

Journal of Applied Mathematics and Mechanics

V. 86. Iss. 2

EDITORIAL BOARD

- I.G. Goryacheva** (editor-in-chief, Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)
- V.G. Baydulov** (executive secretary, Ph.D., Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia)
- J. Awrejcewicz** (Professor, Politechnika Łódzka, Lodz, Poland),
N.N. Bolotnik (Professor, Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
F.M. Borodich (Professor, Cardiff University, Cardiff, United Kingdom),
A.B. Freidin (Professor, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),
A.M. Gaifullin (Professor, Corresponding RAS member, Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI), Zhukovsky, Russia),
M.L. Kachanov (Professor, Tufts University, Medford, MA, USA),
Ju.D. Kaplunov (Professor, Keele University, Staffordshire, United Kingdom),
A.A. Korobkin (Professor, University of East Anglia, Norwich, United Kingdom),
A.M. Kovalev (Professor, NASU member, Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Ukraine),
V.V. Kozlov (Professor, RAS member, Vice-President RAS, Moscow, Russia),
A.M. Krivtsov (Professor, Corresponding RAS member, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia),
A.G. Kulikovskii (Professor, RAS member, Steklov Institute of Mathematics, RAS, Moscow, Russia),
Yu.Yu. Makhovskaya (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
N.F. Morozov (Professor, RAS member, St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia),
T.J. Pedley (Professor, FRS member, University of Cambridge, Cambridge, United Kingdom),
F. Pfeiffer (Professor, FRS, Foreign RAS member, Technische Universität München, Munich, Germany),
V.V. Pukhnachev (Professor, Corresponding RAS member, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, RAS, Novosibirsk, Russia),
G. Rega (Professor, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy),
S.A. Reshmin (Professor, Corresponding RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
V.A. Sabelnikov (Professor, The French Aerospace Lab ONERA, Paris, France),
Ye.I. Shifrin (Professor, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
F.E. Udwadia (Professor, University of Southern California, Los Angeles, CA, USA),
S.E. Yakush (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
V.F. Zhuravlev (Professor, RAS member, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Moscow, Russia),
K. Zimmermann (Professor, Technische Universität Ilmenau, Ilmenau, Germany)
- Editorial advisory board: N.I. Amelkin, I.M. Anan'evskii, A.S. Andreev, V.A. Babeshko, A.M. Formalskii, Yu.P. Gupalo, A.P. Ivanov, A.N. Kraiko, A.P. Markeev, S.A. Nazarov, V.S. Patsko, A.G. Petrov, N.N. Rogacheva, V.V. Sazonov, A.P. Seyranian, I.A. Soldatenkov, S.Ya. Stepanov, G.A. Tirsksii, V.N. Tkhai

(Journal published since 1936, 6 issues per year)

March–April

Учредитель: РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Редакция:

В.Г. Байдулов – отв. секретарь

Е.В. Есина – зав. редакцией

Адрес редакции: 119526 Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, комн. 245

Телефон редакции: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

На сайте Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU доступны выпуски журнала, начиная с 2008 года

Свидетельство о регистрации СМИ № 0110178 выдано Министерством печати и информации Российской Федерации 04.02.1993 г.

Индекс журнала "Прикладная математика и механика" в каталоге Роспечати 70706

ISSN 0032-8235

Founder: Russian Academy of Sciences

The Editorial Staff:

V.G. Baydulov – executive secretary

E.V. Esina – head of Editorial office (manager editor)

The Editorial Board Address: 101 Vernadsky Avenue, Bldg 1, Room 245, 119526 Moscow, Russia

Phone: 8 (495) 434-21-49

E-mail: pmm@ipmnet.ru, pmmedit@ipmnet.ru

URL: <http://pmm.ipmnet.ru>

The subscription index in Rospechat catalogue 70706

ISSN 0021-8928

СО Д Е Р Ж А Н И Е

О стационарных движениях равногранного тетраэдра с неподвижной точкой в центральном поле сил <i>Е. А. Никонова</i>	153
Об орбитальной устойчивости маятниковых движений в приближенной задаче динамики волчка Ковалевской с вибрирующей точкой подвеса <i>М. В. Беличенко</i>	169
Управляемые системы, зависящие от параметра: множества достижимости и интегральные воронки <i>В. Н. Ушаков, А. А. Ершов, А. В. Ушаков</i>	186
Равномерные асимптотики полей внутренних гравитационных волн от начального радиально симметричного возмущения <i>В. В. Булатов, И. Ю. Владимиров</i>	206
О подъемной силе в потоке разреженного газа <i>С. Л. Горелов, А. В. Могорычная</i>	216
Варианты критерия прочности однонаправленных полимерных композитов по условию разрушения связующего при наличии сжатия перпендикулярно волокнам <i>А. И. Олейников</i>	223
Капиллярная адгезия упругих тел в условиях частичного проскальзывания <i>Ю. Ю. Маховская</i>	235
Конечно-элементный алгоритм расчета эллипсоидальной оболочки при учете смещения как жесткого целого <i>А. Ш. Джабраилов, А. П. Николаев, Ю. В. Клочков, Н. А. Гуреева, Т. Р. Ищанов</i>	251
Напряженно-деформированное состояние подкрепленного трехслойной оболочкой тоннеля мелкого заложения при действии транспортных нагрузок <i>Л. А. Алексеева, В. Н. Украинец, С. Р. Гирнис</i>	263
Повреждаемость и усталостное разрушение элементов конструкций в различных режимах циклического нагружения <i>И. С. Никитин, Н. Г. Бураго, А. Д. Никитин</i>	276
Правила для авторов	291

C O N T E N T S

On stationary motions of an isosceles tetrahedron with a fixed point in the central field of forces <i>E. A. Nikonova</i>	153
On the orbital stability of pendulum-type motions in the approximate problem of Kovalevskaya top dynamics with a vibrating suspension point <i>M. V. Belichenko</i>	169
Control systems depending on parameter: reachable sets and integral funnels <i>V. N. Ushkov, A. A. Ershov, A. V. Ushkov</i>	186
Uniform asymptotics of internal gravity waves fields from initial radially symmetric perturbation <i>V. V. Bulatov, I. Yu. Vladimirov</i>	206
On the lifting force in a rarefied gas flow <i>S. L. Gorelov, A. V. Mogorychnaya</i>	216
Strength criterion variants of polymeric unidirectional composites by inter-fibre fracture conditions with there is a transverse compression <i>A. I. Oleinikov</i>	223
Capillary adhesion of elastic bodies in the conditions of partial slip <i>Yu. Yu. Makhovskaya</i>	235
Finite element algorithm for calculating the ellipsoidal shell when taking into account the displacement as a rigid whole <i>A. Sh. Dzhabrailov, A. P. Nikolaev, Yu. V. Klochkov, N. A. Gureev, T. R. Ishanov</i>	251
Stress-strain state of the shallow tunnel supported by a three-layer shell under action of transport loads <i>L. A. Alexeyeva, V. N. Ukrainets, S. R. Girnis</i>	263
Damage and fatigue fracture of structural elements in various cyclic loading modes <i>I. S. Nikitin, N. G. Burago, A. D. Nikitin</i>	276

УДК 531.36

О СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ РАВНОГРАННОГО ТЕТРАЭДРА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛ

© 2022 г. Е. А. Никонова^{1,*}

¹ ФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: nikonova.ekaterina.a@gmail.com

Поступила в редакцию 22.05.2021 г.

После доработки 30.12.2021 г.

Принята к публикации 13.01.2022 г.

Изучаются существование, устойчивость и ветвление стационарных движений равногранного тетраэдра вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновском поле сил. Исследуется связь этих свойств стационарных движений со свойствами стационарных движений правильного тетраэдра, естественным геометрическим обобщением которого является равногранный тетраэдр.

Ключевые слова: твердое тело с неподвижной точкой, тело в центральном гравитационном поле, теория Рауса, устойчивость и ветвление стационарных движений, равногранный тетраэдр

DOI: 10.31857/S0032823522020096

1. Введение. В [1–3] были обнаружены достаточно неожиданные динамические свойства твердого тела в форме правильного тетраэдра и других платоновых тел, совершающих движение в центральном ньютоновском поле притяжения.

Исследование “чувствительности” динамических свойств платоновых тел восходит к публикации [4], в которой предложен оригинальный подход, опирающийся на эффективное использование симметрий в распределении масс при изучении стационарных движений в задачах динамики твердого тела (см. также [5–10]). Другое направление исследований динамики тетраэдральных тел, обусловленное потребностями механики космического полета, связано с предположением о наличии в них роторов [11–13].

2. Постановка задачи и основные обозначения. Рассмотрим движение твердого тела \mathcal{T} вокруг неподвижной точки O в поле сил ньютоновского притяжения с центром в точке N . Пусть $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$ – единичный вектор, направленный от N к O , $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ – тензор инерции тела относительно точки O , $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ – вектор угловой скорости тела. Здесь и далее все векторы и тензорные величины задаются в подвижной системе отсчета $Ox_1x_2x_3$, оси которой направлены вдоль главных осей инерции тела, задаваемых собственными векторами тензора инерции \mathbf{I} .

Если $U_N = U_N(\boldsymbol{\gamma})$ – потенциал силового поля, то описывающие движение уравнение Эйлера–Пуассона можно записать в виде

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial U_N}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega} \quad (2.1)$$

Помимо интеграла энергии $\mathcal{F}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + U_N(\gamma) = h$ и интеграла площадей $\mathcal{F}_1 = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = p_\psi$, уравнения (2.1) допускают геометрический интеграл

$$\mathcal{F}_2 = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) - 1 = 0, \quad (2.2)$$

задающий в пространстве $\mathbb{R}^3(\boldsymbol{\gamma})$ т.н. сферу Пуассона \mathcal{S} .

Как известно (см., например, [14]), система (2.1) может обладать перманентными вращениями вокруг оси NO с постоянной по величине угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Положение оси перманентного вращения в теле согласно (2.1) задаются уравнениями

$$0 = \boldsymbol{\gamma} \times \left(\frac{\partial U_N}{\partial \boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{I} \boldsymbol{\gamma} \right); \quad \boldsymbol{\omega} = \text{const} \quad (2.3)$$

Замечание. Согласно теории Рауса ([15, 16], см. также [17]) эти вращения могут быть найдены как критические точки приведенного (amended) потенциала

$$U_\psi = \frac{p_\psi^2}{2I(\boldsymbol{\gamma})} + U_N(\boldsymbol{\gamma}), \quad (2.4)$$

рассмотренного как функция на сфере (2.2). Здесь $I(\boldsymbol{\gamma}) = (\mathbf{I}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})$ – момент инерции тела относительно оси вращения. При этом постоянная интеграла площадей p_ψ и величина угловой скорости оказываются связанными соотношением $p_\psi = I(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\omega}$.

Хорошо известно, что при описании движения твердого тела в центральном поле ньютоновского притяжения, как правило, достаточно воспользоваться разложением до слагаемых первого или второго порядка малости по параметру, характеризующему отношение размеров тела к его расстоянию до притягивающего центра. Однако, в случае, когда тензор инерции тела близок к шаровому, такие приближения, вообще говоря, оказываются недостаточными. В дальнейшем в качестве примера рассмотрим движение твердого тела \mathcal{T} в виде равногранного тетраэдра с равными массами в вершинах.

3. Равногранный тетраэдр. Согласно [18], тетраэдр называется равногранным, если все грани – равные между собой треугольники. Как известно, у равногранного тетраэдра бимедианы попарно перпендикулярны и являются общими серединными перпендикулярами соответствующих скрещивающихся ребер. Пусть \mathcal{T} – тело в форме равногранного тетраэдра с равными массами m в вершинах. Будем считать, что оно совершает вращение вокруг неподвижной точки O , совпадающей с точкой пересечения бимедиан. Зададим жестко связанную с тетраэдром правую систему отсчета $Ox_1x_2x_3$ с началом в точке O и осями, направленными вдоль бимедиан. Если длины бимедиан равны $2ra_1, 2ra_2, 2ra_3$ соответственно, то вершины A, B, C и D тетраэдра \mathcal{T} в этой системе отсчета задаются радиус-векторами

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{OA} = r(a_1, -a_2, -a_3)^T = r\mathbf{e}_A, \quad \mathbf{r}_B = \mathbf{OB} = r(-a_1, -a_2, a_3)^T = r\mathbf{e}_B$$

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{OC} = r(-a_1, a_2, -a_3)^T = r\mathbf{e}_C, \quad \mathbf{r}_D = \mathbf{OD} = r(a_1, a_2, a_3)^T = r\mathbf{e}_D,$$

причем длины этих векторов равны

$$|\mathbf{OA}| = |\mathbf{OB}| = |\mathbf{OC}| = |\mathbf{OD}| = r$$

и имеет место связь

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \quad (3.1)$$

Оси $Ox_1x_2x_3$ являются главными центральными осями инерции тела \mathcal{T} , в них главные центральные моменты \mathcal{I} записываются как

$$I_k = 4mr^2I'_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad I'_1 = a_2^2 + a_3^2, \quad I'_2 = a_1^2 + a_3^2, \quad I'_3 = a_1^2 + a_2^2 \quad (3.2)$$

4. Приближенное представление потенциала поля притяжения. Пусть N – притягивающий центр, в котором сосредоточена масса M , $|\mathbf{NO}| = d$. Пусть единицы размерности выбраны так, что гравитационная постоянная, масса M , а также величина $r_* = \sqrt{d^2 + r^2}$ равны единице (ср. [19]). Тогда потенциал притяжения имеет вид

$$U_N = - \sum_{(A,B,C,D)} \rho_A^{-1}, \quad \rho_A = (1 + \varepsilon(\gamma, \mathbf{e}_A))^{1/2}, \quad \varepsilon = 2dr, \quad (4.1)$$

где (A, B, C, D) – циклическая перестановка индексов. Его разложение с точностью до членов четвертого порядка по параметру ε принимает вид

$$U_N = U_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \varepsilon^3 U_3 + \varepsilon^4 U_4 + \dots$$

$$U_0 = -4 \quad U_1 = 0, \quad U_2 = -\frac{3}{2}(a_1^2\gamma_1^2 + a_2^2\gamma_2^2 + a_3^2\gamma_3^2), \quad U_3 = \frac{15}{2}a_1a_2a_3\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \quad (4.2)$$

$$U_4 = -\frac{35}{32}(a_1^4\gamma_1^4 + a_2^4\gamma_2^4 + a_3^4\gamma_3^4 + 6(a_1^2a_2^2\gamma_1^2\gamma_2^2 + a_1^2a_3^2\gamma_1^2\gamma_3^2 + a_2^2a_3^2\gamma_2^2\gamma_3^2))$$

Постоянная U_0 несущественная, она не играет роли в дальнейшем рассмотрении.

Замечание. Параметр разложения ε , предложенный ранее [19], удобно применять и в настоящем исследовании, поскольку он позволяет одновременно описывать случаи, когда тетраэдр располагается очень далеко от притягивающего центра N , и когда, наоборот, центр масс тетраэдра очень близок к притягивающему центру N .

5. Существование равновесий. Прежде всего, рассмотрим вопрос о существовании и устойчивости равновесий ($p_\psi = 0$). Если ограничиться приближением потенциала (3.2)

с точностью до членов третьего порядка с потенциалом $U' = -\frac{1}{2}((a_1^2\gamma_1^2 + a_2^2\gamma_2^2 + a_3^2\gamma_3^2) - 5\varepsilon a_1a_2a_3\gamma_1\gamma_2\gamma_3)$, то уравнения равновесий после преобразований примут вид

$$\begin{aligned} \gamma_2\gamma_3(b_3 - b_2) + \gamma_1(\gamma_3^2 - \gamma_2^2) &= 0 \\ \gamma_3\gamma_1(b_1 - b_3) + \gamma_2(\gamma_1^2 - \gamma_3^2) &= 0 \\ \gamma_1\gamma_2(b_2 - b_1) + \gamma_3(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) &= 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где

$$b_i = \frac{2}{5} \frac{a_i}{a_2a_3\varepsilon} \quad (1, 2, 3) \quad (5.2)$$

и имеют место ограничения вида

$$b_i > 0 \quad (1, 2, 3) \quad (5.3)$$

Соотношение (3.1) в параметрах b_i , $i = 1, 2, 3$, записывается как

$$\frac{1}{b_1b_2} + \frac{1}{b_2b_3} + \frac{1}{b_3b_1} = \frac{25\varepsilon^2}{4} \quad (5.4)$$

Уравнения (5.1) вместе с уравнением (2.2), выражающим единичность вектора γ , станут основным предметом дальнейшего рассмотрения.

Эти уравнения всегда обладают решениями

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1: \gamma_1 &= \pm 1, & \gamma_2 &= 0, & \gamma_3 &= 0 \\ \mathcal{F}_2: \gamma_1 &= 0, & \gamma_2 &= \pm 1, & \gamma_3 &= 0 \\ \mathcal{F}_3: \gamma_1 &= 0, & \gamma_2 &= 0, & \gamma_3 &= \pm 1\end{aligned}\quad (5.5)$$

Этим шести решениям отвечают перманентные вращения, на которых тетраэдр “смотрит” на притягивающий центр серединой одного из своих ребер.

Пусть все b_k различны (случай, когда две из трех величин b_k равны, рассмотрен ранее [20]). Если на искомом решении $\gamma_1 = 0$, тогда в силу первого уравнения (5.1) либо $\gamma_2 = 0$, либо $\gamma_3 = 0$, т.е. имеют место, либо решения \mathcal{F}_3 , либо решения \mathcal{F}_2 .

Далее, в предположении, что все $\gamma_k \neq 0$, систему (5.1) можно представить в виде

$$b_3 - b_2 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2 \gamma_3} (\gamma_2^2 - \gamma_3^2) \quad (1, 2, 3)$$

или в виде

$$b_3 - b_2 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 (\gamma_3^{-2} - \gamma_2^{-2}) \quad (1, 2, 3) \quad (5.6)$$

На соотношения (5.6) можно смотреть как на уравнения относительно b_k . В этом случае говорят об *обратной задаче*. С другой стороны, на эти же соотношения можно смотреть как на уравнения относительно γ_k . В этом случае говорят о *прямой задаче*.

5.1. Решение обратной задачи. Если рассмотреть соотношения (5.6) как уравнения относительно b_k , то их решение запишется как

$$b_k = \gamma_k^{-2} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 + v'; \quad v' \in \mathbb{R} \quad (5.7)$$

или в векторном виде, причем значение вещественного параметра v' должно быть таким, чтобы правые части всех трех соотношений (5.7) одновременно были неотрицательны. Иными словами, параметр v' должен отвечать той части прямой

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1^{-2} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \\ \gamma_2^{-2} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \\ \gamma_3^{-2} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \end{pmatrix} + v' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

которая расположена в первом октанте пространства (b_1, b_2, b_3) или на его границах. Это соотношение определяет однопараметрическое семейство рассматриваемых тел, для которых существует данное, наперед заданное равновесие.

5.2. Решение прямой задачи. Если рассмотреть соотношения (4.6) как уравнения относительно γ_k , то их удобно представить как

$$\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \gamma_1^2 (b_1 + v) \quad (1, 2, 3); \quad v \in \mathbb{R} \quad (5.8)$$

Прежде всего заметим, что если, например, $v = -b_1$, то правая часть первого из уравнений (5.8) обращается в нуль, и должны обратиться в нуль левые части всех трех уравнений. В рамках сделанного предположения первое уравнение выполнено тождественно, а оставшиеся два уравнения примут вид

$$0 = \gamma_2^2 (b_2 - b_1) = \gamma_3^2 (b_3 - b_1) \quad (5.9)$$

Но тогда, принимая во внимание предположение о том, что все b_k различны, из соотношения (5.9) также имеем $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$, и в силу геометрического интеграла (2.2) имеет место единственное решение вида \mathcal{F}_1 .

В дальнейшем будем считать, что $v \notin \{-b_1, -b_2, -b_3\}$. Перемножая левые и правые части равенств (5.8), имеем

$$\gamma_1^3 \gamma_2^3 \gamma_3^3 = \gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 (b_1 + v)(b_2 + v)(b_3 + v),$$

откуда находим

$$\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = (b_1 + v)(b_2 + v)(b_3 + v)$$

Подстановка найденного произведения в (5.8) позволяет представить ответ задачи в виде:

$$\gamma_k^2 = (b_1 + v)(b_2 + v)(b_3 + v)(b_k + v)^{-1}; \quad k = 1, 2, 3, \quad (5.10)$$

причем, знаки γ_k , $k = 1, 2, 3$ при извлечении квадратных корней должны удовлетворять области определения системы (5.8), то есть знаки выражений $(b_1 + v)$, $(b_2 + v)$, $(b_3 + v)$ и $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ должны быть одинаковыми.

В силу (2.2) с учетом сделанных предположений относительно параметра v он должен удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} & (b_1 + v)(b_2 + v)(b_3 + v)(b_1 + v)^{-1} + \\ & + (b_1 + v)(b_2 + v)(b_3 + v)(b_2 + v)^{-1} + \\ & + (b_1 + v)(b_2 + v)(b_3 + v)(b_3 + v)^{-1} = 1, \end{aligned} \quad (5.11)$$

эквивалентному квадратному относительно v уравнению

$$(b_1 + v)(b_2 + v) + (b_2 + v)(b_3 + v) + (b_3 + v)(b_1 + v) - 1 = 0,$$

представимому в виде

$$3v^2 + 2v(b_1 + b_2 + b_3) + b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3 - 1 = 0 \quad (5.12)$$

Дискриминант D многочлена в (5.12) всегда строго положителен:

$$\begin{aligned} D/4 &= (b_1 + b_2 + b_3)^2 - 3(b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3 - 1) = \\ &= \frac{1}{2} \left((b_1 - b_2)^2 + (b_1 - b_3)^2 + (b_2 - b_3)^2 \right) + 3 > 0 \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (5.11) имеет два вещественных корня

$$v_{\pm} = -\frac{1}{3}(b_1 + b_2 + b_3 \pm b); \quad b = \sqrt{D}/2$$

Подставляя эти значения в (5.10), в итоге имеем

$$\gamma_{1\pm}^2 = \frac{1}{9}(2b_2 - (b_1 + b_3 \pm b))(2b_3 - (b_1 + b_2 \pm b)) \quad (1, 2, 3) \quad (5.13)$$

Эти равновесия в дальнейшем обозначаются $\mathcal{F}\mathcal{F}_{\pm}$.

Замечание. Общее решение прямой задачи о перманентных вращениях также имеет вид (5.13) с той лишь разницей, что в нем

$$b_1 = \frac{2}{5} \frac{a_1}{a_2 a_3 \varepsilon} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{r^2}{\varepsilon^2} \omega^2 \right) \quad (1, 2, 3) \quad (5.14)$$

В этом случае наличие дополнительного параметра делает параметрическое исследование решений (5.13) гораздо более сложным. Такое исследование, равно как и исследование устойчивости перманентных вращений, в работе не осуществляется.

Для определения множества значений параметров, при которых решения (5.13) существуют, выполним переход к новым параметрам

$$\delta_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(b_1 + b_2 + b_3), \quad \delta_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}(2b_1 - b_2 - b_3), \quad \delta_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(b_2 - b_3) \quad (5.15)$$

Замечание. Переход от параметров b_i , $i = 1, 2, 3$, к параметрам δ_i , $i = 1, 2, 3$, инспирирован следующими обстоятельствами. Поверхность, задаваемая соотношением (4.4) в пространстве $\mathbb{R}^3(b_1, b_2, b_3)$ с ограничением (5.3), обладает осью симметрии с направляющим вектором $(1, 1, 1)^T$. В параметрах δ_i , $i = 1, 2, 3$ ось симметрии рассматриваемой поверхности будет иметь направляющий вектор $(0, 0, 1)^T$, а ограничение (5.3) примет простейший вид $\delta_1 > 0$. Кроме того, множества значений параметров, при которых решения (5.13) существуют, будет описываться лишь в терминах δ_2 и δ_3 , что позволяет иллюстрировать эти множества на плоскости $\mathbb{R}^2(\delta_2, \delta_3)$.

Во введенных параметрах $b = \frac{\sqrt{6}}{2} \sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2}$, и соотношение (5.13) принимает вид

$$\begin{aligned} \gamma_{1\pm}^2 &= \frac{1}{3}\delta_2^2 - \frac{1}{3}\delta_3^2 \pm \frac{1}{3}\delta_2\sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2} + \frac{1}{3} \\ \gamma_{2\pm}^2 &= -\frac{1}{6}\delta_2^2 + \frac{1}{6}\delta_3^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\delta_2\delta_3 \mp \frac{1}{6}(\delta_2 - \sqrt{3}\delta_3)\sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2} + \frac{1}{3} \\ \gamma_{3\pm}^2 &= -\frac{1}{6}\delta_2^2 + \frac{1}{6}\delta_3^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\delta_2\delta_3 \mp \frac{1}{6}(\delta_2 + \sqrt{3}\delta_3)\sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2} + \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Для решения $\mathcal{F}\mathcal{F}_-$ правые части соотношений (5.16) неотрицательны, если выполнены неравенства

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}\delta_2 - \delta_3)(\sqrt{3}\delta_2 + \delta_3) &\leq 2, \quad \delta_2 \leq 0 \\ \delta_3(\sqrt{3}\delta_2 + \delta_3) &\leq 1, \quad \delta_2 + \sqrt{3}\delta_3 \geq 0 \\ \delta_3(\sqrt{3}\delta_2 - \delta_3) &\geq -1, \quad \delta_2 - \sqrt{3}\delta_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Параметр δ_1 не входит в эти условия, в то время как на плоскости параметров $\Delta = \mathbb{R}^2(\delta_2, \delta_3)$ условия (5.17) выполняются в области \mathcal{N}_- , изображенной слева на рис. 1.

Граница области \mathcal{N}_- представима в виде $\partial\mathcal{N}_- = \partial\mathcal{N}_-^1 \cup \partial\mathcal{N}_-^2 \cup \partial\mathcal{N}_-^3$. В этой области произведение $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ положительно и тройке $(\gamma_1^2, \gamma_2^2, \gamma_3^2)$ отвечают четыре решения $(\gamma_1, -\gamma_2, -\gamma_3)$, $(-\gamma_1, -\gamma_2, \gamma_3)$, $(-\gamma_1, \gamma_2, -\gamma_3)$, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.

Аналогично для решения $\mathcal{F}\mathcal{F}_+$ правые части соотношений (5.16) неотрицательны, если параметры δ_k , $k = 1, 2, 3$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}\delta_2 - \delta_3)(\sqrt{3}\delta_2 + \delta_3) &\leq 2, \quad \delta_2 \geq 0 \\ \delta_3(\sqrt{3}\delta_2 + \delta_3) &\leq 1, \quad \delta_2 + \sqrt{3}\delta_3 \leq 0 \\ \delta_3(\sqrt{3}\delta_2 - \delta_3) &\geq -1, \quad \delta_2 - \sqrt{3}\delta_3 \leq 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

На том же рис. 1 область \mathcal{N}_+ изображена справа. Граница области \mathcal{N}_+ представима в виде $\partial\mathcal{N}_+ = \partial\mathcal{N}_+^1 \cup \partial\mathcal{N}_+^2 \cup \partial\mathcal{N}_+^3$. В этой области $\gamma_1\gamma_2\gamma_3 < 0$ и тройке $(\gamma_1^2, \gamma_2^2, \gamma_3^2)$ отвечают четыре решения $(-\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, $(\gamma_1, \gamma_2, -\gamma_3)$, $(\gamma_1, -\gamma_2, \gamma_3)$, $(-\gamma_1, -\gamma_2, -\gamma_3)$.

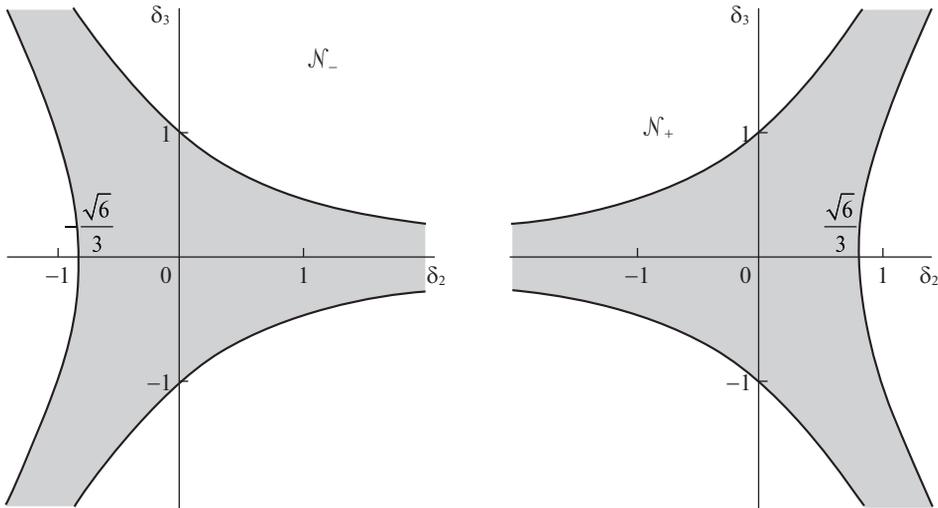


Рис. 1.

Замечание. Отметим, что границы области (5.17) переходят друг в друга при повороте на 120° около точки $(0, 0)$. Это же верно и для границ области (5.18). Сами же области (5.17) и (5.18) переходят друг в друга при отражении координат относительно оси $\delta_2 = 0$.

6. Устойчивость равновесий. Для исследования достаточных условий устойчивости равновесий, следуя методу Рауса ([15, 16], см. также [17]), выпишем функцию

$$W = \sqrt{3}\delta_1 U' + \frac{\lambda}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 1) \tag{6.1}$$

и исследуем знакоопределенность ограничения ее второй вариации

$$2\delta^2 W = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma^2} \delta \gamma, \delta \gamma \right); \quad \delta \gamma = (\delta \gamma_1, \delta \gamma_2, \delta \gamma_3)^T \tag{6.2}$$

на линейное многообразие

$$\gamma_1 \delta \gamma_1 + \gamma_2 \delta \gamma_2 + \gamma_3 \delta \gamma_3 = 0 \tag{6.3}$$

Неопределенный множитель Лагранжа λ в общем случае имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda = & \frac{\sqrt{3}}{3}(\delta_1 + \sqrt{2}\delta_2)\gamma_1^2 + \frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{2}\delta_1 - \delta_2 + \sqrt{3}\delta_3)\gamma_2^2 + \\ & + \frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{2}\delta_1 - \delta_2 - \sqrt{3}\delta_3)\gamma_3^2 - 3\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \end{aligned}$$

Вторые производные

$$W_{ij} = W_{ji} = \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j}$$

имеют вид

$$W_{11} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(\delta_1 + \sqrt{2}\delta_2) + \lambda, \quad W_{22} = -\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{2}\delta_1 - \delta_2 + \sqrt{3}\delta_3) + \lambda$$

$$W_{33} = -\frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{2}\delta_1 - \delta_2 - \sqrt{3}\delta_3) + \lambda$$

$$W_{12} = \gamma_3 \quad (1, 2, 3)$$

6.1. *Тривиальные решения.* Рассмотрим вопрос об устойчивости равновесий \mathcal{F}_k из (5.5).

На равновесии \mathcal{F}_1 неопределенный множитель $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}(\delta_1 + \sqrt{2}\delta_2)$, а линейное многообразие (6.3) имеет вид $\delta\gamma_1 = 0$. Ограничение квадратичной формы на это линейное многообразие записывается как

$$2\delta^2 W|_{\mathcal{F}_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}\delta_2 - \delta_3)\delta\gamma_2^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}\delta_2 + \delta_3)\delta\gamma_3^2 \pm 2\delta\gamma_2\delta\gamma_3 \quad (6.4)$$

Если $\delta_2 > 0$ и $3\delta_2^2 - \delta_3^2 - 2 > 0$, то квадратичная форма (5.4) положительно определена, степень неустойчивости $\chi = 0$ и равновесие \mathcal{F}_1 устойчиво. Если $3\delta_2^2 - \delta_3^2 - 2 < 0$, то квадратичная форма (6.4) знакопеременна, $\chi = 1$, и равновесие неустойчиво. Если $\delta_2 < 0$ и $3\delta_2^2 - \delta_3^2 - 2 > 0$, то квадратичная форма (6.4) отрицательно определена, степень неустойчивости $\chi = 2$ и равновесие \mathcal{F}_1 неустойчиво.

На равновесии \mathcal{F}_2 неопределенный множитель $\lambda = \frac{\sqrt{6}}{6}(\sqrt{2}\delta_1 - \delta_2 + \sqrt{3}\delta_3)$, а линейное многообразие (6.3) имеет вид $\delta\gamma_2 = 0$. Ограничение квадратичной формы на это линейное многообразие записывается как

$$2\delta^2 W|_{\mathcal{F}_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{3}\delta_2 + \delta_3)\delta\gamma_1^2 + \sqrt{2}\delta_3\delta\gamma_3^2 \pm 2\delta\gamma_1\delta\gamma_3 \quad (6.5)$$

Если $-\delta_2 + \sqrt{3}\delta_3 > 0$ и $-\sqrt{3}\delta_2\delta_3 + \delta_3^2 > 1$, то квадратичная форма (6.5) положительно определена, степень неустойчивости $\chi = 0$ и равновесие \mathcal{F}_2 устойчиво. Если $-\sqrt{3}\delta_2\delta_3 + \delta_3^2 < 1$, то квадратичная форма (5.5) знакопеременна, $\chi = 1$, и равновесие неустойчиво. Если $-\delta_2 + \sqrt{3}\delta_3 < 0$ и $-\sqrt{3}\delta_2\delta_3 + \delta_3^2 > 1$, то квадратичная форма (6.5) отрицательно определена, степень неустойчивости $\chi = 2$ и равновесие \mathcal{F}_2 неустойчиво.

На равновесии \mathcal{F}_3 неопределенный множитель $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}\delta_2 + \delta_3)$, а линейное многообразие (6.3) имеет вид $\delta\gamma_3 = 0$. Ограничение квадратичной формы на это линейное многообразие записывается как

$$2\delta^2 W|_{\mathcal{F}_3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}\delta_2 + \delta_3)\delta\gamma_1^2 - \sqrt{2}\delta_3\delta\gamma_2^2 \pm 2\delta\gamma_1\delta\gamma_2 \quad (6.6)$$

Если $\delta_2 + \sqrt{3}\delta_3 < 0$ и $\sqrt{3}\delta_2\delta_3 + \delta_3^2 > 1$, то квадратичная форма (6.6) положительно определена, степень неустойчивости $\chi = 0$ и равновесие \mathcal{F}_3 устойчиво. Если $\sqrt{3}\delta_2\delta_3 + \delta_3^2 < 1$, то квадратичная форма (6.6) знакопеременна, $\chi = 1$, и равновесие неустойчиво. Если $\delta_2 + \sqrt{3}\delta_3 > 0$ и $\sqrt{3}\delta_2\delta_3 + \delta_3^2 > 1$, то квадратичная форма (6.6) отрицательно определена, степень неустойчивости $\chi = 2$ и равновесие \mathcal{F}_3 неустойчиво.

Замечание. Имеет место следующая связь между устойчивостью решений и порядком в неравенстве на моменты инерции тела. Если решение устойчиво, то момент инерции, соответствующий оси $O\gamma_i$ является наименьшим — или в терминах бимедиан — бимедиана a_i — наибольшая. Если решение неустойчиво со степенью неустойчи-

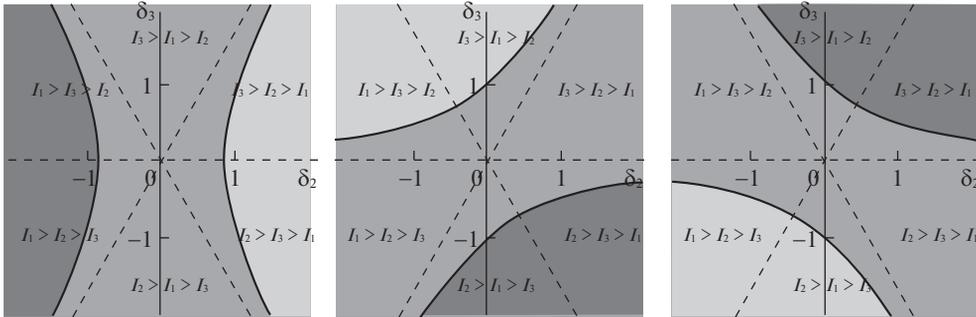


Рис. 2.

ности $\chi = 2$, то соответствующий момент инерции наибольший, и соответствующая бимедиана наименьшая. Обратное неверно, см. рис. 2, где плоскость $\mathbb{R}^2(\delta_2, \delta_3)$ с областями различных свойств устойчивости решения \mathcal{F}_1 приведена слева; для решения \mathcal{F}_2 аналогичная плоскость приведена по центру; для решения \mathcal{F}_3 — справа. Белым цветом изображены области, соответствующие устойчивому решению, светло-серым — неустойчивому решению со степенью неустойчивости $\chi = 1$ и серым — неустойчивому решению со степенью неустойчивости $\chi = 2$. Пунктирные линии разделяют области с различным порядком моментов инерции $I_k, k = 1, 2, 3$.

Замечание. Отметим, что решения \mathcal{F}_- и \mathcal{F}_+ существуют одновременно лишь для тех значений параметров, при которых все три решения $\mathcal{F}_k, k = 1, 2, 3$, неустойчивы со степенью неустойчивости $\chi = 1$.

6.2. *Общий случай.* В общем случае изучения достаточных условий устойчивости во избежание громоздкости воспользуемся восходящим к Вейерштрассу подходом, опирающимся на рассмотрение окаймленной матрицы (ср. [21–26])

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda \partial \gamma} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \lambda} & \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma^2} \end{pmatrix}$$

Коэффициенты Пуанкаре σ_1 и σ_2 , определяющие знакоопределенность ограничения второй вариации (6.2) функции Рауса (6.1) на линейное многообразие (6.3), находятся из уравнения

$$P_2(\sigma) = 0, \tag{6.7}$$

где

$$P_2(\sigma) = -\det \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & W_{11} - \sigma & W_{12} & W_{13} \\ \gamma_2 & W_{21} & W_{22} - \sigma & W_{23} \\ \gamma_3 & W_{31} & W_{32} & W_{33} - \sigma \end{pmatrix} = \sigma^2 + p_1\sigma + p_0$$

Выражения для $p_1 = p_1(\delta_2, \delta_3)$ и $p_0 = p_0(\delta_2, \delta_3)$ весьма громоздки и здесь не приводятся.

Оба корня многочлена (6.7) вещественны. При этом, если $p_0 > 0, p_1 < 0$, то эти корни положительны, степень неустойчивости равна нулю, и равновесие устойчиво по Ляпунову. Если $p_0 < 0$, то эти корни имеют разные знаки, степень неустойчивости

равна единице, и равновесие неустойчиво. Наконец, если $p_0 > 0$, $p_1 > 0$, то эти корни отрицательны, степень неустойчивости равна двум, и равновесие неустойчиво.

Для решения $\mathcal{F}\mathcal{F}_-$ коэффициенты многочлена $P_2(\sigma)$ имеют вид

$$p_0 = p_0(\delta_2, \delta_3) = \frac{2}{3} \sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2} \cdot \left(\delta_2 (\delta_2^2 - 3\delta_3^2) - (\delta_2^2 + \delta_3^2 - 1) \sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2} \right)$$

$$p_1 = p_1(\delta_2, \delta_3) = \frac{\sqrt{6}}{6} \left(\delta_2 (\delta_2^2 - 3\delta_3^2) - (\delta_2^2 + \delta_3^2 - 4) \sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2} \right)$$

Покажем, что неравенство $p_0 > 0$ выполнено в области \mathcal{N}_- . Выражение в скобках, определяющее знак p_0 , положительно тогда и только тогда, когда выполнена совокупность трех систем:

$$\delta_2 (\delta_2^2 - 3\delta_3^2) - (\delta_2^2 + \delta_3^2 - 1) \sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 1. \left\{ \begin{array}{l} \delta_2 (\delta_2^2 - 3\delta_3^2) \geq 0 \\ \delta_2^2 + \delta_3^2 - 1 < 0 \end{array} \right. \\ 2. \left\{ \begin{array}{l} \delta_2 (\delta_2^2 - 3\delta_3^2) < 0 \\ \delta_2^2 + \delta_3^2 - 1 < 0 \\ (1 - \delta_2^2 - \delta_3^2) \sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2} > \delta_2 (3\delta_3^2 - \delta_2^2) \end{array} \right. \\ 3. \left\{ \begin{array}{l} \delta_2 (\delta_2^2 - 3\delta_3^2) \geq 0 \\ \delta_2^2 + \delta_3^2 - 1 \geq 0 \\ \delta_2 (\delta_2^2 - 3\delta_3^2) > (\delta_2^2 + \delta_3^2 - 1) \sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

На плоскости $\mathbb{R}^2(\delta_2, \delta_3)$ системы 1, 2, 3 выделяют области, изображенные на рис. 3 слева. Решениям первой системы отвечают светло-серые области, второй системы – серые и третьей системы – темно-серые области. Таким образом, совокупность систем выполнена для любых (δ_2, δ_3) из внутренних точек области \mathcal{N}_- . На границе области коэффициент p_0 обращается в нуль.

Для определения знака коэффициента p_1 заметим, что

$$p_1(\delta_2, \delta_3) = \frac{\sqrt{6}}{4} \frac{p_0(\delta_2, \delta_3) + 2(\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2)}{\sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2}}$$

Из этого представления понятно, что $p_1(\delta_2, \delta_3) > 0$ для любых (δ_2, δ_3) из области \mathcal{N}_- .

Итак, внутри области \mathcal{N}_- оба коэффициента p_0 и p_1 положительны, следовательно решение $\mathcal{F}\mathcal{F}_-$ при этих значениях параметров (δ_2, δ_3) неустойчиво со степенью неустойчивости $\chi = 2$. Для граничных точек области \mathcal{N}_- требуется дополнительное исследование устойчивости.

Для решения $\mathcal{F}\mathcal{F}_+$ коэффициенты многочлена $P_2(\sigma)$ имеют вид

$$p_0 = p_0(\delta_2, \delta_3) = -\frac{2}{3} \sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2} \left(\delta_2 (\delta_2^2 - 3\delta_3^2) + (\delta_2^2 + \delta_3^2 - 1) \sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2} \right)$$

$$p_1 = p_1(\delta_2, \delta_3) = \frac{\sqrt{6}}{6} \left(\delta_2 (\delta_2^2 - 3\delta_3^2) + (\delta_2^2 + \delta_3^2 - 4) \sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2} \right)$$

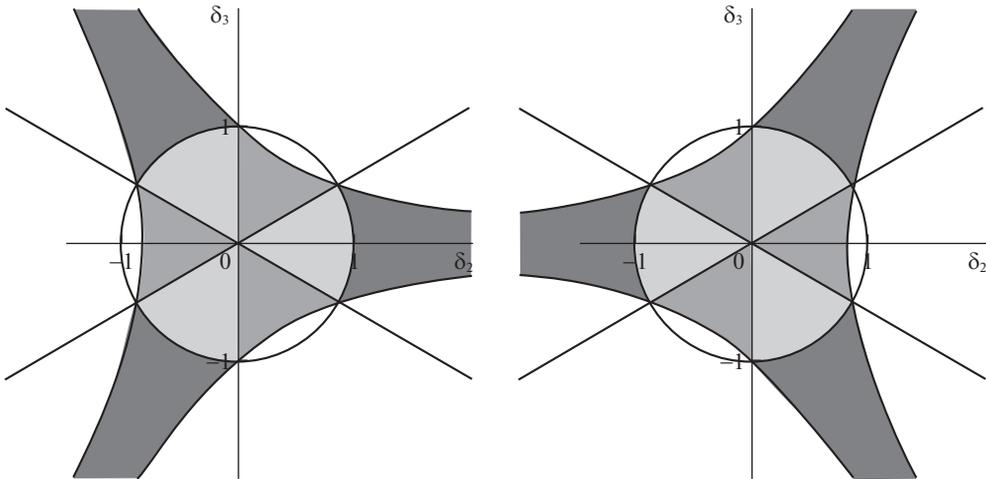


Рис. 3.

Покажем, что неравенство $p_0 > 0$ выполнено в области \mathcal{N}_+ . Выражение в скобках, определяющее знак p_0 , положительно, тогда и только тогда когда выполнена совокупность трех систем:

$$\delta_2 (\delta_2^2 - 3\delta_3^2) + (\delta_2^2 + \delta_3^2 - 1) \sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 1. \begin{cases} \delta_2 (\delta_2^2 - 3\delta_3^2) \leq 0 \\ \delta_2^2 + \delta_3^2 - 1 < 0 \end{cases} \\ 2. \begin{cases} \delta_2 (\delta_2^2 - 3\delta_3^2) > 0 \\ \delta_2^2 + \delta_3^2 - 1 < 0 \\ (1 - \delta_2^2 - \delta_3^2) \sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2} > \delta_2 (3\delta_3^2 - \delta_2^2) \end{cases} \\ 3. \begin{cases} \delta_2 (\delta_2^2 - 3\delta_3^2) \leq 0 \\ \delta_2^2 + \delta_3^2 - 1 \geq 0 \\ \delta_2 (\delta_2^2 - 3\delta_3^2) > (\delta_2^2 + \delta_3^2 - 1) \sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2} \end{cases} \end{array} \right.$$

На плоскости $\mathbb{R}^2 (\delta_2, \delta_3)$ системы 1, 2, 3 выделяют области, проиллюстрированные на рис. 3 справа. Решениям первой системы отвечают светло-серые области, второй системы – серые и третьей системы – темно-серые области. Таким образом, совокупность систем выполнена для любых (δ_2, δ_3) из внутренних точек области \mathcal{N}_+ . На границе области коэффициент p_0 обращается в нуль.

Для определения знака коэффициента p_1 заметим, что

$$p_1 (\delta_2, \delta_3) = -\frac{\sqrt{6}}{4} \frac{p_0 (\delta_2, \delta_3) + 2(\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2)}{\sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2 + 2}}$$

Из этого представления понятно, что $p_1 (\delta_2, \delta_3) < 0$ для любых (δ_2, δ_3) из области \mathcal{N}_+ .

Итак, внутри области \mathcal{N}_+ коэффициент p_0 положительный, а p_1 – отрицательный, следовательно решение \mathcal{F}_+ устойчиво при этих значениях параметров (δ_2, δ_3) , степень неустойчивости $\chi = 0$. Для граничных точек области \mathcal{N}_+ требуется дополнительное исследование устойчивости.

Замечание. Общие методы, касающиеся распределения свойств устойчивости вдоль ветвей стационарного движения, а также устойчивости стационарных движений, отвечающих точкам бифуркации, разработаны в [27, 28].

Замечание. Задача о существовании равновесий и перманентных вращений решается единообразно. Этого нельзя сказать о задаче устойчивости, которая сводится к анализу второй вариации приведенного потенциала (2.4), рассмотренного как функция на сфере (2.2). Исключение составляют перманентные вращения \mathcal{F}_k , $k = 1, 2, 3$, вокруг бимедиан из (6.5). В этом случае согласно теории, развитой в [29], рассуждение из разд. 6.1 остаются справедливыми и для перманентных вращений. При этом коэффициенты b_k в условиях устойчивости определяются соотношениями (5.14).

7. О чувствительности равновесий к степени приближения гравитационного потенциала. К отысканию равновесий можно подходить, опираясь на введение новых переменных (ср. [30, 31]). Так если в качестве таких переменных использовать величины

$$g_1 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2, \quad g_2 = a_1^2 \gamma_1^2 + a_2^2 \gamma_2^2 + a_3^2 \gamma_3^2, \quad g_3 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \quad (7.1)$$

“обязанные” своим происхождением геометрическому интегралу и первым двум нетривиальным слагаемым в разложении потенциала, то сам потенциал примет вид

$$U_N = \varepsilon^2 u_N, \quad u_N = -\frac{3}{2} g_2 + \frac{15}{2} \varepsilon a_1 a_2 a_3 g_3 - \frac{35}{32} \varepsilon^2 u_4(g_1, g_2, g_3) + \dots \quad (7.2)$$

Пусть

$$w = u_N + \lambda(g_1 - 1)$$

Тогда уравнения равновесий примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial g_1} &= \lambda + \frac{\partial u_4}{\partial g_1} + \dots = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial g_2} &= -\frac{3}{2} \left(1 - 5\varepsilon^2 \frac{\partial u_4}{\partial g_2} + \dots \right) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial g_3} &= \frac{15}{2} \varepsilon a_1 a_2 a_3 \left(1 - \frac{7}{48} \varepsilon \frac{\partial u_4}{\partial g_3} + \dots \right) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial \lambda} &= g_1 - 1 = 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

Эти уравнения несовместны при достаточно малых значениях $\varepsilon \neq 0$, так как при выполнении этого условия уравнение (7.3) решения не имеет. Таким образом, равновесия имеют место лишь там, где замена $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \rightarrow (g_1, g_2, g_3)$ вырождена, т.е. в тех точках, для которых якобиан

$$\mathcal{J} = \frac{\partial(g_1, g_2, g_3)}{\partial(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)} \equiv 4\mathcal{F}'$$

равен нулю, т.е. выполнено условие.

$$\mathcal{F}' = \gamma_1^2 (\gamma_3^2 - \gamma_2^2) a_1^2 + \gamma_2^2 (\gamma_1^2 - \gamma_3^2) a_2^2 + \gamma_3^2 (\gamma_2^2 - \gamma_1^2) a_3^2 = 0 \quad (7.4)$$

Нетрудно убедиться, что все найденные выше решения удовлетворяют равенству (7.4), определяющему поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3(\gamma)$.

Замечание. При доказательстве данного утверждения явный вид зависимости $u_4 = u_4(g_1, g_2, g_3)$ не понадобился.

Выводы. Для твердого тела в форме равногранного тетраэдра, подвешенного в центре масс, выполнен параметрический анализ существования и устойчивости равновесий в центральном ньютоновском поле сил. Таким образом, прояснены вопросы, касающиеся установленных ранее [1, 2] свойств равновесий правильного тетраэдра, для которого равногранный тетраэдр является естественным обобщением, наследующим некоторые из дискретных симметрий. В дальнейшем естественно ставить вопрос о свойствах относительных равновесий равногранных тетраэдров на круговой орбите и о свойствах точек либрации равномерно вращающихся равногранных тетраэдров.

Выполнение аналогичного анализа равновесий для тетраэдров общего вида, вероятно, потребует разработки иных подходов, не опирающихся на использованные в работе свойства симметрии равногранных тетраэдров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Суликашвили П.С. О стационарных движениях тетраэдра и октаэдра в центральном поле тяготения // В сб.: Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1987. С. 57–66.
2. Суликашвили П.С. Стационарные движения тел, допускающих группу симметрии правильных многогранников в ньютоновском поле сил // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 582–586.
3. Burov A.A., Sulikashvili R.S. On the motion of a rigid body possessing a finite group of symmetry // Prépublication du C.E.R.M.A. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. 1993. № 17. P. 8.
4. Карпетян А.В., Нараленкова И.И. О бифуркации равновесий механических систем с симметричным потенциалом // ПММ. 1998. Т. 62. № 1. С. 12–21.
5. Нараленкова И.И. О ветвлении и устойчивости положений равновесия твердого тела в ньютоновском поле // В сб.: Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 1995. С. 53–60.
6. Абрарова Е.В., Карпетян А.В. О стационарных движениях твердого тела в центральном гравитационном поле // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 68–73.
7. Абрарова Е.В. Об устойчивости стационарных движений твердого тела в центральном поле // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 947–955.
8. Буров А.А., Карпетян А.В. О движении крестообразных тел // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 6. С. 14–18.
9. Абрарова Е.В. Об относительных равновесиях твердого тела в центральном поле // В сб.: Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1995. С. 3–28.
10. Абрарова Е.В., Карпетян А.В. О ветвлении и устойчивости стационарных движений и относительных равновесий твердого тела в центральном гравитационном поле // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 375–387.
11. Буров А.А., Герман А.Д., Суликашвили П.С. Об орбитальном движении тетраэдра-гиростата // ПММ. 2010. Т. 74. № 4. С. 594–609.
12. Буров А.А., Герман А.Д., Суликашвили П.С. Об установившихся движениях гиростатов с равными моментами инерции в центральном поле сил // ПММ. 2011. Т. 75. № 5. С. 738–744.
13. Burov A.A., Guerman A.D., Sulikashvili R.S. Dynamics of a Tetrahedral Satellite–Gyrostata // AIP Conf. Proc. 2010. V. 1281. P. 465.
14. Рубановский В.Н., Самсонов В.А. Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988. 304 с.
15. Routh E.J. Treatise on the Stability of a Given State of Motion. Cambridge: Univ. Press, 1877. 108 p.
16. Routh E.J. The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. London: McMillan, 1884. 343 p.
17. Карпетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 168 с.
18. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии. Стереометрия. Сер. “Библиотечка Квант”, Вып. 31. М.: Наука, 1984. 160 с.

19. *Vashkoviak M.A.* On the stability of circular 'asteroid' orbits in an N-planetary system // *Celest. Mech.* 1976. V. 13. № 3. P. 313–324.
20. *Буров А.А., Никонова Е.А.* Установившиеся движения симметричного равногранного тетраэдра в центральном поле сил // *Изв. РАН. МТТ.* 2021. № 5. С. 152–164.
21. *Hancock H.* Lectures on the Theory of Maxima and Minima of Functions of several Variables (Weierstrass Theory), McMicken Hall, Univ. Cincinnati, 1903.
22. *Mann H.V.* Quadratic forms with linear constraints // *Am. Math. Monthly.* 1943. V. 50. № 7. P. 430–433.
23. *Шостак Р.Я.* О признаке условной определенности квадратичной формы n переменных, подчиненных линейным связям, и о достаточном признаке условного экстремума функций n переменных // *УМН.* 1954. Т. 9 (60). № 2. С. 199–206.
24. *Рубановский В.Н., Степанов С.Я.* О теореме Рауса и методе Четаева построения функций Ляпунова из интегралов уравнений движения // *ПММ.* 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 904–912.
25. *Степанов С.Я.* Симметризация критериев знакоопределенности симметричных квадратичных форм // *ПММ.* 2002. Т. 66. Вып. 6. С. 979–987.
26. *Буров А.А.* О необходимых условиях устойчивости установившихся движений систем со связями, реализуемыми большими потенциальными силами // *ПММ.* 2004. Т. 68. № 5. С. 870–877.
27. *Возлинский В.И.* О связи бифуркаций равновесий консервативных систем с распределением устойчивости на кривой равновесий // *ПММ.* 1967. Т. 31. Вып. 2. С. 418–427.
28. *Возлинский В.И.* Об устойчивости точек ветвления равновесий // *ПММ.* 1978. Т. 42. С. 259–267.
29. *Каранетян А.В., Степанов С.Я.* О стационарных движениях и относительных равновесиях механических систем с симметрией // *ПММ.* 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 736–743.
30. *Burov A.A., Nikonov V. I.* Stability and branching of stationary rotations in a planar problem of motion of mutually gravitating triangle and material point // *Russ. J. Nonlin. Dyn.* 2016. V. 12. № 2. P. 179–196.
31. *Буров А.А., Никонова Е.А.* Вращение равногранного тетраэдра в центральном ньютоновском поле сил: конус Штауде // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика.* 2021. № 5. С. 40–46.

On Stationary Motions of an Isosceles Tetrahedron with a Fixed Point in the Central Field of Forces

E. A. Nikonova^{a,#}

^a *FRC CSC RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: nikonova.ekaterina.a@gmail.com*

The existence, stability, and branching of steady motions of an isosceles tetrahedron (disphenoid) with a fixed point in the Central Newtonian field of forces are studied. The relation of stationary motions properties with the properties of stationary motions of a regular tetrahedron, the natural geometric generalization of which is an isosceles tetrahedron, is considered.

Keywords: rigid body with a fixed point body in a Central gravitational field, Routh theory, stability and branching of steady motions, isosceles tetrahedron

REFERENCES

1. *Sulikashvili R.S.* Stationary motions of tetrahedron and octahedron in the central gravitational field // in: *Problems of Stability and Motion Stabilization.* Moscow: Vych. Zentr Akad. Nauk SSSR, 1987, pp. 57–66. (in Russian)
2. *Sulikashvili R.S.* On the stationary motions in a Newtonian field of force of a body that admits of regular polyhedron symmetry groups // *JAMM*, 1989, vol. 53, no. 4, pp. 452–456.
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(89\)90051-8](https://doi.org/10.1016/0021-8928(89)90051-8)

3. *Burov A.A., Sulikashvili R.S.* On the motion of a rigid body possessing a finite group of symmetry // Prépublication du C.E.R.M.A. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1993, no. 17, pp. 8.
4. *Karapetyan A.V., Naralenkova I.I.* The bifurcation of the equilibria of mechanical systems with symmetrical potential // JAMM, 1998, vol. 62, no. 1, pp. 9–17.
[https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(98\)00021-5](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(98)00021-5)
5. *Naralenkova I.I.* On the branching and stability of equilibrium positions of a rigid body in a Newtonian field // in: Problems of Stability and Motion Stabilization. Moscow: Vych. Zentr Akad. Nauk SSSR, 1995, pp. 53–60. (in Russian)
6. *Abrarova Ye.V., Karapetyan A.V.* Steady motions of a rigid body in a central gravitational field // JAMM, 1994, vol. 58, no. 5, pp. 825–830.
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(94\)90007-8](https://doi.org/10.1016/0021-8928(94)90007-8)
7. *Abrarova Ye.V.* The stability of the steady motions of a rigid body in a central field // JAMM, 1995, vol. 59, no. 6, pp. 903–910.
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(95\)00123-9](https://doi.org/10.1016/0021-8928(95)00123-9)
8. *Burov A.A., Karapetyan A.V.* On the motion of cruciform bodies // Mech. of Solids, 1995, no. 6, pp. 14–18. (in Russian)
9. *Abrarova Ye.V.* On the relative equilibria of a rigid body in the central field // in: Problems of Stability and Motion Stabilization. Moscow: Vych. Zentr Akad. Nauk SSSR, 1995, pp. 3–28. (in Russian)
10. *Abrarova Ye.V., Karapetyan A.V.* Bifurcation and stability of the steady motions and relative equilibria of a rigid body in a central gravitational field // JAMM, 1996, vol. 60, no. 3, pp. 369–380.
[https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(96\)00047-0](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(96)00047-0)
11. *Burov A.A., Guerman A.D., Sulikashvili R.S.* The orbital motion of a tetrahedral gyrostat // JAMM, 2010, vol. 74, no. 4, pp. 425–435.
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.09.008>
12. *Burov A.A., Guerman A.D., Sulikashvili R.S.* The steady motions of gyrostats with equal moments of inertia in a central force field // JAMM, 2011, vol. 75, no. 5, pp. 517–521.
<https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2011.11.005>
13. *Burov A.A., Guerman A.D., Sulikashvili R.S.* Dynamics of a tetrahedral satellite–gyrostat // AIP Conf. Proc., 2010, vol. 1281, pp. 465–468.
<https://doi.org/10.1063/1.3498509>
14. *Rubanovskii V.N., Samsonov V.A.* The Stability of Steady Motions in Examples and Problems. Moscow: Nauka, 1988. 304 p. (in Russian)
15. *Routh E.J.* Treatise on the Stability of a Given State of Motion. Cambridge: Univ. Press, 1877. 108 p.
16. *Routh E.J.* The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. L.: McMillan, 1884. 343 p.
17. *Karapetyan A.V.* Stability of Stationary Motions. Moscow: URSS, 1998. 168 p. (in Russian)
18. *Sharygin I.F.* Geometry problems. Stereometry // The Quantum Library. Iss. 31. Moscow: Nauka, 1984. 160 p. (in Russian)
19. *Vashkoviak M.A.* On the stability of circular 'asteroid' orbits in an N-planetary system // Celest. Mech., 1976, vol. 13, no. 3, pp. 313–324.
<https://doi.org/10.1007/BF01228649>
20. *Burov A.A., Nikonova E.A.* Steady motions of a symmetric isosceles tetrahedron in a central force field // Mech. of Solids, 2021, vol. 56, no. 5, pp. 737–747.
<http://doi.org/10.3103/S0025654421050071>
21. *Hancock H.* Lectures on the Theory of Maxima and Minima of Functions of several Variables (Weierstrass Theory), McMicken Hall, Univ. Cincinnati, 1903. 114 p.
22. *Mann H.B.* Quadratic forms with linear constraints // Am. Math. Monthly, 1943, vol. 50, no. 7, pp. 430–433.
<https://doi.org/10.1080/00029890.1943.11991413>
23. *Shostak R.Ya.* On a criterion of conditional definiteness of a quadratic form of variables, subject to linear relations, and on a sufficient condition for a conditional extremum of a function of variables // Uspekhi Mat. Nauk, 1954, vol. 9, no. 2 (60), pp. 199–206.
24. *Rubanovskii V.N., Stepanov S.Ia.* On the Routh theorem and the Chetaev method for constructing the liapunov function from the integrals of the equations of motion // JAMM, 1969, vol. 33, no 5,

- pp. 882–890.
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(69\)90096-3](https://doi.org/10.1016/0021-8928(69)90096-3)
25. *Stepanov S.Ya.* Symmetrization of the sign-definiteness criteria of symmetrical quadratic forms // JAMM, 2002, vol. 66, no. 6, pp. 933–941. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(02\)00135-1](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(02)00135-1)
 26. *Burov A.A.* The necessary conditions for the stability of steady motions of systems with constraints produced by large potential forces // JAMM, 2004, vol. 68, no. 5, pp. 777–784.
<http://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2004.09.013>
 27. *Vozlinskii V.I.* On the relations between the bifurcation of the equilibria of conservative systems and the stability distribution on the equilibria curve // JAMM, 1967, vol. 31, no. 2, pp. 418–427.
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(67\)90171-2](https://doi.org/10.1016/0021-8928(67)90171-2)
 28. *Vozlinskii V.I.* On the stability of points of equilibrium branching // JAMM, 1978, vol. 42, no. 2, pp. 270–279.
[https://doi.org/10.1016/0021-8928\(78\)90143-0](https://doi.org/10.1016/0021-8928(78)90143-0)
 29. *Karapetyan A.V., Stepanov S.Ya.* Steady motions and relative equilibria of mechanical systems with symmetry // JAMM, 1996, vol. 60, no. 5, pp. 729–735.
[https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(96\)00092-5](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(96)00092-5)
 30. *Burov A.A., Nikonov V.I.* Stability and branching of stationary rotations in a planar problem of motion of mutually gravitating triangle and material point // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2016, vol. 12, no. 2, pp. 179–196.
<https://doi.org/10.20537/nd1602002>
 31. *Burov A.A., Nikonova E.A.* Rotation of isosceles tetrahedron in central newtonian force field: Staude cone // Moscow Univ. Mech. Bull., 2021, vol. 76, no. 4, pp. 123–129.
<http://doi.org/10.3103/S0027133021050034>

УДК 531.36

ОБ ОРБИТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ МАЯТНИКОВЫХ ДВИЖЕНИЙ В ПРИБЛИЖЕННОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИКИ ВОЛЧКА КОВАЛЕВСКОЙ С ВИБРИРУЮЩЕЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

© 2022 г. М. В. Беличенко^{1,*}

¹ *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, Россия*

**e-mail: tuzemec1@rambler.ru*

Поступила в редакцию 25.04.2021 г.

