	$2{,}79811 \cdot 10^{-3}$	0,00327	0,00330	84
8	12,26468	8,03486	2,25584	$2{,}78409 \cdot 10^{-3}$	0,00312	0,00314	93
9	12,27566	8,05249	2,12116	$2{,}75432 \cdot 10^{-3}$	0,00309	0,00312	93
10	12,20370	8,03736	2,15236	$2{,}76500 \cdot 10^{-3}$	0,00305	0,00311	96
11	12,23648	8,01906	2,19338	$2{,}74747 \cdot 10^{-3}$	0,00300	0,00310	98
12	12,17853	7,97887	2,21586	$2{,}75452 \cdot 10^{-3}$	0,00294	0,00300	98
13	12,21782	8,01541	2,20164	$2{,}74887 \cdot 10^{-3}$	0,00291	0,00295	100
14	12,22653	8,01777	2,19107	$2{,}74819 \cdot 10^{-3}$	0,00287	0,00292	100
15	12,18114	7,97683	2,21814	$2{,}75350 \cdot 10^{-3}$	0,00283	0,00287	100
16	12,23149	7,99277	2,21086	$2{,}74755 \cdot 10^{-3}$	0,00282	0,00282	100
17	12,22948	7,98994	2,21324	$2{,}74755 \cdot 10^{-3}$	0,00279	0,00279	100
18	12,22944	8,00584	2,19629	$2{,}74727 \cdot 10^{-3}$	0,00277	0,00277	100
19	12,23437	8,00666	2,19891	$2{,}74701 \cdot 10^{-3}$	0,00276	0,00276	100
20	12,23645	8,00809	2,19849	$2{,}74699 \cdot 10^{-3}$	0,00274	0,00274	100

скоростей реакций [7, 8]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -(\theta_1 + \theta_3)x_1^2(t), & x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2(t) = \theta_1 x_1^2(t) - \theta_2 x_2(t), & x_2(0) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Целевая функция имеет вид:

$$E(\theta) = \sum_{j=1}^{20} \sum_{i=1}^{2} [\hat{x}_i(t_j) - x_i(\theta, t_j)]^2 \to \min_{\theta \in \Theta}, \tag{10}$$

где $T = 20$, $n = 2$. Ограничения на параметры: $0 \leqslant \theta_1 \leqslant 20$, $0 \leqslant \theta_2 \leqslant 20$, $0 \leqslant \theta_3 \leqslant 20$.

В табл. 4 представлены результаты наблюдений за реакцией.

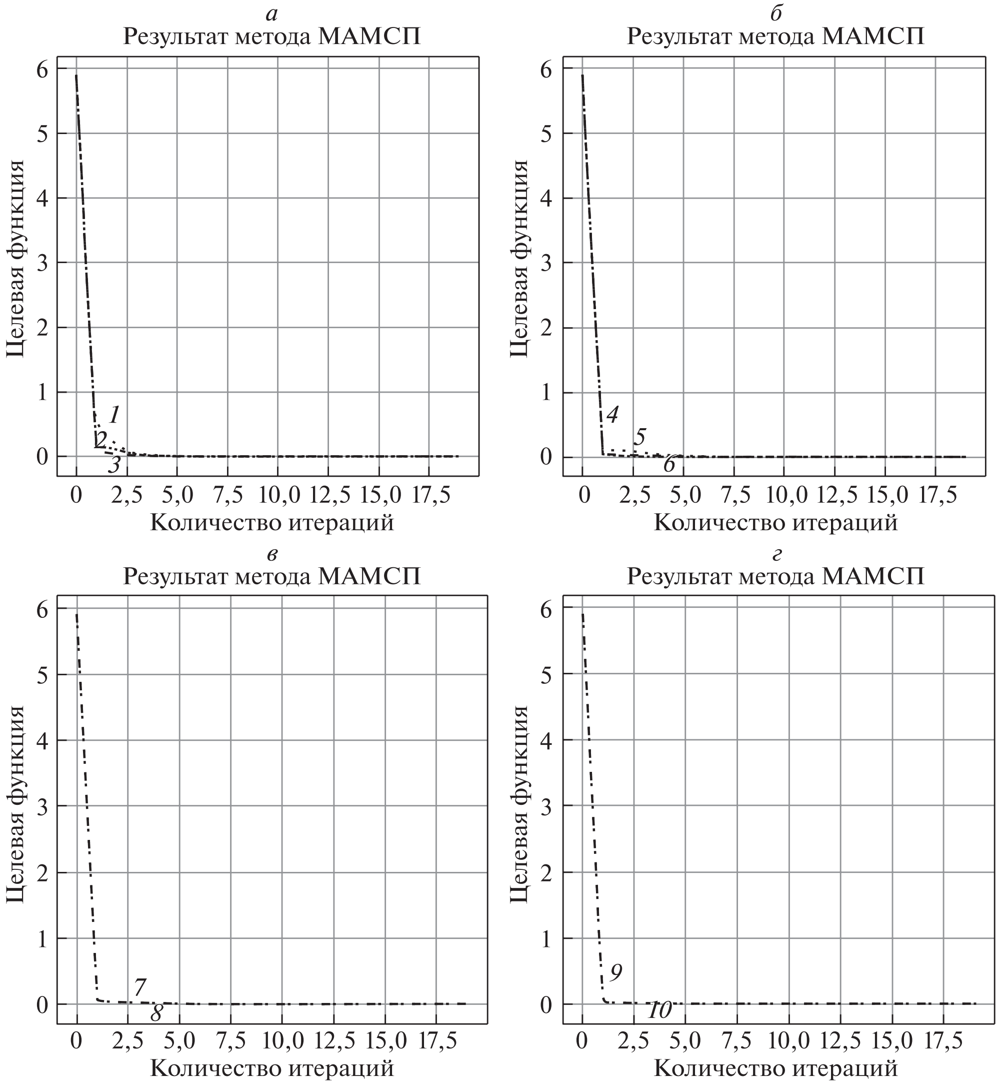


Рис. 3. Результат работы минипакетного адаптивного метода случайного поиска в зависимости от объема минипакета: *1* – $[d = 1]$, *2* – $[d = 2]$, *3* – $[d = 3]$, *4* – $[d = 4]$, *5* – $[d = 5]$, *6* – $[d = 6]$, *7* – $[d = 7]$, *8* – $[d = 8]$, *9* – $[d = 9]$, *10* – $[d = 10]$.

Наилучшее известное решение [7, 8]: значение целевой функции: $2{,}65567\times \times 10^{-3}$, вектор параметров: $\theta = (12{,}214; 7{,}9798; 2{,}2216)^{\mathrm{T}}$.

Сравнимые результаты, полученные с помощью метаэвристических алгоритмов без использования минипакетов: методом фейерверков, методом большого взрыва – большого сжатия и методом гранат, приведены в [17].

Результат решения минипакетным адаптивным методом случайного поиска представлены в табл. 5 и на рис. 3. На рис. 3 приведены решения в зависимости от объема минипакета. В табл. 5 показаны лучшие результаты в зависимости от объема минипакета. Во всех тестах $N = 150$ – максимальное

Таблица 6. Результаты сравнения МАМСП ($E(\hat{\theta}^*_{20}) = 2{,}74699 \cdot 10^{-3}$) с градиентными методами по наилучшей достигнутой величине критерия (1) (наилучшее известное решение $E(\hat{\theta}) = 2{,}65567 \cdot 10^{-3}$)

SGD	ClassMom	NAG	AdaGrad
$8{,}60908 \cdot 10^{-3}$	$3{,}06110 \cdot 10^{-3}$	$3{,}51929 \cdot 10^{-3}$	$7{,}01255 \cdot 10^{-3}$
RMSProp	ADAM	AdaMax	Nadam
$4{,}11410 \cdot 10^{-3}$	$2{,}95625 \cdot 10^{-3}$	$5{,}81047 \cdot 10^{-3}$	$3{,}01257 \cdot 10^{-3}$

число итераций, $M = 20$ – максимальное число неудачно выполненных испытаний на текущей итерации, $R = 8 \cdot 10^{-10}$ – минимальная величина шага, $S_{\max} = 100$ – максимальное число запусков, $\alpha = 1{,}618$ – коэффициент расширения, $\beta = 0{,}618$ – коэффициент сжатия, $\overline{E_d}$ – оценка математического ожидания, σ_{E_d} – оценка среднеквадратического отклонения, L – количество попаданий (значение $E(\theta)$ попало в ε-окрестность известного значения целевой функции, где $\varepsilon = 0{,}001$), $\theta_d^{s,0} = (1, 20, 0)^{\mathrm{T}}$ – начальная точка.

В табл. 5 представлены результаты решения примера 2 минипакетным адаптивным методом случайного поиска при различных объемах минипакета $1 \leqslant d \leqslant 20$ (суммарное время работы алгоритма составило 18 мин (процессор intel CORE i5 2.10 GHz)).

На рис. 3 представлены результаты решения задачи с применением минипакетного адаптивного метода случайного поиска при объеме минипакета $1 \leqslant d \leqslant 10$. При $10 \leqslant d \leqslant 20$ характер изменения такой же, как на рис. 3,*г*. При этом с увеличением объема минипакета характеристика отклонения от наилучшего известного решения уменьшается.

Так как система дифференциальных уравнений (9) нелинейная, то для нахождения градиента функции будем использовать конечно-разностные аппроксимации, а решение системы дифференциальных уравнений находим численным методом Рунге–Кутты 4-го порядка (с шагом 0,005). В данном случае градиент целевой функции имеет вид:

$$\nabla_\theta E(\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial E(\theta)}{\partial \theta_1} \\[2mm] \dfrac{\partial E(\theta)}{\partial \theta_2} \\[2mm] \dfrac{\partial E(\theta)}{\partial \theta_3} \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \dfrac{\partial E(\theta)}{\partial \theta_1} \cong \dfrac{E(\theta_1 + \Delta; \theta_2; \theta_3) - E(\theta_1; \theta_2; \theta_3)}{\Delta}, \\[2mm] \dfrac{\partial E(\theta)}{\partial \theta_2} \cong \dfrac{E(\theta_1; \theta_2 + \Delta; \theta_3) - E(\theta_1; \theta_2; \theta_3)}{\Delta}, \\[2mm] \dfrac{\partial E(\theta)}{\partial \theta_3} \cong \dfrac{E(\theta_1; \theta_2; \theta_3 + \Delta) - E(\theta_1; \theta_2; \theta_3)}{\Delta}, \end{array}$$

где $\Delta = 0{,}01$.

В табл. 6 представлены результаты сравнения решений, полученных предложенным методом и известными градиентными методами машинного обучения.

На рис. 4 приведены результаты решения примера (изменение целевой функции с ростом числа итераций) при разных значениях шага. Рисунок 3 соответствует начальной точке $\theta_d^{s,0} = (1, 20, 0)^{\mathrm{T}}$ и значениям шага SGD – 1;

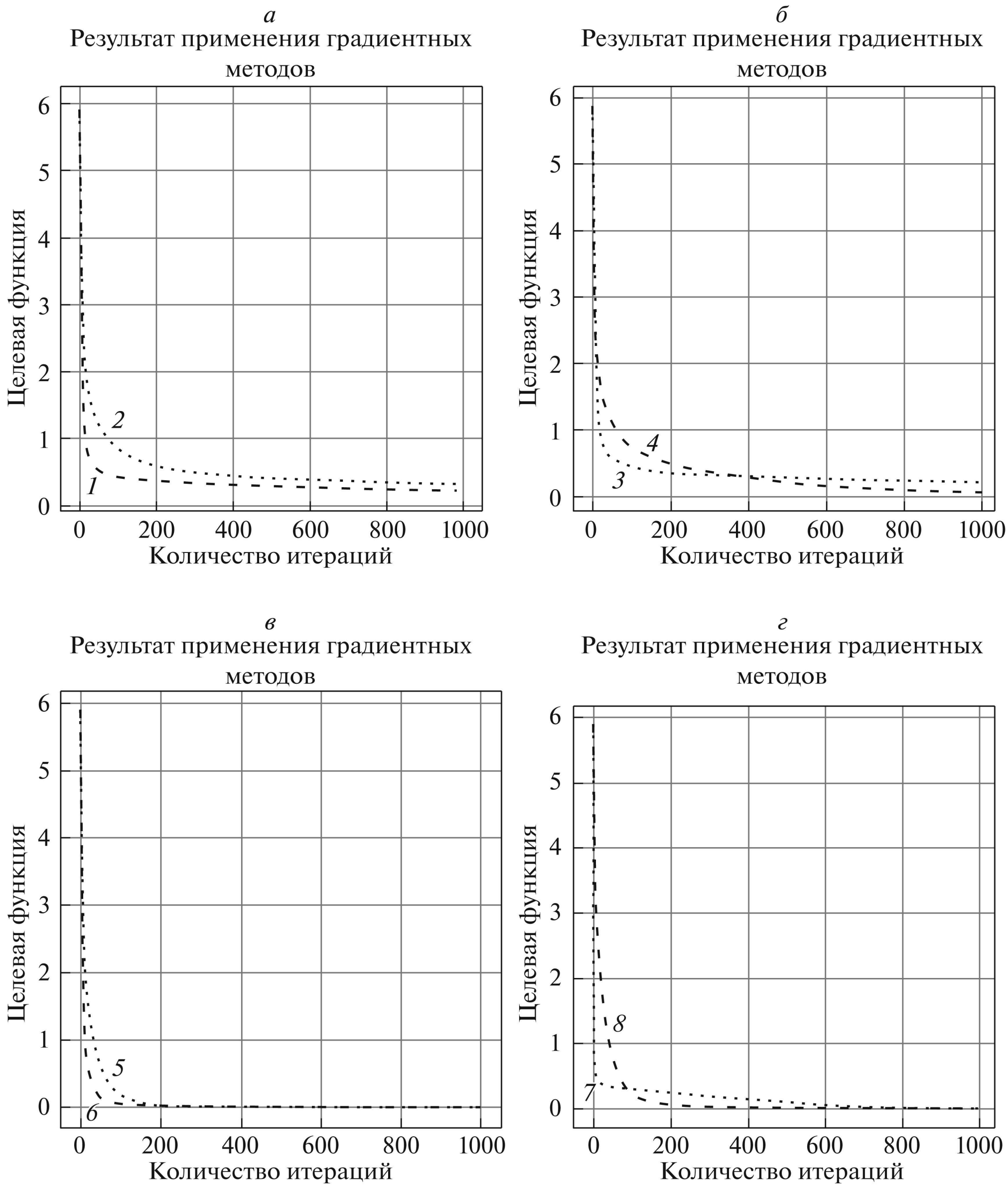


Рис. 4. Результаты применения градиентных методов оптимизации: *1* – SGD, *2* – ClasMom, *3* – NAG, *4* – AdaGrad, *5* – RMSProp, *6* – ADAM, *7* – AdaMax, *8* – Nadam.

ClassMom – 0,3; NAG – 0,3; AdaGrad – 0,3; RMSProp – 0,3; ADAM – 0,3; AdaMax – 1; Nadam – 0,1.

Пример 3. Математическая модель имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \theta_1 x_1(t)(1 - x_2(t)), & x_1(0) = 1, \\ \dot{x}_2(t) = \theta_2 x_2(t)(x_1(t) - 1), & x_2(0) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Таблица 7. Наблюдения

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_j	1,0000	2,0000	3,0000	4,0000	5,0000	6,0000	7,0000	8,0000	9,0000	10,0000
$\hat{x}_1$	0,7990	0,8731	1,2487	1,0362	0,7483	1,0024	1,2816	0,8944	0,7852	1,1527
$\hat{x}_2$	1,0758	0,8711	0,9393	1,1468	1,0027	0,8577	1,0274	1,1369	0,9325	0,9074

Таблица 8. Результат решения минипакетным адаптивным методом случайного поиска

d	θ_d^{*1}	θ_d^{*2}	$E(\hat{\theta}_d^*)$	$E(\hat{\theta})$	$\overline{E_d}$	σ_{E_d}
1	3,15622	0,95191	0,001501	$1{,}24924 \cdot 10^{-3}$	0,64113	0,78286
2	3,27374	0,91270	0,001268	$1{,}24924 \cdot 10^{-3}$	0,74766	0,85022
3	3,24234	0,92115	0,001250	$1{,}24924 \cdot 10^{-3}$	0,67812	0,74912
4	3,22817	0,92447	0,001276	$1{,}24924 \cdot 10^{-3}$	0,64793	0,71009
5	3,25294	0,91882	0,001255	$1{,}24924 \cdot 10^{-3}$	0,58970	0,68599
6	3,26656	0,91384	0,001256	$1{,}24924 \cdot 10^{-3}$	0,66807	0,71758
7	3,26416	0,91397	0,001264	$1{,}24924 \cdot 10^{-3}$	0,61353	0,67164
8	3,24321	0,92107	0,001249	$1{,}24924 \cdot 10^{-3}$	0,45911	0,54942
9	3,24711	0,91979	0,001250	$1{,}24924 \cdot 10^{-3}$	0,36868	0,42101
10	3,24444	0,92080	0,001249	$1{,}24924 \cdot 10^{-3}$	0,30586	0,34670

Модель описывает взаимодействие двух биологических видов: “хищник”–“жертва”. x_1 – число особей “жертва”, x_2 – число особей “хищник”. θ_1 – коэффициент роста и истребления популяции вида “жертва”, θ_2 – коэффициент роста и смертности популяции вида “хищник”. Различные методы решения задач анализа и фильтрации в вольтерровских системах изложены в [23, 24].

Целевая функция имеет вид:

$$E(\theta) = \sum_{j=1}^{10} \sum_{i=1}^{2} [\hat{x}_i(t_j) - x_i(\theta, t_j)]^2 \to \min_{\theta \in \Theta}, \tag{12}$$

где $T = 10$, $n = 2$. Ограничения на параметры: $0 \leqslant \theta_1 \leqslant 10$, $0 \leqslant \theta_2 \leqslant 10$.

В табл. 7 представлены результаты наблюдений за реакцией.

Наилучшее известное решение [7, 8]: значение целевой функции: $1{,}24924\times$ $\times 10^{-3}$, вектор параметров: $\theta = (3{,}2434; 0{,}9209)^{\mathrm{T}}$.

Сравнимые результаты, полученные с помощью метаэвристических алгоритмов без использования минипакетов: методом фейерверков, методом большого взрыва – большого сжатия и методом гранат, приведены в [17].