После доработки 07.12.2021 г.

Принята к публикации 23.12.2021 г.

Исследуется движение тяжелого твердого тела, одна из точек которого (точка подвеса) совершает высокочастотные горизонтальные вибрации, а геометрия масс тела для этой точки отвечает случаю С.В. Ковалевской. Задача рассматривается в рамках приближенной автономной системы дифференциальных уравнений, записанных в гамильтоновой форме. Изучаются частные движения тела — маятниковые колебания и вращения вокруг горизонтально расположенной главной оси инерции, являющейся либо осью динамической симметрии, либо осью из экваториальной плоскости инерции. При этом радиус-вектор центра масс тела относительно точки подвеса совершает маятниковые движения в вертикальной плоскости, содержащей ось вибрации (продольные движения) или перпендикулярной этой оси (поперечные движения). В данной работе завершен начатый ранее линейный анализ орбитальной устойчивости описанных маятниковых движений, проводимый с учетом пространственных возмущений. Эта задача сведена к эквивалентной задаче об устойчивости тривиального равновесия редуцированной неавтономной системы с двумя степенями свободы. В областях устойчивости в линейном приближении проведен подробный нелинейный анализ орбитальной устойчивости. Проверены критерии устойчивости для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий, критерии формальной устойчивости, а также рассмотрены случаи резонансов четвертого порядка.

Ключевые слова: волчок Ковалевской, высокочастотные вибрации, маятниковые движения, орбитальная устойчивость

DOI: 10.31857/S0032823522020035

1. Введение. Маятниковые движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой впервые описаны Б.К. Млодзеевским в 1894 г. [1], где было показано, что такие движения может совершать тело с центром масс в главной плоскости инерции; осью вращения является главная ось инерции, перпендикулярная этой плоскости. Позднее рассматривались вопросы об устойчивости малых маятниковых колебаний [2], а также плоских и близких к ним вращений тела с центром масс на главной оси инерции [3]. Маятниковые движения изучены для тел с геометрией масс, отвечающей случаю Ковалевской [4, 5], Горячева—Чаплыгина [6], Бобылева—Стеклова [7], а также динамически симметричного тела [8].

Теоретический и прикладной интерес представляет изучение влияния высокочастотных вибраций на движение твердого тела или системы твердых тел. Первые рабо-

ты в данной области опубликованы А. Стефенсоном [9], показавшим возможность стабилизации верхнего положения математического маятника за счет вертикальных вибраций точки подвеса. Подробная библиография по динамике маятниковых систем при наличии вибраций содержится в монографиях [10, 11].

В работе А.П. Маркеева [12] были получены приближенные автономные уравнения движения тела с произвольной геометрией масс в случае произвольных высокочастотных периодических или условно-периодических вибраций точки подвеса в трехмерном пространстве. В этих уравнениях влияние вибраций точки подвеса эквивалентно наложению дополнительного (стационарного) вибрационного потенциального поля. В рамках указанной системы уравнений проведен ряд исследований частных случаев движений твердого тела с вибрирующей точкой подвеса для различных случаев геометрии масс тела и различных случаев вибраций [12–18].

Были описаны [16] (в рамках приближенной автономной системы) маятниковые движения волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса для широкого спектра вибраций, включающего и вибрации вдоль горизонтальной прямой. Была исследована орбитальная устойчивость этих движений. В этой статье угол собственного вращения волчка относительно оси симметрии являлся циклической координатой, и потому исследование устойчивости проведено по отношению к отклонению плоскости маятниковых движений волчка.

Другим классическим случаем динамики твердого тела с неподвижной точкой является случай С.В. Ковалевской [19]. В частности, было проведено [4, 5] исследование устойчивости маятниковых движений волчка Ковалевской с неподвижной точкой подвеса по отношению к возмущениям угла собственного вращения вокруг главной оси, содержащей центр масс тела.

Представляет интерес (в рамках приближенной автономной системы) изучить влияние вибраций точки подвеса волчка Ковалевской на устойчивость его маятниковых движений. В случае вибраций точки подвеса вдоль горизонтальной прямой система допускает как маятниковые движения, аналогичные таким движениям тела с неподвижной точкой, так и маятниковые движения других типов. Изучение этих движений начато [18] с линейного анализа их орбитальной устойчивости (по отношению к пространственным возмущениям).

Отметим, что первый интеграл, имеющий место в задаче о движении волчка Ковалевской вокруг неподвижной точки, исчезает при наличии вибраций точки подвеса. В такой постановке задачи отсутствует и циклическая координата (угол прецессии). При этом из-за появления выделенного направления в пространстве, определяемого направлением оси вибраций, возникает возможность стабилизации маятниковых движений, неустойчивых в случае неподвижной точки подвеса.

Целью данной работы является завершение линейного анализа орбитальной устойчивости маятниковых движений волчка Ковалевской с вибрирующим подвесом, а также проведение подробного нелинейного анализа их орбитальной устойчивости.

2. Постановка задачи. Рассмотрим движение тяжелого твердого тела, точка O которого (называемая далее точкой подвеса) совершает периодическое движение вдоль фиксированной горизонтальной прямой с частотой Ω по закону $O'O = \xi(t)$ относительно фиксированной точки O' . Среднее значение $\langle \xi(t) \rangle$ за период считаем равным нулю.

Введем поступательно движущуюся систему координат $OXYZ$, ось OY которой направлена вертикально вверх, а вибрации происходят вдоль оси OX (или в отдельном оговоренном случае – вдоль оси OZ). Введем связанную с телом систему координат $Oxuz$ с осями, направленными вдоль главных осей инерции тела для точки O . Главные моменты инерции тела для точки O обозначим через A , B и C и свяжем соотношениями, отвечающими волчку Ковалевской

$$2A = B = C$$

Пусть центр масс G волчка лежит на оси Oz , и $OG = z_G$, а масса тела – m . Ориентацию системы $Oxuz$ относительно $OXYZ$ зададим углами Эйлера ψ , θ и φ .

Будем считать, что наибольшее отклонение h_* точки подвеса от точки O' мало по сравнению с приведенной длиной тела $l = B/(mz_G)$, а частота вибраций точки подвеса Ω велика по отношению к характерной частоте $\omega_* = \sqrt{g/l}$. Введем малый параметр $\varepsilon^2 = h_*/l$ и будем считать, что $\omega_* \sim \varepsilon^2 \Omega$ (т. е. $h_* \Omega \sim l \omega_*$).

Движение тела опишем с помощью канонических уравнений Гамильтона. Методами теории возмущений можно привести функцию Гамильтона к виду, главная часть которой автономна. Впервые такое преобразование проведено для уравнений Эйлера–Пуассона [12], а приведение гамильтониана к автономному виду описано в монографии [10]. Оставляя за переменными прежние обозначения, запишем приближенный автономный гамильтониан в виде

$$\hat{H} = \frac{(\sin^2 \varphi + 2 \cos^2 \varphi) P_2^2}{2} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi (P_1 - P_3 \cos \theta) P_2}{\sin \theta} + \frac{P_3^2}{2} + \frac{(\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi) (P_1 - P_3 \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} - \cos \psi \sin \theta + \hat{\Pi}_v \quad (2.1)$$

$$\hat{\Pi}_v = \frac{\alpha}{2} \left(2(\cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi \cos \theta)^2 + (\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta)^2 \right), \quad (2.2)$$

где $\alpha = \langle \dot{\xi}^2 \rangle m^2 z_G^2 / (B^2 \omega_*^2)$ – безразмерный параметр, характеризующий интенсивность вибраций, P_1 , P_2 , P_3 – безразмерные импульсы, отвечающие углам ψ , θ и φ соответственно. Слагаемое $\hat{\Pi}_v$ представляет собой вибрационный потенциал.

Система с гамильтонианом (2.1), (2.2) имеет частные решения, при которых главная ось Oz (или, что то же, радиус-вектор \mathbf{OG}) совершает маятниковые движения в фиксированной вертикальной плоскости вокруг одной из двух других главных осей инерции, занимающей фиксированное горизонтальное положение. При этом ось вибрации либо лежит в плоскости этих движений, либо перпендикулярна ей. В первом случае маятниковые движения будем называть продольными, во втором – поперечными.

Данная работа посвящена исследованию двух типов движения: продольных движений, при которых осью вращения является ось Oy из экваториальной плоскости инерции (рис. 1а), и поперечных движений, при которых осью вращения является ось динамической симметрии Ox . Другие два типа движения в данной работе не рассматриваются.

Указанным продольным движениям отвечает частное решение системы (2.1), (2.2), задаваемое соотношениями

$$\theta = \pi/2, \quad \varphi = 0, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = 0, \quad (2.3)$$

а изменение величин ψ и P_1 описывается каноническими уравнениями с функцией Гамильтона

$$H_0 = \frac{P_1^2}{2} - \cos \psi + \frac{\alpha}{2} \cos^2 \psi \quad (2.4)$$

Для поперечных маятниковых движений ось Oz может совпасть с осью OZ . Чтобы избежать вырождения, при исследовании таких движений перенаправим оси системы

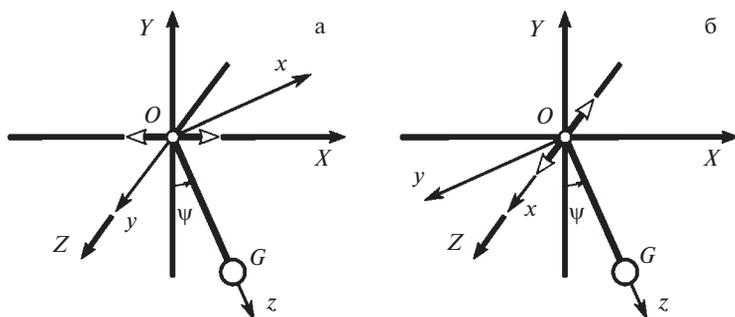


Рис. 1. Маятниковые движения.

координат $OXYZ$ таким образом, чтобы вибрации точки подвеса происходили вдоль оси OZ . Гамильтониан приближенной системы запишется в виде (2.1), в котором вибраторный потенциал примет вид

$$\hat{\Pi}_v = \frac{\alpha}{2} (2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \sin^2 \theta \quad (2.5)$$

Поперечным движениям отвечает частное решение системы (2.1), (2.5)

$$\theta = \pi/2, \quad \varphi = \pi/2, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = 0, \quad (2.6)$$

при этом величины ψ и P_1 удовлетворяют каноническим уравнениям математического маятника с гамильтонианом

$$H_{01} = P_1^2 - \cos \psi \quad (2.7)$$

Ранее [18] было проведено исследование движений систем с гамильтонианами (2.4) и (2.7), а также линейный анализ орбитальной устойчивости описанных маятниковых движений по отношению к пространственным возмущениям.

Целью данной работы является завершение линейного анализа орбитальной устойчивости маятниковых движений системы с функцией Гамильтона (2.1), (2.2) и (2.1), (2.5), по отношению к пространственным возмущениям, а также выполнение подробного нелинейного исследования орбитальной устойчивости.

Отметим, что при отсутствии вибраций точки подвеса маятниковые движения тела могут совершаться в любой фиксированной вертикальной плоскости. В этом случае, вследствие имеющейся относительно вертикали симметрии силового поля (поля тяжести), в системе имеется циклическая координата, и по отношению к пространственным возмущениям маятниковые движения неустойчивы. При наличии горизонтальных вибраций точки подвеса указанная симметрия нарушается, и циклическая координата исчезает. Далее будет показано, что маятниковые движения могут быть устойчивыми и при наличии пространственных возмущений.

3. Маятниковые движения. Гамильтонианы (2.4) и (2.7) и соответствующие им системы уравнений, описывающие маятниковые движения, далее будем называть модельными.

Модельные системы имеют первые интегралы (интегралы энергии) вида $H_0 = h = \text{const}$, $H_{01} = h = \text{const}$. На рис. 2а,б построены бифуркационные диаграммы в плоскости параметров α , h для модельных систем (2.4) и (2.7), соответственно, где отображены области, отвечающие разным типам маятниковых движений.

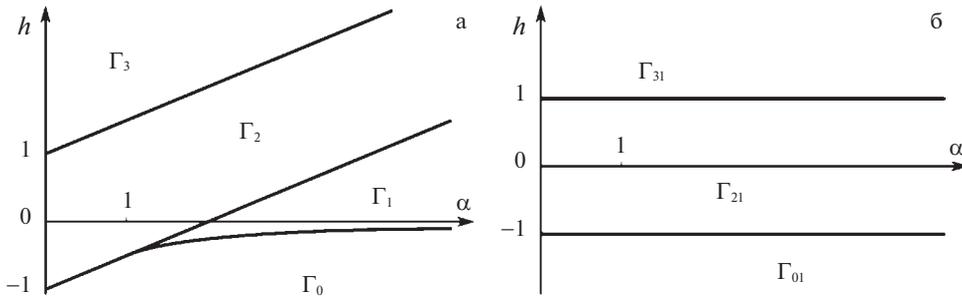


Рис. 2. Бифуркационные диаграммы.

На рис. 2а области $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ и Γ_3 с различным характером движения разделены прямыми $h = \pm 1 + \alpha/2$ и участком гиперболы $2\alpha h = -1$ при $\alpha > 1$. Точкам гиперболы $2\alpha h = -1$ отвечает устойчивое боковое положение равновесия $\psi_* = \pm \arccos(\alpha^{-1})$. Точкам прямой $h = -1 + \alpha/2$ при $\alpha < 1$ отвечает устойчивое нижнее положение равновесия $\psi = 0$, а при $\alpha > 1$ – неустойчивое нижнее положение и асимптотическое движение. Прямая $h = 1 + \alpha/2$ соответствует неустойчивому верхнему положению равновесия $\psi = \pi$ и асимптотическому движению. На рис. 2б прямой $h = -1$ при всех α отвечает устойчивое нижнее положение равновесия, а прямой $h = 1$ отвечают неустойчивое верхнее равновесие и асимптотическое движение.

В областях Γ_0 и Γ_{01} на рис. 2а и 2б движение невозможно. В области Γ_1 центр масс тела совершает колебания около бокового равновесия $\psi = \psi_*$. Областям Γ_2 и Γ_{21} отвечают колебания центра масс около нижнего положения. В областях Γ_3 и Γ_{31} происходят вращения волчка.

Для проведения интегрирования модельных систем разрешим интегралы энергии $H_0 = h$ и $H_{01} = h$ относительно импульса P_1 и, используя уравнения Гамильтона, получим дифференциальные уравнения продольных и поперечных маятниковых движений, соответственно $\dot{\psi} = P_1(\psi, h) = \pm\sqrt{2h + 2 \cos \psi - \alpha \cos^2 \psi}$ и $\dot{\psi} = 2P_1(\psi, h) = \pm 2\sqrt{(h + \cos \psi)}$.

Полагая, что $u = \cos \psi$ ($|u| \leq 1$), перепишем эти уравнения в виде

$$\dot{u} = \sqrt{-\alpha(1 - u^2)(u - u_1)(u - u_2)}, \quad \dot{u} = 2\sqrt{(u + h)(1 - u^2)} \tag{3.1}$$

Здесь введены обозначения $u_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1 + 2\alpha h})/\alpha$, ($u_1 < u_2$).

Интегрирование уравнений продольных и поперечных маятниковых движений (3.1) проведено в работе [18]. Для дальнейшего исследования введем обозначения

$$k_1 = \sqrt{\frac{2(u_2 - u_1)}{(1 - u_1)(u_2 + 1)}}, \quad k_{21} = \sqrt{\frac{h + 1}{2}},$$

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{4}(1 - u_1)(u_2 + 1)}, \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{\alpha}{2}(u_2 - u_1)}$$

и выпишем частоты маятниковых движений ω_j (j – индекс области)

$$\omega_1 = \frac{\pi \xi_1}{K(k_1)}, \quad \omega_2 = \frac{\pi \xi_2}{2K(k_1^{-1})}, \quad \omega_3 = \frac{\pi \xi_1}{2K(k_1)}$$

$$\omega_{21} = \frac{\pi \sqrt{2}}{2K(k_{21})}, \quad \omega_{31} = \frac{\pi \sqrt{2}}{k_{21}^{-1} K(k_{21}^{-1})}$$

Здесь $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, k – модуль эллиптического интеграла.

В областях колебаний и вращений модельных систем введем переменные действие-угол I, ψ .

Переменную действие введем по формуле

$$I = I(h) = \frac{1}{2\pi} \oint P_1(\psi, h) d\psi, \quad (3.2)$$

где интеграл берется по полному изменению угла ψ за период колебания или вращения.

Обращая соотношение (3.2), получим гамильтониан $H_0 = h(I)$, записанный через переменную действие.

4. Гамильтониан возмущенного движения. Маятниковые движения (колебания и вращения) полных систем с тремя степенями свободы, для которых “маятниковая часть” записана через переменную действие, а остальные переменные принимают значения (2.3) или (2.6), примем за невозмущенное движение. Рассмотрим вопрос об орбитальной устойчивости этих движений.

В системе с гамильтонианом (2.1) введем возмущения по формулам $r = I - I_0$, $p_2 = P_2$, $p_3 = P_3$, $q_2 = \theta - \pi/2$, $q_3 = \varphi - \varphi_0$, где I_0 и φ_0 – значение переменной действие и угла φ на невозмущенном движении. Выделим слагаемые возмущенного гамильтониана до четвертого порядка включительно по переменным $r^{1/2}$, p_2 , q_2 , p_3 , q_3 и представим его в виде

$$\hat{H} = H_2 + H_4 + O_6, \quad H_2 = \omega_0 r + \tilde{H}_2(p_2, q_2, p_3, q_3, w)$$

$$H_4 = \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_0}{\partial I} r^2 + \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial I} r + \tilde{H}_4(p_2, q_2, p_3, q_3, w) \quad (4.1)$$

Здесь ω_0 – частота невозмущенного движения, а O_6 – 2π -периодические слагаемые шестого и более высоких порядков по $r^{1/2}$, p_2 , q_2 , p_3 , q_3 . Указанные частные производные в выражении для H_4 вычисляются следующим образом

$$\frac{\partial \omega_0}{\partial I} = \frac{\partial \omega_0}{\partial h} \left(\frac{\partial I}{\partial h} \right)^{-1}, \quad \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial I} = \left(\frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial h} + \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial P_1} \frac{\partial P_1}{\partial h} \right) \left(\frac{\partial I}{\partial h} \right)^{-1}$$

Для продольных маятниковых движений, описываемых гамильтонианом (2.4), функции \tilde{H}_2 и \tilde{H}_4 имеют вид

$$\tilde{H}_2 = p_2^2 + P_1 q_3 p_2 + \frac{\cos \psi + 2\alpha \sin^2 \psi + P_1^2}{2} q_2^2 + P_1 p_3 q_2 -$$

$$- \frac{\alpha \sin 2\psi}{2} q_3 q_2 + \frac{p_3^2}{2} + \frac{(P_1^2 + \alpha \cos^2 \psi)}{2} q_3^2 \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_4 = & q_3 p_3 q_2 p_2 + \frac{5}{6} P_1 p_3 q_2^3 + \frac{1}{2} P_1 q_3 p_2 q_2^2 - \frac{2}{3} P_1 q_3^3 p_2 - \frac{1}{2} q_3^2 p_2^2 + P_1 p_3 q_3^2 q_2 + \\ & + \frac{1}{2} p_3^2 q_2^2 + \frac{1}{24} (8P_1^2 - \cos \psi - 8\alpha \sin^2 \psi) q_2^4 + \frac{1}{12} \alpha \sin 2\psi q_2^3 q_3 + \\ & + \frac{1}{2} (P_1^2 - \alpha \sin^2 \psi) q_2^2 q_3^2 + \frac{1}{3} \alpha \sin 2\psi q_2 q_3^3 - \frac{1}{6} (P_1^2 + \alpha \cos^2 \psi) q_3^4 \end{aligned} \quad (4.3)$$

В случае, когда невозмущенное движение – поперечное маятниковое движение, описываемое системой с гамильтонианом (2.7), имеем

$$\tilde{H}_2 = \frac{p_2^2}{2} - P_1 q_3 p_2 + \frac{p_3^2}{2} + 2P_1 q_2 p_3 + \frac{2P_1^2 - \alpha + \cos \psi}{2} q_2^2 + \frac{\alpha - P_1^2}{2} q_3^2 \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_4 = & \frac{1}{2} q_3^2 p_2^2 - q_3 p_3 q_2 p_2 + p_3^2 q_2^2 + \frac{2}{3} P_1 q_3^3 p_2 - \frac{1}{2} P_1 q_3 p_2 q_2^2 + \frac{5}{3} P_1 p_3 q_3^2 - \\ & - P_1 p_3 q_3^2 q_2 + \frac{1}{6} (P_1^2 - \alpha) q_3^4 - \frac{1}{2} (\alpha + P_1^2) q_3^2 q_2^2 + \frac{1}{24} (4\alpha + 16P_1^2 - \cos \psi) q_2^4 \end{aligned} \quad (4.5)$$

В выражениях (4.2)–(4.5) функции $\psi(w)$ и $P_1(w)$ отвечают невозмущенному движению.

На уровне энергии невозмущенного движения $\hat{H} = 0$ осуществим изоэнергетическую редукцию и, принимая в качестве новой независимой переменной величину w , рассмотрим неавтономную редуцированную систему с двумя степенями свободы с гамильтонианом

$$K = K_2 + K_4 + \tilde{O}_6, \quad K_2 = \frac{1}{\omega_0} \tilde{H}_2, \quad K_4 = \frac{1}{\omega_0} \left[\tilde{H}_4 - \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial I} \frac{\tilde{H}_2}{\omega_0} + \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_0}{\partial I} \frac{\tilde{H}_2^2}{\omega_0^2} \right] \quad (4.6)$$

Критерии орбитальной устойчивости тривиального положения равновесия системы с гамильтонианом (4.1) и описанной редуцированной системы с гамильтонианом (4.6) совпадают [20].

Замечание. Положения равновесия модельных систем (2.4) и (2.7) в рамках редуцированной неавтономной системы с двумя степенями свободы сохраняются. Для рассматриваемых движений устойчивость положений равновесия сохраняется и при пространственных возмущениях. В этом случае корни характеристических уравнений линейризованных систем $\pm i\Omega_{k,j}$ (k – индекс области, $j = 1, 2$) имеют вид

$$\Omega_{2,1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\alpha}}, \quad \Omega_{2,2} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1-\alpha}}, \quad \Omega_{21,1} = \frac{\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{2}}, \quad \Omega_{21,2} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2}} \quad (4.7)$$

$$\Omega_{1,(1,2)} = \sqrt{\frac{4\alpha^2 - 1 \pm \sqrt{16\alpha^4 - 16\alpha^2 + 1}}{2(\alpha^2 - 1)}} \quad (4.8)$$

5. Критерии устойчивости маятниковых движений. В областях колебаний и вращений модельных систем рассмотрим сначала линейризованную систему, описываемую гамильтонианом K_2 . Пусть $\mathbf{X}(w)$ – матрица фундаментальных решений этой системы, удовлетворяющих начальным условиям $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}_4$, где \mathbf{E}_4 – единичная матрица четвертого порядка. Характеристическое уравнение линейной системы имеет вид

$$\rho^4 - a_1 \rho^3 + a_2 \rho^2 - a_1 \rho + 1 = 0 \quad (5.1)$$

Здесь a_1 – след матрицы $\mathbf{X}(2\pi)$, a_2 – сумма ее главных миноров второго порядка.

Условия устойчивости в линейном приближении задаются неравенствами [21]

$$-2 < a_2 < 6, \quad 4(a_2 - 2) < a_1^2 < (a_2 + 2)^2 / 4 \quad (5.2)$$

В областях устойчивости в линейном приближении гамильтониан K_2 при помощи 2π -периодической по w линейной замены переменных $p_2, q_2, p_3, q_3 \rightarrow p'_2, q'_2, p'_3, q'_3$ может быть приведен к нормальной форме

$$K'_2 = \frac{1}{2}\lambda_1(q_2'^2 + p_2'^2) + \frac{1}{2}\lambda_2(q_3'^2 + p_3'^2),$$

где $\pm i\lambda_{1,2}$ – характеристические показатели системы.

Границами областей устойчивости в линейном приближении внутри областей $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{21}, \Gamma_3$ и Γ_{31} являются кривые резонансов первого и второго порядков, задаваемых соотношениями

$$k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = N, \quad |k_1| + |k_2| \leq 2; \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

где k_1 и k_2 – целые числа.

Согласно теореме Крейна–Гельфанда–Лидского [23], эти кривые в областях Γ_1, Γ_2 и Γ_{21} рождаются из точек нижних границ этих областей, где величины $\Omega_{i,j}$, вычисляемые по формулам (4.7) и (4.8), связаны соответствующими резонансными соотношениями. Из некоторых таких точек рождаются пары кривых резонансов, заключающие между собой области неустойчивости (области параметрического резонанса), а из других рождается по одной резонансной кривой (и области неустойчивости нет).

В областях, где выполняются условия (5.2) устойчивости в линейном приближении, проводится нелинейный анализ устойчивости тривиального положения равновесия рассматриваемой неавтономной системы с двумя степенями свободы. Для этого при помощи близкой к тождественной замены переменных $p'_2, q'_2, p'_3, q'_3 \rightarrow \hat{p}_2, \hat{q}_2, \hat{p}_3, \hat{q}_3$ требуется провести нормализацию преобразованного гамильтониана возмущенного движения в слагаемых четвертой степени относительно возмущений.

Если в системе отсутствуют резонансы четвертого порядка, то есть величины $\lambda_{1,2}$ не связаны соотношениями вида

$$k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = N, \quad |k_1| + |k_2| = 4; \quad N = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.3)$$

то имеет место нерезонансный случай, и нормальная форма гамильтониана в симплектических полярных координатах φ_i, r_i ($\hat{q}_i = \sqrt{2r_i} \sin \varphi_i, \hat{p}_i = \sqrt{2r_i} \cos \varphi_i, i = 2, 3$) приводится к виду

$$\hat{K} = \lambda_1 r_2 + \lambda_2 r_3 + c_{20} r_2^2 + c_{11} r_2 r_3 + c_{02} r_3^2 + \tilde{K}(r_2, r_3, \varphi_2, \varphi_3, w), \quad (5.4)$$

где c_{20}, c_{11} и c_{02} – постоянные коэффициенты, а $\tilde{K}(r_2, r_3, \varphi_2, \varphi_3, w)$ – 2π -периодическая по w функция, порядок которой по r_2 и r_3 не ниже третьего.

При отсутствии вырождения в членах четвертой степени нормализованного гамильтониана (5.4), то есть при выполнении условия

$$D = c_{11}^2 - 4c_{20}c_{02} \neq 0$$

положение равновесия $r_2 = r_3 = 0$ неавтономной редуцированной системы с двумя степенями свободы устойчиво для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий [22]. Если при $r_2 \geq 0, r_3 \geq 0$ квадратичная форма

$$c_{20}r_2^2 + c_{11}r_2r_3 + c_{02}r_3^2$$

является знакоопределенной, то положение равновесия формально устойчиво [22].

Пусть в системе выполняется резонансное соотношение вида (5.3). В случае $k_1 k_2 < 0$ в системе имеется положительно определенный первый интеграл, и рассмат-

риваемое положение равновесия формально устойчиво [22]. Если же $k_1 k_2 \geq 0$, то гамильтониан системы приводится к нормальной форме

$$\begin{aligned} \hat{K} = & \lambda_1 r_2 + \lambda_2 r_3 + c_{20} r_2^2 + c_{11} r_2 r_3 + c_{02} r_3^2 + a_{k_1 k_2} \sin(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 - Nw) + \\ & + b_{k_1 k_2} \cos(k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 - Nw) + \tilde{K}(r_2, r_3, \varphi_2, \varphi_3, w) \end{aligned} \quad (5.5)$$

где коэффициенты $a_{k_1 k_2}$, $b_{k_1 k_2}$ постоянны. При выполнении условия

$$\left| c_{20} k_1^2 + c_{11} k_1 k_2 + c_{02} k_2^2 \right| > |k_1|^{k_1/2} |k_2|^{k_2/2} \sqrt{a_{k_1 k_2}^2 + b_{k_1 k_2}^2} \quad (5.6)$$

положение равновесия $r_2 = 0$, $r_3 = 0$ устойчиво с учетом в функции Гамильтона членов не выше второго порядка по r_j ($j = 2, 3$) [22]. Если условие (5.6) выполняется с обратным знаком, то имеет место неустойчивость.

Случаи вырождения $D = 0$, а также случаи кратного резонанса, требуют дополнительного исследования и в данной работе не рассматриваются.

Нормальную форму гамильтониана вида (5.4) или (5.5) можно получить, построив нормализованное отображение, порожаемое системой канонических уравнений движения системы с функцией Гамильтона K за период 2π [20]. Построение отображения выполнено с использованием программного пакета MAPLE.

6. О результатах исследования устойчивости в линейном приближении. Для проверки условий (5.2) устойчивости в линейном приближении внутри областей Γ_1 , Γ_2 , Γ_{21} , Γ_3 , и Γ_{31} следует проинтегрировать уравнения движения неавтономной системы с гамильтонианом K_2 и определить коэффициенты характеристического уравнения (5.1). Интегрирование уравнений движения и вычисление необходимых коэффициентов проведено численно.

Исследование линейной орбитальной устойчивости рассматриваемых продольных и поперечных маятниковых движений волчка подробно проведено в работе [18], где в соответствующих областях в плоскости параметров α и h построены диаграммы устойчивости. Полученные результаты показаны на рис. 3. На этих рисунках полужирными линиями отмечены границы областей, соответствующие рис. 2, тонкими линиями обозначены кривые резонансов первого и второго порядков. Серым цветом показаны области неустойчивости, области устойчивости в линейном приближении не закрашены. В областях с вертикальной штриховкой содержится счетное множество резонансных кривых первого и второго порядков.

Картина устойчивости для продольных маятниковых движений показана на рис. 3а. В области Γ_2 колебаний около нижнего положения кривые резонансов первого и второго порядков берут начало в точках нижней границы области с абсциссами

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{1}{2}, \frac{7}{9}, \frac{7}{8} \quad (\Omega_{2,1} = n, \quad n = \overline{2, 4}); \quad \alpha = \frac{1}{2}, \frac{4}{5} \quad (\Omega_{2,2} = n, \quad n = \overline{1, 2}) \\ \alpha = \frac{1}{9}, \frac{17}{25}, \frac{41}{49} \quad \left(\Omega_{2,1} = \frac{1}{2} + n, \quad n = \overline{1, 3} \right) \\ \alpha = \frac{1}{5}, \frac{9}{13}, \frac{25}{29} \quad \left(\Omega_{2,2} = \frac{1}{2} + n, \quad n = \overline{0, 2} \right) \\ \alpha = \frac{14 - 4\sqrt{6}}{25}, \frac{1}{2}, \frac{242 - 8\sqrt{30}}{289}, \frac{301 - 20\sqrt{3}}{338} \quad (\Omega_{2,1} + \Omega_{2,2} = n, \quad n = \overline{2, 5}) \\ \alpha = \frac{1}{2} \quad (\Omega_{2,1} - \Omega_{2,2} = 1) \end{aligned}$$

В области Γ_2 имеются шесть существенных областей устойчивости. Четыре из них примыкают к точке A_1 ($\alpha = 1/2$, $h = -3/4$), где имеет место кратный резонанс $\Omega_{2,1} = 2$,

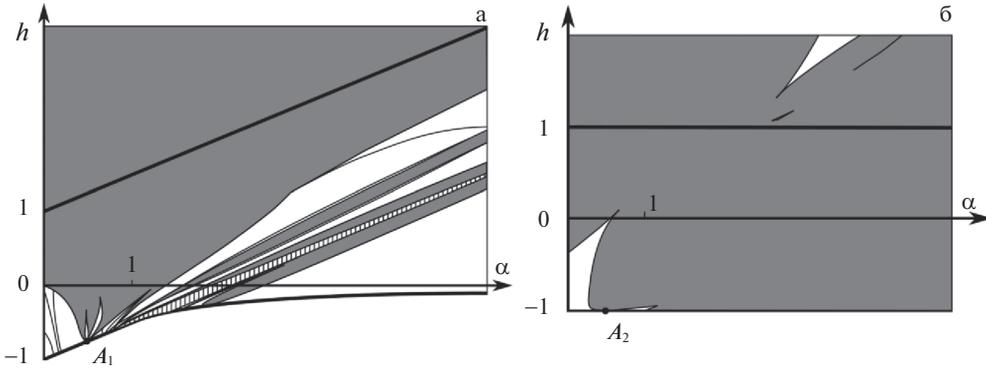


Рис. 3. Результаты линейного анализа устойчивости [18].

$\Omega_{2,2} = 1$. Первая из этих областей примыкает к границе $\alpha = 0$ и нижней границе области Γ_2 и имеет угловую точку $(0; 0)$. Вторая и третья области устойчивости расположены между точкой кратного резонанса A_1 и угловыми точками $(0.49252; -0.34305)$ и $(0.64130; -0.17655)$, соответственно. Четвертая область устойчивости занимает участок нижней границы области Γ_2 при $\alpha \in (1/2; 7/9)$ и заканчивается в угловой точке $(1.22538; -0.05679)$. При $\alpha > 1$ имеются две обширные области устойчивости в линейном приближении, расширяющиеся с увеличением значения α . На верхней границе большей из этих областей находится угловая точка $(2.77955; 1.25049)$. Вблизи точки с абсциссой $\alpha = 1$ на нижней границе области Γ_2 находится счетное множество точек, порождающих резонансные кривые. Эти кривые ограничены заштрихованной областью около нижней границы Γ_2 .

В области Γ_1 колебаний в окрестности бокового положения равновесия кривые резонансов первого и второго порядков выходят из точек нижней границы области, абсциссы которых

$$\alpha = \frac{1}{15} \sqrt{359 + 2\sqrt{2689}} \quad (\Omega_{1,1} = 5/2); \quad \alpha = \frac{1}{15} \sqrt{375 + 30\sqrt{145}} \quad (\Omega_{1,2} = 1/2)$$

$$\alpha = \frac{1}{5} (\sqrt{42} + \sqrt{2}) \quad (\Omega_{1,1} + \Omega_{1,2} = 3)$$

Большую часть области Γ_1 занимает примыкающая к ее нижней границе область устойчивости в линейном приближении. Эта область ограничена сверху областью неустойчивости, выходящей из точки нижней границы области Γ_1 с абсциссой $\alpha = \sqrt{375 + 30\sqrt{145}}/15 \approx 1.80892$. Над этой областью неустойчивости в окрестности верхней границы области Γ_1 располагается заштрихованная область, где, как и в области Γ_2 , располагается счетное множество резонансных кривых.

В области вращений Γ_3 не обнаружено областей орбитальной устойчивости.

Диаграмма устойчивости поперечных маятниковых движений представлена на рис. 3б. В области Γ_{21} колебаний около нижнего положения равновесия кривые резонансов первого и второго порядков выходят из точек нижней границы области с абсциссами

$$\alpha = 1 \quad (\Omega_{21,1} = 0); \quad \alpha = 0 \quad (\Omega_{21,2} = 0)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\Omega_{21,1} = \frac{1}{2} \right); \quad \alpha = \frac{1}{2} \left(\Omega_{21,2} = \frac{1}{2} \right); \quad \alpha = \frac{1}{2} \quad (\Omega_{21,1} + \Omega_{21,2} = 1)$$

В этой области находятся две области устойчивости (рис. 3б), примыкающие к нижней границе Γ_{21} левее и правее точки кратного резонанса A_2 ($\alpha = 1/2$, $h = -1$; $\Omega_{21,1} = \Omega_{21,2} = 1/2$). Верхняя граница левой из этих областей заключена между точками $(0; -0.37233)$ и $(0.66882; 0.43844)$. Область устойчивости правее точки A_2 имеет угловую точку $(1.15900; -0.37413)$.

В области вращений Γ_{31} в рассматриваемом диапазоне параметров обнаружены три области устойчивости в линейном приближении. Наибольшая из них берет начало в точке $(2.72745; 2.68839)$ и расширяется с ростом h . Две малые области устойчивости представляют собой криволинейный треугольник с угловыми точками $(2.83023; 2.53740)$, $(2.67780; 2.40480)$ и $(2.70412; 2.41939)$, и тонкую полосу с угловой точкой $(3.78114; 3.53085)$ (заключенную при $h = 4$ между точками с абсциссами $\alpha = 4.22712$ и $\alpha = 4.22736$).

Таким образом, для описанных маятниковых движений существуют области линейной орбитальной устойчивости по отношению к рассматриваемым в работе пространственным возмущениям. Этот результат отличает данную задачу от аналогичной задачи в случае неподвижной точки подвеса тела, когда устойчивость при наличии пространственных возмущений невозможна.

Результаты данного исследования в предельном случае отсутствия вибраций соответствуют выводам [4, 5]. В этих работах было получено, что маятниковые колебания волчка Ковалевской как вокруг оси динамической симметрии, так и вокруг оси из экваториальной плоскости орбитально устойчивы по отношению к возмущению угла собственного вращения, если амплитуда этих колебаний меньше значения $\pi/2$. Этим колебаниям на диаграммах рис. 1а и б отвечают отрезки $\alpha = 0$, $-1 < h < 1$. На рис. 1а область устойчивости колебаний при стремлении интенсивности вибраций к нулю сходится к отрезку $h \in [-1; 0]$, что отвечает колебаниям с амплитудой до $\pi/2$. На рис. 1б область устойчивости колебаний сходится к отрезку $h \in [-1; -0.37233]$, но при численном исследовании самой границы $\alpha = 0$ получаем, что условия (5.2) выполняются со знаком равенства при $h \in [-1; 0]$, а при $h > 0$ одно из этих условий выполняется с обратным знаком, что также отвечает результатам [4, 5].

7. Нелинейный анализ устойчивости маятниковых движений. Результаты нелинейного анализа устойчивости маятниковых движений, основанные на критериях из параграфа 4, представим на рис. 4–6. На этих диаграммах полужирными линиями показаны кривые резонансов первого и второго порядков, часть которых является границами областей устойчивости в линейном приближении, а остальные кривые разделяют эти области на подобласти g_i ($i = 1 \dots 16$). Кривые резонансов четвертого порядка, соответствующие условию $k_1 k_2 < 0$, отображены точечными линиями, резонансные кривые с $k_1 k_2 \geq 0$ показаны сплошными тонкими линиями. Пунктирные линии – кривые вырождения, на которых имеем $D = 0$.

В незакрашенных областях для маятниковых движений выполняются условия формальной устойчивости, а в областях, закрашенных светло-серым цветом, эти условия нарушаются. В заштрихованной области содержится счетное множество кривых резонансов четвертого порядка; на них исследование не проводилось. В темно-серых областях содержится конечное число резонансных кривых четвертого порядка, однако картина устойчивости здесь весьма сложна и в данной работе не описывается. Остановимся подробнее на результатах исследования.

7.1. Области продольных колебаний волчка около нижнего положения равновесия (рис. 4а). В области Γ_2 продольных колебаний около нижнего положения равновесия нелинейный анализ устойчивости проведен в областях линейной устойчивости, примыкающих к точке кратного резонанса A_1 и разделенных на подобласти g_i ($i = 1 \dots 10$).

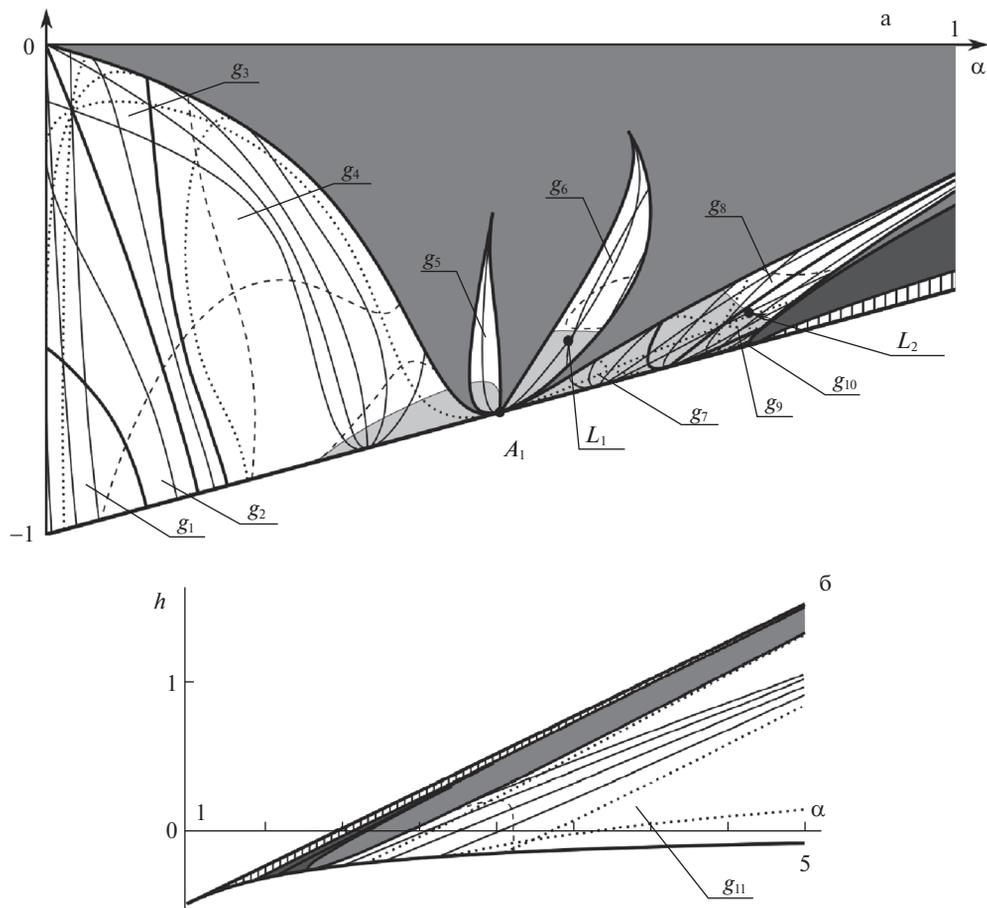


Рис. 4. Нелинейный анализ устойчивости продольных движений.

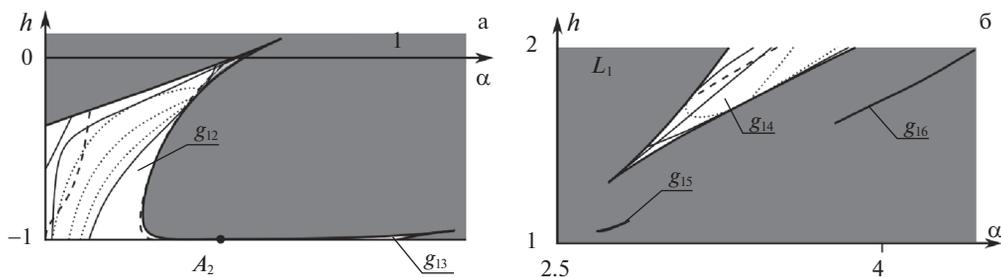


Рис. 5. Нелинейный анализ устойчивости поперечных движений.

Часть кривых резонансов четвертого порядка берут начало в точках нижней границы области Γ_2 (в силу громоздкости выражения для абсцисс точек и соответствующие резонансные соотношения не приводятся).

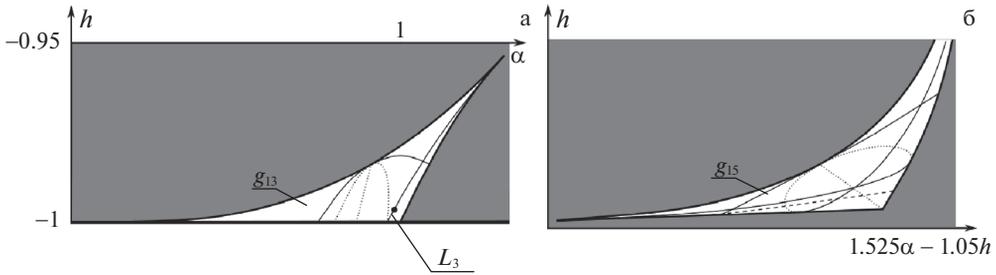


Рис. 6. Подробное описание малых областей.

Кроме того, в исследуемых областях обнаружены четыре резонансные кривые, граничные точки которых лежат на других границах областей устойчивости: две кривые $2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 3$ (области g_2, g_3 и g_8, g_9) и кривые $4\lambda_1 = 9$ и $3\lambda_1 + \lambda_2 = 8$ (область g_6).

На кривых резонансов четвертого порядка $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 5$ (область g_6) и $3\lambda_1 + \lambda_2 = 9$ (области g_9) обнаружены два малых участка неустойчивости, местоположение которых отмечено на рис. 4а точками L_1 и L_2 . Участок L_1 заключен между точками $(0.57520, -0.60225)$ и $(0.57386, -0.60567)$, а участок L_2 — между $(0.77345, -0.54603)$ и $(0.77360, -0.54590)$. Вне этих участков на данных кривых, а также на остальных резонансных кривых выполняется условие устойчивости (5.6).

В рассматриваемой части плоскости параметров обнаружены пять кривых вырождения: три из них лежат в левой области устойчивости в линейном приближении (подобласти g_1, g_2, g_3 и g_4), и по одной лежит в правых областях (подобласти g_6 и g_8, g_9).

В большей части четырех исследуемых областей устойчивости в линейном приближении имеет место формальная устойчивость. Исключение составляют части этих областей, примыкающие к точке A_1 кратного резонанса, где условие формальной устойчивости нарушается. При этом граница этой части области в подобласти g_9 пересекает участок неустойчивости L_2 на резонансной кривой.

7.2. Область продольных колебаний волчка около бокового положения равновесия (рис. 4б). Для колебаний волчка в окрестности бокового положения равновесия нелинейный анализ устойчивости проведен для области g_{11} устойчивости в линейном приближении при $\alpha < 5$. В этой части области обнаружено семь кривых резонансов четвертого порядка, выходящих из точек нижней границы области Γ_1 с абсциссами

$$\alpha = \frac{\sqrt{52105 + 136\sqrt{33505}}}{153} \quad \left(\Omega_{1,1} = \frac{9}{4}\right); \quad \alpha = \frac{\sqrt{2065 + 56\sqrt{1345}}}{21} \quad \left(\Omega_{1,2} = \frac{1}{4}\right)$$

$$\alpha = 2.62810 \quad (\Omega_{1,1} + 3\Omega_{1,2} = 3); \quad \alpha = 2.15272 \quad (\Omega_{1,1} - 3\Omega_{1,2} = 1)$$

$$\alpha = 2.01251 \quad (3\Omega_{1,1} + \Omega_{1,2} = 7); \quad \alpha = 2.68418 \quad (3\Omega_{1,1} - \Omega_{1,2} = 6)$$

$$\alpha = \frac{1}{9}(\sqrt{221} + 4\sqrt{2}) \quad (2\Omega_{1,1} + 2\Omega_{1,2} = 5)$$

На всех рассмотренных кривых резонансов четвертого порядка условия устойчивости (5.6) выполняются. Обнаружена одна кривая вырождения, лежащая между точками $(3.11532, -0.15951)$ и $(2.71379, 0.11436)$ на границах области. Условия формальной устойчивости выполняются во всей области g_{11} .

7.3. *Области поперечных колебаний волчка около нижнего положения равновесия (рис. 5а).* В области Γ_{21} поперечных колебаний десять резонансных кривых берут начало на нижней границе области, абсциссы которых

$$\begin{aligned} \alpha &= 7/8 \quad (\Omega_{21,1} = 1/4); \quad \alpha = 1/8 \quad (\Omega_{21,2} = 1/4) \\ \alpha &= 49/50 \quad (3\Omega_{21,1} + \Omega_{21,2} = 1); \quad \alpha = 1/50, \quad 9/10 \quad (3\Omega_{21,1} - \Omega_{21,2} = 2, 0) \\ \alpha &= 1/50 \quad (\Omega_{21,1} + 3\Omega_{21,2} = 1); \quad \alpha = 1/10, \quad 49/50 \quad (\Omega_{21,1} - 3\Omega_{21,2} = 0, -2) \\ \alpha &= \frac{4 - \sqrt{12}}{8}, \quad \frac{4 + \sqrt{12}}{8} \quad (2\Omega_{21,1} - 2\Omega_{21,2} = 1, -1) \end{aligned}$$

Дополнительно в области устойчивости в линейном приближении g_{12} найдены две резонансные кривые $4\lambda_1 = 3$, граничные точки которых лежат на боковых и верхней границах области. На всех кривых резонансов четвертого порядка в этой области условия устойчивости (5.6) выполняются. Также в области g_{12} обнаружены две кривые вырождения и область, в которой нарушаются условия формальной устойчивости. Эта область примыкает к верхней границе области g_{12} вблизи верхней угловой точки. Ее граница заключена между точками (0.51562, -0.01612) и (0.60296, 0.05082), и вытягивается внутрь области устойчивости до точки (0.43111, -0.19137).

Область устойчивости g_{13} в другом масштабе изображена на рис. 6а. В этой области найдена дополнительная резонансная кривая $4\lambda_2 = 3$. На кривой резонанса $3\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ в области g_{13} обнаружен участок неустойчивости, заключенный между точкой (49/50, -1) нижней границы области Γ_{21} и точкой (0.99119, -0.99625), отмеченной жирной точкой L_3 на рис. 6а. Условия формальной устойчивости выполняются во всей области g_{13} , и кривые вырождения отсутствуют.

7.4. *Области поперечных вращений волчка (рис. 5б).* Картина устойчивости поперечных вращений в области g_{14} показана на рис. 5б. Подробная картина для области g_{15} представлена в другом масштабе и в осях $1.525\alpha - 1.05h$ и h на рис. 6б, а узкая область g_{16} отдельно не изображена.

На всех кривых резонансов четвертого порядка (по семь кривых в областях g_{14} и g_{15} и одна кривая в области g_{16}) критерии устойчивости (5.6) выполнены; условия формальной устойчивости выполняются во всех точках областей g_{14} , g_{15} и g_{16} . В областях g_{14} и g_{15} обнаружены по одной кривой вырождения.

Заключение. В работе исследовано влияние вибраций точки подвеса вдоль горизонтальной прямой на вид и орбитальную устойчивость маятниковых движений волчка Ковалевской. Показано, что под действием вибраций точки подвеса тела, его маятниковые движения могут оставаться такими же, как и у тела с неподвижной точкой (поперечные движения), однако, с помощью вибраций можно получить и другие маятниковые движения тела (продольные движения).

При отсутствии вибраций точки подвеса маятниковые движения тела орбитально неустойчивы по отношению к пространственным возмущениям, но с помощью вибраций вдоль горизонтали можно добиться стабилизации некоторых маятниковых движений. В таких областях орбитальной устойчивости в линейном приближении проведен строгий нелинейный анализ устойчивости. Построены области выполнения условий формальной устойчивости и устойчивости для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий, а также проверены критерии устойчивости на кривых резонансов четвертого порядка.

Исследование выполнено в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00116).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Млодзеевский Б.К.* О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Тр. отд. Физич. наук об-ва любителей естествознания, антропологии и этнографии. 1894. Т. 7. Вып. 1. С. 46–48.
2. *Архангельский Ю.А.* Об устойчивости движения тяжелого твердого тела, вокруг неподвижной точки в одном частном случае // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 2. С. 294–302.
3. *Маркеев А.П.* О плоских и близких к плоским вращениях тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 4. С. 29–36.
4. *Маркеев А.П.* Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 1. С. 51–58.
5. *Маркеев А.П., Медведев С.В., Чеховская Т.Н.* К задаче об устойчивости маятникообразных движений твердого тела в случае Ковалевской // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 1. С. 3–9.
6. *Бардин Б.С.* К задаче об устойчивости маятникообразных движений твердого тела в случае Горячева–Чаплыгина // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 2. С. 14–21.
7. *Bardin B.S., Rudenko T.V., Savin A.A.* On the orbital stability of planar periodic motions of a rigid body in the Bobylev–Steklov case // R.&C. Dyn. 2012. V. 17. № 6. P. 533–546.
8. *Бардин Б.С., Савин А.А.* Об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний и вращений симметричного твердого тела с неподвижной точкой // Нелин. дин. 2012. Т. 8. № 2. С. 249–266.
9. *Stephenson A.* On a new type of dynamical stability // Mem. & Proc. Manchester Literary and Phil. Soc. 1908. V. 52. Pt. 2. № 8. P. 1–10.
10. *Холостова О.В.* Задачи динамики твердых тел с вибрирующим подвесом. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2016. 308 с.
11. *Стрижак Т.Г.* Методы исследования динамических систем типа “маятник”. Алма-Ата: Наука, 1981. 253 с.
12. *Маркеев А.П.* Об уравнениях приближенной теории движения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // ПММ. 2011. Т. 75. № 2. С. 193–203.
13. *Холостова О.В.* Об устойчивости равновесий твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Вестн. РУДН. Математика. Информатика. Физика. 2011. № 2. С. 111–122.
14. *Вишенкова Е.А.* Об устойчивости частных решений приближенных уравнений движения тяжелого твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // Нелин. дин. 2015. Т. 11. № 3. С. 459–474.
15. *Беличенко М.В., Холостова О.В.* Об устойчивости стационарных вращений в приближенной задаче о движении волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // Нелин. дин. 2017. Т. 13. № 1. С. 81–104.
16. *Belichenko M.V.* On the stability of pendulum-type motions in the approximate problem of dynamics of a Lagrange top with a vibrating suspension point // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2018. V. 14. № 2. P. 243–263.
17. *Kholostova O.V.* On the dynamics of a rigid body in the Hess case at high-frequency vibrations of a suspension point // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2020. V. 16. № 1. P. 59–84.
18. *Belichenko M.V.* Linear orbital stability analysis of the pendulum-type motions of a Kovalevskaya top with a suspension point vibrating horizontally // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2019. V. 489. 012034. P. 1–9.
19. *Kowalevski S.* Sur le probleme de la rotation d’un corps solide autour d’un point fixe // Institut Mittag-Leffler: Acta Mathematica. 1889. V. 12. P. 177–232.
20. *Маркеев А.П.* Об устойчивости плоских вращений спутника на круговой орбите // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 4. С. 63–85.
21. *Ляпунов А.М.* Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах. Собр. соч. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1954. С. 327–401.
22. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
23. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.

On the Orbital Stability of Pendulum-type Motions in the Approximate Problem of Kovalevskaya Top Dynamics with a Vibrating Suspension Point

M.V. Belichenko^{a,#}

^a *Moscow aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

[#] *e-mail: tuzemec1@rambler.ru*

We study the motion of a heavy rigid body under the assumption that one of its points (the suspension point) performs high-frequency horizontal vibrations, and the body mass geometry for this point corresponds to S.V. Kovalevskaya case. The problem is considered within the framework of an approximate autonomous system of differential equations written in Hamiltonian form. The particular body motions are studied; they are pendulum-type oscillations and rotations around a horizontally located principal axis of inertia, which is either an axis of dynamic symmetry or an axis from the equatorial plane of inertia. For these motions, the radius vector of the center of mass of the body relative to the suspension point performs pendulum-type motions in a vertical plane containing the vibration axis (longitudinal motions), or perpendicular to this axis (transverse motions). In this paper, the linear analysis of the pendulum-type motions orbital stability with respect to spatial perturbations, which was started earlier, is completed. This problem is reduced to an equivalent problem on the stability of the trivial equilibrium of a non-autonomous reduced two-degree-of-freedom system. In the regions of linear orbital stability a detailed nonlinear analysis of the orbital stability is carried out. Criteria of the stability for most (in the sense of the Lebesgue measure) initial conditions and the formal stability criteria are checked, cases of fourth-order resonances are also considered.

Keywords: Kovalevskaya top, fast vibrations, pendulum-type motions, orbital stability

REFERENCES

1. *Mlodzeevsky B.K.* About permanent axes in the movement of a heavy solid body around a fixed point // Proc. of the Dep. of Phys. Sci. Soc. of Devotees of Natural Science, Anthropology, and Ethnography, 1894, vol. 7, no. 1, pp. 46–48. (in Russian)
2. *Arkhangelskii Iu.A.* On the stability of motion of a heavy solid about a fixed point in a certain special case // JAMM, 1960, vol. 24, no. 2, pp. 294–302.
3. *Markeev A.P.* On flat and near-flat rotations of a heavy rigid body around a fixed point // Izv AN SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela, 1988, no. 4, pp. 29–36. (in Russian)
4. *Markeyev A.P.* The stability of the plane motions of a rigid body in the Kovalevskaya case // JAMM, 2001, vol. 65, no. 1, pp. 47–54.
5. *Markeev A.P., Medvedev S.V., Chekhovskaya T.N.* To the problem of stability of pendulum-like vibrations of a rigid body in Kovalevskaya's case // Mech. Solids, 2003, vol. 38, no. 1, pp. 1–6.
6. *Bardin B.S.* Stability problem for pendulum-type motions of a rigid body in the Goryachev–Chaplygin case // Mech. Solids, 2007, vol. 42, pp. 177–183.
7. *Bardin B.S., Rudenko T.V., Savin A.A.* On the orbital stability of planar periodic motions of a rigid body in the bobylev-steklov case // R.&C. Dyn., 2012, vol. 17, no. 6, pp. 533–546.
8. *Bardin B.S., Savin A.A.* On orbital stability pendulum-like oscillations and rotation of symmetric rigid body with a fixed point // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2012, vol. 8, no. 2, pp. 249–266.
9. *Stephenson A.* On a new type of dynamical stability // Mem.&Proc. of the Manchester Literary and Phil. Soc., 1908, vol. 52, pt. 2, no. 8, pp. 1–10.
10. *Kholostova O.V.* Problems of Dynamics of a Rigid Body with a Vibrating Suspension Point. (Zadachi dinamiki tverdykh tel s vibriruyushchim podvesom) Moscow; Izhevsk: Institut Komp'ut. Issled., 2016. 308 p. (in Russian)
11. *Strizhak T.G.* Investigation Methods of Pendulum-Type Dynamic Systems. (Metody issledovaniya dinamicheskikh sistem tipa “mayatnik”) Alma-Ata: Nauka, 1981. 253 p.
12. *Markeyev A.P.* The equations of the approximate theory of the motion of a rigid body with a vibrating suspension point // JAMM, 2011, vol. 75, no. 2, pp. 193–203.

13. *Kholostova O.V.* On stability of relative equilibriums of a rigid body with a vibrating point of support // Vestn. Ross. Univ. Druzhby Narodov. Matematika. Informatika. Fizika, 2011, no. 2, pp. 111–122. (in Russian)
14. *Vishenkova E.A.* Stability of special motions (permanent rotations) of a heavy rigid body with a suspension point vibrating along the vertical // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2015, vol. 11, no. 3, pp. 459–474. (in Russian)
15. *Belichenko M.V., Kholostova O.V.* On the stability of stationary rotations in the approximate problem of motion of Lagrange's top with a vibrating suspension point // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2017, vol. 13, no. 1, pp. 81–104. (in Russian)
16. *Belichenko M.V.* On the stability of pendulum-type motions in the approximate problem of dynamics of a Lagrange top with a vibrating suspension point // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2018, vol. 14, no. 2, pp. 243–263.
17. *Kholostova O.V.* On the dynamics of a rigid body in the hess case at high-frequency vibrations of a suspension point // Rus. J. Nonlin. Dyn., 2020, vol. 16, no. 1, pp. 59–84.
18. *Belichenko M.V.* Linear orbital stability analysis of the pendulum-type motions of a Kovalevskaya top with a suspension point vibrating horizontally // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng., 2019, vol. 489, 012034, pp. 1–9.
19. *Kowalevski S.* Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // Institut Mittag-Leffler: Acta Mathematica, 1889, vol. 12, pp. 177–232.
20. *Markeev A.P.* Stability of planar rotations of a satellite in a circular orbit // Mech. Solids, 2006, vol. 41, no. 4, pp. 46–63.
21. *Lyapunov A.M.* On the Motion Stability in One Particular Case of Three Body Problem. (Ob ustoychivosti dvizheniya v odnom chastnom sluchae zadachi o trekh telakh) Sobr. soch. V. 1. Moscow: AN SSSR, 1954. pp. 327–401. (in Russian)
22. *Markeev A.P.* Libration Points in Celestial Mechanics and Cosmodynamics. (Tochki libracii v nesnoi mekhanike i kosmodinamike), Moscow: Nauka, 1978. 312 p. (in Russian)
23. *Yakubovich V.A., Starzhinskii V.M.* Parametric Resonance in Linear Systems. (Parametricheskii rezonans v lineinykh sistemakh) Moscow: Nauka, 1987. 328 p. (in Russian)

УДК 517.977.58

УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА: МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ВОРОНКИ

© 2022 г. В. Н. Ушаков^{1,*}, А. А. Ершов^{1,**}, А. В. Ушаков^{1,***}

¹ Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия

*e-mail: ushak@imm.uran.ru

**e-mail: ale10919@yandex.ru

***e-mail: aushakov.pk@gmail.com

Поступила в редакцию 24.04.2021 г.

После доработки 20.11.2021 г.

Принята к публикации 25.11.2021 г.

Рассматривается нелинейная управляемая система в конечномерном евклидовом пространстве и на конечном промежутке времени, зависящая от параметра. Изучается зависимость от параметра множеств достижимости и интегральных воронок соответствующего системе дифференциального включения. При определенных условиях на управляемую систему оценивается степень этой зависимости от параметра.

Ключевые слова: управляемая система, дифференциальное включение, множество достижимости, интегральная воронка, зависимость от параметра, аппроксимация

DOI: 10.31857/S0032823522010088

1. Введение. Рассматривается нелинейная управляемая система в конечномерном евклидовом пространстве и на конечном промежутке времени, зависящая от параметра. Изучаются множества достижимости и интегральные воронки дифференциального включения, соответствующего системе. Проблематика, связанная с изучением множеств достижимости и интегральных воронок динамических систем, тесно переплетена с многочисленными задачами теории динамических систем и, в том числе, с теми, которые возникают в теории управления и теории дифференциальных игр [1–8]. При исследовании множеств достижимости, их конструировании и оценивании применяются различные теоретические подходы и ассоциированные с ними вычислительные методы [1–19]. К упомянутым задачам управления и дифференциальных игр принадлежат, например, различного рода задачи о сближении, разрешающие конструкции которых включают в себя одним из основных компонентов так называемые множества разрешимости — множества тех позиций управляемой системы, из которых разрешима задача о сближении [1–4]. Во многих задачах эти множества могут быть описаны достаточно просто в терминах множеств достижимости и интегральных воронок [1–19]. Некоторые задачи могут быть сформулированы как задачи теории управляемости динамических систем [17].

В настоящей работе изучается зависимость множеств достижимости и интегральных воронок от параметра: оценивается степень этой зависимости от параметра при определенных условиях на управляемую систему. Для оценки этой зависимости вводятся системы множеств в фазовом пространстве, аппроксимирующие множества достижимости и интегральные воронки на заданном промежутке времени, отвечающие конечному разбиению этого промежутка. При этом сначала оценивается степень за-

висимости аппроксимирующей системы множеств от параметра и затем эта оценка используется при оценке зависимости от параметра множеств достижимости и интегральных воронок дифференциального включения. Такой подход естественен и особенно полезен при изучении конкретных прикладных задач управления, при решении которых в конечном итоге приходится иметь дело не с идеальными множествами достижимости и интегральными воронками, а с их аппроксимациями, отвечающими дискретному представлению временного промежутка.