Результат решения минипакетным адаптивным методом случайного поиска представлены в табл. 8 и на рис. 5. В табл. 8 показаны лучшие результаты в зависимости от объема минипакета. На рис. 5 приведены решения в зависимости от объема минипакета. Во всех тестах $N = 150$ – максимальное число итераций, $M = 15$ – максимальное число неудачно выполненных испытаний на текущей итерации, $R = 8 \cdot 10^{-10}$ – минимальная величина шага, $S_{\max} = 100$ – максимальное число запусков, $\alpha = 1{,}618$ – коэффициент расширения, $\beta = 0{,}618$ – коэффициент сжатия, $\overline{E_d}$ – оценка математического

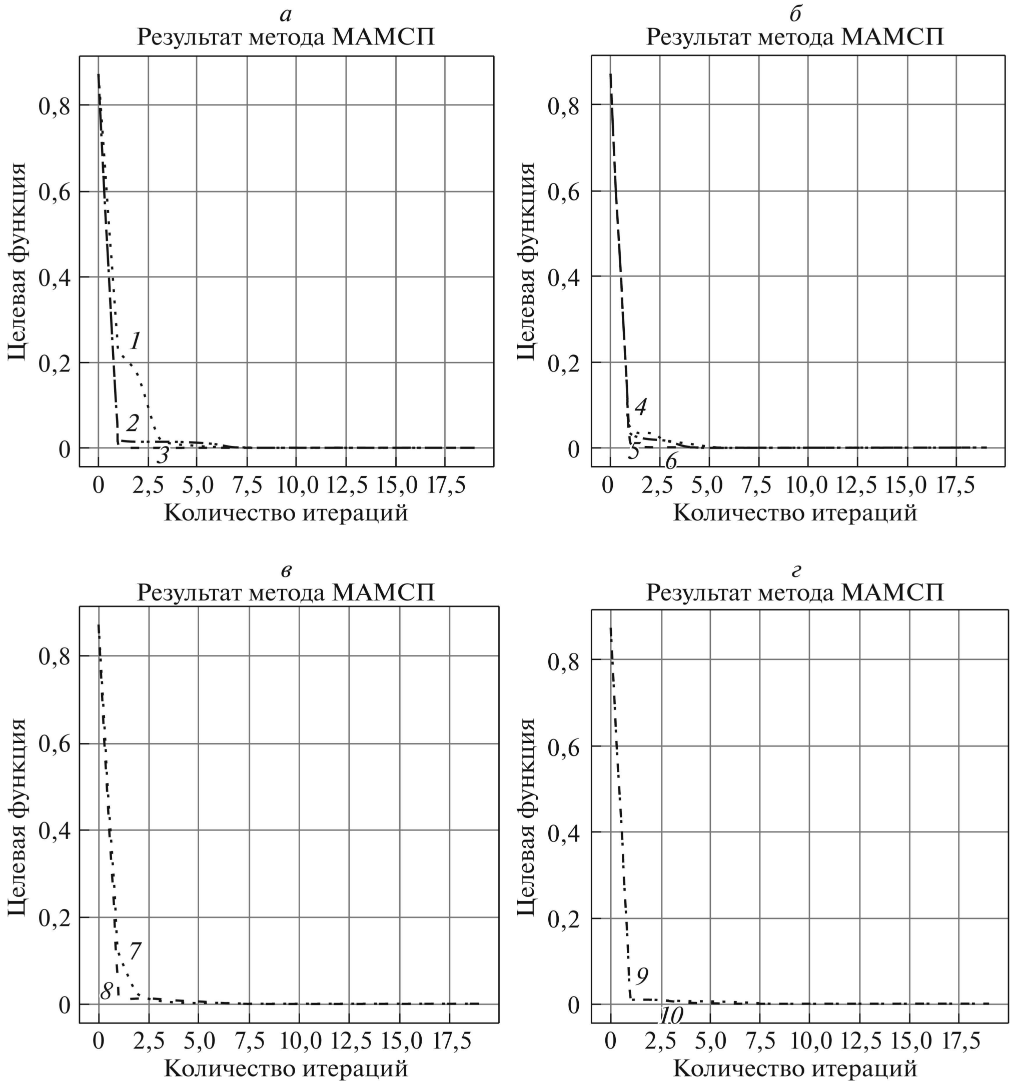


Рис. 5. Результат работы минипакетного адаптивного метода случайного поиска в зависимости от объема минипакета: *1* – $[d = 1]$, *2* – $[d = 2]$, *3* – $[d = 3]$, *4* – $[d = 4]$, *5* – $[d = 5]$, *6* – $[d = 6]$, *7* – $[d = 7]$, *8* – $[d = 8]$, *9* – $[d = 9]$, *10* – $[d = 10]$.

ожидания, σ_{E_d} – оценка среднеквадратического отклонения, $\theta_d^{s,0} = (4,1)^{\mathrm{T}}$ – начальная точка.

В табл. 8 представлены результаты решения примера 3 минипакетным адаптивным методом случайного поиска при различных объемах минипакета $1 \leqslant d \leqslant 10$ (суммарное время работы алгоритма составило 20 минут (процессор intel CORE i5 2.10 GHz)).

Анализ данных табл. 8 показывает, что значения характеристики $\overline{E_d}$ значительно отличаются от наилучших значений критерия $E(\hat{\theta}_d^*)$ при всех рассматриваемых объемах минипакета. Это свидетельствует о том, что для по-

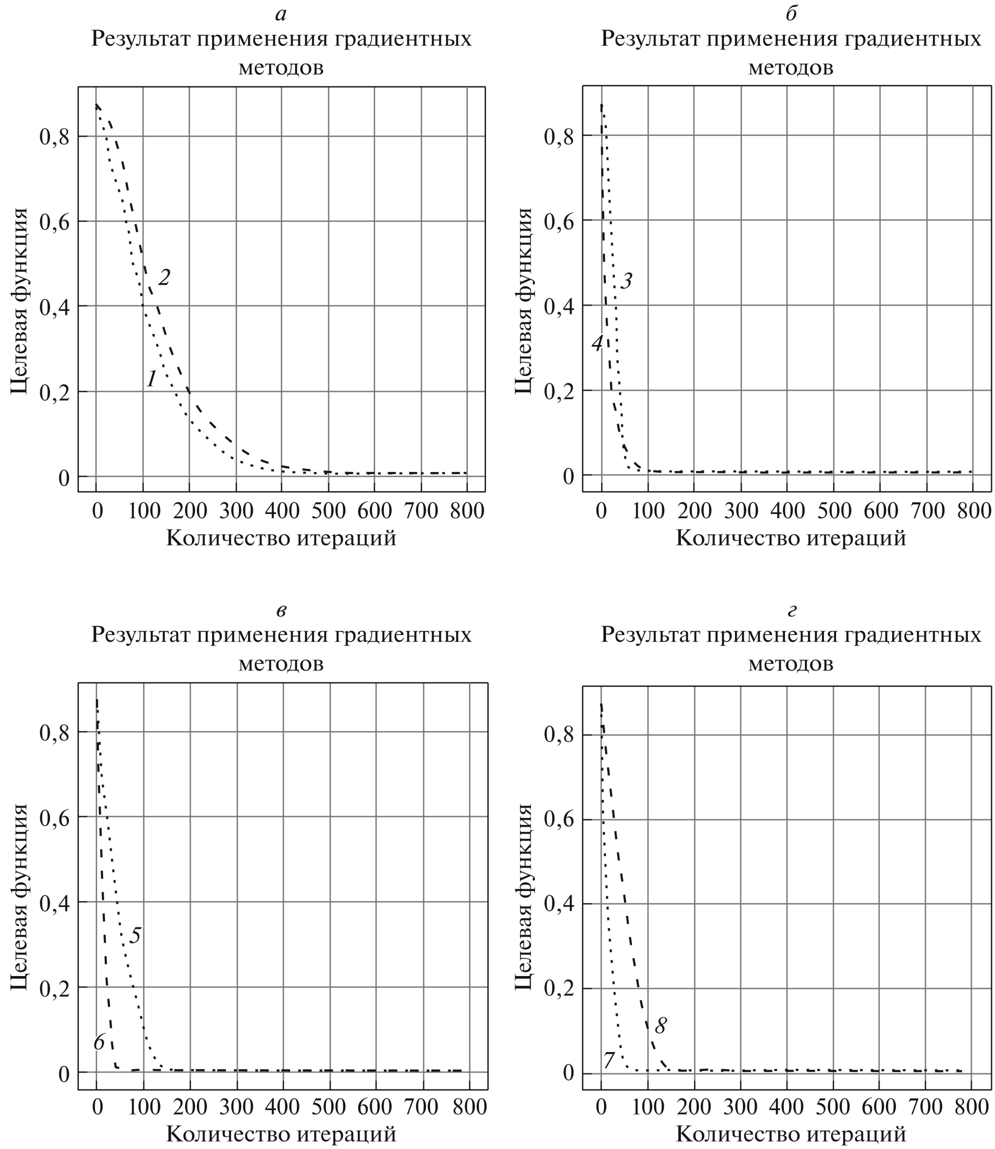


Рис. 6. Результаты применения градиентных методов оптимизации: *1* – SGD, *2* – ClasMom, *3* – NAG, *4* – AdaGrad, *5* – RMSProp, *6* – ADAM, *7* – AdaMax, *8* – Nadam.

лучения приемлемого результата потребуется реализация достаточного количества запусков (здесь $S_{\max} = 100$).

Система дифференциальных уравнений (11) является нелинейной, и для нахождения градиента функции будем использовать конечно-разностные аппроксимации ($\Delta = 0{,}01$). Решение системы дифференциальных уравнений находим численным методом Рунге–Кутты 4-го порядка (с шагом 0,2). На рис. 6 приведены результаты решения примера (изменение целевой функции

Таблица 9. Результаты сравнения МАМСП ($E(\hat{\theta}_{10}^{*}) = 1,24924 \cdot 10^{-3}$) с градиентными методами по наилучшей достигнутой величине критерия (1) (наилучшее известное решение $E(\hat{\theta}) = 1,24924 \cdot 10^{-3}$)

SGD	ClassMom	NAG	AdaGrad
$7{,}05873 \cdot 10^{-3}$	$7{,}03563 \cdot 10^{-3}$	$6{,}85268 \cdot 10^{-3}$	$4{,}39537 \cdot 10^{-3}$
RMSProp	**ADAM**	**AdaMax**	**Nadam**
$4{,}55656 \cdot 10^{-3}$	$3{,}28811 \cdot 10^{-3}$	$6{,}85572 \cdot 10^{-3}$	$4{,}51559 \cdot 10^{-3}$

с ростом числа итераций) при разных значениях шага. Рисунок 6 соответствует начальной точке $\theta_d^{s,0} = (4,1)^{\mathrm{T}}$, значениям шага SGD – 0,002; ClassMom – 0,0002; NAG – 0,002; AdaGrad – 0,02; RMSProp – 0,002; ADAM – 0,002; AdaMax – 0,02; Nadam – 0,002.

В табл. 9 представлены результаты сравнения решений, полученных предложенным методом и известными градиентными методами машинного обучения.

Как следует из сравнительного анализа рис. 1, 3, 5 и рис. 2, 4, 6, метод МАМСП не только не уступает известным градиентным методам, но и превосходит большинство методов при достаточном объеме минипакета d. Характер сходимости алгоритма МАМСП к наилучшему известному результату сравним с поведением метода ADAM – наилучшего из приведенных градиентных методов.

5. Заключение

Предложен минипакетный алгоритм адаптивного случайного поиска для решения задачи оценивания параметров динамических систем, использующий идеи популярных методов оптимизации, применяемых в машинном обучении. Приведены результаты сравнения эффективности его применения по сравнению с известными градиентными методами оптимизации: SGD, Classical Momentum, NAG, AdaGrad, RMSProp, Adam, Adamax, Nadam на трех модельных примерах. На данный момент представляется возможным его применение в задачах параметрического синтеза субоптимального управления пучками траекторий детерминированных систем, а также управления стохастическими системами при неполной информации о состоянии, в том числе систем совместного оценивания и управления, в которых критерий качества управления может быть приближенно представлен в виде суммы некоторых функций.

ПРИЛОЖЕНИЕ

А. Метод стохастического градиентного спуска (Stochastic Gradient Descent, SGD):

$$\theta^{k+1} = \theta^k - \alpha_k \nabla_\theta \, L(\theta^k, \hat{x}(t_j), t_j) =$$
$$= \theta^k - \alpha_k \nabla_\theta \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\hat{x}_i(t_j) - x_i(\theta, t_j)\right)^2 \right]}_{L(\theta^k, \hat{x}(t_j), t_j)},$$

где $\alpha_k > 0$, $k = 0, 1, \dots,$ – величина шага, t_j – случайный момент времени на множестве T, выбираемый на каждой k-й итерации заново; ∇_θ – градиент по вектору параметров.

Б. Классический метод моментов (Classical Momentum, ClassMom):

$$\theta^{k+1} = \theta^k - \alpha_k v^k,$$
$$v^{k+1} = \beta v^k + (1-\beta)\,\nabla_\theta L(\theta^k, \hat{x}(t_j), t_j),$$

где $v^0 = o$ – нулевой вектор-столбец, $\beta = 0{,}9$.

В. Ускоренный градиентный метод Нестерова (Nesterov Accelerated Gradient, NAG) для решения задачи $f(x^*) = \min_{x \in \mathrm{R}^n} f(x)$.

Шаг 1. Задать параметры: γ, $\gamma \in (0,1)$, – коэффициент сохранения ($\gamma = 0{,}9$); η – коэффициент влияния новой информации; $x^0 \in \mathrm{R}^n$ – начальная точка; $v^0 = o$; $\varepsilon_1 > 0$.

Положить $k = 0$.

Шаг 2. Положить $k = k + 1$ и выполнить:

$$y^k = x^k - \gamma v^{k-1}, \quad g^k = \nabla f^k(y^k), \quad v^k = \gamma v^{k-1} + \eta g^k.$$

Шаг 3. Вычислить $x^k = x^{k-1} - v^k$.

Шаг 4. Проверить выполнение условия $\left\|x^k - x^{k-1}\right\| < \varepsilon_1$.

Если условие выполнено, то $x^* = x^k$. Иначе перейти к шагу 2.

Г. Метод адаптивного градиента (Adaptive Gradient, AdaGrad) для решения задачи $f(x^*) = \min_{x \in \mathrm{R}^n} f(x)$.

Шаг 1. Задать параметры: γ, $\gamma \in (0,1)$, – коэффициент сохранения ($\gamma = 0{,}9$); η – скорость обучения (обычно $\eta = 0{,}01$); $x^0 \in \mathrm{R}^n$ – начальная точка; $\varepsilon = 10^{-6} \div 10^{-8}$ – сглаживающий параметр; $\varepsilon_1 > 0$; $G^{-1} = o$.

Положить $k = 0$.

Шаг 2. Положить

$$g^k = \nabla f^k(x^k); \quad G^k = G^{k-1} + g^k \odot g^k,$$

где $\odot$ – поэлементное произведение матриц по Адамару.

Шаг 3. Вычислить

$$x^{k+1} = x^k - \eta g^k \oslash \sqrt{G^k + \varepsilon},$$

где $\oslash$ – операция поэлементного деления матриц.

Шаг 4. Проверить выполнение условия $\left\|x^{k+1} - x^k\right\| < \varepsilon_1$.

Если условие выполнено, то $x^* = x^{k+1}$. Иначе положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 2.

Д. Метод скользящего среднего (Root Mean Square Propagation, RMSProp) для решения задачи $f(x^*) = \min_{x \in \mathrm{R}^n} f(x)$.

Шаг 1. Задать параметры: γ, $\gamma \in (0,1)$, – коэффициент сохранения ($\gamma = 0{,}9$); $x^0 \in \mathrm{R}^n$ – начальная точка; $\varepsilon = 10^{-6} \div 10^{-8}$ – сглаживающий параметр; $\varepsilon_1 > 0$; η – величина шага (обычно $\eta = 0{,}001$); $M^{-1} = o$.

Положить $k = 0$.

Шаг 2. Положить $g^k = \nabla f^k(x^k)$; $G^k = g^k \odot g^k$; $M^k = \gamma M^{k-1} + (1-\gamma)G^k$.

Шаг 3. Вычислить $x^{k+1} = x^k - \eta g^k \oslash \sqrt{M^k + \varepsilon}$.

Шаг 4. Проверить выполнение условия $\left\| x^{k+1} - x^k \right\| < \varepsilon_1$.

Если условие выполнено, то $x^* = x^{k+1}$. Иначе положить $k = k+1$ и перейти к шагу 2.

Е. Метод адаптивной оценки моментов (Adaptive Moment Estimation, Adam) для решения задачи $M[f(x)] \to \min$, в которой имеются случайные реализации $f^1(x), f^2(x), \ldots, f^K(x)$.

Шаг 1. Задать параметры: $\alpha = 0{,}001$ – величина шага; $\beta_1 = 0{,}9$; $\beta_2 = 0{,}999$ – параметры оценки моментов, $x^0 \in \mathrm{R}^n$ – начальная точка; $\varepsilon = 10^{-8}$ – сглаживающий параметр; $\varepsilon_1 > 0$; $m^0 = o$ – начальное значение первого вектора моментов $M[\nabla f(x)]$; $v^0 = o$ – начальное значение второго вектора моментов $M[\nabla f(x) \odot \nabla f(x)]$.

Положить $k = 0$.

Шаг 2. Положить $k = k + 1$,

$$g^k = \nabla f^k(x^{k-1}); \quad m^k = \beta_1 m^{k-1} + (1-\beta_1) g^k;$$
$$G^k = g^k \odot g^k; \quad v^k = \beta_2 v^{k-1} + (1-\beta_2) G^k;$$
$$\hat{m}^k = \frac{m^k}{1 - {\beta_1}^k}; \quad \hat{v}^k = \frac{v^k}{1 - {\beta_2}^k}.$$

Шаг 3. Вычислить $x^k = x^{k-1} - \alpha \hat{m}^k \oslash \sqrt{\hat{v}^k + \varepsilon}$.

Шаг 4. Проверить выполнение условия $\left\| x^{k+1} - x^k \right\| < \varepsilon_1$.

Если условие выполнено, то $x^* = x^k$. Иначе перейти к шагу 2.

Ж. Модификация метода Adam (Adamax) для решения задачи $M[f(x)] \to \min$, где $f(x) \in C^1$. Имеются случайные реализации $f^1(x), f^2(x), \ldots, f^K(x)$.

Шаг 1. Задать параметры: $\alpha = 0{,}002$ – величина шага; $\beta_1 = 0{,}9$; $\beta_2 = 0{,}999$ – параметры оценки моментов, $\beta_2 \in [0,1)$; $x^0 \in \mathrm{R}^n$ – начальная точка; $\varepsilon = 10^{-8}$ – сглаживающий параметр; $\varepsilon_1 > 0$, $m^0 = o$ – начальное значение первого вектора моментов $M[\nabla f(x)]$; $u^0 = o$.

Положить $k = 0$.

Шаг 2. Положить $k = k + 1$,

$$g^k = \nabla f^k(x^{k-1}); \quad m^k = \beta_1 m^{k-1} + (1-\beta_1) g^k,$$
$$u^k = \max\left\{ \beta_2 u^{k-1}, \left| g^k \right| \right\} \quad \text{(операция max выполняется поэлементно).}$$

Шаг 3. Вычислить $x^k = x^{k-1} - \dfrac{\alpha}{1 - {\beta_1}^k} m^k \oslash u^k$.

Ш а г 4. Проверить выполнение условия $\left\|x^{k+1} - x^k\right\| < \varepsilon_1$.

Если условие выполнено, то $x^* = x^k$. Иначе перейти к шагу 2.

З. Ускоренный по Нестерову метод адаптивной оценки моментов (Nesterov–accelerated Adaptive Moment Estimation, Nadam).

Ш а г 1. Задать параметры: $\alpha = 0{,}002$ – величина шага; $\beta_1 = 0{,}975$; $\beta_2 = 0{,}999$ – параметры оценки моментов, $x^0 \in \mathrm{R}^n$ – начальная точка; $\varepsilon = 10^{-8}$ – сглаживающий параметр; $m^0 = o$ – начальное значение первого вектора моментов $M[\nabla f(x)]$; $v^0 = o$ – начальное значение второго вектора моментов $M[\nabla f(x) \odot \nabla f(x)]$. Положить $k = 0$.

Ш а г 2. Положить $k = k + 1$,

$$g^k = \nabla f^k(x^{k-1}); \quad m^k = \beta_1 m^{k-1} + (1 - \beta_1) g^k;$$
$$G^k = g^k \odot g^k; \quad v^k = \beta_2 v^{k-1} + (1 - \beta_2) G^k;$$
$$\hat{m}^k = \frac{\beta_1 m^k}{1 - {\beta_1}^{k+1}} - \frac{(1 - \beta_1) g^k}{1 - {\beta_1}^k}; \quad \hat{v}^k = \frac{\beta_2 v^k}{1 - {\beta_2}^k}.$$

Ш а г 3. Вычислить $x^k = x^{k-1} - \alpha \hat{m}^k \oslash \sqrt{\hat{v}^k + \varepsilon}$.

Ш а г 4. Проверить выполнение условия $\left\|x^{k+1} - x^k\right\| < \varepsilon_1$.

Если условие выполнено, то $x^* = x^k$. Иначе перейти к шагу 2.