2. Оценки множеств достижимости и интегральных воронок дифференциальных включений. На промежутке времени $[t_0, \vartheta]$, $t_0 < \vartheta < \infty$ задана управляемая система Σ

$$\frac{dx}{dt} = f_\alpha(t, x, u), \quad (2.1)$$

$$u \in P, \quad (2.2)$$

здесь $x \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор системы Σ , u – управляющее воздействие из множества $P \in \text{comp}(\mathbb{R}^p)$, α – параметр из множества $\mathcal{L} \in \text{comp}(\mathbb{R}^l)$; $\text{comp}(\mathbb{R}^k)$ – пространство компактов в \mathbb{R}^k с хаусдорфовой метрикой $d(X^{(1)}, X^{(2)}) = \max(h(X^{(1)}, X^{(2)}), h(X^{(2)}, X^{(1)}))$, $h(X^{(1)}, X^{(2)}) = \max_{x^{(1)} \in X^{(1)}} \rho(x^{(1)}, X^{(2)})$ – хаусдорфово отклонение $X^{(1)}$ от $X^{(2)}$, где $\rho(x^{(1)}, X^{(2)}) = \min_{x^{(2)} \in X^{(2)}} \|x^{(1)} - x^{(2)}\|$.

Предполагается, что система Σ удовлетворяет условиям.

А. Функция $f_\alpha(t, x, u)$ определена и непрерывна на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P \times \mathcal{L}$ и для любой ограниченной и замкнутой области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ найдутся функция $\omega^*(r)$, $r \in (0, \infty)$ ($\omega^*(r) \downarrow 0$, $r \downarrow 0$) и непрерывная функция $L(t) \in (0, \infty)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, удовлетворяющие соотношениям

$$\|f_\alpha(t, x, u) - f_\beta(\tau, x, u)\| \leq \omega^*(|t - \tau| + \|\alpha - \beta\|)$$

$$(t, x) \text{ и } (\tau, x) \text{ из } D, \quad u \in P, \quad \alpha \text{ и } \beta \text{ из } \mathcal{L}$$

$$\|f_\alpha(t, x, u) - f_\alpha(t, y, u)\| \leq L(t) \|x - y\|$$

$$(t, x) \text{ и } (t, y) \text{ из } D, \quad u \in P, \quad \alpha \in \mathcal{L}$$

В. Найдется такое $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$\|f_\alpha(t, x, u)\| \leq \gamma(1 + \|x\|); \quad (t, x, u) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P, \quad \alpha \in \mathcal{L}$$

Введем многозначное отображение

$$(t, x) \mapsto F_\alpha(t, x) = \text{co } \mathcal{F}_\alpha(t, x)$$

$$\mathcal{F}_\alpha(t, x) = \{f_\alpha(t, x, u) : u \in P\} \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$$

$$(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathcal{L}$$

Отображение $(t, x) \mapsto F_\alpha(t, x)$ удовлетворяет следующим условиям.

А*. Для любой ограниченной и замкнутой области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ найдутся функция $\omega^*(r)$, $r \in (0, \infty)$ ($\omega^*(r) \downarrow 0$, $r \downarrow 0$) и непрерывная функция $L(t) \in (0, \infty)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, удовлетворяющие соотношениям

$$d(F_\alpha(t, x), F_\beta(\tau, x)) \leq \omega^*(|t - \tau| + \|\alpha - \beta\|) \quad (2.3)$$

$$(t, x) \text{ и } (\tau, x) \text{ из } D, \quad \alpha \text{ и } \beta \text{ из } \mathcal{L}$$

$$d(F_\alpha(t, x), F_\alpha(t, y)) \leq L(t) \|x - y\| \quad (2.4)$$

(t, x) и (t, y) из D, $\alpha \in \mathcal{L}$

B*. Найдется такое $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$h(F_\alpha(t, x), \{\mathbf{0}\}) \leq \gamma(1 + \|x\|); \quad (t, x, \alpha) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{L},$$

здесь $\mathbf{0}$ — нуль-вектор в \mathbb{R}^n .

Введем на $[t_0, \vartheta]$ д.в. (дифференциальное включение)

$$\frac{dx}{dt} \in F_\alpha(t, x); \quad \alpha \in \mathcal{L}, \quad (2.5)$$

отвечающее системе Σ .

Пусть t_* и t^* ($t_* < t^*$) из $[t_0, \vartheta]$, $x^* \in \mathbb{R}^n$, $X^* \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathcal{L}$.

Введем обозначения

$X_\alpha(t^*, t_*, x_*)$ — множество достижимости д.в. (2.5) в момент t^* с начальной точкой $x(t_*) = x_*$;

$X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$ — множество достижимости д.в. (2.5) в момент t^* с начальным множеством X_* :

$$X_\alpha(t^*, t_*, X_*) = \bigcup_{x_* \in X_*} X_\alpha(t^*, t_*, x_*)$$

Известно, что $X_\alpha(t^*, t_*, X_*) \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, отображение $(t^*, t_*, X_*) \mapsto X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$ непрерывно по t^* на $[t_*, \vartheta]$ при фиксированных $(t_*, X_*) \in [t_0, \vartheta] \times \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ в хаусдорфовой метрике, а также $X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$ непрерывно зависит от X_* при фиксированных t_*, t^*, α .

Отображение $\alpha \mapsto X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$ непрерывно также на \mathcal{L} при фиксированных (t^*, t_*, X_*) , $t_0 \leq t_* < t^* \leq \vartheta$, $X_* \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$.

Уточним непрерывную зависимость $\alpha \mapsto X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$ на множестве \mathcal{L} . Для этого выведем оценку сверху хаусдорфова расстояния

$$d(X_\alpha(t^*, t_*, X_*), X_\beta(t^*, t_*, X_*)); \quad \alpha \text{ и } \beta \text{ из } \mathcal{L},$$

которую представим в виде функции от $\|\alpha - \beta\|$.

Известно, что при условиях **A***, **B*** множество достижимости $X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$ удовлетворяет равенству

$$X_\alpha(t^*, t_*, X_*) = \lim_{\Delta = \Delta(\Gamma) \downarrow 0} \tilde{X}_\alpha^\Gamma(t^*)$$

Здесь $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t^*) \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathcal{L}$ — множества, отвечающие разбиениям $\Gamma = \{\tau_0 = t_*, \tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_N = t^*\}$ ($\tau_{i+1} - \tau_i = \Delta = \Delta(\Gamma) = N^{-1}(t^* - t_*)$, $i = \overline{0, N-1}$) промежутка $[t_*, t^*]$, задаются равенством $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t^*) = \tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_N)$ при помощи соотношений

$$\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_0) = X_*, \quad \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}) = \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}, \tau_i, \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_i)); \quad i = \overline{0, N-1},$$

где обозначено

$$\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau^*, \tau_*, W_*) = \{x^* \in \mathbb{R}^n : x^* = w_* + (\tau^* - \tau_*)f_*, w_* \in W_*, f_* \in F_\alpha(\tau_*, w_*)\},$$

$$t_* \leq \tau_* < \tau^* \leq t^*, \quad W_* \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$$

Принимая во внимание условие \mathbf{B}^* и размеры компакта X_* , можем указать ограниченную и замкнутую область $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, содержащую все возникающие в последующих рассуждениях и оценках множества в пространстве $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$. Считаем, что ниже в оценках применены функции $\omega^*(r)$, $r \in (0, \infty)$ и $L(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, отвечающие этой области D .

Вывод оценки величины

$$d(X_\alpha(t^*, t_*, X_*), X_\beta(t^*, t_*, X_*)); \quad \alpha \text{ и } \beta \text{ из } \mathcal{L}, \quad (2.6)$$

проведем сначала для одноточечного множества $X_* = \{x_*\}$, $(t_*, x_*) \in D$.

При выводе оценки (2.6) применим так называемую “пошаговую” схему рассуждений и “пошаговые” оценки, то есть при выводе оценки величины (2.6) будем продвигаться по шагам $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$ разбиения Γ .

Вывод оценки начинаем с промежутка $[\tau_0, \tau_1]$ разбиения Γ . Оценим сверху хаусдорфово отклонение

$$h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_1), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1)); \quad \alpha \text{ и } \beta \text{ из } \mathcal{L},$$

здесь $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_1) = \tilde{X}_\alpha(\tau_1, \tau_0, x_*)$, $\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1) = \tilde{X}_\beta(\tau_1, \tau_0, x_*)$.

В $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_1)$ выберем точку $x(\tau_1)$, где $\rho(x(\tau_1), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1)) = h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_1), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1))$. Точка $x(\tau_1)$ представима в виде

$$x(\tau_1) = x_* + \Delta f_\alpha(\tau_0); \quad f_\alpha(\tau_0) \in F_\alpha(\tau_0, x_*)$$

Выберем в $F_\beta(\tau_0, x_*)$ вектор $f_\beta(\tau_0)$, ближайший к $f_\alpha(\tau_0)$. Справедливо соотношение

$$\|f_\alpha(\tau_0) - f_\beta(\tau_0)\| = \rho(f_\alpha(\tau_0), F_\beta(\tau_0, x_*)) \leq h(F_\alpha(\tau_0, x_*), F_\beta(\tau_0, x_*)) \leq \omega^*(\|\alpha - \beta\|)$$

В $\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1)$ рассмотрим точку $y(\tau_1) = x_* + \Delta f_\beta(\tau_0)$, $\Delta = \Delta(\Gamma)$. Имеет место оценка

$$\|x(\tau_1) - y(\tau_1)\| \leq \Delta \omega^*(\|\alpha - \beta\|)$$

Из определения точки $x(\tau_1)$ и включения $y(\tau_1) \in \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1)$ следует оценка:

$$h(\tau_1) \leq \Delta \omega^*(\|\alpha - \beta\|), \quad (2.7)$$

здесь обозначено $h(\tau_1) = h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_1), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1))$.

Обратимся к следующему промежутку $[\tau_1, \tau_2]$ разбиения Γ и рассмотрим множества $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_2) = \tilde{X}_\alpha(\tau_2, \tau_1, \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_1))$, $\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_2) = \tilde{X}_\beta(\tau_2, \tau_1, \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1))$.

В $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_2)$ выберем точку $x(\tau_2)$, где

$$\rho(x(\tau_2), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_2)) = h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_2), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_2)) \quad (2.8)$$

Точка $x(\tau_2)$ представима в виде

$$x(\tau_2) = x_*(\tau_1) + \Delta f_\alpha(\tau_1); \quad x_*(\tau_1) \in \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_1), \quad f_\alpha(\tau_1) \in F_\alpha(\tau_1, x_*(\tau_1))$$

Выберем в $\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1)$ ближайшую к $x_*(\tau_1)$ точку $y_*(\tau_1)$:

$$\|x_*(\tau_1) - y_*(\tau_1)\| = \rho(x_*(\tau_1), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1))$$

Справедлива оценка

$$\|x_*(\tau_1) - y_*(\tau_1)\| \leq h(\tau_1) \quad (2.9)$$

Выберем в $F_\beta(\tau_1, y_*(\tau_1))$ ближайший к $f_\alpha(\tau_1)$ вектор $f_\beta(\tau_1)$. Выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \|f_\alpha(\tau_1) - f_\beta(\tau_1)\| &\leq h(F_\alpha(\tau_1, x_*(\tau_1)), F_\beta(\tau_1, y_*(\tau_1))) \leq \\ &\leq d(F_\alpha(\tau_1, x_*(\tau_1)), F_\beta(\tau_1, y_*(\tau_1))) \leq \omega^*(\|\alpha - \beta\|) + L(\tau_1)h(\tau_1), \end{aligned}$$

согласно (2.3) и (2.4).

Введем в рассмотрение точку

$$y(\tau_2) = y_*(\tau_1) + \Delta f_\beta(\tau_1); \quad y_*(\tau_1) \in \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1), \quad f_\beta(\tau_1) \in F_\beta(\tau_1, y_*(\tau_1))$$

Точки $x(\tau_2)$ и $y(\tau_2)$ стеснены неравенством

$$\begin{aligned} \|x(\tau_2) - y(\tau_2)\| &\leq \|x_*(\tau_1) - y_*(\tau_1)\| + \Delta \|f_\alpha(\tau_1) - f_\beta(\tau_1)\| \leq \\ &\leq h(\tau_1) + \Delta(\omega^*(\|\alpha - \beta\|) + L(\tau_1)h(\tau_1)) \leq \\ &\leq \Delta\omega^*(\|\alpha - \beta\|) + e^{L(\tau_1)\Delta_1}h(\tau_1), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $\Delta_1 = \Delta = \Delta(\Gamma)$.

Принимая во внимание (2.8) и включение $y(\tau_2) \in \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_2) = \tilde{X}_\beta(\tau_2, \tau_1, \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1))$, получаем

$$h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_2), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_2)) \leq \|x(\tau_2) - y(\tau_2)\| \quad (2.11)$$

Из оценок (2.10), (2.11) следует

$$h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_2), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_2)) \leq \Delta\omega^*(\|\alpha - \beta\|) + e^{L(\tau_1)\Delta_1}h(\tau_1) \quad (2.12)$$

Рассмотрим следующий промежуток $[\tau_2, \tau_3]$ разбиения Γ и множества $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_3) = \tilde{X}_\alpha(\tau_3, \tau_2, \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_2))$, $\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3) = \tilde{X}_\beta(\tau_3, \tau_2, \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_2))$.

Оценим сверху хаусдорфово отклонение

$$h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_3), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3)); \quad \alpha \text{ и } \beta \text{ из } \mathcal{L}$$

Выберем для этого в $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_3)$ точку $x(\tau_3)$, где

$$\rho(x(\tau_3), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3)) = h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_3), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3)) \quad (2.13)$$

Точка $x(\tau_3)$ представима в виде

$$x(\tau_3) = x_*(\tau_2) + \Delta f_\alpha(\tau_2); \quad x_*(\tau_2) \in \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_2), \quad f_\alpha(\tau_2) \in F_\alpha(\tau_2, x_*(\tau_2)).$$

Выберем в $\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_2)$ ближайшую к $x_*(\tau_2)$ точку $y_*(\tau_2)$:

$$\|x_*(\tau_2) - y_*(\tau_2)\| = \rho(x_*(\tau_2), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_2))$$

Справедливо неравенство

$$\|x_*(\tau_2) - y_*(\tau_2)\| \leq h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_2), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_2))$$

Выберем в $F_\beta(\tau_2, y(\tau_2))$ ближайший к $f_\alpha(\tau_2)$ вектор $f_\beta(\tau_2)$. Получаем оценку

$$\begin{aligned} \|f_\alpha(\tau_2) - f_\beta(\tau_2)\| &\leq h((\tau_2, x_*(\tau_2)), F_\beta(\tau_2, y(\tau_2))) \leq \\ &\leq d(F_\alpha(\tau_2, x_*(\tau_2)), F_\beta(\tau_2, y_*(\tau_2))) \leq \\ &\leq \omega^*(\|\alpha - \beta\|) + L(\tau_2) \|x_*(\tau_2) - y_*(\tau_2)\| \end{aligned}$$

Рассмотрим точку $y(\tau_3) = y_*(\tau_2) + \Delta f_\beta(\tau_2)$ в $\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3)$. Точки $x(\tau_3)$ и $y(\tau_3)$ удовлетворяют неравенству

$$\begin{aligned} \|x(\tau_3) - y(\tau_3)\| &\leq \|x_*(\tau_2) - y_*(\tau_2)\| + \\ &+ \Delta(\omega^*(\|\alpha - \beta\|) + L(\tau_2) \|x_*(\tau_2) - y_*(\tau_2)\|) \leq \\ &\leq \Delta\omega^*(\|\alpha - \beta\|) + e^{L(\tau_2)\Delta_2} h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_2), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_2)) \leq \\ &\leq \Delta\omega^*(\|\alpha - \beta\|) + e^{L(\tau_2)\Delta_2} (\Delta\omega^*(\|\alpha - \beta\|) + e^{L(\tau_1)\Delta_1} h(\tau_1)), \end{aligned}$$

где $\Delta_2 = \Delta = \Delta(\Gamma)$.

В итоге получаем

$$\|x(\tau_3) - y(\tau_3)\| \leq (1 + e^{L(\tau_2)\Delta_2}) \Delta\omega^*(\|\alpha - \beta\|) + e^{L(\tau_1)\Delta_1 + L(\tau_2)\Delta_2} h(\tau_1) \quad (2.14)$$

Учитывая (2.13) и включение $y(\tau_3) \in \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3)$, получаем

$$h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_3), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3)) \leq \|x(\tau_3) - y(\tau_3)\| \quad (2.15)$$

Из (2.14), (2.15) следует

$$h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_3), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3)) \leq (1 + e^{L(\tau_2)\Delta_2}) \Delta\omega^*(\|\alpha - \beta\|) + e^{L(\tau_1)\Delta_1 + L(\tau_2)\Delta_2} h(\tau_1) \quad (2.16)$$

Для окончательного уяснения структуры оценки величины $h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_{i+1}))$, $i = \overline{0, N-1}$ рассмотрим следующий промежуток $[\tau_3, \tau_4]$ разбиения Γ и множества $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_4) = \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_4, \tau_3, \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_3))$, $\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_4) = \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_4, \tau_3, \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3))$.

Оценим сверху величину

$$h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_4), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_4)); \quad \alpha \text{ и } \beta \text{ из } \mathcal{L}$$

Для этого выберем в $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_4)$ точку $x(\tau_4)$, где

$$\rho(x(\tau_4), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_4)) = h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_4), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_4)) \quad (2.17)$$

Точка $x(\tau_4)$ представима в виде

$$x(\tau_4) = x_*(\tau_3) + \Delta f_\alpha(\tau_3); \quad x_*(\tau_3) \in \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_3), \quad f_\alpha(\tau_3) \in F_\alpha(\tau_3, x_*(\tau_3))$$

Выберем в $\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3)$ ближайшую к $x_*(\tau_3)$ точку $y_*(\tau_3)$:

$$\|x_*(\tau_3) - y_*(\tau_3)\| = \rho(x_*(\tau_3), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3))$$

Справедливо неравенство

$$\|x_*(\tau_3) - y_*(\tau_3)\| \leq h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_3), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_3)) \quad (2.18)$$

Выберем в $F_\beta(\tau_3, y_*(\tau_3))$ вектор $f_\beta(\tau_3)$, ближайший к $f_\alpha(\tau_3)$. Справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|f_\alpha(\tau_3) - f_\beta(\tau_3)\| &\leq h(F_\alpha(\tau_3, x_*(\tau_3)), F_\beta(\tau_3, y_*(\tau_3))) \leq \\ &\leq d(F_\alpha(\tau_3, x_*(\tau_3)), F_\beta(\tau_3, y_*(\tau_3))) \leq \\ &\leq \omega^*(\|\alpha - \beta\|) + L(\tau_3) \|x_*(\tau_3) - y_*(\tau_3)\| \end{aligned}$$

согласно соотношениям (2.3), (2.4).

Выделим в $\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_4)$ точку $y(\tau_4) = y_*(\tau_3) + \Delta f_\beta(\tau_3)$.

Принимая во внимание (2.16), (2.18), получаем

$$\begin{aligned} \|x(\tau_4) - y(\tau_4)\| &\leq \|x_*(\tau_3) - y_*(\tau_3)\| + \Delta \|f_\alpha(\tau_3) - f_\beta(\tau_3)\| \leq \\ &\leq \|x_*(\tau_3) - y_*(\tau_3)\| + \Delta \omega^*(\|\alpha - \beta\|) + L(\tau_3) \|x_*(\tau_3) - y_*(\tau_3)\| \leq \\ &\leq \Delta \omega^*(\|\alpha - \beta\|) + e^{L(\tau_3)\Delta_3} \left((1 + e^{L(\tau_3)\Delta_2}) \Delta \omega^*(\|\alpha - \beta\|) + e^{L(\tau_1)\Delta_1 + L(\tau_2)\Delta_2 + L(\tau_3)\Delta_3} h(\tau_1) \right), \\ &\Delta_3 = \Delta = \Delta(\Gamma) \end{aligned}$$

В итоге получаем оценку

$$\begin{aligned} \|x(\tau_4) - y(\tau_4)\| &\leq \Delta \omega^*(\|\alpha - \beta\|) \left(1 + e^{L(\tau_3)\Delta_3} + e^{L(\tau_3)\Delta_3 + L(\tau_2)\Delta_2} \right) + \\ &+ e^{L(\tau_3)\Delta_3 + L(\tau_2)\Delta_2 + L(\tau_1)\Delta_1} h(\tau_1) \end{aligned}$$

Далее, учитывая выбор точек $x(\tau_4)$ и $y(\tau_4)$, имеем

$$h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_4), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_4)) \leq \|x(\tau_4) - y(\tau_4)\|$$

Из последних двух неравенств следует оценка

$$\begin{aligned} h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_4), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_4)) &\leq \left(1 + e^{L(\tau_3)\Delta_3} + e^{L(\tau_3)\Delta_3 + L(\tau_2)\Delta_2} \right) \Delta \omega^*(\|\alpha - \beta\|) + \\ &+ e^{L(\tau_3)\Delta_3 + L(\tau_2)\Delta_2 + L(\tau_1)\Delta_1} h(\tau_1) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Анализируя оценки (2.12), (2.16), (2.19), заключаем, что промежутку $[\tau_3, \tau_4]$, $i = 0, N - 1$ разбиения Γ отвечает следующая оценка хаусдорфова отклонения $h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_{i+1}))$ множества $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}) = \tilde{X}_\alpha(\tau_{i+1}, \tau_i, \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_i))$ от множества $\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_{i+1}) = \tilde{X}_\beta(\tau_{i+1}, \tau_i, \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_i))$:

$$\begin{aligned} &h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_{i+1})) \leq \\ &\leq \left(1 + e^{\sum_{k=i}^i L(\tau_k)\Delta_k} + e^{\sum_{k=i-1}^i L(\tau_k)\Delta_k} + e^{\sum_{k=i-2}^i L(\tau_k)\Delta_k} + \dots + e^{\sum_{k=1}^i L(\tau_k)\Delta_k} \right) h(\tau_1) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Далее, учитывая, что $h(\tau_1) = h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_1), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_1))$ удовлетворяет (2.7), получаем из (2.20) следующую оценку

$$\begin{aligned} &h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_{i+1})) \leq \\ &\leq \left(1 + e^{\sum_{k=i}^i L(\tau_k)\Delta_k} + e^{\sum_{k=i-1}^i L(\tau_k)\Delta_k} + e^{\sum_{k=i-2}^i L(\tau_k)\Delta_k} + \dots + e^{\sum_{k=1}^i L(\tau_k)\Delta_k} \right) \Delta \omega^*(\|\alpha - \beta\|) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Дополним оценку (2.21) комментарием, относящимся к введенной в условие **B** непрерывной функции $L(t)$ на промежутке $[\tau_0, \vartheta]$.

Замечание 2.1. В многочисленных работах, посвященных нелинейным управляемым системам, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями, в качестве одного из основных условий, налагаемых на систему, вводится условие локальной липшицевости ее правой части по фазовой переменной.

При этом достаточно часто при исследовании и решении задач управления такими системами возникает потребность в выделении в пространстве позиций управляемой системы области D , которая бы заведомо содержала все компоненты разрешающей конструкции (разрешающие множества, траектории систем, фазовые ограничения и т.д.). Иными словами, довольно часто при исследовании и решении задач управления возникает потребность в выделении в пространстве позиций системы сцены D , на которой разворачивается процесс решения задачи. При этом при конструировании решения и обосновании его корректности употребляется константа Липшица L , отвечающая этой области D . Однако, введенная область D может оказаться большой и соответствующая ей константа L может также оказаться большой. В таком случае оценки, обосновывающие корректность решения задачи управления, в которых участвует эта константа L , могут оказаться грубыми. По разным соображениям эти оценки в конкретной задаче управления (с конкретной управляемой системой) могут быть неудовлетворительными с точки зрения лица, решающего задачу и рассуждающего на более тонкие оценки. В связи с этим в условия, налагаемые на нелинейную управляемую систему (2.1), в настоящей работе вместо традиционного условия локальной липшицевости с константой Липшица L введена непрерывная функция $L(t) \in (0, \infty)$ на $[\tau_0, \vartheta]$, более адекватная динамике системы (2.1). Оценка (2.21) величины $h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_{i+1}))$ является более точной в том смысле, что для каждого промежутка $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ разбиения Γ участвует в пошаговых оценках свое значение $L(\tau_i) \in (0, \infty)$, близкое при малых $\Delta = \Delta(\Gamma)$ к $L(t)$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, а не какая-либо константа $L \in (0, \infty)$, общая для всех $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ из промежутка $[\tau_0, \vartheta]$. Отметим, однако, что эти рассуждения предполагают, что область D в пространстве позиций системы и отвечающая ей функция $L(t)$ на $[\tau_0, \vartheta]$ выбраны достаточно адекватно динамике управляемой системы. Так, например, в задачах управления, связанных с исследованием множеств достижимости и интегральных воронок, желательно, чтобы область D отслеживала более менее точно динамику множеств достижимости и, стало быть, — пространственную структуру интегральной воронки.

Таким образом, во многих конкретных задачах управления проблема выбора области D и соответствующей ей функции $L(t)$, $t \in [\tau_0, \vartheta]$ является, на наш взгляд, весьма значимой, ибо от этого зависит точность оценок, связанных с решением задач.

Очевидно, что один из путей решения этой проблемы в каждой конкретной задаче, связанной с исследованием множеств достижимости и интегральных воронок, состоит в пошаговом (по временным слоям $[\tau_i, \tau_{i+1}] \times \mathbb{R}^n$, $i = 0, 1, \dots, N - 1$) формировании области D и функции $L(t)$, $t \in [\tau_0, \vartheta]$, осуществляемых параллельно с конструированием множеств достижимости.

Вернемся теперь к оценке (2.21) и представим некоторые закругления этой оценки, имеющие более простую форму.

Заменяя в (2.21) единицу и экспоненты $\exp[\sum_{k=r}^i L(\tau_k)\Delta_k]$, $r = \overline{1, i}$ экспонентой $\exp[\sum_{k=r}^i L(\tau_k)\Delta_k]$, получаем оценку

$$h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_{i+1})) \leq \exp\left[\sum_{k=r}^i L(\tau_k)\Delta_k\right] (i+1)\Delta\omega^*(\|\alpha - \beta\|),$$

то есть

$$h\left(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_{i+1})\right) \leq \exp\left[\sum_{k=r}^i L(\tau_k)\Delta_k\right] (\tau_{i+1} - \tau_0)\omega^*(\|\alpha - \beta\|) \quad (2.22)$$

В частности, справедлива оценка

$$h\left(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t^*), \tilde{X}_\beta^\Gamma(t^*)\right) \leq \exp\left[\sum_{k=r}^i L(\tau_k)\Delta_k\right] (t^* - t_*)\omega^*(\|\alpha - \beta\|) \quad (2.23)$$

Заменив в оценках (2.21)–(2.23) числа $L(\tau_k)$, $k = \overline{0, N-1}$ каким-либо L , удовлетворяющим неравенству $0 < \max_{t \in [\tau_0, \vartheta]} L(t) \leq L < \infty$, получаем соответственно оценки при $i \in \overline{0, N-1}$ и α, β из \mathcal{L} :

$$h\left(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_{i+1})\right) \leq \sum_{k=0}^i e^{Lk\Delta} \Delta \omega^*(\|\alpha - \beta\|) \quad (2.24)$$

$$h\left(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_{i+1})\right) \leq e^{L(\tau_{i+1}-\tau_0)} (\tau_{i+1} - \tau_0)\omega^*(\|\alpha - \beta\|) \quad (2.25)$$

$$h\left(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t^*), \tilde{X}_\beta^\Gamma(t^*)\right) \leq e^{L(t^*-t_*)} (t^* - t_*)\omega^*(\|\alpha - \beta\|) \quad (2.26)$$

Рассуждения, аналогичные приведенным выше относительно $h(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_{i+1}))$ дают оценки величины $h(\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_{i+1}), \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}))$, аналогичные оценкам (2.21)–(2.26). Учитывая это, получаем в итоге следующие оценки хаусдорфова расстояния $d(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_{i+1}))$, $i \in \overline{0, N-1}$.

$$d\left(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_{i+1})\right) \leq \left(1 + \sum_{s=0}^{i-1} \exp\left[\sum_{k=i-s}^i L(\tau_k)\Delta_k\right]\right) \Delta \omega^*(\|\alpha - \beta\|) \quad (2.27)$$

$$d\left(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_{i+1})\right) \leq e^{\sum_{k=0}^i L(\tau_k)\Delta_k} (\tau_{i+1} - \tau_0)\omega^*(\|\alpha - \beta\|) \quad (2.28)$$

$$d\left(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t^*), \tilde{X}_\beta^\Gamma(t^*)\right) \leq e^{\sum_{k=0}^{N-1} L(\tau_k)\Delta_k} (t^* - t_*)\omega^*(\|\alpha - \beta\|) \quad (2.29)$$

$$d\left(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_{i+1})\right) \leq \sum_{k=0}^i e^{Lk\Delta} \Delta \omega^*(\|\alpha - \beta\|) \quad (2.30)$$

$$d\left(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_{i+1}), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_{i+1})\right) \leq e^{L(\tau_{i+1}-\tau_0)} (\tau_{i+1} - \tau_0)\omega^*(\|\alpha - \beta\|) \quad (2.31)$$

$$d\left(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t^*), \tilde{X}_\beta^\Gamma(t^*)\right) \leq e^{L(t^*-t_*)} (t^* - t_*)\omega^*(\|\alpha - \beta\|) \quad (2.32)$$

Мы рассмотрели случай, когда $X_* = \{x_*\}$, $(t_*, x_*) \in D$ и для него получили оценки (2.27)–(2.32). Оценки (2.27)–(2.32) справедливы и в общем случае $X_* \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, $(t_*, X_*) \subset D$.

Имея ввиду общий случай, выделим из (2.27)–(2.32) оценку (2.29) для последующих рассуждений. Наряду с множествами $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t^*)$ и $\tilde{X}_\beta^\Gamma(t^*)$, входящими в (2.29), рассмотрим множества достижимости $X_\alpha(t^*) = X_\alpha(t^*, t_*, X_*)$, $X_\beta(t^*) = X_\beta(t^*, t_*, X_*)$ д.в. (2.5).

Нас интересуют оценки сверху величин $d(X_\alpha(t^*), \tilde{X}_\alpha^\Gamma(t^*))$ и $d(X_\beta(t^*), \tilde{X}_\beta^\Gamma(t^*))$, α и β из \mathcal{L} . Известно, что при условиях **A** и **B** на систему (2.1) эти оценки имеют вид

$$\begin{aligned} d(X_\alpha(t^*), \tilde{X}_\alpha^\Gamma(t^*)) &\leq e^{L(t^*-t_*)}(t^*-t_*)(\omega^*(\Delta) + LK\Delta) \\ d(X_\beta(t^*), \tilde{X}_\beta^\Gamma(t^*)) &\leq e^{L(t^*-t_*)}(t^*-t_*)(\omega^*(\Delta) + LK\Delta), \end{aligned} \quad (2.33)$$

здесь $L \in (0, \infty)$ неравенством, следующим после формулы (2.23), а $K = \max_{(t,x,u) \in D \times P \times L} \|f_\alpha(t, x, u)\| \in (0, \infty)$, $\Delta = \Delta(\Gamma)$.

Замечание 2.2. Можно показать, что, наряду с оценками (2.33), выполняются более тонкие оценки

$$\begin{aligned} d(X_\alpha(t^*), \tilde{X}_\alpha^\Gamma(t^*)) &\leq \exp \left[\int_{t_*}^{t^*} L(t) dt \right] (t^* - t_*)(\omega^*(\Delta) + LK\Delta) \\ d(X_\beta(t^*), \tilde{X}_\beta^\Gamma(t^*)) &\leq \exp \left[\int_{t_*}^{t^*} L(t) dt \right] (t^* - t_*)(\omega^*(\Delta) + LK\Delta) \end{aligned}$$

Принимая во внимание (2.29) и (2.33), получаем

$$\begin{aligned} d(X_\alpha(t^*), X_\beta(t^*)) &\leq \\ &\leq d(X_\alpha(t^*), \tilde{X}_\alpha^\Gamma(t^*)) + d(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t^*), \tilde{X}_\beta^\Gamma(t^*)) + d(\tilde{X}_\beta^\Gamma(t^*), X_\beta(t^*)) \leq \\ &\leq e^{\sum_{k=0}^{N-1} L(\tau_k)\Delta_k} (t^* - t_*)\omega^*(\|\alpha - \beta\|) + 2e^{L(t^*-t_*)}(t^* - t_*)(\omega^*(\Delta) + LK\Delta), \end{aligned}$$

α и β из \mathcal{L} .

Так как эта оценка имеет место при любых разбиениях Γ промежутка $[\tau_0, \vartheta]$, то устремив диаметр $\Delta = \Delta(\Gamma)$ разбиения Γ к нулю, получаем

$$d(X_\alpha(t^*), X_\beta(t^*)) \leq \exp \left[\int_{t_*}^{t^*} L(t) dt \right] (t^* - t_*)\omega^*(\|\alpha - \beta\|), \quad (2.34)$$

здесь $\int_{t_*}^{t^*} L(t) dt$ — интеграл Римана функции $L(t)$ на отрезке $[t^*, t_*] \subset [t_0, \vartheta]$.

Теперь обратимся к промежутку $[t_0, \vartheta]$, на котором изначально рассматриваются управляемая система (2.1) и д.в. (2.5).

Полагаем в предыдущих выкладках $t_* = t_0$, $t^* = t \in [t_0, \vartheta]$, $X_* = X^{(0)} \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, $(t_0, X^{(0)}) \subset D$, где $X^{(0)}$ — начальное множество для системы (2.1) и д.в. (2.5), так что множества достижимости $X_\alpha(t)$ и $X_\beta(t)$ д.в. (2.5) принимают вид $X_\alpha(t) = X_\alpha(t, t_0, X^{(0)})$, $X_\beta(t) = X_\beta(t, t_0, X^{(0)})$.

Запишем для этих множеств оценку (2.34)

$$d(X_\alpha(t), X_\beta(t)) \leq \exp \left[\int_{t_0}^t L(t) dt \right] (t - t_0)\omega^*(\|\alpha - \beta\|), \quad (2.35)$$

$t \in [t_0, \vartheta]$, α и β из \mathcal{L} .

Введем также разбиение $\Gamma = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots, t_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$ с диаметром $\Delta = \Delta(\Gamma) = t_{i+1} - t_i = N^{-1}(\vartheta - t_0)$.

Наряду с множеством достижимости $X_\alpha(t)$, $\alpha \in \mathcal{L}$, $t \in [t_0, \vartheta]$ рассмотрим интегральные воронки

$$X_\alpha(t_0, X^{(0)}) = \bigcup_{t \in [t_0, \vartheta]} (t, X_\alpha(t)); \quad \alpha \in \mathcal{L}$$

дифференциального включения (2.5).

Полагаем $X_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)}) = \bigcup_{t_i \in \Gamma} (t_i, X_\alpha(t_i))$, $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)}) = \bigcup_{t_i \in \Gamma} (t_i, \tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_i))$ – множества в D , а согласно рекуррентным соотношениям для $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_i)$, в которых положено $\tau_0 = t_0$ имеем $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_0) = \tilde{X}_\alpha^\Gamma(\tau_0) = X^{(0)}$.

Множества $X_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)})$ и $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)})$ есть некоторые аппроксимации интегральной воронки $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$, $\alpha \in \mathcal{L}$, дискретные по переменной $t \in [t_0, \vartheta]$.

Из оценки

$$d(X_\alpha(t_i), \tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_i)) \leq e^{L(t_i - t_0)}(t_i - t_0)(\omega^*(\Delta) + LK\Delta); \quad i = \overline{1, N}, \quad \alpha \in \mathcal{L}$$

следует оценка

$$d(X_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)}), \tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)})) \leq e^{L(\vartheta - t_0)}(\vartheta - t_0)(\omega^*(\Delta) + LK\Delta), \quad (2.36)$$

здесь L определено неравенством после формулы (2.23), K – равенством следующим за формулой (2.33).

Учитывая, что для любого промежутка $[t_i, t_{i+1}]$ разбиения Γ и любого $t \in [t_i, t_{i+1}]$ имеют место

$$d((t, X_\alpha(t)), (t_i, X_\alpha(t_i))) \leq (1 + K)\Delta; \quad \alpha \in \mathcal{L},$$

получаем

$$d(X_\alpha(t_0, X^{(0)}), X_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)})) \leq (1 + K)\Delta; \quad \alpha \in \mathcal{L} \quad (2.37)$$

Принимая во внимание оценки (2.36), (2.37), получаем

$$\begin{aligned} & d(X_\alpha(t_0, X^{(0)}), \tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)})) \leq \\ & \leq e^{L(\vartheta - t_0)}(\vartheta - t_0)(\omega^*(\Delta) + LK\Delta) + (1 + K)\Delta; \quad \alpha \in \mathcal{L} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Очевидно, что используя описанную выше в этой работе технику вывода оценок, можем заменить оценку (2.38) более точной оценкой

$$\begin{aligned} & d(X_\alpha(t_0, X^{(0)}), \tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)})) \leq \\ & \leq e^{\sum_{i=0}^{N-1} L(t_i)\Delta_i} (\vartheta - t_0)(\omega^*(\Delta) + LK\Delta) + (1 + K)\Delta \\ & \Delta_i = \Delta = \Delta(\Gamma), \quad i \in \overline{0, N-1}, \quad \alpha \in \mathcal{L} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Для интегральных воронок $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$ и $X_\beta(t_0, X^{(0)})$, α и β из \mathcal{L} также имеет место важная оценка, очевидным образом вытекающая из (2.35)

$$\begin{aligned} & d(X_\alpha(t_0, X^{(0)}), X_\beta(t_0, X^{(0)})) \leq \\ & \leq \exp \left[\int_{t_0}^{\vartheta} L(t) dt \right] (\vartheta - t_0) \omega^*(\|\alpha - \beta\|); \quad \alpha, \beta \text{ из } \mathcal{L} \end{aligned} \quad (2.40)$$

3. Задачи о наведении интегральных воронок дифференциальных включений на целевое множество в пространстве \mathbb{R}^2 . В этом параграфе ограничимся рассмотрением системы (2.1) и д.в. (2.5) в пространстве \mathbb{R}^2 . Изучим задачи о наведении интегральных воронок $X_\alpha(t_0, x_0)$, $\alpha \in \mathcal{L}$, $x_0 \in X^{(0)}$ и их аппроксимаций $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_0, x_0)$ на целевые множества в \mathbb{R}^2 . Некоторые из этих задач сформулируем с привлечением понятия площади множества в \mathbb{R}^2 . В связи с этим изучим вопросы, затрагивающие приближенное вычисление площадей множеств достижимости $X_\alpha(t, t_0, x_0)$, $x_0 \in X^{(0)} \in \text{comp}(\mathbb{R}^2)$ и ассоциированных с $X_\alpha(t, t_0, x_0)$ множеств. При этом воспользуемся оценками хаусдорфовых расстояний, полученными в § 2.

Начнем изучение задач о наведении с рассмотрения отдельных интегральных воронок $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$, $X^{(0)} \in \text{comp}(\mathbb{R}^2)$. К классу этих воронок принадлежат, разумеется, и воронки $X_\alpha(t_0, x_0)$, $\alpha \in \mathcal{L}$, $x_0 \in X^{(0)}$, так что оценки хаусдорфовых расстояний, полученные для интегральных воронок $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$, $\alpha \in \mathcal{L}$, имеют место и для воронок $X_\alpha(t_0, x_0)$, $\alpha \in \mathcal{L}$.

Возьмем произвольную воронку $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$, $\alpha \in \mathcal{L}$, $X^{(0)} \in \text{comp}(\mathbb{R}^2)$ и аппроксимирующее ее множество $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)}) = \bigcup_{t_i \in \Gamma} (t_i, \tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_i))$ в D , отвечающее разбиению $\Gamma = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots, t_N = \vartheta\}$ ($t_{i+1} - t_i = \Delta_i = \Delta = \Delta(\Gamma)$, $i = \overline{0, N-1}$).

Рассогласование между временными сечениями $X_\alpha(t_i)$ и $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_i)$, $t_i \in \Gamma$ множеств $X_\alpha(t_0, X^{(0)})$ и $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)})$ стеснено оценкой

$$d\left(X_\alpha(t_i), \tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_i)\right) \leq e^{\sum_{j=0}^{N-1} L(t_j)\Delta_j} \left(K\Delta \sum_{j=0}^{N-1} L(t_j)\Delta_j + (t_j - t_0)\omega^*(\Delta) \right); \quad \alpha \in \mathcal{L} \quad (3.1)$$

Наряду с множеством $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_0, X^{(0)})$ и его сечениями $\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_i)$, $t_i \in \Gamma$ рассматриваем множество $\tilde{X}_\beta^\Gamma(t_0, X^{(0)})$, $\beta \in \mathcal{L}$ и его сечения $\tilde{X}_\beta^\Gamma(t_i)$, $t_i \in \Gamma$.

Справедлива оценка

$$d\left(\tilde{X}_\alpha^\Gamma(t_i), \tilde{X}_\beta^\Gamma(t_i)\right) \leq e^{\sum_{j=0}^{N-1} L(t_j)\Delta_j} (t_j - t_0)\omega^*(\|\alpha - \beta\|); \quad \alpha \text{ и } \beta \text{ из } \mathcal{L} \quad (3.2)$$

Из оценок (3.1) и (3.2) вытекает

$$d\left(X_\alpha(t_i), \tilde{X}_\beta^\Gamma(t_i)\right) \leq 8(\Delta, \|\alpha - \beta\|), \quad (3.3)$$

где обозначено

$$8(\Delta, \rho) = e^{\sum_{j=0}^{N-1} L(t_j)\Delta_j} \left((\vartheta - t_0)\omega^*(\rho) + (\vartheta - t_0)\omega^*(\Delta) + K\Delta \sum_{j=0}^{N-1} L(t_j)\Delta_j \right) \\ \alpha \text{ и } \beta \text{ из } \mathcal{L}, \quad t_i \in \Gamma, \quad \rho \in (0, \infty)$$

Оценки (3.1)–(3.3) применим при изучении задач о наведении интегральных воронок на целевые множества. Также они будут учтены при оценке рассогласования множеств типа множеств достижимости в \mathbb{R}^2 .

Сформулируем эти задачи о наведении.

Считаем, что задано конечное множество \mathcal{T} моментов $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N^*}$ в промежутке $[t_0, \vartheta]$ и что рассмотренные нами разбиения $\Gamma = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots, t_N = \vartheta\}$ содержат это множество \mathcal{T} .

Считаем, что в \mathbb{R}^2 заданы компакты $X^{(0)}, X^{(\vartheta)}, \Phi^{(k)}$, где каждое множество $\Phi^{(k)}$ отвечает своему моменту $\tau_k \in \mathcal{T}$; при этом множества $X^{(0)}, X^{(\vartheta)}, \Phi^{(k)}, \tau_k \in \mathcal{T}$ имеют спрямляемые границы $\partial X^{(0)}, \partial X^{(\vartheta)}, \partial \Phi^{(k)}, \tau_k \in \mathcal{T}$.

Задача 1. О наведении интегральной воронки (жесткая постановка). Требуется определить такую пару $(\alpha_*, x_*) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}$, что выполняются соотношения

$$X^{(\vartheta)} \subset X_{\alpha_*}(\vartheta, t_0, x_*), \quad \Phi^{(k)} \cap X_{\alpha_*}(\tau_k, t_0, x_*) = \emptyset, \quad \tau_k \in \mathcal{T} \quad (3.4)$$

Точное вычисление множеств $X_{\alpha}(t_i, t_0, x_0)$, $\alpha \in \mathcal{L}$, $t_i \in \Gamma$, $x_0 \in X^{(0)}$ невозможно из-за сложности динамики системы (2.1).

В частности, невозможно вычисление множеств $X_{\alpha_*}(\vartheta, t_0, x_*)$, $X_{\alpha_*}(\tau_k, t_0, x_*)$, $\tau_k \in \mathcal{T}$. Также в случае, когда, например, одно из множеств \mathcal{L} , $X^{(0)}$ бесконечно, невозможен полный перебор всех пар $(\alpha, x) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}$.

Поэтому имеет смысл перейти от формулировки задачи 1 к формулировке в терминах множеств $\tilde{X}_{\alpha}^{\Gamma}(t_i, t_0, x_0)$, $\alpha \in \mathcal{L}$, $t_i \in \Gamma$, $x_0 \in X^{(0)}$. При этом под множествами $\tilde{X}_{\alpha}^{\Gamma}(t_i, t_0, x_0)$ мы понимаем временные сечения множеств $\tilde{X}_{\alpha}^{\Gamma}(t_0, x_0)$, $\alpha \in \mathcal{L}$, $x_0 \in X^{(0)}$, отвечающие моментам $t_i \in \Gamma$.

А именно, полагаем, что заданы $\varepsilon, \rho, \sigma$ из $(0, \infty)$ и отвечающие числам ρ и σ конечные множества ρ -сеть $\mathcal{L}^{(\rho)} = \{\alpha^{(r)} : r = \overline{1, r^*}\}$ и σ -сеть $X^{(\sigma)} = \{x^{(s)} : s = \overline{1, s^*}\}$ в множествах \mathcal{L} и $X^{(0)}$.

Задача 1(ε) о наведении интегральных воронок. Требуется определить такую пару $(\alpha^{(r)}, x^{(s)}) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$, что выполняются соотношения

$$X^{(\vartheta)} \subset \tilde{X}_{\alpha^{(r)}}^{\Gamma}(\vartheta, t_0, x^{(s)}), \quad \Phi_{\varepsilon}^{(k)} \cap \tilde{X}_{\alpha^{(r)}}^{\Gamma}(\tau_k, t_0, x_*) = \emptyset, \quad \tau_k \in \mathcal{T} \quad (3.5)$$

Для задач 1 или 1(ε), сформулированных для конкретной системы (2.1), может стать, что решения не существует. Учитывая такие ситуации, мы сформулируем задачу о наведении в менее жесткой постановке с привлечением понятия площади множества в \mathbb{R}^2 .

При этом мы предполагаем, что такая постановка не противоречит смыслу исходной реальной задачи о наведении.

Сначала дадим формулировку в терминах идеальных множеств достижимости $X_{\alpha}(t_i, t_0, x_0)$, $\alpha \in \mathcal{L}$, $t_i \in \Gamma$, $x_0 \in X^{(0)}$.

Предварительно введем обозначения

$$J^{(1)}(\alpha, x) = \sum_{\tau_k \in \mathcal{T}} s(\Phi^{(k)} \setminus X_{\alpha}(\tau_k, t_0, x)),$$

$$J^{(2)}(\alpha, x) = s(X^{(\vartheta)} \cap X_{\alpha}(\vartheta, t_0, x)),$$

$$\alpha \in \mathcal{L}, \quad x \in X^{(0)}$$

здесь $s(Y)$ – площадь множества $Y \in \text{comp}(\mathbb{R}^2)$.

Зафиксируем λ_1 и λ_2 из $[0, 1]$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Полагаем $J(\alpha, x) = \lambda_1 J^{(1)}(\alpha, x) + \lambda_2 J^{(2)}(\alpha, x)$.

Задача 2. О наведении интегральных воронок (мягкая постановка). Требуется определить такую пару $(\alpha^*, x^*) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}$, что выполняется соотношение

$$J(\alpha^*, x^*) = \max_{(\alpha, x) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}} J(\alpha, x) \quad (3.6)$$

Поскольку точно решить задачу 2 мы не в состоянии, в силу тех же причин, что и задачу 1, то сформулируем и будем искать решение некоторой аппроксимационной задачи, в которой вместо множеств \mathcal{L} и $X^{(0)}$, в случаях, когда они не являются конечными, вписаны их конечные сети $\mathcal{L}^{(\rho)}$ и $X^{(\sigma)}$, а вместо (идеальных) множеств достижимости $X_\alpha(t, t_0, x_0)$, $\alpha \in \mathcal{L}$, $x_0 \in X^{(0)}$ вписаны их аппроксимции $\tilde{X}_{\alpha^{(r)}}^\Gamma(t_i, t_0, x^{(s)})$, $(\alpha^{(r)}, x^{(s)}) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$.

Введем обозначения

$$\tilde{J}_\Gamma^{(1)}(\beta, y) = \sum_{\tau_k \in T} s \left(\Phi^{(k)} \setminus \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y) \right), \quad \tilde{J}_\Gamma^{(2)}(\beta, y) = s \left(X^{(0)} \cap \tilde{X}_\beta^\Gamma(\vartheta, t_0, y) \right)$$

$$(\beta, y) \in L^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$$

Полагаем $\tilde{J}_\Gamma(\beta, y) = \lambda_1 \tilde{J}_\Gamma^{(1)}(\beta, y) + \lambda_2 \tilde{J}_\Gamma^{(2)}(\beta, y)$.

Задача 3. О наведении интегральных воронок (мягкая постановка). Требуется определить такую пару $(\beta^*, y^*) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$, что выполняется соотношение

$$\tilde{J}_\Gamma(\beta^*, y^*) = \max_{(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}} \tilde{J}_\Gamma(\beta, y) \quad (3.7)$$

Покажем, что при малых ρ, σ из $(0, \infty)$ решение аппроксимационной задачи 3 близко к решению задачи 2. Это обстоятельство оправдывает подмену задачи 2 задачей 3. При этом под близостью решений мы понимаем как близость оптимальных значений (3.6) и (3.7) в задачах 2 и 3, так и близость оптимальных пар в $\mathcal{L} \times X^{(0)}$ и $\mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$.

Итак, рассмотрим сначала пары (α, x) и (β, y) , где (α, x) выбрана в $\mathcal{L} \times X^{(0)}$ произвольно, а пара $(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$ такова, что $\|\alpha - \beta\| \leq \rho$, $\|x - y\| \leq \sigma$.

Оценим сверху хаусдорфово расстояние

$$d \left(X_\alpha(\tau_k, t_0, x), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y) \right); \quad \tau_k \in \mathcal{T}$$

Учитывая (3.3) и оценку

$$d \left(\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, x), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y) \right) \leq \exp \left[\sum_{j=0}^{N-1} L(t_j) \Delta_j \right] \|x - y\| \leq \exp \left[\sum_{j=0}^{N-1} L(t_j) \Delta_j \right] \sigma, \quad (3.8)$$

получаем

$$d \left(X_\alpha(\tau_k, t_0, x), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y) \right) \leq d \left(X_\alpha(\tau_k, t_0, x), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, x) \right) +$$

$$+ d \left(\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, x), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y) \right) \leq \kappa(\Delta, \rho) + \exp \left[\sum_{j=0}^{N-1} L(t_j) \Delta_j \right] \sigma; \quad \tau_k \in \mathcal{T}$$

Введем для упрощения обозначение

$$\kappa^\Delta(\rho, \sigma) = \kappa(\Delta, \rho) + \exp \left[\sum_{j=0}^{N-1} L(t_j) \Delta_j \right] \sigma; \quad \rho \text{ и } \sigma \text{ из } (0, \infty)$$

В итоге для пар $(\alpha, x) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}$ и $(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$, $\|\alpha - \beta\| \leq \rho$, $\|x - y\| \leq \sigma$ имеем оценку

$$d\left(X_\alpha(\tau_k, t_0, x), \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y)\right) \leq \varkappa^\Delta(\rho, \sigma) \quad (3.9)$$

Распишем подробнее функцию $\varkappa^\Delta(\rho, \sigma)$ и оценим ее сверху.

Справедливо представление

$$\varkappa^\Delta(\rho, \sigma) = \exp\left[\sum_{j=0}^{N-1} L(t_j)\Delta_j\right] \left((\vartheta - t_0)\omega^*(\rho) + (\vartheta - t_0)\omega^*(\Delta) + K\Delta \sum_{j=0}^{N-1} L(t_j)\Delta_j + \sigma \right)$$

Так как, согласно условию **A**, функция $L(t) \in (0, \infty)$ непрерывна на $[t_0, \vartheta]$, то при $L \in \left(\max_{t \in [t_0, \vartheta]} L(t), \infty\right)$ справедлива оценка

$$\varkappa^\Delta(\rho, \sigma) \leq e^{L(\vartheta - t_0)} \left((\vartheta - t_0)\omega^*(\rho) + (\vartheta - t_0)\omega^*(\Delta) + LK(\vartheta - t_0)\Delta + \sigma \right)$$

Из этой оценки вытекает предельное равенство $\lim_{\Delta \downarrow 0, \rho \downarrow 0, \sigma \downarrow 0} \varkappa^\Delta(\rho, \sigma) = 0$.

Условия **A** и **B** дополним следующим условием.

C. Границы $\partial X^{(0)}$, $\partial X^{(\vartheta)}$, $\partial \Phi^{(k)}$, $\partial X_\alpha(t_i, t_0, x)$, $\partial \tilde{X}_\beta^\Gamma(t_i, t_0, y)$ ($(\alpha, x) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}$, $(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$, $\tau_k \in \mathcal{T}$, $t_i \in \Gamma$) ограничены сверху по длине некоторым $l^* \in (0, \infty)$.

Условие **C** выполнимо для многих задач о наведении интегральных воронок, поскольку длины границ $\partial X^{(0)}$, $\partial X^{(\vartheta)}$, $\partial \Phi^{(k)}$ ($\tau_k \in \mathcal{T}$) ограничены, а длина границ $\partial X_\alpha(t_i, t_0, x)$ и $\partial \tilde{X}_\beta^\Gamma(t_i, t_0, y)$, $t_i \in \Gamma$ не возрастает скачкообразно с возрастанием моментов t_i . Так, например, множество $X_\alpha(t, t_0, x)$, $\alpha \in \mathcal{L}$, $x_0 \in X^{(0)}$ непрерывно зависит от t на $[t_0, \vartheta]$ (см. разд. 2) и во многих задачах управления вместе с ним непрерывно зависит от t на $[t_0, \vartheta]$ множество $\partial X_\alpha(t, t_0, x)$. В этих задачах непрерывно зависит от t и длина границы $\partial X_\alpha(t, t_0, x)$.

Полагаем

$U_\alpha(\tau_k) = \text{cl}\left(X_\alpha(\tau_k, t_0, x)_{\varkappa^\Delta(\rho, \sigma)} \setminus X_\alpha(\tau_k, t_0, x)\right)$ — $\varkappa^\Delta(\rho, \sigma)$ -слой вокруг множества $X_\alpha(\tau_k, t_0, x)$;

$\tilde{U}_\beta^\Gamma(\tau_k) = \text{cl}\left(\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y)_{\varkappa^\Delta(\rho, \sigma)} \setminus \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y)\right)$ — $\varkappa^\Delta(\rho, \sigma)$ -слой вокруг множества $X_\alpha(\tau_k, t_0, x)$.

Из оценки (3.9) следуют включения

$$\begin{aligned} X_\alpha(\tau_k, t_0, x) &\subset \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y) \cup \tilde{U}_\beta^\Gamma(\tau_k) \\ \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y) &\subset X_\alpha(\tau_k, t_0, x) \cup U_\alpha(\tau_k) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Из включений (3.10) получаем

$$\begin{aligned} X_\alpha(\tau_k, t_0, x) \cap \Phi^{(k)} &\subset \left(\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y) \cap \Phi^{(k)}\right) \cup \left(\tilde{U}_\beta^\Gamma(\tau_k) \cap \Phi^{(k)}\right); \quad \tau_k \in \mathcal{T} \\ \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y) \cap \Phi^{(k)} &\subset \left(X_\alpha(\tau_k, t_0, x) \cap \Phi^{(k)}\right) \cup \left(U_\alpha(\tau_k) \cap \Phi^{(k)}\right); \quad \tau_k \in \mathcal{T} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из (3.11) вытекают неравенства для площадей

$$\begin{aligned} s\left(X_\alpha(\tau_k, t_0, x) \cap \Phi^{(k)}\right) &\leq s\left(\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y) \cap \Phi^{(k)}\right) + s\left(\tilde{U}_\beta^\Gamma(\tau_k)\right); \quad \tau_k \in \mathcal{T} \\ s\left(\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y) \cap \Phi^{(k)}\right) &\leq s\left(X_\alpha(\tau_k, t_0, x) \cap \Phi^{(k)}\right) + s\left(U_\alpha(\tau_k)\right); \quad \tau_k \in \mathcal{T} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Из неравенств (3.12) следует оценка

$$\begin{aligned} & \left| s\left(X_\alpha(\tau_k, t_0, x) \cap \Phi^{(k)}\right) - s\left(\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y) \cap \Phi^{(k)}\right) \right| \leq \\ & \leq \max\left(s\left(\tilde{U}_\beta^\Gamma(\tau_k)\right), s\left(\tilde{U}_\beta^\Gamma(\tau_k)\right)\right); \quad \tau_k \in \mathcal{T} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Сделаем краткое замечание относительно слоев, окружающих компактные множества в \mathbb{R}^2 ; к таким слоям принадлежат множества $U_\alpha(\tau_k)$ и $\tilde{U}_\beta^\Gamma(\tau_k)$, $\tau_k \in \mathcal{T}$.

Известно (см., например, [20]), что если $X \in \text{comp}(\mathbb{R}^2)$ – выпуклое множество, то площадь $s(U_\varepsilon)$ ε -слоя $U_\varepsilon = \text{cl}(X_\varepsilon \setminus X)$, окружающего множество X и длина $l(\partial X)$ границы ∂X множества X связаны равенством

$$s(U_\varepsilon) = l(\partial X)\varepsilon + \pi\varepsilon^2$$

Если же множество $X \in \text{comp}(\mathbb{R}^2)$ невыпукло, то площадь $s(U_\varepsilon)$ может быть меньше, чем $l(\partial X)\varepsilon + \pi\varepsilon^2$. В этом случае справедливо неравенство

$$s(U_\varepsilon) \leq l(\partial X)\varepsilon + \pi\varepsilon^2, \quad (3.14)$$

которым мы воспользуемся при оценке площадей $U_\alpha(\tau_k)$, $\tilde{U}_\beta^\Gamma(\tau_k)$, $\tau_k \in \mathcal{T}$.

А именно, принимая во внимание определение множеств $U_\alpha(\tau_k)$, $\tilde{U}_\beta^\Gamma(\tau_k)$, $\tau_k \in \mathcal{T}$ и учитывая (3.14), получаем

$$\begin{aligned} & \max\left(s\left(U_\alpha(\tau_k)\right), s\left(\tilde{U}_\beta^\Gamma(\tau_k)\right)\right) \leq \\ & \leq \max\left(l\left(\partial\left(X_\alpha(\tau_k, t_0, x) \cap \Phi^{(k)}\right)\right), l\left(\partial\left(\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, x) \cap \Phi^{(k)}\right)\right)\right) \chi^\Delta(\rho, \sigma) + \\ & + \pi\chi^\Delta(\rho, \sigma)^2 \leq l^*\chi^\Delta(\rho, \sigma) + \pi\chi^\Delta(\rho, \sigma)^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Из (3.13), (3.15) следует

$$\begin{aligned} & \left| s\left(X_\alpha(\tau_k, t_0, x) \cap \Phi^{(k)}\right) - s\left(\tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y) \cap \Phi^{(k)}\right) \right| \leq \\ & \leq l^*\chi^\Delta(\rho, \sigma) + \pi\chi^\Delta(\rho, \sigma)^2; \quad \tau_k \in \mathcal{T} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Из (3.16) следует оценка

$$\begin{aligned} & \left| s\left(\Phi^{(k)} \setminus X_\alpha(\tau_k, t_0, x)\right) - s\left(\Phi^{(k)} \setminus \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y)\right) \right| \leq \\ & \leq l^*\chi^\Delta(\rho, \sigma) + \pi\chi^\Delta(\rho, \sigma)^2; \quad \tau_k \in \mathcal{T} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Из (3.17) получаем оценку

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\tau_k \in \mathcal{T}} s\left(\Phi^{(k)} \setminus X_\alpha(\tau_k, t_0, x)\right) - \sum_{\tau_k \in \mathcal{T}} s\left(\Phi^{(k)} \setminus \tilde{X}_\beta^\Gamma(\tau_k, t_0, y)\right) \right| \leq \\ & \leq N_* \left(l^*\chi^\Delta(\rho, \sigma) + \pi\chi^\Delta(\rho, \sigma)^2 \right), \end{aligned}$$

которую запишем в виде

$$\left| J^{(1)}(\alpha, x) - \tilde{J}_\Gamma^{(1)}(\beta, y) \right| \leq N_* \left(l^*\chi^\Delta(\rho, \sigma) + \pi\chi^\Delta(\rho, \sigma)^2 \right) \quad (3.18)$$

По аналогичной схеме выводится оценка

$$\left| J^{(2)}(\alpha, x) - \tilde{J}_\Gamma^{(2)}(\beta, y) \right| \leq l^*\chi^\Delta(\rho, \sigma) + \pi\chi^\Delta(\rho, \sigma)^2 \quad (3.19)$$

Из оценок (3.18) и (3.19) получаем

$$|J(\alpha, x) - \tilde{J}_\Gamma(\beta, y)| \leq \zeta^\Delta(\rho, \sigma), \quad (3.20)$$

где введено обозначение

$$\zeta^\Delta(\rho, \sigma) = (N_* + 1) \left(l^* \kappa^\Delta(\rho, \sigma) + \pi \kappa^\Delta(\rho, \sigma)^2 \right), \Delta, \rho \text{ и } \sigma \text{ из } (0, \infty)$$

Опираясь на оценку (3.20), покажем, что при малых Δ , ρ и σ решения задач 2 и 3 близки, и оценим эту близость.

Действительно, согласно (3.20), для любой пары $(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)} \subset \mathcal{L} \times X^{(0)}$ выполняется неравенство

$$|J(\beta, y) - \tilde{J}_\Gamma(\beta, y)| \leq \zeta^\Delta(\rho, \sigma),$$

поскольку пара $(\beta, y) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}$ является ближайшей парой в $\mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$ к самой себе и, стало быть, удовлетворяет неравенствам $\|\beta - \beta\| \leq \rho$, $\|y - y\| \leq \sigma$.

Отсюда для любой пары $(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$ верно неравенство

$$\tilde{J}_\Gamma(\beta, y) - \zeta^\Delta(\rho, \sigma) \leq J(\beta, y) \leq \max_{(\alpha, x) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}} J(\alpha, x),$$

из которого следует

$$\max_{(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}} \tilde{J}_\Gamma(\beta, y) - \zeta^\Delta(\rho, \sigma) \leq \max_{(\alpha, x) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}} J(\alpha, x) \quad (3.21)$$

С другой стороны, согласно (3.20), справедливо неравенство

$$J(\alpha, x) \leq \tilde{J}_\Gamma(\beta, y) + \zeta^\Delta(\rho, \sigma)$$

для любых $(\alpha, x) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}$ и $(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$, $\|\alpha - \beta\| \leq \rho$, $\|x - y\| \leq \sigma$.

Отсюда следует, что для любой пары $(\alpha, x) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}$ справедливо неравенство

$$J(\alpha, x) \leq \tilde{J}_\Gamma(\beta, y) + \max_{(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}} \zeta^\Delta(\rho, \sigma),$$

из которого, в свою очередь, следует

$$\max_{(\alpha, x) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}} J(\alpha, x) \leq \max_{(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}} \tilde{J}_\Gamma(\beta, y) + \zeta^\Delta(\rho, \sigma) \quad (3.22)$$

Из неравенств (3.21), (3.22) следует

$$\begin{aligned} \max_{(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}} \tilde{J}_\Gamma(\beta, y) - \zeta^\Delta(\rho, \sigma) &\leq \max_{(\alpha, x) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}} J(\alpha, x) \leq \\ &\leq \max_{(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}} \tilde{J}_\Gamma(\beta, y) + \zeta^\Delta(\rho, \sigma), \end{aligned}$$

т.е. имеет место оценка

$$\left| \max_{(\alpha, x) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}} J(\alpha, x) - \max_{(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}} \tilde{J}_\Gamma(\beta, y) \right| \leq \zeta^\Delta(\rho, \sigma) \quad (3.23)$$

Допустим, пара $(\beta^*, y^*) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$ — оптимальная в задаче 3, т.е. $\tilde{J}_\Gamma(\beta^*, y^*) = \max_{(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}} \tilde{J}_\Gamma(\beta, y)$.

Тогда справедлива оценка

$$\left| \max_{(\alpha, x) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}} J(\alpha, x) - \tilde{J}_\Gamma(\beta^*, y^*) \right| \leq \zeta^\Delta(\rho, \sigma) \quad (3.24)$$

Кроме того, как показано выше, пара (β^*, y^*) , как и любая пара $(\beta, y) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$ удовлетворяет неравенству

$$|J(\beta^*, y^*) - \tilde{J}_T(\beta^*, y^*)| \leq \zeta^\Delta(\rho, \sigma) \quad (3.25)$$

Из (3.24) и (3.25) получаем

$$\left| \max_{(\alpha, x) \in \mathcal{L} \times X^{(0)}} J(\alpha, x) - J(\beta^*, y^*) \right| \leq 2\zeta^\Delta(\rho, \sigma) \quad (3.26)$$

Неравенство (3.26) устанавливает, что любая оптимальная пара $(\beta^*, y^*) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$ в задаче 3 является $2\zeta^\Delta(\rho, \sigma)$ -оптимальной в задаче 2.

Принимая во внимание квадратичную зависимость функции $\zeta^\Delta(\rho, \sigma)$ от функции $\kappa^\Delta(\rho, \sigma)$ и учитывая равенство $\lim_{\Delta \downarrow 0, \rho \downarrow 0, \sigma \downarrow 0} \kappa^\Delta(\rho, \sigma) = 0$, получаем $\lim_{\Delta \downarrow 0, \rho \downarrow 0, \sigma \downarrow 0} \zeta^\Delta(\rho, \sigma) = 0$.

Отсюда следует, что для наперед заданного $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\Delta = \Delta(\Gamma)$, ρ и σ из $(0, \infty)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\zeta^\Delta(\rho, \sigma) \leq \varepsilon \quad (3.27)$$

По ρ и σ , удовлетворяющим (3.27), находим пару $(\beta^*, y^*) \in \mathcal{L}^{(\rho)} \times X^{(\sigma)}$ – оптимальную в задаче 3.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения 075-02-2021-1383).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
2. Kurjanskii A., Valyi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Systems & Control: Foundations & Applications. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser Basel and ИАСА, 1997. 321 p.
3. Куржанский А.Б. Избранные труды. М.: Изд-во МГУ. 2009. 756 с.
4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Физматлит, 1974. 456 с.
5. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем: Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
6. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
7. Lempio F., Veliov V.M. Discrete approximation of differential inclusions // Bayr. Math. Schriften. 1998. V. 54. P. 149–232.
8. Никольский М.С. Об аппроксимации множества достижимости дифференциального включения // Вест. Москов. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. киберн. 1987. № 4. С. 31–34.
9. Никольский М.С. Об оценке изнутри множества достижимости нелинейного интегратора Р. Брокитта // Дифференц. ур. 2000. Т. 96. № 11. С. 1501–1505.
10. Вдовин С.А., Тарасьев А.М., Ушаков В.Н. Построение множества достижимости интегратора Брокетта // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 5. С. 707–794.
11. Ананьевский И.М. Управление нелинейной колебательной системой четвертого порядка с неизвестными параметрами // Автомат. и телемех. 2001. № 3. С. 3–15.
12. Ананьевский И.М. Синтез управления линейными системами с помощью методов теории устойчивости движения // Дифференц. ур. 2003. Т. 39. № 1. С. 3–11.
13. Гусев М.И. Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрестными связями // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 82–94.
14. Филиппова Т.Ф. Построение многозначных оценок множеств достижимости некоторых нелинейных динамических систем с импульсным управлением // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 262–269.

15. Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Ушаков А.В. Аппроксимация множеств достижимости и интегральных воронок дифференциальных включений // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2011. Вып. 4. С. 23–39.
16. Ершов А.А., Ушаков В.Н. О сближении управляемой системы, содержащей неопределенный параметр // Матем. сб. 2017. Т. 208. № 9. С. 56–99.
17. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Шербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: Ленанд, 2014. 560 с.
18. Безнос А.В., Гришин А.А., Ленский А.В. и др. Управление маятником при помощи маховика М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. С. 170–195.
19. Лу Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
20. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985. 336 с.

Control Systems Depending on Parameter: Reachable Sets and Integral Funnels

V. N. Ushkov^{a,#}, A. A. Ershov^{a,##}, and A. V. Ushkov^{a,###}

^a *N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Ekaterinburg, Russia*

[#] *e-mail: ushak@imm.uran.ru*

^{##} *e-mail: ale10919@yandex.ru*

^{###} *e-mail: aushakov.pk@gmail.com*

A nonlinear control system in a finite-dimensional Euclidean space and on a finite time interval, depending on a parameter, is considered. The dependence on the parameter of the reachable sets and integral funnels of the corresponding differential inclusion is studied. Under certain conditions on the control system, the degree of this dependence on the parameter is estimated.

Keywords: control system, differential inclusion, reachable set, integral funnel, parameter dependence, approximation

REFERENCES

1. Kurjanskii A.B. Control and Observation under Conditions of Uncertainty. (Upravlenie i nablyudeniye v usloviyakh neopredelennosti) Moscow: Nauka, 1977. 392 p. (in Russian)
2. Kurjanskii A., Valyi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Systems & Control: Foundations & Applications. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser Basel and IIASA, 1997. 321 p.
3. Kurjanskii A.B. Selected Works. (Izbrannye Trudy) Moscow: MSU, 2009. 756 p. (in Russian)
4. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Positional Differential Games. (Pozitsionnyye differentsial'nyye igry) Moscow: Fizmatlit, 1974. 456 p. (in Russian)
5. Chernous'ko F.L. Estimation of the Phase State of Dynamical Systems: Method of Ellipsoids. (Otsenivaniye fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh sistem: Metod ellipsoidov) Moscow: Nauka, 1988. 319 p. (in Russian)
6. Chernous'ko F.L., Melikyan A.A. Game Control and Search Problems. (Igrovyye zadachi upravleniya i poiska) Moscow: Nauka, 1978. 270 p. (in Russian)
7. Lempio F., Veliov V.M. Discrete approximation of differential inclusions // Bayr. Math. Schriften, 1998, vol. 54, pp. 149–232.
8. Nikol'skii M.S. On the approximation of the reachable set of a differential inclusion // Moscow Univ. Bull. Ser. 15. Comput. Math.&Cybern., 1987, no. 4, pp. 31–34. (in Russian)
9. Nikol'skii M.S. An inner estimate of the attainability set of Brockett's nonlinear integrator // Differ. Eqns., 2000, vol. 36, pp. 1647–1651.
10. Vdovin S.A., Taras'yev A.M., Ushakov V.N. Construction of the attainability set of a Brockett integrator // JAMM, 2004, vol. 68, no. 5, pp. 631–646.
11. Anan'evskii I.M. Control of a nonlinear vibratory system of the fourth order with unknown parameters // Autom.&Remote Control, 2001, vol. 62, pp. 343–355.
12. Anan'evskii I.M. Control synthesis for linear systems by methods of stability theory of motion // Differ. Eqns., 2003, vol. 39, pp. 1–10.

13. *Gusev V.I.* Estimates of reachable sets of multidimensional control systems with nonlinear interconnections // Proc. Steklov Inst. Math., 2010, vol. 269, suppl. 1, pp. S134–S146.
14. *Filippova T.F.* Construction of set-valued estimates of reachable sets for some nonlinear dynamical systems with impulsive control // Proc. Steklov Inst. Math., 2010, vol. 269, suppl. 1, pp. S95–S102.
15. *Ushakov V.N., Matviichuk A.R., Ushakov A.V.* Approximations of attainability sets and of integral funnels of differential inclusions // Bull. Udmurt Univ. Math. Mech. Comput. Sci., 2011, iss. 4, pp. 23–39.
16. *Ershov A.A., Ushakov V.N.* An approach problem for a control system with an unknown parameter // Sbornik: Mathematics, 2017, vol. 208, no. 9, pp. 1312–1352.
17. *Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S.* Control of Linear Systems under External Disturbances: Technique of Linear Matrix Inequalities. (Upravleniye lineynymi sistemami pri vneshnikh vozmushcheniyakh: Tekhnika lineynykh matrichnykh neravenstv) Moscow: Lenand, 2014. 560 p.
18. *Beznos A.V., Grishin A.A., Lenskiy A.V. et al.* Control of the Pendulum Using a Flywheel. (Upravleniye mayatnikom pri pomoshchi makhovika) Moscow: MSU, 2009. pp. 170–195. (in Russian)
19. *Lee E.B., Markus L.* Foundations of Optimal Control Theory. N.Y.: Wiley, 1967. 576 p.
20. *Leichtweiss K.* Von konvexe mengen. Berlin: Springer, 1980. 330 p.

УДК 532.59:534.1

РАВНОМЕРНЫЕ АСИМПТОТИКИ ПОЛЕЙ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ОТ НАЧАЛЬНОГО РАДИАЛЬНО СИММЕТРИЧНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

© 2022 г. В. В. Булатов^{1,*}, И. Ю. Владимиров^{2,**}

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

² Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва, Россия

*e-mail: internalwave@mail.ru

**e-mail: iyuvladimirov@rambler.ru

Поступила в редакцию 15.11.2021 г.

После доработки 24.01.2022 г.

Принята к публикации 27.01.2022 г.

Решена задача о построении равномерных асимптотик дальних полей внутренних гравитационных волн от начального возмущения линий равной плотности радиальной симметрии. Рассмотрено постоянное модельное распределение частоты плавучести и с помощью преобразования Фурье–Ханкеля получено аналитическое решение задачи в виде суммы волновых мод. Получены равномерные асимптотики решений, описывающие пространственно-временные характеристики возвышения изопикн (линий равной плотности), вертикальной и горизонтальной (радиальной) компонент скорости. Асимптотики отдельной волновой моды основных компонент волнового поля выражаются через квадрат функции Эйри и ее производные. Проведено сравнение точных и асимптотических результатов, и показано, что на временах порядка десяти и более периодов плавучести равномерные асимптотики позволяют эффективно рассчитывать дальние волновые поля.

Ключевые слова: стратифицированная среда, внутренние гравитационные волны, частота плавучести, дальние поля, равномерные асимптотики

DOI: 10.31857/S0032823522020047

1. Введение. В экспериментальных и натуральных наблюдениях внутренних гравитационных волн (ВГВ) в природных стратифицированных средах (океан, атмосфера), а также при рассмотрении большого числа конкретных задач накоплен большой фактический материал, который нуждается в теоретическом осмыслении [1–3]. Волновые движения в этих средах могут возникать как вследствие естественных причин, так и порождаться искусственными источниками возмущений [4, 5]. Основные результаты решений задач о генерации ВГВ представляются в самой общей интегральной форме, и в этом случае полученные интегральные решения требуют разработки асимптотических методов их анализа, допускающих качественный анализ и проведение экспресс оценок получаемых решений [5–7]. Решения в линейной постановке посредством преобразования Фурье позволяют рассчитывать волновые поля численным интегрированием [2, 3, 5, 8–11]. Однако, по мере увеличения времени и расстояния от источников возмущений необходимо вычислять интегралы от все более и более осциллирующих функций, и численные расчеты делаются трудоемкими. Кроме того, получить из численных расчетов качественное описание уходящих от источника ВГВ, их эволюцию во времени и пространстве, зависимость от характеристик источника практически либо невозможно, либо это требует больших расчетов. В то же время асимпто-

тические выражения для волновых полей записываются через известные специальные функции, и их качественный анализ, как правило, не вызывает затруднений [6, 7, 12, 13]. Кроме того, найденные асимптотики позволяют перейти к более реалистической ситуации сред, параметры которых медленно меняются по горизонтали и времени, так как наличие явных аналитических конструкций позволяет учесть изменение параметров среды вдоль трассы распространения ВГВ посредством соответствующего изменения аргументов, описывающих поле специальных функций, а также амплитудных фазовых множителей [5, 14–16]. Одной из основных используемых моделей генерации можно считать предположение о возбуждении пакетов ВГВ импульсным воздействием различной физической природы [1, 4, 17–19]. Для проведения прогнозных расчетов ВГВ параметры моделей волновой генерации подбираются так, чтобы приблизить смоделированную волновую систему к реально наблюдаемым волновым картинкам, что дает возможность верифицировать эти математические модели.

Целью настоящей работы является построение равномерных асимптотик дальних полей ВГВ, возбуждаемых начальным возмущением линий равной плотности радиальной симметрии в слое стратифицированной среды конечной толщины.

2. Постановка задачи, интегральные формы решений. Поле возвышения изопикн (линий равной плотности) $\eta(r, z, t)$ в слое стратифицированной среды $H < z < 0$ в цилиндрических координатах (r, z) (зависимости от угла нет, ось z направлена вверх) в приближении Буссинеска определяется из задачи [6, 20]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \eta(r, z, t) + N^2(z) \Delta \eta(r, z, t) = 0; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\eta(r, z, 0) = \Phi(r) \Pi(z)$$

$$\eta(r, z, t) = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, -H,$$

где далее частота Брента–Вяйсяля (частота плавучести) предполагается постоянной: $N^2(z) = N^2 = \text{const}$. Предполагается, что начальное возмущение изопикн (линий равной плотности) обладает радиальной симметрией и некоторым распределением по глубине с одним максимумом, что соответствует качественному характеру наблюдаемым в реальных природных средах (океан, атмосфера) нелокальным источникам [1, 4, 17–19]. Решение полученной начально-краевой задачи строится с помощью преобразования Фурье–Ханкеля, и в безразмерных переменных $r^* = r\pi/H$, $z^* = z\pi/H$, $k^* = k\pi/H$, $t^* = Nt$ (индекс “*” далее опускается) имеет вид [6, 20, 21]

$$\eta(r, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nz) g_n(r, t)$$

$$g_n(r, t) = \int_0^{\infty} A(k) k J_0(kr) \cos(\omega_n t) dk \quad (2.1)$$

$$A(k) = \int_0^{\infty} r J_0(kr) \Phi(r) dr, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 \Pi(z) \sin(nz) dz, \quad \omega_n = k / \sqrt{k^2 + n^2},$$

где J_0 – функции Бесселя нулевого порядка [21]. Используя эти решения, можно получить выражения для вертикальной $W(r, z, t)$ и горизонтальной (радиальной) $U(r, z, t)$ компонент скорости ВГВ, которые имеют вид [20]

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} W_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nz) p_n(r, t), \quad U = \sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos(nz) q_n(r, t)$$

$$p_n(r, t) = - \int_0^{\infty} k \omega_n A(k) J_0(kr) \sin(\omega_n t) dk \quad (2.2)$$

$$q_n(r, t) = \int_0^{\infty} \omega_n A(k) J_1(kr) \sin(\omega_n t) dk,$$

где J_1 – функции Бесселя первого порядка [21].

3. Равномерные асимптотики решений. Функции $g_n(r, t)$, $p_n(r, t)$ и $q_n(r, t)$ определяют пространственно-временную структуру основных компонент полей ВГВ. В [20] построены неравномерные асимптотики этих выражений при $r, t \gg 1$ вблизи волновых фронтов отдельной моды. В настоящей работе рассматривается более сложная задача построения равномерных асимптотик, которые позволяют описать волновые поля при $r, t \gg 1$ как вблизи, так и вдали от волновых фронтов. С этой целью необходимо заменить в (2.1) функцию Бесселя на ее асимптотику: $J_0(kr) \approx \sqrt{2/\pi kr} \cos(kr - \pi/4)$ [6, 21]. Получающийся в результате интеграл может быть представлен в виде

$$g_n(r, t) = I_n^+(r, t) + I_n^-(r, t)$$

$$I_n^+(r, t) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{F(k)}{\sqrt{k}} \exp(it\beta_n(k) - i\pi/4) dk = I_n^+$$

$$I_n^-(r, t) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{F(k)}{\sqrt{k}} \exp(it\gamma_n(k) - i\pi/4) dk = I_n^-$$

$$F(k) = \frac{kA(k)}{\sqrt{2\pi r}}, \quad \beta_n(k) = kV + \omega_n, \quad \gamma_n(k) = kV - \omega_n,$$

где $V = r/t$, а при $k < 0$ выбираем $\sqrt{k} = i\sqrt{|k|}$. Поскольку $\omega_n(k)$ – монотонно возрастающая функция переменной k , то фазовая функция $\beta_n(k)$ интеграла I_n^+ не имеет стационарных точек на действительной оси, поэтому при больших значениях r, t интеграл I_n^+ экспоненциально мал. Оценим далее интеграл I_n^- . Обозначим $c_n = \omega_n'(0) = 1/n$ – максимальную групповую скорость отдельной моды ВГВ [1, 6]. Тогда при $0 < V < c_n$ фазовая функция $\gamma_n(k) = kV - \omega_n$ имеет две стационарные точки на действительной оси: $k_n(V) = \pm n\sqrt{(Vn)^{-2/3} - 1}$. Вблизи волнового фронта каждой моды, то есть при $V \rightarrow c_n$, эти две стационарные точки сливаются друг с другом, а также с точкой ветвления при $k = 0$. При $V > c_n$ две стационарные точки $\pm k_n(V)$ располагаются на мнимой оси. Для построения равномерной (по параметру $V = r/t$) асимптотики интеграла I_n^- , позволяющей описывать дальние волновые поля как вблизи, так и вдали от волновых фронтов необходимо выполнить регулярную замену переменной $k = k(s)$, переводящую фазовую функцию $\gamma_n(k) = kV - \omega_n$ в новую функцию $\tau(s) = -\sigma s + s^3/3$ [6, 7, 22, 23]. Таким образом, фазовая функция может быть представлена в виде: $\gamma_n = -\sigma s + s^3/3$. При этом стационарным точкам $\pm k_n(V)$ будут отвечать точки $\pm\sqrt{\sigma}$. Тогда для $k_n(V)$ можно получить: $\sigma = (-3\gamma_n(k_n(V)))/2^{2/3}$. В результате такой замены переменных интеграл I_n^- может быть представлен в виде

$$I_n^- = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{G(s)}{\sqrt{s}} \exp(it\tau(s) - i\pi/4) ds, \quad G(s) = \sqrt{\frac{s}{k}} F(k) \frac{dk}{ds},$$

где функция $G(s)$ – регулярная функция переменной s . Действительно, по построению функция $k = k(s)$ является нечетной регулярной функцией, принимающей положительные значения при $s > 0$. Поэтому dk/ds – четная регулярная функция, $s/k(s)$ – четная регулярная функция, принимающая только положительные значения, $\sqrt{s/k(s)}$ – четная регулярная функция, и, следовательно, $G(s)$ – регулярная функция как произведение трех регулярных функций. Тогда, в соответствии с общей схемой построения равномерных асимптотик (метода эталонных интегралов) функцию $G(s)$ можно представить в виде [6, 7, 22–24]: $G(s) = P(s) + R(s)$, где $P(s) = b_0 + b_1s + b_2s^2$ – интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $G(s)$, построенный по точкам $s = 0, \pm\sqrt{\sigma}$, и $R(s)$ – регулярная функция. В результате можно получить

$$I_n^- = I_P + I_R$$

$$I_P = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2}{\sqrt{s}} \exp\left(it\left(-\sigma s + \frac{1}{3}s^3\right) - i\frac{\pi}{4}\right) ds$$

$$I_R = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(s)}{\sqrt{s}} \exp\left(it\left(-\sigma s + \frac{1}{3}s^3\right) - i\frac{\pi}{4}\right) ds$$

Интеграл I_P вычисляется аналитически [7, 20, 22–24]

$$I_P = \frac{\pi^{3/2}}{2} \left[-ib_0 2^{5/3} t^{-1/6} \text{Ai}^2(\theta) - 2b_1 t^{-1/2} (\text{Ai}^2(\theta))' + ib_2 2^{1/3} t^{-5/6} (\text{Ai}^2(\theta))'' \right]$$

$$\theta = -\sigma(t/2)^{2/3}, \quad \text{Ai}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i(-\theta s + \frac{1}{3}s^3)\right) ds$$

С помощью интегрирования по частям можно показать, что для I_R справедлива оценка: $I_R = O(I_P/t)$. В силу нечетности функции $F(k)$ можно получить: $b_0 = b_2 = 0$, $b_1 = G(\sqrt{\sigma})/\sqrt{\sigma} = F(k_n(V))\sqrt{2/k_n(V)\gamma_n''(k_n(V))}$. Тогда главный член равномерной (по параметру $V = r/t$) асимптотики отдельной волновой моды при $r, t \rightarrow \infty$ имеет вид

$$g_n(r, t) \approx -2\pi^{3/2} \sqrt{\frac{2}{tk_n(V)\gamma_n''(k_n(V))}} F(k_n(V)) \text{Ai}(\theta) \text{Ai}'(\theta) \tag{3.1}$$

Равномерные асимптотики для функций $p_n(r, t)$ и $q_n(r, t)$ при $r, t \rightarrow \infty$ вычисляются аналогично, и имеют вид

$$p_n(r, t) \approx -2^{1/3} \pi^{3/2} t^{-5/6} \sqrt{\frac{2}{\sigma k_n(V)\gamma_n''(k_n(V))}} F(k_n(V)) \omega_n(k_n(V)) ((\text{Ai}'(\theta))^2 + \theta(\text{Ai}(\theta))^2)$$

$$q_n(r, t) \approx -2\pi^{3/2} \sqrt{\frac{2}{tk_n(V)\gamma_n''(k_n(V))}} F(k_n(V)) \frac{\omega_n(k_n(V))}{k_n(V)} \text{Ai}(\theta) \text{Ai}'(\theta) \tag{3.2}$$

4. Результаты численных расчетов. Для численных расчетов в начальном распределении возвышения изопикн (линий равной плотности) предполагается, что функции $\Phi(r)$, $\Pi(z)$ нормированы на свои максимальные по модулю значения. В качестве модельного, можно рассмотреть следующее радиальное распределение начального возмущения изопикн: $\Phi(r) = \exp(-r^2/4)/2$ и представление функции $\Pi(z) = z^\alpha (1 - z^\beta)$, $\alpha = 33$, $\beta = 57$. Используемые пространственные масштабы и характер изменчивости начального возмущения изопикн соответствуют типичным горизонтальным и вертикальным масштабам нелокальных источников возбуждения ВГВ в океане [1, 4, 5, 20].

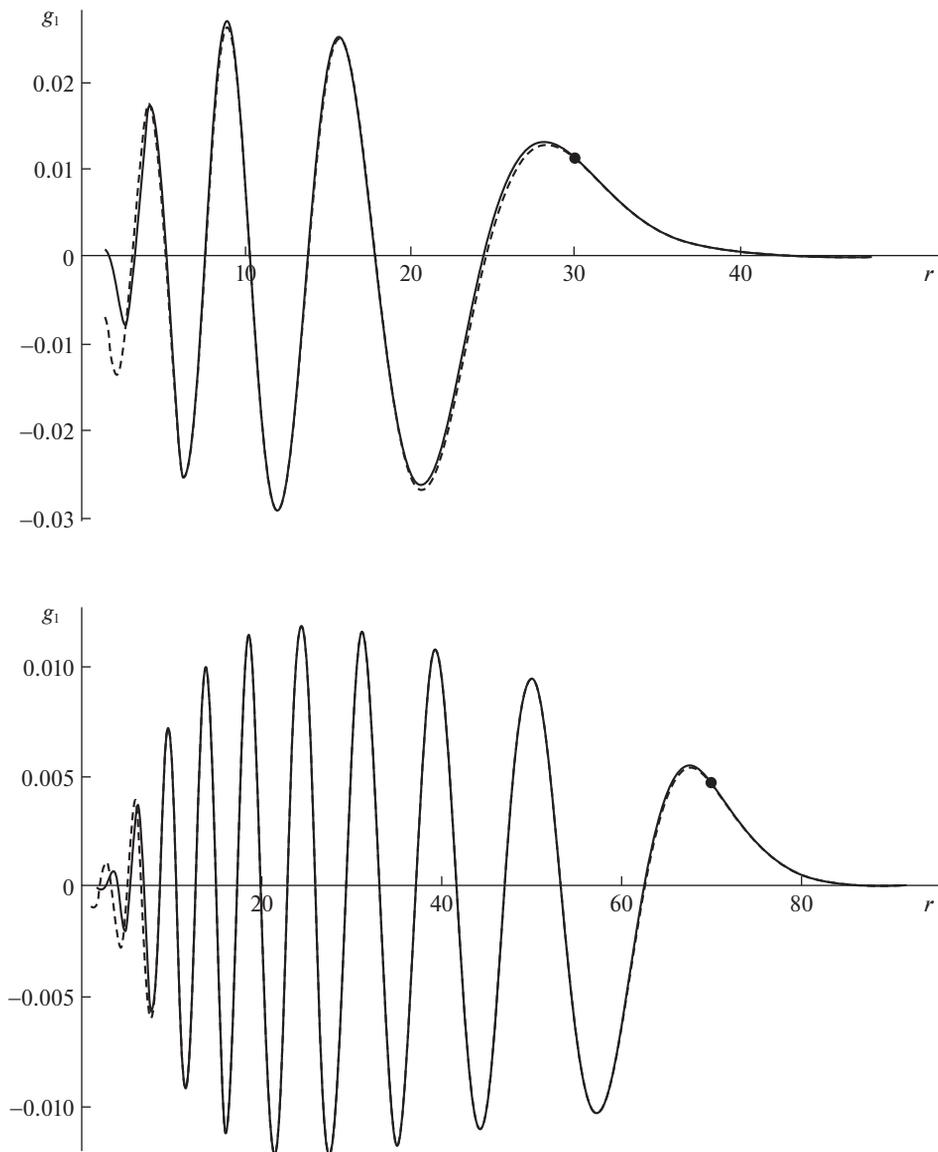


Рис. 1. Первая мода возвышения изопикн, точное решение и равномерная асимптотика.

На рис. 1 представлены результаты расчетов функции $g_1(r, t)$, (первая мода возвышения) при значениях $t = 30$ (верхний рисунок) и $t = 70$ (нижний рисунок). Здесь и далее сплошная линия – результаты точных численных расчетов по формулам (2.1)–(2.2), штриховая линия – расчеты по формулам (3.1)–(3.2). Точкой отмечено положение волнового фронта. На рис. 2 представлены результаты расчетов функции $p_1(r, t)$ (первая мода вертикальной скорости) при значениях $t = 30$ (верхний рисунок) и $t = 70$ (нижний рисунок). На рис. 3 представлены результаты расчетов функции $q_1(r, t)$, (первая мода горизонтальной (радиальной) компоненты скорости) при значениях $t = 30$

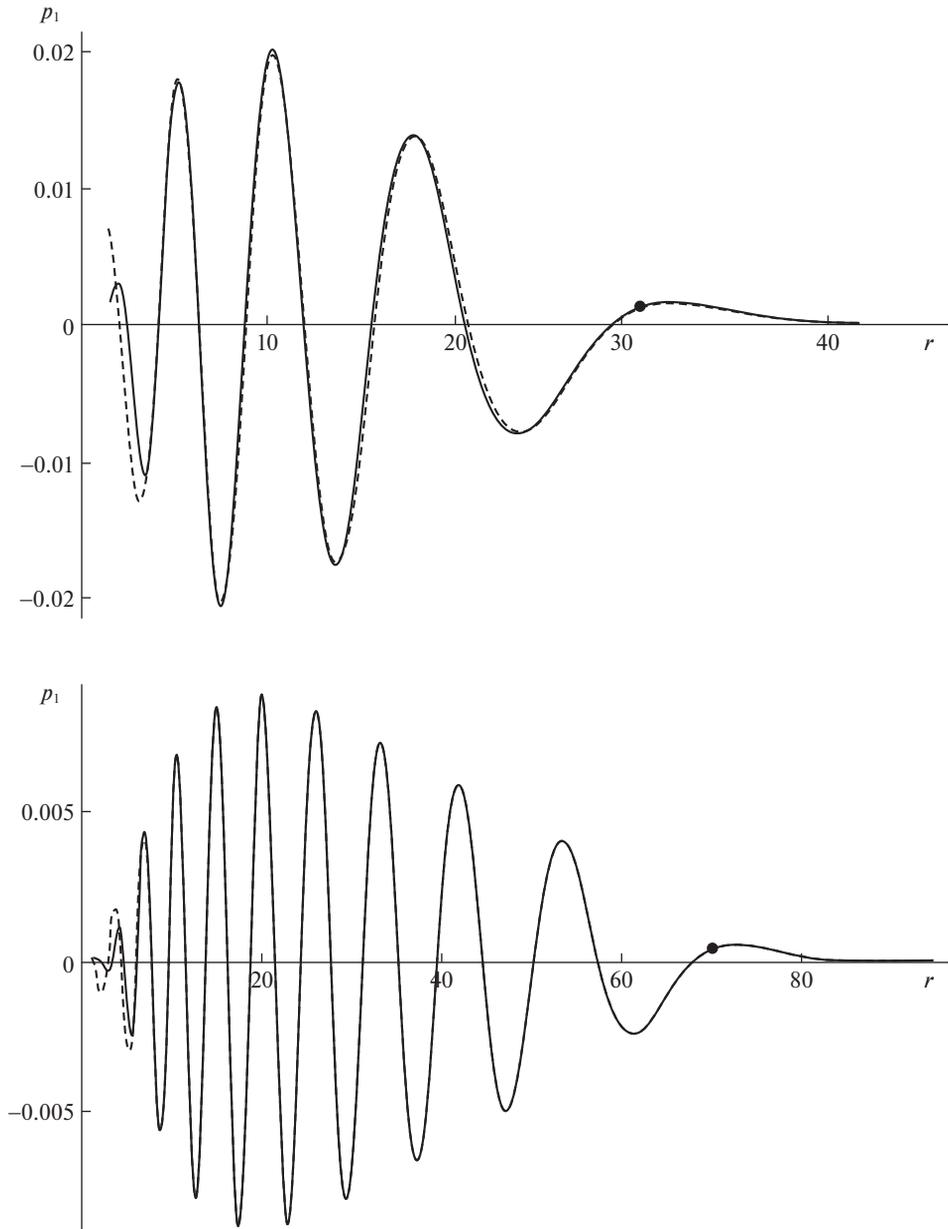


Рис. 2. Первая мода вертикальной скорости, точное решение и равномерная асимптотика.

(верхний рисунок) и $t = 70$ (нижний рисунок). Из представленных результатов видно хорошее совпадение точных и асимптотических формул при больших значениях r , t . Как показывают численные расчеты, на временах порядка десяти и более периодов частоты плавучести, построенные равномерные асимптотики волновых мод позволяет с хорошей степенью рассчитывать дальние поля ВГВ как вблизи, так и вдали от волновых фронтов.

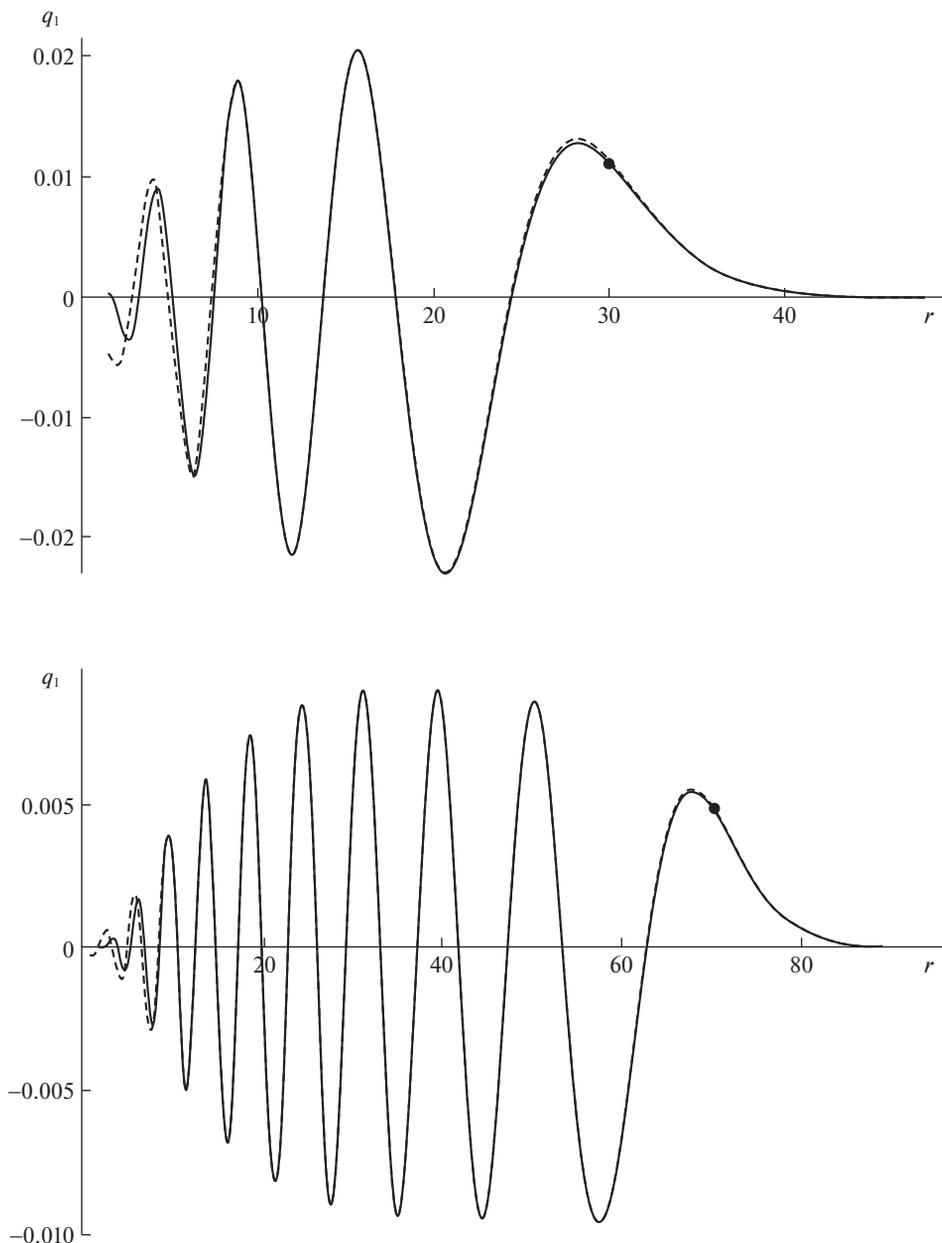


Рис. 3. Первая мода горизонтальной (радиальной) скорости, точное решение и равномерная асимптотика.

Заключение. В работе для заданного начального возмущения изоповерхности (линий равной плотности), обладающего радиальной симметрией и вертикальным распределением с одним максимумом, построены равномерные асимптотические решения, описывающие динамику пакетов ВГВ на больших временах и расстояниях. Равномерные асимптотики отдельной волновой моды компонент волнового поля выражаются через

квадрат функции Эйри и ее производные и позволяют рассчитывать пространственно-временные характеристики возвышения изопикн, вертикальной и горизонтальной (радиальной) компонент скорости как вблизи, так и вдали от волновых фронтов. Используемое в качестве начального модельное распределение возвышения может адекватно описать различные физически обоснованные механизмы генерации пакетов ВГВ в природных стратифицированных средах. Полученные результаты позволяют аналитически представить как возвышение изопикн, так и все компоненты скоростей возбуждаемых ВГВ. Полученные равномерные асимптотики дальних полей ВГВ дают возможность эффективно рассчитывать основные характеристики волновых полей, и, кроме того, качественно анализировать полученные решения, что важно для правильной постановки математических моделей волновой динамики природных стратифицированных сред. Полученные асимптотические результаты с различными значениями входящих в них физических параметров позволяют провести оценку характеристик начальных возмущений, наблюдаемых в реальных условиях.

Работа выполнена по темам государственного задания: № АААА-А20-120011690131-7, № 0128-2021-0002, и частичной финансовой поддержке РФФИ проект № 20-01-00111А.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коняев К.В., Сабинин К.В.* Волны внутри океана. СПб.: Гидрометеоздат, 1992. 272 с.
2. *Pedlosky J.* Waves in the Ocean and Atmosphere: Introduction to Wave Dynamics. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. 260 p.
3. *Sutherland B.R.* Internal gravity waves. Cambridge: Univ. Press, 2010. 394 p.
4. *Morozov E.G.* Oceanic Internal Tides. Observations, Analysis and Modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.
5. *Velarde M.G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V.* (Eds.). The Ocean in Motion. Springer Oceanography. Springer Int. Publ. AG, 2018. 625 p.
6. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.
7. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика неоднородных сред (в 2 томах). Т. 1: Основы теории отражения и распространения звука. М.: Наука, 2007. 443 с.; Т. 2: Звуковые поля в слоистых и трехмерно-неоднородных средах. М.: Наука, 2009. 426 с.
8. *Луцин В.А., Матюшин П.В.* Моделирование и исследование течений стратифицированной жидкости около тел конечных размеров // ЖВММФ. 2016. Т. 56. № 6. С. 1049–1063.
9. *Матюшин П.В.* Процесс формирования внутренних волн, инициированных начальным движением тела в стратифицированной вязкой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2019. № 3. С. 83–97.
10. *Voelker G.S., Myers P.G., Walter M., Sutherland B.R.* Generation of oceanic internal gravity waves by a cyclonic surface stress disturbance // Dyn. Atm. Oceans. 2019. V. 86. P. 116–133.
11. *Wang J., Wang, S., Chen X., Wang W., Xu Y.* Three-dimensional evolution of internal waves rejected from a submarine seamount // Phys. Fluids. 2017. V. 29. P. 106601.
12. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Аналитические решения уравнения внутренних гравитационных волн, генерируемых движущимся нелокальным источником возмущений // ЖВММФ. 2021. Т. 61. № 4. С. 572–579.
13. *Bulatov V., Vladimirov Yu.* Generation of internal gravity waves far from moving non-local source // Symmetry. 2020. V. 12 (11). P. 1899.
14. *Haney S., Young W.R.* Radiation of internal waves from groups of surface gravity waves // J. Fluid Mech. 2017. V. 829. P. 280–303.
15. *Broutman D., Brandt L., Rottman J., Taylor C.* A WKBJ derivation for internal waves generated by a horizontally moving body in a thermocline // Wave Motion. 2021. V. 105. P. 102759.
16. *Свиркунов П.Н., Калашник М.В.* Фазовые картины диспергирующих волн от движущихся локализованных источников // УФН. 2014. Т. 184. № 1. С. 89–100.
17. *Беляев М.Ю., Десинов Л.В., Крикалев С.К., Кумакшев С.А., Секерж-Зенькович С.Я.* Идентификация системы океанских волн по фотоснимкам из космоса // Изв. РАН. ГиСУ. 2009. № 1. С. 117–127.

18. *Morozov E.G., Tarakanov R.Yu., Frey D.I., Demidova T.A., Makarenko N.I.* Bottom water flows in the tropical fractures of the Northern Mid-Atlantic Ridge // *J. Oceanogr.* 2018. V. 74. № 2. P. 147–167.
19. *Khimchenko E.E., Frey D.I., Morozov E.G.* Tidal internal waves in the Bransfield Strait, Antarctica // *Russ. J. Earth. Science.* 2020. V. 20. ES2006.
20. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Асимптотики дальних полей внутренних гравитационных волн, возбуждаемых источником радиальной симметрии // *Изв. РАН. МЖГ.* 2021. № 5. С. 76–81.
21. *Watson G.N.* A Treatise on the Theory of Bessel Functions (Reprint of the 2nd ed.). Cambridge: Univ. Press, 1995. 804 p.
22. *Kravtsov Y., Orlov Y.* Caustics, Catastrophes, and Wave Fields. Berlin: Springer, 1999. 228 p.
23. *Froman N., Froman P.* Physical Problems Solved by the Phase-Integral Method. Cambridge: Univ. Press, 2002. 214 p.
24. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В., Владимиров И.Ю.* Равномерные и неравномерные асимптотики дальних полей поверхностных волн от вспыхнувшего локализованного источника // *ПММ.* 2021. Т. 85. № 5. С. 626–634.

Uniform Asymptotics of Internal Gravity Waves Fields from Initial Radially Symmetric Perturbation

V. V. Bulatov^{a,#} and I. Yu. Vladimirov^{b,##}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

^b *Shirshov Institute of Oceanology RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: internalwave@mail.ru*

^{##} *e-mail: iyuvladimirov@rambler.ru*

The problem of constructing uniform asymptotics of the internal gravity waves far fields from a nonlocal source of radial symmetry perturbations that flared up at the initial time is solved. The constant model distribution of the buoyancy frequency is considered and an analytical solution of the problem in the form of a sum of wave modes is obtained using the Fourier–Hankel transform. Uniform asymptotics of solutions are obtained, which describe the space–time characteristics of the elevation of isopycn (lines of equal density), vertical and horizontal (radial) velocity components. The asymptotics of an individual wave mode of the main components of the wave field are expressed in terms of the square of the Airy function and its derivatives. A comparison of the exact and asymptotic results is carried out, and it is shown that, at times of the order of ten or more periods of buoyancy, the uniform asymptotics makes it possible to efficiently calculate the far wave fields

Keywords: stratified medium, internal gravity waves, buoyancy frequency, uniform asymptotics, far fields

REFERENCES

1. *Konjaev K.V., Sabinin K.V.* Waves in Ocean. St.-Petersburg: Gidrometeoizdat, 1992. 272 p. (in Russian).
2. *Pedlosky J.* Waves in the Ocean and Atmosphere: Introduction to Wave Dynamics. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. 260 p.
3. *Sutherland B.R.* Internal Gravity Waves. Cambridge: Univ. Press, 2010. 394 p.
4. *Morozov E.G.* Oceanic Internal Tides. Observations, Analysis and Modeling. Berlin: Springer, 2018. 317 p.
5. *Velarde M.G., Tarakanov R.Yu., Marchenko A.V. (Eds.)*. The Ocean in Motion. Springer Oceanography. Springer Int. Pub. AG, 2018. 625 p.
6. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Waves in Stratified Medium. Moscow: Nauka, 2015. 735 p. (in Russian)

7. *Brehovskikh L.M., Godin O.A.* Acoustic of Inhomogeneous Medium. Vol. 1: Fundamentals of the Theory of Sound Reflection and Propagation. Moscow: Nauka, 2007. 443 p.; Vol. 2: Sound Fields in Layered and Three-Dimensionally Inhomogeneous Medium. Moscow: Nauka, 2009. 426 p. (in Russian)
8. *Gushchin V.A., Matyushin P.V.* Simulation and study of stratified flows around finite bodies // *Comp. Math.&Math. Phys.*, 2016, vol. 56, no. 6, pp. 1034–1048.
9. *Matyushin P.V.* Process of the formation of internal waves initiated by the start of motion of a body in a stratified viscous fluid // *Fluid Dyn.*, 2019, vol. 54, pp. 374–388.
10. *Voelker G.S., Myers P.G., Walter M., Sutherland B.R.* Generation of oceanic internal gravity waves by a cyclonic surface stress disturbance // *Dyn. Atm. Oceans.*, 2019, vol. 86, pp. 116–133.
11. *Wang J., Wang, S., Chen X., Wang W., Xu Y.* Three-dimensional evolution of internal waves rejected from a submarine seamount // *Phys. Fluids.*, 2017, vol. 29, pp. 106601.
12. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Analytical solutions of the equation describing internal gravity waves generated by a moving nonlocal source of perturbations // *Comp. Math.&Math. Physics*, 2021, vol. 61, no. 4, pp. 556–563.
13. *Bulatov V., Vladimirov Yu.* Generation of internal gravity waves far from moving non-local source // *Symmetry*, 2020, vol. 12 (11), pp. 1899.
14. *Haney S., Young W.R.* Radiation of internal waves from groups of surface gravity waves // *J. Fluid Mech.*, 2017, vol. 829, pp. 280–303.
15. *Broutman D., Brandt L., Rottman J., Taylor C.A.* WKB derivation for internal waves generated by a horizontally moving body in a thermocline // *Wave Motion*, 2021, vol. 105, pp. 102759.
16. *Svirkunov P.N., Kalashnik M.V.* Phase patterns of dispersive waves from moving localized sources // *Phys. Uspekhi*, 2014, vol. 57, pp. 80–91.
17. *Belyaev M.Y., Desinov L.V., Krikalev S.K. et al.* Identification of a system of oceanic waves based on space imagery // *J. Comp. Syst. Sci. Int.*, 2009, vol. 48, pp. 110–120.
18. *Morozov E.G., Tarakanov R.Yu., Frey D.I., Demidova T.A., Makarenko N.I.* Bottom water flows in the tropical fractures of the Northern Mid-Atlantic Ridge // *J. Oceanogr.*, 2018, vol. 74, no. 2, pp. 147–167.
19. *Khimchenko E.E., Frey D.I., Morozov E.G.* Tidal internal waves in the Bransfield Strait, Antarctica // *Russ. J. Earth. Sci.*, 2020, vol. 20, ES2006.
20. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Asymptotics of the far fields of internal gravity waves excited by a source of radial symmetry // *Fluid Dyn.*, 2021, vol. 56, no. 5, pp. 672–677.
21. *Watson G.N.* A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge: Univ. Press, 1995. 804 p.
22. *Kravtsov Y., Orlov Y.* Caustics, Catastrophes, and Wave Fields. Berlin: Springer, 1999. 228 p.
23. *Froman N., Froman P.* Physical Problems Solved by the Phase-Integral Method. Cambridge: Univ. Press, 2002. 214 p.
24. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V., Vladimirov I.Yu.* Uniform and nonuniform asymptotics of far surface fields from a flashed localized source // *Fluid Dyn.*, 2021, vol. 56, no. 7, pp. 975–980.

УДК 533.6.011.8

О ПОДЪЕМНОЙ СИЛЕ В ПОТОКЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

© 2022 г. С. Л. Горелов^{1,2,*}, А. В. Могорычная^{2,**}

¹ ФГУП ЦАГИ, Жуковский, Россия

² Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

*e-mail: gorelovsl@yandex.ru

**e-mail: anna.magorychnaya@phystech.edu

Поступила в редакцию 05.12.2021 г.

После доработки 19.01.2022 г.

Принята к публикации 23.01.2022 г.

Вычисляются аэродинамические силы, действующие на клин и конус в потоке разреженного газа. Доказывается, что существует такой угол полураствора клина и конуса, что при увеличении этого угла подъемная сила становится отрицательной при произвольном угле атаки. Для высокоскоростных течений показано, что такой эффект существует при произвольном числе Рейнольдса.

Ключевые слова: аэродинамические силы в разреженном газе, число Рейнольдса, эффекты разреженности газа

DOI: 10.31857/S0032823522020060

1. Введение. Эффект изменения знака подъемной силы при изменении угла атаки в высокоскоростных плоских течениях впервые был обнаружен в [1]. В свободномолекулярном течении такой эффект был найден в [2]. Данная работа является развитием идей из [2]. Показано, что при обтекании клина разреженным газом при определенном соотношении угла полураствора и угла атаки подъемная сила клина может стать отрицательной. Причем, этот эффект проявляется при любых скоростях газа и отношениях температур поверхности клина и газа. Более того, такой эффект есть и в случае гиперзвукового течения невязкого газа (модель Ньютона). Для высокоскоростных течений на основе локального метода [3] показано, что эффект изменения знака подъемной силы при определенных значениях угла полураствора существует для клина и конуса при произвольном числе Рейнольдса.

2. Свободномолекулярный случай. Обтекание клина. Рассматривается свободномолекулярное обтекание клина конечной длины с углом полураствора δ и углом атаки $0 \leq \alpha \leq \pi/2$.

Теорема 1. Существует такое значение $\delta = \delta_0$, что при $\delta \geq \delta_0$ коэффициент подъемной силы клина $C_y \leq 0$, и $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, а при $\delta < \delta_0$ имеем $C_y > 0$ в некотором интервале значений угла атаки α из множества $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. Значение $\delta = \delta_0$ определяется из уравнения

$$\left. \frac{dC_y(\alpha, \delta)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

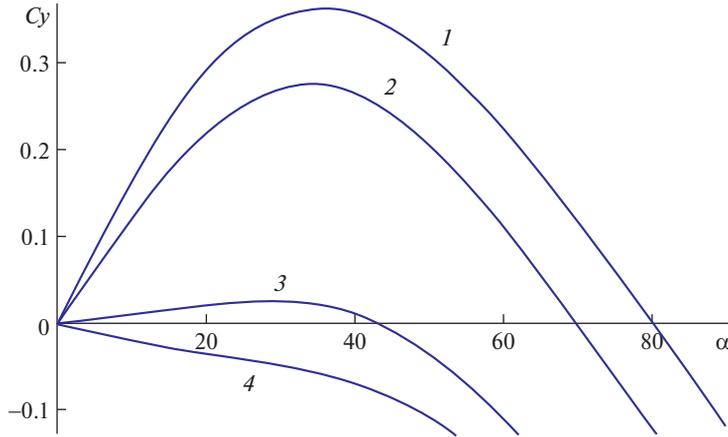


Рис. 1. Зависимость C_y от угла атаки α при разных значениях δ ($S = 2$, $t_w = 0.1$, $\gamma = 1.4$): кривые 1–4 соответствуют значениям $\delta = 10^\circ$; 20° ; 36° ; 40° .

Доказательство. Коэффициенты давления и трения для плоской пластины под углом атаки θ равны [5]

$$C_p = \frac{1}{S^2 \sqrt{\pi}} \left[S_\theta \exp(-S_\theta^2) + \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2} + S_\theta^2 \right) (1 + \operatorname{erf} S_\theta) + \frac{\sqrt{\pi} t}{2} \chi(S_\theta) \right] \quad (2.1)$$

$$C_\tau = \frac{\cos \theta}{S \sqrt{\pi}} \chi(S_\theta), \quad \chi(x) = \exp(-x^2) + x \sqrt{\pi} (1 + \operatorname{erf} x)$$

Здесь $S = U_\infty \sqrt{m/2kT_\infty}$, U_∞ – скорость газа, m – масса молекулы, k – постоянная Больцмана, T_∞ – температура газа, T_w – температура поверхности, $t = T_w/T_\infty = t_w (1 + S^2 (\gamma - 1) / \gamma)$, t_w – температурный фактор, γ – отношение теплоемкостей, $S_\theta = S \sin \theta$.

Коэффициент подъемной силы выражается

$$C_y = C_p \cos \theta - C_\tau \sin \theta \quad (2.2)$$

Для верхней части клина $\theta = \theta_u = \delta - \alpha$, для нижней части $\theta = \theta_b = \delta + \alpha$.

$$C_{y_b} = C_p \cos(\delta + \alpha) - C_\tau \sin(\delta + \alpha) \quad (2.3)$$

$$C_{y_u} = -C_p \cos(\delta - \alpha) - C_\tau \sin(\delta - \alpha)$$

Коэффициент подъемной силы клина выражается формулой

$$C_y = C_{y_b} + C_{y_u} \quad (2.4)$$

На рис. 1 представлены графики зависимостей C_y от угла атаки α для разных величин угла полураствора δ . Из графиков хорошо видно, что с увеличением δ кривая $C_y(\alpha)$ отходит от точки $\alpha = 0$ все ближе к горизонтали. И при некотором значении $\delta = \delta_0$ кривая при $\alpha = 0$ становится горизонтальной, а затем при увеличении δ значения C_y становятся отрицательными. Определить эту величину δ_0 можно из уравнения

$$\left. \frac{dC_y(\alpha, \delta)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (2.5)$$

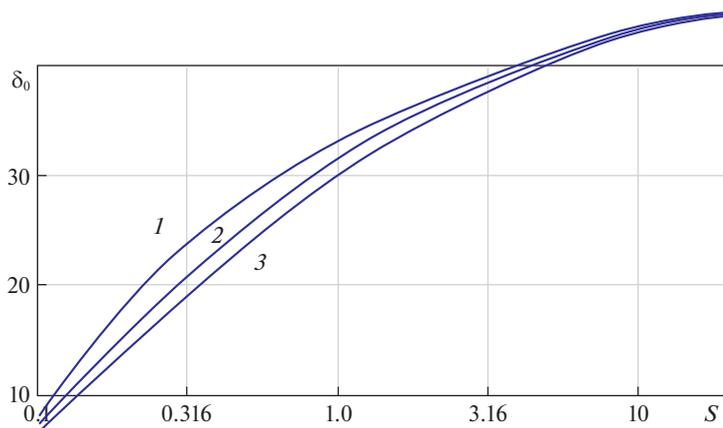


Рис. 2. Зависимость δ_0 от скоростного отношения S для разных температурных факторов: кривые 1–3 соответствуют значениям $t_w = 1; 0.1; 0.01$.

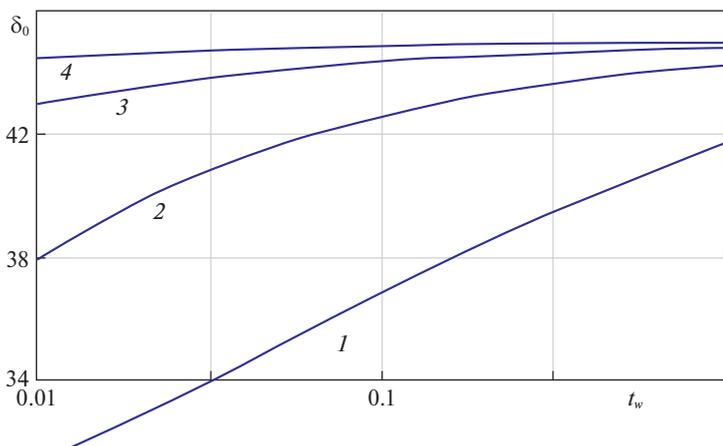


Рис. 3. Зависимость δ_0 от температурного фактора t_w при разных значениях скоростного отношения: кривые 1–4 соответствуют значениям $S = 2; 5; 10; 20$.

Из уравнения (2.5) определяем значения δ_0 в зависимости от скорости набегающего потока S и температурного фактора t_w .

Из рис. 1 видно, что зависимость $C_y(\alpha)$ немонотонна. Причем при любом угле полураствора δ , начиная с некоторого угла, эта зависимость величина $C_y(\alpha)$ становится отрицательной. Отсюда следует

Теорема 2. При любом значении угла полураствора $\delta < \delta_0$ найдется такой угол атаки $\alpha = \alpha_0$ из множества $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, что при $\alpha > \alpha_0$ коэффициент подъемной силы $C_y < 0$.

Доказательство.

Эту теорему можно доказать непосредственным нахождением α_0 из решения уравнения

$$C_y(\alpha, \delta) = 0 \quad (2.6)$$

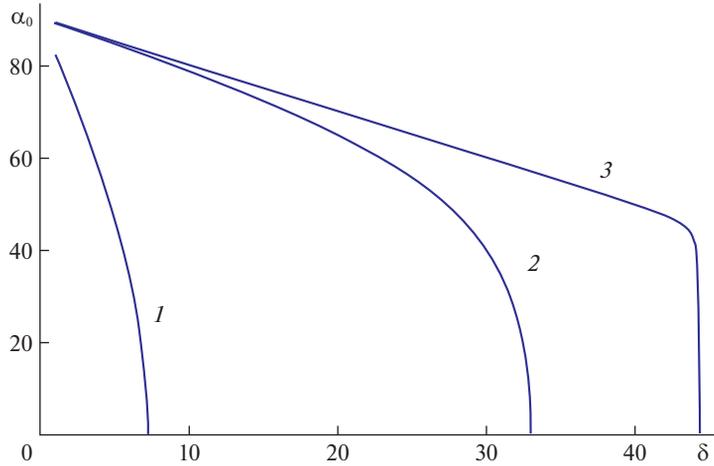


Рис. 4. Зависимость $\alpha_0(\delta)$ для $t_w = 0.1$: кривые 1–3 соответствуют значениям $S = 0.1; 1.0; 10.0$.

На рис. 4 показан пример зависимости $\alpha_0(\delta)$.

3. Высокоскоростные течения. Локальный метод. Клин. В высокоскоростном потоке при $S \rightarrow \infty$ возможно использовать метод, основанный на гипотезе локальности [6], которая состоит в следующем: аэродинамические коэффициенты сил, действующие на элемент поверхности, зависят только от местного угла наклона θ этого элемента к вектору скорости набегающего потока U_∞ , от характерного для всего тела числа $Re_0 = \rho_\infty U_\infty L / \mu_0$ и температурного фактора $t_w = T_w / T_0$, где $\mu_0 = \mu(T_0)$ – коэффициент вязкости, вычисляемый по температуре торможения; $T_0 = T_\infty [1 + S^2 (\gamma - 1) / \gamma]$, T_w – температура торможения и температура элемента поверхности, соответственно; γ – отношение удельных теплоемкостей; L – характерный размер тела. В соответствии с гипотезой локальности предполагается, что для аэродинамических коэффициентов справедливы соотношения [6]

$$\begin{aligned} Cp &= p_0 \sin^2 \theta + p_1 \sin \theta \\ C\tau &= \tau_0 \cos \theta \sin \theta \end{aligned} \quad (3.1)$$

Тогда, в свободномолекулярном случае ($Re_0 \rightarrow 0$) из (2.1) при $S \rightarrow \infty$ следует:

$$p_0 = \tau_0 = 2, \quad p_1 = [\pi t_w (\gamma - 1) / \gamma]^{1/2},$$

а в случае невязкого высокоскоростного газа ($Re_0 \rightarrow \infty$) следует формула Ньютона и $p_0 = 2, p_1 = \tau_0 = 0$.

Теорема 1 доказывается так же как в разд. 2 и критический угол вычисляется из решения уравнения (2.5).

В свободномолекулярном случае ($Re_0 \rightarrow 0$) уравнение (2.5) имеет вид

$$\cos(2\delta) = 0, \quad \delta_0 = 45^\circ \quad (3.2)$$

Теорема 2 как и в случае разд. 2 доказывается прямым решением уравнения (2.6). Получается, что в этом случае такого угла нет, то есть $\alpha_0 = 90^\circ$.

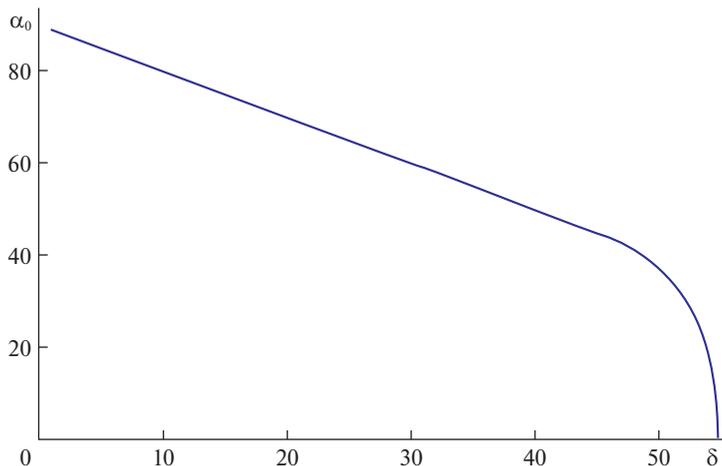


Рис. 5. Зависимость $\alpha_0(\delta)$ для клина в случае модели Ньютона ($\text{Re}_0 \rightarrow \infty$).

В случае невязкого газа ($\text{Re}_0 \rightarrow \infty$) используется формула Ньютона и нахождение критического угла сводится к решению уравнения

$$3 \sin(3\delta) - \sin \delta = 0$$

Исключая нефизичные значения корней ($|\delta| > \pi/2$) и отрицательные значения (вследствие симметрии), получаем

$$\delta_0 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54.73^\circ \quad (3.3)$$

Решение уравнения (2.6) дает доказательство теоремы 2. Результат этого решения показан на рис. 5.

4. Высокоскоростные течения. Конус. Используя формулы (3.1) коэффициент подъемной силы конуса запишется [6]

$$C_y = \left\{ (p_0 - \tau_0) \sin^2 \delta \cos \alpha \left[\cos^2 \alpha f(z) - g(z) \right] + p_1 \sin \delta \left[\cos^2 \alpha g(z) - h(z) \right] \right\} \text{ctg } \alpha; \quad z = \text{tg } \delta \text{ctg } \alpha \quad (4.1)$$

При $z \geq 1$ $f(z) = 1 + \frac{3}{2z^2}$, $g(z) = 1 + \frac{1}{2z^2}$, $h(z) = 1$;

$$\text{При } z < 1 \quad \begin{cases} f(z) = \frac{1}{\pi} \left[\left(1 + \frac{3}{2z^2} \right) (\pi - \arccos z) + \frac{1}{z} \left(\frac{11}{6} + \frac{2}{3z^2} \right) \sqrt{1 - z^2} \right] \\ g(z) = \frac{1}{\pi} \left[\left(1 + \frac{1}{2z^2} \right) (\pi - \arccos z) + \frac{3}{2z} \sqrt{1 - z^2} \right] \\ h(z) = \frac{1}{\pi} \left(\pi - \arccos z + \frac{1}{z} \sqrt{1 - z^2} \right) \end{cases}$$

Для доказательства теоремы 1 из решения уравнения (2.5) находим значение $\delta_0 = 35.26^\circ$.

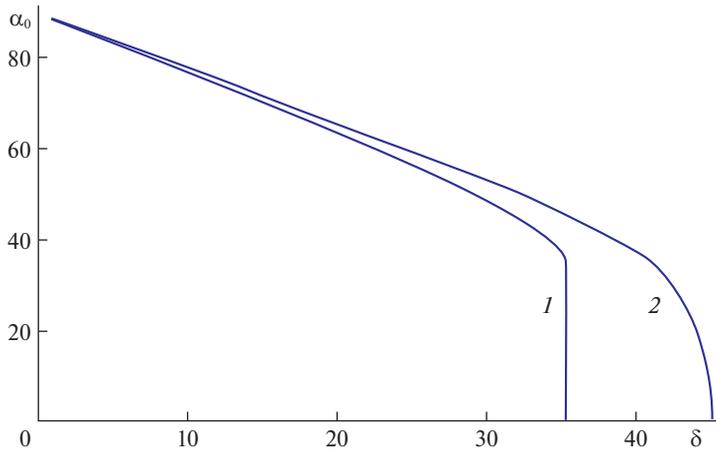


Рис. 6. Зависимость $\alpha_0(\delta)$ для кругового конуса в свободномолекулярной модели ($Re_0 \rightarrow 0$) — кривая 1 и модель Ньютона ($Re_0 \rightarrow \infty$) — кривая 2.

Для доказательства теоремы 2 решаем уравнение $Cy = 0$ при $\delta < \delta_0$. Результат решения на рис. 6.