И. Минипакетный метод градиентного спуска (Mini-batch Gradient Descent):

$$\theta^{k+1} = \theta^k - \alpha_k \nabla_\theta \bar{Q}(\theta^k), \quad \alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где α_k – величина шага (learning rate),

$$\overline{Q}(\theta) = \frac{1}{m} \sum_{i \in J_m} \underbrace{\left[\sum_{j=1}^{n} \theta_j f_j(x_i) - y_i \right]^2}_{L(\theta, x_i, y_i)} = \frac{1}{m} \sum_{i \in J_m} L(\theta, x_i, y_i),$$

где J_m – набор из m номеров произвольных элементов $(x_i, y_i) \in X^l$ обучающей выборки (можно взять m подряд идущих элементов). Чтобы реализовать одно улучшение параметров, требуется использовать не весь набор данных (dataset), а его небольшую часть (в прикладных задачах обычно от 50 до 256 элементов).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bard Y.* Nonlinear parameter estimation. N.Y.: Acad. Press, 1974.
2. *Ивченко Г.И., Медведев Ю.И.* Введение в математическую статистику. М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2014.
3. *Stewart W.E., Caracotsios M., Sorensen J.P.* Parameter Estimation from Multiresponse Data // AIChE J. 1992. 38 (5). P. 641–650.

4. *Biegler L.T.* Optimization Algorithms for Parameter Estimation and Data Reconciliation. Carnegie Mellon Center.

http://numero.cheme.cmu.edu/content/06606/Parestnotes.pdf

5. *Csendes T.* Nonlinear Parameter Estimation by Global Opitmization – Efficiency and reliability // Acta Cybernetica, 1988. 8 (4). P. 361–372.
6. *Arora N., Bieglera L.T.* Trust Region SQP Algorithm for Equality Constrained Parameter Estimation with Simple Parameter Bounds // Comput. Optim. Appl. 2004. No. 28. P. 51–86.
7. *Floudas C.A., Pardalos P.M., Adjimann C.S., Esposito W.R., Gumus Z.H., Harding S.T., Schweiger C.A.* Handbook of test problems in local and global optimization, 1999. V. 67. Springer US. https://titan.princeton.edu/TestProblems
8. *Tjoa I.B., Biegler L.T.* Simultaneous Solution and Optimization Strategies for Parameter Estimation of Differential–algebraic Equation Systems // Industrial & Engineering Chemistry Research. 1991. V. 30. No. 2. P. 376–385.

https://doi.org/10.1021/ie00050a015

9. *Bock H.G.* Recent Advances in Parameter Identification Techniques in ODE / Deuflhard P., Hairer E. (eds.). Numerical treatment of inverse problems in differential and integral equations. P. 95–121. Birkhauser, 1983.
10. *Panteleev A.V., Letova T.A., Pomazueva E.A.* Parametric Design of Optimal in Average Fractional-Order PID Controller in Flight Control Problem // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. № 1. P. 153–166.

Пантелеев А.В., Летова Т.А., Помазуева Е.А. Параметрический синтез оптимального в среднем дробного ПИД-регулятора в задаче управления полетом // Управление большими системами. 2015. Вып. 56. С. 176–200.

11. *Esposito W.R., Floudas C.A.* Global Optimization for the Parameter Estimation of Differential-Algebraic Systems // Ind. Eng. Chem. Res. 2000. V. 39. P. 1291–1310.
12. *Osborne M.R.* On Estimation Algorithms for Ordinary Differential Equations // ANZIAM J. 2008. No. 50. P. 107–120.
13. *Adjiman C.S., Androulakis I.P., Floudas C.A., Neumaier A.A.* Global Optimization Method for General Twice-Differentiable NLPs, II. Implementation and Computational Results // Comput. Chem. Eng. 1998. No. 22 (9). P. 1159.
14. *Cizniar M., Podmajersky M., Hirmajer T., Fikar M.* Global Optimization for Parameter Estimation of Differential-algebraic Systems // CHEM PAP. 2009. V. 63 (3). P. 274–283.
15. Floudas C.A., Pardalos P.M. (eds.) Encyclopedia of optimization. Springer, 2009.
16. *Glover F.W., Kochenberger G.A.* Handbook of methaheuristics. Boston, MA: Kluwer Acad. Publishers, 2003.
17. *Пантелеев А.В., Крючков А.Ю.* Метаэвристические методы оптимизации в задачах оценки параметров динамических систем // Науч. вестн. Моск. гос. технического ун-та гражданской авиации. 2017. Т. 20. № 2. С. 37–45.
18. *Ruder S.* An Overview of Gradient Descent Optimization Algorithms.

arXiv:1609.04747v2 [cs.LG] 15 Jun 2017.

19. *Karpathy Andrej* (2017). A Peek at Trends in Machine Learning.

https://medium.com/@karpathy/a-peek-at-trends-in-machine-learning-ab8a1085a106

20. *Sra Suvrit, Nowozin Sebastian, Wright Stephen J.* Optimization for machine learning. MIT Press, 2012.

21. *Пантелеев А.В., Лобанов А.В.* Градиентные методы оптимизации в машинном обучении идентификации параметров динамических систем // Моделирование и анализ данных. 2019. № 4. С. 88–99.
22. *Пантелеев А.В.* Методы оптимизации. Уч. пос. / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. М.: Логос, 2011.
23. *Синицын И.Н., Синицын В.И.* Условно-оптимальное линейное оценивание нормальных процессов в вольтерровских стохастических системах // Системы и средства информатики. 2019. Т. 29. № 3. С. 16–28.
24. *Синицын И.Н., Синицын В.И.* Аналитическое моделирование процессов в вольтерровских стохастических системах методом канонических разложений // Системы и средства информатики. 2019. Т. 29. № 1. С. 109–127.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 21.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020

© 2020 г. **И.Н. СИНИЦЫН**, д-р техн. наук (sinitsin@dol.ru),
В.И. СИНИЦЫН, д-р физ.-мат. наук (sinitsin_vi@mail.ru)
(Федеральное государственное учреждение
"Федеральный исследовательский центр
"Информатика и управление" РАН" (ФИЦ ИУ РАН), Москва;
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)),
Э.Р. КОРЕПАНОВ, канд. техн. наук (ekorepanov@ipiran.ru),
Т.Д. КОНАШЕНКОВА (tkonashenkova64@mail.ru)
(Федеральное государственное учреждение
"Федеральный исследовательский центр
"Информатика и управление" РАН" (ФИЦ ИУ РАН), Москва)

ОПТИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТ КАНОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

На основе вейвлет канонических разложений (ВЛКР) рассматриваются задачи синтеза линейных оптимальных в среднем квадратическом (с.к.) фильтров. Для моделирования существенно нестационарных стохастических процессов (СтП), в том числе описывающих ударные воздействия, предлагается использовать ВЛКР, построенные на основе коэффициентов разложения его ковариационной функции по ортогональному двумерному вейвлет базису. Для оценки наблюдаемого процесса, представленного в виде ВЛКР, построен с.к. оптимальный линейный оператор в виде набора формальных правил, описывающих реакцию оператора на базисные вейвлет функции. Получены формулы для вычисления с.к. оптимальной оценки сигнала и с.к. оптимальной оценки качества построенного с.к. оптимального линейного оператора. Дано описание инструментального программного обеспечения "Синтез-ВЛ", разработанного в среде MATLAB. Приводится тестовый пример с дельта-функцией.

Ключевые слова: вейвлет каноническое разложение, нестационарный линейный с.к. оптимальный фильтр, ортогональные вейвлеты с конечным носителем, вейвлеты Хаара.

DOI: 10.31857/S0005231020110082

1. Введение

В [1] приведен обстоятельный обзор современных подходов решения задачи синтеза линейных оптимальных в среднем квадратическом фильтров. В [2] дан краткий обзор известного алгоритмического и программного обеспечения для решения задач нелинейного анализа стохастических систем (СтС) на основе канонических разложений (КР). Приводятся примеры с результатами работы инструментального программного обеспечения в среде MATLAB. Изложенные в [3] материалы входят в состав разработанного инструментального программного обеспечения в среде MATLAB и позволяют решать широкий круг задач, связанных со спектрально-корреляционным анализом и с моделированием стационарных и нестационарных стохастических процессов (СтП). С помощью данных алгоритмов можно проводить анализ линейных и нелинейных преобразований случайных величин и функций. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что для большинства типовых инженерных задач достаточно ограничиваться небольшим числом членов КР. Описанное методическое и алгоритмическое обеспечение нашло применение в задачах моделирования и оценки параметров вибровозмущений и синтеза средств виброзащиты, вибронадежности компьютерного и коммуникационного оборудования.

Для моделирования существенно нестационарных СтП в условиях, например, ударных воздействий успешно применяются вейвлет методы. Методы моделирования СтП в линейных СтС и линейных СтС с параметрическими шумами на основе вейвлет канонических разложений (ВЛКР) разработаны в [3–8]. Вопросы синтеза с.к. оптимальных линейных фильтров посредством вейвлет канонических разложений в регулярных случаях рассмотрены в [9]. В настоящей статье на основе ВЛКР рассматриваются задачи синтеза оптимальных с.к. фильтров.

2. Теорема о вейвлет с.к. оптимальном линейном операторе

Пусть наблюдаемый сигнал $Z(t)$ и сигнал $W(s)$, подлежащий воспроизведению, можно представить в виде суммы линейной комбинации известных функций со случайными коэффициентами и помехи в виде некоторой случайной функции [10]:

$$Z(t) = \sum_{r=1}^{N} U_r \xi_r(t) + X(t), \quad t \in T, \tag{2.1}$$

$$W(s) = \sum_{r=1}^{N} U_r \zeta_r(s) + Y(s), \quad s \in S, \tag{2.2}$$

где $X(t)$, $Y(s)$ – случайные функции с нулевыми математическими ожиданиями; $\xi_1, \ldots, \xi_N, \zeta_1, \ldots, \zeta_N$ – заданные структурные функции; $U_1, \ldots, U_N$ – случайные величины (СВ) с нулевыми математическими ожиданиями и не коррелированные со случайными функциями $X(t)$ и $Y(s)$. Требуется найти такой оператор A_t, чтобы случайная функция

$$W^*(s) = A_t Z(t)$$

была с.к. оптимальной оценкой сигнала $W(s)$. Согласно [10] для этого необходимо и достаточно, чтобы линейный оператор A_t был с.к. оптимальным, т.е. удовлетворял уравнению

$$A_t[K_X(t,\tau)] = K_{YX}(s,\tau) + \sum_{p,q=1}^{N} \gamma_{pq} \left(\zeta_p(s) - A_t[\xi_p(t)]\right) \xi_q(\tau). \tag{2.3}$$

При этом для определения с.к. оптимального линейного оператора пригодны только такие решения уравнения (2.3), которые преобразуют $X(t)$ в случайные функции, обладающие конечными дисперсиями. Тогда уравнение (2.3) имеет общий вид

$$A_t[K_X(t,\tau)] = f(s,\tau) \quad (t,\tau \in T; s \in S), \tag{2.4}$$

где $f(s,\tau)$ – известная функция. В [9] доказана теорема о вейвлет с.к. оптимальном линейном операторе.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *в пространстве* $L^2(T)$, *где* $T = [t_0, t_1]$ – *некоторый промежуток, задан ортонормированный вейвлет базис, порожденный вейвлетами с конечными носителями, вида*

$$\Big(\varphi^t_{00}(t), \psi^t_{jk}(t)\Big), \tag{2.5}$$

где $\varphi^t_{00}(t) = \varphi^t(t)$ – *масштабирующая функция* $\varphi^t_{jk} = \sqrt{2^j}\varphi^t(2^j t - k)$; $\psi^t_{00}(t) = \psi^t(t)$ – *материнский вейвлет*; $\psi^t_{jk}(t) = \sqrt{2^j}\psi^t(2^j t - k)$; $j = 1, 2, \ldots, J^t$; $k = 0, 1, \ldots, 2^j - 1$; J^t – *максимальный уровень разрешения*;

2) *в пространстве* $L^2(S)$, *где* $S = [s_0, s_1]$ – *некоторый промежуток, задан ортонормированный вейвлет базис вида, порожденный вейвлетами с конечными носителями, вида*

$$\Big(\varphi^s_{00}(s), \psi^s_{jk}(s)\Big), \tag{2.6}$$

где $\varphi^s_{00}(s) = \varphi^s(s)$ – *масштабирующая функция* $\varphi^s_{jk} = \sqrt{2^j}\varphi^s\left(2^j s - k\right)$; $\psi^s_{00}(s) = \psi^s(s)$ – *материнский вейвлет*; $\psi^s_{jk}(s) = \sqrt{2^j}\psi^s(2^j s - k)$; $j = 1, 2, \ldots, J^s$; $k = 0, 1, \ldots, 2^j - 1$; J^s – *максимальный уровень разрешения*;

3) *в пространстве* $L^2(T{\times}T)$ *определен двумерный ортонормированный базис путем тензорного произведения двух одномерных вейвлет базисов* (2.5) *в случае, когда масштабирование по обеим переменным происходит одинаково*:

$$\Phi^{tA}_{00}(t_1, t_2) = \varphi^t_{00}(t_1)\varphi^t_{00}(t_2), \tag{2.7}$$

$$\Psi^{tH}_{jkn}(t_1, t_2) = \varphi^t_{jk}(t_1)\psi^t_{jn}(t_2), \tag{2.8}$$

$$\Psi^{tB}_{jkn}(t_1, t_2) = \psi^t_{jk}(t_1)\varphi^t_{jn}(t_2), \tag{2.9}$$

$$\Psi^{tD}_{jkn}(t_1, t_2) = \psi^t_{jk}(t_1)\psi^t_{jn}(t_2), \tag{2.10}$$

где $j = 1, \ldots, J^t$; $k, n = 0, 1, \ldots, 2^j - 1$;

4) *в пространстве* $L^2(S{\times}T)$ *определен двумерный ортонормированный базис вида путем тензорного произведения двух одномерных вейвлет базисов* (2.5) *и* (2.6) *в случае, когда масштабирование по обеим переменным происходит по-разному*:

$$\Phi^{sA}_{00}(s, t) = \varphi^s_{00}(s)\varphi^t_{00}(t), \tag{2.11}$$

(2.12) $$\Psi^{sH}_{j_2n}(s,t)=\varphi^s_{00}(s)\psi^t_{j_2n}(t),$$

(2.13) $$\Psi^{sB}_{j_1k}(s,t)=\psi^s_{j_1k}(s)\varphi^t_{00}(t),$$

(2.14) $$\Psi^{sD}_{j_1kj_2n}(s,t)=\psi^t_{j_1k}(s)\psi^t_{j_2n}(t),$$

где $j_1=0,1,\ldots,J^s$; $k=0,1,\ldots,2^{j_1}-1$; $j_2=0,1,\ldots,J^t$; $n=0,1,\ldots,2^{j_2}-1$;

5) *функция* $f(s,t)\in L^2(S\times T)$ *имеет сходящееся вейвлет разложение* (*ВЛР*) *согласно* [11–13]:

$$f(s,\tau)=a^f\Phi^{sA}_{00}(s,\tau)+\sum_{j=0}^{J^t}\sum_{k=0}^{2^j-1}h^f_{jk}\Psi^{sH}_{jk}(s,\tau)+\sum_{j=0}^{J^s}\sum_{k=0}^{2^j-1}b^f_{jk}\Psi^{sB}_{jk}(s,\tau)+$$
$$+\sum_{j_1=0}^{J^s}\sum_{k=0}^{2^{j_1}-1}\sum_{j_2=0}^{J^t}\sum_{n=0}^{2^{j_2}-1}d^f_{j_1kj_2n}\psi^{sD}_{j_1kj_2n}(s,\tau),$$

где

$$a^f=\int\limits_S\int\limits_T f(s,\tau)\Phi^{sA}_{00}(s,\tau)dtds,$$
$$h^f_{jk}=\int\limits_S\int\limits_T f(s,\tau)\Psi^{sH}_{jk}(s,\tau)dtds,$$
$$b^f_{jk}=\int\limits_S\int\limits_T f(s,\tau)\Psi^{sB}_{jk}(s,\tau)dtds,$$
$$d^f_{j_1kj_2n}=\int\limits_S\int\limits_T f(s,\tau)\Psi^{sD}_{j_1kj_2n}(s,\tau)dtds;$$

6) *функция* $K_X(t,\tau)\in L^2(T\times T)$ *допускает сходящееся ВЛР согласно* [11–13]:

(2.15) $$K_X(t,\tau)=a^t\Phi^{tA}_{00}(t,\tau)+$$
$$+\sum_{j=0}^{J^t}\sum_{k=0}^{2^j-1}\sum_{n=0}^{2^j-1}\Big(h^t_{jkn}\Psi^{tH}_{jkn}(t,\tau)+b^t_{jkn}\Psi^{tB}_{jkn}(t,\tau)+d^t_{jkn}\Psi^t_{jkn}D(t,\tau)\Big),$$

где

$$a^t=\int\limits_T\int\limits_T K_X(t_1,t_2)\Phi^{tA}_{00}(t_1,t_2)dt_1dt_2,$$
$$h^t_{jkn}=\int\limits_T\int\limits_T K_X(t_1,t_2)\Psi^{tH}_{jkn}(t_1,t_2)dt_1dt_2,$$

$$b^t_{jkn} = \int\limits_T \int\limits_T K_X(t_1,t_2)\Psi^{tB}_{jkn}(t_1,t_2)dt_1dt_2,$$

$$d^t_{jkn} = \int\limits_T \int\limits_T K_X(t_1,t_2)\Psi^{tD}_{jkn}(t_1,t_2)dt_1dt_2;$$

7) *результат воздействия неизвестного линейного оператора* A_t *на базисные вейвлет функции вида* (2.5) *представляют собой функции, принадлежащие пространству* $L^2(S)$.

Тогда линейный оператор A_t*, который является решением уравнения* (2.4)*, определяется посредством набора формальных правил:*

$$\begin{aligned} &A_t[\varphi^t_{jk}(t)] = u_{jk}(s) \quad (j=0,1,\ldots,J^t; k=0,1,\ldots,2^j-1),\\ &A_t[\psi^t_{00}(t)] = v_{00}(s),\\ &A_t[\psi^t_{jk}(t)] = 0 \quad (j=1,\ldots,J^t; k=0,1,\ldots,2^j-1), \end{aligned} \tag{2.16}$$

где

$$u_{00}(s) = a^u_{00}\varphi^s_{00}(s) + \sum_{i=0}^{J^s}\sum_{n=0}^{2^i-1} d^u_{00in}\psi^s_{in}(s);$$

$$v_{00}(s) = a^v_{00}\varphi^s_{00}(s) + \sum_{i=0}^{J^s}\sum_{n=0}^{2^i-1} d^v_{00in}\psi^s_{in}(s);$$

$$u_{jk}(s) = a^u_{jk}\varphi^s_{00}(s) + \sum_{i=0}^{J^s}\sum_{n=0}^{2^i-1} d^u_{jkin}\psi^s_{in}(s) \quad (j=1,\ldots,J^t; k=0,1,\ldots,2^j-1);$$

параметры a^u_{00} , d^u_{00in}, a^v_{00} , d^v_{00in}, a^u_{jk}, d^u_{jkin} $(i=0,\ldots,J^s; n=0,1,\ldots,2^i-1;$ $j=1,\ldots,J^t; k=0,1,\ldots,2^j-1)$ *являются решением системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):*

$$\begin{cases} a^t a^u_{00} + b^t_{000}a^v_{00} = a^f,\\ h^t_{000}a^u_{00} + d^t_{000}a^v_{00} = h^f_{00},\\ \sum\limits_{k=0}^{2^j-1} h^t_{jkn}a^u_{jk} = h^f_{jn} \quad (j=1,\ldots,J^t; k=0,1,\ldots,2^j-1),\\ a^t d^u_{00il} + b^t_{000}d^v_{00il} = b^f_{il} \quad (i=0,\ldots,J^s; l=0,1,\ldots,2^i-1),\\ h^t_{000}d^u_{00il} + d^t_{000}d^v_{00il} = d^f_{il00} \quad (i=0,\ldots,J^s; l=0,1,\ldots,2^i-1),\\ \sum\limits_{k=0}^{2^j-1} h^t_{jkn}d^u_{jkil} = d^f_{iljn}\\ (i=1,\ldots,J^s; l=0,1,\ldots,2^i-1; j=1,\ldots,J^t; n=0,1,\ldots,2^j-1). \end{cases} \tag{2.17}$$

3. Вейвлет канонические разложения

Примем, что случайная функция (СФ) $X(t)$ в (2.1) допускает каноническое разложение (КР) вида

$$X(t) = \sum_{\nu=1}^{L^t} V_\nu x_\nu(t), \tag{3.1}$$

где V_ν – некоррелированные СВ с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями D_ν; $x_\nu(t)$ – детерминированные координатные функции, представленные в виде линейной комбинации базисных вейвлет функций вида (2.5).