В случае модели Ньютона подставляем в эти выражения $p_0 = 2$, $p_1 = \tau_0 = 0$ получаем формулы локального метода для конуса. Уравнение (2.5) дает

$$\cos 2\delta = 0, \quad \delta_0 = 45^\circ \quad (4.2)$$

Заключение. В статье рассматриваются коэффициенты подъемной силы клина и кругового конуса для двух моделей течения: свободномолекулярная модель газа и модель основанная на гипотезе локальности высокоскоростных течений. Для данных случаев сформулированы и доказаны теоремы, согласно которым для любого угла полураствора найдется такой угол атаки, начиная с которого коэффициент подъемной силы становится отрицательным, и также существует угол полураствора, начиная с которого коэффициент подъемной силы отрицателен для любого угла атаки.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 20-08-00790.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галкин В.С., Гладков А.А. О подъемной силе при гиперзвуковых скоростях // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 6. С. 1138–1139.
2. Галкин В.С. О подъемной силе в свободномолекулярном потоке // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 3. С. 567.
3. Василенко Д.А., Дорофеев Ф.Е., Дорофеев Е.А. Построение нейросетевого аппроксиматора для определения критического угла полураствора в эффекте смены знака коэффициента подъемной силы для затупленных конических тел // Тр. МАИ. 2021. Вып. 119.
4. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. М.: Наука, 1989, 688 с.
5. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967, 440 с.
6. Галкин В.С., Ерофеев А.И., Толстых А.И. Приближенный метод расчета аэродинамических характеристик тел в гиперзвуковом разреженном газе // Тр. ЦАГИ. 1977. Вып. 1833. С. 6–10.

On the Lifting Force in a Rarefied Gas Flow**S. L. Gorelov^{a,#} and A. V. Mogorychnaya^{b,##}**^a *Moscow Institute of Physics and Technology, Zhukovsky, Russia*^b *Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Russia*[#]*e-mail: gorelovsl@yandex.ru*^{##}*e-mail: anna.mogorychnaya@phystech.edu*

For the cases of a wedge and a cone aerodynamic forces acting on a body in a rarefied gas flow, are calculated. The theorem about existence of such an angle of half opening of a wedge and a cone, that for every wider angle of half opening the lifting force is negative for every arbitrary angle of attack is formulated and proved. It is shown, that this effect takes place at any arbitrary Reynolds number.

Keywords: aerodynamics forces in a rarefied gas flow, Reynolds number, rarefaction effects

REFERENCES

1. *Galkin V.S., Gladkov A.A.* On the lift force at hypersonic speeds // JAMM, 1961, vol. 25, iss. 6, pp. 1697–1699.
2. *Galkin V.S.* On the lifting force in a free molecular flow // JAMM, 1962, vol. 26, iss. 3, pp. 848–849.
3. *Vasilenko D.A., Dorofeev F.E., Dorofeev E.A.* Construction of a neural network approximator to determine the critical half-angle in the effect of sign reversal of the lifting force coefficient for blunt conical bodies // Proc. MAI, 2021, iss. 119.
4. *Newton I.* Mathematical Principles of Natural Philosophy. Moscow: Nauka, 1989. 688 p. (in Russian)
5. *Kogan M.N.* Dynamics of Rarefied Gas. Moscow: Nauka, 1967. 440 p.
6. *Galkin V.S., Erofeev A.I., Tolstykh A.I.* An approximate method for calculating the aerodynamic characteristics of bodies in a hypersonic rarefied gas // TsAGI Proc., 1977, iss. 1833, pp. 6–10.

УДК 539.4.011:678

ВАРИАНТЫ КРИТЕРИЯ ПРОЧНОСТИ ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ ПО УСЛОВИЮ РАЗРУШЕНИЯ СВЯЗУЮЩЕГО ПРИ НАЛИЧИИ СЖАТИЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО ВОЛОКНАМ

© 2022 г. А. И. Олейников^{1,2,*,**}

¹ *Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Россия*

² *Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия*

**e-mail: alexander.oleinikov@tsagi.ru*

***e-mail: a.i.oleinikov@mail.ru*

Поступила в редакцию 10.06.2021 г.

После доработки 09.11.2021 г.

Принята к публикации 25.12.2021 г.

При анализе прочности конструкций из слоистых волокнистых полимерных композиционных материалов используются критерии разрушения монослоя — однонаправленно армированного композита. В однонаправленном композите площадка скалывания матрицы составляет с плоскостью волокон двугранный угол, который возрастает с увеличением отношения поперечных сжимающих и сдвиговых напряжений. Этот вид разрушения связующего наиболее опасен и приводит к полному разрушению структуры композита. Формулируются линейный и квадратичный варианты критерия прочности по условию прочности связующего, учитывающих влияние нормального напряжения на сопротивление сдвигу, соответствующее асимметричному закону трения. Выводится формула, определяющая угол наклона площадки возможного разрушения. Рассматриваются виды установочных испытаний и осуществляется экспериментальная проверка предложенных критериев.

Ключевые слова: однонаправленный композит, полимерная матрица, прочность, разрушение связующего, анизотропное трение

DOI: 10.31857/S0032823522020102

1. Введение. Расчеты конструкций из слоистых композитов обычно проводятся по критериям прочности их одномерно армированных волокнистых монослоев. К настоящему времени предложено довольно много таких критериев. Однако задача построения новых и совершенствования существующих критериев остается по-прежнему актуальной. Коэффициент запаса прочности, учитывающий неточность применяемых критериев, для многих несущих конструкций все еще назначается очень большим. Поэтому могут продолжаться попытки построения новых, а также модификации и специализации существующих критериев. Настоящая работа также посвящена исследованию и построению вариантов одного критерия прочности монослоя по условию разрушения связующего при наличии сжатия нормально волокнам [1]. Нагрузки с таким сжатием, например, могут испытывать в полете монослои композитных панелей обшивки планера самолета [2]. Компонентами этого вида нагрузки наряду с поперечным сжатием могут являться сдвиг в плоскости волокон и растяжение или сжатие вдоль волокон. Соотношения данных компонент в различных участках панели различно. Однородное напряженное состояние с фиксированным соотношением компонент с высокой точностью реализуется, например, в экспериментах по осевому

сжатия с кручением и внутренним или внешним давлением композитных трубчатых образцов, намотанными послойно по окружности [3, 4]. В принципе такие состояния можно получать и в плоских крестообразных образцах, вырезанных из однонаправленного листа.

Обзор работ по теориям прочности композитов приведены, например, в [5, 6]. Здесь кратко отметим только два подхода к построению наиболее известных критериев. Их общий вид таков:

$$f(\sigma_{ij}, k_l) = 1 \quad (1.1)$$

Функция f определяет некоторое соотношение между компонентами σ_{ij} тензора напряжений, k_l – постоянные композита.

Первый подход основывается на общих тензорных и инвариантно-полиномиальных формулировках функции f . Они широко используются при образовании критериев прочности анизотропных материалов (композитов), например, в [7–11]. Предполагается, что искомый критерий является инвариантным относительно группы ортогональных преобразований, соответствующих классу симметрии структуры материала. Достоинства и недостатки этого подхода отмечались в [12–14]. Нарушение таких условий прочности означает либо разрушение (обрыв, локальное выпучивание) в основном волокон, либо разрушение (скол, расщепление) в основной матрицы, однако без явного указания какой именно из этих видов (мод, механизмов) разрушения в основном произошел [7, 8, 10]. При расчетах конструкций из слоистых композитов идентификация механизма разрушения монослоя необходима. Считается, что первый механизм приводит к полной потере несущей способности слоя, а второй – только лишь к изменению некоторых его характеристик упругости. Хотя эти механизмы и можно условно отделить по доминирующим слагаемым в выражениях данных критериев [15], тем не менее, начиная с работы [9] критерии прочности по механизмам разрушения волокон и связующего, как правило, формулируются отдельно [11]. Разложение критерия по этим механизмам основывалось на рассмотрении проекций напряжений на плоскости перпендикулярные и параллельные волокнам [9]. Кроме того, каждый из полученных таким образом критериев еще подразделялся на два случая наличия растягивающих или сжимающих нормальных напряжений на данных плоскостях [9].

Если не связывать построение критерия с симметрично-инвариантными ограничениями, то эти два вида критериев можно сразу отдельно формулировать на соответствующих площадках. В этом состоит второй подход, которого мы здесь придерживаемся. Тогда в соотношении (1.1) функция $f \equiv f(\tau_n, \sigma_n, k_l)$, где соответственно τ_n и σ_n касательное и нормальное напряжения на площадке с нормалью n . При плоском напряженном состоянии композита критериальная функция f по механизму разрушения связующего применялась в форме квадратичной зависимости между τ_n и σ_n [16, 17]. Ориентация этой площадки полагалась одной и той же для всех напряженных состояний. Ее положение было зафиксировано перпендикулярно плоскости волокон в их направлении, так что $\tau_n \equiv \tau_{nl}$ – касательное напряжение вдоль волокон. В некоторых случаях вполне удовлетворительные результаты получались при линейной функции f на той же площадке [18]. Однако, с изменением напряжений ориентация данной площадки n может изменяться. Для каждого напряженного состояния ее положение соответствует максимуму функции $f(\tau_{nl}, \tau_{nt}, \sigma_n, k_l)$, где τ_{nt} – касательное напряжение поперек волокон [9]. Эта площадка составляет с плоскостью волокон некоторый двугранный угол $\pi/2 - \alpha$, ребро которого параллельно направлению волокон [1, 9, 19]. На данной площадке критерии прочности по механизму разрушения связующего при наличии сжатия перпендикулярно направлению волокон предлагались в виде [1]:

$$f_1(\tau_{nt}, \tau_{nl}, \sigma_n, S_t, S_l, \eta_t, \eta_l) \equiv \left(\frac{\tau_{nt}}{S_t - \eta_t \sigma_n} \right)^2 + \left(\frac{\tau_{nl}}{S_l - \eta_l \sigma_n} \right)^2 = 1 \quad (1.2)$$

$$f_2(\tau_{nt}, \tau_{nl}, \sigma_n, S_t, S_l, \eta_t, \eta_l) \equiv \frac{\tau_{nt}^2}{S_t^2 - 2\eta_t S_t \sigma_n} + \frac{\tau_{nl}^2}{S_l^2 - 2\eta_l S_l \sigma_n} = 1, \quad (1.3)$$

а также в форме [19]

$$f_3(\tau_{nt}, \tau_{nl}, \sigma_n, S_t, S_l, \eta_t, \eta_l) \equiv \left(\frac{\langle |\tau_{nt}| + \eta_t \sigma_n \rangle}{S_t} \right)^2 + \left(\frac{\langle |\tau_{nl}| + \eta_l \sigma_n \rangle}{S_l} \right)^2 = 1 \quad (1.4)$$

Очевидно, что (1.3) следует из (1.2), если допустить, что $\eta_t^2 \sigma_n^2 = 0$ и $\eta_l^2 \sigma_n^2 = 0$ [1]. В (1.2)–(1.4) приняты следующие обозначения: S_t и S_l – сопротивление сдвигу матрицы при действии соответственно напряжения τ_{nt} или τ_{nl} , η_t и η_l – угловые коэффициенты касательных к предельным кривым $\sigma_n - \tau_{nt}$ и $\sigma_n - \tau_{nl}$ в точке $\sigma_n = 0$, соответственно; угловая скобка в (1.4) означает, что для любого x , $\langle x \rangle = (x + |x|)/2$.

Согласно аналогии, между сопротивлением сдвигу и предельной силой трения (покоя) выражения (1.2)–(1.4) учитывают на площадке n влияние нормального напряжения сжатия на сопротивление сдвигу, соответствующее ортотропному закону трения [20, 21]. Критические замечания по критериям (1.2), (1.3) приводились в [11].

Ключевым элементом в применении (1.2)–(1.4) для данного напряженного состояния τ_{nt} , τ_{nl} , σ_n на площадке n является решение задачи об определении угла $\alpha = \alpha_*$, доставляющего максимум функции $f \equiv f(\tau_{nl}, \tau_{nt}, \sigma_n, k_l)$ [9]. К настоящему времени точное решение найдено только для (1.3) [1]. Для исходного общего критерия (1.2) точное решение еще не получено. Это сдерживает возможно более широкое его приложение.

В природных волокнистых композитах наблюдаются асимметричные законы внутреннего трения, при котором сопротивление сдвигу зависит от сочетания знаков касательных напряжений вдоль и поперек волокон [21]. Применительно к таким материалам необходимо иметь, например, обобщение (1.2) на случай влияния нормального напряжения сжатия на сопротивление сдвигу, соответствующее асимметричному закону трения. Такое обобщение также еще не построено.

Квадратичные условия прочности композитов наиболее широко употребительные. Тем не менее их линейная аппроксимация в некоторых случаях может давать вполне удовлетворительные результаты [18]. Кроме того, линейное условие может быть использовано при кусочно-линейном приближении нелинейных критериев и эффективно при решении обратных задач по определению характеристик монослоев из свойств пакета [22]. Линейный аналог данных условий прочности к настоящему времени также не сформулирован.

В качестве параметров в критерии (1.2)–(1.4) входят угловые коэффициенты η_t и η_l касательных к соответствующим предельным кривым. Эти кривые вообще являются искомыми и для новых композитов или технологий заранее неизвестны. Для их определения нужен некоторый массив опытных данных в окрестности чистого продольного сдвига. Поэтому также актуальным является вопрос определения параметров данных критериев по результатам стандартных испытаний.

Целью настоящей работы является, применительно к случаю наличия поперечного сжатия:

- формулировка линейного и квадратичного вариантов общего условия прочности (1.2), учитывающих влияние нормального напряжения на сопротивление сдвигу на площадке n , соответствующее ортотропному асимметричному закону трения;

- вывод уравнения для определения ориентации площадки n , на которой реализуется максимум линейного критерия;
- вывод формулы для определения угла наклона площадки n , соответствующего максимуму квадратичного критерия;
- определение видов установочных испытаний для нахождения параметров данных критериев прочности;
- экспериментальная проверка предложенных критериев при двухкомпонентном нагружении комбинациями поперечного сжатия и продольного сдвига.

2. Линейное и квадратичное условия прочности. Линейный F_1 и квадратичный F_2 критерии прочности по условию разрушения связующего, которые учитывают влияние нормального напряжения сжатия на предельное сопротивление сдвигу, соответствующее ортотропному асимметричному закону трения на площадке n , записываются соответственно в виде:

$$F_1(\tau_{nl}, \tau_{nt}, \sigma_n, Y_t, Y_l, m_t, m_l) \equiv \left| \frac{m_t \tau_{nt}}{Y_t - \sigma_n} \right| + \left| \frac{m_l \tau_{nl}}{Y_l - \sigma_n} \right| - 1 = 0 \quad (2.1)$$

$$F_2(\tau_{nl}, \tau_{nt}, \sigma_n, Y_t, Y_l, m_t, m_l) \equiv \left(\frac{m_t \tau_{nt}}{Y_t - \sigma_n} \right)^2 + \left(\frac{m_l \tau_{nl}}{Y_l - \sigma_n} \right)^2 - 1 = 0, \quad (2.2)$$

где величина постоянных m_t , m_l в зависимости от знаков касательных напряжений вдоль τ_{nl} и поперек τ_{nt} волокон может быть различной [21]:

$$(m_t, m_l) = \begin{cases} (m_t^+, m_l^+) & \text{при } \tau_{nt} \geq 0, \quad \tau_{nl} \geq 0 \\ (m_t^-, m_l^+) & \text{при } \tau_{nt} < 0, \quad \tau_{nl} \geq 0 \\ (m_t^-, m_l^-) & \text{при } \tau_{nt} < 0, \quad \tau_{nl} < 0 \\ (m_t^+, m_l^-) & \text{при } \tau_{nt} \geq 0, \quad \tau_{nl} < 0 \end{cases}$$

На плоскости (τ_{nl}, τ_{nt}) критерий (2.2) является выпуклой замкнутой гладкой кривой, составленной из дуг четырех эллипсов с общим центром и различными полуосями, как показано на схеме рис. 1а (сплошная линия). Полуоси четвертой соответствующих эллипсов в вершинах смежных дуг одинаковы,

$$OA = - \left| \frac{Y_l - \sigma_n}{m_t^-} \right|, \quad OB = \left| \frac{Y_t - \sigma_n}{m_l^+} \right|, \quad OC = \left| \frac{Y_l - \sigma_n}{m_l^+} \right|, \quad OD = - \left| \frac{Y_t - \sigma_n}{m_t^-} \right|$$

Симметричный изотропный случай $m_t^+ = m_t^- = m_l^+ = m_l^- = m_t$, $Y_l = Y_t$ критерия (2.2) на рис. 1а представляется окружностью (пунктирная линия). Симметричные ортотропные случаи $m_t^+ = m_t^-$, $m_l^+ = m_l^-$ критериев (2.2) и (2.1) являются соответственно эллипсом и вписанным в этот эллипс ромбом (рис. 1б). В последнем случае (2.2) совпадает с критерием (1.2) после переопределения констант $m_t = 1/\eta_t$, $m_l = 1/\eta_l$, $Y_t = S_t/\eta_t$, $Y_l = S_l/\eta_l$.

При плоском напряженном состоянии в системе координат x_1, x_2, x_3 напряжения на площадке n , наклоненной к оси x_3 под углом α , (оси x_1, x_2 лежат в плоскости волокон в направлении армирования и перпендикулярно ему, соответственно; ось x_3 — перпендикулярна плоскости волокон) записываются в виде

$$\begin{aligned} \tau_{nt} &= -\sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau_{nl} &= \sigma_{12} \cos \alpha \cos 0 = \sigma_{12} \cos \alpha \\ \sigma_n &= \sigma_{22} \cos^2 \alpha \end{aligned} \quad (2.3)$$

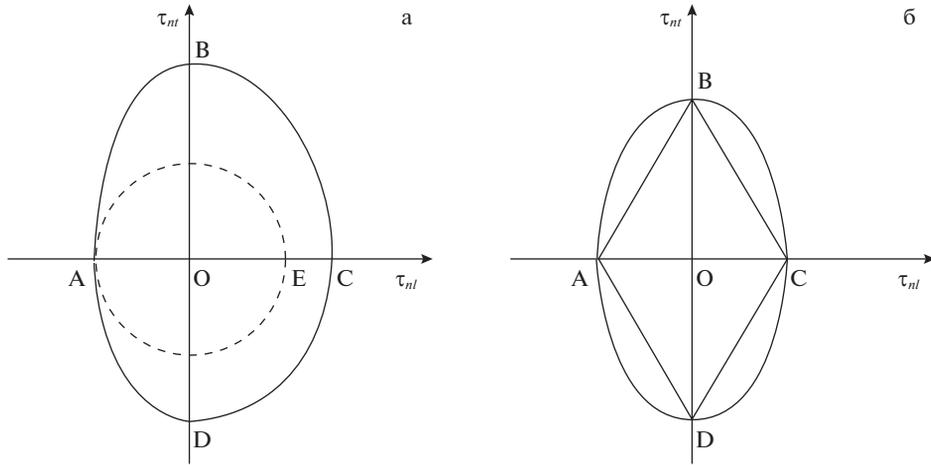


Рис. 1.

В данной системе координат единичная нормаль к площадке $n = (0, \cos \alpha, \sin \alpha)$. Относительно плоскости x_1, x_2 площадка n повернута вокруг оси параллельной x_1 , поэтому в средней формуле (2.3) содержится только косинус в первой степени.

Согласно (2.3) напряжение σ_{11} в направлении волокон не фигурирует в условиях (2.1), (2.2) и напрямую не взаимодействует с напряжениями τ_{nl} , τ_{nt} и σ_n на площадке n . Это известный недостаток всех критериев сформулированных на площадках параллельных направлению волокон [1, 16–19]. Заметим, что и в тензорно-инвариантных теориях критерии прочности по механизму разрушения матрицы также не содержат σ_{11} [9, 11]. Ошибка, связанная с пренебрежением вклада σ_{11} в напряжения в матрице обычно не слишком велика. Это обусловлено главным образом обычно очень большим превышением модуля упругости волокна над модулем упругости связующего. Кроме того, при наличии σ_{11} прежде данных критериев возможно нарушение условия прочности по механизму разрушения волокон. Это условие здесь не рассматривается.

Однако, по причине указанного превышения модуля упругости волокна и статистической природы его прочности в связующем происходит накопление микротрещин с ростом продольного напряжения. Такое увеличение трещиноватости связующего обусловлено концентрацией и сингулярностью для напряжений у рассеянных локальных разрушений волокон. Это растрескивание уменьшает эффективную площадь связующего, воспринимающую напряжения. Достаточно высокий уровень трещиноватости оказывает существенный разупрочняющий эффект. Его можно учитывать с помощью введения в критерий параметра разупрочнения q_w . За меру такой разупрочненности может быть принята просто относительная величина продольного напряжения $q_w = \sigma_{11}/S_{11}$ [1], где S_{11} – прочность композита при одноосном нагружении в направлении волокон. Согласно опытным данным существенное влияние этого разупрочнения наблюдается только при высоких продольных напряжениях $|\sigma_{11}| \geq 0.7|S_{11}|$ [1]. Далее здесь это разупрочнение не рассматривается.

Что касается определения угла α^* наклона площадки возможного разрушения, или кратко – угла разрушения, примем, что при α^* реализуется максимум функции

$F_2(\tau_{nl}, \tau_{nl}, \sigma_n)$ или $F_1(\tau_{nl}, \tau_{nl}, \sigma_n)$ для данных σ_{22}, σ_{12} . Согласно этому предположению и (2.3) угол α^* является решением системы

$$F_i(\sigma_{22}, \sigma_{12}, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial F_i(\sigma_{22}, \sigma_{12}, \alpha)}{\partial \alpha} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2.4)$$

Система (2.4) определяет также искомую поверхность прочности $f_i(\sigma_{22}, \sigma_{12}) = 0$, которая является огибающей для α -семейства условий $F_i(\sigma_{22}, \sigma_{12}, \alpha) = 0$.

Известно множество волокнистых растительных материалов с асимметричным внутренним трением [21]. Для конструкционных композитов влияние асимметрии трения в сравнении с их анизотропией незначительно. Далее ограничимся рассмотрением симметричного анизотропного случая, когда m_i и m_l не изменяются при перемене знаков касательного напряжения,

$$m_t^+ = m_t^- = m_t, \quad m_l^+ = m_l^- = m_l \quad (2.5)$$

При выполнении равенств (2.5) критерии (2.2) и (2.1) на плоскости (τ_{nl}, τ_{nl}) представляют собой соответственно эллипс и вписанный в этот эллипс ромб (рис. 1б).

3. Линейный критерий. Обозначим выражения под знаком модуля в (2.1) через $T(\tau_{nl}, \sigma_n)$ и $L(\tau_{nl}, \sigma_n)$. При плоском напряженном состоянии

$$T(\sigma_{22}, \alpha) = \frac{-m_t \sigma_{22} \cos \alpha \sin \alpha}{Y_t - \sigma_{22} \cos^2 \alpha}, \quad L(\sigma_{22}, \sigma_{12}, \alpha) = \frac{m_l \sigma_{12} \cos \alpha}{Y_l - \sigma_{22} \cos^2 \alpha} \quad (3.1)$$

и (2.1) записывается в виде

$$F_1(\sigma_{22}, \sigma_{12}, \alpha) \equiv |T(\sigma_{22}, \alpha)| + |L(\sigma_{22}, \sigma_{12}, \alpha)| - 1 = 0 \quad (3.2)$$

Используя (3.1) из (3.2) получаем, согласно (2.4), уравнение для определения α^* :

$$\begin{aligned} & \frac{m_t \sigma_{22} \cos(2\alpha)}{Y_t - \sigma_{22} \cos^2 \alpha} \operatorname{sgn} T + \frac{m_l \sigma_{12} \sin \alpha}{Y_l - \sigma_{22} \cos^2 \alpha} \operatorname{sgn} L + \\ & + \frac{\sigma_{22} \sin(2\alpha)}{Y_l - \sigma_{22} \cos^2 \alpha} \left(1 + |T| \frac{Y_l - Y_t}{Y_l - \sigma_{22} \cos^2 \alpha} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

При $\sigma_{12} = 0$ из (3.2) и (3.3) следует, что

$$\begin{aligned} m_t &= -\operatorname{tg}(2\alpha_{\perp}^*) \operatorname{sgn} T^*, \quad Y_t = S_{22} \left(\cos^2 \alpha_{\perp}^* - \frac{1}{2} m_t \sin 2\alpha_{\perp}^* \right) \\ & \left(T^* = \frac{-m_t S_{22} \cos \alpha_{\perp}^* \sin \alpha_{\perp}^*}{Y_t - S_{22} \cos^2 \alpha_{\perp}^*} \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где α_{\perp}^* , S_{22} – соответственно угол разрушения и прочность композита при одноосном сжатии перпендикулярно направлению волокон.

Также из (3.2), (3.3) при $\sigma_{22} = 0$ получаем, что

$$\alpha_0^* = 0, \quad m_l = \frac{Y_l}{S_{12}} \operatorname{sgn} L_0, \quad \left(L_0 = \frac{m_l S_{12}}{Y_l} \right), \quad (3.5)$$

где α_0^* , S_{12} – соответственно угол разрушения и сопротивление сдвигу композита при продольном сдвиге.

Согласно [1], также здесь и везде далее принимаем, что

$$Y_l = Y_t = Y \quad (3.6)$$

С учетом (3.6) выражение (3.2) для F_1 и уравнение (3.3) для определения угла α_* приобретают простой вид

$$F_1(\sigma_{22}, \sigma_{12}, \alpha) \equiv \sigma_{22}(\cos^2 \alpha - m_t \sin \alpha \cos \alpha) + m_t \sigma_{12} \cos \alpha - Y = 0 \quad (3.7)$$

$$\sigma_{22}(m_t \cos 2\alpha + \sin 2\alpha) + m_t \sigma_{12} \sin \alpha = 0, \quad (3.8)$$

где

$$m_t = -\operatorname{tg} 2\alpha_{\perp}^*, \quad m_t = \frac{Y}{S_{12}}, \quad Y = \frac{1}{2} S_{22}(1 + 1/\cos 2\alpha_{\perp}^*) \quad (3.9)$$

Критерий (3.7) в общем случае является физически нелинейным из-за зависимости от угла α . Линейный случай [18] следует из (3.7), (3.8) при $\alpha = 0$ и $m_t = 0$. Согласно (3.7)–(3.9) в число характеристических констант композита, кроме S_{22} и S_{12} , в общем случае входит также угол α_{\perp}^* .

В случае одинакового сопротивления сдвигу поперек и вдоль волокон $m_t = m_l$ из (3.9) следует, что угол α_{\perp}^* не является независимой характеристической константой материала. Он определяется отношением прочностей S_{22} и S_{12} ,

$$\alpha_{\perp}^* = -\operatorname{arctg} \frac{S_{22}}{2S_{12}} \quad (3.10)$$

Например, для углепластика при $S_{22} = -200$ МПа и $S_{12} = 83.1$ МПа получаем $\alpha_{\perp}^* \cong 50.3^\circ$.

4. Квадратичный критерий. При плоском напряженном состоянии с учетом (2.5) и (3.6) критерий (2.2) принимает вид

$$F_2(\sigma_{22}, \sigma_{12}, \alpha) \equiv (m_t \sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha)^2 + (m_l \sigma_{12} \cos \alpha)^2 - (Y - \sigma_{22} \cos^2 \alpha)^2 = 0, \quad (4.1)$$

где параметры m_t , m_l и Y точно также как и в линейном случае определяются по формулам (3.9).

Используя (4.1) из (2.4) получаем уравнение относительно искомого угла α^* ,

$$\left(\frac{-m_t \sigma_{22} \cos \alpha^* \sin \alpha^*}{Y - \sigma_{22} \cos^2 \alpha^*} \right)^2 \operatorname{ctg} \alpha^* - \left(\frac{2\sigma_{22} \cos \alpha^* \sin \alpha^*}{Y - \sigma_{22} \cos^2 \alpha^*} + \operatorname{tg} \alpha^* \right) = 0$$

Это уравнение имеет два решения:

$$\alpha_1^* = 0, \quad \alpha_2^* = \arccos \left(\frac{Y^2}{\sigma_{22}^2 (1 + m_t^2)} \right)^{1/4} \quad (4.2)$$

С учетом выражения для Y и m_t в (3.9) и согласно (4.2) получаем простую формулу для нахождения угла α^* наклона площадки возможного разрушения,

$$\alpha^*(\sigma_{22}) = \begin{cases} 0 & \text{при } \frac{S_{22}/\sigma_{22}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_{\perp}^*} \geq 1 \\ \arccos \sqrt{\frac{S_{22}/\sigma_{22}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_{\perp}^*}} & \text{при } \frac{S_{22}/\sigma_{22}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_{\perp}^*} < 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

При $\sigma_{22} = S_{22}$ формула (4.3) тождественно дает $\alpha^*(S_{22}) = \alpha_{\perp}^*$, что и следовало ожидать.

В случае $m_t = m_l$ угол α_{\perp}^* также как и для критерия (2.1) не является независимой характеристикой постоянной материала. Он определяется квадратом отношения прочностей S_{22} и S_{12} :

$$\alpha_{\perp}^* = \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{4S_{12}^2/S_{22}^2 - 1}{4S_{12}^2/S_{22}^2 + 1} \right) \quad (4.4)$$

При $S_{22} = -200$ МПа и $S_{12} = 83.1$ МПа согласно (4.4) также получаем $\alpha_{\perp}^* \cong 50.3^\circ$.

5. Установочные испытания. Приведем возможные виды экспериментов, определяющие все материальные параметры данных критериев.

Вначале рассмотрим более простой случай, когда в (2.1) и (2.2) коэффициенты перед касательными напряжениями вдоль и поперек волокон равны, $m_t = m_l$. При таком равенстве на плоскости (τ_{nl}, τ_{nt}) условие (2.1) является квадратом вписанным в окружность условия (2.2) (рис. 1).

Из соотношений (3.6), (3.9), (3.10) и (4.4) следует, что в этом случае все параметры предложенных критериев $m_t, m_l, Y_t, Y_l, \alpha_{\perp}^*$ могут быть определены по результатам всего двух стандартизованных испытаний образцов на разрушение. А именно, по прочности S_{22} при одноосном сжатии перпендикулярно направлению волокон и прочности S_{12} при продольном сдвиге в плоскости волокон. После определения прочностей S_{22} и S_{12} все параметры данных критериев вычисляются по формулам (3.9), а также (3.10) или (4.4).

В общем случае, когда $m_t \neq m_l$, кроме прочностей S_{22} и S_{12} надо еще определить угол α_{\perp}^* скалывания композита по матрице при одноосном сжатии перпендикулярно направлению волокон. Судя по литературе к настоящему времени отсутствует общепринятый стандарт на испытания по определению этого угла. По результатам экспериментов на разрушение призматических и трубчатых образцов стекло- и углепластиков получали узкий диапазон изменения значений этого угла, $\alpha_{\perp}^* = 53^\circ \pm 3^\circ$ [23–25]. К настоящему времени в расчетах общепринято использование значения α_{\perp}^* из данного диапазона [26]. Тогда по приведенным формулам (3.9) определяются все параметры данных критериев.

6. Экспериментальная проверка предложенных критериев. Пример расчета кривых прочности при поперечном сжатии в комбинации со сдвигом. Обычно в качестве экспериментальной проверки критериев прочности приводятся примеры их применения при одноосном нагружении под различными углами к волокнам. Такая проверка условий (1.3) и [18] для стеклопластика, углепластика и боропластика приведена в [15]. При этом расчетные кривые прочности для данных критериев и критериев, [8, 9, 16–18], различаются незначительно [15].

Для критериев (2.1), (2.2) показательным является двухкомпонентное нагружение комбинациями сжатия перпендикулярно направлению волокон и продольного сдвига в плоскости волокон.

В качестве примера приложения критериев (2.1) и (2.2) на рис. 2 приведены кривые прочности (более толстые линии) углепластика при нагружении его нормальными и сдвиговыми напряжениями рассчитанные согласно (3.7)–(3.9), (рис. 2а) и (4.1), (4.3) (рис. 2б) при $S_{22} = -200$ МПа, $S_{12} = 83.1$ МПа, $\alpha_{\perp}^* = 55^\circ$, соответствующих испытаниям на поперечное сжатие в комбинации со сдвигом [24].

Для α -семейств (более тонкие сплошные линии) прямых $F_1(\sigma_{22}, \sigma_{12}, \alpha) = 0$, $\alpha = \text{const}$ (рис. 2а) и α -семейств эллипсов $F_2(\sigma_{22}, \sigma_{12}, \alpha) = 0$, $\alpha = \text{const}$ (рис. 2б), соответствующие этим критериям кривые прочности являются внутренними огибающими. На этих рисунках видно, что кривая прочности соответствует критическим напряжениям имеющих радиус-вектор наименьшей длины. Штрихпунктирными линиями

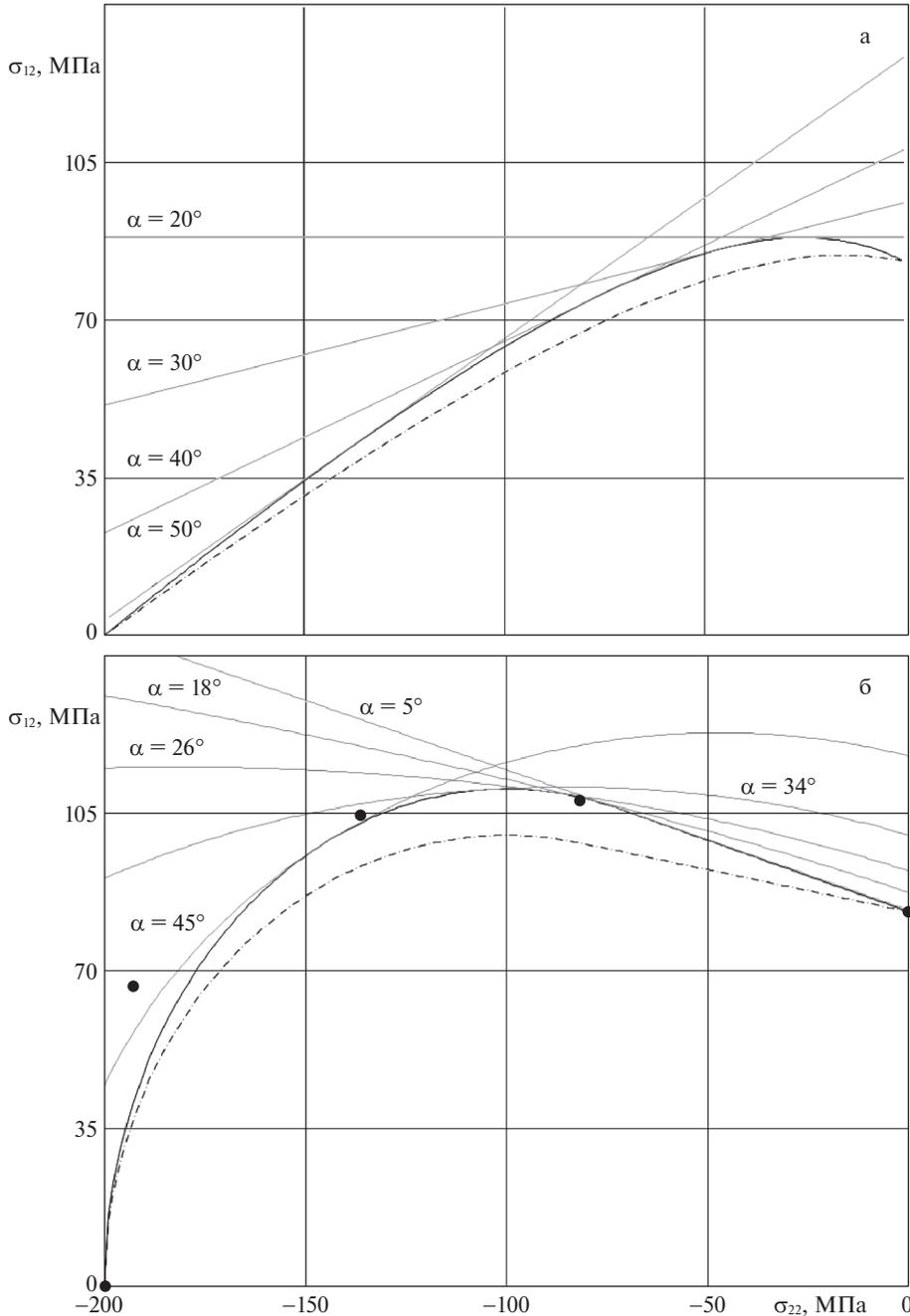


Рис. 2.

изображены кривые прочности для случая $m_t = m_l$ когда угол $\alpha_{\perp}^* \cong 50.3^\circ$ для линейного критерия по формуле (3.10) и для квадратичного критерия согласно формуле (4.4).

Влияние нелинейности обусловленной зависимостью от угла α критерия (2.1) видно на рис. 2а. Характерным является образование максимума сопротивления разруше-

нию при переходе от случая нагружения чисто сдвиговыми напряжениями к случаям нагружения комбинацией сдвиговых и нормальных напряжений. На этом максимуме площадка разрушения составляет с нормалью к плоскости волокон угол равный 20° , локальный максимум σ_{12} реализуется при отношении σ_{22} к σ_{12} равному (-3.3) и превышает S_{12} на 6%. В случае $m_i = m_l$ такой максимум отсутствует.

Квадратичный критерий (2.2) при $m_i \neq m_l$ (рис. 2б, сплошная линия) дает максимум σ_{12} превышающий S_{12} на 33% при $\alpha^* \cong 31.7^\circ$ с отношением $\sigma_{22}/\sigma_{12} \cong -0.9$. При $m_i = m_l$ (рис. 2б, штрихпунктирная линия) также имеет место аналогичный максимум σ_{12} при $\alpha^* \cong 25.3^\circ$, $\sigma_{22}/\sigma_{12} \cong -1$, который больше S_{12} на 20%.

Круглые темные точки на рис. 2б соответствуют данным испытаний [24].

На рис. 2б видно, что квадратичный критерий прочности (4.1) при $m_i \neq m_l$ вполне удовлетворительно согласуется с данными эксперимента.

Заключение. Сформулированы линейный и квадратичный варианты условия прочности, учитывающие влияние нормального напряжения на сопротивление сдвигу на площадке n , соответствующее ортотропному асимметричному закону трения. Приведены уравнения для определения ориентации площадки n , на которой реализуется максимум линейного критерия. Получено точное решение в виде конечной формулы для расчета угла наклона площадки возможного разрушения по квадратичному критерию. Показано, что кривые прочности являются огибающей для семейства линий уровня данных критериев. Определены виды установочных испытаний для нахождения параметров предложенных критериев прочности. Приведены результаты экспериментальной проверки критериев на данных испытаний на разрушение углепластика при двухкомпонентном нагружении комбинациями поперечного сжатия и продольного сдвига. Установлено хорошее соответствие опыту варианта квадратичного критерия прочности, учитывающего влияние нормального напряжения на сопротивление сдвигу, соответствующее ортотропному закону трения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Puck A., Schürmann H. Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models // Compos. Sci. Technol. 1998. V. 58. P. 1045–1067.
2. Гришин В.И., Дзюба А.С., Дударьков Ю.И. Прочность и устойчивость элементов и соединенных авиационных конструкций из композитов. М.: Физматлит, 2013. 272 с.
3. Hütter U., Schelling H., Krauss H. An experimental study to determine the failure envelope of composite materials with tubular specimens under combined loads and comparison between several classical criteria // in: Failure Modes of Composite Materials with Organic Matrices and Other Consequences on Design. Munich: NATO. AGRAD. Conf. Proc. № 163. 1974. P. 13–19.
4. Soden P.D., Hinton M.J., Kaddour A.S. Biaxial test results for strength and deformation of a range of E-glass and carbon fibre reinforced composite laminates: failure exercise benchmark data // Compos. Sci. Technol. 2002. V. 62. P. 1489–1514.
5. Paris F. A Study of Failure Criteria of Fibrous Composite Materials. NASA/CR–210661, 2001. 76 p.
6. Li S., Sitnikova E. A critical review on the rationality of popular failure criteria for composites // Compos. Commun. 2018. V. 8. P. 7–13.
7. Гольденблат И.И., Коннов В.А. Прочность стеклопластиков при сложном напряженном состоянии // Механика полимеров. 1965. № 2. С. 70–78.
8. Tsai S.W., Wu E.M. A general theory of strength for anisotropic materials // J. Compos. Mater. 1971. V. 5. P. 58–80.
9. Hashin Z. Failure criteria for unidirectional fiber composites // J. Appl. Mech. 1980. V. 47. P. 329–334.
10. Зиновьев П.А., Цветков С.В. Инвариантнополиномиальный критерий прочности анизотропных материалов // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 4. С. 140–147.
11. Christensen R.M. Failure criteria for fiber composite materials, the astonishing sixty years search, definitive usable results // Compos. Sci. Technol. 2019. V. 182. 107718. P. 1–7.

12. Гольденблат И.И., Коннов В.А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 192 с.
13. Vasiliev V.V., Morozov E.V. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Amsterdam: Elsevier, 2013. 818 p.
14. Полилов А.Н. Этюды по механике композитов. М.: Физматлит, 2016. 320 с.
15. Олейников А.И. Оценка статической прочности слоистых композитов // Уч. зап. ЦАГИ. 2019. Т. L. № 4. С. 53–66.
16. Hashin Z., Rotem A.A. Fatigue failure criterion for fiber reinforced materials // *J. Compos. Mater.* 1973. V. 7. P. 448–464.
17. Полилов А.Н. Критерии разрушения поверхности раздела в однонаправленных композитах // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 2. С. 115–119.
18. Rabinov Yu.N., Polilov A.N. Strength criteria for fibre – reinforced plastics // *Fracture*. 1977. V. 3. P. 1059–1065.
19. Davila C.G., Camanho P.P., Rose C.A. Failure Criteria for FRP Laminates // *J. Compos. Mater.* 2005. V. 39. P. 323–345.
20. Горячева И.Г. Механика трения. М.: Наука, 2001. 478 с.
21. Zmitrowicz A. Models of kinematics dependent anisotropic and heterogeneous friction // *Int. J. Solids Struct.* 2006. V. 43. P. 4407–4451.
22. Олейников А.И., Кузьмина Т.А. Определение упруго-прочностных характеристик монослоев в композиционном пакете // Уч. зап. ЦАГИ. 2020. Т. LI. № 4. С. 77–86.
23. Puck A. *Festigkeitsanalyse von Faser–Matrix–Laminaten: Modelle für die Praxis*. München Wien: Hanser, 1996. 212 s.
24. Cuntze R., Deska R., Szelinski B. et al. Neue bruchkriterien und festigkeitsnachweise für unidirektionalen faserkunststoffverbund unter mehrachsiger beanspruchung modellbildung und experimente. Düsseldorf: VDI, 1997. 262 s.
25. Kaiser C., Kuhnel E., Obst A. Failure criteria for FRP and CMC: theory, experiments and guidelines // in: *European Conf. on Spacecraft Struct. Mater. Mech. Testing*. ESA. 2005. P. 1–12.
26. Dávila C.G., Camanho P.P. *Failure Criteria for FRP Laminates in Plane Stress*. Hampton: NASA Langley Research Center. NASA/TM-2003-212663, 2003. 28 p.

Strength Criterion Variants of Polymeric Unidirectional Composites by Inter-Fibre Fracture Conditions with there is a Transverse Compression

A. I. Oleinikov^{a,b,#,##}

^a Central Aerohydrodynamic Institute named after N.E. Zhukovsky (TsAGI), Zhukovsky, Russia

^b Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia

[#]e-mail: alexander.oleinikov@tsagi.ru

^{##}e-mail: a.i.oleinikov@mail.ru

When the analyzing strength of structural made of laminated polymer composite materials the fracture criterion of a unidirectional composite is used. A plane fracture in these composites makes a dihedral angle with a plane of fibers. The angle increases with increase in the relation of transverse compression and longitudinal shear. This fracture mode is most unsafe and leads to complete collapse of a composite. Are studied linear and quadratic strength criteria variants which effect of normal stress on ultimate tangential stress corresponds to the anisotropic law of a friction. The formula ruling a slope angle of an eventual failure plane is deduced. Test category for the whole set of criterion parameters are specified and experimental check of the offered criteria is executed.

Keywords: unidirectional composite, polymeric matrix, strength, inter-fibre fracture, anisotropic friction

REFERENCES

1. *Puck A., Schürmann H.* Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models // *Compos. Sci. Technol.*, 1998, vol. 58, pp. 1045–1067.
2. *Grishin V.I., Dzjuba A.S., Dudarkov Ju.I.* Prochnost i ustojchivost elementov i soedinenij aviatcionich konstrukcij iz kompozitov. Moscow: Fizmatlit, 2013. 272 p. (in Russian)
3. *Hütter U., Schelling H., Krauss H.* An experimental study to determine the failure envelope of composite materials with tubular specimens under combined loads and comparison between several classical criteria // in: *Failure Modes of Composite Materials with Organic Matrices and Other Consequences on Design*. Munich: NATO, AGRAD, Conf. Proc., no. 163, 1974, pp. 13–19.
4. *Soden P.D., Hinton M.J., Kaddour A.S.* Biaxial test results for strength and deformation of a range of E-glass and carbon fibre reinforced composite laminates: failure exercise benchmark data // *Compos. Sci. Technol.*, 2002, vol. 62, pp. 1489–1514.
5. *Paris F.* A Study of Failure Criteria of Fibrous Composite Materials. NASA/CR–210661, 2001. 76 p.
6. *Li S., Sitnikova E.* A critical review on the rationality of popular failure criteria for composites // *Compos. Commun.*, 2018, vol. 8, pp. 7–13.
7. *Gol'denblat I.I., Kopnov V.A.* Strength of glass-reinforced plastics in the complex stress state // *Polymer Mech.*, 1966, vol. 1, pp. 54–59.
8. *Tsai S.W., Wu E.M.* A general theory of strength for anisotropic materials // *J. Compos. Mater.*, 1971, vol. 5, pp. 58–80.
9. *Hashin Z.* Failure criteria for unidirectional fiber composites // *J. Appl. Mech.*, 1980, vol. 47, pp. 329–334.
10. *Zinoviev P.A., Tsvetkov S.V.* Invariant polynomial strength criterion for anisotropic materials // *Izv. RAN. MTT*, 1994, no. 4, pp. 140–147. (in Russian)
11. *Christensen R.M.* Failure criteria for fiber composite materials, the astonishing sixty years search, definitive usable results // *Compos. Sci. Technol.*, 2019, vol. 182, 107718, pp. 1–7.
12. *Gol'denblat I.I., Kopnov V.A.* Kriterii prochnosti i plastichnosti konstrukcionih materialov. Moscow: Mashinostroenie, 1968. 192 p. (in Russian)
13. *Vasiliev V.V., Morozov E.V.* Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements. Amsterdam: Elsevier, 2013. 818 p.
14. *Polilov A.N.* Etjudi po mehanike kompozitov. Moscow: Fizmatlit, 2016. 320 p. (in Russian)
15. *Oleinikov A.I.* Assessment of static load strength of laminated composites // *TsAGI Sci. J.*, 2019, vol. 50, no 4, pp. 411–427.
16. *Hashin Z., Rotem A.A.* Fatigue failure criterion for fiber reinforced materials // *J. Compos. Mater.*, 1973, vol. 7, pp. 448–464.
17. *Polilov A.N.* Kriterii razrushenija poverhnosti razdela v odnonapravlenih kompozitah // *Izv. AN SSSR, MTT*, 1978, no. 2, pp. 115–119. (in Russian)
18. *Rabotnov Yu., N., Polilov A.N.* Strength criteria for fibre – reinforced plastics // *Fracture*, 1977, vol. 3, pp. 1059–1065.
19. *Dávila C.G., Camanho P.P., Rose C.A.* Failure criteria for FRP laminates // *J. Compos. Mater.*, 2005, vol. 39, pp. 323–345.
20. *Goryacheva I.G.* Mechanics of Friction Interaction. Moscow: Nauka, 2001. 478 p. (in Russian)
21. *Zmitrowicz A.* Models of kinematics dependent anisotropic and heterogeneous friction // *Int. J. Solids Struct.*, 2006, vol. 43, pp. 4407–4451.
22. *Oleinikov A.I., Kuzmina T.A.* Identification of ply elasticity and strength in laminated composites // *TsAGI Sci. J.*, 2020, vol. 51, pp. 409–421.
23. *Puck A.* Festigkeitsanalyse von Faser–Matrix–Laminaten: Modelle für die Praxis. München Wien: Hanser, 1996. 212 s.
24. *Cuntze R., Deska R., Szelinski B. et al.* Neue bruchkriterien und festigkeitsnachweise für unidirektionalen faserkunststoffverbundunter mehrachsiger beanspruchung modellbildung und experimente. Düsseldorf: VDI, 1997. 262 s.
25. *Kaiser C., Kuhnel E., Obst A.* Failure criteria for FRP and CMC: theory, experiments and guidelines // in: *European Conf. on Spacecraft Struct., Mater. Mech. Testing*. Noordwijk: ESA, 2005, pp. 1–12.
26. *Dávila C.G., Camanho P.P.* Failure Criteria for FRP Laminates in Plane Stress. Hampton: NASA Langley Research Center. NASA/TM-2003-212663, 2003. 28 p.

УДК 539.3

КАПИЛЛЯРНАЯ АДГЕЗИЯ УПРУГИХ ТЕЛ В УСЛОВИЯХ ЧАСТИЧНОГО ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ

© 2022 г. Ю. Ю. Маховская^{1,*}

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: makhovskaya@mail.ru

Поступила в редакцию 03.11.2021 г.

После доработки 10.01.2022 г.

Принята к публикации 21.01.2022 г.

Рассмотрена контактная задача для упругого осесимметричного индентора, форма которого описывается степенной функцией, и упругого полупространства в условиях капиллярной адгезии, т.е. при наличии в зазоре мениска жидкости, стягивающего поверхности вне области контакта. Контактующие тела находятся под действием нормальной и тангенциальной нагрузок в условиях частичного проскальзывания, в области проскальзывания предполагается двучленный закон трения Кулона. В предположении, что материалы индентора и полупространства одинаковы, получены аналитические соотношения для распределения касательных напряжений в контакте, тангенциальной нагрузки и перемещения, а также уравнение для определения размера области сцепления. Проведен анализ контактных характеристик в зависимости от формы индентора, поверхностного натяжения жидкости и капиллярного давления в мениске.

Ключевые слова: капиллярная адгезия, мениск, частичное проскальзывание, трение покоя

DOI: 10.31857/S0032823522020072

1. Введение. Контакт поверхностей во влажной атмосфере при определенных условиях сопровождается капиллярной конденсацией и образованием менисков жидкости, стягивающих отдельные контактирующие микронеровности двух поверхностей или удерживающих на поверхности микрочастицы износа и загрязнений. Силы капиллярной адгезии, возникающие в таких микроменисках, могут достигать значительных величин и существенно влиять на динамическую и статическую силы трения [1], что является одной из причин заедания и поломок в микромеханических системах [2], а также важным фактором в сцеплении биологических материалов [3].

Для моделирования контакта отдельного выступа или частицы износа с контртелом в условиях статического трения рассматривается решение контактной задачи для осесимметричного индентора и упругого полупространства под действием нормальной и тангенциальной сил, когда приложенная тангенциальная сила недостаточно велика, чтобы вызвать полное скольжение, и область контакта делится на зоны сцепления и проскальзывания. Исследование влияния мениска жидкости, окружающего область контакта, на решение такой задачи является целью настоящей работы.

Решение задачи о контакте с частичным проскальзыванием для двух упругих шаров было получено Каттанео [4] и Миндлиным [5] и обобщено для случая произвольных осесимметричных тел в работах Йегера [6] и позже Чивареллы [7], а также обобщено для случая трансверсально изотропных тел [8]. Предположение об идентичности ма-

териалов контактирующих тел позволило рассматривать задачи о нормальном и тангенциальном нагружении отдельно друг от друга. При этом считалось, что в области скольжения нормальные p и касательные τ напряжения связаны одночленным законом трения Амонтона $\tau = \mu p$, где μ – коэффициент трения. В такой постановке были в дальнейшем рассмотрены задачи для различной геометрии взаимодействующих тел, в частности, для текстурированных поверхностей [9, 10].

Влияние адгезии, вызванной межмолекулярными силами, в условиях контакта сухих поверхностей на решение задачи о частичном проскальзывании изучалось в [11–13] для случая плоской задачи и в [14–16] для пространственного осесимметричного контакта. В работах [11–15] решение строилось аналитически в рамках приближения об идентичности материалов взаимодействующих тел, а в [16] – численно для пары различных материалов. Заметим, что локальный закон трения в форме Амонтона $\tau = \mu p$ неприменим для задач с учетом адгезии, в которых контактное давление на части области контакта становится отрицательным, а значит, отрицательным должно быть и касательное напряжение в этой области, что физически невозможно. Поэтому в работах [11, 12, 14] касательное напряжение в области проскальзывания считалось постоянным $\tau = \tau_0$, а в работах [13, 15, 16] использовался закон трения $\tau = \mu p$, но предполагалось, что в области контакта действует только положительное нормальное давление p . Однако, закон трения в виде постоянного касательного напряжения $\tau = \tau_0$ не позволяет учесть влияние нормальных напряжений на касательные. Предположение о только положительном нормальном давлении в области контакта также не является физически достоверным, в частности, оно не позволяет исследовать случай отрицательной внешней нагрузки, когда контакт по конечной области существует благодаря адгезии, и контактные давления могут стать отрицательными в значительной части области контакта или во всей этой области.

В настоящей работе предлагается преодолеть эту трудность путем использования двучленного закона трения Кулона в области проскальзывания:

$$\tau = \tau_0 + \mu p \quad (1.1)$$

где величины τ_0 и μ таковы, чтобы обеспечить неотрицательные касательные напряжения во всей области проскальзывания даже при отрицательных значениях нормального давления p . В работе рассмотрено контактное взаимодействие в условиях частичного проскальзывания с учетом капиллярной адгезии, вызванной наличием в зазоре между телами мениска жидкости.

2. Постановка задачи. Рассматривается контакт упругого полупространства и упругого индентора в присутствии мениска жидкости, стягивающего поверхности вне области контакта. Пусть ось z декартовой системы координат (x, y, z) направлена вглубь упругого полупространства, а плоскость $z = 0$ совпадает с поверхностью полупространства. К индентору сначала приложена внешняя нормальная сила P , действующая вдоль оси z , и после этого приложена тангенциальная сила T , действующая в направлении оси x (рис. 1). Форма индентора описывается функцией $f(x, y) = A(x^2 + y^2)^n$, где $n \geq 1$ – целое число.

Пусть внутри области Ω_c поверхности находятся в контакте, а мениск занимает область Ω_m . Граничные условия при $z = 0$ для давления и перемещения в направлении оси z определяются формой индентора $f(x, y)$ в области контакта и постоянным капиллярным давлением p_0 в области мениска:

$$\begin{aligned} u_z(x, y) &= -f(x, y) + \delta_z; & (x, y) \in \Omega_c \\ p(x, y) &= -p_0; & (x, y) \in \Omega_m \\ p(x, y) &= 0; & (x, y) \notin \Omega_c \cup \Omega_m, \end{aligned} \quad (2.1)$$

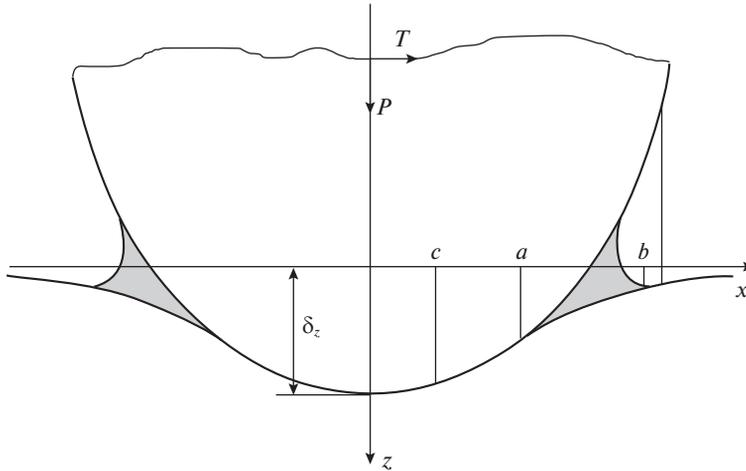


Рис. 1. Схема контакта при наличии капиллярной адгезии в условиях частичного проскальзывания.

где $u_z = u_{z1} + u_{z2}$ — суммарное нормальное смещение поверхностей взаимодействующих тел за счет их деформирования, δ_z — внедрение индентора в полупространство в направлении оси z . При этом капиллярное давление под искривленной поверхностью мениска p_0 определяется формулой Лапласа

$$p_0 = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (2.2)$$

где γ — поверхностное натяжение жидкости, R_1, R_2 — радиусы кривизны мениска в двух взаимно ортогональных плоскостях, определяемые начальной геометрией и упругой деформацией индентора и полупространства.

Считается, что величина тангенциальной силы T недостаточна для того, чтобы вызвать скольжение во всей области контакта Ω_c , т.е. область контакта делится на области сцепления Ω_{st} и проскальзывания Ω_{sl} . При этом граничные условия в направлении оси x определяются тангенциальным перемещением δ_x индентора в области сцепления и законом трения (1.1) в области проскальзывания:

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \delta_x; & (x, y) &\in \Omega_{st} \\ \tau(x, y) &= \tau_0 + \mu p(x, y); & (x, y) &\in \Omega_{sl} \\ \tau(x, y) &= 0; & (x, y) &\notin \Omega_c \end{aligned} \quad (2.3)$$

Условия равновесия в нормальном и тангенциальном направлении имеют вид:

$$P = \iint_{\Omega_c \cup \Omega_m} p(x, y) dx dy, \quad T = \iint_{\Omega_c} \tau(x, y) dx dy \quad (2.4)$$

3. Метод решения. Решение задачи строится в предположении, что упругие постоянные материалов индентора и полупространства одинаковы, и уравнения, связывающие контактные напряжения и перемещения в нормальном и тангенциальном направлениях не зависят друг от друга [7, 18]:

$$\begin{aligned}
 u_z(x, y) &= \frac{1}{\pi E^*} \iint_{\Omega_c \cup \Omega_m} \frac{p(x', y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} dx' dy' \\
 u_x(x, y) &= \frac{1}{\pi E^*} \iint_{\Omega_c} \frac{\tau(x', y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} dx' dy',
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

где $E^* = E/(1 - \nu^2)$, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона материалов индентора и полупространства. Таким образом, задача о нормальном контакте может решаться независимо от задачи о тангенциальном нагружении.

Задача о нормальном нагружении упругого осесимметричного контакта при наличии мениска определяется условиями (2.1) и (2.2), а также первыми уравнениями из (2.4) и (3.1). В этом случае задача является осесимметричной: форма индентора описывается функцией $f(r) = Ar^{2n}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, контактное давление p и перемещение u_z также являются функциями радиальной координаты r , область контакта Ω_c представляет собой круг $r \leq a$, а область мениска Ω_m – кольцо $a \leq r \leq b$.

В предположении, что угол смачивания обеих поверхностей жидкостью равен нулю и пренебрегая силой натяжения пленки на внешней границе мениска, из формулы Лапласа (2.2) можно получить следующее условие, связывающее капиллярное давление с упругими перемещениями границ взаимодействующих тел, их формой и нормальным внедрением [17]:

$$u_z(b) + f(b) - \delta_z = \frac{2\gamma}{p_0} \tag{3.2}$$

Контактная задача о нормальном нагружении осесимметричного индентора, форма которого описывается степенной функцией, с условиями (2.1) и (3.2), а также при условии непрерывности контактного давления на границе области контакта

$$p(a) = -p_0 \tag{3.3}$$

была рассмотрена и решена в [17]. В результате получены следующие соотношения для распределения контактного давления по радиальной координате r

$$p(r) = \frac{nAE^*a^{2n-1}}{\pi^{3/2}} \frac{\Gamma^2(n+1)}{\Gamma^2(n+1/2)} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \sum_{m=1}^n \frac{\Gamma(m-1/2)}{\Gamma(m)} \frac{r^{2(n-m)}}{a^{2(n-m)}} - \frac{2p_0}{\pi} \operatorname{arccotg} \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{b^2 - a^2}} \tag{3.4}$$

нормального внедрения индентора

$$\delta_z = Aa^{2n} \pi^{1/2} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)} - \frac{2p_0}{E^*} \sqrt{b^2 - a^2}, \tag{3.5}$$

внешней нормальной силы

$$P = \frac{2AE^*na^{2n+1}}{\pi^{1/2}} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)} - 2p_0b^2 \left(\arccos \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} \right), \tag{3.6}$$

а также уравнение, следующее из условия (3.2):

$$\begin{aligned}
 \frac{Aa^{2n}}{\pi} \left\{ \left[\frac{\pi^{1/2}\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)} - \frac{b^{2n}}{a^{2n}} \right] \arccos \frac{a}{b} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1} \sum_{k=1}^n \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \frac{a^{2(n-k)}}{b^{2(n-k)}} \right\} + \\
 + \frac{2bp_0}{\pi E^*} \left[1 - \frac{a}{b} - \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} \right] + \frac{2\gamma}{p_0} = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Если внешняя нормальная нагрузка P и капиллярное давление p_0 заданы, то соотношения (3.6) и (3.7) служат в качестве уравнений для численного определения радиуса области контакта a и внешнего радиуса мениска b . После этого распределение контактного давления и внедрение индентора определяются по формулам (3.4) и (3.5), соответственно.

Задача о тангенциальном нагружении задается условиями (2.3) и вторыми из соотношений (2.4) и (3.1). Поскольку распределение нормальных давлений (3.4) зависит только от радиальной координаты r , из условий (2.3) следует, что касательное напряжение τ в области проскальзывания Ω_{sl} и перемещение u_x в области сцепления Ω_{st} также являются функциями только радиальной координаты r , откуда, в силу формы второго из уравнений (3.1), следует осесимметричность решения задачи о тангенциальном нагружении. Пусть область сцепления Ω_{st} представляет собой круг $r \leq c$, а область проскальзывания Ω_{sl} – кольцо $c \leq r \leq a$ (см. рис. 1). Касательное напряжение $\tau(r)$ считается непрерывным на границе областей сцепления и проскальзывания (при $r = c$).