Для удобства представим одномерный ортонормированный вейвлет базис (2.5) в виде:

$$f_1(t) = \varphi^t_{00}(t); \quad f_2(t) = \psi^t_{00}(t); \quad f_\nu(t) = \psi^t_{jk}(t) \tag{3.2}$$

для $\nu = 3, 4 \ldots, L^t$; $\nu = l + k + 1$; $l = 2^j$; $j = 1, 2, \ldots, J^t$; $k = 0, 1, \ldots, l - 1$; $L^t = 2 \cdot 2^{J^t}$.

Последовательный алгоритм построения вейвлет канонического разложения СФ $X(t)$ определяется известными формулами [10] декорреляции СВ:

$$A_\nu = \int_T f_\nu X(t) dt \quad (\nu = 1, 2, \ldots, L^t).$$

Определим ковариационные моменты СВ A_ν:

$$k_{\nu\mu} = M[A^\circ_\nu \bar{A}^\circ_\mu] = \int_T \int_T f_\nu(t_1) f_\mu(t_2) K_X(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (\nu, \mu = 1, 2, \ldots, L^t).$$

На основании (2.15) имеем:

$$k_{11} = a^t; \quad k_{12} = h^t; \quad k_{21} = b^t; \quad k_{22} = d^t_{000}; \quad k_{\nu\mu} = d^t_{jn_1n_2} \tag{3.3}$$

для $\nu = l + n_1 + 1$; $\mu = l + n_2 + 1$; $l = 2^j$; $j = 1, 2, \ldots, J^t$; $n_1, n_2 = 0, 1, \ldots \ldots, l - 1$. Остальные $k_{\nu\mu} = 0$.

Для удобства введем функции

$$z_\nu(t) = \int_T f_\nu(\tau) K_X(t, \tau) d\tau \quad (\nu = 1, 2, \ldots, L^t). \tag{3.4}$$

Тогда в силу (2.15) имеем:

$$z_1(t) = a^t \varphi^t_{00}(t) + b^t_{000} \psi^t_{00}(t); \quad z_2(t) = h^t_{000} \varphi^t_{00}(t) + d^t_{000} \psi^t_{00}(t);$$

$$z_\nu(t) = \sum_{k=0}^{2^j-1} \left(h^t_{jkn} \varphi^t_{jk}(t) + d^t_{jkn} \psi^t_{jk}(t) \right)$$

для $\nu = 3, \ldots, L^t$; $\nu = l + n + 1$; $l = 2^j$; $j = 1, 2, \ldots, J^t$; $n = 0, 1, \ldots, l - 1$.

При этом некоррелированные СВ V_ν удовлетворяют соотношениям:

$$A_1^\circ = V_1; \quad A_r^\circ = -\sum_{\nu=1}^{r-1} c_{r\nu} V_\nu + V_r \quad (r = 2, 3, \ldots, L^t);$$

где

$$\begin{aligned} &c_{\nu 1} = -\frac{k_{\nu 1}}{D_1} \quad (\nu = 2, 3, \ldots, L^t); \\ &c_{\nu\mu} = -\frac{1}{D_\mu}\left(k_{\nu\mu} - \sum_{\lambda=1}^{\mu-1} D_\lambda c_{\mu\lambda} c_{\nu\lambda}\right) \quad (\mu = 2, 3, \ldots, \nu - 1; \nu = 3, 4, \ldots, L^t); \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$D_1 = D[V_1] = k_{11}; \quad D_\nu = D[V_\nu] = k_{\nu\nu} - \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} D_\nu |c_{\nu\lambda}|^2 \quad (\nu = 2, 3, \ldots, L^t). \tag{3.6}$$

Координатные функции $x_\nu(t)$ в силу [10] определяются последовательно формулами:

$$x_1(t) = \frac{1}{D_1} z_1(t);$$

$$x_\nu(t) = \frac{1}{D_\nu}\left(\sum_{\lambda=1}^{\nu-1} d_{\nu\lambda} z_\lambda(t) + z_\nu(t)\right) \quad (\nu = 2, 3, \ldots, L^t);$$

$$d_{\nu\lambda} = c_{\nu\lambda} + \sum_{\mu=\lambda+1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} d_{\mu\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, \nu - 2); \quad d_{\nu,\nu-1} = c_{\nu,\nu-1}.$$

Далее представим координатные функции $x_\nu(t)$ в виде линейных комбинаций базисных вейвлет функций вида (2.5):

$$x_1(t) = \frac{1}{D_1}\Big(a^t \varphi_{00}^t(t) + b_{000}^t \psi_{00}^t(t)\Big); \tag{3.7}$$

$$x_2(t) = \frac{1}{D_2}\Big(\left(d_{21} a^t + h_{000}^t\right) \varphi_{00}^t(t) + \left(d_{21} b_{000}^t + d_{000}^t\right) \psi_{00}^t(t)\Big); \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} x_3(t) = \frac{1}{D_3}\Big(&\left(d_{31} a^t + d_{32} h_{000}^t\right) \varphi_{00}^t(t) + \left(d_{31} b_{000}^t + d_{32} d_{000}^t\right) \psi_{00}^t(t) + \\ &+ h_{100}^t \varphi_{10}^t(t) + h_{110}^t \varphi_{11}^t(t) + d_{100}^t \psi_{10}^t(t) + d_{110}^t \psi_{11}^t(t)\Big); \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} x_4(t) = \frac{1}{D_4}\Bigg(&\left(d_{41} a^t + d_{42} h_{000}^t\right) \varphi_{00}^t(t) + \left(d_{41} b_{000}^t + d_{42} d_{000}^t\right) \psi_{00}^t(t) + \\ &+ \sum_{k=0}^{1} \left(d_{43} h_{1k0}^t + h_{1k1}^t\right) \varphi_{1k}^t(t) + \sum_{k=0}^{1} \left(d_{43} d_{1k0}^t + d_{1k1}^t\right) \psi_{1k}^t(t)\Bigg). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Для следующих координатных функций для удобства введем обозначения

$$x_\nu(t) = x^*_{jn}(t) \tag{3.11}$$

$(\nu = 5, 6, \ldots, L^t; \nu = 2^j + n + 1; j = 2, 3, \ldots, J^t; n = 0, 1, \ldots, 2^j - 1)$.

Если $n = 0$, то $\nu = 2^j + 1$ для $j = 2, 3, \ldots, J^t$ и

$$\begin{gathered} x_\nu(t) = x^*_{j0}(t) = \\ = \frac{1}{D_\nu}\Bigg((d_{\nu 1}a^t + d_{\nu 2}h^t_{000})\varphi^t_{00}(t) + (d_{\nu 1}b^t_{000} + d_{\nu 2}d^t_{000})\varphi^t_{00}(t) + \\ + \sum_{i=0}^{j-1}\sum_{k=0}^{2^i-1}\sum_{n_1=0}^{2^i-1} d_{\nu\lambda}(h^t_{ikn_1}\varphi^t_{ik}(t) + d^t_{ikn_1}\psi^t_{ik}(t)) + \sum_{k=0}^{2^j-1}(h^t_{jk0}\varphi^t_{jk}(t) + d^t_{jk0}\psi^t_{jk}(t))\Bigg) \end{gathered} \tag{3.12}$$

для $\lambda = 2^i + n_1 + 1$.

Если $n \neq 0$, то $\nu = 2^j + n + 1$ для $j = 2, 3, \ldots, J^t$; $n = 0, 1, \ldots, 2^j - 1$ и

$$\begin{gathered} x_\nu(t) = x^*_{jn}(t) = \\ = \frac{1}{D_\nu}\Bigg(\left(d_{\nu 1}a^t + d_{\nu 2}h^t_{000}\right)\varphi^t_{00}(t) + \left(d_{\nu 1}b^t_{000} + d_{\nu 2}d^t_{000}\right)\psi^t_{00}(t) + \\ + \sum_{i=0}^{j-1}\sum_{k=0}^{2^i-1}\sum_{n_1=0}^{2^i-1} d_{\nu\lambda}\left(h^t_{ikn_1}\varphi^t_{ik}(t) + d^t_{ikn_1}\psi^t_{ik}(t)\right) + \\ + \sum_{k=0}^{2^j-1}\sum_{n_1=0}^{n-1} d_{\nu\lambda_1}\left(h^t_{ikn_1}\varphi^t_{ik}(t) + d^t_{ikn_1}\psi^t_{ik}(t)\right) + \\ + \sum_{k=0}^{2^j-1}\left(h^t_{jkn}\varphi^t_{jk}(t) + d^t_{jkn}\psi^t_{jk}(t)\right)\Bigg) \end{gathered} \tag{3.13}$$

для $\lambda = 2^i + n_1 + 1, \lambda_1 = 2^j + n_1 + 1$.

Наконец, можно убедиться, что выражения (3.7)–(3.13) можно записать в общем виде:

$$x_\nu(t) = \sum_{j=0}^{J^t}\sum_{k=0}^{2^j-1}\Big(a^x_{\nu jk}\varphi^t_{jk}(t) + d^x_{jk}\psi^t_{jk}(t)\Big) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, L^t). \tag{3.14}$$

4. Синтез вейвлет с.к. оптимальной оценки сигнала

Для решения операторного уравнения (2.3) применим теорему 1. Будем считать, что выполнены все условия теоремы 1, а также дополнительные условия:

1) функции $\xi_1, \ldots, \xi_N \in L^2(T)$ и представимы в виде сходящихся вейвлет разложений (ВЛР) на промежутке T:

$$\xi_p(t) = a_p^{\xi}\varphi_{00}^t(t) + \sum_{j=0}^{J^t}\sum_{k=0}^{2^j-1} d_{pjk}^{\xi}\psi_{jk}^t(t) \quad (p = 1, \ldots, N), \tag{4.1}$$

где

$$a_p^{\xi} = \int\limits_T \xi_p(t)\varphi_{00}^t(t)dt,$$

$$d_{pjk}^{\xi} = \int\limits_T \xi_p(t)\psi_{jk}^t(t)dt;$$

2) функции $\zeta_1, \ldots, \zeta_N(s) \in L^2(S)$ и представимы в виде сходящихся ВЛР на промежутке S:

$$\zeta_p(t) = a_p^{\zeta}\varphi_{00}^s(s) + \sum_{j=0}^{J^s}\sum_{k=0}^{2^j-1} d_{pjk}^{\zeta}\psi_{jk}^s(s) \quad (p = 1, \ldots, N), \tag{4.2}$$

где

$$a_p^{\zeta} = \int\limits_S \zeta_p(t)\varphi_{00}^s(s)ds,$$

$$d_{pjk}^{\zeta} = \int\limits_S \zeta_p(s)\psi_{jk}^s(s)ds;$$

3) функция $K_{YX}(s,\tau) \in L^2(S \times T)$ и представима в виде сходящегося ВЛР:

$$\begin{gathered} K_{YX}(s,\tau) = a^s\Phi_{00}^{sA}(s,\tau) + \sum_{j=0}^{J^t}\sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jk}^s\Psi_{jk}^{sH}(s,\tau) + \\ + \sum_{j=0}^{J^s}\sum_{k=0}^{2^j-1} b_{jk}^s\Psi_{jk}^{sB}(s,\tau) + \sum_{j_1=0}^{J^s}\sum_{k=0}^{2^{j_1}-1}\sum_{j_2=0}^{J^t}\sum_{n=0}^{2^{j_2}-1} d_{j_1kj_2n}^s\Psi_{j_1kj_2n}^{sD}(s,\tau), \end{gathered} \tag{4.3}$$

где

$$a^s = \int\limits_S\int\limits_T K_{YX}(s,\tau)\Phi_{00}^{sA}(s,\tau)d\tau ds,$$

$$h_{jk}^s = \int\limits_S\int\limits_T K_{YX}(s,\tau)\Psi_{jk}^{sH}(s,\tau)d\tau ds,$$

$$b_{jk}^{s} = \int\limits_{S}\int\limits_{T} K_{YX}(s,\tau)\Psi_{jk}^{sB}(s,\tau)d\tau ds,$$

$$d_{j_1kj_2n}^{s} = \int\limits_{S}\int\limits_{T} K_{YX}(s,\tau)\Psi_{j_1kj_2n}^{sD}(s,\tau)d\tau ds.$$

Тогда с.к. оптимальный линейный оператор A_t задается набором формальных правил теоремы 1. Коэффициенты ВЛР функций $u_{00}(s), v_{00}(s), u_{jk}(s)$ $(j = 1,\ldots,J^t;\ k = 0,1,\ldots,2^j-1)$ по базису вида (2.6) удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида (2.17):

$$a^t a_{00}^u + b_{000}^t a_{00}^v = a^s + \sum_{p,q=1}^{N}\gamma_{pq}\Big(a_p^\zeta - a_p^\xi a_{00}^u - d_{p00}^\xi a_{00}^v\Big)a_q^\xi, \tag{4.4}$$

$$d_{000}^t a_{00}^v + h_{000}^t a_{00}^u = h_{00}^s + \sum_{p,q=1}^{N}\gamma_{pq}\Big(a_p^\zeta - a_p^\xi a_{00}^u - d_{p00}^\xi a_{00}^v\Big)d_{q00}^\xi, \tag{4.5}$$

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jkn}^t a_{jk}^u = h_{jn}^s + \sum_{p,q=1}^{N}\gamma_{pq}\Big(a_p^\zeta - a_p^\xi a_{00}^u - d_{p00}^\xi a_{00}^v\Big)d_{qjn}^\xi \tag{4.6}$$

$(i = 0,1,\ldots,J^s; l = 0,1,\ldots,2^i-1)$,

$$a^t d_{00il}^u + b_{000}^t d_{000il}^v = b_{il}^s + \sum_{p,q=1}^{N}\gamma_{pq}\Big(a_p^\zeta - a_p^\xi a_{00}^u - d_{p00}^\xi a_{00}^v\Big)a_q^\xi \tag{4.7}$$

$(i = 0,1,\ldots,J^s; l = 0,1,\ldots,2^i-1)$,

$$d_{000}^t d_{000il}^v + h_{000}^t d_{00il}^u = d_{il00}^s + \sum_{p,q=1}^{N}\gamma_{pq}\Big(d_{pil}^\zeta - a_p^\xi d_{00il}^u - d_{p00}^\xi d_{000il}^v\Big)d_{q00}^\xi \tag{4.8}$$

$(i = 0,1,\ldots,J^s; l = 0,1,\ldots,2^i-1)$,

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} h_{jkn}^t d_{jkil}^u = d_{iljn}^s + \sum_{p,q=1}^{N}\gamma_{pq}\Big(d_{pil}^\zeta - a_p^\xi d_{00il}^u - d_{p00}^\xi d_{000il}^v\Big)d_{qjn}^\xi \tag{4.9}$$

$(j = 1,\ldots,J^t; n = 0,1,\ldots,2^j-1; i = 0,1,\ldots,J^s; l = 0,1,\ldots,2^i-1)$.

Качество оптимального с.к. оператора определяется с.к. оценкой [10]:

$$\eta(s) = M\left[|\delta W|^2\right] = M\left[|W(s) - W^*(s)|^2\right] = M\left[|W(s) - A_t Z(t)|^2\right] =$$
$$= \Gamma_W(s,s) - A_t\overline{\Gamma_{WZ}(s,t)} = \Gamma_W(s,s) - A_t\Gamma_{WZ}(s,t),$$

так как $\Gamma_{WZ}(s,t)$ – действительная функция. Согласно (2.1), (2.2):

$$\Gamma_W(s,s) = \sum_{p,q=1}^{N} \gamma_{pq}\zeta_p(s)\zeta_q(s) + K_Y(s,s),$$

$$\Gamma_{WZ}(s,t) = \sum_{p,q=1}^{N} \gamma_{pq}\zeta_p(s)\xi_q(t) + K_{YX}(s,t).$$

Отсюда находим

$$\eta\,(s) = \sum_{p,q=1}^{N} \gamma_{pq}\zeta_p\,(s)\,\zeta_q\,(s) + K_Y\,(s,s) -$$

$$- A_t\left[\sum_{p,q=1}^{N} \gamma_{pq}\zeta_p\,(s)\,\xi_q\,(t) + K_{YX}\,(s,t)\right] =$$

$$= \sum_{p,q=1}^{N} \gamma_{pq}\zeta_p(s)\Big(\zeta_q(s) - a_q^{\xi}u_{00}(s) - d_{q00}^{\xi}v_{00}(s)\Big) + K_Y(s,s) -$$

$$- \left(\left(a^s\varphi_{00}^s + \sum_{j=0}^{J^s}\sum_{k=0}^{2^j-1} b_{jk}^s\varphi_{jk}^s(s)\right)u_{00}(s) + h_{00}^s\varphi_{00}^s(s)v_{00}(s)\right).$$

В итоге получено следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, а также*:

1) *наблюдаемый сигнал* $Z(t)$ *имеет вид* (2.1), *сигнал, подлежащий воспроизведению,* $W(s)$ *имеет вид* (2.2);

2) $\xi_1,\ldots,\xi_N \in L^2(T)$; $\quad \zeta_1,\ldots,\zeta_N \in L^2(S)$; $\quad K_{YX}(s,t) = M[Y(s)X(t)] \in \in L^2(S\times R)$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *с.к. оптимальный линейный оператор* A_t, *определяемый уравнением* (2.3), *задается набором формальных правил* (2.16), *а параметры* a_{jk}^u, d_{jkin}^u, a_{00}^u, d_{00in}^u, a_{00}^v, d_{00in}^v $(i = 0,\ldots,J^s;\ n = 0,1,\ldots,2^i-1;\ j = 1,\ldots,J^t;$ $k = 0,1,\ldots,2^j-1)$ *определяются СЛАУ* (4.4)–(4.9);

2) *качество с.к. оптимального линейного оператора* A_t *определяется с.к. оценкой*:

$$\eta(s) = \sum_{p,q=1}^{N} \gamma_{pq}\zeta_p(s)\Big(\zeta_q(s) - a_q^{\xi}u_{00}(s) - d_{q00}^{\xi}v_{00}(s)\Big) + K_Y(s,s) -$$

(4.10)

$$- \left(\left(a^s\varphi_{00}^s + \sum_{j=0}^{J^s}\sum_{k=0}^{2^j-1} b_{jk}^s\varphi_{jk}^s(s)\right)u_{00}(s) + h_{00}^s\varphi_{00}^s(s)v_{00}(s)\right).$$

Следствие. Пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда с.к. оптимальная оценка $W^*(s)$ сигнала $W(s)$ определяется формулой:

$$
\begin{aligned}
W^*(s) = A_t Z(t) = \sum_{r=1}^{N} U_r \Big(a_r^{\xi} u_{00}(s) + d_{r00}^{\xi} v_{00}(s) \Big) + \\
+ \sum_{\nu=1}^{L^t} V_\nu \left(d_{\nu 00}^{x} v_{00}(s) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} a_{\nu jk}^{x} u_{jk}(s) \right).
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Следствием теоремы 2 являются два алгоритма: построение с.к. оптимального линейного оператора A_t и построение с.к. оптимальной оценки $W^*(s)$ сигнала $W(s)$.

Алгоритм 1.

1. Задание вейвлет базисов (2.5), (2.6), (2.7)–(2.10), (2.11)–(2.14).