Для определения касательного напряжения в области сцепления воспользуемся теорией Каттанео–Миндлина [4, 5], обобщенной [6, 7] для трехмерного индентора произвольной формы. Представим функцию $\tau(r)$ при $r \leq a$ в виде:

$$\tau(r) = \tau_0 + \mu p(r) - \tau^*(r), \quad (3.8)$$

где для функции дополнительного касательного напряжения $\tau^*(r)$ выполняется условие $\tau^*(r) \equiv 0$ при $r \geq c$. Подставляя выражение (3.8) во второе соотношение (3.1) и переходя в интегралах к полярным координатам [18], получим

$$u_x(r) = \frac{1}{\pi E^*} \int_0^a (\tau_0 + \mu p(r') - \tau^*(r')) \mathbf{K} \left(\frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'} \right) \frac{r' dr'}{r+r'}, \quad (3.9)$$

где $\mathbf{K}(x)$ – полный эллиптический интеграл первого рода. Из первого соотношения (3.1) и граничных условий (2.1) следует

$$\frac{1}{\pi E^*} \int_0^a p(r') \mathbf{K} \left(\frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'} \right) \frac{r' dr'}{r+r'} = -\frac{p_0}{\pi E^*} \int_a^b \mathbf{K} \left(\frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'} \right) \frac{r' dr'}{r+r'} - f(r) + \delta_z \quad (3.10)$$

Подставляя выражение (3.10) в (3.9) и учитывая граничные условия (2.3), а также значение интеграла [18]

$$\int_0^s \mathbf{K} \left(\frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'} \right) \frac{r' dr'}{r+r'} = s \mathbf{E} \left(\frac{r}{s} \right); \quad r \leq s, \quad (3.11)$$

где $\mathbf{E}(x)$ – полный эллиптический интеграл второго рода, получим для функции дополнительного касательного напряжения $\tau^*(r)$ уравнение

$$\frac{1}{\pi E^*} \int_0^c \tau^*(r') \mathbf{K} \left(\frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'} \right) \frac{r' dr'}{r+r'} = -f^*(r) + \delta^*, \quad (3.12)$$

где

$$f^*(r) = \mu f(r) - \frac{4\mu p_0}{\pi E^*} \left[a \mathbf{E} \left(\frac{r}{a} \right) - b \mathbf{E} \left(\frac{r}{b} \right) \right] - \frac{4\tau_0 a}{\pi E^*} \mathbf{E} \left(\frac{r}{a} \right) \quad (3.13)$$

$$\delta^* = \mu \delta_z - \delta_x$$

Поскольку для функции $\tau^*(r)$ выполняется условие $\tau^*(c) = 0$, то интегральное уравнение (3.12) по форме совпадает с интегральным уравнением контактной задачи о внедрении в упругое полупространство осесимметричного штампа заданной формы $f^*(r)$ (3.13) при действии на него нормальной внешней силы, равной по величине

$$T^* = 2\pi \int_0^c r \tau^*(r) dr, \quad (3.14)$$

а значит, для решения уравнения (3.12) можно использовать полученные ранее соотношения для решения задачи о нормальном внедрении осесимметричного штампа в полупространство.

Воспользуемся решением задачи о внедрении осесимметричного штампа заданной формы $f^*(r)$ в упругое полупространство [19]. Полученное выражение для нормального давления под штампом [19], с учетом соотношений (3.12)–(3.14) и (3.8) приобретает вид следующего выражения для искомого касательного напряжения при $r \leq c$

$$\tau(r) = \mu p(r) + \tau_0 - \frac{E^* c^2}{\pi} \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 c^2 - r^2}} \Delta f^*(cxy) dx dy \quad (3.15)$$

Условие для определения нормального внедрения штампа [19], преобразуется в условие для определения тангенциального перемещения δ_x

$$\int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \frac{\partial}{\partial y} (\mu \delta_{zy} - \delta_{xy} - y f^*(cy)) dy = 0 \quad (3.16)$$

Воспользовавшись формулой, полученной Галиным [20] для силы, прижимающей осесимметричный штамп, получим

$$T^* = 2E^* \int_0^c \Delta f^*(r) r \sqrt{c^2 - r^2} dr \quad (3.17)$$

В соотношениях (3.15) и (3.17), Δ – оператор Лапласа в полярных координатах, $\Delta f(r) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) f(r)$. При этом искомая полная тангенциальная сила T , с учетом (3.8) и (3.14), а также условий (2.1), определяется как

$$T = \mu P + \pi \mu p_0 (b^2 - a^2) + \pi a^2 \tau_0 - T^* \quad (3.18)$$

После подстановки выражений (3.13) в соотношения (3.15)–(3.18) и взятия интегралов (используя методы интегрирования [17]), получим окончательно для касательного напряжения в области сцепления $r \leq c$:

$$\begin{aligned} \tau(r) = & \frac{\mu n A E^* \Gamma^2(n+1)}{\pi^{3/2} \Gamma^2(n+1/2)} \left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \sum_{m=1}^n \frac{\Gamma(m-1/2)}{\Gamma(m)} \frac{r^{2(n-m)}}{a^{1-2m}} - \right. \\ & \left. - \sqrt{1 - \frac{r^2}{c^2}} \sum_{m=1}^n \frac{\Gamma(m-1/2)}{\Gamma(m)} \frac{r^{2(n-m)}}{c^{1-2m}} \right) - \\ & - \frac{2\mu p_0}{\pi} \left(\operatorname{arccctg} \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{b^2 - a^2}} + \operatorname{arccctg} \sqrt{\frac{c^2 - r^2}{b^2 - c^2}} \right) + \frac{2(\tau_0 + \mu p_0)}{\pi} \operatorname{arccctg} \sqrt{\frac{c^2 - r^2}{a^2 - c^2}}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

а также для тангенциальных перемещения и силы:

$$\delta_x = \frac{\mu A \pi^{1/2} \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)} (a^{2n} - c^{2n}) - \frac{2\mu p_0}{E^*} (\sqrt{b^2 - a^2} + \sqrt{b^2 - c^2}) + \frac{2(\tau_0 + \mu p_0)}{E^*} \sqrt{a^2 - c^2} \quad (3.20)$$

$$T = \frac{2\mu A E^* n \Gamma(n+1)}{\pi^{1/2} \Gamma(n+3/2)} (a^{2n+1} - c^{2n+1}) - 2\mu p_0 b^2 \left(\arccos \frac{a}{b} - \arcsin \frac{c}{b} + \frac{a}{b} \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} + \frac{c}{b} \sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}} \right) + 2a^2 (\tau_0 + \mu p_0) \left(\arccos \frac{c}{a} + \frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} \right) + \pi \mu p_0 (b^2 - 2a^2) \quad (3.21)$$

Предельная тангенциальная сила, при которой начинается полное скольжение индентора относительно полупространства, получается из (3.21) при $c = 0$:

$$T_{\text{lim}} = \mu P + \pi a^2 \tau_0 + \pi \mu p_0 (b^2 - a^2), \quad (3.22)$$

где P определяется выражением (3.6).

Если величины a и b определены решением уравнений (3.6), (3.7) задачи о нормальном нагружении, то при заданной тангенциальной силе T численное решение уравнения (3.21) позволяет определить радиус области сцепления c , после чего касательные напряжения в области сцепления и тангенциальное перемещение определяются выражениями (3.19) и (3.20).

В случае $n = 1$ и $A = 1/(2R)$ (индентор в форме параболоида вращения с радиусом кривизны вершины R) и $\mu = 0$ (трение в зоне проскальзывания задано законом $\tau(r) = \tau_0$) соотношения (3.19)–(3.21) совпадают с выражениями [14].

4. Результаты расчета. На рис 2,а приведены распределения безразмерного нормального давления p/E^* по безразмерной радиальной координате $rA^{1/(2n-1)}$, где $A^{-1/(2n-1)}$ – характерный размер индентора. Результаты приведены для двух форм индентора, описываемых различными показателями степени n функции $f(r) = Ar^{2n}$, и трех величин безразмерного капиллярного давления в мениске p_0/E^* . Остальные безразмерные параметры задачи считались постоянными – безразмерное поверхностное натяжение жидкости $\gamma A^{1/(2n-1)}/E^* = 10^{-4}$ и внешняя нормальная сила $PA^{2/(2n-1)}/E^* = 10^{-3}$, действующая на индентор. Увеличение показателя n соответствует “уплощению” вершины индентора и, вследствие этого, расширению как области контакта, так и области мениска (область постоянного отрицательного давления на графике). Возрастание величины капиллярного давления в мениске приводит к увеличению размера области контакта и возрастанию контактного давления, что более выражено при больших значениях n , при этом ширина кольцевой области, занятой мениском, уменьшается.

На рис. 2,б приведены распределения безразмерного касательного напряжения τ/E^* , соответствующие тем же величинам параметров, что и распределения давления на рис. 2,а. Параметры закона трения (1.1) – $\mu = 0.5$ и $\tau_0/E^* = 0.01$ – выбраны таким образом, чтобы касательные напряжения в области контакта оставались положительными, несмотря на то, что нормальные давления становятся отрицательными вблизи границы области контакта (см. рис. 2,а). При этом графики для $n = 1$ рассчитаны при значении

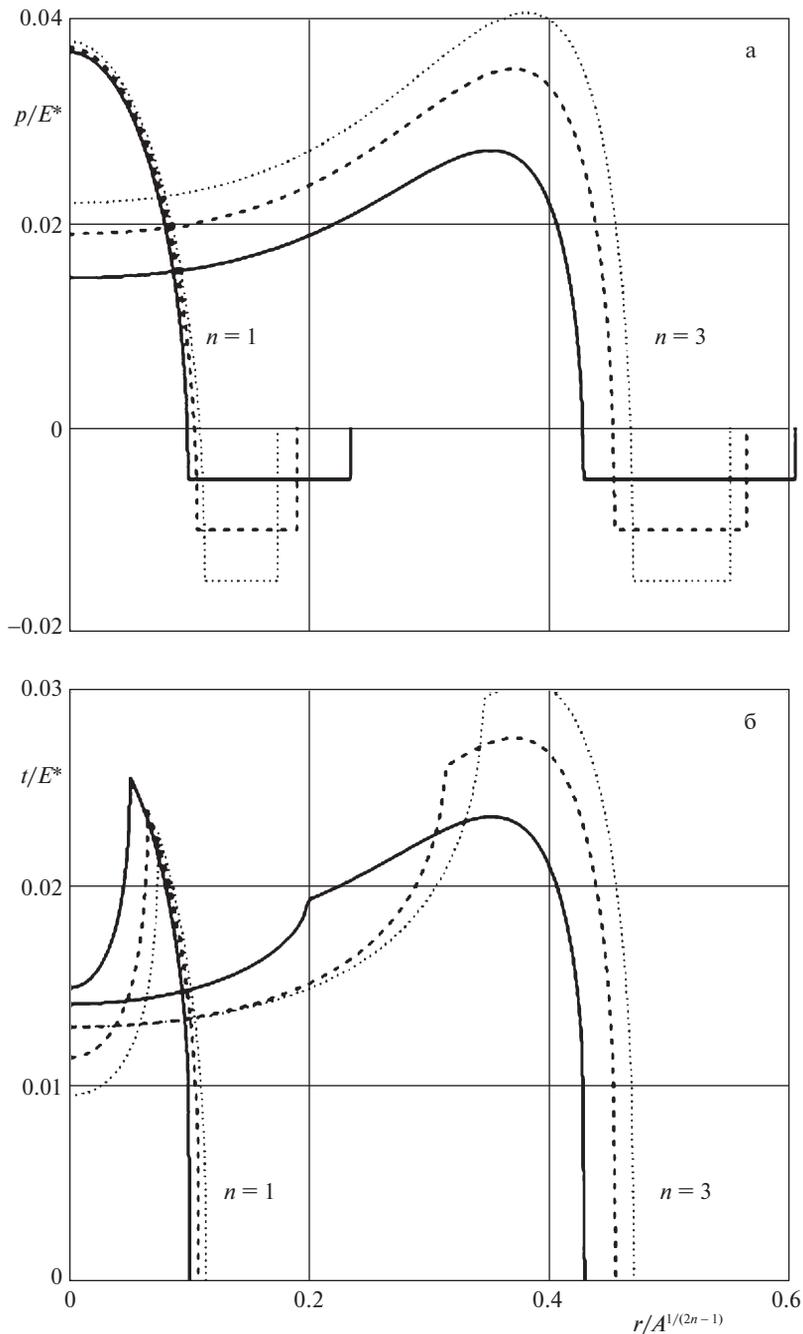


Рис. 2. Распределение нормального (а) и касательного (б) контактных напряжений для двух различных форм индентора ($n = 1$ и 3) и трех значений капиллярного давления: $p_0/E^* = 0.005$ (сплошные линии), 0.010 (штриховые линии) и 0.015 (пунктирные линии).

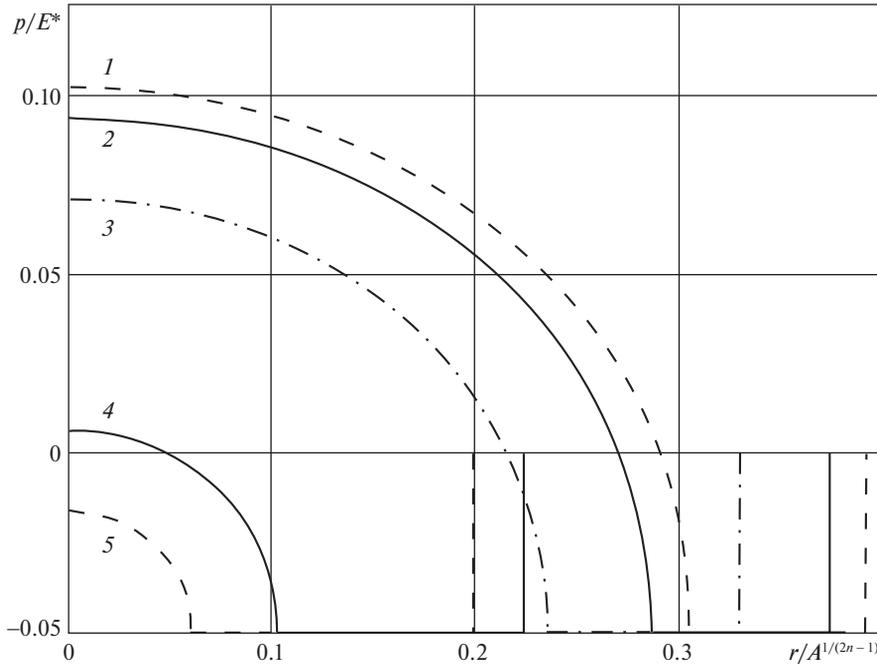


Рис. 3. Распределение нормального давления для различных значений внешней нормальной силы: $PA^{2/(2n-1)}/E^* = 0.06$ (кривая 1), 0.04 (кривая 2), 0.01 (кривая 3), -0.04 (кривая 4) и -0.05 (кривая 5).

безразмерной тангенциальной силы, действующей на индентор, $TA^{2/(2n-1)}/E^* = 6 \times 10^{-4}$, а для $n = 3$ — при $TA^{2/(2n-1)}/E^* = 7 \times 10^{-3}$. Точки излома на графиках распределения касательного напряжения соответствуют границе областей сцепления и проскальзывания. Результаты расчета показывают, что возрастание величины капиллярного давления в мениске приводит к расширению области сцепления, при этом величина максимального касательного напряжения ведет себя по-разному в зависимости от формы индентора: при $n = 1$ (индентор параболической формы) максимальное касательное напряжение убывает с возрастанием капиллярного давления, а при $n \geq 1$ (инденторы с “уплощенной” вершиной) максимальное касательное напряжение возрастает вместе с капиллярным давлением.

Чтобы проиллюстрировать влияние внешней нормальной силы на контактные характеристики, на рис. 3 приведены распределения контактного давления для различных значений безразмерной силы $PA^{2/(2n-1)}/E^*$. Графики построены при $n = 1$ и $\gamma A^{1/(2n-1)}/E^* = 10^{-3}$. Увеличение внешней нагрузки приводит к возрастанию площади контакта и максимального контактного давления, при этом, благодаря мениску, контакт существует не только при положительной (вдавливающей индентор) силе, но и в некотором диапазоне отрицательных (отрывающих индентор) внешних нагрузок. Контактные давления отрицательны вблизи границы области контакта, при уменьшении нагрузки область отрицательных давлений расширяется (кривые от 1 до 4). При некотором значении отрицательной нагрузки контактные давления могут стать отрицательными во всей области контакта (кривая 5).

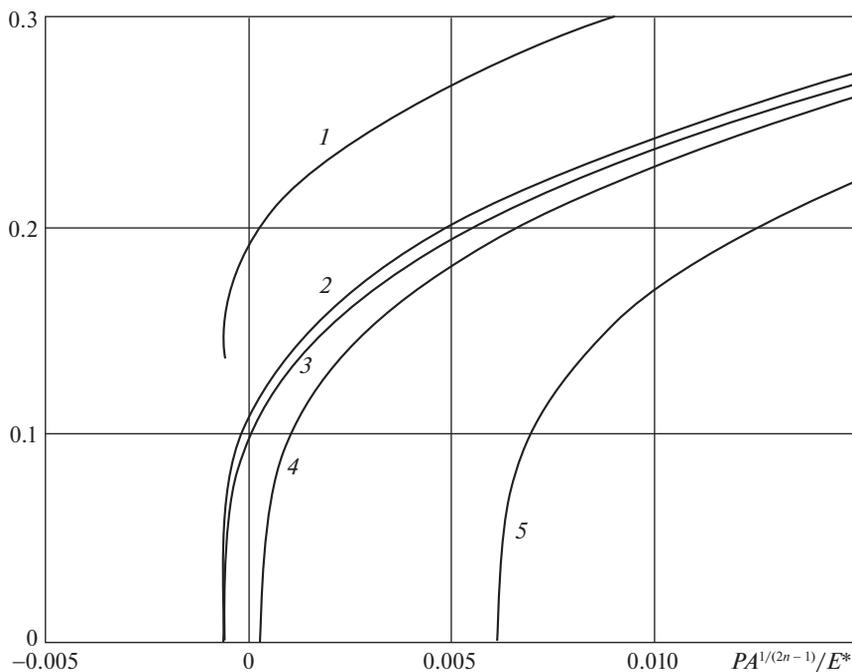


Рис. 4. Зависимость безразмерных радиуса мениска $bA^{1/(2n-1)}$ (кривая 1), области контакта $aA^{1/(2n-1)}$ (кривая 2) и области сцепления $cA^{1/(2n-1)}$ (кривые 3–5) от внешней нормальной нагрузки; кривые 3–5 соответствуют тангенциальной нагрузке $TA^{2/(2n-1)}/E^* = 10^{-4}$; 10^{-3} и 5×10^{-3} .

На рис. 4 показаны безразмерные радиусы областей контакта $aA^{1/(2n-1)}$ и мениска $bA^{1/(2n-1)}$ в зависимости от безразмерной внешней нормальной силы $PA^{2/(2n-1)}/E^*$ при величине капиллярного давления $p_0/E^* = 0.01$ и $n = 1$. Параметры закона трения и безразмерное поверхностное натяжение жидкости равны тем же значениям, при которых построены кривые на рис. 2. Поскольку решение задачи о нормальном нагружении получено независимо от задачи о тангенциальном нагружении, размеры областей контакта и мениска не зависят от величины тангенциальной силы. Однако, размер области сцепления зависит от этой величины. На рис. 3 кривыми 3–5 показаны зависимости радиуса области сцепления от нормальной нагрузки для трех значений тангенциальной силы. При относительно малой величине тангенциальной силы область сцепления существует как при положительных, так и в некоторой области отрицательных значениях нормальной нагрузки (кривая 3). При увеличении тангенциальной силы область сцепления существует, только начиная с некоторого положительного значения нормальной нагрузки, которое возрастает с возрастанием тангенциальной силы (кривые 4 и 5).

На рис. 5 представлены зависимости тангенциальной силы T , отнесенной к предельной силе T_{lim} , при которой начинается полное скольжение, от отношения радиусов областей сцепления и контакта c/a для двух форм индентора, определяемых показателем n , и различных значениях безразмерного поверхностного натяжения жидкости $\gamma A^{1/(2n-1)}/E^*$. Результаты получены при величинах безразмерной нормальной силы

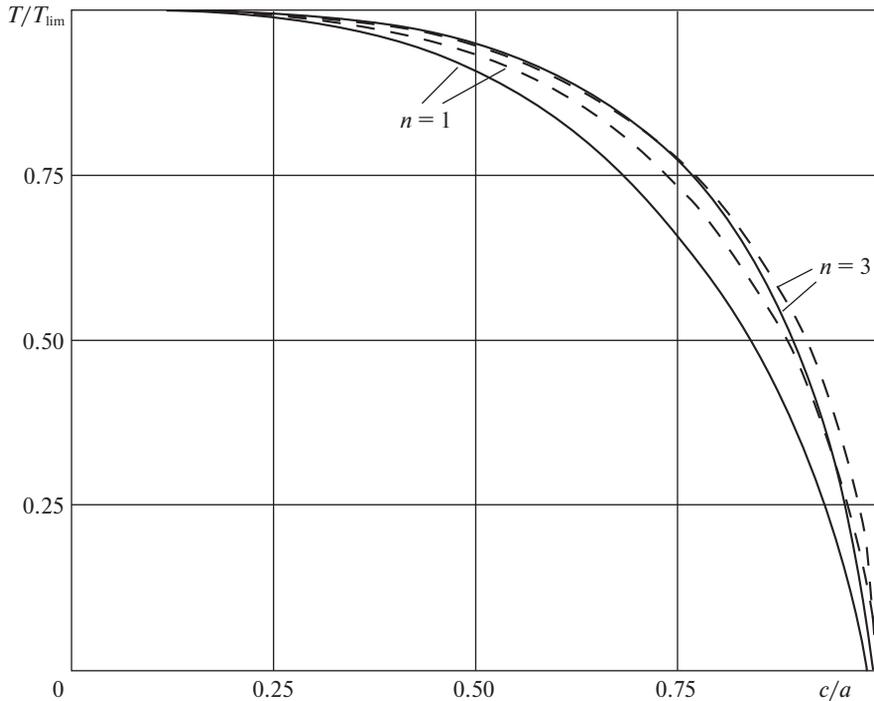


Рис. 5. Тангенциальная сила, отнесенная к предельной силе, в зависимости от относительного радиуса области сцепления для двух различных форм индентора ($n = 1$ и 3) и двух значений безразмерного поверхностного натяжения жидкости: $\gamma A^{1/(2n-1)}/E^* = 10^{-5}$ (сплошные линии) и 10^{-3} (штриховые линии).

$PA^{2/(2n-1)}/E^* = 0$, капиллярного давления $p_0/E^* = 0.1$ и при параметрах закона трения $\mu = 0.5$ и $\tau_0/E^* = 0.1$. По мере увеличения тангенциальной силы T , относительный радиус области сцепления c/a убывает вплоть до наступления полного скольжения, когда $T = T_{\text{lim}}$ и $c = a$. При этом увеличение показателя n приводит к более медленному убыванию c/a при малых T и более быстрому – при больших T , близких к T_{lim} . Увеличение поверхностного натяжения жидкости (или уменьшение модуля упругости взаимодействующих тел) приводит к увеличению зоны сцепления; этот эффект более заметен при $n = 1$, т.е., для индентора параболической формы, чем для форм с уплощенной вершиной.

На рис. 6 показаны графики внешнего радиуса мениска b и радиуса области сцепления c , отнесенные к радиусу области контакта a , в зависимости от величины безразмерного капиллярного давления в мениске p_0/E^* при безразмерном поверхностном натяжении $\gamma A^{1/(2n-1)}/E^* = 10^{-4}$, нормальной нагрузке $PA^{2/(2n-1)}/E^* = 10^{-4}$ и параметрах закона трения $\mu = 0.5$ и $\tau_0/E^* = 0.01$, а также при двух разных показателях n , характеризующих форму индентора. Графики b/a расположены в верхней половине рисунка, а графики c/a – в нижней, поскольку во всем диапазоне значений параметров задачи выполняется $b/a \geq 1$, $c/a \leq 1$ (см. рис. 1). Величина b/a определяется решением задачи о нормальном нагружении (3.6), (3.7), и поэтому не зависит от величины тангенциаль-

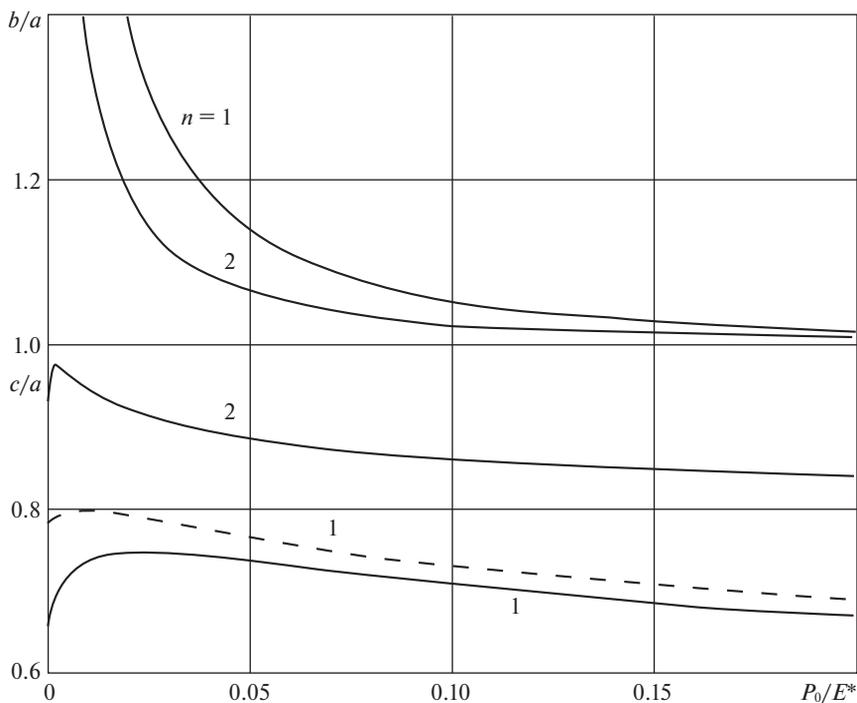


Рис. 6. Внешний радиус мениска (кривые в верхней половине рисунка) и радиус области сцепления (кривые в нижней половине), отнесенные к радиусу области контакта, в зависимости от капиллярного давления для двух различных форм индентора ($n = 1$ и 2) и двух значений тангенциальной силы $TA^{2/(2n-1)}/E^* = 5 \times 10^{-4}$ (сплошные линии) и 4×10^{-4} (штриховая линия).

ной силы. Графики величины c/a на рис. 6 построены для двух значений тангенциальной силы.

Результаты, представленные на рис. 6, показывают, что при увеличении величины капиллярного давления в мениске величина b/a уменьшается, т.е. уменьшается ширина кольцевой области, занятой мениском. Таким образом, увеличение адгезионного давления, стягивающего поверхности, сопровождается уменьшением области, по которой действует это давление. При этом относительный радиус области сцепления монотонно зависит от p_0/E^* : при очень малых величинах капиллярного давления величина c/a резко возрастает, достигает максимума и плавно уменьшается при дальнейшем повышении капиллярного давления p_0/E^* . Увеличение показателя n (“уплощение” вершины индентора) приводит к уменьшению ширины мениска, но к увеличению радиуса области сцепления по отношению к контактному радиусу, при этом максимум c/a сдвигается в сторону меньших p_0/E^* . Увеличение тангенциальной нагрузки приводит к уменьшению относительного радиуса области сцепления c/a , при этом ее максимум сдвигается в сторону больших значений капиллярного давления p_0/E^* .

Безразмерная величина $T_{\text{lim}} A^{2/(2n-1)}/E^*$ предельной тангенциальной силы, при которой возникает переход к полному скольжению, показана на рис. 7 как функция безразмерного капиллярного давления p_0/E^* для трех значений нормальной нагрузки —

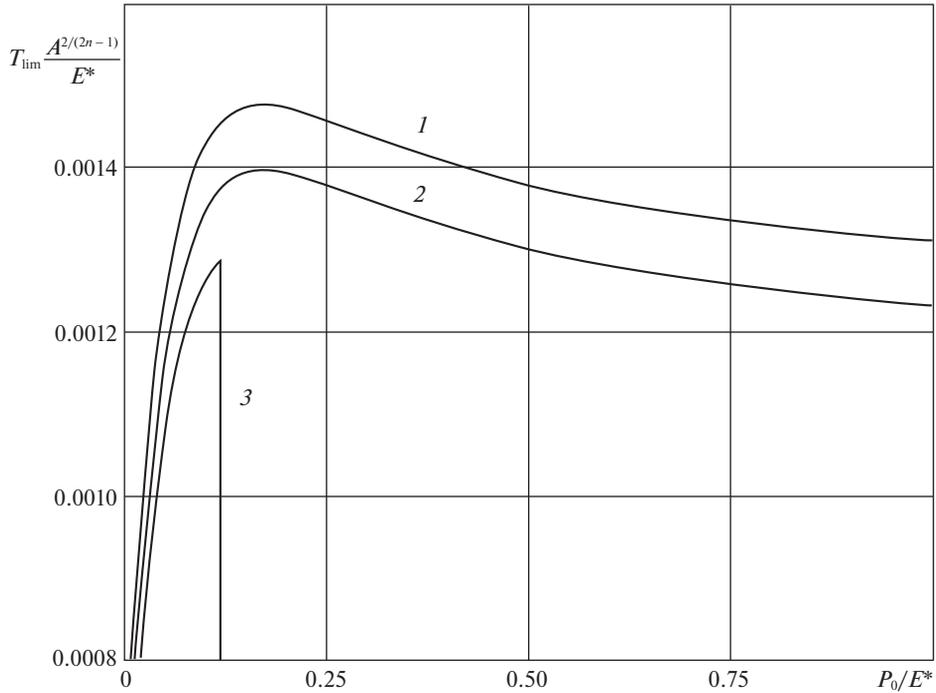


Рис. 7. Предельная тангенциальная сила в зависимости от капиллярного давления для трех значений нормальной силы: $PA^{2/(2n-1)}/E^* = 10^{-4}$ (кривая 1), 0 (кривая 2), -10^{-4} (кривая 3).

положительной (прижимающей индентор к полупространству), нулевой и отрицательной (отрывающей индентор от полупространства). Зависимость предельной тангенциальной силы от капиллярного давления также немонотонна. Контакт существует при нулевых и отрицательных нагрузках благодаря действию капиллярной адгезии. Однако, при отрицательной нагрузке увеличение капиллярного давления p_0/E^* может приводить к разрыву контакта (кривая 3).

Заметим, что для мениска, образовавшегося за счет капиллярной конденсации из окружающего воздуха и находящегося с ним в термодинамическом равновесии, капиллярное давление определяется уравнением Кельвина [18]

$$p_0 = -\frac{R_g T_0}{V_m} \ln H, \quad (3.1)$$

где T_0 – абсолютная температура, R_g – универсальная газовая постоянная, V_m – молярный объем жидкости, H – относительная влажность окружающего воздуха. Уравнение (3.1) описывает монотонное убывание величины p_0 с возрастанием относительной влажности H . Таким образом, в случае адгезии, вызванной капиллярной конденсацией из атмосферы, величины, немонотонно зависящие от капиллярного давления p_0 (относительный радиус области сцепления c/a и предельная тангенциальная сила T_{lim}), будут немонотонно зависеть и от влажности H – возрастать с увеличением H до некоторого значения влажности, а затем убывать.

Заключение. Построено решение контактной задачи о нормальном и тангенциальном нагружении осесимметричного индентора, форма которого описывается степенной функцией, в контакте с упругим полупространством из такого же материала при наличии капиллярной адгезии. Задача рассмотрена в условиях частичного проскальзывания, когда область контакта делится на зоны сцепления и проскальзывания, при этом в области проскальзывания действует двучленный закон трения. Получены аналитические выражения для касательных напряжений в области сцепления, внешней тангенциальной нагрузки и тангенциального перемещения индентора, а также для предельной тангенциальной силы, при которой происходит переход к полному скольжению. Исследовано влияние на эти контактные характеристики формы индентора, поверхностного натяжения жидкости и капиллярного давления в мениске.

Установлено, в частности, что увеличение показателя n степенной функции, описывающей форму индентора (“уплощение” вершины индентора) и увеличение поверхностного натяжения жидкости приводят к возрастанию области сцепления и предельной тангенциальной силы, необходимой для перехода к полному скольжению. При этом величина предельной тангенциальной силы немонотонно зависит от капиллярного давления в мениске, определяемого относительной влажностью окружающего воздуха.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 21-58-52006.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sun Y., Song C., Liu Z., et al. Effect of relative humidity on the tribological/conductive properties of Cu/Cu rolling contact pairs // *Wear*. 2019. V. 436. 203023.
2. Maboudian R., Ashurst W.R., Carraro C. Tribological challenges in micromechanical systems // *Tribol. Lett.* 2002. V. 12. P. 95–100.
3. Klaassen M., de Vries E.G., Masen M.A. The static friction response of non-glabrous skin as a function of surface energy and environmental conditions // *Biotribol.* 2017. V. 11. P. 124–131.
4. Cattaneo C. Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi // *Rendiconti dell'Accademia nazionale dei Lincei*. 1938. V. 27. P. 342–348.
5. Mindlin R.D. Compliance of elastic bodies in contact // *ASME Trans. J. Appl. Mech.* 1949. V. 16. P. 259–268.
6. Jäger J. Axi-symmetric bodies of equal material in contact under torsion or shift // *Arch. Appl. Mech.* 1995. V. 65. P. 478–487.
7. Ciavarella M. Tangential loading of general three-dimensional contacts // *ASME Trans. J. Appl. Mech.* 1998. V. 65. № 4. P. 998–1003.
8. Argatov I., Mishuris G. Tangential contact of elastically similar bodies // in: *Indentation Testing of Biological Materials*. Cham: Springer, 2018. P. 129–146.
9. Горячева И.Г., Маланчук Н.И., Мартыняк Р.М. Контактное взаимодействие тел с периодическим рельефом при частичном проскальзывании // *ПММ*. 2012. Т. 76. Вып. 5. С. 695–709.
10. Lyubicheva A.N., Tsukanov I.Y. The influence of 2D periodic surface texture on the partial slip problem for elastic bodies // *Europ. J. Mech. A*. 2022. V. 91. 104405.
11. Sari O.T., Adams G.G., Muftu S. Nano-scale effects in the sliding and rolling of a cylinder on a substrate // *ASME Trans. J. Appl. Mech.* 2005. V. 72. № 5. P. 633–640.
12. Adams G.G. Stick, partial slip and sliding in the plane strain micro contact of two elastic bodies // *R. Soc. Open Sci.* 2014. V. 1. 140363.
13. Yan J., Huang G. A double-Hertz model for adhesive contact between cylinders under inclined forces // *Proc. R. Soc. A*. 2019. V. 475. 20180589.
14. Savkoor A.R. *Dry Adhesive Friction of Elastomers: A Study of the Fundamental Mechanical Aspects*. Delft: Univ. Technol., 1987.
15. Popov V.L., Dimaki A.V. Friction in an adhesive tangential contact in the Coulomb-Dugdale approximation // *J. Adhesion*. 2017. V. 93. № 14. P. 1131–1145.
16. Bazrafshan M., Rooij M.B., Schipper D.J. On the role of adhesion and roughness in stick-slip transition at the contact of two bodies: A numerical study // *Tribol. Int.* 2018. V. 121. P. 381–388.

17. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю. Контактное взаимодействие упругих тел при наличии капиллярной адгезии // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 1. С. 128–137.
18. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
19. Довнорович В.И., Яшин В.Ф. Некоторые пространственные задачи теории упругости. Гомель: БИИЖТ, 1961. 55 с.
20. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
21. Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М. Поверхностные силы. М.: Наука, 1985. 398 с.

Capillary Adhesion of Elastic Bodies in the Conditions of Partial Slip

Yu. Yu. Makhovskaya^{a,#}

^a *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: makhovskaya@mail.ru*

A contact problem is considered for an elastic axisymmetric indenter, whose shape is described by a power law function, and the elastic half-space in the conditions of capillary adhesion, i.e., in the presence of a liquid bridge outside the contact region. The contacting bodies are subjected to normal and tangential loads in the conditions of partial slip, the two-term Coulomb friction law being assumed in the slip region. Under the assumption of similar materials of the indenter and half-space, analytic relations are obtained for the tangential stress distribution in the contact region, tangential force and displacement, as well as an equation for the determination of the stick region radius. The contact characteristics are analyzed depending on the indenter shape, surface tension of the liquid, and capillary pressure in the meniscus.

Keywords: capillary adhesion, meniscus, partial slip, static friction

REFERENCES

1. Sun Y., Song C., Liu Z. et al. Effect of relative humidity on the tribological/conductive properties of Cu/Cu rolling contact pairs // *Wear*, 2019, vol. 436, 203023.
2. Maboudian R., Ashurst W.R., Carraro C. Tribological challenges in micromechanical systems // *Tribol. Lett.*, 2002, vol. 12, pp. 95–100.
3. Klaassen M., de Vries E.G., Masen M.A. The static friction response of non-glabrous skin as a function of surface energy and environmental conditions // *Biotribol.*, 2017, vol. 11, pp. 124–131.
4. Cattaneo C. Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi // *Rendiconti dell'Accademia nazionale dei Lincei*, 1938, vol. 27, pp. 342–348.
5. Mindlin R.D. Compliance of elastic bodies in contact // *ASME Trans. J. Appl. Mech.*, 1949, vol. 16, pp. 259–268.
6. Jäger J. Axi-symmetric bodies of equal material in contact under torsion or shift // *Arch. Appl. Mech.*, 1995, vol. 65, pp. 478–487.
7. Ciavarella M. Tangential loading of general three-dimensional contacts // *ASME Trans. J. Appl. Mech.*, 1998, vol. 65, no. 4, pp. 998–1003.
8. Argatov I., Mishuris G. Tangential contact of elastically similar bodies // in: *Indentation Testing of Biological Materials*. Cham: Springer, 2018, pp. 129–146.
9. Goryacheva I.G., Malanchuk N.I., Martynyak R.M. Contact interaction of bodies with periodic relief during partial slip // *JAMM*, 2012, vol. 76, no. 5, pp. 621–630.
10. Lyubicheva A.N., Tsukanov I.Y. The influence of 2D periodic surface texture on the partial slip problem for elastic bodies // *Eur. J. Mech. A*, 2022, vol. 91, 104405.
11. Sari O.T., Adams G.G., Muftu S. Nano-scale effects in the sliding and rolling of a cylinder on a substrate // *ASME Trans. J. Appl. Mech.*, 2005, vol. 72, no. 5, pp. 633–640.
12. Adams G.G. Stick, partial slip and sliding in the plane strain micro contact of two elastic bodies // *R. Soc. Open Sci.*, 2014, vol. 1, 140363.
13. Yan J., Huang G. A double-Hertz model for adhesive contact between cylinders under inclined forces // *Proc. R. Soc. A*, 2019, vol. 475, 20180589.

14. *Savkoor A.R.* Dry Adhesive Friction of Elastomers: A Study of the Fundamental Mechanical Aspects. Delft: Univ. Technol., 1987.
15. *Popov V.L., Dimaki A.V.* Friction in an adhesive tangential contact in the Coulomb-Dugdale approximation // *J. Adhesion*, 2017, vol. 93, no. 14, pp. 1131–1145.
16. *Bazrafshan M., Rooij M.B., Schipper D.J.* On the role of adhesion and roughness in stick-slip transition at the contact of two bodies: A numerical study // *Tribol. Int.*, 2018, vol. 121, pp. 381–388.
17. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Y.Y.* Capillary adhesion in the contact between elastic solids // *JAMM*, 1999, vol. 63, no. 1, pp. 117–125.
18. *Johnson K.* Contact Mechanics. Cambridge: Univ. Press, 1985. 452 p.
19. *Dovnorovich V.I., Yashin V.E.* Some Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity. (Nekotorye Prostranstvennyye Zadachi Teorii Uprugosti) Gomel: Belvr. Inst. Inzh. Zheleznodor. Trans., 1961. 55 p. (in Russian)
20. *Galín L.A.* Contact Problems. The Legacy of L.A. Galin. Series: Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 155 / Ed. by *Gladwell G.M.L.* Springer, 2008. 324 p.
21. *Derjaguin B.V., Churaev N.V., Muller V.M.* Surface Forces. (Poverkhnostnye sily) Moscow: Nauka, 1985. 398 p. (in Russian).

УДК 539.3

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ЭЛЛИпсоИДАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ УЧЕТЕ СМЕЩЕНИЯ КАК ЖЕСТКОГО ЦЕЛОГО

© 2022 г. А. Ш. Джабраилов^{1,*}, А. П. Николаев¹, Ю. В. Клочков¹,
Н. А. Гуреева², Т. Р. Ищанов¹

¹ ФГБОУ ВО Волгоградский государственный аграрный университет, Волгоград, Россия

² ФГБОУ ВО Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, Россия

*e-mail: arsen82@yandex.ru

Поступила в редакцию 30.03.2021 г.

После доработки 06.12.2021 г.

Принята к публикации 15.12.2021 г.

Для прочностного расчета эллипсоидальной оболочки при использовании непрерывной параметризации срединной поверхности разработан конечный элемент четырёхугольной формы, являющийся фрагментом срединной поверхности эллипсоида. В качестве узловых неизвестных приняты перемещения узловых точек и их производные. Для получения аппроксимирующих функций искомых величин внутренней точки конечного элемента через узловые неизвестные использованы традиционные аппроксимирующие выражения вектора перемещения внутренней точки конечного элемента через векторы перемещений узлов элемента и производные этих векторов. При координатном преобразовании использованы матричные соотношения между базисными векторами узловых точек и векторами базиса внутренней точки конечного элемента, реализация которых позволяет аппроксимирующие выражения между векторными величинами представить в виде аппроксимирующих функций между компонентами вектора перемещения внутренней точки конечного элемента и компонентами векторов перемещений его узловых точек.

На конкретном примере показано, что использование полученных аппроксимирующих функций позволяет учитывать смещение конечного элемента как абсолютно твердого тела. Полученные аппроксимирующие функции приводят к более быстрой сходимости результатов и при отсутствии смещения как жесткого целого.

Ключевые слова: оболочка, тензор деформаций, конечный элемент, вектор перемещения, векторная аппроксимация, матрица жесткости, тензор напряжений

DOI: 10.31857/S0032823522020059

1. Введение. На сегодняшний день одним из самых распространенных и перспективных типов конструкций являются тонкостенные оболочки. Они находят весьма разнообразное применение в широком спектре инженерных сооружений. В настоящее время вопросы напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций изучены достаточно глубоко, а теория оболочек получила законченные очертания [1–3]. В основном все расчеты оболочечных конструкций выполняются с помощью численных методов. Практически безальтернативным здесь является метод конечных элементов (МКЭ), развитию и совершенствованию которого посвящены работы многих отечественных и зарубежных авторов [4–11]. Обычно в МКЭ каждая компонента вектора перемещения внутренней точки конечного элемента аппроксимируется через узловые значения этой же компоненты независимо от других [12, 13],

Нормаль к срединной поверхности определяется векторным произведением

$$\mathbf{a}_3^0 = \frac{\mathbf{a}_1^0 \times \mathbf{a}_2^0}{|\mathbf{a}_1^0 \times \mathbf{a}_2^0|} = \frac{u_1}{u} \mathbf{i} + \frac{u_2}{u} \mathbf{j} + \frac{u_3}{u} \mathbf{k}, \quad (2.3)$$

где $u_1 = bc \sin T \cos T$; $u_2 = ac \sin t \cos^2 T$; $u_3 = ab \cos t \cos^2 T$; $u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

Зависимости (2.2) и (2.3) представляются в матричном виде

$$\left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1} = [\boldsymbol{\tau}(T, t)]_{3 \times 3} \left\{ \mathbf{i} \right\}_{3 \times 1}; \quad \left\{ \mathbf{i} \right\}_{3 \times 1} = [\boldsymbol{\tau}(T, t)]_{3 \times 3}^{-1} \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1}, \quad (2.4)$$

где $\left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \mathbf{a}_1^0 \mathbf{a}_2^0 \mathbf{a}_3^0 \right\}_{1 \times 3}$; $\left\{ \mathbf{i} \right\}_{1 \times 3}^T = \{ijk\}$.

Производные базисных векторов (2.4) произвольной точки срединной поверхности можно представить компонентами в этом же базисе матричными соотношениями

$$\left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1, T} = [\boldsymbol{\tau}(T, t)_{,T}]_{3 \times 3} \left\{ \mathbf{i} \right\}_{3 \times 1} = [\boldsymbol{\tau}(T, t)_{,T}]_{3 \times 3} [\boldsymbol{\tau}(T, t)]_{3 \times 3}^{-1} \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1} = [M]_{3 \times 3} \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1} \quad (2.5)$$

$$\left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1, t} = [\boldsymbol{\tau}(T, t)_{,t}]_{3 \times 3} \left\{ \mathbf{i} \right\}_{3 \times 1} = [\boldsymbol{\tau}(T, t)_{,t}]_{3 \times 3} [\boldsymbol{\tau}(T, t)]_{3 \times 3}^{-1} \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1} = [N]_{3 \times 3} \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1},$$

где $\left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{1 \times 3, T}^T = \left\{ \mathbf{a}_{1,T}^0 \mathbf{a}_{2,T}^0 \mathbf{a}_{3,T}^0 \right\}_{1 \times 3}$; $\left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{1 \times 3, t}^T = \left\{ \mathbf{a}_{1,t}^0 \mathbf{a}_{2,t}^0 \mathbf{a}_{3,t}^0 \right\}_{1 \times 3}$.

Положения точек M , $M^{0\xi}$ и M^ξ описываются радиус-векторами

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^0 + \mathbf{v}; \mathbf{R}^{0\xi} = \mathbf{R}^0 + \xi \mathbf{a}_3^0, \quad \mathbf{R}^\xi = \mathbf{R}^{0\xi} + \mathbf{v} + \xi (\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_3^0) \quad (2.6)$$

Входящий в (2.6) вектор перемещения \mathbf{v} определяется компонентами в исходном базисе точки M^0

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{a}_i^0 \quad (2.7)$$

Дифференцированием (2.7) с учетом (2.5) определяются производные вектора \mathbf{v}

$$\mathbf{v}_{, \alpha} = z_{\alpha}^m \mathbf{a}_m^0, \quad \mathbf{v}_{, \alpha \beta} = z_{\alpha \beta}^m \mathbf{a}_m^0, \quad (2.8)$$

где z_{α}^m и $z_{\alpha \beta}^m$ – функции компонент вектора перемещения \mathbf{v} и их производных; при $\alpha = 1$ понимается производная по параметру T ; при $\alpha = 2$ – дифференцирование по параметру t .

Орт нормали \mathbf{a}_3 к срединной поверхности в деформированном состоянии, входящий в (2.6), выражается векторным произведением

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\sqrt{a}}, \quad (2.9)$$

где $\mathbf{a}_1 = (\mathbf{R}^0 + \mathbf{v})_{,T}$, $\mathbf{a}_2 = (\mathbf{R}^0 + \mathbf{v})_{,t}$, $a \approx a^0 = a_{11}^0 a_{22}^0 - a_{12}^0 a_{21}^0$ – детерминант метрического тензора в точке M .

Базисные векторы в точках $M^{0\xi}$ и M^ξ находятся дифференцированием (2.6) с учетом (2.5) и (2.9)

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1^0 &= \mathbf{R}_{,T}^{0\xi}, & \mathbf{g}_1 &= \mathbf{R}_{,T}^\xi + \mathbf{v}_{,T} + \xi(\mathbf{a}_{3,T} - \mathbf{a}_{3,T}^0) \\ \mathbf{g}_2^0 &= \mathbf{R}_{,t}^{0\xi}, & \mathbf{g}_2 &= \mathbf{R}_{,t}^\xi + \mathbf{v}_{,t} + \xi(\mathbf{a}_{3,t} - \mathbf{a}_{3,t}^0), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $\mathbf{a}_{3,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{a^0}}(\mathbf{a}_{1,\alpha} \times \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_{2,\alpha})$.

Для определения деформаций в произвольном слое оболочки, отстоящем на расстоянии ξ от срединной поверхности, используются соотношения механики сплошной среды [17]

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^\xi = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}^0), \quad (2.11)$$

где $g_{\alpha\beta}^0 = \mathbf{g}_{\alpha\beta}^0 \mathbf{g}_{\beta}^0$, $g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_{\alpha\beta} \mathbf{g}_{\beta}$ – ковариантные компоненты метрических тензоров в соответствующих точках.

При использовании (2.6), (2.8) и (2.9) деформации в произвольной точке оболочки (2.11) представляются выражением

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^\xi = \varepsilon_{\alpha\beta} + \xi\chi_{\alpha\beta}, \quad (2.12)$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\chi_{\alpha\beta}$ – деформации и искривления срединной поверхности оболочки в точке M .

Равенство (2.12), с учетом (2.6), (2.8) и (2.9) представляется в матричном виде

$$\left\{ \varepsilon^\xi \right\}_{3 \times 1} = [G] \{ \varepsilon \} = [G][L] \{ v \}, \quad (2.13)$$

где $\{ \varepsilon^\xi \}^T = \{ \varepsilon_{11}^\xi \varepsilon_{22}^\xi 2\varepsilon_{12}^\xi \}$, $\{ v \}^T = \{ v^1 v^2 v^3 \}$; $\{ \varepsilon \}^T = \{ \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} 2\varepsilon_{12} \chi_{11} \chi_{22} 2\chi_{12} \}$, $[L]$ – матрица дифференциальных и алгебраических операторов.

Компоненты тензора упругих деформаций в произвольном слое, отстоящем на расстоянии ξ от срединной поверхности, могут быть определены с помощью соотношения [17]

$$\sigma^{\alpha\beta} = \lambda I_1(\varepsilon^\xi) g^{\alpha\beta} + 2\mu g^{\alpha\rho} g^{\beta\gamma} \varepsilon_{\rho\gamma}^\xi, \quad (2.14)$$

где λ , μ – параметры Ляме, $g^{\alpha\beta}$ – контравариантные компоненты метрического тензора, $\sigma^{\alpha\beta}$ – контравариантные компоненты тензора напряжений, $I_1(\varepsilon^\xi) = g^{\rho\gamma} \varepsilon_{\rho\gamma}^\xi$ – первый инвариант тензора деформаций.

Напряжения в точке произвольного слоя оболочки, отстоящем на расстоянии ξ от срединной поверхности, в соответствии с (2.14) можно представить в матричном виде

$$\left\{ \sigma^{\alpha\beta} \right\}_{3 \times 1} = [C] \left\{ \varepsilon^\xi \right\}_{3 \times 1} \quad (2.15)$$

Конечный элемент. В качестве элемента дискретизации принимается произвольный четырёхугольный фрагмент срединной поверхности оболочки с узлами i, j, k, l . Для реализации численного интегрирования фрагмент отображается на квадрат с локальными координатами ζ и η , изменяющимися в пределах $-1 \leq \zeta, \eta \leq 1$. Отображение осуществляется с использованием билинейных функций

$$\lambda = \left\{ f(\zeta, \eta) \right\}_{1 \times 4}^T \left\{ \lambda_y \right\}_{4 \times 1}, \quad (2.16)$$

где $\{\lambda_y\}^T = \{\lambda^i \lambda^j \lambda^k \lambda^l\}$, а под символом λ понимаются значения узловых параметров T и t , которые в дальнейшем обозначаются координатами θ^1 и θ^2 соответственно.

Дифференцированием (2.16) определяются производные координат θ^α в системе ζ , η ($\theta_{,\zeta}^\alpha$, $\theta_{,\eta}^\alpha$, $\theta_{,\zeta\eta}^\alpha$) и производные локальных координат ζ , η по глобальным переменным θ^α ($\zeta_{,\alpha}$, $\eta_{,\alpha}$, $\zeta_{,\alpha\beta}$, $\eta_{,\alpha\beta}$).

Для получения аппроксимирующих выражений перемещений внутренней точки конечного элемента рассматривается векторная формулировка алгоритма аппроксимации.

В качестве узловых варьируемых параметров принимаются векторы перемещений узловых точек и их производные в локальной и глобальной системах координат

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{v}^l \right\}_{1 \times 12}^T &= \left\{ \mathbf{v}^i \mathbf{v}^j \mathbf{v}^k \mathbf{v}^l \mathbf{v}_{,\zeta}^i \mathbf{v}_{,\zeta}^j \mathbf{v}_{,\zeta}^k \mathbf{v}_{,\zeta}^l \mathbf{v}_{,\eta}^i \mathbf{v}_{,\eta}^j \mathbf{v}_{,\eta}^k \mathbf{v}_{,\eta}^l \right\} \\ \left\{ \mathbf{v}^g \right\}_{1 \times 12}^T &= \left\{ \mathbf{v}^i \mathbf{v}^j \mathbf{v}^k \mathbf{v}^l \mathbf{v}_{,\theta^1}^i \mathbf{v}_{,\theta^1}^j \mathbf{v}_{,\theta^1}^k \mathbf{v}_{,\theta^1}^l \mathbf{v}_{,\theta^2}^i \mathbf{v}_{,\theta^2}^j \mathbf{v}_{,\theta^2}^k \mathbf{v}_{,\theta^2}^l \right\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

На основании дифференциальных зависимостей

$$\mathbf{v}_{,\zeta}^n = \mathbf{v}_{,\theta^1} \theta_{,\zeta}^1 + \mathbf{v}_{,\theta^2} \theta_{,\zeta}^2, \quad \mathbf{v}_{,\eta}^n = \mathbf{v}_{,\theta^1} \theta_{,\eta}^1 + \mathbf{v}_{,\theta^2} \theta_{,\eta}^2 \quad (2.18)$$

между узловыми неизвестными (2.17) записывается матричное соотношение

$$\left\{ \mathbf{v}^l \right\}_{12 \times 1} = [H]_{12 \times 12} \left\{ \mathbf{v}^g \right\}_{12 \times 1} \quad (2.19)$$

Вектор перемещения внутренней точки конечного элемента в деформированном состоянии определяется через узловые величины (2.17) следующими выражениями

$$\mathbf{v} = \left\{ \varphi(\zeta, \eta) \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \mathbf{v}^l \right\}_{12 \times 1} = \left\{ \varphi(\zeta, \eta) \right\}_{1 \times 12}^T [H]_{12 \times 12} \left\{ \mathbf{v}^g \right\}_{12 \times 1} = \left\{ \gamma \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \mathbf{v}^g \right\}_{12 \times 1}, \quad (2.20)$$

где элементы матрицы $\left\{ \varphi(\zeta, \eta) \right\}_{1 \times 12}^T$ являются полиномами Эрмита третьей степени [18].

Производные аппроксимирующей функции $\left\{ \varphi(\zeta, \eta) \right\}$ в глобальной системе координат определяются выражениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left\{ \varphi \right\}^T}{\partial \theta^\alpha} &= \left[\left\{ \varphi_{,\zeta} \right\}_{1 \times 12}^T \zeta_{,\alpha} + \left\{ \varphi_{,\eta} \right\}_{1 \times 12}^T \eta_{,\alpha} \right] = \left\{ \varphi_{,\alpha} \right\}_{1 \times 12}^T \\ \frac{\partial^2 \left\{ \varphi \right\}^T}{\partial \theta^\alpha \partial \theta^\beta} &= \left[\left\{ \varphi_{,\zeta\zeta} \right\}_{1 \times 12}^T \zeta_{,\alpha} \zeta_{,\beta} + \left\{ \varphi_{,\zeta} \right\}_{1 \times 12}^T \zeta_{,\alpha\beta} + \left\{ \varphi_{,\zeta\eta} \right\}_{1 \times 12}^T \zeta_{,\alpha} \eta_{,\beta} + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \varphi_{,\eta\zeta} \right\}_{1 \times 12}^T \eta_{,\alpha} \zeta_{,\beta} + \left\{ \varphi_{,\eta\eta} \right\}_{1 \times 12}^T \eta_{,\alpha} \eta_{,\beta} + \left\{ \varphi_{,\eta} \right\}_{1 \times 12}^T \eta_{,\alpha\beta} \right] = \left\{ \varphi_{,\alpha\beta} \right\}_{1 \times 12}^T \end{aligned} \quad (2.21)$$

С учетом (2.21) производные вектора перемещения внутренней точки конечного элемента запишутся в матричном виде

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{,\alpha} &= \left\{ \varphi_{,\alpha} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \mathbf{v}^l \right\}_{12 \times 1} = \left\{ \varphi_{,\alpha} \right\}_{1 \times 12}^T [H]_{12 \times 12} \left\{ \mathbf{v}^g \right\}_{12 \times 1} = \left\{ \gamma_{,\alpha} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \mathbf{v}^g \right\}_{12 \times 1} \\ \mathbf{v}_{,\alpha\beta} &= \left\{ \varphi_{,\alpha\beta} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \mathbf{v}^l \right\}_{12 \times 1} = \left\{ \varphi_{,\alpha\beta} \right\}_{1 \times 12}^T [H]_{12 \times 12} \left\{ \mathbf{v}^g \right\}_{12 \times 1} = \left\{ \gamma_{,\alpha\beta} \right\}_{1 \times 12}^T \left\{ \mathbf{v}^g \right\}_{12 \times 1} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Столбец узловых неизвестных $\left\{ \mathbf{v}^g \right\}_{12 \times 1}$ можно представить матричным произведением

$$\left\{ \mathbf{v}^g \right\}_{12 \times 1} = [\mathbf{S}]_{12 \times 36} \cdot \left\{ f_u \right\}_{36 \times 1}, \quad (2.23)$$

где $\left\{ f_u \right\}_{36 \times 1}^T = \left\{ v^{li} v^{2i} v^{3i} \dots v^{li} v^{2i} v^{3i} f_1^{li} f_1^{2i} f_1^{3i} \dots f_2^{li} f_2^{2i} f_2^{3i} \dots f_2^{li} f_2^{2i} f_2^{3i} \right\}_{12 \times 36}$; $[\mathbf{S}]$ – матрица, ненулевыми элементами которой являются базисные векторы узловых точек $\left\{ \mathbf{a}^{ow} \right\} = \left\{ \mathbf{a}_1^{0w} \mathbf{a}_2^{0w} \mathbf{a}_3^{0w} \right\}$, ($w = i, j, k, l$).

С использованием (2.23) выражения (2.20) и (2.22) переписуются следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \left\{ \gamma_1 \left\{ \mathbf{a}^{0i} \right\}_{1 \times 3}^T \dots \gamma_4 \left\{ \mathbf{a}^{0l} \right\}_{1 \times 3}^T \gamma_5 \left\{ \mathbf{a}^{0i} \right\}_{1 \times 3}^T \dots \gamma_8 \left\{ \mathbf{a}^{0l} \right\}_{1 \times 3}^T \gamma_9 \left\{ \mathbf{a}^{0i} \right\}_{1 \times 3}^T \dots \gamma_{12} \left\{ \mathbf{a}^{0l} \right\}_{1 \times 3}^T \right\}_{36 \times 1} \left\{ f_u \right\}_{36 \times 1} \\ \mathbf{v}_{,\alpha} &= \left\{ \gamma_{1,\alpha} \left\{ \mathbf{a}^{0i} \right\}_{1 \times 3}^T \dots \gamma_{12,\alpha} \left\{ \mathbf{a}^{0l} \right\}_{1 \times 3}^T \right\}_{36 \times 1} \left\{ f_u \right\}_{36 \times 1} \\ \mathbf{v}_{,\alpha\beta} &= \left\{ \gamma_{1,\alpha\beta} \left\{ \mathbf{a}^{0i} \right\}_{1 \times 3}^T \dots \gamma_{12,\alpha\beta} \left\{ \mathbf{a}^{0l} \right\}_{1 \times 3}^T \right\}_{36 \times 1} \left\{ f_u \right\}_{36 \times 1} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Входящие в (2.24) базисные векторы узловых точек можно выразить через базисные векторы внутренней точки конечного элемента с использованием (2.4)

$$\left\{ \mathbf{a}^{0w} \right\}_{3 \times 1} = \left[\boldsymbol{\tau}^w \right]_{3 \times 3} \left\{ \mathbf{i} \right\}_{3 \times 1} = \left[\boldsymbol{\tau}^w \right]_{3 \times 3} \left[\boldsymbol{\tau} \right]_{3 \times 3}^{-1} \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1} = \left[\mathbf{z}^w \right]_{3 \times 3} \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{3 \times 1} \quad (w = i, j, k, l) \quad (2.25)$$

На основании (2.25) с учетом (2.8) соотношения (2.24) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ v \right\}_{3 \times 1} &= \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left[\gamma_1 \left[\mathbf{z}^i \right]_{3 \times 3}^T \dots \gamma_{12} \left[\mathbf{z}^l \right]_{3 \times 3}^T \right]_{36 \times 36} \left[Y \right]_{36 \times 36} \left\{ v_y \right\}_{36 \times 1} \\ \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \begin{matrix} f_\alpha^1 \\ f_\alpha^2 \\ f_\alpha^3 \end{matrix} \right\}_{3 \times 1} &= \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left[\gamma_{1,\alpha} \left[\mathbf{z}^i \right]_{3 \times 3}^T \dots \gamma_{12,\alpha} \left[\mathbf{z}^l \right]_{3 \times 3}^T \right]_{36 \times 36} \left[Y \right]_{36 \times 36} \left\{ v_y \right\}_{36 \times 1} \\ \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \begin{matrix} f_{\alpha\beta}^1 \\ f_{\alpha\beta}^2 \\ f_{\alpha\beta}^3 \end{matrix} \right\}_{3 \times 1} &= \left\{ \mathbf{a}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \left[\gamma_{1,\alpha\beta} \left[\mathbf{z}^i \right]_{3 \times 3}^T \dots \gamma_{12,\alpha\beta} \left[\mathbf{z}^l \right]_{3 \times 3}^T \right]_{36 \times 36} \left[Y \right]_{36 \times 36} \left\{ v_y \right\}_{36 \times 1}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где $\left\{ v_y \right\}_{36 \times 1}^T = \left\{ v^{li} \dots v^{li} v_{,1}^{li} \dots v_{,1}^{li} v_{,2}^{li} \dots v_{,2}^{li} v^{2i} \dots v^{2l} \dots v_{,2}^{3i} \dots v_{,2}^{3l} \right\}_{36 \times 36}$; $[Y]$ – матрица преобразования между узловыми величинами $\left\{ f_u \right\}$ из (2.23) и $\left\{ v_y \right\}$.

Аппроксимирующие функции искомых величин можно представить из соотношения (2.26) следующим образом

$$\begin{aligned} \left\{ v \right\}_{3 \times 1} &= \left[m \right]_{3 \times 36} \left\{ v_y \right\}_{36 \times 1} \\ \left\{ \begin{matrix} f_\alpha^1 \\ f_\alpha^2 \\ f_\alpha^3 \end{matrix} \right\}_{3 \times 1} &= \left[m_\alpha \right]_{3 \times 36} \left\{ v_y \right\}_{36 \times 1}, \quad \left\{ \begin{matrix} f_{\alpha\beta}^1 \\ f_{\alpha\beta}^2 \\ f_{\alpha\beta}^3 \end{matrix} \right\}_{3 \times 1} = \left[m_{\alpha\beta} \right]_{3 \times 36} \left\{ v_y \right\}_{36 \times 1} \end{aligned} \quad (2.27)$$

При традиционной интерполяции компонент вектора перемещения как независимых скалярных величин их аппроксимирующие функции определяются выражениями

$$\lambda = \{\varphi(\zeta, \eta)\}_{1 \times 12}^T \{\lambda_y\}_{12 \times 1}, \quad \lambda_{,\alpha} = \{\varphi_{,\alpha}(\zeta, \eta)\}_{1 \times 12}^T \{\lambda_y\}_{12 \times 1}, \quad (2.28)$$

где под символом λ понимаются величины v^1, v^2 и v^3 .