2. Вейвлет разложение функций $\xi_1, \ldots, \xi_N \in L^2(T)$ по базису (2.5), функций $\zeta_1, \ldots, \zeta_N(s) \in L^2(S)$ по базису (2.6), функции $K_X(t,\tau) \in L^2(T{\times}T)$ по базису (2.7)–(2.10), $K_{YX}(s,\tau) \in L^2(S{\times}T)$ по базису (2.11)–(2.14).

3. Составление и решение СЛАУ (4.4)–(4.9) относительно a_{jk}^u, d_{jkil}^u, a_{00}^u, d_{00in}^u, a_{00}^v, d_{00in}^v $(i = 0, \ldots, J^s;\ n = 0, 1, \ldots, 2^i - 1;\ j = 1, \ldots, J^t;\ k = 0, 1, \ldots \ldots, 2^j - 1)$.

4. Задание набора формальных правил (2.16), которыми определяется с.к. оптимальный линейный оператор A_t.

5. Вычисление с.к. оптимальной оценки η по формуле (4.10) для определения качества с.к. оптимального линейного оператора A_t.

Алгоритм 2.

1. Вейвлет разложение функций $\xi_1, \ldots, \xi_N \in L^2(T)$ по базису (2.5) в виде (4.1).

2. Вейвлет каноническое разложение случайной функции (СФ) $X(t)$ в виде (3.1):

— определение $k_{\nu\mu}$ по формулам (3.3), остальные $k_{\nu\mu} = 0$;

— определение $D_\nu = D[V_\nu]$ по формулам (3.5), (3.6);

— определение координатных функции $x_\nu(t)$ в виде линейных комбинаций базисных вейвлет функций вида (2.5) по формулам (3.7)–(3.14).

3. Построение с.к. оптимальной оценки $W^*(s)$ сигнала $W(s)$ в виде (4.11).

5. Инструментальное программное обеспечение “Синтез-ВЛ”

На основе методических результатов разделов 3 и 4 в ФИЦ ИУ РАН разработано инструментальное программное обеспечение (ИПО) “Синтез-ВЛ” в среде MATLAB, которое реализует алгоритмы построения вейвлет с.к. оптимального линейного оператора в случае линейной зависимости сигнала от параметров и аддитивной помехи и осуществляет:

1) ввод исходных данных: набор подпрограмм-функций, задающих структурные функции $\xi_1, \ldots, \xi_N, \zeta_1, \ldots, \zeta_N$ и ковариационные функции $K_X(t,\tau)$, $K_{YX}(s,\tau)$; промежуток наблюдения $[t_0, t_1]$ СтП $Z(t)$; промежуток оценки $[s_0, s_1]$ СтП $W(t)$; максимальные уровни вейвлет разложения J^t и J^S;

2) одномерное вейвлет разложение структурных функций $\xi_1,\ldots,\xi_N$, $\zeta_1,\ldots,\zeta_N$ по вейвлет базису Хаара с применением стандартной функции wavedec;

3) двумерное вейвлет разложение ковариационных функций $K_X(t,\tau)$ и $K_{YX}(s,\tau)$ по вейвлет базису Хаара с применением стандартной функции wavedec2;

4) автоматическое составление и решение СЛАУ для вычисления параметров: a^u_{jk}, d^u_{jkil}, a^v_{00}, d^v_{00in} $(i=1,\ldots,J^s;\ n=0,1,\ldots,2^i-1;\ j=1,\ldots,J^t;\ k=0,1,\ldots,2^j-1)$;

5) построение ВЛКР процесса $X(t)$ на основе двумерного вейвлет разложения ковариационной функции $K_X(t,\tau)$ по вейвлетам Хаара;

6) вывод результатов в числовом виде.

Исходные данные для ИПО "Синтез-ВЛ", задаваемые в числовом виде:

1) начальный момент времени наблюдения сигнала $T0=t_0$;

2) конечный момент времени наблюдения сигнала $T=t_1$;

3) начальный момент времени оценки сигнала $S0=s_0$;

4) конечный момент времени оценки сигнала $SS=s_1$;

5) максимальные уровни вейвлет разложения $Jt=J^t$, $Js=J^s$;

6) количество базисных вейвлет функций $Nt=2\cdot 2^{J^t}$, $Ns=2\cdot 2^{J^s}$.

Исходные данные для ИПО "Синтез-ВЛ" в аналитическом виде, задаваемые в виде пользовательских функций-подпрограмм:

1) набор функций-подпрограмм $fksi1,\ldots,fksiN$ для задания структурных функций $\xi_1,\ldots,\xi_N$;

2) набор функций-подпрограмм $fdzet1,\ldots,fdzetN$ для задания структурных функций $\zeta_1,\ldots,\zeta_N$;

3) подпрограмма-функция $fcov$ для задания ковариационной функции $K_X(t,\tau)$;

4) подпрограмма-функция $fcovYX$ для задания ковариационной функции $K_{YX}(s,\tau)$.

Подпрограммы-функции имеют синтаксис вызова: $cov=fcov(t1,t2)$; $covYX=fcovYX(s,t)$; $ksi=fksii(t)$ $(i=1,\ldots,N)$; $dzet=fdzeti(s)$ $(i==1,\ldots,N)$.

Все вычисления осуществляются в подпрограмме-функции SYNTHESISWL1, которая имеет синтаксис вызова:

$$[WOt,nett]=\mathrm{SYNTHESISWL1}(Jt,Nt,T0,T,Js,Ns,S0,SS).$$

Выходные данные выдаются в матричном виде:

1) $WOt(Ns)$ — вектор значений с.к. оптимальной оценки $W^*(s)$ сигнала $W(s)$ в точках $s_j=S0+(j-1)$ для $j=1,2,\ldots,Ns$;

2) $nett(Ns)$ — вектор значений с.к. оптимальной оценки η качества с.к. оптимального линейного оператора A_t в точках $s_j=S0+(j-1)$ для $j==1,2,\ldots,Ns$.

При вычислениях используется подпрограмма-функция KRWL1 для построения ВЛКР процесса $X(t)$, заданного на промежутке $[0,T]$, на основе двумерного вейвлет разложения ковариационной функции $K_X(t,\tau)$ по вейвлетам Хаара и для реализации алгоритма, изложенного в разделе 3. Подпрограмма-функция KRWL1 имеет синтаксис вызова:

$$[Xnu, Dnu, DispX, XKRW] = \mathrm{KRWL1}(J, NJ, T),$$

где J – максимальный уровень вейвлет разложения; $NJ = 2\cdot 2^J$. При вычислениях используется стандартная функция wavedec2 для получения коэффициентов двумерного вейвлет разложения ковариационной функции одномерного СтП $X(t)$, заданной с помощью подпрограммы-функции $fcov$. Выходные данные выдаются в матричном виде:

1) $Xnu(NJ, NJ)$ — матрица значений координатных функций ВЛКР:

$$Xnu(i,j) = x_i\left(\frac{T(j-0{,}5)}{N}\right) \quad \text{для} \quad i,j = 1,2,\ldots,NJ;$$

2) $Dnu(NJ)$ — вектор значений дисперсий $D_\nu \quad (\nu = 1,2,\ldots,NJ)$ некоррелированных СВ $V_1,\ldots,V_{NJ}$;

3) $DispX(NJ)$ — вектор значений дисперсии СтП $X(t)$ в точках $t_j = \frac{T(j-0{,}5)}{NJ}$ для $j = 1,2,\ldots,NJ$;

4) $XKRW(NJ)$ — вектор значений реализации СтП $X(t)$ в точках $t_j = \frac{T(j-0{,}5)}{NJ}$ для $j = 1,2,\ldots,NJ$.

6. Применения

Найти с.к. оптимальный линейный фильтр, предназначенный для воспроизведения сигнала

$$W(s) = U_1 + U_2\delta(s - s^*) \tag{6.1}$$

по результатам наблюдения суммы этого сигнала и некоррелированной помехи, т.е.

$$Z(t) = U_1 + U_2\delta(t - t^*) + X(t). \tag{6.2}$$

Наблюдение производится в течение интервала времени длительностью T, предшествующего данному моменту s $(s \geqslant T)$. Случайная функция $X(t)$ задана математическим ожиданием, равным нулю, и ковариационной функцией $K_X(t,\tau) = D\exp(-\alpha|t-\tau|)$. U_1, U_2 – СВ с нулевыми математическими ожиданиями, не коррелированные с $X(t)$, $M[U_p\overline{U_q}] = \gamma_{pq}(p,q = 1,2)$.

Применим алгоритм 1 для построения с.к. оптимального линейного оператора A_t для воспроизведения сигнала $W(s)$, заданного формулой (6.1), по результатам наблюдения сигнала $Z(t)$, заданного формулой (6.2), и для определения с.к. оптимальной оценки η качества оператора A_t . При вычислениях будем использовать ортонормированный базис Хаара вида (2.5), где

масштабирующая функция $\varphi^t_{00}(t) = \varphi^t(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0,1), \\ 1, & \text{если } t \notin [0,1), \end{cases}$

материнский вейвлет $\psi^t_{00}(t) = \psi^t(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [0,\frac{1}{2}), \\ -1, & \text{если } t \in [\frac{1}{2},1), \\ 0, & \text{если } t \notin [0,1). \end{cases}$

Перейдем от переменной $t \in [s-T, s]$ к переменной $\bar{t} \in [0,1]$ с помощью замены переменной $\bar{t} = \frac{t-(s-T)}{s-(s-T)} = \frac{t-(s-T)}{T}$. Тогда

$$K_X(t,\tau) = K_X(\bar{t},\bar{\tau}) = D\exp(-\alpha T(|\bar{t}-\bar{\tau}|)),$$
$$Z(t) = Z(\bar{t}) = U_1 + U_2((s-T)+T\bar{t}) + X((s-T)+T\bar{t}).$$

Далее в примере для простоты записи будем считать, что $t=\bar{t}$, $\tau=\bar{\tau}$.

Уравнение (2.3) в данном случае имеет вид:

$$A_t[K_X(t,\tau)] = \sum_{p,q=1}^{2} \gamma_{pq}\Big(\zeta_p(s) - A_t[\xi_p(t)]\Big)\xi_q(\tau),$$

так как $Y(s)=0$ и как следствие $K_{YX}(s,\tau)=0$.

Тогда СЛАУ для определения неизвестных функций $u_{00}(s)$, $v_{00}(s)$, $u_{jk}(s)$ $(j=1,2,\ldots,J^t;\ \ k=0,1,\ldots,2^j-1)$ для заданного значения переменной s имеет вид:

$$\begin{cases}
a^t u_{00}(s) + b^t_{000}v_{00}(s) = \displaystyle\sum_{p,q=1}^{2}\gamma_{pq}\lambda_p a^\xi_q,\\
d^t_{000}v_{00}(s) + h^t_{000}u_{00}(s) = \displaystyle\sum_{p,q=1}^{2}\gamma_{pq}\lambda_p d^\xi_{q00},\\
\displaystyle\sum_{k=0}^{2^j-1} h^t_{jkn}u_{jk}(s) = \sum_{p,q=1}^{2}\gamma_{pq}\lambda_p d^\xi_{qjn}\\
(j=1,2,\ldots,J^t; k=0,1,\ldots,2^j-1),\\
\lambda_1 = \zeta_1(s) - a^\xi_1 u_{00}(s) - d^\xi_{100}v_{00}(s),\\
\lambda_2 = \zeta_2(s) - a^\xi_2 u_{00}(s) - d^\xi_{200}v_{00}(s).
\end{cases}$$

Здесь для удобства введены переменные

$$\lambda_p = \zeta_p(s) - a^\xi_p u_{00}(s) - d^\xi_{p00}v_{00}(s) \quad (p=1,2).$$

Для заданного значения переменной s набор формальных правил, которыми определяется с.к. оптимальный линейный оператор A_t при $t\in[0,1]$, имеет вид (2.16). При этом с.к. оптимальная оценка η для определения качества с.к. оптимального линейного оператора A_t вычисляется по формуле:

$$\eta(s) = \sum_{p,q=1}^{2}\gamma_{pq}\zeta_p(s)\Big(\zeta_q(s) - a^\xi_q u_{00}(s) - d^\xi_{q00}v_{00}(s)\Big).$$

С.к. оптимальная оценка η качества с.к. оптимального линейного оператора A_t зависит только от функций $u_{00}(s)$, $v_{00}(s)$. Для построения с.к. оптимальной оценки $W^*(s)$ сигнала $W(s)$ необходимо выполнить алгоритм 2.

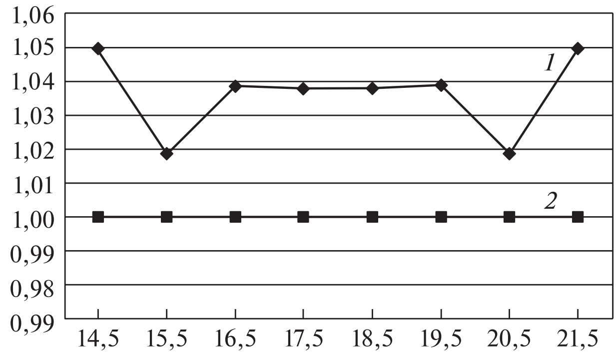


Рис. 1. Графики дисперсии СФ $X(t)$: график *1* – точные значения, график *2* – приближенные значения.

В результате имеем

$$W^*(s) = \sum_{r=1}^{2} U_r \Big(a_r^{\xi} u_{00}(s) + d_{r00}^{\xi} v_{00}(s) \Big) +$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{L^t} V_{nu} \left(d_{\nu 00}^{x} v_{00}(s) + \sum_{j=0}^{J^t} \sum_{k=0}^{2^j-1} a_{\nu jk}^{x} u_{jk}(s) \right).$$

Вычисления осуществлялись на основе ИПО “Синтез-ВЛ”. Использовались следующие исходные данные: $\alpha = 1$; $s = 11, 12, \ldots, 18$; $T = 8$; $t^* = (s - T) + \frac{3T}{2*2^{J^t}}$; $s^* = s$; $\gamma_{11} = \gamma_{22} = 1$; $\gamma_{12} = \gamma_{21} = 0$.

Как показали вычислительные эксперименты, уже при $J^t = 2$ относительная точность аппроксимации дисперсии $X(t)$ оказывается менее 5 %. Был использован вейвлет базис Хаара для $J^t = 2$. В табл. 1 и на рис. 1 приведены точные значения дисперсии $D_T(t_i)$ для $X(t)$ в точках $t_i \in [10, 18]$ и приближенные значения дисперсии $D_a(t_i)$, полученные методом ВЛКР.

Величина с.к. ошибки аппроксимации дисперсии в этом случае равна

$$\sigma_n^D = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big(D_a(t_i) - D_T(t_i) \Big)^2} = 0{,}0374.$$

Значения дисперсий D_ν независимых нормально распределенных СВ V_ν, вычисленные по формулам (3.5), (3.6), приведены в табл. 2.

Таблица 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i	10,5	11,5	12,5	13,5	14,5	15,5	16,5	17,5
$D_a(t_i)$	1,0499	1,0185	1,0387	1,0383	1,0383	1,0387	1,0185	1,0499
$D_T(t_i)$	1	1	1	1	1	1	1	1

Таблица 2

ν	1	2	3	4	5	6	7	8
D_ν	0,2206	0,1785	0,1302	0,1302	0,0851	0,0851	0,0851	0,0851

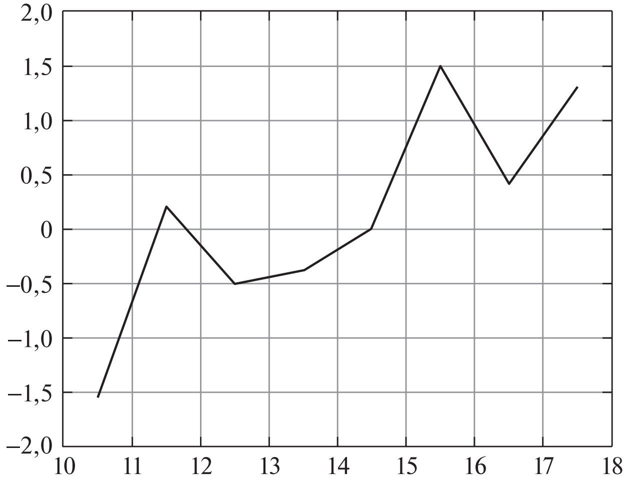


Рис. 2. График реализации СФ $X(t)$.

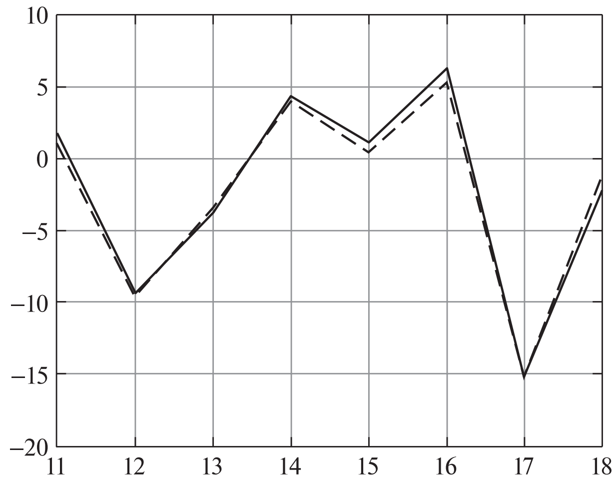


Рис. 3. Графики реализации сигнала $W(s)$ и его оценки $W^*(s)$ $(s = 11, 12, \ldots, 18)$: сплошная линия — сигнал, штриховая линия — его оценка.

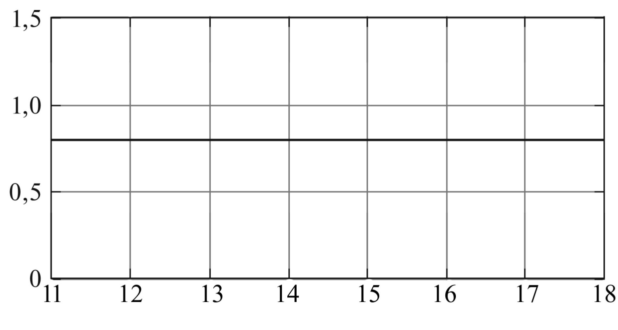


Рис. 4. График с.к. оптимальной оценки η точности оператора A_t.

На рис. 2 изображена одна из реализаций $X(t)$, смоделированная на основе ее ВЛКР (3.1).

На рис. 3 и 4 представлены результаты вычислительного эксперимента для $s \in [11, 18]$.

Значение η зависит от того, насколько значения $\zeta_q(s)$ отличаются от значений выражений $\zeta_q^*(s) = a_q^\xi u_{00}(s) - d_{q00}^\xi v_{00}(s)$ $(q = 1, 2)$. Вычислительные эксперименты показали, что с.к. оптимальная оценка η точности с.к. оптимального линейного оператора A_t равна 0,7973 при значениях сигнала $W(s) \in$ $\in [-15{,}2122; 6{,}2199]$.

7. Заключение

Разработано вейвлет методическое и инструментальное программное обеспечение для с.к. оптимального синтеза существенно нестационарных линейных фильтров на основе вейвлет канонических разложений в среде MATLAB.

Для стохастических систем в условиях стохастических одно- и многократных ударных воздействий, описываемых КР, ВЛР и ВЛКР разработано специальное инструментальное обеспечение для оптимизации фильтров, оценки и идентификации ударных воздействий. Эти результаты нашли применения в задачах анализа и моделирования, оценки и идентификации ударных воздействий в прецизионных информационно-управляющих системах.

Аналогично [13, 14] рассматриваются сложные виброударные одно- и многомерные виброударные воздействия, представимые КР, ВЛР и ВЛКР.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карпенко А.П.* Современные алгоритмы поисковой оптимизации. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017.
2. *Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Сергеев И.В.* Развитие алгоритмического обеспечения анализа стохастических систем, основанного на канонических разложениях случайных функций // АиТ. 2011. № 2. С. 195–206.

   Sinitsyn I.N., Sinitsyn V.I., Korepanov E.R., Belousov V.V., Sergeev I.V. Development of Algorithmic Support for the Analysis of Stochastic Systems Based on Canonical Expansions of Random Functions // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 2. P. 405–415.
3. *Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д.* Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности. IV // Системы высокой доступности. 2017. Т. 13. № 3. С. 55–69.
4. *Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д.* Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности. V // Системы высокой доступности. 2018. Т. 14. № 1. С. 59–70.
5. *Синицын И.Н., Сергеев И.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д.* Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности. VI // Системы высокой доступности. 2018. Т. 14. № 2. С. 40–56.

6. *Синицын И.Н., Жуков Д.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д.* Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности. VII // Системы высокой доступности. 2019. Т. 15. № 1. С. 47–61.
7. *Синицын И.Н., Жуков Д.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д.* Инструментальное программное обеспечение анализа и синтеза стохастических систем высокой доступности. VIII // Системы высокой доступности. 2019. Т. 15. № 1. С. 62–69.
8. *Синицын И.Н., Жуков Д.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д.* Развитие прямых методов аналитического интерполяционного моделирования распределений в стохастических системах // Системы компьютерной математики и их приложения. Матер. XX Междунар. науч. конф. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2019. Вып. 20.4.1. С. 256–260.
9. *Синицын И.Н., Жуков Д.В., Корепанов Э.Р., Конашенкова Т.Д.* Метод линейной оптимальной обработки информации посредством вейвлет разложений // Системы компьютерной математики и их приложения. Матер. XXI Междунар. науч. конф. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2020. Вып. 21. С. 213–220.
10. *Синицын И.Н.* Канонические представления случайных функций и их применение в задачах компьютерной поддержки научных исследования. М.: ТОРУС ПРЕСС, 2009.
11. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Москва–Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2004.
12. *Новиков И.Я., Стечкин С.Б.* Основы теории всплесков // Успехи математических наук. 1998. Т. 53. № 6 (324). С. 53–126.
13. *Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А.* Вейвлеты и их использование // УФН. 2001. Т. 171. № 5. С. 465–501.
14. *Синицын И.Н., Сергеев И.В.* Применение канонических представлений случайных функций в задачах расчета виброзащитных систем для компьютерного оборудования // Тр. XI Междунар. науч. конф., посвящ. 70-летию проф. В.П. Дьяконова. Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2010. ISBN 978-5-88018-445-3. С. 239–241.
15. *Синицын И.Н., Синицын В.И., Корепанов Э.Р., Белоусов В.В., Сергеев И.В.* Компьютерное моделирование стохастических систем на базе канонических разложений // Тр. XI Междунар. конф. "Кибернетика и высокие технологии XXI в. (C&T 2010)". Воронеж: НПФ "Саквоее" ООО, 2010. ISBN 978-5-904259-05-1. С. 798–809.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 25.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020

Автоматика и телемеханика, № 11, 2020

© 2020 г. М.М. ХРУСТАЛЕВ, д-р физ.-мат. наук (mmkhrustalev@mail.ru), К.А. ЦАРЬКОВ, канд. физ.-мат. наук (k6472@mail.ru) (Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ТЕРМИНАЛЬНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФУЗИОННО-СКАЧКООБРАЗНОГО ТИПА[1]

Сформулированы и доказаны достаточные условия терминальной инвариантности нелинейных динамических стохастических управляемых систем диффузионно-скачкообразного типа. Скачкообразная компонента имеет вид интеграла по случайной мере Пуассона. Предполагается, что параметры меры (интенсивность и распределение величин скачков) меняются со временем. Предлагаются как условия инвариантности по возмущениям при заданном начальном состоянии, так и условия абсолютной инвариантности, обеспечивающие постоянство значения терминального критерия при любых начальных данных. Применимость результатов продемонстрирована на ряде модельных примеров, включающих в себя результаты численного моделирования и аналитическое исследование построенных терминально инвариантных динамических систем.

Ключевые слова: достаточные условия терминальной инвариантности, нелинейные стохастические системы, диффузионно-скачкообразные процессы, системы с импульсными воздействиями.

DOI: 10.31857/S0005231020110094

1. Введение

Исследования в области теории терминальной инвариантности динамических управляемых систем начались в 1963 г. [1]. После этого в 1968 г. в [2] были получены глобальные необходимые и достаточные условия инвариантности по возмущениям (или слабой инвариантности, в терминологии [1]) и условия абсолютной инвариантности как по возмущениям, так и по начальным данным для детерминированных систем управления. Затем, в 1987 г. эти условия были собраны и структурированы в монографии [3], где также была подробно описана обширная база практических приложений теории, которые остаются актуальными и по сей день. Более подробную информацию о примерах решения конкретных прикладных задач динамики полета методами теории инвариантности можно также найти в [4] и по ссылкам из [3].

Исследования продолжились в 2017 г. в [5, 6], когда условия терминальной инвариантности удалось обобщить на случай стохастических управляемых систем диффузионного типа. Наконец, в 2018 г. вышла статья [7], в которой

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-08-00400).

теоретические результаты приобрели более строгую и точную математическую формулировку, а возможность их использования для решения конкретных прикладных задач была показана на нескольких нетривиальных примерах. Исследования условий терминальной инвариантности для различных значимых частных случаев управляемых диффузионных процессов продолжаются и в настоящее время [8].

В данной работе авторы намерены положить начало новому витку развития теории терминальной инвариантности и рассмотреть обобщение управляемых систем диффузионного типа в виде стохастических систем, содержащих не только непрерывную гауссовскую часть, но и разрывную пуассоновскую компоненту [9]. Такие системы (и соответствующие им процессы) в различных источниках называют системами с импульсными воздействиями, со случайным периодом квантования или диффузионно-скачкообразными процессами. Авторы считают последнее наименование наиболее удачным в рамках рассматриваемой теории и ориентируются, в частности, на работы [10, 11], где оно также использовано. В сравнении с исследованиями этих процессов и систем в [10], здесь пуассоновская компонента дополнительно предполагается неоднородной по времени [11–13].

Необходимость подобного обобщения продиктована в том числе интересами практики, так как в настоящее время для более эффективного математического моделирования реальных управляемых процессов все чаще используются «событийные» стохастические модели [14, 15]. В различных областях приложений в роли независимых друг от друга однотипных случайных событий могут выступать скачки напряжения, обрывы связи, порывы ветра, малые метеоритные воздействия, поломки, чрезвычайные происшествия на производстве, корпоративные дефолты, страховые случаи и т.п. Одной из наиболее распространенных моделей подобного рода является рассматриваемая в данной работе диффузионно-скачкообразная модель.

Несмотря на то, что исследования различных свойств стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа в последние годы по всему миру ведутся весьма активно, свойство терминальной инвариантности для них фактически не изучено. Последнее может быть связано в первую очередь с тем, что широкую известность приобрели различные приближенные и численные методы, позволяющие конструировать некоторые аппроксимации терминально инвариантных систем. Для этого могут быть использованы disturbance attenuation approach, model predictive control (MPC), теория робастного управления. В то же время точное аналитическое построение терминально инвариантных систем имеет ряд существенных преимуществ. Так, например, в результате применения точного аналитического решения методическая ошибка (равная в этом случае нулю) не прибавляется к ошибкам измерений и реализации управляющих воздействий, имеющих место на практике. Еще одним преимуществом методов теории инвариантности является существенная неединственность решений, что дает возможность получения результатов в том числе и для нелинейных задач (см. статью [4] или академический пример в [7]). В силу этих причин, авторы считают оправданным продолжение развития теории терминальной инвариантности несмотря на то, что других подобных результатов для сколь-нибудь общей ситуации им не известно.

Основная идея теории терминальной инвариантности достаточно близка к понятию первого интеграла рассматриваемой динамической системы. Соответствующее понятие для систем диффузионно-скачкообразного типа сформулировано, например, в [16].

2. Постановка задачи

Будем считать, что управляемая динамическая система описывается стохастическим дифференциальным уравнением [9]

$$
\begin{gathered}
dx\,(t) = f\,(t, x\,(t), u\,(t, \gamma\,(x\,(t), v\,(t))), v\,(t))\,dt + \\
+\, g\,(t, x\,(t), u\,(t, \gamma\,(x\,(t), v\,(t))), v\,(t))\,dw\,(t) + \\
+ \int\limits_{\mathbb{R}^r} h\left(t, x\left(t^-\right), u\left(t, \gamma\left(x\left(t^-\right), v\right)\right), v\right)\hat{\mu}\,(dt \times dv), \quad x\,(t_0) = x_0,
\end{gathered} \tag{1}
$$

где $t \in [t_0; t_F] \subset [t_S; t_F] \subset \mathbb{R}$ – время, моменты t_S и t_F фиксированы, t_F совпадает с конечным моментом времени функционирования системы; начальное условие $(t_0, x_0) \in B_0$, $t_0 \geqslant t_S$, заранее не задано, но определено множество $B_0 \subset [t_S; t_F) \times \mathbb{R}^n$ всех возможных начальных условий; $x(t)$ – n-мерный вектор, характеризующий состояние системы в момент времени t; отображение $t \to v(t)$ – r-мерный случайный процесс с заданным (одномерным) распределением $\nu(t, \cdot)$ (вероятностной мерой при каждом t), имеющий смысл случайного внешнего возмущения, мгновенные значения которого могут частично измеряться в процессе наблюдений; отображение $t \to w(t)$ – q-мерный стандартный винеровский процесс, стартующий в момент времени t_0 из точки $w(t_0) = 0$, который описывает полностью ненаблюдаемую часть непрерывных возмущений;

$$
\hat{\mu}(dt \times dv) := \begin{cases} \mu(dt \times dv) - \Pi(t, dv)dt, & \text{если } dv \subset \Theta, \\ \mu(dt \times dv), & \text{если } dv \subset \mathbb{R}^r \setminus \Theta, \end{cases} \tag{2}
$$

$\mu(\cdot)$ – l-мерная неоднородная случайная пуассоновская мера на $[t_S; t_F] \times \mathbb{R}^r$ с интенсивностью $\Pi(\cdot)$, в каждый момент времени t значение $\Pi(t, \cdot)$ – заданная l-мерная неслучайная ненормированная мера на $\mathbb{R}^r$ с условием $0 < \Pi(t, \mathbb{R}^r) < +\infty$ такая, что выполнено равенство $\Pi(t, \cdot) = \Pi(t, \mathbb{R}^r)\nu(t, \cdot)$, Θ – заданное измеримое подмножество $\mathbb{R}^r$; $(x, v) \to \gamma(x, v)$ – заданная измеримая p-мерная функция, описывающая процесс наблюдений; $(t, \gamma) \to u(t, \gamma)$ – m-мерная неслучайная измеримая стратегия управления (заранее не задана, но может быть выбрана произвольно в целях, формулируемых далее); $f(\cdot)$, $g(\cdot)$, $h(\cdot)$ – заданные измеримые матричные функции соответствующих размеров; здесь и далее в работе используется обозначение $x(t^-) := \lim_{s \to t-0} x(s)$, $t \in (t_0; t_F]$, $x(t_0^-) := x_0$, а под измеримостью (подмножеств действительного пространства и действительнозначных функций на нем) понимается измеримость по Борелю. Предполагается, что процессы $v(t)$, $w(t)$ и мера $\mu(\cdot)$ независимы в совокупности.

Отдельных разъяснений требует конструкция последнего слагаемого в правой части системы (1), включающая в себя случайную меру $\hat{\mu}(\cdot)$. Предполагается, что на управляемый процесс оказывают влияние некоторые потоки событий произвольной природы, происходящих независимо друг от друга (внутри одного потока и между ними), с известными неслучайными неоднородными по времени интенсивностями $\Pi_j(t,\mathbb{R}^r)$, $j=\overline{1,l}$. Если в момент времени $s \in [t_0;t_F]$ произошло одно из таких событий, то вектор состояния системы получает мгновенное (скачкообразное) приращение на величину, зависящую от момента времени s, текущего состояния $x(s^-)$ и значения случайного вектора внешних возмущений $v(s)$ с распределением $\nu(s,\cdot)$. Эта величина также зависит от вида функции $h(\cdot)$ и выбранной стратегии управления $(t,\gamma) \to u(t,\gamma)$. Конструкция (2) со множеством Θ определяет общий характер данных воздействий. А именно, если $\Theta=\varnothing$, то на состояние системы также влияет дополнительная непрерывная компонента, в среднем полностью компенсирующая влияние скачков. Если же $\Theta=\mathbb{R}^r$, то со временем влияние скачков в среднем только нарастает. Промежуточные варианты устанавливают некоторую (линейную) комбинацию указанных эффектов.

Замечание 1. В [2–8] не использовалась p-мерная функция наблюдений $\gamma(\cdot)$. Вместо этого предполагалось, что $\gamma(x,v)=(x^{\mathrm{T}},v^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, $p=n+r$. Однако вполне естественно предположить, что вектор возмущений $v(t)$ может быть не доступен для прямых измерений в процессе управления, точно также, как и вектор состояния $x(t)$. Таким образом, введение в рассмотрение функции $\gamma(\cdot)$ отвечает практическим требованиям и в то же время не сильно затрагивает конструкцию условий терминальной инвариантности.

Определение 1. Стратегию управления $(t,\gamma)\to u(t,\gamma)$ будем называть B_0-допустимой, если уравнение (1) *имеет хотя бы одно слабое решение* [9, с. 519] *на интервале* $[t_0;t_F]$ *для любого фиксированного начального условия* $(t_0,x_0)\in B_0$.

Еще до непосредственной постановки задачи терминально инвариантного управления и до формулировки достаточных условий терминальной инвариантности подчеркнем, что определение 1 не предусматривает проверки каких-либо условий существования слабого решения (например, [9, с. 519, теорема 2]) на первых этапах исследования каждой конкретной задачи. Подход, который пропагандируют авторы, состоит в том, чтобы попытаться формально удовлетворить достаточные условия инвариантности с помощью некоторой стратегии управления. После этого ее следует подставить в систему, и в том случае, если для замкнутой таким образом системы удастся проверить выполнение тех или иных достаточных условий существования слабого (или, тем более, единственного сильного) решения, задача будет решена. Если же никаких условий проверить не удастся, то результат тем не менее можно будет использовать как эвристическое средство решения задачи, хотя последний вариант и не будет гарантировать получение искомого результата.

Тем не менее со строго математической точки зрения все дальнейшие следствия и формулировки справедливы <u>только</u> в том случае, когда существует хотя бы одна B_0-допустимая стратегия, которую удается найти. Для каждой такой стратегии уравнение (1) допускает [13, 17] представление в интегральной форме

(3)
$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s), u(s, \gamma(x(s), v(s))), v(s))ds +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{t} g(s, x(s), u(s, \gamma(x(s), v(s))), v(s))dw(s) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{\tilde{P}_j(t_0,t)} h^{(j)} \left(t_k^{(j)}, x\left(t_k^{(j)-}\right), u\left(t_k^{(j)}, \gamma\left(x\left(t_k^{(j)-}\right), v\left(t_k^{(j)}\right)\right)\right), v\left(t_k^{(j)}\right)\right) -$$
$$- \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{\Theta} h(s, x(s^-), u(s, \gamma(x(s^-), v)), v)\Pi(s, dv)ds,$$

где $h^{(j)}(\cdot)$ – j-й столбец матрицы $h(\cdot)$; $\tilde{P}_j(t_0, t) := P_j(t - t_S) - P_j(t_0 - t_S)$, $P_j(t)$ – неоднородный считающий процесс (процесс Пуассона при $t \geqslant 0$), согласованный с j-м пуассоновским потоком событий с мгновенной интенсивностью $\Pi_j(t + t_S, \mathbb{R}^r)$; $t_1^{(j)}, t_2^{(j)}, \ldots$ – моменты наступления событий потока, $t_0 \leqslant t_k^{(j)} \leqslant t \leqslant t_F$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, $j = \overline{1, l}$. Третье и пятое слагаемые в правой части (3) определены в смысле интегралов Ито и Лебега соответственно. Данное представление может быть эффективно использовано для численного моделирования процесса управления. В некоторых случаях оно также более удобно для аналитического исследования.

Замечание 2. Необходимость использования предела суммирования $\tilde{P}_j(t_0, t)$ в представлении (3) связана с тем, что $t_0 \geqslant t_S$ и, в отличие от классического определения меры Пуассона [9], мера $\mu(\cdot)$ предполагается заданной на множестве $[t_S; t_F] \times \mathbb{R}^r$, где интервал $[t_S; t_F]$ вовсе не обязательно является подмножеством $\mathbb{R}_+$. Данные допущения удобны с точки зрения теории терминальной инвариантности [7].

Пусть (B_0-допустимая) стратегия $(t, \gamma) \to u(t, \gamma)$ фиксирована. Рассмотрим некоторое начальное условие $(t_0, x_0) \in B_0$. В соответствии с определением 1 существует слабое решение $\mathcal{S}$ уравнения (1), включающее в себя вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F},\ t \in [t_0; t_F]\}$, на котором найдутся процесс $v(t)$ с распределением $\nu(t, \cdot)$, винеровский процесс $w(t)$, пуассоновская мера $\mu(\cdot)$ интенсивности $\Pi(\cdot)$ и процесс $x(t)$, все согласованные с $\mathcal{F}_t$ и $\mathbf{P}$-п.н. (почти наверное) связанные соотношениями (1) и (3) при $t \in [t_0; t_F]$. Через $D(t_0, x_0)$ обозначим множество всех таких решений $\mathcal{S}$ и введем также множество

$$D(B_0) := \bigcup_{(t_0, x_0) \in B_0} D(t_0, x_0).$$

Определение 2. Будем говорить, что некоторое свойство относительно процессов $v(t)$, $w(t)$, $x(t)$ и меры $\mu(\cdot)$ выполняется на $D(B_0)$ (или на $D(t_0, x_0)$) с вероятностью 1 или почти наверное, если при любом $\mathcal{S} \in D(B_0)$ (или $\mathcal{S} \in D(t_0, x_0)$) оно $\mathbf{P}$*-п.н. выполнено.*

В частности, если задана (B_0-допустимая) стратегия управления, то можно сказать, что процессы $v(t)$, $w(t)$, $x(t)$ и мера $\mu(\cdot)$ почти наверное связаны соотношениями (1) и (3) на $D(B_0)$.

На множестве $D(B_0)$ определим терминальный критерий, который каждому элементу $\mathcal{S} \in D(B_0)$ ставит в соответствие случайную величину

$$J(\mathcal{S}) = F(x(t_F)), \quad F(\cdot) \in C^2(\mathbb{R}^n). \tag{4}$$

Замечание 3. Терминальный критерий (4) представляет собой параметризованное семейство отображений, так как для каждого слабого решения $\mathcal{S} \in D(B_0)$ случайная величина $F(x(t_F))$ определена на своем соответствующем $\mathcal{S}$ вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Определение 3. Систему (1) при фиксированной стратегии $(t, \gamma) \to \to u(t, \gamma)$ будем называть инвариантной по возмущениям, если для любого фиксированного начального условия $(t_0, x_0) \in B_0$ случайная величина (4) с вероятностью 1 на $D(t_0, x_0)$ совпадает с некоторым числом $J_c(t_0, x_0)$.

Определение 4. Систему (1) при фиксированной стратегии $(t, \gamma) \to \to u(t, \gamma)$ будем называть абсолютно инвариантной, если случайная величина (4) с вероятностью 1 на $D(B_0)$ совпадает с одним и тем же числом J_c^A.

В условиях задачи, сформулированных в настоящем разделе, требуется определить стратегию управления, обеспечивающую терминальную инвариантность динамической системы (1) в смысле определения 3 или определения 4.