Деформации (2.13) в произвольной точке оболочки с учетом (2.27) представляются в матричном виде

$$\{\varepsilon^\xi\}_{3 \times 1} = [G][L]\{v\} = [G][L][m]\{v_y\} = [G][B]\{v_y\} \quad (2.29)$$

Матрица жесткости конечного элемента. Матрица жесткости и столбец узловых усилий четырехугольного конечного элемента формируются на основе функционала, отражающего равенство действительных работ внешних и внутренних сил

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon^\xi\}^T \{\sigma^{\alpha\beta}\} dV - \frac{1}{2} \int_F \{v\}^T \{P\} dF, \quad (2.30)$$

где $\{\sigma^{\alpha\beta}\}^T = \{\sigma^{11} \sigma^{22} \sigma^{12}\}$ – матрица-строка напряжений в произвольном слое оболочки, отстоящем на расстоянии ξ от срединной поверхности; $\{P\}^T = \{p_1 p_2 p_3\}$ – столбец внешней нагрузки.

С учетом (2.15) и (2.29) функционал (2.30) может быть преобразован к виду

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{2} \{v_y^g\}_{1 \times 36}^T [PR]_{36 \times 36}^T \int_V [B]_{36 \times 6}^T [G]_{6 \times 3}^T [C]_{3 \times 3} [G]_{3 \times 6} [B]_{6 \times 36} dV [PR]_{36 \times 36} \{v_y^g\}_{36 \times 1} - \\ & - \frac{1}{2} \{v_y^g\}_{1 \times 36}^T [PR]_{36 \times 36}^T \int_F [A]_{36 \times 3}^T \{P\}_{3 \times 1} dF, \end{aligned} \quad (2.31)$$

где $[PR]_{36 \times 36}$ – матрица перехода от столбца $\{v_y^l\}$ к столбцу $\{v_y^g\}$.

В результате минимизации (2.31) по $\{v_y^g\}^T$ можно получить следующее матричное выражение

$$[K^g]_{36 \times 36} \{v_y^g\}_{36 \times 1} = [R^g]_{36 \times 1}, \quad (2.32)$$

где $[K^g]_{36 \times 36} = [PR]_{36 \times 36}^T \int_V [B]_{36 \times 6}^T [G]_{6 \times 3}^T [C]_{3 \times 3} [G]_{3 \times 6} [B]_{6 \times 36} dV [PR]_{36 \times 36}$ – матрица жесткости; $[R^g]_{36 \times 1} = [PR]_{36 \times 36}^T \int_F [A]_{36 \times 3}^T \{P\}_{3 \times 1} dF$ – столбец узловых усилий четырехугольного конечного элемента в глобальной системе координат.

3. Результаты. В качестве примера была решена тестовая задача по определению напряженно-деформированного состояния фрагмента эллиптического цилиндра, нагруженного вдоль образующей линейной нагрузкой интенсивности q , с шарнирно-подвижными опорами на меридиане точки 1 и с шарнирно-неподвижными на меридиане точки 2 (рис. 2).

Были приняты следующие исходные данные: $q = 5 \times 10^{-3}$ кН/м; большая полуось эллипса $a = 0.1$ м; $E = 2 \times 10^5$ МПа; $\nu = 0.3$; $t = 0.001$ м. Малая полуось эллипса b была

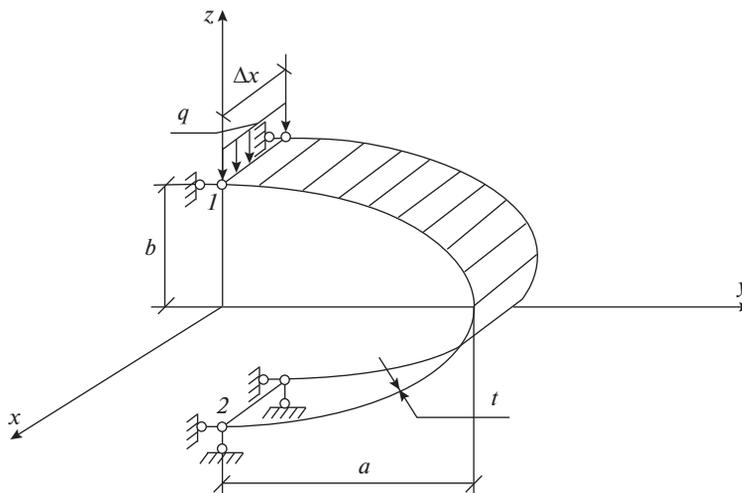


Рис. 2. Фрагмент эллиптического цилиндра.

принята равной 0.025 м. Вследствие наличия плоскостей симметрии рассчитываемая оболочка моделировалась полоской конечных элементов шириной $\Delta x = 0.01$ м.

Расчет выполнялся в двух вариантах. В первом варианте при формировании матрицы жесткости использовалась традиционная интерполяционная процедура, полученная по (2.28). Во втором варианте при формировании матрицы жесткости конечного элемента использовались разработанные аппроксимирующие выражения (2.27).

В табл. 1 представлены значения физических кольцевых напряжений на внутренней σ_{22}^v и наружной σ_{22}^n поверхностях цилиндра в точках 1 и 2 в зависимости от густоты сетки дискретизации оболочки для скалярной и векторной форм аппроксимаций перемещений.

Таблица 1. Расчет фрагмента эллиптического цилиндра при использовании скалярной и векторной форм аппроксимаций перемещений

Варианты аппроксимаций	Координаты точек (x, t)	Напряжения, МПа	Сетка дискретизации		
			37×2	49×2	97×2
Скалярная аппроксимация	Точка (1) приложения силы $(0; 0)$	σ_{22}^v	134.62	148.12	157.80
		σ_{22}^n	-135.12	-148.10	-157.42
	Точка (2) шарнирного опирания $(0; \pi)$	σ_{22}^v	64.10	118.61	156.23
		σ_{22}^n	-63.07	-117.90	-155.81
Векторная аппроксимация	Точка (1) приложения силы $(0; 0)$	σ_{22}^v	158.27	158.46	158.58
		σ_{22}^n	-158.53	-158.35	-158.22
	Точка (2) шарнирного опирания $(0; \pi)$	σ_{22}^v	158.27	158.46	158.58
		σ_{22}^n	-158.53	-158.35	-158.22

Таблица 2. Расчет напряженно-деформированного состояния оболочки с пружинными опорами при использовании скалярной и векторной форм аппроксимаций перемещений

Жесткость пружины, 10^2 Н/м		∞	0.1	0.01	0.02	
Величина жесткого смещения, 10^{-2} м		0.00	1.00	10.00	20.00	
Варианты аппроксимаций	Координаты точек (x, t)	Напряжения, МПа	Значения напряжений в контролируемых точках, при заданных смещениях оболочки			
Скалярная аппроксимация	Точка (1) приложения силы $(0; 0)$	σ_{22}^v	157.19	153.22	117.74	-213.55
		σ_{22}^n	-156.79	-152.89	-117.96	208.22
	Точка (2) шарнирного опирания $(0; \pi)$	σ_{22}^v	157.21	161.07	195.54	517.45
		σ_{22}^n	-156.81	-160.61	-194.54	-511.36
Вертикальное смещение оболочки, 10^{-2} м		0	0.99928	9.92892	19.32095	
Векторная аппроксимация	Точка (1) приложения силы $(0; 0)$	σ_{22}^v	157.20	157.20	157.20	157.20
		σ_{22}^n	-156.81	-156.81	-156.81	-156.81
	Точка (2) шарнирного опирания $(0; \pi)$	σ_{22}^v	157.20	157.20	157.20	157.20
		σ_{22}^n	-156.81	-156.81	-156.81	-156.81
Вертикальное смещение оболочки, 10^{-2} м		0.00	1.00	10.00	20.00	

Замена шарнирных опор на пружинные позволит рассчитываемой конструкции перемещаться вертикально вниз, как абсолютно твердому телу, под действием линейно распределенной нагрузки.

Результаты расчетов напряженно-деформированного состояния рассчитываемой оболочки с пружинными опорами для скалярной и векторной форм аппроксимаций перемещений представлены в табл. 2. Для скалярной аппроксимации использовалась сетка дискретизации (337×2) , для векторной – 49×2 .

4. Обсуждение. Оценка достоверности результатов конечно-элементных решений определялась следующими критериями: сходимостью вычислительного процесса и условием равенства численных значений кольцевых напряжений в точках 1 и 2. Из табл. 1 видно, что использование векторной аппроксимации требует значительно меньшего числа элементов дискретизации для достижения приемлемых численных значений окружных напряжений. Достоверные численные значения кольцевых напряжений в первом варианте расчета наблюдаются при минимальной густоте сетки 97×2 , в то время как при векторном способе интерполяции перемещений эти значения достигаются уже при сетке 37×2 .

В точках 1 и 2 должно соблюдаться равенство значений кольцевых напряжений во внутренних и наружных волокнах. Данные табл. 1 показывают, что при использовании скалярной аппроксимации перемещений данное условие выполняется не сразу и вызывает необходимость значительно сгущать сетку дискретизации. Векторная интерполяция полей перемещений приводит к выполнению этого условия уже при сетке дискретизации 37×2 .

Из табл. 2 видно, что при отсутствии жесткого смещения первый и второй варианты расчета позволяют получать достоверные конечно-элементные решения.

При смещении оболочки как жесткого целого в первом варианте расчета условие равенства кольцевых напряжений в точках 1 и 2 не выполняется, а при значительной

величине смещения (0.2 м) численные показатели напряжений достигают и вовсе неприемлемых значений.

Как видно из табл. 2 инвариантная интерполяционная процедура векторных полей перемещений дает возможность получать приемлемые значения напряжений даже при значительной величине смещения оболочки как жесткого целого. Условие равенства кольцевых напряжений в точках 1 и 2 также выполняется.

Заключение. Опираясь на анализ вышеизложенных результатов, можно сделать следующие выводы. Разработанный алгоритм может быть рекомендован к расчету произвольных оболочечных конструкций, так как соответствует геометрическому смыслу при использовании реальной матрицы $[z^w]$ в координатном преобразовании аппроксимирующих выражений.

Предложенный способ интерполяции векторов перемещений позволяет с высокой степенью точности определять параметры напряженно-деформированного состояния в характерных точках рассчитываемой конструкции.

Сравнительный анализ предложенного способа интерполяции полей перемещений в сравнении с общепринятым показал, что использование традиционной интерполяции требует значительно большего сгущения сетки элементов дискретизации для достижения сходимости вычислительного процесса даже при отсутствии смещения как жесткого целого.

Скалярная аппроксимация не дает возможности получать достоверные значения контролируемых параметров напряженно-деформированного состояния при наличии смещения конструкции как жесткого целого, что является общепризнанной проблемой МКЭ. Предложенные аппроксимирующие функции позволяют автоматически учитывать смещения конечного элемента оболочки как абсолютно твёрдого тела.

Исследование проведено при поддержке грантов РФФИ и администрации Волгоградской области № 19-41-340002 p_a и № 19-41-343003p_мол_a.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новожиллов В.В.* Краткий очерк развития теории оболочек в СССР // Исслед. по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1970. Вып. 6–7. С. 3–22.
2. *Григолюк Э.И., Кабанов В.В.* Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 360 с.
3. *Железнов Л.П., Кабанов В.В., Бойко Д.В.* Нелинейное деформирование и устойчивость дискретно-подкрепленных овальных цилиндрических композитных оболочек при поперечном изгибе и внутреннем давлении // Пробл. машиностр. и надежн. машин. 2014. № 6. С. 23–30.
4. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The finite element method // В: A Division of Reed Educ. & Prof. Publishing Ltd. 2010. V. 2. P. 477.
5. *Голованов А.И.* Современные конечно-элементные модели и методы исследования тонкостенных конструкций. Казань: Казан. гос. ун-т, 2005. 440 с.
6. *Lalin V., Rybakov V., Sergey A.* The finite elements for design of frame of thin-walled beams // Appl. Mech. & Mater. 2014. V. 578–579. P. 858–863.
7. *Ефанов К.В.* Расчет нефтяных аппаратов методом конечных элементов. Литрес: Самиздат, 2020. 132 с.
8. *Badriev I.B., Paimushin V.N.* Refined models of contact interaction of a thin plate with positioned on both sides deformable foundations // Lobachevskii J. Math. 2017. V. 38 (5). P. 779–793.
9. *Аганов В.П.* Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций. М.: Изд-во АСВ, 2000. 152 с.
10. *Aldakheel F., Hudobivnik B., Wriggers P.* Virtual element formulation for phase-field modeling of ductile fracture // Int. J. for Multiscale Comput. Engng. 2019. V. 17 (2). P. 181–200.
11. *Magisano D., Leonetti L., Garcea G.* Koiter asymptotic analysis of multilayered composite structures using mixed solid-shell finite elements // Composite Struct. 2016. V. 154. P. 296–308. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.07.046>

12. Голованов А.И., Корнишин М.С. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек. Казань: КФ АН СССР, 1989. 271 с.
13. Тюкалов Ю.Я. Равновесные конечные элементы для плоских задач теории упругости // Инж.-строит. ж. 2019. № 7 (91). С. 80–97.
14. Голованов А.И., Песошин А.В., Тюленева О.Н. Современные конечно-элементные модели и методы исследования тонкостенных конструкций. Казань: КГУ, 2005. 442 с.
15. Скопинский В.Н. Напряжения в пересекающихся оболочках. М.: Физматлит, 2008. 400 с.
16. Гуреева Н.А., Клочков Ю.В., Николаев А.П., Клочков М.Ю. Непрерывная параметризация срединной поверхности эллипсоидальной оболочки и ее геометрические параметры // Матем. физика и компьютер. моделир. 2020. Т. 23. № 1. С. 5–12.
17. Седов Л.И. Механика сплошной среды: учебник для студентов университетов и высших технических учебных заведений. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
18. Dzhabrailov A.Sh., Klochkov Yu.V., Marchenko S.S., Nikolaev A.P. The finite element approximation of vector fields in curvilinear coordinates // Rus. Aeron. 2007. V. 50(2). P. 115–120.

Finite Element Algorithm for Calculating the Ellipsoidal Shell When Taking Into Account the Displacement as a Rigid Whole

A. Sh. Dzhabrailov^{a,#}, A. P. Nikolaev^a, Yu. V. Klochkov^a, N. A. Gureeva^b, and T. R. Ishanov^a

^a *Volgograd State Agrarian University, Volgograd, Russia*

^b *Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: arsen82@yandex.ru*

For the strength calculation of the ellipsoidal shell using continuous parametrization of the median surface, a finite element of a quadrangular shape, which is a fragment of the median surface of the ellipsoid, is developed. The displacements of nodal points and their derivatives are accepted as nodal unknowns. To obtain approximating functions of the desired values of the internal point of a finite element through nodal unknowns, we use traditional approximating expressions of the displacement vector of the internal point of a finite element through the displacement vectors of the nodes of the element and the derivatives of these vectors. The coordinate transformation uses matrix relations between the basis vectors of the nodal points and the basis vectors of the internal point of the finite element, the implementation of which allows approximating expressions between vector quantities to be represented as approximating functions between the components of the displacement vector of the internal point of the finite element and the components of the displacement vectors of its nodal points. A concrete example shows that the use of the obtained approximating functions allows us to take into account the displacement of the finite element as an absolutely rigid body. The resulting approximating functions lead to faster convergence of the results and in the absence of bias as a rigid whole.

Keywords: shell, strain tensor, finite element, displacement vector, vector approximation, stiffness matrix, stress tensor

REFERENCES

1. Novozhilov V.V. A brief outline of the development of the theory of shells in the USSR // in: Res. on the Theory of Plates and Shells. Kazan: Kazan Univ., 1970, iss. 6–7, pp. 3–22.
2. Grigolyuk E.I., Kabanov V.V. The Stability of the Shells. Moscow: Nauka, 1978. 360 p.
3. Zheleznov L.P., Kabanov V.V., Boyko D.V. Nonlinear deformation and stability of discretely reinforced oval cylindrical composite shells under transverse bending and internal pressure. // Probl. Mech. Engng.&Machine Reliab., 2014, no. 6, pp. 23–30.
4. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method // B: A Division of Reed Educ.&Prof. Publ. Ltd., 2010, vol. 2, pp. 477.
5. Golovanov A.I. Modern Finite Element Models and Research Methods for Thin-Walled Structures. Kazan: Kazan. Univ., 2005. 440 p. (in Russian)

6. *Lalin V., Rybakov V., Sergey A.* The finite elements for design of frame of thin-walled beams // *Appl. Mech.&Mater.*, 2014, vol. 578–579, pp. 858–863.
7. *Efanov K.V.* Calculation of Oil Apparatus by the Finite Element Method. Liters: Samizdat, 2020. 132 p.
8. *Badriev I.B., Paimushin V.N.* Refined models of contact interaction of a thin plate with positioned on both sides deformable foundations // *Lobachevskii J. Math.*, 2017, vol. 38 (5), pp. 779–793.
9. *Agapov V.P.* Finite Element Method in Statics, Dynamics and Stability of Spatial Thin-Walled Reinforced Structures. Moscow: ASV, 2000. 152 p.
10. *Aldakheel F., Hudobivnik B., Wriggers P.* Virtual element formulation for phase-field modeling of ductile fracture // *Int. J. for Multiscale Comput. Engng.*, 2019, vol. 17 (2), pp. 181–200.
11. *Magisano D., Leonetti L., Garcea G.* Koiter asymptotic analysis of multilayered composite structures using mixed solid-shell finite elements // *Compos. Struct.*, 2016, vol. 154, pp. 296–308. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.07.046>
12. *Golovanov A.I., Kornishin M.S.* Introduction to the Finite Element Method of Statics of Thin Shells. Kazan: KF AS USSR, 1989. 271 p.
13. *Tyukalov Yu.Ya.* Equilibrium finite elements for plane problems of elasticity theory // *Engng.&Constr. J.*, 2019, no. 7 (91), pp. 80–97.
14. *Golovanov A.I., Pesoshin A.V., Tyuleneva O.N.* Modern Finite Element Models and Research Methods for Thin-Walled Structures. Kazan: KSU, 2005. 442 p.
15. *Skopinsky V.N.* Stresses in Intersecting Shells. Moscow: Fizmatlit, 2008. 400 p.
16. *Gureeva N.A., Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Klochkov M.Yu.* Continuous parametrization of the middle surface of an ellipsoidal shell and its geometric parameters // *Math. Phys.&Comput. Model.*, 2020, vol. 23, no. 1, pp. 5–12.
17. *Sedov L.I.* Continuum Mechanics: A Textbook for University Students and Higher Technical Educational Institutions. Vol. 1. Moscow: Nauka, 1983. 528 p.
18. *Dzhabrailov A.Sh., Klochkov Yu.V., Marchenko S.S., Nikolaev A.P.* Finite-element approximation of vector fields in curvilinear coordinate systems // *Russ. Aeron. Aviat. Technol.*, 2007, no. 2, pp. 3–6.

УДК 624.195:539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОДКРЕПЛЕННОГО ТРЕХСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКОЙ ТОННЕЛЯ МЕЛКОГО ЗАЛОЖЕНИЯ ПРИ ДЕЙСТВИИ ТРАНСПОРТНЫХ НАГРУЗОК

© 2022 г. Л. А. Алексеева^{1,*}, В. Н. Украинец^{2,**}, С. Р. Гирнис^{2,***}

¹ Институт математики и математического моделирования, Алма-Ата, Казахстан

² НАО “Торайгыров университет”, Павлодар, Казахстан

*e-mail: alexeeva@math.kz

**e-mail: ukrainets.v@teachers.tou.edu.kz

***e-mail: girmis.s@teachers.tou.edu.kz

Поступила в редакцию 10.08.2021 г.

После доработки 20.01.2022 г.

Принята к публикации 25.01.2022 г.

Решена задача о действии движущейся с постоянной скоростью нагрузки на трехслойную круговую цилиндрическую оболочку в упругом полупространстве. Для описания движения полупространства и внутреннего слоя оболочки используются динамические уравнения теории упругости в потенциалах Ламе. Колебания внешних слоев оболочки описываются классическими уравнениями теории тонких оболочек. Решение получено для случая, когда скорость движения нагрузки меньше скорости волны Рэлея и ее критических скоростей. На основе аналитического решения задачи исследуется напряженно-деформированное состояние подкрепленного трехслойной сталебетонной обделкой тоннеля мелкого заложения при действии равномерно движущейся по его лотку симметричной или несимметричной нормальной нагрузки от внутритуннельного транспорта.

Ключевые слова: упругое полупространство, тоннель, трехслойная круговая оболочка, транспортная нагрузка, скорость, перемещения, напряжения, деформация

DOI: 10.31857/S0032823522020023

1. Введение. Одной из модельных задач, применяемых для исследования динамики тоннелей мелкого заложения под воздействием транспортной нагрузки (нагрузки от движущегося внутритуннельного транспорта), является задача о действии на расположенную в упругом полупространстве круговую цилиндрическую оболочку нагрузки, равномерно движущейся по внутренней поверхности оболочки вдоль ее образующей, параллельной свободной границе полупространства. В отличие от аналогичной задачи для упругого пространства, моделирующей тоннель глубокого заложения, данная задача является более сложной, так как возникает необходимость учитывать отражаемые границей полупространства волны. Поэтому количество публикаций, посвященных исследованию этой проблеме, немногочисленно и охватывает, в основном, последние годы, в частности [1–8]. В настоящей работе построена математическая модель динамики подкрепленного трехслойной обделкой тоннеля мелкого заложения под воздействием транспортной нагрузки. С использованием метода неполного разделения переменных и переразложения цилиндрических и плоских волн построено аналитическое решение задачи, на основе которого разработан алгоритм и программный комплекс на языке ФОРТРАН для расчета напряженно-деформированного состояния

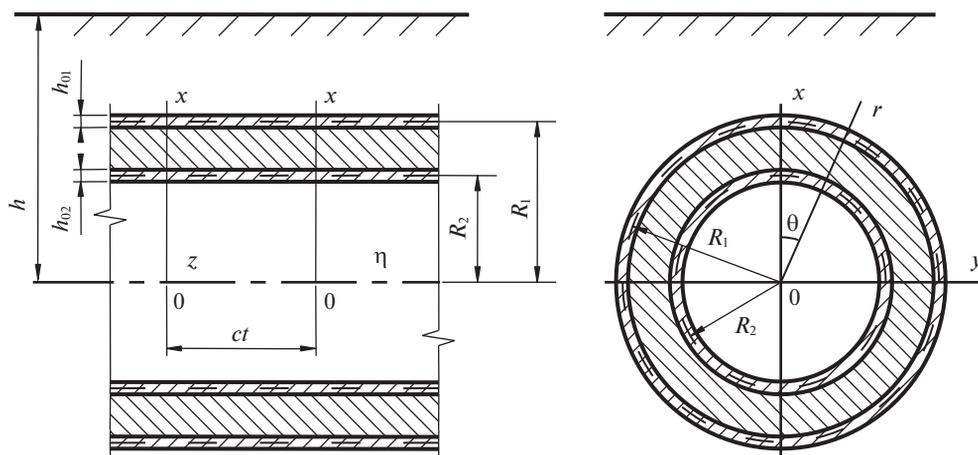


Рис. 1. Трехслойная оболочка в упругом полупространстве.

обделки тоннеля и породного массива с учетом скорости движения транспортной нагрузки, глубины заложения тоннеля и физико-механических свойств массива и материала оболочек. Рассмотрен дозвуковой случай, когда скорость движения меньше скоростей распространения упругих волн в массиве, в том числе релеевской для упругого полупространства. Приводятся и анализируются результаты численных экспериментов.

2. Постановка и аналитическое решение задачи. В качестве расчетной схемы подкрепленного трехслойной обделкой тоннеля мелкого заложения рассматривается бесконечно длинная круговая цилиндрическая трехслойная оболочка в линейно-упругом, однородном и изотропном полупространстве (массиве), отнесенному к неподвижным цилиндрической r , θ , z и декартовой x , y , z системам координат, ось z которых совпадает с осью оболочки и параллельна свободной от нагрузок горизонтальной границе полупространства (земной поверхности), ось x — перпендикулярна к этой границе: $x \leq h$ (рис. 1). Внутренним слоем оболочки является толстостенная оболочка (заполнитель), а внешние слои (обшивки) представляют собой тонкостенные оболочки с радиусами срединных поверхностей R_1 , R_2 и толщинами h_{01} , h_{02} . В силу малости толщин составляющих обшивку слоев допускается, что они контактируют с заполнителем и окружающим массивом вдоль своих срединных поверхностей. Контакт между слоями оболочки полагается жестким, а контакт между оболочкой и массивом полагается либо жестким, либо скользящим при двусторонней связи в радиальном направлении.

По внутренней поверхности оболочки в направлении ее оси z с постоянной скоростью s движется нагрузка интенсивностью P , вид которой не меняется с течением времени (стационарная нагрузка). Скорость движения нагрузки принимается дозвуковой, т.е. меньше скоростей распространения волн сдвига в заполнителе и массиве (характерной для современных транспортных средств). Физико-механические свойства массива и заполнителя характеризуются соответственно следующими постоянными: ν_1 , μ_1 , ρ_1 ; ν_2 , μ_2 , ρ_2 , где ν_k — коэффициент Пуассона, μ_k — модуль сдвига, ρ_k — плотность ($k = 1, 2$). В дальнейшем индекс $k = 1$ относится к массиву, а $k = 2$ — к заполнителю.

Поскольку рассматривается установившийся процесс, то картина деформаций стационарна по отношению к движущейся нагрузке. Поэтому можно перейти к связан-

ной с нагрузкой подвижной декартовой $(x, y, \eta = z - ct)$ или цилиндрической $(r, \theta, \eta = z - ct)$ системе координат.

Для описания движения массива и заполнителя используются динамические уравнения теории упругости в подвижной системе координат [4]

$$(M_{pk}^{-2} - M_{sk}^{-2}) \text{grad div } \mathbf{u}_k + M_{sk}^{-2} \nabla^2 \mathbf{u}_k = \partial^2 \mathbf{u}_k / \partial \eta^2; \quad k = 1, 2, \quad (2.1)$$

где $M_{pk} = c/c_{pk}$, $M_{sk} = c/c_{sk}$ – числа Маха; $c_{pk} = \sqrt{(\lambda_k + 2\mu_k)/\rho_k}$, $c_{sk} = \sqrt{\mu_k/\rho_k}$ – скорости распространения волн расширения–сжатия и сдвига в массиве и заполнителе, $\lambda_k = 2\mu_k \nu_k / (1 - 2\nu_k)$; \mathbf{u}_k – векторы смещений точек массива и заполнителя, ∇^2 – оператор Лапласа.

Колебания слоев обшивки описываются классическими уравнениями теории тонких оболочек в подвижной системе координат [2–4]

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{(1 - \nu_{0k}) \rho_{0k} c^2}{2\mu_{0k}} \right] \frac{\partial^2 u_{0\eta k}}{\partial \eta^2} + \frac{1 - \nu_{0k}}{2R_k^2} \frac{\partial^2 u_{0\eta k}}{\partial \theta^2} + \\ & + \frac{1 + \nu_{0k}}{2R_k} \frac{\partial^2 u_{0\theta k}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{\nu_{0k}}{R_k} \frac{\partial u_{0rk}}{\partial \eta} = \frac{1 - \nu_{0k}}{2\mu_{0k} h_{0k}} (q_{\eta k} - q_{\eta R_k}), \\ & \frac{1 + \nu_{0k}}{2R_k} \frac{\partial^2 u_{0\eta k}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{(1 - \nu_{0k})}{2} \left(1 - \frac{\rho_{0k} c^2}{\mu_{0k}} \right) \frac{\partial^2 u_{0\theta k}}{\partial \eta^2} + \\ & + \frac{1}{R_k^2} \frac{\partial^2 u_{0\theta k}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R_k^2} \frac{\partial u_{0rk}}{\partial \theta} = \frac{1 - \nu_{0k}}{2\mu_{0k} h_{0k}} (q_{\theta k} - q_{\theta R_k}), \\ & \frac{\nu_{0k}}{R_k} \frac{\partial u_{0\eta k}}{\partial \eta} + \frac{1}{R_k^2} \frac{\partial u_{0\theta k}}{\partial \theta} + \frac{h_{0k}^2}{12} \nabla^2 \nabla^2 u_{0rk} + \\ & + \frac{(1 - \nu_{0k}) \rho_{0k} c^2}{2\mu_{0k}} \frac{\partial^2 u_{0rk}}{\partial \eta^2} + \frac{u_{0rk}}{R_k^2} = - \frac{1 - \nu_{0k}}{2\mu_{0k} h_{0k}} (q_{rk} - q_{r R_k}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь для наружного слоя обшивки $k = 1$, для внутреннего – $k = 2$; ν_{0k} , μ_{0k} , ρ_{0k} – соответственно коэффициент Пуассона, модуль сдвига и плотность материалов слоев обшивки; $u_{0\eta k}$, $u_{0\theta k}$, u_{0rk} – перемещения точек срединных поверхностей слоев обшивки; $q_{jR_2} = \sigma_{rj2}|_{r=R_2}$, $q_{j1} = \sigma_{rj2}|_{r=R_1}$, $q_{jR_1} = \sigma_{rj1}|_{r=R_1}$ – составляющие реакции заполнителя и массива, $j = \eta, \theta, r$ (при скользящем контакте оболочки с массивом $q_{\eta R_1} = q_{\theta R_1} = 0$), σ_{rj1} , σ_{rj2} – компоненты тензоров напряжений в массиве и заполнителе, $q_{j2} = P_j(\theta, \eta)$, $P_j(\theta, \eta)$ – составляющие интенсивности подвижной нагрузки $P(\theta, \eta)$, $j = \eta, \theta, r$.

Поскольку граница полупространства свободна от нагрузок, то при $x = h$

$$\sigma_{xx1} = \sigma_{xy1} = \sigma_{x\eta 1} = 0 \quad (2.3)$$

При различных контактных условиях оболочки с массивом граничные условия имеют вид:

– для скользящего контакта оболочки с массивом

$$\begin{aligned} \text{при } r = R_1 \quad & u_{r1} = u_{r2}, \quad u_{j2} = u_{0j1}, \quad \sigma_{r\eta 1} = 0, \quad \sigma_{r\theta 1} = 0 \\ \text{при } r = R_2 \quad & u_{j2} = u_{0j2}; \quad j = r, \theta, \eta \end{aligned} \quad (2.4)$$

– для жесткого контакта оболочки с массивом

$$\begin{aligned} \text{при } r = R_1 \quad u_{j1} = u_{j2}, \quad u_{j1} = u_{0j1} \\ \text{при } r = R_2 \quad u_{j2} = u_{0j2}, \quad j = r, \theta, \eta, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где u_{jk} – компоненты векторов \mathbf{u}_k , $k = 1, 2$.

Векторы \mathbf{u}_k можно выразить через потенциалы Ламе [1, 4]

$$\mathbf{u}_k = \text{grad } \varphi_{1k} + \text{rot}(\varphi_{2k} \mathbf{e}_\eta) + \text{rot rot}(\varphi_{3k} \mathbf{e}_\eta); \quad k = 1, 2, \quad (2.6)$$

которые, как следует из (2.1) и (2.6), удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^2 \varphi_{jk} = M_{jk}^2 \partial^2 \varphi_{jk} / \partial \eta^2; \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2 \quad (2.7)$$

Здесь \mathbf{e}_η – орт оси η , $M_{1k} = M_{pk}$, $M_{2k} = M_{3k} = M_{sk}$.

Через эти же потенциалы, используя (2.6) и закон Гука, можно выразить компоненты тензоров напряжений σ_{lmk} в массиве ($k = 1$) и заполнителе ($k = 2$) в цилиндрической ($l, m = r, \theta, \eta$) системе координат, а также σ_{lm1} в декартовой ($l, m = x, y, \eta$) системе координат.

Таким образом, для определения компонент напряженно-деформированного состояния (НДС) массива и заполнителя необходимо решить уравнения (2.7), используя граничные условия (2.3) и, в зависимости от условия контакта оболочки с массивом, (2.4) или (2.5).

Рассмотрим случай действия на оболочку синусоидальной по η подвижной нагрузки с произвольной зависимостью от угловой координаты

$$P(\theta, \eta) = p(\theta) e^{i\xi\eta}, \quad p(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{in\theta} \quad (2.8)$$

$$P_j(\theta, \eta) = p_j(\theta) e^{i\xi\eta}, \quad p_j(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{nj} e^{in\theta}; \quad j = r, \theta, \eta,$$

где константа ξ определяет период $T = 2\pi/\xi$ действующей нагрузки.

В установившемся состоянии зависимость всех величин от η имеет вид (2.8), поэтому

$$\varphi_{jk}(r, \theta, \eta) = \Phi_{jk}(r, \theta) e^{i\xi\eta}; \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2 \quad (2.9)$$

$$u_{0jk}(\theta, \eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{0nj} e^{in\theta} e^{i\xi\eta}; \quad j = r, \theta, \eta, \quad k = 1, 2 \quad (2.10)$$

Подставляя (2.9) в (2.7), получим

$$\nabla_2^2 \Phi_{jk} - m_{jk}^2 \xi^2 \Phi_{jk} = 0; \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \quad (2.11)$$

где $m_{jk} = (1 - M_{jk}^2)^{1/2}$, $m_{1k} = m_{pk}$, $m_{2k} = m_{3k} = m_{sk}$, ∇_2^2 – двумерный оператор Лапласа.

Используя (2.9) можно получить выражения для перемещений u_{jk}^* и напряжений σ_{lmk}^* ($l, m = r, \theta, \eta$) в массиве ($k = 1$) и заполнителе ($k = 2$), а также u_{l1}^* , σ_{lm1}^* ($l, m = x, y, \eta$) в массиве от синусоидальной нагрузки как функции от Φ_{jk} (знак * означает, что данные компоненты найдены при действии на оболочку синусоидальной подвижной нагрузки).

При дозвуковой скорости движения нагрузки $M_{sk} < 1$, $m_{sk} > 0$, $k = 1, 2$, и решения уравнений (2.11) можно представить в виде [3, 4]

$$\Phi_{jk} = \Phi_{jk}^{(1)} + \Phi_{jk}^{(2)}; \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \quad (2.12)$$

где:

для массива

$$\Phi_{j1}^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} K_n(k_{j1}r) e^{in\theta}, \quad \Phi_{j1}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \exp\left(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_{j1}^2}\right) d\zeta \quad (2.13)$$

для заполнителя

$$\Phi_{j2}^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj+3} K_n(k_{j2}r) e^{in\theta}, \quad \Phi_{j2}^{(2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj+6} I_n(k_{j2}r) e^{in\theta} \quad (2.14)$$

Здесь $I_n(k_j r)$, $K_n(k_j r)$ – соответственно модифицированные функции Бесселя и функции Макдональда, $k_{j1} = |m_{j1}\xi|$, $k_{j2} = |m_{j2}\xi|$; $g_j(\xi, \zeta)$, a_{n1}, \dots, a_{n9} – неизвестные функции и коэффициенты, подлежащие определению, $j = 1, 2, 3$.

Как показано в [1, 2, 4], представление потенциалов для полупространства в форме (2.12) приводит к их следующим выражениям в декартовой системе координат:

$$\Phi_{j1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + g_j(\xi, \zeta) e^{(x-h)f_j} \right] e^{iy\zeta} d\zeta, \quad (2.15)$$

где $f_j = \sqrt{\zeta^2 + k_{j1}^2}$, $\Phi_{nj} = [(\zeta + f_j)/k_{j1}]^n$; $j = 1, 2, 3$.

Воспользуемся переписанными для σ_{xx1}^* , σ_{xy1}^* , $\sigma_{x\eta 1}^*$ граничными условиями (2.3), с учетом (2.15). Выделяя коэффициенты при $e^{iy\zeta}$ и приравнявая, в силу произвольности y , их нулю, получим систему трех уравнений, из которой выражаем функции $g_j(\xi, \zeta)$ через неизвестные коэффициенты a_{n1} , a_{n2} , a_{n3} :

$$g_j(\xi, \zeta) = \frac{1}{\Delta^*} \sum_{l=1}^3 \Delta_{jl}^* e^{-hf_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl} \Phi_{nl} \quad (2.16)$$

Вид определителя Δ^* и алгебраических дополнений Δ_{jl}^* совпадает с аналогичными определителями для неподкрепленной полости в упругом полупространстве и определен в [2, 4]. В частности, здесь Δ^* – это определитель Рэлея, который в данном случае имеет вид

$$\Delta^* = (2\rho_*^2 - \beta^2)^2 - 4\rho_*^2 \sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}$$

$$\alpha = M_{p1}\xi, \quad \beta = M_{s1}\xi, \quad \rho_*^2 = \xi^2 + \zeta^2,$$

и не обращается в ноль при любых ζ , если скорость движения нагрузки меньше скорости поверхностных волн Рэлея c_R , которую условимся называть рэлеевской скоростью. В противном случае в точках $\zeta = \pm\zeta^* = \pm|\xi|\sqrt{M_R^2 - 1}$, $M_R = c/c_R$ он обращается в ноль, и интегралы в формуле (2.15) становятся расходящимися.

Ограничимся случаем $c < c_R$. Тогда все подынтегральные функции в (2.15) непрерывны и экспоненциально стремятся к нулю на бесконечности. С учетом (2.16), потенциалы (2.15) имеют вид

$$\Phi_{j1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + e^{(x-h)f_j} \sum_{l=1}^3 \frac{\Delta_{jl}^*}{\Delta^*} e^{-hf_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl} \Phi_{nl} \right] e^{iy\zeta} d\zeta \quad (2.17)$$

Следует отметить, что рэлеевская скорость c_R несколько ниже скорости волн сдвига в массиве.

Используя известное при $x < h$ соотношение [1, 2]

$$\exp\left(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(k_j r) e^{in\theta} \left[\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 + k_j^2}\right)/k_j\right]^n e^{-h\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}},$$

представим Φ_{jl} (2.12) в цилиндрической системе координат

$$\Phi_{jl} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_{nj} K_n(k_{jl} r) + I_n(k_{jl} r) \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \Phi_{nj} e^{-h f_j} d\zeta \right) e^{in\theta}$$

Подставляя в последнее выражение из (2.16) $g_j(\xi, \zeta)$, для $c < c_R$ получим

$$\Phi_{jl} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_{nj} K_n(k_{jl} r) + b_{nj} I_n(k_{jl} r)) e^{in\theta}, \quad (2.18)$$

$$\text{где } b_{nj} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{ml} A_{nj}^{ml}, \quad A_{nj}^{ml} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_{jl}^*}{\Delta^*} \Phi_{ml} \Phi_{nj} e^{-h(f_l + f_j)} d\zeta.$$

Подставляя (2.18), при $k = 1$ и (2.12), при $k = 2$ в выражения для u_{lk}^* , σ_{lmk}^* ($l, m = r, \theta, \eta$), получим новые выражения для компонент НДС массива и заполнителя в цилиндрических координатах при $c < c_R$, где неизвестными будут только коэффициенты a_{m1}, \dots, a_{m9} .

Подставляя (2.10) в (2.2) и разрешая полученную для n -го члена разложения системы уравнений относительно $u_{0m\eta k}$, $u_{0n\theta k}$, u_{0nrk} можно найти их выражения.

Для определения коэффициентов a_{m1}, \dots, a_{m9} воспользуемся, в зависимости от условия сопряжения оболочки с массивом, переписанными для u_{lk}^* ($l = r, \theta, \eta$) и $\sigma_{r\eta 1}^*$, $\sigma_{r\theta 1}^*$ граничными условиями (2.4) или (2.5). Подставляя в граничные условия соответствующие выражения и приравнявая коэффициенты рядов при $e^{in\theta}$, получим бесконечную систему ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) линейных алгебраических уравнений, для решения которой можно использовать метод редукции или более удобный для решения поставленной задачи метод последовательных отражений [2], позволяющий при каждом последовательном отражении решать систему линейных уравнений блочно-диагонального вида с матрицами размером 9×9 и определителями $\Delta_n(\xi, c)$ вдоль главной диагонали.

Зная решение задачи для синусоидальной нагрузки, реакцию оболочки и окружающей ее среды на движущуюся с постоянной скоростью аperiодическую (локальную) нагрузку вида $P(\theta, \xi) = p(\theta) p(\eta)$ (характерного для транспортных средств) можно найти при помощи суперпозиции, используя представление нагрузки и компонент НДС массива и заполнителя в виде интегралов Фурье

$$\begin{aligned} P(\theta, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P^*(\theta, \xi) e^{i\xi\eta} d\xi = p(\theta) p(\eta) = p(\theta) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p^*(\xi) e^{i\xi\eta} d\xi \\ P_m(\theta, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_m^*(\theta, \xi) e^{i\xi\eta} d\xi = p_m(\theta) p(\eta) = p_m(\theta) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p^*(\xi) e^{i\xi\eta} d\xi \\ & \quad m = r, \theta, \eta \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} u_{lk}(r, \theta, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_{lk}^*(r, \theta, \xi) p^*(\xi) d\xi, \quad \sigma_{lmk}(r, \theta, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{lmk}^*(r, \theta, \xi) p^*(\xi) d\xi \\ & \quad l = r, \theta, \eta, \quad m = r, \theta, \eta, \quad k = 1, 2 \end{aligned}$$

Здесь $p^*(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\eta) e^{-i\xi\eta} d\eta$.

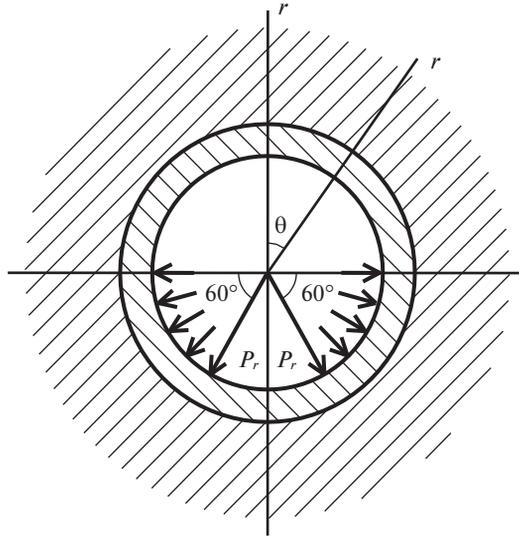


Рис. 2. Движущаяся по лотку тоннеля нагрузка.

Для вычислений перемещений и напряжений (2.19) можно использовать любой численный метод интегрирования, если определители $\Delta_n(\xi, c)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) отличны от нуля, т.е. когда скорость движения нагрузки c меньше ее критических скоростей $c_{(n)*}$. Значения $c_{(n)*}$ определяются из дисперсионных уравнений $\Delta_n(\xi, c) = 0$ [3] и могут оказаться меньше рэлеевской скорости. Окончательное решение будет зависеть от конкретного вида движущейся нагрузки.

Следует заметить, что исключая из постановки задачи граничные условия (2.3) и исключая из (2.12) $\Phi_{j1}^{(2)}$, получим решение аналогичной задачи для упругого пространства.

3. Численные эксперименты. Рассмотрим подкрепленный трехслойной обделкой тоннель глубиной заложения $h = 6$ м в породном массиве со следующими характеристиками: $\nu_1 = 0.294$, $\mu_1 = \mu = 1.094 \times 10^8$ Па, $\rho_1 = 1.5 \times 10^3$ кг/м³. Расчетные параметры для обделки: обшивка – стальные ($\nu_{01} = \nu_{02} = 0.3$, $\mu_{01} = \mu_{02} = 8.08 \times 10^{10}$ Па, $\rho_{01} = \rho_{02} = 7.8 \times 10^3$ кг/м³) тонкостенные оболочки одинаковой толщины $h_{01} = h_{02} = 0.02$ м с радиусами срединных поверхностей $R_1 = 3.0$ м и $R_2 = 2.5$ м; заполнитель – толстостенная бетонная ($\nu_2 = 0.2$, $\mu_2 = 1.21 \times 10^{10}$ Па, $\rho_2 = 2.5 \times 10^3$ кг/м³) оболочка. Контакт между породным массивом и обделкой, а также между ее слоями полагаем жестким.

Исследуем напряженно-деформированное состояние рассматриваемого тоннеля при действии изображенной на рис. 2 цилиндрической нормальной нагрузки от внутритуннельного транспорта, движущейся по его лотку со скоростью $c = 100$ м/с. Нагрузка равномерно распределена вдоль оси η в интервале $|\eta| \leq l_0 = 0.2$ м.

Рассмотрим два случая нагружения: симметричное и несимметричное. В первом случае будем считать, что интенсивность нагрузки постоянна по всей поверхности ее приложения, то есть $P_r = q$.

Во втором случае интенсивность равномерно распределенной по угловой координате нагрузки, расположенной слева от вертикальной диаметральной плоскости тон-

Таблица 1. Компоненты НДС поперечного сечения ($\eta = 0$) тоннеля при действии симметричной подвижной нагрузки

r	Комп. НДС	θ , град									
		0	20	40	60	80	100	120	140	160	180
			-20	-40	-60	-80	-100	-120	-140	-160	
Заполнитель (бетонный слой)											
R_2	$u_r^\circ \times 10$	-0.25	-0.23	-0.17	-0.07	0.08	0.23	0.30	0.27	0.18	0.13
	$\sigma_{r\theta}^\circ$	0.0	0.15	0.17	0.12	0.07	0.0	-0.11	-0.15	-0.09	0.0
	$\sigma_{\theta\theta}^\circ$	0.02	0.10	0.29	0.45	0.34	0.02	-0.10	0.24	0.80	1.08
	$\sigma_{\eta\eta}^\circ$	-0.10	-0.16	-0.15	-0.13	-0.67	-1.72	-2.25	-1.61	-0.47	0.08
R_1	$u_r^\circ \times 10$	-0.24	-0.22	-0.17	-0.07	0.07	0.21	0.28	0.25	0.17	0.13
	$\sigma_{r\theta}^\circ$	0.0	0.04	0.04	0.05	0.10	0.10	-0.03	-0.02	-0.02	0.0
	$\sigma_{\theta\theta}^\circ$	-0.09	-0.07	0.07	0.01	0.50	1.32	1.74	1.23	0.24	-0.25
	$\sigma_{\eta\eta}^\circ$	-0.54	-0.48	-0.35	-0.10	0.52	1.33	1.67	1.18	0.32	-0.10
Массив											
R_1	$u_r^\circ \times 10$	-0.24	-0.22	-0.17	-0.07	0.07	0.21	0.28	0.25	0.17	0.13
	$\sigma_{r\theta}^\circ \times 10$	0.0	0.03	0.05	0.04	-0.02	-0.07	-0.08	-0.05	-0.02	0.0
	$\sigma_{\theta\theta}^\circ \times 10$	-0.02	-0.02	0.01	0.05	0.05	-0.01	-0.06	-0.04	0.02	0.06
	$\sigma_{\eta\eta}^\circ \times 10$	-0.05	-0.04	-0.01	0.02	0.01	-0.01	-0.03	-0.01	0.02	0.04

неля, в два раза больше интенсивности такой же нагрузки, действующей справа от этой плоскости, то есть при $90^\circ \leq \theta \leq 150^\circ$ $P_r = q$; при $210^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$ $P_r = 2q$.

Параметр нагрузки q (Па) подбираем таким образом, чтобы общая нагрузка по всей длине $2l_0$ (м) участка нагружения $P_r = q$ равнялась эквивалентной сосредоточенной нормальной кольцевой нагрузке интенсивностью P° (Н/м), то есть $q = P/2l_0$.

Численные исследования соответствующих данному случаю дисперсионных уравнений показали, что в дозвуковом интервале скоростей они корней не имеют.

Введем обозначения: $u_r^\circ = u_{r\mu}/P^\circ$ (м), (м), $\sigma_{r\theta}^\circ = \sigma_{r\theta}/P^\circ$, $\sigma_{\theta\theta}^\circ = \sigma_{\theta\theta}/P^\circ$, $\sigma_{\eta\eta}^\circ = \sigma_{\eta\eta}/P^\circ$, $u_x^\circ = u_{x\mu}/P^\circ$ (м), (м), $u_y^\circ = u_{y\mu}/P^\circ$ (м), $\sigma_{yy}^\circ = \sigma_{yy}/P^\circ$, где $P^\circ = P^\circ/\text{м}$ (Па).

В табл. 1, 2 помещены данные расчетов НДС поперечного сечения ($\eta = 0$) тоннеля при действии симметричной и несимметричной движущейся нагрузки.

Согласно данным таблиц 1, 2 на рис. 3 построены эпюры нормальных напряжений $\sigma_{\theta\theta}^\circ$, $\sigma_{\eta\eta}^\circ$ и радиальных перемещений u_r° на контуре $r = R_2$ контактирующего с внутренней оболочкой обшивки бетонного слоя при $\eta = 0$.

Из анализа результатов расчетов следует, что в случае несимметричной нагрузки, т.е. при увеличении интенсивности левой половины симметричной нагрузки в два раза, симметричный характер распределения перемещений и напряжений по контурам сечения тоннеля нарушается. При этом, в заполнителе (бетонном слое) экстремаль-

Таблица 2. Компоненты НДС поперечного сечения ($\eta = 0$) тоннеля при действии несимметричной подвижной нагрузки

r	Комп. НДС	θ , град									
		0	20	40	60	80	100	120	140	160	180
Заполнитель (бетонный слой)											
R_2	$u_r^\circ \times 10$	-0.38	-0.35	-0.28	-0.17	-0.02	0.13	0.21	0.20	0.16	0.20
	$\sigma_{r\theta}^\circ$	0.10	0.29	0.26	0.12	-0.01	-0.14	-0.21	-0.16	-0.03	0.11
	$\sigma_{\theta\theta}^\circ$	0.03	0.03	0.20	0.36	0.26	-0.03	-0.08	0.41	1.18	1.61
	$\sigma_{\eta\eta}^\circ$	-0.15	-0.28	-0.31	-0.28	-0.82	-1.83	-2.28	-1.63	-0.44	0.11
R_1	$u_r^\circ \times 10$	-0.36	-0.35	-0.29	-0.19	-0.04	0.11	0.19	0.18	0.15	0.19
	$\sigma_{r\theta\theta}^\circ$	0.03	0.09	0.08	0.06	0.07	0.05	-0.06	-0.19	-0.17	0.05
	$\sigma_{\theta\theta}^\circ$	-0.14	-0.06	0.02	0.14	0.60	1.35	1.71	1.16	0.81	-0.38
	$\sigma_{\eta\eta}^\circ$	-0.80	-0.64	-0.42	-0.12	0.47	1.19	1.43	0.89	0.05	-0.15
Массив											
R_1	$u_r^\circ \times 10$	-0.36	-0.35	-0.29	-0.19	-0.04	0.11	0.19	0.18	0.15	0.19
	$\sigma_{r\theta}^\circ \times 10$	0.06	0.07	0.05	0.01	-0.03	-0.05	-0.10	-0.17	-0.15	0.01
	$\sigma_{\theta\theta}^\circ \times 10$	-0.01	0.0	0.02	0.03	0.0	-0.01	0.03	0.05	-0.02	-0.05
	$\sigma_{\eta\eta}^\circ \times 10$	-0.07	-0.06	-0.02	0.01	-0.01	-0.03	-0.02	0.01	0.02	0.02
r	Комп. НДС	θ , град									
		0	-20	-40	-60	-80	-100	-120	-140	-160	-180
Заполнитель (бетонный слой)											
R_2	$u_r^\circ \times 10$	-0.38	-0.33	-0.22	-0.02	0.26	0.56	0.71	0.61	0.38	0.20
	$\sigma_{r\theta}^\circ$	0.10	-0.16	-0.25	-0.23	-0.23	-0.14	0.11	0.30	0.26	0.11
	$\sigma_{\theta\theta}^\circ$	0.03	0.25	0.68	1.00	0.77	0.10	-0.22	0.32	1.23	1.61
	$\sigma_{\eta\eta}^\circ$	-0.15	-0.19	-0.13	-0.11	-1.18	-3.33	-4.46	-3.21	-0.97	0.11
R_1	$u_r^\circ \times 10$	-0.36	-0.32	-0.22	-0.03	0.24	0.52	0.66	0.57	0.36	0.19
	$\sigma_{r\theta\theta}^\circ$	0.03	-0.03	-0.03	-0.10	-0.26	-0.25	0.04	0.32	0.31	0.05
	$\sigma_{\theta\theta}^\circ$	-0.14	-0.15	-0.23	-0.11	0.91	2.63	3.50	2.52	0.63	-0.38
	$\sigma_{\eta\eta}^\circ$	-0.80	-0.80	-0.65	-0.17	1.09	2.80	3.59	2.66	0.90	-0.15
Массив											
R_1	$u_r^\circ \times 10$	-0.36	-0.32	-0.22	-0.03	0.24	0.52	0.66	0.57	0.36	0.19
	$\sigma_{r\theta}^\circ \times 10$	0.06	0.02	-0.02	-0.03	-0.01	-0.01	0.03	0.12	0.14	0.01
	$\sigma_{\theta\theta}^\circ \times 10$	-0.01	-0.01	0.01	0.03	0.0	-0.04	-0.01	0.03	-0.01	-0.05
	$\sigma_{\eta\eta}^\circ \times 10$	-0.07	-0.05	-0.01	0.03	0.02	-0.03	-0.04	0.01	0.03	0.02

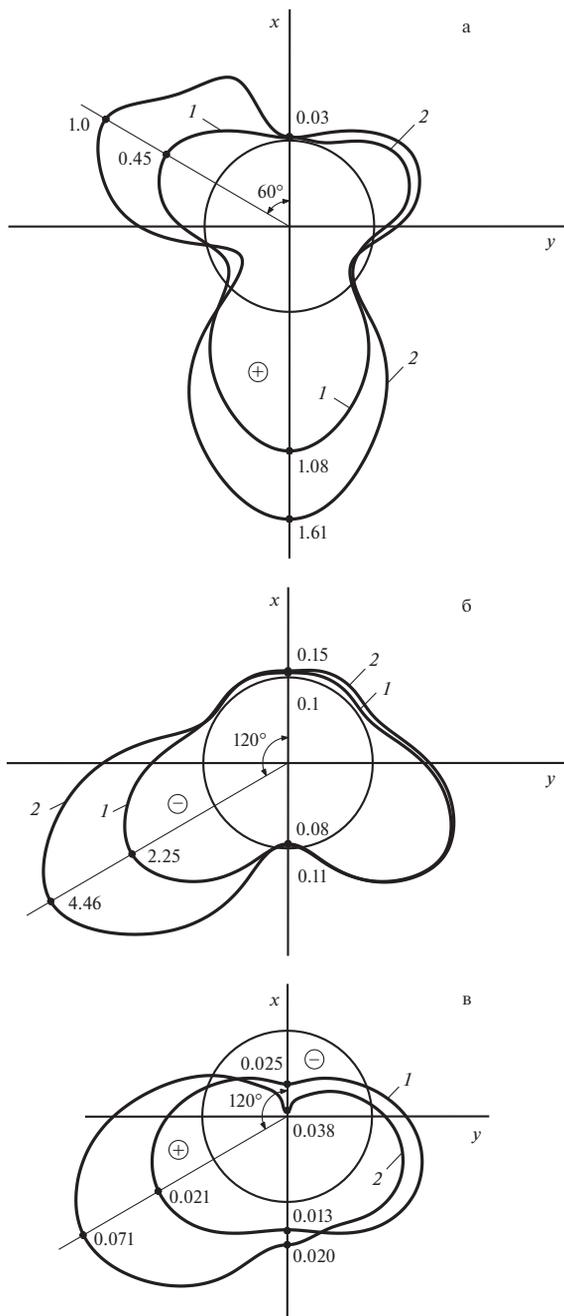


Рис. 3. Эпюры напряжений ($\sigma_{\theta\theta}$ – а, $\sigma_{\eta\eta}$ – б) и перемещений (u_r – в) на контуре $r = R_2$ ($\eta = 0$) контактной поверхности заполнителя: симметричное нагружение (2.1); несимметричное нагружение (2.2).

ные радиальные перемещения u_r при $\theta = -120^\circ$ возрастают в 3.4 раза, а экстремальные напряжения $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{\eta\eta}$ увеличиваются соответственно в 2.0 (при $\theta = -140^\circ$), 1.5 (при $\theta = 180^\circ$) и 2.0 (при $\theta = -120^\circ$) раза. На контактирующей с обделкой поверхно-

Таблица 3. Компоненты НДС земной поверхности в плоскости $xу$ ($\eta = 0$) при симметричном и несимметричном нагружении тоннеля

Комп. НДС	y/R										
	0.0	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8	-1.0	-1.2	-1.4	-1.6	-1.8	-2.0
		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
Симметричное нагружение											
$u_x^o \times 10$	-0.24	-0.24	-0.23	-0.23	-0.23	-0.22	-0.22	-0.21	-0.21	-0.20	-0.20
$u_y^o \times 100$	0.0	0.04	0.07	0.09	0.11	0.12	0.12	0.11	0.10	0.08	0.07
$\sigma_{yy}^o \times 100$	-0.42	-0.41	-0.37	-0.32	-0.26	-0.20	-0.15	-0.11	-0.08	-0.06	-0.06
$\sigma_{\eta\eta}^o \times 100$	-0.80	-0.79	-0.76	-0.72	-0.68	-0.63	-0.58	-0.54	-0.51	-0.49	-0.47
Несимметричное нагружение											
$u_x^o \times 10$	-0.36	-0.36	-0.36	-0.36	-0.35	-0.34	-0.33	-0.33	-0.32	-0.31	-0.30
$u_y^o \times 10$	-0.17	-0.17	-0.16	-0.15	-0.15	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14	-0.14	-0.15
$\sigma_{yy}^o \times 100$	-0.67	-0.71	-0.70	-0.64	-0.55	-0.44	-0.33	-0.23	-0.15	-0.10	-0.06
$\sigma_{\eta\eta}^o \times 100$	-1.22	-1.24	-1.22	-1.18	-1.11	-1.03	-0.95	-0.87	-0.80	-0.74	-0.70
		-1.16	-1.09	-1.00	-0.92	-0.85	-0.78	-0.74	-0.71	-0.69	-0.68

сти массива при любом нагружении тоннеля экстремальные напряжения значительно ниже, чем в бетонном слое обделки.

На земной поверхности также нарушается симметрия в распределении напряжений и перемещений. Результаты расчетов НДС земной поверхности в координатной плоскости $xу$ ($\eta = 0$) при действии на тоннель симметричной и несимметричной движущейся нагрузки представлены в табл. 3.

На рис. 4 в координатной плоскости $xу$ ($\eta = 0$) показаны изменения компонент НДС земной поверхности при действии на тоннель симметричной и несимметричной подвижных нагрузок. Обозначения кривых: симметричное нагружение (2.1); несимметричное нагружение (2.2). Как следует из анализа результатов расчетов, во втором случае нагружения (несимметричное нагружение) максимальный прогиб u_x земной поверхности в 1.5 раза больше, чем в первом случае (при симметричном нагружении), а ее наибольшее горизонтальное смещение u_y возрастает в 15 раз. Экстремальные нормальные напряжения σ_y и $\sigma_{\eta\eta}$ увеличиваются соответственно в 1.7 и 1.5 раза.

Заключение. Полученное решение и разработанный на его основе программный комплекс позволяет методами математического моделирования исследовать динамику породного массива и его поверхности вдоль трассы тоннеля на разной глубине заложения с учетом физико-механических свойств массива и материала конструктивных элементов его обделки. Скорость движения транспортной нагрузки существенно влияет на динамику поверхности массива, что необходимо учитывать, например, при строительстве метрополитенов особенно в настоящее время в связи с интенсивным

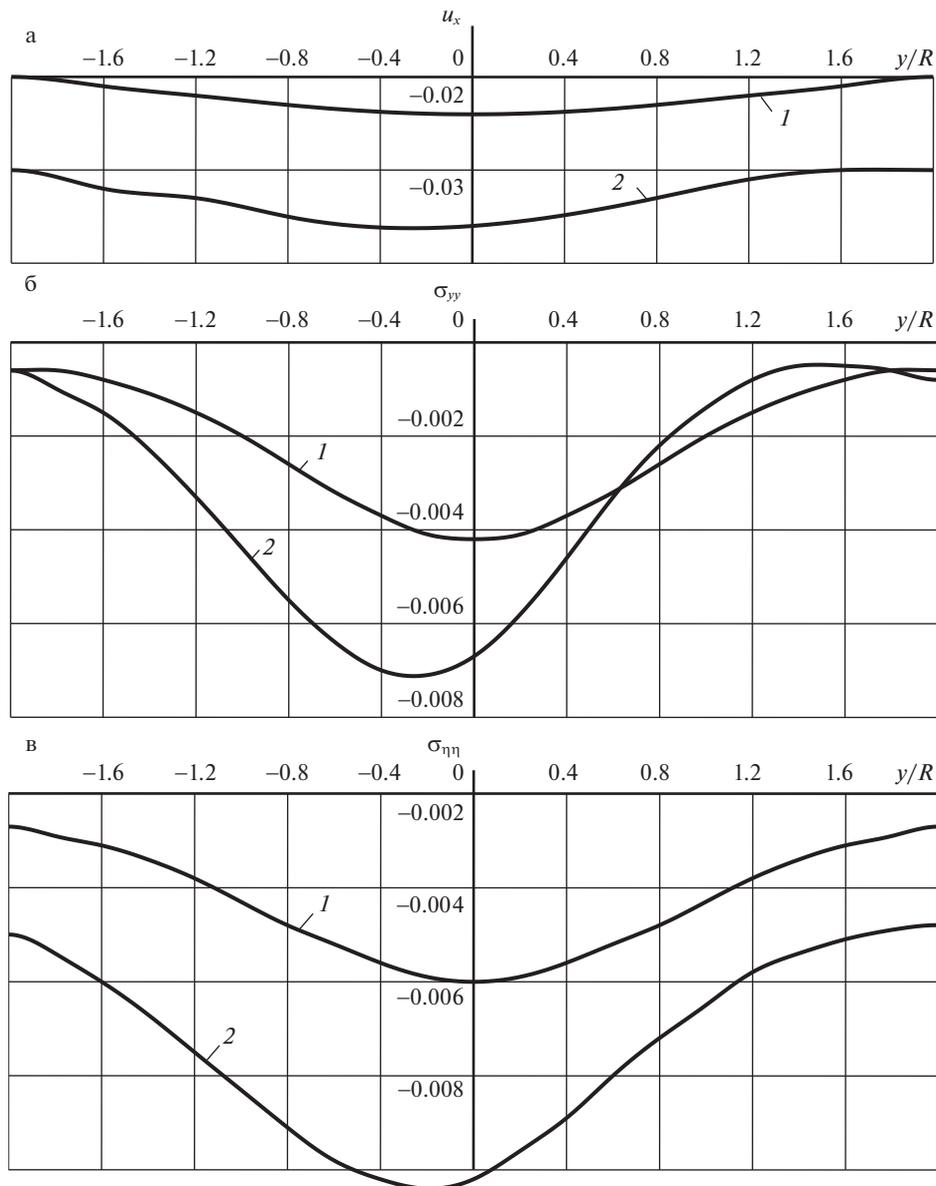


Рис. 4. Изменения компонент НДС земной поверхности в плоскости xu .

развитием высокоскоростного железнодорожного транспорта. Подбор материала и толщины слоев оболочек в обделке тоннеля позволяет снизить вибрацию поверхности массива вдоль трассы, которая негативно влияет на сейсмоустойчивость близ расположенных зданий и сооружений.

Отметим также, что диапазон скоростей современных транспортных средств лежит в рассмотренном здесь диапазоне дозвуковых скоростей и много меньше его верхнего предела.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ержанов Ж.С., Айтиалиев Ш.М., Алексеева Л.А. Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. Алма-Ата: Наука, 1989. 240 с.
2. Украинаец В.Н. Динамика тоннелей и трубопроводов мелкого заложения под воздействием подвижных нагрузок. Павлодар: НИЦ ПГУ, 2006. 123 с.
3. Alekseyeva L.A., Ukrainets V.N. Dynamics of an elastic half-space with a reinforced cylindrical cavity under moving loads // *Int. Appl. Mech.* 2009. V. 45. № 9. P. 75–85.
4. Украинаец В.Н., Гирнис С.Р. Математическое моделирование динамики подкрепленных двухслойными оболочками тоннелей при действии транспортных нагрузок. Павлодар: Ке-реку, 2018. 116 с.
5. Coşkun İ., Dolmaseven D. Dynamic response of a circular tunnel in an elastic half space // *J. Engng.* 2017. Article ID 6145375
<https://doi.org/10.1155/2017/6145375>
6. Dwivedia J.P., Singha V.P., Lalb R.K., Devia S. Dynamic response of lined circular tunnel in linear visco-elastic medium due to moving ring load // *Materials Today: Proc.* V. 4. Iss. 2. Pt. A. 2017. P. 3767–3775.
7. Cao Z., Sun S., Yuan Z., Cai Y. Analytical study on the effect of moving surface load on underground tunnel // in: Ed. by Wu W., Yu H.S. *Proc. China-Europe Conf. on Geotechn. Engng.* Cham: Springer, 2018.
8. Shunhua Zhou. *Dynamics of Rail Transit Tunnel Systems.* London: Acad. Press, 2019. 276 p.

Stress-Strain State of the Shallow Tunnel Supported by a Three-Layer Shell Under Action of Transport Loads

L. A. Alexeyeva^{a,#}, V. N. Ukrainets^{b,##}, and S. R. Girmis^{b,###}

^a Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

^b Toraighyrov University, Pavlodar, Kazakhstan

#e-mail: alexeeva@math.kz

##e-mail: ukrainets.v@teachers.tou.edu.kz

###e-mail: girmis.s@teachers.tou.edu.kz

The problem of the action of a load moving at a constant speed on a three-layer circular cylindrical shell in an elastic half-space is solved. The dynamic equations of the theory of elasticity in Lamé potentials are used to describe the motion of the half-space and the inner layer of the shell. Oscillations of the outer layers of the shell are described by the classical equations of the theory of thin shells. The solution is obtained for the case when the speed of the load is less than the speed of the Rayleigh wave and its critical velocities. Based on the solution of the problem, the stress-strain state of a shallow tunnel reinforced with a three-layer steel-concrete lining is studied under the influence of a symmetric or asymmetric normal load from the inner-tunnel transport uniformly moving along its tray.

Keywords: tunnel, elastic half-space, three-layered shell, moving load, tense-deformed condition

REFERENCES

1. Erzhanov Zh.S., Aitaliev Sh.M., Alekseyeva L.A. Dynamics of Tunnels and Underground Pipelines. Alma-Ata, Nauka, 1989. 240 p. (in Russian)
2. Ukrainets V.N. Dynamics of Shallow Tunnels and Underground Pipelines under Moving Loads. Pavlodar: PSU Publ., 2006, 123 p. (in Russian)
3. Alekseyeva L.A., Ukrainets V.N. Dynamics of an elastic half-space with a reinforced cylindrical cavity under moving loads // *Int. Appl. Mech.*, 2009, vol. 45, no. 9, pp. 75–85.
4. Ukrainets V.N., Girmis S.R. Mathematical modeling of the dynamics of tunnels supported by two-layer shells under the action of transport loads. Pavlodar: Kerek Publ., 2018. 116 p.
5. Coşkun İ., Dolmaseven D. Dynamic response of a circular tunnel in an elastic half space // *J. Engng.*, 2017, Article ID 6145375.
<https://doi.org/10.1155/2017/6145375>
6. Dwivedia J.P., Singha V.P., Lalb R.K., Devia S. Dynamic response of lined circular tunnel in linear visco-elastic medium due to moving ring load // *Mater. Today: Proc.*, 2017, vol. 4, iss. 2, pt. A, pp. 3767–3775.
7. Cao Z., Sun S., Yuan Z., Cai Y. Analytical study on the effect of moving surface load on underground tunnel // in: Ed. by Wu W., Yu H.S. *Proc. China-Europe Conf. on Geotechn. Engng.* Cham: Springer, 2018.
8. Shunhua Zhou. *Dynamics of Rail Transit Tunnel Systems.* London: Acad. Press, 2019. 276 p.

УДК 539.3

ПОВРЕЖДАЕМОСТЬ И УСТАЛОСТНОЕ РАЗРУШЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ ЦИКЛИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ

© 2022 г. И. С. Никитин^{1,*}, Н. Г. Бурого^{1,2,**}, А. Д. Никитин^{1,***}

¹ *Институт автоматизации проектирования РАН, Москва, Россия*

² *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

*e-mail: i_nikitin@list.ru

**e-mail: buragong@yandex.ru

***e-mail: nikitin_alex@bk.ru

Поступила в редакцию 30.09.2021 г.

После доработки 21.01.2022 г.

Принята к публикации 27.01.2022 г.

На основе предложенной ранее мультирежимной двухкритериальной модели усталостного разрушения разработан метод расчета зарождения и развития узких локализованных зон поврежденности в элементах конструкций для различных режимов циклического нагружения. Такие узкие зоны повреждаемости можно рассматривать как квазитрещины двух типов, соответствующих механизму нормального отрыва и сдвига. Рассмотрен важный для приложений пример полетного цикла нагружения (многоцикловая усталость) и высокочастотного циклического нагружения при крутильно-изгибных колебаниях лопаток (сверхмногоцикловая усталость) диска компрессора авиационного газотурбинного двигателя. Дана оценка долговечности рассмотренного элемента авиационных конструкций.

Также рассмотрен пример расчета усталостного разрушения при высокочастотных крутильных колебаниях экспериментального образца определенной формы, при котором удалось воспроизвести наблюдаемый эффект резкого изменения направления роста и типа квазитрещины в процессе циклического нагружения.

Ключевые слова: усталостное разрушение, многоцикловая усталость, сверхмногоцикловая усталость, мультирежимная модель, уравнение повреждаемости, критерий разрушения, диск и лопатки компрессора

DOI: 10.31857/S0032823522020084

1. Введение. Ранее, в [1], была предложена мультирежимная модель развития усталостной повреждаемости, учитывающая бимодальный характер поведения усталостной кривой при циклическом нагружении. Там же был дан обзор основных работ по теории повреждаемости в квазистатических, динамических и циклических процессах нагружения [2–11]. Были приведены примеры расчета ряда модельных задач развития локализованных зон усталостной поврежденности (квазитрещин) в окрестности дефектов структуры материала и воспроизведены усталостные кривые для некоторых типов образцов в усталостных экспериментах на одноосное растяжение и кручение.

Затем, в работах [12, 13] эта модель была расширена на случай двух различных механизмов микроповрежденности материала – развития микротрещин нормального отрыва, микротрещин сдвига и, соответственно, рассмотрения двух типов функций макроскопической повреждаемости.

Отметим, что ранее предложенные рабочие модели развития усталостной повреждаемости различных авторов [6–9] описывают режим малоциклового (МЦУ) и многоциклового (МНЦУ) усталости.

Предложенная модель учитывает переход к режиму высокочастотного циклического нагружения – сверхмногоциклового (СВМУ) усталости с учетом расположения опорных точек правой ветви бимодальной усталостной кривой (мультирежимность модели).

Кроме того, в моделях [6–9] многочисленные коэффициенты эволюционного уравнения для повреждаемости находятся чисто эмпирически по результатам серий испытаний на сложное циклическое нагружение, не всегда реализуемое в режиме СВМУ. В предложенной модели для нахождения коэффициентов кинетического уравнения для повреждаемости материала использовались известные, серьезно обоснованные многоосные критерии усталостного разрушения [14–16]. Эти коэффициенты определялись из того условия, чтобы результатом процесса развития повреждений до полного разрушения был выход на соответствующую ветвь бимодальной усталостной кривой. Никаких иных данных, кроме вида усталостной кривой, построенной по результатам одноосных реверсивных испытаний, не требуется.

Также отметим, что явного учета механизмов зарождения микротрещин различного типа (нормального отрыва и сдвига) с использованием ассоциированных критериев усталостного разрушения другими авторами не проводилось (двухкритериальность модели).

Можно отметить, что в модели Чоу [9] учитывается разница между растяжением и сжатием в накоплении усталостных повреждений за счет введения двух функций повреждаемости для деградации коэффициента Пуассона и модуля упругости Юнга. Это в какой-то степени отражает возможность развития усталостных повреждений по механизмам разного типа.

В данной работе предложенная ранее мультирежимная модель [12, 13] применяется к расчету и оценке долговечности эксплуатации реальных элементов конструкций.

В работах [17, 18] уже ставилась и решалась подобная практически важная задача для реального элемента конструкции компрессора газотурбинного двигателя (ГТД) Д30 – диска с лопатками первой ступени, для которого имелись данные по случаям летных происшествий в эксплуатации [19].

При этом использовались многоосные критерии усталостного разрушения [20–22], но только для того, чтобы на основе упругого решения задачи на цикле нагружения, с помощью соответствующего критерия указать зону зарождения разрушения и соответствующую этому моменту долговечность. При этом не учитывалась кинетика дальнейшего процесса развития усталостных повреждений в элементе конструкции.

В настоящей статье на основе предложенной мультирежимной двухкритериальной модели развития повреждаемости при циклическом нагружении приведены важные для приложений примеры расчета полетного цикла нагружения (малоциклового и многоциклового усталость) и высокочастотного циклического нагружения при крутильно-изгибных колебаниях лопаток (сверхмногоциклового усталость) диска компрессора авиационного газотурбинного двигателя с учетом процесса зарождения и развития узких локализованных зон поврежденности (квазитрещин). Впервые проведен сравнительный анализ локализации очага зарождения и развития усталостных квазитрещин для различных циклических режимов нагружения и сравнение с результатами исследований реальных случаев разрушения в ободной части титановых дисков компрессора в эксплуатации.

Также рассмотрен пример расчета усталостного разрушения при высокочастотных крутильных колебаниях экспериментального образца определенной формы, при котором впервые удалось воспроизвести эффект резкого изменения направления роста

и типа квазитрещины в процессе циклического нагружения, подтвержденный фрактрографическими исследованиями по результатам СВМУ испытаний.

Данную работу можно рассматривать как развитие моделей и методов сквозного счета зарождения и развития множественных трещиноподобных зон повреждений (квазитрещин) разного типа при различных режимах циклического нагружения, подобных методам сквозного расчета возникновения и распространения ударных волн в задачах газовой динамики. В том и другом случае математические разрывы (трещины и скачки уплотнения) при расчете размазываются на некоторое (небольшое) число ячеек вычислительной сетки, что, тем не менее, дает возможность количественно и качественно отразить основные особенности поведения решений с учетом геометрии и типа разрывов (квазитрещин).

2. Описание мультирежимной модели усталостного разрушения на основе теории повреждаемости. Для того чтобы исследовать процессы развития зон усталостных повреждений существует два подхода. Первый основан на классических представлениях линейной механики разрушения и связывает условия развития усталостных трещин при увеличении числа циклов с амплитудами коэффициентов интенсивности напряжений в вершине трещины. Основное уравнение было предложено Парисом [23, 24].

Второй подход использует представления теории повреждаемости, восходящей к работам [2, 3] и развитый в [4, 5]. В приложении к задачам циклического нагружения и усталостного разрушения он применялся в [6–11].

В данной работе описывается мультирежимная модель развития усталостного разрушения, основанная на эволюционном уравнении для функции повреждаемости [1, 12, 13]. Предполагается, что в процессе повреждения материала (деградации его свойств, в частности, модулей упругости) реализуются два механизма — развития микротрещин нормального отрыва или микротрещин сдвига. Им соответствуют ассоциированные критерии многоосного усталостного разрушения при циклическом однородном нагружении. Усталостному разрушению при развитии поврежденности с микротрещинами нормального отрыва соответствует критерий Smith–Watson–Topper (SWT) [14, 15], а усталостному разрушению при развитии поврежденности с микротрещинами сдвига соответствует критерий Carpinteri–Spagnoli–Vantadori (CSV) [16].

Эти и иные подобные, основанные на расчете напряженного состояния (stress-based), многоосные критерии получены обобщением закономерностей, установленных для одноосных нагружений и описываемых усталостными S - N кривыми типа Веллера и соотношениями типа Баскина [25]. В [18] был предложен подход для экстраполяции многоосных критериев разрушения, построенных для режима МНЦУ, на правые ветви усталостных кривых в режиме СВМУ, и использующий опорные точки каждой из ветвей и обратную степенную зависимость от числа циклов N для выхода на асимптоту предела усталости. В данной работе для экстраполяции критериев SWT и CSV на случай СВМУ был также использован этот аналитический подход.

Принимается следующая схема мультирежимной (бимодальной) усталостной кривой с амплитудой σ_a при одноосном реверсивном нагружении. Повторно-статическое нагружение до значения $N_i \sim 10^3$ с амплитудой, слабо убывающей от статического предела прочности σ_B . Далее левая часть бимодальной усталостной кривой описывает режимы МЦУ-МНЦУ до значений $N \sim 10^7$ с выходом на предел усталости σ_u (классическая усталостная кривая Веллера). Эти режимы на левой ветви усталостной кривой отделяются величиной амплитуды нагружения, равной пределу текучести материала σ_T . Затем, начиная с величин $N \sim 10^8$, происходит дальнейшее падение усталостной прочности до нового предельного значения δ_u (правая ветвь бимодальной усталостной кривой в режиме СВМУ [19]).

Кратко сформулируем мультирежимную модель развития повреждений при циклическом нагружении, все основные положения которой были развиты ранее [12].

При ее изложении мы ограничимся рассмотрением только части левой ветви усталостной кривой в режиме МНЦУ (напряжения не превышают предела текучести) и, следовательно, задачу определения напряженного состояния в пределах цикла нагружения можно решать в упругой постановке.

В общем виде в результате обобщения соотношения Баскина [25] $\sigma_a = \sigma_u + \sigma_L N^{-\beta_L}$ на случай многоосного нагружения критерий в режиме МНЦУ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{eq} &= \sigma_u + \sigma_L N^{-\beta_L} \\ \sigma_L &= 10^{3\beta_L} (\sigma_B - \sigma_u)\end{aligned}\quad (2.1)$$

В этих формулах σ_B – статический предел прочности материала, σ_u – классический предел усталости материала при реверсивном цикле (коэффициент асимметрии цикла $R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max} = -1$).

С учетом подхода [18] для экстраполяции многоосных критериев разрушения на режим СВМУ путем замен $\sigma_B \rightarrow \sigma_u$, $\sigma_u \rightarrow \tilde{\sigma}_u$ получаются многоосные критерии усталостного разрушения в режиме СВМУ:

$$\begin{aligned}\sigma_{eq} &= \tilde{\sigma}_u + \sigma_V N^{-\beta_V} \\ \sigma_V &= 10^{8\beta_V} (\sigma_u - \tilde{\sigma}_u),\end{aligned}\quad (2.2)$$

где σ_{eq} – эквивалентное напряжение, обобщающее понятие амплитуды при одноосном циклическом нагружении на случай многоосного нагружения, а β_L и β_V – показатели, характеризующие степень ниспадения левой и правой ветвей бимодальной усталостной кривой.

Кинетическое уравнение для функции повреждаемости материала ψ , предложенное в [1, 12], имеет вид:

$$\partial\psi/\partial N = B(\sigma, \Delta\sigma)\psi^\gamma / (1 - \psi^{1-\gamma}) \quad (2.3)$$

При $\sigma_u + \Delta\sigma_u < \sigma_{eq} < \sigma_B$ (режим МНЦУ, $\Delta\sigma_u = 10^{-5\beta_L}(\sigma_B - \sigma_u)$)

$$B = B_L = 10^{-3} [\langle \sigma_{eq} - \sigma_u \rangle / (\sigma_B - \sigma_u)]^{1/\beta_L} / (1 - \gamma)/2$$

При $\tilde{\sigma}_u < \sigma_{eq} \leq \sigma_u + \Delta\sigma_u$ (режим СВМУ)

$$B = B_V = 10^{-8} [\langle \sigma_{eq} - \tilde{\sigma}_u \rangle / (\sigma_u - \tilde{\sigma}_u)]^{1/\beta_V} / (1 - \gamma)/2$$

При $\sigma_{eq} \leq \tilde{\sigma}_u$ усталостного разрушения не происходит, при $\sigma_{eq} \geq \sigma_B$ оно наступает мгновенно.

Здесь и далее приняты обозначения $\langle f \rangle = fH(f)$, $H(f)$ – функция Хэвисайда. Значение коэффициента $0 < \gamma < 1$ определяется по результатам согласования расчетных и экспериментально построенных усталостных кривых.

Выражения для эффективных напряжений σ_{eq} определяются выбранными критериями полного усталостного разрушения для двух типов повреждаемости, связанных с механизмами развития микротрещин нормального отрыва или сдвига.

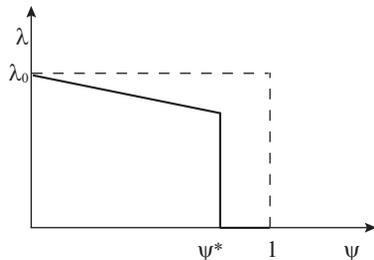


Рис. 1. Зависимость модулей упругости от повреждаемости.

Многоосный критерий SWT описывает усталостное разрушение с развитием повреждений в виде микротрещин нормального отрыва [1, 15]:

$$\sqrt{\langle \sigma_{1_{\max}} \rangle \Delta \sigma_1 / 2} = \sigma_u + \sigma_L N^{-\beta_L}, \quad (2.4)$$

где $\sigma_{1_{\max}}$ — максимальное значение главного (растягивающего) напряжения, $\Delta \sigma_1$ — его размах в цикле нагружения.

Следовательно, в этом случае

$$\sigma_{\text{eq}} = \sigma^n = \sqrt{\langle \sigma_{1_{\max}} \rangle \Delta \sigma_1 / 2}, \quad \langle \sigma_{1_{\max}} \rangle = \sigma_{1_{\max}} H(\sigma_{1_{\max}})$$

Многоосный критерий CSV описывает усталостное разрушение с развитием повреждений в виде микротрещин сдвига [12, 16]:

$$\sqrt{(\langle \Delta \sigma_n \rangle / 2)^2 + 3(\Delta \tau_n / 2)^2} = \sigma_u + \sigma_L N^{-\beta_L}, \quad (2.5)$$

здесь $\Delta \tau_n$ — размах касательного напряжения на площадке, где оно достигает максимального значения (критической площадке), $\Delta \sigma_n$ — размах нормального напряжения на этой площадке.

Следовательно, в этом случае

$$\sigma_{\text{eq}} = \sigma^\tau = \sqrt{(\langle \Delta \sigma_n \rangle / 2)^2 + 3(\Delta \tau_n / 2)^2}, \quad \langle \Delta \sigma_n \rangle = \Delta \sigma_n H(\sigma_{n_{\max}})$$

Начальное зарождение зоны повреждения в частице материала с ростом числа циклов нагружения, связанное с появлением отличного от нуля значения коэффициента B в кинетическом уравнении, определяет дальнейший тип повреждаемости в этой частице по механизму развития микротрещин нормального отрыва при $\max(\sigma^n, \sigma^\tau) = \sigma^n$ или по механизму развития микротрещин сдвига при $\max(\sigma^n, \sigma^\tau) = \sigma^\tau$.

Развитие повреждаемости в материальной частице приводит к эффективному уменьшению модулей упругости, в общем случае по нелинейному закону, а в предложенном варианте модели — по кусочно-линейному закону следующего вида:

деградация материала при $\psi < \psi_*$

$$\lambda(\psi) = \lambda_0(1 - \kappa\psi), \quad \mu(\psi) = \mu_0(1 - \kappa\psi) \quad (2.6)$$

полное разрушение при $\psi_* \leq \psi \leq 1$

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0$$

Здесь $\psi_* \approx 1$ — критическое значение повреждаемости, при котором наступает состояние полного разрушения (рис. 1).

3. Численный метод расчета повреждаемости. Численный метод расчета зон повреждаемости заключается в пошаговом (по циклам нагружения) расчете упругого напряженного состояния образца материала или элемента конструкции, параллельно с численным решением нелинейного уравнения для повреждаемости (2.3) и корректировкой модулей упругости среды в областях, где функция повреждаемости отлична от нуля (2.6). Такие области становятся дополнительными развивающимися концентраторами напряжений, а локализованные зоны полного разрушения в указанном выше смысле трактуются как квазитрещины. Выход квазитрещин на границы нагружаемого тела рассматривается как его окончательное макроразрушение.

Для интегрирования уравнения (2.3) применялась аппроксимация функции повреждаемости в k -узле расчетной сетки при заданных дискретных значениях ψ_k^n в моменты N^n и искомым значениях ψ_k^{n+1} в моменты N^{n+1} .

Была применена схема аппроксимации нелинейного уравнения для повреждаемости, построенная на пошаговом аналитическом интегрировании кинетического уравнения при фиксированном напряженном состоянии с предыдущего шага расчета по циклам нагружения:

$$\left[\psi^{1-\gamma} / (1-\gamma) - \psi^{2(1-\gamma)} / 2 / (1-\gamma) \right]_{\psi_k^n}^{\psi_k^{n+1}} = B^n N \Big|_{N^n}^{N^{n+1}},$$

где k – номер узла расчетной сетки, n – номер шага по числу циклов. Такой алгоритм соответствует явно-неявной схеме (явной по расчету поля напряжений и неявной по расчету функции повреждаемости).

Формула для функции повреждаемости на верхнем слое имеет вид:

$$\psi_k^{n+1} = \left(1 - \sqrt{\left(1 - (\psi_k^n)^{1-\gamma} \right)^2 - 2(1-\gamma) B^n \Delta N^n} \right)^{1/(1-\gamma)} \quad (3.1)$$

шаг расчета по числу циклов определяется следующим образом:

$$\Delta \tilde{N}_k^n = \left[\psi^{1-\gamma} / (1-\gamma) - \psi^{2(1-\gamma)} / 2 / (1-\gamma) \right]_{\psi_k^n}^1 / B^n \quad (3.2)$$

$$\Delta N^n = \min_k 0.5 \Delta \tilde{N}_k^n$$

При численной реализации коэффициент Пуассона материала не меняется, а модуль упругости Юнга с ростом функции повреждаемости уменьшается по закону, в котором заложено его малое остаточное значение в состоянии полного разрушения, равное (для определенности) тысячной доле от начального значения:

$$E_k^{n+1} = E_0 \left(1 - \kappa \psi_k^{n+1} \right) \left(H \left(\psi_* - \psi_k^{n+1} \right) + 0.001 \right) \quad (3.3)$$

Такой алгоритм позволяет вести сквозной расчет усталостного разрушения с образованием и распространением квазитрещин без их явного выделения и на фиксированной сетке.

Упругие расчеты цикла нагружения в квазистатическом режиме (МНЦУ) и в динамическом режиме (высокочастотные осцилляции, СВМУ) выполнялись с помощью пакетов программ АСТРА и ANSYS. Пакет АСТРА – высокоэффективный программный комплекс, разработанный на основе безматричного варианта МКЭ, для решения широкого круга задач механики сплошных сред [26, 27].

Пакеты были дополнены кодом для расчета кинетики усталостной повреждаемости и изменения модулей упругости в соответствии с изложенным выше алгоритмом.

4. Примеры расчетов.

4.1. Расчет элемента конструкции ГТД. С использованием предложенной модели и вычислительного алгоритма было рассчитано зарождение и развитие квазитрещины

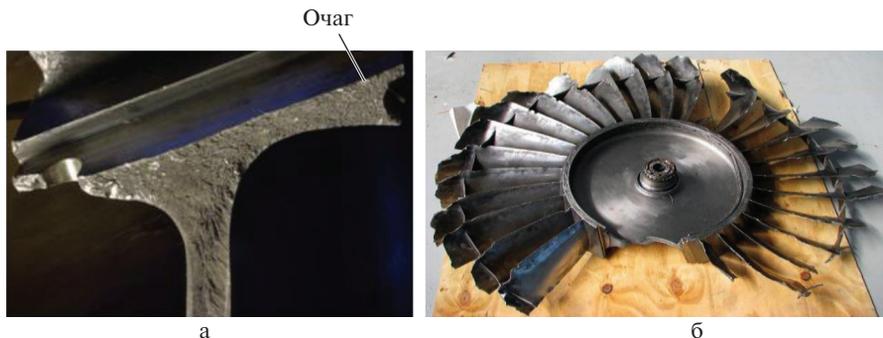


Рис. 2. а – Очаг зарождения в контактной зоне диска и лопатки, б – вид разрушенного диска.

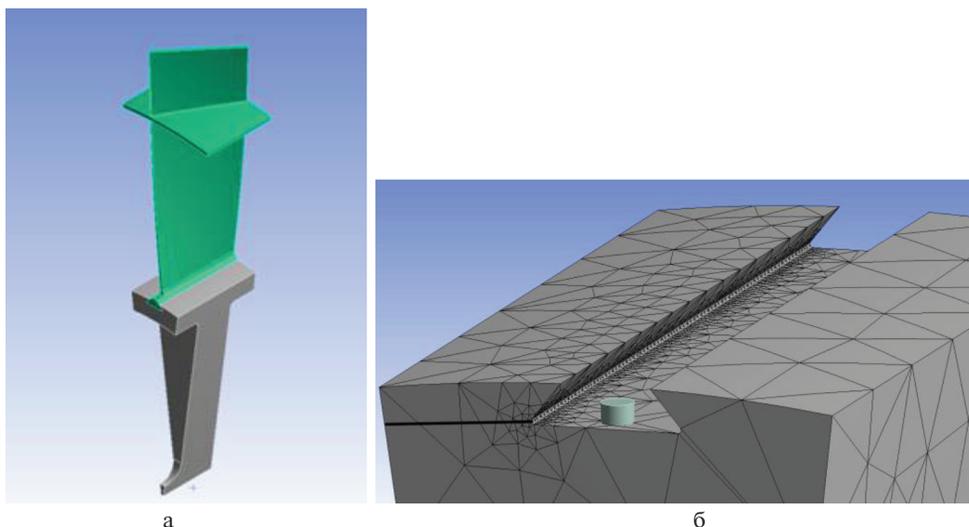


Рис. 3. а – Сектор диска и лопатка, б – зона концентрации напряжений в окрестности паза “ласточкин хвост”.

при двух режимах циклического нагружения для важного элемента авиационной конструкции – диска и лопаток I ступени компрессора ГТД Д30КУ.

Характерный вид разрушенного диска, очаг зарождения в контактной зоне диска и лопатки показан на рис. 2 [28]. В этой работе на примере реального разрушения одного из таких дисков в эксплуатации отмечена необходимость многофакторного многокритериального подхода к оценке ресурса титановых дисков компрессоров.

Геометрия сектора диска и лопатки с бандажными полками показана на рис. 3 и ранее их упругое напряженно-деформированное состояние (НДС) было рассчитано в [17, 18] без учета развития процесса повреждаемости.

Алюминиевая лопатка вставлена в паз типа “ласточкин хвост” титанового диска и дополнительно скреплена с ним стальным цилиндрическим штифтом (рис. 3б). Контактные поверхности диска и лопатки допускают проскальзывание с коэффициентом трения q , на контактной границе со штифтом выполняется условие полного прилипания.

Математическая постановка соответствующей задачи теории упругости с нелинейными контактными условиями приведена в [17, 18].

В первом циклическом процессе полетного цикла нагружения “взлет-полет-посадка” (пульсирующий цикл, коэффициент асимметрии $R = 0$, режим МНЦУ) сектор диска с лопаткой нагружается центробежными силами при вращении с угловой скоростью ω и аэродинамическим давлением на лопатку, оценочно вычисленным по гипотезе изолированного профиля, при обтекании каждого сечения лопатки под переменным углом атаки [17, 18].

Конечно-элементная сетка при расчете одного сектора с лопаткой показана на рис. 3б. Сетка значительно сгущена в окрестности ожидаемой зоны повреждаемости. Общее количество элементов не превосходит 100000.

Были приняты следующие параметры расчета: угловая скорость вращения $\omega = 419$ рад/с (4000 об./мин), скоростной напор на бесконечности $\rho v_\infty^2/2 = 26000$ Н/м², что соответствует скорости потока 200 м/с при плотности 1.3 кг/м³. Свойства материалов принимались следующими: диск (титановый сплав): модуль Юнга $E = 116$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.32$, плотность $\rho = 4370$ кг/м³; лопатка (алюминиевый сплав): $E = 69$ ГПа, $\nu = 0.33$, $\rho = 2700$ кг/м³; фиксирующий штифт (сталь): $E = 207$ ГПа, $\nu = 0.27$, $\rho = 7860$ кг/м³, коэффициент трения $q = 0.1$. Прочностные и усталостные параметры титанового сплава равны: предел прочности $\sigma_B = 1160$ МПа, классический предел усталости $\sigma_u = 340$ МПа, $\bar{\sigma}_u = 250$ МПа, $\beta_L = 0.31$, $\beta_V = 0.27$. Параметры уравнения повреждаемости по результатам вычислительных экспериментов и согласования расчетных и экспериментальных усталостных кривых [12, 13] выбраны следующими: $\gamma = 0.5$, $\kappa = 0.5$, $\psi_* = 0.98$.

Результаты расчетов развития повреждаемости в диске при полетном цикле нагружения приведены на рис. 4, 5. На этих рисунках приведены распределения эффективных напряжений в двух сечениях. Во-первых, в поперечном сечении диска, проходящем через точку зарождения поврежденности. Во-вторых, в продольном сечении, проходящем от левого угла выреза “ласточкин хвост” до боковой поверхности сектора диска, это сечение показано на рис. 3б сплошной черной линией.

Максимальные эффективные напряжения в начале циклического процесса 913 МПа по критерию SWT и 615 МПа по критерию CSV. Следовательно, работает механизм развития микротрещин нормального отрыва. Квазитрещина зарождается после $N = 5.2 \times 10^4$ циклов (рис. 4). Зона зарождения – в середине левого угла “ласточкино-го хвоста” (малая черная точка на правом краю сечения, показанного на рис. 4б). Выход квазитрещины на торцевую поверхность диска происходит приблизительно при числе циклов $N = 2.0 \times 10^5$ (рис. 5). Таким образом, удастся описать процесс развития повреждений, который, в отличие от стандартных схем расчета долговечности по многоосным критериям усталостного разрушения и времени зарождения начального дефекта, позволяет проследить длительность и геометрию развития квазитрещин того или иного типа.

Во втором циклическом процессе проведен расчет наблюдаемых высокочастотных изгибно-крутильных колебаний лопатки, вызванных осевыми смещениями концов бандажных полок амплитуды $\Delta u \sim 0.5$ мм (реверсивный цикл, коэффициент асимметрии $R = -1$, режим СВМУ). Эти длительные вибрации поля напряжений в контактной зоне диска и лопаток также могут приводить к зарождению и развитию повреждений (альтернативный механизм разрушения [19]).

На рис. 6, 7 представлены результаты расчёта при изгибно-крутильных колебаниях лопатки с частотой 1000 Гц, вызванных осевыми колебаниями концов бандажной полки с амплитудой $\Delta u = 0.55$ мм. Зона зарождения – в дальней от штифта зоне “ла-

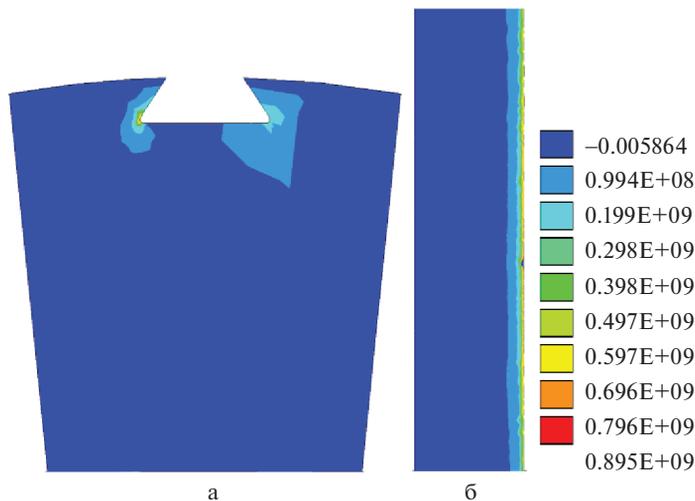


Рис. 4. Распределение эффективных напряжений в диске в контактной зоне крепления лопатки, МНЦУ, а – вид в поперечном сечении, б – вид в продольном сечении в момент зарождения квазитрещины, $N = 5.2 \times 10^4$.

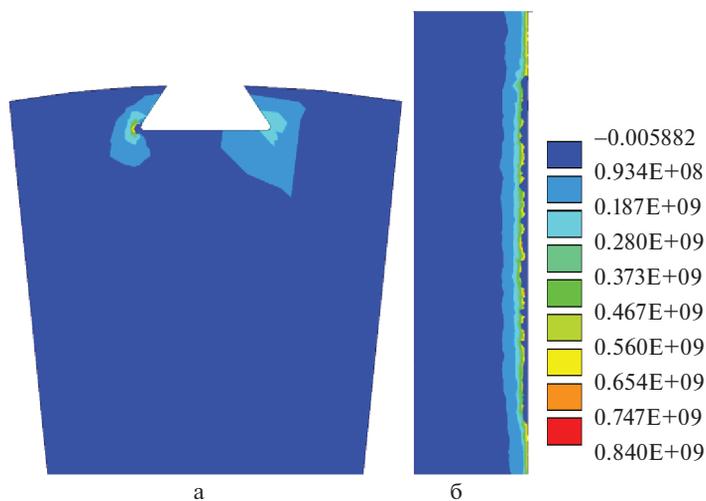


Рис. 5. Распределение эффективных напряжений в диске в контактной зоне крепления лопатки, МНЦУ, а – вид в поперечном сечении, б – вид в продольном сечении при дальнейшем росте квазитрещины, $N = 2.0 \times 10^5$.

сточкиного хвоста”, возникает при числе циклов $N = 7.3 \times 10^{10}$ (малая черная точка на правом краю сечения, показанного на рис. 6б). Эта характерное расположение очага зарождения наблюдается и в случае реального усталостного разрушения данного элемента конструкции (рис. 2а). Квазитрещина растет, доходит до торца диска и ста-

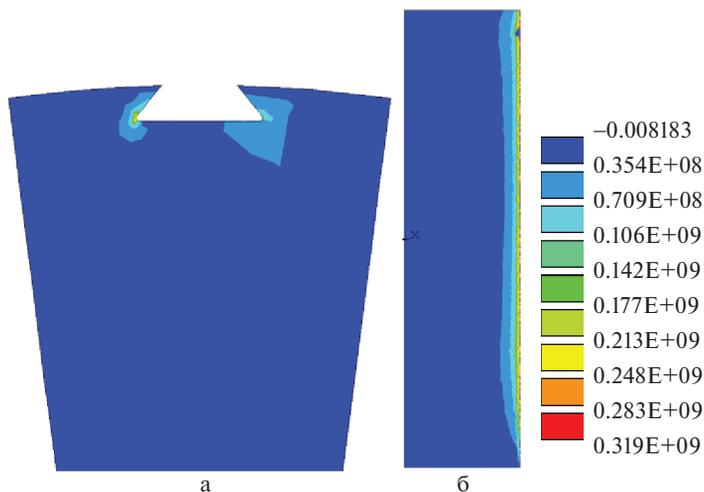


Рис. 6. Распределение эффективных напряжений в диске в контактной зоне крепления лопатки, СВМУ, а – вид в поперечном сечении; б – вид в продольном сечении в момент зарождения квазитрещины, $N = 7.3 \times 10^{10}$.

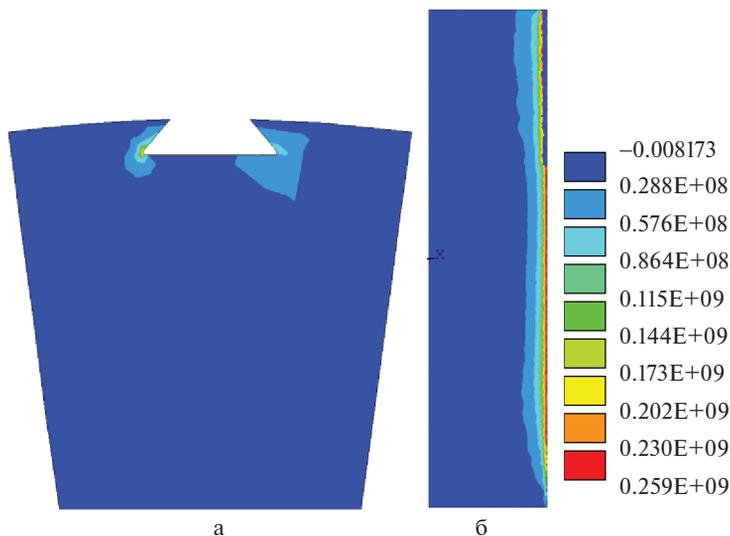


Рис. 7. Распределение эффективных напряжений в диске в контактной зоне крепления лопатки, СВМУ. а – вид в поперечном сечении; б – вид в продольном сечении при дальнейшем росте квазитрещины, $N = 1.5 \times 10^{11}$.

новится наблюдаемой извне при $N = 1.5 \times 10^{11}$ (рис. 7), т.е. и в этом режиме процесс развития занимает достаточно продолжительное время, которое может быть оценено с помощью предложенной кинетической модели повреждаемости.

Можно провести оценки реального времени зарождения квазитрещины в каждом из режимов. В предположении, что средний полетный цикл приблизительно равен

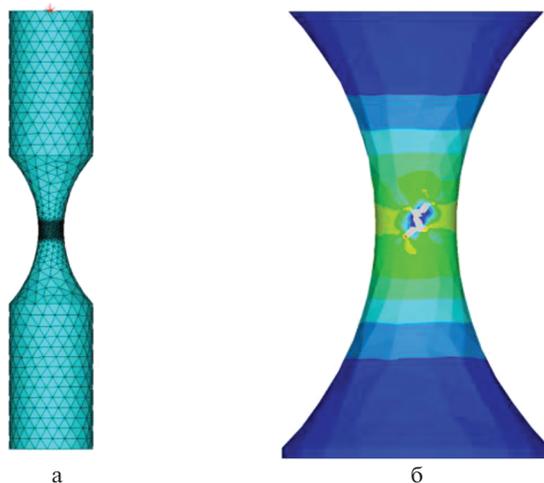


Рис. 8. а – конечно-элементная сетка в корсетном образце, б – результат расчета зигзагообразной квазитрещины.

3 часам, в режиме МНЦУ $T_1 = 5.2 \times 10^4 \times 3 \text{ ч} \sim 1.6 \times 10^5 \text{ ч}$. В режиме СВМУ при частоте колебаний 1000 Гц $T_2 = 7.3 \times 10^{10} \times 0.001 \text{ с} \sim 2.0 \times 10^4 \text{ ч}$. Таким образом, эти оценки, а также специфическая локализация очага зарождения поврежденности, показывают, что зарождение начальной микротрещины более вероятно по механизму СВМУ.

4.2. Расчет высокочастотных крутильных колебаний образца в форме “песочных часов”. Также было проведено численное моделирование экспериментов по развитию СВМУ трещины и усталостному разрушению при высокочастотном кручении образцов из титанового сплава.

Испытания проводились с использованием прямой пьезоэлектрической усталостной торсионной машины [29]. Частота реверсивных колебаний составляла 20 кГц. Испытания были спланированы таким образом, чтобы обеспечить усталостную долговечность свыше 10^7 циклов. Геометрия образца – песочные часы с гладким сечением (рис. 8а). Материалом для испытаний на кручение являлся титановый сплав со следующими характеристиками: модуль Юнга $E = 115 \text{ ГПа}$, плотность $\rho = 4500 \text{ кг/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, классический предел усталости $\sigma_u = 440 \text{ МПа}$, предел усталости СВМУ $\delta_u = 380 \text{ МПа}$. Амплитуда крутильных колебаний составляла 0.01 рад.

Основная цель математического моделирования – изучить траекторию и тип квазитрещины. Пример траектории трещины, развивающейся на боковой поверхности образца, представлен на рис. 8б.

Результаты расчета зоны повреждения в корсетном образце в режиме СВМУ представлены на рис. 8б, 9а. Характерный вид квазитрещины представлен на рис. 8б (серым цветом). Увеличенное изображение результата расчета показывает типичную для крутильного нагружения зигзагообразную траекторию трещины, рис. 9а. Было установлено, что на начальном этапе развития повреждений элементы разрушались по сдвиговому механизму. Это соответствует вертикальной квазитрещине вдоль оси образца (рис. 9а). Затем доминирующим механизмом разрушения стали квазитрещины нормального отрыва. Этот период соответствует наклонному участку траектории квазитрещины (рис. 9а).

при котором удалось воспроизвести наблюдаемый эффект резкого изменения направления роста и типа квазитрещины в процессе циклического нагружения.

Полученные результаты качественно и количественно совпадают с данными фрактографических исследований случаев усталостного разрушения дисков компрессора в эксплуатации и экспериментов по высокочастотным крутильным колебаниям образцов в режиме СВМУ.

Авторы выражают признательность Б.А. Стратула за помощь в проведении расчетов.

Исследование выполнено в рамках Госзадания ИАП РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никитин И.С., Бурого Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин А.Д. Мультирежимная модель развития усталостных повреждений // ПММ. 2020. Т. 84. № 5. С. 687–698.
2. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР ОТН. 1958. 8. С. 26–31.
3. Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения. Вопросы прочности материалов и конструкций // АН СССР ОТН. 1959. С. 5–7.
4. Lemaitre J., Chaboche J.L. Mechanics of Solid Materials. Cambridge: Univ. Press, 1994. 582 p.
5. Burago N.G., Nikitin I.S., Nikitin A.D., Stratula B.A. Algorithms for calculation damage processes // Frattura ed Integrità Strutturale. 2019. V. 49. P. 212–224.
6. Marmi A.K., Habraken A.M., Duchene L. Multiaxial fatigue damage modeling at macro scale of Ti6Al4V alloy // Int. J. Fatigue. 2009. V. 31. P. 2031–2040.
7. Chaboche J.L., Lesne P.M. A non-linear continuous fatigue damage model // Fatigue & Fracture of Engng. Mater.&Struct. 1988. V. 11. P. 1–17.
8. Peerlings R.H., Brekelmans W.A., de Borst R., Geers M.G. Gradient-enhanced damage modelling of high-cycle fatigue // Int. J. Numer. Method in Engng. 2000. V. 49. P. 1547–1569.
9. Chow C.L., Wei Y. Constitutive modeling of material damage for fatigue failure prediction // Int. J. Damage Mech. 1999. V. 8 (4). P. 355–375.
10. Plekhov O., Naimark O. et al. The study of a defect evolution in iron under fatigue loading in giga-cycle fatigue regime // Frattura ed Integrità Strutturale. 2016. V. 10. № 35. P. 414–423.
11. Shlyannikov V.N. Creep-Fatigue crack growth rate prediction based on fracture damage zones models // Engng. Fracture Mech. 2019. V. 214. P. 449–463.
12. Nikitin I.S., Burago N.G., Nikitin A.D., Stratula B.A. On kinetic model of damage development // Proc. Struct. Integr. 2020. V. 28. P. 2032–2042.
13. Nikitin I.S., Nikitin A.D., Stratula B.A. Study on the Resonant Torsion Vibration in Hourglass Specimens under VHCF Loading // J. Physics: Conf. Ser. 2021. 1945 (1), 012043
14. Smith R.N., Watson P., Topper T.H. A stress-strain parameter for the fatigue of metals // J. Materials. 1970. V.5. № 4. P. 767–778.
15. Gates N., Fatemi A. Multiaxial variable amplitude fatigue life analysis including notch effects // Int. J. Fatigue. 2016. V. 91. P. 337–351.
16. Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S. Multiaxial assessment using a simplified critical plane based criterion // Int. J. Fatigue. 2011. V. 33. P. 969–976.
17. Бурого Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин И.С. Модели многоосного усталостного разрушения и оценка долговечности элементов конструкций // Изв. РАН. МТТ. 2011. № 6. С. 22–33.
18. Burago N.G., Nikitin I.S. Multiaxial Fatigue criteria and durability of titanium compressor disks in low- and giga-cycle fatigue modes // in: Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures. Heidelberg: Springer, 2016. P. 117–130.
19. Шанявский А.А. Моделирование усталостных разрушений металлов. Уфа: Монография, 2007. 498 с.
20. Sines G. Behavior of metals under complex static and alternating stresses // in: Metal Fatigue. McGraw-Hill, 1959. P. 145–169.
21. Crossland B. Effect of large hydrostatic pressures on torsional fatigue strength of an alloy steel // Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals. London: 1956. P. 138–149.
22. Findley W. A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending // J. Eng. for Indust. 1959. P. 301–306.

23. Paris P.C., Erdogan F. A Critical analysis of crack propagation laws // J. Basic Engng. 1963. V. 85. P. 528–533.
24. Collins J.A. Failure of Materials in Mechanical Design: Analysis, Prediction, Prevention. New York: Wiley, 1993. 654 p.
25. Basquin O.H. The exponential law of endurance tests // in: Proc of the Amer. Soc. for Testing & Material. 1910. V. 10. P. 625–630.
26. Бурого Н.Г., Никитин И.С., Якушев В.Л. Гибридный численный метод решения нестационарных задач механики сплошной среды с применением адаптивных наложенных сеток // ЖВММФ. 2016. Т. 56. № 6. С. 1082–1092.
27. Бурого Н.Г., Никитин И.С. Алгоритмы сквозного счета для процессов разрушения// Компьют. исслед. и моделир. 2018. Т. 10. № 5. С. 645–666.
28. Шаняевский А.А. Безопасная эксплуатация дисков I ступени КНД двигателей семейства Д-30КУ по критерию роста усталостных трещин // Пробл. безопасн. полетов. 2011. № 1. С. 20–48.
29. Nikitin A., Bathias C., Palin-Luc T. A new piezoelectric fatigue testing machine in pure torsion for ultrasonic fatigue tests: application to forged and extruded titanium alloys// Fatigue & Fracture of Engng. Mater.&Struct. 2015. V. 38. № 11. P. 1294–1304.

Damage and Fatigue Fracture of Structural Elements in Various Cyclic Loading Modes

I. S. Nikitin^{a,#}, N. G. Burago^{a,b,##}, A. D. Nikitin^{a,###}

^a Institute for Computer Aided Design RAS, Moscow, Russia

^b Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

[#]e-mail: i_nikitin@list.ru

^{##}e-mail:buragong@yandex.ru

^{###}e-mail: nikitin_alex@bk.ru

On the basis of the previously proposed multimode two-criterion model of fatigue fracture, a method is proposed for calculating the nucleation and development of narrow localized damage zones in structural elements for various modes of cyclic loading. Such narrow zones of damage can be considered as quasi-cracks of two types, corresponding to the mechanism of normal opening and shear.

An example of a flight loading cycle (high-cycle fatigue) and high-frequency cyclic loading during torsion-bending vibrations of the blades (very-high-cycle fatigue) of an aircraft gas turbine engine compressor disk is considered. An assessment of the durability of this aircraft structures element is given.

An example of calculating fatigue fracture at high-frequency torsional vibrations of an experimental specimen of a certain shape is also considered. For this specimen it was possible to reproduce the observed effect of a sharp change in the growth direction and the type of quasi-crack during cyclic loading.

Keywords: fatigue fracture, high-cycle fatigue, very-high-cycle fatigue, multi-mode model, damage equation, fracture criterion, disk and compressor blades

REFERENCES

1. Burago N.G., Nikitin I.S., Zhuravlev A.B. Models of multiaxial fatigue fracture and service life estimation of structural elements // Mech. Solids, 2011, vol. 46, no. 6, pp. 828–838.
2. Kachanov L.M. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН ССР OTN, 1958, vol. 8, pp. 26–31.
3. Rabotnov J.N. О механизме длител'ного разрушения. Вопросы прочности материалов и конструкций // АН ССР OTN, 1959, pp. 5–7.
4. Lemaitre J., Chaboche J.L. Mechanics of Solid Materials. Cambridge: Univ. Press, 1994. 582 p.
5. Burago N.G., Nikitin I.S., Nikitin A.D., Stratula B.A. Algorithms for calculation damage processes // Frattura ed Integrità Strutturale, 2019, vol. 49, pp. 212–224.
6. Marmi A.K., Habraken A.M., Duchene L. Multiaxial fatigue damage modeling at macro scale of Ti6Al4V alloy // Int. J. Fatigue, 2009, vol. 31, pp. 2031–2040.

7. *Chaboche J.L., Lesne P.M.* A non-linear continuous fatigue damage model // *Fatigue & Fracture of Engng. Mater.&Struct.*, 1988, vol. 11, pp. 1–17.
8. *Peerlings R.H., Brekelmans W.A., de Borst R., Geers M.G.* Gradient-enhanced damage modelling of high-cycle fatigue // *Int. J. Numer. Method in Engng.*, 2000, vol. 49, pp. 1547–1569.
9. *Chow C.L., Wei Y.* Constitutive modeling of material damage for fatigue failure prediction// *Int. J. Damage Mech.*, 1999, vol. 8 (4), pp. 355–375.
10. *Plekhov O., Naimark O. et al.* The study of a defect evolution in iron under fatigue loading in giga-cycle fatigue regime // *Frattura ed Integrita Strutturale*. 2016, vol. 10, no. 35, pp. 414–423.
11. *Shlyannikov V.N.* Creep-Fatigue crack growth rate prediction based on fracture damage zones models // *Engng. Fracture Mech.*, 2019, vol. 214, pp. 449–463.
12. *Nikitin I.S., Burago N.G., Nikitin A.D., Stratula B.A.* On kinetic model of damage development// *Proc. Struct. Integr.*, 2020, vol. 28, pp. 2032–2042.
13. *Nikitin I.S., Nikitin A.D., Stratula B.A.* Study on the Resonant Torsion Vibration in Hourglass Specimens under VHCF Loading // *J. Physics: Conf. Ser.*, 2021, 1945 (1), 012043.
14. *Smith R.N., Watson P., Topper T.H.* A stress-strain parameter for the fatigue of metals // *J. Materials*, 1970, vol. 5, no. 4, pp. 767–778.
15. *Gates N., Fatemi A.* Multiaxial variable amplitude fatigue life analysis including notch effects // *Int. J. Fatigue*, 2016, vol. 91, pp. 337–351.
16. *Carpinteri A., Spagnoli A., Vantadori S.* Multiaxial assessment using a simplified critical plane based criterion // *Int. J. Fatigue*, 2011, vol. 33, pp. 969–976.
17. *Burago N.G., Zhuravlev A.B., Nikitin I.S.* Models of multiaxial fatigue fracture and service life estimation of structural elements // *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 6, pp. 828–838.
18. *Burago N.G., Nikitin I.S.* Multiaxial fatigue criteria and durability of titanium compressor disks in low- and giga-cycle fatigue modes // *Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures*. Heidelberg: Springer, 2016. pp. 117–130.
19. *Shanyavskiy A.A.* Modeling of Metal Fatigue fracture. Ufa: Monografia, 2007. 498 p.
20. *Sines G.* Behavior of metals under complex static and alternating stresses // in: *Metal Fatigue*. McGraw-Hill, 1959. pp. 145–169.
21. *Crossland B.* Effect of large hydrostatic pressures on torsional fatigue strength of an alloy steel // *Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals*. London. 1956. pp. 138–149.
22. *Findley W.* A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending // *J. Eng. for Indust.*, 1959, pp. 301–306.
23. *Paris P.C., Erdogan F.* A critical analysis of crack propagation laws // *J. Basic Engng.*, 1963, vol. 85, pp. 528–533.
24. *Collins J.A.* Failure of Materials in Mechanical Design: Analysis, Prediction, Prevention. N.Y.: Wiley, 1993. 654 p.
25. *Basquin O.H.* The exponential law of endurance tests // in: *Proc of the Amer. Soci. for Testing & Material*. 1910, vol. 10, pp. 625–630.
26. *Burago N.G., Nikitin I.S., Yakushev V.L.* Hybrid numerical method with adaptive overlapping meshes for solving nonstationary problems in continuum mechanics // *Comput. Math.&Math. Phys.*, 2016, vol. 56, no. 6, pp. 1065–1074.
27. *Burago N.G., Nikitin I.S.* Algorithms of through calculation for damage processes // *Comput. Res.&Modeling*, 2018, vol. 10, no. 5, pp. 645–666.
28. *Shanyavskiy A.A.* Bezopasnaya expluataciya diskov I stupeni kompressora nizkogo davleniya dvigatelya semeystva D-30KU po kriteriyu rosta ustalostnykh treshchin // *Problemy bezopasnosti polyotov*, 2011, no. 1, pp. 20–48. (in Russian)
29. *Nikitin A., Bathias C., Palin-Luc T.* A new piezoelectric fatigue testing machine in pure torsion for ultrasonic fatigue tests: application to forged and extruded titanium alloys// *Fatigue & Fracture of Engng. Mater.&Struct.*, 2015, vol. 38, no. 11, pp. 1294–1304.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. В журнале публикуются результаты в области механики, ранее не опубликованные и не предназначенные к одновременной публикации в других изданиях, по следующим направлениям:

- общая механика, или механика систем, включая проблемы управления механическими системами;
- механика жидкости и газа;
- механика деформируемого твердого тела;
- вычислительная механика.

По согласованию с редколлегией в журнале печатаются также обзорные статьи по указанным направлениям. Авторы обязаны предъявлять повышенные требования к изложению и языку рукописи. Рекомендуется безличная форма изложения.

2. Фамилии авторов статьи располагаются в алфавитном порядке, инициалы ставятся перед фамилией. Сведения об авторах с указанием имени, отчества, почтового домашнего адреса, места работы и телефонов (каждого из соавторов), а также адреса электронной почты, по которому будет выслана корректура, помещаются дополнительно на отдельной странице после текста статьи и фигур.

3. Статья должна быть представлена в электронном виде (Word – шрифт № 14 Times New Roman), формулы должны быть отделены от текста большим интервалом и напечатаны более свободно, чем основной текст.

4. “Шапка” статьи и ее перевод в конце статьи должны быть оформлены по единому стандарту. Вся информация об авторах размещается в “шапке” статьи.

а) Ссылки на места работы латинскими буквами: ^a, ^b, ^c и т.д.;

б) Ссылки на электронные адреса: *, ** и т.д.

Образец оформления шапки приведен ниже:

УДК 531.36

О СТАЦИОНАРНЫХ ВРАЩЕНИЯХ СПУТНИКА ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННИХ УПРУГИХ И ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ

© 2018 г. А. Б. Иванов^{a,*}, В. Г. Петров^{b,**}

^a *Московский физико-технический институт*

^b *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва*

* *e-mail: ivanov@mail.ru*

***e-mail: petrov@rambler.ru*

Поступила в редакцию 14.07.2016 г.

После доработки 20.10.2016 г.

Принята к публикации 25.12.2016 г.

Для изучения влияния внутренних сил на вращательное движение спутника в центральном гравитационном поле используется модель М.А. Лаврентьева (спутник моделируется твердой оболочкой с шаровым демпфером) в предположении, что при относительных перемещениях демпфера возникают как диссипативные, так и упругие внутренние силы. В рамках этой модели для динамически симметричного спутника на круговой орбите определены все стационарные вращения и исследована их устойчивость в зависимости от значений коэффициентов демпфирования и жесткости.

Ключевые слова: стационарные вращения, спутник, центр масс, устойчивость

DOI:

5. Все материалы статьи – текст, подстрочные примечания, литература печатаются через два интервала. Там, где впервые в тексте встречается ссылка на рисунок, необходимо написать на полях рукописи ее номер (рис. 1, рис. 2 и т.д.). Нумерация рисунков последовательная цифровая, независимо от их количества в тексте. На поля рукописи выносятся также ссылки на таблицы. В заголовках таблиц следует пользоваться обозначениями. Таблицы и список цитируемой литературы следует печатать на отдельных от текста страницах. В левом верхнем углу первой страницы необходимо указать индекс УДК.

Для редакции отдельно от статьи прилагаются: фамилии авторов и название статьи на английском языке, список принятых обозначений.

При пересылке статьи в редакцию обычной почтой не использовать ценную почту и уведомления.

6. Необходимо соблюдать строгое различие в начертании строчных (малых) и прописных (больших) латинских букв: например, *V* и *v*, *S* и *s*, *O* и *o*, *U* и *u*, *K* и *k*, *P* и *p* и т.п., а также букв, похожих одна на другую: например, *g* и *q*, *l* и *e*, *u* и *n* и др. Латинскую букву *I* следует писать как римскую единицу *I*, в отличие от *J* – буква “жи”. Следует делать различие между *O* и *o* (буквами) и 0 (нулем). Индексы и степени должны быть написаны строго выше символов, к которым они относятся; штрихи необходимо четко отличать от единицы, а в нижних индексах – единицу от запятой.

Для математических обозначений рекомендуется употреблять наиболее простые символы и индексы. Не следует применять индексы из заглавных букв и букв русского алфавита. Для критических значений рекомендуется в качестве индекса звездочка внизу (a^*), для индексов вверху – градус (a°) и т.п.

7. При нумерации формул редакция просит пользоваться десятичной системой, первая цифра – раздел, вторая цифра после точки – номер формулы в этом разделе ((1.1), (1.2) и т.д.). Номер формулы ставить с правой стороны в конце формулы, а для группы формул – в средней части.

8. Литература приводится по порядку цитирования в конце статьи с указанием фамилии и инициалов автора, полного названия книги (статьи), издательства, названия журнала полностью (год, том, номер, номера страниц) в соответствии с новыми правилами ГОСТ; в тексте должны быть ссылки в квадратных скобках: [1], [2, 3] и т.д.

Ссылки на иностранные источники даются обязательно на языке оригинала и сопровождаются, в случае перевода на русский язык, указанием на перевод.

Ссылки на препринты, депонированные рукописи, диссертации и авторефераты даются в подстрочных примечаниях.

9. В случае переработки статьи датой поступления считается дата получения редакцией окончательного текста. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки статья вновь рассматривается редколлегией.

10. Автору следует переоформить принятую к печати статью после научного редактирования в кратчайший срок и вернуть первоначальный вариант вместе с переоформленным; к переоформленному варианту приложить диск или переслать электронный вариант статьи на почту редакции. Если статья находится на переоформлении более 30 дней, датой поступления считается дата получения редакцией переоформленного варианта.

11. Редколлегия не сообщает мотивов отказа в публикации работы и оставляет за собой право не возвращать автору один экземпляр.

Технические требования к изготовлению иллюстративных материалов.

1. Иллюстрационный материал прилагается *на отдельных страницах*. Графики должны быть пригодными для прямого воспроизведения; графики выполняются с обязательным нанесением квадратной сетки (не более трех-четырех квадратов по горизонтали и вертикали). Размер графиков по ширине рекомендуется не более 15–17 см. Необходимо тщательно следить за точным соответствием обозначений в тексте и на рисунках.

2. Иллюстрации должны иметь размеры, соответствующие их информативности, и иметь ширину, равную полосе набора, $2/3$, $1/2$, $1/3$ полосы набора.

3. В случае изменения размера иллюстрации на процессе внесения редакционной правки, текст уменьшается пропорционально всему изображению.

4. Толщина рамки, шкал графиков и засечек – 0.5 pt; толщина сетки – 0.25 pt; длина засечек – 1.2 мм, промежуточные – 0.8 мм. Засечки по возможности должны быть направлены внутрь графиков.

5. Толщина основных линий графиков – 1 pt (в случае высокой информационной загрузки иллюстрации допускается уменьшение толщины основных линий до 0.5 pt).

6. Масштабные линейки (по возможности) наносятся в нижнем правом углу изображения справа, толщина линии масштабной линейки 0.5 pt.

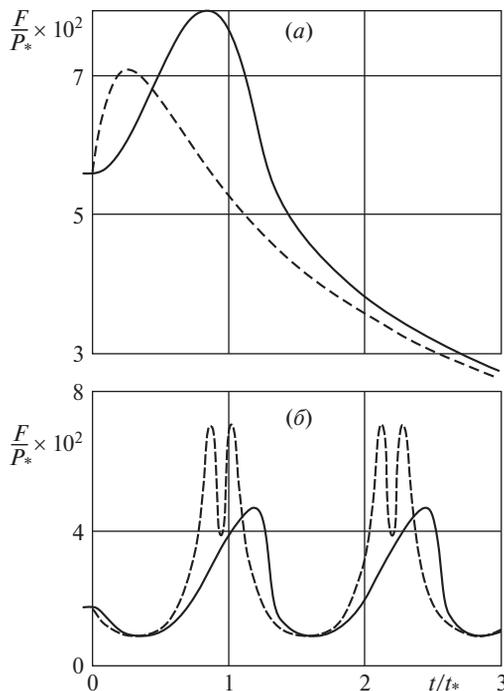
7. Если иллюстрация состоит из нескольких изображений (графиков), то каждое из этих изображений (графиков) обозначается буквами кириллического алфавита, заключенными в скобки – (а), (б), и т.д., шрифтом 10 pt, по центру каждого изображения (графика).

8. Символы греческого алфавита в иллюстрациях должны быть набраны прямым шрифтом Symbol.

9. Авторские рисунки, предоставленные в цвете, изготавливаются цветными (в цветовой модели RGB), если это имеет смысловое (цвет одиночного графика всегда черный).

10. Точка не ставится после размерностей (с – секунда, г – грамм, мин – минута, сут – сутки, град – градус) и некоторых числительных (млн – миллион, млрд – миллиард, трлн – триллион).

Пример оформления рисунка приведен ниже.



11. К статье должны прилагаться файлы с рисунками в одном из форматах: eps, tiff, jpg, bmp, ppt, png.

Правила оформления библиографических ссылок

I. Книга

Сагомонян А.Я. (1974) Проникание, Изд-во МГУ, Москва.

Whittaker E.T. (1927) *Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge Univ. Press, Cambridge = Уиттекер Е.Т. (1937) Аналитическая динамика, ОНТИ, Москва.

II. Журнал

Вильке В.Г. (2002) Условия качения колеса с армированной шиной без проскальзывания, Вестн. МГУ, Сер. 1, Математика, механика. Вып. 5, 38.

Stewartson K. (1968) On the flow near the trailing edge of a plate, Proc. R. Soc. London, Ser. A, 306 (1486), 275.

Rohde S.M. (1972) The optimum slider bearing in terms of friction, J. Lubr. Technol., 94(3), 275 = Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки, 94 (3), 82.

III. Препринт

Чашечкин Ю.Д., Байдулов В.Г. (2017) Исследование тонкой структуры периодических течений в неоднородных жидкостях, Препринт № 1155, ИПМ им. А.Ю. Ишлинского, Москва.

IV. Диссертация, автореферат

Чиж Г.К. (1972) Диссертация на соискание ученой степени канд. хим. наук, Химико-технологический институт, Днепропетровск.

Примечания

1. Если авторов более четырех, необходимо давать первые три фамилии и др. (*Иванов Р.И., Семенов Г.П., Терехов П.И.* и др.).

2. Если составителей, редакторов, переводчиков три и более, то оставляют только первую фамилию и др. (Земля / Под ред. Иванова Р.И. и др.).

3. Рус. перев.— эти слова заменяются знаком = (равно).