3. Достаточные условия терминальной инвариантности

В данном разделе дадим обобщение достаточных условий инвариантности [7] на класс систем диффузионно-скачкообразного типа. Действуя в полном соответствии с [7], введем в рассмотрение множество $\Phi := C^{1,2}([t_S; t_F] \times \mathbb{R}^n)$ функций $(t, x) \to \varphi(t, x) : [t_S; t_F] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, имеющих непрерывные производные φ_t, φ_x, φ_{xx}. Для краткости обозначим

$$\sigma(t, x, u, v) = g(t, x, u, v) g^{\mathrm{T}}(t, x, u, v), \tag{5}$$

$$K(t, x, u, v) = \varphi_t(t, x) + \varphi_x^{\mathrm{T}}(t, x) f(t, x, u, v) + \frac{1}{2} \mathrm{tr}[\sigma(t, x, u, v) \varphi_{xx}(t, x)], \tag{6}$$

$$S(t, x, u, v) = \varphi_x^{\mathrm{T}}(t, x) g(t, x, u, v), \tag{7}$$

$$\Gamma^{(j)}(t, x, u, v) = \varphi(t, x + h^{(j)}(t, x, u, v)) - \varphi(t, x), \quad \Gamma = (\Gamma^{(1)}, \ldots, \Gamma^{(l)}), \tag{8}$$

$$\Lambda(t, x, u, v) = \Gamma(t, x, u, v) - \varphi_x^{\mathrm{T}}(t, x) h(t, x, u, v), \tag{9}$$

$$L(t, x, u, v) = K(t, x, u, v) + \int\limits_{\Theta} \Lambda(t, x, u, v) \Pi(t, dv). \tag{10}$$

Теорема 1. Если при фиксированной стратегии $(t,\gamma)\to u(t,\gamma)$ существуют измеримая ограниченная функция $t\to\eta(t):[t_S;t_F]\to\mathbb{R}$ и функция $\varphi(\cdot)\in\Phi$ такие, что для всех $x\in\mathbb{R}^n$, $v\in\mathbb{R}^r$ выполнены условия

(i) $\varphi(t_F,x)=F(x)$,

(ii) $L(t,x,u(t,\gamma(x,v)),v)=\eta(t)$ *почти всюду на* $[t_S;t_F]$,

(iii) $S(t,x,u(t,\gamma(x,v)),v)=0$ *почти всюду на* $[t_S;t_F]$,

(iv) $\Gamma(t,x,u(t,\gamma(x,v)),v)=0$ *всюду на* $[t_S;t_F]$,

то система (1) *инвариантна по возмущениям, а значение критерия п.н. равно*

$$J_c(t_0,x_0)=\varphi(t_0,x_0)+\int\limits_{t_0}^{t_F}\eta(t)dt. \tag{11}$$

Теорема 2. Если при фиксированной стратегии $(t,\gamma)\to u(t,\gamma)$ существуют измеримая ограниченная функция $t\to\eta(t):[t_S;t_F]\to\mathbb{R}$, функция $\varphi(\cdot)\in\Phi$ и постоянная $A>0$ такие, что для всех $x\in\mathbb{R}^n$, $v\in\mathbb{R}^r$ выполнены условия

(i) $\eta(t_F^-)=\eta(t_F)$,

(ii) $\varphi(t_F,x)=F(x)$,

(iii) $L(t,x,u(t,\gamma(x,v)),v)=(\eta(t)-A\varphi(t,x))(t_F-t)^{-1}$ *почти всюду на* $[t_S;t_F]$,

(iv) $S(t,x,u(t,\gamma(x,v)),v)=0$ *почти всюду на* $[t_S;t_F]$,

(v) $\Gamma(t,x,u(t,\gamma(x,v)),v)=0$ *всюду на* $[t_S;t_F]$,

то система (1) *абсолютно инвариантна, а значение критерия п.н. равно*

$$J_c^A=\frac{\eta(t_F)}{A}. \tag{12}$$

Структура полученных результатов практически не отличается от соответствующих утверждений из [7]. Это связано с тем, что доказательства теорем 1 и 2 (см. Приложение), как и в случае работы [7], основаны на применении формулы Ито, принимающей в контексте рассматриваемой задачи некоторый обобщенный вид [9, 10, 16]. Поэтому также остаются справедливыми следующие два утверждения.

Замечание 4 [7]. Если условия теоремы 2 оказываются выполнены для функции $\eta(t)\equiv 0$ и $A>1$, то функция

$$t\to\mathcal{L}(t):=L(t,x(t),u(t,\gamma(x(t),v(t))),v(t))$$

вида (10), несмотря на условие (iii), является ограниченной п.н. на $D(B_0)$ и п.в. на $[t_S;t_F]$ и, более того, $\mathcal{L}(t_F^-)=0$.

Замечание 5 [8]. Из определения абсолютной инвариантности 4 следует, что для наличия этого свойства у системы (1) достаточно, чтобы условия теоремы 2 выполнялись п.н. на $D(B_0)$ лишь для моментов времени малого интервала $[t_F-\varepsilon;t_F]$. Величина числа $\varepsilon>0$ может быть, вообще говоря, различной для каждого $\mathcal{S}\in D(B_0)$.

Замечание 6. Если $\Theta = \varnothing$, то все условия теорем 1, 2 и формулы (11) и (12) не зависят от интенсивности $\Pi(\cdot)$ пуассоновской меры $\mu(\cdot)$. В этом случае из терминальной инвариантности системы (1) для некоторой интенсивности $\Pi(\cdot)$ следует ее терминальная инвариантность и для любой другой интенсивности $\Pi'(\cdot)$.

4. Примеры

В [7] было изучено несколько модельных примеров терминальной инвариантности стохастических систем диффузионного типа. В данной работе в силу новизны скачкообразной компоненты с точки зрения теории терминального управления, а также с целью более наглядной демонстрации новых результатов, сконцентрируем внимание в основном на системах чисто скачкообразного типа (т.е. без диффузионного слагаемого). При решении общей задачи терминальной инвариантности диффузионно-скачкообразной системы можно объединить исследования примеров настоящей работы и статьи [7].

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} dx_1(t) = x_2(t)dt + x_2(t^-)\mu(dt \times \mathbb{R}), \\ dx_2(t) = -x_1(t)dt + u(t, x(t^-))\mu(dt \times \mathbb{R}), \end{cases}$$

где $t \in [t_0; 0] \subset [-1; 0]$; интенсивность пуассоновской меры $\Pi(t, \mathbb{R}) \equiv 5$; размерности векторов $n = 2$, $m = l = 1$; отсутствуют возмущения, связанные со случайными процессами $v(t)$ и $w(t)$ (поэтому интеграл в уравнении (1) устраняется с введением обозначения $\hat{\mu}(\cdot, \mathbb{R})$ и можно считать, что $r = q = 1$); $p = n = 2$, $\gamma(x, v) = x$; множество $\Theta = \varnothing$, так что $\hat{\mu}(\cdot) \equiv \mu(\cdot)$.

Требуется обеспечить инвариантность системы по возмущениям относительно величины $J = x_2(0)$ для множества $B_0 = [-1; 0) \times \mathbb{R}^2$.

Функции $\varphi(\cdot)$ и $\eta(\cdot)$ построим в форме

$$\varphi(t, x) = \psi_1(t)x_1 + \psi_2(t)x_2, \quad \eta(t) \equiv 0,$$

тогда условия теоремы 1 с учетом обозначений (5)–(10) примут вид

(i) $\psi_1(0)x_1 + \psi_2(0)x_2 = x_2$,

(ii) $\dot{\psi}_1(t)x_1 + \dot{\psi}_2(t)x_2 + \psi_1(t)x_2 - \psi_2(t)x_1 = 0$ п.в. на $[-1; 0]$,

(iii) заведомо выполнено,

(iv) $\psi_1(t)x_2 + \psi_2(t)u(t, x) = 0$ всюду на $[-1; 0]$.

Из условия (iv) сразу получаем структуру инвариантного управления

$$u(t, x) = -\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}x_2,$$

а коэффициенты $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ найдем из условий (i), (ii). В силу произвольности значений x_1, x_2 получаем задачу Коши

$$\frac{d\psi_1(t)}{dt} = \psi_2(t), \quad \psi_1(0) = 0,$$
$$\frac{d\psi_2(t)}{dt} = -\psi_1(t), \quad \psi_2(0) = 1,$$

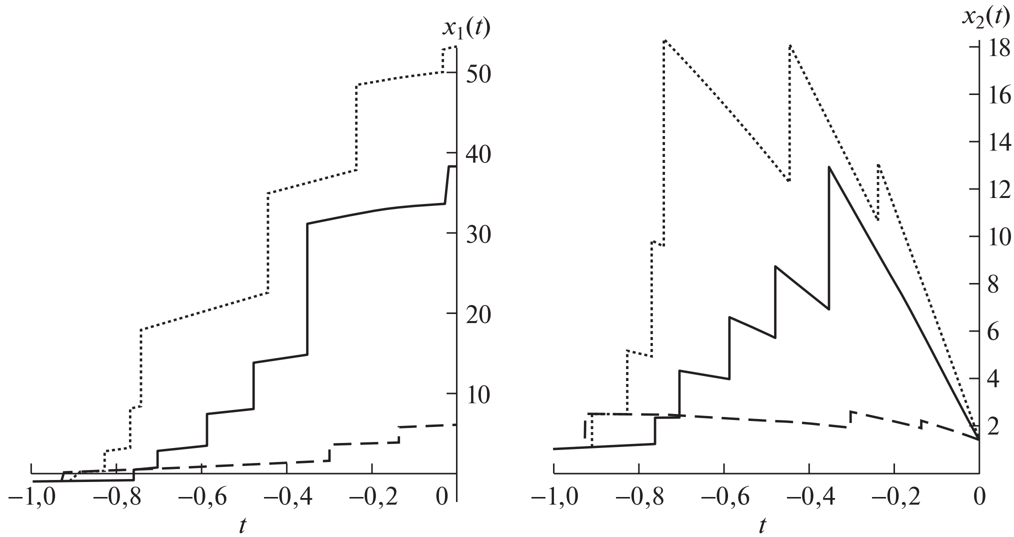


Рис. 1. Три реализации состояния $x(t)$.

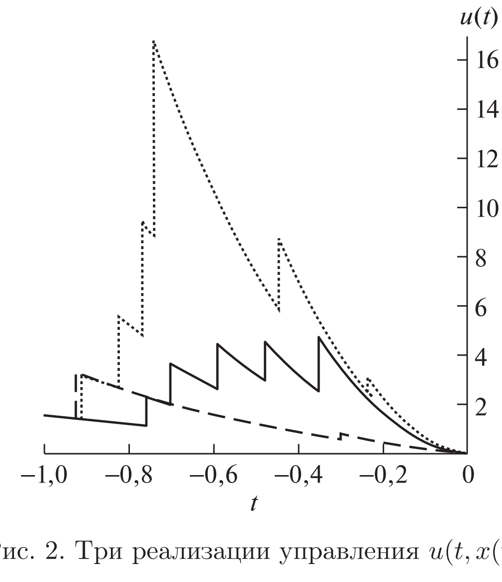


Рис. 2. Три реализации управления $u(t, x(t))$.

которая имеет решение $\psi_1(t) = \sin(t)$, $\psi_2(t) = \cos(t)$. Таким образом,

$$u(t, x) = -\mathrm{tg}(t)x_2.$$

На рис. 1–2 представлены результаты простейшего численного моделирования методом Эйлера для нескольких реализаций траекторий компонент вектора состояния $x(t)$ и управления $u(t, x(t))$ с начальным условием $(t_0, x(t_0)) = (-1, (-1, 1)^{\mathrm{T}})$.

Значения величины $J = x_2(0)$ отличаются друг от друга в пределах погрешности численного счета и равны 1,386, 1,382, 1,387 соответственно для полученных реализаций. Точное терминальное значение критерия по формуле (11) п.н. равно $J_c(t_0, x_0) = \sin(1) + \cos(1) \approx 1{,}381$.

Пример 2. В условиях примера 1 покажем явно, что найденное (инвариантное по возмущениям) управление не обеспечивает абсолютную инвариантность системы относительно величины $J = x_2(0)$ для произвольного начального условия $(t_0, x(t_0)) \in B_0$.

Положим $u(t,x) = -\mathrm{tg}(t)x_2$ и перепишем исходную систему стохастических уравнений в матричной форме:

$$dx(t) = Fx(t)dt + H(t)x(t^-)\mu(dt \times \mathbb{R}),$$

где

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\mathrm{tg}(t) \end{pmatrix}.$$

Получаем линейное по $x(t)$ стохастическое уравнение скачкообразного типа, для которого выполнены достаточные условия существования и единственности сильного решения [9, с. 528, теорема 1] на интервале $[-1; 0]$. Это решение может быть записано явно в виде [10]

$$x(t) = \exp\left\{Ft + \int\limits_{t_0}^{t} \ln[I + H(s)]\mu(ds, \mathbb{R})\right\} x(t_0),$$

I – единичная матрица.

Переходя к представлению типа (3), получаем

$$x(t) = \exp\left\{Ft + \sum_{k=1}^{\tilde{P}(t_0,t)} \ln[I + H(t_k)]\right\} x(t_0),$$

а значит,

$$x(0) = \prod_{k=1}^{P(1)-P(t_0+1)} [I + H(t_k)]x(t_0) =: \mathcal{H}x(t_0), \quad -1 \leqslant t_0 < 0.$$

В силу структуры матрицы $H(t)$ справедливо равенство

$$x_2(0) = \mathcal{H}_{22}x_2(t_0),$$

где $\mathcal{H}_{22}$ – второй диагональный элемент случайной матрицы $\mathcal{H}$. Последнее равенство означает, что абсолютная инвариантность возможна, только если случайная величина $\mathcal{H}_{22}$ равна нулю п.н. на $D(B_0)$. В то же время нетрудно проверить, что

$$\mathcal{H}_{22} = \prod_{k=1}^{P(1)-P(t_0+1)} (1 - \mathrm{tg}(t_k)),$$

а условие $\operatorname{tg}(t) = 1$ верно лишь для счетного числа значений $t < 0$ и не выполнено ни в одной точке интервала $[-1; 0]$, поэтому событие $\{\mathcal{H}_{22} = 0\}$ заведомо имеет нулевую вероятность на $D(B_0)$.

Таким образом, полученная в примере 1 инвариантная по возмущениям динамическая система не является абсолютно инвариантной.

Трудность построения абсолютно инвариантной системы связана с тем, что правая часть условия (iii) теоремы 2 содержит сингулярность $(t_F - t)^{-1}$. Тем не менее, как отмечено в замечании 4, если такую систему построить все же удается, то эта сингулярность некоторым образом устраняется. Реализуем данный процесс, дополнив систему еще одной компонентой управления.

Пример 3. Запишем систему с дополнительным управлением

$$\begin{cases} dx_1(t) = [x_2(t) + u_1(t, x(t))]dt + x_2(t^-)\mu(dt \times \mathbb{R}), \\ dx_2(t) = -x_1(t)dt + u_2(t, x(t^-))\mu(dt \times \mathbb{R}). \end{cases}$$

При тех же значениях параметров, что и в примере 1, требуется обеспечить абсолютную инвариантность системы относительно величины $J = x_2(0)$ для произвольного начального условия $(t_0, x(t_0)) \in B_0$.

Зафиксируем снова

$$\varphi(t, x) = \psi_1(t)x_1 + \psi_2(t)x_2, \quad \eta(t) \equiv 0,$$

тогда условия теоремы 2 примут вид

(i) заведомо выполнено,

(ii) $\psi_1(0)x_1 + \psi_2(0)x_2 = x_2$,

(iii) $\dot\psi_1(t)x_1 + \dot\psi_2(t)x_2 + \psi_1(t)x_2 + \psi_1(t)u_1(t, x) - \psi_2(t)x_1 = t^{-1}A(\psi_1(t)x_1 + \psi_2(t)x_2)$ п.в. на $[-1; 0]$, $A > 0$,

(iv) заведомо выполнено,

(v) $\psi_1(t)x_2 + \psi_2(t)u_2(t, x) = 0$ всюду на $[-1; 0]$.

Условие (v) определяет аналогичную примеру 1 структуру для второй компоненты вектора управления

$$u_2(t, x) = -\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}x_2,$$

а чтобы выполнить условие (iii), положим

$$u_1(t, x) = \frac{A}{t}\left(x_1 + \frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}x_2\right).$$

После этого условия (iii) и (ii) принимают вид задачи Коши из примера 1, так что $\psi_1(t) = \sin(t)$, $\psi_2(t) = \cos(t)$ и

$$u_1(t, x) = \frac{A}{t}\left(x_1 + \operatorname{ctg}(t)x_2\right),$$
$$u_2(t, x) = -\operatorname{tg}(t)x_2.$$

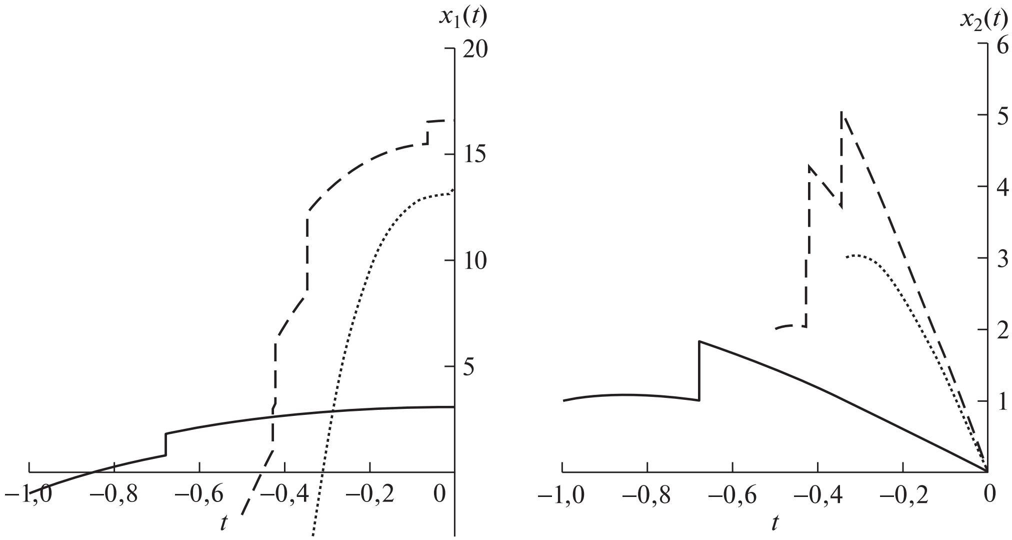


Рис. 3. Три реализации состояния $x(t)$ с начальными условиями: $t_0 = -1$, $x(t_0) = (-1, 1)^{\mathrm{T}}$; $t_0 = -1/2$, $x(t_0) = (-2, 2)^{\mathrm{T}}$; $t_0 = -1/3$, $x(t_0) = (-3, 3)^{\mathrm{T}}$.

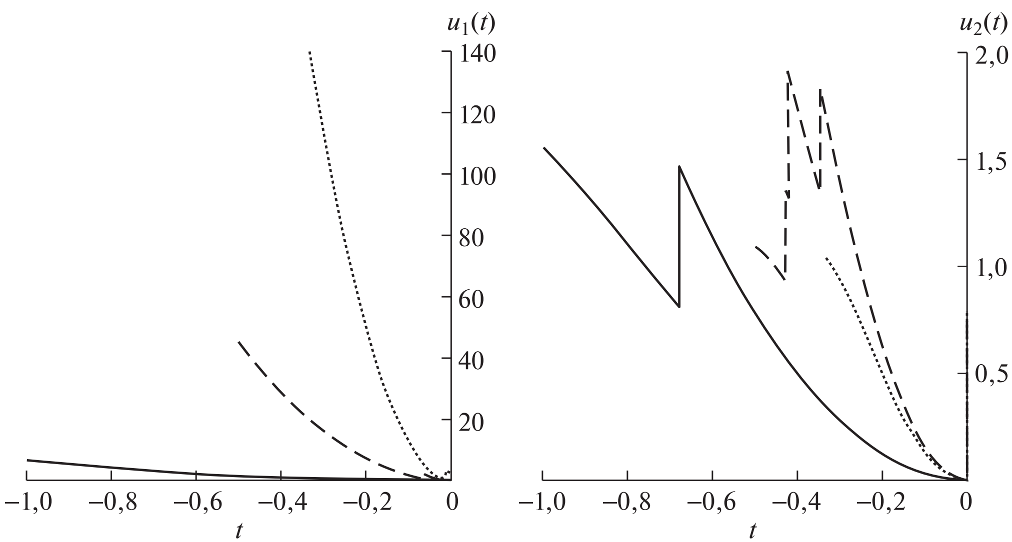


Рис. 4. Три реализации управления $u(t, x(t))$.

На рис. 3–4 представлены реализации траекторий компонент $x(t)$ и $u(t, x(t))$ для различных начальных условий при $A = 4$.

Значения величины $J = x_2(0)$ оказались равными 10^{-9}, 10^{-8}, 0,0044, т.е. они с достаточной точностью совпадают со значением (12) $J_c^A = \eta(0)/A = 0$.

Необходимо отметить следующие важные детали приведенного выше построения.

Во-первых, введение дополнительной компоненты управления действительно дает значительно больше возможностей для выполнения условий теоремы 2. Его основной функцией является устранение «неприятной» правой части условия (iii), которая оказывает серьезное влияние на возможности решения задачи. Тем не менее полученная за счет этой дополнительной компоненты свобода действий, на самом деле, является несколько избыточной. Так, например, можно было бы выполнить условия (ii) и (iii), положив

$$u_1(t,x) = -x_2 + \frac{A}{t}\left(x_1 + \frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}x_2\right),$$

тогда $\psi_1(t) = t$, $\psi_2(t) \equiv 1$ и соответственно

$$u_1(t,x) = \frac{A}{t}x_1 + \left(\frac{A}{t^2} - 1\right)x_2, \quad u_2(t,x) = -tx_2.$$

Результат моделирования системы, замкнутой таким управлением, при том же значении $A = 4$ отличается незначительно от результатов, показанных на рис. 3 и 4. Последнее объясняется соотношением

$$\lim_{t\to 0} \operatorname{tg}(t)/t = 1.$$

Во-вторых, для систем вида (1) само дополнительное управление, влияющее на условие (iii), можно ввести различными способами. В частности, запись $[x_2(t) + u_1(t,x(t))]dt$ в правой части уравнения для $dx_1(t)$ можно получить, положив в (1) $f_1(t,x,u,v) = x_2 + u_1$ либо $f_1(t,x,u,v) = x_2$, $h_1(t,x,u,v) = u_1/\Pi(t,\mathbb{R})$, $\Theta = \mathbb{R}$, но тогда это скажется не только на условии (iii), но и на условии (v). Наконец, аналогичным образом повлиять на условие (iii) можно и за счет введения управляемой диффузионной части (разумеется, при этом условие (iv) уже не будет заведомо выполнено).

В-третьих, выбор значения постоянной $A = 4$ основан на замечании 4. В условиях данного примера следствием этого является ограниченность с вероятностью 1 на $D(B_0)$ и п.в. на $[-1;0]$ функции $u(t,x(t))$, что вполне можно наблюдать на рис. 4. На рис. 5–6 представлены результаты аналогичного моделирования для случая $A = 1$. Видно, что в конечный момент времени $t_F = 0$ значения $x_1(t)$ и $u_1(t,x(t))$ начинают неограниченно возрастать, так как коэффициент $\psi_1(0) = 0$, а функция $\mathcal{L}(t)$ вида (10) (см. замечание 4) из условия (iii) уже не обладает свойством $\mathcal{L}(t_F^-) = 0$. Однако даже при этом система остается абсолютно инвариантной по критерию $J = x_2(0)$.

Данный пример отлично демонстрирует все отмеченные ранее свойства абсолютно инвариантных систем. В следующем, заключительном, примере докажем абсолютную инвариантность полученной системы с помощью прямого решения (по аналогии с примером 2).

Пример 4. В условиях примера 3 покажем явно, что найденное (абсолютно инвариантное) управление действительно обеспечивает абсолютную инвариантность системы относительно величины $J = x_2(0)$ для произвольного начального условия $(t_0, x(t_0)) \in B_0$.

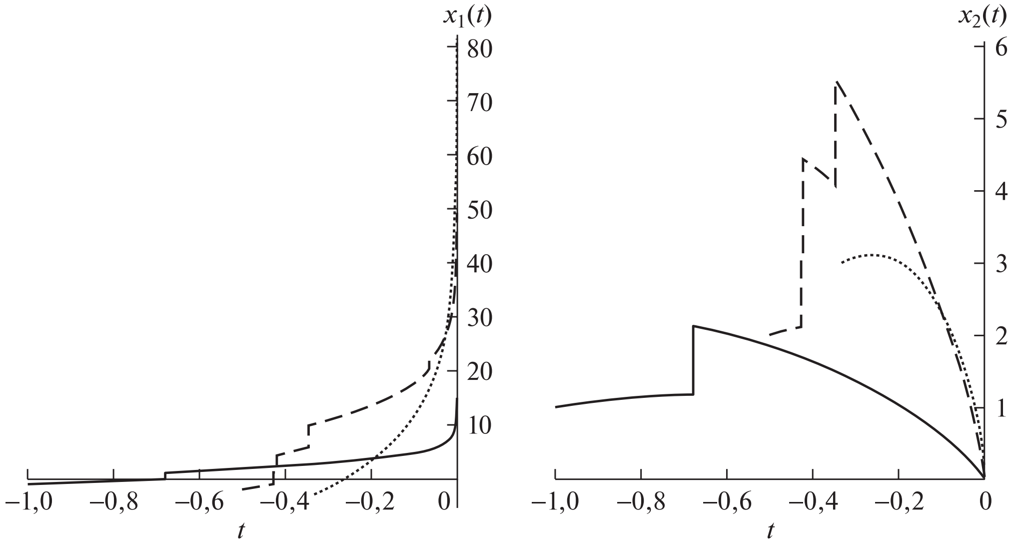


Рис. 5. Три реализации состояния $x(t)$ с теми же начальными условиями при $A = 1$.

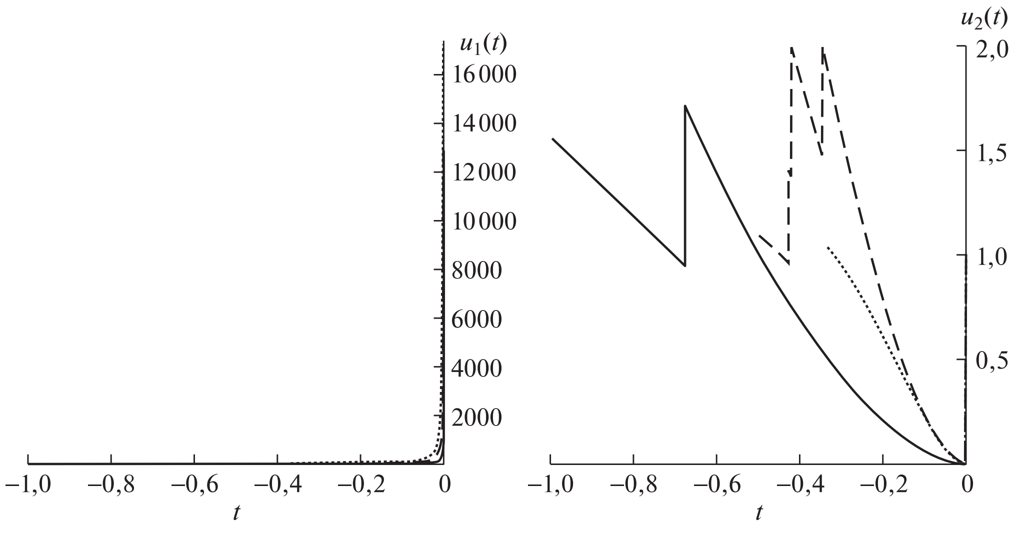


Рис. 6. Три реализации управления $u(t, x(t))$ при $A = 1$.

В примере 3 было записано два, вообще говоря, различных варианта абсолютно инвариантного управления при разных значениях A. Для простоты возьмем $A > 1$, вариант

$$u_1(t, x) = \frac{A}{t} x_1 + \left(\frac{A}{t^2} - 1 \right) x_2, \quad u_2(t, x) = -t x_2$$

и подставим его в исходную систему из примера 3, переписав ее в форме (3)

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{A}{s}\left(x_1(s) + \frac{x_2(s)}{s}\right) ds + \sum\limits_{k=1}^{\tilde{P}(t_0,t)} x_2(t_k^-), \\ x_2(t) = x_2(t_0) - \int\limits_{t_0}^{t} x_1(s) ds - \sum\limits_{k=1}^{\tilde{P}(t_0,t)} t_k x_2(t_k^-). \end{cases}$$

Введем обозначения

$$x_3(t) = \sum_{k=1}^{\tilde{P}(t_0,t)} x_2(t_k^-), \quad \tilde{x}_1(t) = x_1(t) - x_3(t), \quad \tilde{x}_2(t) = x_2(t) + t x_3(t),$$

так что $x_3(t_0) = 0$ п.н. на $D(B_0)$, тогда в силу равенства

$$\int\limits_{t_0}^{t} x_3(s) ds = \sum_{k=1}^{\tilde{P}(t_0,t)} (t - t_k) x_2(t_k^-) = t x_3(t) - \sum_{k=1}^{\tilde{P}(t_0,t)} t_k x_2(t_k^-)$$

систему можно записать в виде

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(t) = x_1(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{A}{s}\left(\tilde{x}_1(s) + \frac{\tilde{x}_2(s)}{s}\right) ds, \\ \tilde{x}_2(t) = x_2(t_0) - \int\limits_{t_0}^{t} \tilde{x}_1(s) ds \end{cases}$$

или, возвращаясь к дифференциальной форме,

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}_1(t)}{dt} = \dfrac{A}{t}\left(\tilde{x}_1(t) + \dfrac{\tilde{x}_2(t)}{t}\right), \quad \tilde{x}_1(t_0) = x_1(t_0), \\ \dfrac{d\tilde{x}_2(t)}{dt} = -\tilde{x}_1(t), \quad \tilde{x}_2(t_0) = x_2(t_0). \end{cases}$$

Таким образом, подстановка управления $u_2(t,x)$, выбранного из условия (v) теоремы 2, фактически позволяет убрать из рассмотрения случайную скачкообразную составляющую системы и сводит задачу к проверке абсолютной инвариантности только ее детерминированной части.

Решение полученной детерминированной системы на интервале $[t_0; 0)$ единственно и при $A > 1$ имеет вид

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(t) = -C_1(t_0, x(t_0)) - C_2(t_0, x(t_0)) A t^{A-1}, \\ \tilde{x}_2(t) = C_1(t_0, x(t_0)) t + C_2(t_0, x(t_0)) t^A, \end{cases}$$

где

$$C_1(t,x) = \frac{tx_1 - Ax_2}{t(A-1)}, \quad C_2(t,x) = \frac{tx_1 - x_2}{t^A(1-A)}.$$

Отсюда для любых начальных условий $(t_0, x(t_0)) \in B_0$ имеем

$$\lim_{s\to 0} \tilde{x}_2(s) = \tilde{x}_2(0) = x_2(0) = 0,$$

что означает абсолютную инвариантность детерминированной, а значит, и исходной стохастической системы при использовании управления $u_1(t,x)$, выбранного из условия (iii). Непосредственно подставляя полученные соотношения в формулы для $x_{1,2}(t)$, а затем и для $u_{1,2}(t,x(t))$, легко убедиться в ограниченности всех этих функций на $[-1;0]$.

5. Заключение

Теоретические исследования инвариантных по терминальному критерию систем далеки от завершения. Полученные в данной работе общие достаточные условия инвариантности нелинейных стохастических систем в ряде частных случаев приобретают весьма интересные и неочевидные свойства. Однозначно подлежат внимательному исследованию линейные системы, а также системы с линейными по состоянию коэффициентами как в непрерывном случае, так и при наличии скачков, для которых условия в общем виде могут быть доведены до простых регулярных выражений.

Еще больше предстоит сделать в практическом плане. Многие математические модели реальных физических процессов в настоящее время содержат случайные параметры, зачастую имеющие вид диффузионных или скачкообразных компонент стохастического уравнения. Условия терминальной инвариантности позволяют не приближенно, а точно решать на основе таких моделей множество актуальных прикладных проблем управления. Достаточно сказать, что модели, рассмотренные в учебном пособии [3] и статье [4], могут быть уточнены за счет введения в рассмотрение параметров, учитывающих случайные внешние воздействия непрерывной и дискретной («событийной») природы.

Тем не менее следует отметить, что решение конкретных прикладных проблем с помощью изложенных в данной работе подходов в силу специфики достаточных условий каждый раз представляет собой отдельную (порой нетривиальную) исследовательскую задачу, что непосредственно наблюдается уже на модельных примерах. В силу этих причин авторы считают оправданным отделение непосредственных приложений от теоретических разработок и надеются охватить, по крайней мере, часть из указанных вопросов в своих дальнейших исследованиях.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Прежде чем перейти к обоснованию полученных в работе результатов, приведем без доказательства следующее утверждение.

Утверждение 1. С учетом определений 1, 2 и обозначений (5)–(10) *для любых начального условия* $(t_0, x_0) \in B_0$, *функции* $\varphi(\cdot) \in \Phi$ *и момента времени* $t \in [t_0; t_F]$ *верна формула Ито* [9, 10, 13, 18]

$$
\begin{aligned}
d\varphi(t, x(t)) &= L(t, x(t), u(t, \gamma(x(t), v(t))), v(t))dt + \\
&+ S(t, x(t), u(t, \gamma(x(t), v(t))), v(t))dw(t) + \\
&+ \int\limits_{\mathbb{R}^r} \Gamma(t, x(t^-), u(t, \gamma(x(t^-), v)), v)\hat{\mu}(dt \times dv)
\end{aligned} \tag{П.1}
$$

или, что то же самое,

$$
\begin{aligned}
\varphi(t, x(t)) &= \varphi(t_0, x_0) + \int\limits_{t_0}^{t} L(s, x(s), u(s, \gamma(x(s), v(s))), v(s))ds + \\
&+ \int\limits_{t_0}^{t} S(s, x(s), u(s, \gamma(x(s), v(s))), v(s))dw(s) + \\
&+ \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{\tilde{P}_j(t_0,t)} \Gamma^{(j)}\left(t_k^{(j)}, x\left(t_k^{(j)-}\right), u\left(t_k^{(j)}, \gamma\left(x\left(t_k^{(j)-}\right), v\left(t_k^{(j)}\right)\right)\right), v\left(t_k^{(j)}\right)\right) - \\
&- \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{\Theta} \Gamma(s, x(s^-), u(s, \gamma(x(s^-), v)), v)\Pi(s, dv)ds
\end{aligned} \tag{П.2}
$$

с вероятностью 1 на множестве $D(t_0, x_0)$.

Обоснование утверждения 1 можно найти в [10, 13], а строгое доказательство – в [18]. Нижеследующие доказательства основаны на данном утверждении и в остальных своих частях практически повторяют доказательства из [7], поэтому здесь они приведены в достаточно краткой форме.

Доказательство теоремы 1. Пусть точка $(t_0, x_0) \in B_0$ фиксирована. Из формулы Ито (П.2) в силу условий (ii)–(iv) теоремы следует справедливость п.н. на $D(t_0, x_0)$ равенства

$$\varphi(t, x(t)) = \varphi(t_0, x_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \eta(s)ds,$$

и, в частности, при $t = t_F$, из условия (i) вытекает соотношение (11), что по определению 3 означает инвариантность системы (1) по возмущениям.

Доказательство теоремы 2. Пусть точка $(t_0, x_0) \in B_0$ произвольна. Из формулы Ито (П.1) в силу условий (iii)–(v) теоремы следует справедливость п.н. на $D(B_0)$ и п.в. на $[t_S; t_F]$ равенства

$$d\varphi(t, x(t)) = \frac{\eta(t) - A\varphi(t, x(t))}{t_F - t}dt,$$

представляющего собой обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $\varphi^*(t) := \varphi(t, x(t))$ с произвольным начальным условием $\varphi^*(t_0) = \varphi(t_0, x_0)$ в произвольной точке t_0. Данное уравнение имеет на интервале $[t_0; t_F)$ решение [7]

$$\varphi^*(t) = (t_F - t)^A \left[\frac{\varphi(t_0, x_0)}{(t_F - t_0)^A} + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\eta(s)}{(t_F - s)^{A+1}} ds \right],$$

и можно показать [7, лемма 1], что при $t = t_F$ в силу условия (i) теоремы это решение допускает непрерывное продолжение

$$\varphi(t_F, x(t_F)) = \varphi^*(t_F^-) = \frac{\eta(t_F)}{A},$$

а значит, из условия (ii) вытекает соотношение (12), что по определению 4 означает абсолютную инвариантность системы (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Розоноэр Л.И.* Вариационный подход к проблеме инвариантности // АиТ. 1963. № 6. С. 744–756; № 7. С. 17–22.

   Rozonoer L.I. A Variational Approach to the Problem of Invariance of Automation Control Systems // Autom. Remote Control. 1963. V. 24. No. 6. P. 680–743; No. 7. P. 793–800.

2. *Хрусталев М.М.* Необходимые и достаточные условия слабой инвариантности // АиТ. 1968. № 4. С. 17–22.

   Khrustalev M.M. Necessary and sufficient conditions of invariance // Autom. Remote Control. 1968. V. 29. No. 4. P. 540–544.

3. *Хрусталев М.М.* Методы теории инвариантности в задачах синтеза законов терминального управления летательными аппаратами. Учебное пособие. М: МАИ, 1987.

4. *Khrustalev M.M., Plotnikov Ju.P., Belov V.A.* The invariant control of vehicle descent into the atmosphere // Acta Astronautica. 1976. No. 5–6. P. 357–367.

5. *Хрусталев М.М.* Слабая инвариантность стохастических систем диффузионного типа // Тр. XI Международной Четаевской конф. Аналитическая механика, устойчивость и управление. Т. 3. Часть III. Казань: КНИТУ-КАИ, 2017. С. 171–177.

6. *Хрусталев М.М.* Инвариантность стохастических систем диффузионного типа // ДАН. 2017. Т. 476. № 2. С. 148–150.

   Khrustalev M.M. Invariance of Stochastic Diffusion Systems // Doklady Mathematics. 2017. V. 96. № 2. P. 535–537.

7. *Хрусталев М.М.* Терминальная инвариантность стохастических систем диффузионного типа // АиТ. 2018. № 8. С. 81–100.

   Khrustalev M.M. Terminal Invariance of Stochastic Diffusion Systems // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 8. P. 1434–1449.

8. *Хрусталев М.М.* Терминальная инвариантность линейных стохастических систем диффузионного типа // Тр. Всерос. сов. по пробл. управления (ВСПУ-2019, Москва). М.: ИПУ РАН, 2019. С. 1305–1309.

9. *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985.

10. *Øksendal B., Sulem A.* Applied Stochastic Control of Jump Diffusions. Berlin Heidelberg, Germany: Springer, 2005.

11. *Рыбаков К.А.* Достаточные условия оптимальности в задаче управления системами диффузионно-скачкообразного типа // Тр. Всерос. сов. по пробл. управления (ВСПУ-2014, Москва). М.: ИПУ РАН, 2014. С. 734–744.

12. *Аверина Т.А., Рыбаков К.А.* Два метода анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2013. № 3. С. 85–116.

13. *Параев Ю.И.* Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М.: Сов. радио, 1976.

14. *Platen E., Bruti-Liberati N.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance. Berlin Heidelberg, Germany: Springer, 2010.

15. *Yin G., Zhu C.* Hybrid Switching Diffusions. New York, USA: Springer, 2010.

16. *Карачанская Е.В.* Обобщенная формула Ито–Вентцеля для случая нецентрированной пуассоновской меры, стохастический первый интеграл и первый интеграл // Матем. тр. 2014. Т. 17. № 1. С. 99–122.

17. *Миллер Б.М., Панков А.Р.* Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

18. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 02.03.2020

После доработки 18.05.2020

Принята к публикации 09.07.2020

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS